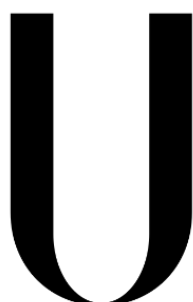


UNIVERSIDADE DE LISBOA



LISBOA

UNIVERSIDADE
DE LISBOA

**Raciocínio matemático dos alunos do 10.º ano
na aprendizagem da função módulo
através da diversidade de tarefas**

Maria Teresa Góis do Soveral Rodrigues

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico
e no Ensino Secundário

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela
Professora Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques e coorientado pela
Professora Doutora Maria João Antunes Dias Gouveia

2021

RESUMO

O estudo apresentado neste relatório teve por base a minha intervenção letiva na unidade didática “Funções Módulo”, numa turma do 10.º ano de escolaridade, constituída por 22 alunos com idades entre os 15 e os 16 anos, numa escola em Lisboa. A mesma foi realizada no ano letivo 2019/20, num contexto de ensino remoto – como consequência da implementação de medidas de contenção da pandemia da COVID-19 – e contemplou 8 aulas de 60 minutos realizadas em videoconferência através de uma plataforma virtual. O estudo teve como objetivo compreender os processos de raciocínio matemático que os alunos do 10.º ano utilizam na resolução de diversos tipos de tarefas para a aprendizagem de tópicos programáticos do tema *Funções*, e a sua articulação com as características das tarefas propostas. Recorri a métodos de recolha documental e optei por uma metodologia de estudo qualitativa e interpretativa.

Os resultados sugerem que a resolução de problemas que fomentam a mobilização de conhecimentos conceptuais e a comunicação escrita através de representações múltiplas (e. g. algébricas, geométricas, em linguagem natural) promove a comunicação de um discurso matemático fundamentado, com recurso a diferentes processos de raciocínio. Os alunos privilegiam raciocínios dedutivos. A resolução de problemas de otimização leva alguns alunos a explorar raciocínios indutivos, que envolvem a inferência de dados a partir da exploração de várias soluções admissíveis por um processo iterativo. Os alunos concretizam generalizações a partir da análise de vários casos particulares. Também são bem sucedidos na validação de conjeturas, recorrendo, para isso, a processos de justificação. Porém, revelam dificuldades em processos de validação envolvendo a refutação, limitando-se a reformular a conjetura que pretendem refutar, de modo a tornar uma proposição falsa numa proposição verdadeira. Os alunos não recorrem espontaneamente a processos de justificação e as justificações que apresentam indicam que os mesmos não encaram a justificação matemática como um processo que possa requerer a articulação de vários dados ou razões. Alguns alunos encaram a padronização da forma das respostas como um critério para a sua validade e privilegiam de tal modo a comparação e a identificação de padrões formais, quando realizam tarefas, que subvertem a utilidade desses processos de raciocínio para o desenvolvimento das suas aprendizagens.

Palavras-chave: raciocínio matemático, função módulo, função modular, inequações com módulos, tarefas matemáticas

ABSTRACT

The focus of the study presented in this report was on understanding the mathematical reasoning processes 10th grade students use for solving different mathematical tasks, and how that relates to the tasks' characteristics. The data used in this study was collected during my remote teaching experience at a school located in Lisbon, on the subject Modulus Function, during the COVID-19 pandemic, in 2020. My teaching intervention covered 8 online classes, via video conferencing, with a 10th grade class of 22 students whose age varied from 15 to 16 years old. I followed interpretive and qualitative research methods and based my analysis on students' written work for the tasks I assigned them.

The overall results suggest that students engage in reasoning processes and present conclusions which they validate, when solving problems that lead them to explore the meaning of mathematical concepts and to use multiple representations (e. g. algebraic, geometrical, natural language). Most often students use deductive reasoning. When solving optimization problems, some students use inductive reasoning, inferring data by exploring some plausible solutions on an iterative process. When presented with several examples, students generalize results. Students succeed at validating hypothesis, and for that they rely on justifying. On the other hand, they show difficulties when trying to refute a conjecture: often, they just reformulate a false statement to make it true. Students do not use justifying processes spontaneously and the justifications they present suggest that they do not perceive mathematical justifying as a process which may require them to establish more than a single link between data to present a warrant which supports their claim. Some students develop strategies to solve new problems by focusing on comparing and identifying formal patterns on previous written work and trying to reproduce them on new work. By doing so, these students subvert the benefit of those reasoning processes for their learning. They seem to perceive formal similarities in mathematical discourse as criteria to evaluate its validity.

Keywords: mathematical reasoning, absolute value function, modulus function, absolute value inequalities, mathematical tasks

AGRADECIMENTOS

Às minhas orientadoras, Professora Doutora Ana Cláudia Henriques e Professora Doutora Maria João Gouveia, pela orientação que me derem na preparação da minha intervenção letiva e pelas críticas e sugestões que me permitiram melhorar, em muitos aspetos, este relatório.

À Professora Anabela Teixeira, pela sua colaboração no projeto de estágios para professores em formação que tornou possível a realização deste estudo.

Aos Alunos e a todo o Pessoal do Colégio Militar, pela grande gentileza com que me receberam, permitindo-me participar nas mais diversas atividades e cerimónias que marcam a vida do Colégio.

À Professora Susana Farrica, em particular, pela forma como me acolheu, tendo-me permitido assistir às suas aulas e revelando uma enorme disponibilidade para me ensinar e para me ajudar.

Ao Pedro Teixeira, pelo companheirismo durante a atividade de estágio, e a todos os meus colegas de turma do Instituto de Educação, sem exceção, pelo alegre espírito de entreajuda que cultivaram ao longo de todo o curso.

Ao meu pai, Vítor Manuel, a quem estou especialmente grata, pelo apoio que me deu para que eu pudesse investir na minha formação.

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do projeto REASON, que tem o apoio de fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, Project REASON (contrato PTDC/CED-EDG/28022/2017).

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
1.1.	Motivações Pessoais e Pertinência do Estudo.....	1
1.2.	Objetivo e Questões do Estudo	5
2.	ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO	7
2.1.	Ensino e Aprendizagem da Função Módulo.....	7
	<i>Orientações curriculares para o ensino e aprendizagem de funções.....</i>	<i>7</i>
	<i>Orientações para o ensino e aprendizagem da função módulo</i>	<i>8</i>
	<i>Dificuldades dos alunos na aprendizagem da função módulo e na resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos e orientações didáticas para a lecionação desses tópicos</i>	<i>13</i>
2.2.	Raciocínio Matemático.....	17
	<i>O raciocínio matemático no currículo de Matemática</i>	<i>17</i>
	<i>Um modelo para o raciocínio matemático.....</i>	<i>19</i>
	<i>Resultados de estudos sobre o raciocínio matemático dos alunos.....</i>	<i>22</i>
2.3.	Diversidade de Tarefas no Ensino e Aprendizagem da Matemática	24
3.	UNIDADE DIDÁTICA	29
3.1.	Contexto Escolar	29
	<i>Caracterização da escola</i>	<i>29</i>
	<i>Ensino à distância</i>	<i>32</i>
	<i>Caracterização da turma</i>	<i>35</i>
3.2.	Ancoragem da Unidade Didática.....	40
3.3.	Conceitos Matemáticos Envolvidos.....	53
	<i>Módulo de um número real.....</i>	<i>53</i>
	<i>Função módulo.....</i>	<i>60</i>
	<i>Composição da função módulo com uma função real de variável real ...</i>	<i>61</i>
	<i>Gráfico cartesiano da função módulo</i>	<i>62</i>
	<i>Gráfico cartesiano de funções $h(x) = a x - b + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)</i>	<i>63</i>

3.4.	Estratégias de Ensino, Recursos e Modos de Trabalho	66
	<i>Diversidade de representações</i>	67
	<i>Ensino de cunho exploratório</i>	69
	<i>Diversidade de tarefas</i>	69
	<i>Recursos usados durante as sessões síncronas</i>	79
3.5.	Avaliação dos Alunos.....	80
3.6.	Reflexão Sobre as Práticas de Ensino à Distância	84
4.	RECOLHA DE DADOS	91
4.1.	Opções Metodológicas	91
4.2.	Instrumentos de Recolha de Dados	91
4.3.	Participantes	92
4.4.	Análise de Dados.....	93
4.5.	Questões de Natureza Ética	94
5.	ANÁLISE DE DADOS	95
5.1.	Equações e Inequações Envolvendo Módulos.....	95
	<i>Condições impossíveis ou universais em \mathbb{R}</i>	95
	<i>Inequações</i>	102
5.2.	Funções Envolvendo Módulos	114
	<i>Modelação de fenómenos reais</i>	114
	<i>Estudo elementar de funções</i>	122
6.	CONCLUSÕES	131
6.1.	Síntese do Estudo	131
6.2.	Principais Conclusões do Estudo.....	132
6.3.	Reflexão Final.....	136
	REFERÊNCIAS	141
	ANEXOS.....	147

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p.8)	24
Figura 2 – Diversos tipos de tarefas, quanto ao contexto (Ponte, 2005, p.11)	28
Figura 3 – Código de Honra do Aluno do Colégio Militar (Colégio Militar, 2019, p. 9)	31
Figura 4 – Notas a Matemática (9.º ano) de alguns dos alunos da turma, convertidas para a escala 1-5.....	37
Figura 5 – Resultados em testes dos alunos da turma, no 1.º semestre do 10.º ano	37
Figura 6 – Notas dos alunos da turma a Matemática A (10.º ano)	40
Figura 7 – Representação de $ x $ para $x > 0$ na reta numérica	53
Figura 8 – Representação de $ x $ para $x < 0$ na reta numérica	53
Figura 9 – Representação do conjunto solução, em \mathbb{R} , da inequação $ x < a$ para $a > 0$	54
Figura 10 – Representação, na reta numérica, do conjunto solução, em \mathbb{R} , da inequação $ x \leq a$ para $a > 0$	56
Figura 11 – Representação, na reta numérica, do conjunto solução, em \mathbb{R} , da inequação $ x > a$ para $a > 0$	58
Figura 12 – Representação, na reta numérica, do conjunto solução, em \mathbb{R} , da inequação $ x \geq a$ para $a > 0$	60
Figura 13 – Gráfico cartesiano da função módulo, definida em \mathbb{R} por $f(x) = x $	62
Figura 14 – Translação horizontal de vetor $\vec{v}(1, 0)$ aplicada aos pontos definidos por $y = x$	64
Figura 15 – Reflexão de eixo Ox aplicada aos pontos do gráfico cartesiano de i de ordenada negativa.....	64
Figura 16 – Dilatação vertical de coeficiente 2 aplicada ao gráfico cartesiano de $f \circ i$	65
Figura 17 - Translação de vetor $\vec{u}(0, 3)$ aplicada aos pontos do gráfico cartesiano de $j \circ f \circ i$	65
Figura 18 – Resultados da questão-aula	83
Figura 19 – Enunciados de tarefas propostas envolvendo condições impossíveis ou universais em \mathbb{R}	96
Figura 20 – Resolução do aluno S da tarefa 1.3.c)	97
Figura 21 – Resolução do aluno O da tarefa 1.3.c).....	98

Figura 22 – Resolução do aluno S da tarefa 1.9.c)	98
Figura 23 – Resolução do aluno V da tarefa 1.9.c)	98
Figura 24 – Resolução do aluno F da tarefa 1.9.c)	99
Figura 25 – Resolução do aluno S da tarefa 1.9.d).....	99
Figura 26 – Resolução do aluno H da tarefa 3.2.1.g ₂).....	100
Figura 27 – Enunciados de tarefas propostas envolvendo a resolução de inequações com módulos	103
Figura 28 - Resolução do aluno T das tarefas 1.5.a) e 1.5.b).....	105
Figura 29 – Resolução do aluno N das tarefas 1.5.a) e 1.5.b)	105
Figura 30 – Resolução do aluno I das tarefas 1.5.a) e 1.5.b).....	106
Figura 31 – Resolução do aluno S da tarefa 1.5.c)	106
Figura 32 – Resolução do aluno V da tarefa 1.5.c)	107
Figura 33 – Resolução do aluno J da tarefa 1.5.c).....	107
Figura 34 – Resolução do aluno R da tarefa 1.5.c).....	108
Figura 35 – Resolução do aluno S da tarefa 1.6.d).....	108
Figura 36 – Resolução do aluno J da tarefa 1.6.d).....	109
Figura 37 – Resolução do aluno M da tarefa 1.6.h)	110
Figura 38 – Resolução do aluno O da tarefa 1.6.h).....	110
Figura 39 – Resolução do aluno U da tarefa 3.2.1.g ₃).....	111
Figura 40 – Resolução do aluno R da tarefa 3.2.1.g ₃).....	111
Figura 41 – Resolução do aluno V da tarefa 6 da Questão-aula	112
Figura 42 – Resolução do aluno E da tarefa 6 da Questão-aula	112
Figura 43 – Enunciado da Atividade 2.4	116
Figura 44 – Resolução do aluno J da tarefa 2.4.a).....	117
Figura 45 – Resolução do aluno L da tarefa 2.4.a)	117
Figura 46 – Resolução do aluno C das tarefas 2.4.b), c) e d)	119
Figura 47 – Resolução do aluno U da tarefa 2.4.e).....	120
Figura 48 – Resolução do aluno T da tarefa 2.4.e)	120
Figura 49 – Enunciado da Atividade 3.1	123
Figura 50 – Resolução (parcial) do aluno Q da tarefa 3.1.a).....	124
Figura 51 – Resolução (parcial) do aluno M da tarefa 3.1.a).....	124
Figura 52 – Resolução do aluno T da tarefa 3.1.b)	125
Figura 53 – Enunciado da tarefa 7.4 da Questão-aula.....	126
Figura 54 – Resolução do aluno R da tarefa 7.4.a) da Questão-aula.....	126
Figura 55 – Resolução do aluno J da tarefa 7.4.a) da Questão-aula.....	127
Figura 56 – Resolução do aluno H da tarefa 7.4.a) da Questão-aula.....	127
Figura 57 – Resolução do aluno E da tarefa 7.4.a) da Questão-aula.....	128

Figura 58 – Resolução do aluno B da tarefa 7.4.b) da Questão-aula	128
Figura 59 – Resolução do aluno R da tarefa 7.4.b) da Questão-aula.....	128

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Planificação inicial da unidade didática	41
Tabela 2 – Planificação da unidade didática	46
Tabela 3 – Quadro do sinal de $f(x) = x $	63
Tabela 4 – Tabela de variação de $f(x) = x $	63
Tabela 5 – Tabela de variação de $h(x) = a x - b + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0$)	63
Tabela 6 – Tabela de variação de $h(x) = a x - b + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a < 0$)	63
Tabela 7 – Tipologia das tarefas propostas para o desenvolvimento das aprendizagens	70
Tabela 8 – Categorização das respostas dos alunos para tarefas envolvendo condições impossíveis ou universais em \mathbb{R}	97
Tabela 9 – Categorização das respostas dos alunos para tarefas envolvendo a resolução de inequações com módulos	104

ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo A: Ficha de Trabalho N.º 1.....	149
Anexo B: Ficha de Trabalho N.º 1 – Proposta de Resolução	163
Anexo C: Ficha de Trabalho N.º 2.....	175
Anexo D: Ficha de Trabalho N.º 2 – Proposta de Resolução	181
Anexo E: Ficha de Trabalho N.º 3.....	187
Anexo F: Ficha de Trabalho N.º 3 – Proposta de Resolução	197
Anexo G: Atividades Complementares	211
Anexo H: Transformações do Gráfico da Função Módulo	217
Anexo I: Ficha de Exercícios	223
Anexo J: Enunciado da Questão-aula	225
Anexo K: Critérios de Classificação da Questão-aula	227
Anexo L: Proposta de Resolução da Questão-aula.....	233
Anexo M: Plano de Aula Síncrona N.º 1.....	237
Anexo N: Plano de Aula Síncrona N.º 2	245

Anexo O: Plano de Aula Síncrona N.º 3.....	253
Anexo P: Plano de Aula Síncrona N.º 4.....	261
Anexo Q: Plano de Aula Síncrona N.º 5.....	269
Anexo R: Plano de Aula Síncrona N.º 6.....	277
Anexo S: Plano de Aula Síncrona N.º 7.....	283
Anexo T: Plano de Aula Síncrona N.º 8.....	287

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, começo por apresentar as principais motivações pessoais para a realização do presente estudo, que tem por base a minha intervenção letiva realizada no âmbito da disciplina de Iniciação à Prática Profissional IV do Mestrado em Ensino da Matemática e num contexto de ensino à distância. Faço também uma breve contextualização do estudo e procuro justificar a sua pertinência. Por fim, apresento o seu objetivo e as questões de investigação que o orientam.

1.1. Motivações Pessoais e Pertinência do Estudo

Como finalidades da disciplina de Matemática, o Programa e Metas Curriculares de Matemática A (MEC, 2014a) salientava¹ duas: (i) a modelação e a aplicação da Matemática ao mundo real; e (ii) a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio abstrato.

Mais recentemente, as Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018) vieram atribuir ao raciocínio matemático um papel central na aquisição dos conhecimentos e no desenvolvimento das competências e das atitudes previstas por esse mesmo documento curricular. O raciocínio, a par com a resolução de problemas, constitui ainda uma das áreas de competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (DGE, 2017).

O destaque dado ao raciocínio matemático e ao seu contínuo desenvolvimento no currículo da disciplina de Matemática A torna relevante investigar formas de promovê-lo. Mata-Pereira e Ponte (2012) referem que “para progredirmos na compreensão desta questão [de como promover o raciocínio matemático dos alunos], um passo fundamental é conhecer melhor os processos de raciocínio dos alunos” (p. 81).

Ao procurar estudos dedicados à análise do raciocínio matemático de alunos do ensino secundário nacional, deparei-me com dificuldades em encontrar resultados, sobretudo que contemplassem a área da função módulo. Surgiu, assim, o meu interesse em realizar um estudo que procurasse caracterizar os processos de

¹ À data da intervenção letiva que permitiu recolher os dados analisados neste estudo (ano letivo de 2019/2020), o *Programa e Metas Curriculares de Matemática A* (MEC, 2014a) era um dos principais documentos curriculares da disciplina de Matemática A em vigor.

raciocínio matemático de alunos desse nível de escolaridade, através de uma análise da atividade por eles realizada a partir da resolução de tarefas diversas.

A experiência proporcionada pelos professores nas aulas de Matemática é fundamental para a aprendizagem dos alunos e os tipos de tarefas que os alunos realizam têm influência na sua aprendizagem (Breen & O'Shea, 2019). O currículo de Matemática sugere o desenvolvimento do raciocínio matemático através da realização de tarefas que o promovam (DGE, 2018), no entanto, o mesmo não é esclarecedor no que respeita à natureza ou características das tarefas que devem ser propostas aos alunos com esse propósito. Mas a forma como as tarefas são construídas revela-se importante para o tipo de raciocínio em que os alunos se envolvem durante a sua realização, podendo influenciá-lo (Norqvist, 2016). Nesse âmbito, faz sentido procurar analisar os processos de raciocínio matemático utilizados pelos alunos e, paralelamente, procurar estabelecer associações entre esses processos e características das tarefas que se revelem promotoras da sua utilização. Essa investigação poderá revelar orientações para a seleção ou conceção de tarefas com vista à promoção do raciocínio matemático. Assim, procurei, ainda, dar alguns passos no sentido de perceber como se articulam os processos de raciocínio matemático utilizados pelos alunos com características das tarefas que lhes foram propostas.

Para isso, considerei conveniente desenvolver a lecionação dos vários tópicos através de um conjunto de tarefas diversificadas, assumindo que essa estratégia poderia permitir-me estabelecer algumas comparações entre a atividade desenvolvida pelos alunos a partir de tarefas envolvendo os mesmos tópicos matemáticos mas com formulações distintas. Pensei que essa análise comparativa pudesse, por seu turno, favorecer o reconhecimento de características das tarefas que se revelassem promotoras de um maior envolvimento dos alunos em determinados processos de raciocínio matemático. Além disso, pareceu-me adequado proporcionar oportunidades para que os alunos explorassem diferentes tipos de tarefas, atendendo à heterogeneidade da própria turma com a qual trabalhei e, sobretudo, à importância que é atribuída à diversificação no que respeita às tarefas a propor no ensino-aprendizagem da Matemática (Ferrage, 2019; Ponte, 2005).

Os conteúdos programáticos que serviram de ponto de partida para a realização deste estudo – que se inserem no tema *Funções* (DGE, 2018) e que se inseriam no domínio curricular *Funções Reais de Variável Real (FRVR)* do Programa de Matemática A (MEC, 2014a), com ênfase no estudo da função módulo e na resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos – foram definidos em respeito para com a planificação anual da disciplina de

Matemática A, para o 10.^o ano, no estabelecimento de ensino em que realizei a minha intervenção letiva.

Diversos estudos (Almog & Ilany, 2012; Gono, 2016; Júnior, 2008) sugerem que, da perspectiva dos alunos, as funções definidas analiticamente por expressões com módulos, em particular, são difíceis de aprender e de conceptualizar, sendo o próprio conceito de valor absoluto de difícil compreensão. Embora a investigação sobre o ensino e aprendizagem de tópicos relacionados com o estudo de funções reais de variável real seja abundante, pouca é focada na função módulo (Almog & Ilany, 2012; Júnior, 2008). Estes autores chamam a atenção para o reduzido número de estudos que tratam especificamente deste assunto, no qual incluem a resolução de inequações envolvendo expressões com módulos. Posto isto, a realização de uma investigação em contexto de ensino-aprendizagem de tópicos programáticos pouco presentes em estudos da área do Ensino da Matemática foi por mim encarada como uma possibilidade para enriquecer a investigação nessa área, por contribuir para a sua diversificação.

Enquanto aluna do Mestrado em Ensino da Matemática, e no âmbito da disciplina de Iniciação à Prática Profissional II, tive a oportunidade de assistir a uma aula de uma turma do 10.^o ano dedicada, precisamente, à resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos.

Nessa aula, muito embora a relativa facilidade com que os alunos foram demonstrando ser capazes de resolver as tarefas que lhes iam sendo propostas, pude observar que os mesmos pareciam concretizar as suas resoluções executando, essencialmente, procedimentos seus conhecidos. Na aplicação de estratégias de resolução analíticas, envolvendo a aplicação de propriedades do módulo de um número real, verifiquei que os alunos não justificavam as suas conclusões com base nos conceitos envolvidos ou nas propriedades que aplicavam. Os alunos demonstravam, efetivamente, ser capazes de aplicar estratégias analíticas de resolução de problemas e de mobilizar as suas capacidades de manipulação de expressões algébricas para resolver problemas novos e gradualmente mais complexos. Contudo, nos momentos da aula dedicados à discussão de resultados e à exposição de raciocínios, por parte dos alunos, estes, na sua maioria, limitavam-se a descrever as etapas dos processos de resolução por si eleitos, sem revelarem uma efetiva compreensão dos raciocínios matemáticos subjacentes às estratégias aplicadas.

Na aplicação de estratégias de resolução envolvendo análises gráficas, pude também verificar que os alunos manifestavam dificuldades em representar graficamente funções definidas por expressões envolvendo módulos sem recurso à

calculadora gráfica e, sobretudo, em interpretar, no contexto dos problemas que pretendiam resolver, a informação representada graficamente.

Foi curioso constatar que nenhum aluno evocou a definição de módulo de um número ou apresentou um raciocínio geométrico com base no significado desse conceito. Mesmo quando a solução de uma equação se poderia apresentar como óbvia a qualquer aluno que tivesse bem presente o conceito de módulo, os alunos optaram por recorrer a processos de resolução analíticos extensos ou a estratégias de resolução gráficas morosas.

Partindo desta minha experiência, procurei conceber uma abordagem ao mesmo tópico programático que apelasse à aprendizagem através do desenvolvimento de raciocínios baseados no conhecimento e exploração do significado dos conceitos matemáticos em estudo. Procurei criar oportunidades para que os alunos pudessem desenvolver raciocínios fundamentados nos seus conhecimentos conceptuais e, como sugerem as Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018), procurei não sobrevalorizar “as competências procedimentais sem a compreensão dos princípios matemáticos subjacentes” (p. 3).

De um ponto de vista pessoal, enquadrado numa visão do meu futuro profissional, um estudo deste tipo perspetivou a possibilidade de desenvolver capacidades que pudessem contribuir para melhorar as minhas futuras práticas enquanto professora, pela reflexão sobre as ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos que me permitiu realizar, quer aquando da conceção das tarefas a propor-lhes, quer aquando da planificação das aulas – neste último caso, com vista à antecipação de dificuldades e à definição de estratégias para ajudar a ultrapassá-las.

Finalmente, importa referir alguns aspetos que se relacionam com o próprio contexto de ensino em que o presente estudo foi desenvolvido e que, podendo apresentar-se como condicionadores dos dados recolhidos para a análise, podem, de outra perspetiva, acrescentar significância a este estudo.

Em consequência de ter sido decretada (Decreto Lei n.º 14-G/2020 de 13 de abril) a suspensão das atividades letivas presenciais, em todos os estabelecimentos de ensino – como medida política de combate à propagação da pandemia da COVID-19 –, o presente estudo foi realizado num contexto de ensino à distância. A interação com os alunos foi mediada pela utilização de uma plataforma virtual (*Microsoft Teams*).

A imposição destas circunstâncias excecionais representou um desafio para a concretização do presente estudo e para a própria lecionação dos conteúdos programáticos, por ter exigido uma rápida adaptação ao súbito distanciamento do

espaço físico da escola e às consequências que daí advieram. Esse afastamento impôs uma drástica e repentina alteração do modo como professores e alunos comunicavam uns com os outros, e entre si, e implicou a implementação de estratégias que permitissem dar continuidade às atividades letivas em regime não presencial, tendo em conta as medidas implementadas pela direção escolar, os recursos disponíveis por parte dos vários intervenientes e um exercício de constante avaliação e revisão das opções metodológicas experimentadas. Dado o contexto em que foi realizado, este estudo poderá encerrar informação pertinente para reflexão sobre as opções metodológicas e didáticas a tomar, pelo professor, em circunstâncias semelhantes ou noutros contextos de ensino à distância.

1.2. Objetivo e Questões do Estudo

O estudo que me propus realizar teve como objetivo compreender os processos de raciocínio matemático que os alunos do 10.º ano utilizam na resolução de diversos tipos de tarefas para a aprendizagem de tópicos programáticos do tema *Funções*, e a sua articulação com características das tarefas propostas. O meu estudo foi orientado pelas seguintes questões de investigação:

- i. Como se caracterizam os processos de raciocínio matemático usados pelos alunos do 10.º ano na resolução de tarefas diversas e que dificuldades evidenciam nesses processos?
- ii. Como se articulam os processos de raciocínio matemático dos alunos com as características das tarefas propostas?

No planeamento da atividade de lecionação que me permitiu recolher os dados utilizados neste estudo, procurei ainda perspetivar dificuldades dos alunos no desenvolvimento de raciocínios e de aprendizagens e refleti sobre possíveis ações do professor para auxiliar os alunos a superar essas mesmas dificuldades.

2. ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO

Neste capítulo, apresento um enquadramento curricular e didático que orienta a componente investigativa deste relatório e fundamenta opções didáticas estruturantes da minha intervenção letiva no tema *Funções*. São também abordadas orientações didáticas e metodológicas presentes em literatura de referência da área da investigação em Ensino da Matemática, bem como resultados de estudos realizados nessa área.

2.1. Ensino e Aprendizagem da Função Módulo

Orientações curriculares para o ensino e aprendizagem de funções

O tema *Funções* é um dos grandes temas da disciplina de Matemática A do ensino secundário, integrando as Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018) dos 10.º, 11.º e 12.º anos.

O destaque dado ao estudo de funções é compreensível: o conceito de função é um conceito central na Matemática atual e que se reveste de uma enorme importância por constituir uma poderosa ferramenta que permite aos alunos representar e analisar os mais variados fenómenos que envolvam relações entre variáveis (Antonini & Lisarelli, 2021; Azevedo, 2009; Ponte, 1990)

O conceito de função é formalmente introduzido no 7.º ano. Os alunos aprendem que, dados dois conjuntos, A e B , fica definida uma «função f (ou aplicação) de A em B », quando a cada elemento x de A se associa um único elemento de B , representado por $f(x)$.

No 3.º ciclo do ensino básico, os alunos aprendem a reconhecer e a representar analítica e graficamente funções que traduzam relações de proporcionalidade direta ou inversa entre variáveis. Além disso, aprendem a relacionar a expressão algébrica de funções afim e de funções quadráticas do tipo $x \rightarrow ax^2 (a \neq 0)$ com a sua representação gráfica.

No 10.º ano, no tema *Funções*, as Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018) preveem a aprendizagem de generalidades acerca de funções reais de variável real e o estudo de funções quadráticas, módulo e definidas por ramos. Como “práticas essenciais de aprendizagem” (p. 5), este documento considera, entre outras: a utilização da tecnologia gráfica no estudo de funções, para experimentar, investigar, descobrir ou fazer verificações; a resolução de problemas e de atividades de

modelação; e a comunicação para explicar ou justificar procedimentos, raciocínios e conclusões. O mesmo documento curricular inclui, além dos dois temas em grande destaque (*Funções* e *Geometria*), outros temas, os quais são tratados como “temas transversais”, sendo eles: *Lógica*, *Teoria de Conjuntos*, *Resolução de Problemas* e *Modelação Matemática*. No que respeita ao tema transversal *Lógica*, é sugerido que esta seja introduzida “à medida que vai sendo precisa e em ligação com outros temas matemáticos” (p. 5). Como estratégias de ensino, sugere-se que o professor promova uma abordagem integrada dos conteúdos dos diversos domínios e que estabeleça conexões entre os diferentes temas.

No domínio *Funções Reais de Variável Real*, o Programa e Metas Curriculares de Matemática A (MEC, 2014a) previa, para o 10.º ano de escolaridade, a aprendizagem de conceitos gerais sobre funções – como a injetividade, a sobrejetividade, a restrição de uma função a um dado conjunto, a definição de composição de funções e de função inversa de uma função bijetiva. Os alunos deveriam aprender a estabelecer relações entre propriedades de funções – como a paridade e simetrias dos respetivos gráficos – e estudar as transformações geométricas dos gráficos de funções obtidas pela adição e/ou pela multiplicação das suas variáveis por uma constante. O mesmo documento perspetivava também a introdução de alguns aspetos gerais de funções reais de variável real – como a monotonia, o sentido da concavidade do respetivo gráfico ou as noções de extremo relativo ou absoluto – e a caracterização de funções obtidas operando com duas funções conhecidas. Para este nível de escolaridade, previa o estudo de funções quadráticas, funções definidas por ramos, módulo, raiz quadrada e raiz cúbica.

Orientações para o ensino e aprendizagem da função módulo

O Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) previa¹ a introdução do conceito de módulo de um número, no 6.º ano, como a “medida da distância à origem do ponto que o representa na reta numérica” (p. 37). Para o 6.º ano, este documento estabelecia que os alunos deveriam ser capazes de reconhecer que o módulo de um número racional q é igual a q , se q for positivo, e a $-q$, se q for negativo. Os alunos deveriam, ainda, reconhecer que a medida da distância entre dois pontos de abcissas a e b é igual a $|b - a|$ e a $|a - b|$. Não se

¹ À data da intervenção letiva que permitiu recolher os dados analisados neste estudo (ano letivo de 2019/2020), o *Programa e Metas Curriculares de Matemática, Ensino Básico* (MEC, 2013) era um dos principais documentos curriculares da disciplina de Matemática para o ensino básico, vigorando desde data prévia à frequência do 2.º ciclo de escolaridade por parte dos alunos participantes neste estudo.

previa que os alunos o fizessem com este nível de formalismo, mas apenas que conhecessem estes resultados e que soubessem justificá-los “eventualmente de modo informal ou recorrendo a casos particulares” (MEC, 2013, p. 3).

A resolução de equações envolvendo expressões com módulos surge apenas no 10.º ano, em contexto de estudo de funções. Para este ano de escolaridade, o Programa e Metas Curriculares de Matemática A (MEC, 2014a) propunha um estudo de funções do tipo $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) que incluísse a resolução de problemas que envolvessem:

- a resolução de equações e de inequações envolvendo a composição da função módulo com funções polinomiais;
- propriedades geométricas dos gráficos de funções módulo;
- a modelação de fenómenos reais e a determinação do domínio de funções obtidas por aplicação de operações algébricas a funções dadas.

No que respeitava, mais exclusivamente, a aprendizagens relacionadas com funções definidas por expressões envolvendo módulos, destaca-se o seguinte descritor das Metas Curriculares (MEC, 2014a, p. 18):

- Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) interpretando geometricamente os valores de a , b e c .

Nas Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018), sobre este tópico do tema *Funções*, é referido, quase tão somente, que os alunos deverão ser capazes de “Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções definidas por ramos e a função módulo e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação.” (p. 8).

Nos dois documentos curriculares referidos fica implícita a ideia de que o estudo de funções deverá alavancar as aprendizagens relativas à resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos. Assim sendo, a resolução de uma equação ou de uma inequação desse tipo deverá ser concretizada a partir do estudo de uma função da família $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) ou de funções que resultem da composição da função $x \rightarrow |x|$, de domínio \mathbb{R} , com funções polinomiais.

O manual¹ adotado pelo estabelecimento de ensino no qual realizei a minha intervenção letiva procurava, num primeiro momento, oferecer um estudo inicial da função $x \rightarrow |x|$, em que $x \in \mathbb{R}$, que poderia abrir portas para esse percurso de aprendizagem. Porém, na trajetória de aprendizagem proposta pelo manual, por último, não seriam os conhecimentos sobre funções que permitiriam aos alunos desenvolver estratégias de resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos, mas, pelo contrário, seriam os conhecimentos relativos à resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos que lhes permitiriam desenvolver estratégias para um estudo mais aprofundado de algumas funções.

Senão vejamos:

O manual começava por definir analiticamente por ramos a função real de variável real $x \rightarrow |x|$ e por apresentar a sua representação gráfica num referencial ortonormado.

Em seguida, concluía quanto à possibilidade de desembaraçar de módulos a expressão que define uma qualquer função que resulte da composição da função $x \rightarrow |x|$ com uma função polinomial, f . Além disso, concluía quanto à transformação que deve ser aplicada aos pontos do gráfico de f de modo a obter a representação gráfica de $y = |f(x)|$. No seguimento destas conclusões, propunha a resolução de problemas envolvendo a determinação do domínio da função $|f|$, para diversas funções f cujo domínio era dado a conhecer, e propunha a concretização de definições analíticas por ramos (sem utilizar o símbolo de módulo) de funções reais de variável real da família $x \rightarrow a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$).

Contudo, esta estratégia que consiste em desembaraçar de módulos a expressão analítica de uma função era usada apenas como apoio para concretizar representações gráficas de funções do tipo $x \rightarrow a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$). Era, pois, a partir da observação da representação gráfica traçada que o manual propunha, num primeiro momento, um estudo elementar (contradomínio, zeros, monotonia, extremo) de funções dessa família.

Também era proposta a resolução de equações do tipo $|f(x)| = k$ e de inequações do tipo $|f(x)| \leq k$ (ou $|f(x)| \geq k$), mas apenas para funções f cuja representação gráfica era apresentada no enunciado dos problemas. Era esperado que os alunos fossem capazes de apresentar os conjuntos-solução das condições por observação da representação gráfica de $y = |f(x)|$. Para facilitar esse processo, os gráficos cartesianos das funções f consideradas eram apresentados com fundo

¹ Neves, M. A. F., Guerreiro, L. & Silva, A. P. (2019). *Máximo 10*, Parte 2, Porto Editora.

quadriculado e os problemas propostos eram cuidadosamente formulados para que os pontos de interesse do gráfico se situassem sempre nos vértices das quadrículas, permitindo o fácil reconhecimento das coordenadas desses pontos.

No seguimento desse tipo de estudo gráfico de funções da família $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) – que oferece várias limitações, dado depender de uma observação da representação gráfica das funções –, não era proposto nenhum problema, nem apresentado nenhum exemplo, que envolvesse a determinação, de forma analítica, das coordenadas dos pontos de interseção da linha do gráfico dessas funções com outras (constantes ou da mesma família, por exemplo). Os alunos não eram, portanto, incentivados a desenvolver estratégias analíticas para validação das suas conclusões.

O estudo analítico de funções do tipo $x \rightarrow a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) que envolveria definir a função por ramos e considerar as expressões que definem a função em diferentes intervalos do seu domínio, e que poderia permitir aos alunos validar conjecturas fundamentadas numa observação gráfica, não era explorado pelo manual.

Na sequência das aprendizagens acima referidas, o manual interrompia o estudo de funções, para apresentar uma panóplia de estratégias analíticas de resolução de equações e de inequações envolvendo expressões módulos, num contexto puramente algébrico, baseando-se na aplicação das seguintes propriedades do módulo de um número real:

- $|x| = k \Leftrightarrow x = k \vee x = -k$, se $k \geq 0$ [1]

- $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k \Leftrightarrow x > -k \wedge x < k$, se $k \geq 0$ [2]

- $|x| > k \Leftrightarrow x < -k \vee x > k$, se $k \geq 0$ [3]

- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$ [4]

- $|x| > |y| \Leftrightarrow x^2 > y^2$ [5]

para $k, x, y \in \mathbb{R}$.

A forma como essas propriedades eram apresentadas – sem se fazerem acompanhar de uma qualquer prova, explicação ou ilustração – levou-me a crer que os autores do manual assumiram que a memorização das propriedades deveria ter lugar sem que houvesse uma preocupação com o reconhecimento das mesmas pelos alunos.

Nem nas Metas Curriculares (MEC, 2014a), nem nas Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018), era feita referência explícita à introdução destas propriedades.

Nos exercícios resolvidos apresentados pelo manual, como exemplos a seguir, a propriedade [5] era usada para resolver inequações do tipo $|x - a| \leq |x - b|$ ($a, b \in \mathbb{R}$), acabando por não ser explorada nenhuma estratégia que envolvesse considerar a condição como uma desigualdade de funções definidas, respetivamente, pelas expressões apresentadas em cada membro da inequação.

Era já depois de ter sido proposta a resolução de diversas equações e inequações envolvendo módulos, num contexto algébrico, que o manual retomava o estudo de funções definidas por expressões envolvendo módulos para aprofundá-lo. Desta volta, já propunha um estudo de funções da família $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) que requeria que os alunos soubessem, efetivamente, resolver analiticamente equações do tipo $f(x) = k$ e inequações do tipo $f(x) \leq k$ (ou $f(x) \geq k$), dado que os conjuntos-solução das equações ou inequações consideradas já apresentavam, como elementos ou como limites para os intervalos de números reais que os definiam, dízimas infinitas. Não seria, portanto, possível que os alunos resolvessem esse tipo de problemas com base numa mera *leitura* gráfica.

Não surpreenderá que manuais escolares optem por propor estratégias algébricas para a resolução de equações e de inequações envolvendo módulos, em vez de tratar esse tipo de problemas exclusivamente em contexto de estudo de funções. De facto, propor aos alunos que resolvam equações e inequações como as que eram apresentadas como exemplos no Caderno de Apoio (MEC, 2014b) a partir de um estudo analítico que envolva a estratégia de desembaraçar de módulos a expressão analítica da função e considerar as duas expressões analíticas que a definem, em diferentes partições do seu domínio, pode tornar-se demasiado exigente para uma grande maioria dos alunos, quando existem alternativas mais simples e muito mais rápidas para resolver o mesmo tipo de problemas.

No Caderno de Apoio do 10.º ano (MEC, 2014b), eram apresentados os seguintes exemplos, associados a um nível de desempenho regular, de equações e de inequações que os alunos deveriam ser capazes de resolver:

- $|x - 3| < 6$
- $|2x - 1| \leq 3$
- $|x - 3| > |x - 5|$
- $|2x - 1| = 3$
- $|x| + 4 < 1$
- $|4x + 1| \geq 2$
- $|2x| + 5 > 3$

Era ainda apresentado o exemplo $|x^2 - 5x| \leq 6$, assinalado como correspondendo a um nível de desempenho mais avançado, não exigível à totalidade dos alunos.

Nem o significado geométrico de módulo, nem o significado geométrico de módulo de uma diferença, $|a - b|$, com a e $b \in \mathbb{R}$, eram evocados, em nenhum momento, pelo manual escolar. A exploração do significado geométrico do conceito de módulo no 10.º ano também não era explicitamente proposta por nenhum dos principais documentos curriculares (DGE, 2018; MEC, 2014a), muito embora esse significado volte a ganhar importância no 12.º ano, em contexto de estudo de *Números Complexos*.

Ainda assim, é de assumir que os conteúdos curriculares de anos anteriores sejam dominados pelos alunos, e que o professor faça uso desses conteúdos estabelecendo conexões entre eles. No que respeitava ao estudo de funções definidas por expressões envolvendo módulos e à resolução de equações e de inequações com módulos, os principais documentos orientadores do trabalho desenvolvido pelo professor não impunham orientações didáticas rígidas, centrando-se essencialmente nas orientações metodológicas – relacionadas com o tipo de atividades em que os alunos se deveriam envolver – e em objetivos de aprendizagem – apresentados como conhecimentos que os alunos deveriam adquirir e como capacidades que os alunos deveriam desenvolver. Portanto, era atribuída alguma autonomia ao professor para fazer, ele próprio, algumas opções didáticas no que respeitava à lecionação desses tópicos do currículo.

Dificuldades dos alunos na aprendizagem da função módulo e na resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos e orientações didáticas para a lecionação desses tópicos

Alguns estudos, desenvolvidos em contexto de ensino-aprendizagem de tópicos do tema *Funções* (DGE, 2018), oferecem informação relativa às principais dificuldades manifestadas pelos alunos do ensino secundário quando confrontados com situações problemáticas envolvendo o estudo de funções. Nomeadamente: estabelecer relações entre diferentes representações de uma função (Azevedo, 2009); ler e interpretar representações gráficas de funções (Azevedo, 2009; Nunes, 2012) e aplicá-las à resolução de problemas (Silva, 2013); relacionar a representação gráfica de funções com a expressão algébrica (Silva, 2013); interpretar problemas contextualizados e recorrer ao pensamento algébrico para determinar expressões

que descrevam relações funcionais sugeridas em enunciados de problemas (Azevedo, 2009; Nunes, 2012). Azevedo (2009) salienta ainda que, no tema das funções, os alunos tendem a memorizar técnicas que não compreendem, nem dominam completamente, e a aplicá-las de forma mecanizada. Essas práticas, associadas a manifestas dificuldades no que respeita à compreensão abstrata do próprio conceito de função ou à sua aplicação à resolução de problemas, remetem essencialmente para uma ‘aprendizagem’ sem significado das funções estudadas.

Outros estudos oferecem informação relativa às principais dificuldades manifestadas na aprendizagem do conceito de módulo e relacionam-nas com o percurso de aprendizagem dos alunos.

Num estudo realizado com jovens com idades compreendidas entre os 14 e os 19 anos, do ensino pré-universitário e universitário, Chiarugi, Fracassina e Furinghetti (1990) observaram que os alunos preferem as ilustrações e representações geométricas às definições meramente algébricas de valor absoluto. As autoras chamam à atenção para o facto de os alunos ficarem com uma perspetiva ambígua do conceito, quando este não é introduzido com base numa compreensão do seu significado geométrico. Essa ambiguidade é favorecida por conceções erróneas que os alunos desenvolvem no domínio da Álgebra, como, por exemplo: os alunos têm a impressão de que equações do tipo $|x| = a$ (com $a \in \mathbb{R}^+$) são equações algébricas de primeiro grau e, por isso, não seria espectável que tivessem duas soluções; os alunos consideram que o símbolo $-x$ representa um número negativo.

Sierpinska (2007) põe em causa a compreensão que os alunos desenvolvem do conceito de valor absoluto de um número real quando este lhes é apresentado como comumente é definido:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A autora afirma: “Para um aluno com uma noção restrita de número e um sentido de generalização matemática pouco desenvolvido, esta definição não tem significado.” (p. 1-52).

Também se verifica que a partição do domínio que está implícita na definição de $|x|$ por ramos é mal interpretada pelos alunos. Chiarugi, Fracassina e Furinghetti (1990) observaram que, mesmo a nível universitário, em contexto de aprendizagem de funções definidas analiticamente por expressões envolvendo módulos, os alunos tendem a interpretar o módulo como um operador (aplicado a x) que restringe o domínio da função. Na representação gráfica de funções definidas por $|f(x)|$, os

alunos têm tendência para representar a curva correta mas apenas do lado do semi-eixo positivo do x .

Dada a escassez de estudos desenvolvidos em contexto de ensino-aprendizagem de tópicos programáticos envolvendo o conceito de módulo ao nível do ensino secundário, para obter alguma informação sobre o tema, torna-se relevante considerar estudos nos quais participaram alunos de outros níveis de ensino. Os resultados de estudos realizados com alunos do ensino universitário são pertinentes de serem considerados, pois permitem-nos identificar lacunas na aprendizagem desses alunos e, por isso, podem ajudar-nos a perceber quais os aspetos de um processo prévio de aprendizagem que podem ser melhorados, de modo a ajudar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades ou a reduzi-las no ensino superior.

Num estudo desenvolvido com o objetivo de encontrar características de uma abordagem ao ensino das inequações envolvendo expressões com módulos que promova o pensamento teórico sobre o tópico – e no qual participaram 18 alunos do ensino superior que experimentaram diferentes percursos de aprendizagem –, Sierpinska, Bobos e Pruncut (2011) concluem que uma abordagem “visual” é mais vantajosa. As autoras verificaram que os alunos que experimentam uma abordagem “visual” ao tópico são mais bem-sucedidos na resolução de problemas e consideram que, em parte, isso deve-se ao facto de esses alunos não recorrerem a estratégias de resolução que envolvem um raciocínio baseado em casos.

A definição de valor absoluto como função definida por ramos implica o recurso a duas condições: se $x \geq 0$, então $|x| = x$, e, se $x < 0$, então $|x| = -x$. Sierpinska, Bobos e Pruncut (2011) verificaram que os alunos tendem a revelar dificuldades de compreensão de técnicas de raciocínio baseado em casos e em raciocinar desse modo hipotético, tendo tendência para ignorar o carácter condicional das proposições matemáticas. A associação entre essa dificuldade e dificuldades no uso adequado dos conectores lógicos “ \wedge ” e “ \vee ” – que se verificou presente, mesmo quando os alunos revelavam compreender o carácter técnico das palavras “e” e “ou” do ponto de vista linguístico – resultava numa incompreensão de que a definição de valor absoluto é logicamente equivalente a $(x \geq 0 \text{ e } |x| = x)$ ou $(x < 0 \text{ e } |x| = -x)$ e, frequentemente, à aplicação incorreta de processos analíticos para resolver inequações.

Dificuldades associadas à compreensão dos conectores lógicos “ \wedge ” e “ \vee ” são também destacadas por outros autores de estudos envolvendo os mesmos tópicos matemáticos (Almog & Ilany, 2012; Chiarugi, Fracassina & Furinghetti, 1990).

Chiarugi, Fracassina e Furinghetti (1990) referem que os alunos tendem a interpretar “ou” como “e” e a desprezar o significado de “se...então”.

Voltando ao estudo de Sierpinska, Bobos e Pruncut (2011), as autoras também observaram que o recurso repetido a raciocínios baseados em casos tende a resultar num reconhecimento, por parte dos alunos, de técnicas que se repetem, numa memorização dessas técnicas e, eventualmente, os alunos acabam por resolver problemas de forma procedimental e irrefletida, à semelhança dos alunos que aprendem a resolver inequações meramente por aplicação de procedimentos algébricos – nos quais prevalece o interesse em querer saber exatamente ‘o que’ fazer sem saber ‘porquê’.

Por contraste, e de um modo geral, as autoras constataram que os alunos que desenvolvem as suas capacidades de resolução de inequações com recurso a estratégias visuais obtêm mais frequentemente respostas corretas, refletem sobre os problemas, estabelecem relações com outros problemas, verificam os resultados e encontram soluções raciocinando conceptualmente e sem ter de aplicar procedimentos gerais.

Saliente-se, porém, que o recurso exclusivo a uma estratégia visual que envolva análises gráficas pode trazer desvantagens, como o evidencia uma investigação levada a cabo por Almog e Ilany (2012). Neste sentido, as Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018) privilegiam, sem exclusividade, o recurso à estratégia visual gráfica, pelo que outras estratégias visuais poderão ser consideradas.

A referida investigação, desenvolvida por Almog e Ilany (2012), contou com a participação de 481 alunos dos 10.º e 11.º anos do ensino secundário israelita e provenientes de 13 escolas. Os estudantes já tinham concluído o estudo de inequações envolvendo expressões com módulos quando participaram no estudo. As investigadoras verificaram que, na resolução de tarefas muito simples envolvendo a resolução de equações e de inequações com módulos, os alunos que desenvolvem estratégias de resolução gráficas tendem a recorrer a estas estratégias, mesmo em circunstâncias em que esta abordagem aos problemas se revela mais morosa, o que denota alguma incompreensão do conceito.

O mesmo estudo (Almog & Ilany, 2012) também apresenta uma sistematização dos principais erros cometidos por alunos que não são capazes de resolver problemas envolvendo a resolução de inequações com módulos. Alguns desses erros relacionam-se com a falta de compreensão do significado dos conectores lógicos “ \wedge ” e “ \vee ” (já referida) e dos sinais de desigualdade “ $>$ ” e “ $<$ ”, com o facto de os alunos terem tendência para considerar apenas as soluções inteiras e com

dificuldades em concluir quanto ao conjunto solução quando este: é vazio; inclui apenas um elemento; ou exclui apenas um elemento do universo em que a condição está definida. Outros erros assinalados pelas mesmas autoras estão intimamente relacionados com características do raciocínio matemático dos alunos e com dificuldades na utilização de processos de raciocínio matemático. Por exemplo: os alunos assumem que a estrutura da solução da inequação deve ser análoga à estrutura da inequação (e. g. “ $|x| > 3 \Rightarrow x > 3$ ”); por um processo que as autoras designam por “sobregeneralização” (p. 357), os alunos usam incorretamente conhecimentos sobre a resolução de equações para resolver inequações.

No que respeita à representação gráfica de funções definidas por expressões envolvendo módulos, num estudo realizado com 6 alunos do 10.º ano, Mota (2017) constatou dificuldades na exploração da influência da variação de parâmetros e em concluir quanto ao papel desempenhado pelos parâmetros na expressão algébrica das funções e detetou, inclusivamente, que os alunos revelam dificuldades em tirar partido da utilização da calculadora gráfica para as suas aprendizagens. A autora conclui que a maioria das dificuldades sentidas pelos alunos na realização de tarefas de exploração “advém da necessidade que os alunos sentem de particularizar antes de generalizar” (p. 137). E, por último, sugere ainda que, no estudo de funções da família $x \rightarrow a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$), os alunos apresentam as suas conclusões relativamente ao efeito da variação de parâmetros por analogia com o conhecimento que têm das transformações aplicadas aos gráficos das funções do tipo $x \rightarrow a(x - b)^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$).

2.2. Raciocínio Matemático

O raciocínio matemático no currículo de Matemática

O Programa de Matemática A para o Ensino Secundário (MEC, 2014a) salientava, como finalidades da disciplina, a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio abstrato, reconhecendo-lhe um contributo determinante no desenvolvimento de capacidades indispensáveis a um bom percurso escolar ou profissional, em qualquer área do conhecimento, como são as de elaborar análises objetivas e coerentes, argumentar, justificar adequadamente posições ou detetar falácias e raciocínios falsos em geral. Os objetivos explicitados no Programa – e que se traduziam em desempenhos fundamentais que os alunos deveriam evidenciar ao longo do seu percurso pelo ensino secundário –, a par com

a aquisição de conhecimentos, conceitos e procedimentos, incluíam o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Também as *Áreas de Competências* do Perfil dos Alunos (DGE, 2017), que “agregam competências entendidas como combinações complexas de conhecimentos, capacidades e atitudes que permitem uma efetiva ação humana em contextos diversificados” (p. 9), incluem o Raciocínio.

Posteriormente, as *Aprendizagens Essenciais* (DGE, 2018) vieram explicitamente impor que, na disciplina de Matemática e em todos os níveis de escolaridade, os alunos resolvam tarefas que promovam o desenvolvimento do raciocínio. Este documento curricular, orientador da ação do professor, sugere ainda que sejam criadas condições para que os alunos, em experiências individuais e colaborativas, tenham oportunidade de descrever, explicar e justificar raciocínios.

O foco do currículo da Matemática no desenvolvimento do raciocínio matemático através da realização de tarefas que o promovam é indiscutível. Mas o que é, afinal, o raciocínio matemático?

O Programa (MEC, 2014a) assumia que o raciocínio matemático é “por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo” (p. 6). Ainda assim, não deixava de reconhecer que o raciocínio indutivo desempenha “um papel fundamental na atividade matemática, uma vez que preside à formulação de conjeturas” (p. 6).

O Perfil dos Alunos (DGE, 2017) associa as competências da área do Raciocínio a “processos lógicos que permitem aceder à informação, interpretar experiências e produzir conhecimento” (p. 23). O Raciocínio é apresentado em associação com capacidades de resolução de problemas, de interpretação de informação, planeamento e condução pesquisas e de “desenvolvimento de processos conducentes à construção de conhecimento” (p. 23). Este documento curricular sugere que os alunos desenvolvam estas capacidades, por exemplo, analisando questões a investigar, analisando criticamente conclusões e reformulando estratégias, generalizando conclusões de pesquisas e criando modelos para representar situações hipotéticas. Também as *Aprendizagens Essenciais da Matemática* (DGE, 2018) valorizam a realização de investigações para “sustentar conjeturas” (p. 6). Parece claro que estes referenciais pedagógicos mais recentes assumem uma visão mais abrangente do que se entende por raciocinar e por raciocinar matematicamente.

Um modelo para o raciocínio matemático

Neste relatório, usei o termo raciocínio matemático como proposto por Jeannotte e Kieran (2017) no seu modelo conceptual do raciocínio matemático para a Matemática escolar, por este modelo sistematizar, de modo coerente, o que as autoras identificaram como sendo as características convergentes das diversas conceções do que significa raciocinar matematicamente sugeridas na literatura de Educação Matemática. As autoras definem o raciocínio matemático como um processo de comunicação, com os outros ou consigo mesmo, que permite inferir informação de cariz matemático a partir de informação matemática já conhecida. Da sua análise, emergem dois aspetos caracterizadores do raciocínio matemático: o estrutural e o processual.

O aspeto estrutural do raciocínio matemático diz respeito ao “modo como os elementos do discurso [matemático] se combinam num sistema ordenado que descreve os elementos e as suas relações entre si” (Jeannotte & Kieran, 2017, p. 7). Esta combinação é de natureza inferencial e pode ser de cariz dedutivo, indutivo ou abduutivo.

Raciocínio dedutivo. As inferências de cariz dedutivo obtêm-se por via de um raciocínio lógico-dedutivo. Ponte, Branco e Matos (2008, cit. Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020) sugerem que “raciocinar dedutivamente envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento” (p. 7). Como refere Oliveira (2008, cit. por Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012), este raciocínio é desenvolvido do geral para o particular e produz conclusões válidas e necessárias, assumindo a isenção de erros na cadeia de deduções. As conclusões que gera são irrefutáveis e necessariamente *verdadeiras* quando as premissas das quais se parte também o são. Jeannotte e Kieran (2017) salientam a importância do raciocínio dedutivo nos processos de validação envolvendo provas. Duval (2005, cit. por Jeannotte & Kieran, 2017) descreve este tipo de raciocínio como o único capaz de mudar o valor epistémico¹ do conhecimento matemático de provável para verdadeiro.

Raciocínio indutivo. Na literatura, o raciocínio indutivo não é definido de forma consistente, em parte porque, geralmente, considera-se que o raciocínio indutivo é todo o raciocínio que não é dedutivo (Jeannotte & Kieran, 2017). No seu modelo, Jeannotte e Kieran (2017) consideram que um raciocínio indutivo é caracterizado

¹ O valor epistémico relaciona-se com o grau de certeza ou de convicção com que uma proposição é considerada verdadeira, falsa, provável ou plausível.

pela inferência de um fundamento (ou de uma razão) para o que é observado a partir dos dados que se conhecem. As autoras associam-no a processos de generalização: informação relativa a casos particulares conduz a conclusões para a generalidade dos casos. Embora as conclusões de um raciocínio indutivo não sejam necessariamente verdadeiras e o conhecimento *criado* por via indutiva seja apenas considerado como “provável” (p. 8), este tem potencial para gerar conhecimento novo, uma vez que as conclusões a que permite chegar são mais abrangentes do que a informação da qual partiram. Oliveira (2008, cit. por Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012, p. 357) salienta, precisamente, que o raciocínio indutivo tem “um papel chave na criação de novo conhecimento”.

Raciocínio abduativo. Com base numa análise dos trabalhos publicados por Charles Sanders Pierce, Jeannotte e Kieran (2017) apresentam o raciocínio abduativo como sendo aquele que envolve a inferência de informação para explicar o que, não sendo conhecido, é reivindicado à partida. Efetivamente, Pierce apresentou a abdução como um processo que se caracteriza pela inferência do antecedente a partir do consequente, ou da causa a partir do efeito (Pedemonte & Reid, 2011), e que se baseia numa lei ou teoria – a qual pode ser conhecida ou inventada – que estabelece uma relação entre antecedente e consequente, ou causa e efeito. (Campos, 2009; Pedemonte & Reid, 2011). Pierce concebia o raciocínio abduativo como uma forma de inferência lógica que envolve a formulação de hipóteses explicativas e que responde à necessidade de, em determinados momentos de uma investigação, se inventarem conjeturas plausíveis que possam ser testadas ou validadas por via indutiva ou dedutiva (Campos, 2009).

Na classificação do raciocínio matemático do ponto de vista estrutural, prevalece o valor epistémico das suas conclusões. Jeannotte e Kieran (2017) consideram que os aspetos estruturais não são suficientes para compreender ou caracterizar a natureza do raciocínio matemático dos alunos, pois apenas permitem caracterizar o raciocínio matemático de uma perspetiva estática. Em contexto de ensino-aprendizagem é relevante que um modelo para o raciocínio matemático permita uma caracterização do raciocínio dos alunos quando estes realizam tarefas matemáticas e explicam como raciocinaram em determinada etapa ou fundamentam a conceção de uma estratégia para resolver um problema, possivelmente privilegiando a realização de determinada atividade em detrimento de outra.

Para tal, as autoras consideram ainda, no seu modelo, que o raciocínio matemático pode ser caracterizado com base em aspetos processuais. As autoras

distinguem nove processos cognitivos, que envolvem a exploração de qualidades ou relações entre objetos, os quais são seguidamente apresentados:

Formulação de conjeturas – inferência de narrativas (plausíveis ou prováveis) e com potencial para resultarem em teorias matemáticas;

Generalização – inferência de narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou sobre uma relação entre objetos de um dado conjunto a partir de um seu subconjunto;

Comparação – inferência de uma narrativa acerca de objetos matemáticos e das relações entre eles, a partir da procura por semelhanças e diferenças;

Identificação de padrões – inferência de uma narrativa acerca de relações recursivas entre objetos matemáticos ou relações entre eles;

Classificação – inferência, a partir da procura por semelhanças e diferenças, de uma narrativa acerca de uma classe de objetos com base em propriedades e definições matemáticas;

Validação – processo que visa tornar uma narrativa matemática plausível numa narrativa matemática: *verdadeira*, *falsa* (refutação) ou *mais plausível*. Esta definição distingue-se de definições implicitamente consideradas em diversos estudos em Ensino da Matemática e que associam a validação a raciocínios de cariz essencialmente dedutivo e que permitem tornar uma narrativa matemática plausível ou provável numa narrativa verdadeira;

Justificação – processo relacionado com a validação que permite modificar o valor epistémico de uma narrativa através da procura por informação (dados, razões, fundamentos);

Prova – processo relacionado com a validação e que permite tornar uma narrativa matemática plausível numa narrativa matemática verdadeira, a partir de outras narrativas que já são aceites como sendo verdadeiras. Apresenta uma estrutura globalmente dedutiva;

Exemplificação – inferência de exemplos ou de dados a partir de um problema. Pode gerar elementos que servirão outros processos de raciocínio matemático.

Importa referir que este modelo apresenta, tanto os aspetos relacionados com os processos de raciocínio matemático, como os aspetos relacionados com a sua estrutura, como duas perspetivas que nos permitem olhar para o mesmo discurso de

maneiras diferentes. Além disso, embora os processos de raciocínio matemático sejam considerados separadamente, todos podem estar inter-relacionados. Por exemplo, a procura por semelhanças e diferenças (comparação) pode resultar na identificação de relações entre objetos (identificação de padrões). A inferência de exemplos ou de contraexemplos (exemplificação) pode sustentar ou refutar conjeturas (validação).

Resultados de estudos sobre o raciocínio matemático dos alunos

Encontrei poucos estudos realizados em Portugal que oferecessem análises que caracterizassem o raciocínio matemático de alunos ou as dificuldades que estes evidenciam no recurso a diferentes processos de raciocínio matemático, sobretudo de alunos do ensino secundário.

De seguida, apresento algumas das conclusões de dois estudos que contaram com a participação de alunos do ensino secundário e, ainda, os resultados de três outros estudos, nos quais participaram, entre outros, alunos do 9.º ano de escolaridade, pois acrescentam algumas conclusões relativas ao recurso a processos de justificação e neles participaram jovens prestes a ingressar no ensino secundário.

Num estudo em que participaram 2 alunos do 12º ano e com boas classificações à disciplina de Matemática, Ribeiro (2018) destaca as seguintes dificuldades evidenciadas pelos alunos na resolução de desafios lógicos ou na realização de demonstrações: dificuldade na formulação e validação de conjeturas, na libertação da mecanização, na utilização e interpretação da notação matemática e no desenvolvimento de investigações matemáticas. No que respeita às dificuldades na formulação e validação de conjeturas, a autora atribui-as a dificuldades na procura por relações e padrões entre dados e ao reduzido sentido crítico na validação das conjeturas formuladas. A autora afirma que os alunos procuram, de uma forma que classifica como “excessiva”, encontrar algoritmos matemáticos para resolver problemas, em detrimento da procura por articular as diferentes informações de que dispõem por via do raciocínio. No desenvolvimento de investigações e de raciocínios de cariz dedutivo, a autora constatou particulares dificuldades na concretização de demonstrações e destaca a importância do conhecimento conceptual dos objetos matemáticos para estes fins. Ribeiro reconhece a influência positiva da utilização de exemplos para o desenvolvimento do raciocínio matemático e como ferramenta que permite combater a dificuldade, que os alunos recorrentemente manifestam, em atribuir sentido e interpretar a linguagem simbólica. A autora refere, ainda, a

predominância de raciocínios de cariz indutivo, baseados na observação de casos particulares, na procura por padrões e na formulação de conjeturas.

A partir de um estudo realizado com 3 alunos do 10.º ano de escolaridade, em contexto de estudo de funções, Azevedo (2009) destaca a capacidade dos alunos de raciocinarem com base na exploração de casos particulares e na observação de regularidades. A autora conclui que, após a realização de poucos testes, os alunos tendem a aceitar as generalizações como válidas.

Também Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), num estudo que contou com a participação de 2 alunos do 9º ano de escolaridade e com um desempenho razoável à disciplina de Matemática, destacam uma predominância de raciocínios de cariz indutivo, a partir da observação de casos particulares, de analogias e de generalizações para formulação de conjeturas, as quais, geralmente, os alunos não tendem a justificar, por não sentirem essa necessidade. Os autores também observaram uma preferência pelo recurso a contraexemplos como justificação para refutar afirmações.

Vendo reforçada a ideia de que os alunos não sentem necessidade de apresentar justificações por um estudo realizado com 7 alunos (dos 7.º e 9.º anos) e em contexto de aprendizagem de propriedades de operações, Mata-Pereira e Ponte (2012) sublinham a necessidade de os alunos serem incentivados a apresentar justificações, uma vez que estes não tendem a fazê-lo de forma espontânea, mas, quando incentivados, verifica-se que os alunos as apresentam. Estas baseiam-se, essencialmente, em: propriedades ou conceitos matemáticos, exemplos, contraexemplos ou conhecimentos anteriores. No que respeita às generalizações apresentadas pelos alunos, os autores reconhecem-lhe uma natureza predominantemente indutiva. Não obstante, tendo observado que os alunos também realizam generalizações estabelecendo conexões com propriedades e/ou conceitos conhecidos e que não podem ser “resumidas a uma relação direta entre os casos particulares e um caso geral” (p. 84), os autores sugerem que os alunos raciocinam abduativamente.

Ainda no que respeita ao recurso a justificações, Mata-Pereira e Ponte (2013), a partir de um estudo realizado com 17 alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade e envolvendo uma análise do raciocínio dos alunos em tarefas sobre inequações, concluem que “os alunos não dão relevância às características necessárias para que seja [a justificação] matematicamente válida, apresentando tanto justificações válidas como justificações não válidas” (p. 28). Na apresentação de justificações válidas, os autores referem, por um lado, o recurso a conhecimentos anteriores sobre conceitos ou propriedades e, por outro lado, o recurso a uma

“autoridade externa” associada a uma aplicação rotineira de procedimentos algébricos.

2.3. Diversidade de Tarefas no Ensino e Aprendizagem da Matemática

As experiências matemáticas dos alunos são mediadas pela resolução de tarefas (Canavarro et. al., 2019), pelo que estas devem ser criteriosamente selecionadas ou concebidas pelo professor.

No que respeita às tarefas a propor aos alunos, Ponte (2005) sublinha a importância da diversificação, dado que cada tarefa desempenha um papel fundamental na concretização dos diferentes objetivos curriculares. Na diferenciação das tarefas, o autor considera, entre outras, as seguintes características: o seu grau de desafio (“reduzido” ou “elevado”), o seu grau de estrutura (“aberto” ou “fechado”) e o seu contexto (“realidade”, “semi-realidade” ou “puramente matemático”). Com base nos seus graus de desafio, o autor distingue os exercícios e as explorações dos problemas e das investigações. Com base nas suas estruturas, o autor distingue os exercícios e problemas das explorações e investigações (Figura 1).



Figura 1 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p.8)

Na diferenciação das tarefas quanto à sua estrutura, considera-se que uma tarefa fechada “é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido” (pp. 7-8). Geralmente estas tarefas, ainda que possam apresentar uma natureza problemática, permitem relacionar conceitos e propriedades (que os alunos já conhecem) de forma unívoca. Embora tanto os exercícios como os problemas tenham uma estrutura

fechada, estes distinguem-se pelo grau de desafio que lhes está associado: se, à partida, os alunos já conhecem uma estratégia que lhes permita realizar a tarefa com sucesso, então a tarefa constitui um exercício; caso contrário, estamos perante um problema.

Esta distinção entre problemas e exercícios não era assim considerada no Programa de Matemática A para o Ensino Secundário (MEC, 2014a). O Programa apresentava os problemas como tarefas que envolvem a definição de uma estratégia de resolução a partir de conhecimentos prévios e, se necessário, uma revisão da estratégia preconizada, mas, por outro lado, associava-os também a tarefas que “envolvem essencialmente a capacidade de selecionar e aplicar procedimentos previamente estudados” (p. 7). No Programa, podia ler-se ainda:

A resolução de problemas envolve [...] a mobilização de conhecimentos de factos, de conceitos e de relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. (p. 7)

As tarefas com uma estrutura aberta, por seu turno, são aquelas que comportam “um grau de indeterminação significativo – no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas” (Ponte, 2005, p. 8). Estas tarefas podem ainda ser distinguidas pelo seu grau de desafio: as investigações estão associadas a graus de desafio maiores que as explorações. O autor explica que “se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planeamento, estaremos perante uma tarefa de exploração. Caso contrário, será talvez melhor falar em tarefa de investigação” (p. 8). As tarefas de investigação requerem uma participação mais ativa, por parte dos alunos, no planeamento das atividades que vão realizar, a começar pela formulação das questões que querem ver respondidas.

No que respeita às tarefas com uma estrutura aberta, o Programa (MEC, 2014a) considerava a realização de atividades de exploração e de descoberta apenas enquanto “estratégia de motivação” (p. 7). Apesar disso, quando tratava de sugerir tarefas promotoras do raciocínio – e recorde-se que o desenvolvimento do raciocínio abstrato era declarado como sendo uma das finalidades da disciplina –, o Programa, em linha com o *TIMSS-Advanced*, sugeria a resolução de problemas não rotineiros, os quais associava a problemas que implicam o recurso à intuição e ao raciocínio indutivo baseado em padrões e em regularidades. Estas características estão associadas a tarefas de natureza exploratória “em que os alunos têm que mobilizar os seus conhecimentos intuitivos” (Ponte, 2005, p. 9). Assim, o Programa

acabava por considerar o papel de tarefas com uma estrutura aberta no desenvolvimento das aprendizagens.

As Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018) também consideram aspetos metodológicos do ensino da Matemática e a sua influência no modo como os estudantes aprendem, notando que lhes devem ser dadas oportunidades para “descobrir, raciocinar, provar e comunicar Matemática. Para isso é fundamental que os estudantes se envolvam em discussões e atividades estimulantes e que não se sobrevalorizem as competências procedimentais sem a compreensão dos princípios matemáticos subjacentes” (p. 3). As orientações metodológicas presentes nas Aprendizagens Essenciais incentivam o professor a propor aos alunos a realização de atividades que envolvam investigações, testes ou validações de conjeturas. Inequivocamente, tem-se vindo a atribuir uma maior importância à realização de tarefas de exploração e de investigação no Ensino da Matemática.

Em suma, no que respeita às tarefas a realizar em aula, é de referir que, à data da realização do presente estudo, a diversificação acabava por ser imposta pela diversidade de orientações metodológicas – presentes nos vários documentos curriculares – no que respeitava à natureza das atividades que deveriam ser propostas aos alunos.

Orientações metodológicas relacionadas com as características das tarefas que devem ser propostas aos alunos estão também presentes em documentos orientadores do Ensino da Matemática, publicados por organizações internacionais, como o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics).

Segundo o NCTM (2014), “um ensino eficaz da Matemática envolve os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas” (p. 17), e salienta, entre outras, uma descoberta importante resultante de investigação em ensino sobre o uso de tarefas matemáticas: “há mais aprendizagens em aulas onde as tarefas, de forma consistente, encorajem o pensamento e o raciocínio de nível elevado do que naquelas em que as tarefas são habitualmente rotineiras e centradas nos procedimentos” (p. 9). O raciocínio de nível elevado é associado à realização de tarefas de exigência cognitiva alta. De acordo com a taxinomia de Stein e Smith (1998), tarefas de exigência cognitiva alta são aquelas que permitem o envolvimento dos alunos em questionamentos e explorações ou que os encorajam a aplicar procedimentos em conexão com as ideias conceptuais com foco no desenvolvimento da compreensão matemática, por contraste com a aplicação de procedimentos sem que sejam estabelecidas conexões com os conceitos e seus significados, e em que o foco está na produção de respostas corretas e descrição dos procedimentos.

O NCTM (2014) considera que “para que os alunos aprendam Matemática com compreensão têm que existir oportunidades para eles se envolverem regularmente em tarefas que se centrem no raciocínio” (p.23). Para implementação de tarefas que promovam o raciocínio, fornece algumas orientações claras para a ação do professor, nomeadamente: propor tarefas que requeiram um nível cognitivo elevado, permitam múltiplas abordagens e recorram a ferramentas e representações variadas e propor tarefas que criem oportunidades de exploração e resolução de problemas para que os alunos ampliem os seus conhecimentos matemáticos.

Lannin, Ellis e Elliot (2011) sugerem que tarefas de cunho exploratório têm potencial para promover o recurso a justificações para sustentar conjecturas e generalizações, e, portanto, promovem o recurso a processos de raciocínio matemático variados; Mata-Pereira (2018) destaca o papel dos problemas e de “tarefas de natureza exploratória, que considerem diferentes graus de desafio, que permitam uma variedade de processos de resolução e que incitem generalizações e justificações” (p. 59) na promoção do raciocínio matemático dos alunos. Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) sugerem também tarefas que permitam uma variedade de estratégias de resolução, que suscitem a formulação de conjecturas e generalizações e que solicitem justificações para as respostas apresentadas ou para as estratégias de resolução eleitas.

Para o desenvolvimento de competências críticas da qualidade do raciocínio matemático, Swan (2017) salienta a importância das tarefas que envolvam uma análise e crítica de explicações matemáticas de procedimentos, de estratégias de resolução ou de modelos matemáticos. Também sugere alguns princípios que podem nortear o trabalho de conceção ou seleção de tarefas que desenvolvam a compreensão conceptual: as tarefas devem ser adaptadas ao conhecimento que os alunos já têm; devem promover a explicação, a aplicação e a síntese; devem permitir desenvolver a linguagem matemática através de atividades de comunicação que incentivem ao diálogo; devem criar conexões entre tópicos (Swan, 2018).

No que respeita à distinção entre os diversos tipos de tarefas, Ponte (2005) estabelece ainda uma última distinção, de acordo com o seu contexto: de realidade, de semi-realidade ou de Matemática pura (Figura 2).

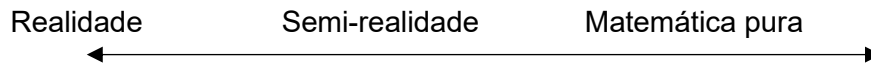


Figura 2 – Diversos tipos de tarefas, quanto ao contexto (Ponte, 2005, p.11)

As tarefas de modelação, por exemplo, apresentam-se num contexto de realidade e revestem-se de uma natureza problemática, constituindo problemas ou investigações, conforme o grau de estruturação do respetivo enunciado. O contexto de “semi-realidade”, assim designado por Skovsmose (2000, cit. por Ponte, 2005), é atribuído a problemas ou exercícios que, embora sejam apresentados ou enquadrados num contexto de realidade, acabam por não exigir que o aluno considere aspetos reais das situações que são tidas em conta e, por isso, o aluno acaba por considerá-las num contexto quase abstrato.

Blum (2015) assinala que, a cada três anos, os estudos do PISA (Programme for International Student Assessment) sublinham as dificuldades que os alunos (de 15 anos) evidenciam em mobilizar as suas aprendizagens para resolver problemas com contexto real. Acrescenta que, ao longo dos anos, os alunos têm aprendido, como parte do currículo oculto da disciplina de Matemática, que não é necessário compreender ou considerar o contexto das tarefas que lhes são propostas. Na resolução de tarefas em contexto real, os alunos tendem a recolher dados do enunciado e a tratá-los utilizando procedimentos que já conhecem, ignorando o contexto do problema. Tais resultados sugerem que há que considerar também a inclusão de tarefas com contextos distintos nas aulas de Matemática.

3. UNIDADE DIDÁTICA

Neste capítulo, apresento o contexto escolar, incluindo a caracterização da escola e da turma, em que o presente estudo foi desenvolvido. Depois apresento a planificação da unidade didática lecionada, ancorada nos principais documentos curriculares da disciplina de Matemática A para o 10.º ano, e as tarefas propostas aos alunos no âmbito dessa unidade. Incluo uma sistematização dos principais conceitos matemáticos relacionados com os tópicos programáticos que a integraram e das estratégias e recursos a que recorri durante a lecionação. Partilho, ainda, algumas considerações decorrentes de uma reflexão sobre a minha primeira experiência de ensino à distância.

3.1. Contexto Escolar

O presente estudo foi realizado no âmbito da minha prática de ensino supervisionada, realizada no Colégio Militar de Lisboa. Desde o início do ano letivo de 2019/2020, e no âmbito da disciplina de Iniciação à Prática Profissional, acompanhei as aulas de Matemática A de uma turma do 10.º ano, constituída por 22 alunos. A minha intervenção letiva, nessa turma, iniciou-se a 14 de maio e terminou a 1 de junho, quando decorria o 2.º semestre letivo, num regime de ensino à distância.

Caracterização da escola

Localizado na freguesia de Carnide, o Colégio Militar é “um estabelecimento militar de ensino não-superior, inserido na orgânica do Exército, tutelado pelo Ministério da Defesa Nacional e que segue as diretrizes pedagógicas emanadas pelo Ministério da Educação” (Colégio Militar, 2019, p. 5). O Colégio ministra os cursos do Ensino Básico e do Ensino Secundário, de acordo com o Sistema Educativo Nacional, e também assegura uma formação de matriz militar de base, funcionando num sistema de ensino misto – deste de 2014 – e num regime de externato e de internato de frequência optativa para os alunos a partir do 2.º Ciclo.

De acordo com dados apresentados no Projeto Educativo do Colégio (Colégio Militar, 2016) para o triénio 2016-2017 a 2018-2019, 770 alunos iniciaram o ano letivo de 2016/2017, distribuídos pelos vários ciclos de ensino. Relativamente ao corpo docente do Colégio, aproximadamente 75% dos professores pertenciam ao Mapa do

Pessoal Civil do Exército e os restantes professores eram, na sua maioria, requisitados ao Ministério da Educação e Ciência.¹

No que respeita aos recursos físicos e materiais, as salas de aula do Colégio, distribuídas por três edifícios, encontravam-se equipadas com sistema de projeção, *Apple TV* e acesso à rede *wi-fi*. A instituição escolar disponibilizava um *tablet* para cada professor da disciplina. O recinto do Colégio albergava ainda: um auditório, salas específicas para atividades de complemento curricular, salas para EV, ET, Música e TIC, um salão nobre, um centro de recursos/sala de leitura, um arquivo histórico, um museu de História Natural, um museu do Colégio Militar, um refeitório, diversas instalações desportivas (ginásio, piscina, campos para prática de várias modalidades coletivas, picadeiros), uma enfermaria e dois edifícios que constituíam o alojamento do Corpo de Alunos (feminino e masculino).

Os alunos desta instituição de ensino terão uma experiência escolar um pouco distinta de muitos dos alunos das demais escolas, já que, além da formação de matriz militar que recebem – destaque, por exemplo, a obrigatoriedade da frequência da disciplina de Instrução Militar/Instrução de Corpo de Alunos –, desenvolvem todas as atividades do seu dia-a-dia no Colégio, onde, a grande maioria dos alunos, pernoita durante a semana escolar. Inevitavelmente, há características muito particulares nas relações que se estabelecem entre os alunos – e que os mesmos transportam para a sala de aula –, quer pela proximidade que experimentam entre si, distantes do seio familiar, quer pelos esquemas hierárquicos impostos por tradições que eles próprios perpetuam, quer por um conjunto de valores e princípios por eles assumido com sentido de compromisso (Figura 3). Também as responsabilidades que são atribuídas aos alunos, em diferentes etapas do seu percurso pelo Colégio, contribuem para definir diferentemente aquele que é o papel do aluno na escola. É um caso particular disso mesmo o papel ativo dos alunos graduados (dos 11.º e 12.º anos) na integração dos alunos mais novos.

Na minha experiência prática de ensino, pude também verificar que algumas das dinâmicas das relações professor-aluno e aluno-aluno que se experimentam na sala de aula são também peculiares. O professor deve sempre tratar o aluno pelo seu último nome. Antes de cada aula, os alunos têm a obrigação de fazer uma formação ordenada à porta da sala, na qual deverão permanecer, em sentido, até à “licença” do professor para entrar. Já dentro da sala de aula, deverão aguardar pela “licença” do professor para que se sentem, a qual é transmitida ao aluno eleito como

¹ Estes foram os dados mais recentes que pude encontrar relativos à constituição da população discente e docente do Colégio Militar.

“chefe de turma” que, por sua vez, a transmite aos restantes colegas. Estes procedimentos repetem-se, no final da aula, para sair. Nas salas de aula, conservou-se o estrado junto à secretária do professor.

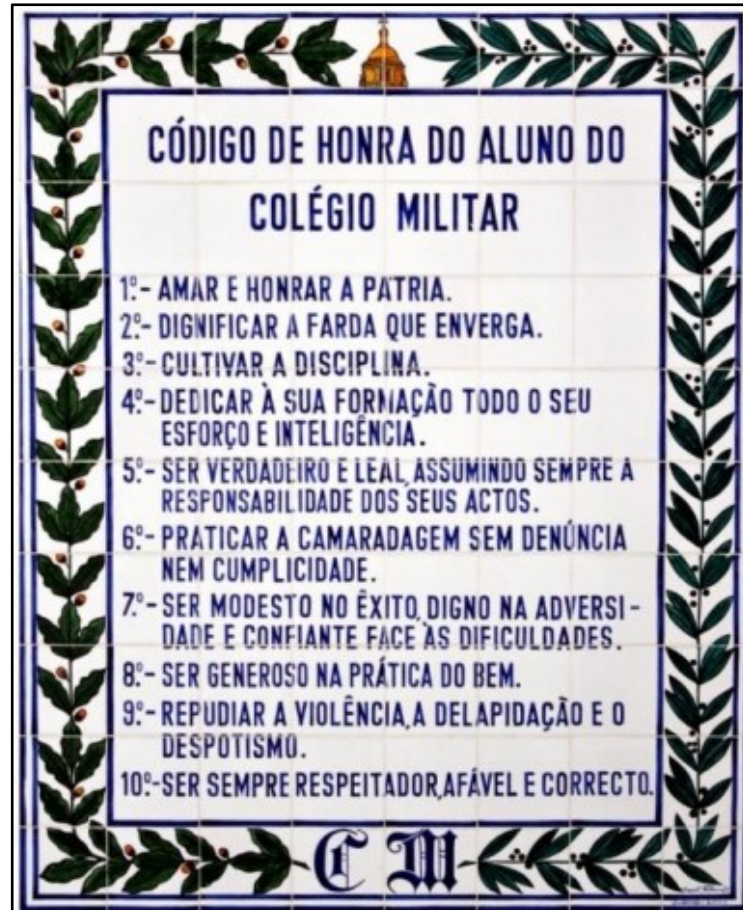


Figura 3 – Código de Honra do Aluno do Colégio Militar (Colégio Militar, 2019, p. 9)

Há dinâmicas da vida colegial dos alunos que devem ser tidas em conta pelo professor. Por exemplo, dado que os horários dos alunos já se encontram muito preenchidos com atividades de enriquecimento curricular e outras – que se relacionam, por exemplo, com a preparação das mais variadas cerimónias que fazem parte da tradição da vida colegial – torna-se inconveniente que o professor, pelo menos com regularidade, relegue parte do trabalho dos alunos para fora das aulas (com os chamados T.P.C.), ao contrário do que, ao longo dos anos, se tem tornado uma prática recorrente na maioria dos estabelecimentos de ensino. De um modo geral, procura-se que os alunos realizem o trabalho de cada disciplina na respetiva aula.

No ano letivo em que decorreu o meu estágio no Colégio Militar (2019/2020), o ano letivo estava segmentado em dois semestres.

Para os alunos do 10.º ano, a disciplina de Matemática A representava uma carga letiva semanal de 300 minutos, distribuída por 6 aulas de 50 minutos. Os alunos com fraco desempenho à disciplina eram ainda convocados para uma aula de apoio semanal com a duração de 50 minutos.

Com a suspensão das atividades letivas presenciais, a 16 de março de 2020, quando decorria o 2.º semestre letivo no Colégio, tendo as atividades letivas passado a realizar-se num modelo de ensino à distância, impuseram-se novas metodologias de trabalho, as quais foram sofrendo alterações.

Como plataforma digital, para mediar a comunicação entre professores e alunos, o Colégio utilizou o *Microsoft Teams*. Alunos e professores puderam aceder a um espaço virtual comum apenas através dos seus endereços de *e-mail* institucionais, o que o tornava num meio seguro para comunicar *online*.

Ensino à distância

A 13 de março de 2020, quando foi decretado o encerramento de todas as escolas do País, as aulas foram suspensas e os professores do Colégio receberam imediatamente instruções no sentido de dar continuidade às atividades letivas, as quais passavam pelo dever de definir e informar os alunos, e respetivos Diretores de Turma, das tarefas que os mesmos deveriam realizar autonomamente e respetivos prazos de entrega. A comunicação com os alunos deveria estabelecer-se através de *e-mail* ou da plataforma *Microsoft Teams*. Os Diretores de Turma, por sua vez, fariam chegar estas informações aos Encarregados de Educação dos alunos, para que estes pudessem acompanhar o trabalho realizado pelos seus educandos.

Inicialmente, sabia-se que os estabelecimentos de ensino permaneceriam encerrados até ao dia 1 de abril de 2020 (início das férias da Páscoa).

Como a plataforma virtual, *Microsoft Teams*, era de acesso restrito e, à época, ainda não me tinha sido concedido o acesso à mesma, não pude acompanhar as atividades dos alunos referentes à disciplina de Matemática A durante esse período anterior à Páscoa, tendo tido conhecimento dos modos em que as mesmas foram sendo desenvolvidas por intermédio da professora cooperante.

A professora cooperante informou que, ao longo das duas semanas prévias à interrupção letiva da Páscoa, foi sendo proposto aos alunos da turma que realizassem diversas tarefas do manual, assim como outras disponíveis na plataforma *Escola Virtual* da Porto Editora. Estas atividades permitiram desenvolver

e concluir aprendizagens relacionadas com o tópico do Programa (MEC, 2014a) *Monotonia, extremos e concavidade* do domínio *Funções Reais de Variável Real*. Os alunos foram enviando à professora cooperante o trabalho por eles realizado e a professora esteve sempre disponível para esclarecer dúvidas e acompanhar o trabalho dos alunos. Além disso, teve de prestar-lhes muito apoio técnico, uma vez que os alunos não se encontravam familiarizados com o funcionamento das ferramentas tecnológicas utilizadas.

No que respeita à adaptação dos alunos ao novo ambiente de comunicação, pelo *feedback* da professora cooperante, tive conhecimento de que, uma vez que os mesmos manifestaram dificuldades na utilização da plataforma virtual, a grande maioria comunicou com a professora apenas através de *e-mail*.

No período da Páscoa, através de um inquérito realizado aos professores do departamento de Matemática do Colégio, foi possível saber que a maioria das interações com os alunos, durante essas duas semanas de ensino à distância, ocorreu por *e-mail*. Inquéritos aos Encarregados de Educação dos alunos, permitiram saber que mais de 95% dos alunos dispunham de um equipamento com ligação à internet.

Entretanto, foi sabido que as aulas presenciais não seriam retomadas após a interrupção letiva da Páscoa. Comecei, então, a preparar a minha intervenção letiva de acordo com as orientações que me foram sendo transmitidas. Por essa altura, a expectativa era poder concretizar a lecionação dos tópicos programáticos por intermédio de três fichas de trabalho, compostas por diversas tarefas que os alunos deveriam realizar, as quais lhes seriam enviadas por intermédio da professora cooperante que, posteriormente, nos enviaria as resoluções produzidas pelos alunos.

Terminadas as férias da Páscoa, as atividades letivas foram retomadas, a 14 de abril, novamente à distância, e assim se realizaram até ao final do ano letivo de 2019/2020.

O Colégio criou “salas de aula” (virtuais) na plataforma *Microsoft Teams*. Foi atribuído aos alunos da turma um horário letivo semanal que previa a realização de aulas de Matemática A três vezes por semana e com a duração de 45+30 minutos. Os primeiros 45 minutos decorriam em videoconferência e destinavam-se, preferencialmente, à exposição, interação, debate e esclarecimento de dúvidas e os 30 minutos seguintes deveriam contemplar a realização de tarefas de modo autónomo.

Uma semana depois de as aulas terem sido retomadas, tendo passado a decorrer nos modos referidos, tanto ao meu colega de estágio, como às professoras orientadoras, como a mim, foi-nos concedido acesso à plataforma virtual, enquanto

utilizadores convidados. No seguimento desta mudança, a qual coincidiu com o início da intervenção pedagógica do meu colega de estágio (relacionada com o estudo de funções quadráticas e com a resolução de inequações do 2.º grau), foi decidido que a nossa intervenção letiva sofreria alterações.

Essas alterações envolveram, em parte, a nossa participação nas sessões síncronas, realizadas em videoconferência. O trabalho desenvolvido nas sessões, passaria pela orientação e acompanhamento do trabalho dos alunos na realização das diversas tarefas das três fichas de trabalho que tínhamos preparado para lhes serem enviadas.

Com o acesso à plataforma virtual, também pudemos passar a comunicar com os alunos individualmente, por *chat*, ou coletivamente, através do canal da disciplina de Matemática (página destinada a comunicar com todos os alunos da turma em simultâneo). Estes canais de comunicação viriam a ser utilizados como forma de transmitir *feedback* relativo ao trabalho enviado pelos alunos para os professores. As tarefas destinadas aos alunos deveriam ser disponibilizadas para *download*, na plataforma virtual, antes de cada sessão síncrona. O sumário e material necessário para cada sessão deveriam ser registados no canal da disciplina.

Pela hora marcada, os alunos deveriam participar nas sessões síncronas (em videoconferência) com a sua câmara e microfone desligados. De acordo com as orientações do Colégio, os alunos deveriam ligar o microfone apenas quando lhes fosse dada permissão pelo professor e as câmaras deveriam permanecer desligadas.

Para que houvesse alternância na participação oral dos alunos, foi decidido que, durante essas sessões, os professores deveriam convocá-los pelo nome, percorrendo todos os alunos da turma antes de voltar a solicitar a participação do mesmo aluno. Foi também decidido que deveria ser salvaguardado um momento, após a resolução de cada tarefa, para que os alunos pudessem, por sua iniciativa, expor dúvidas. Essa interação terminaria ao fim de 45 minutos. Durante os restantes 30 minutos, o esclarecimento de dúvidas deveria ser feito pelo *chat* (por escrito). Após as sessões e antes do fim dos prazos estabelecidos, os alunos deveriam fotografar o seu trabalho e submeter as suas resoluções pela plataforma, para que os professores lhes tivessem acesso.

No dia 18 de maio, quando já tinha iniciado a minha intervenção letiva, seguindo estes modos de trabalho, os horários das sessões síncronas sofreram alterações. A carga letiva semanal da disciplina foi novamente alterada, passando para um total de 180 minutos semanais, distribuídos por 3 aulas de 60 minutos. Por esse motivo, a primeira sessão síncrona da minha intervenção letiva teve a duração de 45 minutos e as restantes tiveram a duração de 60 minutos. Deixou de existir o

período de trabalho autónomo, após as sessões síncronas, iniciando-se um período de intervalo para os alunos.

Esta modalidade manteve-se até ao final do ano letivo.

Caracterização da turma

Neste estudo, participaram 22 alunos, com idades compreendidas entre os 15 e os 16 anos, do Colégio Militar e que, nesse âmbito, se encontravam matriculados no 10.º ano e frequentavam a disciplina de Matemática A. Todos os alunos da turma encontravam-se a frequentar a disciplina pela primeira vez. Nenhum dos alunos se encontrava referenciado como necessitando de qualquer necessidade educativa especial. A Língua Portuguesa era a Língua materna de todos, com exceção de um, de origem macaense. A turma era constituída por 14 alunos e por 8 alunas.

No âmbito das disciplinas de Iniciação à Prática Profissional III e IV, juntamente com o meu colega de estágio, tive a oportunidade de acompanhar as aulas de Matemática A da turma, desde o início do ano letivo. A nossa participação nessas aulas, passou, essencialmente, pelo apoio aos alunos nos momentos dedicados à realização de tarefas de modo autónomo. Ainda assim, durante o 1.º semestre letivo, no âmbito da disciplina de Iniciação à Prática Profissional III, tivemos ocasião de conduzir três aulas da turma, uma delas em parceria. Ocasionalmente, foi-nos também dada a oportunidade de conduzir o primeiro momento das aulas, dedicado à exposição de conteúdos.

Geralmente, as aulas de Matemática envolviam um momento inicial para exposição de conteúdos, envolvendo novos conhecimentos que os alunos deveriam adquirir. Frequentemente, a professora projetava as páginas do manual escolar numa tela, para que os alunos acompanhassem, desse modo, a sua explicação. Nesses momentos, a professora interagiu com os alunos colocando-lhes questões. Seguiu-se um período destinado à realização de tarefas. Para realizá-las, os alunos deveriam mobilizar os conhecimentos adquiridos durante o primeiro momento da aula. À medida que os alunos iam concluindo as tarefas propostas, a professora solicitava a alguns deles que se dirigissem ao quadro para que, ali, registassem as suas resoluções. Se se verificassem dúvidas relativamente às resoluções apresentadas, a professora explicava-as à turma.

No que respeitava à postura dos alunos em aula, a turma era algo heterogénea. Alguns alunos eram empenhados na realização das atividades propostas pela professora, conseguindo manter-se concentrados durante a aula e solicitando acompanhamento a fim de avançar com o seu trabalho. Outros revelavam-se

participativos durante momentos de discussão coletiva de raciocínios – que por vezes se geravam quando eram apresentadas as resoluções para os problemas propostos – mas manifestavam dificuldades em permanecer concentrados, dispersando frequentemente a sua atenção e procedendo a um registo descuidado do trabalho da aula. Outros ainda revelavam pouco interesse pelas atividades da aula, conversando sobre temas que não se relacionavam com os tópicos em aprendizagem. Quando abordados, estes alunos confessavam a sua falta de compreensão dos conteúdos em aprendizagem.

A turma era algo ruidosa, manifestava dificuldades em participar de forma ordenada em discussões e, de um modo geral, os alunos revelavam preferência por desenvolver as suas aprendizagens e por realizar as tarefas propostas a pares e auxiliados por um professor.

No que respeitava ao desenvolvimento de trabalho de modo autónomo, os alunos manifestavam grandes dificuldades. Faziam notar a sua necessidade de um acompanhamento próximo, solicitando constantemente o apoio dos professores, quer para validação imediata dos seus raciocínios, quer para ajudá-los a iniciar ou realizar as tarefas propostas. Verificava-se que um grande número de alunos não realizava o trabalho proposto a menos que tivessem um dos professores a acompanhá-los.

Na aprendizagem de novos conteúdos, que exigiam a mobilização de conhecimentos adquiridos em anos letivos anteriores, as participações dos alunos denotavam que, na sua maioria, os mesmos aplicavam procedimentos para resolver problemas com pouca compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. A maioria dos alunos evidenciava lacunas na aprendizagem, o que requeria, frequentemente, uma revisão de conteúdos para colmatar essas carências.

A partir de dados relativos à avaliação de alguns dos alunos da turma no 9.º ano (Figura 4), foi possível constatar que mais de metade dos alunos da turma transitaram para o 10.º ano com uma nota final a Matemática equivalente ao nível 3 (conversão para a escala de 1 a 5) e que pelo menos dois alunos transitaram do 9.º ano com uma classificação negativa equivalente ao nível 2.

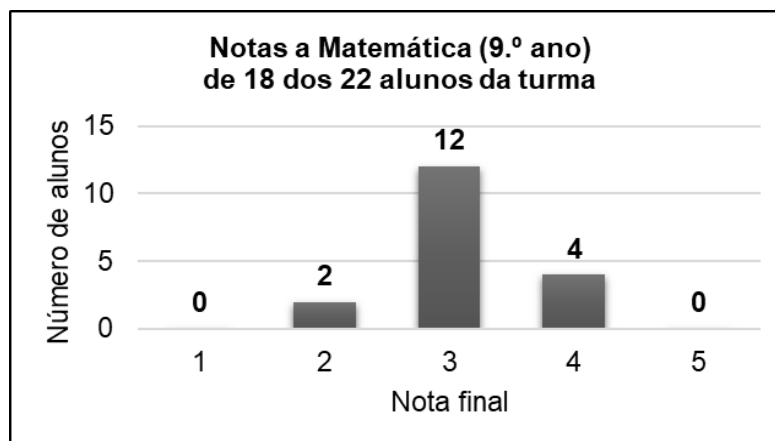


Figura 4 – Notas a Matemática (9.º ano) de alguns dos alunos da turma, convertidas para a escala 1-5

É possível ter uma noção global das classificações obtidas pelos alunos nos testes de avaliação sumativa de Matemática A, realizados no 1.º semestre do 10.º ano (em aulas presenciais), por análise da Figura 5. Na figura, é apresentada a distribuição da média das classificações dos 22 alunos, determinada através do cálculo da média aritmética das classificações obtidas por cada aluno nos 3 testes realizados durante o 1.º semestre letivo.

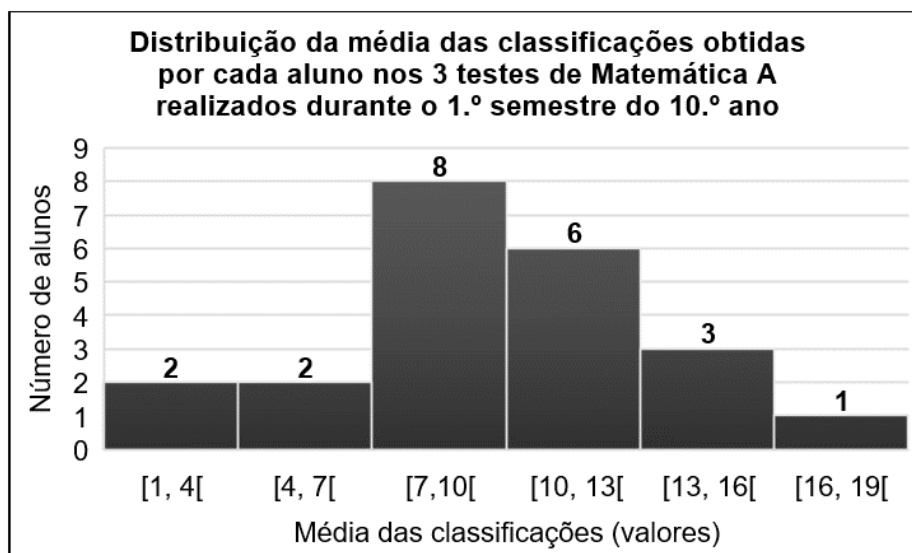


Figura 5 – Resultados em testes dos alunos da turma, no 1.º semestre do 10.º ano

Os resultados em testes sugerem um desempenho medíocre a fraco dos alunos da turma durante o 1.º semestre, dado que mais de metade dos alunos teve uma média negativa, inferior a 10 valores, e apenas 4 alunos tiveram uma média superior ou igual a 13 valores.

Na turma, constatei existir uma pequena minoria de alunos que revelava uma base de conhecimentos matemáticos sólida, pelas suas participações em aula e pelo trabalho que aí realizavam. As intervenções em aula desses alunos – que prontamente e com clareza partilhavam os seus raciocínios ou colocavam questões – muito a enriqueciam e eram reveladoras de sentido crítico durante o processo de aprendizagem. Destacaria que um dos alunos da turma alcançou sempre classificações superiores a 17 valores em testes de avaliação sumativa, durante o 1.º semestre, não convergindo com o desempenho global da turma nestas provas.

Excetuando um dos alunos da turma, os restantes frequentavam o Colégio Militar em regime de internato até à data em que foi decretada a suspensão das atividades letivas presenciais. Parece-me importante referir este aspeto, muito embora, durante a prática de ensino supervisionada, e em virtude das circunstâncias, os alunos já não pernoitassem no Colégio. É que, para estes alunos, o encerramento das escolas não só impôs a alteração do contexto em que os mesmos passaram a desenvolver as suas atividades letivas – algumas das quais foram interrompidas –, como alterou completamente o contexto em que os alunos viviam durante a semana escolar.

Por exemplo, habitualmente, os alunos tinham muito pouca autonomia na gestão do seu tempo, tendo praticamente todo dia preenchido com atividades, para as quais lhes eram impostos horários rígidos. Além disso, realizavam todas essas atividades conjuntamente com os seus pares. Por motivos como estes, considero que, para estes alunos, o encerramento das escolas possa ter imposto uma mudança acentuada nas dinâmicas do seu dia-a-dia e nas expectativas que recaíam sobre o seu papel enquanto alunos.

Com o encerramento do Colégio, passou a ser exigido que os alunos realizassem parte do seu trabalho de forma autónoma. Para tal, os seus horários letivos passaram a contemplar intervalos mais longos entre as aulas e o período letivo diário foi também reduzido. Estas mudanças vieram atribuir muito maior autonomia aos alunos na gestão do seu tempo. Anteriormente, no Colégio, os alunos tinham pouco tempo livre e, por isso, como já referido, procurava-se que realizassem grande parte do seu trabalho para cada disciplina no decurso das aulas. Com o ensino à distância, os alunos passaram a ser responsabilizados, diariamente, pela realização de trabalho de forma autónoma e fora das aulas.

Antes de iniciar a minha intervenção letiva, tive ocasião de assistir às sessões síncronas conduzidas pelo meu colega de estágio, no âmbito da sua prática de ensino supervisionada com esta mesma turma, e com a participação ativa da

professora cooperante. Estas foram as únicas aulas “à distância” que presenciei antes da minha intervenção.

Nessas sessões, pude notar que os alunos se tornaram menos participativos no desenvolvimento das aulas. Quando comparando com o regime de ensino presencial, nesse novo regime, ao contrário do que se verificava nas aulas presenciais, a maioria dos alunos deixou de colocar questões e só ocasionalmente expunha dúvidas. Os alunos que espontaneamente colocavam dúvidas eram sempre os mesmos, abstendo-se os restantes de intervir nesse sentido.

Outro aspeto que condicionou o desenvolvimento das aulas, diferenciando-as das aulas presenciais, foi, por exemplo, o facto de ter sido uma aluna com particulares dificuldades na apropriação de conhecimentos aquela que, por sua iniciativa, mais intervinha nas sessões. O desenvolvimento das aulas passou a ser mais condicionado pelo ritmo de aprendizagem dessa aluna, o que não acontecia em regime presencial, em que os professores procuravam revezar-se para fazerem um acompanhamento próximo da aluna, sem prejuízo para o ritmo médio de trabalho e de aprendizagem da turma.

Tirando este caso particular, os outros alunos com mais dificuldades à disciplina, abstiveram-se completamente de participar por sua iniciativa. Também se verificou que eram precisamente esses alunos que apresentavam constantemente constrangimentos técnicos que os impediam de comunicar de outro modo que não por escrito, no *chat*. A sua participação nas aulas foi, assim, muito limitada.

Durante as sessões síncronas, os alunos da turma comunicavam por escrito ou oralmente e, fora delas, exclusivamente por escrito, tendo sido muito poucos os alunos que utilizaram a plataforma virtual para esclarecer dúvidas ou requerer orientação para a realização de trabalho de modo autónomo. Os alunos que, fora das sessões, se mantiveram participativos através desse canal de comunicação com os professores foram aqueles que, ao longo do ano, tinham evidenciado um melhor aproveitamento à disciplina, por comparação com os restantes colegas.

Apesar disso, o desempenho dos alunos nas provas de avaliação sumativa envolvendo conteúdos lecionados em regime não presencial melhorou. Para uma perspetiva da evolução do desempenho académico da turma ao longo do ano, segue-se um gráfico que permite estabelecer comparações entre as classificações atribuídas aos alunos nos 1.º e 2.º semestres. Por observação do gráfico da Figura 6, é possível estabelecer que se verificou um aumento generalizado das notas dos alunos. Do 1.º para o 2.º semestre, a média das notas atribuídas aos alunos subiu de 11,18 valores para 13,32 valores. Enquanto, no 1.º semestre, 14 alunos da turma

tiveram uma nota igual ou inferior a 11 valores, no 2.º semestre, isso só se verificou para 4 alunos.

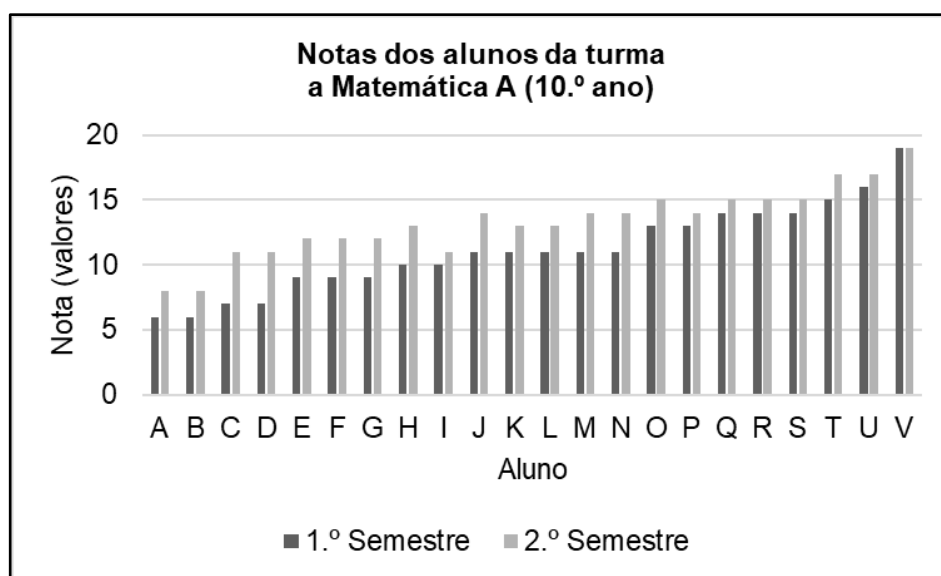


Figura 6 – Notas dos alunos da turma a Matemática A (10.º ano)

3.2. Ancoragem da Unidade Didática

A unidade didática lecionada, no âmbito da minha prática de ensino supervisionada, esteve ancorada no Programa e Metas Curriculares (MEC, 2014a) da disciplina de Matemática A para o 10.º ano, tendo incluído os seguintes conteúdos programáticos do domínio *Funções Reais de Variável Real (FRVR)*:

- Estudo da função $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$);
- Equações e inequações envolvendo a composição da função módulo com funções afim e com funções quadráticas;
- Resolução de problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real;
- Resolução de problemas envolvendo as funções quadráticas, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.

Além disso, a unidade didática foi concebida com o objetivo de promover a consecução dos seguintes objetivos de aprendizagem definidos nas Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018, p. 6):

- Reconhecer, representar e interpretar graficamente funções reais de variável real e funções definidas por expressões analíticas e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação.
- Reconhecer e interpretar as propriedades geométricas dos gráficos de funções e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação.
- Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções definidas por ramos e a função módulo e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação.
- Expressar, oralmente e por escrito, ideias, com precisão e rigor, e explicar e justificar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia).

Primeiramente, na incerteza de saber se me seria dado acesso à plataforma virtual, *Microsoft Teams*, por parte da instituição escolar, para poder comunicar com os alunos da turma, foi decidido, em parceria com a professora cooperante, que a unidade didática deveria ser concebida para ser lecionada através da aplicação de três fichas de trabalho, as quais seriam propostas aos alunos por intermédio da professora cooperante. Num plano inicial, a planificação da unidade didática (Tabela 1) esteve em linha com esta orientação. Incluía, ainda, a realização de uma questão-aula para avaliação das aprendizagens.

Tabela 1 – Planificação inicial da unidade didática

Ficha de Trabalho	Tópicos
N.º 1 (Anexo A)	<ul style="list-style-type: none"> • Módulo de um número real; • Equações e inequações com módulos.
N.º 2 (Anexo C)	<ul style="list-style-type: none"> • Significado geométrico de $a - b$; • Equações $x - a = x - b$ e inequações $x - a \geq x - b$.
N.º 3 (Anexo E)	<ul style="list-style-type: none"> • Estudo gráfico e analítico de funções definidas por expressões com módulos.
Questão-aula (Anexo J)	<ul style="list-style-type: none"> • Avaliação sumativa das aprendizagens.

Na conceção das fichas de trabalho, tive também bem presentes as finalidades do ensino da disciplina estabelecidas no Programa (MEC, 2014a), reforçadas por

alguns dos objetivos de aprendizagem definidos nas Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018), nomeadamente, incentivando os alunos a envolverem-se em algumas atividades que lhes permitissem explorar aplicações da Matemática ao mundo real, desenvolver o seu raciocínio abstrato, comunicar os seus raciocínios e desenvolver competências de utilização da tecnologia. Além disso, tive em mente que não poderia comunicar diretamente com os alunos da turma, por isso, procurei incluir, além dos enunciados das tarefas, comentários que pudessem facilitar a orientação do seu trabalho, sugestões para a realização de algumas atividades, bem como questões orientadoras.

No planeamento da unidade didática, optei por propor uma abordagem aos vários tópicos programáticos por uma ordem distinta da qual se encontravam sequenciados Programa (MEC, 2014a). Na sua estruturação, elegi como ponto de partida a revisão do conceito de módulo, enfatizando o seu significado, através de representações na reta numérica, por considerar que esta abordagem promoveria o desenvolvimento de raciocínios geométricos que permitiriam aos alunos desenvolver autonomamente estratégias de resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos. A revisão de estudos em Ensino da Matemática relativos às aprendizagens desses tópicos, apresentada no segundo capítulo deste relatório, justifica a ênfase que procurei dar ao desenvolvimento de raciocínios sustentados no significado geométrico do conceito de módulo e apoiados em representações visuais na reta numérica.

Em seguida, optei por trabalhar imediatamente o tópico programático de *resolução de equações e inequações envolvendo módulos*, tratando-as, respetivamente, como igualdades e desigualdades de expressões algébricas, não associando essas expressões a funções.

Dado que as Metas Curriculares (MEC, 2014a) não previam a introdução de quaisquer propriedades do módulo de um número real, decidi não centrar o processo de aprendizagem no reconhecimento das mais variadas propriedades, nem apresentar sistematizações de algoritmos analíticos de resolução de equações e de inequações envolvendo módulos, com o intuito de não conduzir os alunos a aplicar procedimentos para resolver esse tipo de problemas de forma procedimental e irrefletida.

Decidi incluir na unidade didática a exploração do significado geométrico do módulo de uma diferença de dois números reais como forma de promover o desenvolvimento de raciocínios geométricos para resolver equações do tipo $|x - a| = |x - b|$ ou inequações do tipo $|x - a| \geq |x - b|$. Foi com base na exploração do significado geométrico do módulo de uma diferença que introduzi o estudo de

funções definidas por expressões envolvendo módulos. O mesmo requereu, inicialmente, o recurso a tecnologia gráfica, cuja utilização era advogada pelo Programa (MEC, 2014a).

Só então, propus o estudo de funções da família $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$).

Este estudo iniciou-se com a representação por diagrama de setas da associação estabelecida pela função real de variável real $x \rightarrow |x|$. Partindo da definição analítica por ramos do módulo de um número real (a qual considerei conveniente que fossem os alunos a estabelecer), introduzi o gráfico cartesiano dessa função – com base numa análise das expressões que definem a função em diferentes intervalos do seu domínio – e evidenciei algumas características gerais (zero, sinal, monotonia, extremo, eixo de simetria e paridade) facilmente identificáveis através de uma análise gráfica. Em seguida, decidi propor aos alunos uma atividade de exploração que os incentivava a extrair conclusões relativas à representação gráfica de funções da família $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) e a características dessas funções (coordenadas do vértice do gráfico, contradomínio, tipo de extremo) por análise das suas expressões analíticas. Os alunos poderiam realizar essa atividade convocando os seus conhecimentos sobre as transformações do gráfico de uma função – que, no Programa (MEC, 2014a), precediam o estudo da função módulo. Ainda assim, incentivei-os a utilizarem a calculadora, como auxiliar, para representarem graficamente as funções consideradas, por crer que seria importante que os alunos se fossem familiarizando com as potencialidades gráficas das suas calculadoras. O próprio Programa propunha a utilização da calculadora com esse fim, isto é, para que os alunos testassem “o resultado de variações de parâmetros em classes de funções” (MEC, 2014a, p.29). Em seguida, propus um estudo geral de uma função dessa mesma família e de outras duas funções resultantes da composição da função módulo com funções afim e quadráticas. Para terminar, propus a concretização de definições por ramos (sem utilizar o símbolo de módulo) de algumas funções reais de variável real x do tipo $x \rightarrow a|P(x)| + c$ ($a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) em que $P(x)$ é um polinómio do 1.º grau, procurando explorar um pouco uma articulação entre os tópicos do Programa: *função módulo e funções definidas por ramos*.

Por uma questão de contextualização, importa referir que, aquando da minha intervenção pedagógica, os alunos da turma ainda não tinham feito o estudo de polinómios previsto para o 10.º ano, em conformidade com a planificação do Colégio Militar que estipulava que esse estudo se iniciasse apenas depois do estudo das funções. No Colégio Militar, a planificação anual da disciplina estava dividida em dois

temas, *Geometria* (1.º semestre) e *Funções* (2.º semestre), estando em linha com as Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018). Contemplava também a resolução de problemas envolvendo algumas propriedades das operações com radicais e potências de expoente natural, as quais já tinham sido trabalhadas pelos alunos no início do ano letivo, e de potências de expoente racional. Os temas da *Lógica e Teoria de Conjuntos* foram introduzidos em articulação com os outros temas da disciplina e à medida que foram sendo necessários, não tendo sido trabalhados com o detalhe proposto pelas Metas Curriculares (MEC, 2014a).

O tópico *funções definidas por ramos* não foi incluído no conjunto dos conteúdos do currículo que, por decisão da professora cooperante, me caberia lecionar. Os conteúdos relacionados com esse tópico programático foram trabalhados pela professora cooperante na aula que antecedeu a minha intervenção letiva. Nessa aula, a partir da análise de alguns exemplos, os alunos ganharam consciência de que, por vezes, para definir analiticamente uma dada função é conveniente fazer uma partição do seu domínio. Além disso, definiram analiticamente por ramos uma função partindo da sua representação gráfica. Esse conhecimento prévio revelou-se importante para a compreensão de alguns tópicos abordados na unidade didática que lecionei.

Relativamente aos conhecimentos prévios requeridos dos alunos para apoiar novas aprendizagens, destacarei os mais relevantes. Do domínio da *Lógica e Teoria dos Conjuntos*, a unidade didática pressupunha que os alunos atingissem compreensão do valor lógico de uma proposição, do conceito de condição e conjunto solução de uma condição, para que fossem capazes de classificar condições (como impossíveis, possíveis, universais), assim como conhecer propriedades da disjunção e da conjunção. No domínio da *Álgebra*, foi requerido que os alunos soubessem aplicar princípios de equivalência de equações e de inequações, assim como operar com polinómios de primeiro grau, para resolver as várias equações e inequações. Estes últimos conteúdos remontam ao ensino básico. Pontualmente, foram exigidos conhecimentos relativos a propriedades muito simples das operações com potências ou radicais para simplificar expressões algébricas. Do domínio da *Geometria*, destaco a fórmula para o cálculo da abcissa do ponto médio de um segmento de reta definido na reta numérica, para a resolução de equações do tipo $|x - a| = |x - b|$ com a e b conhecidos. Por último, do domínio das *Funções Reais de Variável Real*, os alunos deveriam mobilizar conhecimentos envolvendo: generalidades acerca de funções, como o domínio, contradomínio, zeros, intervalos de monotonia e extremos; transformações do gráfico de uma função, nomeadamente, reflexões e translações do gráfico de uma função; interpretar a expressão analítica de uma função definida

por ramos; e utilizar a calculadora para representar graficamente funções e determinar os seus extremos.

Como referido, a unidade didática não foi planeada para incluir a realização de aulas (sessões síncronas). No entanto, já depois da conceção das fichas de trabalho, foi-me concedido acesso à plataforma virtual do Colégio. Assim, pude, afinal, participar em sessões síncronas, realizadas em videoconferência através dessa plataforma virtual, e, com apoio da professora cooperante, orientar o trabalho dos alunos na realização das fichas de trabalho durante essas sessões.

Em virtude dessas alterações relacionadas com os modos de trabalho, a planificação da unidade didática foi adaptada ao horário semanal das aulas de Matemática A da turma. Pela proximidade desta alteração com a data da intervenção letiva, essa adaptação passou muito pela repartição das atividades das fichas de trabalho que haviam sido preparadas por várias sessões síncronas. A planificação final da unidade didática lecionada foi a que é apresentada na Tabela 2. Os objetivos de ensino-aprendizagem definidos para cada aula/sessão têm respaldo nos principais documentos curriculares à época da minha intervenção letiva (DGE, 2018; MEC, 2014a).

A unidade didática acabou por ser composta por um total de 8 aulas síncronas, incluindo um momento de avaliação, as quais tiveram a duração de 60 minutos, com exceção da primeira, a qual teve a duração de 45 minutos – como consta na Tabela 2. Os planos das aulas síncronas lecionadas são apresentados em anexo (Anexos M a T).

Ao planear a leção da unidade didática, procurei antecipar dificuldades dos alunos no desenvolvimento de raciocínios e de aprendizagens e refleti sobre como poderia ajudá-los a superar essas mesmas dificuldades. Nos planos das aulas síncronas que anexo a este relatório (Anexos M a T), registei estratégias de apoio à atividade dos alunos e a possíveis dificuldades que pudessem emergir durante a aprendizagem – e que resultaram desse trabalho de reflexão.

Tabela 2 – Planificação da unidade didática

Aula síncrona	Tópicos	Objetivos de ensino-aprendizagem	Atividades
<p>N.º 1 45 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Definição e significado geométrico de <i>Módulo</i>; • Resolução de equações envolvendo expressões com módulos. 	<p>Objetivos de aprendizagem:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer o «módulo» de um número real x como a distância medida entre o ponto que representa x e o 0, na reta numérica; • Reconhecer que o módulo de um número real, x, é igual a x, se x não for negativo, ou a $-x$, se x for negativo; • Resolver equações do tipo $a x + b = c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$); • Utilizar linguagem matemática para comunicar e fundamentar conclusões; • Desenvolver autonomia e raciocínio matemático (classificação, comparação, generalização, identificação de padrões, justificação, validação). <p>Principais estratégias de ensino:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Envolver os alunos em atividades de exploração para fazerem descobertas; • Propor a resolução de problemas e a concretização de sistematizações; • Questionar oralmente os alunos, solicitando a explicação dos seus raciocínios e a justificação das suas conclusões; • Propor a concretização de representações de diferentes tipos, nomeadamente algébricas e na reta numérica; • Propor a realização de trabalho de modo autónomo e independente (TPC). 	<p>Ficha de Trabalho N.º 1: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4</p>

Aula síncrona	Tópicos	Objetivos de ensino-aprendizagem	Atividades
<p>N.º 2 60 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos. 	<p>Objetivos de aprendizagem:</p> <ul style="list-style-type: none"> Resolver equações do tipo $P(x) = k$, em que $P(x)$ é um polinómio do 1.º ou do 2.º grau; Resolver inequações do tipo $a P(x) + b \geq c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) e do tipo $a P(x) + b \leq c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) em que $P(x)$ é um polinómio do 1º grau; Utilizar linguagem matemática para comunicar e fundamentar conclusões; Desenvolver autonomia e raciocínio matemático (classificação, comparação, identificação de padrões, validação). <p>Principais estratégias de ensino:</p> <ul style="list-style-type: none"> Envolver os alunos em atividades de exploração para fazerem descobertas; Propor a resolução de problemas; Propor a concretização de representações de diferentes tipos, nomeadamente algébricas e na reta numérica; Solicitar aos alunos que expliquem os seus raciocínios e fundamentem as suas respostas/conclusões; Propor a realização de trabalho de modo autónomo e independente (TPC). 	<p>Ficha de Trabalho N.º 1:</p> <p>1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9</p>

Aula síncrona	Tópicos	Objetivos de ensino-aprendizagem	Atividades
<p>N.º 3 60 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Significado geométrico de $a - b$; • Resolução de equações e de inequações do tipo $x - a = x - b$ e $x - a > x - b$, respetivamente; • Aplicação do significado geométrico do módulo da diferença de dois números reais à resolução de um problema de modelação em contexto real – introdução da tarefa. 	<p>Objetivos de aprendizagem:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer que a distância entre os pontos da reta numérica que representam dois números reais, a e b, é igual a $b - a$ e a $a - b$; • Resolver equações e inequações do tipo $x - a = x - b$ e $x - a > x - b$; • Utilizar linguagem matemática para comunicar e fundamentar conclusões; • Desenvolver autonomia e raciocínio matemático (comparação, generalização, identificação de padrões, justificação). <p>Principais estratégias de ensino:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Envolver os alunos em atividades de exploração para fazerem descobertas; • Propor a resolução de problemas e a concretização de sistematizações; • Propor a concretização de representações de diferentes tipos, nomeadamente algébricas e na reta numérica; • Questionar oralmente os alunos, solicitando a explicação dos seus raciocínios e a justificação das suas conclusões; • Propor a realização de trabalho de modo autónomo e independente (TPC). 	<p>Ficha de Trabalho N.º 2: 2.1, 2.2, 2.3, 2.4</p>

Aula síncrona	Tópicos	Objetivos de ensino-aprendizagem	Atividades
<p>N.º 4 60 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Correção do trabalho de casa e esclarecimento de dúvidas; • Função módulo; • Transformações do gráfico da função módulo. 	<p>Objetivos de aprendizagem:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer a importância da Matemática para a compreensão e previsão de fenómenos reais; • Desenvolver estratégias gráficas de resolução de problemas envolvendo funções definidas, analiticamente, por expressões com módulos e desenvolver sentido crítico relativamente à utilização da tecnologia e às suas limitações; • Reconhecer simetrias nos gráficos de funções, identificar os intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos e determinar os zeros de uma função; • Identificar os extremos de uma função real de variável real e interpretá-los no contexto de um problema; • Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a x - b + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$), interpretando geometricamente os valores a, b e c; • Utilizar linguagem matemática para comunicar e fundamentar conclusões; • Desenvolver raciocínio matemático (comparação, formulação de conjecturas, generalização, identificação de padrões, justificação, validação) . <p>Principais estratégias de ensino:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Envolver os alunos em atividades que envolvam a construção de modelos para resolver problemas com contexto real, e testes de conjecturas; • Questionar oralmente os alunos, solicitando a explicação dos seus raciocínios e a justificação das suas conclusões; • Tirar partido da utilização da tecnologia gráfica para fazer verificações e/ou resolver problemas; • Advertir os alunos para alguns dos cuidados a ter na utilização da calculadora e sensibilizá-los para a possibilidade de não conseguirem obter resultados exatos quando utilizam essa ferramenta. 	<p>Ficha de Trabalho N.º 2: 2.4</p> <p>Ficha de Trabalho N.º 3: 3.1, 3.2</p>

Aula síncrona	Tópicos	Objetivos de ensino-aprendizagem	Atividades
<p>N.º 5 60 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Estudo de uma função do tipo: $f(x) = a x - b + c$; • Gráfico de $f(x)$. 	<p>Objetivos de aprendizagem:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolver problemas envolvendo funções do tipo $f(x) = a x - b + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$); • Representar graficamente funções que resultem da composição da função módulo com funções polinomiais do 1.º grau; • Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a x - b + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), interpretando o geometricamente os valores a, b e c; • Desenvolver estratégias de resolução de problemas envolvendo a função módulo e desenvolver sentido crítico relativamente à utilização da tecnologia e suas limitações; • Reconhecer simetrias nos gráficos de funções, identificar os intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos e determinar os zeros de uma função; • Utilizar linguagem matemática para comunicar e fundamentar conclusões; • Desenvolver autonomia e raciocínio matemático (validação). <p>Principais estratégias de ensino:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Propor a resolução de problemas que promovam a mobilização de conhecimentos para realizar novas aprendizagens, e também o recurso a estratégias de resolução diversas; • Propor a concretização de sistematizações; • Tirar partido da utilização da tecnologia para fazer verificações e resolver problemas; • Pedir aos alunos que expliquem os seus raciocínios e fundamentem as suas respostas/conclusões. • Propor a realização de trabalho de modo autónomo (TPC). 	<p>Ficha de Trabalho N.º 3: 3.1, 3.2, 3.3</p>

Aula síncrona	Tópicos	Objetivos de ensino-aprendizagem	Atividades
<p>N.º 6 60 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Estudo gráfico de funções $x \rightarrow f(x)$; • Resolução gráfica equações e de inequações envolvendo expressões com módulos. 	<p>Objetivos de aprendizagem:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representar e analisar graficamente funções que resultem da composição da função módulo com funções polinomiais dos 1.º e 2.º graus para resolver problemas; • Desenvolver estratégias de resolução de problemas envolvendo a função módulo; • Reconhecer intervalos de monotonia, zeros e sinal de uma função e usá-los na resolução de problemas; • Utilizar linguagem matemática para comunicar e fundamentar conclusões; • Desenvolver autonomia e raciocínio matemático (exemplificação, validação). <p>Principais estratégias de ensino:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Propor a resolução de problemas que promovam a mobilização de conhecimentos para realizar novas aprendizagens, e também o recurso a estratégias de resolução diversas; • Questionar oralmente os alunos, solicitando a explicação dos seus raciocínios e a justificação das suas conclusões; • Propor a realização de trabalho de modo autónomo e independente (TPC). 	<p>Ficha de Trabalho N.º3: 3.3</p>

Aula síncrona	Tópicos	Objetivos de ensino-aprendizagem	Atividades
<p>N.º 7 60 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Definição analítica por ramos de funções definidas por expressões envolvendo módulos; • Esclarecimento de dúvidas para a questão-aula; • Resolução de exercícios. 	<p>Objetivos de aprendizagem:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Definir algebricamente por ramos (e sem usar o símbolo de módulo) funções do tipo $f(x) = a P(x) + k$ ($a, k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) em que $P(x)$ é um polinómio do 1º grau em x; • Desenvolver a autonomia. <p>Principais estratégias de ensino:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Propor a realização de exercícios e de problemas; • Questionar os alunos quanto à existência de dúvidas e à necessidade de esclarecimentos; • Propor a realização de trabalho de modo autónomo e independente (TPC). 	<p>Ficha de Trabalho N.º 3: 3.4</p> <p>Ficha de exercícios de consolidação: 1.4, 2, 3, 5, 6, 7</p>
<p>N.º 8 60 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Avaliação sumativa. 	<ul style="list-style-type: none"> • Avaliar os conhecimentos adquiridos e as capacidades desenvolvidas para resolver exercícios e problemas. 	<p>Questão-aula</p>

3.3. Conceitos Matemáticos Envolvidos

Módulo de um número real

Definição 1: O módulo de um número real x , representado pela expressão $|x|$, é definido como a distância entre os pontos que representam x e 0 na reta numérica.

Como a distância é uma grandeza escalar não negativa, conclui-se rapidamente que

$$|x| \geq 0.$$

Da Definição 1, decorrem imediatamente as seguintes propriedades:

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|x| = |-x|$
3. $|x| \geq x$
4. $|a - b| = |b - a|$

para quaisquer a, b e $x \in \mathbb{R}$.

Geometricamente, $|a - b|$ ou $|b - a|$ representa a distância entre os pontos da reta numérica que representam a e b .

Dado que $|x|$ corresponde à distância de x a 0 ,

1. Se $x \geq 0$, então:

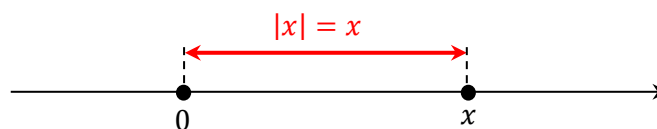


Figura 7 – Representação de $|x|$ para $x > 0$ na reta numérica

2. Se $x < 0$, então:

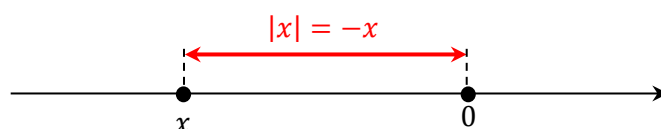


Figura 8 – Representação de $|x|$ para $x < 0$ na reta numérica

Definição 2: Seja x um número real. O módulo de x , representado por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proposição 1: Quaisquer que sejam os números reais a, b e x , tem-se que

1. Se $a > 0$, então $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.
2. Se $a > 0$, então $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
3. $|x|^2 = |x^2| = x^2$.
4. $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$.
5. Se $a > 0$, então $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$.
6. Se $a > 0$, então $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$.

Demonstração:

1. Pela Definição 1, as soluções da inequação $|x| < a$ correspondem, na reta numérica, aos pontos cuja distância a 0 é menor que a , ou seja, todos os pontos mais próximos de 0 do que a e do que $-a$ (uma vez que a e $-a$ ficam à distância a de 0).

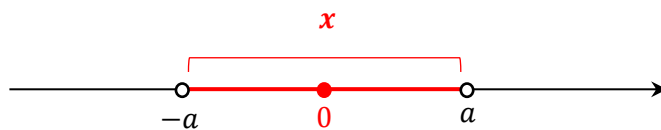


Figura 9 – Representação do conjunto solução, em \mathbb{R} , da inequação $|x| < a$ para $a > 0$

Interpretando geometricamente a condição $|x| < a$, torna-se evidente que, se $a > 0$, as condições $|x| < a$ e $-a < x < a$ definem o mesmo conjunto. Ou seja,

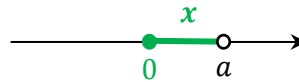
$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

Em alternativa, a equivalência pode ser demonstrada por um processo analítico.

Suponhamos que $a > 0$ e que $|x| < a$.

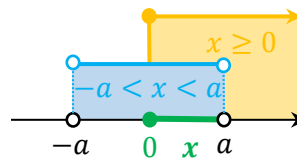
Se $x \geq 0$, da Definição 2 vem que $|x| = x$ e, portanto, $|x| < a$ é equivalente a

$$0 \leq x < a.$$



Uma vez que $-a < 0$ e, no caso que estamos a considerar, $x \geq 0$, pode ser estabelecida uma equivalência entre a condição anterior e

$$-a < x < a.$$

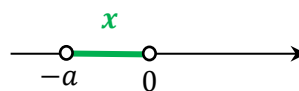


Se $x < 0$, da Definição 2 vem que $|x| = -x$ e, portanto, $|x| < a$ é equivalente a

$$-x < a$$

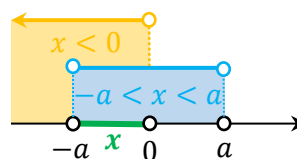
que é, ainda, equivalente a

$$-a < x < 0.$$



Uma vez que $a > 0$ e, no caso considerado, $x < 0$, a condição anterior é equivalente a

$$-a < x < a.$$



Portanto, conclui-se que

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

Mas veja-se como este último raciocínio é mais complicado e como foi tão evidente a conclusão quando se adotou um raciocínio geométrico baseado no significado do conceito de módulo.

2. Suponhamos que $a > 0$ e que

$$|x| \leq a.$$

A condição anterior é equivalente a

$$|x| < a \vee |x| = a,$$

o que, pelo item 1, é equivalente a

$$-a < x < a \vee x = a \vee x = -a.$$

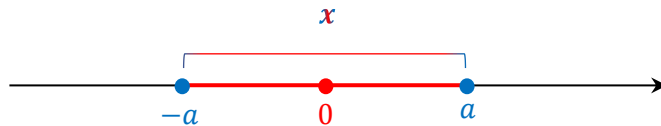


Figura 10 – Representação, na reta numérica, do conjunto solução, em \mathbb{R} , da inequação $|x| \leq a$ para $a > 0$

Logo,

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

Geometricamente, torna-se evidente que os únicos pontos da reta numérica que distam a ou menos unidades do 0 são os pontos que representam $-a$, a ou qualquer um dos reais compreendidos entre $-a$ e a .

3. Sendo $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pela Definição 2 de módulo de um número real, tem-se que:

$$|x^2| = x^2.$$

Resta mostrar que

$$|x|^2 = x^2.$$

Se $x \geq 0$, então $|x| = x$ e, portanto,

$$|x|^2 = x^2.$$

Se $x < 0$, então $|x| = -x$ e, portanto,

$$|x|^2 = (-x)^2 = x^2.$$

4. Suponhamos que

$$a^2 > b^2.$$

Do item 3 tem-se que $|a|^2 = a^2$ e que $|b|^2 = b^2$. Logo,

$$a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a|^2 > |b|^2 \Leftrightarrow |a|^2 - |b|^2 > 0 \Leftrightarrow (|a| - |b|)(|a| + |b|) > 0.$$

Uma vez que $|b| \geq 0$ e que $|a| > 0$, deduz-se que $|a| + |b| > 0$. Portanto, o produto será positivo se, e somente se,

$$|a| - |b| > 0.$$

Ou, equivalentemente,

$$|a| > |b|.$$

Assim, conclui-se que

$$a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|.$$

5. Seja $a > 0$.

Pela Definição 1, as soluções da inequação $|x| > a$ correspondem, na reta numérica, aos pontos cuja distância a 0 é maior que a , ou seja, todos os pontos mais distantes de 0 do que a e do que $-a$ (uma vez que a e $-a$ ficam à distância a de 0).

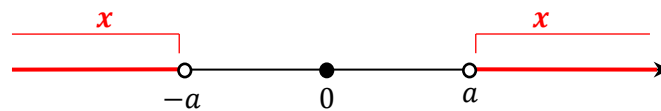


Figura 11 – Representação, na reta numérica, do conjunto solução, em \mathbb{R} , da inequação $|x| > a$ para $a > 0$

Geometricamente, é evidente que, se $a > 0$, as condições $|x| > a$ e $x < -a \vee x > a$ definem o mesmo conjunto. Ou seja,

$$|x| < a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a.$$

Em alternativa, a equivalência pode ser demonstrada recorrendo à Definição 2 e por um processo analítico. Por exemplo, do seguinte modo.

Começemos por assumir que

$$|x| > a.$$

Suponhamos que existe pelo menos um x que não satisfaz a condição

$$x < -a \vee x > a.$$

Mas x não satisfaz esta condição se, e somente se,

$$-a \leq x \leq a$$

o que, pelo item 2, é equivalente a

$$|x| \leq a,$$

o que é impossível, pois começámos por assumir que $|x| > a$. Logo,

$$|x| > a \Rightarrow x < -a \vee x > a.$$

Para provar a implicação recíproca, comecemos por assumir que

$$x < -a \vee x > a.$$

Suponhamos que existe pelo menos um x que não satisfaz a condição

$$|x| > a.$$

Mas x não satisfaz esta condição se, e somente se,

$$|x| \leq a,$$

o que, pelo item 2, é equivalente a

$$-a \leq x \leq a,$$

o que é impossível, pois começámos por assumir que $x < -a \vee x > a$.

Logo,

$$x < -a \vee x > a \Rightarrow |x| > a.$$

Portanto, prova-se que

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a.$$

6. Suponhamos que $a > 0$ e que

$$|x| \geq a.$$

A condição anterior é equivalente a

$$|x| > a \vee |x| = a,$$

o que, pelo item 5, é equivalente a

$$(x < -a \vee x > a) \quad \vee \quad (x = a \vee x = -a).$$

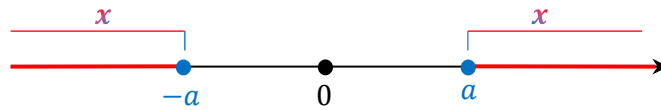


Figura 12 – Representação, na reta numérica, do conjunto solução, em \mathbb{R} , da inequação $|x| \geq a$ para $a > 0$

Logo,

$$|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -a \quad \vee \quad x \geq a.$$

Geometricamente, torna-se evidente que os únicos pontos da reta numérica que distam a ou mais unidades do 0 são os pontos que representam $-a$, a , os reais menores que $-a$ ou os reais maiores que a .

Função módulo

Definição 3: A função módulo, definida em \mathbb{R} por $f(x) = |x|$, pode ser definida por ramos da seguinte forma.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Composição da função módulo com uma função real de variável real

Definição 4: Seja g uma função real de variável real x . Define-se a função módulo de outra função como sendo a função h que resulta da composição da função módulo com a função g .

$$h: D_g \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow |g(x)|$$

Esta função pode também ser definida por ramos.

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}$$

Exemplo 1: Seguidamente são apresentados dois exemplos de funções, de domínio \mathbb{R} , que resultam da composição da função módulo com outras funções reais de variável real x .

1. $h_1(x) = |x + 2|$
2. $h_2(x) = |x^2 - 3x|$

Exemplo 2: As funções apresentadas no Exemplo 1 podem ser definidas por ramos, como seguidamente apresentado.

1. $h_1(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x + 2 \geq 0 \\ -(x + 2) & \text{se } x + 2 < 0 \end{cases}$
2. $h_2(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x^2 - 3x \geq 0 \\ -(x^2 - 3x) & \text{se } x^2 - 3x < 0 \end{cases}$

Exemplo 3: Realizando um estudo do sinal e procedendo a simplificações, as expressões analíticas das funções apresentadas nos itens 1 e 2 do Exemplo 2 podem ser reescritas do seguinte modo:

1. $h_1(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$
2. $h_2(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 3x & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$

Gráfico cartesiano da função módulo

Seja g uma função real de variável real x .

Consideremos a função h definida por $h(x) = |g(x)|$, a qual pode ser definida por ramos, como:

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}$$

Analisando cada ramo desta definição, é possível concluir que o gráfico cartesiano da função h pode ser obtido a partir do gráfico cartesiano da função g aplicando uma reflexão de eixo Ox aos pontos do gráfico de g de ordenada negativa.

Exemplo 4: O gráfico cartesiano da função módulo, definida em \mathbb{R} por $f(x) = |x|$, pode ser obtido do gráfico cartesiano da função afim $g(x) = x$ por aplicação da transformação geométrica referida, uma vez que $f(x) = |g(x)|$. Assim, aplicando uma reflexão de eixo Ox aos pontos da bissetriz dos quadrantes ímpares pertencentes ao terceiro quadrante, obtém-se uma representação gráfica da função módulo.

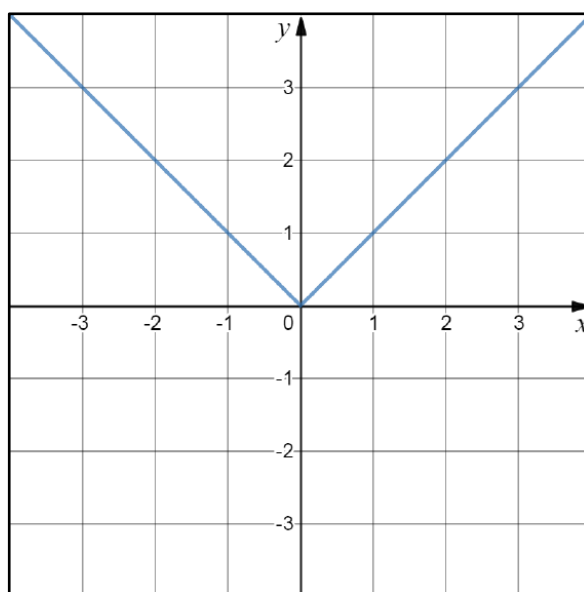


Figura 13 – Gráfico cartesiano da função módulo, definida em \mathbb{R} por $f(x) = |x|$

A representação da função em referencial ortonormado xOy facilita o estudo de características gerais, como sejam: monotonia, sinal, contradomínio, existência de extremos ou zeros. O contradomínio da função módulo é o conjunto dos reais pertencentes ao intervalo $[0, +\infty[$; a função tem um único zero ($x = 0$); a função é

positiva para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; dado que a função é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$, $x = 0$ é o minimizante da função e $f(0) = 0$ é o mínimo absoluto da função; o gráfico cartesiano da função apresenta uma simetria de reflexão relativamente ao eixo Oy e, portanto, a função é par.

Tabela 3 – Quadro do sinal de $f(x) = |x|$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

Tabela 4 – Tabela de variação de $f(x) = |x|$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	\searrow	0	\nearrow

Gráfico cartesiano de funções $h(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

A partir do gráfico da função módulo é possível traçar, com relativa facilidade, esboços gráficos que permitem auxiliar o estudo de funções reais de variável real da família $h(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$), por aplicação de transformações geométricas aos pontos do gráfico cartesiano da função $f(x) = |x|$ associadas às operações algébricas aplicadas à expressão analítica da função e em função dos parâmetros a, b e c . Esses conhecimentos, adquiridos no 10.º ano de escolaridade previamente ao estudo de funções definidas por expressões envolvendo módulos, permitem concluir, por exemplo, que o gráfico cartesiano de funções da família $h(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) apresenta um vértice no ponto de coordenadas (b, c) e que: se $a > 0$, c é mínimo absoluto da função (atingido para $x = b$); caso contrário, c é máximo absoluto da função (atingido para $x = b$).

Tabela 5 – Tabela de variação de $h(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0$)

x	$-\infty$	b	$+\infty$
$h(x)$	\searrow	c	\nearrow

Tabela 6 – Tabela de variação de $h(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a < 0$)

x	$-\infty$	b	$+\infty$
$h(x)$	\nearrow	c	\searrow

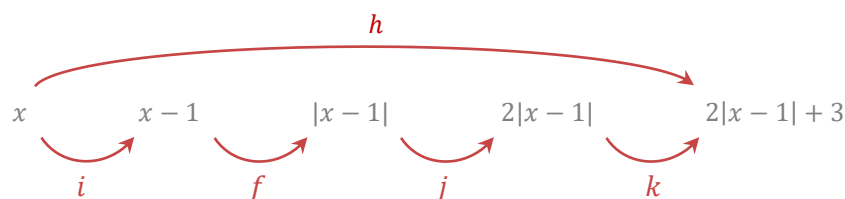
Exemplo 5: A função real de variável real h definida, em \mathbb{R} , por $h(x) = 2|x - 1| + 3$ resulta da composição de quatro funções reais de variável real:

$i(x) = x - 1$

$f(x) = |x|$

$j(x) = 2x$

$k(x) = x + 3$.



A função i é a função $x \rightarrow x - 1$. O gráfico cartesiano de i (Figura 14) é a imagem do conjunto de pontos do plano que satisfazem a condição $y = x$ pela transformação associada a uma translação horizontal de vetor $\vec{v}(1, 0)$.

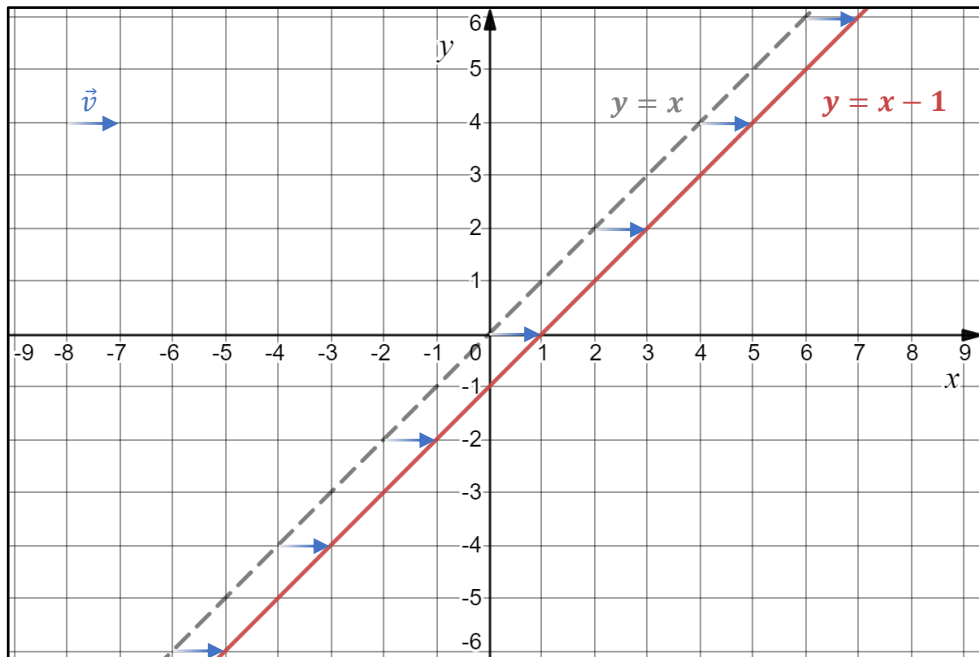


Figura 14 – Translação horizontal de vetor $\vec{v}(1, 0)$ aplicada aos pontos definidos por $y = x$.

A função $f \circ i$ é a função $x \rightarrow |x - 1|$. O gráfico cartesiano de $f \circ i$ (Figura 15) obtém-se do gráfico cartesiano de i por aplicação de uma reflexão de eixo Ox aos pontos (desse gráfico) de ordenada negativa, uma vez que $(f \circ i)(x) = |i(x)|$.

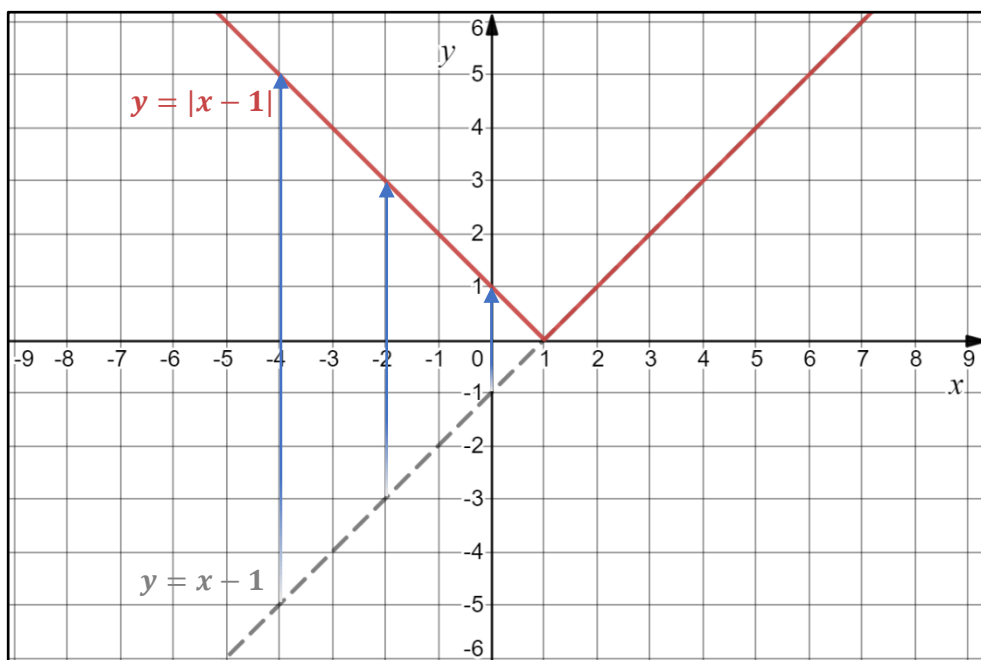


Figura 15 – Reflexão de eixo Ox aplicada aos pontos do gráfico cartesiano de i de ordenada negativa.

A função $j \circ f \circ i$ é a função $x \rightarrow 2|x - 1|$. O gráfico cartesiano de $j \circ f \circ i$ (Figura 16) é a imagem do gráfico cartesiano de $f \circ i$ por uma dilatação vertical de coeficiente 2, uma vez que $(j \circ f \circ i)(x) = 2(f \circ i)(x)$.

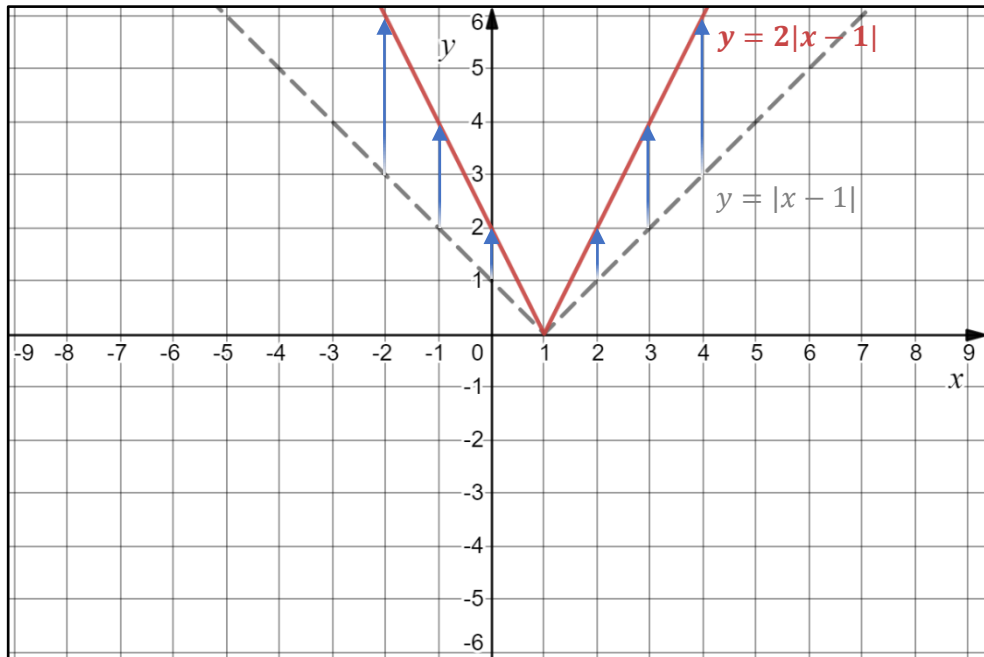


Figura 16 – Dilatação vertical de coeficiente 2 aplicada ao gráfico cartesiano de $f \circ i$

Uma vez que $(k \circ j \circ f \circ i)(x) = (j \circ f \circ i)(x) + 3$, o gráfico cartesiano de $k \circ j \circ f \circ i$ (Figura 17) é a imagem do gráfico cartesiano de $j \circ f \circ i$ por uma translação vertical de vetor $\vec{u}(0, 3)$. A função $k \circ j \circ f \circ i$ não é senão a função g definida, em \mathbb{R} , por $g(x) = 2|x - 1| + 3$.

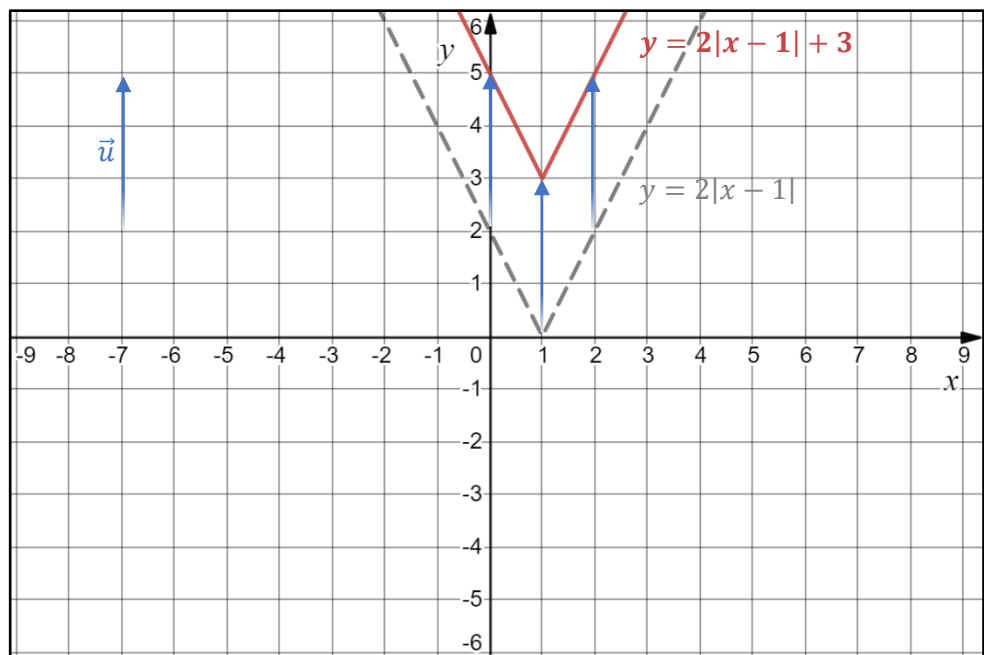


Figura 17 - Translação de vetor $\vec{u}(0, 3)$ aplicada aos pontos do gráfico cartesiano de $j \circ f \circ i$

3.4. Estratégias de Ensino, Recursos e Modos de Trabalho

Na minha intervenção letiva, procurei incorporar as seguintes ações estratégicas propostas nas Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018, pp. 6-7):

- Estabelecer conexões entre diversos temas matemáticos [...];
- Tirar partido da utilização da tecnologia nomeadamente para experimentar, investigar, comunicar [...];
- Utilizar a tecnologia para fazer verificações e resolver problemas numericamente, mas também para fazer investigações, descobertas, sustentar ou refutar conjecturas;
- Utilizar a tecnologia gráfica [...] no estudo de funções;
- Resolver problemas, atividades de modelação [...] que mobilizem os conhecimentos adquiridos ou fomentem novas aprendizagens;
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem;
- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões.

Ao longo de toda a unidade didática, procurei incentivar os alunos a desenvolver os seus raciocínios, incluindo a fundamentação das suas conclusões com base no significado dos conceitos, nomeadamente do conceito de módulo. Para isso, apelei a interpretações geométricas de expressões algébricas envolvendo módulos e à concretização de representações na reta numérica.

Também procurei promover a diversificação no que respeita às representações utilizadas, como apoio para a comunicação e desenvolvimento de raciocínios, e optei por uma abordagem ao estudo dos tópicos programáticos com um cunho exploratório. Para tal, propus a realização de um conjunto de tarefas variadas, no qual incluí tarefas que promovessem a aprendizagem pela descoberta. Selecionei e adaptei ou concebi tarefas com diferentes estruturas e/ou graus de desafio e/ou com potencial para promoverem o recurso a diferentes processos de raciocínio matemático.

No sentido de promover uma autorregulação do processo de aprendizagem dos alunos, dei-lhes *feedback* individualizado do trabalho que os mesmos enviaram através da plataforma virtual (resoluções das tarefas das Fichas de Trabalho e da Questão-aula).

Diversidade de representações

No ensino da Matemática podem ser consideradas diversas formas de representação, sendo algumas delas as simbólicas, as verbais, as visuais ou as físicas. O NCTM (2014) considera que uso de representações variadas, associado ao estabelecimento de conexões entre as diferentes representações das ideias matemáticas, contribui para o ensino eficaz da Matemática, favorecendo uma compreensão mais profunda e fortalecendo a capacidade de resolução de problemas.

As representações visuais são particularmente importantes no auxílio da compreensão de conceitos e procedimentos e na resolução de problemas, e apoiam igualmente o discurso, dado que “as representações deste tipo ajudam os alunos a seguir o raciocínio dos seus colegas e a dar voz às suas próprias explicações, ao apontarem para partes dos seus desenhos ou de outras representações visuais” (NCTM, 2014, p. 26). Essas representações podem incluir gráficos, tabelas, diagramas ou outras, geométricas ou pictóricas. Cabe ao professor introduzir formas de representação que possam ser úteis para os alunos, reservar um tempo substancial para a utilização e discussão de representações, solicitar aos alunos que utilizem suportes visuais para explicar os seus raciocínios e conceber “maneiras de explicitar e avaliar as capacidades dos alunos para usar com sentido as representações na resolução de problemas” (p. 29). Por exemplo, para perceber a compreensão que os alunos desenvolvem de um conceito, o professor pode pedir aos alunos que o expliquem ou que o representem de formas múltiplas.

A investigação em Ensino da Matemática destaca a importância do uso de múltiplas representações para a compreensão de conceitos matemáticos (Mesa, 2004) e para uma melhor aprendizagem de conceitos relacionados com funções (Tripathi, 2008). Mas também alerta para as dificuldades que os alunos revelam no trabalho com funções no ensino secundário, relacionando-as, sobretudo, com dificuldades em lidar com as diferentes representações de uma função. Nesse sentido, Ponte (1990) sugere que o ensino das funções atenda à necessidade de articular diferentes formas de representação de funções conhecidas pelos alunos, com destaque para as representações gráficas e algébricas. A investigação sugere também que o uso da tecnologia promove o recurso a representações visuais (Gono, 2016) e apresenta-se como uma mais-valia no estudo de funções, nomeadamente da sua representação gráfica (Antonini & Lisarelli, 2021).

Embora as Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018) advoguem o uso da tecnologia para diversos fins, nomeadamente a utilização da tecnologia gráfica e dinâmica no estudo de funções, o Programa (MEC, 2014a) restringia o uso da

tecnologia gráfica a situações em que os alunos pudessem fazer um uso adequado das suas potencialidades. No tema das funções, o Programa previa que os alunos desenvolvessem, primeiro, algum conhecimento teórico das propriedades analíticas das funções para que pudessem, depois, extrair conclusões justificadas a partir do que lhes seria possível observar com recurso à calculadora ou ao computador. No que respeita à utilização da calculadora gráfica, sugeria a sua utilização com os seguintes propósitos:

Como é evidente, a calculadora gráfica pode sempre ser utilizada para ilustrar propriedades de gráficos de funções adequadamente escolhidas pelo professor, ou para que o aluno teste o resultado de variações de parâmetros em classes de funções de que já tenha algum conhecimento teórico e, de maneira geral, para uma abordagem experimental ao estudo de funções, desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjeturas que essas experiências possam induzir. (p. 29)

A investigação também sugere que o recurso a representações diversas contribui para envolver os alunos numa aprendizagem significativa de conteúdos do domínio da Álgebra. Gono (2016) destaca o papel que as representações visuais desempenham na promoção da compreensão de conceitos geométricos e algébricos abstratos e no desenvolvimento de raciocínios. Na resolução de equações e inequações envolvendo expressões com módulos, o investigador observou que mesmo os alunos que aplicam métodos algébricos de resolução destes problemas complementam as suas respostas com representações visuais como suporte para justificar as soluções encontradas.

Tendo em conta as diversas orientações curriculares relativas ao uso da tecnologia, assim como as orientações didáticas, presentes na literatura em Educação Matemática e em estudos em Ensino da Matemática, relativas à contribuição da diversidade de representações para uma melhor compreensão de conceitos relacionados com funções e com a resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos, na minha intervenção letiva, procurei promover essa diversidade de suportes ao raciocínio matemático dos alunos. Procurei fomentar o recurso a representações geométricas e também à tecnologia gráfica, como suporte para representar graficamente funções, com a ressalva de procurar também dotar os alunos de conhecimento teórico que lhes permitisse utilizar a tecnologia de forma crítica, alertando-os para as suas limitações e cuidados a ter na sua utilização.

Ensino de cunho exploratório

A investigação sugere que o trabalho desenvolvido pelos alunos num modelo de aula que estimule a comunicação e a discussão permite aos alunos grande protagonismo na expressão dos seus raciocínios. (Ponte, Quaresma, & Mata-Pereira, 2020). Ora, estas são características de um modelo de ensino de cunho exploratório. Num modelo de ensino exploratório “o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p.13). Este modelo de ensino valoriza os momentos de discussão em que os alunos apresentam as suas conjeturas, conclusões e justificações (Ponte, 2005).

Na minha intervenção letiva, optei por um modelo de ensino com um cunho exploratório. Procurei que o desenvolvimento das aprendizagens se fizesse, essencialmente, a partir da realização de tarefas nas quais reconheci potencial para promover a *descoberta* de novas aprendizagens. Durante as sessões síncronas, procurei promover discussões dessas tarefas, centrando-as na partilha de raciocínios, por parte dos alunos, e assumindo o papel de orientadora durante a sua realização.

Alguns dos modos de trabalho impostos para as sessões síncronas impossibilitaram a partilha dessas sessões em diversos momentos que pudessem, de forma bem demarcada, diferenciar momentos de trabalho autónomo, de momentos de discussão das tarefas ou, ainda, de sistematização das aprendizagens, como proposto por alguns modelos de ensino exploratório. Dado que, durante as sessões síncronas, a interação com os alunos deveria ser constante, optei por abordar a realização das tarefas do seguinte modo: solicitando diretamente a participação de um aluno na partilha oral do seu raciocínio, a partir da qual eu procuraria desenvolver uma discussão professor-aluno que os restantes colegas de turma pudessem acompanhar, à medida que, eles próprios, iam realizando as tarefas, mais autonomamente. Foi desse modo que procurei conduzir as sessões.

Também optei por propor a resolução de algumas atividades de exploração fora das sessões síncronas, para que os alunos as procurassem realizar, primeiramente, de modo independente.

Diversidade de tarefas

Considerando o importante papel dos diferentes tipos de tarefas para a concretização dos objetivos curriculares (secção 2.3), na conceção da unidade

didática, foi minha preocupação dar oportunidade aos alunos para se envolverem na resolução de tarefas de naturezas distintas.

Para conceber uma unidade didática que privilegiasse a aprendizagem através da realização de diferentes tipos de tarefas, procurei garantir essa diversidade assegurando a existência de características distintivas nas tarefas propostas aos alunos, nomeadamente no que respeitava à sua estrutura, grau de dificuldade, contexto e apelo a diferentes tipos de representações. Na tabela seguinte é apresentada a tipologia das tarefas propostas aos alunos, ao longo das três fichas de trabalho concebidas com esse propósito.

Tabela 7 – Tipologia das tarefas propostas para o desenvolvimento das aprendizagens

Tipo	Contexto	Atividades das Fichas de Trabalho N.ºs 1, 2 e 3
Exploração	Puramente matemático	1.1, 1.5, 2.1, 3.1
Problema	Puramente matemático	1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.8, 2.3, 3.2, 3.3
	Realidade (modelação)	2.4, Atividade Complementar da Ficha de Trabalho N.º 3
Exercício	Puramente matemático	1.7, 1.9, 2.2, 3.4

Outras características referidas em estudos ou referenciais teóricos como sendo promotoras do raciocínio matemático (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011; Mata-Pereira, 2018; MEC, 2014a; NCTM, 2014; Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020; Stein & Smith, 1998; Swan, 2017, 2018) foram igualmente consideradas na sua conceção. Procurei propor tarefas adaptadas aos conhecimentos que os alunos já tinham, cuja realização pudesse promover novas aprendizagens, através da exploração e resolução de problemas, e o recurso a estratégias de resolução diversas. Procurei também propor atividades que envolvessem: validações ou testes de conjecturas; o recurso a justificações para respostas apresentadas ou para sustentar conjecturas ou generalizações; sistematizações; e a conceção de modelos matemáticos para resolver problemas com contexto real. Durante as sessões síncronas, em diálogo com os alunos, procurei promover a partilha e explicação de raciocínios justificados e a discussão.

Ao longo da intervenção letiva, também sugeri a realização de um conjunto de exercícios e problemas de realização facultativa, os quais designei por “Atividades Complementares” (Anexo G).

Para a penúltima sessão síncrona da unidade didática, a qual antecedeu a realização da questão-aula, preparei uma ficha com um conjunto de exercícios (Anexo I) para propor aos alunos, caso o período de esclarecimento de dúvidas não esgotasse o tempo da aula.

De seguida, faço uma apresentação das várias tarefas que integraram as três Fichas de Trabalho (Anexos A, C e E) que estiveram na base do planeamento da minha intervenção letiva. Ao longo das fichas são apresentadas diversas propostas de trabalho, aí designadas por *Atividades*. Por exemplo, na Ficha de Trabalho N.º 1 (Anexo A) são propostas nove *Atividades* – da Atividade 1.1. à Atividade 1.9. Cada *Atividade* é composta por várias alíneas e cada alínea corresponde a uma *tarefa* que os alunos devem realizar.

► Ficha de Trabalho N.º 1 (Anexo A)

Com as tarefas propostas nesta ficha de trabalho, pretendia, essencialmente, que os alunos desenvolvessem estratégias de resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos.

Na Ficha de Trabalho N.º 1, começo por recordar o conceito de módulo e, partindo do seu significado geométrico, apresento duas representações de $|x|$ ($x \in \mathbb{R}$) na reta numérica, para $x > 0$ e para $x < 0$, respetivamente.

De seguida, apresento a propriedade $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$. A mesma é introduzida a partir de um caso particular ($|2| = |-2|$) e a generalização é justificada com base no significado do conceito de módulo. Embora a propriedade seja intuitiva, optei por formalizá-la para que os alunos fossem interiorizando o significado da notação $-x$, como o simétrico de um número real x , que pode ser positivo ou negativo.

Na Atividade 1.1, propõe-se a determinação do valor numérico de expressões do tipo $|x|$ ($x \in \mathbb{R}$), levando os alunos a considerar a posição de alguns números reais na reta numérica através de ilustrações. Depois, com base na comparação entre os valores de $|x|$ e de x , nos casos considerados, é proposto aos alunos que conclua quanto à expressão que pode definir $|x|$, para $x \geq 0$ e para $x < 0$, respetivamente, concretizando, desse modo, uma definição analítica por ramos de $|x|$ ($x \in \mathbb{R}$). Com esta Atividade procurei promover a comparação, a identificação de padrões e a generalização.

Na Atividade 1.2 é proposta a determinação do valor numérico de algumas expressões do tipo $|x|$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), e de outras envolvendo módulos e potências. Embora o Programa (MEC, 2014a) não prevesse a introdução de quaisquer propriedades do módulo envolvendo operações com potências, considerei que seria interessante apresentar algumas expressões relativamente simples envolvendo potências e que pudessem, eventualmente, levar alguns alunos a questionarem-se sobre a existência de determinadas propriedades ou, até mesmo, a identificá-las. Por exemplo, a partir das alíneas (c) e (d), poderiam concluir que: se n é par, $|a|^n = a^n$, $\forall a \in \mathbb{R}$, mas, se n é ímpar, isso já não se verifica. Considerei, portanto, que esta Atividade poderia levar alguns alunos a formular conjecturas. Também considerei que uma tarefa deste tipo permitiria introduzir complexidade na notação de forma gradual. Em 1.2.1., já é proposta a determinação do valor numérico de uma expressão algébrica mais complexa, que requer que os alunos mobilizem conhecimentos relacionados com as propriedades das operações com radicais e potências, tal como da definição analítica por ramos de $|x|$ ($x \in \mathbb{R}$) concretizada na Atividade 1.1. Com esta tarefa procurei promover a validação pela aplicação de conhecimentos relativos a definições algébricas.

Na Atividade 1.3, começa por ser apresentada uma estratégia, fundamentada no significado geométrico de módulo, que permite concluir quanto ao conjunto solução de equações do tipo $|x| = a$ para $a > 0$. Esta estratégia desenvolve-se a partir de uma interpretação geométrica da condição apresentada como exemplo ($|x| = 5$) e é acompanhada por uma representação na reta numérica. Optei por expor o raciocínio usando linguagem natural e por traduzi-lo, gradualmente, para linguagem matemática simbólica. Esta opção, prendeu-se com o facto de as fichas terem sido concebidas para serem aplicadas aos alunos sem que eu pudesse apoiá-los no seu trabalho (o que afinal não aconteceu) e com preocupações relacionadas com a utilização adequada da linguagem simbólica. Em aulas presenciais, havia verificado que a maioria dos alunos da turma revelava, com frequência, dificuldades em usar os diferentes conectores lógicos de modo adequado e, inclusivamente, em reconhecer-lhes o seu significado. Muitas vezes, não eram capazes de traduzir para linguagem simbólica os seus raciocínios sem indicações por parte do professor.

Pelo mesmo motivo, na linha (b), propus a resolução de uma equação do mesmo tipo por analogia com o exemplo apresentado na alínea (a) e solicitando o preenchimento de espaços deixados em branco, num discurso matemático já estruturado. Considerei que esta tarefa poderia promover a comparação e a identificação de padrões.

Na alínea (c), propõe-se que os alunos concluam quanto ao conjunto solução de uma equação do tipo $|x| = a$ para $a < 0$ de forma justificada. Pretendia que os alunos reconhecessem a propriedade $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Também por isso apelei diretamente à justificação.

Finalmente, na alínea (d), propõe-se que os alunos concluam quanto ao número de soluções de equações do tipo $|x| = a$ para $a > 0$, $a = 0$ e $a < 0$, respetivamente, reconhecendo, deste modo, que este número varia em função do parâmetro a . Considerei que esta tarefa poderia promover a comparação, a identificação de padrões e a generalização.

Na Atividade 1.4, é proposta a resolução de um conjunto alargado de equações, nas quais a incógnita se encontra entre os símbolos de módulo. Como sugestão, propõe-se aos alunos que comecem por aplicar os princípios de equivalência de equações (seus conhecidos) para isolarem a expressão $|x|$ no primeiro membro da equação, obtendo uma expressão simplificada na forma $|x| = a$. Procedendo a essa simplificação, cada problema seria transformado num problema análogo aos apresentados na atividade anterior: “Quais os pontos da reta numérica que distam a unidades da origem?”. Nas várias alíneas, optei por apresentar equações com soluções inteiras, mas também não inteiras, assim como condições possíveis ou impossíveis. A alínea (g) distingue-se das restantes, uma vez que a incógnita da equação surge duas vezes, uma das quais entre os símbolos de módulo. Pretendia-se que os alunos refletissem sobre a definição analítica por ramos de $|x|$ para concluírem que a condição é universal em \mathbb{R}_0^+ .

Na Ficha de Trabalho N.º 1, é sugerido aos alunos que, após realizarem a Atividade 1.4, comparem a sua resolução com a resolução apresentada no Exemplo 1, no final da ficha. Nesse exemplo, procurei incentivá-los a recorrer a processos de validação dos resultados obtidos aquando da resolução de equações, apresentando, no final, um processo de verificação das soluções – aí designado por “Confirmação”.

Na Atividade 1.5, é proposta a exploração da interpretação geométrica de uma condição do tipo $|x| \leq a$, para determinar o conjunto solução da inequação. Considerei que a orientação do trabalho dos alunos no sentido de levá-los a interpretar geometricamente a condição seria a mais adequada, dado que poderia levá-los a concluir de forma inequívoca e justificada quanto ao conjunto solução da mesma, ao invés de levá-los a extrair conclusões a partir de um exercício, mais demorado, de generalização com base na análise de casos particulares envolvendo a verificação de possíveis soluções. Na orientação do trabalho dos alunos, procurei apelar, uma vez mais, às representações visuais, também por ter verificado anteriormente (em aulas presenciais) que, na representação de conjuntos numéricos

usando a notação de intervalos, os alunos se apoiavam muito em representações na reta numérica. Considerei que esta Atividade teria potencial para promover o recurso a processos de generalização e de validação.

Na Atividade 1.6, é proposta a resolução de um conjunto de inequações em que a incógnita se encontra entre os símbolos de módulo. Antes desta Atividade, é apresentada uma pequena nota, onde são recordados dois princípios de equivalência de inequações que os alunos, muitas vezes, não aplicavam corretamente.

Na Atividade 1.6, como sugestão, os alunos são remetidos para a análise de um exemplo (Exemplo 2), onde é apresentada uma estratégia que passa por isolar $|x|$, num dos membros da inequação, para que a condição assuma uma forma, mais simples, do tipo $|x| \leq a$ (ou $|x| \geq a$), a qual pode ser interpretada geometricamente como “Quais os pontos da reta numérica que distam a ou menos (ou mais) unidades da origem?”.

No que respeita aos exemplos apresentados no final da ficha de trabalho, e para os quais os alunos são ocasionalmente remetidos ao longo na ficha, importa referir que os mesmos foram integrados com o objetivo de ajudar os alunos que, na ausência de orientação do professor (como se previa quando as fichas foram elaboradas), sentissem a necessidade de um maior apoio para desenvolverem estratégias de resolução dos problemas. Contudo, uma vez que acabei por ter um contacto rotineiro com os alunos, podendo acompanhar o trabalho por eles desenvolvido durante as sessões síncronas, optei por, para a primeira sessão síncrona, disponibilizar apenas uma primeira parte da ficha de trabalho (até à Atividade 1.5.), a fim de não desvirtuar o trabalho produzido autonomamente pelos alunos. Assim, embora tenha mantido estes exemplos na ficha de trabalho, os alunos só lhes tiveram acesso durante a segunda sessão síncrona, quando receberam as restantes páginas da ficha. Por essa altura, os exemplos já só poderiam ser usados para revisão de (ou comparação com) estratégias de resolução de equações e de inequações já preconizadas, nas sessões síncronas ou fora delas, pelos alunos.

Após a Atividade 1.6, são apresentadas algumas notas onde é evidenciado que os conhecimentos desenvolvidos até então são suficientes para resolver equações do tipo $|P(x)| = a$, em que $P(x)$ é um polinómio e, seguidamente, é proposta a resolução de algumas equações desse tipo, na Atividade 1.7.

Nas Atividades 1.8 e 1.9, propõe-se a resoluções de inequações do tipo $|P(x)| \leq a$ (ou $|P(x)| \geq a$), em que $P(x)$ é um polinómio do 1.º grau. Com estas últimas Atividades, pretendia-se que os alunos convocassem conhecimentos relativos à resolução de equações e de inequações para resolver outras mais complexas. A exploração de uma estratégia de substituição da variável, x , por outra,

$y = P(x)$, permitiria resolver os problemas propostos com recurso aos conhecimentos e estratégias já anteriormente consolidados, por comparação. Optei por não incluir problemas que envolvessem a resolução de inequações do 2.º grau, dado que no Caderno de Apoio (MEC, 2014b) esse tipo de problemas, neste contexto, era assinalado como sendo de nível de desempenho mais avançado e não exigível à totalidade dos alunos. Considerei que não seria vantajoso fazê-lo num contexto de ensino à distância, quando o horário semanal da disciplina tinha sido reduzido e atendendo ao nível global de desempenho dos alunos da turma. Além disso, em contexto de estudo de funções, os objetivos definidos pelas Metas Curriculares (MEC, 2014a) concentravam-se no estudo de funções do tipo $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) e, por isso, essa omissão não limitaria de modo algum o estudo dessa família de funções.

Resta referir que, uma vez que nas Atividades 1.4, 1.6, 1.8 e 1.9 eram apresentadas condições impossíveis ou universais em \mathbb{R} , considero que as mesmas também poderiam promover a classificação.

► Ficha de Trabalho N.º 2 (Anexo C)

Com as tarefas propostas nesta ficha de trabalho pretendia, essencialmente, que os alunos desenvolvessem estratégias de resolução de equações do tipo $|x - a| = |x - b|$ e de inequações do tipo $|x - a| \leq |x - b|$ através da exploração do significado geométrico de $|a - b|$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Além disso, pretendia que explorassem a aplicabilidade do conceito matemático de módulo à modelação de fenómenos reais.

Na Atividade 2.1, propõe-se, a partir da exploração de alguns casos particulares, que os alunos concluam (ou recordem) que $|a - b|$ representa a distância entre os pontos que representam a e b na reta numérica e que, com base nessa conclusão, sejam capazes de desenvolver um raciocínio geométrico que lhes permita concluir quanto às soluções de equações do tipo $|x - a| = |x - b|$. Considerei que esta Atividade teria potencial para promover o recurso a processos de comparação, identificação de padrões, generalização a partir da análise de casos particulares e, ainda, a justificação.

Mais uma vez, por motivações que se relacionaram com o facto de, à data de conceção das fichas de trabalho, estar previsto que os alunos as realizassem de modo independente, optei por apresentar algumas notas antes de propor a realização da Atividade 2.2. Por uma questão de articulação com os conteúdos trabalhados na Ficha de Trabalho N.º 1, e também antevendo possíveis confusões que se pudessem gerar, incluí anotações nas quais procuro, a partir de um exemplo, estabelecer um

paralelismo entre a interpretação geométrica de uma condição baseada no significado geométrico do módulo de um número real e a interpretação geométrica da mesma condição baseada no significado geométrico do módulo da diferença de dois números reais.

De seguida, no Exemplo 1, é apresentada uma proposta de resolução da equação da Atividade 2.1.

Na Atividade 2.2, pretende-se que os alunos resolvam outras equações do tipo $|x - a| = |x - b|$, mobilizando as aprendizagens desenvolvidas durante a realização da atividade de exploração 2.1.

O mesmo também se pretende para a realização da Atividade 2.3, que já envolve a resolução de inequações do tipo $|x - a| \leq |x - b|$. Esta Atividade faz-se acompanhar de uma série de questões orientadoras, as quais tinham como objetivo auxiliar os alunos a desenvolver uma estratégia de resolução.

Finalmente, na Atividade 2.4, é proposta a resolução de um problema de modelação com contexto real. O problema prende-se com a localização de uma paragem de autocarro na rua de uma povoação. É apresentado um critério que deverá determinar a escolha do local. Este problema foi selecionado a partir de um manual escolar e adaptado. O propósito da alínea (a) era o de levar os alunos a compreender que se trata de um problema (de otimização) que admite várias soluções, umas melhores do que outras, em função de um critério definido no enunciado do problema. Já o propósito da alínea (b) era o de levar os alunos a considerar que há aspetos do contexto do problema que limitam as soluções possíveis e que devem ser tidos em conta. Também nessa alínea é definida a variável do problema. As alíneas (c) e (d) orientam os alunos no sentido de chegarem a uma expressão algébrica que possa representar “o total das distâncias de cada casa à paragem” em função da variável do problema, x . Por último, na alínea (e), pretende-se que os alunos concluam quanto ao valor de x que torna “o total das distâncias” mínimo.

Antes da Atividade 2.4, é solicitado aos alunos que apresentem todas as justificações que considerem necessárias e é também sugerida a utilização da calculadora gráfica, mais concretamente, das suas funcionalidades de análise gráfica. Com esta Atividade também procurei promover a utilização da tecnologia gráfica, como auxiliar na representação gráfica de funções e na determinação de coordenadas de pontos de interesse do seu gráfico. No que respeita à escolha de um problema com contexto real, preocupei-me em levar os alunos a considerar as limitações que esse contexto impunha no que respeitava ao conjunto de soluções

admissíveis. Procurei, ainda, incitar à comparação, à justificação e à validação – inclusivamente à validação (e refutação) de conjecturas.

► Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E)

Com as tarefas propostas nesta terceira ficha de trabalho, pretendia, essencialmente, que os alunos desenvolvessem estratégias de estudo de funções da família $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$).

No início da Ficha de Trabalho N.º 3, começa por ser apresentado um conjunto de anotações. É definida a função módulo, $x \rightarrow |x|$, de domínio \mathbb{R} , e apresentada a sua definição analítica alternativa por ramos. Considerei que a análise que apresento da definição analítica da função permitiria uma melhor compreensão do seu gráfico cartesiano – o qual é apresentado.

Antes de propor a Atividade 3.1, que envolve a exploração de transformações geométricas aplicadas ao gráfico da função módulo, considerei importante apresentar um quadro (“Revisões”) com uma sistematização das principais transformações geométricas do gráfico de uma função – anteriormente estudadas pelos alunos – e recordar a sua relação com as operações algébricas aplicadas às variáveis da função. Elegi apenas as transformações que seriam relevantes para que os alunos pudessem concluir quanto às transformações geométricas que devem ser aplicadas aos pontos do gráfico de $f(x) = |x|$ para obter os pontos do gráfico de $g(x) = a|x - b| + c$ ($a \neq 0$).

Com a Atividade 3.1, pretendia que os alunos mobilizassem os seus conhecimentos relativos às transformações do gráfico de uma função para representar graficamente funções da família $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) e, por meio de uma análise gráfica dessas representações, extrair conclusões quanto às coordenadas do vértice do gráfico cartesiano da função e quanto à natureza do extremo da função em função do sinal do parâmetro a . Considerei que o preenchimento do Quadro 1 (dessa Atividade) também permitiria que os alunos reconhecessem a mais-valia que a concretização de uma representação gráfica da função apresenta na análise do seu contradomínio ou para o estudo da sua monotonia. Considerei importante sugerir o recurso à calculadora gráfica para observar a representação gráfica de cada função, para que os alunos praticassem a utilização dessa ferramenta de análise gráfica num contexto em que os seus conhecimentos lhes permitissem avaliar a validade dos resultados obtidos com recurso a essa tecnologia. A Atividade incitava à comparação e à generalização.

Eventualmente, poderia potencializar a identificação de padrões e levar à formulação de conjecturas.

Com a Atividade 3.2, pretendia que os alunos convocassem os seus conhecimentos sobre generalidades acerca de funções reais de variável real e relativos à resolução de equações e inequações envolvendo expressões com módulos para realizar um estudo de uma função da família $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$). Dada a expressão analítica de uma função dessa família, pretendia-se que desenvolvessem estratégias que lhes permitissem: realizar um esboço gráfico da função; determinar o contradomínio da função; determinar os zeros da função; identificar os intervalos de monotonia da função; identificarem o extremo da função; determinar para que valores da variável a função assume um determinado valor (ou valores num determinado intervalo).

Depois da Atividade 3.2, é apresentado um raciocínio, desenvolvido a partir de conhecimentos prévios, que permite concluir quanto à transformação que deve ser aplicada aos pontos de ordenada negativa do gráfico de uma dada função f para obter o gráfico da função $g = |f|$.

Na Atividade 3.3. é proposto o estudo de duas funções, $|f|$ e $|g|$, em que f é uma função afim e g é uma função quadrática. Ambas as funções são definidas através dos seus gráficos cartesianos. Com esta atividade pretendia-se que os alunos desenvolvessem competências de análise gráfica de funções, realizando um estudo de funções $x \rightarrow |P(x)|$, em que $P(x)$ é um polinómio de grau inferior ao 3.º, com base nas suas representações gráficas. Considerei que as tarefas 3.3.5., 3.3.6.c) e 3.3.6.d) tinham potencial para incitar raciocínios envolvendo a inferência de exemplos (exemplificação) e a generalização.

Por último, é apresentado um raciocínio que permite concluir como é possível desembaraçar de módulos a expressão algébrica de uma função (definindo-a por ramos) e, na Atividade 3.4, propõe-se a aplicação dessa estratégia para concretizar uma definição analítica alternativa para algumas funções.

No final da ficha de trabalho, volto a propor, como atividade complementar, um problema de modelação com contexto real, a qual destino aos alunos que tenham curiosidade em explorar, uma vez mais, a aplicabilidade das funções definidas por expressões com módulos na modelação de fenómenos reais. Para resolver o problema, os alunos deveriam determinar uma expressão analítica da função que define a trajetória de um dado objeto e, com base no modelo encontrado, fazer uma previsão. Considerei que o problema teria potencial para promover o recurso a processos de justificação e de validação, uma vez que incitava diretamente à

justificação e à explicação. Optei por tornar a sua realização facultativa, uma vez que não teria tempo para discuti-la, em sessão síncrona, com os alunos.

Recursos usados durante as sessões síncronas

Todos os participantes nas sessões síncronas (alunos e professores) tiveram de recorrer à utilização de um dispositivo com acesso à internet que lhes permitisse ingressarem em videoconferência através da plataforma virtual *Microsoft Teams*. Para que os participantes pudessem comunicar oralmente, durante as sessões, esse dispositivo também deveria permitir a partilha de som.

No decurso das sessões síncronas, os alunos participavam na realização das atividades das fichas de trabalho, contribuindo com raciocínios e sugestões para resolver as tarefas propostas. Em prazo definido, submetiam o trabalho realizado, bem como mais algum trabalho complementar cuja realização fosse solicitada. Para tal, foi-lhes pedido que fotografassem as suas produções escritas e que enviassem essas imagens através da plataforma virtual. Ora, esse processo exigiu, portanto, que os alunos dispusessem de um dispositivo que permitisse fazer registos fotográficos.

Uma vez que os alunos da turma tinham acesso aos recursos multimédia disponíveis na plataforma *online* da Porto Editora, “Escola Virtual” (<http://www.escolavirtual.pt/>), propus-lhes que assistissem, através dessa plataforma, a um vídeo sobre as transformações do gráfico da função módulo, como forma de promover a visualização das transformações geométricas discutidas em aula. Complementarmente, disponibilizei-lhes uma sistematização das transformações do gráfico da função módulo (Anexo H) que construí. Nela, incluí algumas notas importantes que decorrem de aprendizagens desenvolvidas durante a realização da Atividade 3.1 (da Ficha de Trabalho N.º 3) e que se relacionam com características gerais do gráfico de funções $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) e com a influência da variação dos parâmetros a , b e c .

Durante as sessões síncronas, utilizei uma ferramenta que permite a “partilha de ecrã” dos participantes numa videoconferência para mostrar apresentações em *Microsoft Power Point*. Estas apresentações incluíam, entre outras coisas: o sumário, os enunciados das tarefas em discussão, algumas representações complementares (na reta numérica ou em gráficos cartesianos, por exemplo) que pudessem auxiliar os alunos na resolução das tarefas ou indicações relativas ao trabalho que os alunos deveriam entregar. Este tipo de indicações (relativas a prazos para submissão dos trabalhos, sumário e material requerido para as aulas) foram igualmente sendo

registadas no “canal da disciplina” de Matemática, na plataforma virtual, para que os alunos pudessem consultá-las a qualquer momento.

Em algumas sessões, utilizei também um emulador do modelo de calculadora gráfica adquirida por quase todos os alunos da turma (*Ti-nSpire Cx* da *Texas Instruments*) para demonstrar a sua utilização. Também disponibilizei aos alunos um pequeno conjunto de instruções envolvendo a utilização de novos comandos das suas calculadoras, indispensáveis para o estudo gráfico de funções definidas por expressões com módulos, pois essenciais para defini-las. Estas instruções, muito sucintas, são apresentadas no final da Ficha de Trabalho N.º 2 (Anexo C).

Por fim, no que respeita aos recursos materiais usados durante as sessões síncronas, importa referir que utilizei, além do computador, um telemóvel com câmara integrada, que me permitiu partilhar registos escritos (em papel) com os alunos, os quais serviram para apoiar a comunicação.

3.5. Avaliação dos Alunos

No que respeitava à avaliação, o Programa (MEC, 2014a) defendia que esta deveria ser “diversificada e frequente, contribuindo para que os alunos adquiram uma maior consciência do seu nível de conhecimentos e valorizem a avaliação como um processo promotor de melhores desempenhos” (p. 30). Ao longo da minha intervenção letiva, procurei seguir esta orientação. De diversas formas, recolhi continuamente informação que me permitiu avaliar se os alunos estariam a desenvolver as aprendizagens pretendidas. Procurei fazer uso dessa informação de forma estratégica, adequando as minhas práticas de ensino e contribuindo para que os alunos pudessem, em cada momento, ter uma noção do seu desempenho relativamente ao desejável e perceber de que modo poderiam progredir nesse sentido.

A avaliação realizada teve, portanto, uma componente formativa. Santos e Pinto (2018) apresentam, de forma sumária, a avaliação formativa como sendo aquela que “usa as evidências para perceber onde o aluno está em termos de aprendizagem para tomar decisões no sentido de providenciar mais e melhores aprendizagens e para regular o ensino.” (p. 508). Para concretizar esse intento, defini como principais estratégias: o questionamento oral, realizado durante as sessões síncronas; a recolha documental das resoluções dos alunos para as várias tarefas propostas; e a questão-aula, realizada na última sessão síncrona.

No que respeita ao questionamento oral, tentei usá-lo como principal método de mediação na comunicação com os alunos durante as videoconferências. Procurei incorporar, nessa prática, perguntas abertas (e. g. “Como pensou?”; “Por que pensou assim?”) por serem reconhecidas como potenciadoras de aprendizagens, uma vez que incentivam à reflexão (Gipps, 1999, cit. por Santos & Pinto, 2018). As mesmas perguntas são, obviamente, adequadas para suscitar explicações de raciocínios. Esta estratégia de questionamento permitiu-me detetar dificuldades dos alunos e, subsequentemente, ajudá-los a ultrapassarem-nas, fornecendo-lhes um *feedback* oral.

Durantes as sessões síncronas, para garantir que todos os alunos beneficiavam igualmente deste tipo de *feedback*, mantive um registo escrito das suas participações. Utilizei-o para me guiar na escolha alternada dos alunos para participar oralmente na sessão. Procurei introduzir alguma arbitrariedade nesse processo de seleção, como forma de incentivar os alunos a estarem atentos – e, até mesmo, como forma de verificar a sua presença. O número de alunos que teve uma participação ativa em cada sessão, intervindo oralmente, oscilou entre os 6 e os 12 alunos.

Para a penúltima sessão da unidade didática, preparei um conjunto de tarefas (Anexo I – “Ficha de Exercícios”) com base nas quais realizei um questionamento dos alunos que me permitiu detetar e esclarecer-lhes algumas dúvidas, além de ter sido útil para que os próprios alunos pudessem testar o seu nível de preparação para a questão-aula.

Essa estratégia de avaliação envolvendo o questionamento oral dos alunos tinha a vantagem de me permitir obter e fornecer um *feedback* imediato. Por outro lado, para cada aluno, apresentava a desvantagem de ser ocasional, dado que, em cada sessão, nem todos tinham a oportunidade de participar.

Para recolher informação que me permitisse acompanhar de forma mais próxima o progresso dos vários alunos da turma, recorri a outra estratégia. Procedi à recolha das suas resoluções para todas as tarefas das três fichas de trabalho discutidas durante as sessões. De todas, forneci um *feedback* individualizado, por escrito. Fui sugerindo aos alunos que fizessem uma revisão do seu trabalho, não só com base nesse *feedback*, mas também por comparação com as propostas de resolução das tarefas (Anexos B, D e F), as quais iam sendo postas à sua disposição, à medida que se ia avançando nos conteúdos.

Ainda seleccionei e compilei um conjunto de atividades complementares (Anexo G) que lhes disponibilizei, para que eles dispusessem de mais recursos para testarem os seus conhecimentos. Estas atividades, de realização facultativa, foram sendo propostas à medida que se ia avançando na matéria. Também para estas tarefas,

tive o cuidado de disponibilizar propostas de resolução. Foi minha expectativa que a análise desse material pudesse levar os alunos a avaliar o seu desempenho e a perceber como poderiam melhorar.

Santos e Pinto (2018) referem que a avaliação formativa também pode ser uma responsabilidade assumida pelo aluno. Durante a unidade didática, pelo que referi, procurei promover esse envolvimento dos alunos na regulação do seu progresso, incentivando-os a fazer uma revisão do seu trabalho.

Também procurei incentivar os alunos a tomarem a iniciativa de comunicar as suas dúvidas ou solicitar apoio utilizando o *chat* da plataforma virtual. Para tal, tentei manter essa via de comunicação (*chat*) ativa, questionando-os frequentemente quanto a eventuais dúvidas, sobretudo aos alunos com mais dificuldades à disciplina. No entanto, esta estratégia de comunicação revelou-se muito pouco eficaz para a obtenção de informação com cariz formativo. Salvo rara exceção, os alunos não expuseram dúvidas ou solicitaram apoio. Houve apenas três alunos que utilizaram pontualmente esse canal de comunicação com esse fim. Mais concretamente, para: expor uma dúvida e pedir mais propostas de atividades complementares; requerer uma revisão de resumos teóricos envolvendo aprendizagens relacionadas com o estudo de funções da família $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, c, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$); oferecer sugestões relativamente aos modos de trabalho das sessões síncronas. Procurei cumprir com os pedidos desses alunos e adequar as minhas estratégias no sentido de ir de encontro às solicitações e necessidades comunicadas.

Sempre que algum aluno não cumpriu com a entrega de um trabalho, propus-lhe outras tarefas – geralmente, selecionadas a partir de manuais escolares – e disponibilizei-me para apoiá-lo na sua realização, dando-lhe, desse modo, uma segunda oportunidade para pôr à prova os seus conhecimentos e para obter algum *feedback* que pudesse ajudá-lo a progredir. Apesar disso, nenhum aluno alguma vez aproveitou essas oportunidades.

Por último, a Questão-aula (Anexo J) desempenhou duas funções: a de instrumento de avaliação formativa e a de instrumento de avaliação sumativa. Embora designado por “questão-aula”, este instrumento de avaliação não foi mais do que um teste. No Colégio, designava-se por “questão-aula” qualquer teste com uma duração de 40 a 60 minutos. Em regime *online*, a prova teve a duração de 60 minutos. Antes de iniciada a unidade didática, os alunos foram informados da realização da prova na última sessão síncrona da unidade. No início dessa última sessão, o enunciado da prova foi disponibilizado num modelo de questionário *Google Forms* e através da plataforma virtual. Mais detalhes relativos aos modos em que a prova foi

realizada são apresentados no plano da respectiva aula síncrona (Anexo T – “Plano de Aula Síncrona N.º 8”).

Enquanto instrumento de avaliação, a questão-aula envolveu o recurso a processos mais formais, envolvendo critérios de classificação estabelecidos *à priori* (Anexo K) e que permitiram, de forma objetiva, avaliar o desempenho dos alunos. Na sua definição, procurei basear-me em modelos de classificação de provas de exames nacionais, tendo seguido uma estrutura análoga e utilizado alguns dos mesmos critérios gerais. As classificações atribuídas às provas dos alunos foram verificadas e, sempre que necessário, corrigidas pela professora cooperante – que, anteriormente, já havia verificado a adequação dos critérios de classificação estabelecidos. Os resultados dos alunos na prova são apresentados na figura seguinte.

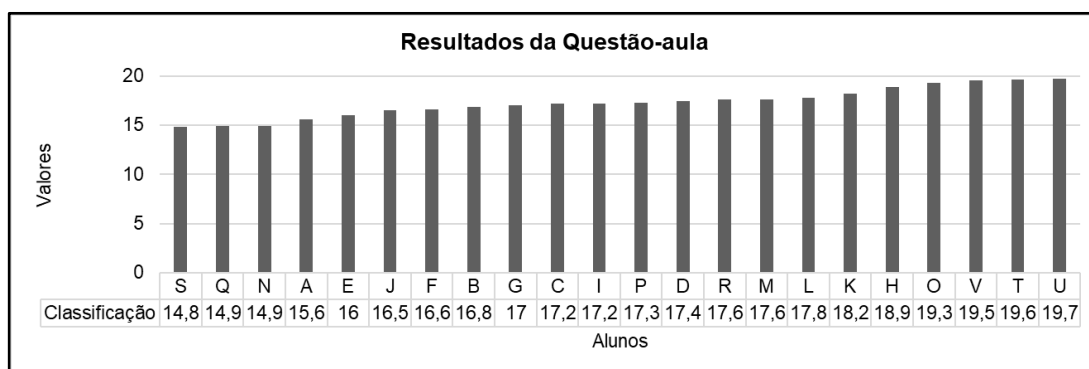


Figura 18 – Resultados da questão-aula

Santos e Pinto (2018) referem-se à avaliação sumativa como um processo da exclusiva responsabilidade do professor e que envolve “inventariar as aquisições dos estudantes num certo momento da sua aprendizagem (reportar, informar, ...) e tomar decisões em conformidade com o estabelecido administrativamente (hierarquizar, seleccionar, ...)” (p. 508). Uma vez que as classificações atribuídas aos alunos na questão-aula foram consideradas pela professora cooperante na atribuição de uma nota aos alunos, no final do 2.º semestre, este instrumento de avaliação foi utilizado para fins de avaliação sumativa. Mas não só.

Pinto e Santos (2006), destacam que a avaliação “será formativa se as informações forem reinvestidas na melhoria da interação pedagógica, isto é no processo de ensino aprendizagem.” (p. 104). Além da classificação atribuída ao desempenho dos alunos na questão-aula, foi-lhes enviado *feedback* escrito em função da sua prestação na prova. Com o envio desse *feedback*, procurei evidenciar

aspectos em que os alunos poderiam melhorar e oferecer algumas explicações. Penso que, desse modo, “reinvesti” no processo de ensino-aprendizagem, e é por isso que considero que a realização da questão-aula foi também uma importante estratégia de avaliação formativa.

Por último, facultei aos alunos uma proposta de resolução (Anexo L) dessa prova de avaliação. Os critérios de classificação da prova (Anexo K) não foram apresentados aos alunos, pois essa não era prática comum no Colégio.

3.6. Reflexão Sobre as Práticas de Ensino à Distância

Em retrospectiva, da minha primeira experiência de ensino à distância, que ocorreu durante a prática de ensino supervisionada, o primeiro aspecto que destaco é o condicionalismo imposto pelos recursos tecnológicos de que se dispõe para desenvolver as atividades letivas através de plataformas digitais. No meu caso, procurei tirar partido dos recursos de que dispunha: computador e telemóvel pessoais.

Durante as sessões síncronas, ingressava em videoconferência com os alunos, pelo *Microsoft Teams*, através do computador e do telemóvel, em simultâneo. A ligação por computador permitia-me, através da partilha de ecrã, mostrar documentos ou o emulador da calculadora gráfica ou fazer apresentações mais dinâmicas em *Microsoft Power Point*, bem como consultar o *chat*, para verificar se algum aluno estaria a comunicar por este canal ou quais os alunos presentes na sessão. Dado que tanto o microfone, como a câmara integrada do meu computador não funcionavam, recorria ao telemóvel para partilhar som e imagem. A ligação por telemóvel permitia-me ouvir os alunos, falar com eles e partilhar em vídeo o que ia escrevendo em papel. Considero que a partilha de registos escritos foi essencial para apoiar a comunicação com os alunos.

Não se previa que as sessões síncronas fossem momentos de exposição de matéria, mas, antes, que se centrassem na orientação do trabalho dos alunos e na partilha e discussão de raciocínios e estratégias para resolver as atividades propostas. Assim, não considerei conveniente antecipar esse trabalho com a apresentação de estratégias de resolução para as tarefas durante as sessões (embora tenha, pontualmente, recorrido a esse método). Considerei que, para estabelecer uma melhor comunicação com os alunos, seria necessário partilhar registos escritos (em substituição do quadro da sala de aula) mas que, para servirem os objetivos da unidade didática, deveriam ser produzidos durante as sessões e em

função da participação oral dos alunos. Em retrospectiva, considero que foram indispensáveis para o desenvolvimento das sessões.

O facto de os alunos poderem apenas comunicar oralmente tornava a compreensão muitas vezes difícil. Ao ir registando o que os alunos iam dizendo, tornava-se mais fácil acompanhar os seus raciocínios, além de me permitir ajudá-los a desenvolverem-nos ou detetar erros mais facilmente.

Por outro lado, os recursos de que dispunha para fazê-lo ofereceram alguns constrangimentos. Como o meu espaço de trabalho era reduzido e utilizei um banco como suporte para o telemóvel – para garantir a sua estabilidade durante a partilha de vídeo e um posicionamento adequado para que os alunos pudessem ler os registos – tinha alguma dificuldade em escrever e ver o que escrevia, dado ter de acompanhar esse registo pelo ecrã do telemóvel. Por vezes, a atenção que tinha que dispensar para garantir que o meu material estava bem posicionado e que não havia problemas com a gravação e a ligação através do telemóvel e computador, distraía-me da comunicação com os alunos.

Esta experiência leva-me a considerar a importância de, em contextos de ensino à distância, o professor de Matemática ter à sua disposição equipamento tecnológico que lhe permita partilhar registos escritos sem esses constrangimentos (como, por exemplo, uma mesa digitalizadora ou um *tablet*). Também considero que o recurso a um menor número de aparelhos, integrando diversas funcionalidades num único (como, por exemplo, um *tablet* permite), facilita grandemente o trabalho do professor, dispensando procedimentos para alternar entre diferentes meios tecnológicos. No que respeita à utilização de recursos tecnológicos no Ensino, também considero fundamental que, de futuro, seja dada mais importância ao desenvolvimento de conhecimentos relacionados com a utilização das ferramentas digitais para o Ensino na formação de professores.

Durante as sessões síncronas, a fim de garantir a contribuição de todos os alunos para o desenvolvimento das aulas, optei por solicitar diretamente a participação dos alunos. Também procedia ao registo dos alunos que ia convocando diretamente para participar oralmente nas discussões das tarefas, procurando garantir que era dado a todos o mesmo número de oportunidades para falar. Considero que esta estratégia trouxe vantagens e desvantagens. Por um lado, houve maior diversidade de participações orais do que em aulas presenciais. Por outro lado, a turma deixou praticamente de poder partilhar ideias de forma espontânea, o que, em aulas presenciais, muito contribuía para o desenvolvimento de raciocínios de forma coletiva e para o professor perceber como deveria adaptar a sua abordagem

aos diferentes tópicos, aproximando-a da compreensão que a turma ia desenvolvendo.

No que respeita às discussões de raciocínios entre alunos, enquanto, em aulas presenciais, estas se geravam rapidamente a partir de uma questão que eu pudesse colocar, o mesmo não aconteceu nas sessões síncronas. Quando escolhia um aluno para analisar o discurso apresentado por um colega ou apelava diretamente ao contraditório, os alunos inibiam-se de participar.

Ao refletir sobre o que poderia ter feito de diferente para promover mais partilhas de raciocínios e discussões, considero que poderia ter sido mais produtivo admitir espontaneidade na participação e, na sua ausência, optar, então, por selecionar alunos para participar.

Embora todos os alunos da turma com a qual trabalhei tivessem um aparelho com ligação à internet, constatei que alguns alunos experimentaram dificuldades na comunicação (microfone avariado) que os impediam de participar oralmente nas sessões síncronas. Estes alunos eram, salvo rara exceção, os alunos que, já em aulas presenciais, evitavam momentos de maior exposição – como, por exemplo, idas ao quadro – embora fossem solícitos a pedir apoio e esclarecimentos. Também constatei que muitos alunos que, em aulas presenciais, comunicavam comigo com muita frequência, revelando à-vontade na partilha do seu trabalho e na exposição de dúvidas, passaram a revelar timidez na comunicação, deixando de partilhar dúvidas e optando por intervenções orais muito curtas.

Estas constatações levaram-me a considerar aspetos dos modos de trabalho que poderiam ser alterados no sentido de promover um maior envolvimento e à-vontade na participação. Da minha própria experiência, considerei que a interação que se estabelecia em videoconferência era um pouco confrangedora, dado que todos os participantes tinham as suas câmaras desligadas e, por isso, não nos víamos. Alguém que falasse para que todos ouvissem não tinha qualquer tipo de *feedback* que lhe permitisse avaliar de que modo a sua intervenção estaria a ser recebida pelos restantes participantes. Imagino que isso possa ter inibido os alunos. Por esse motivo, parece-me que será uma melhor opção, neste tipo de aulas, e sempre que tal seja possível, optar por um modelo de reunião que permita que os participantes se vejam. A ausência de contacto visual com os alunos também tornou difícil perceber como estariam eles a acompanhar o desenvolvimento da aula e ter uma melhor noção do seu nível de envolvimento e atenção.

No que respeita à dinâmica das sessões síncronas da unidade lecionada, a maior dificuldade com que me deparei na adaptação ao ensino à distância prendeu-se com a transposição de um modelo de ensino exploratório para esse regime de

ensino, em modos que me permitissem garantir a recolha de resoluções da autoria dos alunos para as várias tarefas das fichas de trabalho.

Como, durante as sessões síncronas, deveria verificar-se uma interação constante entre professor e aluno, não foi possível designar uns momentos para que os alunos procurassem resolver as tarefas autonomamente e outros momentos para confrontar e discutir as diferentes estratégias de resolução preconizadas. O período de lecionação semanal da disciplina de Matemática foi reduzido e, por isso, o tempo disponível também não o teria permitido. Dado que os alunos só poderiam submeter o seu trabalho depois das aulas, também não foi possível incluir períodos de sistematização de aprendizagens com a frequência com que gostaria no decurso das sessões, para não condicionar completamente o trabalho apresentado pelos alunos, uniformizando-o e comprometendo a sua autenticidade. Procurei compensar essa carência, fornecendo propostas de resolução das tarefas da aula, em momento posterior, com várias anotações e representações para facilitar a sua análise e disponibilizando-me para prestar quaisquer esclarecimentos adicionais.

Reconheço que tive algumas dificuldades em conduzir as aulas nesses modos. Em primeiro lugar, senti que ao procurar incitar um aluno a desenvolver uma estratégia de resolução para uma determinada tarefa, sem no final oferecer uma sistematização dos assuntos abordados e da estratégia preconizada em tempo útil – isto é, imediatamente após a sua realização – acabei por não ajudar alguns alunos a consolidar as aprendizagens. Em segundo lugar, num modelo de ensino que já requer mais autonomia da parte do aluno, pelo distanciamento que impõe, considero que releguei muito do trabalho, que, idealmente, deveria ser realizado durante as aulas para momentos de trabalho independente, exigindo que os alunos complementassem o trabalho das sessões com uma análise de propostas de resolução. Finalmente, ao evitar a transmissão de conhecimentos de forma expositiva e ao procurar interagir com os alunos maioritariamente através de questões orientadoras, tive dificuldades em gerir o ritmo das sessões. Da minha perspetiva, tornou-se difícil avançar de uma tarefa para a seguinte, a qual exigiria conhecimentos promovidos por uma tarefa anterior, ao mesmo tempo que procurava não dar respostas definitivas para as tarefas em discussão.

Desde o início da unidade didática fui confrontada com o ritmo das sessões síncronas e em como este deveria ser acelerado. Para tal, procurei ir seguindo as orientações dadas pela professora cooperante, durante as sessões, e ir-me aproximando da sua forma de intervir, sendo mais assertiva na orientação do trabalho dos alunos. Fui reconhecendo a necessidade prática da automatização de alguns procedimentos, à medida que se vai avançando na matéria, para que os alunos

centrem os seus esforços no desenvolvimento de novas aprendizagens e aspetos da resolução das tarefas que ainda não foram discutidos e para que se possa tirar o melhor partido do tempo disponível.

Como, à distância, não podia acompanhar com proximidade o trabalho realizado pelos alunos – como era possível em aulas presenciais – optei por pedir-lhes que me enviassem as suas resoluções para todas as tarefas propostas nas sessões síncronas. Foi, efetivamente, a partir desse trabalho que pude avaliar o desenvolvimento das aprendizagens ao longo da unidade didática e recolher dados para o estudo que me propus realizar. Essa recolha documental permitiu-me enviar a cada aluno um *feedback* individualizado, podendo fazer uma revisão muito mais cuidada do trabalho dos alunos do que era habitual. Esse acompanhamento permitiu-me detetar vários erros na comunicação de raciocínios por escrito e prestar esclarecimentos.

Por outro lado, a revisão, correção e envio de *feedback* de todo o trabalho desenvolvido pelos alunos revelou-se um trabalho exigente. Considero esse tipo de acompanhamento, como estratégia de avaliação das aprendizagens, inexequível para um professor que trabalhe diariamente com diversas turmas. Também para os alunos, a submissão de todos os registos escritos produzidos nas sessões, representaria um esforço extraordinário, caso fosse exigida em todas as disciplinas. Posto isto, considero que seria mais razoável propor apenas aos alunos o envio de resoluções para algumas das tarefas, as quais poderiam ser, posteriormente, discutidas em sessões síncronas, ficando o registo do restante trabalho à responsabilidade dos alunos.

No que respeita à preparação do *feedback* (escrito) a enviar aos alunos, aprendi que devo procurar ser moderada nas apreciações que faço de elementos de avaliação, sobretudo quando os mesmos são realizados em condições que me são alheias – como foi o caso, durante o regime de ensino à distância – e que não são necessariamente significativos para uma avaliação do desempenho dos alunos, a qual se pretende o mais objetiva e fundamentada possível. A experiência permitiu-me aprender que não devo incluir termos que podem ser sujeitos a interpretações subjetivas nas minhas apreciações do trabalho dos alunos, pois é imprudente e pode comprometer uma apreciação rigorosa. Por outro lado, para que o *feedback* tenha efeito formativo, também não deve ser um discurso veredito, mas de incitamento ou questionamento aos alunos.

No que respeita à avaliação sumativa das aprendizagens, propus a realização da questão-aula através da ferramenta *Google Forms*. O recurso a esta ferramenta permitiu-me experimentar algumas estratégias que considere preventivas da

falsificação de resultados. Foi possível definir um período de tempo para que os alunos respondessem a um primeiro grupo de questões de escolha múltipla. As alternativas de resposta para essas questões eram apresentadas por uma ordem estabelecida aleatoriamente, podendo diferir de aluno para aluno. Apesar desse cuidado, é evidente que esta forma de avaliação fornece informações pouco fidedignas, pois o professor não tem forma de verificar se o trabalho entregue pelos alunos é original ou se constitui uma cópia. Também durante esse momento de avaliação, os alunos tinham as câmaras desligadas (como habitualmente), o que não permitiu qualquer tipo de controlo da atividade dos alunos. Mas não é senão a partir do trabalho apresentado pelos alunos que posso extrair conclusões sobre a eficácia da unidade didática lecionada.

Os resultados da questão-aula são indicativos de uma evolução extremamente positiva, quando comparados com os resultados dos alunos da turma em provas de avaliação sumativa realizadas em regime presencial: nenhum aluno obteve uma classificação negativa; a nota mínima foi 14,8 valores; e a classificação média foi de 17,3 valores, coincidindo com a classificação mediana. O desempenho dos alunos sugere que as tarefas realizadas ao longo da unidade didática cumpriram com os seus objetivos. As maiores dificuldades evidenciadas pelos alunos na questão-aula relacionaram-se com a resolução de inequações, com a maioria dos alunos a não ser capaz de apresentar uma estratégia de resolução completamente isenta de erros, muito embora tenham conseguido concluir corretamente quanto ao conjunto solução. Os erros dos alunos resultam, sobretudo, de uma utilização desadequada de sinais e de conectores lógicos.

Na conceção da unidade didática, reconheço que não antecipei a necessidade de integrar um período muito significativo de tempo para desenvolver exclusivamente algumas aprendizagens do tema *Lógica e Teoria dos Conjuntos*. Considero que teria sido benéfico tê-lo feito, contemplando um momento prévio para: definir convenientemente as operações lógicas de conjunção e disjunção, discutir com os alunos o que são condições e a classificação de condições num dado universo, identificar o conjunto solução de uma condição e definir condições equivalentes. Um exercício de análise e de reflexão leva-me a considerar que não foi dada uma oportunidade aos alunos para se familiarizarem bem com estes conteúdos, pois, embora tenham sido utilizados, ao longo do ano, em contexto de resolução de problemas relativos a outros temas matemáticos, nunca foram muito discutidos ou formalmente definidos.

No que respeita às tarefas propostas aos alunos durante a unidade didática, considero que as mesmas foram adequadas para cumprir com os objetivos definidos

para a mesma. Creio que a aprendizagem dos tópicos sustentada no significado dos conceitos foi bem sucedida, dado que os alunos foram capazes de concretizar as resoluções para os vários problemas, sem que lhes tenham sido apresentadas propriedades ou estratégias algorítmicas de resolução das tarefas, as quais em nada favoreceriam o desenvolvimento de competências de raciocínio, na minha opinião. Além disso, seria muito provável que os alunos rapidamente se esquecessem desses algoritmos ou propriedades e, então, já não seriam capazes de resolver problemas semelhantes. Em contrapartida, essa abordagem não favoreceu o recurso à tecnologia gráfica para a resolução de problemas, com poucos alunos a fazer uso de estratégias de análise gráfica para resolver tarefas envolvendo o estudo de funções definidas por expressões com módulos.

No que respeita à comunicação de fundamentações para as conclusões apresentadas ou de raciocínios por escrito, considero que poderia ter sido mais bem sucedida com as tarefas que propus aos alunos, uma vez que os mesmos apresentaram os seus raciocínios com pouco detalhe, o que dificultou a análise das suas resoluções das tarefas no que respeitava aos processos de raciocínio. Penso que deveria ter solicitado mais frequentemente o recurso a justificações no próprio enunciado das questões.

4. RECOLHA DE DADOS

Neste capítulo, justifico opções metodológicas relativas à investigação e à seleção dos participantes, e explico aspetos gerais do processo de recolha e análise de dados, incluindo os instrumentos utilizados. Por fim, refiro as questões éticas assumidas neste estudo.

4.1. Opções Metodológicas

Dado o objetivo do meu estudo, que procura compreender os processos de raciocínio matemático que os alunos do 10.º ano utilizam na resolução de diversos tipos de tarefas, e a sua articulação com características das tarefas propostas, optei por seguir uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), como necessária para se adaptar ao objetivo e questões do estudo. A minha metodologia de investigação contemplou as seguintes características atribuídas a investigações do tipo qualitativo: teve como fonte de dados o ambiente natural, assumindo que o comportamento dos participantes é influenciado pelo seu contexto, e utilizou técnicas de recolha e análise de dados descritivas e indutivas.

Centrando-se, o estudo, em aspetos qualitativos do desenvolvimento do raciocínio matemático, a investigação e descrição interpretativa dos processos de raciocínio dos alunos, fundamentada em evidências empíricas, apresentou-se como sendo a mais adequada para responder às questões de investigação. Portanto, a metodologia de estudo eleita teve subjacente um paradigma de investigação interpretativo (Erickson, 1986).

4.2. Instrumentos de Recolha de Dados

Recorri a técnicas baseadas na recolha documental (Coutinho et. al., 2009). Procedi a uma recolha das produções escritas dos alunos, coletando as resoluções por eles produzidas para as tarefas propostas ao longo da unidade didática. A investigação incidiu nessa coletânea de trabalhos realizados pelos alunos.

Inicialmente, esperava poder complementar este método de recolha de dados com gravações (vídeo ou áudio) das atividades desenvolvidas pelos alunos durante as aulas. A recolha de dados deste tipo requeria um consentimento informado por parte dos Encarregados de Educação dos participantes neste estudo, o qual foi

solicitado, em período anterior ao encerramento das escolas. Contudo, devido à suspensão das atividades letivas presenciais, não me foi possível recolher esses consentimentos antes de iniciar a minha intervenção letiva, motivo pelo qual não foi possível proceder a gravações das sessões síncronas – o que, na minha opinião, teria permitido uma recolha de dados mais rica do que a que foi possível concretizar, dado ter-se verificado que, frequentemente, os alunos não registam (por escrito) as explicações que oferecem oralmente para os seus raciocínios.

Ainda assim, é possível que a minha análise das produções escritas dos alunos possa ter sido, em alguma medida, condicionada pela observação que realizei durante as sessões síncronas, em consequência do duplo papel que nelas representei enquanto professora-investigadora. Durante essas sessões, enquanto escutava as intervenções dos alunos, assumia, inevitavelmente, um papel de espectadora atenta às suas participações. Se, por um lado, é possível que a minha interação com os participantes possa ter condicionado as suas ações, por outro lado, pode ter contribuído para que eu pudesse, posteriormente, concretizar uma análise mais aprofundada dos dados recolhidos, por me ter permitido uma perceção da realidade do ponto de vista interno ao ambiente em estudo. Essa experiência pode ter contribuído para a interpretação que fiz dos dados recolhidos. Por esse motivo, considero importante ressaltar que, no processo de recolha de dados, ainda que informalmente, assumi, em parte, um papel de observadora participante moderada (Spradley, citado em Mónico, Alferes, & Parreira, 2017), oscilando entre os papéis de observadora e participante e intervindo no contexto do estudo.

4.3. Participantes

Neste estudo participaram 22 alunos do 10.º ano, com idades compreendidas entre os 15 e os 16 anos. A escolha dos participantes prendeu-se unicamente com o facto de estes terem integrado a única turma com a qual a professora cooperante na minha atividade de estágio trabalhou, no ano letivo em que a mesma se realizou.

Optei por constituir participantes no estudo todos os alunos da turma. Foi minha expectativa que a recolha do maior número possível de resoluções para cada tarefa pudesse contribuir para uma recolha de informação mais diversificada, atendendo à heterogeneidade da turma. Igualmente, considerei que a seleção da maior amostra possível poderia favorecer a identificação de padrões de raciocínio e a perceção dos seus níveis de prevalência na amostra.

Apesar de terem sido consideradas, para fins de análise, resoluções de todos os alunos da turma, raramente foi possível recolher, para uma mesma tarefa, 22 resoluções, dado ter havido sempre alguns alunos – nem sempre os mesmos – que não cumpriram com a entrega do trabalho proposto.

4.4. Análise de Dados

Uma vez que para aceder ao raciocínio dos alunos é necessário que estes o comuniquem, ainda que através de diferentes representações (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012; Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020), procurei dar resposta às questões que orientaram a minha investigação com base numa análise das representações (numéricas, algébricas, pictóricas, gráficas, em linguagem natural, entre outras) utilizadas pelos alunos, e dos raciocínios que evidenciam na resolução de algumas das tarefas propostas durante a unidade didática.

Tendo em conta as questões de investigação do estudo, optei por seleccionar resoluções de tarefas com naturezas distintas (problemas, explorações e exercícios), de acordo com o modelo de tipificação de Ponte (2005). Também procurei seleccionar tarefas que incluíssem características referidas em estudos ou referenciais teóricos como sendo promotoras do raciocínio matemático (sistematizadas na subsecção *Diversidade de tarefas* da secção 3.4).

Posto isto, a minha escolha recaiu sobre as resoluções dos alunos para: Atividades 1.3.c), 1.4.c), 1.5., 1.6.d), 1.6.h) 1.9.c) e 1.9.d) da Ficha de Trabalho N.º 1 (Anexo A); Atividade 2.4 da Ficha de Trabalho N.º 2 (Anexo C); Atividades 3.1, 3.2.1.g2) e 3.2.1.g3) da Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E); e itens 6 e 7.4 da Questão-aula (Anexo J).

Na minha análise, descritiva e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) das respostas dos alunos, procurei identificar e caracterizar os processos de raciocínio matemático, considerando o modelo descrito por Jeannotte e Kieran (2017), assim como dificuldades na sua utilização. No que respeita à caracterização dos raciocínios dos alunos, considerei igualmente as características distintivas dos vários tipos de raciocínio consideradas pelas autoras. Procurei também, sempre que possível, compreender e descrever o modo como os alunos interrelacionam os diferentes processos de raciocínio. Paralelamente, procurei relacionar os processos de raciocínio utilizados pelos alunos com características das tarefas propostas. Não me pareceu adequado separar esses dois aspetos da análise, pois estão relacionados.

Assim, optei por organizar os dados recolhidos e a minha análise por temáticas (ou temas matemáticos). Designadamente: *Equações e Inequações Envolvendo Módulos* (secção 5.1) e *Funções Envolvendo Módulos* (secção 5.2). Na secção 5.1, apresento uma análise de resoluções dos alunos para tarefas envolvendo a análise de (i) *Condições impossíveis ou universais em \mathbb{R}* e para tarefas envolvendo a resolução de (ii) *Inequações*. Na secção 5.2, apresento uma análise de resoluções dos alunos para uma tarefa envolvendo a (i) *Modelação de fenómenos reais* e para tarefas envolvendo o (ii) *Estudo elementar de funções*.

Atendendo aos objetivos do estudo, a repartição da análise por tópicos matemáticos apresentou outras duas vantagens. Por um lado, permitiu estabelecer comparações baseadas na análise de resoluções dos alunos para tarefas semelhantes, porque envolvendo os mesmos tópicos matemáticos, mas com formulações distintas. Por outro lado, permitiu desenvolver uma análise que, por acompanhar cronologicamente o percurso de aprendizagem dos alunos, atende a experiências anteriores. Isto é, torna possível estabelecer comparações entre a atividade realizada pelos alunos num dado momento com a atividade por eles realizada noutra, anterior ou posterior.

4.5. Questões de Natureza Ética

Na condução deste estudo, procurei reger a minha conduta pelos princípios da *Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação* do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (Instituto de Educação, 2017). Comprometi-me a não recorrer a plágio, nem à falsificação de informação, e a ser autêntica nos resultados apresentados, respeitando os princípios de honestidade e de transparência.

Para a realização do presente estudo, foi obtida uma autorização do diretor da instituição de ensino em que se encontravam matriculados os alunos participantes. Tendo a intervenção letiva ocorrido *online*, e uma vez que os dados usados no estudo seriam os trabalhos escritos enviados pelos alunos, os quais não apresentariam nenhum elemento identificativo dos alunos, a professora cooperante, atendendo à autorização que tinha, confirmou não ser necessário solicitar o consentimento dos seus encarregados de educação. A fim de preservar a privacidade dos alunos, comprometi-me a garantir o seu anonimato, não revelando a sua identidade mas usando nomes fictícios, nem tornando pública qualquer associação entre a informação apresentada e a identidade dos participantes neste estudo.

5. ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, apresento uma análise das resoluções dos alunos de uma variedade de tarefas envolvendo equações e inequações com módulos e o estudo elementar de funções definidas por expressões com módulos. Por meio de uma análise descritiva e interpretativa das suas respostas, procurei identificar processos de raciocínio matemático e dificuldades na sua utilização. Também procurei caracterizar o modo como os alunos articulam esses processos para estruturar o seu raciocínio. Além disso, estabeleci algumas relações entre características das tarefas que lhes foram propostas e os processos de raciocínio a que os alunos recorreram para as resolver.

5.1. Equações e Inequações Envolvendo Módulos

Condições impossíveis ou universais em \mathbb{R}

Na análise das resoluções dos alunos envolvendo equações e inequações com módulos, elegi, como ponto de partida, cinco tarefas das fichas de trabalho com um aspeto comum: as condições apresentadas nos seus enunciados eram impossíveis ou universais em \mathbb{R} . Na Figura 19, são apresentados os enunciados dessas tarefas.

As Atividades 1.3, 1.4 e 1.9 integravam a Ficha de Trabalho N.º 1 (Anexo A) e a Atividade 3.2.1 integrava a Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E). A natureza das várias tarefas era semelhante: determinar o conjunto representado por uma dada condição definida em \mathbb{R} . Mas os seus enunciados distinguiram-se por alguns motivos: na tarefa 1.3.c), os alunos eram confrontados com uma conjectura (a condição $|x| = -1$ é uma condição impossível), sendo-lhes solicitada uma justificação para validá-la, ao passo que, nas restantes tarefas, não era apresentada nenhuma hipótese, tampouco era pedida qualquer justificação; as condições apresentadas nas tarefas 1.3.c) e 1.4.c) levavam os alunos a considerar igualdades, enquanto as condições apresentadas em 1.9.c), 1.9.d) e 3.2.1.g₂) levavam-nos a considerar desigualdades; na tarefa 3.2.1.g₂), o problema era colocado em contexto de estudo das imagens de uma função, o que poderia favorecer a diversificação de estratégias de resolução.

<p>Atividade 1.3 Preencha os espaços deixados em branco.</p> <p>[...]</p> <p>(c) $x = -1$</p> <p>A condição apresentada é impossível, porque...</p> <p style="text-align: center;">(Complete com uma justificção)</p> <p>Portanto, a equação apresentada não tem soluções e o seu conjunto solução é: <input type="text"/></p>
<p>Atividade 1.4 Resolva, em \mathbb{R}, as equações e apresente os respectivos conjuntos-solução.</p> <p>[...]</p> <p>(c) $x + 3 = 0$</p>
<p>Atividade 1.9 Resolva, em \mathbb{R}, cada uma das inequações e apresente os respectivos conjuntos-solução na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.</p> <p>[...]</p> <p>(c) $-2x + 3 < -5$</p> <p>(d) $-3x + 3 > -8$</p>
<p>Atividade 3.2.1. Considere a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = - x + 1 + 3$.</p> <p>[...]</p> <p>(g) Resolva, em \mathbb{R}, cada uma das condições e apresente os respectivos conjuntos-solução.</p> <p>[...] (g₂) $f(x) > 5$</p>

Figura 19 – Enunciados de tarefas propostas envolvendo condições impossíveis ou universais em \mathbb{R}

Uma revisão das produções escritas dos alunos permitiu-me distingui-las e agrupá-las de acordo com alguns critérios – como apresentado na Tabela 8. Para quantificar a preponderância de cada critério na globalidade das resoluções, determinei a frequência relativa (em percentagem e com aproximação às décimas) da sua ocorrência.

Tabela 8 – Categorização das respostas dos alunos para tarefas envolvendo condições impossíveis ou universais em \mathbb{R}

			Tarefa					Porcentagem
			1.3 c)	1.4 c)	1.9 c)	1.9 d)	3.2.1 g2)	
Conclui corretamente quanto ao conjunto solução	Classifica a condição	Justifica a classificação	NA		1	3	2	5,4%
		Não justifica a classificação	NA	6	4		3	11,8%
	Convoca uma propriedade	Valida a propriedade	14		1			13,6%
		Apenas aplica a propriedade	4		3	1		7,3%
	Não fundamenta a conclusão		1	14	5	14	9	39,1%
Não conclui corretamente quanto ao conjunto solução	Aplica incorretamente uma propriedade				5		2	6,4%
Não realizou a tarefa			3	2	3	4	6	16,4%
TOTAL			22	22	22	22	22	

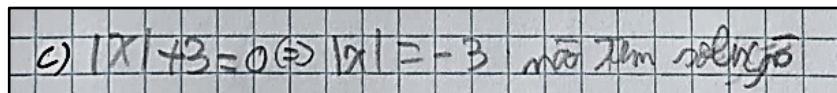
Legenda: Não se aplica (NA).

Na tarefa 1.3.c), quase todos os alunos comunicaram uma justificação que validava a conjectura apresentada no enunciado. Maioritariamente, basearam a sua justificação numa propriedade do módulo de um número real, a qual, eles próprios, identificaram e apresentaram em linguagem natural (e. g. “Não existem módulos negativos”). Ainda uma maioria dos alunos validou essa propriedade, deduzindo-a da definição de módulo (e. g. “não podem existir módulos negativos, uma vez que os módulos representam distâncias”, Figura 20).

c) A condição é impossível porque não podem existir módulos negativos, uma vez que os módulos representam distâncias.

Figura 20 – Resolução do aluno S da tarefa 1.3.c)

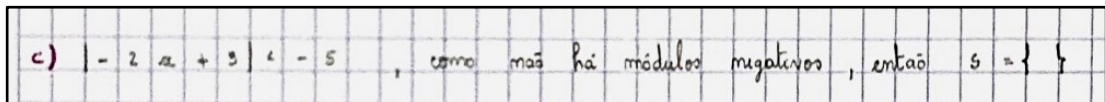
Na resolução da tarefa 1.4.c), todos os alunos (que realizaram a tarefa) concluíram corretamente quanto à inexistência de soluções para a equação, mas, desta vez, a maior parte dos alunos não apresentou qualquer fundamento para a sua conclusão: “não tem solução” (Figura 21). Apenas uma minoria classificou a condição como “impossível”, sem, porém, justificar essa classificação.



$$c) |x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x| = -3 \text{ não tem solução}$$

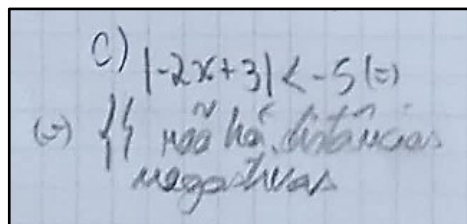
Figura 21 – Resolução do aluno O da tarefa 1.3.c)

Na tarefa 1.9.c), por contraste com a tarefa 1.3.c), menos alunos apresentaram algum fundamento para a conclusão a que chegaram no que respeitava ao conjunto solução da condição (conjunto vazio). Alguns evocaram uma propriedade do módulo de um número real utilizando linguagem natural (e. g. “não há módulos negativos”, Figura 22). Apenas 2 alunos remeteram para o significado geométrico do conceito (e. g. “não há distâncias negativas”, Figura 23). Outros classificaram a condição como “impossível” e, na sua maioria, não apresentaram justificação para essa classificação.



$$c) |-2x + 3| < -5, \text{ como não há módulos negativos, então } S = \{ \}$$

Figura 22 – Resolução do aluno S da tarefa 1.9.c)



$$c) |-2x + 3| < -5$$

(*) não há distâncias negativas

Figura 23 – Resolução do aluno V da tarefa 1.9.c)

Na mesma tarefa, houve ainda um grupo de alunos (5 alunos) que não foi capaz de reconhecer que a condição era impossível e estabeleceu equivalências falsas. Uma análise das resoluções desses alunos leva-me a concluir que os mesmos procuraram desenvolver uma estratégia para resolver a inequação por analogia com

uma estratégia de resolução de equações envolvendo módulos. A título de exemplo, considere-se a resolução apresentada na figura seguinte.

The image shows a student's handwritten work on a grid background. The work is as follows:

$$\text{c) } |-2x + 3| < -5 \quad (=) \quad -2x + 3 < -5 \quad \vee \quad -2x + 3 < 5 \quad (=)$$

$$\quad (=) \quad -2x < -5 - 3 \quad \vee \quad -2x < 5 - 3 \quad (=) \quad x < -4 \quad \vee \quad x < -1$$

$$\quad \text{S} =]-\infty; -4[\quad \vee \quad]-1; +\infty[$$

Figura 24 – Resolução do aluno F da tarefa 1.9.c)

A resolução apresentada na Figura 24 sugere que o aluno recorreu à propriedade do módulo de um número real $|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$ (válida para $a \geq 0$) e, procedendo à troca do sinal “=” pelo sinal “<”, concluiu que $|x| < a \Leftrightarrow x < a \vee x < -a$. Além de ter concluído falsamente, o aluno desprezou o critério de validade da propriedade da qual partiu. Em resoluções semelhantes, considere-se que os alunos aplicaram incorretamente uma propriedade. Casos como este são indicativos de que alguns alunos privilegiam o recurso a processos de comparação e de identificação de padrões para desenvolver estratégias de resolução para novos problemas que estão unicamente fundamentadas na semelhança, em termos formais, com resoluções produzidas para problemas anteriores. Estes alunos revelam valorizar mais os conhecimentos procedimentais do que os conhecimentos conceptuais.

Na tarefa 1.9.d), a grande maioria dos alunos voltou a não apresentar qualquer indicação do modo como pensou e concluiu quanto ao conjunto solução. Apenas uma pequena minoria (3 alunos) classificou a condição como “universal”, tendo procurado fundamentar essa classificação com uma argumentação circular: concluem que o conjunto solução é o conjunto \mathbb{R} porque a condição é universal, tendo concluído que a condição é universal porque o conjunto solução é o conjunto \mathbb{R} (Figura 25).

The image shows a student's handwritten work on a grid background. The work is as follows:

$$\text{d) } |-3x + 3| > -8, \text{ é uma condição universal em } \mathbb{R} \text{ porque a solução é}$$

$$\text{igual a } \mathbb{R}, \text{ logo } S = \{ \mathbb{R} \}$$

Figura 25 – Resolução do aluno S da tarefa 1.9.d)

Por último, na resolução da tarefa 3.2.1.g₂), todos os alunos optaram por uma estratégia envolvendo a substituição de $f(x)$ pela expressão analítica que definia a função. Depois, com base num raciocínio dedutivo, formularam uma expressão algébrica simplificada em que a expressão com módulos figurava isolada no primeiro membro da inequação. Aí chegados, concluíram que o conjunto solução da condição é vazio. Mas, novamente, apenas uma minoria dos alunos fundamentou a sua conclusão, sendo exemplo de um desses casos a resolução apresentada na Figura 26, na qual o aluno classifica a condição como “impossível” e justifica a classificação com base numa propriedade do módulo de um número real (e. g. “Condição impossível, pois o módulo de um número nunca assume números negativos”, Figura 26).

(g₂) $f(x) > 5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |-1x+1|+3 > 5 \Leftrightarrow |-1x+1| > 5-3 \Leftrightarrow |-1x+1| > 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |x+1| < -2 \Leftrightarrow$
 C.S = {}
 Condição impossível, pois o módulo
 de um número nunca assume
 número negativo

Figura 26 – Resolução do aluno H da tarefa 3.2.1.g₂)

Globalmente, verificou-se que, quando no enunciado das tarefas não é solicitada uma justificação, a maior parte dos alunos não regista uma explicação do modo como pensou para concluir. Dos alunos que, estando em menor número, procuram fundamentar as conclusões que apresentam, a maioria opta por fazê-lo classificando as condições dos enunciados, e sem apresentar uma justificação para as classificações atribuídas.

Por contraste, verificou-se que quando no enunciado de uma tarefa é solicitada uma justificação, por exemplo, para validar uma conjectura, os alunos comunicam fundamentos, apresentando justificações. Estas baseiam-se, essencialmente, em propriedades matemáticas, as quais os alunos revelam preocupação em validar, deduzindo-as de definições. Portanto, verificou-se que, em tarefas que suscitam a validação de conjecturas, os alunos são capazes de generalizar propriedades por via dedutiva partindo dos seus conhecimentos conceptuais.

Algumas resoluções apresentadas sugerem que há alunos que encaram a padronização da forma das respostas como um critério para a sua validade, privilegiando de tal forma a comparação e a identificação de padrões formais, quando abordam um problema, que subvertem a utilidade desses processos de raciocínio no desenvolvimento das suas aprendizagens.

Foi ainda possível constatar carências relativas a aprendizagens do domínio da *Lógica* e da *Teoria dos Conjuntos*.

A maioria dos alunos revelou não estar familiarizada com alguma da notação utilizada para representar conjuntos – representando, por exemplo, o conjunto dos reais como “ $\{\mathbb{R}\}$ ” (Figura 25) ou o conjunto-vazio como “ $\{\emptyset\}$ ”. Muitos alunos não apresentam o conjunto solução das condições quando este é vazio, referindo apenas: “não tem solução” (Figura 21).

Também se verificou que muitos alunos não compreendem o significado de alguns conectores lógicos.

Por exemplo, na resolução apresentada na Figura 23, o aluno estabelece uma equivalência entre uma condição e um conjunto (“ $|-2x + 3| < -5 \Leftrightarrow \{ \}$ ”), revelando desconhecimento do significado do sinal “ \Leftrightarrow ” e da operação lógica que representa. A resolução sugere que o aluno utiliza o sinal “ \Leftrightarrow ” apenas para assinalar o sentido do discurso.

Já na resolução apresentada na Figura 24, o aluno revela desconhecimento do significado do sinal “ $<$ ”. Ao considerar que a condição $x < -4$ define o conjunto $]-\infty, -4[$, ao mesmo tempo que considera que a condição $x < -1$ define o conjunto $]-1, +\infty[$, torna-se evidente que este aluno nem sequer utiliza o sinal “ $<$ ” com um significado definido. A resolução por ele apresentada sugere que o mesmo conclui quanto ao conjunto definido por $x < -4 \vee x < -1$ estabelecendo uma analogia com a posição que as condições $x < -4$ e $x < -1$ ocupam na disjunção: a condição que surge à esquerda, $x < -4$, define um conjunto numérico que se prolonga para a esquerda na reta numérica, ou seja, que não é limitado inferiormente, $]-\infty, -4[$; a condição que surge à direita, $x < -1$, define um conjunto que se prolonga para a direita na reta numérica, ou seja, que não é limitado superiormente, $]-1, +\infty[$. O mesmo aluno também utiliza o operador lógico “ \vee ” para representar uma operação com conjuntos.

Inequações

Para analisar a atividade dos alunos envolvendo a resolução de inequações com módulos, selecionei as Atividades 1.5 e 1.6 da Ficha de Trabalho N.º 1 (Anexo A), a Atividade 3.2 da Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E) e a tarefa 6 da Questão-aula (Anexo J). Os seus enunciados são apresentados na Figura 27.

Para poder estabelecer comparações entre as características das tarefas e as resoluções apresentadas para as várias inequações, agrupei as alíneas a) e b) da Atividade 1.5, tratando-as como uma só tarefa que envolvia a determinação do conjunto solução de $|x| \leq 5$. As restantes tarefas (associadas a diferentes alíneas) foram tratadas separadamente.

Globalmente, a Atividade 1.5 apresentava-se com uma natureza exploratória e visava promover o desenvolvimento de estratégias de resolução de inequações na forma $|x| \leq a$. Porém, considero que as tarefas 1.5.a) e 1.5.b) desta Atividade, quando isoladas da tarefa 1.5.c), revestem-se de uma natureza essencialmente problemática, uma vez que apresentam uma estrutura fechada. O mesmo não se verifica para a tarefa 1.5.c). Não sendo apresentada nenhuma restrição ao parâmetro a da condição, esta última tarefa apresenta uma natureza exploratória. As tarefas 1.5.a) e 1.5.b) promoviam o desenvolvimento de raciocínios dedutivos baseados na definição de conceitos e por analogia com exemplos e, ainda, o recurso a representações variadas. A tarefa 1.5.c) promovia a generalização de propriedades do módulo de um número real.

As tarefas 1.6.d) e 3.2.1.g₃) tinham uma natureza problemática e promoviam o desenvolvimento de aprendizagens relacionadas com a resolução de inequações do tipo $|P(x)| \geq a$, com $a > 0$, e em que $P(x)$ é um polinómio do 1.º grau. Embora, em termos de formulação, as tarefas fossem semelhantes, a 3.2.1.g₃) distinguia-se da 1.6.d) por ser apresentada em contexto de estudo de uma função.

A tarefa 1.6.h) também apresentava uma natureza problemática, mas distinguia-se das restantes pois a variável x figurava “dentro” e “fora” dos símbolos de módulo, o que acarretava, logo à partida, um desafio acrescido.

A tarefa 6 da Questão-aula apresentava uma estrutura fechada e constituía um exercício, dado que, à data da sua resolução, os alunos já estariam familiarizados com estratégias que lhes permitissem resolver tarefas análogas.

<p>Atividade 1.5</p> <p>(a) Tendo em conta o significado geométrico de x, a expressão $x = 5$ pode ler-se: «a distância do x ao 0 é igual a 5». Como faria a leitura da expressão $x \leq 5$?</p> <p>(b) Represente na reta numérica o conjunto dos pontos que satisfazem a condição $x \leq 5$. De seguida, represente esse conjunto sob a forma de intervalo de números reais.</p> <p>(c) Seja a um número real. Represente na reta numérica o conjunto dos pontos que satisfazem a condição $x \leq a$ e, de seguida, represente esse conjunto sob a forma de intervalo.</p>
<p>Atividade 1.6 Resolva, em \mathbb{R}, cada uma das inequações. Apresente os respetivos conjuntos-solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.</p> <p>[...]</p> <p>(d) $x \geq 4$</p> <p>[...]</p> <p>(h) $x > x$</p>
<p>Atividade 3.2</p> <p>3.2.1. Considere a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = - x + 1 + 3$.</p> <p>[...]</p> <p>(g) Resolva, em \mathbb{R}, cada uma das condições e apresente os respetivos conjuntos-solução.</p> <p>[...] (g₃) $f(x) \leq -2$</p>
<p>Questão-aula</p> <p>6. Represente sob a forma de intervalo ou de união de intervalos de números reais o conjunto solução da seguinte condição definida em \mathbb{R}.</p> $13 - 3 x \geq 1$

Figura 27 – Enunciados de tarefas propostas envolvendo a resolução de inequações com módulos

Na Tabela 9, compus uma sistematização das respostas dos alunos, agrupando-as de acordo com os critérios aí apresentados. Os critérios foram definidos depois de analisar as resoluções dos alunos e de modo a permitirem a sua distinção em termos de estratégias e raciocínios.

Tabela 9 – Categorização das respostas dos alunos para tarefas envolvendo a resolução de inequações com módulos

		Tarefa						Porcentagem
		1.5 a), b)	1.5 c)	1.6 d)	1.6 h)	3.2.1 g ₃)	QA 6	
Conclui corretamente quanto ao conjunto solução	Justifica inferências, fundamentando-as no significado de conceitos	10	6					11,4%
	Aplica uma propriedade e estrutura um raciocínio dedutivo	9		8		13	6	28,0%
	Baseia-se em definições algébricas para desenvolver um raciocínio dedutivo por casos			2	1		6	6,8%
	Não fundamenta a conclusão			3	5			6,1%
Não conclui corretamente quanto ao conjunto solução	Justifica inferências, fundamentando-as no significado de conceitos	1	2					2,3%
	Aplica uma propriedade e estrutura um raciocínio dedutivo			5	1	3	1	7,6%
	Baseia-se em definições algébricas para desenvolver um raciocínio dedutivo por casos				12	1	4	12,9%
	Não fundamenta a conclusão		12					9,1%
Não realizou a tarefa		2	2	4	3	5	5	15,9%
TOTAL		22	22	22	22	22	22	

Na tarefa 1.5.a),b), com exceção de 1 aluno, todos os que realizaram a tarefa concluíram corretamente quanto ao conjunto solução. Na alínea a), a maioria dos alunos (10 alunos) comunicou uma interpretação geométrica da condição que torna evidente qual é o conjunto que a mesma representa. Na alínea b), os mesmos alunos representaram esse conjunto na reta numérica e na forma de intervalo (Figura 28). Os alunos concretizam um raciocínio dedutivo, que se desenvolve a partir de uma definição.

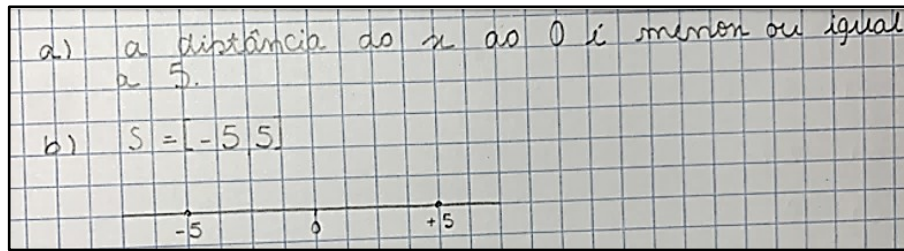


Figura 28 - Resolução do aluno T das tarefas 1.5.a) e 1.5.b)

Contudo, muitos alunos (9 alunos) resolveram a inequação $|x| \leq 5$ sem comunicar uma interpretação geométrica da condição, ignorando, portanto, o que era pedido no enunciado da tarefa. Por exemplo, na resolução apresentada na Figura 29, na alínea a), o aluno optou por resolver imediatamente a inequação e por apresentar o seu conjunto solução sob a forma de intervalo, o que não se pretendia, e não respondeu à questão do enunciado. Na representação do conjunto solução que apresentou na alínea b), este aluno não assinalou a origem da reta numérica, não considerando, portanto, relevante incluir uma representação que indiciasse que considerou a posição relativa ao 0 dos reais pertencentes ao intervalo $[-5, 5]$ para complementar a sua resposta e fundamentar, de algum modo, a equivalência que estabeleceu na alínea anterior.

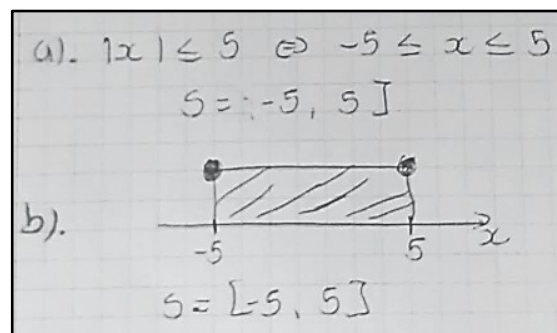


Figura 29 – Resolução do aluno N das tarefas 1.5.a) e 1.5.b)

Quase metade das resoluções entregues pelos alunos foram semelhantes à que é apresentada da Figura 29. Ao não comunicarem uma interpretação geométrica da condição $|x| \leq 5$ por analogia com a interpretação geométrica da condição $|x| = 5$, como se pedia, estes alunos revelaram, em primeira instância, dificuldades em estabelecer comparações. Resoluções como a apresentada (Figura 29) sugerem que muitos alunos não interpretam expressões envolvendo uma variável como uma condição, nem lhe atribuem um significado *per se* – associando-as simplesmente (e necessariamente) a tarefas que envolvem a resolução de uma inequação. Tome-se,

ainda como exemplo, a resolução apresentada na Figura 30. Nela, o aluno estabelece uma igualdade entre uma condição e um intervalo (" $-5 \leq x \leq 5 = [-5, 5]$ "), o que revela que o mesmo não distingue entre uma e outra coisa. Algo semelhante já se tinha verificado noutras tarefas, com alunos a estabelecerem equivalências entre condições e conjuntos (" $|-2x + 3| < -5 \Leftrightarrow \{ \}$ ", Figura 23).

1.5
 a) $|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5 = [-5, 5]$
 b) $S = [-5, 5]$

Figura 30 – Resolução do aluno I das tarefas 1.5.a) e 1.5.b)

Na tarefa de exploração 1.5.c), a maior parte dos alunos da turma (12 alunos) apresentou conclusões falsas, tendo concluído que o conjunto solução da inequação $|x| \leq a$ é o conjunto dos reais pertencentes ao intervalo $[0, +\infty[$ (Figura 31). Estes alunos não incluíram qualquer justificação para a sua resposta.

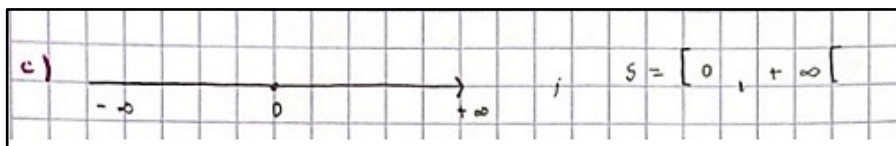


Figura 31 – Resolução do aluno S da tarefa 1.5.c)

É possível que tenham representado o conjunto de valores que, quando atribuídos ao parâmetro a , tornam a condição possível. Em todo o caso, e atendendo à semelhança na formulação dos enunciados das tarefas 1.5.b) e 1.5.c), conclui-se que estes alunos nem sequer estabeleceram uma comparação entre as duas tarefas que lhes permitisse reconhecer que a condição apresentada em 1.5.b), $|x| \leq 5$, constituía um caso particular de uma condição do tipo $|x| \leq a$, dado não haver qualquer semelhança entre o intervalo que apresentaram em 1.5.b) e o intervalo que apresentaram em 1.5.c). No primeiro caso, apresentaram um intervalo fechado e simétrico em relação à origem ($[-5, 5]$); no segundo caso ($[0, +\infty[$), nada disso se verifica.

Dos 6 alunos que conseguiram extrair conclusões válidas relativamente ao conjunto solução de $|x| \leq a$, todos comunicaram uma interpretação geométrica da condição fundamentada no significado de módulo (Figura 32; Figura 33). Alguns complementaram as suas respostas estabelecendo a equivalência " $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ " (Figura 33).

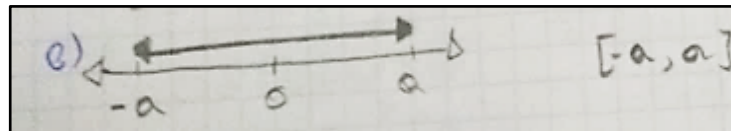


Figura 32 – Resolução do aluno V da tarefa 1.5.c)

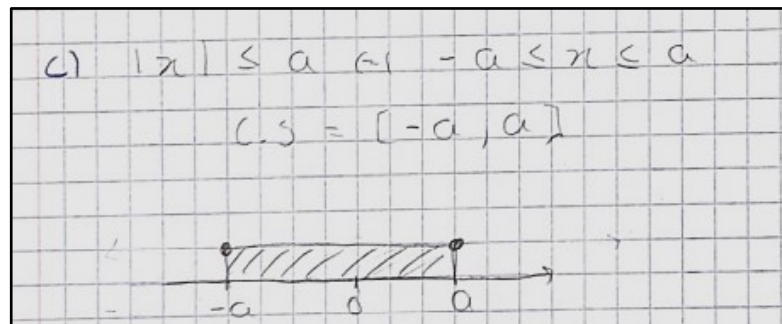


Figura 33 – Resolução do aluno J da tarefa 1.5.c)

Os alunos que apresentaram conclusões válidas consideraram apenas o caso em que $a > 0$, mas nenhum deles deu nota desse domínio de validade das conclusões que apresentou. Nenhum aluno considerou os casos em que $a = 0$ ou $a < 0$. Essa lacuna sugere que estes alunos, ao contrário dos restantes, terão desenvolvido o seu raciocínio por comparação com o raciocínio desenvolvido para a tarefa anterior, 1.5.b), tendo concluído por um processo de generalização baseado na análise desse caso particular, em que $a = 5$. Em nenhuma das resoluções foi registada a exploração de mais casos particulares, por atribuição de outros valores positivos ao parâmetro a , o que sugere que os alunos não sentiram necessidade de explorar mais exemplos ou não tiveram essa iniciativa.

Houve ainda um par de alunos que, tendo comunicado uma interpretação geométrica da condição para fundamentar a sua resposta, não conseguiu, porém, inferir uma generalização (Figura 34). Estes alunos – que também consideraram apenas o caso em que $a > 0$ – não conseguiram abstrair-se do facto de o parâmetro a poder tomar uma infinidade de valores no intervalo $]0, +\infty[$ para generalizar. Ainda

assim, tanto a representação na reta numérica, como o intervalo que apresentaram $(]-\infty, +\infty[)$, sugerem um reconhecimento da “simetria” que caracteriza o conjunto-solução de condições do tipo $|x| \leq a$ ($a > 0$). Desta perspectiva, é possível estabelecer um paralelismo entre os intervalos apresentados por esses 2 alunos em 1.5.a),b) e 1.5.c) que é indicativo da identificação de um padrão no que respeita ao conjunto solução de inequações desse tipo. O reconhecimento desse padrão não é, porém, suficiente para que os alunos consigam generalizar uma propriedade.

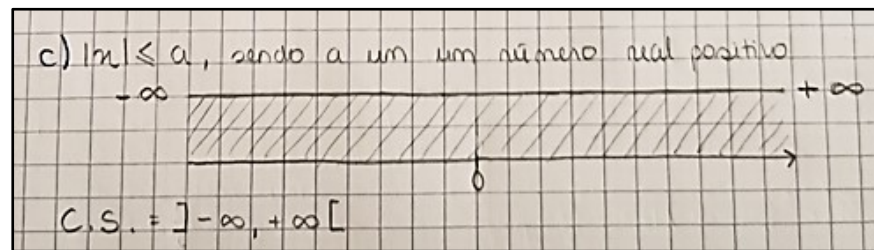


Figura 34 – Resolução do aluno R da tarefa 1.5.c)

Na tarefa 1.6.d), a maioria dos alunos (13 alunos) concluiu corretamente quanto ao conjunto solução. Os alunos revelaram preferência pela aplicação de uma propriedade do módulo de um número real: se $a > 0$, $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$. Uma vez que, nas sessões síncronas, esta propriedade não foi formalizada, o mais natural é que os alunos tenham concluído quanto à equivalência que estabeleceram por meio de um raciocínio dedutivo fundamentado no conceito de módulo e no seu significado geométrico. Apesar disso, a maioria não validou de modo algum a equivalência estabelecida, o que não permite saber que tipo de raciocínio esteve na sua origem. Houve apenas 2 alunos que o fizeram, tendo recorrido à definição algébrica de módulo de um número real para desenvolver um raciocínio dedutivo por casos, o qual apresentaram do seguinte modo:

Figura 35 – Resolução do aluno S da tarefa 1.6.d)

Apesar da omissão e uso desadequado de alguns conectores lógicos é possível compreender que a resolução apresentada na Figura 35 traduz um raciocínio dedutivo que envolve considerar separadamente dois casos, $x \geq 0$ e

$x < 0$, e usar a expressão analítica que define $|x| (x \in \mathbb{R})$, em cada caso, para desembaraçar de módulos a condição do enunciado. Parece claro que os alunos deduziram que $|x| \geq 4 \Leftrightarrow (x \geq 4 \wedge x \geq 0) \vee (-x \geq 4 \wedge x < 0)$.

Na mesma tarefa, houve ainda um conjunto de 5 alunos que estabeleceu equivalências falsas, por analogia com equivalências estabelecidas na resolução de problemas anteriores. Tome-se, como exemplo, a resolução seguinte.

D) $|x| \geq 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -4 \geq x \geq 4$
 C.S = $[-4, 4]$

Figura 36 – Resolução do aluno J da tarefa 1.6.d)

A resolução acima apresentada sugere que o aluno concluiu quanto à equivalência que estabelece por analogia com uma equivalência por ele estabelecida numa tarefa anterior: “ $|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$ ”. O aluno limitou-se a trocar o “5” pelo “4” e o sinal “ \leq ” pelo sinal “ \geq ”. Repare-se que, em diferentes tarefas, este aluno concebe as condições $-5 \leq x \leq 5$ e $-4 \geq x \geq 4$ como sendo ambas possíveis, o que indica que o mesmo não atribui qualquer significado aos sinais “ \geq ” ou “ \leq ”. Resoluções como a apresentada na Figura 36 levam ainda a crer que há vários alunos que concluem quanto ao conjunto solução em função da posição que a variável x ocupa na conjunção $-4 \geq x \geq 4$: como x surge no meio, entre o “-4” e o “4”, então as soluções da inequação pertencem ao intervalo limitado por esses números, $[-4, 4]$.

Na tarefa 1.6.h), todos os alunos que comunicaram como pensaram apresentaram um raciocínio dedutivo, mas poucos conseguiram concluir quanto ao conjunto solução. A maioria (12 alunos) recorreu à definição algébrica de $|x| (x \in \mathbb{R})$ por ramos e considerou dois casos: num, por hipótese, $x \geq 0$ e noutro, por hipótese, $x < 0$. Embora quase todos estes alunos tenham apresentado um raciocínio válido, apenas 1 aluno foi capaz de concluir relativamente ao que era pedido (conjunto solução da condição). A resolução seguinte é representativa da maioria das resoluções dos alunos da turma e nela é apresentada a estratégia mencionada.

$$|x| > x \Leftrightarrow |x| - x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - x > 0, x \geq 0 \\ -x - x > 0, x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \emptyset, x \geq 0 \\ x < 0, x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

Figura 37 – Resolução do aluno M da tarefa 1.6.h)

Com o ilustrado na Figura 37, sou levada a crer que os alunos não interpretaram a penúltima conjunção de modo a concluir que a mesma é equivalente a $x \in \mathbb{R}^-$, uma vez que, ao contrário do que era prática habitual, os alunos não indicaram de forma inequívoca o conjunto solução – geralmente, assinalavam-no usando a notação “C.S.=” ou “S=”.

Apenas 6 alunos concluíram corretamente quanto ao conjunto solução e, excetuando um desses alunos, nenhum explicou como pensou para chegar à conclusão que apresentou. A resolução apresentada na Figura 38 é representativa da grande maioria das resoluções dos alunos que foram capazes de concluir quanto ao conjunto solução da inequação. Nela, é possível constatar que o aluno não oferece uma explicação.

$$a) |x| > x \Rightarrow x < 0 \quad S = \mathbb{R}^-$$

Figura 38 – Resolução do aluno O da tarefa 1.6.h)

Na tarefa 3.2.1.g3), grande parte dos alunos (13 alunos) concluiu corretamente quanto ao conjunto solução por via de um raciocínio dedutivo, mas baseado em equivalências falsas em resultado do desconhecimento do significado de alguns sinais e operadores lógicos, que os impossibilitou de registar corretamente a aplicação da propriedade $|x| \geq a$ ($a \geq 0$) $\Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$.

Uma vez que durante as sessões síncronas não foi realizada uma sistematização desta propriedade do módulo de um número real, sou levada a crer que, assim como em casos anteriores, os alunos concluíram quanto ao conjunto solução por um raciocínio geométrico fundamentado no conceito de módulo. A falta de alguns conhecimentos relativos à simbologia matemática tê-los-á impedido de comunicar esse raciocínio corretamente. Além de vários alunos terem usado “ \wedge ” com o significado de “ \vee ” (Figura 39), outros tantos continuaram a usar os símbolos “ $>$ ” e “ $<$ ” sem um significado definido (Figura 40). Considerem-se as seguintes resoluções:

$$\begin{aligned}
 &g_3) \quad -|x+1| + 3 \leq -2 \\
 &\quad -|x+1| \leq -5 \\
 &\quad |x+1| \geq 5 \\
 &x+1 \geq 5 \quad \wedge \quad x+1 \leq -5 \\
 &x \geq 4 \quad \wedge \quad x \leq -6 \\
 &x \in]-\infty, -6] \cup [4, +\infty[
 \end{aligned}$$

Figura 39 – Resolução do aluno U da tarefa 3.2.1.g3)

$$\begin{aligned}
 &(g_3) \quad |x+1| + 3 \leq -2 \\
 &\quad -|x+1| \leq -5 \quad \Leftrightarrow \quad |x+1| \geq 5 \\
 &\quad |x+1| \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 \geq 5 \vee x+1 \leq -5 \\
 &\quad x \geq 4 \quad \vee \quad x \leq -6 \\
 &\text{C.S.} =]-\infty, -6] \cup [4, +\infty[
 \end{aligned}$$

Figura 40 – Resolução do aluno R da tarefa 3.2.1.g3)

A resolução apresentada na Figura 39 sugere que, a partir da 4.^a equivalência (4.^a linha), o aluno desenvolve um raciocínio válido baseado numa interpretação geométrica da condição $|x + 1| \geq 5$, não tendo, contudo, sido capaz de comunicá-lo corretamente por escrito. Isto, porque tal estratégia ter-lhe-ia permitido concluir que o conjunto solução resultaria da união de dois intervalos disjuntos – como, por último, conclui. Pela interpretação que faz da condição $x \geq 4 \wedge x \leq -6$, parece-me claro que o aluno utiliza o operador “ \wedge ” para representar uma disjunção e que a sua pretensão teria sido estabelecer a equivalência $|x + 1| \geq 5 \Leftrightarrow x + 1 \geq 5 \vee x + 1 \leq -5$.

A resolução apresentada na Figura 40 também é sugestiva de um raciocínio fundamentado no significado de módulo que, embora não tenha tradução na sequência de equivalências estabelecida, justifica a apresentação do conjunto-solução como uma união de dois intervalos disjuntos. A falta de conhecimentos relacionados com a simbologia matemática revela-se, por exemplo, quando o aluno atribui ao sinal “ \geq ” dois significados distintos para concluir quanto ao conjunto solução: o de “maior ou igual” e, simultaneamente, o de “menor ou igual”. Parece claro que o aluno não atribui um significado definido ao sinal “ \geq ”, desprezando-o quando interpreta a última disjunção, o que indicia que também este aluno já teria antevisto, em algum momento anterior, que o conjunto solução resultaria da união de dois intervalos disjuntos.

As resoluções apresentadas sugerem que os alunos terão concluído que $|x| \geq a (a > 0) \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$ para este caso em particular, mas, por falta de conhecimentos do domínio da *Lógica*, não foram capazes de registar esse raciocínio corretamente. Nesta tarefa, tornou-se muito evidente que essa carência de conhecimentos constitui um grande entrave à comunicação de raciocínios válidos por

parte da maioria dos alunos, que até concluíram bem, embora as suas conclusões não possam ser deduzidas das equivalências que estabeleceram.

Para resolver a tarefa 6 da Questão-aula todos os alunos recorreram a raciocínio dedutivo. Vários aplicaram uma propriedade do módulo para resolver a inequação e, embora em menor número, continuou a verificar-se que alguns alunos concluem corretamente apesar de estabelecerem equivalências falsas, em virtude do uso incorreto dos sinais “>” e “<” e dos operadores “^” e “v”.

Outros tantos alunos recorreram à definição algébrica de $|x|$ ($x \in \mathbb{R}$) e desenvolveram um raciocínio por casos. Desta vez, a maioria dos alunos que recorreu a esta estratégia conseguiu concluir corretamente (Figura 41), embora tenha continuado a verificar-se que a taxa de sucesso é maior quando os alunos não recorrem a um raciocínio dedutivo baseado na análise de diferentes casos. Os alunos que elegeram esta estratégia e não foram capazes de concluir ou não realizaram a exploração de todos os casos possíveis ou continuam sem saber como combinar as conclusões deduzidas em cada caso para extrair uma conclusão geral (Figura 42).

$$-3|x| \geq 1-13 \Leftrightarrow \begin{cases} -3(x) \geq -12, \text{ se } x \geq 0 \\ -3(-x) \geq -12, \text{ se } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4, \text{ se } x \geq 0 \\ x \geq -4, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$S = [-4, 4]$$

Figura 41 – Resolução do aluno V da tarefa 6 da Questão-aula

$$\textcircled{6} \quad |x| \geq 1$$

$$-3|x| \geq 1-13$$

$$-3|x| \geq -12$$

$$\begin{cases} -3x \geq -12 & \text{quando } x \geq 0 \\ -3 \times (-x) \geq -12 & \text{quando } x < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

Figura 42 – Resolução do aluno E da tarefa 6 da Questão-aula

As resoluções dos alunos da turma para as diversas tarefas envolvendo a resolução de inequações analisadas permitem generalizar algumas observações.

Em primeiro lugar, verifica-se que os alunos, de forma transversal, recorrem a raciocínios dedutivos e que, na maioria das vezes, não sentem necessidade de justificar deduções, nem mesmo aquelas que surgem associadas a novas aprendizagens.

Em segundo lugar, verifica-se que, apesar da maioria dos alunos privilegiar estratégias que envolvem a aplicação de propriedades fundamentadas no significado dos conceitos em estudo, com o desenvolvimento das aprendizagens, alguns alunos começam a preferir recorrer a definições algébricas desses conceitos. Na resolução de inequações envolvendo módulos, em particular, isso leva-os a explorar raciocínios dedutivos por casos. Embora a maioria dos alunos não seja bem sucedida na inferência de conclusões por intermédio desses raciocínios – ou porque não considera todos os casos possíveis ou porque manifesta dificuldades em conciliar as conclusões que resultam de cada caso para extrair uma conclusão geral –, em momentos mais avançados da aprendizagem, alguns dos alunos passam a privilegiar essa estratégia para resolver exercícios, revelando serem capazes de desenvolver os seus raciocínios por hipóteses para concluir corretamente.

Frequentemente, nas suas resoluções, os alunos estabelecem equivalências falsas em virtude de uma falta de conhecimentos do domínio da *Lógica* e da *Teoria dos Conjuntos* que se traduzem em utilizações incorretas ou, até mesmo, sem significado de sinais e operadores lógicos. Essas carências produzem uma disparidade entre os raciocínios que os alunos desenvolvem e os raciocínios que comunicam, verificando-se que vários alunos concluem corretamente, apesar de estabelecerem algumas equivalências falsas ao longo do seu discurso matemático.

Também se verifica que um pequeno conjunto de alunos estabelece equivalências falsas por analogia com propriedades que conhecem. Estes alunos privilegiam raciocínios que envolvem a comparação, através da procura por semelhanças e diferenças em termos de simbologia, e a identificação de padrões, através da criação de resoluções análogas em termos formais a resoluções produzidas para problemas anteriores. Esta preocupação com a padronização das respostas por parte de alguns alunos já se tinha verificado anteriormente, na análise das resoluções dos alunos para tarefas envolvendo a análise de condições impossíveis ou universais.

No que respeita à relação entre características das tarefas propostas e os processos de raciocínio utilizados pelos alunos, também foi possível fazer algumas constatações.

Quando as tarefas se apresentam com uma estrutura fechada e os seus enunciados incentivam os alunos a perseguir estratégias fundamentadas no

significado dos conceitos em estudo, ao mesmo tempo que promovem o recurso a representações variadas, os alunos registam os seus raciocínios e fundamentam as conclusões que deles derivam. Quando, em tarefas com uma estrutura fechada, tal deixa de ser solicitado, os alunos deixam de recorrer a essa diversidade representações para comunicar os seus raciocínios e, mais que do isso, não os fundamentam completamente. Nestes casos, passam a cingir-se a representações algébricas que envolvem, maioritariamente, deduções para as quais não comunicam uma validação.

Em tarefas de exploração, com uma natureza aberta, a maioria dos alunos não apresenta qualquer fundamento, justificação ou validação para as conclusões que apresenta. Quando o enunciado de tarefas deste tipo promove a análise de um único caso particular (ou exemplo) para extrair conclusões gerais, os alunos não têm a iniciativa de explorar outros casos e revelam dificuldades em inferir generalizações. Os alunos que são capazes de fazê-lo, isto é, de concluir partindo da análise de um exemplo, além de estarem em menor número, também não registam a exploração de outros exemplos, nem ponderam o domínio de validade das conclusões que apresentam, sobregeneralizando.

5.2. Funções Envolvendo Módulos

Modelação de fenómenos reais

De seguida, analisarei as resoluções dos alunos para a Atividade 2.4 da Ficha de Trabalho N.º 2 (Anexo C). Esta foi apresentada no final da 3ª sessão síncrona, tendo sido introduzida como descrito no ponto 6 do “Plano de Aula Síncrona N.º 3” (Anexo O) e indicada como trabalho para casa.

A Atividade 2.4 tratava-se de uma tarefa de modelação com um contexto de realidade e com uma estrutura fechada. Mesmo se excluídas todas as sugestões ou questões orientadoras incluídas no seu enunciado (Figura 43), quando atendemos aos conhecimentos que os alunos detinham aquando da sua resolução, concluímos que a tarefa não permitia diversificar estratégias e, para resolvê-la, os alunos teriam que relacionar conhecimentos prévios de forma unívoca. Apresentava um grau de dificuldade elevado, por requerer o estudo de uma função desconhecida dos alunos. Constituía, portanto, um problema.


Na Ficha de Trabalho N.º 2, imediatamente antes da apresentação do enunciado da Atividade 2.4., era pedido aos alunos: “Qualquer que seja a estratégia

que use, apresente todas as justificações que considere necessárias”. Ao longo do enunciado, as perguntas ou propostas de trabalho surgiam acompanhadas de pedidos de explicação, justificação e fundamentação das respostas dadas. Previa-se que a tarefa pudesse permitir aos alunos trabalhar as suas capacidades de comunicação de raciocínios por escrito e, mais tarde, durante a discussão da tarefa, na 4ª sessão síncrona, oralmente.

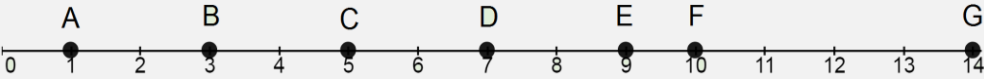
Porém, nessa 4ª sessão, os alunos convocados para participar confessaram não terem sido capazes de realizar a tarefa autonomamente. Esta dificuldade foi diagnosticada no início da sessão, uma vez que não havia sido solicitado o envio de resoluções. Por essa altura, já tinha sido decidido que, para reduzir o tempo dispensado pelos alunos em processos de envio de registos escritos, os mesmos só enviariam as suas resoluções das tarefas quando se desse por concluída a discussão da ficha de trabalho à qual diziam respeito. Assim, na 4ª sessão síncrona, a discussão que se realizou teve como principal objetivo ajudar os alunos a concretizar resoluções para as várias alíneas da tarefa, ao invés de ter sido centrada na partilha e no confronto de resoluções anteriormente (e autonomamente) preconizadas pelos alunos. Após a sessão, os alunos submeteram as suas resoluções, sobre as quais recai, agora, a minha análise.

Dos 22 alunos da turma, 16 entregaram uma resolução para a Atividade 2.4. Houve ainda mais 1 aluno que apenas apresentou uma resolução da alínea a).

Pretende-se construir uma paragem de autocarro na rua de uma povoação. Para isso, foi aprovado o seguinte critério: a localização da paragem de autocarro deveria ser escolhida de modo que o total das distâncias de cada casa à paragem de autocarro fosse o mínimo possível.



Na figura abaixo está representada, em esquema, a localização das casas, por pontos, nessa rua. **Cada unidade de distância corresponde a 100 metros.**



(a) Por palpite, um morador diz que a paragem deve ficar no ponto de abcissa 8, mas outro morador propõe o ponto de abcissa 9. Qual das alternativas é melhor? Justifique.

(b) Considere que a paragem de autocarro ficará localizada num ponto genérico de abcissa x . Entre que valores poderá variar x ?

Que valores pode tomar x ? Tenha presente o contexto do problema: a paragem deve ser construída nesta rua.

(c) Escreva uma expressão que lhe permita determinar a distância da **casa A** à paragem de autocarro localizada no ponto de abcissa x .

Repare que a casa A está localizada no ponto de abcissa 1 e a casa B, por exemplo, está localizada no ponto de abcissa 3. Assim, se quiséssemos representar a distância medida desde a casa A até à casa B, escreveríamos a expressão $|1 - 3|$ ou a expressão $|3 - 1|$.

(d) Escreva uma expressão que lhe permita determinar **o total das distâncias de cada casa à paragem** de autocarro localizada no ponto de abcissa x . Explique como chegou a essa expressão.

Entenda “o total” como “a soma” de todas as distâncias medidas desde cada casa até à paragem de autocarro localizada no ponto x .

(e) Recorde o critério de localização da paragem: **o total das distâncias de cada casa à paragem deve ser o mínimo possível**. Encontre a melhor solução para o problema da localização da paragem de autocarro, fundamentando a sua resposta.

Associe à expressão que determinou na alínea (d) uma função e observe a sua representação gráfica na calculadora. Escolha uma janela de visualização adequada. O que está representado no eixo dos xx ? E no eixo dos yy ? A função representada tem extremos? Qual o seu significado no contexto do problema?

Figura 43 – Enunciado da Atividade 2.4

Na alínea a), os alunos eram confrontados com duas conjeturas associadas a duas possíveis soluções para o problema e era-lhes pedido que optassem por uma, justificando a sua opção. Dos 17 alunos que realizaram esta tarefa, 15 estabeleceram algum tipo de comparação entre as duas hipóteses para responder. Contudo, desses 15, apenas 8 estabeleceram essa comparação com base no critério de localização da paragem de autocarro apresentado no enunciado da tarefa. Esses alunos, determinaram a soma das distâncias das casas à paragem de autocarro, para cada

alternativa, e concluíram que a melhor opção seria aquela à qual estivesse associado o menor valor dessa soma (Figura 44) – tal como o critério do enunciado estipulava. Desse modo, justificaram a sua conclusão mostrando que, à luz do critério imposto, a alternativa apontada pelos alunos era, efetivamente, a melhor. Simultaneamente, essa opção justificada por uma das hipóteses corresponde à validação da conjectura que lhe estava associada e, por extensão, à refutação da outra conjectura apresentada no enunciado.

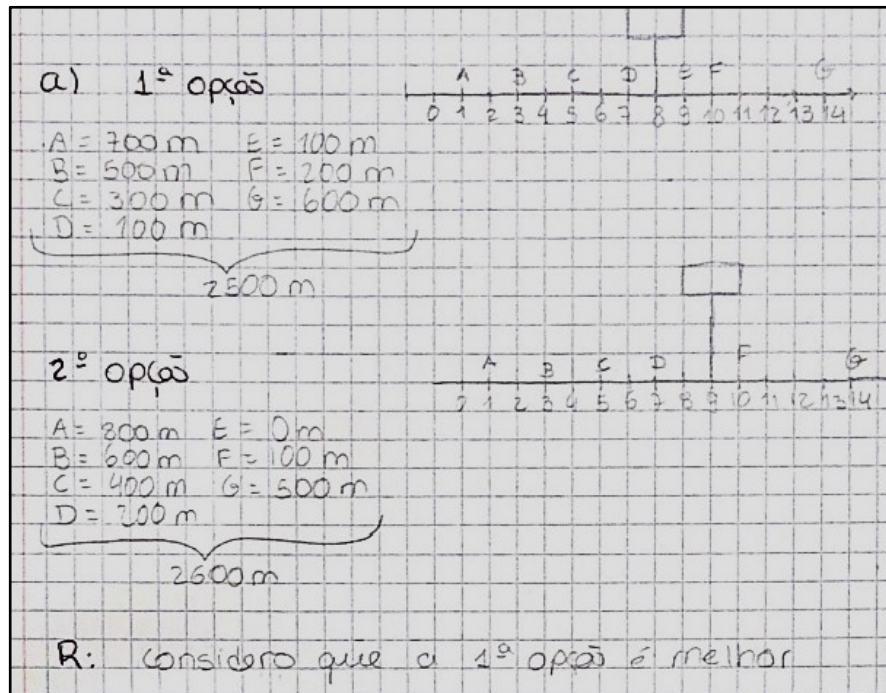


Figura 44 – Resolução do aluno J da tarefa 2.4.a)

Dos restantes 7 alunos que estabeleceram comparações entre as duas alternativas para concluir, a maioria baseou-se num critério distinto daquele que é o exposto no enunciado da tarefa, o qual apresentaram do seguinte modo:

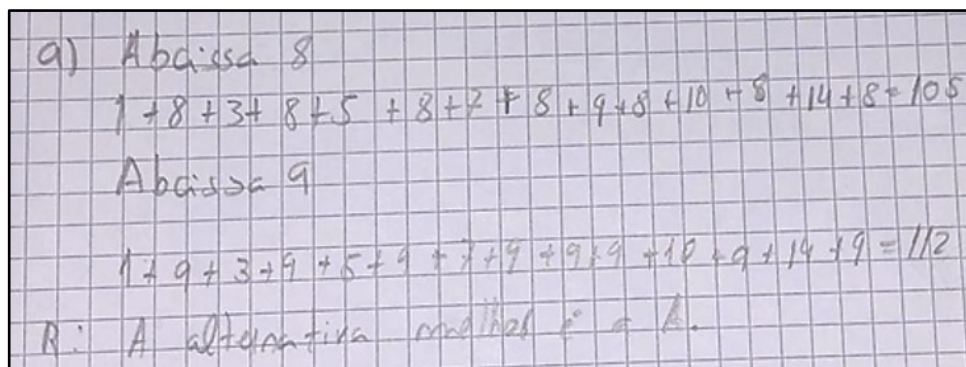


Figura 45 – Resolução do aluno L da tarefa 2.4.a)

Como sugere a resolução apresentada na Figura 45, esses alunos determinaram, para cada alternativa, a soma das abcissas dos pontos de localização das casas adicionadas de n unidades, sendo n a abcissa do ponto de localização da paragem de autocarro. Depois, consideraram que “a melhor” alternativa era aquela à qual estava associado o menor valor dessa soma. O critério considerado pelos alunos não coincide com o apresentado no enunciado do problema, o que significa que os mesmos não compreenderam o critério nele definido – e que dificilmente se poderia considerar complexo. Os alunos manifestam, assim, grandes dificuldades em compreender e interpretar condições relativamente simples apresentadas em enunciados de problemas com um contexto de realidade, mesmo quando essas condições são apresentadas em linguagem natural. Acresce a esta observação que esse conjunto de alunos é diverso na sua composição, integrando alunos com diferentes níveis de rendimento à disciplina.

Na alínea b) da Atividade 2.4, todos os alunos apresentaram uma resposta correta para o conjunto das soluções admissíveis. A grande maioria dos alunos indicou que a variável x poderia tomar valores no intervalo “[0,14]”. Neste caso, os alunos terão atendido ao comprimento da rua da povoação, como sugerido no enunciado.

Houve um grupo de 4 alunos que considerou que a variável só poderia tomar valores no intervalo “[1, 14]”. Nesse grupo não estavam incluídos alunos que não tivessem revelado compreensão do critério de localização da paragem de autocarro na alínea a). Tendo isso em conta, é possível que esses alunos tenham refletido sobre o critério para concluir que a paragem deveria ser construída entre a primeira e a última casa da povoação, localizadas, respetivamente, nos pontos de abcissa 1 e 14.

Contudo, não é possível saber, para nenhum dos casos, em que tipo de raciocínio se basearam as respostas dos alunos, uma vez que ninguém apresentou qualquer justificação ou explicação.

Nas alíneas c) e d), todos os alunos apresentaram expressões válidas para representar o pretendido, tendo-se baseado no significado geométrico do módulo de uma diferença (Figura 46). Nenhum aluno explicou como concluiu quanto às expressões, embora essa explicação fosse pedida. Não obstante, a correção das respostas dadas pelos alunos nas duas alíneas, mesmo daqueles que tinham revelado incompreensão do critério de localização da paragem de autocarro na

alínea a), sugere que as observações constantes no enunciado da tarefa – tendo sido as mesmas que foram feitas durante a sessão síncrona – ajudaram-nos a ultrapassar dificuldades relacionadas com a interpretação do enunciado na construção de um modelo para o problema. Tais observações envolviam um esclarecimento relativo à interpretação do critério de escolha da solução ótima e a interpretação do significado de expressões algébricas no contexto do problema a partir de exemplos.

The image shows a student's handwritten work on a grid background. It consists of four lines of text:

- 5) n pode variar entre $[0, 14]$
- e) $|n-7|$
- c) $|n-7| + |n-3| + |n-5| + |n-7| + |n-9| + |n-10| + |n-14|$

Figura 46 – Resolução do aluno C das tarefas 2.4.b), c) e d)

Dos 15 alunos que responderam à alínea e), todos associaram uma função à expressão algébrica que apresentaram na alínea d). Depois, indicaram como solução para o problema aquele que consideraram ser o minimizante da função. Para determinar o minimizante da função, recorreram a duas estratégias. Grande parte dos alunos recorreu às potencialidades gráficas da calculadora, tendo concluído, por via dedutiva, quanto à melhor localização para a paragem de autocarro. Houve ainda um pequeno grupo de alunos que recorreu a um processo iterativo e estruturou um raciocínio indutivo.

Os alunos que recorreram à tecnologia gráfica, fundamentaram a sua conclusão, explicando os procedimentos que seguiram (e com que fim) e interpretando, no contexto do problema, os resultados que obtiveram com recurso à calculadora (Figura 47). Esses alunos não definiram “a função” a que fazem referência, o que sugere que os alunos têm tendência para considerar que, se há aspetos do seu raciocínio que derivam de sugestões apresentadas no enunciado da tarefa, então esses aspetos, podendo ser subentendidos, não precisam de ser apresentados.

e) $y =$ Total das distâncias de cada casa à paragem
 $x =$ Localização da paragem

Para ser a distância ser o mínimo possível, temos de achar o mínimo da função.

Com recurso à calculadora, determinamos o mínimo, que coincide com o vertice para função.

Vertice = (7, 24)

Ou seja, para a distância de cada casa à paragem ser o mínimo possível, a paragem tem de ficar no ponto 7.

Figura 47 – Resolução do aluno U da tarefa 2.4.e)

Os alunos (5 alunos) que recorreram a um processo iterativo, apresentaram a expressão algébrica que definia a função que consideraram, assim como valores da função para diferentes valores inteiros da variável – como ilustrado na Figura 48.

e) $f(x) = |x - 1| + |x - 3| + |x - 5| + |x - 7| + |x - 9| + |x - 10| + |x - 14|$

$f(6) = 25$

$f(7) = 24$ → mínimo

$f(8) = 25$

R → a paragem do autocarro deveria ficar no ponto 7, uma vez que é a mínima distância em relação a todas as casas.

Figura 48 – Resolução do aluno T da tarefa 2.4.e)

Os alunos atribuíram apenas valores inteiros à variável do problema, sem que no enunciado fosse imposta qualquer restrição nesse sentido. Estes alunos terão conjecturado que a solução ótima deveria ser inteira. Possivelmente, terão observado que, tanto nos dados do problema (abscissas dos pontos de localização das casas), como nas soluções consideradas na alínea a), só foram apresentados valores inteiros. A identificação desse padrão nos dados poderá ter estado na origem da conjectura formulada pelos alunos.

Nas suas anotações (Figura 48), os alunos procuraram justificar a solução eleita apresentando as imagens $f(6)$ e $f(8)$ intercaladas com a imagem $f(7)$, evidenciando que $f(7) < f(6)$ e $f(7) < f(8)$, o que, não constituindo prova de que $f(7)$ é o mínimo absoluto da função em $[0, 14]$, traz “mais” plausibilidade a essa hipótese. Os alunos recorreram, portanto, a um processo de validação para fundamentar a sua resposta.

Recorde-se que, na alínea b), estes mesmos alunos haviam concluído que a variável do problema poderia tomar valores no intervalo $[0, 14]$. Assim, a estratégia de validação eleita pelos alunos envolve a generalização de aspetos relacionados com a monotonia da função a partir do estudo de uma restrição da função a um pequeno conjunto do seu domínio, $\{6, 7, 8\}$. As conclusões dos alunos resultam da análise de algumas soluções admissíveis. Este raciocínio apresenta, portanto, uma estrutura indutiva – desde a assunção da hipótese de que a solução ótima seria inteira, por analogia com os dados do problema, até à inferência da solução ótima a partir da exploração de poucos casos particulares (ou soluções admissíveis).

Esta estratégia envolvendo um raciocínio indutivo não é representativa da abordagem ao problema levada a cabo pela maioria dos alunos, que, uma vez mais, mostrou preferência por raciocínios dedutivos.

Globalmente, as resoluções dos alunos sugerem que, na interpretação e resolução de problemas de modelação e/ou otimização envolvendo fenómenos ou situações reais, os alunos atendem a restrições que se relacionam com o contexto dos problemas para identificar o conjunto das soluções admissíveis. Há ainda alunos que, identificando padrões nos dados, formulam conjeturas relativamente à solução ótima que se traduzem em restrições à variável do problema – como, por exemplo, que a mesma só poderá assumir valores inteiros.

Na resolução de problemas, quando confrontados com conjeturas contraditórias, os alunos desenvolvem estratégias de validação (ou refutação) por via de um raciocínio dedutivo no qual estabelecem comparações entre as hipóteses de acordo com critérios bem definidos. Contudo, verifica-se que há um número significativo de alunos que não recorre aos critérios estabelecidos no enunciado dos problemas, revelando grandes dificuldades em interpretar condições que se relacionam com a escolha de soluções, mesmo quando estas são apresentadas em linguagem natural e envolvem conceitos vulgares (como a distância ou o total). A análise sugere que a introdução de exemplos explicativos em que se estabelecem paralelismos entre conceitos matemáticos e fenómenos que se pretendem modelar

ajuda os alunos a ultrapassar essas dificuldades relacionadas com a interpretação do enunciado dos problemas e a construir modelos matemáticos.

Por último, observou-se, novamente, que os alunos não consideram necessário complementar as suas respostas com justificações, fazendo-o somente quando no próprio enunciado da tarefa é pedido que o façam.

Estudo elementar de funções

Analisarei, de seguida, as resoluções dos alunos da Atividade 3.1 da Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E) e da tarefa 7.4 da Questão-aula (Anexo J). Ambas as tarefas envolviam um estudo elementar de funções reais de variável real da família $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, c, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$).

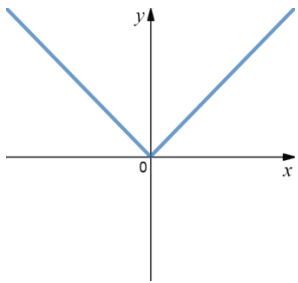
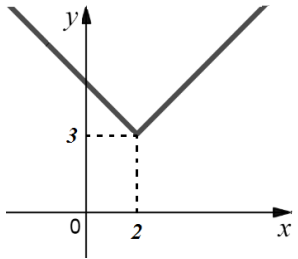
A Atividade 3.1 foi realizada durante a 4ª sessão síncrona, após uma análise da representação gráfica da função $f(x) = |x|$ definida em \mathbb{R} . O seu enunciado é apresentado na Figura 49.

A Atividade 3.1 exigia que os alunos concretizassem um esboço gráfico de algumas funções do tipo $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, c, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$). A partir da observação desses esboços, propunha-se a identificação de algumas características do gráfico cartesiano das funções que favorecem o seu estudo. Perspetivava-se que esta atividade pudesse levar os alunos a concluir quanto a características gerais de funções dessa mesma família. A tarefa promovia novas aprendizagens pela descoberta e pela generalização através da exploração de exemplos. Por esse motivo, considero que a sua natureza era essencialmente exploratória.

Dos 22 alunos da turma, apenas 15 realizaram a tarefa.

(a) Complete o Quadro 1 com a informação respeitante às funções h, i e j .

Quadro 1

Função	Esboço gráfico	Sentido da concavidade	Vértice	Extremo	Contra-domínio
$f(x) = x $		<i>Voltada para cima</i>	(0, 0)	Mínimo absoluto $f(0) = 0$	$[0, +\infty[$
$g(x) = x - 2 + 3$		<i>Voltada para cima</i>	(2, 3)	Mínimo absoluto $g(2) = 3$	$[3, +\infty[$
$h(x) = - x $					
$i(x) = - x + 1 $					
$j(x) = -2 x + 1 - 3$					

(b) Compare as expressões analíticas das funções apresentadas na alínea (a) com a informação com que preencheu o Quadro 1 e tire conclusões que lhe permitam completar a generalização:

GENERALIZAÇÃO

Gráfico de funções do tipo $f(x) = a|x - h| + k$

O vértice do gráfico de uma função definida por $f(x) = a|x - h| + k$ é o ponto de coordenadas . Se $a > 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para e a função tem um (indicar o tipo de extremo) absoluto. Se $a < 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para e a função tem um (indicar o tipo de extremo) absoluto.

Figura 49 – Enunciado da Atividade 3.1

Na alínea a), vários alunos apresentaram esboços incompletos das representações gráficas das funções. Alguns não assinalaram convenientemente o sistema de eixos coordenados. Outros não assinalaram as coordenadas dos vértices dos gráficos. Apesar disso, salvo rara exceção, todos completaram o Quadro 1 corretamente e utilizando notação análoga à utilizada nos dois exemplos apresentados nesse mesmo quadro (Figura 50). Daí se deduz que os alunos não tiveram quaisquer problemas em mobilizar os seus conhecimentos relativos às transformações do gráfico de uma função ou, alternativamente, em recorrer à calculadora gráfica para realizar a análise pretendida.

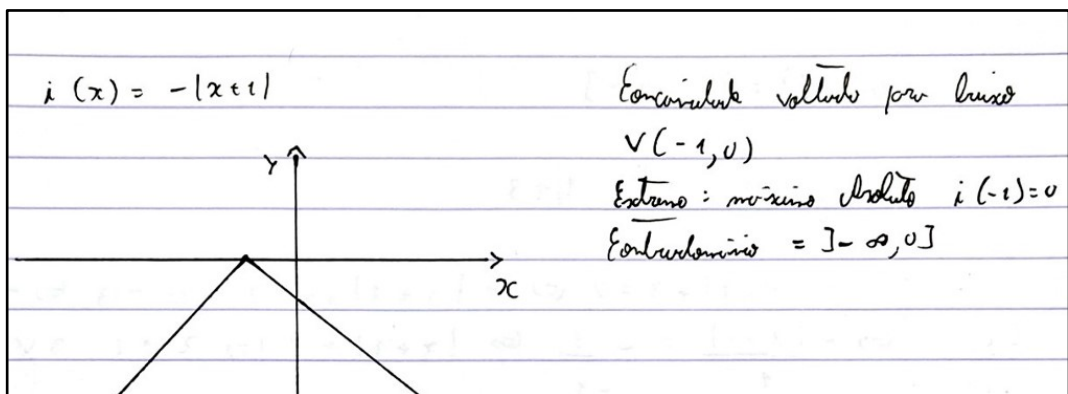


Figura 50 – Resolução (parcial) do aluno Q da tarefa 3.1.a)

Registaram-se poucos erros no preenchimento do Quadro 1, com apenas 2 alunos a manifestarem dificuldades na identificação do extremo, com a troca do seu valor pelo valor do respetivo extremante, e do contradomínio (Figura 51). Dado que estas dificuldades foram manifestadas por alunos com um desempenho mediano ao nível da turma, considero que as mesmas poderiam ter sido manifestadas por mais alunos, caso não tivessem sido incluídos os exemplos apresentados no Quadro 1.

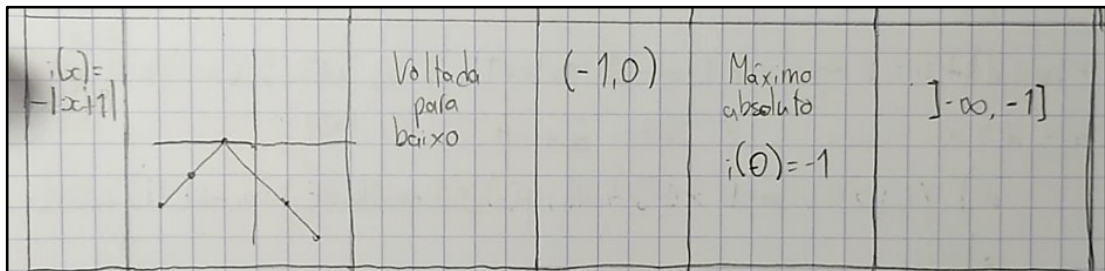
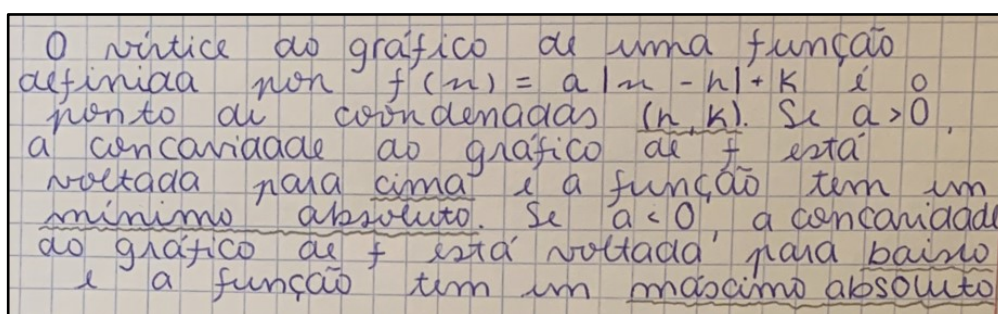


Figura 51 – Resolução (parcial) do aluno M da tarefa 3.1.a)

Na alínea b), era proposta uma sistematização das aprendizagens decorrentes da realização da atividade proposta em a). Todos os alunos completaram corretamente a “Generalização” (Figura 52). Essa elevada taxa de sucesso valoriza a atividade realizada na alínea anterior.

Não é possível saber se as conclusões que os alunos apresentaram em b) foram alcançadas por via indutiva ou por via dedutiva. É possível que os alunos tenham recorrido à calculadora gráfica para representar as várias funções e que, baseando-se unicamente no que lhes foi possível observar e concluir a partir da análise desses casos particulares, tenham assumido a validade das suas conclusões para a generalidade dos casos – tendo, assim, concluído por via indutiva. Mas isso não é garantido. A exploração de casos particulares promovida na alínea a) pode ter incentivado os alunos a recordar conhecimentos relativos às transformações dos gráficos de funções. É possível que os alunos tenham considerado as transformações que devem ser aplicadas aos pontos do gráfico de $f(x) = |x|$ para obter a representação gráfica de uma função $g(x) = af(x - h) + k$ para preencher a “Generalização” – tendo, assim, concluído por via de um raciocínio dedutivo.

Em todo o caso, o trabalho realizado pelos alunos sugere que atividades de exploração envolvendo a análise gráfica de várias funções de uma mesma família promovem a generalização de características de um conjunto de funções. A análise gráfica de alguns casos particulares favorece a generalização de características relacionadas com a representação gráfica, monotonia e existência de extremos de uma família de funções.



O vértice do gráfico de uma função definida por $f(x) = a|x - h| + k$ é o ponto de coordenadas (h, k) . Se $a > 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para cima e a função tem um mínimo absoluto. Se $a < 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo e a função tem um máximo absoluto.

Figura 52 – Resolução do aluno T da tarefa 3.1.b)

A tarefa 7.4 da Questão-aula envolvia igualmente o estudo de uma função da família $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, c, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$). A tarefa foi realizada na última aula da unidade didática. No seu enunciado (Figura 53) eram apresentadas duas conjecturas,

a) e b), as quais deveriam ser validadas ou refutadas, de forma justificada, pelos alunos.

7. Considere a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = 3|x - 2| - 6$.
 [...]

7.4. Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das proposições.

a) A função f é crescente no intervalo $]-\infty, 2]$.

b) $f(2) = -6$ é o máximo absoluto da função f .

Figura 53 – Enunciado da tarefa 7.4 da Questão-aula

Todos os alunos da turma realizaram a tarefa e, com exceção de um aluno que considerou que a primeira proposição era verdadeira, todos classificaram as proposições como falsas – o que está correto.

Contudo, dos 21 alunos que classificaram a proposição a) como “falsa”, apenas 7 apresentaram uma justificação que refutava a hipótese que lhe estava associada. Para justificarem a classificação que atribuíram à proposição, esses 7 alunos contradisseram-na, afirmando “ f é decrescente no intervalo $]-\infty, 2]$ ” (Figura 54) e, para validarem a conclusão, apresentaram uma representação gráfica da função f .

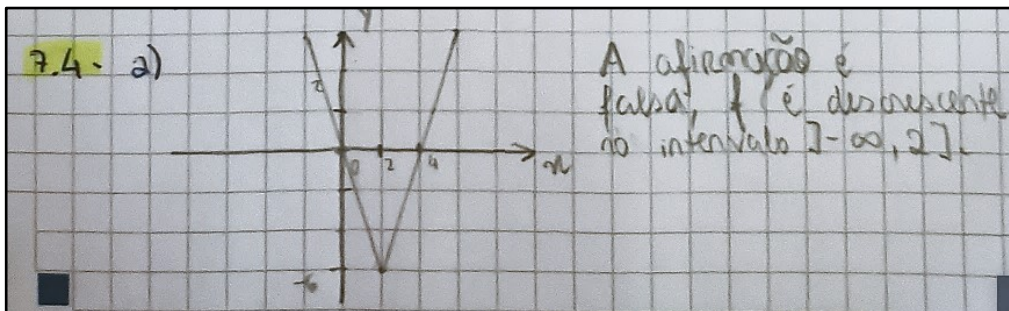


Figura 54 – Resolução do aluno R da tarefa 7.4.a) da Questão-aula

Os restantes 14 alunos que classificaram (corretamente) a proposição como “falsa” não apresentaram justificações válidas.

Desses 14 alunos, 3 fundamentaram a sua conclusão no facto de o gráfico da função ter a concavidade voltada para cima (Figura 55), o que, só por si, não justifica que a função não seja crescente no intervalo $]-\infty, 2]$. Parece evidente que estes alunos, embora concluam corretamente e até façam menção, na justificação que apresentam, de características do gráfico da função que se relacionam com a sua monotonia, têm dificuldade em reconhecer que ter-se-ão baseado em mais

constatações, além daquela que partilham, para concluir. Os alunos cingem-se a uma (o sentido da concavidade do gráfico), a qual não é suficiente para refutar a conjectura do enunciado e, portanto, a justificação que apresentam não pode ser considerada válida.

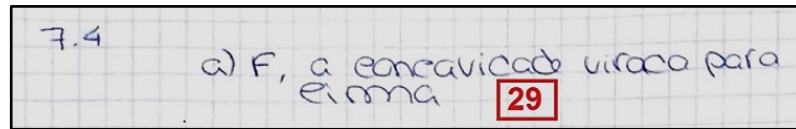


Figura 55 – Resolução do aluno J da tarefa 7.4.a) da Questão-aula

Noutros 4 casos, os alunos consideraram que seria justificação suficiente referir um intervalo em que a função fosse, efetivamente, crescente (Figura 56). Assim como no caso anterior, a justificação que os alunos apresentam não é suficiente para refutar a conjectura. Também estes alunos têm dificuldade em referir todos os aspetos que consideraram: os alunos terão reconhecido, não apenas que a função é crescente no intervalo $[2, +\infty[$, mas também que o é exclusivamente nesse intervalo.

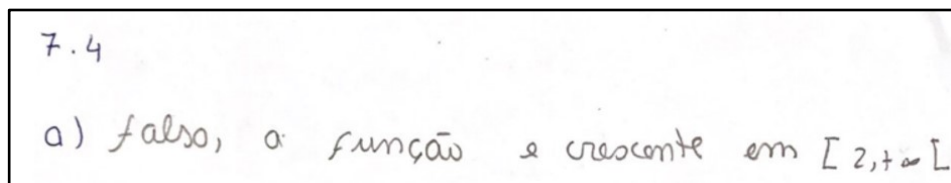


Figura 56 – Resolução do aluno H da tarefa 7.4.a) da Questão-aula

Os restantes 7 alunos apresentam como justificação uma afirmação falsa e que, a ser verdadeira, também não refutaria a conjectura apresentada no enunciado. Os alunos escreverem: “Falso, porque é crescente de $[-6, +\infty[$ (Figura 57) . Estes alunos revelam, em primeiro lugar, desconhecimento de que os intervalos de monotonia de uma função são intervalos do seu domínio. Em vez disso, indicam o contradomínio da restrição da função ao conjunto de valores da variável pertencentes ao intervalo em que a função é crescente, ou seja, ao intervalo $[2, +\infty[$. Além disso, importa notar que, mesmo que a função fosse crescente em $[-6, +\infty[$, como os alunos afirmam, isso não invalidaria que também o fosse em $] - \infty, 2]$. Também estes alunos apresentaram uma justificação que não refuta a conjectura apresentada na alínea a). Mesmo que fosse verdadeira, a justificação continuaria a ser inválida.

7.4 a) Falso, porque é crescente do $[-6, +\infty[$

Figura 57 – Resolução do aluno E da tarefa 7.4.a) da Questão-aula

Verifica-se, portanto, que há um conjunto muito alargado de alunos (14 alunos) que revela dificuldades em apresentar justificações válidas para refutar conjeturas, porque comunicam de forma incompleta o seu raciocínio e, por isso, apresentam uma fundamentação insuficiente. Há, por outro lado, alunos que entendem que para refutar uma conjetura basta reformulá-la de modo a tornar uma proposição que é falsa numa proposição verdadeira. Em ambos os casos, os alunos procuram fundamentar as suas conclusões num único motivo.

Na alínea b), novamente, uma grande parte dos alunos da turma (15 alunos) não apresentou uma justificação válida para refutar a conjetura do enunciado e, portanto, para fundamentar a classificação da proposição como “falsa”. Estes alunos apresentaram como justificação uma informação verdadeira (“ $f(2) = -6$ é o mínimo da função.”, Figura 58) mas insuficiente para refutar a conjetura.

b) Falso, porque $f(2) = -6$ e o mínimo da função.

Figura 58 – Resolução do aluno B da tarefa 7.4.b) da Questão-aula

Dos restantes 7 alunos, apenas 3 alunos apresentaram justificações válidas envolvendo o reconhecimento de que a função não apresenta um máximo absoluto (Figura 59).

b) Falso, pois não existe máximo absoluto, apenas mínimo absoluto, que é $f(2) = -6$.

Figura 59 – Resolução do aluno R da tarefa 7.4.b) da Questão-aula

Outros 3 apresentaram como justificação a própria proposição do enunciado (a qual consideraram “falsa”), o que é uma contradição

Mais uma vez, os alunos revelam uma tendência para reformular a conjectura que pretendem refutar, procedendo a pequenas alterações de modo a tornar a proposição (falsa) considerada numa proposição verdadeira. Apenas uma pequena minoria dos alunos da turma apresenta efetivamente uma justificação que contraria a hipótese proposta. Novamente, os alunos procuraram ser sucintos na fundamentação da sua conclusão, apresentando, geralmente, apenas uma razão, a qual não procuram validar.

A forma extremamente sintética como os alunos argumentam para fundamentar as suas conclusões e o facto de os alunos basearem as suas justificações num único motivo, leva a crer que os mesmos ainda não encaram a justificação matemática como um processo que possa envolver a exposição de um discurso mais alongado e que possa requerer a articulação de vários dados ou razões.

6. CONCLUSÕES

Neste capítulo, apresento uma síntese do meu estudo e as principais conclusões que decorrem da análise dos dados recolhidos, de forma a responder às questões de investigação. Por último, ofereço uma reflexão final na qual incluo uma análise crítica de alguns aspetos deste estudo.

6.1. Síntese do Estudo

O presente estudo teve por base a minha intervenção letiva realizada no âmbito da disciplina de Iniciação à Prática Profissional IV do Mestrado em Ensino da Matemática. A mesma foi realizada num contexto de ensino à distância, em virtude de ter sido decretado o encerramento de todos os estabelecimentos de ensino como medida política de combate à pandemia da COVID-19. Com o presente estudo procurei compreender os processos de raciocínio matemático que os alunos do 10.º ano utilizam na resolução de diversos tipos de tarefas para a aprendizagem de tópicos programáticos do tema *Funções*, e a sua articulação com características das tarefas propostas

Neste estudo participaram 22 alunos do 10.º ano, com idades entre os 15 e os 16 anos e com um desempenho globalmente medíocre à disciplina de Matemática. A interação com os alunos foi mediada pela utilização da plataforma virtual *Microsoft Teams*.

A intervenção letiva consistiu na lecionação da unidade didática “Funções Módulo”, ao longo de 8 sessões síncronas com a duração de 60 minutos e realizadas em videoconferência. A mesma incluiu tópicos como a resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos e o estudo elementar de funções definidas por expressões envolvendo módulos. Durante as sessões síncronas, procurei incentivar os alunos a desenvolverem raciocínios fundamentados no significado dos conceitos matemáticos em estudo. Nomeadamente, apelando a interpretações de expressões algébricas envolvendo módulos sustentadas no significado geométrico desse conceito e à concretização de representações na reta numérica. Também procurei promover o recurso a representações variadas, como suporte à comunicação e ao desenvolvimento de raciocínios e de estratégias de resolução para problemas. Optei por uma abordagem ao estudo dos tópicos programáticos com um cunho exploratório, tendo proposto a realização de tarefas nas quais reconheci potencial para promover aprendizagens pela descoberta.

Atendendo ao objetivo do estudo, orientei a minha investigação no sentido de avançar com algumas respostas para as seguintes questões: *(i) Como se caracterizam os processos de raciocínio matemático usados pelos alunos do 10.º ano na resolução de tarefas diversas e que dificuldades evidenciam nesses processos?*; *(ii) Como se articulam os processos de raciocínio matemático dos alunos com as características das tarefas propostas?*

Recorri a técnicas de recolha de dados baseadas na recolha documental (Coutinho et. al., 2009). Procedi a uma recolha das resoluções produzidas pelos alunos para tarefas com naturezas distintas (problemas, explorações e exercícios), de acordo com o modelo de tipificação de Ponte (2005), e outras que incluíssem características promotoras do raciocínio matemático (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011; Mata-Pereira, 2018; MEC, 2014a; NCTM, 2014; Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020; Stein & Smith, 1998; Swan, 2017, 2018).

Optei por seguir uma metodologia de investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e por dar resposta às questões que orientaram a minha investigação realizando uma análise interpretativa das representações utilizadas pelos alunos para comunicar, por escrito, os seus raciocínios. Nessa análise, procurei avançar na compressão do modo como os alunos utilizam e conjugam os processos de raciocínio matemático considerados por Jeannotte e Kieran (2017), no seu modelo para o raciocínio matemático, assim como identificar dificuldades na sua utilização. Paralelamente, procurei relacionar o recurso a processos de raciocínio com aspetos das tarefas propostas aos alunos.

6.2. Principais Conclusões do Estudo

A partir da análise de dados realizada e apresentada no capítulo 5, procurei dar resposta às questões de investigação, que são organizadoras das principais conclusões do estudo que apresento nesta seção.

- i. Como se caracterizam os processos de raciocínio matemático usados pelos alunos do 10.º ano na resolução de tarefas diversas e que dificuldades evidenciam nesses processos?*

Para validar conjeturas, os alunos tendem a recorrer a processos de justificação, para os quais mobilizam os seus conhecimentos conceptuais,

envolvendo a generalização de propriedades matemáticas. Nestes casos, os alunos revelam preocupação em validar as conclusões que apresentam. Já no que respeita a processos de validação envolvendo a refutação de conjecturas, os alunos revelam dificuldades. Os mesmos tendem a reformular a conjectura que pretendem refutar, de modo a tornar uma proposição falsa numa proposição verdadeira – sem que a última entre necessariamente em contradição com a primeira. Nestes casos, os alunos já não revelam preocupação em validar as conclusões que apresentam.

No que respeita a processos de generalização envolvendo a exploração de casos particulares (ou exemplos), foi possível perceber que os alunos são bem sucedidos na inferência de conclusões gerais quando se envolvem numa análise de vários casos (ou exemplos). Porém, os mesmos manifestam dificuldades em generalizar partindo da análise de um único caso particular (ou exemplo) – e também não revelam iniciativa para explorar outros. Aqueles que são capazes de fazê-lo não ponderam o domínio de validade das suas conclusões, sobregeneralizando.

Os resultados sugerem que os alunos têm dificuldades em desenvolver raciocínios dedutivos por casos, porque não consideram todos os casos possíveis ou porque manifestam dificuldades em conciliar as conclusões que resultam de cada caso para extrair uma conclusão geral. Apesar disso, em momentos mais avançados das aprendizagens, há alunos que desenvolvem raciocínios por casos (ou por hipóteses), completos e coerentes, que lhes permitem concluir corretamente.

De uma forma transversal, os alunos parecem desenvolver mais frequentemente raciocínios dedutivos, o que difere dos resultados de outros estudos (Mata-Pereira & Ponte, 2012; Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012; Ribeiro, 2018) que destacam a predominância de raciocínios de cariz indutivo. Considero que esta disparidade de resultados pode dever-se ao facto de eu ter procurado que os alunos desenvolvessem aprendizagens principalmente a partir dos seus conhecimentos relativos a definições/significado dos conceitos, ao passo que algumas das tarefas propostas aos alunos nos estudos referidos – os quais destacam uma prevalência de raciocínios indutivos – promoviam, pelo contrário, a observação e análise de exemplos como ponto de partida para a introdução de conceitos e, portanto, antes de os alunos conhecerem as suas definições. Os constrangimentos impostos pelo regime de ensino remoto, não me permitiram propor aos alunos a realização de tarefas desse tipo, cujo sucesso da sua aplicação, no que à aprendizagem diz respeito, depende muito de um processo que envolve a discussão e a comunicação de ideias e que requer que o professor faça um acompanhamento do trabalho desenvolvido pelos alunos com uma proximidade que dificilmente se pode conceber num regime de ensino não presencial.

Na inferência de conclusões por via indutiva, os alunos recorrem a processos de validação envolvendo a exploração de alguns casos particulares e a formulação de conjecturas que os orientam na escolha dos casos a considerar.

No que respeita às justificações apresentadas pelos alunos, estas não surgem de forma espontânea, como já haviam observado Mata-Pereira e Ponte (2012). Além disso, são breves e envolvem uma única razão ou motivo – que, por vezes, se revela insuficiente –, o que leva a crer que os alunos ainda não encaram a justificação matemática como um processo que possa envolver ou requerer a articulação de vários dados ou razões.

Na classificação de condições matemáticas os alunos não tendem a justificar as classificações atribuídas.

Alguns alunos encaram a padronização da forma das respostas como um critério para a sua validade. Na resolução de inequações envolvendo expressões com módulos, por exemplo, verificou-se que alguns alunos estabelecem equivalências falsas por analogia com propriedades que conhecem – tal como Almog e Ilany (2012) já tinham observado. Estes alunos privilegiam raciocínios que envolvem a comparação, através da procura por semelhanças e diferenças em termos de simbologia, e a identificação de padrões, através da criação de resoluções análogas em termos formais a resoluções produzidas para problemas anteriores. Privilegiando, deste modo particular, a comparação e a identificação de padrões quando resolvem problemas, há, portanto, alunos que subvertem a utilidade desses processos de raciocínio no desenvolvimento das suas aprendizagens. Esta abordagem poderá ser sintomática do que Ribeiro (2018) identificou como sendo uma procura “excessiva” por algoritmos matemáticos para resolver problemas.

ii. Como se articulam os processos de raciocínio matemático dos alunos com as características das tarefas propostas?

Este estudo permitiu estabelecer algumas relações entre características das tarefas e evidências da utilização de processos de raciocínio por parte dos alunos, o que poderá reforçar a ideia de que o modo como as tarefas são construídas influencia o tipo de raciocínio em que os alunos se envolvem durante a sua realização.

Quando as tarefas se apresentam com uma estrutura fechada e com uma natureza problemática e os seus enunciados incentivam os alunos a perseguir estratégias fundamentadas no significado dos conceitos em estudo e promovem o recurso a representações diversas (e. g. algébricas, geométricas, em linguagem natural), os alunos fundamentam, por escrito, as suas conclusões. Quando isso não

se verifica, os alunos não tendem a recorrer a essa diversidade de suportes à comunicação e procuram cingir-se a representações algébricas para comunicar os seus raciocínios e conclusões, as quais não fundamentam completamente. Portanto, a investigação sugere que a resolução de problemas que apelem à mobilização de conhecimentos conceptuais e à comunicação escrita através de representações de diferentes tipos promove a comunicação de um discurso matemático fundamentado, com recurso a diferentes processos de raciocínio.

No que respeita à fundamentação de conclusões, verificou-se também que, quando no enunciado das tarefas não é pedida uma justificação, frequentemente, os alunos não registam indicações suficientes para que seja possível compreender como pensaram e apresentam conclusões de forma injustificada. Mas, quando no enunciado de uma tarefa é exigida uma justificação, os alunos comunicam-na, como também constataram Mata-Pereira e Ponte (2012). No sentido de desenvolver, nos alunos, uma consciência da importância da fundamentação do discurso é, portanto, importante solicitar a apresentação de justificações nos enunciados das tarefas, pois, caso contrário, verifica-se que os alunos não consideram necessário apresentá-las.

Na resolução de problemas de modelação e otimização envolvendo fenómenos ou situações reais, quando confrontados com conjeturas contraditórias, os alunos desenvolvem estratégias de validação (ou refutação) estabelecendo comparações entre hipóteses. Contudo, manifestam dificuldades em compreender critérios ou interpretar condições apresentadas nos enunciados de problemas desse tipo – relacionados, por exemplo, com a escolha de soluções –, mesmo quando esses critérios lhes são apresentados em linguagem natural e envolvem conceitos matemáticos simples. A análise sugere que a introdução de exemplos explicativos, em que se estabelecem paralelismos entre conceitos matemáticos e fenómenos que se pretendem modelar, ajuda os alunos a ultrapassar dificuldades relacionadas com a interpretação do enunciado dos problemas e a construir modelos matemáticos, por analogia com os exemplos apresentados.

Verificou-se que, na resolução de problemas de otimização, há alunos que, identificando padrões nos dados, formulam conjeturas relativamente à solução ótima que se traduzem em restrições à variável do problema – como, por exemplo, que a mesma só poderá assumir valores inteiros. Além disso, verificou-se que a resolução deste tipo de problemas leva alguns alunos a desenvolver raciocínios indutivos, que envolvem a inferência de dados, a partir da exploração de várias soluções possíveis e por um processo iterativo, e à generalização de conclusões, a partir da análise desses dados.

Em tarefas de exploração, com uma natureza aberta, a maioria dos alunos não apresenta qualquer fundamento, justificação ou validação para as conclusões que apresenta e, portanto, não é possível compreender exatamente como se estrutura o raciocínio que lhes permitiu alcançá-las. Quando o enunciado de tarefas com um cunho exploratório promove a análise de vários exemplos, os alunos concretizam generalizações. Por exemplo, o trabalho realizado pelos alunos sugere que atividades de exploração envolvendo a análise gráfica de várias funções de uma mesma família, promove a generalização de características relacionadas com a representação gráfica, monotonia e existência de extremos de uma família de funções. Estes resultados estão em linha com os de outros estudos (Azevedo, 2009; Ribeiro, 2018) que também reconheceram essa influência positiva da utilização de exemplos para o desenvolvimento do raciocínio matemático, destacando a capacidade dos alunos de raciocinarem com base na exploração desses exemplos.

6.3. Reflexão Final

Para terminar este trabalho de cariz investigativo, destaco algumas aprendizagens importantes que me permitiu desenvolver, assim como limitações que reconheço no trabalho de investigação que apresento.

No que respeita à promoção do raciocínio matemático é, efetivamente, importante incluir no enunciado das tarefas um pedido de justificação, caso contrário, verifica-se que os alunos não fundamentam as suas conclusões, por muito que sejam incentivados a fazê-lo oralmente – e que até o façam oralmente. De futuro, procurarei ter esse cuidado na construção das tarefas a propor aos alunos, solicitando no seu enunciado: «justifique» ou «explique como pensou». A formulação das tarefas matemáticas também pode ser pensada no sentido de transmitir aos alunos a ideia de que, na aprendizagem da Matemática, a tónica também está nos processos, na atividade em que nos envolvemos e na comunicação. Considero que poderia ter sido mais cuidadosa nesse sentido, no que respeita à formulação dos enunciados das tarefas que propus aos alunos durante a minha intervenção letiva.

Ainda assim, notei algumas diferenças da parte de alguns deles que, durante a intervenção letiva, passaram a incluir pequenas anotações ou explicações nas suas resoluções, o que não era habitual da sua parte. Por esse motivo, penso que a estratégia que envolve questionar frequentemente os alunos, durante as aulas, quanto ao fundamento para as suas respostas possa influenciar positivamente a sua

performance aquando da partilha de raciocínios, contribuindo para desenvolver, em alguns alunos, uma preocupação com a fundamentação do discurso.

No que respeita à promoção do raciocínio matemático durante a aula, há outra aprendizagem que gostaria de destacar. A experiência de lecionação levou-me a considerar que é importante que, no planeamento da sua atividade, o professor reflita bem sobre os aspetos envolvidos na resolução de uma tarefa para os quais vai requerer um maior envolvimento dos alunos e, à medida que se vai avançando nas aprendizagens, quais os aspetos das tarefas que deverão começar a ser tratados de forma mais procedimental, sem prejuízo para a aprendizagem. Pelo contrário, essa seleção é muito importante para que os alunos possam canalizar as suas capacidades cognitivas no sentido de desenvolver novas aprendizagens e tirar o melhor proveito do tempo da aula. Encontrar esse equilíbrio também exige reflexão e planeamento.

No que respeita aos resultados do estudo que realizei, considero que os mesmos não deverão ser generalizados, atendendo às circunstâncias que condicionaram a atividade de lecionação no âmbito da qual o mesmo foi desenvolvido e, por conseguinte, a definição de uma estratégia de recolha de dados para analisar. É evidente que não foi possível salvaguardar a autenticidade do trabalho entregue pelos alunos participantes neste estudo do mesmo modo que teria sido possível caso a intervenção letiva tivesse ocorrido num regime de ensino presencial.

Ao analisar o trabalho entregue pelos alunos, constatei a existência de vários conjuntos de resoluções idênticas. Na verdade, poucos alunos apresentaram resoluções que se pudessem distinguir, mesmo que por um pormenor, das apresentadas pelos restantes colegas de turma. Essa concertação do trabalho entregue por vários grupos de alunos pode sugerir (pelo menos) duas coisas. Muitos alunos organizaram-se em pequenos grupos e desenvolveram trabalho de forma colaborativa. Ou ainda: vários alunos limitaram-se a fazer uma cópia do trabalho de um outro colega. Tenha sido um desses (ou ambos) o caso, e penso que seria perfeitamente razoável equiparar a fiabilidade dos dados utilizados neste estudo com a dos dados utilizados noutros estudos e que recorreram ao trabalho produzido pelos alunos em pequenos grupos (de 2, 3 ou 4 alunos) na sala de aula e sob a supervisão de um professor. Mesmo em regime presencial, é muito difícil que o professor garanta que não haja alunos que, pertencendo a um grupo de trabalho, não contribuam de maneira nenhuma para a realização do trabalho que é apresentado em nome desse grupo. Mas, contrariamente ao que se verifica em aulas presenciais, não tenho forma de saber se, à distância, os alunos resolveram as tarefas autonomamente ou se beneficiaram do apoio de um adulto – por exemplo, de um outro professor – e qual

foi a natureza desse apoio. Este é um aspeto do estudo que considero muito problemático, pois põe em causa a autenticidade dos dados recolhidos. Sobretudo em estudos desenvolvidos no âmbito de uma disciplina à qual os alunos (participantes no estudo) estão sujeitos a uma avaliação, como foi o caso, considero essencial que a recolha de dados se realize na presença dos participantes para que essa autenticidade seja acautelada.

Ainda no que respeita à recolha de dados para a análise, uma limitação que identifiquei neste estudo relaciona-se com o facto de eu não ter disposto de registos vídeo/áudio das sessões síncronas. Considero que a gravação vídeo/áudio dos momentos em que os alunos realizam as atividades que lhes são propostas é muito importante em estudos envolvendo a temática que abordei por dois motivos. Pude verificar que vários alunos não oferecem explicações, por escrito, do modo como raciocinam, muito embora o façam oralmente quando questionados. Assim, teria sido uma grande mais-valia, para a compreensão e caracterização dos raciocínios desenvolvidos pelos alunos, ter podido dispor de um registo áudio das suas participações orais durante as sessões síncronas.

Por outro lado, considero que ao basear a minha análise dos processos de raciocínio usados pelos alunos exclusivamente nas resoluções por eles produzidas, defraudei, em certa medida, o propósito com que as autoras Jeannotte e Kieran (2017) apresentam, no seu modelo, esses aspetos processuais do raciocínio. As autoras consideram a importância de incluir no seu modelo os referidos processos de modo a tornar possível uma caracterização do raciocínio dos alunos de uma perspetiva dinâmica. Isto é, considerando a atividade que por eles vai sendo desenvolvida enquanto realizam uma determinada tarefa, a qual poderá não ter tradução no trabalho que os alunos acabam por apresentar. Ao ter analisado apenas os resultados dessa atividade, acabei por caracterizar o modo como os alunos recorrem aos processos de raciocínio da perspetiva estática que as suas resoluções oferecem, enquanto produto final do seu trabalho. Creio que esta limitação possa resultar em conclusões erradas no que respeita à identificação de características relativas ao modo como os alunos tendem a (ou relevam preferência por) articular a informação de que dispõem para concluir. A partir da resolução que um aluno apresenta para uma tarefa não é possível saber como é que o aluno começou por abordá-la, ou se experimentou várias estratégias e quais.

No sentido de contornar essa limitação, penso que poderia ter sido útil ter mantido um diário de bordo e nele ter registado informação relativa às participações orais dos alunos durante as sessões síncronas. Poderia, por exemplo, ter registado algumas anotações relativas ao modo como determinado aluno começou por abordar

a resolução de determinada tarefa ou às dificuldades que manifestou, por exemplo, na compreensão do seu enunciado.

Concluo esta reflexão e análise crítica pondo em evidência algumas constatações que – não se relacionando diretamente com o objetivo deste estudo – dizem respeito ao ensino-aprendizagem de alguns tópicos programáticos abordados no âmbito da minha intervenção letiva. Na sua sequência, levanto questões que considero pertinente ver respondidas.

A análise apresentada no capítulo 5 deste relatório sugere que a falta de conhecimentos do domínio da *Lógica* revela-se, para alguns alunos, impeditiva de uma interpretação correta dos enunciados das tarefas e um entrave à comunicação de raciocínios válidos. Digo “válidos”, pois notei dar-se o caso de os alunos apresentarem raciocínios que os conduzem a conclusões verdadeiras embora realizem algumas inferências absurdas, justificadas por um uso desadequado de notação matemática. Acresce a isso que esta problemática não pode ser resumida a uma mera troca na associação que os alunos estabelecem entre noções/conceitos e símbolos. Pude constatar que é possível que os alunos do 10.º ano – incluindo alunos com bom aproveitamento à disciplina – utilizem, frequentemente, determinada simbologia matemática sem que lhes atribuam um significado, pois tanto a usam para representar uma coisa como o seu contrário.

Será suficiente que a introdução de conteúdos do domínio da *Lógica* seja feita em contexto de estudo de outros temas matemáticos para que os alunos se apropriem convenientemente de conceitos desse domínio? Ou seja, de modo que lhes permita utilizá-los adequadamente num contexto distinto daquele em que foram introduzidos pelo professor? Imagine-se, por analogia, no que resultaria a aprendizagem de uma Língua estrangeira através de “frases feitas” ou de expressões idiomáticas: o aluno desenvolveria competências para comunicar num determinado contexto, mas dificilmente viria a desenvolver um domínio da linguagem que lhe permitisse comunicar num contexto novo – e muito menos a ser bem sucedido num exercício de escrita criativa. Do mesmo modo, e tendo em conta a análise que realizei, parece-me importante investigar se a introdução de conceitos do domínio da *Lógica* desse modo *contextualizado* não poderá contribuir para tornar os alunos reféns da repetição de um discurso apresentado pelo professor e, por conseguinte, comprometer as suas aprendizagens noutros domínios, incluindo no desenvolvimento de competências de raciocínio, por limitar a capacidade dos alunos para comunicar (e, por conseguinte, para desenvolver) raciocínios criativos.

Em suma, há aspetos que emergem da análise que realizei que me levam a questionar o benefício, para o ensino-aprendizagem da Matemática ao nível do

ensino secundário, de os conteúdos do domínio da *Lógica* serem introduzidos à medida que se vá relevando necessário e em ligação com outros temas matemáticos. Questiono-me sobre se não será contraproducente, ou até um contrassenso, tratar a *Lógica* – que está, ela própria, na base do raciocínio matemático – como um tema transversal, num currículo que me parece querer, ao mesmo tempo, reforçar a importância do desenvolvimento de competências de raciocínio. Talvez estas interrogações possam ser o ponto de partida para uma outra investigação.

REFERÊNCIAS

- Almog, N., & Ilany, B. S. (2012). Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 347-364.
- Antonini, S., & Lisarelli, G. (2021). Designing tasks for introducing functions and graphs within dynamic interactive environments. *Mathematics*, 9, 572. <https://doi.org/10.3390/math9050572>
- Azevedo, A. B. G. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem das funções: Uma experiência com alunos do ensino secundário*. (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa). <http://hdl.handle.net/10451/3435~>
- Breen, S. & O'Shea, A. (2019). Designing mathematical thinking tasks. *PRIMUS*, 29(1), 9-20.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: what do we know, what can we do?. In S. J. Cho (Ed.). *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (Part II, pp. 73-96). Cham: Springer International Publishing. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-12688-3>
- Campos, D. G. (2009) On the distinction between Peirce's abduction and Lipton's inference to the best explanation. *Synthese*, 180(3), 419-442. https://www.researchgate.net/publication/271862585_On_the_distinction_between_Peirce's_abduction_and_Lipton's_Inference_to_the_best_explanation
- Canavarro, A. P. et al.(2019). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática. Grupo de Trabalho de Matemática* [Despacho n.º 12530/2018]. <https://www.dge.mec.pt/noticias/recomendacoes-para-melhoria-das-aprendizagens-dos-alunos-em-matematica>
- Chiarugi, I., Fracassina, G., & Furinghetti, F. (1990). Learning difficulties behind the notion of absolute value. In G. Booker, P. Cobb & T. N. De Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 231-238). Oaxtepec, Mexico: Program Committee.

- Colégio Militar (2016). Projeto Educativo 2016-2017 a 2018-2019.
- Colégio Militar (2019). Projeto Educativo 2019-2020 a 2021-2022. <https://www.colegiomilitar.pt/documentos-estruturantes/projeto-educativo/>
- Coutinho, C. P., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M., & Vieira, S. (2009). Investigação-Ação: Metodologia preferencial nas práticas educativas. *Psicologia, Educação e Cultura*, XIII(2), 355-380.
- DGE (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: Direção-Geral da Educação.
- DGE (2018). *Aprendizagens Essenciais, Ensino Secundário, Matemática A, 10º ano*. Lisboa: Direção-Geral da Educação. <https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario>
- Erikson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed., pp. 119-161). New York, NY: MacMillan. <https://pdfs.semanticscholar.org/c74e/735826d50018235b98dd4723a9fad28b3956.pdf>
- Ferrage, D. T. (2019). *A aprendizagem da Trigonometria no 9.º ano de escolaridade através da diversidade de tarefas*. (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa).
- Gono, E. N. (2016). *The contributions of interactive dynamic mathematics software in probing understanding of mathematical concepts: Case study on the use GeoGebra in learning the concept of modulus functions*. (Tese de Doutoramento, University College London). <https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/1530117/>
- Instituto de Educação (2017). *Carta ética para a investigação em educação e formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Lisboa: IE. <http://www.ie.ulisboa.pt/download/carta-etica-e-regulamento-da-comissao-de-etica>
- Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Júnior, D. (2008). *Elaboração de uma sequência didática para a aprendizagem de Valor Absoluto e Função Modular, utilizando a organização curricular em rede* (Dissertação de Pós-Graduação, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Brasil).

- Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten – grade 8*. Reston, VA: NCTM.
- Mata-Pereira, J. (2018). *As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal). Obtido de <http://hdl.handle.net/10451/34861>
- Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante*, XXI(2), 81-110. <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/22633>
- Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2013). Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. *Boletim GEPEM*(62), 17-31.
- Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 56(2-3), 255-286.
- MEC (2013). *Programa e metas curriculares de matemática, Ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf
- MEC (2014a). *Programa e metas curriculares de matemática A, Ensino secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf
- MEC (2014b). *Caderno de Apoio, 10.º ano*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf
- Mónico, L., Alferes, V., Parreira, P., & Castro, P. (2017). A observação participante enquanto metodologia de investigação qualitativa. In *Actas Investigação Qualitativa nas Ciências Sociais, 6.º Congresso Ibero-Americano de Investigação Qualitativa (CIAIQ) (Vol. 3, pp. 724-733)*. <https://proceedings.ciaiq.org/index.php/ciaiq2017/article/view/1447>

- Mota, I. (2017). *Aprendizagem das Funções no 10.º ano: Uma abordagem através do Ensino Exploratório* (Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa). <http://hdl.handle.net/10362/63367>
- NCTM (2014). *Ensino e Aprendizagem eficientes*. Lisboa: APM.
- Norqvist, M. (2016). *On mathematical reasoning – Being told or finding out*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Umeå, Suécia).
- Nunes, G. (2012). *Resolução de problemas envolvendo funções quadráticas por alunos do ensino secundário*. (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Portugal). <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/8367>
- Pedemonte, B. & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes, *Educational Studies in Mathematics*, 76(3), 281-303. https://www.researchgate.net/publication/227079968_The_role_of_abduction_in_proving_processes
- Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos de Avaliação das Aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo da Matemática. *Educação e Matemática*, 15, 3-9. <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4473>
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. M. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?. *Educação e Matemática*, 156, 7-11
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Revista Práxis Educativa*, 7(2), 355-377. <http://hdl.handle.net/10451/22606>
- Ribeiro, R. (2018). *O raciocínio matemático na realização de demonstrações e na resolução de desafios lógicos: um estudo com alunos do 12.º ano do ensino secundário* (Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Portugal). <https://run.unl.pt/handle/10362/45439>
- Santos, L., & Pinto, J. (2018). Ensino de conteúdos escolares: A avaliação como Fator estruturante. In F. Veiga (Coord.), *O Ensino como fator de envolvimento numa escola para todos* (pp. 503-539). Lisboa: Climepsi Editores.
- Sierpinska, A. (2007). I need a teacher to tell me If I am right or wrong. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st*

- Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 45-64). Seoul: PME. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED499419.pdf>
- Sierpinska, A., Bobos, G. & Pruncut, A. (2011). Teaching absolute value inequalities to mature students. *Educational Studies in Mathematics*, 78(3), 275-305. https://spectrum.library.concordia.ca/974913/1/Sierpinska-Bobos-Pruncut-2011-ESM-78.3-ABSOLUTE_VALUE_INEQUALITIES-Latest-Version.pdf
- Silva, M. (2013). *Tarefas com recurso à calculadora gráfica no ensino secundário do 10.º ao 12.º de escolaridade* (Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Portugal). <https://run.unl.pt/handle/10362/11310>
- Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Tarefas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.
- Swan, M. (2017). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática*, 144-145, 67-72.
- Swan, M. (2018). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática*, 146, 8-14.
- Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438-445.

Legislação

- Decreto-Lei n.º 14-G/2020 de 13 de abril. *Diário da República* n.º 72/2020, 2º Suplemento, Série I, 86-(9) a 86-(19). Acedido a 1 jul. 2020. Disponível em <https://data.dre.pt/eli/dec-lei/14-G/2020/04/13/p/dre>

ANEXOS



COLÉGIO MILITAR

10.º ANO – Matemática A

Parte 1: Módulo de um número real; Equações e inequações com módulos

Introdução: Significado geométrico de $|x|$

Começaremos por recordar a definição e o significado geométrico de módulo (ou valor absoluto) de um número real para apoiar a resolução de equações propostas a seguir.

⇒ Leia atentamente as notas introdutórias do **quadro laranja**.

NOTAS

O **módulo de um número real** x , representado pela expressão $|x|$, é definido como **a distância entre os pontos que representam x e 0 (zero) na reta numérica**.

Representação na reta numérica

Consideremos os três casos possíveis: $x > 0$, $x < 0$, $x = 0$.

No primeiro caso (Figura 1), vamos supor que x é um **número real positivo** e, por isso, assinalaremos o ponto que o representa na reta numérica (●) à direita da origem (0).

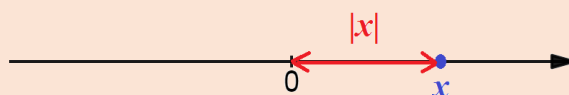


Figura 1

O módulo (ou valor absoluto) de x é a distância entre o ponto assinalado (●) e a origem (0).

Podemos construir uma representação semelhante considerando, agora, que x é um **número real negativo** (Figura 2). Assim, desta vez, assinalaremos o ponto que representa o número real x (●) à esquerda da origem (0) na reta numérica.

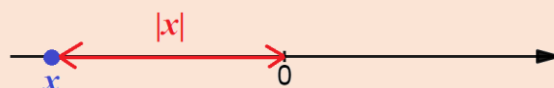


Figura 2

Tal como no caso anterior, $|x|$ é a distância entre os pontos da reta numérica que representam os números x e 0.

Finalmente, quando $x = 0$, o ponto que representa o número x é o ponto que representa 0 e, por isso, $|0| = 0$.

Com base no significado geométrico de módulo, rapidamente se conclui a seguinte propriedade: **o módulo de números simétricos é igual**. Vejamos um exemplo (Figura 3).

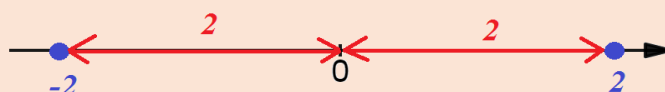


Figura 3

$$|2| = |-2| = 2$$

É fácil perceber que a igualdade se verifica para qualquer número real x e para o seu simétrico $-x$, pois a distância a que pontos simétricos relativamente à origem se encontram do zero é a mesma.

Propriedades:

- $|0| = 0$
- $|x| = |-x|$

Definição analítica de $|x|$

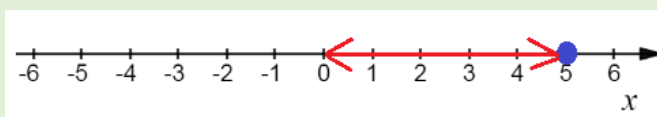
⇒ Com base na definição de módulo, explore os exemplos seguintes determinando o valor numérico das expressões apresentadas.

ATIVIDADE 1.1.

Determinação do valor numérico de expressões $|x|$

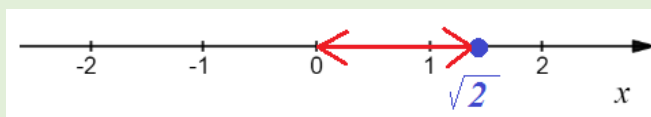
(a) Observando a figura, a distância entre os pontos que representam os números 5 e 0 (zero) na reta numérica é de 5. Então, podemos afirmar que:

$$|5| = \boxed{5}$$



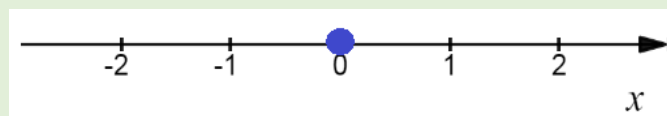
(b) Observando a figura, podemos afirmar que:

$$|\sqrt{2}| = \boxed{}$$



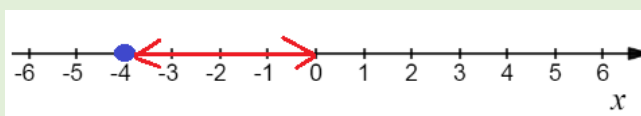
(c) Observando a figura, podemos afirmar que:

$$|0| = \boxed{}$$



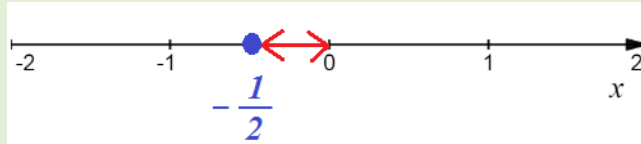
(d) A distância entre os pontos que representam os números -4 e 0 na reta numérica é 4. Então, podemos afirmar que:

$$|-4| = \boxed{}$$



(e) Observando a figura, podemos afirmar que:

$$\left| -\frac{1}{2} \right| = \boxed{}$$



(f) Observe os exemplos acima apresentados, compare cada valor de x com o seu módulo e estabeleça uma relação entre x e $|x|$, completando a expressão analítica que define o módulo de um número real, $|x|$.

Definição analítica de $|x|$

O **módulo de um número real** x é o número real definido por:

$$|x| = \begin{cases} \boxed{} & , \text{ se } x \geq 0 \\ \boxed{} & , \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

À função $x \rightarrow |x|$ de domínio \mathbb{R} chama-se função módulo. (Note que é uma função definida por ramos)

⇒ Veja os seguintes exemplos:

Aplicação da definição analítica de $|x|$

no cálculo do valor numérico de expressões

$|\sqrt{3}| = \sqrt{3} \rightarrow$ Neste caso, $x = \sqrt{3}$ e, portanto, $x \geq 0$. Então: $|x|$ é o próprio x .

$\left| -\frac{2}{7} \right| = \frac{2}{7} \rightarrow$ Neste caso, $x = -\frac{2}{7}$ e, portanto, $x < 0$. Então: $|x|$ é o **simétrico** de x

Note que o simétrico de $-\frac{2}{7}$ é $\frac{2}{7}$, pois: $- \left(-\frac{2}{7} \right) = \frac{2}{7}$

▪ 0 (“zero”) é o único número cujo módulo é 0.

⇒ **Realize** a atividade:

ATIVIDADE 1.2.

1.2.1. Determine o valor numérico das seguintes expressões:

(a) $|2\sqrt{2}| = \dots$ (b) $|\pi| = \dots$ (c) $|-10|^2 = \dots$ (d) $|(-1)^3| = \dots$

1.2.1. Seja x um número real positivo. Determine o valor numérico da expressão:

$$\frac{|x|}{4x} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

⇒ **Realize** a atividade que se segue na qual procuraremos descobrir que valores pode assumir a incógnita x em cada equação.

ATIVIDADE 1.3.

Conjunto solução de equações escritas na forma $|x| = a$

Preencha os espaços deixados em branco.

(a) $|x| = 5$

Podemos recorrer à **definição geométrica** de $|x|$ para descobrir quais são os valores de x que fazem com que a expressão $|x|$ tenha um valor numérico igual a 5.

Repare que se $|x| = 5$, então a distância do x ao 0 é 5.

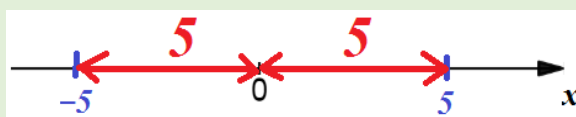


Figura 3

Por observação da Figura 3, percebemos que, na verdade, existem **dois pontos e unicamente dois pontos** na reta numérica cuja distância ao 0 é 5: **um à esquerda** do 0, e **outro à direita** do 0. Esses pontos são os pontos:

$$x = \boxed{-5} \text{ ou } x = \boxed{5}$$

Ou seja, este raciocínio geométrico permite-lhe concluir que:

$$|x| = 5 \Leftrightarrow x = \boxed{-5} \vee x = \boxed{5}$$

Na verdade, acabou de resolver uma equação com uma expressão envolvendo módulos. Para finalizar, poderá apresentar o conjunto solução da equação

$$\text{C.S.} = \boxed{\{-5, 5\}}$$

(b) $|x| = \frac{1}{2}$

Mais uma vez, podemos representar o problema, geometricamente, da seguinte forma:

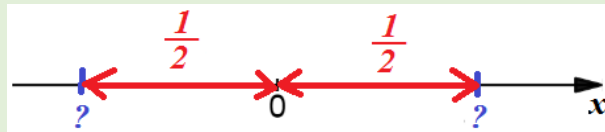


Figura 4

Seguindo o mesmo raciocínio geométrico que no caso anterior, podemos concluir que:

$|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \boxed{} \vee x = \boxed{}$

O conjunto solução da equação é, portanto:

(c) $|x| = -1$

A condição apresentada é impossível, porque...

(Complete com uma justificação)

Portanto, a equação apresentada não tem soluções e o seu conjunto solução é:

CONCLUSÕES:

Acabou de resolver, em \mathbb{R} , algumas equações escritas na forma $|x| = a$. Da realização das alíneas anteriores, podemos extrair algumas conclusões, nomeadamente que o número de soluções de equações do tipo $|x| = a$ varia.

(d) **Complete** o quadro com algumas das conclusões que tirou da realização desta atividade, completando com as expressões: “tem duas soluções”, “tem uma solução” e “não tem solução”.

Dada uma equação do tipo $ x = a$, a equação...	<input type="text"/>	se $a < 0$
	<input type="text"/>	se $a = 0$
	<input type="text"/>	se $a > 0$

⇒ **Realize** a **Atividade 1.4.** e, depois, **compare** a sua resolução com a resolução parcial que é apresentada no **Exemplo 1**, no final deste documento.

ATIVIDADE 1.4.

Resolva, em \mathbb{R} , as equações e apresente os respectivos conjuntos-solução.

(a) $|x| = 7$

(e) $|x| + (-2)^3 = -8$

(b) $|x| = \frac{5}{2}$

(f) $-2|x| - 5 = -11$

(c) $|x| + 3 = 0$

(g) $|x| - x = 0$

(d) $-|x| - 1 = -5$

Sugestão: Na resolução de uma equação como as propostas, pode começar por aplicar os princípios de equivalência de equações que já conhece, para que a expressão $|x|$ fique isolada no primeiro membro da equação e obtenha uma expressão simplificada na forma $|x| = k$. Para determinar o conjunto solução da equação (valores de x que tornam a condição possível) pode recorrer ao conceito de módulo já trabalhado acima.

Inequações $|x| \leq c$

⇒ **Realize** a **Atividade 1.5.** e, depois, **compare** a sua resolução com a resolução parcial que é apresentada no **Exemplo 2**, no final deste documento.

ATIVIDADE 1.5.

(a) Tendo em conta o significado geométrico de $|x|$, a expressão $|x| = 5$ pode ler-se: «a distância do x ao 0 é 5». Como faria a leitura da expressão $|x| \leq 5$?

(b) **Represente** na reta numérica o conjunto dos pontos que satisfazem a condição $|x| \leq 5$. De seguida, represente esse conjunto sob a forma de intervalo de números reais.

(c) Seja a um número real. Represente na reta numérica o conjunto dos pontos que satisfazem a condição $|x| \leq a$ e, de seguida, represente esse conjunto sob a forma de intervalo.

Questão orientadora: Como faria a leitura da expressão $|x| \leq a$?

Na atividade anterior, ao determinar todos os valores de x que verificam a condição $|x| \leq 5$, resolveu uma inequação.

Para realizar a atividade seguidamente proposta, só precisa de se focar no significado geométrico de $|x|$. Recorde também a seguinte propriedade, que lhe será útil para simplificar as expressões das alíneas (e), (f) e (g):

Propriedade: Se a e b são números reais e $a < b$, então:

- $ac < bc$ se c for um real positivo
- $ac > bc$ se c for um real negativo

Exemplo de aplicação da propriedade na simplificação de inequações:

(x é um número real)

- $2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$ → Neste caso multiplicamos ambos os membros por $c = \frac{1}{2}$.

O sentido da desigualdade mantém-se.

- $-2x < -4 \Leftrightarrow x > 2$ → Neste caso multiplicamos ambos os membros por $c = -\frac{1}{2}$.

O sentido da desigualdade inverte.

⇒ **Realize** a atividade:

ATIVIDADE 1.6

Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das inequações. Apresente os respectivos conjuntos-solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

(a) $|x| \leq 2$

(e) $-|x| > -3$

(b) $|x| \leq 0$

(f) $-|x| - 7 < -6$

(c) $|x| + 2 < 1$

(g) $-3|x| + 12 < -6$

(d) $|x| \geq 4$

(h) $|x| > x$

Sugestão: Pode basear-se na análise do Exemplo 2., apresentado no final deste documento.

Equações $|x + b| = c$

A atividade que se segue é em **tudo** semelhante às que já realizou: consiste na resolução de equações envolvendo expressões com módulos. Mas, desta vez, o número representado entre os símbolos de valor absoluto [...] **não é a incógnita das equações**. A título de exemplo, considere a seguinte condição, definida em \mathbb{R} :

$$|x - 1| + 1 = 4$$

Para determinar o conjunto solução desta equação, podemos começar por aplicar os princípios de equivalência de equações, “simplificando” a expressão:

$$|x - 1| + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x - 1| = 3$$

No entanto, não conseguimos isolar $|x|$ no primeiro membro da equação, como tem acontecido até agora. Como avançar a partir daqui?

É simples: $x - 1$ é um número real e, como tal, podemos resolver a equação como anteriormente. Devemos ter apenas em conta que, neste caso, a equação deve ler-se: «**a distância do $x - 1$ ao 0 é 3**» (interpretação geométrica da equação). Que número é então o $x - 1$?

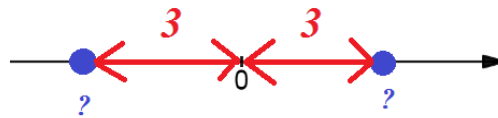


Figura 5

Observando a Figura 5, percebemos que há duas possibilidades: ou $x - 1$ é o número -3 ou $x - 1$ é o número 3 .

Concretizando:

$$\begin{aligned} |x - 1| = 3 &\Leftrightarrow x - 1 = -3 \vee x - 1 = 3 \\ &\Leftrightarrow x = -3 + 1 \vee x = 3 + 1 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \quad \vee \quad x = 4 \end{aligned}$$

Resolvendo as duas equações em ordem à incógnita x , é possível concluir que o conjunto solução da equação inicial é: $\{-2, 4\}$

⇒ **Realize** a atividade seguinte.

Se precisar, consulte os *Exemplos 12.1, 12.2 ou 12.3* da página 132 do seu manual.

ATIVIDADE 1.7.

Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das equações. Apresente os respetivos conjuntos-solução.

(a) $|3x - 1| = 5$

(b) $|x^2 + 3| = 0$

(c) $2 \left| \frac{1}{2}x - 3 \right| = -10$

Inequações $|x - b| > c$ e $|x - b| < c$

⇒ Descubra uma estratégia que lhe permita resolver o problema que se segue, mobilizando os seus conhecimentos relativos à resolução de inequações com módulos.

ATIVIDADE 1.8.

Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

(a) $|x - 1| \leq 4$

(b) $|x - 1| > 4$

Apresente os respetivos conjuntos-solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

Sugestão: Como interpreta geometricamente cada uma das inequações? Pense primeiro como faria a leitura das expressões se, entre os símbolos de valor absoluto, estivesse apenas um x .

⇒ **Antes de prosseguir, compare** a sua resolução com a proposta nos **Exemplos 3 e 4**, no final deste documento.

⇒ **Realize** a atividade que se segue e que foi parcialmente extraída da **Tarefa 16** da **página 133** do seu manual.

ATIVIDADE 1.9.

Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das inequações e apresente os respetivos conjuntos-solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

(a) $|2x - 1| < 3$

(d) $|-3x + 3| > -8$

(b) $\left| -2x + \frac{1}{2} \right| > 5$

(e) $-3 - |6 - 2x| \leq -10$

(c) $|-2x + 3| < -5$

Notas finais:

Uma proposta de resolução de todas as atividades aqui propostas ser-lhe-á enviada.

Na próxima sessão, continuaremos o estudo de inequações com módulos. Além disso, explorará a aplicabilidade do conceito de módulo na resolução de um problema do mundo real.

EXEMPLO 1

Resolva, em \mathbb{R} , a seguinte equação e apresente o respetivo conjunto solução:

$$-2|x| - 5 = -11$$

[Atividade 1.4. (f)]

Resolver a equação, como sabe, equivale a determinar o conjunto de valores de x que tornam a condição **possível**.

Na proposta de resolução apresentada, começámos por aplicar os **princípios de equivalência de equações** de tal modo que a expressão « $|x|$ » ficasse isolada no primeiro membro da equação.

Assim:

$$-2|x| - 5 = -11 \Leftrightarrow -2|x| = -11 + 5$$

$$\Leftrightarrow -2|x| = -6$$

$$\Leftrightarrow |x| = \frac{6}{2}$$

$$\Leftrightarrow |x| = 3$$

multiplicando ambos os membros da equação por $-\frac{1}{2}$

Simplificando a expressão, obtém-se: $|x| = 3$. Esta expressão é **equivalente** à expressão inicial, mas simplificada.

Para determinar os valores de x que tornam a condição $|x| = 3$ precisamos de nos interrogar: *Que pontos da reta numérica distam da origem 3 unidades?*

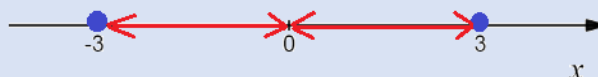


Figura 1

Por observação da Figura 1, facilmente se conclui que existem **exatamente dois pontos** que distam da origem 3 unidades: esses pontos representam os números -3 e 3 . Podemos, então, concluir que:

$$|x| = 3 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$$

Finalmente, resolvida a equação, podemos apresentar o seu conjunto solução:

$$C.S. = \{-3, 3\}$$

■

Confirmação:

Para confirmar que os valores encontrados são soluções da equação (ou se nos enganamos nas contas), podemos substituí-los na condição inicial e verificar se as proposições que obtemos são verdadeiras.

Concretizando:

- Substituindo x por -3 na igualdade $-2|x| - 5 = -11$, obtemos $-2|-3| - 5 = -11$. Como:

$$\begin{aligned} -2|-3| - 5 = -11 &\Leftrightarrow -2 \times 3 - 5 = -11 \\ &\Leftrightarrow -11 = -11 \quad \text{proposição verdadeira } \checkmark \end{aligned}$$

Confirmámos que -3 é solução.

- Substituindo x por 3 na igualdade $-2|x| - 5 = -11$, obtemos $-2|3| - 5 = -11$. Como:

$$\begin{aligned} -2|3| - 5 = -11 &\Leftrightarrow -2 \times 3 - 5 = -11 \\ &\Leftrightarrow -11 = -11 \quad \text{proposição verdadeira } \checkmark \end{aligned}$$

Confirmámos que 3 é solução.

EXEMPLO 2

Resolva, em \mathbb{R} , a inequação:

$$|x| \leq 5$$

[adaptado de [Atividade 1.5.](#)]

Como aprendemos, $|x|$ é a distância do ponto que representa o número x até ao 0 (Figura 2).

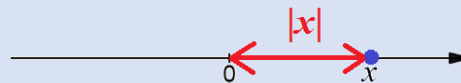


Figura 2

Portanto, a condição $|x| \leq 5$ pode ser “traduzida” da seguinte forma: **a distância do x ao 0 é menor ou igual a 5.**

Ora, todos os pontos da reta que representam os números que vão do -5 ao 5 , inclusivé, estão a uma distância da origem **menor ou igual a 5** (Figura 3). Além disso, não há outros além desses.

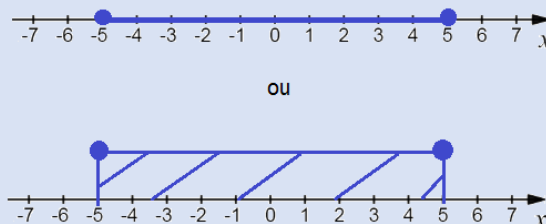


Figura 3

Então:

$$|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$$

Pode ler-se: x assume valores compreendidos entre -5 e 5 , inclusive.

O conjunto solução da inequação $|x| \leq 5$ é $[-5, 5]$.

EXEMPLO 3

Resolva, em \mathbb{R} , a inequação:

$$|x - 1| \leq 4$$

[Atividade 1.8. (a)]

Note que sendo $x - 1$ um número real, então a inequação pode ler-se: «a distância do número $x - 1$ a zero é menor ou igual a 4».

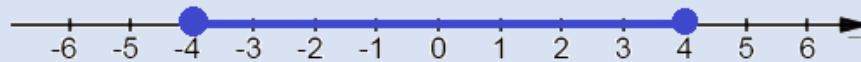


Figura 1

Por observação da Figura 1, é possível perceber que $x - 1$ pode ser um número qualquer de -4 a 4 , inclusivé. Analiticamente, escrevemos que:

$$|x - 1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -4 + 1 \leq x \leq 4 + 1$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$$

Resolvendo em ordem a x , concluímos que $-3 \leq x \leq 5$.

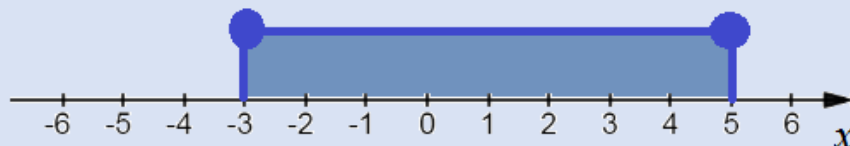


Figura 2

O conjunto solução da inequação pode ser representado na forma de intervalo de números reais:

$$C.S. = [-3, 5]$$

EXEMPLO 4

Resolva, em \mathbb{R} , a inequação:

$$|x - 1| > 4$$

[da **Atividade 1.8 (b)**]

Note que a inequação pode ler-se: «a distância do número $x - 1$ a zero é maior que 4»

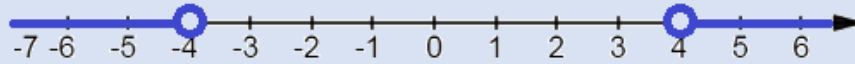


Figura 3

Por observação da Figura 3, é possível perceber que $x - 1$ pode ser um número qualquer menor que -4 **ou** maior que 4. Analiticamente, escrevemos que:

$$\begin{aligned} |x - 1| > 4 &\Leftrightarrow x - 1 < -4 \quad \vee \quad x - 1 > 4 \\ &\Leftrightarrow x < -4 + 1 \quad \vee \quad x > 4 + 1 \\ &\Leftrightarrow x < -3 \quad \vee \quad x > 5 \end{aligned}$$

Resolvendo em ordem a x concluímos que: $x < -3$ ou $x > 5$.

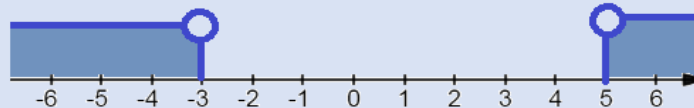


Figura 4

O conjunto solução da inequação pode ser apresentado na forma de reunião de intervalos de números reais:

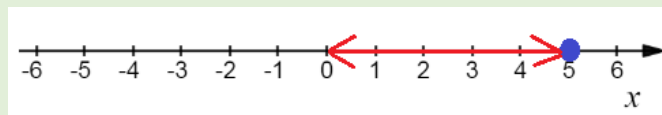
$$C.S. =] - \infty, -3[\cup]5, +\infty[$$

ATIVIDADE 1.1

Determinação do valor numérico de expressões $|x|$ com $x \in \mathbb{R}$

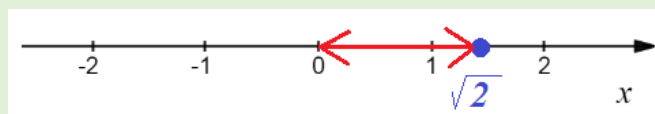
(a)

$$|5| = \boxed{5}$$



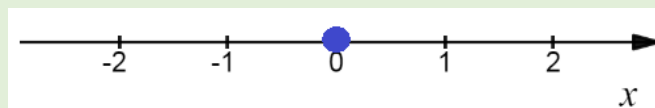
(b)

$$|\sqrt{2}| = \boxed{\sqrt{2}}$$



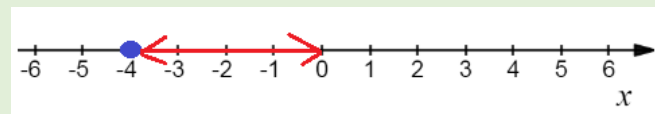
(c)

$$|0| = \boxed{0}$$



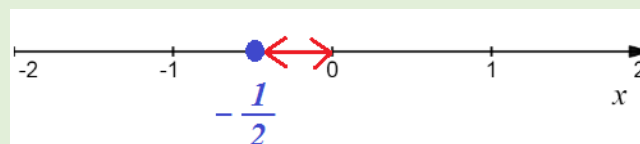
(d)

$$|-4| = \boxed{4}$$



(e)

$$\left| -\frac{1}{2} \right| = \boxed{\frac{1}{2}}$$



(f)

Definição analítica de $|x|$

O **módulo de um número real x** é o número real definido por:

$$|x| = \begin{cases} \boxed{x} & , \text{ se } x \geq 0 \\ \boxed{-x} & , \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

À função $x \rightarrow |x|$ de domínio \mathbb{R} chama-se função módulo. (Note que é uma função definida por ramos)

ATIVIDADE 1.2.

1.2.1. Determine o valor numérico das seguintes expressões:

(a) $|2\sqrt{2}| = \dots$

(b) $|\pi| = \dots$

(c) $|-10|^2 = \dots$

(d) $|(-1)^3| = \dots$

1.2.2. Seja x um número real positivo. Determine o valor numérico da expressão:

$$\frac{|x|}{4x} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

1.2.1.

(a) $|2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$

Nota: $|2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$, pois $2\sqrt{2}$ é um **número positivo** e $|x| = x$, se $x \geq 0$.

Ou, alternativamente, $|\pi| = \pi$ pois a distância do π ao 0 é π .

(b) $|-\pi| = \pi$

Nota: $|-\pi| = \pi$, pois $-\pi$ é um **número negativo** e $|x| = -x$, se $x < 0$. O simétrico de $-\pi$ é π .

Ou, alternativamente, $|-\pi| = \pi$, pois a distância do $-\pi$ ao 0 é π .

(c) $|-10|^2 = 10^2$

(d) $|(-1)^3| = |-1| = 1$

Nota: $(-1)^3 = -1^3 = -1$. O valor numérico da expressão é negativo, porque a **base da potência é negativa** e o **expoente é ímpar**.

1.2.2. Se x é positivo, então, pela definição de módulo: $|x| = x$

Substituindo na expressão e aplicando as regras operatórias, conclui-se que o valor numérico da expressão é 1:

$$\frac{|x|}{4x} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{x}{4x} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\cancel{x}}{4\cancel{x}} + \frac{\sqrt{3}^2}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Atenção: Se x fosse negativo, então, pela definição de módulo: $|x| = -x$

ATIVIDADE 1.3.

(a) $|x| = 5$

Podemos recorrer à **definição geométrica** de $|x|$ para descobrir quais são os valores de x que fazem com que a expressão $|x|$ tenha um valor numérico igual a 5.

Repare que se $|x| = 5$, então a distância do x ao 0 é 5.

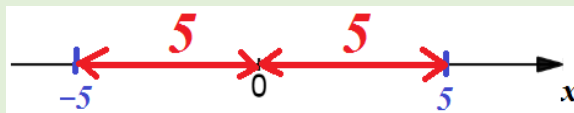


Figura 3

Por observação da Figura 3, percebemos que, na verdade, existem **dois pontos e unicamente dois pontos** na reta numérica cuja distância ao 0 é 5: **um à esquerda** do 0, e **outro à direita** do 0. Esses pontos são os pontos:

$$x = \boxed{-5} \quad \text{ou} \quad x = \boxed{5}$$

Ou seja, este raciocínio geométrico permite-lhe concluir que:

$$|x| = 5 \Leftrightarrow x = \boxed{-5} \quad \vee \quad x = \boxed{5}$$

Na verdade, acabou de resolver uma equação com uma expressão envolvendo módulos. Para finalizar, poderá apresentar o conjunto solução da equação

$$\text{C.S.} = \boxed{\{-5, 5\}}$$

(b) $|x| = \frac{1}{2}$

Mais uma vez, podemos representar o problema, geometricamente, da seguinte forma:

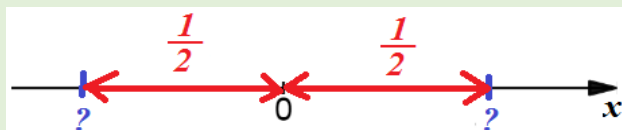


Figura 4

Seguindo o mesmo raciocínio geométrico que no caso anterior, podemos concluir que:

$$|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \boxed{-\frac{1}{2}} \quad \vee \quad x = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Pois os pontos que representam estes números distam da origem $\frac{1}{2}$

O conjunto solução da equação é, portanto:

$$\boxed{\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}}$$

(c) $|x| = -1$

A condição apresentada é impossível, porque...

O módulo de um número real nunca assume valores negativos. A distância de um número x ao 0 não pode ser -1 .

Portanto, a equação apresentada não tem soluções e o seu conjunto solução é:

$$\{ \}$$

CONCLUSÕES:

Dada uma equação do tipo $ x = a$, a equação...	Não tem solução	se $a < 0$
	Tem uma solução	se $a = 0$
	Tem duas soluções	se $a > 0$

ATIVIDADE 1.4.

1.2.1. Resolva, em \mathbb{R} , as seguintes equações e apresente os respectivos conjuntos-solução.

(a) $|x| = 7$

(e) $|x| + (-2)^3 = -8$

(b) $|x| = \frac{5}{2}$

(f) $-2|x| - 5 = -11$

(c) $|x| + 3 = 0$

(g) $|x| - x = 0$

(d) $-|x| - 1 = -5$

(a) $|x| = 7$

$\Leftrightarrow x = -7 \vee x = 7$

C.S. = $\{-7, 7\}$

(b) $|x| = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \vee x = -\frac{5}{2}$

C.S. = $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

(c) $|x| + 3 = 0$

$\Leftrightarrow |x| = -3$ *condição impossível*

C.S. = $\{ \}$

(d) $-|x| - 1 = -5$

$\Leftrightarrow -|x| = -5 + 1$

$\Leftrightarrow -|x| = -4$

$\Leftrightarrow |x| = 4$

multiplicando ambos os membros da equação por -1

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$

C.S. = $\{-4, 4\}$

(e) $|x| + (-2)^3 = -8$

$\Leftrightarrow |x| - 8 = -8$

$\Leftrightarrow |x| = -8 + 8$

$\Leftrightarrow |x| = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

C.S. = $\{0\}$

(f) $-2|x| - 5 = -11$

$\Leftrightarrow -2|x| = -11 + 5$

$\Leftrightarrow -2|x| = -6$

$\Leftrightarrow |x| = \frac{6}{2}$

multiplicando ambos os membros da equação por $-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |x| = 3$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

C.S. = $\{-3, 3\}$

(g) $|x| - x = 0$

$\Leftrightarrow |x| = x$

Pela definição de módulo: $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

C.S. = $[0, +\infty[$

Sabemos que $|x| = x$ apenas se $x \geq 0$. O módulo de um número x é igual ao próprio x apenas quando x é um número maior ou igual a zero. Então a condição $|x| = x$ só **não** admite valores de x negativos.

ou
C.S. = \mathbb{R}_0^+

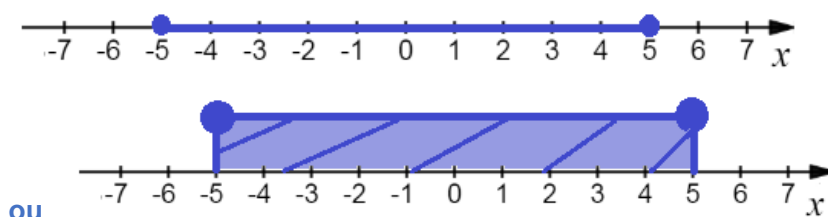
ATIVIDADE 1.5.

Considere a condição definida em \mathbb{R} : $|x| \leq 5$

(a) Tendo em conta o significado geométrico de $|x|$, a expressão $|x| = 5$ pode ler-se: «a distância do x ao 0 é 5». Como faria a leitura da expressão $|x| \leq 5$?

A distância do x ao 0 é menor ou igual a 5.

(b) **Represente** na reta numérica o conjunto dos pontos que satisfazem a condição $|x| \leq 5$. De seguida, represente esse conjunto sob a forma de intervalo de números reais.



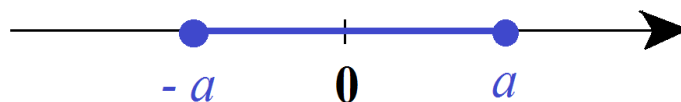
$$C.S. = [-5, 5]$$

(c) Seja a um número real. Represente na reta numérica o conjunto dos pontos que satisfazem a condição $|x| \leq a$ e, de seguida, represente esse conjunto sob a forma de intervalo.

A expressão $|x| \leq a$ pode ler-se: «a distância do número x ao 0 é **menor ou igual a a** ».

Seja $a > 0$.

Representação na reta numérica de todos os pontos que estão a uma distância menor ou igual a a de 0:



Estes pontos, são os pontos que representam os números compreendidos entre $-a$ e a . Isto é, os números do conjunto: $[-a, a]$

ATIVIDADE 1.6

Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das inequações. Apresente os respectivos conjuntos-solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

(a) $|x| \leq 2$

(e) $-|x| > -3$

(b) $|x| \leq 0$

(f) $-|x| - 7 < -6$

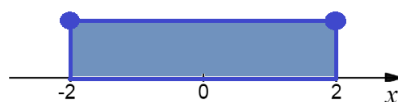
(c) $|x| + 2 < 1$

(g) $-3|x| + 12 < -6$

(d) $|x| \geq 4$

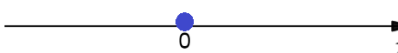
(h) $|x| > x$

(a) $|x| \leq 2 \quad \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$



$C.S. = [-2, 2]$

(b) $|x| \leq 0 \quad \Leftrightarrow x = 0$



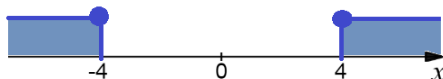
$C.S. = \{0\}$

(c) $|x| + 2 < 1 \quad \Leftrightarrow |x| < 1 - 2$
 $\Leftrightarrow |x| < -1$ *condição impossível*

A condição $|x| < -1$ é impossível, pois não existe nenhum número real x cujo módulo seja menor que -1 . Isto implicaria que $|x|$ fosse um número negativo, o que não é possível.

$C.S. = \{ \}$

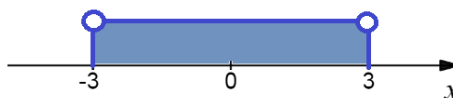
(d) $|x| \geq 4 \quad \Leftrightarrow x \leq -4 \vee x \geq 4$



$C.S. =]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$

(e) $-|x| > -3 \quad \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |x| < 3$
 $\Leftrightarrow -3 < x < 3$

Recorde que:
 Ao multiplicar ambos os membros da inequação por -1 , devemos inverter o sentido da desigualdade.
 O sinal $>$ inverte para $<$



$C.S. =]-3; 3[$

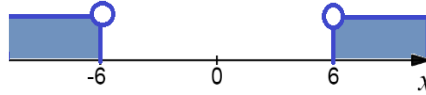
Note que: -3 e 3 não são soluções da inequação, pelo que, ao apresentar o seu conjunto solução, os extremos do intervalo devem ser *abertos*, $] -3, 3[$, excluindo assim estes valores.

(f) $-|x| - 7 < -6 \quad \Leftrightarrow -|x| < -6 + 7$
 $\Leftrightarrow -|x| < 1$
 $\Leftrightarrow |x| > -1$ *condição universal*

A condição $|x| > -1$ é universal, pois o módulo de um número real é sempre maior que -1 . Na verdade, o módulo de um número real é sempre maior ou igual a zero. Assim, o conjunto solução da inequação é o próprio universo em que esta está definida. Neste caso, é \mathbb{R} .

$C.S. = \mathbb{R}$

(g) $-3|x| + 12 < -6 \Leftrightarrow -3|x| < -6 - 12$
 $\Leftrightarrow -3|x| < -18$
 $\Leftrightarrow |x| > \frac{18}{3}$ *multiplicando ambos os membros da inequação por $-\frac{1}{3}$*
 $\Leftrightarrow |x| > 6$
 $\Leftrightarrow x < -6 \vee x > 6$



C.S. = $] -\infty, -6[\cup]6, +\infty[$

(h) $|x| > x \Leftrightarrow x < 0$

Justificação:

- Pela definição de módulo, se $x < 0$, então $|x| = -x$. Ou seja: sempre que x é um número negativo, o seu módulo é dado pelo seu simétrico. Portanto, o módulo de um número negativo é um número positivo e, por isso, é maior que o próprio número. Ou seja, sempre que x é negativo verifica-se que: $|x| > x$. Então todos os números negativos fazem parte do conjunto solução da inequação.
- Pela definição de módulo, se $x \geq 0$, então $|x| = x$. E, portanto, quando $x \geq 0$ **não** é verdade que $|x| > x$.

C.S. = $] -\infty, 0[$

ou

C.S. = \mathbb{R}^-

Conclusão:

A condição só é verdadeira para valores de x negativos.

ATIVIDADE 1.7

Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das equações. Apresente os respectivos conjuntos-solução.

(a) $|3x - 1| = 5$

(c) $2 \left| \frac{1}{2}x - 3 \right| = -10$

(b) $|x^2 + 3| = 0$

(a) $|3x - 1| = 5 \quad \Leftrightarrow 3x - 1 = 5 \quad \vee \quad 3x - 1 = -5$

$\Leftrightarrow 3x = 5 + 1 \quad \vee \quad 3x = -5 + 1$

$\Leftrightarrow 3x = 6 \quad \vee \quad 3x = -4$

$\Leftrightarrow x = \frac{6}{3} \quad \vee \quad x = \frac{-4}{3}$

$\Leftrightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = -\frac{4}{3}$

$C.S. = \left\{ -\frac{4}{3}, 2 \right\}$

(b) $|x^2 + 3| = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -3$ *condição impossível*

A condição é impossível, pois não existe um número real cujo quadrado seja -3 . Na verdade, não existem números reais com quadrados negativos.

Assim, o conjunto solução da equação é vazio.

$C.S. = \{ \}$

(c) $2 \left| \frac{1}{2}x - 3 \right| = -10 \quad \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2}x - 3 \right| = \frac{-10}{2}$

$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2}x - 3 \right| = -5$ *condição impossível*

A condição é impossível, pois não existe um número real cujo módulo seja -5 . Na verdade, não existe nenhum número real de módulo negativo. Assim, o conjunto solução da equação é vazio.

$C.S. = \{ \}$

ATIVIDADE 1.8

Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

(a) $|x - 1| \leq 4$

(b) $|x - 1| > 4$

Apresente os respectivos conjuntos-solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

(a) $|x - 1| \leq 4 \quad \Leftrightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4$

$\Leftrightarrow -4 + 1 \leq x \leq 4 + 1$

$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$

$C.S. = [-3; 5]$

(b) $|x - 1| > 4 \quad \Leftrightarrow x - 1 > 4 \quad \vee \quad x - 1 < -4$

$\Leftrightarrow x > 4 + 1 \quad \vee \quad x < -4 + 1$

$\Leftrightarrow x > 5 \quad \vee \quad x < -3$

$C.S. =] -\infty; -3[\cup]5; +\infty[$

ATIVIDADE 1.9

Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das inequações.

(a) $|2x - 1| < 3$

(d) $|-3x + 3| > -8$

(b) $\left| -2x + \frac{1}{2} \right| > 5$

(e) $\frac{4 - |2 - x|}{2} \geq 2$

(c) $|-2x + 3| < -5$

(f) $-3 - |6 - 2x| \leq -10$

(a) $|2x - 1| < 3$



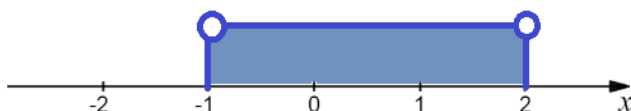
$$\Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3$$

$$\Leftrightarrow -3 + 1 < 2x < 3 + 1$$

$$\Leftrightarrow -2 < 2x < 4$$

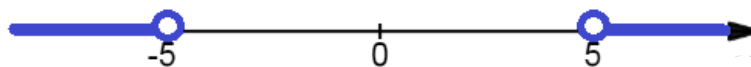
$$\Leftrightarrow \frac{-2}{2} < x < \frac{4}{2}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 2$$



C.S. = $]-1, 2[$

(b) $\left| -2x + \frac{1}{2} \right| > 5$



$$\Leftrightarrow -2x + \frac{1}{2} < -5 \quad \vee \quad -2x + \frac{1}{2} > 5$$

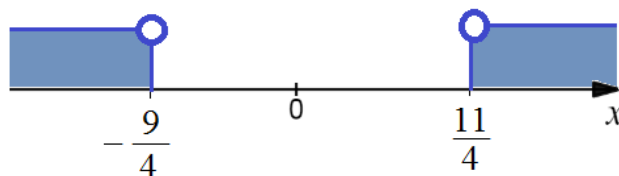
$$\Leftrightarrow -2x < -5 - \frac{1}{2} \quad \vee \quad -2x > 5 - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2x < -\frac{10}{2} - \frac{1}{2} \quad \vee \quad -2x > \frac{10}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{11}{2 \times 2} \quad \vee \quad 2x < -\frac{9}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{11}{4} \quad \vee \quad x < -\frac{9}{4}$$

fazendo o cálculo e, depois, multiplicando ambos os membros da inequação por $-\frac{1}{2}$



C.S. = $]-\infty; -\frac{9}{4}[\cup]\frac{11}{4}; +\infty[$

(c) $|-2x + 3| < -5$

$\Leftrightarrow x \in \{ \}$

Condição impossível, pois o módulo de um número real nunca assume valores inferiores a -5 . De facto, o módulo de um número real nunca assume valores negativos.

C.S. = $\{ \}$

$$(d) |-3x + 3| > -8$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Condição universal, pois o módulo de um número real assume sempre valores maiores que -8 . De facto, o módulo de um número real assume sempre valores maiores ou iguais a zero.

$$C.S. = \mathbb{R}$$

$$(e) \frac{4 - |2 - x|}{2} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 - |2 - x|}{2} \geq \frac{4}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 - |2 - x| \geq 4$$

$$\Leftrightarrow -|2 - x| \geq 4 - 4$$

$$\Leftrightarrow -|2 - x| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |2 - x| \leq 0$$

multiplicando ambos os membros da inequação por -1

O módulo do número real $2 - x$ não pode assumir valores negativos, mas pode assumir o valor zero. Por isso, a condição $|2 - x| \leq 0$ é equivalente a $2 - x = 0$. Assim, a sequência de equivalências pode ser completada do seguinte modo:

$$\Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$C.S. = \{2\}$$

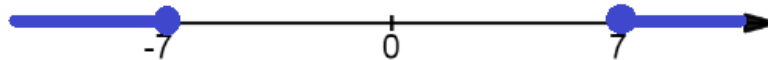
$$(f) -3 - |6 - 2x| \leq -10$$

$$\Leftrightarrow -|6 - 2x| \leq -10 + 3$$

$$\Leftrightarrow -|6 - 2x| \leq -7$$

$$\Leftrightarrow |6 - 2x| \geq 7$$

multiplicando ambos os membros da inequação por -1



$$\Leftrightarrow 6 - 2x \leq -7 \quad \vee \quad 6 - 2x \geq 7$$

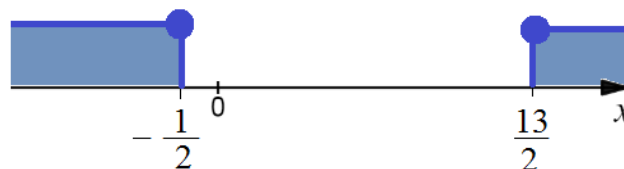
$$\Leftrightarrow -2x \leq -7 - 6 \quad \vee \quad -2x \geq 7 - 6$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq -13 \quad \vee \quad -2x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 13 \quad \vee \quad 2x \leq -1$$


$$\Leftrightarrow x \geq \frac{13}{2} \quad \vee \quad x \leq -\frac{1}{2}$$

multiplicando ambos os membros da inequação por -1



$$C.S. = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{13}{2}; +\infty \right[$$

Anexo C: Ficha de Trabalho N.º 2

 <p>Colégio Militar ANO LETIVO 2019/2020</p>	<h3>COLÉGIO MILITAR</h3> <h4>10.º ANO – Matemática A</h4> <p>Parte 2: Significado geométrico de $a - b$; Equações $x - a = x - b$ e inequações $x - a > x - b$</p>
---	---

Significado geométrico de $|a - b|$

De seguida, realizará uma pequena exploração. Conclusões permitir-lhe-ão resolver muito facilmente equações do tipo $|x - b| = |x - c|$. ⇒ **Investigue:**

ATIVIDADE 2.1

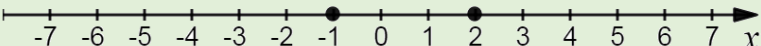
2.1.1. Indique o valor das expressões numéricas:

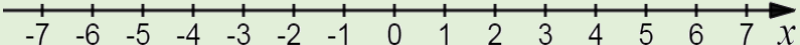
(a) $|5 + 1| = \boxed{}$ (b) $|4 - 7| = \boxed{}$ (c) $|-1 - 2| = \boxed{}$

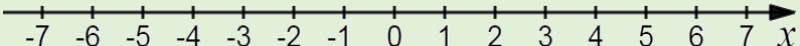
2.1.2. Escreva cada uma das expressões apresentadas “entre módulos” nas alíneas anteriores na forma $a - b$. Depois, assinale na reta numérica os pontos de abcissa a e b , respetivamente, tal como no exemplo apresentado.

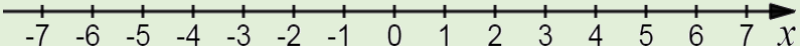
Exemplo: $|2 + 1| = |2 - (-1)|$

$\begin{array}{cc} \underbrace{} & \underbrace{} \\ a & b \end{array}$



(a) $|5 + 1| = \boxed{}$ 

(b) $|4 - 7| = \boxed{}$ 

(c) $|-1 - 2| = \boxed{}$ 

2.1.3. Para cada uma das alíneas anteriores, compare a distância entre os pontos da reta numérica que representam os números a e b e o valor de $|a - b|$. O que conclui?

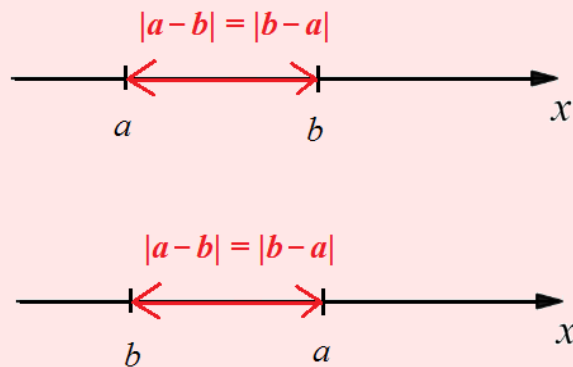
2.1.4. Com base na conclusão que apresentou em 2.1.3., escreva como faria a leitura da expressão: $|x - 2| = |x - 4|$

2.1.5. Que valores de x tornam verdadeira a igualdade: $|x - 2| = |x - 4|$?

Indique-os e justifique a sua resposta.

SISTEMATIZAÇÃO

A distância entre os pontos da reta numérica que representam os números reais a e b é igual a $|b - a|$ e a $|a - b|$.



Equações $|x - a| = |x - b|$

Vejam como se faz a leitura de uma expressão envolvendo módulos com base em duas interpretações geométricas diferentes, a partir de um exemplo.

Expressão	Leitura da expressão com base no significado geométrico de:
$ x - 3 = 1$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Módulo de um número real, x
	<i>A distância do $x - 3$ à origem é 1</i>
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Módulo da diferença de dois números reais, $a - b$
	<i>A distância do x ao 3 é 1</i>

O quadro acima apresenta duas formas de dizer **o mesmo**, com base em duas **interpretações geométricas** diferentes. Tal como quando digo “a sobrinha do meu pai” ou “a filha da minha tia”, estou em ambos os casos a referir-me à “minha prima”, também ambas as afirmações do quadro vão levar-nos a concluir que $x = 2$ ou $x = 4$.

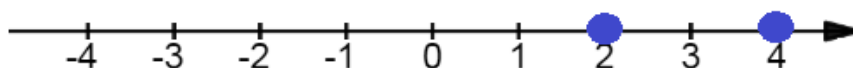


Figura 1

Até ao momento, temos dado especial relevo ao **significado geométrico de $|x|$** , e foi tudo o que bastou para resolvermos equações e inequações com módulos. No entanto, para resolver equações do tipo $|x - a| = |x - b|$ é mais conveniente recorrer ao **significado geométrico de $|a - b|$** .

⇒ Analisemos o ponto 2.1.5. da **Atividade 2.1.** (apresentada atrás) e uma proposta de resolução.

EXEMPLO 1

Resolva, em \mathbb{R} , a equação: $|x - 2| = |x - 4|$ [adaptado de **Atividade 2.1**]

Podemos interpretar geometricamente a expressão $|x - 2|$ como *a distância do x ao 2* e a expressão $|x - 4|$ como *a distância do x ao 4*.

Deste modo, a condição $|x - 2| = |x - 4|$ pode ler-se: *a distância do x ao 2 é igual à a distância do x ao 4*. Ou ainda: *o x está à mesma distância do 2 e do 4*.

Rapidamente concluímos que existe **unicamente um ponto** na reta numérica à mesma distância do 2 e do 4. Esse ponto é o **ponto médio** do segmento de reta que une o 2 ao 4.

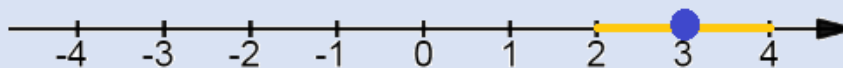


Figura 2

Portanto, a solução da inequação é dada por: $x = \frac{2+4}{2} = 3$

O conjunto solução da inequação é: $C.S. = \{3\}$

Notas importantes:

1. Este raciocínio geométrico aplica-se ao módulo de uma diferença: $|a - b|$.

Assim, se formos confrontados com expressões apresentadas na forma $|a + b|$, deveremos escrevê-las na forma $|a - b|$ para poder aplicar este raciocínio.

Por exemplo: $|x - 1| = |x + 9| \Leftrightarrow |x - 1| = |x - (-9)|$

Lê-se: o x está à mesma distância do 1 e do -9 . Então, conclui-se que $x = -4$

2. As expressões $|x - 2|$ e $|2 - x|$ **são equivalentes**, assim como as expressões $|x - 4|$ e $|4 - x|$, embora a ordem das parcelas dentro dos símbolos de valor absoluto surja trocada. Isto é verdade pois $|a - b| = |b - a|$ (ver **Sistematização**, pág. 2). Na prática, resolver a equação $|x - 2| = |x - 4|$ é equivalente a resolver a equação $|2 - x| = |x - 4|$ ou $|2 - x| = |4 - x|$ ou ainda $|x - 2| = |4 - x|$. Por isso, pode trocar a ordem das parcelas sempre que preferir.

⇒ **Realize** as duas atividades que se seguem, convocando o conhecimento que tem do significado geométrico de $|a - b|$ para resolver as equações e inequações apresentadas. Se necessário, volte a analisar o **Exemplo 1** (acima).

ATIVIDADE 2.2

Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das equações, apresentando os respectivos conjuntos-solução.

(a) $|x - 1| = |x - 7|$

(c) $|x + 5| = |x - 1|$

Sugestão: releia a **Nota importante 1** do Exemplo 1.

(b) $|x - 1| = |x - 2|$

(d) $|4 - x| = |x|$

Sugestão: releia as **Notas importante 1 e 2** do Exemplo 1.

Como podemos escrever $|x|$ como o módulo de uma diferença, $|x - a|$?

Inequações $|x - a| > |x - b|$ e $|x - a| < |x - b|$

ATIVIDADE 2.3

Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das inequações, representando os respectivos conjuntos-solução na reta numérica e também na forma de intervalo de números reais.

(a) $|x - 1| \leq |x + 3|$

Sugestão: Escreva as expressões apresentadas em ambos os membros na forma $|x - a|$ (**Notas importante 1**). Como faria a leitura da condição obtida tendo em conta o seu significado geométrico? Assinale, na reta numérica, o ponto que está à mesma distância do -3 e do 1 . O número que esse ponto representa é solução da inequação? Porquê? E os números representados à direita desse ponto? E os números representados à esquerda desse ponto?

(b) $|x - 1| \geq |-3 + x|$

Sugestão: Escreva as expressões apresentadas em ambos os membros na forma $|x - a|$ (**Notas importante 2**). Como interpreta geometricamente a condição? Assinale o ponto da reta numérica que está à mesma distância do 3 e do 1 . O número que esse ponto representa é solução da inequação? Porquê? E os números representados à direita desse ponto? E os números representados à esquerda desse ponto?

Para terminar, proponho-lhe que resolva um problema real. Poderá recorrer à calculadora para realizar cálculos numéricos ou para explorar as suas potencialidades gráficas. **Para aprender a introduzir, na sua calculadora, a expressão de uma função envolvendo módulos, consulte as instruções presentes no final deste documento.** Qualquer que seja a estratégia que use, apresente todas as justificações que considere necessárias.

Para ajudá-lo(la), são apresentadas algumas **questões orientadoras** ao longo do problema; não precisa de responder diretamente a estas questões.

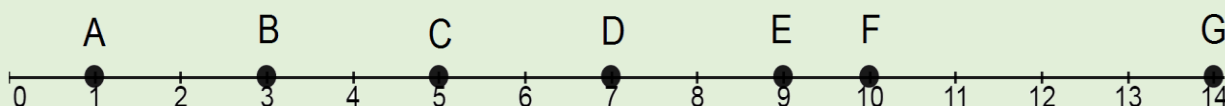
⇒ **Resolva:**

ATIVIDADE 2.4

Pretende-se construir uma paragem de autocarro na rua de uma povoação.

Para isso, foi aprovado o seguinte critério: a localização da paragem de autocarro deveria ser escolhida de modo que o total das distâncias de cada casa à paragem de autocarro fosse o mínimo possível.

Na figura abaixo está representada, em esquema, a localização das casas, por pontos, nessa rua. **Cada unidade de distância corresponde a 100 metros**



(a) Por palpite, um morador diz que a paragem deve ficar no ponto de abcissa 8, mas outro morador propõe o ponto de abcissa 9. Qual das alternativas é melhor? Justifique.

(b) Considere que a paragem de autocarro ficará localizada num ponto genérico de abcissa x . Entre que valores poderá variar x ?

Que valores pode tomar x ? Tenha presente o contexto do problema: a paragem deve ser construída nesta rua.

(c) Escreva uma expressão que lhe permita determinar a distância da **casa A** à paragem de autocarro localizada no ponto de abcissa x .

Repare que a casa A está localizada no ponto de abcissa 1 e a casa B, por exemplo, está localizada no ponto de abcissa 3. Assim, se quiséssemos representar a distância medida desde a casa A até à casa B, escreveríamos a expressão $|1 - 3|$ ou a expressão $|3 - 1|$.

(d) Escreva uma expressão que lhe permita determinar **o total das distâncias de cada casa à paragem** de autocarro localizada no ponto de abcissa x . Explique como chegou a essa expressão.

Entenda “o total” como “a soma” de todas as distâncias medidas desde cada casa até à paragem de autocarro localizada no ponto x .

(e) Recorde o critério de localização da paragem: **o total das distâncias de cada casa à paragem deve ser o mínimo possível**. Encontre a melhor solução para o problema da localização da paragem de autocarro, fundamentando a sua resposta.

Associe à expressão que determinou na alínea (d) uma função e observe a sua representação gráfica na calculadora. Escolha uma janela de visualização adequada. O que está representado no eixo dos xx ? E no eixo dos yy ? A função representada tem extremos? Qual o seu significado no contexto do problema?

Notas finais:


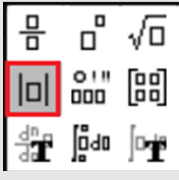
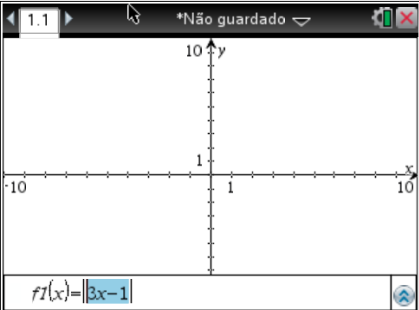

Uma proposta de resolução das atividades desta tarefa ser-lhe-á enviada. Certifique-se de que a analisará e de que compreende bem como resolver as equações e inequações das **Atividades 2.2 e 2.3** (deste documento), antes de avançar para a tarefa seguinte.

A última sessão será dedicada ao estudo gráfico e analítico de funções envolvendo módulos.




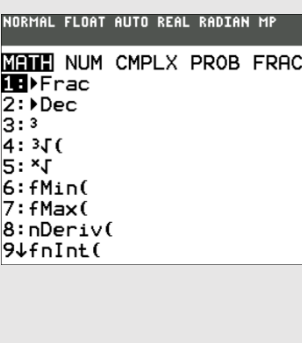

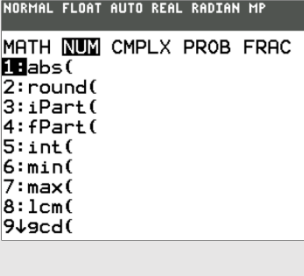
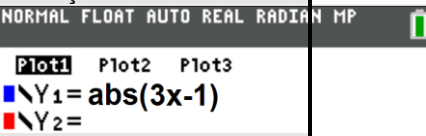
Introduzir a expressão de uma função envolvendo módulos na calculadora

Veja as instruções para o modelo da sua calculadora gráfica (nSpire/84/84plus).

Ti-nSpire

<p>1)</p> 	<p>2)</p> 	<p>3) Escreva a expressão analítica da função:</p> 	<p>4)</p> 
---	---	--	---

Ti-84

<p>1)</p>  <p>para abrir a janela:</p> 	<p>2)</p>  <p>para abrir o menu:</p> 	<p>3)</p>  <p>para aceder ao menu NUM:</p> 	<p>4) Selecione 1:abs(e prima ENTER</p> <p>5) Introduza a expressão da função:</p>  <p>Deverá escrever entre parênteses a expressão que pretende que fique entre os símbolos de módulo.</p> <p>Se, por exemplo, a expressão fosse $4 x - 2 + 1$, deveria escrever: 4*abs(x-2)+1</p>
---	---	---	--

Ti-84 plus

Igual à **Ti84**, mas, no ponto 5, não precisará de abrir ou fechar parênteses. Verá isto:

	
---	--

(*) Se a sua calculadora é uma **Ti-83**, aplique os procedimentos referentes à **Ti-84**

Anexo D: Ficha de Trabalho N.º 2 – Proposta de Resolução

ATIVIDADE 2.1

2.1.1. Indique o valor das expressões numéricas:

(a) $|5 + 1| =$

$|6| = 6$

(b) $|4 - 7| =$

$|-3| = 3$

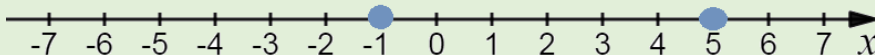
(c) $|-1 - 2| =$

$|-3| = 3$

2.1.2. Escreva cada uma das expressões apresentadas “entre módulos” nas alíneas anteriores na forma $a - b$. Depois, assinale na reta numérica os pontos de abcissa a e b , respetivamente, tal como no exemplo apresentado.

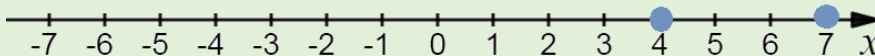
(a) $|5 + 1| =$

$|5 - (-1)|$



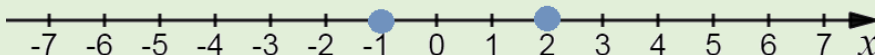
(b) $|4 - 7| =$

$|4 - 7|$



(c) $|-1 - 2| =$

$|(-1) - 2|$



2.1.3. Para cada uma das alíneas anteriores, compare a distância entre os pontos da reta numérica que representam os números a e b e o valor de $|a - b|$. O que conclui?

A distância de a a b é igual a $|a - b|$. Por exemplo, para a alínea (c):

$$|(-1) - 2| = 3 \text{ e a distância de } -1 \text{ a } 2 \text{ é } 3.$$

2.1.4. Com base na conclusão que apresentou em 3.2.3., escreva como faria a leitura da expressão: $|x - 2| = |x - 4|$

A distância de x a 2 é igual à distância de x a 4.

2.1.5. Que valores de x tornam verdadeira a igualdade: $|x - 2| = |x - 4|$?

Indique-os e explique como chegou ao resultado.

A distância de x a 2 é igual à distância de x a 4 (Figura 1).

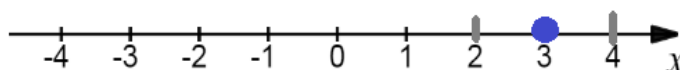


Figura 1

O único ponto da reta numérica que se encontra a igual distância de 2 e de 4 é o ponto médio do segmento de reta que une o 2 ao 4. Ou seja, é o ponto:

$$x = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$x_{\text{ponto médio}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Conclusão: $|x - 2| = |x - 4| \Leftrightarrow x = 3$

O único valor de x que torna a igualdade verdadeira é 3.

ATIVIDADE 2.2

Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das equações, apresentando os respectivos conjuntos-solução.

(a) $|x - 1| = |x - 7|$

(c) $|x + 5| = |x - 1|$

(b) $|x - 1| = |x - 2|$

(d) $|4 - x| = |x|$

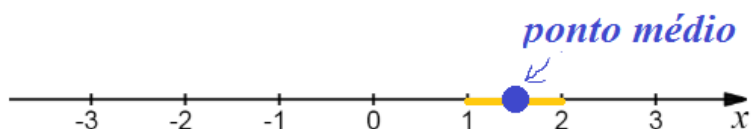
(a) $|x - 1| = |x - 7|$ A distância do x ao 1 é **igual** à distância do x ao 7, **unicamente** quando $x = \frac{1+7}{2} = 4$



$C.S. = \{4\}$

(b) $|x - 1| = |x - 2|$

A distância do x ao 1 é **igual** à distância do x ao 2, **unicamente** quando $x = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$



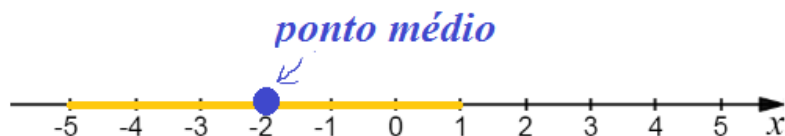
$C.S. = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

(c) $|x + 5| = |x - 1|$

$\Leftrightarrow |x - (-5)| = |x - 1|$

A distância do x ao -5 é **igual** à distância do x ao 1, **unicamente** quando

$x = \frac{-5+1}{2} = -2$



$C.S. = \{-2\}$

(d) $|4 - x| = |x|$

$\Leftrightarrow |4 - x| = |x - 0|$

$\Leftrightarrow |x - 4| = |x - 0|$

$|4 - x| = |x - 4|$
pois $|a - b| = |b - a|$

A distância do x ao 4 é **igual** à distância do x ao 0, **unicamente** quando $x = \frac{4+0}{2} = 2$



$C.S. = \{2\}$

ATIVIDADE 2.3

Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das inequações., representando os respectivos conjuntos-solução na reta numérica e também na forma de intervalo de números reais.

(a) $|x - 1| \leq |x + 3|$

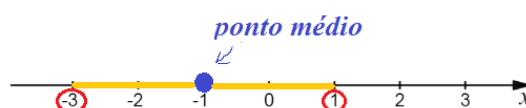
(b) $|x - 1| \geq |-3 + x|$

(a) $|x - 1| \leq |x + 3| \Leftrightarrow |x - 1| \leq |x - (-3)|$

Obs.: Estamos interessados em determinar os números x cuja distância a 1 é **menor ou igual** que a distância a -3 . Começemos por determinar quando é que esta distância é igual:

▪ A distância do x ao 1 é **igual** à distância do x ao -3 unicamente quando:

$$x = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$$



Obs.: Todos os pontos à direita do -1 estão mais próximos do 1 que do -3



Conclusão: A distância do x ao 1 é **menor ou igual** que a distância do x ao -3 unicamente quando $x \geq -1$

$$C.S. = [-1; +\infty[$$

(b) $|x - 1| \geq |-3 + x| \Leftrightarrow |x - 1| \geq |x - 3|$

Obs.: Estamos interessados em determinar os números x cuja distância a 1 é **maior ou igual** que a distância a 3. Começemos por determinar quando é que esta distância é igual:

▪ A distância do x ao 1 é **igual** à distância do x ao 3 unicamente quando:

$$x = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

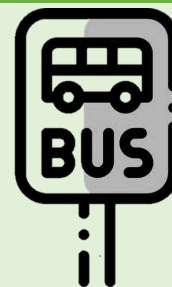
Obs.: Todos os pontos à direita do 2 estão mais afastados do 1 do que do 3.

Conclusão: A distância do x ao 1 é **maior ou igual** que a distância do x ao 3 apenas quando $x \geq 2$

$$C.S. = [2; +\infty[$$

ATIVIDADE 2.4

Pretende-se construir uma paragem de autocarro na rua de uma povoação. Para isso, foi aprovado o seguinte critério: a localização da paragem de autocarro deveria ser tal que o total das distâncias de cada casa à paragem de autocarro fosse o mínimo possível.



Na figura abaixo está representada, em esquema, a localização das casas, por pontos, nessa rua. **Cada unidade de distância corresponde a 100 metros.**



(a) Por palpite, um morador diz que a paragem deve ficar no ponto de abcissa 8, mas outro morador propõe o ponto de abcissa 9. Qual das alternativas é melhor? Justifique.

Pode determinar-se o total das distâncias de cada casa à paragem (para cada alternativa) contando os segmentos unitários entre cada casa e a paragem (Tabela 1).

Tabela 1:

Alternativa	Total das distâncias da casa à paragem (em centenas de metros)
Ponto de abcissa 8	$7 + 5 + 3 + 1 + 1 + 2 + 6 = 25$
Ponto de abcissa 9	$8 + 6 + 4 + 2 + 0 + 1 + 5 = 26$

Conclusão: A primeira alternativa (ponto de abcissa 8) é melhor, pois corresponde a um total das distâncias menor: 25 centenas de metros ou 2500 metros.

(b) Considere que a paragem de autocarro ficará localizada num ponto x . Entre que valores poderá variar x ?

x pode variar entre 0 e 14. Ou seja, $0 \leq x \leq 14$.

Ou ainda, $x \in [0, 14]$

(c) Escreva uma expressão que lhe permita determinar a distância da **casa A** à paragem de autocarro localizada no ponto x .

A distância da casa A e a paragem de autocarro localizada no ponto x é dada pela expressão $|x - 1|$ ou pela expressão $|1 - x|$.

(d) Escreva uma expressão que lhe permita determinar o total das distâncias de cada casa à paragem de autocarro localizada no ponto de abcissa x . Explique como chegou a essa expressão.

A distância da casa A à paragem de autocarro localizada em x é dada por: $|x - 1|$

A distância da casa B à paragem de autocarro localizada em x é dada por: $|x - 3|$

E, assim, por diante...

Tabela 2

Casa	Localização da Casa	Distância da Casa à Paragem
A	$x = 1$	$ x - 1 $
B	$x = 3$	$ x - 3 $
C	$x = 5$	$ x - 5 $
D	$x = 7$	$ x - 7 $
E	$x = 9$	$ x - 9 $
F	$x = 10$	$ x - 10 $
G	$x = 14$	$ x - 14 $

O total das distâncias de cada casa à paragem é dado pela soma dos termos da última coluna da tabela:

$$|x - 1| + |x - 3| + |x - 5| + |x - 7| + |x - 9| + |x - 10| + |x - 14|$$

(e) Recorde o critério de localização da paragem: **o total das distâncias de cada casa à paragem deve ser o mínimo possível**. Determine a melhor solução para o problema da localização da paragem de autocarro, fundamentando a sua resposta.

Podemos definir analiticamente uma função $d(x)$ através da expressão determinada na alínea anterior:

$$d(x) = |x - 1| + |x - 3| + |x - 5| + |x - 7| + |x - 9| + |x - 10| + |x - 14|$$

Esta função, a cada valor de x , faz corresponder o total das distâncias, d . A função só está definida para valores de $x \in [0, 14]$, pois não nos interessa construir a paragem fora da rua.

Podemos representar a função graficamente, escolhendo uma janela de visualização adequada (Figura 2).

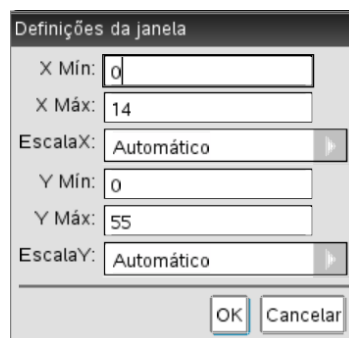


Figura 1

Observando a representação gráfica da função (Figura 2), verificamos que esta apresenta um mínimo. É possível determinar as coordenadas desse ponto do gráfico da função, recorrendo às potencialidades da calculadora.

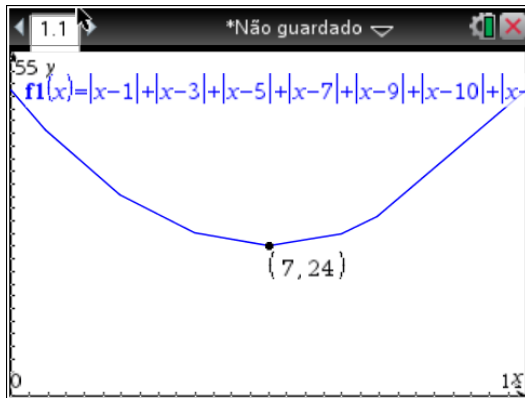



Figura 2

A função das distâncias, d , atinge um valor mínimo (24 centenas de metros) quando $x = 7$.

Conclusão: A paragem deve ser construída no ponto de abscissa 7.

 <p>Colégio Militar ANO LETIVO 2019/2020</p>	<h2>COLÉGIO MILITAR</h2>
	<h3>10.º ANO – Matemática A</h3>
	<h4>Parte 3: Estudo gráfico e analítico de funções definidas por expressões com módulos</h4>

Função módulo e sua representação gráfica

NOTAS

Definição analítica da função módulo

À função $f(x) = |x|$ de domínio \mathbb{R} chama-se **função módulo**. A função módulo pode também ser definida analiticamente (por ramos) pela expressão:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Representação gráfica da função módulo

Como já vimos anteriormente, a função módulo é definida por duas expressões analíticas distintas em dois intervalos do seu domínio:

- Para números reais x negativos ($x < 0$), a expressão analítica da função é:

$$f(x) = -x$$

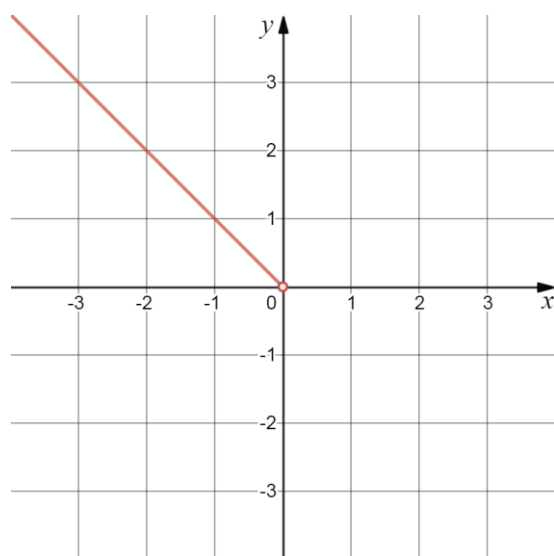


Figura 1

- Para números reais x não negativos ($x \geq 0$), a expressão analítica da função é:

$$f(x) = x$$

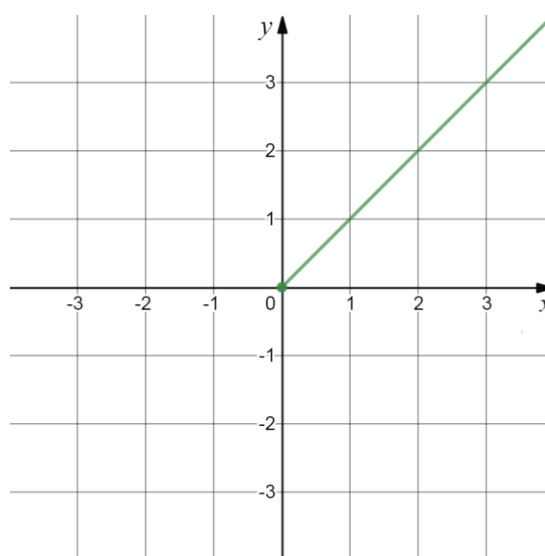


Figura 2

Quando sobrepomos as Figuras 1 e 2, obtemos a representação gráfica da função módulo em todo o seu domínio, \mathbb{R} :

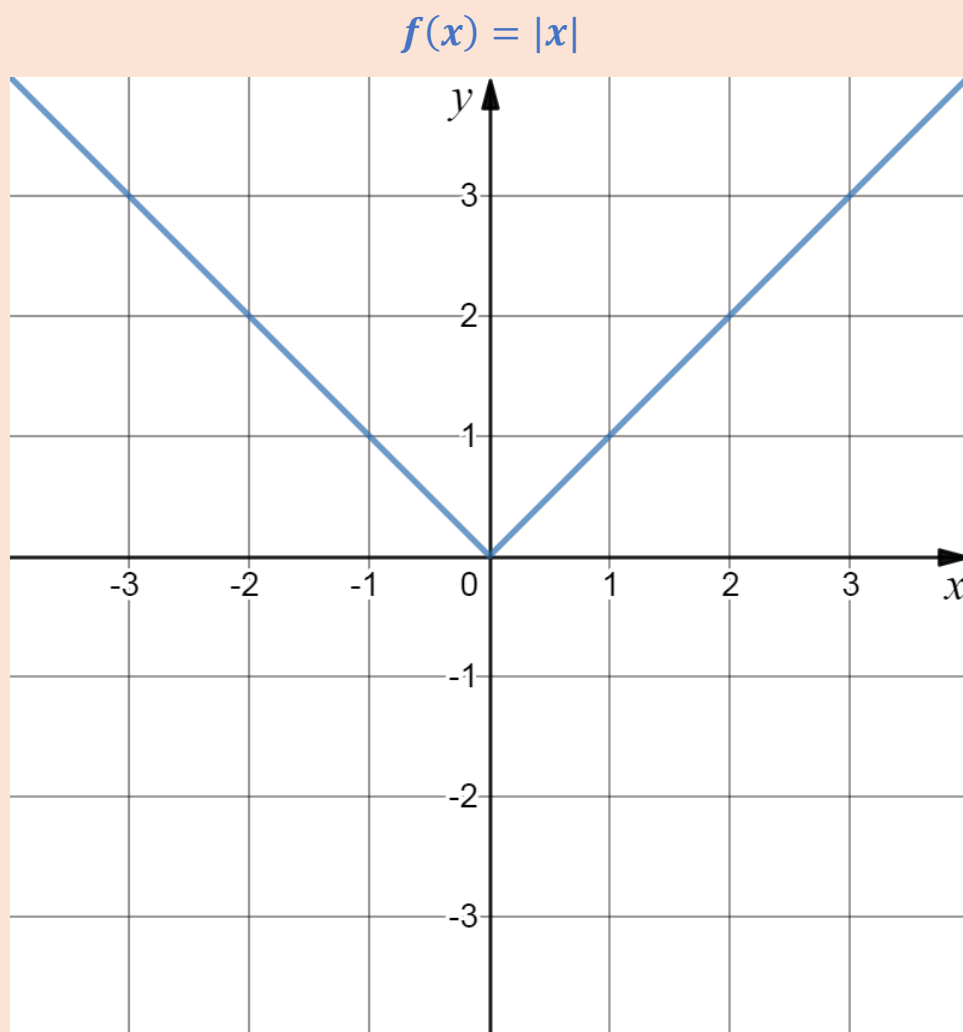


Figura 3 – Representação gráfica da função módulo

Por observação da Figura 3, podemos concluir que o gráfico da função módulo tem a **concavidade voltada para cima** e tem um **vértice**: o ponto de coordenadas $(0,0)$. A função tem um **mínimo absoluto**, $f(0) = 0$.

Representação gráfica de funções $f(x) = a|x - h| + k$

⇒ De seguida **recorde** algumas das transformações geométricas do gráfico de uma função que estudou anteriormente.

REVISÕES

Sejam f e g duas funções reais de variável real.

Transformações do gráfico de uma função

Se a expressão analítica da função g é dada por:

$$g(x) = af(x - h) + k$$

então o gráfico de g obtém-se do gráfico de f por pelas seguintes transformações (pela ordem apresentada):

- **Translação horizontal** de vetor $(h, 0)$
- Contração vertical, se $|a| < 1$, ou dilatação vertical, se $|a| > 1$
- **Reflexão de eixo Ox** , se a for negativo
- **Translação vertical** de vetor $(0, k)$

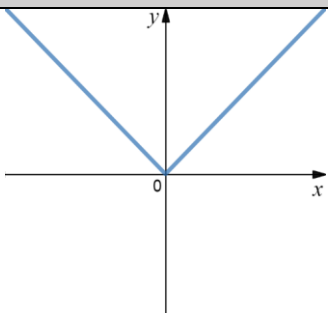
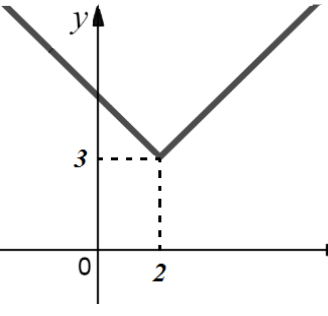
⇒ **Realize** a atividade seguidamente proposta, mobilizando os seus conhecimentos relativos às transformações do gráfico de uma função e aplicando-os para extrair conclusões relativamente às representações gráficas de funções do tipo $f(x) = a|x - h| + k$. O gráfico destas funções pode ser obtido a partir do gráfico da **função módulo**, por aplicação das transformações sumariadas no quadro de **Revisões** (acima).

Sugestão: Recorra à calculadora gráfica, para ver a representação gráfica de cada função apresentada.

ATIVIDADE 3.1

(a) Complete o Quadro 1 com a informação respeitante às funções h , i e j .

Quadro 1

Função	Esboço gráfico	Sentido da concavidade	Vértice	Extremo	Contradomínio
$f(x) = x $		<i>Voltada para cima</i>	(0, 0)	Mínimo absoluto $f(0) = 0$	$[0, +\infty[$
$g(x) = x - 2 + 3$		<i>Voltada para cima</i>	(2, 3)	Mínimo absoluto $g(2) = 3$	$[3, +\infty[$
$h(x) = - x $					
$i(x) = - x + 1 $					
$j(x) = -2 x + 1 - 3$					

(b) Compare as expressões analíticas das funções apresentadas na alínea (a) com a informação com que preencheu o Quadro 1 e tire conclusões que lhe permitam completar a generalização:

GENERALIZAÇÃO

Gráfico de funções do tipo $f(x) = a|x - h| + k$

O vértice do gráfico de uma função definida por $f(x) = a|x - h| + k$ é o ponto de coordenadas . Se $a > 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para e a função tem um (indicar o tipo de extremo) absoluto. Se $a < 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para e a função tem um (indicar o tipo de extremo) absoluto.

Estudo de uma função do tipo $f(x) = a|x - h| + k$

⇒ Convoque os seus conhecimentos sobre o estudo geral de funções, bem como os conhecimentos que desenvolveu nas últimas sessões relativos à resolução de equações e inequações com módulos, para realizar a atividade seguidamente proposta. Baseie-se também nas conclusões que extraiu do trabalho que realizou na atividade anterior (**Atividade 3.1, Generalização**).

ATIVIDADE 3.2

3.2.1. Considere a função f definida em \mathbb{R} por:

$$f(x) = -|x + 1| + 3$$

(a) Faça um esboço do gráfico da função f .

Sugestão: No seu esboço, basta que assinala corretamente o sistema de eixos, as coordenadas do vértice do gráfico e o sentido da concavidade.

(b) Indique o contradomínio de f .

(c) Determine os zeros de f .

Recorde que: Determinar os zeros de uma função equivale a resolver $f(x) = 0$.

(d) Estude a função f quanto ao sinal.

Recorde que: Estudar o sinal da função equivale a determinar para que valores de x a função é positiva ($f(x) > 0$) e para que valores de x a função é negativa ($f(x) < 0$)

Sugestão: Também pode responder com base numa análise gráfica, assinalando os zeros de f no esboço gráfico da função e tirando conclusões por observação da sua representação gráfica. *Para que valores de x a linha do gráfico da função está acima do eixo Ox ? E para que valores está abaixo desse eixo?*

(e) Construa uma tabela de variação e indique os intervalos de monotonia de f .

Sugestão: Por observação do esboço gráfico de f , construa uma tabela de variação e, depois, indique para que intervalos de valores de x a função é crescente, decrescente e/ou constante.

(f) Indique o extremo da função e classifique-o.

Questão orientadora: Qual é o extremo da função? É um máximo ou mínimo (absoluto ou relativo)?

(g) Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das condições e apresente os respetivos conjuntos solução:

(g₁) $f(x) = 2$

(g₂) $f(x) > 5$

(g₃) $f(x) \leq -2$

3.2.2. Seja g a função definida em \mathbb{R} por $g(x) = |x - 3|$

Determine o conjunto solução da condição $g(x + 6) \geq g(x)$

NOTAS

Recordemos a definição analítica de módulo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Consideremos, agora, uma função real de variável real f e outra g .

Se a função g for definida analiticamente pela expressão $g(x) = |f(x)|$, então, pela definição de módulo acima apresentada, tem-se que:

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{1º ramo} \\ \text{2º ramo} \end{array}$$

Analisando cada ramo desta definição, podemos extrair conclusões no que respeita à representação gráfica da função g .

1º ramo: Quando $f(x) \geq 0$, $g(x) = f(x)$

Ou seja, quando os pontos do gráfico de f têm **ordenada positiva ou nula**, o gráfico de g é igual ao gráfico de f .

2º ramo: Quando $f(x) < 0$, $g(x) = -f(x)$

Ou seja, quando os pontos do gráfico de f têm **ordenada negativa**, o gráfico de g obtém-se do gráfico de f por uma **reflexão de eixo Ox** .

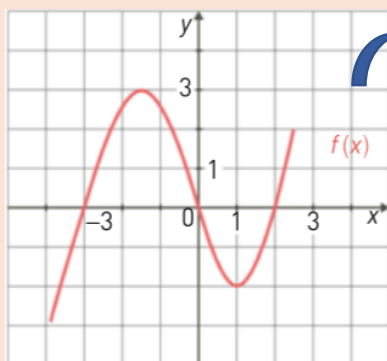


Figura 4 – Gráfico de $f(x)$

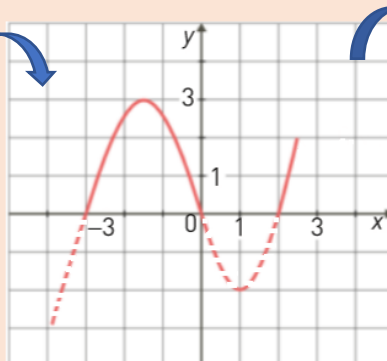


Figura 5 – A tracejado estão os pontos de ordenada negativa e que sofrem a reflexão

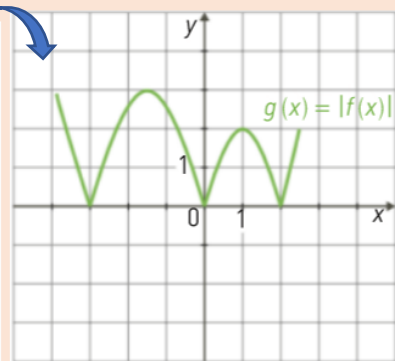


Figura 6 - Gráfico de $g(x) = |f(x)|$

Por exemplo, na Figura 4 podemos observar o gráfico de uma função f . Para obter o gráfico de $|f(x)|$, basta aplicar uma reflexão de eixo Ox a todos os pontos de ordenada negativa do gráfico de f . O gráfico de $|f(x)|$ está “acima” ou “sobre” o eixo Ox (Figura 6).

⇒ De seguida, realize a **Atividade 3.3**, mobilizando os seus conhecimentos para analisar graficamente as funções apresentadas. Vamos assumir que o domínio das funções é \mathbb{R} .

ATIVIDADE 3.3

Considere as funções f e g definidas \mathbb{R} .

A função f é representada graficamente por uma **reta** (Figura 7) e a função g por uma **parábola** (Figura 8).

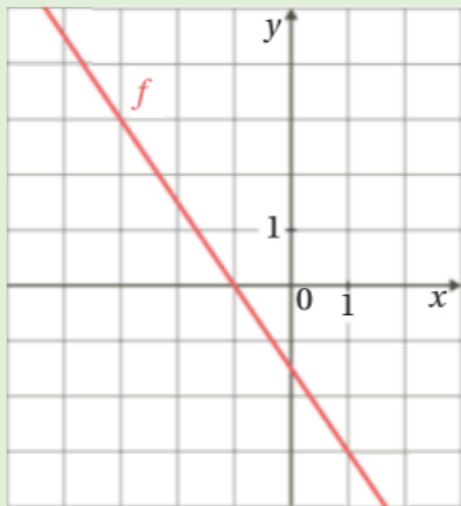


Figura 7

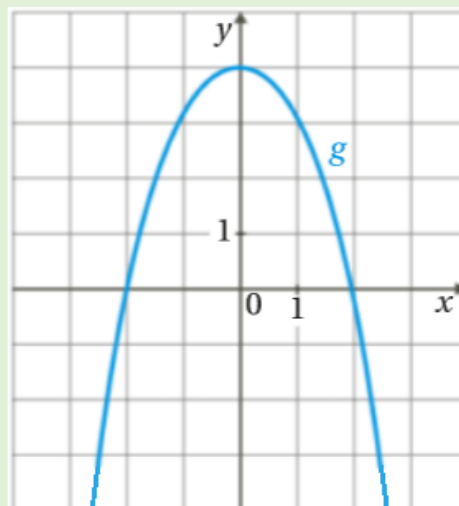


Figura 8

3.3.1. Faça um esboço do gráfico de cada uma das funções definidas por $|f(x)|$ e $|g(x)|$.

Sugestão: Recorde as **Notas** do quadro laranja da página anterior. Faça o seu esboço em papel quadriculado.

3.3.2. Indique o contradomínio das funções:

- (a) $|f(x)|$ (b) $|g(x)|$

3.3.3. Estude $|g(x)|$ quanto à monotonia.

Sugestão: Observe o esboço gráfico de $|g(x)|$. Depois, construa uma tabela de variação que o ajude a estudar os intervalos de monotonia da função. Indique para que intervalos de valores de x a função é crescente, decrescente e/ou constante.

3.3.4. Apresente o conjunto solução de cada uma das condições.

- (a) $|f(x)| = 0$ (c) $|f(x)| = 3$ (e) $|f(x)| > 3$
 (b) $|f(x)| > 0$ (d) $|f(x)| \leq 3$ (f) $|g(x)| = 0$

Sugestão: Observe o esboço gráfico de $|f(x)|$ e de $|g(x)|$ e extraia dele informação para responder às questões.

3.3.5. Indique que valores pode tomar a , para que a equação $|f(x)| = a$

- (a) não tenha soluções (b) tenha uma solução (c) tenha duas soluções

3.3.6. Indique o número de soluções da equação $|g(x)| = b$ quando:

- (a) $b = 0$ (c) $b = 4$
 (b) $0 < b < 4$ (d) $b > 4$

Definição analítica de uma função sem utilizar o símbolo de módulo

A expressão analítica de uma função definida por uma expressão do tipo $f(x) = a|x - h| + k$ pode ser escrita sem utilizar o símbolo de módulo.

Consideremos, por exemplo, a função: $f(x) = 2|x - 1| + 3$

Pela definição de módulo: $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

↓
resolver a inequação
↓

$$\Leftrightarrow |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Substituindo na expressão da função e, depois, desembaraçando de parênteses:

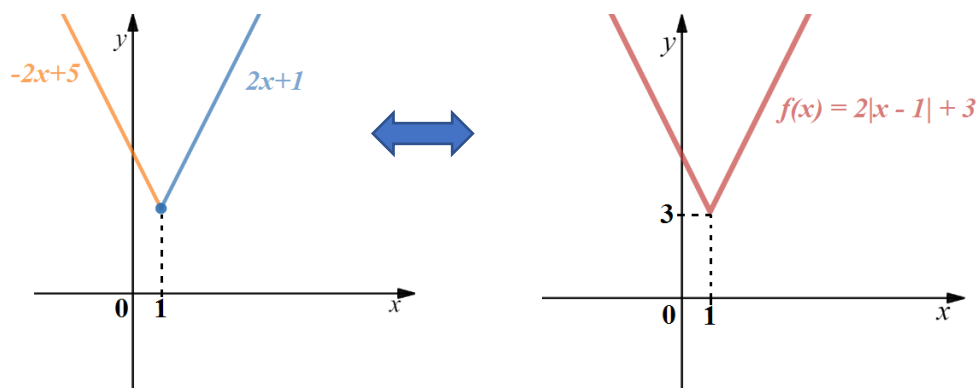
$$f(x) = 2|x - 1| + 3 \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2(x - 1) + 3 & \text{se } x \geq 1 \\ 2(-x + 1) + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 2 + 3 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x + 2 + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x + 5 & \text{se } x < 1 \end{cases} \blacksquare$$

Acabámos de definir a função f sem utilizar o símbolo de módulo.

Repare que a expressão obtida evidencia que o gráfico da função f é definido pela reunião de duas semirretas:



É possível definir analiticamente e sem utilizar o símbolo de módulo qualquer função do tipo $f(x) = |g(x)|$, em que $g(x)$ é uma função afim qualquer, de modo análogo.

⇒ Procure fazê-lo: realize a **Atividade 3.4**.

ATIVIDADE 3.4

Defina, sem utilizar o símbolo de módulo, cada uma das funções reais de domínio \mathbb{R} .

(a) $f(x) = -3|x - 1| + 2$

(b) $g(x) = 4|x + 2| - 1$

(c) $h(x) = |-2x + 6|$

Funções do tipo $f(x) = a|x - h| + k$ na modelação de fenómenos

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

A próxima atividade destina-se aos alunos que tenham curiosidade de explorar mais a aplicabilidade das funções definidas por módulos na modelação de fenómenos do mundo real.

A trajetória de uma bola que se desloca sobre uma pista de *minigolf* e bate numa tabela pode ser modelada, num certo domínio, por uma função do tipo:

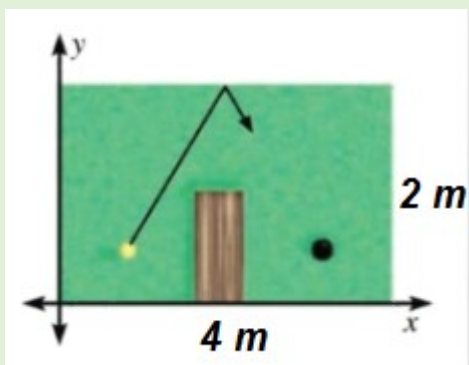
$$f(x) = a|x - h| + k$$

A pista tem 4 metros de comprimento e 2 metros de largura.

Um referencial ortonormado é colocado sobre a pista de *minigolf*. A bola está localizada no ponto de coordenadas $(1, 0.5)$ e o buraco está localizado no ponto de coordenadas $(3, 0.5)$. Imagine que, para colocar a bola no buraco, vai jogá-la à tabela, fazendo-a bater no ponto de coordenadas $(2, 2)$.

(a) Escreva uma função para a trajetória da bola e explique como determinou a expressão.

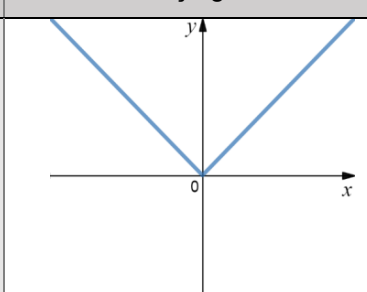
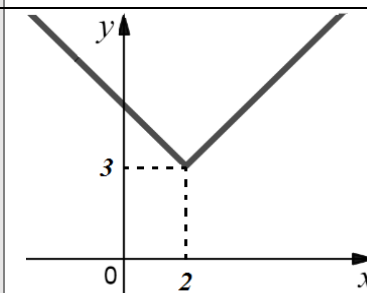
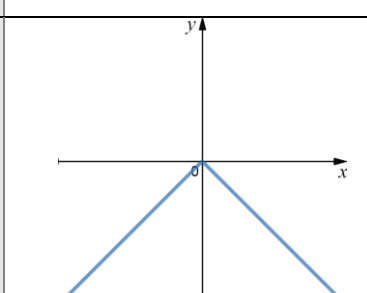
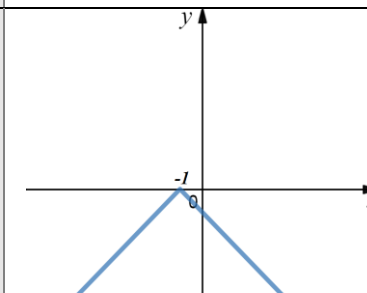
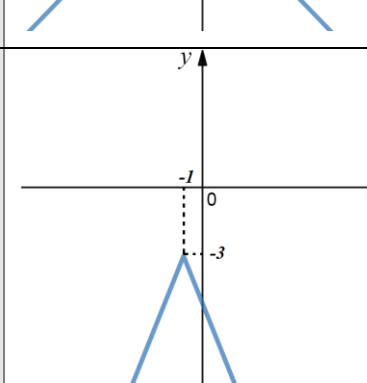
(b) Conseguirá colocar a bola no buraco realizando esta tacada? Justifique.



Anexo F: Ficha de Trabalho N.º 3 – Proposta de Resolução

ATIVIDADE 3.1

(a) Complete o quadro:

Função	Esboço gráfico	Sentido da concavidade	Vértice	Extremo	Contra-domínio
$f(x) = x $ $\Leftrightarrow f(x) = 1 x - 0 + 0$		<i>Voltada para cima</i>	(0, 0)	Mínimo absoluto: $f(0) = 0$	$[0, +\infty[$
$g(x) = x - 2 + 3$ $\Leftrightarrow f(x) = 1 x - 0 + 0$		<i>Voltada para cima</i>	(2, 3)	Mínimo absoluto: $g(2) = 3$	$[3, +\infty[$
$h(x) = - x $ $\Leftrightarrow h(x) = -1 x - 0 + 0$		<i>Voltada para baixo</i>	(0, 0)	Máximo absoluto: $h(0) = 0$	$]-\infty, 0]$
$i(x) = - x + 1 $ $\Leftrightarrow i(x) = -1 x - (-1) + 0$		<i>Voltada para baixo</i>	(-1, 0)	Máximo absoluto: $i(-1) = 0$	$]-\infty, 0]$
$j(x) = -2 x + 1 - 3$ $\Leftrightarrow j(x) = -2 x - (-1) - 3$		<i>Voltada para baixo</i>	(-1, -3)	Máximo absoluto: $j(-1) = -3$	$]-\infty, -3]$

(b) Com base na exploração que realizou na alínea (a), complete a seguinte sistematização:

SISTEMATIZAÇÃO 4.1.

Gráfico de funções do tipo $f(x) = a|x - h| + k$

O vértice do gráfico de uma função definida por $f(x) = a|x - h| + k$ é o ponto de coordenadas (h, k) . Se $a > 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para cima e a função tem um mínimo absoluto. Se $a < 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo e a função tem um máximo absoluto.

Nota: Em algumas alíneas das próximas tarefas, ser-lhe-ão apresentadas duas estratégias de resolução alternativas (uma analítica e outra gráfica). **Não tem de recorrer às duas estratégias; basta uma.** Se preferir, foque-se apenas na estratégia analítica, que é a que temos usado habitualmente. Também pode aplicar outra estratégia qualquer da sua preferência.

ATIVIDADE 3.2

3.2.1. Considere a função f definida em \mathbb{R} por:

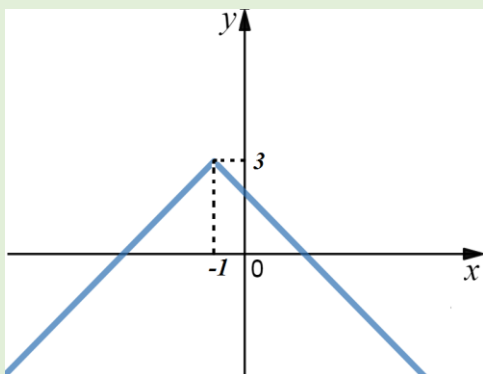
$$f(x) = -|x + 1| + 3$$

(a) Faça um esboço do gráfico da função f .

$$f(x) = -|x + 1| + 3 \Leftrightarrow f(x) = -|x - (-1)| + 3$$

Logo o vértice da função é $(-1, 3)$.

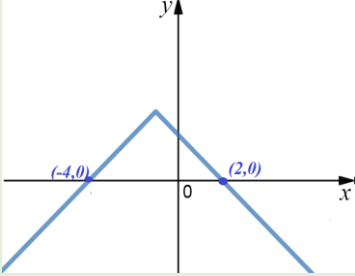
A concavidade é voltada para baixo.



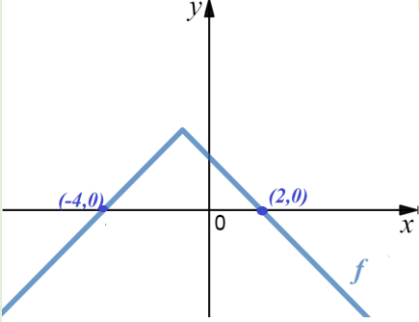
(b) Indique o contradomínio de f .

$$D'_f =]-\infty; 3]$$

(c) Determine os zeros de f .

Estratégia analítica	Estratégia gráfica
$f(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow - x + 1 + 3 = 0$ $\Leftrightarrow - x + 1 = -3$ $\Leftrightarrow x + 1 = 3$ $\Leftrightarrow x + 1 = 3 \vee x + 1 = -3$ $\Leftrightarrow x = 3 - 1 \vee x = -3 - 1$ $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -4$ Zeros de f : -4 e 2	Com recurso às potencialidades gráficas da calculadora, determinaram-se os zeros da função. Esboço gráfico:  Zeros de f : -4 e 2

(d) Estude a função f quanto ao sinal.

Estratégia analítica:	Estratégia gráfica:												
<ul style="list-style-type: none"> $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow - x + 1 + 3 > 0$ $\Leftrightarrow - x + 1 > -3$ $\Leftrightarrow x + 1 < 3$ <p><i>multiplicamos por -1 e o sinal da desigualdade inverte</i></p> <p>Obs.: A distância de $x + 1$ à origem é menor que 3 quando $x + 1$ é um número entre -3 e 3</p> $\Leftrightarrow -3 < x + 1 < 3$ $\Leftrightarrow -3 - 1 < x < 3 - 1$ $\Leftrightarrow -4 < x < 2$ Logo: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-4, 2[$	Zeros de f : $-4, 2$ Esboço gráfico:  Por observação do gráfico de f , é possível construir o seguinte quadro de sinal da função:												
<ul style="list-style-type: none"> $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow - x + 1 + 3 < 0$ $\Leftrightarrow - x + 1 < -3$ $\Leftrightarrow x + 1 > 3$ <p><i>multiplicamos por -1 e o sinal da desigualdade inverte</i></p> <p>Obs.: A distância de $x + 1$ à origem é maior que 3 quando $x + 1$ é um número menor que -3 ou maior que 3</p> $\Leftrightarrow x + 1 < -3 \vee x + 1 > 3$ $\Leftrightarrow x < -4 \vee x > 2$ Logo: $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-4</td> <td></td> <td>2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$-$</td> <td>0</td> <td>$+$</td> <td>0</td> <td>$-$</td> </tr> </table> <p>e concluir que:</p> $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-4, 2[$ $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$	x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$	$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$								
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$								

(e) Construa uma tabela de variação e indique os intervalos de monotonia da função f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	\nearrow	3	\searrow

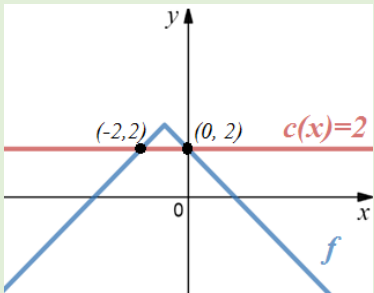
A função f é crescente em $]-\infty, -1]$ e é decrescente em $[-1, +\infty[$.

(f) Indique o extremo da função e classifique-o.

A função tem um máximo absoluto: $f(-1) = 3$.

(g) Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das condições e apresente os respectivos conjuntos solução:

(g₁) $f(x) = 2$

Estratégia analítica:	Estratégia gráfica:
$f(x) = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow - x + 1 + 3 = 2$ $\Leftrightarrow - x + 1 = 2 - 3$ $\Leftrightarrow - x + 1 = -1$ $\Leftrightarrow x + 1 = 1$ $\Leftrightarrow x + 1 = 1 \vee x + 1 = -1$ $\Leftrightarrow x = 1 - 1 \vee x = -1 - 1$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$ <p style="text-align: center;">C.S. = {0, -2}</p>	<p>Na calculadora, representou-se graficamente a função f e a função constante definida por $c(x) = 2$ e determinaram-se os pontos de interseção dos gráficos das duas funções.</p> <p style="text-align: center;">Esboço gráfico:</p>  <p>Obs.: Nos pontos de interseção, as funções assumem o mesmo valor, ou seja, nesses pontos $f(x) = 2$. Isto acontece para $x = 0$ ou para $x = -2$.</p> <p>Por análise gráfica, conclui-se que: $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$</p> <p style="text-align: right;">C.S. = {0, -2}</p>

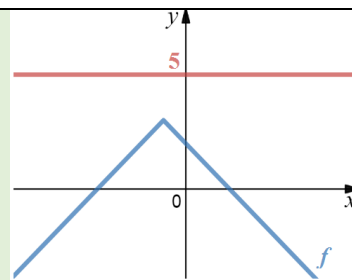
(g₂) $f(x) > 5$

Estratégia analítica:	Estratégia gráfica:
$f(x) > 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow - x + 1 + 3 > 5$ $\Leftrightarrow - x + 1 > 5 - 3$ $\Leftrightarrow - x + 1 > 2$ $\Leftrightarrow x + 1 < -2$	<p>Na calculadora, representou-se graficamente a função f e a função constante definida por $c(x) = 5$.</p> <p style="text-align: center;">Esboço gráfico:</p>

multiplicamos por -1 e o sinal da desigualdade inverte

Condição impossível, pois o módulo de um número real nunca assume valores negativos.

$$C.S. = \{ \}$$



Por observação, é possível concluir que a função f nunca assume valores maiores que 5, pois a linha do gráfico de f nunca sobe acima da linha do gráfico de $c(x) = 5$.

$$C.S. = \{ \}$$

(g3) $f(x) \leq -2$

Estratégia analítica:	Estratégia gráfica:
$f(x) \leq -2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow - x + 1 + 3 \leq -2$ $\Leftrightarrow - x + 1 \leq -2 - 3$ $\Leftrightarrow - x + 1 \leq -5$ $\Leftrightarrow x + 1 \geq 5$ <p style="text-align: right; margin-right: 50px;"><i>multiplicamos por -1 e o sinal da desigualdade inverte</i></p> $\Leftrightarrow x + 1 \geq 5 \vee x + 1 \leq -5$ $\Leftrightarrow x \geq 5 - 1 \vee x \leq -5 - 1$ $\Leftrightarrow x \geq 4 \vee x \leq -6$ $C.S. =]-\infty, -6] \cup [4, +\infty[$	<p>Na calculadora, representou-se graficamente a função f e a função constante definida por $c(x) = -2$ e determinaram-se os pontos de interseção dos gráficos das duas funções.</p> <p>Esboço gráfico:</p> <p>Por análise gráfica, conclui-se que $f \leq -2$ quando $x \geq 4$ ou quando $x \leq -6$, pois, para estes valores de x, a linha do gráfico de f está abaixo da linha do gráfico de $c(x) = -2$.</p> $C.S. =]-\infty, -6] \cup [4, +\infty[$

3.2.2. Seja g a função definida em \mathbb{R} por $g(x) = |x - 3|$

Determine o conjunto solução da condição $g(x + 6) \geq g(x)$

$$g(x+6) \geq g(x) \Leftrightarrow |(x+6)-3| \geq |x-3| \Leftrightarrow |x+3| \geq |x-3|$$

Estratégia analítica:

$$|x+3| \geq |x-3| \Leftrightarrow |x-(-3)| \geq |x-3|$$

A distância de x ao -3 deve ser **maior ou igual** à distância de x ao 3 .

A distância de x ao -3 é igual à distância de x ao 3 unicamente quando:

$$x = \frac{(-3)+3}{2} = 0$$

Obs.: Os pontos à direita do 0 estão **mais afastados** de -3 do que de 3

Conclusão: A distância de x ao -3 é **maior ou igual** à distância de x a 3 unicamente quando $x \geq 0$

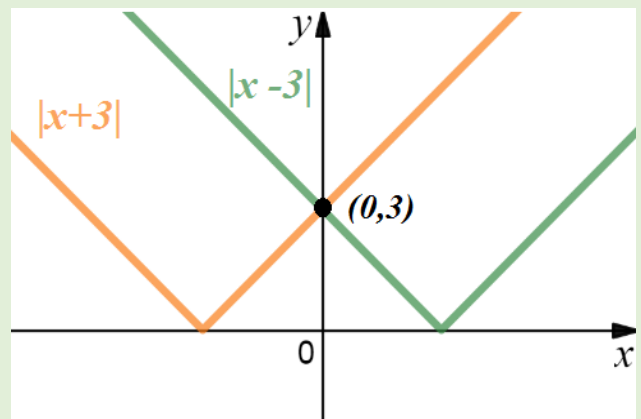
$$C.S. = [0, +\infty[$$

Estratégia gráfica:

Na calculadora, representou-se graficamente a função $h(x) = |x+3|$ e a função $i(x) = |x-3|$ e determinou-se o ponto de interseção dos gráficos das duas funções.



Esboço gráfico:



Obs.: Quando os gráficos das funções se interseccionam, as funções têm o mesmo valor, ou seja, $|x+3| = |x-3|$.

Quando a linha do gráfico de $h(x) = |x+3|$ está acima da linha do gráfico de $i(x) = |x-3|$, a função h assume valores superiores aos da função i , ou seja, $|x+3| > |x-3|$.

Estamos interessados nestes dois casos.

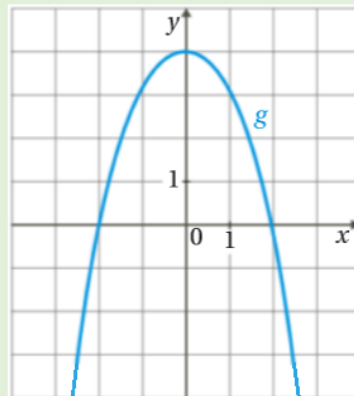
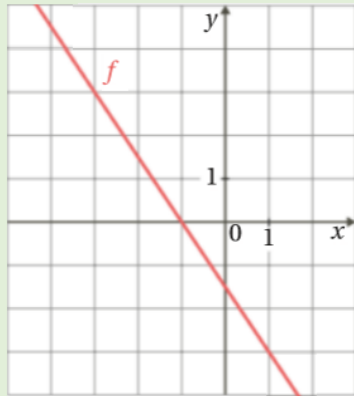
Por análise gráfica, conclui-se que $|x+3| \geq |x-3|$ quando $x \geq 0$ pois, para estes valores de x , a linha do gráfico de $h(x) = |x+3|$ **intersecciona ou está acima** da linha do gráfico de $i(x) = |x-3|$.

$$C.S. = [0, +\infty[$$

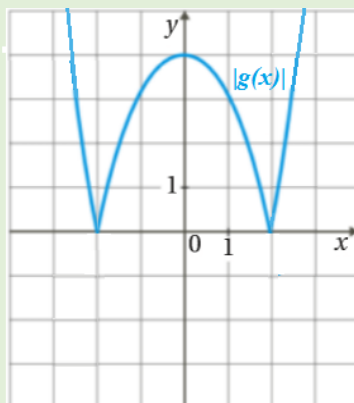
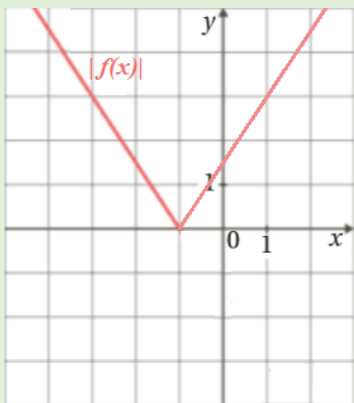


ATIVIDADE 3.3.

Considere as funções f e g definidas \mathbb{R} . A função f é representada graficamente por uma **reta** e a função g por uma **parábola**.



3.3.1. Faça um esboço do gráfico de cada uma das funções definidas por $|f(x)|$ e $|g(x)|$.



Obs.: Os pontos de ordenada (y) negativa sofrem uma reflexão de eixo Ox .

3.3.2. Indique o contradomínio das funções:

(a) $|f(x)|$

(b) $|g(x)|$

$$D'_{|f(x)|} = [0, +\infty[$$

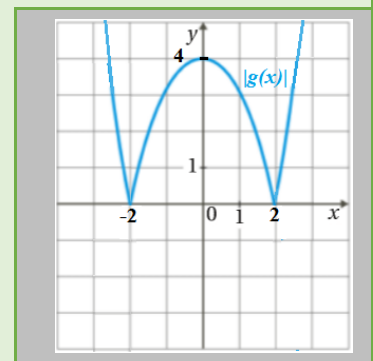
$$D'_{|g(x)|} = [0, +\infty[$$

3.3.3. Estude $|g(x)|$ quanto à monotonia.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$ g(x) $	↘	0	↗	4	↘	0	↗

A função $|g(x)|$ é decrescente em $]-\infty, -2] \cup [0, 2]$

A função $|g(x)|$ é crescente em $[-2, 0] \cup [2, +\infty[$



3.3.4. Apresente o conjunto solução de cada uma das condições.

(a) $|f(x)| = 0$

$C.S. = \{-1\}$

Por análise do gráfico da função, conclui-se que a função só tem um zero: -1 .

(b) $|f(x)| > 0$

$C.S. = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ou $C.S. =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

Para qualquer valor de x , com exceção de -1 , a imagem de x é positiva, pois a linha do gráfico da função está “acima” do eixo dos xx .

(c) $|f(x)| = 3$

$C.S. = \{-3, 1\}$

Por análise do gráfico da função, conclui-se que $|f(x)| = 3$ apenas quando $x = -3$ ou $x = 1$. A reta de equação $y = 3$ intersesta a linha do gráfico em $x = -3$ e $x = 1$.

(d) $|f(x)| \leq 3$

$C.S. = [-3, 1]$

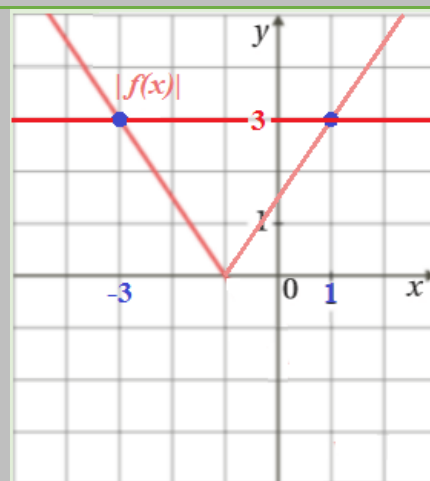
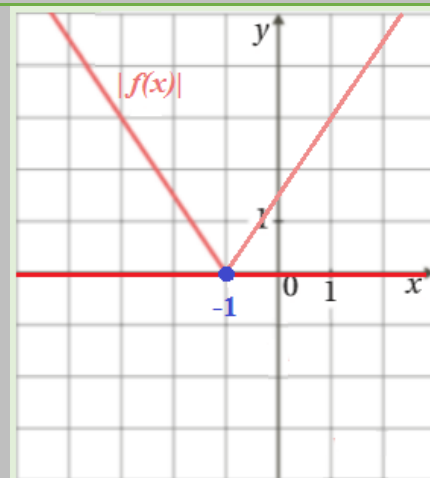
A reta de equação $y = 3$ intersesta a linha do gráfico em $x = -3$ e $x = 1$. E, para valores de x no intervalo $] -3, 1[$, a imagem de x é menor que 3, pois a linha do gráfico da função está “abaixo” da reta de equação $y = 3$.

(e) $|f(x)| > 3$

$C.S. =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$

Para valores de x menores que -3 ou maiores que 1 , a imagem de x é maior que 3, pois a linha do gráfico da função está “acima” da reta de equação $y = 3$.

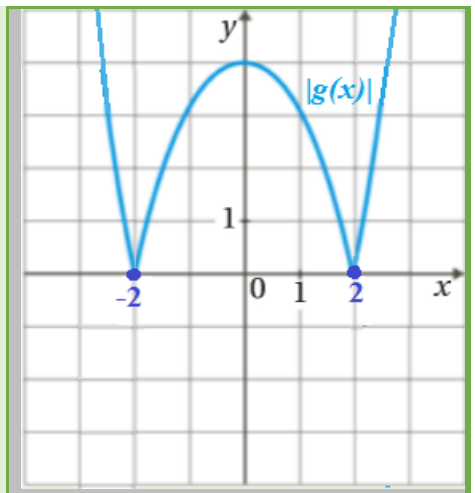
Observações



(f) $|g(x)| = 0$

C.S. = $\{-2, 2\}$

Por análise do gráfico da função, conclui-se que a função tem dois zeros: -2 e 2 .

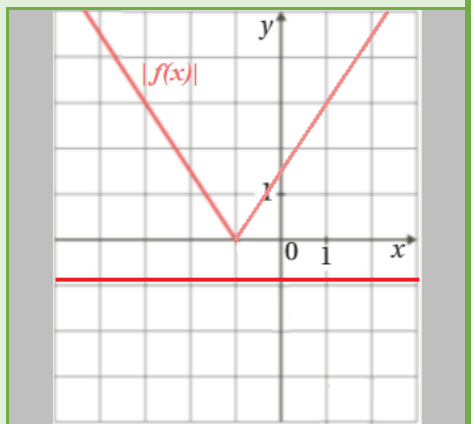


3.3.5. Indique que valores pode tomar a , para que a equação $|f(x)| = a$

(a) não tenha soluções

$a < 0$

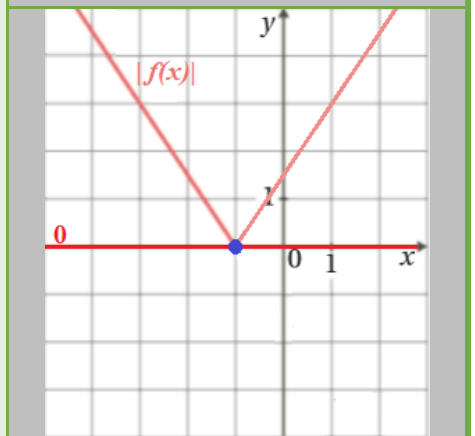
A reta $y = a$ nunca intersesta a linha do gráfico da função se a for um número negativo



(b) tenha uma solução

$a = 0$

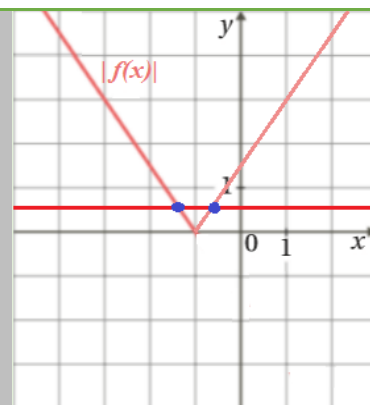
A reta $y = a$ intersesta a linha do gráfico da função apenas uma vez se a for 0.



(c) tenha duas soluções

$$a > 0$$

A reta $y = a$ interseca a linha do gráfico da função duas vezes se a for um número positivo.

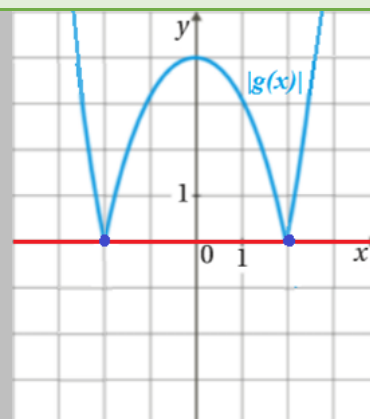


3.3.6. Indique o número de soluções da equação $|g(x)| = b$ quando:

(a) $b = 0$

A equação tem duas soluções.

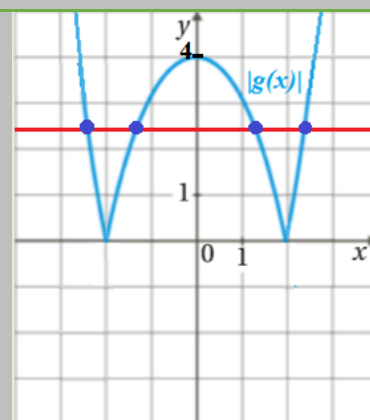
A reta $y = 0$ interseca a linha do gráfico da função duas vezes.



(b) $0 < b < 4$

A equação tem quatro soluções.

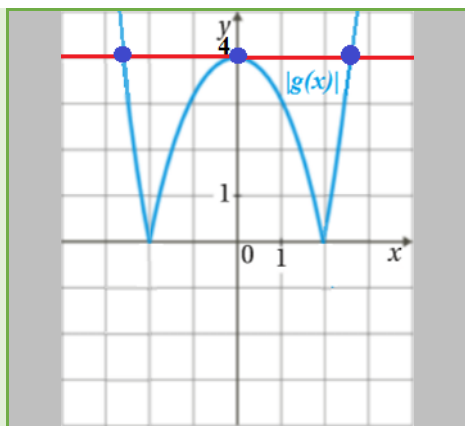
A reta $y = b$ interseca a linha do gráfico da função quatro vezes, se $0 < b < 4$



(c) $b = 4$

A equação tem três soluções.

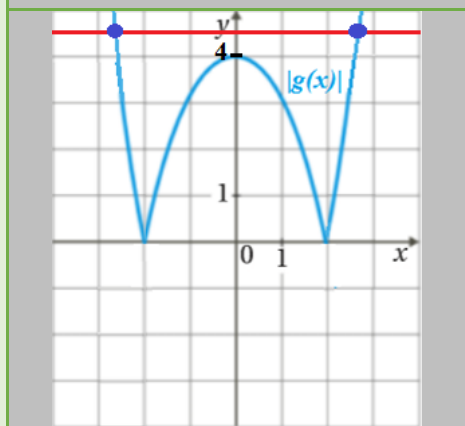
A reta $y = b$ interseca a linha do gráfico da função três vezes, se $b = 4$



(d) $b > 4$

A equação tem duas soluções.

A reta $y = b$ interseca a linha do gráfico da função duas vezes, se $b > 4$



ATIVIDADE 3.4.

Defina, sem utilizar o símbolo de módulo, cada uma das funções reais de domínio \mathbb{R} .

(a) $f(x) = -3|x - 1| + 2$

(b) $g(x) = 4|x + 2| - 1$

(c) $h(x) = |-2x + 6|$

(a) $f(x) = -3|x - 1| + 2$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Então:

$$f(x) = \begin{cases} -3(x - 1) + 2 & \text{se } x \geq 1 \\ -3(-x + 1) + 2 & \text{se } x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -3x + 3 + 2 & \text{se } x \geq 1 \\ 3x - 3 + 2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & \text{se } x \geq 1 \\ 3x - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad \blacksquare$$

(b) $g(x) = 4|x + 2| - 1$

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x + 2 \geq 0 \\ -(x + 2) & \text{se } x + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Então:

$$f(x) = \begin{cases} 4(x+2) - 1 & \text{se } x \geq -2 \\ 4(-x-2) - 1 & \text{se } x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 4x + 8 - 1 & \text{se } x \geq -2 \\ -4x - 8 - 1 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 4x + 7 & \text{se } x \geq -2 \\ -4x - 9 & \text{se } x < -2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

(c) $h(x) = |-2x + 6|$

$$|-2x + 6| = \begin{cases} -2x + 6 & \text{se } -2x + 6 \geq 0 \\ -(-2x + 6) & \text{se } -2x + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |-2x + 6| = \begin{cases} -2x + 6 & \text{se } -2x \geq -6 \\ 2x - 6 & \text{se } -2x < -6 \end{cases}$$

↓
 multiplicando ambos os membros por -1 e invertendo o sinal
 ↓

$$\Leftrightarrow |-2x + 6| = \begin{cases} -2x + 6 & \text{se } x \leq 3 \\ 2x - 6 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |-2x + 6| = \begin{cases} -2x + 6 & \text{se } x \leq 3 \\ 2x - 6 & \text{se } x > 3 \end{cases} \quad \blacksquare$$

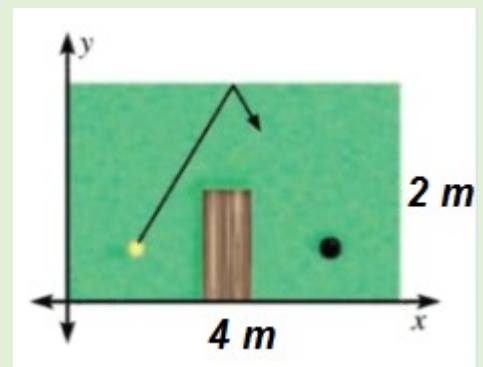
ATIVIDADE COMPLEMENTAR

A trajetória de uma bola que se desloca sobre uma pista de *minigolf* e bate numa tabela pode ser modelada, num certo domínio, por uma função do tipo:

$$f(x) = a|x - h| + k$$

A pista tem 4 metros de comprimento e 2 metros de largura.

Um referencial ortonormado é colocado sobre a pista de *minigolf*. A bola está localizada no ponto de coordenadas (1, 0.5) e o buraco está localizado no ponto de coordenadas (3, 0.5). Imagine que, para colocar a bola no buraco, vai jogá-la à tabela, fazendo-a bater no ponto de coordenadas (2, 2).



(a) Escreva uma função para a trajetória da bola e explique como determinou a expressão.

Sabemos que a trajetória da bola é modelada por uma função do tipo: $f(x) = a|x - h| + k$

Para descobrir os parâmetros a , h e k , usaremos a informação que temos relativamente à trajetória da bola:

▪ **A bola bate na tabela no ponto de coordenadas (2, 2)**

Então estas são as coordenadas do vértice da função que modela a trajetória da bola. De onde se conclui que $h = 2$ e $k = 2$. Ou seja, $f(x) = a|x - 2| + 2$

▪ **A bola parte do ponto de coordenadas (1, 0.5)**

Então este ponto pertence ao gráfico da função que descreve a trajetória da bola. Substituindo na expressão, é possível determinar o parâmetro a :

$$f(x) = a|x - 2| + 2 \Rightarrow 0.5 = a|1 - 2| + 2 \Leftrightarrow 0.5 = a|-1| + 2 \Leftrightarrow 0.5 - 2 = a \Leftrightarrow a = -1.5$$

Conclusão: A trajetória da bola é modelada pela função: $f(x) = -1.5|x - 2| + 2$

(b) Conseguirá colocar a bola no buraco realizando esta tacada? Justifique.

Para averiguar se a bola entra no buraco, podemos verificar se a trajetória da bola contém o ponto de coordenadas (3, 0.5), pois é neste ponto que se encontra o buraco. Para tal, basta substituir x por 3 e $f(x)$ por 0.5 na função da trajetória da bola:

$$f(x) = -1.5|x - 2| + 2 \Rightarrow 0.5 = -1.5|3 - 2| + 2 \Leftrightarrow 0.5 = -1.5|1| + 2$$

$$\Leftrightarrow 0.5 = -1.5 + 2$$

$$\Leftrightarrow 0.5 = 0.5 \quad \checkmark \text{ Proposição verdadeira}$$

Conclui-se que a bola entrará no buraco, pois a trajetória que a bola descreve contém o ponto de coordenadas (3, 0.5) e é neste ponto que se encontra o buraco.

Anexo G: Atividades Complementares

AC1. Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das equações e apresente os respectivos conjuntos solução:

(a) $-2|x| + 4 = 0$

(b) $\frac{-|x|+1}{3} + 5 = 0$

(c) $|x| + \sqrt{5} = 1$

(d) $-\frac{3}{2}|x| + 4 = -2$

AC2. Considere, em \mathbb{R} , a condição:

$$|x| + 2k = 2, \quad k \in \mathbb{R}$$

Indique para que valores de k a condição é:

- (a) Impossível
- (b) Possível

Justifique as suas respostas.

AC3. (Extraída do manual | página 137)

36 Considere, em \mathbb{R} , a condição:

$$|x| + 1 \leq k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Determine k de modo que a condição seja impossível em \mathbb{R} .

AC4. Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das inequações e apresente os respectivos conjuntos solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

(a) $-|x| + 4 < 0$

(b) $\frac{|x|+6}{2} \leq -7$

(c) $\frac{|x|+10}{7} > -3$

(d) $-\frac{3}{2}|x| - 3 \geq -5$

(e) $-2|x| + 12 \leq -4$

AC5. Resolva os exercícios dos exemplos 12.1, 12.2 e 12.3 da página 132 do seu manual.

$$12.1. |2x - 1| = 5$$

$$12.2. \left| \frac{1}{2}x^2 - 2 \right| = 0$$

$$12.3. \left| -3x - \frac{1}{2} \right| = -1$$

AC6. Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das inequações e apresente os respectivos conjuntos solução.

(a) $-|2x + 4| = -3$

(b) $|x - 2| - \frac{7}{3} = -3$

(c) $-5|x + 2| - 10 = 0$

(d) $\frac{1}{2}|x^2 - 16| = 0$

(e) $2|1 - 3x| + 9 = -3$

AC7. (Extraída do manual | página 133)

16. Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das inequações.

16.1. $|2x - 1| > 0$

16.4. $\left| -x + \frac{1}{2} \right| + 2 > 7$

16.7. $\frac{4 - |2 - x|}{2} \geq 2$

AC8. (Extraída do caderno de fichas | página 106)

2 Represente sob a forma de intervalos ou união de intervalos o conjunto-solução de cada uma das condições em \mathbb{R} .

2.1. $|1 - 4x| < 3$

2.2. $|4x + 1| \geq 5$

2.3. $|2x| - 6 > 2$

AC9. Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das condições e apresente os respectivos conjuntos solução.

(a) $|x| = |x + 4|$

(b) $|2 - x| = |5 - x|$

(c) $|x + 8| = |x + 6|$

(d) $|x + 1| \leq |x - 5|$

(e) $|x| > |x - \pi|$

AC10. (Extraída do caderno de fichas | página 108)

3 Na figura está representada, num referencial ortonormado, parte do gráfico de uma função de domínio \mathbb{R} .

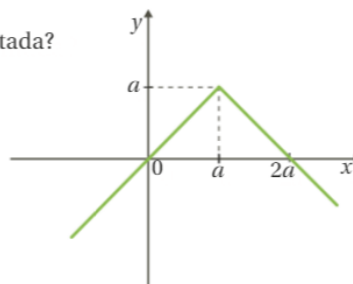
Qual das funções seguintes poderá definir a função representada?

(A) $f(x) = -|x - a| + a$

(B) $g(x) = |x - a| - a$

(C) $h(x) = |x - a| + a$

(D) $j(x) = -|x - a| - a$



AC11. Seja h a função de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$h(x) = 2|x - 4| - 4$$

- (a) Indique o contradomínio de h .
- (b) Estude a função h quanto à monotonia e existência de extremos.
- (c) Estude a função h quanto aos zeros e sinal.
- (d) Resolva, em \mathbb{R} , a inequação $h(x) \geq 2$

AC12. Seja h a função de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$i(x) = -\frac{1}{2}|x - 1| + 2$$

- (a) Indique o contradomínio de i .
- (b) Estude a função i quanto à monotonia e existência de extremos.
- (c) Estude a função i quanto aos zeros e sinal.
- (d) Resolva, em \mathbb{R} , a inequação $i(x) > 3$

AC13. Considere as funções f e g definidas, em \mathbb{R} , por:

$$f(x) = |x + 3| - 2$$

$$g(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$$

- (a) Indique o contradomínio de f .
- (b) Estude a função f quanto ao sinal.
- (c) Estude a função f quanto à monotonia e existência de extremos.
- (d) Resolva, em \mathbb{R} , a inequação $f(x) < 5$
- (e) Determine $g(3)$.
- (f) Determine os zeros de g .

AC14. (Extraída do manual | página 137)

38 Considere a função f definida em \mathbb{R} por:

$$f(x) = 1 - 2|x - 3|$$

38.1. Resolva, em \mathbb{R} , cada uma das condições.

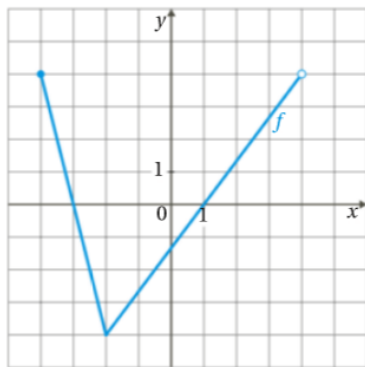
a) $f(x) = -1$ b) $f(x) \leq -3$

38.2. Relativamente à função f , indique:

- a) o contradomínio;
- b) os intervalos de monotonia;
- c) os zeros.

AC15. (Extraída do manual | página 137 | exceto o 37.2.)

37 Considere a função f representada graficamente por:



37.1. Indique o domínio e o contradomínio da função f .

37.3. Esboce o gráfico da função $|f|$.

37.4. Indique o contradomínio da função $|f|$.

37.5. Indique os valores reais de x tais que:

- a) $f(x) = 0$
- b) $|f(x)| = 0$
- c) $f(x) \geq 4$
- d) $|f(x)| \geq 4$
- e) $|f(x)| = f(x)$

AC16. Considere uma função f de domínio \mathbb{R} e de contradomínio $[-4, 2]$.

Indique o contradomínio da função definida, em \mathbb{R} , pela expressão $g(x) = |f(x)|$.

AC17. Considere uma função h de domínio \mathbb{R} e de contradomínio $] - 4, 2[$.

Indique o contradomínio da função definida, em \mathbb{R} , pela expressão $i(x) = |h(x)|$.

AC18. Considere uma função f de domínio \mathbb{R} e de contradomínio $] - 4, 8]$.

Indique o contradomínio da função definida, em \mathbb{R} , pela expressão $m(x) = |f(x)|$.

AC19. (Extraída do caderno de fichas | página 105)

9 Considere uma função f de domínio \mathbb{R} e de contradomínio $[-6, 2]$.

Indique o contradomínio das funções definidas pelas seguintes expressões.

9.1. $g(x) = |f(x)|$

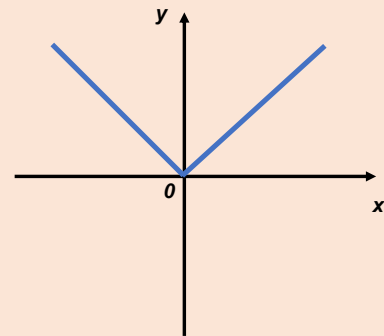
9.2. $h(x) = -|f(x)| + 2$

Anexo H: Transformações do Gráfico da Função Módulo

Transformações do gráfico de uma função

Função módulo

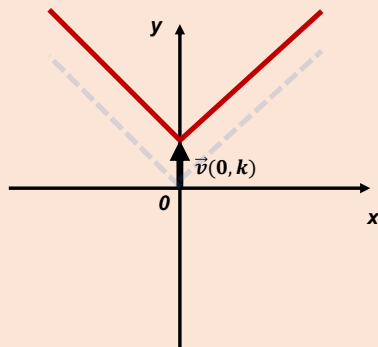
$$f(x) = |x|$$



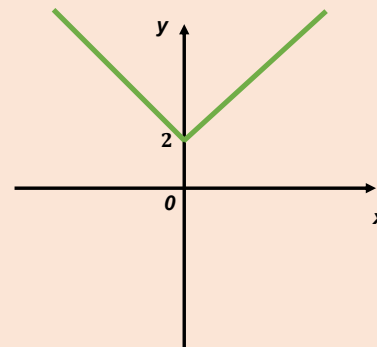
Teresa Rodrigues | 2020

Translação vertical de vetor $(0, k)$

$$g(x) = |x| + k$$



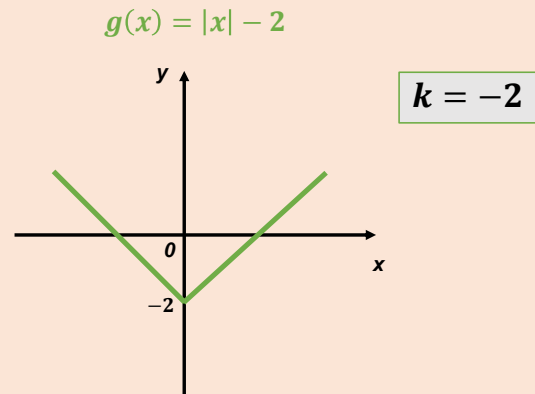
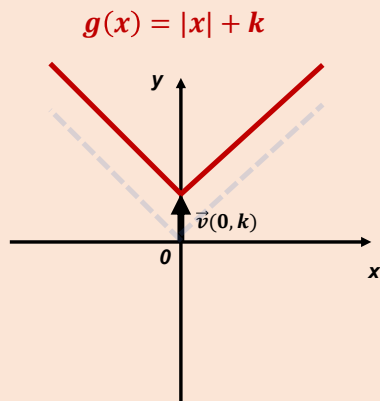
$$g(x) = |x| + 2$$



$$k = 2$$

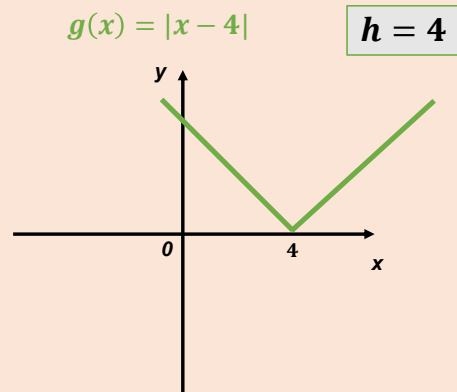
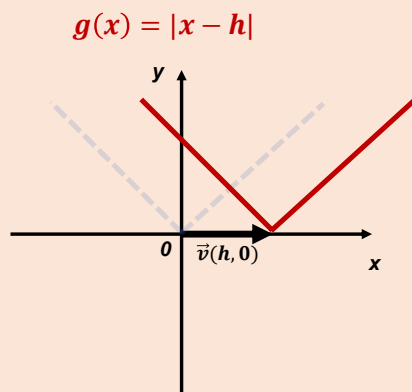
Teresa Rodrigues | 2020

Translação vertical de vetor $(0, k)$



Teresa Rodrigues | 2020

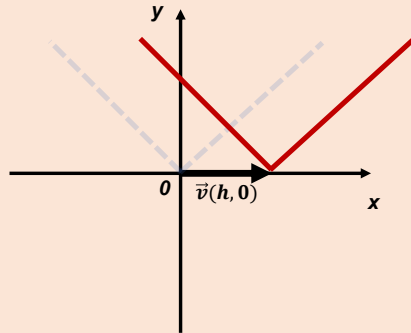
Translação horizontal de vetor $(h, 0)$



Teresa Rodrigues | 2020

Translação horizontal de vetor $(h, 0)$

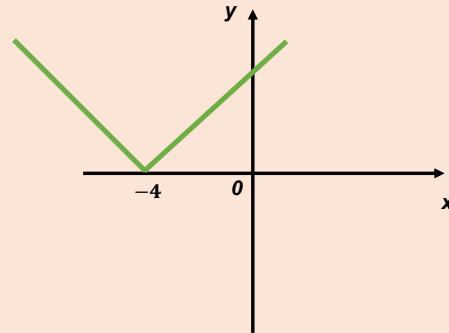
$$g(x) = |x - h|$$



Teresa Rodrigues | 2020

$$g(x) = |x + 4|$$

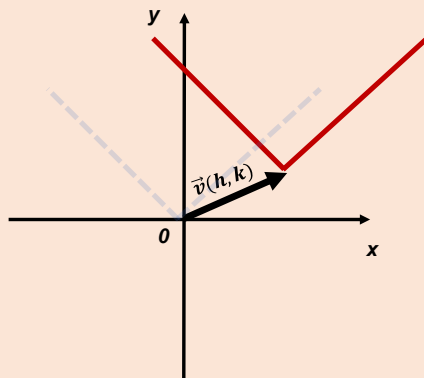
$$h = -4$$



$$g(x) = |x + 4| = |x - (-4)|$$

Translação de vetor (h, k)

$$g(x) = |x - h| + k$$

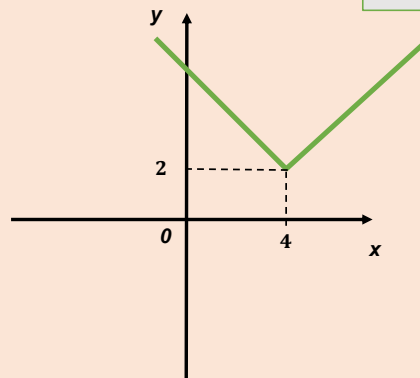


Teresa Rodrigues | 2020

$$g(x) = |x - 4| + 2$$

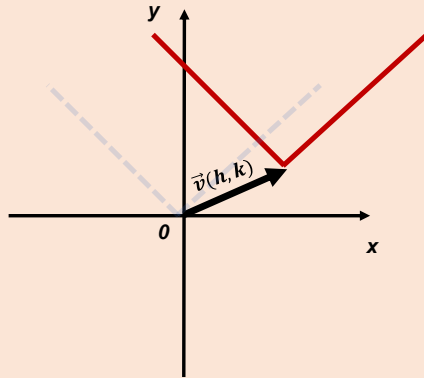
$$h = 4$$

$$k = 2$$



Translação de vetor (h, k)

$$g(x) = |x - h| + k$$

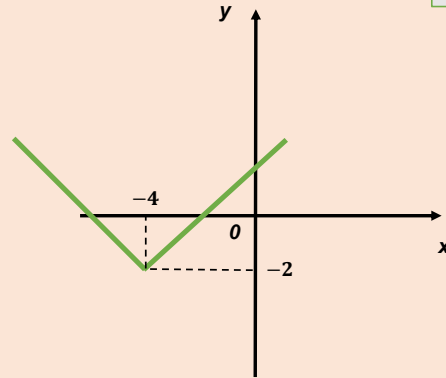


Teresa Rodrigues | 2020

$$g(x) = |x + 4| - 2$$

$$h = -4$$

$$k = -2$$



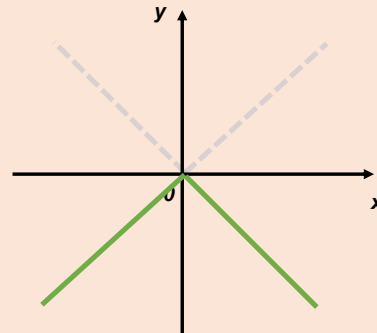
Reflexão de eixo Ox

$$g(x) = a|x|$$

$$a < 0$$

$$g(x) = -|x|$$

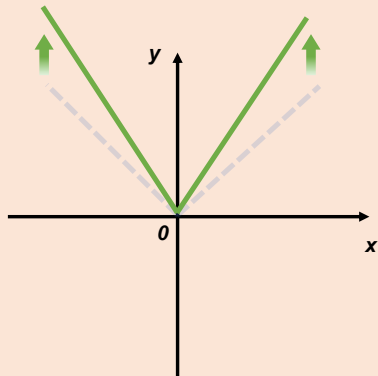
$$a = -1$$



Teresa Rodrigues | 2020

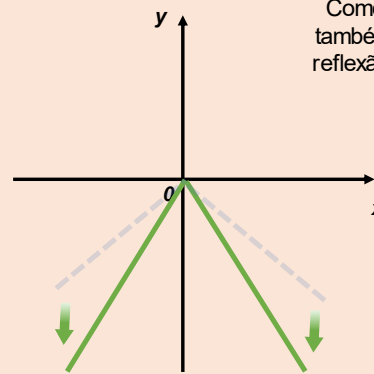
Dilatação vertical $|a| > 1$

$$g(x) = 2|x| \quad a = 2$$



Teresa Rodrigues | 2020

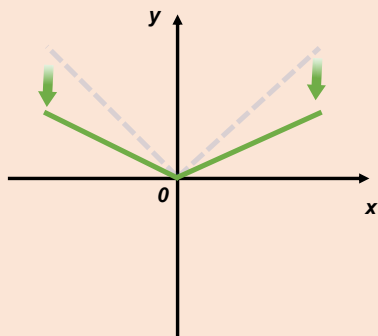
$$g(x) = -2|x| \quad a = -2$$



Como $a < 0$
também sofre uma
reflexão de eixo Ox

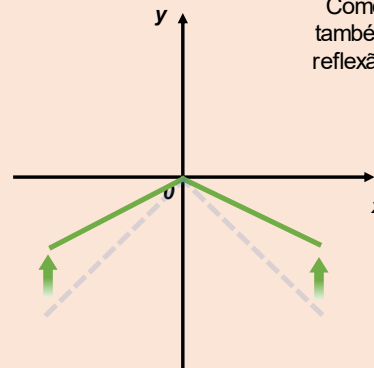
Contração vertical $|a| < 1$

$$g(x) = \frac{1}{2}|x| \quad a = \frac{1}{2}$$



Teresa Rodrigues | 2020

$$g(x) = -\frac{1}{2}|x| \quad a = -\frac{1}{2}$$



Como $a < 0$
também sofre uma
reflexão de eixo Ox

Notas importantes

Vértice: (h, k)

Sentido da concavidade e extremos:

Voltada para cima se $a > 0$

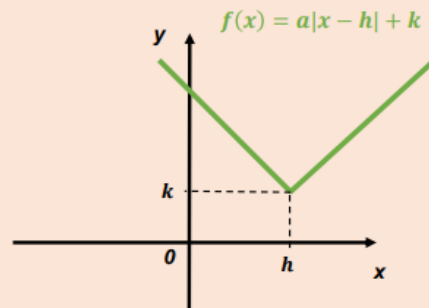
A função tem um **mínimo absoluto**: k

- minimizante: $x = h$

Voltada para baixo de $a < 0$

A função tem um **máximo absoluto**: k

- maximizante: $x = h$



Podemos utilizar a calculadora para observar a representação gráfica da função e estudá-la.

Teresa Rodrigues | 2020

Exemplo:

Vértice: $(-1, 2)$

Sentido da concavidade:

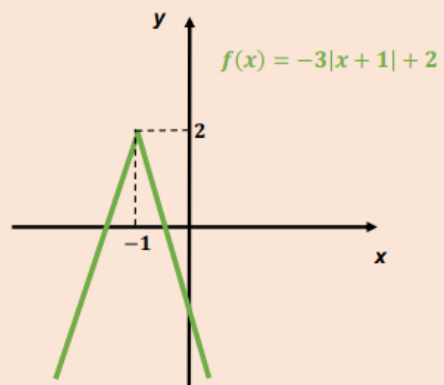
Voltada para baixo pois $a = -3$ ($a < 0$)

Extremo:

A função tem um máximo absoluto: 2

- maximizante: $x = -1$

Esboço gráfico



Teresa Rodrigues | 2020

Anexo I: Ficha de Exercícios

1. Considere a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = 12 - 2|x - 4|$
 - 1.1. Defina, analiticamente, a função f , sem utilizar módulos.
 - 1.2. Apresente os conjuntos-solução das seguintes condições em \mathbb{R} :
 - 1.2.1. $f(x) = -8$
 - 1.2.2. $f(x) < 2$
 - 1.3. Determine, analiticamente, os zeros da função f .
 - 1.4. Indique o contradomínio da função f .
 - 1.5. Estude o sinal da função f .
 - 1.6. Indique os intervalos de monotonia da função da função f .
2. Considere a função g definida em \mathbb{R} por $g(x) = 3|x - 2| - 12$
 - 2.1. Defina, analiticamente, a função g sem utilizar módulos.
 - 2.2. Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das proposições.
 - 2.2.1. A função g tem dois zeros reais distintos.
 - 2.2.2. O contradomínio da função g é $[-12, +\infty[$.
 - 2.2.3. A função g tem três extremos.
 - 2.3. Resolva a condição $g(x) > -3$
Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.
 - 2.4. Resolva a condição $g(x) < 6$
Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.
 - 2.5. Estude o sinal da função g .
 - 2.6. Indique os intervalos de monotonia da função g .
3. Na figura está representada, num plano munido de um referencial ortonormado, parte do gráfico da função f de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = |x - h| + k$ ($a, b \in \mathbb{R}$).



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $h > 0 \wedge k > 0$
- (B) $h < 0 \wedge k > 0$
- (C) $h > 0 \wedge k < 0$
- (D) $h < 0 \wedge k < 0$

4. Resolva, em \mathbb{R} , a inequação:

$$-5|x + 1| - 3 \leq 7$$

Apresente o conjunto solução.

5. Resolva, em \mathbb{R} , a inequação:

$$-5|x + 1| - 3 \geq -14$$

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

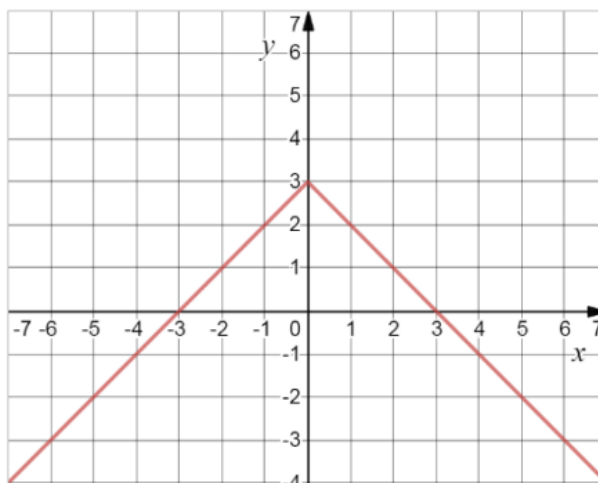
6. Considere uma função f de domínio \mathbb{R} e de contradomínio $[-4,2]$.

Indique o contradomínio da função definida, em \mathbb{R} , pela expressão $g(x) = |f(x)|$

7. Na figura está representada, num plano munido de um referencial ortonormado, parte do gráfico da função g de domínio \mathbb{R} .

Considere, ainda, a função h , definida em \mathbb{R} por $h(x) = |g(x)|$.

- (a) Indique o contradomínio da função $h(x)$.
- (b) Quantas soluções tem a equação $h(x) = 5$?
- (c) Quantas soluções tem a equação $h(x) = 0$?
- (d) Quantas soluções tem a equação $h(x) = 3$?



8. Caso ainda não o tenha feito, resolva a atividade complementar **AC9**.

Anexo J: Enunciado da Questão-aula

Grupo I

100 pontos

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta.

1. Seja x um número real negativo.

Qual o valor numérico da expressão $-\frac{|x|}{x} + |-1|^3$?

- (A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

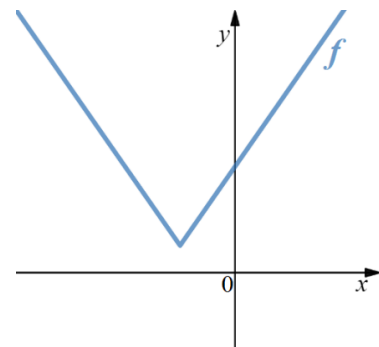
2. O conjunto solução da equação $|x + 4| = |x - 2|$ é:

- (A) $\{-1\}$ (B) $\{-3\}$ (C) $\{1\}$ (D) $\{3\}$

3. Considere a função f representada graficamente ao lado.

A função f pode ser definida por:

- (A) $f(x) = |x - 3| - 1$ (B) $f(x) = |x + 3| - 1$
(C) $f(x) = |x - 3| + 1$ (D) $f(x) = |x + 3| + 1$

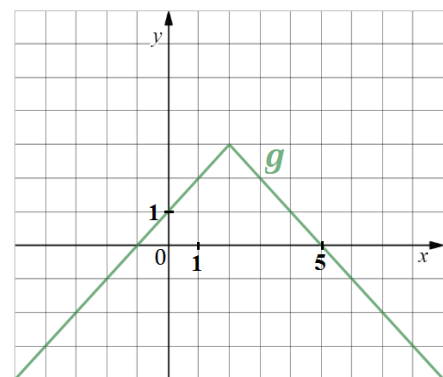


4. Na figura está representada, num plano munido de um referencial ortonormado, parte do gráfico da função g de domínio \mathbb{R} .

Considere, ainda, a função h , definida em \mathbb{R} por $h(x) = |g(x)|$.

Qual das seguintes equações tem exatamente três soluções?

- (A) $h(x) = -1$ (C) $h(x) = 2$
(B) $h(x) = 0$ (D) $h(x) = 3$



5. Considere uma função f de domínio \mathbb{R} e contradomínio $]-\infty, 2]$.

Seja j a função de domínio \mathbb{R} definida por $j(x) = |f(x)|$.

Qual é o contradomínio da função j ?

(A) $[0, 2]$

(B) $[0, +\infty[$

(C) $[2, +\infty[$

(D) $[-2, +\infty[$

Grupo II

100 pontos

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

6. Represente sob a forma de intervalo ou união de intervalos o conjunto solução da seguinte condição definida em \mathbb{R} :

$$13 - 3|x| \geq 1$$

7. Considere a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = 3|x - 2| - 6$

7.1. Defina, analiticamente, a função f , sem utilizar módulos.

7.2. Determine, caso existam, os zeros da função f .

7.3. Indique o contradomínio da função f .

7.4. Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das proposições

(a) *A função f é crescente no intervalo $]-\infty, 2]$*

(b) *$f(2) = -6$ é o máximo absoluto da função f .*

7.5. Represente sob a forma de intervalos ou uniões de intervalos os conjuntos-solução das seguintes condições definidas em \mathbb{R} .

(a) $f(x) = -3$

(b) $f(x) < 3$

Questão	Grupo I					Grupo II								Total
	1	2	3	4	5	6	7.1	7.2	7.3	7.4.a	7.4.b	7.5.a	7.5.b	
Cotação	20	20	20	20	20	15	10	15	10	10	10	15	15	200

Anexo K: Critérios de Classificação da Questão-aula

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

ITENS DE CONSTRUÇÃO

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações:

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	É subtraído um ponto, exceto se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos.
3. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido.
4. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos;
5. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

- 20 pontos
Opção (D) 2
- 20 pontos
Opção (A) $\{-1\}$
- 20 pontos
Opção (D) $f(x) = |x + 3| + 1$

4.	20 pontos
	Opção (D) $h(x) = 3$	
5.	20 pontos
	Opção (B) $[0, +\infty[$	
6.	15 pontos
	1º Processo	
	Obter a inequação $ x \leq 4$ (ou equivalente)	5 pontos
	Concluir que $-4 \leq x \leq 4$	5 pontos
	Representar o conjunto solução sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais	5 pontos
	2º Processo	
	Indicar os zeros da função real de variável real definida pela expressão $f(x) = 13 - 3 x - 1 = -3 x + 12$, referindo que os mesmos foram determinados com recurso às funcionalidades da calculadora gráfica.....	5 pontos
	Apresentar um estudo do sinal da função $f(x) = -3 x + 12$ em todo o seu domínio ou indicar que $f(x) \geq 0$ se e só se $x \in [-4,4]$ por análise do gráfico da função	5 pontos
	Representar o conjunto solução da inequação sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos.....	5 pontos
7.1.	10 pontos
	Revelar compreensão de que $ x - 2 = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$ indicando que $ x - 2 = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases}$ (ou equivalente) ou que $3 x - 2 - 6 = \begin{cases} 3(x - 2) - 6 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ 3(-x + 2) - 6 & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases}$ (ou equivalente).....	5 pontos
	Escrever $f(x) = \begin{cases} 3x - 12 & \text{se } x \geq 2 \\ -3x & \text{se } x < 2 \end{cases}$ (ou equivalente)	5 pontos

7.2 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1º Processo

Escrever $f(x) = 0$ ou $3|x - 2| - 6 = 0$ 5 pontos

Determinar as duas soluções da equação $3|x - 2| - 6 = 0$ 10 pontos

2º Processo

Apresentar um esboço gráfico da função f que evidencie que a função tem dois zeros e o vértice do gráfico é um ponto do 4º quadrante 5 pontos

Indicar que 0 e 4 são os zeros da função, referindo que os mesmos foram determinados com recurso às funcionalidades da calculadora gráfica..... 10 pontos

7.3. 10 pontos

Indicar que $D'_f = [-6, +\infty[$ 10 pontos

7.4 20 pontos

(a)

Indicar que a proposição é *falsa*..... 2 pontos

Apresentar uma justificação 8 pontos

Nota: A negação das afirmações apresentadas não é considerada, só por si, uma justificação da falsidade das afirmações.

Possíveis justificações:

- Indicar que a função é decrescente no intervalo $]-\infty, 2]$.
- Indicar que a função é crescente apenas no intervalo $[2, +\infty[$.
- Determinar a imagem de dois objetos, $x_1, x_2 \in]-\infty, 2]$, tais que $x_1 > x_2$, evidenciar $f(x_1) < f(x_2)$ e concluir que a função não é decrescente no intervalo $]-\infty, 2]$.

- (b) Indicar que a proposição é *falsa* (F) 2 pontos
 Apresentar uma justificação 8 pontos

Nota: A negação das afirmações apresentadas não é considerada, só por si, uma justificação da falsidade das afirmações.

Possíveis justificações:

- Apresentar um contra-exemplo (e.g. $f(1) > f(2)$ e $\{1\} \in D_f$, logo $f(2)$ não é um máximo absoluto da função f)
- Referir que f não tem máximo absoluto, pois a função é estritamente decrescente em $]-\infty, 2]$ e estritamente crescente em $[2, +\infty[$, apresentando um esboço gráfico da função

7.5. **30 pontos**

(a)

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos

1º Processo:

Escrever $f(x) = -3 \Leftrightarrow 3|x - 2| - 6 = -3$ (ou equivalente)..... 4 pontos

Resolver a equação $3|x - 2| - 6 = -3$ e indicar que a condição $3|x - 2| - 6 = -3$ (ou outra equivalente) é equivalente a (ou implica que):

$x = 3 \vee x = 1$ 7 pontos

Apresentar corretamente o conjunto solução: $\{1,3\}$ 4 pontos

2º Processo:

Escrever $f(x) = -3 \Leftrightarrow 3|x - 2| - 3 = 0$ (ou equivalente)..... 4 pontos

Determinar, os zeros da função real de variável real g definida pela expressão $g(x) = 3|x - 2| - 3$ 7 pontos

Apresentar corretamente o conjunto solução: $\{1,3\}$ 4 pontos

(b)

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos

1º Processo:

Escrever $f(x) < 3 \Leftrightarrow 3 x - 2 - 6 < 3$ (ou equivalente).....	4 pontos
Resolver a inequação $3 x - 2 - 6 < 3$ e indicar que a condição $3 x - 2 - 6 < 3$ (ou outra equivalente) é equivalente a (ou implica que): $x \in] - 1, 5[$	7 pontos
Apresentar corretamente o conjunto solução.....	4 pontos
2º Processo:	
Escrever $f(x) < 3 \Leftrightarrow 3 x - 2 - 9 < 0$ (ou equivalente).....	4 pontos
Determinar, os zeros da função real de variável real g definida pela expressão $g(x) = 3 x - 2 - 9$	3 pontos
Apresentar um estudo do sinal da função $g(x) = 3 x - 2 - 9$ em todo o seu domínio ou indicar que $g(x) < 0$ se e só se $x \in] - 1, 5[$ por análise do gráfico da função	4 pontos
Apresentar corretamente o conjunto solução	4 pontos

Anexo L: Proposta de Resolução da Questão-aula

Grupo I

1.

Como $x < 0$, então $|x| = -x$. Substituindo na expressão:

$$-\frac{|x|}{x} + |-1|^3 = -\frac{(-x)}{x} + |-1|^3 = \frac{x}{x} + 1^3 = 1 + 1 = 2$$

R.: (D) 2

2.

$$|x + 4| = |x - 2| \Leftrightarrow |x - (-4)| = |x - 2|$$

A condição pode ler-se: a distância de x a -4 é igual à distância de x a 2 .

O ponto médio do segmento que une os pontos que representam o -4 e o 2 na reta numérica é dado

$$\text{por: } x = \frac{-4+2}{2} = -1$$

Logo, -1 é a única solução da equação.

$$|x - (-4)| = |x - 2| \Leftrightarrow x = -1$$

$$C.S. = \{-1\}$$

R.: (A) $\{-1\}$

3.

A função f é uma função do tipo $f(x) = a|x - h| + k$. O gráfico da função f pode ser obtido do gráfico da função módulo por uma translação de vetor (h, k) . Como a função f tem o vértice no segundo quadrante, $h < 0$ e $k > 0$.

A única opção que cumpre com este requisito é a opção (D):

$$f(x) = |x + 3| + 1 \Leftrightarrow f(x) = |x - (-3)| + 1$$

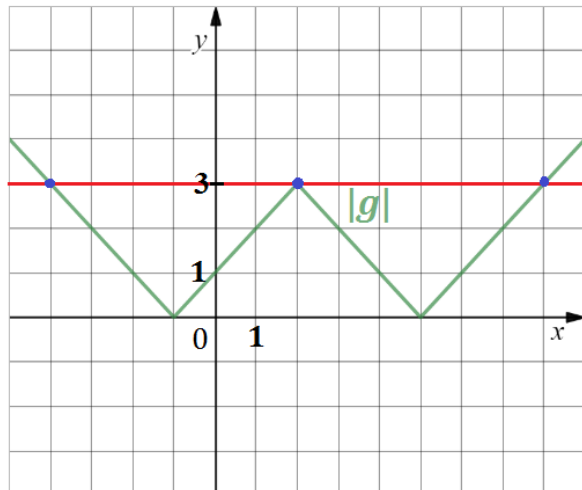
Neste caso, $h = -3$ e $k = 1$

R.: (D) $f(x) = |x + 3| + 1$

4.

O gráfico de h obtém-se a partir do gráfico de g aplicando uma reflexão de eixo Ox a todos os pontos do gráfico com ordenada negativa. Na figura ao lado, está representado parte do gráfico da função h , obtido deste modo.

Das equações apresentadas, apenas $h(x) = 3$ tem exatamente três soluções. A reta de equação $y = 3$ intersesta a linha do gráfico de h em três pontos distintos.



R.: (D) $h(x) = 3$

5.

Se o contradomínio de f é $]-\infty, 2]$, o gráfico da função f encontrar-se-á no interior do semiplano definido por $y \leq 2$ e assinalado a cor verde na Figura 1. Também se traçou, no interior desse semiplano, uma possível representação da função f .

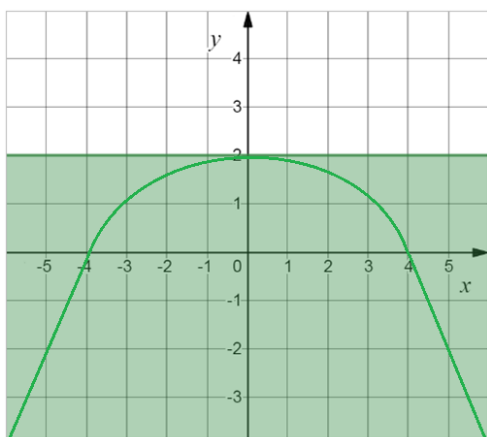


Figura 1

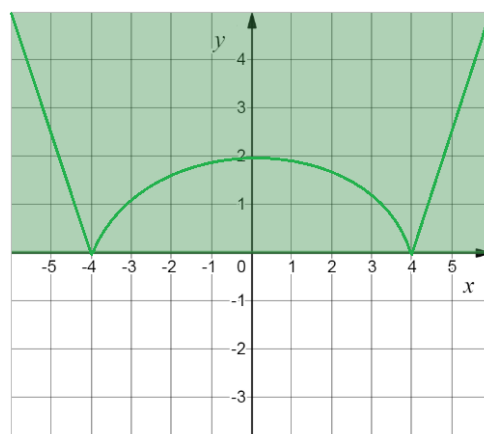


Figura 2

O gráfico de j obtém-se a partir do gráfico de f aplicando uma reflexão de eixo Ox a todos os pontos do gráfico com ordenada negativa. Logo, o gráfico da função j encontrar-se-á no interior do semiplano definido por $y \geq 0$ e assinalado a cor verde na Figura 2. Na Figura 2 também se traçou, no interior desse semiplano, uma possível representação da função j .

Conclusão: O contradomínio de j é $[0, +\infty[$

R.: (B) $[0, +\infty[$

Grupo II

6.

$$13 - 3|x| \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3|x| \geq 1 - 13$$

$$\Leftrightarrow -3|x| \geq -12$$

$$\Leftrightarrow 3|x| \leq 12$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$C.S. = [-4, 4]$$

7.

$$7.1. \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = 3|x - 2| - 6 \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 3(x - 2) - 6 & \text{se } x \geq 2 \\ 3(-x + 2) - 6 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 3x - 6 - 6 & \text{se } x \geq 2 \\ -3x + 6 - 6 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 3x - 12 & \text{se } x \geq 2 \\ -3x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

7.2.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3|x - 2| - 6 = 0$$

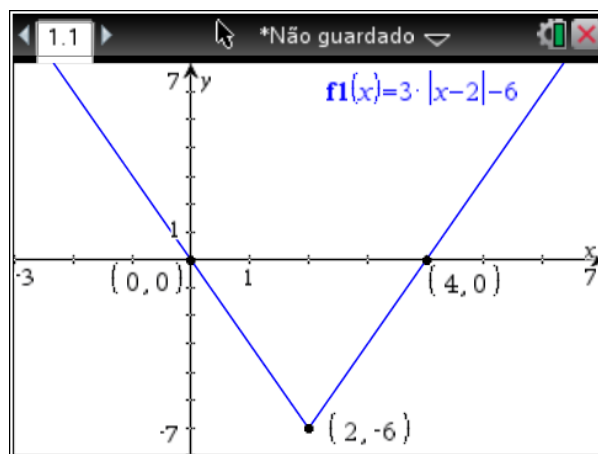
$$\Leftrightarrow 3|x - 2| = 6$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| = 2$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 2 \quad \vee \quad x - 2 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + 2 \quad \vee \quad x = -2 + 2$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \quad \vee \quad x = 0$$



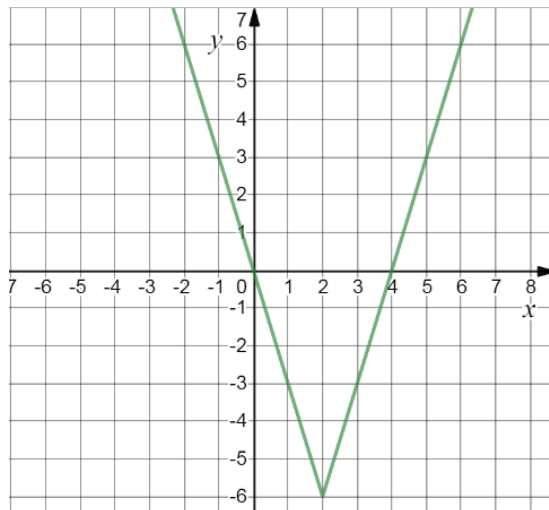
Conjunto dos zeros de f : $\{0, 4\}$

7.3. (Por observação da representação gráfica da função f)

$$D'_f = [-6, +\infty[$$

7.4. (a) A proposição é falsa, pois, como é possível observar graficamente, no intervalo $]-\infty, 2]$, a função f é decrescente.

Esboço gráfico de f



(b) A proposição é falsa, pois, dado que a função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 2]$ e estritamente crescente em $[2, +\infty[$, $f(2) = -6$ é o mínimo absoluto da função f .

7.5.

(a) $f(x) = -3 \Leftrightarrow 3|x - 2| - 6 = -3$

$$\Leftrightarrow 3|x - 2| = -3 + 6$$

$$\Leftrightarrow 3|x - 2| = 3$$

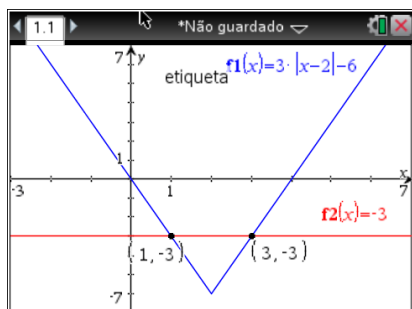
$$\Leftrightarrow |x - 2| = 1$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 1 \vee x - 2 = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 2 \vee x = -1 + 2$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$

$$C.S. = \{1, 3\}$$



(b) $f(x) < 3 \Leftrightarrow 3|x - 2| - 6 < 3$

$$\Leftrightarrow 3|x - 2| < 3 + 6$$

$$\Leftrightarrow 3|x - 2| < 9$$

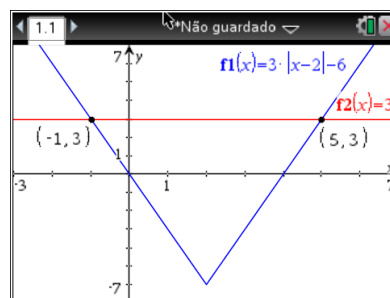
$$\Leftrightarrow |x - 2| < 3$$

$$\Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3$$

$$\Leftrightarrow -3 + 2 < x < 3 + 2$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 5$$

$$C.S. =]-1, 5[$$



Anexo M: Plano de Aula Síncrona N.º 1

MATEMÁTICA A – 10.º ANO

Plano da Aula Síncrona N.º 1

Domínio: FRVR10 – Funções Reais de Variável Real

Subdomínio: Generalidades acerca de Funções Reais de Variável Real

Data: Quinta-feira, 14 de maio de 2020 | **Hora:** 9:30h | **Duração:** 45 min(‘)

SUMÁRIO

Definição e significado geométrico de *Módulo*.

Resolução de equações envolvendo expressões com módulos.









PRINCIPAIS OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Reconhecer o «módulo» de um número real x como a distância medida entre o ponto que representa x e o 0, na reta numérica;
- Reconhecer que o módulo de um número real, x , é igual a x , se x não for negativo, ou a $-x$, se x for negativo;
- Resolver equações do tipo $a|x| + b = c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$);
- Utilizar linguagem matemática para comunicar e fundamentar conclusões;
- Desenvolver autonomia e raciocínio matemático (classificação, comparação, generalização, identificação de padrões, justificação, validação).

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Propriedades das operações com radicais e com potências de expoente natural;
- Funções definidas por ramos;
- Classificação de condições.

RECURSOS

DO ALUNO	DA PROFESSORA
 Ficha de Trabalho N.º 1 (Anexo A)	 Ficha de Trabalho N.º 1 (Anexo A)
 <i>Hardware</i> com acesso à internet	 <i>Hardware</i> com acesso à internet
 <i>Microsoft Teams</i>	 <i>Microsoft Teams</i>
 Camara digital ou outro hardware para digitalização de imagem	 <i>PowerPoint</i>

MOMENTOS DA AULA	DURAÇÃO
1. Registo do sumário	1'
2. Apresentação da unidade didática e dos modos de trabalho	1'
3. Notas introdutórias: significado geométrico de $ x $	3'
4. Definição analítica de $ x $ por ramos (Atividade 1.1.)	10'
5. Cálculo do valor numérico de expressões envolvendo módulos (Atividade 1.2.)	3'
6. Conjunto solução de equações escritas na forma $ x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) (Atividade 1.3.)	10'
7. Resolução de equações do tipo $a x + b = c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) (Atividade 1.4.)	15'
8. Encerramento da aula	2'

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário

- O sumário será projetado no início da aula e, posteriormente, registado na plataforma virtual de comunicação (*Teams*), onde ficará disponível para consulta.

2. Apresentação da unidade didática e dos modos de trabalho

- Será explicado que a aula será dedicada ao estudo e exploração do conceito de «valor absoluto» ou «módulo» de um número real e que a atividade desenvolvida no decurso das próximas sessões síncronas precederá o estudo de uma nova família de funções. Será também comunicado que o trabalho realizado nesta sessão será desenvolvido a partir das tarefas propostas na Ficha de Trabalho N.º 1, a qual foi disponibilizada na plataforma *Teams*.
- Os alunos serão advertidos para o facto de, finda a sessão síncrona, deverem submeter todo o trabalho por eles realizado durante a sessão, através da plataforma *Teams*.
- A professora explicará que, além das tarefas propostas nas fichas de trabalho que serão discutidas durante as sessões síncronas, serão ainda disponibilizadas, à medida que se for avançando na matéria, atividades complementares que os alunos

devem realizar para estudo. Uma proposta de resolução dessas atividades será também disponibilizada, assim que os alunos a solicitem.

- A professora manifestará a sua disponibilidade para apoiar os alunos no seu trabalho, nomeadamente prestando esclarecimento de dúvidas, por escrito, através do canal da disciplina ou, individualmente, por chat.

3. Notas introdutórias: significado geométrico de $|x|$

- As *Notas* constantes nas primeira e segunda páginas da Ficha de Trabalho N.º 1 serão apresentadas pela professora, com recurso ao software *MS PowerPoint*. Nestas *Notas* introdutórias, é recordado o significado geométrico de módulo de um número, é apresentada a notação algébrica utilizada para representá-lo e são introduzidas as seguintes propriedades: (i) $|0| = 0$, e (ii) $|x| = |-x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

Módulo de um número real x

- Representa-se pela expressão $|x|$
- É definido como: a **distância entre os pontos que representam x e 0 na reta numérica.**

Significado geométrico de $|x|$

$x > 0$

Diagrama: Uma reta numérica com o ponto 0 marcado. Um ponto x está à direita de 0. Uma seta vermelha indica a distância entre 0 e x , rotulada como $|x|$.

4. Definição analítica de $|x|$ por ramos (**Atividade 1.1.**)

- Os alunos deverão realizar a **Atividade 1.1.**
- Um aluno será chamado a participar oralmente na sessão. Deverá indicar o valor numérico das expressões apresentadas nas alíneas de **(a)** a **(e)** da **Atividade 1.1.** e, a partir da exploração dos casos particulares aí considerados, deverá estabelecer uma relação entre x e $|x|$ que lhe permita definir analiticamente $|x|$ por ramos, completando a expressão apresentada na alínea **(f)**.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- Os alunos poderão indicar que as expressões « $|-4|$ » e « $|\frac{-1}{2}|$ » têm valores numéricos negativos. Neste caso, a professora poderá remeter os alunos para as representações dos reais -4 e $-\frac{1}{2}$ na reta numérica e recordar o significado geométrico de módulo. A professora poderá questionar os alunos quanto à possibilidade de o módulo de um número real poder assumir um valor negativo. Se necessário, recordará que a distância é uma grandeza escalar que não assume valores negativos.

- Os alunos poderão ter dificuldades em interpretar expressões que envolvam definições por ramos. A professora poderá auxiliá-los na interpretação da expressão (parcialmente) apresentada na alínea (f) da tarefa, fazendo-os notar que $|x|$ será definido de formas distintas, conforme $x \geq 0$ ou $x < 0$. A professora prosseguirá considerando, separadamente, a análise de exemplos com $x \geq 0$ e com $x < 0$ e questionando os alunos quanto à relação que é possível estabelecer entre x e $|x|$, em cada um dos dois casos.

Definição analítica de $|x|$

ATIVIDADE 1.1.
(f)

O módulo de um número real x é o número real definido por:

$$|x| = \begin{cases} \dots, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Exemplos ($x \geq 0$)	$ 0 = 0$ $ 5 = 5$ $ \sqrt{2} = \sqrt{2}$
Generalização (se $x \geq 0$)	$ x = \dots$

5. Cálculo do valor numérico de expressões envolvendo módulos (**Atividade 1.2.**)

- Serão analisados os dois exemplos apresentados na página 3 da Ficha de Trabalho N.º 1, envolvendo a aplicação da definição analítica de $|x|$ por ramos na determinação do valor numérico de expressões envolvendo módulos.

Aplicação da definição analítica de $|x|$
no cálculo do valor numérico de expressões

$|\sqrt{3}| = \sqrt{3} \rightarrow$ Neste caso, $x = \sqrt{3}$ e, portanto, $x \geq 0$. Então: $|x|$ é o próprio x .

$|\frac{-2}{7}| = \frac{2}{7} \rightarrow$ Neste caso, $x = -\frac{2}{7}$ e, portanto, $x < 0$. Então: $|x|$ é o **simétrico** de x

Note que o simétrico de $-\frac{2}{7}$ é $\frac{2}{7}$, pois: $-(-\frac{2}{7}) = \frac{2}{7}$

▪ 0 ("zero") é o único número cujo módulo é 0.

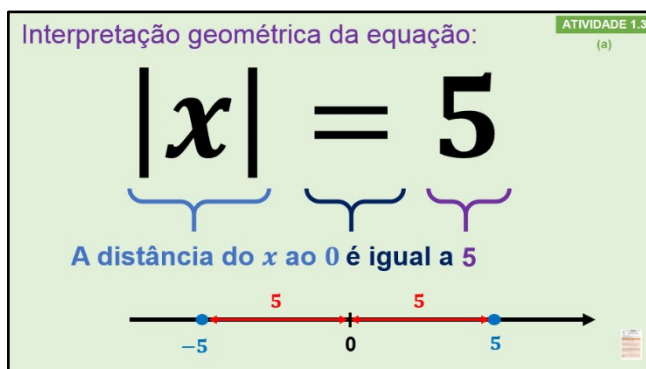
- De seguida, os alunos realizarão a **Atividade 1.2.**
- Será solicitada a participação oral de um aluno para que exponha o seu raciocínio durante a realização a tarefa.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- A representação de uma constante por uma letra pode gerar alguma confusão na determinação do valor de « $|\pi|$ ». Neste caso, a professora poderá questionar os alunos quanto ao sinal de π e remetê-los para a definição: $|x| = x$ se $x \geq 0$. Também poderá questionar os alunos quanto ao valor aproximado de π , recorrer a uma representação visual na reta numérica do racional 3,14 e questionar os alunos quanto ao significado geométrico de $|3,14|$.
- Os alunos poderão supor que não é possível determinar o valor numérico da expressão considerada em 1.2.1., uma vez que a mesma apresenta uma variável, x , que pode assumir uma infinidade de valores. A professora poderá chamar a atenção dos alunos para o facto de ser indicado que a variável, x , apenas assume valores positivos e sugerir-lhes que considerem a definição analítica de $|x|$ por ramos para, por um processo de substituição, “desembaraçarem” de módulos a expressão apresentada.
- Se, depois de os alunos concluírem que podem substituir $|x|$ por x , os alunos apresentarem dificuldades no cálculo do valor numérico da expressão $\frac{x}{4x}$, a professora poderá recordar os alunos de que é aplicável a lei do corte na simplificação de frações que apresentem fatores comuns ou evidenciar que $\frac{x}{4x} = \frac{1}{4} \times \frac{x}{x} = \frac{1}{4} \times 1$
- Se for necessário, a professora recordará os alunos de algumas propriedades das operações com potências.

6. Conjunto solução de equações escritas na forma $|x| = a$ ($a \in \mathbb{R}$) (Atividade 1.3.)

- A professora começará por explicar que, nesta tarefa (Atividade 1.3.), os alunos deverão descobrir que valores pode assumir a incógnita, x , em cada equação, sendo que a mesma se encontra “entre módulos”.
- A professora prosseguirá explicado o raciocínio geométrico apresentado no exemplo da alínea (a), a partir de uma apresentação em *PowerPoint*. Concluirá, fazendo notar que o conjunto solução da equação considerada no exemplo é composto por dois

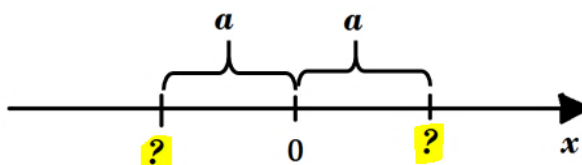


elementos. Na apresentação deste exemplo, será chamada a atenção dos alunos para a presença do conector lógico “v” e será recordado o seu significado.

- Os alunos deverão realizar as restantes alíneas da **Atividade 1.3**.
- Será solicitada a participação oral de alguns alunos na exposição dos seus raciocínios.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- A professora poderá complementar as representações na reta numérica com uma tradução para linguagem natural dos problemas com base na sua interpretação geométrica. Por exemplo, a professora poderá explicar a problemática apresentada na alínea (b) da seguinte forma: *A distância de x a 0 é $\frac{1}{2}$. Que número é x ?*
- Caso os alunos refiram apenas que a condição $|x| = -1$ é impossível porque “o módulo de um número nunca assume valores negativos” a professora questioná-los-á quanto ao *porquê*.
- A professora questionará os alunos quanto à representação simbólica do conjunto vazio.
- Na realização da alínea (d), a professora poderá sugerir que os alunos comecem por fazer uma análise dos conjuntos solução das equações do tipo $|x| = a$ (com $a > 0$) resolvidas nas alíneas anteriores no que respeita ao número de elementos que constituem esses conjuntos e que, depois, prossigam para a análise de casos em que $a < 0$ ou $a = 0$. A professora poderá apoiar o raciocínio geométrico dos alunos com uma representação visual do problema “ $|x| = a$ ” na reta numérica e questionar os alunos: *Suponhamos que a é um número positivo. Quantos pontos distam a unidades de 0 ? Então quantas soluções tem a equação $|x| = a$? Quais são?*



7. Resolução de equações do tipo $a|x| + b = c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) (Atividade 1.4.)

- Quatro alunos serão selecionados, à vez, para explicarem, oralmente, como será possível determinar o conjunto solução das equações apresentadas nas alíneas (a), (c), (f) e (g) da **Atividade 1.4**.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- Aquando da discussão das diferentes alíneas, a professora irá apresentando, por escrito, uma proposta de resolução em conformidade com o processo de resolução descrito pelo aluno selecionado para participar.
- A professora poderá sugerir aos alunos que comecem por aplicar os princípios de equivalência de equações que já conhecem de modo que expressão $|x|$ fique isolada no primeiro membro das equações e, assim, obtenham uma expressão simplificada na forma $|x| = k$. Se necessário, a professora recordará os alunos de alguns princípios de equivalência de equações.
- A professora incentivará os alunos a justificar os seus raciocínios, com base no significado geométrico de módulo.
- Na alínea **(f)**, a professora apelará à validação dos resultados obtidos, por substituição das soluções encontradas na equação inicial.

8. Encerramento da aula

- Os alunos serão informados de que, após a aula, deverão concluir a **Atividade 1.4.**, resolvendo autonomamente as alíneas **(b)**, **(d)** e **(e)**. Além disso, deverão realizar a **Atividade 1.5**. O trabalho realizado, durante e após a sessão, deverá ser submetido na plataforma virtual até às 11:00h do mesmo dia. Esta informação será também publicada no canal da disciplina. Depois de os alunos enviarem as suas resoluções, será disponibilizada uma proposta de resolução destas tarefas.
- Até à próxima aula síncrona, os alunos deverão ainda: ler as notas da página 7 da Ficha de Trabalho N.º 1, analisar os *Exemplos 12.1, 12.2 e 12.3* da página 132 do manual escolar e realizar a **Atividade 1.7** da Ficha de Trabalho N.º 1, a qual será discutida em aula. Além disso, deverão tentar resolver a **Atividade 1.6** da Ficha de Trabalho N.º 1, a partir da análise dos *Exemplos 2 e 3* apresentados no final da ficha (páginas 11 e 12). Esta informação será também publicada no canal da disciplina.
- A professora disponibilizar-se-á para comunicar com os alunos por mensagens através da plataforma *Teams*, caso estes precisem de apoio para a realização destas atividades ou de verem esclarecidas dúvidas.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Como atividade para estudo, será recomendada a realização das tarefas AC1 e AC2 das ficha de Atividades Complementares (Anexo G)

Uma proposta de resolução destas atividades será disponibilizada aos alunos, assim que estes a solicitem ou quando, após a próxima sessão síncrona, forem disponibilizadas novas atividades complementares.

Anexo N: Plano de Aula Síncrona N.º 2

MATEMÁTICA A – 10.º ANO

Plano da Aula Síncrona N.º 2

Domínio: FRVR10 – Funções Reais de Variável Real

Subdomínio: Generalidades acerca de Funções Reais de Variável Real

Data: Segunda-feira, 18 de maio de 2020 | **Hora:** 10:00h | **Duração:** 60 min

SUMÁRIO

Resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Resolver equações do tipo $|P(x)| = k$, em que $P(x)$ é um polinómio do 1.º ou do 2.º grau;
- Resolver inequações do tipo $a|P(x)| + b \geq c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) e do tipo $a|P(x)| + b \leq c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) em que $P(x)$ é um polinómio do 1º grau;
- Utilizar linguagem matemática para comunicar e fundamentar conclusões;
- Desenvolver autonomia e raciocínio matemático (classificação, comparação, identificação de padrões, validação).

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Conceito de módulo e definição algébrica, por ramos, de módulo de um número real;
- Propriedades da disjunção e conjunção de condições e classificação de condições.

RECURSOS

DO ALUNO	DA PROFESSORA
<ul style="list-style-type: none">📄 Ficha de Trabalho N.º 1 (Anexo A)💻 <i>Hardware</i> com acesso à internet🗣️ <i>Microsoft Teams</i>📷 Camara digital ou outro hardware para digitalização de imagem	<ul style="list-style-type: none">📄 Ficha de Trabalho N.º 1 (Anexo A)💻 <i>Hardware</i> com acesso à internet🗣️ <i>Microsoft Teams</i>📄 <i>PowerPoint</i>

MOMENTOS DA AULA	DURAÇÃO
1. Registo do sumário e informações	2'
2. Resolução de uma equação do tipo $ x - h = k$	5'
3. Equações $ P(x) = k$, em que $P(x)$ é um polinómio do 1º ou do 2º grau (Atividade 1.7.)	10'
4. Inequações $ x < a$ ($a \in \mathbb{R}^+$) (Atividade 1.5)	5'
5. Inequações $a x + b < c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) (Atividade 1.6)	15'
6. Inequações $ x - h < k$ e $ x - h > k$ ($k \in \mathbb{R}^+$) (Atividade 1.8)	5'
7. Inequações $a P(x) + b < c$ em que $P(x)$ é um polinómio do 1º grau (Atividade 1.9)	16'
8. Encerramento da aula	2'

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e informações

- O sumário será projetado no início da aula e, posteriormente, registado na plataforma virtual, onde ficará disponível para consulta.
- As tarefas que serão discutidas durante esta sessão haviam sido, em grande parte, indicadas aos alunos como trabalho para casa. Os alunos serão informados de que, finda a sessão síncrona, deverão submeter todo o trabalho que realizaram em casa ou realizarem durante esta sessão relativo às tarefas nela discutidas.
- A professora informará que já foram disponibilizadas, no canal da disciplina, novas atividades complementares para estudo.

2. Resolução de uma equação do tipo $|x - h| = k$

- A professora informará que se prosseguirá com o estudo de equações envolvendo módulos, mas considerando, agora, casos em que o número representado entre os símbolos de valor absoluto não é a incógnita das equações.

▪ Apresentará, como exemplo, a equação que surge na página 7 da Ficha de Trabalho N.º 1, assim como o raciocínio geométrico apresentado nas notas das páginas 7 e 8 e que permite determinar as soluções da equação tomada como exemplo. Fá-lo-á através de uma apresentação em *PowerPoint*. Durante a apresentação, a professora interagirá com os alunos, formulando-lhes questões para que eles se evolvam no raciocínio geométrico apresentado. A leitura destas notas, havia sido sugerida como T.P.C.

Resolva, em \mathbb{R} , a equação:

$$|x - 1| + 1 = 4 \Leftrightarrow |x - 1| = 4 - 1$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| = 3$$

Interpretação geométrica da equação:
A distância do $x - 1$ ao 0 é 3 .

Que número é então $x - 1$?

3. Equações $|P(x)| = k$, em que $P(x)$ é um polinómio do 1º ou do 2º grau (Atividade 1.7.)

- Os alunos deverão realizar a **Atividade 1.7**.
- Três alunos serão chamados a explicar o seu raciocínio para resolver as equações apresentadas nas três alíneas da tarefa.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

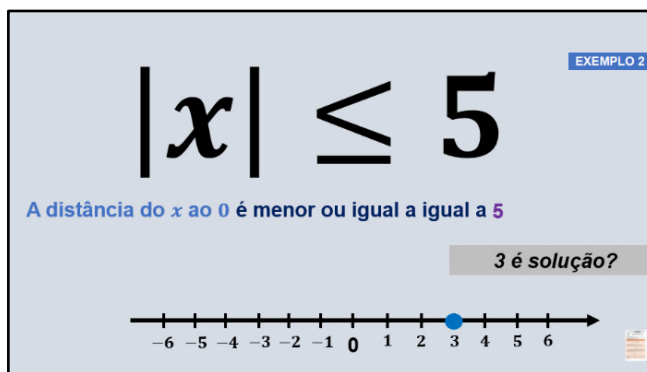
- Sempre que os alunos manifestem dificuldades em “desembaraçar” de módulos as equações, a professora incentivá-los-á a desenvolver um raciocínio com base no significado geométrico do conceito e com o apoio de uma representação visual, sempre que esta se revele necessária. Para facilitar o desenvolvimento deste tipo de raciocínio, a professora poderá questionar os alunos relativamente a como resolveriam as equações apresentadas caso estas apresentassem apenas uma variável, y , entre os símbolos de valor absoluto. Por exemplo, para a alínea (a), os alunos poderão ser levados a pensar, primeiro, como resolveriam a equação $|y| = 5$ e, depois, por analogia ou por um processo de substituição ($y = 3x - 1$), concluir quanto às soluções da equação $|3x - 1| = 5$.
- Sempre que os alunos concluam que o conjunto solução da equação considerada é vazio, serão chamados a apresentar uma justificação para o facto de a condição em causa ser uma condição impossível.

4. Inequações $|x| < a$ ($a \in \mathbb{R}^+$) (Atividade 1.5)

▪ Será discutida a resolução da **Atividade 1.5**. A mesma será apresentada de forma dinâmica, através de uma apresentação em *PowerPoint*, e em interação com os alunos, que deverão partilhar as suas respostas às questões desta tarefa de exploração e explicar os seus raciocínios. Esta atividade já foi realizada autonomamente pelos alunos e por estes enviada através da plataforma digital, após a última aula.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

▪ Depois de alunos interpretarem geometricamente a condição, com base no significado geométrico de módulo, a professora começará por sugerir possíveis soluções, procurando que estes as validem ou invalidem de forma justificada, e que, finalmente, concluam quanto à existência de uma infinidade de soluções para a inequação. Por exemplo: *Será que 3 é solução da inequação? Porquê? E -6? Porque não? Quantas soluções terá esta equação? Como poderemos representá-las?*



▪ Porque a distinção entre a representação de intervalos de números reais que contêm ou não contêm os seus extremos, habitualmente, gera dúvidas entre os alunos da turma, a professora questionará os alunos quanto à simbologia adequada para representar o conjunto solução neste caso. Além disso poderá perguntar: *O que poderíamos alterar nesta inequação para que o conjunto solução fosse $] - 5, 5[$ em vez de $[-5, 5]$?*

▪ Na discussão da alínea (c), primeiramente, a professora pedirá a um aluno para explicar como concluiu quanto ao conjunto solução da inequação. Depois, procurará interagir especificamente com os alunos que consideraram apenas soluções não-negativas para a inequação, na resolução que entregaram desta tarefa, antes da aula. Poderá questioná-los quanto à interpretação geométrica da inequação: *Como faria a leitura da expressão $|x| \leq a$? Poderá prosseguir sugerindo a atribuição de um valor ao parâmetro, a , perguntando-lhes quantos pontos da reta numérica distam, do 0, as a unidades consideradas e questioná-los quanto à localização dos pontos que distam do 0 menos unidades que as consideradas. Por exemplo: *Suponhamos que $a = 3$. Quantos pontos distam de 0 três unidades? Que números representam esses pontos? Na reta numérica onde estão localizados os pontos que estão a uma**

distância do 0 inferior a 3 unidades? Depois, poderá confrontar os alunos com as mesmas questões, mas, desta vez, considerando que a pode ser um número real positivo qualquer.

5. Inequações $a|x| + b < c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) (**Atividade 1.6**)

- A professora fará notar que os raciocínios geométricos a que os alunos recorreram para responder às questões da **Atividade 1.5**. Ihes permitirão resolver as inequações apresentadas na **Atividade 1.6**. Esta tarefa será proposta aos alunos.
- A professora recordará a propriedade apresentada na página 7 da Ficha de Trabalho N.º 1, a partir do exemplo de aplicação dessa propriedade na simplificação de inequações aí considerado.

Propriedade: Se a e b são números reais e $a < b$, então:

- $ac < bc$ se c for um real positivo
- $ac > bc$ se c for um real negativo

Exemplo de aplicação da propriedade na simplificação de inequações:
(x é um número real)

- $2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$ → Neste caso multiplicamos ambos os membros por $c = \frac{1}{2}$.
O sentido da desigualdade mantém-se.
- $-2x < -4 \Leftrightarrow x > 2$ → Neste caso multiplicamos ambos os membros por $c = -\frac{1}{2}$.
O sentido da desigualdade inverte.

- À vez, quatro alunos serão chamados a explicar como resolveram as alíneas **(a)**, **(d)**, **(g)** e **(h)** da **Atividade 1.6**.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- Aquando da resolução das diferentes alíneas, a professora irá apresentando, por escrito, uma resolução em conformidade com o processo de resolução descrito pelo aluno selecionado para participar.
- A professora colocará questões aos alunos para que estes fundamentem não só as suas conclusões finais, mas também conclusões intermédias.
- Sempre que considere útil, a professora recorrerá a representações na reta numérica. Ainda que os alunos descrevam processos de resolução puramente analíticos, a representação na reta numérica será utilizada como estratégias para que os alunos desenvolvam uma melhor compreensão do significado dos conectores lógicos utilizados (\vee , \wedge) e das propriedades que eventualmente apliquem (e.g. $|x| > k \Leftrightarrow x < -k \vee x > k$).

▪ Caso os alunos não consigam resolver a alínea (h), a professora procurará orientar os seus raciocínios. Auxiliada por uma apresentação em *PowerPoint*, a professora começará por sugerir que os alunos “desembarquem” de módulos a inequação, recorrendo à definição analítica de $|x|$, como numa tarefa anteriormente realizada (**Atividade 1.2.1**),

$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Atividade 1.6. (h)

$|x| > x$

<p style="text-align: center;">Caso 1: $x \geq 0$</p> <p style="text-align: center; color: blue;">Se $x \geq 0$, então $x = x$</p> <p style="text-align: center; color: blue;">$x > x \Leftrightarrow x > x$</p> <p style="text-align: center; font-size: 0.8em; background-color: #e0e0e0; padding: 2px;">Esta condição é possível? O que se conclui?</p>	<p style="text-align: center;">Caso 2: $x < 0$</p>
---	---

chamando-lhes a atenção para o facto de terem que considerar, separadamente, dois casos: $x \geq 0$ e $x < 0$, pois, neste caso, $x \in \mathbb{R}$. Depois de concluírem quanto à possibilidade de substituição de $|x|$ por x ou de $|x|$ por $-x$, conforme o caso, a professora poderá questionar os alunos quanto às condições (equivalentes) obtidas em cada caso: *Nesse caso, a condição obtida é possível? Se sim, o que podemos concluir? Se não, o que podemos concluir?* Alternativamente, a professora pode levar os alunos a considerar casos particulares, atribuindo diferentes valores a x , e a concluir se são, ou não, soluções da inequação, por um processo de verificação. Deste modo, poderá, possivelmente, incentivá-los a concluírem quanto ao conjunto solução da inequação por um processo de generalização.

6. Inequações $|x - h| < k$ e $|x - h| > k$ ($k \in \mathbb{R}^+$) (**Atividade 1.8**)

- Os alunos deverão realizar a **Atividade 1.8**.
- Dois alunos serão chamados a participar, explicando o seu raciocínio para resolver as duas alíneas da tarefa.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- A professora irá sugerir aos alunos que mobilizem os seus conhecimentos sobre o significado geométrico de módulo.
- A professora poderá incentivar os alunos a recorrerem, mais uma vez, a um raciocínio geométrico, colocando-lhes, por exemplo, as seguintes questões: *Como interpreta geometricamente cada uma das inequações? Pense primeiro como faria a leitura das expressões se, entre os símbolos de valor absoluto, estivesse apenas um x .*
- A professora poderá sugerir aos alunos que interpretem a expressão $x - 1$ como a representação de um número real y , tal que $y = x - 1$, e recorram a estratégias de resolução análogas às utilizadas na **Atividade 1.6**.

▪ Depois de os alunos concluírem quanto ao conjunto solução das inequações, a professora chamará a atenção de todos para os *Exemplos 3 e 4*, apresentados nas páginas 12 e 13 na Ficha de Trabalho N.º 1, nos quais é apresentada uma proposta de resolução das duas inequações da **Atividade 1.8**, e incentivá-los-á a analisar esses exemplos de forma mais pormenorizada durante o seu trabalho de estudo autónomo, depois da aula síncrona. A professora chamará a atenção dos alunos para a utilização adequada dos conectores lógicos \wedge e \vee , por comparação desses dois exemplos. Além disso, e tomando como ponto de partida a resolução proposta no *Exemplo 3*, recordará os alunos de que $-4 \leq x - 1 \leq 4$ e $x - 1 \geq -4 \wedge x - 1 \leq 4$ são duas formas diferentes de representar a conjunção das mesmas condições.

7. Inequações $a|P(x)| + b < c$ em que $P(x)$ é um polinómio do 1º grau (Atividade 1.9)

▪ Os alunos deverão realizar as alíneas **(a)**, **(d)** e **(e)** da **Atividade 1.9**. Três alunos serão selecionados para explicar os seus raciocínios para determinar o conjunto solução de cada inequação.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

▪ Aquando da resolução das diferentes alíneas, a professora irá apresentando, por escrito, uma resolução em conformidade com o processo de resolução descrito pelo aluno selecionado para participar.

▪ A professora poderá sugerir aos alunos que recorram a um processo de substituição da expressão apresentada entre os símbolos de módulo por uma variável, y , dada por essa expressão.

▪ A professora poderá sugerir aos alunos que isolem a expressão com módulos num dos membros da inequação e chamar a atenção para a importância de uma análise da condição que se obtém tendo por base o significado dos conceitos matemáticos envolvidos. Depois de isolar a expressão com módulos num dos membros da inequação, a professora incentivará os alunos a questionarem-se: *A condição é possível? É impossível? É universal em \mathbb{R} ? Em cada caso: O que posso concluir quanto ao conjunto solução da inequação?* Os alunos serão também incentivados a justificar as suas conclusões: *Porque é que a condição é impossível? Porque é que a condição é universal?*

▪ No apoio ao raciocínio dos alunos, as estratégias visuais de representação na reta numérica continuarão a ser privilegiadas e, sempre que os alunos utilizem incorretamente os conectores lógicos \wedge e \vee , o seu significado será recordado.

8. Encerramento da aula

- Será indicado aos alunos que, após a aula e autonomamente, realizem as alíneas **(b)**, **(c)** e **(f)** da **Atividade 1.9**, concluindo, assim, a Ficha de Trabalho N.º 1. Até às 19:00h do mesmo dia, deverão submeter as suas resoluções das **Atividades 1.6**, **1.7**, **1.8** e **1.9**. Após as 19:00h, será disponibilizada uma proposta de resolução destas tarefas.
- Os alunos serão informados de que já se encontram disponíveis mais atividades complementares para estudo (AC3 à AC8), assim como uma proposta de resolução das atividades complementares disponibilizadas na última aula (AC1 e AC2).

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Como atividade para estudo, será recomendada a realização das seguintes tarefas AC3 a AC8 da ficha de Atividades Complementares (Anexo G).

Uma proposta de resolução destas atividades será disponibilizada aos alunos, assim que estes a solicitem ou quando forem disponibilizadas novas atividades complementares, após a próxima aula síncrona.

Anexo O: Plano de Aula Síncrona N.º 3

MATEMÁTICA A – 10.º ANO

Plano da Aula Síncrona N.º 3

Domínio: FRVR10 – Funções Reais de Variável Real

Subdomínio: Generalidades acerca de Funções Reais de Variável Real

Data: Terça-feira, 19 de maio de 2020 | **Hora:** 14:30h | **Duração:** 60 min

SUMÁRIO

Significado geométrico de $|a - b|$. Resolução de equações e de inequações do tipo $|x - a| = |x - b|$ e $|x - a| > |x - b|$, respetivamente.

Aplicação do significado geométrico do módulo da diferença de dois números reais à resolução de um problema de modelação em contexto real – introdução da tarefa.









PRINCIPAIS OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Reconhecer que a distância entre os pontos da reta numérica que representam dois números reais, a e b , é igual a $|b - a|$ e a $|a - b|$;
- Resolver equações e inequações do tipo $|x - a| = |x - b|$ e $|x - a| > |x - b|$, respetivamente;
- Utilizar linguagem matemática para comunicar e fundamentar conclusões;
- Desenvolver autonomia e raciocínio matemático (comparação, generalização, identificação de padrões, justificação).

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Conceito de módulo;
- Abcissa do ponto médio de um segmento de reta definido na reta numérica.

RECURSOS

DO ALUNO	DA PROFESSORA
 Ficha de Trabalho N.º 2 (Anexo C)	 Ficha de Trabalho N.º 2 (Anexo C)
 <i>Hardware</i> com acesso à internet	 <i>Hardware</i> com acesso à internet
 <i>Microsoft Teams</i>	 <i>Microsoft Teams</i>
 Camara digital ou outro hardware para digitalização de imagem	 <i>PowerPoint</i>

MOMENTOS DA AULA	DURAÇÃO
1. Registo do sumário	2'
2. Significado geométrico de $ a - b $ e sua aplicação à resolução de uma equação do tipo $ x - c = x - d $ (Atividade 2.1)	15'
3. Significado geométrico de $ a - b $: sistematização e notas importantes	5'
4. Equações do tipo $ x - c = x - d $ (Atividade 2.2.)	11'
5. Inequações do tipo $ x - c \leq x - d $ (Atividade 2.3.)	15'
6. Introdução da tarefa apresentada na Atividade 2.4	10'
7. Encerramento da aula	2'

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário

- O sumário será projetado no início da aula e, posteriormente, registado na plataforma virtual, onde ficará disponível para consulta.

2. Significado geométrico de $|a - b|$ e sua aplicação à resolução de uma equação do tipo $|x - c| = |x - d|$ (**Atividade 2.1**)

- A professora introduzirá a **Atividade 2.1**, explicando que se trata de uma atividade de exploração que os alunos deverão realizar e que as conclusões recorrentes da realização desta tarefa permitirão aos alunos resolver, facilmente, equações do tipo $|x - c| = |x - d|$.
- Diversos alunos serão questionados, à vez, para responder às questões colocadas nas diferentes alíneas da tarefa, explicar os seus raciocínios e justificar as suas conclusões.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:


- Para apoiar a discussão da tarefa, a professora recorrerá a uma apresentação em *PowerPoint* onde serão apresentadas, além do enunciado da tarefa, as representações na reta numérica. Estas representações serão apresentadas à medida que os alunos forem explicando como estão a realizar a sua exploração e, portanto, sem se “anteciparem” à atividade dos alunos.

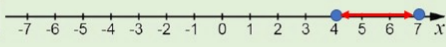
ATIVIDADE 2.1

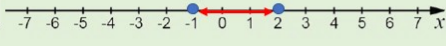
2.1.1. Indique o valor das expressões numéricas:

(a) $|5 + 1| =$ 6 (b) $|4 - 7| =$ 3 (c) $|-1 - 2| =$ 3

2.1.2. Escreva cada uma das expressões apresentadas "entre módulos" nas alíneas anteriores na forma $|a - b|$. Depois, assinale na reta numérica os pontos de abscissa a e b , respetivamente, tal como no exemplo apresentado.

(a) $|5 + 1| =$ $|5 - (-1)|$ 

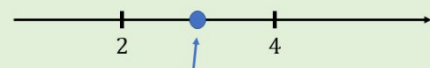
(b) $|4 - 7| =$ 

(c) $|-1 - 2| =$ 

2.1.3. Para cada uma das alíneas anteriores, compare a distância entre os pontos da reta numérica que representam os números a e b e o valor de $|a - b|$. O que conclui?

- Caso os alunos manifestem dificuldades em fazer a leitura da equação $|x - 2| = |x - 4|$ em **2.1.2.** com base numa sua interpretação geométrica, a professora poderá sugerir aos alunos comecem por interpretar, separadamente, as expressões apresentadas em cada um dos membros da equação, com base no significado geométrico de $|a - b|$, e que acabou de ser explorado pelos alunos.
- Para ajudar na determinação da solução da equação, a professora apresentará uma representação da reta numérica, onde se encontrarão assinalados os pontos que representam o 2 e o 4, e poderá questionar os alunos: *Qual é o número, x , que se encontra à mesma distância do 2 e do 4?*
- Os alunos serão incentivados a recordar o conceito de *ponto médio de um segmento de reta* e a *fórmula que permite o seu cálculo*. A professora poderá recordar este conceito, começando por perguntar: *Consideremos o segmento de reta que une os pontos que representam o 2 e o 4, respetivamente. Que nome damos ao ponto equidistante das extremidades desse segmento? Como calcularíamos a abscissa do ponto médio de um segmento com extremos em a e b (quaisquer)?*

2.1.5. Que valores de x tornam verdadeira a igualdade: $|x - 2| = |x - 4|$?
Indique-os e justifique a sua resposta.



Ponto médio: $x = \frac{2 + 4}{2} = 3$ **C. S. = ?**

3. Significado geométrico de $|a - b|$: sistematização e notas importantes

- Será apresentada uma sistematização das principais conclusões decorrentes da realização da **Atividade 2.1**, a partir do quadro intitulado «Sistematização» e apresentado na página 2 da Ficha de Trabalho N.º 2:

SISTEMATIZAÇÃO

A distância entre os pontos da reta numérica que representam os números reais a e b é igual a $|b - a|$ e a $|a - b|$.

e também do exemplo apresentado no quadro seguinte:

Expressão	Leitura da expressão com base no significado geométrico de:
$ x - 3 = 1$	<ul style="list-style-type: none"> Módulo de um número real, x <p style="text-align: center;"><i>A distância do $x - 3$ à origem é 1</i></p>
	<ul style="list-style-type: none"> Módulo da diferença de dois números reais, $a - b$ <p style="text-align: center;"><i>A distância do x ao 3 é 1</i></p>

- A professora fará notar que, até ao momento, tem sido dado especial relevo ao significado geométrico de $|x|$, e foi tudo o que bastou para resolver as mais variadas equações e inequações envolvendo expressões com módulos. No entanto, para resolver equações do tipo $|x - a| = |x - b|$ será mais conveniente recorrer ao significado geométrico de $|a - b|$.
- Serão ainda analisadas as duas “Notas importantes” apresentadas no final do *Exemplo 1* (página 3) da ficha de trabalho.

Notas importantes:

- Este raciocínio geométrico aplica-se ao módulo de uma diferença: $|a - b|$. Assim, se formos confrontados com expressões apresentadas na forma $|a + b|$, deveremos escrevê-las na forma $|a - b|$ para poder aplicar este raciocínio. Por exemplo: $|x - 1| = |x + 9| \Leftrightarrow |x - 1| = |x - (-9)|$
Lê-se: o x está à mesma distância do 1 e do -9 . Então, conclui-se que $x = -4$
- As expressões $|x - 2|$ e $|2 - x|$ são equivalentes, assim como as expressões $|x - 4|$ e $|4 - x|$, embora a ordem das parcelas dentro dos símbolos de valor absoluto surja trocada. Isto é verdade pois $|a - b| = |b - a|$ (ver **Sistematização**, pág. 2). Na prática, resolver a equação $|x - 2| = |x - 4|$ é equivalente a resolver a equação $|2 - x| = |x - 4|$ ou $|2 - x| = |4 - x|$ ou ainda $|x - 2| = |4 - x|$. Por isso, pode trocar a ordem das parcelas sempre preferir.

4. Equações do tipo $|x - c| = |x - d|$ (**Atividade 2.2**)

- Os alunos deverão resolver a **Atividade 2.2**. Serão discutidas estratégias de resolução das alíneas **(a)**, **(c)** e **(d)** a partir dos raciocínios partilhados pelos alunos.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- Aquando da resolução das diferentes alíneas, a professora irá apresentando, por escrito, uma resolução em conformidade com o processo de resolução descrito pelo aluno selecionado para participar.
- Na discussão da alínea **(c)**, caso os alunos considerem que $|x + 5|$ representa, em termos geométricos, a distância entre o ponto que representa x e o ponto que representa o 5 na reta numérica, a professora poderá recordar a “Nota importante 1”.
- Na discussão da alínea **(d)**, a professora poderá recordar a “Nota importante 1” e, ainda, questionar os alunos: *Como podemos reescrever $|x|$ como o módulo de uma diferença, $|x - a|$?*
- Caso os alunos recorram à estratégia que consiste em elevar ambos os membros da equação ao quadrado, a professora apresentará a seguinte propriedade: $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$.
- Caso os alunos recorram a estratégias gráficas, a professora utilizará o *software* da calculadora gráfica para projetar a representação das funções que os alunos considerem, como suporte para a comunicação das estratégias de resolução e explicação dos raciocínios.

5. Inequações do tipo $|x - c| \leq |x - d|$ (**Atividade 2.3.**)

- Os alunos deverão resolver a **Atividade 2.3**.
- Dois alunos serão questionados à vez para partilhar os seus raciocínios para resolver as duas alíneas da tarefa.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- Aquando da resolução das diferentes alíneas, a professora irá apresentando, por escrito, uma resolução em conformidade com o processo de resolução descrito pelo aluno selecionado para participar.
- Para ajudar os alunos a desenvolver um raciocínio que lhes permita resolver a inequação da alínea **(a)**, a professora poderá apresentar algumas sugestões ou

questionar os alunos: *Escreva as expressões apresentadas em ambos os membros na forma $|x - a|$. Como faria a leitura da condição obtida tendo por base uma interpretação do seu significado geométrico? Assinale, na reta numérica, o ponto que está à mesma distância do -3 e do 1 . O número que esse ponto representa é solução da inequação? E os números representados à direita desse ponto? E os números representados à esquerda desse ponto? Porquê?* A professora poderá orientar o raciocínio dos alunos de modo análogo na alínea **(b)**.

- Caso os alunos recorram à estratégia que consiste em elevar ambos os membros da equação ao quadrado, a professora poderá colocar-lhes questões quanto ao raciocínio que está subjacente à estratégia aplicada e recordar a propriedade: $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$.

- Caso os alunos recorram a estratégias gráficas, a professora utilizará o software da calculadora gráfica para projetar a representação das funções que os alunos considerem, como suporte para a comunicação dos seus raciocínios.

6. Introdução da tarefa apresentada na **Atividade 2.4**

- Os alunos deverão realizar a **Atividade 2.4**. A mesma começará a ser discutida na presente sessão e deverá ser concluída pelos alunos, de modo autónomo, até à sessão síncrona seguinte. Nesta sessão, a professora procurará garantir que são discutidos os seguintes aspetos:

- o critério de localização da paragem;
- a interpretação dos dados no contexto do problema;
- a variável do problema e as restrições que lhe estão associadas.

- A professora introduzirá a **Atividade 2.4** referindo que se trata de um problema de modelação com um contexto real e que, para resolvê-lo, os alunos poderão recorrer à calculadora gráfica para realizar cálculos numéricos ou para explorar as suas potencialidades de análise gráfica. A professora indicará aos alunos quais os comandos que devem executar para introduzir expressões com módulos na calculadora *Ti-nSpire*, mostrando-lhes como devem fazê-lo através de uma projeção de um emulador desta calculadora. Os alunos serão também informados de que dispõem de um conjunto de instruções relativamente a este processo, na última página da Ficha de Trabalho N.º 2, que podem consultar para recordar como fazê-lo ou para aprenderem a introduzir expressões com módulos noutros modelos de calculadoras (*Ti-84* e *Ti-83*).

- De seguida, a professora apresentará o enunciado da tarefa e procederá à sua leitura. Fará, depois, referência ao facto de, nas diferentes alíneas da tarefa, serem apresentadas questões orientadoras destinadas a ajudar os alunos que se deparem com dificuldades na sua resolução. A professora explicará que os alunos não

precisam de responder diretamente a essas questões e pedir-lhes-á que, qualquer que seja a estratégia que usem, apresentem todas as justificações que considerem necessárias.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- Aquando da leitura do enunciado, a professora procurará garantir que os alunos compreendam perfeitamente o critério de localização da paragem de autocarro, esclarecendo que estes devem entender “o total” como “a soma” de todas as distâncias medidas desde cada casa até à paragem de autocarro. A professora poderá colocar questões que incentivem os alunos a abordar o problema com sentido crítico: *No contexto deste problema, este critério faz sentido? Qual será o objetivo ao estabelecer este critério?*
- A professora chamará a atenção dos alunos para a importância de ter em conta o contexto do problema e, particularmente, as unidades dos dados que são fornecidos. Poderá perguntar, por exemplo: *Se a casa A está representada no ponto de abcissa 1, isso significa que a casa A está a que distância do início da rua?, ou Qual a distância entre a casa A e a casa B?, ou ainda Quantos metros tem a rua?*

7. Encerramento da aula

- A professora informará os alunos do trabalho que deverão realizar autonomamente até à aula seguinte: a alínea **(b)** da **Atividade 2.2.** e a **Atividade 2.4.**, a qual será discutida na próxima sessão síncrona.
- Os alunos serão também informados de que já estará disponível uma proposta de resolução das atividades complementares propostas na aula anterior (da A3 à AC8) e uma nova atividade complementar para estudo (AC9).

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Será recomendada a realização da tarefa AC9 da ficha de Atividades Complementares (Anexo G).

Anexo P: Plano de Aula Síncrona N.º 4

MATEMÁTICA A – 10.º ANO Plano da Aula Síncrona N.º 4

Domínio: FRVR10 – Funções Reais de Variável Real

Subdomínio: Generalidades acerca de Funções Reais de Variável Real

Data: Quinta-feira, 21 de maio de 2020 | **Hora:** 10:00h | **Duração:** 60 min

SUMÁRIO

Correção do trabalho de casa e esclarecimento de dúvidas.

Função módulo. Transformações do gráfico da função módulo.













PRINCIPAIS OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Reconhecer a importância da Matemática para a compreensão e previsão de fenómenos reais, através da construção e estudo de modelos.
- Desenvolver estratégias de resolução de problemas envolvendo funções definidas, analiticamente, por expressões com módulos e desenvolver sentido crítico relativamente à utilização da tecnologia e às suas limitações;
- Reconhecer simetrias nos gráficos de funções, identificar os intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos e determinar os zeros de uma função;
- Identificar os extremos de uma função real de variável real e interpretá-los no contexto de um problema;
- Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$), interpretando geometricamente os valores a , b e c ;
- Utilizar linguagem matemática para comunicar e fundamentar conclusões;
- Desenvolver autonomia e raciocínio matemático (comparação, formulação de conjecturas, generalização, identificação de padrões, justificação, validação).

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Reconhecer que distância entre os pontos da reta numérica que representam dois números reais, a e b , é igual a $|b - a|$ e a $|a - b|$;
- Utilizar a calculadora gráfica para representar funções reais de variável real e para determinar o(s) seu(s) extremo(s);
- Definição algébrica de módulo de um número real, por ramos;
- Representar graficamente funções reais de variável real definidas por ramos;
- Intervalos de monotonia e extremos de funções reais de variável real.

RECURSOS

DO ALUNO	DA PROFESSORA
<ul style="list-style-type: none">  Ficha de Trabalho N.º 2 (Anexo C)  Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E)  Hardware com acesso à internet  Microsoft Teams  Calculadora gráfica  Camara digital ou outro hardware para digitalização de imagem 	<ul style="list-style-type: none">  Ficha de Trabalho N.º 2 (Anexo C)  Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E)  Hardware com acesso à internet  Microsoft Teams  PowerPoint  Calculadora gráfica

MOMENTOS DA AULA	DURAÇÃO
1. Registo do sumário	2'
2. Discussão de uma tarefa de modelação em contexto real (Atividade 2.4.)	25'
3. Função módulo e sua representação gráfica	10'
4. Transformações do gráfico da função módulo (Atividade 3.1.)	15'
5. Introdução ao estudo de uma função do tipo $x \rightarrow a x - h + k$ com $a \neq 0$ (Atividade 3.2. – introdução e discussão das primeiras alíneas da tarefa)	6'
6. Encerramento da aula	2'

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário

- O sumário será projetado no início da aula e, posteriormente, registado na plataforma virtual, onde ficará disponível para consulta.

2. Discussão de uma tarefa de modelação em contexto real (**Atividade 2.4.**)

- A professora escolherá alguns alunos para responderem às questões colocadas nas várias alíneas da tarefa e apelará à participação dos restantes para criticarem ou validarem os raciocínios de colegas, exporem dúvidas ou estratégias alternativas de resolução. Os alunos serão também questionados no sentido de apresentarem fundamentos que justifiquem a adequação das estratégias por eles preconizadas e a validade das suas conclusões.
- Os alunos deverão também explorar as potencialidades gráficas das suas calculadoras para resolverem o problema, assim como convocar os seus conhecimentos sobre a utilização de tecnologia gráfica, generalidades acerca de funções e o significado geométrico de $|a - b|$. Deverão ter em conta alguns aspetos extra-matemáticos relacionados com o contexto do próprio problema.
- No final da discussão da **Atividade 2.4**, a professora informará os alunos de que estes deverão enviar, até ao final do dia, as suas resoluções de todas as tarefas da Ficha de Trabalho N.º 2.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- A professora projetará uma apresentação em *PowerPoint* com o enunciado do problema e algumas animações para facilitar a comunicação, discussão de estratégias de resolução e análises gráficas.
- Na alínea **(b)**, a professora deverá questionar os alunos com o objetivo de que estes reconheçam que a abcissa do ponto de localização da paragem, x , é a variável do problema e, que em virtude do contexto do próprio problema, esta não pode assumir qualquer valor. A professora poderá recordar os alunos do contexto do problema: *A paragem deve ser construída nesta rua. Quantas centenas de metros tem a rua? Então que valores pode tomar x ?*
- Na alínea **(c)**, se os alunos manifestarem dificuldades em avançar, a professora poderá recordar o significado geométrico $|a - b|$ apresentando um exemplo a partir do problema: *Repare, por exemplo, que a casa A está localizada no ponto de abcissa 1 e a casa B está localizada no ponto de abcissa 3. Assim, se quiséssemos*

representar a distância medida desde a casa A até à casa B, escreveríamos a expressão $|1 - 3|$ ou $|3 - 1|$.

▪ Na alínea (d), a professora poderá recordar o critério de localização da paragem de autocarro e explicá-lo de outro modo: *A soma de todas as distâncias medidas desde cada casa até à paragem de autocarro localizada no ponto x deverá ser “mínima”*. Por analogia com o raciocínio da alínea anterior, poderá questionar os alunos quanto às expressões que representam a distância da paragem, localizada no ponto de abcissa x , a cada uma das outras casas. A professora acompanhará o raciocínio dos alunos com uma animação visual.

ATIVIDADE 2.4

Cada unidade de distância corresponde a 100 m.

(d) Escreva uma expressão que lhe permita determinar o **total das distâncias de cada casa à paragem** de autocarro localizada no ponto de abcissa x . Explique como chegou a essa expressão.

$|x - 1| + |x - 3| + |x - 5| + |x - 7| + |x - 9| + |x - 10| + |x - 14|$

▪ Na alínea (e), a professora poderá apoiar os alunos sugerindo-lhes que associem à expressão que determinaram na alínea (d) uma função e que observem a sua representação gráfica na calculadora. Se necessário, a professora deverá recordar o processo de introdução de expressões com módulos na calculadora gráfica nos diversos modelos de calculadoras usadas pelos alunos da turma. A professora discutirá com os alunos a escolha de uma janela de visualização adequada, a partir da análise da função introduzida na calculadora e dos dados do problema. *Que variável está representada no eixo Ox ? E no eixo Oy ? Que valores pode tomar a variável representada no eixo Ox ? Já conhecemos a imagem de algum objeto pela função? Já conhecemos as coordenadas de algum ponto do gráfico da função? Qual poderá ser uma janela de visualização adequada? A janela escolhida deve ser ajustada?*

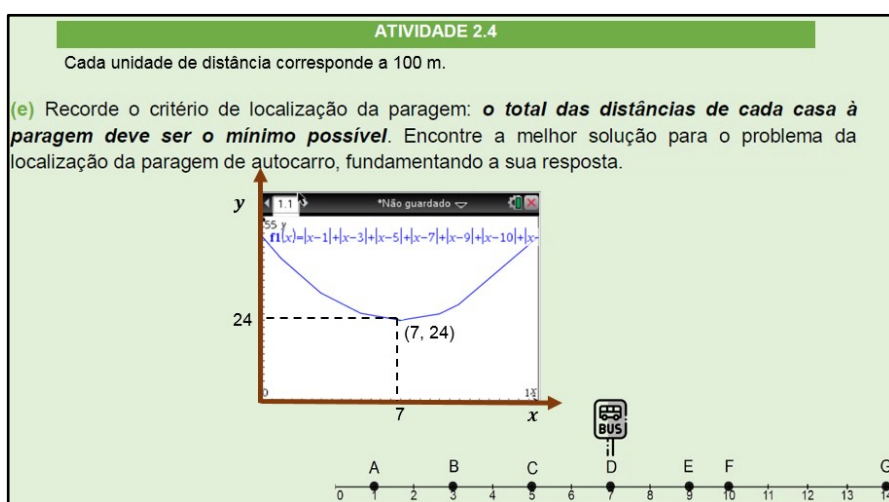
ATIVIDADE 2.4

Cada unidade de distância corresponde a 100 m.

(e) Recorde o critério de localização da paragem: **o total das distâncias de cada casa à paragem deve ser o mínimo possível**. Encontre a melhor solução para o problema da localização da paragem de autocarro, fundamentando a sua resposta.

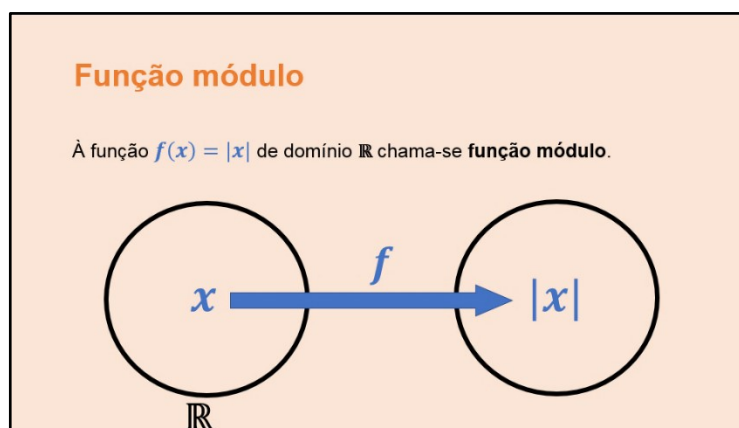
O que está representado em cada eixo?

- A professora questionará os alunos para que estes analisem a representação gráfica da função e interpretem a informação gráfica no contexto do problema: *A função representada tem extremos? Qual o seu significado no contexto do problema? Como podemos determiná-los?*
- Depois de determinado o ponto do gráfico da função associado ao mínimo da função, a professora pedirá aos alunos que interpretem as suas coordenadas no contexto do problema. Além disso, questioná-los-á relativamente à admissibilidade da solução encontrada. Também deverá ser feita uma comparação entre a solução encontrada e as alternativas consideradas na alínea (a).



3. Função módulo e sua representação gráfica

- A professora informará os alunos de que as próximas sessões serão dedicadas ao estudo de funções definidas por expressões envolvendo módulos e que, para isso, serão importantes os conhecimentos que os alunos têm

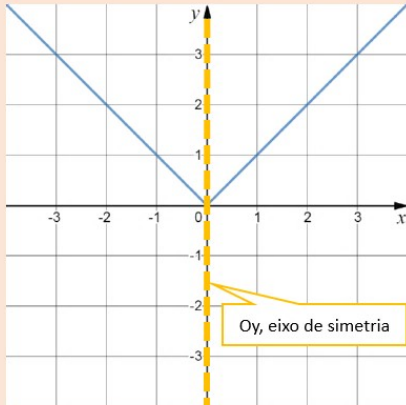


desenvolvido nas últimas sessões síncronas. Depois, dará início a uma apresentação da função módulo, a partir de uma projeção em *PowerPoint*.

- A professora começará por apresentar a função (respetivo domínio e conjunto de chegada) e procurará incentivar os alunos a considerar a correspondência $x \rightarrow |x|$, questionando-os quanto à imagem de alguns objetos por esta função.
- Partindo da definição analítica da função módulo por ramos, a professora explicará como é possível concluir quanto à sua representação gráfica. A partir da

representação gráfica, a professora questionará os alunos quanto a alguns aspetos gerais da função módulo, nomeadamente: contradomínio, zero, sinal, monotonia, extremo, extremante, coordenadas do vértice do gráfico da função, eixo de simetria e paridade. Uma sistematização destes aspetos gerais será apresentada em aula e, depois, publicada no canal da disciplina, onde ficará disponível para consulta.

Representação gráfica da função módulo



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Domínio: $D_f = \mathbb{R}$

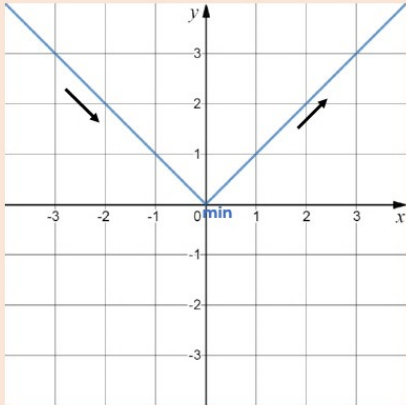
Contradomínio: $D'_f = [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$

Zeros: tem um único zero, 0

Sinal: Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

Representação gráfica da função módulo



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Monotonia:

Estritamente decrescente em $] -\infty, 0]$

Estritamente crescente em $[0, +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0 min	↗

Extremos: Mínimo absoluto é o 0
(minimizante: $x = 0$)

- A professora chamará a atenção dos alunos para as “Notas” referentes à “Função módulo e sua representação gráfica”, apresentadas nas primeiras páginas da Ficha de Trabalho N.º 3.

4. Transformações do gráfico da função módulo (Atividade 3.1.)

- Ao introduzir a **Atividade 3.1**, a professora sugerirá, aos alunos, que estes mobilizem os seus conhecimentos relativos às transformações do gráfico de uma

função e que os apliquem para extrair conclusões relativamente às representações gráficas de funções do tipo $f(x) = a|x - h| + k$ com $a \neq 0$. Por análise da expressão analítica destas funções, é possível perceber como se obtém o seu gráfico por aplicação de transformações geométricas ao gráfico da função módulo.

- A professora sugerirá, como trabalho autónomo, uma consulta do quadro “Revisões: Transformações do gráfico de uma função” para uma revisão por parte dos alunos que sintam a necessidade de recordar as transformações anteriormente estudadas.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- A professora dará início à realização da tarefa com uma análise da informação respeitante às funções f e g . Relativamente à função g colocará algumas questões aos alunos sobre o gráfico da função. Por exemplo: *Como é possível obter o gráfico de g a partir do gráfico de f ? Que transformações geométricas devemos aplicar-lhe?*

- Para discutir o preenchimento das restantes linhas do quadro, a professora questionará alguns alunos. Durante o seu preenchimento, procurará que estes relacionem aspetos da expressão analítica das funções com aspetos da sua representação gráfica: *É capaz de indicar as coordenadas do vértice do gráfico da função por análise da expressão analítica que define a função? Há algum aspeto da expressão analítica da função que nos permita concluir, imediatamente, quanto ao tipo de extremo da função? Como chega a essa conclusão?* Este questionamento tem como objetivo levar os alunos a chegar a conclusões que lhes permitam preencher a “Generalização” pretendida na alínea **(b)** da tarefa.

- Na análise das funções i e j , a professora poderá sugerir aos alunos que reescrevam a expressão analítica das funções na forma $f(x) = a|x - h| + k$, evidenciando, deste modo, as coordenadas do vértice do seu gráfico. Exemplo: $j(x) = -2|x - (-1)| - 3$

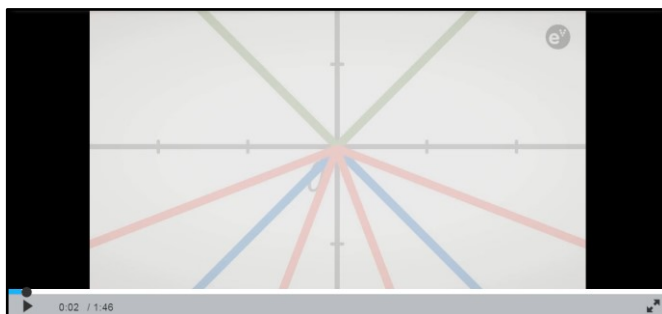
- A professora poderá sugerir o recurso à calculadora gráfica para observarem a representação gráfica das funções, como forma de confirmação.

6. Encerramento da aula

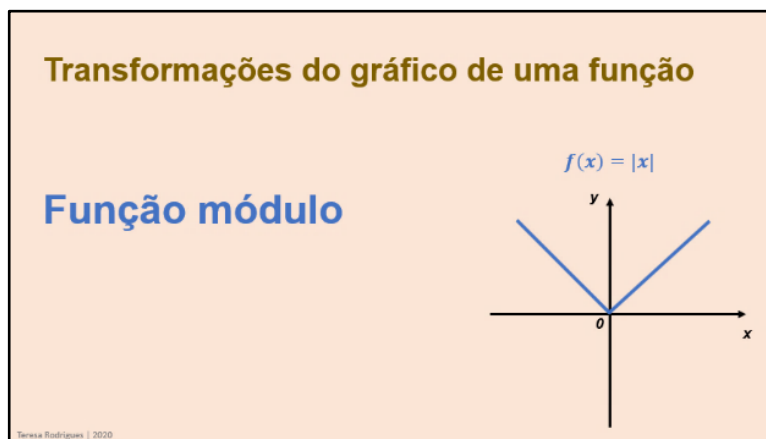
- No final da discussão da tarefa, a professora informará os alunos de que estes deverão enviar as suas resoluções das tarefas da Ficha de Trabalho N.º 2 até ao final do dia. No dia seguinte, será disponibilizada uma proposta de resolução das tarefas desta ficha e da atividade complementar sugerida na última aula (AC9).

▪ Para a próxima aula, os alunos deverão realizar a **Atividade 3.2**. Também poderão realizar as atividades complementares (AC10 à AC14), as quais serão disponibilizadas após a aula.

▪ A professora sugerirá que os alunos assistam a um vídeo da plataforma online da Porto Editora, *Escola Virtual*, sobre as transformações do gráfico da função módulo. Link: <https://lmsev.escolavirtual.pr/playerteacher/resource/116512/L?se=2398&seType=&cold=85370?url=/playerteacher/resource/116512/L&se=2398&seType=&cold=85370>



▪ A professora disponibilizará ainda um documento onde são apresentadas as transformações do gráfico da função módulo com exemplos e sugerirá a sua consulta (Anexo H).



ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Como atividade para estudo, será recomendada a realização das tarefas AC10 a AC14 da ficha de Atividades Complementares (Anexo G).

Uma proposta de resolução destas atividades será disponibilizada aos alunos, assim que estes as solicitem ou quando forem disponibilizadas novas atividades complementares, após a próxima aula síncrona.

Anexo Q: Plano de Aula Síncrona N.º 5

MATEMÁTICA A – 10.º ANO Plano da Aula Síncrona N.º 5

Domínio: FRVR10 – Funções Reais de Variável Real

Subdomínio: Generalidades acerca de Funções Reais de Variável Real

Data: Segunda-feira, 25 de maio de 2020 | **Hora:** 10:00h | **Duração:** 60 min

SUMÁRIO

Discussão dos resultados da questão-aula (anteriormente realizada).

Estudo de uma função do tipo $f(x) = a|x - h| + k$.

Gráfico de $|f(x)|$.











PRINCIPAIS OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Resolver problemas envolvendo funções do tipo $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$);
- Representar graficamente funções que resultem da composição da função módulo com funções polinomiais do 1.º grau;
- Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), interpretando o geometricamente os valores a , b e c ;
- Desenvolver estratégias de resolução de problemas envolvendo a função módulo e desenvolver sentido crítico relativamente à utilização da tecnologia e suas limitações;
- Reconhecer simetrias nos gráficos de funções, identificar os intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos e determinar os zeros de uma função;
- Utilizar linguagem matemática para comunicar e fundamentar conclusões;
- Desenvolver autonomia e raciocínio matemático (validação).

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Conceito de módulo;
- Transformações do gráfico da função módulo;
- Reflexões do gráfico de uma função;
- Resolução de equações e de inequações envolvendo expressões com módulos;
- Intervalos de monotonia e extremos de funções reais de variável real.

RECURSOS

DO ALUNO	DA PROFESSORA
<ul style="list-style-type: none">  Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E)  Hardware com acesso à internet  <i>Microsoft Teams</i>  Calculadora gráfica  Camara digital ou outro hardware para digitalização de imagem 	<ul style="list-style-type: none">  Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E)  Hardware com acesso à internet  <i>Microsoft Teams</i>  <i>PowerPoint</i>  Calculadora gráfica

MOMENTOS DA AULA	DURAÇÃO
1. Registo do sumário	2'
2. Discussão dos resultados da questão-aula anteriormente realizada (relativa ao estudo de funções quadráticas)	15'
3. Revisão e sistematização das aprendizagens decorrentes da realização da Atividade 3.1	3'
4. Estudo de uma função do tipo $x \rightarrow a x - h + k$ com $a \neq 0$ (Atividade 3.2)	30'
5. Obtenção do gráfico de $ f(x) $ a partir do gráfico de $f(x)$	4'
6. Introdução da Atividade 3.3 .	4'
7. Encerramento da aula	2'

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário

- O sumário será projetado no início da aula e, posteriormente, registado na plataforma virtual, onde ficará disponível para consulta.

2. Discussão dos resultados da questão-aula anteriormente realizada (relativa ao estudo de funções quadráticas)

- Durante este momento da aula, serão discutidos aspetos relativos à última avaliação sumativa (sobre o estudo de funções quadráticas) realizada pelos alunos. Este momento da aula não se insere na unidade didática referente ao estudo de funções definidas por expressões envolvendo módulos.

3. Revisão e sistematização das aprendizagens decorrentes da realização da **Atividade 3.1**

- A professora apresentará uma proposta de preenchimento do Quadro 1 da **Atividade 3.1** e recordará as conclusões decorrentes da realização dessa tarefa, a partir de uma proposta de preenchimento da “Generalização”

GENERALIZAÇÃO
Gráfico de funções do tipo $f(x) = a|x - h| + k$

O vértice do gráfico de uma função definida por $f(x) = a|x - h| + k$ é o ponto de coordenadas (h, k) . Se $a > 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para **cima** e a função tem um **mínimo** absoluto. Se $a < 0$, a concavidade do gráfico de f está voltada para **baixo** e a função tem um **máximo** absoluto.

pretendida na alínea (b). Chamará a atenção dos alunos para a necessidade de sabermos prever o comportamento de uma função, mesmo quando dispomos de ferramentas de tecnologia gráfica para resolver problemas. Será importante que os alunos saibam representar graficamente funções do tipo $f(x) = a|x - h| + k$ (com $a \neq 0$) partir da sua expressão analítica e sem recurso à calculadora. A professora recordará os alunos de que a escolha/definição de uma janela de visualização adequada, quando utilizamos a calculadora gráfica para representar uma função, estará, entre outras coisas, dependente desse conhecimento.

4. Estudo de uma função do tipo $x \rightarrow a|x - h| + k$ com $a \neq 0$ (**Atividade 3.2**)

- Ao introduzir a **Atividade 3.2**, a professora referirá que esta visa o estudo de uma função do tipo $f(x) = a|x - h| + k$ (com $a \neq 0$) e que, para estudar funções desse tipo, será útil que os alunos tenham em linha de conta as conclusões extraídas do trabalho realizado na **Atividade 3.1**, assim como os conhecimentos que desenvolveram, nas últimas sessões, relativos à resolução de equações e inequações com módulos. Os alunos deverão igualmente convocar conhecimentos prévios sobre generalidades acerca de funções reais de variável real.

- Esta tarefa havia sido indicada aos alunos como trabalho para casa. Todos os alunos deverão acompanhar o raciocínio dos colegas, comparar os resultados que obtiveram com os resultados obtidos pelos colegas, assim como estratégias de resolução do problema. Deverão procurar partilhar estratégias de resolução alternativas, esclarecer eventuais dúvidas, partilhar dificuldades, avaliar os seus raciocínios e corrigir eventuais erros no seu trabalho.
- Com o apoio de uma apresentação em *PowerPoint*, a professora apresentará o enunciado da tarefa e selecionará diferentes alunos para explicarem como responderam às várias alíneas.
- Após a discussão de possíveis estratégias de resolução com os alunos selecionados para participar, ou com os alunos que o façam por iniciativa própria, a professora poderá projetar as propostas de resolução que selecionou para serem discutidas, caso estas estratégias não tenham sido eleitas por nenhum dos alunos. A professora preparou, para serem discutidas, resoluções que recorrem a definições algébricas, a estratégias analíticas de análise gráfica e à tecnologia gráfica. Caso os alunos que partilhem os seus raciocínios tenham recorrido a alguma das estratégias, então, enquanto o aluno estiver a explicar o seu raciocínio, a professora acompanhará o discurso do aluno com uma projeção da estratégia em causa e à medida que este for explicando como procedeu e porquê.
- Na discussão de estratégias analíticas, a aplicação de propriedades das operações com módulos (muitas vezes aplicadas para simplificar de expressões) deverá ser fundamentada. Através de questões colocadas aos alunos, a professora procurará que estes sejam capazes de articular os processos de resolução discutidos com os conceitos matemáticos e o seu significado.
- A professora terá o cuidado de referir que a estratégias que envolvem o recurso à calculadora gráfica, em certos casos, apenas nos permitem obter resultados aproximados.
- No final da discussão de cada alínea, a professora dispensará uns momentos para esclarecimento de dúvidas.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- Na alínea **(a)** de **3.2.1.**, a professora procurará sensibilizar os alunos para as vantagens que podem advir da realização de um esboço gráfico da função, aquando do seu estudo, sobretudo no que respeita ao desenvolvimento de raciocínios e fundamentação de conclusões. Indicará também os principais aspetos a ter em conta na concretização do um esboço gráfico de uma função do tipo $x \rightarrow a|x - h| + k$ (com $a \neq 0$). Nomeadamente:

- assinalar o sistema de eixos e a sua origem;
- assinalar as coordenadas do vértice do gráfico da função;
- assinalar os pontos de interseção da linha do gráfico com os eixos coordenados.

A professora procurará garantir que os alunos são capazes de concluir quanto a estas características do gráfico da função por análise da expressão que a define analiticamente, questionando-os: *Observando a expressão analítica da função, o que posso concluir relativamente às coordenadas do vértice do seu gráfico? E quanto ao sentido das semirretas que constituem o gráfico da função? O vértice da função está associado a que tipo de extremo? Qual poderá ser uma janela de visualização adequada para observar a representação gráfica da função na calculadora? Será discutida a utilização da calculadora como ferramenta auxiliar de validação de características do gráfico da função. A professora poderá perguntar: Como posso confirmar as coordenadas do vértice da função com recurso às funcionalidades da calculadora?*

▪ Na alínea (c), a professora poderá começar por questionar os alunos: *O que são os zeros de uma função? Observando o esboço do gráfico da f , o que posso concluir quanto aos zeros da função?*

ATIVIDADE 3.2

3.2.1. Considere a função f definida em \mathbb{R} por:

$$f(x) = -|x + 1| + 3$$

(c) Determine os zeros de f .

Recorde que: Determinar os zeros de uma função equivale a resolver $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -|x + 1| + 3 = 0$$

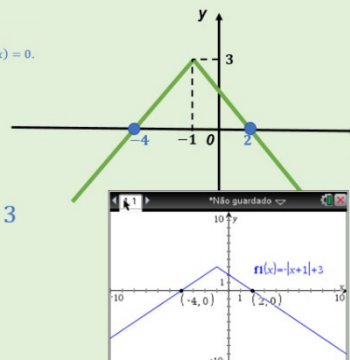
$$\Leftrightarrow -|x + 1| = -3$$

$$\Leftrightarrow |x + 1| = 3$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = -3 \vee x + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$$

Conjunto dos Zeros de f : $\{-4, 2\}$



A professora poderá

recordar os alunos de que determinar os zeros de uma função, f , equivale a resolver $f(x) = 0$. A professora questionará os alunos quanto à sua determinação com recurso à calculadora gráfica e explicará (ou procurará que sejam os alunos a fazê-lo) porque é que esta técnica pode, por vezes, resultar apenas na obtenção de resultados aproximados.

▪ Na alínea (d), a professora poderá recordar os alunos de que estudar o sinal da função equivale a determinar para que valores de x a função é positiva ($f(x) > 0$) e para que valores de x a função é negativa ($f(x) < 0$). Poderá também sugerir que os alunos respondam com base numa análise gráfica: assinalando os zeros de f , no esboço gráfico da função, e tirando conclusões por observação da sua representação gráfica: *Para que valores de x a linha do gráfico de f está acima do eixo Ox ? E para que valores de x está abaixo desse eixo?*

- Nas alíneas **(e)** e **(f)**, a professora poderá sugerir aos alunos que, por observação do gráfico da função, construam uma tabela de variação, indiquem para que intervalos de valores de x a função é crescente, decrescente e/ou constante e concluam quanto aos extremos da função. A professora poderá perguntar: *O máximo é um máximo absoluto? Porquê? Qual é o maximizante da função? Se necessário, a professora deverá esclarecer os alunos quanto à distinção entre extremos e extremantes de uma*

3.2.1. Considere a função f definida em \mathbb{R} por:

$$f(x) = -|x + 1| + 3$$

(e) Construa uma tabela de variação e indique os intervalos de monotonia de f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	\nearrow	3 Max.	\searrow

Estritamente crescente: $] -\infty, -1]$
 Estritamente decrescente: $[-1, +\infty[$

é um máximo absoluto? Porquê? Qual é o maximizante da função? Se necessário, a professora deverá esclarecer os alunos quanto à distinção entre extremos e extremantes de uma

função.

- Na alínea **(g)**, a professora irá apresentando, por escrito, através da câmara, uma resolução em conformidade com o processo de resolução descrito pelo aluno selecionado para participar. Na resolução destas alíneas, a professora incentivará os alunos a concluir quando à existência de solução ou de soluções para as equações e inequações apresentadas com base numa análise do gráfico da função. Será discutida a utilização da calculadora como ferramenta para resolver inequações.

- Em **3.2.2**, a professora poderá questionar os alunos relativamente ao significado de $g(x)$ e, por analogia, de $g(x + 6)$. Se necessário, deverá sugerir aos alunos que determinem a expressão algébrica (na sua forma mais simplificada) que representa a imagem de $x + 6$, pela função g , em cálculos auxiliares, por substituição de x por $x + 6$ na expressão analítica da função dada, explicando que $g(x + 6)$ representa, precisamente, a imagem de $x + 6$ por g . Poderá, depois, sugerir que os alunos procedam à substituição da expressão obtida na inequação e que procedam à sua simplificação. As conclusões quanto à solução da inequação poderão, então, ser alcançadas por um raciocínio geométrico. A professora poderá questionar os alunos quando à interpretação geométrica da condição, começando por interrogá-los quanto ao significado geométrico de $|x - 3|$ e de $|x + 3|$, respetivamente, ou poderá sugerir o recurso a outras estratégias de resolução relativamente às quais os alunos tenham revelado preferência.

5. Obtenção do gráfico de $|f(x)|$ a partir do gráfico de $f(x)$

▪ A partir de uma projeção em *PowerPoint*, a professora apresentará, de modo expositivo, as Notas relativas ao “Gráfico de uma função $g(x) = |f(x)|$ ” que constam na página 6 da Ficha de Trabalho N.º 3. A partir das representações gráficas das funções f e $|f|$ apresentadas, a professora colocará algumas questões aos alunos para que estes, por comparação das representações gráficas destas funções, extraiam algumas conclusões. Por exemplo:

Quando compomos a função $x \rightarrow f(x)$ com a função módulo, $x \rightarrow |x|$, a função obtida, $x \rightarrow |f(x)|$, mantém o mesmo contradomínio?

$g(x) = |f(x)|$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Como obter o gráfico de g a partir do gráfico de f ?

- Os pontos do gráfico de f de ordenada positiva ou nula mantêm-se
- Os pontos do gráfico de f de ordenada negativa sofrem uma reflexão de eixo Ox

O gráfico de $|f(x)|$ está “acima” ou “sobre” o eixo Ox →

Como é alterado o contradomínio da função, nesse caso? A função mantém os seus zeros? O sinal da função altera-se? E a sua monotonia? O que se mantém?

6. Introdução da Atividade 3.3.

▪ A professora introduzirá a tarefa, referindo que os alunos deverão convocar os seus conhecimentos relativos à análise gráfica de funções para resolvê-la. Apresentará o enunciado da tarefa e questionará os alunos quanto a algumas características das funções f e g : Que tipo de funções são representadas graficamente por uma reta? E por uma parábola? Qual o contradomínio de f ? E de g ? As funções têm zeros? Quais as coordenadas do vértice da parábola?

▪ O primeiro ponto da tarefa (3.3.1) será discutido em aula: um aluno será selecionado para explicar como é possível obter os gráficos das funções $|f|$ e de $|g|$ a partir dos gráficos das funções f e g , respetivamente. Depois, a professora projetará um esboço gráfico de $|f|$ e de $|g|$.

▪ A realização da tarefa será indicada como trabalho para casa para que as estratégias de resolução da tarefa possam ser discutidas na próxima sessão.

3.3.1. Faça um esboço do gráfico de cada uma das funções definidas por $|f(x)|$ e $|g(x)|$.

7. Encerramento da aula

- A professora recordará os alunos de que estes deverão realizar a **Atividade 3.3**, como trabalho para a aula do dia seguinte. Informará também os alunos de que, após a aula do dia seguinte e até às 19:00h, estes deverão enviar as suas resoluções de todas as atividades da Ficha de Trabalho N.º 3 (**Atividades 3.1, 3.2 e 3.3**) através da plataforma digital.
- Será disponibilizada, no canal da disciplina, uma proposta de resolução das atividades complementares da AC10 à AC14, assim como novas atividades complementares para estudo, da AC15 à AC19.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Como atividade para estudo, será recomendada a realização das tarefas AC15 a AC19 da ficha de Atividades Complementares (Anexo G).

Anexo R: Plano de Aula Síncrona N.º 6

MATEMÁTICA A – 10.º ANO Plano da Aula Síncrona N.º 6

Domínio: FRVR10 – Funções Reais de Variável Real

Subdomínio: Generalidades acerca de Funções Reais de Variável Real

Data: Terça-feira, 26 de maio de 2020 | **Hora:** 14:30h | **Duração:** 60 min

SUMÁRIO

Estudo gráfico de funções $x \rightarrow |f(x)|$.









Resolução gráfica equações e de inequações envolvendo expressões com módulos.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Representar e analisar graficamente funções que resultem da composição da função módulo com funções polinomiais dos 1.º e 2.º graus para resolver problemas;
- Desenvolver de resolução de problemas envolvendo a função módulo;
- Reconhecer intervalos de monotonia, zeros e sinal de uma função e usá-los na resolução de problemas;
- Utilizar linguagem matemática para comunicar e fundamentar conclusões;
- Desenvolver autonomia e raciocínio matemático (exemplificação, validação).

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Dada uma função real de variável real $f(x)$, traçar um esboço do gráfico da função $|f(x)|$ (ou, alternativamente, definir analiticamente funções afim e quadráticas partindo da sua representação gráfica);
- Intervalos de monotonia e extremos de funções reais de variável real.

RECURSOS	
DO ALUNO	DA PROFESSORA
<ul style="list-style-type: none">  Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E)  Hardware com acesso à internet  <i>Microsoft Teams</i>  Camara digital ou outro hardware para digitalização de imagem 	<ul style="list-style-type: none">  Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E)  Hardware com acesso à internet  <i>Microsoft Teams</i>  <i>PowerPoint</i>

MOMENTOS DA AULA		DURAÇÃO
1.	Registo do sumário	2'
2.	Estudo gráfico de funções definidas por $ f(x) $ em que $f(x)$ é uma função afim ou quadrática (Atividade 3.3.)	36'
3.	Estudo analítico de uma função definida por $ f(x) $ em que $f(x)$ é uma função afim	20'
4.	Encerramento da aula	2'

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário

- O sumário será projetado no início da aula e, posteriormente, registado na plataforma virtual, onde ficará disponível para consulta.

2. Estudo gráfico de funções definidas por $|f(x)|$ em que $f(x)$ é uma função afim ou quadrática (**Atividade 3.3.**)

- Esta tarefa havia sido indicada aos alunos como trabalho para casa. Os alunos deverão acompanhar o raciocínio dos colegas, que explicarão como responderam às diferentes questões e fundamentarão as suas conclusões. Deverão também comparar os resultados que obtiveram com os resultados obtidos pelos seus pares, assim como partilhar estratégias de resolução alternativas, caso tenham raciocinado de forma diferente.
- Ao iniciar a discussão da tarefa, a professora começará por questionar os alunos, para que estes recordem, uma vez mais, as transformações geométricas que devem aplicar aos pontos do gráfico de uma função, f , de modo a obter o gráfico de $|f|$: *Em 3.3.1, para realizar um esboço gráfico das funções $|f|$ e $|g|$, como procederam?*

▪ A professora projetará, através da câmara, esboços gráficos das funções $|f|$ e $|g|$ e, aquando da resolução das diferentes alíneas da tarefa, apresentará, por escrito, uma resolução em conformidade com as estratégias descritas pelos alunos. Também escreverá as respostas dos alunos depois de questioná-los quanto à notação adequada.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

▪ A representação dos gráficos das funções em suporte físico permitirá à professora ajudar os alunos a superar eventuais dificuldades de análise gráfica, por exemplo, apontando para determinados pontos do gráfico da função, ocultando zonas do seu gráfico, para que os alunos se foquem nas regiões de interesse e extraiam conclusões, etc.

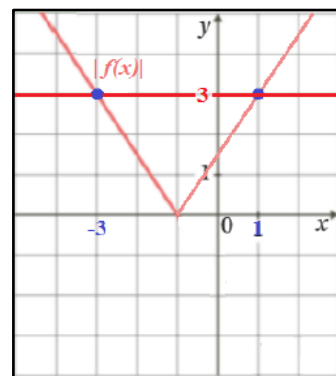
▪ A organização de dados, obtidos por análise gráfica, em tabelas, poderá ajudar os alunos a responder mais facilmente a algumas questões. Em **3.2.3**, a professora poderá sugerir aos alunos que comecem por construir uma tabela de variação da função $|g|$ e que, por análise da informação sistematizada nessa tabela, indiquem para que intervalos de valores de x a função é crescente, decrescente ou constante. Por vezes, os alunos associam os intervalos de monotonia das funções a valores do contradomínio. Caso isso aconteça, a professora deverá esclarecê-los relativamente a esse aspeto.

▪ Nas diversas alíneas de **3.3.4**, a professora poderá sugerir soluções para as equações e inequações consideradas e pedir aos alunos que as validem.

▪ Para apoiar os alunos, em **3.3.4(a)**, a professora poderá recordar que indicar para que valores de x a função $|f|$ se anula equivale a indicar os valores de x que são os zeros da função. Análogo para a alínea **(g)**.

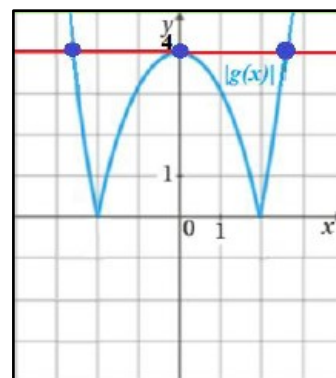
▪ Em **3.3.4(b)**, a professora poderá recordar que resolver a inequação $|f(x)| > 0$ equivale a indicar para que valores x a função é positiva, ou a indicar que objetos têm uma imagem positiva pela função. Poderá sugerir aos alunos que façam um estudo do sinal da função em todo o seu domínio e sistematizem essa informação num quadro do sinal.

▪ Em **3.3.4(a)**, **(c)** e **(f)**, a professora poderá introduzir os alunos à estratégia gráfica para resolver $|f(x)| = k$ que consiste em traçar a reta horizontal de equação $y = k$ e determinar as abscissas dos pontos de interseção da reta com o gráfico de $|f(x)|$. Análogo para **(g)**.



▪ Em **3.3.4(b)**, **(d)** e **(e)**, a professora poderá introduzir os alunos à estratégia gráfica para resolver $|f(x)| > k$ (ou $|f(x)| < k$) que consiste em traçar a reta horizontal de equação $y = k$ e observar para que valores de x a linha do gráfico $|f(x)|$ se encontra acima (ou abaixo) da reta traçada.

▪ Em **3.3.5**, a professora poderá sugerir aos alunos que atribuam diferentes valores ao parâmetro, a , e conclua quanto ao número de soluções que lhes estão associadas, com base numa análise na representação gráfica de $|f(x)|$. Esta estratégia poderá ser utilizada para responder à **3.3.6**, considerando diferentes valores para b . Em **3.3.5** e **3.3.6**, a professora poderá também sugerir aos alunos que utilizem novamente a estratégia que consiste em traçar retas horizontais, $y = a$ e $y = b$, respetivamente para **3.3.5** e para **3.3.6**, e observar quantas vezes as retas intersectam a linha do gráfico das funções $|f(x)|$ e $|g(x)|$, respetivamente.



3. Estudo analítico de uma função definida por $|f(x)|$ em que $f(x)$ é uma função afim

▪ Este momento da aula prevê a apresentação, por parte da professora, de uma estratégia para determinar uma expressão analítica para a função $|f(x)|$, possibilitando a resolução das equações e inequações apresentadas nas alíneas **(a)** à **(e)**, de **3.3.4**, de forma analítica. Este momento da aula poderá ser integrado no momento anterior (ou suprimido), assim os alunos sugiram estratégias analíticas de resolução para algumas das alíneas da **Atividade 3.3** ou coloquem questões sobre o recurso a estratégias deste tipo. O objetivo desta apresentação é, em parte, sensibilizar os alunos para o facto de poderem alternar entre os diferentes tipos de representações de uma função para estudar funções

ATIVIDADE 3.3

Equação da reta:

2 pontos : $(-3, 3)$, $(-1, 0)$

Declive: $a = \frac{0-3}{-1-(-3)} = -\frac{3}{2}$

$y = -\frac{3}{2}x + b$

$0 = -\frac{3}{2}(-1) + b \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2} + b$

$\Leftrightarrow b = -\frac{3}{2}$

$y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

Expressão analítica da função f :

$f(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

e procurar mostrar, mais uma vez, como podemos diversificar estratégias na resolução de problemas com funções.

- A professora apresentará, com recurso a uma apresentação em *PowerPoint*, a estratégia que envolve a determinação da equação da reta que define graficamente a função $f(x)$, com o objetivo de rever conhecimentos importantes do domínio da Geometria, como a determinação da equação de uma reta, uma vez que, nesse domínio, a maioria dos alunos havia revelado muitas dificuldades. Procurará, por isso, questioná-los no sentido de que estes recordem como podem fazê-lo considerando dois pontos do gráfico da função: *Como posso determinar o declive da reta? Conheço a sua ordenada na origem? Como posso determiná-la?*
- A professora poderá sugerir aos alunos que, autonomamente e em casa, procurem encontrar outras expressões que permitam definir, analiticamente, $|f(x)|$. Os alunos poderão, por exemplo, procurar definir a função por ramos ou ainda na forma $f(x) = a|x - h| + k$, recorrendo aos conhecimentos que têm das transformações do gráfico da função módulo e da sua relação com a expressão analítica da função. Como desafio, a professora poderá ainda sugerir aos alunos que definam analiticamente a função $|g(x)|$ a partir da representação gráfica de $g(x)$ e que resolvam analiticamente as equações e inequações apresentadas em **3.3.6 (a), (c) e (d)**, para recordarem conhecimentos sobre o estudo de funções quadráticas e a resolução de equações e inequações de 2º grau.

4. Encerramento da aula

- Os alunos serão recordados de que deverão submeter as suas resoluções das tarefas já discutidas em aula da Ficha de Trabalho N.º 3 (**Atividades 3.1 a 3.3**) até às 19:00h. Em seguida, ser-lhes-á disponibilizada uma proposta de resolução dessas mesmas tarefas, assim como uma proposta de resolução das atividades complementares, AC15 à AC19, e uma Ficha de Exercícios (Anexo I) para que pratiquem a aplicação dos conhecimentos que desenvolveram.
- Será indicada, como trabalho para casa, a leitura das notas apresentadas na página 8 da Ficha de Trabalho N.º 3 e a resolução da **Atividade 3.4** da mesma ficha. Esta informação ficará registada no canal da disciplina, como habitualmente.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Como atividade para estudo, será recomendada a realização das tarefas propostas na Ficha de Exercícios (Anexo I). A resolução de alguns destes exercícios poderá ser discutida na sessão seguinte, que será majoritariamente dedicada ao esclarecimento de dúvidas para a avaliação sumativa. Uma proposta de resolução destes exercícios será disponibilizada aos alunos que tenham resolvido os exercícios da ficha, assim que estes a solicitem, e publicada no canal onde ficará acessível a todos os alunos, após a aula de esclarecimento de dúvidas (próxima sessão) para a ficha de avaliação sumativa.

Anexo S: Plano de Aula Síncrona N.º 7

MATEMÁTICA A – 10.º ANO

Plano da Aula Síncrona N.º 7

Domínio: FRVR10 – Funções Reais de Variável Real

Subdomínio: Generalidades acerca de Funções Reais de Variável Real

Data: Quinta-feira, 28 de maio de 2020 | **Hora:** 10:00h | **Duração:** 60 min

SUMÁRIO

Definição por ramos de funções definidas por expressões envolvendo módulos.

Esclarecimento de dúvidas para a questão-aula. Resolução de exercícios.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Definir algebricamente por ramos (e sem usar o símbolo de módulo) funções do tipo $f(x) = a|P(x)| + k$ ($a, k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) em que $P(x)$ é um polinómio do 1º grau em x ;
- Desenvolver autonomia.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Definição algébrica de módulo de um número real, por ramos;
- Funções definidas por ramos;
- Resolver equações envolvendo expressões com módulos.

RECURSOS

DO ALUNO	DA PROFESSORA
<ul style="list-style-type: none">📄 Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E)📄 Ficha de Exercícios (Anexo I)💻 Hardware com acesso à internet🗣️ Microsoft Teams📷 Camara digital ou outro hardware para digitalização de imagem	<ul style="list-style-type: none">📄 Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo E)📄 Ficha de Exercícios (Anexo I)💻 Hardware com acesso à internet🗣️ Microsoft Teams

MOMENTOS DA AULA	DURAÇÃO
1. Registo do sumário	1'
2. Definição de uma função sem utilizar o símbolo de módulo – análise de um exemplo	5'
3. Definição de uma função sem utilizar o símbolo de módulo (Atividade 3.4)	20'
4. Esclarecimento de dúvidas para a questão-aula e resolução de tarefas da Ficha de Exercícios	32'
5. Encerramento da aula	2'

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e informações

- O sumário será projetado no início da aula e, posteriormente, registado na plataforma virtual, onde ficará disponível para consulta.

2. Definição de uma função sem utilizar o símbolo de módulo – análise de um exemplo

- Durante este momento da aula, e de modo expositivo, a professora fará a apresentação das notas da Ficha de Trabalho N.º 3 sobre a «Definição analítica de uma função sem utilizar o símbolo de módulo». A leitura destas notas havia sido indicada como trabalho para casa e os alunos serão incentivados a esclarecer dúvidas relativamente a este assunto.

3. Definição analítica de uma função sem utilizar o símbolo de módulo (**Atividade 3.4**)

- Esta tarefa havia sido indicada aos alunos como trabalho para casa. Os alunos deverão acompanhar o raciocínio dos colegas que explicarão como responderam às diferentes questões. Deverão também comparar os resultados que obtiveram com os resultados obtidos pelos colegas e partilhar as suas estratégias, caso tenham raciocinado de forma diferente.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- Aquando da resolução das diferentes alíneas, a professora irá apresentando, por escrito e através da câmara, uma resolução em conformidade com os processos de resolução descritos pelos alunos selecionados para participar.
- A professora poderá sugerir aos alunos que comecem por definir analiticamente apenas as expressões envolvendo módulos por ramos.
- Se necessário, a professora recordará princípios de resolução de inequações de 1º grau e propriedades das operações para simplificar expressões.

4. Esclarecimento de dúvidas para a questão-aula e resolução de tarefas da Ficha de Exercícios

- Este momento da aula será dedicado ao esclarecimento de dúvidas. Os alunos serão convidados a colocar questões e a professora procurará esclarecer as dúvidas dos alunos.

Apoio à atividade dos alunos e a eventuais dificuldades:

- A professora procurará esclarecer as dúvidas dos alunos, possivelmente sugerindo a realização e discussão de exercícios da Ficha de Exercícios ou apresentando exemplos.
- A professora apresentará, por escrito e através da câmara, notas que possam facilitar a comunicação e o esclarecimento de dúvidas.
- A professora irá sugerir a resolução de alguns exercícios da Ficha de Exercícios de preparação para a questão-aula, dando particular atenção aos exercícios **1, 3, 6 e 7** desta ficha.

5. Encerramento da aula

- Será recomendada a realização de todas as tarefas propostas na Ficha de Exercícios.
- Após a aula, os alunos deverão submeter a **Atividade 3.4**. Em seguida, será disponibilizada uma proposta de resolução da **Atividade 3.4**, assim como da atividade complementar proposta no final da Ficha de Trabalho N.º 3 e dos exercícios da ficha de preparação para a questão-aula.
- A professora informará os alunos da estrutura da questão-aula e da sua duração e recordá-los-á dos principais recursos de apoio ao estudo de que dispõem para se prepararem para a prova de avaliação.

- Para ajudar os alunos a organizar o seu trabalho de estudo, será publicado, no canal da disciplina, um quadro que reúne informação sobre os principais recursos e ficheiros disponibilizados na plataforma digital aos longo da leção desta unidade didática.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Como atividade complementar, será sugerida a realização da última tarefa proposta na Ficha de Trabalho N.º 3 sobre «Funções do tipo $f(x) = a|x - h| + k$ na modelação de fenómenos reais».

Anexo T: Plano de Aula Síncrona N.º 8

MATEMÁTICA A – 10.º ANO Plano da Aula Síncrona N.º 8

Domínio: FRVR10 – Funções Reais de Variável Real

Subdomínio: Generalidades acerca de Funções Reais de Variável Real

Data: Segunda-feira, 1 de junho de 2020 | **Hora:** 10:00h | **Duração:** 60 min

SUMÁRIO

Questão-aula.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DE AULA

- Avaliar os conhecimentos adquiridos e as capacidades desenvolvidas para resolver exercícios e problemas.

RECURSOS

DO ALUNO	DA PROFESSORA
<ul style="list-style-type: none">📄 Enunciado da Questão-aula (Anexo J)💻 Hardware com acesso à internet🗣️ Microsoft Teams📷 Camara digital ou outro hardware para digitalização de imagem	<ul style="list-style-type: none">📄 Enunciado da Questão-aula (Anexo J)💻 Hardware com acesso à internet🗣️ Microsoft Teams

MOMENTOS DA AULA	DURAÇÃO
1. Informações sobre os modos de trabalho	1'
2. Realização da questão-aula	59'
3. Encerramento da sessão	1'

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Informações sobre os modos de trabalho

- Os alunos serão recordados de que terão 20 minutos para realizar o grupo I da Questão-aula e submeter as suas respostas para esse grupo. Este grupo de questões, disponível num modelo *Microsoft Forms*, estará acessível através na plataforma virtual *Microsoft Teams*.
- Depois, os alunos deverão realizar o grupo II composto por questões de resposta aberta – o qual estará disponível desde o início da sessão síncrona na secção das tarefas agendadas para os alunos e à qual os mesmos podem aceder também através da plataforma virtual *Microsoft Teams*. Até às 11:00h, os alunos deverão fotografar as suas respostas às questões do grupo II e enviá-las, como habitualmente.

Grupo I (Questões de escolha múltipla)	Grupo II (Questões de resposta aberta) + Submissão do trabalho realizado
10:00h – 10:20h	10:20h – 11:00h

2. Realização da questão-aula

- Durante a sessão, enquanto os alunos estiverem a realizar a questão-aula, a professora estará *online* e disponível para esclarecer dúvidas relativas ao enunciado da ficha de avaliação ou aos modos de trabalho.

3. Encerramento da sessão

- Os alunos serão informados de que, após a aula, será disponibilizada uma proposta de resolução do grupo I da Questão-aula e serão imediatamente publicadas as classificações obtidas pelos alunos nesse mesmo grupo.
- As classificações relativas ao grupo II serão publicadas em momento posterior, após a sua correção. Por ocasião, também será enviado *feedback* aos alunos das suas resoluções e será publicada, no canal da disciplina, uma proposta de resolução do grupo II da Questão-aula.