

ESTABELECENDO CONEXÕES ENTRE NÚMEROS RACIONAIS: O CASO DA PERCENTAGEM¹

Hélia Ventura

Escola EB 2,3 Prof. João Fernandes Pratas – Samora Correia
Unidade de Investigação em Educação, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
helialopes@gmail.com

Hélia Oliveira

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação decorre de um trabalho de investigação, centrado numa experiência de ensino no tema Números Racionais, com uma turma do 5.º ano de escolaridade, em que se procurou criar um contexto favorável ao estabelecimento de conexões entre as várias representações dos racionais, através de problemas e tarefas de natureza exploratória e do uso de modelos, principalmente a barra numérica.

Na presente comunicação procuramos analisar que conhecimentos sobre percentagem os alunos de um grupo possuíam inicialmente e como usam, posteriormente, no decurso da experiência de ensino, a percentagem para comparar números racionais numa situação de partilha equitativa, evidenciando já alguma flexibilidade para considerarem a representação que lhes é mais conveniente.

Palavras-chave: Racionais, Percentagem, Representações e Conexões.

1. Introdução

Este estudo surge num contexto de mudança, uma vez que o novo Programa de Matemática preconiza uma abordagem paralela às várias representações dos números racionais, e recomenda um ensino que abranja os vários significados das frações ao longo dos primeiros anos de escolaridade (ME, 2007). As orientações curriculares do NCTM (2007) referem que é importante encorajar os alunos a trabalhar as diversas representações dos números racionais, e que devem ser-lhes dadas oportunidades para estabelecerem ligações entre elas. Procurando ir ao encontro destas orientações, foi delineada uma experiência de ensino com uma turma do 5.º ano, em relação à qual se procura analisar, na presente comunicação, a evolução de um grupo de alunos no que

¹ Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

diz respeito à sua compreensão da percentagem enquanto uma das representações de um número racional.

2. A Aprendizagem dos Números Racionais

A aprendizagem dos números racionais é um tema complexo, pelo facto de estes, sob a forma de fracção, contemplarem uma multiplicidade de significados (Lamon, 2006) e também devido às inúmeras áreas que o aluno tem de dominar para ter uma boa compreensão do sentido do número racional. Entre elas encontram-se: reconhecer a sua grandeza absoluta e relativa, trabalhar com valores de referência, compor/decompor números, a flexibilidade no cálculo mental e a capacidade de utilizar as várias representações dos números (McIntosh, Reys & Reys, 1992; Reys & Yang, 1998).

2.1. As Representações

As representações são uma realidade da matemática e do ensino uma vez que ajudam a dar sentido à mesma, pois complementam o conceito que lhe está subjacente e ajudam na interpretação de outras representações (Ainsworth, 2006). No entanto, a utilização, por parte de um aluno, das diferentes representações de um mesmo conceito, não é comum. Ao invés, os alunos centram-se na que lhes é mais familiar ou concreta (Cox & Brna, 1995; Ainsworth, 2006). Dado que a representação não pode descrever plenamente uma construção matemática e que cada representação tem as suas vantagens, combinar as múltiplas representações para o mesmo conceito, além de estar no cerne da compreensão matemática (Duval, 2006), pode ter efeitos significativos na construção de um conhecimento coerente que permite aos alunos trabalhar perspectivas diferentes e com diferentes estratégias (Seufert, 2003). Deste modo, é importante que no ensino se explorem as várias representações dos racionais, para que o conhecimento dos alunos não seja redutor e compartimentado, conduzindo-os a uma série de dificuldades. O novo Programa de Matemática do Ensino Básico aponta justamente nesse sentido:

Os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações (...), e a capacidade de passar informação de uma forma

de representação para outra é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada. (ME, 2007, p. 9).

Muitas vezes, as conexões entre as várias representações dos racionais que recorrem a imagens ou símbolos favorecem a compreensão dos alunos (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992). Deste modo, a utilização de material concreto “como tiras de papel que representem partes fraccionárias (...) fornecem aos alunos representações concretas de ideias abstractas, facilitando a utilização das representações com compreensão e a flexibilidade na conversão [entre elas]” (NCTM, 2007, p. 54). Torna-se assim importante que os conceitos matemáticos sejam, sempre que possível, introduzidos através de modelos.

2.1.1. A percentagem

O uso do modelo da barra, que pode ser uma extensão das tiras de papel, é uma estratégia de ensino que Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) preconiza para a aprendizagem das percentagens. Este modelo, sendo uma extensão de materiais que os alunos já utilizam (tiras e réguas), pode ser desenvolvido de forma a abranger situações mais complexas (Middleton, Van den Heuvel-Panhuizen & Shew, 1998), facilitando a abordagem dos números racionais. Ao ser utilizado de forma flexível, permite estabelecer relações entre números racionais e como conexões entre as suas várias representações (Van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen & Keijer, 2008), uma vez que possibilita a utilização das diferentes representações em simultâneo.

No contexto sala de aula, as percentagens podem surgir em diferentes tipos de tarefas: a) conversões – alternar entre percentagens, fracções e decimais; b) exercícios: encontrar um dos três valores desconhecidos (15% de $120 = \underline{\quad}$; $\underline{\quad}\%$ de $120 = 18$; 15% de $\underline{\quad} = 18$); c) sombreamento – sombrear uma porção de uma região contínua ou sombrear um número de objectos que representam uma determinada percentagem de um conjunto discreto de objectos; d) problemas – associado a descontos (Parker & Leinhardt, 1995).

De acordo com os autores, as percentagens são difíceis de ensinar e de aprender por, normalmente, se fixarem na relação parte todo e em percentagens de referência,

entre outras razões. Uma vez que a percentagem está associada a uma relação, ela torna-se de difícil compreensão para os alunos porque eles tendem a compará-las sem ter em conta uma referência (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Ou seja, quando digo que 20% da turma A e 25% da turma B são raparigas, não posso afirmar que na turma B existem mais raparigas só porque $25 > 20$, tenho de saber primeiro o número total de alunos por turma.

De acordo com Parker e Leinhardt (1995) os alunos revelam dificuldades em trabalhar com percentagens, sendo comuns três tipos de erros: a) ignorar o símbolo da percentagem – o aluno não distingue 10 de 10%; b) regra do numerador – o aluno substitui o símbolo “%” por uma vírgula à esquerda do número, o que o faz admitir que $50\% = 0,5$ e que $120\% = 0,120$ e o c) algoritmo aleatório – os alunos referem que $8 = 4\%$ de 32, determinando o 4 através da divisão de 32 por 8.

Perante tais dificuldades com as percentagens, Lembke e Reys (1994) referem que os alunos só podem ter uma boa compreensão desta representação, se o ensino preconizar: “a) a existência da representação pictórica da percentagem; b) a flexibilidade em converter fracções, decimais e percentagens; c) a habilidade em utilizar percentagens de referência (...); d) a aptidão de efectuar cálculo mental (...) com percentagens e e) a capacidade de verificar a razoabilidade das respostas” (p. 241).

3. Metodologia

A metodologia adoptada neste estudo é de natureza interpretativa, uma vez que se pretende realizar uma análise qualitativa das estratégias seguidas pelos alunos, recorrendo à análise dos seus registos escritos como principal estratégia de recolha de dados. O *design* escolhido para esta investigação foi uma experiência de ensino, no contexto da qual se recorreu à construção de um estudo de caso colectivo. Este estudo de caso é constituído por quatro alunos (Aida, Cristiano, Dinorah, Mariana) cuja sua selecção teve em conta a diversidade relativamente: a) aos níveis obtidos num teste inicial; b) ao género; c) aos níveis obtidos no final do 1.º período. Além disso, pretendíamos que no grupo existisse boa comunicação, partilha de ideias e que não se anteviesse a existência conflitos entre os seus elementos.

O teste inicial foi aplicado à totalidade da turma (16 alunos), individualmente, com duração máxima de 90 minutos, antes de se iniciar o estudo dos Números

Racionais. Incidiu sobre as várias representações e na resolução de problemas simples com números racionais, para averiguar os conhecimentos dos alunos neste tema.

A partir dos resultados obtidos neste teste foi delineada uma experiência de ensino, alicerçada num conjunto de tarefas de natureza exploratória que promovem as conexões entre as várias representações dos racionais (fracção, decimal e percentagem) e que favorecem o uso de modelos, principalmente a barra numérica. Estas tarefas baseiam-se em situações do dia-a-dia, para que os alunos pudessem estabelecer uma ponte com os seus conhecimentos informais e, desse modo, atribuírem significado aos números racionais nas suas várias representações (Van Galen et al., 2008). As tarefas eram realizadas em grupo, após o que a professora dinamizava uma discussão com toda a turma, onde eram apresentadas as estratégias seguidas, seguindo-se uma síntese com orientação da professora. A experiência de ensino iniciou-se com uma tarefa sobre partilha equitativa de chocolates, onde foram facultadas tiras de papel, para simular as tabletes, que os alunos interiorizam como uma barra numérica. Posteriormente as tarefas percorreram todos os outros significados das fracções e, tal como na 1.^a tarefa, promoviam a utilização das suas várias representações em simultâneo, estabelecendo-se relações de equivalência entre elas.

No decurso da experiência de ensino, o grupo estudo de caso (tal como outros grupos) recorreu à barra numérica em diversas tarefas, usando diferentes representações dos números racionais. Por exemplo, na tarefa 5, que envolve uma situação de medida, os alunos tinham de marcar na barra numérica determinadas distâncias percorridas por alunos numa pista de atletismo com 100m, conforme se pode ver na Figura 1.

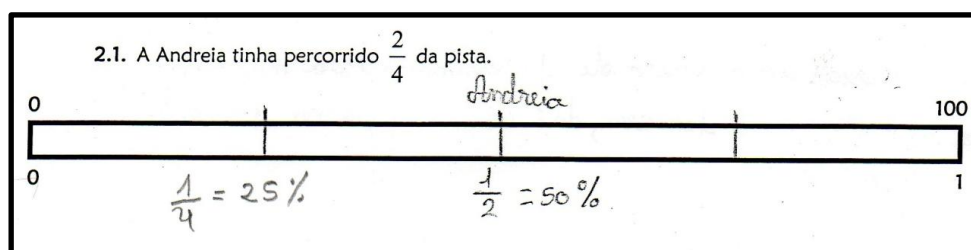


Figura 1 – Resolução do grupo à questão 2 da tarefa 5.

Este é um dos casos, ao longo da experiência de ensino, em que os alunos assinalam na barra não só as fracções mas também as percentagens correspondentes, expressando a equivalência entre os dois tipos de representação.

Na presente comunicação iremos analisar a tarefa 6, para ilustrar como os alunos recorrem à percentagem para comparar números racionais numa situação de partilha equitativa, evidenciando já alguma flexibilidade para usar a representação que lhes é mais conveniente. Procuramos também dar conta do ponto de partida dos alunos no que diz respeito aos conhecimentos que tinham da percentagem, antes da experiência de ensino, através da análise de duas questões do teste inicial.

4. Compreensão da Percentagem Antes da Experiência de Ensino

As questões do teste inicial que envolviam percentagens, são basicamente conversões e sombreamentos (Parker & Leinhardt, 1995).

A questão 8 é uma tarefa do tipo “sombreamento”, onde três dos alunos do grupo não revelaram dificuldades. Era solicitado que pintassem 20% de uma figura, o que correspondia à pintura de 2 luas, resposta que foi dada por Cristiano, Aida e Mariana, mas não por Dinorah (Figura 2).

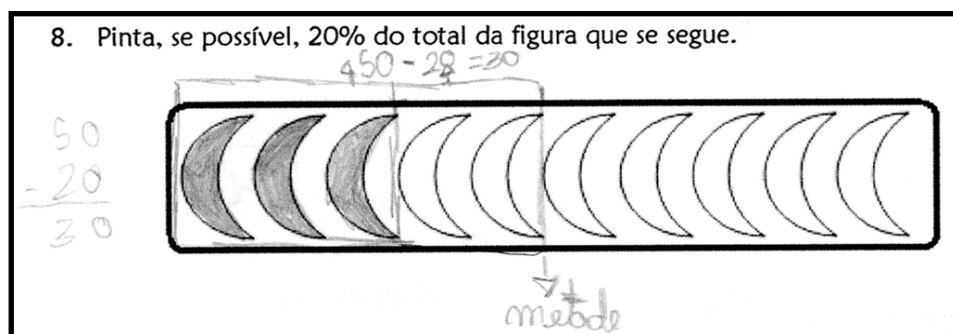



Figura 2 – Resolução da Dinorah à questão 8 do teste inicial.

Nesta questão Dinorah tenta encontrar 20% da figura, identificando primeiro a metade da mesma ($50\% = 5$ luas) e, posteriormente, assume que cada uma das luas vale 10%. Contudo, apesar de ter pintado três luas (representam o resultado da subtração entre 50% e 20%), indica com uma seta que 20% são duas luas.

Na questão 9 do teste inicial, que contemplava conversões entre as várias representações, conseguimos verificar, por parte de Cristiano, alguns erros referidos por Parker e Leinhardt (1995) – Figura 3.

9. Preenche os espaços em branco, relativamente à parte sombreada de cada figura, sabendo que cada  representa uma unidade.





Representação Visual	Fracção	Número Decimal	Percentagem
	$\frac{2}{0}$	0,25	25%
	$\frac{1}{0}$	0,100	100%
	$\frac{2}{5}$	0,250	250%
	$\frac{1}{7}$	0,175	175%

Figura 3 – Resolução do Cristiano à questão 9 do teste inicial.

Apesar de o aluno ser bem sucedido nas conversões para valores inferiores à unidade (100%), o mesmo não acontece perante percentagens iguais ou superiores a 100%. Nestas situações, comete o erro da “regra do numerador” (Parker & Leinhardt, 1995), uma vez que admite que o símbolo % pode ser substituído por uma vírgula à esquerda do número, o que nas situações iguais ou superiores a uma unidade o conduziu a representações erradas. Relativamente aos outros alunos, perante a mesma questão, é de salientar que a Mariana respondeu correctamente a todas, excepto à terceira linha que deixou em branco. Por sua vez, a Dinorah deixou tudo em branco e a Aida só acertou na percentagem da segunda linha (100%), e na fracção da primeira linha, tendo deixado a última linha em branco (Quadro 1).

Alunos	Representação Visual	Fracção	Decimal	Percentagem
Cristiano	x	x	Só acerta nas situações inferiores à unidade	✓
Mariana	-----	✓	✓	✓
Dinorah	-----	-----	-----	-----
Aida	x	Só acerta nas situações inferiores à unidade	x	Só acerta nas situações iguais à unidade

✓ - Responde correctamente

x - Erra a resposta

Quadro 1 – Respostas dos alunos à questão 9 do teste inicial.

Nas questões analisadas os alunos evidenciam que reconhecem valores de referência tais como 100% e 50% e também, embora menos frequentemente, 25% e 75%. No entanto, na conversão entre as várias representações, exceptuando no caso da Mariana, não são bem sucedidos.

5. O Recurso à Percentagem Numa Tarefa Durante a Experiência de Ensino

Na tarefa 6 da experiência de ensino era solicitado aos alunos que ajuizassem sobre a equidade de distribuição de um certo número de sanduíches por três diferentes grupos de crianças.

Mesa da Luana - 7 sanduíches para 8 pessoas.

Mesa do Nicolau- 4 sanduíches para 5 pessoas.

Mesa do João - 3 sanduíches para 4 pessoas.

O intuito desta tarefa era levá-los a comparar as fracções $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{4}$, socorrendo-se do desenho de cada uma das situações que era apresentado numa folha em anexo. Contudo, não foi solicitada nenhuma representação em particular, ficando esta ao critério dos alunos a partir da interpretação do enunciado.

Os alunos revelaram, de início, alguma dificuldade na interpretação da situação, nomeadamente, na distinção entre o dividendo e o divisor e na própria noção de partilha equitativa. Por este motivo, a professora sente necessidade de clarificar que, nesta situação, todas as crianças comem a mesma porção de sanduíche.

Cristiano: Duas para cada um (referindo-se às metades de sanduíches da mesa da Luana)!

Aida: Assim fica uma de fora (uma pessoa)!

Mariana: Ai é?! Então uns comem mais que outros!

Professora (H): Não! Todos têm de comer a mesma quantidade!

Dinorah: Pode sobrar?

Professora (H): Não! O que eu quero saber é se o bocadinho que este menino comeu (um dos meninos da mesa da Luana) é igual ao bocadinho que este comeu (um dos meninos da mesa do Nicolau) e igual ao bocadinho que este comeu (um dos meninos da mesa do João)!

Perante alguma dificuldade em decidirem como dividir cada sanduíche, a Aida sugere aos colegas que se centrem na situação que corresponde ao número de elementos do seu grupo, que é também a que envolve os valores mais pequenos. Os alunos conseguem, agora, encontrar uma estratégia que lhes permite determinar a porção de sanduíche que cada criança come.

Aida: Vamos começar pela mesa que tem menos pessoas! Nós somos 4, estavam aqui 3 sandes. Como é que fazíamos? Vamos imaginar!

Mariana: Dividimos 2 sandes ao meio e ficamos com 4 pedaços que distribuímos por cada um!

Dinorah: E a última?

Aida: E agora dividíamos assim (divide a última sandes em partes iguais)! Portanto, 25% mais 25%, mais 25%, mais 25%, vai dar tudo uma unidade! 25% é equivalente a quanto?

Mariana: Acho que é $\frac{1}{4}$!

Aida: Sim!

Ao verificarem que a terceira sanduíche teria que ser dividida de forma diferente das duas primeiras (uma metade para cada aluno), Aida sugere a divisão em quatro partes iguais, representando cada uma delas por 25%, enquanto Mariana sugere que se trata de $\frac{1}{4}$. Esta forma diferenciada de representar a parte da unidade, levanta a questão da equivalência entre as duas representações, no entanto, Aida reconhece que se trata de uma outra forma de representar a mesma quantidade, concordando com a colega.

Levanta-se, de seguida, a questão de como adicionar $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$, surgindo novamente no grupo duas representações: fracção e percentagem.

Aida: Escrevemos aqui que cada um come um meio mais um quarto! Quanto é que dá? 50% mais 25% ... cada um come 75%!

Dinorah: Então se juntarmos, vai dar ... já sei, vai dar $\frac{3}{4}$!

Aida: É?!

Dinorah: É o quê?! Então imaginemos que as sandes estão divididas em quatro (apontando para as duas sandes que dividiram em duas partes), daqui cada um come duas partes, mais a parte da terceira sandes, dá três partes!

Aida: Pois é! Cada um come $\frac{3}{4}$ de cada sandes!

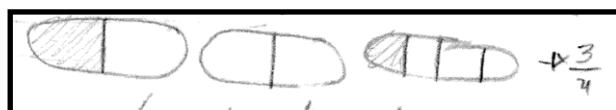


Figura 4 – Resposta aluna Dinorah.

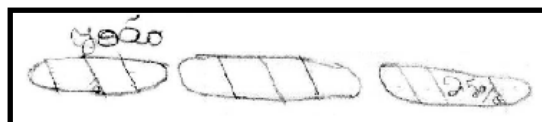


Figura 5 – Resposta da aluna Aida.

A divergência relativamente à representação a utilizar rapidamente é resolvida, quando os alunos fazem um paralelo entre as fracções e as respectivas percentagens, para depois conseguirem concretizar a adição entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ (50% e 25%). No fim voltam à fracção equivalente a 75%, evidenciando um conhecimento da equivalência entre as duas representações e uma flexibilidade na sua conversão.

De seguida, o grupo decide considerar a mesa do Nicolau. Todos os alunos desenham quatro sandes e fazem a divisão das mesmas. Uma das alunas tenta aplicar directamente a estratégia utilizada na situação anterior, sendo corrigida pelos colegas.

Mariana: Eu já sei!

Dinorah: Então diz!

Mariana: Vou dividir 3 sandes ao meio (ficando com 6 bocados) e cada um recebe um bocado. Depois divido a última em 5 partes e diz que cada um come também um bocado desta última sandes!

Aida: Fizeste mal! E este bocado (apontando para a metade da sandes que faltava distribuir)?

Mariana: A Aida tem razão! Este aqui não fica igual (apontando para o tal bocado)!

Professora (H): Então como podem resolver o assunto?

Mariana: Podemos dividir cada sandes em 5?!

Professora (H): Sim! E quanto é isso?

Aida: 20%!

Os alunos decidem, neste caso, que todas as sanduíches são divididas no mesmo número de partes. É novamente a Aida que sugere a representação sobre a forma de

percentagem, fazendo uma associação rápida entre a quinta parte da unidade e 20%. Os colegas aceitam com facilidade esta sugestão e rapidamente concluem que têm de multiplicar esse valor por quatro para obter o valor pretendido (Figura 6).

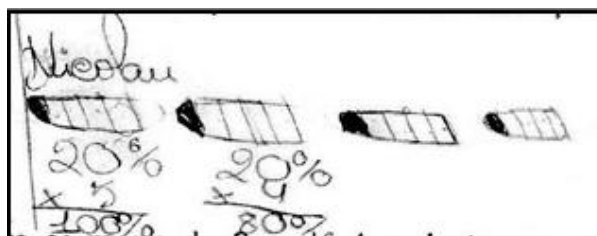


Figura 6 – Resposta do grupo estudo de caso.

Finalmente, na situação da mesa da Luana, o grupo opta também por dividir todas as sanduíches no mesmo número de partes e usa o algoritmo da divisão para saber que percentagem correspondia a cada bocado. Em seguida, recorre ao algoritmo da multiplicação para determinar que percentagem de sanduíche comeu cada pessoa (Figura 7).

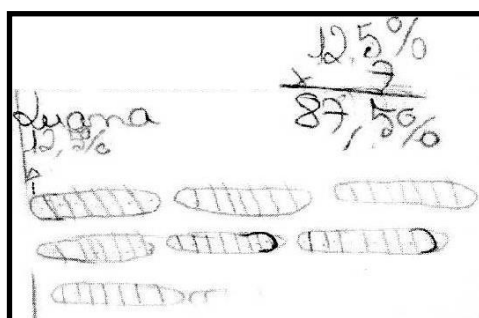


Figura 7 – Resposta do grupo estudo de caso.

Embora tendo surgido a representação sob a forma de fracção na primeira situação, os alunos optam posteriormente de modo consistente pelo uso da percentagem, escrevendo à frente de cada frase do enunciado a percentagem correspondente à porção de sanduíche que cada pessoa come em cada mesa (Figura 8). Desta forma, conseguem comparar, directamente, os diferentes valores obtidos e responder à questão colocada na tarefa.

- Nas mesas de 8 havia 7 sanduíches e 16 copos de sumo: 87,5%
- Nas mesas de 5 havia 4 sanduíches e 10 copos de sumo: 80%
- Nas mesas de 4 havia 3 sanduíches e 8 copos de sumo: 75%

Figura 8 – Resposta do grupo estudo de caso.

O grupo denota, deste modo, que aceita que um número racional tenha diferentes representações, e que umas podem ser mais úteis em determinadas situações, que outras.

6. Considerações Finais

A análise das respostas às questões do teste inicial revela que o conhecimento das percentagens é variado entre os quatro alunos. O Cristiano evidencia uma preferência pela percentagem, uma vez que os decimais que escreve resultam da conversão que faz da percentagem, apesar de cometer o erro da “regra do numerador” (Parker & Leinhardt, 1995). A Mariana já consegue estabelecer correspondência entre fracções, decimais e percentagens, desde que lhe seja dada a representação visual. Por sua vez a Aida e a Dinorah só identificam algumas percentagens de referência, tais como 100% e 50%, respectivamente.

Na tarefa analisada da experiência de ensino, pretendia-se levar os alunos a comparar quantidades numa situação de partilha equitativa, havendo a expectativa inicial que usassem fracções. No entanto, a partir de certo momento, os alunos optaram por recorrer à percentagem não revelando dificuldades em lidar com esta representação, nesta situação. Evidenciam que conseguem utilizar as representações de forma flexível, optando pela representação que lhes é mais favorável (em particular, a percentagem) num determinado contexto, neste caso a comparação de quantidades. Manifestam, assim, uma boa compreensão dos números racionais (NCTM, 2007), aceitando que uma fracção, um decimal e uma percentagem são formas equivalentes de representar o mesmo número.

Os alunos evidenciam lidar com a percentagem como sendo um número que representa uma quantidade (na relação com a unidade), o que vem ao encontro do que outros autores consideram como representando uma potencialidade do uso da barra numérica como estratégia de ensino no caso dos números racionais (van Den Heuvel-Panhuizen, 2003; van Galen et al., 2008). De facto, como referimos, os alunos usaram em diversas tarefas a barra numérica, a que associaram diferentes representações, sendo para eles natural expressar uma parte de um todo (numa quantidade) na forma de percentagem.

Tendo em conta o tipo de tarefas da experiência de ensino, estes resultados, embora preliminares, reforçam as ideias de Lembke e Reys (1994), que afirmam que uma boa compreensão da percentagem só é possível se os alunos tiverem oportunidade de trabalhar situações com as várias representações dos números racionais, sendo incentivados a fazer conversões entre elas. Além disso, é necessário que os alunos tenham uma experiência prolongada no tempo com este tipo de tarefas e que lhes sejam dadas oportunidades de escolher uma representação para trabalhar.

Estes resultados decorrem do modo com os alunos trabalharam, em sala de aula, o conceito de número racional: usando vários contextos, envolvendo as suas várias representações, os diversos significados das frações e apoiando-se fortemente no modelo da barra. Uma análise mais aprofundada dos dados referentes ao percurso de aprendizagem destes alunos, ao longo da experiência de ensino, poderá ajudar a compreender algumas das dificuldades que persistiram ao longo do tempo.

6. Referências

- Ainsworth, S. (2006). DeFT: a conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*(3), 183–198.
- Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 296–333. New York: Macmillan.
- Cox, R., & Brna, P. (1995). Supporting the use of external representations in problem solving: The need for flexible learning environments. *Journal of Artificial Intelligence in Education, 6*(2/3), 239–302.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131.
- Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (2.ª ed.)*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.
- Lembke, L. O. & Reys, B. J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(3), 237–259.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2–8.
- Middleton, J. A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Shew, J. A. (1998). Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 302–311.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

- Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, 65(4), 421-482.
- Reys, R. E., & Yang, Der-Ching (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 225-237.
- Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instruction*, 13, 227-237.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The Didactical use of models in Realistic Mathematics Education: an example from longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9-35.
- Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijer, R. (2008). *Fractions, percentages and proportions*. Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Utrecht University, Sense Publishers.