

UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO



**O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO RELACIONAL
ATRAVÉS DAS RELAÇÕES DE IGUALDADE E DESIGUALDADE:
UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO 3.º ANO**

Mónica Raquel Leal Oliveira Cerca

Dissertação

Mestrado em Educação

Área de especialização em Didática da Matemática

2014

UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO



**O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO RELACIONAL
ATRAVÉS DAS RELAÇÕES DE IGUALDADE E DESIGUALDADE:
UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO 3.º ANO**

Mónica Raquel Leal Oliveira Cerca

Dissertação orientada pelo Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação
Área de especialização em Didática da Matemática

2014

Resumo

Esta investigação tem como objetivo o estudo do desenvolvimento do raciocínio relacional, através de relações de igualdade e desigualdade, em alunos do 3.º ano, seguindo uma abordagem de cunho exploratório.

O quadro conceptual faz referência à *early algebra*, e às aprendizagens e conceções que os alunos desenvolvem relativamente às duas relações. Simultaneamente refere-se a forma como os alunos justificam as suas estratégias de resolução e como se inicia o seu processo de generalização. É importante que o desenvolvimento do raciocínio relacional tenha como base uma conceção correta das relações que se estabelecem na relação de igualdade e desigualdade, uma boa interpretação do sinal de igual e dos símbolos de maior e menor, tarefas estruturadas com expressões que promovam o uso de raciocínio relacional, momentos de discussão coletiva em que os alunos justificam as suas ideias e tentam generalizá-las partilhando-as com a turma.

O estudo segue uma abordagem qualitativa e envolve uma observação participante. A recolha de dados é realizada numa turma de 3.º ano em que é analisada a sua aprendizagem. Esta recolha envolve as produções dos alunos e informações recolhidas através do diário de bordo.

Os resultados mostram que os alunos melhoraram as suas conceções sobre as relações de igualdade e desigualdade, compreendendo as ligações que se estabelecem entre cada membro da expressão. As suas estratégias mostram o uso do raciocínio relacional não sentindo necessidade em recorrer a cálculos. Mostram algumas dificuldades em justificar as suas ideias sem recorrer a exemplos concretos. As generalizações criadas são desenvolvidas, na grande maioria, no momento de discussão coletiva e com alguma orientação do professor. A dinâmica de sala de aula também revela ser importante para o desenvolvimento do raciocínio relacional.

Palavras-chave: Raciocínio relacional, Relação de igualdade, Relação de desigualdade, Justificação, Generalização.

Abstract

The research aims to develop the relational reasoning through relations of equality and inequality, in third grade students and following an exploratory approach.. The theoretical framework makes reference to the early algebra, the learning and conceptions that the students develop relatively to the two relations.. Simultaneously it refers to the way students justify their resolution strategies and how the generalized process starts.

Thus it is important that the development of the relational reasoning has as base a correct conception of the relations that are established in the relation of equality and inequality, as well as a good interpretation of the signal of equal and the symbols of greater and minor; structured tasks with expressions that promote the use of relational reasoning, moments of collective discussion in which students justify their ideas and try to generalize them by sharing them with the class. The study follows a qualitative approach and involves a participative observation. Data collection is carried out in a third grade class which examined their learning. This recall involves the productions of the students and information gathered through the logbook.

The results show that students improved their conceptions of the relations of equality and inequality, including the links that are established between each member of the expression. Their strategies show the use of relational reasoning without feeling the need to use the calculations. The students show some difficulties in justifying their ideas without resorting to concrete examples. Generalizations are developed, in most cases, in collective discussion and with some guidance from the teacher. The dynamics of the classroom also revealed to be important for the development of relational reasoning.

Keywords: Relational reasoning, Relation of equality, Relation of inequality, Justification, Generalization.

Agradecimentos

Concluído este trabalho é necessário agradecer a algumas pessoas que contribuíram para este estudo.

Ao meu orientador, Professor Doutor João Pedro da Ponte, pelo seu saber, exigência e rigor, disponibilidade demonstrada na orientação desta investigação e pela ajuda e sugestões nos momentos difíceis deste caminho.

Às minhas colegas de mestrado, Irina e Patrícia, por todo o tempo que passamos juntas a discutir ideias, a trabalhar e a conviver e, acima de tudo, a construir uma grande amizade.

Aos professores titulares de cada uma das turmas com quem trabalhei, professora Paula Soares e professor António Cerca. Um especial agradecimento à professora Paula pela disponibilidade demonstrada e por me deixar tão à vontade em tudo o que precisei.

À Direção da escola pela possibilidade de realizar o estudo nos moldes em que foi planeado.

A todos os alunos que participaram no estudo e que tanto interesse demonstraram ao longo dos diferentes momentos.

Aos amigos que me apoiaram em cada um dos momentos. Em especial à Ana Luísa, que tantas horas me dispensou do trabalho para poder ir à Universidade para a concretização do estudo.

Por último, um agradecimento aos meus pais e irmãos, que me incentivaram a continuar e a quem, ao longo deste tempo não dei tanta atenção. Um agradecimento especial à Inês e ao Christian.

Índice

Capítulo 1 - Introdução	1
1.1 Motivação e pertinência do estudo	1
1.2 Objetivo de estudo	5
Capítulo 2 – Quadro Conceptual	7
2.1 Early Algebra	7
2.2 Raciocínio relacional	9
2.2.1. Aprendizagem	9
2.2.2. Tarefas	11
2.2.3. Interpretação do sinal de igual	15
2.2.4. Relação de desigualdade	17
2.2.5. Justificação e Generalização	17
Capítulo 3 - Experiência de Ensino	23
3.1. Ideias gerais	23
3.2. Tarefas	24
3.3. Dinâmica de sala de aula	27
3.4. Planificação da Unidade de Ensino	29
3.4.1. Aspetos gerais	29
3.4.2. Sessão 1 – Tarefa diagnóstica	31
3.4.3. Sessão 2	31
3.4.4. Sessão 3	32
3.4.5. Sessão 4	33
3.4.6. Sessão 5	33
3.4.7. Sessão 6	34
3.4.8. Sessão 7	35
3.4.9. Sessão 8	35
Capítulo 4 - Metodologia de Investigação	37
4.1. Opções metodológicas	37

4.2. Balanço do estudo piloto	41
4.3. Participantes.....	44
4.4. Métodos de recolha de dados.....	45
4.5. Análise de dados.....	46
4.6. Calendarização	46
Capítulo 5 - Estudo Principal	49
5.1 - Sessão 1.....	49
5.1.1. Análise da Questão 1.....	50
5.1.2. Questão 2.....	62
5.2. Sessão 2	74
5.2.1. Análise da Questão 1	74
5.2.2. Análise da Questão 2.....	82
5.2.3. Discussão dos resultados da Sessão 2	85
5.3. Sessão 3	86
5.3.1. Análise da questão 1.....	86
5.3.2. Análise da questão 2.....	95
5.3.3. Discussão dos resultados da Sessão 3	105
5.4. Sessão 4	106
5.4.1. Análise da alínea 1.1.	107
5.4.2. Análise da alínea 1.2.	110
5.4.3. Análise da alínea 1.3.....	111
5.4.4. Discussão de resultados da sessão 4.....	115
5.5. Sessão 5	115
5.5.1. Análise da alínea 1.1.	117
5.5.2. Análise da alínea 1.2.....	122
5.5.3. Discussão da Sessão 5.....	123
5.6. Sessão 6	124
5.6.1. Análise da questão 1.....	125

5.6.2. Análise da questão 2.....	131
5.6.3. Discussão de resultados da sessão 6.....	137
5.7. Sessão 7	138
5.7.1. Análise da Questão 1.....	139
5.7.2. Análise da questão 2.....	143
5.7.3. Discussão dos resultados da sessão 7.....	146
5.8. Sessão 8	147
5.8.1. Análise da questão 1.....	148
5.8.2. Análise da questão 2.....	156
5.8.3. Discussão dos resultados da sessão 8.....	163
5.9. Análise comparativa entre estudo piloto e estudo principal.....	164
5.9.1. Sessão 1	164
5.9.2. Sessão 2	166
5.9.3. Sessão 3	167
Capítulo 6 - Conclusão	169
6.1. Síntese do estudo	169
6.2. Conclusões do estudo.....	170
6.3. Balanço final.....	173
6.4. Reflexão final	175
Referências.....	179
Anexos	183

Índice de Figuras

Figura 1 - Esquema orientador da Unidade de Ensino.	30
Figura 2 - Questão 1 da Sessão 1.	50
Figura 3 - Resolução de Tânia.	51
Figura 4 - Resolução de João.	51
Figura 5 - Resolução de Duarte.	51
Figura 6 - Resolução de Rafaela.	52
Figura 7 - Resolução de Mara.	52
Figura 8 - Resolução de Joana.	52
Figura 9 - Resolução de Gonçalo.	53
Figura 10 - Resolução de David.	53
Figura 11 - Resolução de Laura.	53
Figura 12 - Resolução de David.	54
Figura 13 - Resolução de Tânia.	54
Figura 14 - Resolução de Rafaela.	54
Figura 15 - Resolução de Tiago.	54
Figura 16 - Resolução de Ricardo.	54
Figura 17 - Resolução de Duarte.	55
Figura 18 - Resolução de Laura.	55
Figura 19 - Resolução de Mara.	56
Figura 20 - Resolução de Duarte.	56
Figura 21 - Resolução de Mauro.	56
Figura 22 - Resolução de Tiago.	56
Figura 23 - Resolução de David.	57
Figura 24 - Resolução de Tânia.	58
Figura 25 - Resolução de Laura.	58
Figura 26 - Resolução de Mara.	58
Figura 27 - Resolução de João.	59
Figura 28 - Resolução de David.	59
Figura 29 - Resolução de Gonçalo.	59
Figura 30 - Resolução de Tiago.	60
Figura 31 - Resolução de Rafaela.	60
Figura 32 - Resolução de Duarte.	60
Figura 33 - Resolução de Ricardo.	60
Figura 34 - Resolução de Mara.	61
Figura 35 - Resolução de Tânia.	61
Figura 36 - Resolução de Laura.	61
Figura 37 - Resolução de Gonçalo.	62
Figura 38 - Resolução de João.	62
Figura 39 - Questão 2 da Sessão 1.	62
Figura 40 - Resolução de David.	63
Figura 41 - Resolução de Tiago.	63

Figura 42 - Resolução de Tânia.....	64
Figura 43 - Resolução de Mauro.....	64
Figura 44 - Resolução de João.....	64
Figura 45 - Resolução de Duarte.....	65
Figura 46 - Resolução de Mauro.....	65
Figura 47 - Resolução de Rafaela.....	65
Figura 48 - Resolução de Tânia.....	66
Figura 49 - Resolução de João.....	66
Figura 50 - Resolução de David.....	66
Figura 51 - Resolução de Laura.....	66
Figura 52 - Resolução de Duarte.....	67
Figura 53 - Resolução de Mara.....	67
Figura 54 - Resolução de Tiago.....	68
Figura 55 - Resolução de Mauro.....	68
Figura 56 - Resolução de Duarte.....	68
Figura 57 - Resolução de Joana.....	68
Figura 58 - Resolução de Laura.....	69
Figura 59 - Resolução de Gonçalo.....	69
Figura 60 - Resolução de João.....	69
Figura 61 - Resolução de Duarte.....	69
Figura 62 - Resolução de Mara.....	70
Figura 63 - Resolução de Tânia.....	70
Figura 64 - Resolução de David.....	70
Figura 65 - Resolução de Joana.....	70
Figura 66 - Resolução de João.....	70
Figura 67 - Resolução de Ricardo.....	71
Figura 68 - Resolução de Tânia.....	71
Figura 69 - Resolução de Joana.....	71
Figura 70 - Resolução de Mara.....	71
Figura 71 - Resolução de Mauro.....	72
Figura 72 - Resolução de Duarte.....	72
Figura 73 - Resolução de Rafaela.....	72
Figura 74 - Resolução de Ricardo.....	72
Figura 75 - Resolução de Tiago.....	73
Figura 76 - Questão 1 da sessão 2.....	75
Figura 77 - Resolução de Tiago.....	76
Figura 78 - Resolução de Gonçalo.....	76
Figura 79 - Resolução de João.....	77
Figura 80 - Resolução de Rafaela.....	77
Figura 81 - Resolução de David.....	77
Figura 82 - Resolução de Duarte.....	77
Figura 83 - Resolução de Mauro.....	78
Figura 84 - Resolução de Joana.....	78

Figura 85 - Resolução de Gonçalo.....	78
Figura 86 - Resolução de Ricardo.....	78
Figura 87 - Resolução de Tiago.....	79
Figura 88 - Resolução de João.....	79
Figura 89 - Resolução de Tiago.....	79
Figura 90 - Resolução de Tânia.....	80
Figura 91 - Resolução de David.....	80
Figura 92 - Resolução de Joana.....	80
Figura 93 - Resolução de Rafaela.....	80
Figura 94 - Resolução de Gonçalo.....	80
Figura 95 - Resolução de Joana.....	81
Figura 96 - Resolução de Gonçalo.....	81
Figura 97 - Resolução de Laura.....	82
Figura 98 - Resolução de Rafaela.....	82
Figura 99 - Resolução de David.....	82
Figura 100 - Resolução de Tiago.....	82
Figura 101 - Questão 2 da sessão 2.....	83
Figura 102 - Resolução de Rafael.....	83
Figura 103 - Resolução de João.....	83
Figura 104 - Resolução de Tiago.....	83
Figura 105 - Resolução de Gonçalo.....	84
Figura 106 - Resolução de Rafaela.....	84
Figura 107 - Resolução de Joana.....	84
Figura 108 - Questão 1 da sessão 3.....	86
Figura 109 - Resolução de Duarte.....	87
Figura 110 - Resolução de João.....	87
Figura 111 - Resolução de Laura.....	87
Figura 112 - Resolução de Ricardo.....	88
Figura 113 - Resolução de Tiago.....	88
Figura 114 - Resolução de Tânia.....	88
Figura 115 - Resolução de Joana.....	89
Figura 116 - Resolução de Duarte.....	89
Figura 117 - Resolução de Laura.....	90
Figura 118 - Resolução de Tânia.....	90
Figura 119 - Resolução de Ricardo.....	90
Figura 120 - Resolução de David.....	90
Figura 121 - Resolução de Joana.....	90
Figura 122 - Resolução de Rafael.....	91
Figura 123 - Resolução de Rafaela.....	91
Figura 124 - Resolução de Rafaela.....	92
Figura 125 - Resolução de Tânia.....	93
Figura 126 - Resolução de João.....	93
Figura 127 - Resolução de Rafael.....	93

Figura 128 - Resolução de Mara.	94
Figura 129 - Resolução de Duarte.	94
Figura 130 - Resolução de Gonçalo.	94
Figura 131 - Resolução de Joana.	94
Figura 132 - Resolução de David.	95
Figura 133 - Questão 2 da sessão 3.	95
Figura 134 - Resolução de Rafaela.	96
Figura 135 - Resolução de Mara.	97
Figura 136 - Resolução de Tânia.	97
Figura 137 - Resolução de Mauro.	97
Figura 138 - Resolução de João.	97
Figura 139 - Resolução de Joana.	98
Figura 140 - Resolução de Gonçalo.	98
Figura 141 - Resolução de David.	99
Figura 142 - Resolução de Tânia.	99
Figura 143 - Resolução de Ricardo.	99
Figura 144 - Resolução de Tiago.	99
Figura 145 - Resolução de Mauro.	100
Figura 146 - Resolução de Joana.	100
Figura 147 - Resolução de David.	100
Figura 148 - Resolução de Ricardo.	100
Figura 149 - Resolução de João.	101
Figura 150 - Resolução de Gonçalo.	101
Figura 151 - Resolução de Rafaela.	102
Figura 152 - Resolução de Joana.	102
Figura 153 - Resolução de Mauro.	102
Figura 154 - Resolução de Tânia.	103
Figura 155 - Resolução de Rafael.	103
Figura 156 - Resolução de Gonçalo.	103
Figura 157 - Resolução de João.	104
Figura 158 - Resolução de Rafaela.	104
Figura 159 - Resolução de Mauro.	104
Figura 160 - Resolução de Joana.	104
Figura 161 - Ficha de trabalho da sessão 4.	106
Figura 162 - Resolução de Tânia.	107
Figura 163 - Resolução de João.	108
Figura 164 - Resolução de Rafael.	108
Figura 165 - Resolução de Laura.	108
Figura 166 - Resolução de Rafaela.	109
Figura 167 - Resolução de Duarte.	109
Figura 168 - Resolução de Ricardo.	109
Figura 169 - Resolução de Joana.	110
Figura 170 - Resolução de Ricardo.	110

Figura 171 - Resolução de Tânia.	111
Figura 172 - Resolução de Tiago.	111
Figura 173 - Resolução de Rafaela.....	111
Figura 174 - Resolução de Joana.....	112
Figura 175 - Resolução de Rafaela.....	112
Figura 176 - Resolução de Laura.	112
Figura 177 - Resolução de Tânia.	112
Figura 178 - Resolução de Mauro.....	113
Figura 179 - Resolução de Duarte.....	113
Figura 180 - Resolução de Mara.	113
Figura 181 - Resolução de João.	114
Figura 182 - Resolução de Ricardo.	114
Figura 183 - Questão 1 da sessão 5.....	116
Figura 184 - Alíneas da questão 1.....	116
Figura 185 - Questão 2 da sessão 5.....	117
Figura 186 - Resolução de João.....	117
Figura 187 - Resolução de Mara.	118
Figura 188 - Resolução de Gonçalo.	119
Figura 189 - Resolução de Tânia.	119
Figura 190 - Resolução de Rafaela.....	120
Figura 191 - Resolução de Mara.	122
Figura 192 - Resolução de Rafaela.....	122
Figura 193 - Resolução de Gonçalo.	122
Figura 194 - Questão 1 da sessão 6.....	125
Figura 195 - Alínea 1.2. da sessão 6.....	125
Figura 196 - Resolução de Mauro.....	126
Figura 197 - Resolução de Rafaela.....	126
Figura 198 - Resolução de Ricardo.	127
Figura 199 - Resolução de João.	128
Figura 200 - Resolução de Beatriz.	128
Figura 201 - Resolução de Tiago.	128
Figura 202 - Resolução de Gonçalo.	128
Figura 203 - Resolução de David.....	129
Figura 204 - Resolução de Rafael.....	130
Figura 205 - Resolução de Beatriz.	130
Figura 206 - Resolução de Tânia.	130
Figura 207 - Questão 2 da sessão 6.....	131
Figura 208 - Resolução de Beatriz.	132
Figura 209 - Resolução de David.....	132
Figura 210 - Resolução de Tânia.	133
Figura 211 - Resolução de Rafael.....	133
Figura 212 - Resolução de João.	133
Figura 213 - Resolução de Duarte.....	133

Figura 214 - Resolução de Laura.	134
Figura 215 - Resolução de Ricardo.	134
Figura 216 - Resolução de Mara.	134
Figura 217 - Resolução de Tiago.	135
Figura 218 - Resolução de Mara.	135
Figura 219 - Resolução de João.	135
Figura 220 - Resolução de David.	136
Figura 221 - Resolução de Rafaela.	136
Figura 222 - Resolução de João.	136
Figura 223 - Resolução de Mauro.	137
Figura 224 - Resolução de Tânia.	137
Figura 225 - Resolução de David.	137
Figura 226 - Questão 1 da sessão 7.	138
Figura 227 - Questão 2 da sessão 7.	139
Figura 228 - Resolução de Beatriz.	139
Figura 229 - Resolução de Ricardo.	139
Figura 230 - Resolução de Rafael.	140
Figura 231 - Resolução de João.	140
Figura 232 - Resolução de Tânia.	141
Figura 233 - Rafaela no quadro a registrar a generalização.	142
Figura 234 - Resolução de Laura.	143
Figura 235 - Resolução de David.	143
Figura 236 - Resolução de Tiago.	143
Figura 237 - Resolução de Mauro.	144
Figura 238 - Resolução de João.	144
Figura 239 - Resolução de Rafaela.	144
Figura 240 - Resolução de Gonçalo.	145
Figura 241 - Resolução de Laura.	145
Figura 242 - Resolução de Rodrigo.	146
Figura 243 - Questão 1 da sessão 8.	148
Figura 244 - Resolução de Tânia.	148
Figura 245 - Resolução de Mara.	148
Figura 246 - Resolução de Rafaela.	149
Figura 247 - Resolução de Gonçalo.	149
Figura 248 - Resolução de Beatriz.	149
Figura 249 - Resolução de João.	149
Figura 250 - Resolução de Tiago.	150
Figura 251 - Resolução de Tiago.	150
Figura 252 - Resolução de Beatriz.	150
Figura 253 - Resolução de Gonçalo.	151
Figura 254 - Resolução de Ricardo.	151
Figura 255 - Resolução de David.	151
Figura 256 - Resolução de João.	151

Figura 257 - Resolução de Mauro.....	152
Figura 258 - Resolução de Rafaela.....	152
Figura 259 - Resolução de Laura.....	152
Figura 260 - Resolução de João.....	153
Figura 261 - Resolução de David.....	153
Figura 262 - Resolução de Mara.....	153
Figura 263 - Resolução de Gonçalo.....	153
Figura 264 - Resolução de Beatriz.....	153
Figura 265 - Resolução de Beatriz.....	154
Figura 266 - Resolução de Ricardo.....	154
Figura 267 - Resolução de Duarte.....	154
Figura 268 - Resolução de Gonçalo.....	155
Figura 269 - Resolução de João.....	155
Figura 270 - Resolução de Laura.....	155
Figura 271 - Resolução de Mauro.....	155
Figura 272 - Resolução de David.....	156
Figura 273 - Resolução de Tiago.....	156
Figura 274 - Questão 2 da sessão 8.....	156
Figura 275 - Resolução de Rafaela.....	157
Figura 275 - Resolução de Rafaela.....	157
Figura 275 - Resolução de Rafaela.....	157
Figura 278 - Resolução de João.....	157
Figura 279 - Resolução de Tânia.....	157
Figura 280 - Resolução de David.....	158
Figura 281 - Resolução de Mara.....	158
Figura 282 - Resolução de Mauro.....	159
Figura 283 - Resolução de Beatriz.....	159
Figura 284 - Resolução de Laura.....	159
Figura 285 - Resolução de Mara.....	159
Figura 286 - Resolução de Rafaela.....	159
Figura 287 - Resolução de Duarte.....	160
Figura 288 - Resolução de Tânia.....	160
Figura 289 - Resolução de David.....	160
Figura 290 - Resolução de João.....	160
Figura 291 - Resolução de Tiago.....	160
Figura 292 - Resolução de Gonçalo.....	160
Figura 293 - Resolução de Tânia.....	161
Figura 294 - Resolução de Duarte.....	161
Figura 295 - Resolução de Gonçalo.....	162
Figura 296 - Resolução de Beatriz.....	162
Figura 297 - Resolução de Rafael.....	162
Figura 298 - Resolução de Mauro.....	162
Figura 299 - Resolução de Rafaela.....	162

Figura 300 - Resolução de João.	163
Figura 301 - Resolução de Tiago.	163

Índice de Quadros

Quadro 1 - Propriedades aritméticas da adição e multiplicação.....	27
Quadro 2 - Calendarização dos diferentes momentos da investigação.	47
Quadro 3 - Desempenho dos alunos em questões envolvendo igualdades. .	50
Quadro 4 - Desempenho dos alunos em questões envolvendo desigualdades.	63
Quadro 5 - Desempenho dos alunos na questão 1 da sessão 2.....	75
Quadro 6 - Desempenho dos alunos em expressões que envolvem um raciocínio relacional	132
Quadro 7 - Desempenho dos alunos das turmas E e F na questão 1 da sessão 1.....	165
Quadro 8 - Desempenho dos alunos das turmas E e F na questão 2 da sessão 1.....	165
Quadro 9 - Desempenho dos alunos das turmas E e F na questão 1 da sessão 2.....	166

Índice de Anexos

Anexo 1 - Planificação da unidade de Ensino e quadro com a evolução dos tópicos ao longo das da sessões	184
Anexo 2 - Ficha de trabalho n.º 1	187
Anexo 3 - Ficha de trabalho n.º 2	189
Anexo 4 - Ficha de trabalho n.º 3	191
Anexo 5 - Ficha de trabalho n.º 4	193
Anexo 6 - Ficha de trabalho n.º 5	194
Anexo 7 - Ficha de trabalho n.º 6	196
Anexo 8 - Ficha de trabalho n.º 7	198
Anexo 9 - Ficha de trabalho n.º 8	199
Anexo 10 - Fichas de trabalho das sessões do estudo piloto	201
Anexo 11 - Autorizações aos Encarregados de Educação e à Direção do Agrupamento	208

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo começo por fazer referência aos objetivos da Álgebra e como a Aritmética pode desenvolver o raciocínio algébrico, abordando a noção de raciocínio relacional e como este se desenvolve. De seguida, falo sobre as razões que me levaram a realizar este estudo, apresento uma justificação da sua pertinência e refiro os objetivos e questões que guiam esta investigação.

1.1 Motivação e pertinência do estudo

Em Portugal, o ensino da Álgebra no 1.º ciclo assumiu grande importância com o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), que mostrou que este tópico poderia ser abordado logo desde os primeiros anos de escolaridade. Esta opção curricular apoia-se em investigações que sugerem que o estudo da Álgebra pode ser iniciado desde cedo, através de pequenas tarefas que os alunos vão fazendo com recurso a algumas ideias algébricas nos seus raciocínios matemáticos. Deste modo, criam-se condições para que os alunos desenvolvam o seu raciocínio matemático, e também, a que mais tarde, possam estudar Álgebra de um modo mais formalizado sem grande dificuldade.

A nível internacional, os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) referem a importância do domínio da Álgebra como essencial para os alunos, quer na sua futura vida escolar quer para a sua vida profissional. Este documento enfatiza a ideia do ensino e aprendizagem da Álgebra desde os primeiros anos de escolaridade. Além disso, recomenda aos professores a criação de situações que promovam o desenvolvimento do raciocínio algébrico, para que

mais tarde, os raciocínios mais complexos se tornem mais acessíveis. Também para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) desde muito cedo, os alunos contactam com ideias que estão na base do ensino de Álgebra e Funções, nomeadamente quando tentam encontrar valores desconhecidos para uma determinada expressão ou quando completam uma tabela. Em muitos casos, a aprendizagem de alguns tópicos de Álgebra traz dificuldades para os alunos, levando-os ao insucesso na Matemática. Quando são confrontados com símbolos (letras), que estão aliados a regras, que muitas vezes não lhes fazem sentido, os alunos tendem a achar desnecessária esta aprendizagem, porque só conseguem interpretar esta disciplina como uma área onde se trabalha apenas com números. Deste modo, pretende-se promover um Ensino da Álgebra que não se baseia apenas na memorização de regras e procedimentos, mas que promova de forma informal uma ligação com os domínios da Álgebra.

Um dos objetivos do ensino da Álgebra é ajudar os alunos a serem capazes de representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos. Considera-se importante, também, ajudar os alunos a compreender as propriedades algébricas, bem como desenvolver uma compreensão aprofundada da relação de igualdade. Para isso, os professores devem criar situações que ajudem os alunos a "estabelecerem conexões entre a notação simbólica e a representação concreta de identidade" (NCTM, 2007, p. 109).

A Aritmética proporciona uma forma de desenvolver o raciocínio algébrico. Carpenter, Franke e Levi (2003) reconhecem que a Aritmética não deve ser vista apenas como um conjunto de operações sem dar valor às relações que podem ser estabelecidas entre os números e as operações. Também Carpenter, Levi, Franke e Zeringue (2005) falam da diferença existente entre uma Aritmética tradicional e uma Aritmética mais algébrica. A primeira baseia-se numa visão operacional, visão essa exclusivamente virada para a operacionalização dos cálculos, com o único objetivo de apresentar uma resposta, com um único número. A segunda dá atenção às relações que podem ser estabelecidas entre as expressões e à importância em conhecer as propriedades que lhes estão associadas. Deste modo, a aprendizagem que os alunos fazem da Aritmética deve passar pelas noções básicas da Álgebra. Na mesma perspetiva, Mestre e Oliveira (2011) realçam a importância que a Aritmética tem quando falamos de raciocínio relacional e das relações que se podem estabelecer. Numa Aritmética tradicional estas relações são vistas apenas como o cálculo ou a operacionalização de expressões numéricas. Numa perspetiva algébrica, a relação de igualdade é encarada como estabelecendo relações entre duas expressões ou números. Assim, se a Aritmética não for encarada como um

campo separado da Álgebra, o estabelecimento de relações entre números pode tornar-se mais significativo.

Na minha experiência enquanto aluna nos primeiros anos de escolaridade não senti esta preocupação com a Álgebra e com o desenvolvimento do raciocínio algébrico. O estabelecimento de relações entre números não recebia muita importância. Quando aparecia o sinal de igual, sabíamos que “teríamos que fazer a conta para apresentar o resultado”. O mesmo aconteceu com os símbolos de maior e menor que apenas se tornam um pequeno tópico que se desenvolve num determinado momento, que não volta a ser retomado. Com o evoluir dos estudos, fui-me apercebendo que poderemos estabelecer relações entre números e operações, representadas por diversos símbolos, tendo em atenção as propriedades das operações. Para os alunos que, tal como eu, não tiveram um ensino orientado para a promoção do raciocínio algébrico, terão ficado algumas dificuldades, incompreensões e lacunas que se refletiram, mais tarde, na sua aprendizagem e compreensão. No decurso da minha formação inicial como professora do 1.º ciclo, tive momentos de partilha de ideias e discussões de estratégias em torno dos números e operações. No entanto, nunca existiram momentos específicos dedicados à discussão sobre a aprendizagem e ensino da Álgebra e sobre o desenvolvimento do raciocínio algébrico.

Com a entrada para o mestrado fui tendo cada vez mais consciência que o raciocínio algébrico deveria ser trabalhado e desenvolvido com os alunos do 1.º ciclo porque só assim estes podem desenvolver capacidades fundamentais para a aprendizagem da Álgebra, nomeadamente a capacidade de conseguir fazer generalizações, justificar as estratégias usadas, bem como a capacidade de usar diferentes símbolos matemáticos, dando importância e tendo consciências das relações que podem ser estabelecidas entre os símbolos e as diferentes operações.

A frequência da disciplina de Didática dos Números da Álgebra levou-me a dar mais atenção a um tipo de tarefas em que sempre tive interesse, que se referem ao estabelecimento de relações entre os números, despertando-me a atenção para a noção de “raciocínio relacional”. Desde então, tenho vindo a valorizar cada vez mais este conceito porque acho que é um bom caminho para desenvolver nos alunos o raciocínio algébrico.

O raciocínio relacional pode caracterizar-se como sendo a capacidade de conseguir estabelecer relações entre números e símbolos, envolvendo também as propriedades que estão subjacentes. É também a capacidade que os alunos desenvolvem quando observam duas ou mais expressões como um todo e não como partes cada uma com o seu sentido. Para além do estabelecimento de relações, o raciocínio relacional desenvolve-se através da compreensão do

funcionamento e da estrutura das relações. Deste modo, o reconhecimento das propriedades, mesmo não sendo associado ao seu nome formal, leva os alunos, em casos particulares, a raciocinar sobre as relações que são estabelecidas. Após esta etapa segue-se a capacidade de transpor a informação para casos mais gerais, desenvolvendo assim a capacidade de generalização (Ponte, 2009). Molina, Castro e Castro (2009) afirmam que, quando usamos o raciocínio relacional, os alunos consideram as expressões como um todo, em vez de as visualizarem em várias partes, analisam a expressão, reconhecem relações e exploram essas relações de modo a construir uma estratégia para solucionar a questão colocada.

Segundo Stephens (2006), o raciocínio relacional depende da capacidade que os alunos têm em usar a variação entre os números numa expressão numérica. A autora afirma que quando os alunos compreendem que os números podem variar numa expressão numérica sem afetar o valor dessa expressão, conseguem fazer generalizações que podem ser chamadas de quase-variáveis. Para Carraher e Schliemann (2007) estas expressões quase-variáveis são uma ponte entre a Aritmética e o raciocínio algébrico. Blanton, Levi, Crites e Dougherty (2011) afirmam que as variáveis são instrumentos úteis para expressar ideias matemáticas. Assim, para os autores, as variáveis podem ter diversos significados para descrever situações matemáticas: (i) representar um padrão generalizado, por exemplo quando o aluno constrói conjecturas relacionadas com factos numéricos, através da linguagem natural ou através de letras, usando uma representação para comunicar a generalização ($r + s = s + r$); (ii) representar um valor fixo, mas desconhecido; (iii) representar uma quantidade que varia consoante a relação com outra quantidade, caso em que os valores de uma variável não se alteram de forma aleatória, mas sim segundo uma proporção; (iv) representar um parâmetro; ou (v) representar um símbolo abstrato no processo algébrico. Na sua perspetiva, uma variável não é apenas um símbolo que representa um valor desconhecido, em que os alunos devem identificar os diferentes significados, sendo importante que os professores tenham presente estes significados, porque são um ótimo meio para comunicar relações algébricas e resolver problemas matemáticos.

Deste modo, pretendo realizar uma experiência de ensino com alunos do 3.º ano centrada nas relações de igualdade e desigualdade. Embora não sejam um tópico específico do programa, estas duas relações, em particular a relação de igualdade, acabam por ser transversais a todo o programa porque estão sempre a ser usadas. Proponho-me desenvolver nos alunos a capacidade de olhar para as relações de modo a observar as ligações que se estabelecem entre cada membro da expressão, propondo para isso tarefas apropriadas. Ao longo da experiência de ensino, os alunos trabalham, maioritariamente, com problemas e tarefas de

exploração que, pelo seu grau de desafio elevado ou moderado, promovem, desde o início, o envolvimento dos alunos na sua realização (Ponte, 2005).

Assim, com a realização desta investigação pretendo contribuir para ajudar outros professores ou outras pessoas interessadas no tema a perceber e compreender melhor as potencialidade do trabalho com a relação de igualdade e desigualdade no desenvolvimento do raciocínio relacional.

1.2 Objetivo de estudo

Com a realização deste estudo pretendo compreender como se pode desenvolver o raciocínio relacional em alunos do 3.º ano. Para que isto seja possível, irei realizar uma experiência de ensino onde procuro ajudar os alunos a desenvolver a perceção das expressões numéricas como um todo e a capacidade de as resolver através de raciocínio relacional e não de forma operacional. Nesta experiência de ensino pretendo que os alunos aprendam a olhar para uma expressão numérica e a resolvam, não através do cálculo, mas através de raciocínio relacional, ou seja, que consigam raciocinar matematicamente sobre as relações que podem ser estabelecidas. Ao estabelecer estas relações, o aluno desenvolve o seu conhecimento das propriedades das operações de modo cada vez mais intuitivo. No quadro desta experiência de ensino, tenho especial interesse em perceber o modo como os alunos justificam os seus raciocínios. Pretendo então perceber se estas justificações se relacionam apenas com os casos particulares que são apresentados ou se envolvem algum tipo de generalização. Tentarei entender quais são as conceções que os alunos desenvolvem relativamente às relações de igualdade e desigualdade, em particular no domínio dos números naturais e suas operações.

Com esta experiência de ensino pretendo que os alunos não se limitem a usar raciocínio operacional, que faz com que olhem para as expressões apenas como requerendo a realização de cálculos e comecem a usar raciocínio relacional, ou seja, a ter noção da importância das operações e das suas propriedades para, a partir daí, estabelecerem relações entre expressões e encontrar outras formas de as resolver. O desenvolvimento do raciocínio relacional é promovido através de momentos de partilha de estratégias e discussão coletiva com o apoio de diferentes tarefas com potencial para promover um desenvolvimento significativo nos alunos.

Ao pensar no ano de escolaridade em que iria realizar o estudo, escolhi o 3.º ano por várias razões. Em primeiro lugar, porque, segundo NCTM (2007), é a partir deste ano que os alunos começam a explorar as propriedades das operações – comutativa, associativa e distributiva e começam a ter um maior contato com

equações. Durante a educação pré-escolar e até ao 2.º ano a ideia de equação e as propriedades associativa e distributiva não são muito trabalhadas e não estão suficientemente desenvolvidas nos alunos. Deste modo, a opção pelo 3.º ano permitiria propor tarefas envolvendo estes conceitos. Em segundo lugar, optei por uma turma do 3.º ano porque a preocupação com os exames nacionais do 4.º ano é cada vez maior, facto poderia acabar por ser uma condicionante muito forte, uma vez que muitos professores titulares têm uma grande preocupação em orientar a atividade na sala de aula para o cumprimento de todo o programa a tempo da realização dos exames.

Deste modo, o objetivo deste estudo é compreender como pode ser desenvolvido o raciocínio relacional dos alunos do 3.º ano, ao longo de uma experiência de ensino dando importância às relações de igualdade e desigualdade e à capacidade de generalização das expressões através de tarefas que envolvem quantidades desconhecidas. Para isso tentarei responder às seguintes questões:

1. Durante a experiência de ensino, que evolução se regista nos significados dos alunos relativamente às relações de igualdade e de desigualdade? Começam a recorrer a raciocínio relacional em vez de usarem apenas raciocínio operacional?
2. Que generalizações, nomeadamente sobre propriedades matemáticas, os alunos revelam serem capazes de fazer?
3. Que tipo de justificação utilizam os alunos em tarefas que envolvem estas relações?
4. Que estratégias utilizam e que dificuldades apresentam os alunos na resolução das tarefas?

Capítulo 2

Quadro Conceptual

No capítulo do quadro conceptual começo por apresentar a vertente que o estudo segue, *early algebra* e tento mostrar que conceito é este e a importância da Álgebra nos primeiros anos de escolaridade. De seguida, apresento o tópico sobre o raciocínio relacional onde incluo referências à aprendizagem deste raciocínio noutros estudos, bem como a importância das tarefas no desenvolvimento do raciocínio relacional. Relacionado com estes tópicos surge a interpretação do sinal de igual, onde mostro as concepções que os alunos têm sobre a igualdade, e as dificuldades que podem estar associadas. Faço referência à relação de desigualdade e como esta é trabalhada. Por último, apresento o tópico relacionado com a justificação e a generalização em que falo da forma como estes dois conceitos devem surgir em sala de aula e que diferenças existem nas justificações e generalizações que os alunos apresentam.

2.1 Early Algebra

Ao falarmos de raciocínio relacional vamos tendo sempre presente as relações que se estabelecem entre os números e os símbolos, mas também as propriedades que estão envolvidas nestas relações. Com o desenvolvimento do raciocínio algébrico o aluno fica mais preparado para compreender a Álgebra dos níveis de ensino mais elevado.

Carraher e Schliemann (2007) defendem que existe uma ligação entre a Álgebra e a Aritmética, pelo facto de a Aritmética ter um carácter algébrico, uma vez que os alunos conseguem resolver alguns problemas de Álgebra antes de terem a

noção da sua existência, visto que existe um trabalho com variáveis e regras de Aritmética antes de lhes ser ensinado Álgebra. Este ensino pode ser desenvolvido através de diferentes métodos e estratégias, que sejam mais confortáveis para os alunos, de modo a conseguirem estabelecer relações, ou seja, a linguagem algébrica convencional não é a única maneira para expressar as ideias e as relações algébricas, existindo assim, outras estratégias de expressar essas ideias. Canavarro (2007) também afirma que nos primeiros anos de escolaridade assistimos a uma escassa ligação entre a Álgebra e a Aritmética. A inexistência desta ligação pode trazer algumas dificuldades e limitações na aprendizagem da Álgebra. Deste modo, é importante incluir o raciocínio algébrico nos primeiros anos pelo facto de ser uma preparação para os anos seguintes, mas também pelo aperfeiçoamento da Matemática, em especial pelo tema da Álgebra.

Também o NCTM (2007) considera que esta aprendizagem deve ser incluída no currículo desde cedo. Assim, são apresentados quatro objetivos que os alunos têm que desenvolver desde o pré-escolar até ao fim da escolaridade, nomeadamente: "(i) compreender padrões, relações e funções; (ii) representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; (iii) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (iv) analisar a variação em diversos contextos"(p. 39).

Diversos autores (por exemplo, Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011; Carraher & Schliemann, 2007; Molina, Castro, & Castro, 2009) afirmam que a Álgebra a trabalhar nos primeiros anos de escolaridade tem que ser diferente da que vamos trabalhar no 3.º ciclo e do ensino secundário. É essa ideia que está por detrás da noção de *early algebra*, que defende a promoção da aprendizagem do raciocínio algébrico para alunos mais novos. Esta noção oferece múltiplas entradas que se baseiam na Aritmética, no pensamento funcional, na modelação matemática e no raciocínio quantitativo, sendo que o grande objetivo da *early algebra* passa por generalizar ideias matemáticas, repensar e justificar generalizações de diversas formas e raciocinar com generalizações. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que se torna muito importante compreender que a Álgebra dos primeiros anos de escolaridade surge através da Aritmética. Por outras palavras, os alunos contactam com símbolos e operações relacionados com a Álgebra mas por meio da Aritmética, através de padrões, reconhecimentos de regularidades, sequências numéricas e a própria generalização:

O reconhecimento de regularidades em matemática, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular permitem que a aprendizagem da álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a

capacidade de abstração. Esta capacidade é essencial no desenvolvimento da competência matemática (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p.98).

Esta capacidade de abstração que se desenvolve com a Álgebra formal tem no seu percurso uma variedade de situações com que os alunos foram contactando, mas de forma informal, ao qual os autores chamam de *experiências algébricas informais* (p.99). Nestas situações os alunos são levados a refletir e analisar as relações numéricas apresentadas, a explicá-las por palavras suas e até mesmo representá-las de diferentes maneiras incluindo a utilização de símbolos.

Para Carpenter e Levi (2000) os dois grandes objetivos do desenvolvimento do raciocínio algébrico são a elaboração de generalizações e o uso de símbolos para representar ideias matemáticas e para resolver problemas. Para que estes objetivos se concretizem é importante que os alunos sejam encorajados a exprimir e explicar as ideias e arranjar formas de as representar e comunicar.

Esta vertente da *early algebra* tem consciência que os símbolos matemáticos são usados, quer na Aritmética como na Álgebra e reconhecem a dificuldade que os alunos apresentam na aprendizagem da Álgebra. Os problemas que aparecem provêm da Aritmética. É através de tarefas que envolvem expressões numéricas que se desenvolve a ideia que o sinal de igual não indica apenas um resultado de uma operação. Com estas expressões numéricas os alunos podem perceber a importância, quer da propriedade reflexiva, que facilmente aceitam, mas também da simetria e da propriedade transitiva. Este tipo de expressões pode dar continuidade entre a Aritmética e a Álgebra.

Deste modo, seguimos a vertente da *early algebra* porque acreditamos que a Álgebra, nos primeiros anos, pode utilizar outros métodos ou estratégias para conseguirem estabelecer relações, ou seja, a Álgebra convencional não é a única maneira para expressar as ideias e relações algébricas existindo, assim, outras estratégias de expressar ideias algébricas.

2.2 Raciocínio relacional

2.2.1. Aprendizagem

Desde muito cedo os alunos trabalham com relações no tópico números e operações. Torna-se importante que os alunos compreendam as operações bem como as propriedades que lhes estão associadas. Nos primeiros anos de escolaridade esta abordagem desenvolve-se em linguagem natural, passando aos poucos para uma linguagem simbólica. É com esta descrição das relações que os

alunos iniciam a sua aprendizagem e desenvolvem o raciocínio algébrico que mais tarde se torna muito importante (Ponte et al., 2009).

Carpenter, Franke e Levi (2003) argumentam que, desde muito cedo e de forma bastante intuitiva, os alunos desenvolvem conexões aritméticas simples relacionadas com as propriedades das operações. Quando um aluno, no seu processo de raciocínio, ao adicionar 50 e 30 diz que são 80 porque 5 mais 3 dá 8 e depois multiplica por 10, sem se aperceber, utiliza propriedades relacionadas com a adição e multiplicação. Este tipo de raciocínio ajuda-os na compreensão das operações e das propriedades, tornando a aprendizagem da Aritmética mais eficiente. Fazendo estas generalizações e reconhecendo as relações que se estabelecem conseguem, com mais facilidade, simplificar expressões algébricas que possam surgir.

Para estes autores, o desenvolvimento deste raciocínio relacional não pode ser encarado apenas como mais um tópico na aprendizagem dos alunos, devendo, isso sim, ser visto como parte integrante do desenvolvimento das suas capacidades aritméticas. Quando o aluno consegue raciocinar sobre relações entre os números e as operações desenvolve a sua capacidade de resolver questões aritméticas, recorrendo à simplificação de cálculos ou o reagrupamento dos números de uma adição de modo a facilitar os cálculos. Por outras palavras, um aluno pode optar por calcular 9×7 para descobrir o resultado da divisão de 63 por 7, ou em vez de ter $75 + 48 + 25$ pode adicionar 75 e 25 e só depois é que adiciona 48.

Carpenter, Franke e Levi (2003) apresentam como exemplo desta aprendizagem da noção de relação de igualdade e da compreensão do significado do sinal de igual uma resposta de uma aluna quando confrontada com a expressão $18 + 27 = ___ + 29$. A aluna respondeu que *29 são mais dois que 27, então o número da caixa tem que ser menos dois que 18 para que os dois lados sejam iguais, por isso é 16*. Os autores afirmam que este tipo de respostas é exímio por diversas razões. Em primeiro lugar, a aluna conseguiu reconhecer que o sinal de igual representa uma relação entre duas expressões. Em muitos casos, os alunos do 1.º ciclo (e também de anos seguintes) pensariam que a seguir ao sinal de igual seguiria, sempre, o resultado de um cálculo. Este é um erro comum que se torna incompatível, com os diferentes significados que são atribuídos ao sinal de igual em Álgebra, acabando por limitar, em muito, a aprendizagem da Aritmética. Assim, para os autores, é muito importante que os alunos entendam o sinal de igual como representando uma relação de equivalência. Outro aspeto importante é o facto de a aluna não ter indicado cálculos e, olhando para as relações entre as expressões, ter simplificado os cálculos. Ou seja, a aluna conseguiu perceber que 29 tem mais duas unidades que 27, e por isso teria que tirar duas unidades a 18 para que a

expressão ficasse com a mesma relação de igualdade. Na sua perspectiva, este tipo de raciocínio é crucial em Álgebra e enriquece a aprendizagem da Aritmética permitindo que os alunos se tornem mais flexíveis nas suas capacidades computacionais.

Valverde e Vega - Castro (2013) defendem a perspectiva de diversos autores (como Molina, 2006; Carpenter et al. 2005; Arcavi, 2003, Molina, 2012, etc.) que interpretam a Álgebra como a generalização das relações, o estudo de padrões e estruturas e que denomina a Álgebra como a Aritmética generalizada. Estes autores também destacam que os alunos em diferentes graus de ensino sentem dificuldade em compreender as expressões algébricas como um todo, bem como reconhecer as semelhanças nas estruturas das expressões equivalentes. Valverde e Vega - Castro (2013) fazem referência à aprendizagem dita tradicional que vê o resultado dos cálculos como uma conclusão das expressões e que apenas nos dá um número. Em Álgebra dá-se especial atenção as relações que se estabelecem. Os autores falam de um sentido estrutural aliado ao raciocínio relacional. Sentido estrutural é a capacidade que os alunos possuem em transformar as expressões algébricas, fazendo um melhor uso das técnicas algébricas. O sentido estrutural preocupa-se com que os alunos aprendam a procurar e reconhecer as estruturas propostas nas formas mais simples mas também mais complexas. Deste modo, quando os alunos fazem uma aprendizagem com compreensão e conjugam o raciocínio relacional e o sentido estrutural conseguem usar um conjunto de princípios matemáticos para estabelecer relações e compreender as estruturas.

2.2.2. Tarefas

As tarefas que se podem propor aos alunos desempenham um papel muito importante no desenvolvimento do seu raciocínio relacional. A aprendizagem da Álgebra torna-se muitas vezes uma dificuldade pela capacidade que os alunos têm em desenvolver a sua consciência metalinguística e com isso "sentem dificuldade em interpretar e usar simbolismo algébrico" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p.106). Deste modo, é importante que se proporcione aos alunos tarefas que desenvolvam este raciocínio abstrato:

Atividades [tarefas] de tipo exploratório e investigativo, que apelem à descoberta e comunicação de generalizações, podem desempenhar um papel central no desenvolvimento de capacidades ligadas ao pensamento algébrico (p. 106).

Canavarro (2007) faz referência à “algebrização de problemas aritméticos” (p. 97) que se baseia na transformação de problemas aritméticos que fomentam apenas uma única resposta, para problemas e tarefas de investigação onde se valoriza a “construção de regularidades, conjecturas, generalizações e sua justificação e explicação” (Canavarro, 2007, p. 97).

Estas tarefas, em regra, envolvem as diferentes operações. Nos estudos de Molina, Castro e Castro (2009) as expressões numéricas envolvem a adição e subtração, em Carpenter, Franke e Levi (2003) envolvem apenas a adição e Carpenter, Levi, Franke e Zeringue (2005) usaram tarefas que envolviam a adição e multiplicação. Neste estudo, com alunos do 3.º ano, o objetivo era promover o raciocínio relacional dando especial importância ao uso da propriedade distributiva. Os autores defendem que esta é uma das propriedades essenciais na aprendizagem da multiplicação, onde os alunos apresentam mais dificuldades de aprendizagem. Trabalharam-se expressões que relacionavam a multiplicação e a adição [como $3 \times 7 = 7 + 7 + 7$ / $52 \times 11 = (52 \times 10) + m$] e pretendia-se que os alunos partilhassem as suas estratégias para perceber se usariam o cálculo ou recorriam a raciocínio relacional. Ao usarem o raciocínio relacional estariam a trabalhar com a propriedade distributiva. Deste modo, tornava-se claro que o uso da propriedade distributiva era realmente compreendido, ou se, em alguma das fases da entrevista era mais fácil utilizar o cálculo. No final, verificou-se que os alunos conseguiram utilizar a propriedade distributiva na aprendizagem de sequências numéricas e usavam o raciocínio relacional baseado na propriedade distributiva para raciocinar sobre as suas expressões numéricas. Deste modo, o mais importante é que os alunos tenham consciência das propriedades das operações e que as consigam usar, mesmo que não tenham um conhecimento total ou que saibam a sua definição formal.

Também Blanton, Levi, Crites, e Dougherty (2011) refere que este conhecimento das propriedades não é apenas essencial para perceber a Aritmética, mas corresponde um entendimento generalizado sobre as relações. Deste modo, é importante falar sobre as relações matemáticas, não só para a aprendizagem da Álgebra, mas também para desenvolver o entendimento da Aritmética. Se o aluno começar, desde cedo, a conhecer e memorizar estes factos, mais facilmente se relaciona com o raciocínio algébrico.

As tarefas propostas também podem apresentar diferentes questões. Nos estudos realizados por Molina, Castro e Castro (2009) os investigadores utilizaram dois tipos de questões:

i) Questões de valor omissivo, por exemplo:

$$8+4= _ + 5 / 13- 7= _ - 6 / _ = 25- 12 / 12+ 7= 7+ _$$

Com este tipo de questões, os autores procuravam perceber qual era o entendimento que os alunos tinham do sinal de igual e perceber se usavam, de modo espontâneo, raciocínio relacional.

ii) Questões de verdadeiro e falso, como:

$$10+ 4= 10+ 4 / 1000+ 100= 0 / 72= 56-14$$

Com expressões do tipo verdadeiro/falso pretendia-se que os alunos confirmassem a veracidade das expressões, justificando a sua escolha, promovendo, desta maneira o uso do raciocínio relacional e não o uso do cálculo.

Os autores afirmam que os alunos, quando são confrontados com expressões aritméticas, tentam resolvê-las através da operações apresentadas da esquerda para a direita, não olhando para a expressão na sua totalidade, nem tentando perceber as relações que podem existir entre elas. Como tentativa de contrariar esta ideia os autores utilizaram as expressões acima referidas com o objetivo de levarem os alunos a estabelecerem relações entre cada uma das expressões, deixando, de forma progressiva o recurso constante aos cálculos. Neste estudo, os alunos mostraram algumas dificuldades em usar o raciocínio relacional devido a uma tendência computacional que já possuíam, embora a grande maioria tivesse atingido um nível de compreensão relativamente às relações que podiam ser estabelecidas.

Nos estudos realizados por Carpenter, Franke e Levi (2003) e Carpenter e Levi (2000) também as tarefas de verdadeiro e falso ($8 + 3 = 11 / 8 + 3 = 7 + 4$) e valor omissivo ($3 + 5 = \square + 5$) foram propostas pois revelam ser eficazes na discussão sobre a igualdade, permitindo ao aluno analisar as suas hipóteses. Ao fazer os seus registos para expressar as relações, pode ser útil para o aluno utilizar uma linguagem natural ou utilizar esquemas que facilitem a sua compreensão. Para além da discussão em torno da relação de igualdade, é dado aos alunos uma oportunidade de falar sobre as propriedades básicas dos números e operações. Este tipo de questões também dá a possibilidade de desafiar os alunos a analisar expressões incorretas, para que sejam confrontados, quer com as relações que se estabelecem, mas também com as propriedades utilizadas. Kieran (1981) ainda afirma que, nas questões de valor omissivo, quando o valor omissivo é apresentado no primeiro membro, a tendência é modificar a expressão. Neste caso a autora acredita que os alunos têm dificuldade em interpretar uma expressão aritmética que não reflita uma ordem típica de cálculo. Este tipo de conhecimentos pode refletir o tipo de ensino que os alunos recebem.

No caso dos estudos realizados por Carpenter e Levi (2000) o objetivo em utilizar este tipo de questões era proporcionar um bom contexto para levar os

alunos a falar sobre as propriedades dos números e operações e, com isso, perceber se conseguiriam tornar as suas conjeturas mais explícitas e perceber que regras os guiavam na sua tentativa de generalizar.

Nesta perspectiva, o raciocínio relacional pode ser desenvolvido pelas relações de igualdade que os alunos vão trabalhando. As suas concepções vão evoluindo, ou seja, os alunos deixam de ver estas expressões como resposta a uma operação e passam a entendê-las como uma relação entre expressões que têm o mesmo significado. Carpenter, Franke e Levi (2003) tentam fazer com que os alunos compreendam que as relações de igualdade não têm como objetivo a resolução de cada uma das expressões, mas sim perceber que se tiramos um valor de um primeira expressão teremos que o repor na segunda, havendo sempre uma relação de igualdade. Recorrendo a um exemplo de uma tarefa onde se pede ao aluno para completar uma lacuna ($8 + 4 = \square + 5$) podemos identificar várias concepções diferentes sobre a relação que foi sendo estabelecida. Por um lado são apresentadas algumas visões mais relacionadas com o cálculo e a operacionalização em que o aluno responde: i) 12, ignorando o número 5 e não estabelece uma relação entre ambos os lados do sinal de igual; ii) 17 porque não tem em conta o sinal de igual. Outra visão apresentada caracteriza-se como sendo mais relacional onde o aluno responde 7 porque estabelece uma relação entre as duas expressões da adição e entre a resposta para os dois cálculos.

Para Stephens & Wang (2008), no seu estudo sobre o raciocínio relacional desenvolveram questões que envolviam variáveis. Nas questões de tipo I os alunos conseguiram resolvê-las quer através de um raciocínio relacional, mas também através de um raciocínio computacional. As questões tipo II levam os alunos a usar o raciocínio relacional, porque são expressões numéricas que envolvem dois números desconhecidos. Embora permitam que os alunos possam mobilizar um raciocínio computacional em pequenos casos particulares, para que se consiga identificar uma estrutura relacional é necessário que os alunos raciocinem para além de um processo computacional. As questões do Tipo III são muito semelhantes às questões do tipo II, mas envolvendo letras, permitindo-lhes fazer generalizações. Este tipo de questões, usadas em paralelo, têm um grande potencial para desenvolver o raciocínio algébrico, pedindo primeiro aos alunos para descrever as características na questão II e, posteriormente, aplicando essas características numa estrutura similar na questão III. Quando os alunos conseguem fazer esta transição, acabam por ficar num nível de raciocínio relacional estabelecido. No estudo os autores realçam a ideia que os alunos precisam de ser ajudados a identificar a quantidades que variam e a descrever essas relações, porque em muitos casos não estão familiarizados com estas relações e linguagem e

por isso, é importante desenvolver uma linguagem matemática que suporte um pensamento funcional sobre variáveis.

2.2.3. Interpretação do sinal de igual

A compreensão de uma relação de igualdade está de alguma forma ligada com os significados que o sinal de igual pode transmitir. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que as maiores dificuldades na aprendizagem de equações se relacionam, em primeiro lugar com a tendência que os alunos têm em operar da esquerda para a direita. Este obstáculo surge na Aritmética, mas só quando passamos para um contexto algébrico é que o conseguimos detetar. Por outro lado, surge a má interpretação que os alunos fazem do sinal de igual, ou seja, acabam por ter uma compreensão operacional, em que mostra o resultado de uma expressão que apenas se lê da esquerda para a direita, não conseguindo interiorizar a relação existente entre os membros da expressão.

Carpenter, Franke e Levi (2003) afirmam que uma conceção limitada sobre o significado do sinal de igual é um dos maiores impedimentos para aprender Álgebra. Na equação $5x+32=97$, o aluno para resolver tem que escrever $5x+32-32=97-32$, este passo requer que o aluno compreenda que o sinal de igual expressa uma relação e que adicionar ou subtrair a mesma coisa nas duas expressões preserva a igualdade. Carpenter, Franke e Levi (2003) definem alguns possíveis motivos que levam os alunos a fazer conceções erradas sobre o significado do sinal de igual: (i) as crianças apenas são confrontadas com o tipo de generalização, $a+b=c$; (ii) as calculadoras reforçam o significado que após o sinal de igual vem a resposta ao cálculo; e (iii) existe nas crianças uma predisposição para pensar na igualdade em termos de resposta do cálculo em vez de uma relação.

Kieran (1981) também afirma que o símbolo que mostra equivalência, o sinal de igual, nem sempre é interpretado como uma equivalência e esta interpretação não aparece de imediato em todos os alunos e vai evoluindo ao longo dos anos de escolaridade. A autora afirma que, inicialmente, os alunos interpretam o sinal de igual como um sinal que simboliza o que devem somar e não conseguem compreender a expressão como uma relação entre dois membros. Na expressão $3 + 5 = 8$ os alunos leem *3 e 5 faz 8*, e não como uma relação que demonstra uma igualdade, ou seja, o sinal de igual ainda é interpretado como um sinal que separa o problema da resposta.

Carpenter, Franke e Levi (2003) acreditam que as generalizações inapropriadas sobre o sinal de igual que muitas vezes as crianças defendem são características das limitações na sua compreensão sobre como as ideias matemáticas são generalizadas e justificadas. Isto acontece, quando apenas conhecem uma forma de generalização, o que faz com que tentem justificar as suas respostas com o que conhecem.

Molina, Castro e Castro (2009) faz referência aos diferentes significados que o sinal de igual pode assumir, estando alguns mais relacionadas com a Aritmética e outros mais direcionados para a Álgebra. Os autores fazem referência à maneira como era visto o sinal de igual numa educação matemática tradicional (conceção operacional) o que levava os alunos a terem dificuldades em estabelecer relações e existia uma necessidade de fechar a expressão encontrando um valor numérico. Para Carpenter, Levi, Franke e Zeringue (2005) o sinal de igual deve ser entendido como um sinal que expressa uma igualdade. Só assim se compreende, de forma mais eficiente, a Álgebra. Este entendimento de que o sinal de igual representa uma relação é uma marca importante na capacidade que o aluno tem em raciocinar sobre as relações matemáticas.

Stephens (2006) afirma que muitos alunos não desenvolveram uma noção de equivalência e, por isso, interpretam o sinal de igual como um símbolo de um resultado, em vez de o encararem como um símbolo de equivalência. Esta ideia preconcebida cria barreiras na aprendizagem dos alunos quando se começarem a aperceber que o sinal de igual possui mais do que um significado. Estas conceções que os alunos vão tendo acabam por ganhar raízes na sua aprendizagem o que faz com que, mais tarde, seja mais difícil e demoroso a aprendizagem dos diferentes significados do sinal de igual. Na Álgebra, os estudantes têm que desenvolver uma visão relacional de símbolo para conseguirem perceber equações com operações dos dois lados.

Deste modo, a autora afirma, que é importante que sejam dados aos alunos experiências diversificadas que envolvam o desenvolvimento e aprendizagem do raciocínio relacional. Neste sentido, Stephens (2006) refere ainda que se torna importante que os professores compreendam o que é o raciocínio relacional, percebendo que não é apenas um método, mas uma maneira de pensar, porque só assim é que ficam preparados para desenvolver nos alunos o raciocínio relacional.

Uma das formas de conseguir desenvolver da melhor maneira o raciocínio relacional é através das estratégias que se adotam em sala de aula. O professor tem que ser capaz de criar situações que envolvam a discussão, quer a pares, em pequenos grupos ou de forma coletiva. Os momentos de partilha e discussão de ideias são fulcrais ajudando os alunos a organizarem e justificar o seu raciocínio e a

reconhecer outras estratégias como válidas. Este tipo de tarefas não deve apenas ficar para um grupo restrito de alunos. Torna-se importante que os alunos possam aprender a pensar sobre as relações que envolvem os números, as operações e as suas propriedades como suporte da aprendizagem da matemática (Carpenter, Franke & Levi (2003); Carpenter, Levi, Franke & Zeringue (2005); Molina, Castro & Castro, 2009).

2.2.4. Relação de desigualdade

É importante, que para além da relação de igualdade, os alunos contactem com a relação de desigualdade. Atualmente, com o Novo Programa de Matemática (2013) , esta relação é somente abordada no 1.º ano de escolaridade e apenas com o reconhecimento dos símbolos de maior e menor. Desta forma, o trabalho com a relação de desigualdade fica reduzido e a importância que esta relação tem fica longe do que se pretende. Ponte et al. (2009) afirmam que numa fase inicial esta relação é tratada de forma simples onde o objetivo é que os alunos compreendam que para uma determinada expressão não existe uma resposta única. Para além desta possibilidade de diferentes respostas, os alunos também devem perceber a relação, ou seja, dizer que $10 > 5$ é o mesmo que $5 < 10$. Esta aprendizagem no 1.º ciclo envolve os número naturais e os números decimais, em forma de fração ou decimal, quando estes são abordados.

Enquanto a relação de igualdade é uma relação transitiva, simétrica e reflexiva, a relação de desigualdade é transitiva, mas não é nem simétrica nem reflexiva. É importante que os alunos compreendam as diferenças entre estas relações nem que seja de forma informal. Tal como na relação de igualdade, esta abordagem no 1.º ciclo é importante porque permite desenvolver nos alunos uma maior compreensão dos números e das operações.

2.2.5. Justificação e Generalização

Um dos objetivos deste estudo é compreender que tipo de justificações desenvolvem os alunos na resolução de expressões envolvendo igualdades e desigualdades bem como eventuais processos de generalização. Carpenter, Franke e Levi (2003) afirmam que existem muitas definições para o conceito de justificação. Para os autores, justificação é o conjunto de argumentos que os alunos usam para mostrar que uma afirmação é verdadeira. A justificação é um processo fundamental na Matemática. Quando os alunos partilham as suas justificações,

desenvolvem a capacidade de argumentação ao tentar convencer os colegas sobre a veracidade das suas estratégias.

Carpenter, Franke e Levi (2003) fazem referência a diferentes tipos de argumentos que os alunos usam para justificar as suas respostas. Em primeiro lugar, referem o apelo à autoridade, onde os alunos justificam de determinada forma porque alguém, normalmente o professor, lhes disse que seria assim. Nestes casos, os alunos têm que ser capazes de questionar o sentido das ideias matemáticas apresentadas e não aceitar simplesmente a ideia apresentada. Para além disso, outras formas de justificar são através de um exemplo e a através da generalização de argumentos que os alunos desenvolvem.

Para Carpenter e Levi (2000) os alunos sentem alguma dificuldade em justificar. Inicialmente, pensam que usar um exemplo é uma maneira legítima de argumentar. Contudo, os alunos reconhecem que apenas um exemplo não serve para tornar a justificação válida. Esta forma de justificar surge porque se torna uma maneira simples e fácil de argumentar. No caso da generalização de argumentos, os alunos apenas repetem uma afirmação por esta ser tão óbvia. A afirmação, “adicionar números não interessa a ordem porque o valor será sempre o mesmo” é exemplo desta situação (Carpenter, Franke & Levi, 2003, pp. 88).

Uma das dificuldades que os alunos têm é que não conseguem criar justificações que expressem qualquer número. Este aspeto relaciona-se com o facto de não estarem habituados a falar nos números de uma forma geral e de não conseguirem arranjar uma forma para os representar, sentindo a necessidade de recorrer a factos específicos. Contudo poderemos ajudar a produzir justificações com casos específicos, mas sem precisar de valores específicos. Carpenter, Franke & Levi (2003) apresentam como exemplo o caso de Alice que explica, através da expressão $7 + 5$, que poderemos adicionar dois números e trocar a ordem e obtemos o mesmo número. Neste caso, a aluna utiliza dois números específicos, mas tem a noção que pode ser realizada com qualquer número. É importante ter presente que estas justificações apenas funcionam com os números inteiros.

Carpenter, Franke & Levi (2003) também referem as justificações apoiadas noutras justificações já comprovadas, como no exemplo $a + b - b = a$. O uso de contraexemplos também pode ser entendido como justificação servindo para demonstrar que a justificação não se aplica a todos os números. Para além disso, justificações relacionadas com 0 e 1, com a propriedade comutativa ou até mesmo com números pares e ímpares podem ser usadas pelos alunos devido à sua simplicidade.

Para que este tipo de justificações surja tem que existir, por parte do professor, um questionamento constante sobre a veracidade das afirmações,

procurando saber se as situações em causa acontecem com todos os números. Os autores afirmam que o trabalho em torno das justificações é difícil e não traz frutos logo num primeiro momento. Tem de existir um trabalho constante para que os alunos se familiarizem com o tipo de questões que vão sendo colocadas. Desta forma, os alunos desenvolvem uma melhor capacidade de justificar e com isso, iniciam um processo de generalização. Ao partilharem as suas justificações em grande grupo, mesmo que não estejam totalmente corretas, poder-se-á ir aperfeiçoando o que foi dito para a tornar essas justificações cada vez mais válidas (Carpenter, Levi, 2000).

O uso de símbolos é importante nas justificações. Arcavi (1994) fala da noção de sentido de símbolo e refere que, a par com o sentido de número, os alunos têm que desenvolver o sentido de símbolo. Para o autor, o sentido do símbolo tem uma estreita ligação com a Álgebra, permitindo provar relações que a Aritmética não consegue. Os alunos têm de desenvolver a capacidade de sentir os símbolos de modo a perceber e interpretar quais os momentos mais apropriados para usar símbolos na resolução de problemas. Nestas situações, Arcavi (2006) refere que os alunos devem desenvolver uma intuição e presentimento para conseguirem recorrer a símbolos que podem ser representações importantes.

Deste modo, torna-se importante desenvolver a capacidade de usar símbolos, tendo em atenção as rotinas que se criam, quer na resolução, mas também na análise de uma expressão. É importante perceber que para resolver uma expressão não se trata apenas de aplicar procedimentos mecânicos, mas sim tentar descobrir as relações que estão presentes em cada expressão. Deste modo, o professor deve procurar desenvolver nos alunos um sentido crítico para olhar para as expressões e perceber se são verdadeiras. (Arcavi, 1994, 2006).

Como indicam Carpenter, Franke e Levi (2003), a maioria das generalizações que os alunos fazem relacionam-se com o número 0 (por exemplo, $a - 0 = a$, $a - a = 0$, $a \times 0 = 0$,) e também com a propriedade comutativa ($a + b = b + a$). Contudo, os alunos não têm a possibilidade de analisar estas relações e compreender o seu porquê. Nestes casos, utilizam estes princípios para os números mais familiares mas não sabem se conseguem fazer para todos os números. Os autores afirmam que o conhecimento dos alunos tem de ficar mais consciente, através do trabalho que se realiza em torno das generalizações e da discussão que se desenvolve em torno da Matemática. As tarefas de verdadeiro e falso e de valor omissa são instrumentos importantes para a construção destas generalizações porque ajudam os alunos a perceber os princípios fundamentais da Matemática. Muitas vezes, ao tentar discutir uma hipótese de generalização, os alunos acabam por justificar essa hipótese através de exemplos concretos. A

importância de construir hipóteses que os levam a generalizações é tornar as ideias matemáticas cada vez mais explícitas para que os alunos compreendam melhor a Matemática que aprendem e usam. Carpenter, Franke e Levi (2003) referem um conjunto de generalizações que os alunos desenvolvem que se relacionam com os diferentes princípios matemáticos, nomeadamente com as propriedades dos números e operações.

Outra generalização que surge das propriedades é $a + b - b = a$. Este tipo de expressão fornece grandes momentos de discussão para tentar perceber se é verdadeira ou falsa. Também a descrição de procedimentos, ou seja, quando um aluno sabe que na multiplicação por 10 tem que acrescentar um 0 ao número dado, tem presente um conhecimento generalizado. Contudo, este tipo de generalização não pode ser confundido com as propriedades porque, ao contrário do que acontece com estas propriedades, este conhecimento não pode ser transmitido através de uma expressão generalizada. Por último, também surgem generalizações relacionadas com classes de números como os números ímpares e pares, bem como os critérios de divisibilidade.

Ellis (2011) também desenvolve um estudo relacionado com a generalização, procurando compreender de que modo é que o trabalho colaborativo e o ambiente de discussão em sala de aula ajudam no desenvolvimento deste processo. A autora vê a generalização como um processo dinâmico que envolve ciclos de interação entre o professor e os alunos. É através da discussão que estes vão melhorando ou elaborando novas generalizações. Esta ideia de grande dinâmica em sala de aula reflete a vertente que a autora segue, que vê o desenvolvimento da generalização como um ato coletivo, em que participam diversos agentes, num contexto matemático específico que dá especial atenção às interações sociais, às ferramentas, à própria história de cada aluno, mas também à existência de um bom ambiente de sala de aula propiciador da aprendizagem.

No seu estudo, Ellis (2011) envolve 6 alunos entre os 11 e os 14 anos e tenta, ao longo de oito sessões mostrar como se pode ajudá-los a generalizar e a raciocinar sobre as justificações que dão. Nos resultados que apresenta, a autora faz referência às diferentes etapas que podem surgir neste processo e que passam pelo encorajamento para generalizar ou partilhar uma ideia por parte do professor e também pelos colegas da turma. Esta dinâmica de partilhar as ideias e as generalizações feitas através de momentos de discussão coletiva torna-se muito importante neste processo. Os alunos vão debatendo as suas ideias e, à medida que surgem opiniões divergentes, tem lugar um aperfeiçoamento da generalização ou até mesmo o desenvolvimento de outras ideias ou generalizações. A autora atribui uma grande importância no processo de encorajar, quer o aluno a partilhar

as suas ideias quer na discussão das ideias apresentadas por outros, porque só desta maneira é que os alunos conseguem desenvolver em conjunto novas ideias. Para além de apresentar as generalizações feitas, a autora não deixa de referir a importância de justificar e clarificar as ideias apresentadas. Desta maneira, os alunos raciocinam sobre a solução apresentada e conseguem refletir sobre as propriedades que estão a ser trabalhadas bem como as relações que se mantêm. Este pedido de justificação e clarificação de ideias surge através de questionamentos feitos não apenas pelo professor mas também por parte dos colegas.

Para Ellis (2011), este ciclo de apresentação de generalizações e ideias, retificação e aperfeiçoamento através das questões que se desenvolvem acaba por ser gerador de novas ideias e generalizações. Esta dinâmica aparece no momento de discussão coletiva, quando os alunos começam a apresentar os seus argumentos. De um modo geral, defende que o processo de generalização deve ser cíclico, não sendo um processo individual mas coletivo. Só através da discussão, questionamento e aperfeiçoamento das ideias apresentadas é que os alunos conseguem tirar partido deste processo. A autora faz referência a ações importantes que o professor deve ter em conta, tais como: (i) encorajar os alunos a justificar e a clarificar as suas ideias; (ii) partilhar as contribuições dos alunos; e (iii) encorajar os alunos a generalizar através de tarefas já previstas. Também dá importância ao tipo de tarefas que se realizam, devendo levar os alunos a possíveis generalizações e a gerar outras através do diálogo que se estabelece na sala de aula.

Para desenvolver nos alunos o seu sentido de símbolo e a sua capacidade de generalizar é importante ter um ambiente propício. Arcavi (1994, 2006) defende que é muito importante a abordagem feita pelo professor. As questões que vão sendo colocadas e a discussão que se fomenta em torno das expressões, tornam-se preponderantes para o desenvolvimento do sentido de símbolo. Deste modo, é importante cultivar em sala de aula uma procura dos significados dos símbolos, evitando a aplicação automática de procedimentos matemáticos. Carpenter, Franke e Levi (2003) também referem que não devemos cair na tentação de apenas usar o raciocínio computacional, mas sim ajudar os alunos a criar novas estratégias e a promover a discussão para que apresentem ideias que não esteja diretamente relacionadas com a resolução direta da expressão.

Capítulo 3

Experiência de Ensino

No capítulo 3 apresento, em primeiro lugar, as ideias gerais sobre o que se pretende fazer na experiência de ensino. De seguida, desenvolvo o tópico das tarefas em que identifico qual o tipo de tarefas utilizadas e o que se pretende com cada sessão. Por último, apresento de forma mais pormenorizada cada uma das sessões e quais os objetivos que pretendo desenvolver com cada uma.

3.1. Ideias gerais

Com a realização da experiência de ensino pretendo levar os alunos a serem capazes de resolver expressões numéricas sem recorrer apenas a raciocínio computacional, utilizando em seu lugar estratégias de raciocínio relacional. Para esse efeito irei propor aos alunos um conjunto de tarefas procurando que eles desenvolvam o sentido de número, identificando as relações existentes entre os números e as propriedades das operações e resolvendo expressões através de diferentes estratégias de cálculo mental. Brocardo (2011) afirma que “calcular mentalmente é desenvolver uma abordagem relacional em relação às situações aritméticas, e esta abordagem relacional é um aspeto intrínseco do sentido de número” (p. 9). Numa fase final, e através das propriedades das operações, pretendo que os alunos formulem generalizações, em linguagem natural, e mais tarde, em linguagem simbólica.

Esta unidade de ensino assume que todos os alunos devem aprender Álgebra, tal como recomenda o NCTM (2007). Como indiquei anteriormente, um dos grandes objetivos é que os alunos consigam “representar e analisar situações e

estruturas matemáticas usando símbolos algébricos” (p. 39). Deste modo, é expectável que os alunos consigam:

- i) Identificar propriedades, como a comutatividade, a associatividade e a distributividade, e aplicá-las ao cálculo com números inteiros;
- ii) Representar a noção de variável, enquanto quantidade desconhecida, através de uma letra ou símbolo;
- iii) Expressar relações matemáticas através de equações. (NCTM, 2007, p. 182)

3.2. Tarefas

As tarefas que o professor propõe na sala de aula são a base da aprendizagem dos alunos. O NCTM (1994) define tarefas como questões matemáticas que “servem aos alunos de estímulo para pensar em conceitos e processos particulares, nas suas conexões com outras ideias matemáticas, e nas suas aplicações a contextos da vida real. Boas propostas [de tarefas] podem ajudar os alunos a desenvolver aptidões num contexto de utilidade das mesmas” (p. 26). As tarefas podem ser apresentadas de diferentes maneiras, consoante a aprendizagem que o professor pretende promover nos alunos. Diversos tipos de tarefa são importantes e devem ser trabalhadas na sala de aula, consoante as suas finalidades e os momentos em que são desenvolvidas.

Nesta experiência de ensino, as tarefas ganham especial atenção porque são um instrumento para promover o desenvolvimento do raciocínio relacional. Aponto desde já para a diversidade de tarefas a usar nomeadamente, exercícios, problemas e tarefas de exploração, cada uma com um objetivo e sentido próprio. Todos estes tipos de tarefas são importantes e devem ser trabalhadas na sala de aula, tendo cada uma uma finalidade diferente e momentos de aplicação também diferentes. Ministério de Educação (2001) afirma que os alunos devem poder contactar com diferentes experiências de aprendizagem e faz a distinção entre problemas, exercícios, atividades de investigação, realização de projetos e jogos. Algumas destas tarefas também são analisados por Ponte (2005), nomeadamente, problemas, exercícios, tarefas de exploração, investigações e jogos. Para o estudo irei apenas analisar os exercícios, problemas e tarefas de exploração. Os exercícios são o tipo de tarefa matemática que surge com mais frequência. Mas a aprendizagem não deve limitar-se somente aos exercícios, por se tornar muito limitado, acabando por não utilizar todas as vertentes do ensino da Matemática.

Segundo Ponte (2005), os exercícios servem para colocar em prática conhecimentos já adquiridos ou como forma de os consolidar. Já ME (2001), vê os

exercícios como uma resolução mecânica, onde a aplicação do algoritmo leva a uma solução. No que diz respeito aos problemas, estes aparecem associados ao raciocínio e comunicação, podendo estar interligados com outras tarefas de outras áreas do saber. São situações não rotineiras, onde existem várias estratégias e métodos de resolução. O ME (2001) afirma que se devem propor problemas aos alunos para que estes se sintam desafiados no desenvolvimento das suas capacidades matemáticas. Contudo, o grau de dificuldade apresentado deve ser um aspeto a ter em conta. Se, por um lado, o problema se mostrar de difícil compreensão ou resolução, o aluno acaba por perder o interesse e deixa de se sentir desafiado para a sua resolução. Por outro lado, este for demasiado fácil, deixa de ser um problema e transformar-se-á num mero exercício, porque o aluno já possui conhecimentos para o realizar (Ponte, 2005).

As investigações são outra categoria das tarefas matemáticas que devem ser desenvolvidas em sala de aula. Com este tipo de tarefas pretende-se que os alunos criem e testem conjeturas, e numa segunda fase, justifiquem e comuniquem as suas conclusões, quer seja por escrito quer seja oralmente. Com as investigações, facilmente se pode criar uma ligação com as outras áreas do saber (ME, 2001). O uso das investigações no processo de ensino-aprendizagem em Matemática, torna-se também muito importante porque promove o envolvimento dos alunos desde o primeiro momento da tarefa (Ponte, 2005).

Segundo Stein e Smith (1998) as tarefas matemáticas podem apresentar duas vertentes, ou seja, existem tarefas que são trabalhadas de forma rotineira tendo por base a memorização, os alunos realizam as tarefas porque já memorizaram a forma de a resolver, e existem tarefas que ajudam a pensar e desafiam os alunos a fazer conexões. As autoras fazem uma distinção entre estes dois tipos. Por um lado existem tarefas com um nível de exigência reduzido, em que se trabalha essencialmente a memorização, onde os procedimentos não têm conexões ou ligações com o contexto. Outro tipo de tarefas são as que procuram desenvolver os procedimentos com conexões, em que os alunos exploram diferentes maneiras de resolver os problemas através de grelhas, diagramas, desenhos. A este tipo de tarefas as autoras chamam *fazendo matemática*. (Stein & Smith, 1988, p. 3).

Ponte (2005) refere que as tarefas podem variar segundo duas dimensões, classificando-as pelo seu grau de desafio ou de estrutura. "O grau de desafio relaciona-se com a perceção da dificuldade de uma questão" (Ponte, 2005, p. 13). Assim, uma tarefa pode ter um grau de desafio elevado ou reduzido, consoante a dificuldade da questão apresentada. O grau de estrutura está relacionado com a tarefa poder ter um cunho fechado, onde facilmente se identifica o que se pretende

ou ser uma tarefa aberta, onde o que é pedido e o que é realizado se relaciona muito com o desenvolvimento que se vai fazer ao longo da tarefa.

Skovsmose (2000) apresenta a distinção entre dois paradigmas – exercício e cenário de investigação. Estes dois paradigmas podem estar associados a diferentes contextos. Em primeiro lugar, faz referência a uma matemática pura, em que não existe qualquer ligação com a realidade, quer estejamos a falar em exercícios ou em investigações. Em segundo lugar, a contextos com referências a uma semi-realidade, em que a situação relatada faz transparecer alguma realidade ao aluno. Contudo essa realidade torna-se muito distante porque vai aparecendo apenas nos livros e nos manuais escolares: "...é possível referir-se a uma semi-realidade; não se trata de uma realidade que "de facto" observamos, mas uma realidade construída, por exemplo, por um autor de um livro didático de Matemática." (Skovsmose, 2000, p. 7). Por último, temos um contexto relacionado com a realidade do aluno, onde as tarefas se relacionam com o quotidiano dos alunos, os exemplos e situações advém da vida real e de uma realidade que para os alunos não é estranha e distante. Desta forma, o autor classifica diferentes tarefas segundo os paradigmas e os contextos que apresenta, em que, relacionado com o paradigma do exercício, são apresentadas tarefas tendo como contexto a matemática pura, a semi-realidade ou a realidade. Faz a mesma ligação para o paradigma do cenário de investigação.

Segundo o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), a aprendizagem do aluno deve abranger uma grande diversidade de experiências matemáticas, envolvendo contextos matemáticos e não matemáticos. Gravemeijer (2005) afirma que o ensino da Matemática tem que se adaptar para que o aluno consiga ter uma aprendizagem mais significativa e não acentuar a barreira existente entre o seu conhecimento e o conhecimento formal desta disciplina.

A experiência de ensino é planificada em 8 sessões. A primeira sessão é constituída por uma avaliação diagnóstica, onde pretendo perceber que conhecimentos os alunos possuem sobre os sinais de igual e de maior e que estratégias usam para resolver expressões numéricas. No final da experiência de ensino é feito um teste escrito de modo a avaliar as aprendizagens realizadas ao longo da experiência.

Numa primeira etapa (sessões 2, 3, 4) pretendo alargar os conhecimentos que os alunos têm sobre as relações de equivalência e de ordem através de tarefas que os levam a compreender que existem relações entre números que se podem estabelecer e que podemos usar para tentar chegar a uma solução. O estabelecimento dessas relações é feito através tarefas envolvendo expressões numéricas com valor omisso e expressões de verdadeiro/falso. Na segunda etapa

(sessões 5, 6, 7) pretendo que os alunos encontrem estratégias de resolução de expressões numéricas recorrendo a raciocínio relacional e não a cálculos, tentando justificar as suas estratégias através das relações e tentando chegar a um processo de generalização.

Nas tarefas que incluem expressões de verdadeiro/falso os alunos têm que comprovar a veracidade das expressões, justificando o seu raciocínio. Nas tarefas de valor omissivo têm de encontrar um valor desconhecido. Estas expressões são baseadas nas propriedades aritméticas da adição e multiplicação tal como mostra o Quadro 1. Qualquer das expressões numéricas deste quadro pode ser resolvida fazendo uso do raciocínio relacional ou através do cálculo, sendo o objetivo principal fazer com que os alunos optem por um raciocínio relacional, compreendendo as relações que podem ser estabelecidas entre cada expressão. Em todas as sessões existem questões de valor omissivo e de verdadeiro/falso.

Quadro 1 - Propriedades aritméticas da adição e multiplicação.

Propriedade	Adição	Multiplicação
Comutativa	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
Associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Distributiva	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	
Existência de elemento neutro	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \times 1 = a = 1 \times a$

3.3. Dinâmica de sala de aula

No conjunto de todas as sessões são usadas diversas formas de trabalho, com especial atenção para o trabalho a pares e em grande grupo. É usado trabalho individual na primeira e na última sessão. Esta diversidade de formas de trabalho é importante porque cada uma ajuda a atingir objetivos diferentes de acordo com o trabalho realizado. O trabalho individual, usado na primeira e na última sessão, serve para que o aluno seja "capaz de assumir a sua própria independência e responsabilidade pessoal" (Ponte, 2000, p. 128). Neste caso, é valorizada a interpretação e a resolução de tarefas, bem como a leitura e interpretação de textos matemáticos (ME, 2007). Pretende-se que os alunos mostrem os conhecimentos que possuem numa primeira fase do estudo, bem como as aprendizagens que tiveram ao longo das sessões e de que maneira o demonstram na última sessão. Nestes dois casos, pretende-se perceber que conhecimentos

tinham os alunos *a priori* e que aprendizagens desenvolveram até à última sessão. Ponte (2000) também refere que o trabalho a pares “possibilita uma interação significativa entre os alunos, que trocam impressões entre si na realização da tarefa proposta” (p. 128). Com esta forma de trabalho valoriza-se a comunicação entre os alunos, tentando esclarecer dúvidas e arranando estratégias de resolução. Por último, o trabalho coletivo é uma forma bastante eficaz de concluir as tarefas porque serve para desenvolver momentos de partilha de ideias e a sua discussão. É com este trabalho que se concretiza a sistematização dos conhecimentos. Para isso, o professor deve dar a oportunidade a todos os alunos para que comuniquem e justifiquem as suas ideias e resoluções (ME, 2007). Canavarro (2007) também refere que o ambiente em sala de aula pode ser muito favorável para o desenvolvimento do raciocínio algébrico, quando os alunos têm a possibilidade de trabalhar de forma autónoma, apresentar as suas produções perante a turma e, com isso, desenvolver aprendizagens matemáticas coletivas.

Neste estudo, a aula é estruturada segundo uma estratégia de ensino-aprendizagem de cunho exploratório (Ponte, 2005). Neste tipo de aula é feita, em primeiro lugar, a apresentação da tarefa por parte do professor. De seguida, existe a exploração das tarefas pelos alunos que trabalham, na maioria das sessões, a pares e, por último, existem os momentos de discussão e reflexão coletiva sobre a realização das tarefas. Esta última etapa assume um papel decisivo no processo de ensino-aprendizagem. Este momento de discussão e partilha de resultados após a realização das tarefas é muito importante para que os alunos partilhem as suas estratégias e justificações, promovendo a compreensão dos conceitos abordados. É neste momento que os alunos fazem uma reflexão sobre o trabalho realizado. Deste modo, existe equilíbrio entre os papéis do professor e do aluno, assumindo o professor um papel de moderador e o aluno um papel interventivo na construção do conhecimento matemático. Por outro lado, quando os alunos discutem as suas ideias, formulam conjecturas, quando questionam os colegas sobre o que fizeram ou disseram oralmente, desenvolvem capacidades de compreensão dos princípios matemáticos. Deste modo, é importante que o professor valorize a interação entre todos os elementos da aula, não só na vertente de professor-aluno, mas também aluno-aluno. Para além disso, estas discussões proporcionam momentos para que os alunos desenvolvam a sua capacidade de argumentar e comunicar:

Ao confrontarem as suas diferentes conjecturas e justificações, os elementos da turma constituem - se como pequena comunidade matemática, na qual o conhecimento matemático se desenvolve em conjunto. (Ponte, Oliveira, Cunha, & Segurado, 1998, p. 10)

Os momentos de discussão proporcionam aos alunos momentos de interação, quer entre os alunos que já conseguem desenvolver e apresentar de forma estruturada o seu raciocínio e as suas ideias, quer entre os alunos que, apesar de não terem as suas ideias totalmente definidas, esperam pela oportunidade de partilhar o que fizeram. Por último, Ponte (2000) também refere que o papel do professor acaba por ser o papel de um moderador porque "deve procurar que os alunos formulem questões, proponham conjeturas e apresentem soluções, explorem exemplos e contraexemplos e utilizem argumentos matemáticos para determinar a validade das afirmações, tentando convencer-se a si próprios e aos outros" (pp. 122-123).

Este tipo de interações contraria a ideia que apenas existe uma resposta única e que a melhor forma de fazer as tarefas é ficar à espera que o professor diga se está certo ou errado. Muitas vezes os alunos olham para a Matemática como uma disciplina para aplicar procedimentos. Com esta dinâmica de sala de aula os alunos compreendem que têm que pensar no que fazem, ir à procura de diferentes soluções e analisar o que fizeram. É um processo que leva o seu tempo, mas contribui para o desenvolvimento da sua capacidade de comunicar e raciocinar matematicamente (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999).

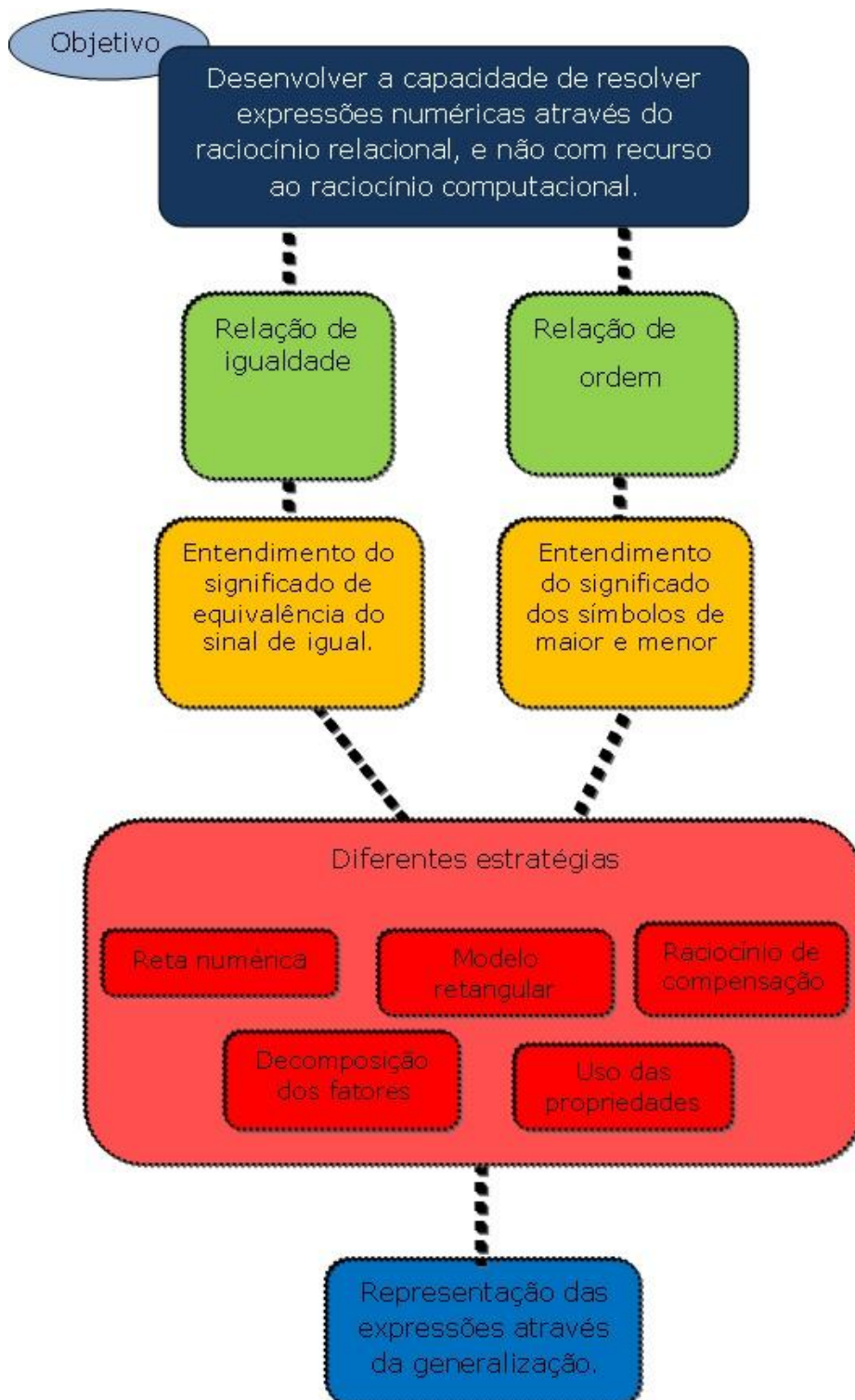
3.4. Planificação da Unidade de Ensino

3.4.1. Aspetos gerais

As tarefas abordam principalmente a exploração das relações entre números e propriedades das operações. A exploração das tarefas tem como objetivo o desenvolvimento do raciocínio relacional, bem como o estabelecimento de generalizações em linguagem natural, iniciando um percurso até chegar a uma linguagem matemática. O esquema apresentado no Figura 1 representa a linha orientadora da experiência de ensino, começando com o objetivo principal e mostrando o percurso até à fase de generalização. Algumas das tarefas têm um contexto relacionado com a realidade dos alunos, para que seja mais fácil a sua apropriação de conceitos, e outras têm apenas um contexto matemático, de modo a tentar perceber se os alunos conseguem realizar o que é proposto. Estas tarefas foram inspiradas nas questões apresentadas nos estudos de Molina (2006), Molina, Castro e Castro (2009) e Stephens e Wang (2008), bem como no trabalho de Ponte, Branco & Matos (2009). De seguida apresento os objetivos e a estrutura de

cada sessão. O quadro de planificação da unidade de ensino, bem como o quadro de evolução dos tópicos da unidade de ensino encontram-se no Anexo 1.

Figura 1 - Esquema orientador da Unidade de Ensino.



3.4.2. Sessão 1 – Tarefa diagnóstica

A primeira sessão tem como objetivo avaliar a compreensão dos alunos sobre os sinais de igual, maior e menor e identificar e analisar as estratégias que utilizam, detetando o uso de raciocínio relacional ou computacional. Através de uma ficha de diagnóstico individual formada por expressões de valor omissivo, os alunos têm que justificar cada uma das suas respostas. São utilizadas, em ambas as questões, as quatro operações aritméticas para que seja possível identificar alguma dificuldade na sua utilização (Anexo 2).

Na primeira parte da tarefa são apresentadas cinco expressões de igualdade que envolvem as quatro operações aritméticas. Nestas expressões, os alunos têm que encontrar o valor em falta, tornando a expressão verdadeira. Em todas as expressões o valor omissivo encontra-se num dos termos da expressão. Deste modo, pretendo perceber se os alunos resolvem com mais facilidade expressões que os direcionam para um raciocínio computacional, no caso do valor omissivo se encontrar do lado direito, ou se utilizam com facilidade o raciocínio relacional em expressões com o valor omissivo no lado esquerdo.

Na segunda parte da tarefa apresento cinco expressões envolvendo a relação de ordem e procuro analisar se os alunos estabelecem relações entre estas expressões. Neste caso, tem de existir uma interpretação correta do símbolo, de modo a substituir o valor omissivo por um número ou, até mesmo, por uma expressão. É importante verificar se os alunos recorrem a cálculos para estabelecerem uma relação de ordem. Em duas expressões apresentadas, os valores que os alunos têm de encontrar são maiores que o valor apresentado. Com estas duas expressões quero perceber se os alunos escolhem os números próximos de cada expressão ou se, pelo contrário, apresentam números grandes. Nas duas questões os números utilizados são inferiores a 20 e cada expressão tem apenas uma operação, para que exista um rápido entendimento sobre o que é pedido.

3.4.3. Sessão 2

A segunda sessão envolve a relação de igualdade. As expressões são compostas por números pequenos e o valor omissivo está presente no segundo membro da expressão. A adição e a subtração são as operações presentes nesta sessão. Com esta tarefa pretendo que os alunos, com a ajuda do modelo da reta numérica, entendam as relações que se estabelecem entre os números, em cada

uma das expressões (Anexo 3). Com a visualização desta representação, os alunos compreendem que ao subtrair e adicionar o mesmo número o valor inicial não se altera, ou seja, começam a ter a percepção da estratégia de compensação. Para além disso podem iniciar um processo de generalização com a propriedade de adicionar e subtrair o mesmo valor - $a + b - b = a$.

A reta apresentada é uma reta numérica simplificada que apenas apresenta múltiplos de 5. A primeira reta, para além dos números que são apresentados, os alunos conseguem identificar os restantes, pois existem pequenos traços entre os múltiplos de 5. Nas últimas duas retas, apenas são apresentados os números de 5 em 5 e os traços intermédios desapareceram. Deste modo, pretendo que os alunos aprendam a utilizar e compreender a reta conseguindo posicionar corretamente números sobre ela. Para que isto aconteça, as expressões apresentadas não são apenas formadas por múltiplos de 5, mas envolvem outros números. Numa segunda fase, pretendo que os alunos tirem conclusões sobre as expressões que resolveram e que elaborem possíveis conjecturas, tais como: *quando adicionamos o seis ao treze e voltamos a retirar seis, o número vai ficar igual*. Podem também fazê-lo de uma forma mais geral substituindo o número 6 e 13 por *qualquer número*.

Na segunda questão, apresento um problema relacionado com o corta-mato escolar. Aqui os alunos têm que encontrar o número de posições que separa o Lucas da Clarisse. Pretendo que os alunos, sem recorrer a cálculos, utilizem uma estratégia para chegarem ao resultado correto. É importante que na fase de discussão em grupo, os alunos apresentem as suas resoluções, apercebendo-se que podem seguir diferentes estratégias para chegar ao resultado. Por exemplo, os alunos podem utilizar estratégias progressivas em que iniciam a contagem em 11, chegando a 25, ou usar estratégias regressivas, começando em 25 e acabando em 11.

3.4.4. Sessão 3

Na sessão 3 desenvolvo a relação de ordem recorrendo a dois tipos de expressões (Anexo 4). Em primeiro lugar, uso expressões com valores numéricos em falta e, em segundo lugar, expressões onde é necessário colocar os sinais de $<$, $>$ ou $=$ para que as expressões se tornem verdadeiras (questões 1 e 2). Estas expressões envolvem as operações de adição e subtração separadamente. Com as tarefas pretendo que os alunos olhem para a relação de ordem com a mesma compreensão da relação de igualdade, e compreendam que os símbolos de $>$ e $<$

representam sempre uma desigualdade entre cada uma das expressões. Na segunda questão torna-se importante que os alunos completem as expressões, sem recorrer a cálculos, percebendo qual é o membro com maior ou menor valor, usando um raciocínio de compensação. Após este momento, surge a partilha das diferentes respostas com os colegas e que se verifica que pode existir mais do que uma solução que para que a expressão se torne verdadeira.

Na segunda parte da tarefa (questões 3 e 4) pretendo que os alunos interpretem os enunciados, transformando-os em linguagem matemática. É necessário que os alunos entendam o que é pedido, tendo em atenção os valores e os símbolos apresentados e, com isso, descubram os valores que faltam.

3.4.5. Sessão 4

Na sessão 4 pretendo trabalhar as relações de igualdade através do modelo retangular e com recurso à propriedade distributiva (Anexo 5). Em primeiro lugar, os alunos são confrontados com a resolução de uma multiplicação através deste modelo. É importante que os alunos fiquem familiarizados com o modelo e que consigam utilizá-lo com outra expressão apresentada, para que percebam que esta estratégia pode ser utilizada com outras expressões numéricas. Seguidamente, os alunos apresentam explicações sobre a relação que se estabeleceu, ou seja, recurso à propriedade distributiva, decompondo um dos fatores em números mais cómodos para resolver a expressão. Na fase final da sessão, é meu objetivo que os alunos arranjam outra estratégia de resolução e que ganhem a consciência que uma expressão, pode ser resolvida através de diferentes estratégias de decomposição de fatores.

3.4.6. Sessão 5

Nesta sessão os alunos são confrontados com as diferentes estratégias utilizadas para resolver expressões que envolvem as operações aritméticas da multiplicação e divisão (Anexo 6). Com estes exemplos, os alunos devem compreender que, para facilitar os cálculos, é feita uma decomposição de fatores e que, mesmo assim, o resultado não se altera. É importante que os alunos compreendam que o fator tem que ser decomposto em divisores desse número. Desta forma, pretendo que os alunos consigam formular generalizações em linguagem natural, tal como, *sempre que multiplicarmos por quatro é o mesmo que*

multiplicar o número duas vezes por dois, ou sempre que dividimos por quatro é o mesmo que dividir o número duas vezes por dois. Este tipo de conjeturas, permite aos alunos evoluir para o uso de linguagem simbólica, como $@x4 = @x 2x2$, sendo o @ o número que se pretende multiplicar.

Por último, apresento três expressões numéricas (duas falsas e uma verdadeira) e pretendo que os alunos justifiquem se são verdadeiras ou falsas, seguindo a estratégia de decomposição seguida anteriormente. Mais uma vez, nesta fase é importante que percebam que, para a expressão ser verdadeira, os fatores têm de ser decompostos nos seus divisores, ou seja, a expressão $240:8 = 240 : 4:4 = 15$ é falsa porque $4x4$ não é 8, mas sim 16, sendo a expressão correta $240:8 = 240:2:4 = 30$ ou $240:8 = 240:2:2:2 = 30$.

3.4.7. Sessão 6

Nesta sessão pretendo trabalhar as relações de igualdade e desigualdade através de uma tarefa relacionada com diferentes maneiras de representar o número 100 (Anexo 7). Na primeira questão, "A festa de final do 2º Período", os alunos têm que organizar 100 cadeiras em diferentes filas, cada uma com o mesmo número de cadeiras. Deste modo, pretendo que os alunos tenham a perceção que podem resolver esta questão com diferentes expressões de modo a obter soluções que correspondem ao que é pedido. Para isso, podem fazer um levantamento de todas opções através, por exemplo, de uma representação tabelar. Pretendo iniciar um percurso que leva os alunos à generalização, ou seja, com base nas suas diferentes respostas, podemos chegar a uma expressão que apresente um valor desconhecido, elaborando conjeturas tais como, *o número de cadeiras vezes o número de filas é igual a 100* (número de filas x número de cadeiras = 100). Este exemplo não se trata de uma generalização, mas ajuda os alunos a justificar e a formular conjeturas de modo a perceber se são verdadeiras. Ainda relacionada com esta tarefa, os alunos têm que interpretar três frases envolvendo os termos *maior que* e *menor que* e identificar qual delas é a verdadeira. Após esta interpretação, os alunos têm que desenvolver uma expressão numérica que demonstre o que é dito na frase. Com esta tarefa, pretendo que os alunos consigam interpretar, a partir do enunciado, a relação de desigualdade e transpor a informação de uma linguagem natural para uma linguagem matemática.

Na segunda parte são apresentadas diferentes expressões numéricas e o objetivo é comprovar a sua veracidade. Para esta sessão foram utilizados números a partir de 100 e as quatro operações aritméticas. Pretendo que os alunos

compreendam a relação que é estabelecida em cada uma das expressões e que, em primeiro lugar, identifiquem as expressões que não são verdadeiras e, em segundo lugar, justifiquem o uso que se faz das propriedades de uma maneira informal. Ao pedir uma justificação, o aluno raciocina sobre as transformações que a expressão sofre e, deste modo, desenvolve uma justificação para comprovar o seu raciocínio. Pretendo também promover, de forma explícita, um uso do raciocínio relacional, pedindo aos alunos que inventem duas expressões e que expliquem a sua veracidade, identificando as relações numéricas utilizadas, em linguagem natural ou simbólica.

3.4.8. Sessão 7

Com a tarefa apresentada na sessão 7 pretendo que os alunos compreendam as relações entre os números e as operações envolvidas. Inicialmente, os alunos pensam num número e, seguindo as instruções dadas, chegam ao número que pensaram no início (Anexo 8). A partir deste momento pretendo que os alunos compreendam o porquê de tal facto, concluindo que o resultado vai ser igual ao valor inicial porque, após adicionarem ou multiplicarem um valor, logo de seguida efetuam a sua operação inversa. É necessário que os alunos consigam descrever cada etapa da tarefa, para conseguirem entender a relação que existe entre cada número, e desta forma, descrever que relação existe. Torna-se importante que desenvolvam generalizações, numa linguagem natural, tendo em conta as diferentes etapas que vão percorrendo em cada questão.

3.4.9. Sessão 8

Na última sessão, os alunos realizam quatro questões de avaliação das aprendizagens, tendo como base conceitos desenvolvidos em sessões anteriores (Anexo 9). Com estas questões, pretendo compreender se os alunos desenvolvem estratégias que envolvem raciocínio relacional na resolução das expressões numéricas e que tipo de estratégias utilizam. Pretendo também analisar as justificações que apresentam na resolução das tarefas, ou seja, se são baseadas em raciocínio computacional ou se olham para a expressão como uma relação. Nesta sessão, o tipo de linguagem (natural ou simbólica) e as representações que os alunos apresentam também se tornam muito importantes para analisar a

evolução dos alunos. As questões foram baseadas em tarefas anteriormente desenvolvidas.

Na primeira questão os alunos têm que descobrir o valor que falta em quatro expressões numéricas, situando-se esse valor no 1.º membro em três das expressões e no 2.º membro numa expressão. Com esta questão pretendo perceber se os alunos percebem as relações existentes e se chegam ao valor correto sem recorrer a cálculos. Na questão seguinte os alunos têm que comprovar a veracidade das expressões apresentadas. É importante que consigam explicar a relação que existe entre os números e as operações, falando das estratégias utilizadas na sua realização. Com a terceira questão pretendo perceber se os alunos conseguem desenvolver uma expressão numérica com recurso ao que lhes é dito pelo enunciado, tal como foi feito na sessão 7. Na última questão pretendo verificar se os alunos são capazes de resolver três expressões com uma operação aritmética através das estratégias que foram desenvolvendo aos longo das sessões, não recorrendo a um raciocínio computacional, mas sim a um raciocínio relacional através da compreensão do sentido de número e compreensão das propriedades.

Capítulo 4

Metodologia de Investigação

Neste capítulo começo por falar da abordagem e modalidade que este estudo segue tentando justificar o caminho delineado, segundo características subjacentes a esta abordagem. Apresento os instrumentos a utilizar na recolha de dados e, de que forma, é que é feita a sua posterior análise. Seguidamente faço uma caracterização dos participantes e das suas características como turma. Não refiro nenhum aluno em particular porque não se trata de um estudo de caso. Esta apresentação passa também por caracterizar o contexto onde os alunos estão inseridos, ou seja, a sua escola. A calendarização da investigação está presente neste capítulo, com a descrição do trabalho a fazer ao longo dos meses.

4.1. Opções metodológicas

O estudo segue uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo, tendo em atenção características que estão presentes neste tipo de abordagens. O contexto em que o estudo é realizado é o seu ambiente natural, ou seja, a sala de aula e a turma onde a investigação é realizada é a fonte de recolha de dados, sendo a investigadora o seu principal instrumento de recolha de dados. Tentamos assim compreender o raciocínio dos participantes, dando especial interesse ao significado e ao processo que os alunos apresentam. Bogdan e Biklen (1994) referem algumas características que um estudo tem que seguir para se enquadrar numa abordagem qualitativa, nomeadamente a recolha de dados ser feita no seu ambiente natural, uma vez que a investigadora se desloca à escola e desenvolve-se na sala de aula onde a turma trabalha diariamente, bem como os instrumentos utilizados para a recolha de dados (registo vídeo e áudio) são apoiados por notas

de campo que a investigadora vai fazendo à medida que vai presenciando as situações que vão aparecendo.

Outra característica é a forma descritiva desta abordagem. Esta característica está relacionada com os métodos de recolha de dados, quer sejam eles os registos de vídeo e áudio, mas também, as produções feitas pelos alunos. Este conjunto de instrumentos tornar-se-ão a forma de descrever o que foi sendo feito e desenvolvido ao longo da experiência de ensino, servindo de apoio para sustentar os nossos resultados, através de transcrições e citações que vão sendo organizadas segundo categorias selecionadas.

A compreensão dos comportamentos dos sujeitos da investigação, bem como os significados que são atribuídos às suas ações, também são uma características da investigação qualitativa. Neste momento, as entrevistas têm um papel muito importante porque nos ajudam a confirmar se os significados que atribuímos aos comportamentos e ações estão de acordo com o que os significados que o participante atribui.

A investigação qualitativa é caracterizada por ser indutiva. Enquanto é feita a recolha e análise de dados irei criando significados, conseguindo fazer interrelações entre todas as informações que vou organizando. Os participantes são confrontados com estes significados de modo a perceber se estes estão de acordo com o que foi sendo dito.

A modalidade de estudo escolhida é a experiência de ensino. Esta tem como objetivo conseguir desenvolver nos alunos o raciocínio relacional através da realização de diferentes tarefas matemáticas. A experiência de ensino foi escolhida devido à sua estreita ligação com a teoria e devido ao seu carácter interventivo porque a partir da sua implementação pretende-se que os alunos desenvolvam o raciocínio relacional, não sendo apenas objetivo verificar o que os alunos conseguem ou não realizar.

Cobb et al. (2003) insere a experiência de ensino na modalidade de *design research* e tem como objetivo desenvolver teorias através de uma investigação em sala de aula, não servindo apenas para entender se a investigação resulta ou não. Esta parte interventiva está muito ligada com a teoria. Estes autores referem diferentes tipos de *design research*, nomeadamente, *one-to-one* (experiência de ensino com o professor e o aluno), experiências em sala de aula em que os investigadores colaboram com o professor, experiências de ensino relacionadas com a formação de futuros professores, experiências de ensino relacionadas com professores já no ativo e, por último, experiências de ensino relacionadas com a reestruturação de escolas e agrupamentos de escolas.

Embora cada uma tenha características particulares, todas assentam na ecologia da aprendizagem que inclui elementos comuns, como as tarefas ou problemas que são dados aos alunos para estes os resolverem, tipos de discurso, normas de participação que são estabelecidas, instrumentos usados e a prática de cada professor.

Existem ainda características comuns a este tipo de investigação, que acabam por ser transversais a cada um dos tipos de *design research*: (i) desenvolver teorias sobre o processo de aprendizagem e os meios que são necessários para desenvolver essa aprendizagem; (ii) natureza intervencionista da metodologia, e possibilitando o avanço educacional trazendo novas formas de aprendizagem; (iii) carácter prospetivo e reflexivo, porque este tipo de investigação é implementado através de hipóteses sobre o processo de aprendizagem e os meios para suportar, e é reflexivo porque as hipóteses arranjadas anteriormente irão ser comprovadas ou reformuladas; (iv) é um *design* interativo porque as conjeturas que são refutadas geram novas conjeturas que são testadas, desenvolvendo ciclos de invenção e revisão; e (v) a última característica relaciona-se com os princípios pragmáticos que o *design* tem, ou seja, as teorias desenvolvidas durante a investigação não servem apenas para este domínio específico, mas podem ser usadas para orientar outros domínios.

Para que este tipo de modalidade possa ser desenvolvida, esta passa por três fases de trabalho muito importantes. Em primeiro lugar temos a preparação da experiência de ensino, que inclui uma revisão de literatura identificando as ideias centrais do estudo. É também nesta fase que se inicia o processo de planificação e organização das tarefas. Aqui pode existir, caso seja oportuno, um estudo piloto, onde podem ser criados novos métodos e estratégias para desenvolver o raciocínio dos alunos. Numa segunda fase temos a condução da experiência de ensino, que abarca a implementação da experimentação na sala de aula, em que o professor vai testando e revendo as conjeturas e analisando o raciocínio e aprendizagens dos alunos. Num último momento teremos a análise dos dados em que estes são confrontados quer com a teoria, mas também com os objetivos que se pretende atingir (Cobb et al., 2003).

Optei por realizar uma experiência de ensino pela sua natureza de intervenção, na medida em que pretendo desenvolver o raciocínio relacional nos alunos e não ficar apenas, pela mera observação do que conseguem ou não fazer. Para isso, apoiar-me-ei na teoria e modificarei as minhas conjeturas caso seja necessário. Com o desenvolvimento das tarefas procuro perceber se as estratégias inicialmente utilizadas pelos alunos para resolver as diferentes expressões numéricas, estão relacionadas com o raciocínio relacional, ou se, evidenciam o

recurso a um raciocínio operacional. Como a experiência de ensino têm este caráter de intervenção, torna-se importante desenvolver nos alunos a capacidade de justificarem as suas ideias e estratégias, seja com o recurso a exemplos, seja através de uma generalização em linguagem natural ou simbólica.

O estudo é planeado por mim enquanto investigadora, sendo as tarefas construídas de modo a abarcar os objetivos que se pretendem trabalhar. Embora seja eu a conduzir as sessões, existem momentos de trabalho com a professora titular dando a conhecer cada uma das tarefas e o que se pretende desenvolver. Esta experiência de ensino decorre em oito sessões. Cada sessão segue o modelo de aula de natureza exploratória (Ponte, 2005) que abarca três momentos distintos: (i) apresentação da tarefa por parte da professora, (ii) realização da tarefa em pares, e (iii) discussão coletiva.

Primeiramente realiza-se um estudo piloto com outra turma do 3.º ano (Turma E). Realizam-se três das oito sessões planeadas tendo como objetivo compreender a reação e o raciocínio dos alunos às tarefas apresentadas e identificar possíveis dificuldades sentidas na sua resolução.

A partir deste estudo piloto, e segundo a informação recolhida, reorganizam-se os aspetos que se revelam necessários. Nas tarefas da primeira sessão são eliminadas três expressões numéricas de igualdade e duas expressões numéricas de ordem por se considerar que são um número muito elevado de expressões no total, fazendo com que no momento de discussão, não fossem abordadas todas as expressões. Na segunda sessão, das cinco retas numéricas existentes, é eliminada uma expressão, para que os alunos tenham tempo de realizar tudo tal como está previsto. Na reta apresentada como exemplo, são colocados os números por cima de cada traço para uma melhor compreensão desta estratégia. Na última sessão, são apresentados várias questões relacionadas com as relações de ordem. Neste caso, não retiro nenhuma questão, apenas as reorganizo. Deste modo, optei por começar por três expressões numéricas relacionadas com a relação de ordem, onde os alunos têm que encontrar os valores em falta. De seguida apresento mais um bloco de cinco expressões numéricas onde os alunos têm que colocar o sinal correto para que a expressão se torne verdadeira. Por último, apresento dois problemas relacionados com a relação de ordem. Estes dois problemas servem de apoio caso os alunos terminem ainda com algum tempo. Opto por esta reorganização porque nas primeiras expressões apresentadas os alunos têm a possibilidade de usar a estratégia de compensação para a compreensão das relações, aspeto muito importante na análise deste estudo.

4.2. Balanço do estudo piloto

Considerarei necessário realizar um estudo-piloto para observar vários aspectos do trabalho dos alunos e, com os resultados obtidos, poder melhorar pontos importantes no estudo principal. Assim, especificamente, neste estudo piloto procuro: (i) recolher elementos que me permitam antecipar estratégias e justificações que possam surgir no estudo principal; (ii) compreender se as tarefas propostas promovem o desenvolvimento do raciocínio relacional e se ajudam a elaborar estratégias e justificações às questões apresentadas (como se pretende na abordagem exploratória); e (iii) desenvolver uma primeira análise com os dados recolhidos deste estudo tendo em vista verificar se os métodos de recolha de dados são adequados.

Deste modo, as tarefas escolhidas para o estudo-piloto têm como objetivo promover o desenvolvimento do raciocínio relacional, através de questões que envolvam as relações de igualdade e de ordem (Anexo 10). As tarefas escolhidas incluem exercícios e problemas, apresentando expressões de verdadeiro/ falso e de valor omissivo. O trabalho de cada sessão é desenvolvido em três momentos: (i) introdução da tarefa; (ii) exploração da tarefa, momento em que os alunos resolvem as tarefas individualmente ou a pares; e, por último (iii) discussão em grande grupo. Neste momento os alunos apresentam as suas estratégias e são confrontados com as estratégias dos colegas, sendo encorajados a justificar e defender as suas ideias.

As três sessões do estudo piloto são idênticas às três primeiras sessões do estudo principal. Desenvolveram-se ao longo do mês de janeiro, uma vez por semana, ao longo de 90 minutos cada uma. A primeira sessão tem como objetivo compreender que conhecimentos possuem os alunos sobre a relação de igualdade e relação de ordem, bem como sobre os sinais de igual, menor e maior. A tarefa da primeira sessão apresenta duas questões com expressões de valor omissivo, cada uma das quais envolve a relação de igualdade e a relação de ordem. Também nesta sessão pretendo perceber que justificações apresentam os alunos e se têm alguma dificuldade em alguma das expressões apresentadas. A estrutura da tarefa é um fator importante para entender se existe algum aspeto que tem que ser corrigido.

A segunda sessão envolve duas questões, relativas à relação de igualdade e pretendo verificar se os alunos compreendam as relações que se estabelecem entre expressões. Esta sessão apresenta o modelo da reta numérica. Assim, pretendo analisar se os alunos estão familiarizados com este modelo, ou se tem que existir da minha parte algum momento para o relembrar. Para além disso, procurarei analisar as estratégias e justificações que os alunos desenvolvem, bem como a

capacidade de realizar alguma generalização. Por último, analiso se a tarefa é adequada aos objetivos do estudo principal e se os alunos desenvolvem estratégias para a resolução das questões que a constituem.

Na última sessão do estudo piloto relaciona-se a relação de ordem com expressões de verdadeiro/falso e de valor omissivo. Também nesta sessão, o objetivo é que os alunos olhem para as expressões e compreendam as relações que se estabelecem entre cada membro da expressão. A interpretação dos símbolos de maior e menor é um ponto de análise, permitindo detetar qual o conhecimento que os alunos possuem sobre os símbolos e se os interpretam tal como no momento da sua aprendizagem. Esta tarefa é composta por quatro questões e tento compreender quais são as que se enquadram melhor nos objetivos da sessão.

Tal como no estudo principal, no estudo piloto, a abordagem é qualitativa e a modalidade escolhida é a experiência de ensino, porque mais do que testar conhecimentos que os alunos possuem, pretendo desenvolver o seu raciocínio relacional através de tarefas que envolvem as relações de igualdade e de ordem.

A turma do estudo piloto é constituída por 16 alunos, 10 raparigas e 6 rapazes. Um dos rapazes chegou a esta turma na semana em que se inicia o estudo piloto e não foi possível obter a devida autorização do encarregado de educação para que ele participasse no estudo. Quatro alunos têm acompanhamento escolar devido a dificuldades de aprendizagem que apresentam nas áreas de Língua Portuguesa e Matemática. Esta turma apresenta diferentes ritmos de trabalho, devido às diferentes capacidades de aprendizagem dos alunos. Os que têm melhor aproveitamento realizam as tarefas com facilidade e rapidez, ao contrário dos alunos com mais dificuldades, em que o apoio por parte do professor tem que ser constante. De uma maneira geral, os alunos têm um bom aproveitamento estão habituados a dialogar e a discutir ideias sobre os assuntos que estão a ser tratados, o que lhes permite ganhar confiança na sua argumentação e exposição de ideias. Geralmente, o trabalho é realizado individualmente e, em alguns momentos, é feito trabalho de grupo e trabalho a pares. Em Matemática os alunos estão habituados a trabalhar com o manual escolar.

Para a recolha de dados são utilizados diversos instrumentos. Em primeiro lugar existe a recolha documental que se baseia nas fichas de trabalho que os alunos têm de realizar ao longo de cada sessão. Com estes documentos, conseguimos analisar, posteriormente o que os alunos foram registando no momento de trabalho autónomo. A par desta recolha existe o registo em vídeo e áudio de cada uma das sessões, bem como as notas de campo elaboradas pela investigadora para ajudar na análise de cada sessão. Tendo em conta a modalidade escolhida, a análise dos dados adota um carácter descritivo e, segundo os objetivos

do estudo, são apresentadas as seguintes categorias de análise: (i) uso do raciocínio relacional ou computacional; (ii) estratégias e justificações usadas pelos alunos; (iii) generalizações desenvolvidas; e (iv) dificuldades apresentadas.

Em primeiro lugar, analisando as três sessões, podemos antecipar possíveis estratégias e justificações dos alunos. De um modo geral, estes compreendem a relação de igualdade e a relação de ordem, bem como os símbolos que lhes estão associados. Os alunos compreendem que o sinal de igual representa a existência de igualdade entre os valores dos dois membros da expressão. No que diz respeito à relação de ordem, compreendem que há uma desigualdade entre os dois membros da expressão. As estratégias utilizadas pelos alunos ao longo das sessões estão mais direcionadas para o raciocínio relacional do que computacional, tendo sido poucas as vezes que sentem a necessidade de recorrer ao algoritmo. Assim, optaram por utilizar estratégias tais como operação inversa, decomposição de fatores, adições sucessivas, reta numérica e, até mesmo, a representação pictórica.

Ao longo das sessões os alunos elaboram generalizações em linguagem natural, embora recorram a exemplos concretos para justificar as relações.

As dificuldades que surgem são de natureza distinta. Ao nível matemático existe dificuldade na resolução de expressões que envolvem a subtração, cometendo o erro de aplicar a propriedade comutativa em expressões que envolviam a subtração. No caso da reta numérica alguns alunos não conseguem representar corretamente a expressão apresentada. O afastamento natural, ao longo dos anos, destes modelos pode ter contribuído para a representação incorreta da expressão e para a necessidade que os alunos demonstram em registar os traços intermédios. Por último, em algumas questões existem problemas relacionados com a interpretação dos enunciados (problemas das sessões 2 e 3). Neste caso, não conseguem compreender o que é pedido, ou seja, tal como já foi referenciado, se olharmos para as expressões e resoluções apresentadas num contexto matemático, estas não apresentam qualquer erro. Contudo, quando temos em conta o contexto apresentado, a expressão não demonstra o que é pedido. Deste modo, os alunos criam expressões que não demonstram, na sua totalidade, o que é referido no enunciado.

De um modo geral, verificamos que as tarefas apresentadas desenvolvem o raciocínio relacional e ajudam os alunos a criar e desenvolver estratégias não computacionais. Em todas as tarefas senti a necessidade de reajustamento. As mudanças a realizar prendem-se com a supressão de expressões, por achar que existia uma repetição e por gestão de tempo, e troca na ordem das questões. Este último aspeto deve-se ao facto de existirem questões que são mais importantes de trabalhar tendo em conta os objetivos definidos. Por último, considero necessário o

aperfeiçoamento do modelo da reta numérica para que exista uma compreensão total do que vai ser trabalhado. Considero que os instrumentos de recolha de dados, bem como a estrutura de cada uma das sessões devem ser mantidos. No caso dos instrumentos, estes têm um papel muito importante para a análise, criando uma ligação de complementaridade entre cada elemento. No que diz respeito à estrutura da aula, penso que a estruturação nestas três fases é muito importante e benéfica para obter os resultados pretendidos. A discussão em grande grupo com partilha de estratégias e a justificação das ideias faz com que as aulas se tornem mais ricas e mais produtivas no desenvolvimento dos raciocínios dos alunos.

Para finalizar, penso que este estudo piloto me ajudou, enquanto investigadora, a compreender melhor todo o trabalho que terei que realizar no estudo principal e me ajudou a antecipar algumas das estratégias que podem aparecer. Tenho consciência que as turmas são diferentes, bem como os seus métodos de trabalho, mas com a realização destas três sessões consegui analisar e alterar o que o que efetivamente não foi bem conseguido.

4.3. Participantes

O estudo é realizado numa escola de ensino público, do concelho de Soure, no distrito de Coimbra. É uma escola com turmas de 1.º e 2.º ciclos. Trata-se de um concelho predominantemente rural e os alunos pertencem a famílias com um nível socioeconómico médio. Os dados do ano letivo de 2013/2014 referem que existem oito turmas do 1.º ciclo, cada ano com duas turmas compostas por 15 a 20 alunos. As turmas do 1.º ciclo perfazem um total de 114 alunos.

A turma do estudo principal (Turma F) é constituída por 16 alunos, 6 raparigas e 10 rapazes. Dois alunos desta turma, embora façam parte dela, como têm deficiências profundas não se encontram junto da turma a maior parte do tempo. Outra aluna foi transferida para esta turma, quase no final do estudo, ou seja, nas últimas três sessões. São um grupo muito heterogéneo e o seu ritmo de aprendizagem é mais lento que a turma do estudo piloto, contudo não existem grandes discrepâncias nas aprendizagens. As avaliações do final do 1.º período mostram que a turma tem um bom aproveitamento escolar. Os alunos estão habituados a partilharem e discutirem as suas ideias e demonstram vontade o fazer. À semelhança do que acontece com a turma do estudo piloto, os alunos trabalham, normalmente, de modo individual e, em alguns momentos fazem trabalhos a pares e em grupos.

Este ano foi a primeira vez que contactei com a turma e com a professora de Matemática. As duas turmas, tanto a do estudo principal como do estudo piloto, estão a trabalhar segundo uma metodologia de equipas educativas. Neste caso, a professora que os acompanha na área de Matemática é a mesma para as duas turmas. O mesmo acontece na área de Língua Portuguesa. Os alunos estão habituados a trabalhar nesta metodologia desde que iniciaram o 1º Ciclo. Relativamente à professora que os acompanha na área de Matemática também iniciou o trabalho com as turmas este ano letivo. A professora que se encontrava a trabalhar no “Projeto Equipas Educativas” reformou-se.

4.4. Métodos de recolha de dados

Os dados a recolher são de natureza descritiva, enquadrando-se em dois grandes grupos. Em primeiro lugar, a observação da turma que é feita com o apoio a instrumentos como o registo de vídeo e áudio para que seja possível a elaboração da transcrição e respetiva análise. Esta análise torna-se importante para conseguir perceber que outras estratégias e justificações os alunos usaram oralmente. Este registo vídeo também é fundamental porque existem pormenores que podem passar despercebidos em cada uma das sessões e que posso analisar com mais atenção no momento de transcrição. As notas de campo são um instrumento privilegiado de registo pois ajudam na reconstrução e compreensão do que foi desenvolvido na aula. Com a recolha de notas de campo pretendo obter informações sobre a maneira como os alunos reagem às tarefas, se as resolvem com facilidade e autonomia ou que tipo de dificuldades sentem no momento de resolução. Também pretendo registar a participação e o empenho que os alunos demonstram na realização das tarefas ou, até mesmo, alguma situação que não esteja programada.

Em segundo lugar, há a recolha documental que inclui, quer as resoluções das tarefas que os alunos realizam quer outros trabalhos que podem fazer para além do que for pedido e que se ache pertinente recolher. Esta recolha documental é muito importante por ser uma parte fundamental da experiência de ensino. Pretendo com a recolha destes dados compreender o que foi feito quer numa visão global, percebendo quais os resultados obtidos por toda a turma, mas também olhar de forma pormenorizada para cada aluno, porque embora não haja uma análise a um conjunto de alunos em particular, é importante perceber as evoluções que os eles têm de forma individual e se as estratégias ou dificuldades se mantêm ao longo das sessões. Também com esta recolha consigo perceber a maneira como

os alunos justificam as suas estratégias e compará-las com o que apresentam oralmente.

Antes de iniciar a recolha dos dados, os encarregados de educação foram informados do trabalho que seria desenvolvido e todos autorizaram que os educandos participassem na investigação. Para além da autorização dos encarregados de educação, pedi autorização à Direção do Agrupamento, que prontamente me autorizou a realizar a recolha de dados para o estudo (Anexo 11).

4.5. Análise de dados

A análise de dados é feita segundo a técnica de análise de conteúdo, tal como descrito por Bardin (2011), que refere três fases: (i) *pré-análise*, (ii) *exploração de material e tratamento de resultados*, e (iii) *interpretação*. A pré-análise é uma fase de organização que se inicia com uma primeira leitura dos dados recolhidos de modo a conseguir escolher os documentos a analisar. Nesta etapa, irei reformular os objetivos e criar as categorias de análise.

Numa segunda etapa é feita a exploração de material onde irei codificar os dados segundo as unidades de análise e categorias criadas anteriormente, de modo a poder tratar os dados em bruto.

Por último, é feito o tratamento de dados obtidos e a sua interpretação. É através desta última etapa que se estabelece uma relação entre os dados tratados e o quadro conceptual do estudo, de modo a fazer uma interpretação mais aprofundada e segundo as categorias de análise que criei, tendo como objetivo e questões do estudo: (i) evolução dos significados da relação de igualdade e desigualdade e uso de raciocínio relacional e operacional; (ii) generalizações; (iii) justificações; (iv) estratégias e justificações.

4.6. Calendarização

Este estudo está dividido em vários momentos interligados, tendo sempre presente que cada momento não poderia existir ou desenvolver-se sem os restantes. Podemos enquadrar estes momentos da investigação com os diferentes períodos do ano letivo. Assim, o 1.º período é dedicado à revisão de literatura e à criação de um quadro teórico que sustente a investigação. Para além deste enquadramento teórico, há o trabalho de planificação e preparação das aulas que vão ser propostas. O segundo momento, que coincide com o 2.º período de aulas, é marcado, em primeiro lugar, pela realização do estudo piloto, com um conjunto de

três sessões que são trabalhadas durante o mês de janeiro. É no 2.º período que é desenvolvida a experiência de ensino, num total de oito sessões, ao longo dos meses de fevereiro e abril. Após cada sessão, os dados recolhidos são transcritos e analisados, para compreender quais as estratégias que os alunos usam e as dificuldades que sentem na sessão anterior, tentando melhorar o seu raciocínio e estratégias de sessão para sessão. O último momento coincide com o 3.º período, em que o trabalho de análise dos dados continua a ser desenvolvido, de modo a preparar a sua discussão e apresentação dos resultados. No quadro seguinte é apresentada a calendarização de cada momento da investigação.

Quadro 2 - Calendarização dos diferentes momentos da investigação.

<i>Meses</i>	<i>Motivação e objetivos do estudo</i>	<i>Quadro conceptual</i>	<i>Metodologia</i>	<i>Planificação</i>	<i>Recolha de dados</i>	<i>Análise de dados</i>	<i>Conclusões</i>
Set.							
Out.							
Nov.							
Dez.							
Jan.							
Fev.							
Mar.							
Abr.							
Maio							
Jun.							
Jul.							
Ago.							
Set.							

Capítulo 5

Estudo Principal

Para a análise das oito sessões do estudo principal utilizei os dados recolhidos através da gravação de vídeo, bem como os registos efetuados pelos alunos relativos à resolução das tarefas. Estes dados foram coletados durante as oito sessões que se realizaram durante os meses de fevereiro e abril, cada uma das quais com a duração de 90 minutos.

5.1 - Sessão 1

Esta sessão tem como objetivo avaliar a compreensão que os alunos têm dos sinais de igual, maior e menor e perceber que estratégias utilizam para resolver as expressões apresentadas. Cada uma das questões é composta por um conjunto de expressões com um valor em falta e os alunos têm que encontrar de modo a que a expressão fique verdadeira. A primeira questão, constituída por cinco expressões, envolve a relação de igualdade e as operações de adição e subtração. A segunda questão é constituída por cinco expressões que se relacionam com a relação de ordem. Em ambas as questões pede-se que os alunos justifiquem as suas escolhas realizando a tarefa em trabalho individual. Nesta sessão não esteve presente um aluno. De seguida, passo a analisar pormenorizadamente cada uma das questões.

5.1.1. Análise da Questão 1

A figura seguinte apresenta a questão 1 e as expressões que os alunos têm que analisar e resolver.

1. Completa cada uma das expressões com o valor em falta de modo a torná-las verdadeiras. Justifica a tua resposta.

$20x \text{ ____} = 20$	
$15 = 5 + \text{ ____}$	
$6 = \text{ ____} - 12$	
$\text{ ____} : 2 = 9$	
$16 = 8x \text{ ____}$	

Figura 2 - Questão 1 da Sessão 1.

O quadro seguinte apresenta as percentagens de respostas corretas e incorretas dos alunos em cada uma das expressões da questão 1:

Quadro 3 - Desempenho dos alunos em questões envolvendo igualdades.

	Expressões	Respostas certas	Respostas Incorretas
1	$20x \text{ ____} = 20$	100%	0%
2	$15 = 5 + \text{ ____}$	100%	0%
3	$6 = \text{ ____} - 12$	8%	92%
4	$\text{ ____} : 2 = 9$	100%	0%
5	$16 = 8x \text{ ____}$	100%	0%

Percebemos que os alunos não têm dificuldade na maioria das expressões, à exceção da expressão 3 que, posteriormente, analisarei de forma pormenorizada. De seguida, faço a análise de cada uma das expressões, considerando as respostas

dos alunos, nomeadamente as estratégias e justificações que utilizam para solucionar cada uma das expressões.

5.1.1.1. Análise da expressão 1 ($20 \times \underline{\quad} = 20$)

Na primeira expressão, embora existam 100% de respostas corretas, como podemos verificar pelo quadro anterior, as justificações que os alunos apresentam são variadas. Assim, dos doze alunos presentes, cinco justificam a sua resposta através da expressão apresentada, trocando apenas os membros da expressão.

$20 \times \underline{1} = 20$	Porque uma vez vinte igual a vinte:
--------------------------------	-------------------------------------

Figura 3 - Resolução de Tânia

$20 \times \underline{1} = 20$	Porque $1 \times 20 = 20$ e 2×20 não dá 20.
--------------------------------	--

Figura 4 - Resolução de João.

Quando pedi a João para explicar a sua resposta, o aluno volta a afirmar o que tinha na ficha de trabalho:

Investigadora – Diz João.

João – Porque 1 vezes 20 é igual a 20 e 2 vezes 20 não dá 20.

Investigadora – Então mas como é que chegaste ao 1? Porque é que puseste lá um e não puseste outro número?

João – Porque se fosse outro número não dava 20.

Tal como João, Duarte também recorre à tabuada do 20, embora use a mesma expressão. Este aluno usa uma estratégia de tentativa erro para justificar a sua resposta:

$20 \times \underline{1} = 20$	Porque na Tabuada do 1 é 20 acrescentar 1 e 1×20 dá 20.
--------------------------------	--

Figura 5 - Resolução de Duarte.

Rafaela, por outro lado, pensa, em primeiro lugar, na multiplicação do número dois e acrescenta posteriormente 0. A aluna acaba por raciocinar através da tabuada do 2 e não do 20:

Joana - Qualquer número que nós pusermos vezes um, esse número que nós pusermos vezes um é o resultado.

Por outro lado, Gonçalo acaba por completar a sua justificação dizendo que 10 é a metade de 20:

$20 \times \underline{1} = 20$	$20 : 2 = 10$ $20 \times 1 = 20$ metade é 10 $10 \times 1 = 10$
--------------------------------	---

Figura 9 - Resolução de Gonçalo.

David apresenta a sua justificação recorrendo à operação inversa da multiplicação, mas usando o valor em falta.

$20 \times \underline{1} = 20$	$20 : 1 = 20$
--------------------------------	---------------

Figura 10 - Resolução de David.

Nesta resolução, para justificar de forma mais correta e usando a operação inversa, David tem que apresentar a expressão $20 : 20 = 1$, de modo a encontrar o valor em falta.

No caso de Laura, a aluna tem necessidade de recorrer ao algoritmo da multiplicação para justificar a sua escolha:

$20 \times \underline{1} = 20$	$\begin{array}{r} 20 \\ \times 1 \\ \hline 20 \end{array}$
--------------------------------	--

Figura 11 - Resolução de Laura.

A aluna recorre ao valor omissso para justificar o próprio valor. Neste caso, os alunos já têm consciência de qual era o valor, mas arranjam uma estratégia para o justificar, mostrando uma expressão na qual o valor está presente, não como resultado mas como membro de um dos lados da expressão.

A diversidade de justificações apresentadas pode dever-se ao facto de ser a primeira expressão que os alunos fizeram e ainda não têm muito desenvolvida a compreensão da forma de justificar as suas estratégias.

5.1.1.2. - Análise da expressão 2 ($15 = 5 + \underline{\quad}$)

Nesta alínea, todos os alunos apresentam uma resposta correta, mostrando que o valor em falta é o número 10. Dos doze alunos, sete decompõem o número 15 para perceber qual o valor em falta, recorrendo a contagens de 5 em 5:

$15 = 5 + \underline{10}$	$5 + 5 + 5 = 15$ $\begin{array}{r} 10 + 5 = 15 \end{array}$
---------------------------	---

Figura 12 - Resolução de David.

$15 = 5 + \underline{10}$	Porque cinco mais cinco são dez com mais cinco igual a quinze.
---------------------------	--

Figura 13 - Resolução de Tânia.

$15 = 5 + \underline{10}$	porque se nós contarmos 10 mais 5 vai dar 15. $\begin{array}{r} 10 \\ + 5 \\ \hline 15 \end{array}$ $5 + 5 = 10 + 5 = 15$ $5 \times 3 = 15$ $15 : 3 = 5$
---------------------------	---

Figura 14 - Resolução de Rafaela.

Inicialmente, todos os alunos justificam as suas respostas através de adições sucessivas do número 5:

David – 5 mais 5 mais 5, 15. E eu fiz 5 mais 5, 10. Sobrou os 5. 5 mais 10 é igual a 15.

Rafaela – Eu também fiz assim.

Investigadora – Vem aqui ao quadro dizer como é que fizeste [David]. (O aluno escreveu a sua estratégia no quadro)

(...)

Investigadora – Como é que tu descobriste o 10 [Rafaela]?

Rafaela – Porque se 5 mais 5 dá 10, se eu juntar mais 5 vai dar 15.

Remetendo-nos também para a ideia de adicionar três vezes o número 5, aparece a estratégia de Tiago e Ricardo que usam a multiplicação e a divisão por três para justificarem as suas respostas:

$15 = 5 + \underline{10}$	$15 : 3 = 5$ $5 + 10 = 15$
---------------------------	----------------------------

Figura 15 - Resolução de Tiago.

$15 = 5 + \underline{10}$	$5 + 10 = 15$ $3 \times 5 = 15$ $15 : 3 = 5$ $5 + 10 = 15$ Porque três vezes cinco igual a quinze.
---------------------------	--

Figura 16 - Resolução de Ricardo.

Quando pergunto se existem outras estratégias, Tiago mostra interesse em explicar a sua, visto ser diferente das anteriormente apresentadas:

Investigadora – Diz lá Tiago.

Tiago - Fiz $15 : 3$ igual a 5. Depois fiz outra conta que era $5 + 10$ igual a 15.
(...)

Investigadora – E depois fizeste o quê?

Tiago - 5 mais 10 igual a 15

Investigadora – Igual a 15. Porque é que foste buscar o 3?

Tiago – Porque era a dividir por 3...

Investigadora – Como é que sabias que era a dividir por 3?

Tiago – Porque 3 vezes 5 é 15

O aluno acaba por fazer a confirmação com a adição de 5 com 10. Outros dois alunos, João e Duarte, recorrem à expressão apresentada para justificar a sua escolha. Os alunos não conseguem apresentar o modo como chegam ao valor em falta:

$15 = 5 + \underline{10}$	Porque $5 + 10$ dá 15.
---------------------------	------------------------

Figura 17 - Resolução de Duarte.

Como última estratégia, apresento a Laura, que mais uma vez recorre ao algoritmo para justificar a sua escolha e a uma divisão:

$15 = 5 + \underline{10}$	$\begin{array}{r} 15 \\ : 3 \\ \hline 05 \end{array}$
---------------------------	---

Figura 18 - Resolução de Laura

Neste caso, Laura apresenta alguns erros na sua estratégia. Assim, o algoritmo da divisão não está bem representado, o que se pode dever ao facto dos alunos apenas iniciarem esta aprendizagem neste ano letivo. Em segundo lugar, a aluna apresenta o número 3, possivelmente influenciada pela repetição sucessiva do número 5, e acaba por ter consciência que o valor que está em falta é o número 10 pelo facto de já ter sido apresentado um dos valores, o 5.

5.1.1.3. - Análise da expressão $3 (6 = \underline{\quad} - 12)$

Nesta expressão, o número de respostas erradas é muito superior ao esperado. Inicialmente, apenas um aluno consegue encontrar o valor que torna a expressão verdadeira. Outros três alunos acabam por apresentar o número 18 na

sua resolução, mas porque no momento de discussão alteraram a sua resposta, tal como podemos perceber pela resolução de Mara:

$6 = \underline{18} - 12$	<u>Porque $12 - 18$ é igual a 6.</u>
---------------------------	---

Figura 19 - Resolução de Mara.

Na justificação, Mara altera o valor do segundo membro da expressão de 6 para 18, não reparando que a expressão que escreve não é verdadeira. No momento de discussão também afirma que fez da mesma forma que Duarte:

Investigadora – Então diz lá a terceira expressão [Duarte].

Duarte – Porque 6 mais 6 é igual a 12 e 12 menos 6 dá 6.

Mara – Eii, também fiz assim!

Investigadora – Então significa que puseste que número... Duarte?

Duarte – 6.

Metade dos alunos, seis, justifica a sua resposta, seguindo a estratégia de Duarte, alterando a posição de cada um dos membros da expressão e não compreendendo que a subtração, ao contrário da adição, não goza da propriedade comutativa:

$6 = \underline{6} - 12$	Porque $6 + 6$ é 12 e $12 - 6$ dá 6.
--------------------------	--------------------------------------

Figura 20 - Resolução de Duarte.

$6 = \underline{6} - 12$	porque método de duplo é certo $6 + 6 = 12 - 6 = 6$
--------------------------	--

Figura 21 - Resolução de Mauro.

Outros dois alunos, o Tiago e o Gonçalo, acabam por nem sequer trocar a ordem dos valores e representam uma expressão falsa, ao afirmarem que $6 - 12$ é igual a 6:

$6 = \underline{18} - 12$	$12 : 2 = 6$ $6 - 12 = 6$
---------------------------	---------------------------

Figura 22 - Resolução de Tiago.

O único aluno que consegue encontrar o valor correto explica aos colegas a razão de não poder ser o número 6 o valor em falta:

$6 = \underline{18} - 12$	$6 + 6 + 6 = 18 : 3 = 6$ $12 + 6 = 18 : 3 = 6$
---------------------------	--

Figura 23 - Resolução de David.

David – Eu não fiz assim... (Referindo-se a $6 - 12$) Eu fiz de outra maneira.

Investigadora – Então diz lá como é que tu fizeste.

David – Eu pus o 18.

Investigadora – Porquê? Olhem o vosso colega pôs 18. Explica lá.

Rafaela – Ah já sei...

David - Porque 8 menos 2 dá 6... e um menos 0 dá um e por isso ficou lá 12. (o aluno estava a fazer os cálculos mentalmente, embora tenha misturado o 6 com o número 12).

Nesta alínea os alunos mostram dificuldades em encontrar o valor correto. Contudo, quando confrontados com a estratégia de David, a maioria consegue entender o erro. No entanto, Mara ainda mostra algumas dificuldades em compreender a resolução de David:

Investigadora – Então quem é que concorda agora com o David? (Mara coloca do dedo no ar) Porquê?

Mara – Porque também pode dar 6.

Investigadora – Também pode dar 6?

Mara – E também pode dar 18. Dá de duas maneiras.

Investigadora – Então explica-me como é que pode dar o 6... Tu consegues tirar ao 6, 12?

Mara – Não...

Investigadora – Então achas que esta expressão que está aqui está correta [$6 - 12 = 6$]?

Mara – Não

(...)

David – Porque 12 é o dobro de 6.

Investigadora – Então como é que nós tínhamos que pôr, se quiséssemos que desse 6?

Mara – 12 menos 18...

Investigadora – Mas o 12 está do outro lado (lado direito do 18). Então tinha que ser que número?

David – 18

5.1.1.4. - Análise da expressão 4 (___ : 2 = 9)

Neste caso todos os alunos descobrem o valor correto que torna a expressão verdadeira. As estratégias que encontram para justificar as suas escolhas são variadas e envolvem tanto a representação pictórica como a operação inversa. Em primeiro lugar, apresento a estratégia de Tânia:



Figura 24 - Resolução de Tânia.

A aluna recorre à representação pictórica para explicar o valor que encontra, desenhando nove figuras na linha superior e mais nove na linha inferior. É possível que a aluna já tenha a noção do valor que falta, por ter registado o sinal da adição entre os primeiros oito corações apresentados e os restantes dez. Quando lhe peço para explicar a sua estratégia a aluna afirma:

Investigadora – Tânia, diz lá o que é que tu puseste?

Tânia – Eu pôs 18.

Investigadora – 18. Porque é que tu puseste 18?

Tânia – Porque 9 mais 9 são 18.

Investigadora – E porquê 9 mais 9?

Tânia – Porque...

Investigadora – Como é que tu fizeste, eu estou a ver aí um desenho...

Tânia – Fiz três (na ficha de trabalho estão quatro grupos de dois e não três) grupos de dois... Depois pus mais 5 grupos com mais outros dois (a aluna tinha colocado duas filas com 9 corações cada uma).

Outras duas alunas, Laura e Mara, recorrem aos algoritmos da multiplicação e da divisão para justificarem as suas respostas, tal como se pode observar nas suas resoluções:

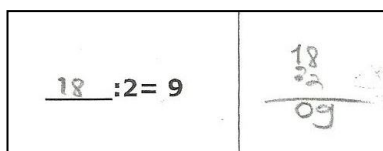


Figura 25 - Resolução de Laura.

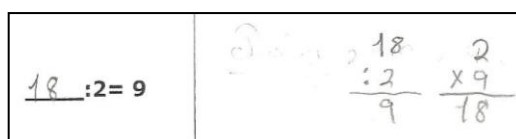


Figura 26 - Resolução de Mara.

Em ambos os casos, as alunas não utilizam corretamente o algoritmo da divisão. Contudo, Mara acaba por registar outra maneira de justificar a sua resposta através da operação inversa e sem recorrer ao valor em falta. Quando apresenta a sua estratégia, apenas menciona a multiplicação:

Mara – Eu fiz de outra maneira... fiz uma conta.

Investigadora – Que conta é que tu fizeste?

Mara – $18:2$ é igual a 9.

Investigadora – Como é que chegaste ao 18?

Mara – Porque 2 vezes o 9 é 18.

Outra estratégia utilizada, neste caso por cinco alunos, é a repetição do número 9. Em todos os casos os alunos adicionam duas vezes o valor 9 e, desta maneira, chegam ao 18:

$18 : 2 = 9$	Porque $9 + 9 = 18$.
--------------	-----------------------

Figura 27 - Resolução de João.

$18 : 2 = 9$	$9 + 9 = 18$ 18
--------------	--------------------

Figura 28 - Resolução de David.

Nesta situação, os alunos justificam tal como fazem na ficha de trabalho:

Investigadora – (...) Ricardo diz lá.

Ricardo – 9 mais 9 igual a 18. 2 vezes 18, 9.

Investigadora – 2 vezes?

Ricardo – 18

Investigadora – O vosso colega está a dizer que 2 vezes 18 é igual a 9...

Ricardo – Não...

Investigadora – Então?

Ricardo – 2 a dividir...

Investigadora – Ahh percebi vezes 18.

Após a transcrição da aula e análise dos dados, confirmei que o aluno inicialmente afirmou que seriam duas vezes 18, mas presumo que tenha sido um lapso ao explicar a sua estratégia.

Outro aluno, o Gonçalo, utilizou a operação inversa para justificar a sua escolha:

$18 : 2 = 9$	$9 \times 2 = 18$ então metade de 18 é 9 então $18 : 2 = 9$
--------------	---

Figura 29 - Resolução de Gonçalo.

Para além de recorrer à operação inversa, Gonçalo completa a sua justificação registando que 9 é metade de 18.

Por último, três alunos justificam as suas escolhas, quer através da operação inversa, quer com a adição sucessiva do número 9.

$18 : 2 = 9$	$18 : 2 = 9$	$9 + 9 = 18$ $2 \times 9 = 18$
--------------	--------------	-----------------------------------

Figura 30 - Resolução de Tiago.

É de notar que os alunos sentem a necessidade de justificar com várias expressões o valor que encontraram, tanto na ficha de trabalho como também oralmente:

Investigadora -Tiago diz?

Tiago - Eu fiz 3 contas...

Investigadora - Fizeste 3 contas, explica lá as 3 contas que tu fizeste que é para ficar mesmo justificado.

Tiago - Nove mais nove igual a 18 ou 2 vezes 9 igual a 18, por isso 18 a dividir por 2 igual a 18.

5.1.1.5. - Análise da expressão 5 ($16 = 8 \times \underline{\quad}$)

Nesta expressão todos os alunos encontram o valor correto e, mais uma vez, as suas justificações variam. Um grande grupo de alunos (sete), adiciona duas vezes o número 8 para justificar o valor 2:

$16 = 8 \times 2$	$8 \times 2 = 16$ $8 + 8 = 16$ porque se nós contarmos 8 dedos mais 8 dedos vai dar 16.
-------------------	---

Figura 31 - Resolução de Rafaela.

$16 = 8 \times 2$	Porque $8 + 8$ dá 16.
-------------------	-----------------------

Figura 32 - Resolução de Duarte.

Ainda dentro deste grupo, Ricardo tenta completar a sua justificação através da operação inversa:

$16 = 8 \times 2$	$8 + 8 = 16$ $8 \times 2 = 16$ $2 : 16 = 8$ Porque deu a divisão por dezassis igual a oito.
-------------------	--

Figura 33 - Resolução de Ricardo.

Como se observa, Ricardo acaba por não representar corretamente a divisão, trocando a ordem de cada membro. Nesta situação, coloca o número 2

como dividendo e 16 como divisor. Por outro lado, Mara recorre à tabuada do 8 para justificar a sua resposta:

$16 = 8 \times \underline{2}$	<p>Porque $2 \times 8 = 16$ e também $1 \times 8 = 8 + 2 \times 8 = 16$.</p>
-------------------------------	--

Figura 34 - Resolução de Mara.

Mara – Professora, fiz de outra maneira.

Investigadora – Diz...

Mara – Porque duas vezes o 8 é 16 e também 1 vez o 8 é 8 e 2 vezes o 8 é 16.

Já Tânia utiliza mais uma vez a representação pictórica, desenhando duas filas com oito caixas cada uma:

$16 = 8 \times \underline{2}$	
-------------------------------	--

Figura 35 - Resolução de Tânia.

Embora envolva uma representação pictórica, a estratégia de Tânia não deixa de ser uma adição sucessiva 8 objetos. Na sua explicação oral, a aluna justifica a sua escolha através da multiplicação:

Investigadora – Tânia queres ler a tua?

Tânia – Pus o mesmo que está ali [no quadro] (estava a referir-se ao número 2)

Investigadora – Que é quanto?

Tânia – Pus 2 e pus... 8 caixas e mais 8 caixas e deu-me igual a 16 caixas.

Investigadora – E como é que tu chegaste às duas filas? Foste contanto, ou como é que tu fizeste?

Tânia – Fiz se 2 vezes 8 dá 16, então 8 vezes 2 dá igual a 16

Outra estratégia é a de Laura, que recorre ao algoritmo da multiplicação:

$16 = 8 \times \underline{2}$	$\begin{array}{r} 8 \\ \times 2 \\ \hline 16 \end{array}$
-------------------------------	---

Figura 36 - Resolução de Laura.

A aluna usa o número 4, possivelmente por associá-lo à metade de 8.

Por último apresento as resoluções de Gonçalo e de João:

$16 = 8 \times \underline{2}$	$\begin{array}{r} 16 \\ :2 \\ \hline 8 \end{array}$ então $2 \times 8 = 16$ Ou $4+4+4+4$
-------------------------------	--

Figura 37 - Resolução de Gonçalo.

$16 = 8 \times \underline{2}$	Porque $2+2+2+2+2+2+2+2=16$ $2 \times 4 \times 2 = 16$ e $4 \times 2 = 8$ $8 = 16 : 2$ e $2 \times 8 = 16$
-------------------------------	--

Figura 38 - Resolução de João.

Neste dois casos, os alunos usam diferentes estratégias para justificar a sua escolha. Na resolução de Gonçalo, percebemos que o algoritmo da divisão ainda não está bem estruturado, mas o aluno tenta usar a operação inversa para justificar a sua resposta. É de notar que esta operação inversa foi feita com o valor em falta. Por outro lado, João também usa diferentes estratégias, embora o valor em falta tenha sido sempre utilizado para justificar a sua escolha. Podemos afirmar que os alunos sentem a necessidade de justificar o resultado e não o modo como obtêm o valor pretendido.

5.1.2. Questão 2

A questão 2 é constituída por cinco expressões que envolvem os símbolos de maior e menor. Com esta questão pretendo que os alunos interpretem corretamente os símbolos e que encontrem um número para o valor omisso. Pretendo também verificar se os alunos recorrem a cálculos ou se utilizam outro tipo de estratégias para estabelecer uma relação de ordem.

2. Completa com o valor que falta, de acordo com os sinais, de modo a que a expressão fique verdadeira. Justifica a tua resposta.

$10+1 > \underline{\quad}$	
$\underline{\quad} < 5 \times 2$	
$10-5 > \underline{\quad}$	
$\underline{\quad} > 18-2$	
$15:3 < \underline{\quad}$	

Figura 39 - Questão 2 da Sessão 1

Em primeiro lugar apresento o quadro seguinte que mostra a percentagem de resposta corretas e incorretas dos alunos nesta questão e em cada uma das expressões:

Quadro 4 - Desempenho dos alunos em questões envolvendo desigualdades.

	Expressões	Respostas corretas (%)	Respostas incorretas (%)
1	$10 + 1 > \underline{\quad}$	100%	0%
2	$\underline{\quad} > 5 \times 2$	92%	8%
3	$10 - 5 > \underline{\quad}$	100%	0%
4	$\underline{\quad} > 18 - 2$	100%	0%
5	$15 : 3 < \underline{\quad}$	92%	8%

De um modo geral, os alunos conseguem resolver as expressões sem dificuldade e de forma homogênea ao longo de toda a questão. As expressões, onde se denotam mais dificuldades são as que envolvem multiplicação e divisão. De seguida, apresento a análise de cada uma das expressões, tendo em conta as estratégias que os alunos usaram, bem como as suas justificações.

5.1.2.1. Análise da expressão 1 ($10 + 1 > \underline{\quad}$)

Nesta primeira expressão, todos os alunos colocam um valor inferior a onze, embora as suas justificações sejam distintas. Metade dos alunos justifica a sua resposta apresentando uma subtração ao número que resulta da expressão apresentada. Depois subtraem uma unidade. Em todos os casos, os alunos recorrem a uma linguagem simbólica, tal como se verifica nas resoluções de David e Tiago:

Figura 40 - Resolução de David.

Figura 41 - Resolução de Tiago.

No momento de discussão, os alunos conseguem explicar o que fazem:

Investigadora – Ricardo diz.

Ricardo - 10 mais 1 igual a 11 e 11 menos 1 igual a 10.

Investigadora – Então puseste que número?
Ricardo – 10.

As quatro resoluções seguintes apresentam as justificações em linguagem natural e os alunos afirmam que o número escolhido tem que ser menor que onze:

$10+1 > \underline{9}$	Porque tem que ser um numero menor que onze
------------------------	---

Figura 42 - Resolução de Tânia.

$10+1 > \underline{10}$	porque dez é menor de onze
-------------------------	----------------------------

Figura 43 - Resolução de Mauro.

Neste caso, os alunos identificam o símbolo de maior, percebendo que o número do valor omissos tem que ser inferior à expressão apresentada. Também no momento de discussão, os alunos demonstram compreender esta relação, como é o caso de Tânia quando diz “Porque tem que ser um número menor que 11. Pus o número 9.”

Outra justificação semelhante às anteriormente apresentadas é a de João:

$10+1 > \underline{7}$	Porque $10+1 = 11$ e temos que pôr um número menor que 11.
------------------------	--

Figura 44 - Resolução de João.

O aluno apresenta uma justificação completa. Em primeiro lugar, encontra o valor da primeira parte da expressão e depois afirma que tem que encontrar um número menor que onze. Muito embora tenha conseguido utilizar o símbolo apropriado, no momento de discussão o aluno não faz a referência correta:

Investigadora – Mais...João!

João – Porque 10 mais 1 é igual a 11 e o sinal de menos significa que temos que pôr um número menor.

A última estratégia é apresentada por Duarte. O aluno, embora tenha colocado um valor que torna a expressão verdadeira, apenas consegue mostrar que o símbolo é o de maior:

$10+1 > \underline{8}$	Porque tem o sinal de maior
------------------------	-----------------------------

Figura 45 - Resolução de Duarte.

Quando o questiono sobre o que fez, Duarte justifica-se da seguinte maneira:

Investigadora – Diz lá Duarte.

Duarte – Porque tem o sinal de maior.

Investigadora – Porque tem o sinal de maior... E o que é que acontece?

Duarte – Tem que acrescentar um número maior. (O aluno colocou um número maior que 11 quando deveria ter colocado um número menor)

Embora o aluno afirme que tem que ser um número maior, na sua resolução apresenta o número oito.

5.1.2.2. - Análise da expressão 2 ($\underline{\quad} < 5 \times 2$)

Na expressão seguinte, do total dos alunos, apenas Mauro não consegue encontrar o valor correto:

$\underline{11} < 5 \times 2$	porque onze é menor do que nove
-------------------------------	---------------------------------

Figura 46 - Resolução de Mauro.

Embora coloque o número nove, João, como primeira escolha coloca o número onze no valor omissis. Deste modo, a sua justificação acaba por não corresponder ao que é pedido. Analisando esta resolução, apenas podemos interpretar que o aluno consegue reconhecer o símbolo de menor.

Também nesta alínea, a maioria dos alunos (sete), apresenta uma justificação completa, encontrando um valor para a segunda parte da expressão, e a partir daí, encontra um valor interpretando o símbolo apresentado. As resoluções seguintes apresentam as diferentes estratégias que os alunos usam para justificar a sua resposta através da representação pictórica, da linguagem natural ou da linguagem simbólica:

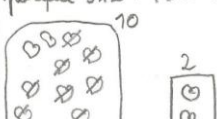
$\underline{2} < 5 \times 2$	<p>porque $5 \times 2 = 10$ e $10 - 8 = 2$</p> 
------------------------------	--

Figura 47 - Resolução de Rafaela.

$\underline{5} < 5 \times 2$	Porque cinco vezes dois e dez e cinco vezes um igual a cinco
------------------------------	--

Figura 48 - Resolução de Tânia.

$\underline{3} < 5 \times 2$	Porque $5 \times 2 = 10$ e $10 - 7 = 3$
------------------------------	---

Figura 49 - Resolução de João.

$\underline{8} < 5 \times 2$	$9 \times 2 = 10 - 2 = 8$ 10 > 8
------------------------------	---

Figura 50 - Resolução de David.

Também no momento de discussão, os alunos apresentam as suas justificações:

David - Eu pus 8. Porque 5 vezes 2, 10. A 10 tirei 2 e ficou 8 e 10 é maior do que 8.

(...)

Rafaela - Professora eu fiz o contrário dele.

Investigadora - Fizeste o quê?

Rafaela - Meti 5 vezes 2 igual a 10 e 10 menos 8 igual a 2.

Investigadora - Então e como é que tu justificas pôr ali o 8? Porque é que não pode, por exemplo, ser o 11?

Rafaela - Porque 11 é maior do que 10.

Nesta expressão, Laura apresenta o valor correto, após retificar a sua resposta no momento de discussão coletiva:

$\underline{7} < 5 \times 2$	$5 \times 2 = 10 + 3 = 7$
------------------------------	---------------------------

Figura 51 - Resolução de Laura.

Aluna começa por ter alguma dificuldade na interpretação do símbolo de menor:

Investigadora - Laura diz.

Laura - 5 vezes 2 igual a 10. 10 mais 3 igual a 13

Investigadora - Que número é que tu puseste ali?

Laura - 13.

Com esta resposta, alguns alunos conseguem identificar o seu erro:

Tiago – Não dá.

Investigadora – Porquê?

Tiago - porque 5 vezes 2 é 10 e 13 é mais do que 10.

Como na expressão anterior, Duarte apenas faz referência ao símbolo apresentado:

$5 < 5 \times 2$	Ainda tem o sinal de <i>menor</i>
------------------	-----------------------------------

Figura 52 - Resolução de Duarte.

Tal como Laura, Duarte coloca outro valor que não refere oralmente. Após o momento de discussão, identificamos as dificuldades sentidas pelo aluno:

Investigadora – Duarte diz lá.

Duarte – Ainda tem o sinal de maior.

Investigadora – Ainda tem o sinal de maior. Tem o sinal de maior? Primeiro que número é que tu puseste?

Duarte – 10.

Investigadora – O Duarte pôs 10. Toda a gente concorda?

Rafaela – Não pode ser porque senão tinha que estar o sinal de igual.

Laura – Porque 5 vezes 2 é igual a 10...

Mara – E está aí o número 10.

Mara apenas faz referência ao valor encontrado pela expressão. A aluna com recurso a linguagem natural, afirma que o valor tem que ser inferior a 10:

$5 < 5 \times 2$	Porque tem que ser <i>menor</i> do que 10.
------------------	--

Figura 53 - Resolução de Mara.

Nesta situação, depreende-se que Mara consegue encontrar o valor de 5×2 e identificar o símbolo de menor. No momento de discussão a aluna apresenta a sua estratégia:

Investigadora – Diz Mara.

Mara – Porque tem que ser maior do que 10 (a aluna acabou por retificar mais à frente).

Investigadora – Primeiro, que número é que tu puseste?

Mara – 5.

Investigadora – Qual foi a justificação para teres posto 5.

Mara – Porque é menos que 10.

Investigadora – Estavas a dizer que tinha que ser maior que 10...

Mara - ... menor.

A última resolução apresentada é de Tiago que justifica a escolha do número nove, através do cálculo de 5×2 e encontra o número 10. A partir daí inicia o seu raciocínio para justificar a sua escolha, através da subtração de um valor ao que foi anteriormente encontrado também por subtração.

Figura 54 - Resolução de Tiago.

5.1.2.3. - Análise da expressão 3 ($10 - 5 > \underline{\quad}$)

Com esta questão, Mauro responde corretamente, embora tenha tentado modificar a sua escolha:

Figura 55 - Resolução de Mauro.

Mauro usa o número 6, justificando que este é maior que 5. Na sua resolução percebemos que o aluno encontra um valor para a primeira parte da expressão, mas não consegue identificar corretamente o símbolo, afirmando que tem que ser um número maior.

Mais uma vez, Duarte regista apenas como justificação o uso do símbolo de maior, colocando um valor inferior a cinco no espaço indicado:

Figura 56 - Resolução de Duarte.

Os restantes alunos conseguem todos dizer que o número é menor que cinco:

Figura 57 - Resolução de Joana.

Joana, para além da justificação em linguagem natural, faz uma representação errada da subtração, trocando a ordem das parcelas. Os outros alunos identificam o número 5 e resolvem a subtração, apresentando uma justificação completa do que estão a pensar:

$10-5 > \underline{1}$	$10-5 = 5-4 = 1$
------------------------	------------------

Figura 58 - Resolução de Laura.

$10-5 > \underline{3}$	$10-5 = 5$ porque metade de 10 é 5 $5-2 = 3$
------------------------	---

Figura 59 - Resolução de Gonçalo.

$10-5 > \underline{2}$	Porque $10-5 = 5$ e está sinal de menos e tem que ser um número menor que 5.
------------------------	--

Figura 60 - Resolução de João.

Tal como é apresenta na sua resolução, Laura também explica oralmente o que fez para mostrar que o seu valor torna a expressão verdadeira:

Investigadora – Laura diz.

Laura – 10 menos 5 é igual a 5. 5 menos 4 é igual a 1.

Investigadora – Que número é que tu puseste?

Laura – 1.

Investigadora – Porquê 1?

Laura – Porque o 1 é menor que 5.

É importante fazer referência que João identifica o sinal de menor como sinal de “menos”, mostrando alguma confusão como o nome dos símbolos.

5.1.2.4. - Análise da expressão 4 ($\underline{\quad} > 18 - 2$)

Nesta alínea todos os alunos conseguem encontrar um valor que torne a expressão verdadeira. Tal como em expressões anteriores, Duarte, coloca o valor 20, mas na sua justificação apenas fez referência ao símbolo de maior:

$\underline{20} > 18-2$	Porque agora tem o símbolo maior
-------------------------	-------------------------------------

Figura 61 - Resolução de Duarte.

No momento de discussão coletiva, o aluno acaba por usar a mesma justificação:

Investigadora – Diz lá Duarte.

Duarte – Porque agora tem o sinal de maior.

Investigadora – Que número é que tu puseste?

Duarte – 20.

Investigadora – Porquê o 20?

Duarte – Porque é maior do que 16.

Outros três alunos escolhem um valor correto, que justificam como sendo um valor superior a 16. Neste caso, não apresentam o processo de como chegam a 16, mas presume-se que a resolveram mentalmente:

<u>20</u> > 18-2	Porque tinha que ser maior do que 18.
------------------	---------------------------------------

Figura 62 - Resolução de Mara.

<u>20</u> > 18-2	Porque é maior que dezasseis.
------------------	-------------------------------

Figura 63 - Resolução de Tânia.

Na resolução apresentada por Mara percebe-se que esta encontra um valor tendo em conta, unicamente, o número 18 e não a expressão na sua totalidade. Isto leva-nos a acreditar que a aluna vê apenas os números, mas não os interpreta como uma expressão.

Os restantes oito alunos efetuam uma justificação completa, tal como podemos observar nas seguintes resoluções.

<u>20</u> > 18-2	$18-2=16+4=20$ $16 < 20$
------------------	-----------------------------

Figura 64 - Resolução de David.

<u>20</u> > 18-2	porque 20 é maior do que 16. $18-2=16$
------------------	---

Figura 65 - Resolução de Joana.

<u>19</u> > 18-2	Porque $18-2 = 16$ e $16+3 = 19$. $19 > 16$
------------------	---

Figura 66 - Resolução de João.

$17 > 18-2$	$2-18 = 16 + 1 = 17$
-------------	----------------------

Figura 67 - Resolução de Ricardo.

É importante referir que a estratégia de Ricardo não está totalmente correta. O aluno troca a ordem das parcelas da subtração e não compreende que esta operação não usufrui da propriedade comutativa. De um modo geral, ao longo do momento de discussão coletiva, os alunos acabam por apresentar justificações muito semelhantes:

David – Eu pus o número 20. 18 menos 2, 16. 16 mais 4, 20. E 16 é menor que 20.

Investigadora – Ricardo diz.

Ricardo – 2 menos 18 igual a 16, mais 1 igual a 17.

5.1.2.5. - Análise da expressão $5 (15 : 3 < \underline{\quad})$

Nesta última alínea, somente um aluno que não coloca o valor correto, de modo a que a expressão se torne verdadeira. Tânia, em vez de reconhecer uma relação de ordem com o símbolo de menor, interpreta-a como uma relação de igualdade e escolhe o número 5 como valor em falta, tal como se pode observar na sua resolução:

$15:3 < \underline{5}$	Porque quinze é dividir por três é cinco.
------------------------	---

Figura 68 - Resolução de Tânia.

Outras duas alunas, Mara e Joana, embora apresentem um valor correto para a expressão, demonstram nas suas justificações que apenas olham para um dos termos da expressão, o 3 ou o 15:

$15:3 < \underline{15}$	porque é o maior do que 3, $15:3 =$
-------------------------	--

Figura 69 - Resolução de Joana.

$15:3 < \underline{6}$	Porque tinha que ser menor do que 15.
------------------------	---------------------------------------

Figura 70 - Resolução de Mara.

Mara, no momento de discussão, para além de afirmar que tem que ser um número menor que 15, também refere que 5 é o valor em falta. Alguns dos colegas não concordam com o que diz e tentam retificar:

Mara – Porque tinha que ser menos do que 15. Pus o número 5.
 Investigadora – A Mara pôs o número 5. Todas a gente concorda?
 Tiago – Não.
 Investigadora – Porquê Tiago?
 Tiago – Porque senão tinha que estar o sinal de igual.

Mauro coloca o valor correto mas efetua uma justificação incompleta:

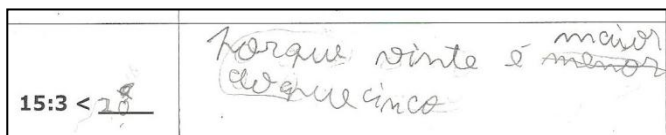


Figura 71 - Resolução de Mauro.

Tal como noutras resoluções o aluno apresenta, simplesmente, o valor da expressão apresentada. Também se deteta um erro na escrita dos símbolos. Ou seja, como Mauro coloca o maior número no primeiro membro da expressão, tem que afirmar que o número escolhido é maior do que cinco.

Duarte é um aluno que mantém as suas justificações de maneira uniforme, ao longo de toda a questão 2:

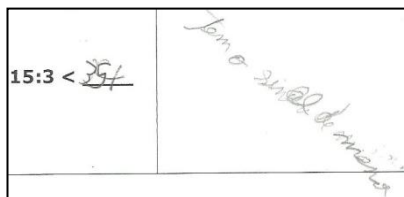


Figura 72 - Resolução de Duarte.

Nesta última expressão apresenta o valor correto, mas a sua justificação apenas demonstra que identifica os símbolos desta relação de ordem.

Os restantes sete alunos apresentam uma justificação completa, com recurso a linguagem natural mas, também em linguagem simbólica:

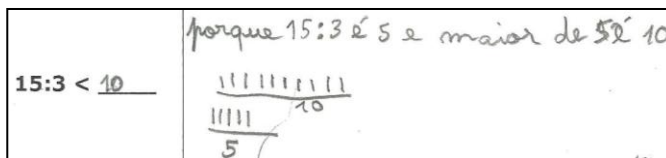


Figura 73 - Resolução de Rafaela.

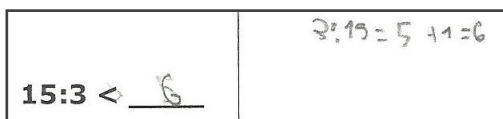


Figura 74 - Resolução de Ricardo.

$15:3 < \underline{6}$	$15:3 = 5-4 = 6$
------------------------	------------------

Figura 75 - Resolução de Tiago.

Nestas resoluções percebe-se que Ricardo volta a fazer o erro de trocar a ordem na divisão. Neste caso, é possível afirmar que o aluno não compreende que tanto a divisão como a subtração não gozam da propriedade comutativa. Já Tiago, no momento de discussão coletiva, compreende o erro que faz e corrige oralmente:

- Investigadora – Então e agora a última. Tiago.
 Tiago – 15 a dividir por 3 igual a 5, menos 3 igual a 2.
 Investigadora – Que número é que tu puseste?
 Tiago – Não enganei-me.
 Investigadora – Porque é que tu te enganaste?
 Tiago – O sinal de mais e eu meti dois e devia ser mais.
 Investigadora – Olha é o sinal de...?
 Tiago – Maior.

Na sua resolução verifica-se que o aluno altera os valores escolhidos, não mudando o sinal da subtração para o da adição.

5.1.3. Discussão dos resultados da Sessão 1

Ao longo desta sessão percebemos que a turma tem uma compreensão tanto da relação de igualdade como da relação de ordem. Os quadros 1 e 2, apresentados anteriormente, mostram as percentagens de respostas corretas que os alunos obtiveram em cada uma das expressões. Na relação de igualdade, as percentagens situaram-se nos 100% à exceção da expressão 3 ($6 = \underline{\quad} - 12$). Na relação de ordem, as percentagens situam-se entre os 90% e os 100% de respostas corretas. Os alunos mostram compreender cada uma das relações, dado que, na sua maioria, não recorrem a estratégias computacionais para resolver as expressões, utilizando antes estratégias que evidenciam um raciocínio relacional.

Nesta primeira sessão, as generalizações desenvolvem-se no momento de discussão coletiva em relação à primeira expressão da questão 1, onde Joana usa a propriedade da existência do elemento neutro da multiplicação através de uma linguagem natural para justificar a sua escolha.

Os alunos apresentam uma variedade de justificações. Na sua grande maioria, usam a linguagem simbólica ou a linguagem natural para justificar as suas escolhas. Por vezes, recorrem à expressão apresentada ou a estratégias

relacionais, nomeadamente a operação inversa, adições sucessivas ou até mesmo a decomposição dos números. Alguns alunos justificam a sua escolha através da representação pictórica. Outros, embora em número reduzido, optam por apresentar o algoritmo. Na relação de ordem os alunos sentem a necessidade de resolver o lado da expressão apresentado e só depois encontrar um valor que torne a expressão verdadeira.

Ao longo da sessão os alunos apresentam algumas dificuldades na resolução de determinadas expressões. Desde logo, sentem dificuldade na compreensão da expressão 3 da questão 1 ($6 = \underline{\quad} - 12$) e, por isso, existe um tão elevado número de respostas incorretas (92%). Neste caso, os alunos não compreendem que a subtração, ao contrário adição, não goza da propriedade comutativa. Este erro também se verificou em alguns casos com a divisão. Na relação de ordem, alguns alunos não identificaram corretamente o nome do símbolo, afirmando *signal de menos* para quando se estavam a referir ao símbolo de menor e *signal de mais* quando se referiram ao símbolo de maior. Nesta sessão evidenciam-se dificuldades em justificar sem recorrer ao valor em falta, ou seja, os alunos têm a noção do valor que torna a expressão verdadeira e, a partir daí, usam esse mesmo valor para justificar a sua escolha.

Por fim, penso que os resultados da sessão 1 são positivos, tal como podemos analisar nos quadros das percentagens anteriormente apresentados. É de salientar que os raciocínios dos alunos pouco se relacionaram com estratégias computacionais.

5.2. Sessão 2

A segunda sessão do estudo principal conta com a presença dos treze alunos da Turma F e tem a duração de 90 minutos. Tal como em sessões anteriores a aula divide-se em três momentos: i) apresentação da tarefa; ii) realização da tarefa a pares; iii) discussão em grande grupo. Para o seu desenvolvimento é apresentada uma ficha de trabalho constituída por duas questões que envolvem a relação de igualdade e as operações da adição e subtração. Seguidamente passo a uma análise pormenorizada das resoluções dos alunos.

5.2.1. Análise da Questão 1

A questão 1 é constituída por três expressões que os alunos têm de descobrir o seu resultado através de uma reta numérica. Pretende-se que os alunos

compreendam que, ao adicionar e subtrair um mesmo valor a outro, obtemos o número inicial. Na segunda alínea têm que tentar compreender esta relação e registar na ficha de trabalho. Apresentamos, de seguida, a questão 1:

1. Na turma da Inês, os alunos resolveram as expressões que a professora apresentou da seguinte maneira:

$18 - 4 + 4 =$

1.1 Resolva as seguintes expressões através da mesma estratégia.

$15 + 5 - 5 =$

$10 - 4 + 4 =$

$3 + 10 - 10 =$

1.2. Consegues descobrir a relação existente em cada uma das expressões?

Figura 76 - Questão 1 da sessão 2.

O quadro seguinte mostra a percentagem de repostas corretas e incorretas que os alunos obtiveram na questão 1, bem como, a percentagem relativa à representação na reta:

Quadro 5 - Desempenho dos alunos na questão 1 da sessão 2.

Expressão numérica		Resultados		Representação na reta	
		Correto	Incorreto	Correto	Incorreto
1	$15 + 5 - 5$	100%	0%	54%	46%
2	$10 - 4 + 4$	100%	0%	54%	46%
3	$3 + 10 - 10$	100%	0%	54%	46%

Como conseguimos perceber pelo quadro apresentado, todos os alunos conseguem encontrar o valor correto para tornar a expressão verdadeira, embora as representações nas retas não estejam totalmente corretas. Analisamos, de seguida, cada uma das expressões para perceber qual o raciocínio que apresentam nas suas resoluções.

5.2.1.1. Análise da expressão 1 ($15 + 5 - 5$)

Com esta expressão os alunos apresentam dois tipos de resoluções. Do total dos treze alunos, sete representam a expressão de forma correta na reta, tal como apresentamos na seguinte resolução:

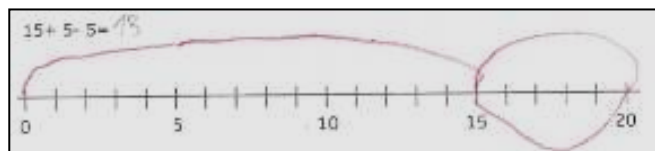


Figura 77 - Resolução de Tiago.

Nesta resolução, há a percepção que em primeiro lugar têm que adicionar 5, passando para o número 20 e, só depois retrocediam 5 valores.

Os restantes alunos, seis, trocam a ordem das operações começando por subtrair ao número 15 cinco valores e só depois adicionam 5:

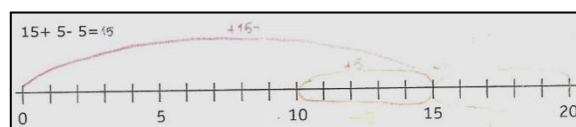


Figura 78 - Resolução de Gonçalo.

Estas duas resoluções são apresentadas no quadro. A verde regista-se a resolução que começa por subtrair 5 ao número 15 e a vermelho registamos a resolução correta. Deste modo, os alunos são confrontados com as duas resoluções e identificam as diferenças entre cada uma, embora o resultado se mantivesse:

Investigadora – Qual é a diferença entre a estratégia verde e a estratégia vermelha, Tiago?

David – Uma é o contrário da outra.

Investigadora – Porquê?

David – Porque a verde está primeiro a retirar menos 5...

Investigadora – Diz-me a expressão da verde.

David – do 0 passou para o 15.

(...)

David – Do 15 para o 10...

Investigadora – Então significa o quê?

David – Menos 5, retirou menos 5 e depois juntou mais 5 para dar o 15.

Investigadora – Que número é que dá?

Rafaela – 15

Investigadora – Dá 15 na mesma.

David – Só a conta é que é ao contrário.

No momento de discussão coletiva, os alunos compreendem que, embora alguns colegas não representem o que é pedido na expressão, o resultado mantém-se igual. Este facto torna-se importante para que, mais tarde, os alunos

desenvolvam generalizações em linguagem natural, porque compreendem que dará sempre o mesmo resultado, mesmo que se altere a ordem das operações.

.2.1.2. Análise da expressão $2(10 - 4 + 4)$

Esta expressão é apresentada com uma reta numérica diferente da que é apresentada na expressão anterior. Neste caso, apresentam-se traços intermédios de cinco em cinco. Deste modo, torna-se importante perceber de que maneira os alunos representam a expressão e se sentem necessidade de registar mais traços para além dos apresentados.

Também nesta expressão existem resoluções diferentes, mas a grande maioria (7) consegue representar corretamente a expressão. Neste grupo, alguns alunos acabam por desenhar todos os traços que faltam, mas outros apenas desenham os traços entre 5 e 10:

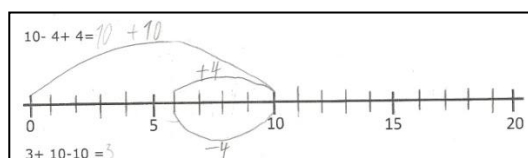


Figura 79 - Resolução de João.

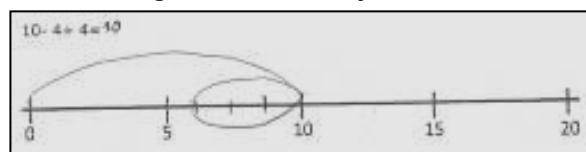


Figura 80 - Resolução de Rafaela.

Por outro lado, outros alunos não recorrem a mais traços para conseguir representar o que é pedido, apesar da sua divisão de espaço não estar homogénea:

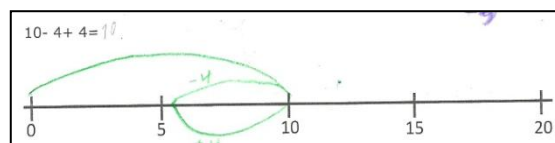


Figura 81 - Resolução de David.

Os restantes alunos, seis, apesar de encontrarem o valor correto para a expressão, não o representam corretamente na reta:

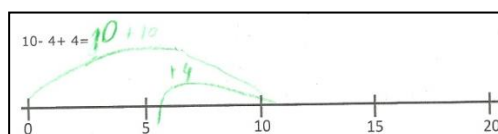


Figura 82 - Resolução de Duarte.

Neste caso, Duarte tem a sua resposta incompleta, porque representa unicamente a subtração, identificando esse salto como mais 4. Com as seguintes resoluções de Mauro e Joana, percebe-se que não há a divisão correta do espaço entre o 5 e o 10. Os alunos colocam mais traços dos que os necessários, não compreendendo quantos traços devem existir entre os valores:

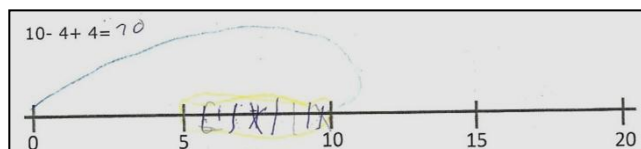


Figura 83 - Resolução de Mauro.

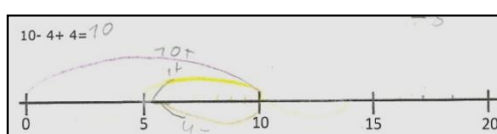


Figura 84 - Resolução de Joana.

No caso de Joana, duas colegas acabam por identificar o seu erro e, no momento de discussão, corrigem a resolução de Joana:

Investigadora – Joana.

Joana – Fui logo para o 5.

Investigadora – Foste para onde?

Joana – Primeiro fui do 0 para o 10, a seguir fui do 10 para o 5...

Investigadora – E depois? E voltaste para aqui (para o 10)? Está correto o que a vossa colega fez?

Mara – Não porque não está menos 4, está menos 5.

Rafaela – E lá está a dizer 10 menos 4 mais 4.

Outros dois alunos, embora dividam corretamente, não representam de forma exata o + 4 e o - 4, porque a sua representação transmite-nos a ideia que subtraem e adicionam o valor de 4,5 e não de 4 como refere a expressão:

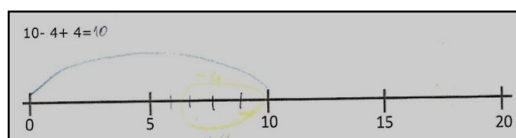


Figura 85 - Resolução de Gonçalo.

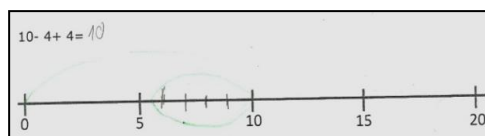


Figura 86 - Resolução de Ricardo.

No caso de Gonçalo podemos pensar que o aluno conta os espaços e não os traços. Quando lhe peço para explicar o que fez, Gonçalo afirma que teve dificuldade no registo do menos 4:

Investigadora – Então o vosso colega fez assim (tinha andado 4,5 para trás)... Olha tu aqui puseste estes traços porquê? (Entre o 5 e o 6)
 Gonçalo – Porque não sabia onde é que era, onde é que havia de ser o menos 4 (desenhou traços entre o 5 e o 10).

Por último, Tiago não consegue representar corretamente e começa por registar um salto para o 4 e não para o número 10:

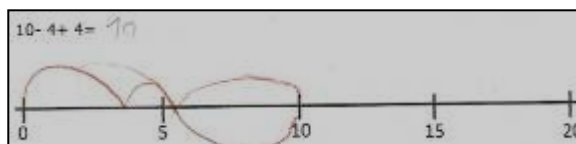


Figura 87 - Resolução de Tiago.

Nesta alínea, as dificuldades que mais se evidenciam, relacionam-se com o registo dos traços que faltam. Os alunos, com a ausência de traços, não têm a noção do lugar preciso do valor, o que faz com que os alunos apresentem valores aproximados.

5.2.1.3. Análise da expressão $3(3 + 10 - 10)$

Também nesta última expressão, os alunos representam diferentes resoluções e tentam justificar oralmente o que fizeram. Em primeiro lugar, apresento as resoluções de João e de Tiago que desenharam os traços entre cada um dos números:

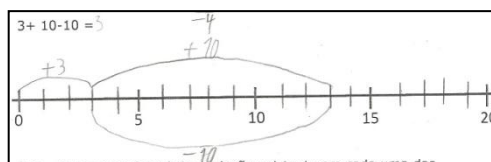


Figura 88 - Resolução de João.

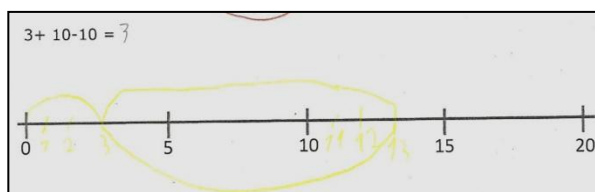


Figura 89 - Resolução de Tiago.

É importante referir que ao contrário de Tiago, João desenha todos os traços entre os números. Tiago já não o faz, acabando por registar apenas os que necessita.

Outro conjunto de alunos, cinco, onde estão incluídos Tânia e David, representam a expressão na reta, mas não o fazem de modo proporcional. As divisões apresentadas não demonstram uma divisão equitativa do espaço:

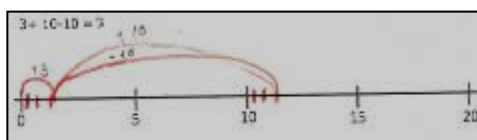


Figura 90 - Resolução de Tânia.

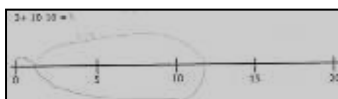


Figura 91 - Resolução de David.

O seguinte grupo de alunos, não representa o que é pedido na expressão. Após registarem o salto para o número 3, representam o segundo salto até ao 10, acabando por apenas adicionar sete valores e não dez:

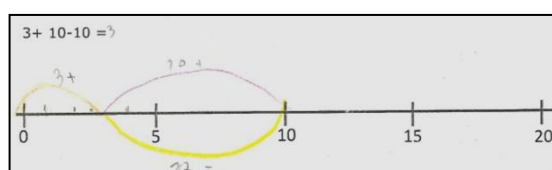


Figura 92 - Resolução de Joana.

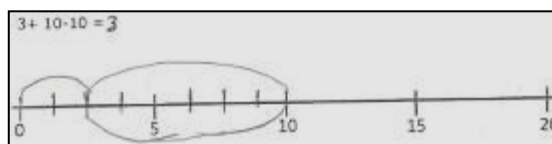


Figura 93 - Resolução de Rafaela.

Também neste caso, Laura apresenta a sua estratégia da mesma forma, David compreendeu que, embora o resultado se mantenha, a representação na reta não está de acordo com o que é pedido:

Investigadora – Então diz lá? Primeiro foste para onde?

Laura – Do 0 para o 3, depois do 3 para o 10, depois do 10 para o 3.

Investigadora – Qual é a diferença entre a estratégia da Laura e do Rafael e a estratégia do David e do Tiago? (As outras estratégias iam até ao número 13 e a de Laura apenas ia até ao número 10). Explica lá David.

David – É que se está no 3 juntou-se mais 7. Se veio para o 10, $3+7$ é 10.

Neste caso, David compreende que a expressão pode ser feita como a resolução de Laura. A última resolução é apresentada por dois alunos que trabalham a pares, Gonçalo e Mauro:

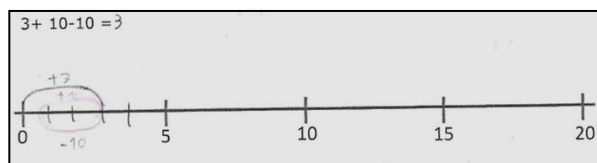


Figura 94 - Resolução de Gonçalo.

Nesta situação os alunos tentam dividir o espaço existente entre o 0 e o 3 em dez partes iguais. No caso de Gonçalo o aluno apresenta a sua resolução no quadro para que todos consigam perceber o que está a ser explicado. Inicialmente, os colegas começam por estranhar a sua resolução, mas o aluno tenta explicar que desenhou traços mais pequenos, acabando por subtrai-los:

Investigadora – Olha cá uma coisa, porque é que puseste o mais 10 aí?
Gonçalo –... Porque aqui está a dizer 3 mais 10, então aqui está o 3 e aqui está o 10...
Investigadora – Aqui está o 10?
Gonçalo – Eu fiz 10 tracinhos pequenos...

5.2.1.4. - Análise da questão 1.2

Nesta questão pretende-se que os alunos mostrem a relação que existe entre as expressões, ou seja, os alunos devem compreender que o primeiro membro da expressão é também o último.

Inicialmente, levam algum tempo a deixar os casos particulares até chegarem a uma generalização para justificar o seu raciocínio, facto que acontece só no momento de discussão coletiva. Nas fichas de trabalho os alunos justificam as suas escolhas, muito ligados a casos particulares:

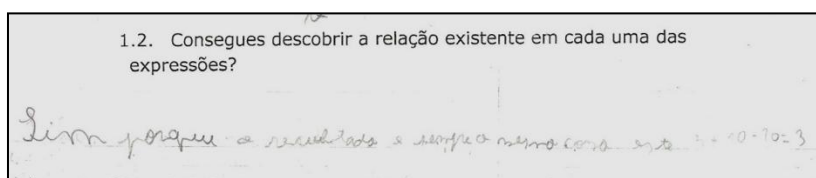


Figura 95 - Resolução de Joana.

Outros alunos, como o caso de Gonçalo, embora use a expressão, fê-lo de modo a retirar visualmente o $- 4$ e o $+ 4$, acabando por ter a expressão $18 = 18$. Quando assinala os valores, acaba por não incluir o sinal da subtração, pormenor que terá acontecido por distração:

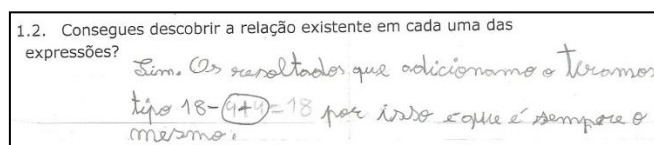


Figura 96 - Resolução de Gonçalo.

Outros alunos afirmam que o resultado é sempre igual ou que o número inicial é o resultado, mas não conseguem explicar a razão para que isso ocorre:

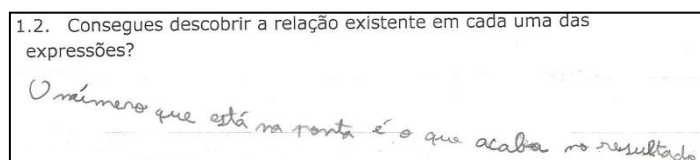


Figura 97 - Resolução de Laura.

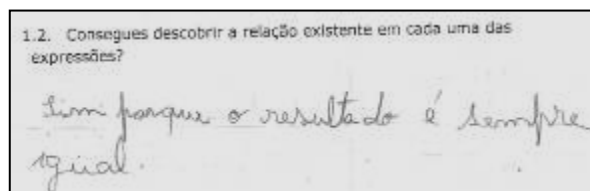


Figura 98 - Resolução de Rafaela.

As últimas resoluções pertencem a David e a Tiago. Os alunos mencionam o facto de existirem números que se subtraem e adicionam o que nos remete para o número inicial:

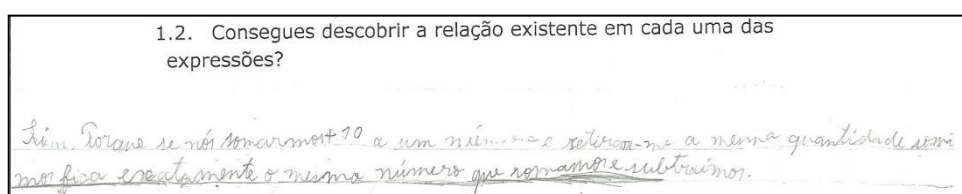


Figura 99 - Resolução de David.

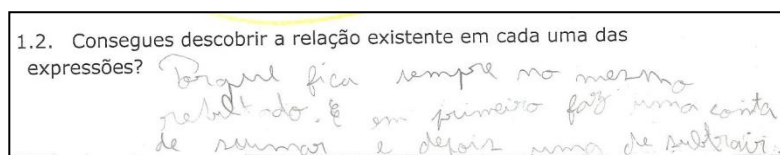


Figura 100 - Resolução de Tiago.


De um modo geral, os alunos estão muito ligados aos casos apresentados e não consideram se este facto podia acontecer para mais alguma expressão. Alguns alunos, como o caso de Rafaela, ainda afirmam que podia acontecer com todas as expressões, mas apenas referindo-se aos casos apresentados.

5.2.2. Análise da Questão 2

A segunda questão envolve um problema relacionado com a posição de estacas durante um corta-mato. Deste modo, pretendo perceber quais as estratégias usadas pelos alunos para resolver o problema apresentado. Ao analisar as suas respostas compreendemos que as estratégias estão mais direcionadas para um raciocínio relacional, ou seja, com recurso à reta numérica ou outra estratégia que não envolva um raciocínio operacional. Deste modo, apresentamos o problema que foi apresentado na questão 2:

2. No dia do corta mato, os alunos da turma do 3º E participaram nesta atividade. Ao longo do percurso existem várias estacas numeradas que vão indicando o caminho. A estaca que se encontra na meta é a número 30.

Na primeira volta, enquanto o Lucas estava na estaca número 11, a Clarisse estava na estaca 25. Quantas estacas faltam ao Lucas para conseguir ficar junto da Clarisse.



1.1. Descobre o número que falta sem recorrer a cálculos. Justifica a tua resposta.

Figura 101 - Questão 2 da sessão 2.

A grande maioria dos alunos, oito, recorre a estratégias que envolvem a reta numérica, desenhando-a na totalidade ou apenas traços. Esta estratégia tanto é apresentada do 0 ao 30, em que os alunos registam a estaca de Lucas e a de Clarisse, contando os valores intermédios, como iniciam a reta na estaca de Lucas (11) e terminam na estaca de Clarisse (25). Também neste caso, os alunos contam os valores intermédios para conseguir descobrir a diferença entre cada um:

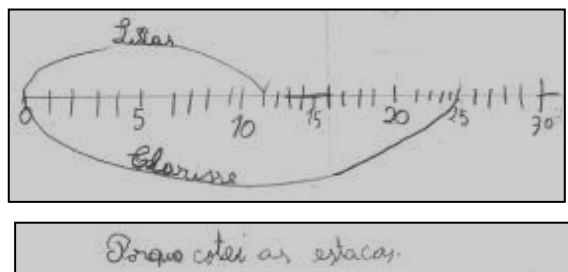


Figura 102 - Resolução de Rafael.

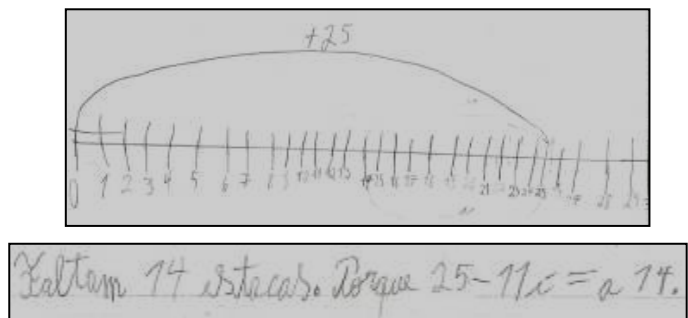


Figura 103 - Resolução de João.

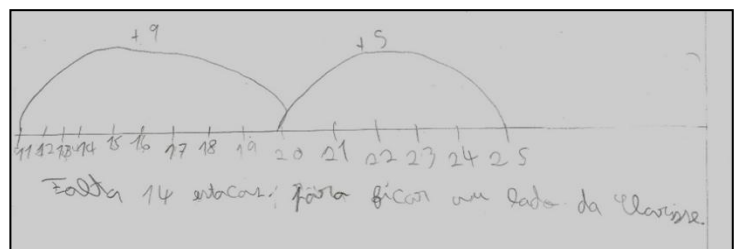


Figura 104 - Resolução de Tiago.

Para além da reta numérica, João acaba por criar a expressão que demonstra o que faz na reta e Tiago cria saltos estratégicos que lhe permitem chegar rapidamente ao resultado sem ter que recorrer a cálculos.

Os restantes alunos, quatro, recorrem a uma representação pictórica, desenhando bandeiras ou bolas para representar as estacas:

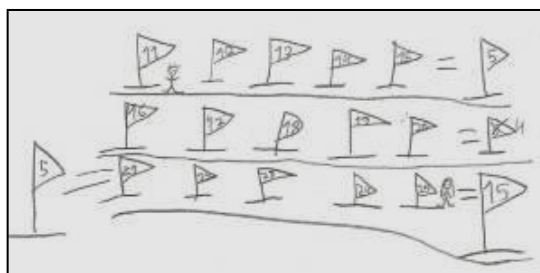


Figura 105 - Resolução de Gonçalo.

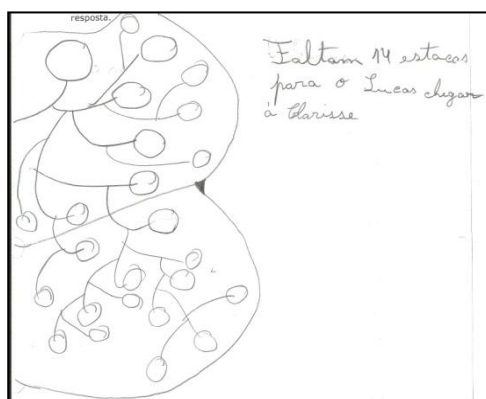


Figura 106 - Resolução de Rafaela.

No caso de Gonçalo, o aluno acaba por não dar a resposta correta. Na primeira linha de bandeiras deveria apenas contar quatro bandeiras, visto serem as bandeiras que ainda faltam passar, mas conta com a posição de Lucas. Já Rafaela, desenha vários círculos, todos ligados entre si, que representam cada uma das 25 estacas, rodeando as que Lucas já percorrerá, descobrindo quantas ainda faltavam até chegar junto de Clarisse. Neste caso a aluna acaba por fazer uma subtração entre o número de estacas que Clarisse tinha percorrido e as estacas que Lucas percorrerá.

A última resolução é de Joana que tenta usar a representação pictórica, mas não consegue acabar a sua estratégia por falta de tempo.



Figura 107 - Resolução de Joana.

Podemos afirmar que com esta estratégia, embora Joana não a termine é muito provável que não tenha entendido o problema visto estar a desenhar pessoas

e não estacas, não conseguindo encontrar, desta maneira, a diferença nas posições de cada um.

Com este problema percebemos que os alunos ficam familiarizados com a reta, visto ter sido a estratégia mais usada pelos alunos, que não sentem necessidade de recorrer a cálculos para resolver o problema.

5.2.3. Discussão dos resultados da Sessão 2

Ao longo da sessão 2 os alunos mostram compreender a relação de igualdade. Logo nos momentos iniciais, os alunos vão afirmando que o resultado da expressão é o mesmo. Para além deste discurso e, através das suas fichas de trabalho, conseguimos perceber que todos os alunos encontram o valor correto para cada uma das expressões, mostrando também que conseguem perceber que tem que existir o mesmo valor em cada lado da expressão, tal como mostra o quadro 5 anteriormente apresentado.

Por outro lado, e observando as suas resoluções, quer nas retas numéricas, quer na questão 2, os alunos recorrem a um raciocínio relacional. Na questão 1, mesmo quando não representam corretamente a expressão na reta numérica, os alunos criam uma expressão que expressa o que representam.

Por outro lado, detetamos raciocínio relacional quando os alunos não sentem necessidade de colocar traços intermédios na reta, mostrando deste modo uma percepção da localização de cada um dos valores.

Na questão 2, a grande maioria dos alunos opta por estratégias relacionais, embora Laura manifeste interesse em usar estratégias direcionadas para o raciocínio operacional.

Durante o momento de discussão, os alunos chegam a conclusões que se traduzem como sendo generalizações em linguagem natural, ao afirmar que quando se retira e adiciona um número a outro número, o valor mantém-se.

Inicialmente, os alunos apenas recorriam a exemplos concretos para justificar as suas escolhas. Com o desenrolar da discussão coletiva, os alunos compreendem que esta relação acontece para cada uma das expressões existentes, mas também para qualquer número.

No que diz respeito às estratégias utilizadas na questão 2, os alunos recorrem, em menor número, à representação pictórica para justificar o seu raciocínio e à reta numérica, também pelo facto de esta estratégia ser utilizada na questão 1. O uso do algoritmo apenas foi mencionado no início da tarefa, mas não

foi utilizado em nenhum dos casos. A linguagem natural é utilizada na questão 1 para justificar as relações que se estabelecem.

Esta sessão também evidencia algumas dificuldades por parte dos alunos, que se notam sobretudo na questão 1. Na representação das expressões na reta alguns mostram dificuldades, nomeadamente quando não efetuam a divisão correta do espaço entre os números ou quando não representam corretamente a expressão na reta, trocando a ordem das expressões. Por último, no momento de discussão, alguns alunos sentem dificuldade em dar justificações sem recorrer a casos específicos.

5.3. Sessão 3

A relação de ordem é a base da sessão 3. Apresento duas questões cujo primeiro objetivo é promover a compreensão da desigualdade existente nas expressões, bem como o uso correto dos símbolos apropriados. O segundo objetivo é desenvolver o raciocínio de compensação, ou seja, os alunos têm que ser capazes de analisar a expressão e resolvê-la sem recorrer ao algoritmo. Ao longo da sessão, as justificações que os alunos apresentam, tanto na ficha de trabalho como oralmente, são importantes para que este raciocínio se desenvolva. As questões envolvem expressões de valor omissos, com recurso a adição e subtração com valores inferiores a 50. Nesta sessão todos os treze alunos estão presentes.

5.3.1. Análise da Questão 1

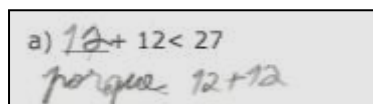
A primeira questão é constituída por três expressões que envolvem números de 20 a 30 e as operações da adição e subtração. Nesta primeira questão os alunos devem encontrar o valor omissos e o objetivo é a interpretação correta dos símbolos de maior e menor. Por outro lado, procuro perceber como justificam as suas escolhas e que estratégias utilizam para descobrir os valores em falta. A imagem seguinte apresenta as expressões da questão 1:

<p>1. Indica, para cada um dos casos os valores que tornam as afirmações verdadeiras.</p> <p>a) $___ + 12 < 27$</p> <p>b) $26 > 6 + ___$</p> <p>c) $30 > ___ - 11$</p>

Figura 108 - Questão 1 da sessão 3.

5.3.1.1. Análise da expressão 1 ($\underline{\quad} + 12 < 27$)

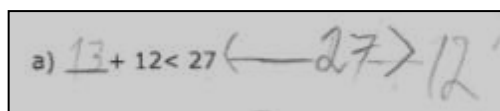
A primeira expressão apresenta uma adição no primeiro membro e o valor único no segundo membro. Aqui, o primeiro membro da expressão tem que ser inferior a 27. Nesta expressão todos os alunos encontram um valor correto, contudo, alguns alunos não justificam de forma completa. Duarte apresenta uma estratégia incompleta, tal como se pode verificar na resolução seguinte:



a) $12 + 12 < 27$
porque $12 + 12$

Figura 109 - Resolução de Duarte.

Nesta resolução, Duarte faz referência à primeira parte da expressão, não mencionando o seu resultado e não faz qualquer referência ao segundo membro da expressão. Deste modo, percebemos que o aluno interpreta o símbolo e que compreende que o valor é inferior a 27, mas não justifica. Também neste grupo, apresentamos a resolução de João:

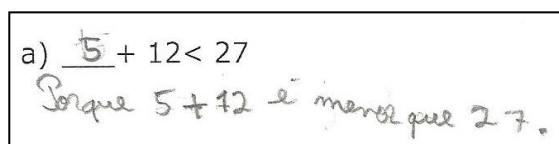


a) $13 + 12 < 27$ ← 27 → 12

Figura 110 - Resolução de João.

Neste caso, João apresenta o valor omissis escolhido, embora, na sua justificação, somente apresente os números que já se encontram na expressão, nomeadamente o 27 e 12 e não faz referência ao valor que encontra.

Outras alunas, Laura e Mara, como trabalham a pares, apresentam a mesma resolução:



a) $5 + 12 < 27$
porque $5 + 12$ é menor que 27.

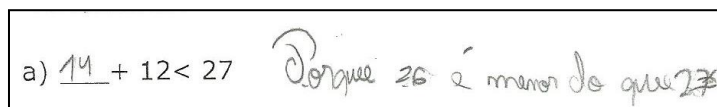
Figura 111 - Resolução de Laura.

Nesta situação, as alunas apresentam a expressão $5 + 12$ afirmando que é menor que 27. Quando apresentam a sua resolução, Laura acaba por dar a mesma resposta:

Laura – Eu pus 5, porque $5 + 12$ é menor que 27.

As duas alunas não apresentam o resultado da primeira parte da expressão, mas compreendem que os dois valores adicionados são inferiores a 27. Outro par

de alunos, que trabalham em conjunto, recorrem à estratégia contrária de Laura e Mara. Assim, como justificação, os alunos apresentam o resultado dos dois valores:



a) $14 + 12 < 27$ Porque 26 é menor do que 27

Figura 112 - Resolução de Ricardo.

Todos os restantes alunos, sete, apresentam uma resposta completa, mostrando o valor que escolhem e relacionando o seu resultado com o valor do outro membro da expressão. No momento de discussão em grupo, os alunos apresentam as suas estratégias muito semelhantes entre si:

Investigadora – Rafaela o que é que vocês puseram?

Rafaela – 12.

Investigadora – O 12. A Rafaela e o Tiago puseram 12... Qual foi a justificação que colocaram?

Rafaela – Porque se eu somar $12 + 12$ vai dar 24 e é menor do que 27.

Investigadora – Quem é que concorda com o que a Rafaela disse? Gonçalo qual é o vosso número?

Gonçalo – 14.

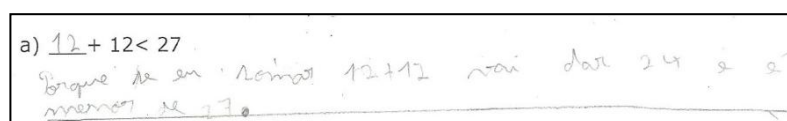
Investigadora – Porquê Gonçalo?

Gonçalo – Porque $14 + 12$ ou $12 + 14$ é igual a 26 e 26 é só menos 1 que o 27.

Investigadora – Então 26 é o quê?

Joana – Menor do que 27.

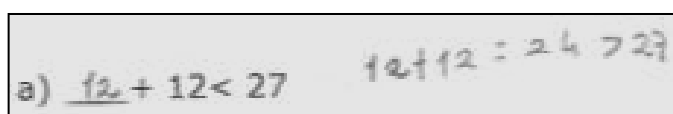
Nestas resoluções as diferenças que se fazem notar prendem-se com a linguagem utilizada. Três alunos recorreram a linguagem natural, tal como apresenta a resolução de Tiago:



a) $12 + 12 < 27$
Porque se eu somar $12+12$ vai dar 24 e é menor do que 27.

Figura 113 - Resolução de Tiago.

Os outros alunos utilizam uma linguagem simbólica para justificar a sua escolha, tal como é apresentado nas resoluções de Tânia e Joana:



a) $12 + 12 < 27$ $12+12 = 24 > 27$

Figura 114 - Resolução de Tânia.

a) $19 + 12 < 27$
 $12 + 19$
 $26 < 27$

b) $26 > 6 + 19$

$\begin{array}{r} 12 \\ + 14 \\ \hline 26 \end{array}$
 Porque $26 < 27$.

Figura 115 - Resolução de Joana.

Na estratégia de Joana, podemos observar o uso do algoritmo para confirmar um valor correto.

5.3.1.2. Análise da expressão 2 ($26 > 6 + \underline{\quad}$)

A segunda expressão apresenta um valor no primeiro membro da expressão e uma adição no segundo membro. Também nesta situação os alunos têm que apresentar um valor que torne a adição inferior a 26.

Do total de alunos, um não escolhe o valor correto e não apresenta qualquer tipo de justificação:

b) $26 > 6 + \frac{30}{10}$

Figura 116 - Resolução de Duarte.

O valor que se encontra abaixo da expressão é escolhido, posteriormente, na discussão coletiva. Tal como Duarte, outras alunas, Mara e Laura, escolhem o número 30 para colocar no valor omissivo:

Investigadora – Mara diz lá o teu. O que é tu puseste?

Mara e Laura – 30.

Investigadora – Por que é que vocês puseram 30?

Laura – Porque $6 + 30$ é maior que 26.

Com esta justificação percebemos que as alunas compreendem que $6 + 30$ é maior que 26, contudo, interpretaram de forma incorreta o símbolo de maior.

Ao longo da discussão coletiva alguns alunos detetam o seu erro e percebem que tem que ser um valor inferior a 26:

Investigadora – Porque $6 + 30$ é maior que 26. Toda a gente concorda?

Rafaela – Não.

Investigadora – Porquê?

Rafaela – Porque $6 + 30$ vai dar 36 e é maior que 26.

Investigadora – E o que é que nos pedem ali?

Ruben e Daniel – Menor do que 26.

Daniel – Um resultado menor do que 26.

Após esta análise as alunas retificam a sua resolução, mas sem apresentar uma justificação completa:

b) $26 > 6 + 12$
 Porque $6 + 12$ é menor que 26 .

Figura 117 - Resolução de Laura.

Os restantes alunos apresentam valores corretos, embora algumas justificações não se adequem à expressão que é apresentada. Em primeiro lugar, apresento a resolução de Tânia:

b) $26 > 6 + 6$ $6 + 6 = 12 > 26$

Figura 118 - Resolução de Tânia.

A aluna apresenta um valor correto na expressão, contudo, na justificação troca a ordem dos membros da expressão, esquecendo-se de trocar o símbolo de maior para menor, deixando a expressão falsa. Neste caso, pode-se afirmar que Tânia ainda não interpreta corretamente os símbolos de maior e menor.

Outra resolução é de Ricardo. O aluno justifica o número que escolhe, afirmando que este é inferior a 26, tal como se pode observar na sua resolução:

b) $26 > 6 + 10$ Porque 10 é menor do que 26

Figura 119 - Resolução de Ricardo.

Embora seja uma afirmação verdadeira, o aluno deixa de parte o número 6. Os restantes alunos, oito, para além de apresentarem um valor correto, desenvolvem uma justificação completa. Entre este grupo de oito alunos, três apresentam uma justificação em linguagem simbólica:

b) $26 > 6 + 5$ $6 + 5 = 11$
 $11 < 26$

Figura 120 - Resolução de David.

b) $26 > 6 + 19$
 $6 + 19 = 25$
 $25 < 26$

Figura 121 - Resolução de Joana.

Tal como poderemos observar, na resolução de Joana, a aluna subtrai o número 1 ao valor encontrado (25). No momento de discussão Gonçalo, o seu colega de mesa, justifica a sua resposta, embora com dificuldades na explicação:

Joana - Eu pus 19.

Investigadora - 19. (escrevi no quadro o número). Vamos ver... Por que é que puseste o 19?

Joana - Porque 6 mais 19... (a aluna estava com dificuldades em explicar)

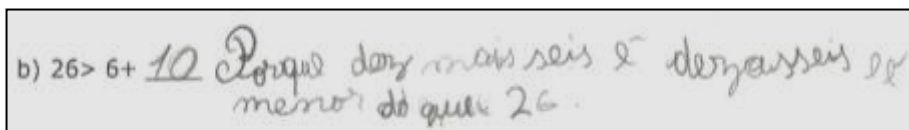
Investigadora - Ajuda lá Gonçalo.

Gonçalo - 26... menos ... se nós queremos que dê um número menos um então metemos o 19...

Investigadora - Calma se vocês querem que seja... não é menos um, vocês querem um número menor que?

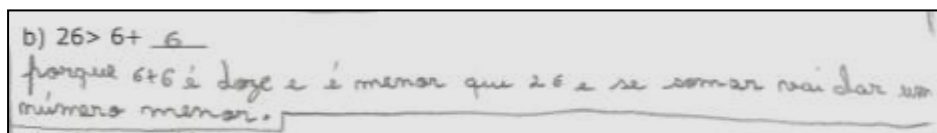
Gonçalo - 26. 26 menos 1. Um número que seja 26 menos 1. E nós colocamos 19 mais 6 e deu 25.

Os restantes alunos apresentam a sua justificação em linguagem natural.



b) $26 > 6 + 10$ Porque dez mais seis é dezasseis e é menor do que 26.

Figura 122 - Resolução de Rafael.



b) $26 > 6 + 6$
porque $6 + 6$ é doze e é menor que 26 e se somar vai dar um número menor.

Figura 123 - Resolução de Rafaela.

Ao longo da discussão coletiva, os alunos partilham as suas resoluções mostrando que compreendem que o valor encontrado na adição tem que ser sempre inferior ao que é apresentado no primeiro membro da expressão:

Investigadora - Tiago.

Tiago - 6.

Investigadora - 6 porquê?

Tiago - Porque 6 mais 6 é 12 e é menor que 26 e se somar vai dar um número menor.

Investigadora - Rafael diz.

Rafael - 10 mais 6 é 16 e é menor que 26.

Já no final da discussão da expressão, os alunos compreendem que podem ter mais do que um valor, ao contrário do que o que acontece na relação de igualdade:

Investigadora – São todas menores que 26 não é? Então vocês já sabem que com os sinais de maior e menor só temos um único número?

Tiago – Podemos ter vários.

Investigadora – (...) E com o sinal de igual acontece a mesma coisa?

Rafael – Não, não.

Investigadora – Então?

Rafael – Porque ...

(...)

Gonçalo – Só podíamos meter só um único número.

Investigadora – E com os sinais de maior e menor isso acontece?

Vários alunos – Não.

Assim, os alunos compreendem que na relação de ordem existe mais do que um valor correto e as expressões continuam verdadeiras.

5.3.1.3. Análise da expressão 3 ($30 > \underline{\quad} - 11$)

A última expressão da questão 1 apresenta um valor no primeiro membro da expressão e uma subtração no segundo membro. Aqui os alunos têm que encontrar um valor superior a 11, mas tendo presente que a diferença não pode exceder os 30. As dificuldades verificam-se, quer na escolha do valor omissso, mas também na justificação que apresentam. No que diz respeito à escolha do valor omissso, dois alunos que trabalhavam em conjunto, optam pelo número 6, embora corrijam após a discussão em grande grupo.

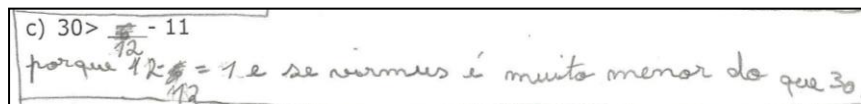


Figura 124 - Resolução de Rafaela.

Quando Rafaela explica a sua estratégia, apresenta-a tal como representou na ficha de trabalho:

Investigadora – (...) Rafaela diz lá.

Rafaela – 6

Investigadora – 6? A Rafaela pôs 6. Então diz lá.

Rafaela - Porque 11 menos 6 vai dar 5 e 5 é menor do que 30.

Investigadora – Tu disseste uma coisa correta... 11 menos 6 vai dar 5. Mas nós temos aqui 11 menos 6?

Rafael – Não. Temos 6 menos 11.

Nesta resolução, Rafaela usa a propriedade comutativa, não compreendendo que esta propriedade não pode ser usada na subtração. Alguns alunos compreendem que tal facto não pode acontecer:

Mara – Não podia porque 6 menos 11 não dá.
Rafael – Dá 0.

Outro erro acontece com Tânia, como podemos observar na resolução abaixo apresentada:



c) $30 > 29 - 11$ Porque vinte e nove é menor que trinta.

Figura 125 - Resolução de Tânia.

Na sua justificação, Tânia ignora a subtração que se encontra no segundo membro da expressão, apresentando somente um número que fosse inferior a 30. A sua expressão não deixa de estar verdadeira, muito embora a justificação apresentada não reflita a expressão na totalidade:

Tânia – Ah eu pus o número 29.

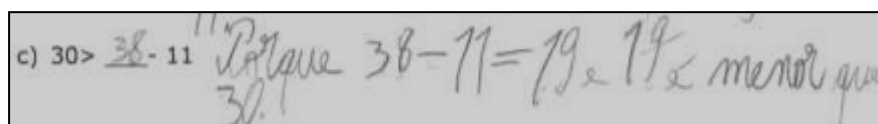
Investigadora – Porque o número 29?

Tânia – Porque 29 é menor que 30.

Investigadora – Sim mas tens ali outro número. Continua a tua afirmação verdadeira?

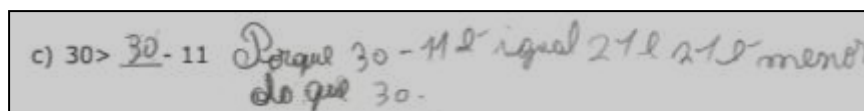
Tânia – Acho que não...

Neste diálogo, Tânia fica confusa em relação à sua escolha e não percebe se a sua expressão continua a ser verdadeira. Um grupo de três alunos, ao calcular o segundo membro da expressão, não apresenta o resultado correto:



c) $30 > 38 - 11$ Porque $38 - 11 = 19$ e 19 é menor que 30.

Figura 126 - Resolução de João.



c) $30 > 30 - 11$ Porque $30 - 11$ é igual 21 e 21 é menor do que 30.

Figura 127 - Resolução de Rafael.

Mais uma vez, embora o resultado não esteja correto, os alunos compreendem que o valor tem que ser inferior a 30, pela justificação que desenvolvem ao afirmar que o valor encontrado tem que ser inferior a 30. Outra estratégia desenvolvida por Mara e Laura não apresenta uma justificação completa, afirmando apenas que 30 é maior que 15 – 11:

c) $30 > \overline{45} - 11$
 Porque $15 - 11$ é menor que 30 .

Figura 128 - Resolução de Mara.

Nesta situação, as alunas não encontram o valor desta subtração, mas compreendem que o resultado é inferior a 30. No momento de discussão a justificação é apresentada da mesma forma:

Investigadora – Diz lá Laura.

Laura – 15. Porque 15 menos 11 é menor que 30.

Nos dois casos seguintes, os alunos não efetuam uma subtração, tal como era pedido na expressão, adicionaram o número escolhido, ao valor apresentado:

c) $30 > \overline{32} - 11$ $30 + 12 = 42 - 12 = 31$

Figura 129 - Resolução de Duarte.

No momento da discussão, Dinis sente dificuldade em justificar o que tinha apresentado na sua ficha de trabalho:

Investigadora – Então digam lá.

Duarte – 32.

Investigadora – Porquê Duarte?

Duarte – Porque 30 menos 11... 30 mais 11, 41...

Investigadora – calma puseste quanto?

Duarte – 32.

Investigadora – Estás a retirar ao 32 quanto?

Duarte – 11

Investigadora – Fica um número menor que 30 ou não?

Duarte – Sim.

Em último lugar apresento a resolução de três alunos que recorreram à linguagem simbólica para justificar as suas estratégias:

c) $30 > 40 - 11$
 $40 - 11$
 $29 < 30$

Figura 130 - Resolução de Gonçalo.

c) $30 > 11 - 11$
 $11 - 11$
 $2 < 30$

Figura 131 - Resolução de Joana.

$$c) 30 > \underline{20} - 11 \qquad 20 - 11 = 9$$

$$9 < 30$$

Figura 132 - Resolução de David.

Também neste caso, quando é pedido aos alunos que expliquem as suas estratégias, eles justificam da mesma forma que realizam na sua ficha de trabalho:

Investigadora – David digam lá o vosso...

David - Pus 20. 20 menos 11 dá 9 e 9 é menor do que 30.

Apesar de Joana estar a trabalhar com Gonçalo, não deixa de repetir o erro de Tânia, anteriormente referido. A aluna, embora tenha escolhido um valor superior a 11, na justificação troca a ordem do aditivo com o subtrativo, representando o que é pedido de forma incorreta.

5.3.2. Análise da Questão 2

A questão 2 apresenta cinco expressões em que pretendo que os alunos coloquem o símbolo de maior ou menor, de modo a tornar a expressão verdadeira. Todas as expressões envolvem, em cada um dos membros, dois termos. Nas últimas duas expressões a operação envolvida é a subtração. Na imagem seguinte, apresentamos a questão 2 tal como foi apresentada aos alunos.

2. Completa cada uma das questões com os sinais de <, > ou igual para que se tornem verdadeiras. Justifica a tua resposta.

38+ 45 _____ 40+ 43

40+ 45 _____ 41+ 45

39+ 42 _____ 40+ 43

52- 25 _____ 50- 25

52- 29 _____ 52- 27

Figura 133 - Questão 2 da sessão 3.

Com esta questão pretende-se que os alunos compreendam as relações entre cada membro da expressão sem precisar de recorrer a um raciocínio operacional, mas sim, através de um raciocínio relacional.

Inicialmente, os alunos começam por apresentar possíveis estratégias de resolução para além do recurso ao algoritmo. Os esquemas e os desenhos, ou até mesmo a reta numérica são representações apontadas pelos alunos:

David – Podemos fazer esquemas ou desenhos?

Investigadora – Que esquema é que tu fazias?

David – Ia fazer um desenho.

Investigadora – Qual era o desenho que tu fazias?

David – Fazia bolinhas.

Investigadora – Então ias fazer 38 bolinhas mais 45? Então olhem, digam-me lá uma coisa... Sem fazermos a conta...

Rafael – Fazendo a reta numérica até ao 45.

Após o diálogo inicial, a primeira questão que é feita em conjunto, porque os alunos têm dificuldade em resolvê-la, também pelo facto de lhes ser pedido para não usar o algoritmo. Os alunos acabam por ficar confusos não conseguindo arranjar outras estratégias, muito embora tivessem feito referência anteriormente.

5.3.2.1. Análise da expressão $2(40 + 45 \text{ ___ } 41 + 45)$

Do grupo de treze alunos, oito, adotam a estratégia usada na expressão anterior. Assim, os alunos compreendem a diferença existente entre cada membro da expressão, sem recorrer ao algoritmo e, deste modo, conseguem identificar o membro que tem o valor maior:

Handwritten diagram showing the comparison of two expressions: $40 + 45$ and $41 + 45$. The result of the first expression is 85 and the result of the second is 86 . A less-than sign ($<$) is placed between them. A circle is drawn around the 41 in the second expression. A curved arrow points from the 40 in the first expression to the 41 in the second, with a $+1$ written below it, indicating the difference between the terms.

Figura 134 - Resolução de Rafaela.

No momento de discussão, Rafaela também explica o seu raciocínio, mostrando que estabelece relações entre os termos e compreende que, embora haja um valor idêntico (45) nos dois membros da expressão, existe outro valor que é superior:

Rafaela – Porque $40 + 45$ é menor do que $41 + 45$. Porque se nós virmos $40 + 45$ vai dar 85 e se está lá $41 + 45$ acrescentaram mais um no 40 e ficou 86.

Neste grupo de oito alunos, metade opta por não apresentar o resultado de cada lado da expressão, mostrando as comparações que estabelecem entre os termos da expressão:

Figura 135 - Resolução de Mara.

Por outro lado, Tânia justifica a sua escolha através de linguagem natural, tal como podemos ver na resolução apresentada:

Figura 136 - Resolução de Tânia.

Deste modo percebemos que a aluna não necessita de apresentar cálculos ou apresentar o resultado para cada lado da expressão. É notório o uso de um raciocínio relacional na resolução.

Outra estratégia utilizada relaciona-se com a apresentação dos resultados de cada membro da expressão, tal como observamos com as resoluções de Mauro e João:

Figura 137 - Resolução de Mauro.

Figura 138 - Resolução de João.

No caso de Mauro, o aluno regista o resultado de cada um dos lados da expressão de forma separada, apresentando essas expressões como justificação. No momento de discussão, os alunos demonstram compreensão na relação apresentada:

Investigadora – Por que é que puseste esse sinal [Mauro]?

Mauro – Porque 40 + 45 é menor do que 41 + 45.

Investigadora – Porque é que é menor?

Duarte – (Estava junto a Mauro) Porque acrescenta o 1 ao outro 40.

Por outro lado, Joana tenta elaborar um esquema que demonstre o seu raciocínio, muito embora se torne um pouco confuso:

Figura 139 - Resolução de Joana.

Nesta estratégia, a aluna adiciona o primeiro com o terceiro termo e o segundo com o quarto termo, mostrando que o resultado não é o esperado. Quando Joana explica o que fez, a aluna não mostra confiança a apresentar a sua estratégia e nem a sua justificação oral está relacionada com o que regista na ficha de trabalho:

Investigadora – Joana diz lá... Tens é que falar alto.

Joana – Como $4 + 4$ é 8 , então $40 + 40$ é 80 , mais 5 é 85 .

Investigadora – Isso é para justificar esta primeira parte e porque é que tu disseste que esta (primeiro lado da expressão) era menor do que aquele (segundo lado da expressão)?

Joana - ...

Investigadora – O que é que a segunda parte da expressão tem que a primeira parte não tem, Joana?

Joana – 41 ...

Investigadora – Então fica sempre mais o quê?

Joana – Mais...

Investigadora – Isso, diz...

Joana – Mais 1 .

Investigadora – Então qual é a parte que é maior? A primeira ou a segunda.

Joana – A segunda porque é 86 .

Deste modo, a aluna demonstra saber que o primeiro membro da expressão era inferior, embora explique a sua estratégia com ajuda da minha parte.

5.3.2.2. Análise da expressão 3 ($39 + 42$ ___ $40 + 43$)

Na terceira expressão, as estratégias desenvolvidas são, em tudo semelhantes, às apresentadas anteriormente. No total dos 13 alunos, dois registam o valor da adição na parte superior de cada uma das expressões percebendo, deste modo, que o primeiro membro da expressão é menor:

Figura 140 - Resolução de Gonçalo.

Outros três alunos apresentam o resultado de cada adição dos termos da expressão, mas também, conseguem estabelecer as relações entre cada número da expressão:

Figura 141 - Resolução de David.

Figura 142 - Resolução de Tânia.

Na resolução de Tânia observamos que a aluna apresenta somente o resultado do primeiro membro da expressão. Este aspeto pode estar relacionado com o facto de o resultado da expressão $40 + 43$ já ter sido apresentado anteriormente.

Um conjunto de seis alunos compreende que a primeira parte tem menos um valor em cada termo, somente pelas comparações que estabelece:

Figura 143 - Resolução de Ricardo.

Figura 144 - Resolução de Tiago.

Laura também se encontra neste grupo, e através das suas justificações na discussão coletiva, percebermos que a aluna compreende a relação entre cada membro da expressão:

Investigadora – Também puseram este sinal [de menor]? (Laura e Mara)

Laura – Sim.

Investigadora – Então e porquê?

Laura – 39...e o 40 é menos um. Do 39 ao 40.

Investigadora – É menos 1?

Laura – Mais 1. E depois do 42 para o 43 também é mais 1. E o sinal é menor.

Investigadora – O sinal é menor?

Laura – Sim.

Investigadora – Então qual é a expressão que é maior. É da primeira parte ou é da segunda?

Laura – É da segunda.

Mauro apresenta a sua estratégia mostrando que a primeira parte da expressão tem menos um valor em cada um dos termos e justificou recorrendo a linguagem natural:

$39 + 42 < 40 + 43$
porque se eu juntar mais um no 39 + 42 = a outra

Figura 145 - Resolução de Mauro.

Por último, Joana apresenta o símbolo de menor e a sua justificação consiste na apresentação da resolução da segunda parte da expressão:

$39 + 42 < 40 + 43$ $4 + 4 = 8$ então $40 + 40 = 80 + 3$

Figura 146 - Resolução de Joana.

Neste caso, a aluna apenas demonstra que a segunda parte da expressão vale 83, não apresentando qualquer resultado ou relação com a primeira parte da expressão.

5.3.2.3. Análise da expressão $4(52 - 25 \text{ ___ } 50 - 25)$

As duas expressões seguintes envolvem a subtração nos dois membros da expressão e verifica-se um maior número de erros e dificuldades nas resoluções dos alunos. Nestes casos, os alunos ganham consciência que quanto maior for o subtrativo, menor é o valor encontrado.

No que diz respeito a esta expressão, um conjunto de oito alunos identifica as diferenças existentes entre cada lado da expressão, sabendo que o segundo membro tem menos dois valores que o primeiro:

$52 - 25 > 50 - 25$

Figura 147 - Resolução de David.

$52 - 25 > 50 - 25$

Figura 148 - Resolução de Ricardo.

Neste grupo, apenas David fez a leitura da expressão da esquerda para a direita. Os restantes, ao registarem um arco com *mais 2* leva-nos a crer que olham para a expressão, da direita para a esquerda. Rafael, inicialmente, troca o sinal e apresenta o primeiro membro da expressão como sendo inferior ao segundo, mas ao ler a sua expressão para apresentar aos colegas, apercebe-se do seu erro:

Investigadora – Rafael explica-me lá porque é que puseste este.
 Rafael - Porque $52 - 25$ é ... ai não. 52 é maior que 50 e 25 é igual.

Neste caso, compreendemos que Rafael está a analisar um lado da expressão e relaciona com o outro, percebendo quais são as diferenças existentes.

Outros dois alunos somente registam o resultado de cada membro da expressão o que leva a crer que desenvolvem um cálculo mental:

$$\begin{array}{c} 52 - 25 > 50 - 25 \\ 27 > 25 \end{array}$$

Figura 149 - Resolução de João

$$\begin{array}{c} \overset{33}{\curvearrowright} \quad \overset{25}{\curvearrowright} \\ 52 - 25 > 50 - 25 \end{array}$$

Figura 150 - Resolução de Gonçalo.

No caso de Gonçalo verificamos que, inicialmente, o aluno regista 33, ou seja, troca a ordem de cada um dos algarismos e efetua uma subtração sem transporte:

Investigadora – Gonçalo pôs 33 em cima (no primeira parte da expressão) E aqui (segunda parte da expressão) puseste quanto? 25 não foi?

Gonçalo -Sim.

Investigadora – Como é que tu chegaste ao 33?

Gonçalo – Porque 5 menos 2 é três, porque eu já sabia disso. Então se 5 menos 2 é três então 2 menos 5 é três.

Investigadora – Mas tu estás a esquecer-te de uma coisa. É que isto não é 5 menos 2.

Joana - É 2 menos 5.

O aluno, para além de trocar a ordem dos algarismos, utiliza claramente a propriedade comutativa, não compreendendo que esta não pode ser utilizada em expressões que envolvam a subtração.

Outro caso é o de Rafaela. A aluna regista corretamente o símbolo de maior contudo, ao registar o resultado de cada membro, fê-lo como se de uma adição se tratasse e não uma subtração:

Figura 151 - Resolução de Rafaela.

Embora a sua estratégia não esteja correta, Rafaela compreende as relações entre cada parcela:

Investigadora – Rafaela diz lá, que sinal é que tu puseste?

Rafaela – Aquele.

Investigadora – Então aquele é o quê?

Rafaela – É o sinal de maior. Quer dizer que o resultado que dá na primeira conta, quer dizer que é maior que o que está na segunda conta.

Outra estratégia que acaba por não ser bem-sucedida é apresentada por Joana, tal como podemos observar na resolução abaixo:

Figura 152 - Resolução de Joana.

Ao explicar, Joana tem alguma dificuldade. Neste caso, poderemos pensar que existem dificuldades com expressões que envolvem a subtração:

Joana – Eu pus aí um zero, mas não sei se está certo? (referindo-se às 2 dezenas menos 5 dezenas).

Investigadora – Puseste o 0 onde?

Joana – No 2 menos 5.

(...)

Joana - 2 menos 5 eu pus o 0.

Por último, apresento a estratégia de Mauro. O aluno não regista qualquer justificação para explicar o seu raciocínio:

Figura 153 - Resolução de Mauro.

5.3.2.4. Análise da expressão 5 (52 – 29 ___ 52 – 27)

Na última expressão, tal como se verifica na anterior, os alunos demonstram dificuldades na resolução da expressão. A grande maioria, oito, apresenta a mesma

estratégia e registam as diferenças de valores que existe entre cada membro da expressão:

Figura 154 - Resolução de Tânia.

Figura 155 - Resolução de Rafael.

As duas estratégias apresentadas são diferentes, porque tal como se verifica anteriormente, Tânia regista *mais 2*, isso reflete uma leitura da expressão da esquerda para a direita, ao contrário de Rafael que regista o *menos 2*, o que nos leva a pensar que a sua leitura é feita da direita para a esquerda. No momento de discussão, outros alunos com a mesma estratégia também conseguem explicar como raciocinaram:

Investigadora – Ricardo explica lá (colocou o sinal de menor).

Ricardo – 27 para 29 vão 2. 29 é maior e vai sempre ser menor.

(...)

David – Se o número que nós vamos subtrair a um número que seja maior... o 50 menos 29. Se nós retirarmos ao 29 dois (estava a referir-se ao 27) o resultado aumenta, porque ao 52 retiramos um número... por exemplo 30 e fica o resultado sempre a diminuir.

David tem alguma dificuldade em explicar o que pensava, mas o que afirma é que quanto maior é o valor que retiramos, menor é o resultado.

Outros dois alunos registaram o resultado junto de cada membro da expressão, mas mais uma vez, o raciocínio de Gonçalo não está correto e neste caso reflete-se na troca de símbolos:

Figura 156 - Resolução de Gonçalo

$$52-29 < 52-27$$

$$23 < 25$$

Figura 157 - Resolução de João.

Rafaela desenvolve o mesmo erro que fez anteriormente, e em vez de interpretar as expressões como subtrações, regista o resultado como se de uma adição se tratasse:

$$52-29 > 52-27$$

$$81 + 79$$

Figura 158 - Resolução de Rafaela.

Também neste caso, o símbolo de maior que Rafaela coloca inicialmente, faz com que a expressão não fique verdadeira:

Investigadora – Rafaela, então qual é o sinal que vem para aqui?

Rafaela – O de maior.

Investigadora – O de maior? Qual é a expressão que vai ficar maior?

Rafaela - O 52 menos 29.

(...)

Investigadora – Este vai ter um resultado maior?

Rafaela – Sim.

Investigadora – Porquê?

Rafaela – Porque se eu tirar 29 de 52 vou ficar com...81

As últimas duas resoluções são a de Mauro, que colocou o símbolo de menor sem registar qualquer justificação, e de Joana que emprega o símbolo errado:

$$52-29 > 52-27$$

Figura 159 - Resolução de Mauro.

$$52-29 < 52-27$$

Figura 160 - Resolução de Joana.

Em vários momentos, Joana faz referência aos símbolos através de gestos e imitando o desenho do símbolo, não fazendo referência ao seu nome. Percebemos que a aluna tem alguma dificuldade na identificação e nome dos símbolos de maior e menor.

5.3.3. Discussão dos resultados da Sessão 3

Ao longo desta sessão, embora evidenciando algumas dificuldades, os alunos demonstram compreensão da relação de ordem. Deste modo, apresento os resultados segundo as questões do estudo, com o intuito de analisar e perceber a evolução por eles demonstrada.

Em primeiro lugar, os alunos reconhecem a relação de ordem e os símbolos que estão associados. Demonstram ter consciência que, nesta relação, existe sempre um membro com valor maior e outro com valor menor. Os resultados em cada uma das questões demonstram que os alunos conseguem encontrar, na questão 1, os valores que tornam as expressões verdadeiras e, na questão 2, identificar o símbolo correto para colocar na expressão.

No que diz respeito ao raciocínio que os alunos desenvolvem, pode-se afirmar que alguns sentem a necessidade de recorrer a cálculos para procurar saber os resultados mas, de uma maneira geral, não recorrem a um raciocínio operacional. Na primeira questão, apenas Joana usa o algoritmo para encontrar o valor em falta. Outros alunos, usam a estratégia de decomposição de fatores e, na grande maioria dos casos, como se trata de números pequenos, recorrem a cálculo mental para encontrar o valor adequado.

Na questão 2, a grande maioria dos alunos recorre a um raciocínio relacional compreendendo as relações entre cada membro da expressão e percebendo qual seria o membro com maior valor. Também nesta questão existem alunos que têm a necessidade de identificar o resultado de cada membro para depois identificarem o símbolo correto.

Nesta sessão, os alunos não conseguem justificar as suas estratégias de modo a desenvolver generalizações. Ao longo das duas questões foi notória a ligação dos alunos a cada uma das expressões, sem conseguirem arranjar uma frase ou expressão que demonstrasse o que aconteceria para todos os casos. Em alguns momentos, tentam justificar através de outros exemplos, tal como se pode ver no caso do David quando explica, com alguma dificuldade, que, quanto mais valores colocamos no aditivo, mais a diferença diminui.

Em relação às justificações apresentadas, os alunos recorrem, com alguma frequência, à linguagem simbólica e à linguagem natural. Na questão 1, a grande maioria, recorre a linguagem natural para justificar as suas escolhas. Por outro lado, alguns alunos, não usando a linguagem natural para explicar o seu raciocínio, recorrem à linguagem simbólica e, deste modo, explicam como pensam através de uma expressão onde o valor omitido é substituído por um valor real.

Na questão 2, a maioria dos alunos recorre a um raciocínio relacional, e as estratégias para justificar a escolha do símbolo baseiam-se no desenho de arcos entre os números das expressões. Para além desta estratégia, os alunos recorrem à linguagem natural para justificar as suas escolhas.

Por último, os alunos, ao longo de toda a sessão, mostram dificuldades relacionadas com a identificação dos símbolos, o que faz com que apresentem valores que não tornam a expressão verdadeira. Para além da troca dos símbolos, a sua designação também cria alguma dificuldade, quando atribuem o nome de sinal de *mais* ou de *menos* aos símbolos de maior e menor. Além desta troca de nomes, outros alunos, como Joana, apresentam o símbolo usado, desenhando-o no ar mas não fazendo referência ao seu nome. Neste caso, também é notória a confusão que a aluna faz em relação aos símbolos.

Para concluir, os alunos demonstraram compreender a relação de ordem, e deste modo, compreendem que, ao contrário da relação de igualdade, existem sempre diferenças entre cada um dos lados da expressão.

5.4. Sessão 4

A sessão 4 tem como objetivo principal trabalhar a relação de igualdade através do modelo retangular. Através deste modelo, os alunos desenvolvem o seu raciocínio com recurso à propriedade distributiva. Mais uma vez as justificações que os alunos desenvolvem sobre as relações são muito importantes, bem como as diferentes expressões numéricas que apresentam. A tarefa, composta por três alíneas, está centrada no modelo retangular que “Maria” utiliza para conseguir resolver a expressão apresentada, tal como se pode verificar na figura seguinte:

A estratégia da Maria

1. A Maria, para calcular a expressão 5×123 , recorreu ao esquema seguinte:

X	100	20	3
5	500	100	15

$5 \times 123 = 500 + 100 + 15 = 615$

1.1. Consegues explicar a estratégia que a Maria utilizou para resolver a expressão? Justifica a tua resposta

1.2. Se a expressão for 8×458 , será que conseguimos utilizar o mesmo modelo?

1.3. Consegues arranjar outra estratégia para resolver a expressão sem recorrerres ao algoritmo?

Figura 161 - Ficha de trabalho da sessão 4.

Esta sessão é desenvolvida por um conjunto de 12 alunos organizados por pares. De seguida, analiso cada uma das alíneas, mostrando o objetivo que se pretende atingir em cada uma.

5.4.1. Análise da alínea 1.1.

Na primeira alínea, os alunos têm que explicar a estratégia de Maria, compreendendo as relações que se estabelecem entre cada fator da expressão. Neste caso, têm que compreender que existe uma decomposição de um fator para que o cálculo fosse mais simples.

Inicialmente os alunos compreendem o que Maria faz e que existe uma decomposição pelas ordens que cada algarismo ocupa:

Duarte – 5×100 , 5×20 e 5×3 .

Investigadora – E o que é que ela fez ao 123?

João – Transformou em centenas, dezenas e unidades. Pôs 5×100 que era 500, 5×20 que era 100 e 5×3 que era 15.

As justificações apresentadas pelos alunos são variadas, umas mais completas do que outras, tal como verificamos de seguida. Em primeiro lugar, apresento a justificação de Tânia e Tiago que apenas referiram que a estratégia utilizada era o modelo retangular:

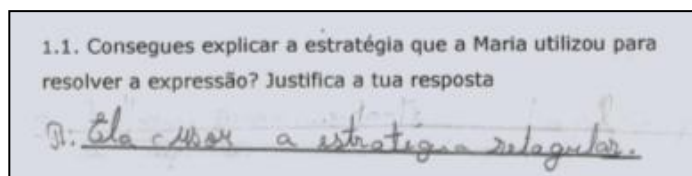


Figura 162 - Resolução de Tânia.

Esta resposta surge porque na introdução da tarefa, fiz referência ao nome da estratégia da Maria – modelo retangular - e os alunos interpretam esta alínea como a identificação do nome da estratégia. No caso de Tiago, embora apresente o nome da estratégia, no momento de discussão coletiva, o aluno explica o que é feito na estratégia:

Tiago – A Maria usou uma estratégia retangular.

Investigadora – E porquê? O que é que ela fez?

Tiago – Fez 5×100 ...

Investigadora – E porque é que fez 5×100 ?

Tiago – Porque estava o 1 no 123, que representa a centena.

Investigadora – E a seguir?

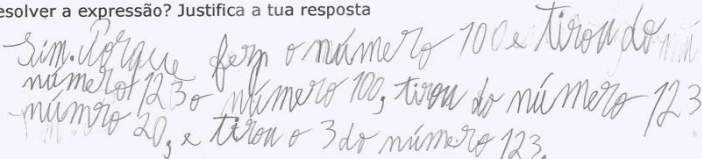
Tiago – 5×20 igual a 100 porque o 2 do 123 representa a dezena. O 5×3 igual a 15 e o 3 do 123 representa a unidade.

Investigadora – Então o que é que ela fez ao 123?

Tiago – Dividiu em centenas, dezenas e unidades.

Os restantes alunos apresentam as suas justificações em linguagem natural. Para além disso, percebe-se que os alunos compreendem e entendem a relação que se estabelece entre as posições que cada algarismo ocupa na expressão. As duas resoluções seguintes, representam um grupo de quatro alunos e reflete a compreensão falada anteriormente:


1.1. Consegues explicar a estratégia que a Maria utilizou para resolver a expressão? Justifica a tua resposta



Sim. Porque fez o número 100 e tirou do número 123 o número 100, tirou do número 123 número 20, e tirou o 3 do número 123.

Figura 163 - Resolução de João.

1.1. Consegues explicar a estratégia que a Maria utilizou para resolver a expressão? Justifica a tua resposta

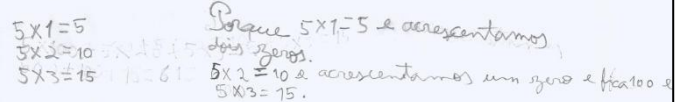


Sim. Porque o 1 representa a centena e o 2 representa a dezena e o 3 representa a unidade.

Figura 164 - Resolução de Rafael.

Outros dois alunos, Laura e Gonçalo, apresentam multiplicações dos algarismos 1, 2 e 3. Apesar deste pormenor, ambos compreendem a ordem de cada algarismo, tendo a noção de quantos zeros têm que acrescentar em cada um:

1.1. Consegues explicar a estratégia que a Maria utilizou para resolver a expressão? Justifica a tua resposta.



$5 \times 1 = 5$
 $5 \times 2 = 10$
 $5 \times 3 = 15$

Porque $5 \times 1 = 5$ e acrescentamos dois zeros.
 $5 \times 2 = 10$ e acrescentamos um zero e fica 100 e $5 \times 3 = 15$.

Figura 165 - Resolução de Laura.

Nestas resoluções há a decomposição em fatores mais cómodos, o que os leva, somente, a acrescentar os zeros no final de cada cálculo. No momento inicial de aula, Gonçalo consegue ter uma perceção imediata da estratégia, embora não a explique na sua totalidade:

Gonçalo - Dividiu o número pelos algarismos. Centena, dezena e unidade e depois multiplicou-os.

O que o aluno tenta explicar é a divisão que Maria faz de cada um dos números consoante a ordem em que são apresentados, multiplicando-os de

seguida. Oralmente, Laura também apresenta a sua explicação relativamente à estratégia utilizada pela Maria:

Investigadora – Laura lê-me a tua resposta.

Laura – Porque 5×1 é igual a 5 e acrescentamos dois zeros, 5×2 é igual a 10 e depois acrescentamos um zero e fica 100 e 5×3 é igual a 15.

Investigadora – Toda a gente concorda com o que ela disse?

Vários alunos – Sim

Investigadora – E porquê Mara?

Mara – Porque o 1 representa o 100 o 2 representa as dezenas e o 3 representa as unidades.

As duas resoluções seguintes são de Duarte e Rafaela. Os alunos arranjam uma expressão que demonstra o que é feito no modelo.

1.1. Consegues explicar a estratégia que a Maria utilizou para resolver a expressão? Justifica a tua resposta

A Maria fez uma conta de multiplicar e fez $500 + 100 + 15$ que deu 615.

$$5 \times 123 = 615$$
$$(5 \times 100) + (5 \times 20) + (5 \times 3) = 615$$

Figura 166 - Resolução de Rafaela.

1.1. Consegues explicar a estratégia que a Maria utilizou para resolver a expressão? Justifica a tua resposta

A Maria fez uma conta de multiplicar e fez $500 + 100 + 15$ que deu 615.

$$(5 \times 100) + (5 \times 20) + (5 \times 3) = 615$$

Figura 167 - Resolução de Duarte.

Nestes dois casos, os alunos conseguem fazer uma transposição do que é apresentado no modelo, para uma expressão à qual já estavam habituados. No momento de discussão coletiva, Rafaela apresenta na sua estratégia, cada passo que efetuam:

Investigadora – Rafaela a tua resposta.

Rafaela – A Maria fez uma conta de multiplicar e fez $500 + 100 + 15$, que deu 615. 5×123 dá 615. $5 \times 100 + 5 \times 20 + 5 \times 3$ que dá 615.

Por último apresento as resoluções de Ricardo e Joana. No primeiro caso, Ricardo apresentam uma descrição do que é feito por Maria:

1.1. Consegues explicar a estratégia que a Maria utilizou para resolver a expressão? Justifica a tua resposta $5 \times 123 = 500 + 100 + 15 = 615$

Sim. Porque ela multiplicou primeiro o 5 com o 2 e depois vinte e o três.

Figura 168 - Resolução de Ricardo.

Embora tenha feito uma descrição do modelo, não quer dizer com isto que o aluno não compreenda a relação que foi estabelecida. Por outro lado, Joana tenta apresentar os passos que foram efetuados nessa distribuição de valores:

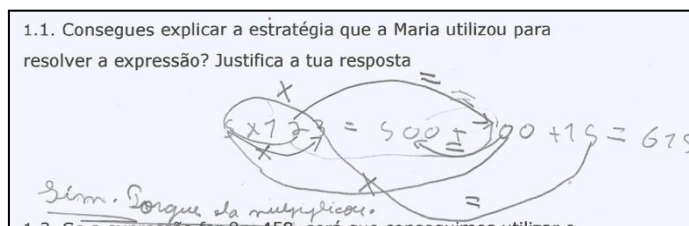


Figura 169 - Resolução de Joana.

Joana tenta apresentar o raciocínio que teve e mostra, com o apoio de setas em cada algarismo o resultado que se obtêm de cada multiplicação, embora haja alguma confusão no registo das setas.

De um modo geral, os alunos compreendem a estratégia e detetam o procedimento que se utiliza neste modelo para o segundo fator. Conseguem compreender a decomposição do número 123 pelas ordens e tentam desenvolver maneiras de justificar a relação que era estabelecida entre o primeiro e o segundo fator.

5.4.2. Análise da alínea 1.2.

Nesta alínea apresenta-se uma nova expressão onde os alunos têm que resolver segundo o mesmo modelo. Com esta alínea pretendo perceber se os alunos conseguem transpor este modelo para outras expressões.

Esta alínea não levantou muitos problemas e apenas três alunos, Ricardo, Joana e Rafael, não completaram o modelo.

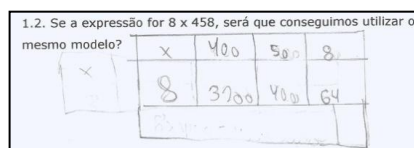


Figura 170 - Resolução de Ricardo.

Nas resoluções de Ricardo e Joana conseguimos observar, que para além de não calcularem corretamente 8×400 , os alunos não adicionam todos os valores encontrados e daí a sua estratégia ter ficado incompleta. Por outro lado, Rafael apenas não concluiu a expressão.

Os restantes alunos conseguem desenvolver a estratégia com outra expressão e compreendem que este modelo também pode ser usado nesta expressão:

1.2. Se a expressão for 8×458 , será que conseguimos utilizar o mesmo modelo?

X	400	50	8
8	3200	400	64

$3200 + 400 + 64 = 3664$

Sim. Conseguimos fazer a tabela da Maria.

Figura 171 - Resolução de Tânia.

1.2. Se a expressão for 8×458 , será que conseguimos utilizar o mesmo modelo?

X	400	50	8
8	3200	400	64

$3200 + 400 + 64 = 3664$

Sim. Conseguimos fazer o mesmo modelo da Maria.

Figura 172 - Resolução de Tiago.

1.2. Se a expressão for 8×458 , será que conseguimos utilizar o mesmo modelo?

X	400	50	8
8	3200	400	64

$= 3664$

Sim conseguimos.

Figura 173 - Resolução de Rafaela.

Com resoluções anteriores, conseguimos perceber que a grande parte dos alunos, sete, apresentam os cálculos completos. Outro aluno, apresentou apenas o resultado tal como fez Rafaela. Contudo, podemos afirmar que os alunos, embora não tenham apresentado a adição de todos os valores, compreendem a estratégia apresentando o resultado final.

De um modo geral, os alunos efetuam um uso correto do modelo e compreendem que podem usar este modelo para outras expressões. Todos os alunos conseguem fazer a decomposição do segundo fator e a sua multiplicação pelo número 8. Do total dos alunos, nove, encontram o valor final da expressão.

5.4.3. Análise da alínea 1.3.

Com esta alínea pretendo que os alunos recorram a diferentes maneiras de realizar a multiplicação de 8×458 . Os alunos compreendem que para facilitar os cálculos podem existir outras maneiras de multiplicar por 8, tal como multiplicar duas vezes por 4.

A grande maioria dos alunos usa uma estratégia de decomposição de fatores, acabando por decompor os dois fatores. No final adiciona os dois resultados obtidos.

Em primeiro lugar, apresento a estratégia de Joana que realiza a decomposição do primeiro fator:

1.3. Consegues arranjar outra estratégia para resolver a expressão sem recorrerres ao algoritmo?

$$2 \times 1832 = 2665$$
~~$$4 \times 458 = 4 \times 458 = 8 \times 458 = 2665$$

$$1600 + 200 + 20 = 1800 + 32 = 1832$$~~

Figura 174 - Resolução de Joana.

Neste caso, Joana apresenta a multiplicação por 4. Só depois multiplica o resultado por 2. Contudo, ao realizar esta última multiplicação não a faz corretamente. Joana acaba por ter a noção que para multiplicar por 8, pode multiplicar por 4 e por 2. Nas resoluções seguintes os alunos recorrem ao modelo retangular, mas apresentam diferentes multiplicações como analisamos nas seguintes resoluções:

1.3. Consegues arranjar outra estratégia para resolver a expressão sem recorrerres ao algoritmo?

$$4 \times 458 + 4 \times 458 =$$

X	400	50	8	
4	1600	200	64	= 1864

Figura 175 - Resolução de Rafaela.

1.3. Consegues arranjar outra estratégia para resolver a expressão sem recorrerres ao algoritmo?

$$7 \times 458 =$$

X	400	50	8	
7	2800	350	64	= 6214

$$1 \times 458 =$$

Y	400	50	8	
1	400	50	8	= 458

Figura 176 - Resolução de Laura.

Rafaela apresenta uma expressão diferente para resolver e recorre ao modelo retangular para efetuar a multiplicação. Contudo, ao contrário de Joana, Rafaela não conclui o seu raciocínio, encontrando os valores das duas multiplicações. Por outro lado, Laura decompõe o número 8 e efetua uma multiplicação com os valores 7 e 1. Ao analisar a sua estratégia conseguimos perceber que o resultado da primeira multiplicação não está correto. Laura confunde o algarismo 3 do número 350 e volta a adicioná-lo quando adiciona os milhares. A aluna também não conclui a estratégia e não adiciona os dois valores encontrados.

No caso de Tânia, embora a sua resolução se apresente idêntica à estratégia usada por Laura, a aluna acaba por alterar o que tinha registado:

1.3. Consegues arranjar outra estratégia para resolver a expressão sem recorrerres ao algoritmo? $7 \times 458 + 1 \times 458 =$

X	458	458	
7	916	916	

Figura 177 - Resolução de Tânia.

Laura regista duas vezes a multiplicação por 7 e só após o momento de discussão é que compreende que a expressão não está correta. Contudo, os cálculos apresentados também não estão corretos. Quando apresenta a sua estratégia, alguns alunos detetam o seu erro:

Investigadora – Tânia diz-me lá qual foi a estratégia que tu utilizaste?
(...)

Tânia – Nós fizemos a estratégia da Maria.

Investigadora - Diz-me lá qual foi?

Tânia – 7×458 e ao lado mais 7×458 . (Fui escrevendo a sua expressão no quadro)

Investigadora – Toda a gente concorda?

(Vários alunos disseram que não concordavam)

Rafaela – Porque 7 mais 7 vai dar 14 e não 8.

Investigadora – Significa que tu estás a multiplicar o 458 por quanto?
Rafaela diz lá.

Rafaela – Está a multiplicar o 458 sete vezes. Mais outras sete vezes.

O conjunto seguinte de alunos (5) não apresenta uma estratégia de resolução, mas diferentes expressões que podem criar alguma facilidade na resolução da expressão principal. Os alunos não apresentam cálculos totais, mas compreendem que podem usar outros números para chegar à multiplicação de 8:

1.3. Consegues arranjar outra estratégia para resolver a expressão sem recorrerres ao algoritmo?

$$+ 2 \times 458 + 1 \times 458 + 2 \times 458$$

976	458	916
-----	-----	-----

3654

Lebningo arranjar outra estratégia para resolver a expressão.

Figura 178 - Resolução de Mauro.

$$5 \times 458 + 1 \times 458 + 1 \times 458 + 1 \times 458.$$

Figura 179 - Resolução de Duarte.

$$4 \times 458 + 4 \times 458$$

x	400	50	8
4	1600	200	32

$$2 \times 458 + 6 \times 458$$

x	400	50	8
2	800	100	16

$$7 \times 458 + 1 \times 458$$

x	400	50	8
7	2800	350	56

Figura 180 - Resolução de Mara.

No caso de Mauro e Duarte, os alunos recorrem a uma expressão com mais do que duas multiplicações, decompondo o número 8 em mais do que dois fatores.

Neste caso os alunos compreendem que podem realizar multiplicações sucessivas com valores mais pequenos. No caso de Mara, a aluna apresenta diferentes expressões que representam a expressão inicial e recorre ao modelo retangular para obter resultados, mas em todas as expressões acaba por não concluir o modelo.

As duas resoluções seguintes referem-se a João e Ricardo que também optam por apresentar diferentes expressões:

1.3. Consegues arranjar outra estratégia para resolver a expressão sem recorrerres ao algoritmo?

$$3 \times 458 + 5 \times 458 \text{ porque } 3 \times + 5 \times = 8 \times.$$

$$4 \times 458 + 4 \times 458 \text{ porque } 4 \times 458 + 4 \times 458 = 8 \times 458.$$

$$2 \times 458 + 2 \times 458 + 4 \times 458 \text{ porque } 2 \times 458 + 2 \times 458 + 4 \times 458 = 8 \times 458.$$

$$2 \times 458 + 2 \times 458 + 4 \times 458 = 8 \times 458.$$

Figura 181 - Resolução de João.

1.3. Consegues arranjar outra estratégia para resolver a expressão sem recorrerres ao algoritmo?

$$3 \times 458 + 5 \times 458 = 8 \times 458$$

$$1 \times 458 + 7 \times 458 = 8 \times 458$$

$$2 \times 458 + 6 \times 458 = 8 \times 458$$

$$4 \times 458 + 4 \times 458 = 8 \times 458$$

Figura 182 - Resolução de Ricardo.

Nestes dois casos, os alunos apresentam uma igualdade entre cada uma das expressões compreendendo que ambas as expressões dão o mesmo resultado.

Por último, Gonçalo acaba por não apresentar qualquer estratégia ou expressão. O aluno terá tentado usar o modelo retangular, mas acabou por apagar o que tinha feito.

Nesta alínea os alunos conseguem, na sua maioria, apresentar uma expressão que demonstra uma igualdade com a expressão apresentada. A estratégia mais utilizada na sua resolução é o modelo retangular, muito pelo facto de ter sido a expressão que foi desenvolvida ao longo de toda a sessão. No momento de realização da tarefa, os alunos acabaram por ficar interessados em encontrar mais expressões que demonstrem esta igualdade e, por isso, existe um grande número de expressões sem que estas estivessem resolvidas. Deste modo, os alunos compreendem que existe mais do que uma maneira para resolver a expressão apresentada.

5.4.4. Discussão de resultados da sessão 4

Os dados recolhidos permitem afirmar que o objetivo principal desta sessão é atingido. Os alunos percebem a relação estabelecida com o modelo retangular, decompondo um dos fatores em valores mais pequenos. Neste momento verificamos que os alunos compreendem a relação de igualdade encontrando outras expressões que representam o mesmo valor. É também importante referir que os alunos conseguem transpor o modelo retangular para outras expressões, percebendo que este modelo pode ser utilizado noutros casos.

As justificações que os alunos apresentam baseiam-se em linguagem natural e, em alguns momentos são desenvolvidas em linguagem oral, através da discussão em grande grupo, ou seja, em alguns casos, os alunos acabam por justificar as suas respostas no momento em que todos debatem o tema. Nos registos escritos, estas justificações passam, fundamentalmente, por apresentação de exemplos para explicar o seu raciocínio.

As estratégias utilizadas relacionam-se fundamentalmente com o modelo retangular, muito pelo facto desta sessão se basear neste modelo. Contudo, alguns alunos tentaram distanciar-se deste modelo, arranjando outras estratégias de resolução, nomeadamente a decomposição do número, como acontece na resolução de Joana.

Por último, as dificuldades encontradas relacionam-se com a obtenção dos resultados no modelo retangular. Os alunos representam corretamente o modelo, embora o resultado final não esteja correto. Este facto deve-se a não efetuarem o processo de transporte ou por confundirem as ordens de cada algarismo (resolução de Laura).

Para finalizar, penso que a sessão não é tão bem sucedida como se esperava pelo facto dos alunos, na última alínea, não terem recorrido a outras estratégias como estava previsto. Contudo, conseguem desenvolver expressões que representam uma igualdade e compreendem que pode existir um grande número de estratégias para multiplicar uma determinada expressão.


5.5. Sessão 5


A sessão 5 é composta por uma apresentação de diferentes resoluções que quatro alunos elaboraram para resolver expressões que envolvem multiplicação e divisão. Nesta sessão pretende-se que os alunos compreendam as relações que se estabelecem em cada uma das expressões para as tornar mais acessíveis. A sessão é realizada após a interrupção de Carnaval, o que faz com que exista uma quebra


no trabalho que se tem vindo a desenvolver, facto que teve algumas consequências no aproveitamento dos alunos nesta sessão.

A tarefa é composta por duas questões que estão diretamente ligadas com a apresentação das estratégias, tal como podemos observar na seguinte imagem:

1. Na turma do 3.º ano, alguns alunos decidiram resolver as expressões, sem recorrerem a cálculos. Observa como fizeram:

Rita
 Quero calcular 150×6 e sei que 150×2 é igual a 300 e 300×3 é igual a 900.
Então $150 \times 6 = 150 \times 2 \times 3 = 900$

Mariana
 Quero calcular 120×20 e sei que 120×10 é igual a 1200 e 1200×2 é igual a 2400.
Então $120 \times 20 = 120 \times 10 \times 2 = 2400$

Pedro
 Quero calcular $80 : 8$ e sei que $80 : 2$ é igual a 40 e $40 : 4$ é igual a 10.
Então $80 : 8 = 80 : 2 : 4 = 10$


André
 Quero calcular $100 : 4$, mas não consigo.
Ah! Mas sei bem que $100 : 2$ é 50 e $50 : 2 = 25$.
Então $100 : 2 : 2 = 25$
 $100 : 4 = 100 : 2 : 2 = 25$

Figura 183 - Questão 1 da sessão 5.

Na primeira questão é pedido aos alunos que expliquem a relação estabelecida, ou seja, os alunos têm que compreender que, para facilitar a resolução, há uma decomposição de um dos fatores. Nesta questão também pretendo que os alunos desenvolvam generalizações em linguagem natural. Por outro lado, na segunda questão é pedido aos alunos que arranjem outros exemplos para comprovar que as estratégias podem ser utilizadas com outras expressões.

1.1. Estes alunos utilizaram as mesmas estratégias para resolver as expressões. Explica essa estratégia.

1.2. Consegues arranjar mais exemplos que comprovem esta estratégia? Justifica a tua resposta.

Figura 184 - Alíneas da questão 1

Tal como referi, esta sessão não atinge todos os objetivos programados. Em primeiro lugar por ter existido um interregno, e por outro, por se realizar no segundo momento da manhã, logo após o intervalo, registando-se um comportamento mais irrequieto e menos concentrado. Deste modo, acabamos por não desenvolver a segunda questão, composta por três expressões, em que o objetivo é descobrir quais as expressões verdadeiras e falsas, justificando a sua escolha. Estas expressões são trabalhadas segundo a estratégia anteriormente enunciada, tal como podemos ver na figura seguinte:

2. Os colegas da turma continuaram a usar esta estratégia para resolver as expressões numéricas. Descobre as que são verdadeiras e as que são falsas. Justifica a tua resposta.

a) $200 \times 15 = 200 \times 10 + 5 = 2005$

b) $480 : 20 = 480 : 10 : 2 = 24$

c) $240 : 8 = 240 : 4 : 4 = 15$

Figura 185 - Questão 2 da sessão 5.

Nesta questão pretendo que os alunos tenham contacto com outras expressões, que são resolvidas segundo a estratégia de decomposição e que consigam justificar as relações que se desenvolvem, compreendendo a decomposição que é feita.

Seguidamente, passo a analisar a primeira pergunta e cada uma das alíneas, tendo como base as questões de estudo. A questão 2 não é analisada porque não foi trabalhada em virtude da falta de tempo.

5.5.1. Análise da alínea 1.1.

De um modo geral, os alunos conseguem descrever e compreender as relações que se estabelecem em cada uma das resoluções. A grande maioria dos alunos (9) justifica apenas uma das estratégias utilizadas. Quatro alunos recorrem à estratégia de Rita e explicam o que aconteceu na sua resolução:

1.1. Estes alunos utilizaram as mesmas estratégias para resolver as expressões. Explica essa estratégia.

A Rita fez 15×6 e ela viu que é difícil, depois $150 \div 2$ e deu 300 , depois deu 900 por isso 150×6 é 900 .

Figura 186 - Resolução de João

Neste caso, João consegue descrever o que Rita fez, tal como os colegas o fizeram, mas apresenta a expressão 15×6 . Penso que é um lapso, visto que ao longo da justificação, João não volta a fazer referência ao número 15, mas sim ao 150.

Ao discutir esta estratégia em grande grupo, os alunos também conseguem explicar a estratégia de Rita:

Investigadora – Diz lá Mauro o que é que vocês disseram.

Mauro – Eu disse que a Rita não sabia multiplicar por 6 então multiplicou por 2 e por 3.

Investigadora – Toda a gente concorda com o que ele disse? Ou seja, ela não sabia multiplicar por...

David – 6. Então multiplicou por... (Rafaela começou a falar ao mesmo tempo que David).

Rafaela – Multiplicou por 2 e depois multiplicou por 3.

(...)

Laura – (...) A Rita fez 150×6 e ela viu que era difícil. Depois fez 150×2 e deu 300. Depois ela fez 300×3 e deu 900, então 150×6 é igual a 900.

Em relação a esta estratégia, Mara consegue apresentar uma expressão que não engloba os valores intermédios, neste caso, o 300. Contudo, David e Rafaela ainda estão muito ligados a cada um dos passos, o que nos pode levar a afirmar que a compreensão desta relação ainda não está totalmente compreendida:

Investigadora – O que é que a Rita fez? Não sabia, o que é que ela foi fazer?

Mara – $150 \times 2 \times 3$.

Investigadora – Foi dar?

Mara – 900.

Rafaela – Não foi vezes 2, vezes 3.

David – Pois não. Isso aí é então (o então que David fala relaciona-se com a conclusão de cada uma das frases do enunciado).

Mara e mais dois colegas, que trabalham em grupo, apresentam a seguinte resolução:

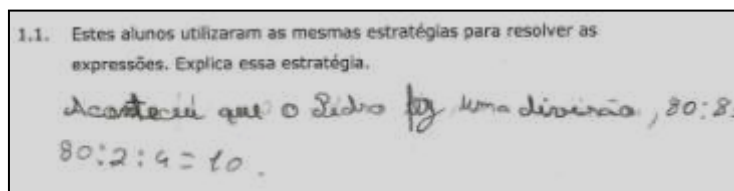


Figura 187 - Resolução de Mara.

Neste caso, os alunos apenas justificam a expressão tal como aparece na estratégia de Pedro, não conseguindo justificar o porquê da tal situação acontecer. No momento de discussão coletiva, os alunos explicam o que acontece com esta estratégia, percebendo que dividir por 8 é o mesmo que dividir por 2 e por 4:

Investigadora – Mauro queres explicar melhor o que é que aconteceu ao Pedro?

Mauro – Não sabia dividir por 8 então dividiu por 2 e depois dividiu por 4.

(...)

Investigadora – Então o que é que eles foram fazer aqui? (Na estratégia de Pedro).

Tiago – Tentou dividir por 8, mas não conseguia, por isso dividiu por 2 e por 4.

(...)

Investigadora – Então dividir por 8 é a mesma coisa que quê?

Mara – Metade.

Investigadora – Só pela metade?

Mara – Também pelo 4.

As duas resoluções seguintes são desenvolvidas por dois alunos que trabalham a pares e que explicam a estratégia de André. Neste caso, os alunos compreendem que dividir por 4 é o mesmo que dividir duas vezes pela metade:

1.1. Estes alunos utilizaram as mesmas estratégias para resolver as expressões. Explica essa estratégia.

O André dividiu o quatro em metade que deu 50 e a outra metade foi dividida com o 50 cinquenta que deu 25.

$$100:4$$
$$100:2 \neq 50 \text{ e } 50:2 = 25$$
$$\text{Então } 100:2:2 = 25$$
$$100:4 = 100:2:2 = 25$$

Figura 188 - Resolução de Gonçalo.

Outros alunos, Tânia e Rafaela, para além de apresentarem a estratégia de André que envolve a divisão, apresentam a estratégia de Mariana que se relaciona com a multiplicação:

Mariana fez 120×20 e $120 \times 10 = 1200$ e $1200 \times 2 = 2400$ então $120 \times 20 = 120 \times 10 \times 2 = 2400$.

André fez $100:4$ e $100:2$ e $50:2 = 25$.

$$100:2:2 = 25 \text{ e } 100:4 \text{ e } 100:2:2 = 25$$

Figura 189 - Resolução de Tânia.

Neste caso, os alunos limitam - se a criar uma descrição de cada uma das estratégias, sem conseguir explicar realmente o que se passava em cada uma delas. Contudo, no momento de discussão coletiva, os alunos conseguem explicar melhor a estratégia de Mariana:

Investigadora – A Mariana conseguia multiplicar por 20?

Vários alunos – Não.

Investigadora – Então o que é que foi fazer?

Laura - Multiplicar por 10 e deu 1200... (A Rafaela continuou o raciocínio de Laura).

Rafaela – E depois foi multiplicar 1200 vezes 2 que deu 2400.

Ao longo da discussão em grande grupo, consegue-se detetar algumas dificuldades que os alunos têm com esta estratégia, ao não completarem todo o raciocínio:

Investigadora – (...) Então e na estratégia da Mariana, o que é que acontece?
 Tiago – Não sabe multiplicar 120...
 Investigadora – Por quanto?
 Joana – 20.
 Investigadora – E foi fazer o quê?
 Tiago – Foi multiplicou por 10.
 Joana – Foi multiplicar 120 x 10...
 Investigadora – Alguém ajuda a vossa colega. Ela não sabia multiplicar por 20. Foi fazer o quê? Laura?
 Laura – Foi fazer 120 x 10 e deu 1200 depois ela fez 1200 x 10...
 Vários alunos – Vezes 10?
 Laura – Vezes 2. E deu 2400.

Nesta situação, Tiago e Joana não completam a estratégia e apenas fazem referência à primeira parte da expressão, não conseguindo explicar que ainda têm que multiplicar por 2. Quando peço a outros colegas que completem o raciocínio de Joana, Laura descreve o que Mariana faz para conseguir resolver a expressão. Por outro lado, detetamos que Rafael compreende esta estratégia, quando receoso com o que está a dizer, desenvolve uma generalização:

Investigadora – É só com o número que isto pode acontecer?
 Rafael – Não.
 Investigadora – Então?
 Rafael – Vários. Os números...
 Investigadora – O que é que queres dizer. Diz-me lá a frase.
 Rafael – Os números multiplicados por 20...
 Investigadora – É o mesmo que quê?
 Rafael – É o mesmo que multiplicar por...
 Investigadora – Diz sem medo.
 Rafael – Os números multiplicados por 20 são a mesma coisa que multiplicar por 2 e por 10.

Por último, apresento a justificação de David e Rafaela que trabalham em conjunto. Os alunos não usam nenhum exemplo em concreto e conseguem explicar o que efetivamente se passou:

Diretamente - que se fez tal qual lá está,
 indiretamente - utiliza-se outras estratégias que dão resultados
 iguais ao resultado da conta.
 P.e. em vez de fazer diretamente a conta eles fizeram-na
 indiretamente.

Figura 190 - Resolução de Rafaela.

Quando lhes pergunto sobre o que é fazer indiretamente, David consegue explicar a sua justificação:

David – Fez indiretamente (A referir-se à estratégia de Pedro).
 Investigadora – Porquê indiretamente?
 David – Porque se ele fizer diretamente está a fazer logo.

Investigadora – Sim está a fazer logo a dividir por...

David – 8.

Investigadora – Então como é que ele fez indiretamente?

David – Não fez logo a dividir por 8.

Investigadora – Mas então fez a dividir por quanto?

David – Primeiro ele começou a dividir por 2 e chegou a um resultado. E depois dividiu por 4 e vai dar 10.

Ao longo da sessão, e principalmente no momento de discussão, os alunos criam generalizações em linguagem natural, umas de forma mais espontânea que outras. Ao falarmos da primeira estratégia, David afirma que existem outras maneiras de resolver uma expressão:

David – Porque se nós não soubermos, por exemplo, x número multiplicado por 6 podemos utilizar uma estratégia com outras contas diferentes que pode dar o resultado.

Investigadora – Ele está a dizer que se não conseguirmos arranjar um x número?

David – Sim um número qualquer...

Nesta situação, David utiliza o valor x de forma muito natural tentando mostrar que se pode utilizar este procedimento para qualquer número. Ao iniciar-se esta discussão tento conduzir os alunos de modo a criar uma frase que transmita uma generalização da estratégia usada por Rita:

Investigadora – Podemos ter outro número, certo? Então vamos arranjar uma frase que diga isto. O David tinha começado com “qualquer número multiplicado por” quanto?

David – Por 6.

Investigadora – É o mesmo que quê?

David – Que multiplicar vezes 2 e esse resultado vezes 3.

Outro momento surge com Rafaela quando explica a estratégia de Mariana:

Investigadora – Multiplicar por 20, o vosso colega já disse. A Rafaela vai-me dizer, multiplicar por 20 é a mesma coisa que multiplicarmos por quanto?

Rafaela – Multiplicar por 20 é o mesmo que multiplicar por 10... ou multiplicar por 2

Investigadora – Ou?

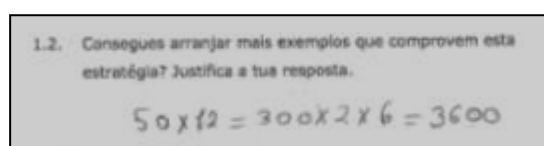
David – E por 2.

Contudo, a afirmação de Rafaela acaba por ter um erro quando a aluna afirma que pode ser multiplicado por 10 ou por 2. Nesta caso, podemos afirmar que Rafaela não tem bem presente a relação que existe entre os números, ou seja, a aluna não compreende que para substituir a multiplicação que faz por 20, tem que ser por 10 e por 2.

De um modo geral os alunos chegam a diferentes justificações de cada uma das relações, embora estas estejam mais relacionadas com um caráter descritivo do que a compreensão global da relação que se estabelece.

5.5.2. Análise da alínea 1.2

Nesta alínea são desenvolvidas pelos alunos expressões que demonstram a compreensão que os alunos têm das expressões apresentadas. Do total dos alunos, sete não apresentam qualquer expressão através das estratégias utilizadas. Por outro lado, Mara e Ricardo conseguiram apresentar a seguinte expressão:

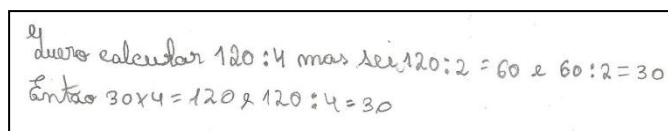


1.2. Consegues arranjar mais exemplos que comprovem esta estratégia? Justifica a tua resposta.

$$50 \times 2 = 300 \times 2 \times 6 = 3600$$

Figura 191 - Resolução de Mara.

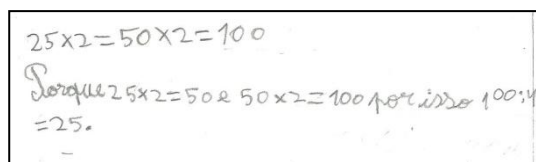
Neste caso, conseguimos perceber que os alunos compreendem a relação que tem de existir entre o fator que é decomposto em fatores mais pequenos. Outra estratégia aparece através de David e Rafaela que apresentam uma expressão que envolve a divisão:



quero calcular $120 : 4$ mas sei $120 : 2 = 60$ e $60 : 2 = 30$
Então $30 \times 4 = 120$ e $120 : 4 = 30$

Figura 192 - Resolução de Rafaela.

Nesta situação, os alunos para além de apresentarem a simplificação da divisão por 4, justificam a sua escolha com a operação inversa, mostrando que 30×4 dá o valor inicial. Neste caso os alunos tentam comprovar que a estratégia está correta, não com recurso ao algoritmo, mas sim com outra estratégia relacional. A última estratégia é apresentada por dois alunos, Gonçalo e Tiago, e acaba por conter alguns erros na sua resolução, tal como podemos verificar na figura seguinte:



$25 \times 2 = 50 \times 2 = 100$
Porque $25 \times 2 = 50$ e $50 \times 2 = 100$ por isso $100 : 4 = 25$.

Figura 193 - Resolução de Gonçalo.

Neste caso, os alunos ao quererem resolver a expressão principal, $100 : 4$, partiram do resultado para multiplicar duas vezes por dois. Deste modo,

percebemos que os alunos conseguem decompor o número 4 em dois fatores, mas acabaram por fazer a operação inversa da multiplicação, ou seja, não fizeram a divisão do 100 por 4, mas a multiplicação de 25 por 4. Também nesta resolução podemos afirmar que os alunos optam por outras estratégias relacionais, em vez do algoritmo.

No momento de discussão em grande grupo, alguns alunos que não apresentam qualquer tipo de expressão, acabam por desenvolver, mas com algumas dificuldades:

Investigadora – Arranja-me um número [Mara]. Vamos ver. Experimenta lá com outro número.

Mara – 200.

Investigadora – $200 : 8$ sabemos quanto é que vai dar?

Vários alunos – Não.

Investigadora – Então vamos fazer o quê, primeiro?

Rafael – $200 : 2$

Investigadora – Quanto é que isto dá?

Vários alunos – 100.

Investigadora – Diz Rafael o que é que vamos fazer a seguir?

Rafael – $100 : \dots$ ah não 200.

Investigadora – Quanto é que deu?

Vários alunos – 100.

Investigadora – O que é que nós vamos fazer a seguir?

Tiago – $100 : 4$.

Investigadora – Quanto é que isso vai dar?

David – 20.

Rafael – 25... 20 pois.

David – Não é 25!

Investigadora – 20?

David – Sim.

Investigadora – $100 : 4$ dá 20?

David – Sim. 4×20 dá 100.

Investigadora – Ai é?

David – ... (a pensar) Não 25.

Investigadora – Ah, boa Rafael.

Já no final da sessão, os alunos precisam de alguma ajuda para desenvolver o seu discurso. Ao longo da sessão, não estavam muito participativos o que se veio a notar ainda mais nesta última alínea.

5.5.3. Discussão da Sessão 5

Tal como já foi referido anteriormente, nesta sessão houve mais dificuldade em fazer com que os alunos partilhassem as suas ideias e raciocínios. Para além de todos os fatores externos já referidos, os alunos mostram-se muito agitados e

pouco participativos e senti a necessidade de fazer mais perguntas para que o discurso fluísse.

De um modo geral, os alunos mostram compreender a relação de igualdade e percebem que um dos fatores tem de ser decomposto em fatores mais pequenos para que exista maior facilidade no cálculo mental. Em alguns momentos, não conseguem explicar, da melhor maneira, essa relação e a sua justificação apresenta-se incompleta.

As justificações que apresentam, na sua maioria em linguagem natural, acabam por ser uma descrição das estratégias utilizadas na ficha de trabalho. Ou seja, os alunos tentam explicar, em linguagem natural o que apresentam em linguagem simbólica por cada um dos alunos. Quando é pedido aos alunos que arranjem expressões e que as resolvam, apenas metade o consegue fazer. Dos que resolvem as expressões que criaram, todos utilizam a decomposição de um dos fatores para facilitar os cálculos. Nota-se também que a operação inversa é tida em conta por alguns alunos com o intuito de comprovar o resultado, não usando estratégias computacionais.

Apesar da dificuldade que existe da minha parte em mobilizar os alunos para a discussão, acabam por surgir muitas frases que denotam pequenas generalizações da parte destes. Mais uma vez, como os alunos estão pouco participativos, algumas das frases não surgem de um modo tão natural, mas são elaboradas em conjunto no momento de discussão coletiva. Contudo, faço especial referência a David que consegue, de forma muito natural, criar algumas generalizações, sem que tenham existido perguntas da minha parte.

Por último, as principais dificuldades dos alunos prendem-se, essencialmente, em justificar e compreender as relações que se estabelecem nestas estratégias e, principalmente, a transposição deste modelo para outras expressões por eles criadas.

5.6. Sessão 6

Esta sessão inicia-se com mais uma aluna na turma que foi transferida de outra turma do Agrupamento, ficando a turma com um grupo de 14 alunos. Deste modo, o trabalho desenvolve-se a pares, sem que haja grupos com três elementos. A aula realiza-se no primeiro momento da manhã. A tarefa desta sessão é constituída por duas grandes questões que passo a analisar de seguida.

5.6.1. Análise da questão 1

A primeira questão aborda, tanto a relação de igualdade, mas também a relação de ordem. É composta por duas alíneas, em que a primeira apresenta uma situação onde os alunos têm que organizar um conjunto de 100 cadeiras para uma festa de final de período, tal como podemos observar na figura:

1. Na escola da Luana, todas as turmas vão fazer uma atividade para a festa de final do 2.º Período. Para receber os pais no grande dia, vão ser colocadas 100 cadeiras no polidesportivo.

1.1. Quantas filas, como o mesmo número de cadeiras, se podem fazer com as 100 cadeiras. Explica o teu raciocínio.

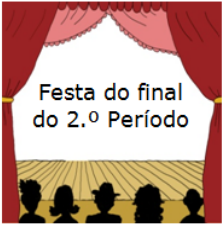


Figura 194 - Questão 1 da sessão 6.

Com esta alínea pretendo que os alunos desenvolvam diferentes respostas para o problema e que compreendam que todas elas estão corretas, visto existirem diferentes opções de resposta. Também aqui pretendo que os alunos iniciem um percurso que os leve a uma generalização, percebendo que se multiplicarem o número de cadeiras pelo número de filas têm sempre o número 100. A segunda alínea apresenta um conjunto de três afirmações relacionadas com a relação de ordem:

1.2. No dia da festa, os alunos optaram por fazer 4 filas com 25 cadeiras. As duas primeiras filas ficaram com os lugares todos ocupados, mas a fila 3 foi ocupada por dois grupos de 11 pessoas cada um e a fila 4 tinha quatro famílias com 6 pessoas cada uma.

Das seguintes afirmações escolhe a verdadeira e justifica a tua resposta.

a) A fila 3 tem um maior número de pessoas que a fila 4.

b) A fila 3 tem um menor número de pessoas que a fila 4.

c) A fila 3 tem o mesmo número de pessoas que a fila 4.

Figura 195 - Alínea 1.2. da sessão 6.

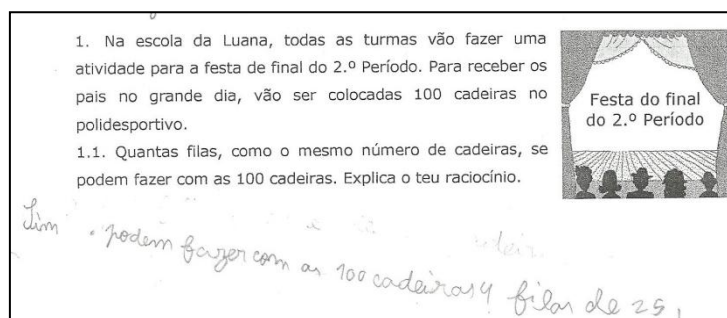
Nesta alínea, os alunos são confrontados com afirmações onde têm que comprovar a sua veracidade, tendo em conta a informação que é dada no enunciado. Deste modo, pretendo que os alunos consigam interpretar as diferentes afirmações, transpondo essa informação para uma expressão, tal como $\text{Fila 3} < \text{Fila 4}$. Seguidamente passo à análise de cada alínea de forma mais pormenorizada.

5.6.1.2. Análise da alínea 1.1

Nesta primeira alínea percebemos que todos os alunos conseguem arranjar uma estratégia para resolver a questão. Já no momento de introdução da tarefa, alguns alunos arranjam, de imediato, uma estratégia para resolver o problema:

Investigadora – Então o que é que vocês vão ter que fazer? Diz Mara.
Mara – Eu pus 50 de um lado e 50 de outro.

Também existem alunos que apresentam uma resposta em linguagem natural, tal como podemos observar na resolução de Mauro:



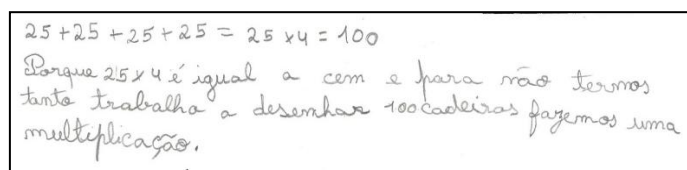
The image shows a handwritten student solution for a math problem. The problem text is: "1. Na escola da Luana, todas as turmas vão fazer uma atividade para a festa de final do 2.º Período. Para receber os pais no grande dia, vão ser colocadas 100 cadeiras no polidesportivo. 1.1. Quantas filas, como o mesmo número de cadeiras, se podem fazer com as 100 cadeiras. Explica o teu raciocínio." To the right of the text is a small illustration of a stage with curtains and the text "Festa do final do 2.º Período". The student's handwritten response reads: "Sim. Podem fazer com as 100 cadeiras 4 filas de 25."

Figura 196 - Resolução de Mauro.

Também quando explica a sua estratégia, Mauro, volta a afirmar o que tem na ficha de trabalho e Gonçalo consegue, desde logo, criar uma expressão:

Investigadora – Mauro diz lá outra maneira.
Mauro – 4 filas com 25.
(...)
Gonçalo – É 4×25 .

Mauro não é o único aluno a fazer referência às 4 filas. As seguintes resoluções desenvolvidas por quatro alunos não incluem apenas a linguagem natural:



The image shows a handwritten student solution. At the top, it says: $25 + 25 + 25 + 25 = 25 \times 4 = 100$. Below this, the student explains: "Porque 25×4 é igual a cem e para não termos tanto trabalho a desenhar 100 cadeiras fazemos uma multiplicação."

Figura 197 - Resolução de Rafaela.

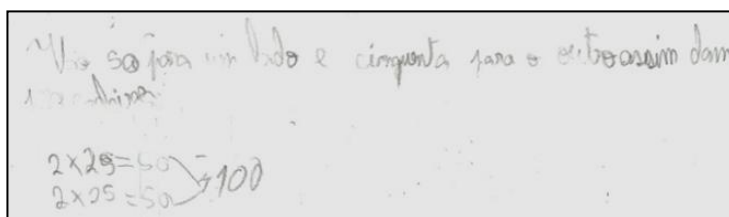


Figura 198 - Resolução de Ricardo.

Na resolução de Rafaela, a aluna apresenta adições sucessivas de 25 cadeiras, que depois transforma numa multiplicação. Neste caso, Rafaela e Duarte que trabalham em conjunto, justificam a sua estratégia afirmando que não podem desenhar a totalidade de cadeiras. Por outro lado, Ricardo e Joana arranjam uma multiplicação com o número 25. Os alunos multiplicam duas vezes as 25 cadeiras até chegar ao número 100. Quando Joana apresenta a sua estratégia faz referência ao 25×4 :

Joana – Eu fiz 25×4 .

Rafaela – Eu também fiz.

Investigadora – Tenham calma.

Joana – Eu fiz 25 mais 25 igual a 50 e depois por baixo outra vez 25 mais 25 igual a 50. A seguir juntei 50 mais 50 que deu 100.

Contudo, quando Ricardo apresenta a sua estratégia, não apresenta de forma correta, mas deteta o seu erro:

Ricardo – 50 para um lado e 50 para o outro. Assim dão 100 cadeiras.

Investigadora – Então fizeste quantas filas?

Ricardo – 10.

Investigadora – 10 filas?

Ricardo – (o aluno continuou a olhar para a ficha mas não respondeu)

Investigadora – Se tu puseste 50 de um lado e 50 do outro ficaste com quantas filas?

Ricardo – 2.

Investigadora – Cada uma tinha quantas cadeiras?

Ricardo – 10.

Investigadora – Então calma. Tu tinhas filas de 10 cadeiras, foi ou não foi? Quantas filas é que tu fizeste?

Ricardo – 2.

Investigadora – Então vamos ver. O Ricardo disse que pôs 10 cadeiras e quantas filas, Ricardo?

Ricardo - ... (o aluno começou a olhar para o quadro e para a ficha). Está mal...

Investigadora – Então porquê?

Ricardo – Dava 20.

Outro aluno organiza as cadeiras, apresentando-as através de diferentes estratégias:

$5 \times 20 = 100$ e 5 filas de 20 = 100
 $1 \times 20 = 20$
 $2 \times 20 = 40$
 $3 \times 20 = 60$
 $4 \times 20 = 80$
 $5 \times 20 = 100$

Figura 199 - Resolução de João.

João apresenta a expressão $5 \times 20 = 100$ e explica que são 5 filas de 20 cadeiras. Para além disso, apresenta adições sucessivas de 1 fila vezes 20 cadeiras. Com estas estratégias, o aluno tenta justificar de diferentes maneiras os seus passos, para que consigam perceber a sua estratégia.

Um conjunto de quatro alunos encontra mais do que uma expressão para organizar as cadeiras. Com estas diferentes expressões percebe-se que os alunos reconhecem que pode existir mais do que uma solução:

$50 + 50 = 100$ $10 \times 5 = 50$
 $10 \times 10 = 100$
 R: Podem fazer 50 mais 50 que dá 100.

Figura 200 - Resolução de Beatriz.

$20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 100$
 $5 \times 20 = 100$
 10×10
 4×25
 $10 \times 5 = 50$
 $10 \times 5 = 50 + 50 = 100$
 R: Sempre que multiplicamos o nº de cadeiras pelo nº de filas dá 100.

Figura 201 - Resolução de Tiago.

Ao observar de forma mais pormenorizada a resolução de Tiago, compreende-se que o aluno consegue criar uma frase que demonstra as expressões que escreve. O último grupo de alunos (4) cria outras estratégias que ainda não são apresentadas.

10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
 $10 \times 10 = 100$
 Podem-se fazer 10 filas, com 10 cadeiras.

Figura 202 - Resolução de Gonçalo.

Handwritten work on a whiteboard showing the decomposition of 100 into four groups of 20+5, which are then summed to 50+50 and finally 100. A note at the bottom right says "Pode fazer 20+0x4 = 20x4 = 80x2 = 160".

Figura 203 - Resolução de David.

Gonçalo recorre à representação pictórica para representar as filas. Deste modo, percebe que cada fila tem 10 cadeiras e os dois alunos fazem contagens de 10 em 10. Daniel apresenta a estratégia de adições sucessivas até chegar ao número 100. Após a apresentação das resoluções há a tentativa de criar uma generalização em conjunto:

Investigadora – Então tivemos a multiplicar o quê?

David – Estivemos a multiplicar um número vezes um número que era igual a 100.

Investigadora – Calma, mas estivemos a multiplicar que números?

Joana- - O número de cadeiras...

Investigadora – Boa Joana. (Pedi a Joana para ir ao quadro escrever o que estava a dizer.) (...) Nós multiplicamos as cadeiras por quê? Diz Joana?

Joana – Vezes as linhas.

(..)

David – Filas.

Investigadora – Vezes as filas, exatamente. Então vá, número de cadeiras vezes o quê? (Joana ia escrevendo no quadro). Foi sempre igual a quanto?

Tânia – A 100.

Aos poucos, os alunos escrevem a frase "Multiplicar o número de cadeiras vezes as filas é sempre igual a 100". Ao longo deste problema compreende-se que os alunos desenvolvem diferentes estratégias para resolver a questão e, acima de tudo, têm noção da diversidade de repostas existentes:

Investigadora – (...) Há só uma maneira de organizar as cadeiras?

David – Não

Rafaela – Há várias.

Gonçalo – É só irmos às tabuadas e vermos os números que dão 100.

Para além disso, os alunos desenvolvem a compreensão que esta situação pode acontecer para uma variedade de números e, assim, criam uma frase que representa esta situação.

5.6.1.2. Análise da alínea 1.2

Ao iniciar esta alínea (Figura 195), os alunos começam por perguntar se precisam de fazer o algoritmo, facto que pode comprovar a estreita ligação que os alunos têm com o algoritmo. A grande maioria encontra a afirmação correta e conseguem justificar a sua escolha. Contudo, dois alunos, Rafaela e Duarte, optam pela afirmação C que refere que as duas filas possuem o mesmo número de pessoas. Quando lhes pergunto a justificação para terem optado pela frase C, os alunos fazem referência ao número de cadeiras e não ao número de pessoas.

Dos restantes alunos, apenas dois identificam a frase sem qualquer justificação e outros dois alunos apresentam uma justificação que não está totalmente completa, visto que não identifica o número total de pessoas de cada fila:

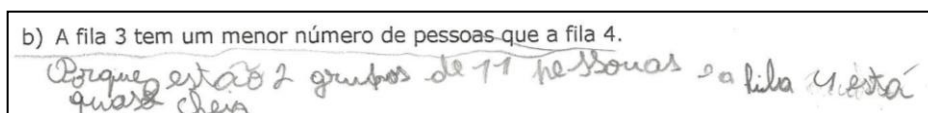


Figura 204 - Resolução de Rafael.

Os restantes alunos (8) apresentam uma justificação que contempla os resultados de ambas as filas:

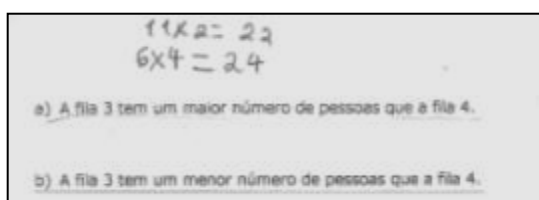


Figura 205 - Resolução de Beatriz.

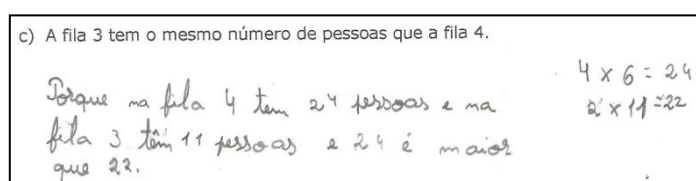


Figura 206 - Resolução de Tânia.

No conjunto das oito resoluções, as justificações englobam a apresentação de multiplicações, como podemos observar na resolução de Beatriz, e também resoluções mais completas, como é o caso de Tânia, que tenta explicar através de linguagem natural. Tal como acontece na alínea anterior, os alunos são levados a encontrar uma expressão, neste caso em linguagem matemática, que demonstre o que fizeram:

Investigadora – Olhem que expressão é que nós podíamos arranjar para aqui? (...)

Mara – Eu pus na fila 3, 2×11 . E na fila 4, 4×6 .

Investigadora – Mas isto só assim 2×11 e 4×6 não nos diz que a fila 3 tem um menor número de pessoas.

David – Temos que pôr um sinal.

Investigadora – Que sinal é que vais pôr, anda cá.

(O David foi ao quadro colocar um sinal da expressão)

Com o número de respostas corretas que a turma apresenta percebe-se que os alunos compreendem o enunciado do problema e encontram a frase que mais se adequa.

5.6.2. Análise da questão 2

N segunda questão são apresentadas quatro expressões aos alunos para que comprovem a sua veracidade. Nesta questão é importante que os alunos tentem explicar a relação que se estabelece entre cada membro da expressão. O objetivo não é calcular para obter um resultado, mas verificar se os alunos compreendem as mudanças que acontecem.

2. Algumas das expressões apresentadas não são verdadeiras. Descobre quais são, sem recorrereres a cálculos. Justifica a tua resposta.

a) $257 + 105 + 33 = 257 + 33 + 105$

b) $460 = 40 \times 10 + 60 \times 10$

c) $2500 - 601 = 2500 - 500 - 100 - 1$

d) $1380 = 1400 + 20 - 20$

Figura 207 - Questão 2 da sessão 6.

Todos os alunos conseguem resolver cada uma das expressões, embora, no momento de discussão coletiva, apenas analisamos a três primeiras expressões, visto não ter existido tempo para fazer a discussão da última expressão.

O quadro seguinte apresenta o desempenho dos alunos em cada uma das expressões, contudo mostra somente que respostas os alunos conseguem identificar como sendo verdadeiras ou falsas:

Quadro 6 - Desempenho dos alunos em expressões que envolvem um raciocínio relacional

Expressões numéricas	Respostas corretas	Respostas incorretas	Não responde
Expressão a	100%	0%	0%
Expressão b	86%	14%	0%
Expressão c	93%	7%	0%
Expressão d	86%	0%	14%

Com este quadro percebe-se que os alunos trabalham com facilidade as expressões de verdadeiro ou falso. Todas elas apresentam uma percentagem elevada de sucesso. É importante referir que as justificações de cada expressão são analisadas de seguida, de forma a complementar o que o quadro transmite.

5.6.2.1. Análise da alínea a) ($257 + 105 + 33 = 257 + 33 + 105$)

Nesta alínea todos afirmam que a expressão é verdadeira e compreendem que apenas existe uma troca de parcelas. Os alunos têm presente a propriedade comutativa da adição, embora expliquem por outras palavras:

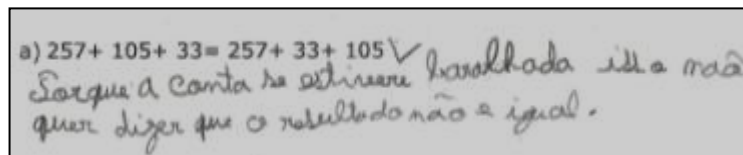


Figura 208 - Resolução de Beatriz.

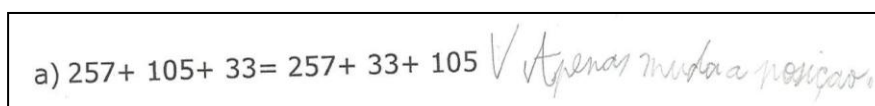


Figura 209 - Resolução de David.

Ao falarmos da expressão no momento de discussão coletiva, os alunos facilmente explicam porque é que a expressão é verdadeira:

Investigadora – Então a primeira expressão é verdadeira ou é falsa?

Vários alunos – Verdadeira.

Investigadora – Porquê, Mauro?

Mauro – Porque só trocaram os lugares do 105 e do 33.

5.6.2.2. Análise da alínea b) ($460 = 40 \times 10 + 60 \times 10$)

Na expressão seguinte os alunos são confrontados com uma multiplicação. Nesta alínea apenas dois não conseguem resolver corretamente a expressão, quando afirmam que a expressão é verdadeira. Os alunos acreditam que o resultado é o mesmo e não compreendem que 60×10 não dá 60, mas sim 600.

Os restantes alunos detetam o erro, mas as justificações que apresentam são diferentes. Em primeiro lugar dois alunos dão uma justificação errada tal como podemos observar:

b) $460 = 40 \times 10 + 60 \times 10$ F Porque $40 + 10 = 50$ e $60 \times 10 = 600$ e mais dá 460.

Figura 210 - Resolução de Tânia.

Embora tenham identificado a expressão como falsa, a sua justificação demonstra que não há uma compreensão total da expressão. Os alunos resolvem os dois primeiros termos como se de uma adição se tratasse e não uma multiplicação. Efetivamente não dá 460, mas a resolução que fazem também não está correta. Também Rafael não vê o segundo termo da expressão como um todo, mas sim como parte separadas:

b) $460 = 40 \times 10 + 60 \times 10$ F Porque 60×10 não é igual a 460.

Figura 211 - Resolução de Rafael.

Rafael interpreta a expressão como uma igualdade entre as duas multiplicações e não como uma adição, afirmando que estes dois elementos não são iguais. João apenas afirma que a expressão não é igual a 460 não apresentando qualquer justificação para o que está a afirmar:

b) $460 = 40 \times 10 + 60 \times 10$ F Porque não é = a 460.

Figura 212 - Resolução de João.

Os restantes oito alunos mostram justificações mais elaboradas, onde se percebe que há uma compreensão total da expressão e do erro que possui. Três alunos centram a sua justificação na segunda parte da expressão afirmando que 60×10 é igual a 600:

b) $460 = 40 \times 10 + 60 \times 10$ F Porque 60×10 é igual a 600.

Figura 213 - Resolução de Duarte.

O grupo seguinte é composto por três alunos que apresentam os valores reais da expressão, ou seja, dois alunos afirmam que o resultado dá 1000. Já o outro aluno, Ricardo, apresenta o resultado de cada multiplicação:

b) $460 = 40 \times 10 + 60 \times 10$ F
 R: Porque $40 \times 10 + 60 \times 10$ dá 1000.

Figura 214 - Resolução de Laura.

b) $460 = 40 \times 10 + 60 \times 10$ F
 Porque $40 \times 10 = 400$ e $60 \times 10 = 600$

Figura 215 - Resolução de Ricardo.

No momento de discussão coletiva, Laura consegue explicar a sua justificção e tenta desenvolver uma expressão para o 460, mas não o faz de forma correta:

Investigadora – Diz Laura.

Laura – 40×10 mais 60×10 dá 1000.

Investigadora – Então se quiséssemos os 460 tinha que ser como?

Laura – Tínhamos que pôr 400×10 mais 60.

Investigadora – (...) A Laura está a dizer para fazer 460 é 400×10 mais 60.

É verdadeiro o que ela está a dizer?

David – Não.

Investigadora – Então?

David – Porque 400×10 dá 4000.

Investigadora – Então tem que ser quanto David?

David – 400×1 ou 40×1 . Ou 40×10 (o aluno retificou o que tinha dito)

Investigadora – Mais quanto David?

David – Mais 60×1

As últimas duas resoluções surgem de David e Mara e apresentam uma justificção completa dando uma soluçção para a expressão:

b) $460 = 40 \times 10 + 60 \times 10$ X Porque $40 \times 10 = 400$ e $60 \times 1 = 60$ para dar 460.

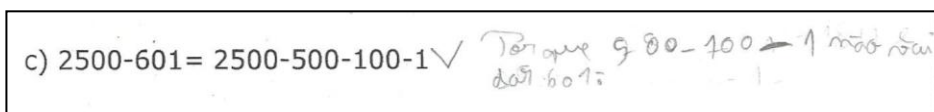
Figura 216 - Resolução de Mara.

Os alunos apresentam as resoluções de cada uma das multiplicações e compreendem que uma das soluções pode passar por 60×1 .

5.6.2.3. Análise da alínea c) ($2500 - 601 = 2500 - 500 - 100 - 1$)

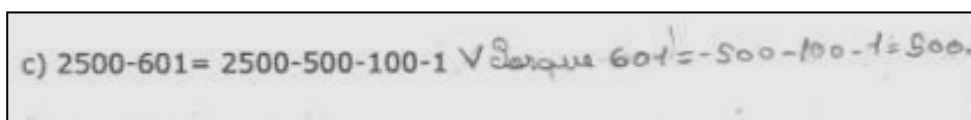
Com esta expressão emergem diferentes justificações que denotam uma maior compreensão por parte de alguns alunos. Em primeiro lugar, há apenas uma aluna que afirma que a expressão é falsa, mas acaba por não justificar a sua resposta. Outros três alunos, embora refiram que a expressão é verdadeira também não apresentam qualquer justificação.

Dos restantes alunos, 10, há um conjunto de quatro que compreendem que o valor que é retirado ao 2500 em cada lado da expressão é o mesmo, mas representam de forma errada:



c) $2500-601=2500-500-100-1$ ✓ Porque $900-100=1$ não sai do 601.

Figura 217 - Resolução de Tiago.

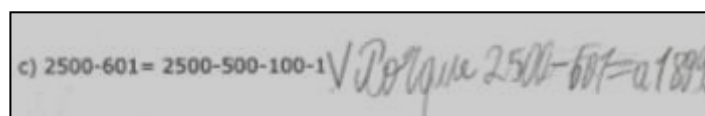


c) $2500-601=2500-500-100-1$ ✓ Porque $601=500-100-1=500$.

Figura 218 - Resolução de Mara.

Tiago tenta representar uma igualdade entre o 601 e o $500 - 100 - 1$, facto que não é verdadeiro. Neste caso, presume-se que o aluno quer mostrar que retirar 601 é o mesmo que retirar $500 - 100 - 1$. Por outro lado, Mara apresenta o 500 no final da expressão, possivelmente porque o 500 é a subtração que a aluna faz no 601 ao retirar os valores 100 e 1, mas não representa de forma correta.

Na resolução seguinte, o aluno tem a necessidade de apresentar o resultado da expressão quando subtraímos 601:



c) $2500-601=2500-500-100-1$ ✓ Porque $2500-601=1899$.

Figura 219 - Resolução de João.

Quando apresenta a sua justificação, João demonstra que compreende o que fez e não precisa de recorrer ao algoritmo para encontrar o resultado, muito pelo contrário:

Investigadora – João o que é que tu disseste?

João – Disse que era verdadeira.

Investigadora – Porquê?

João – Porque $2500 - 601 = 1899$.

Investigadora – É igual a quanto?

João – 1899.

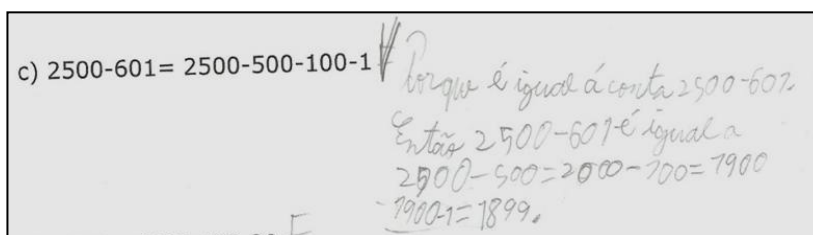
Investigadora – Sim. Como é que tu chegaste a esse resultado?

João – 2500 – 600 é igual a 1900, menos 1 é 1899.

Investigadora – Então e esta parte, foi-te dar o mesmo resultado? Como é que tu fizeste aquela parte? (referia-me ao segundo elemento da expressão.)

João – 2500 – 500... Porque 500 + 100 + 1 dá 601 e 2500 menos 601 dá 1899.

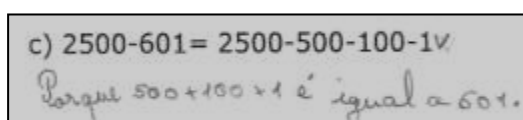
Com esta justificação percebemos que João não faz a subtração de 500, de 100 e de 1, mas afirma que a soma destes três valores é o mesmo que 601. Também David, apresenta o resultado da expressão, mas neste caso o aluno faz subtrações sucessivas:



c) $2500-601=2500-500-100-1$ ✓
Porque é igual à conta $2500-601$.
Então $2500-601$ é igual a
 $2500-500=2000-100=1900$
 $1900-1=1899$.

Figura 220 - Resolução de David.

Os restantes alunos apresentam a seguinte resolução:



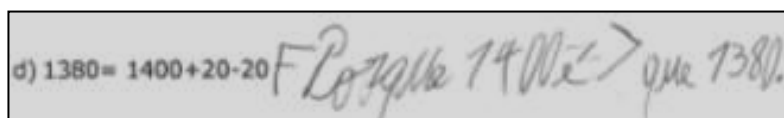
c) $2500-601=2500-500-100-1$ ✓
Porque $500+100+1$ é igual a 601.

Figura 221 - Resolução de Rafaela.

Com esta justificação percebemos que os alunos compreendem que se subtrai o mesmo valor em cada lado da expressão.

5.6.2.4. Análise da alínea d) ($1380 = 1400 + 20 - 20$)

Nesta última alínea há um número considerável de alunos que compreende a expressão e percebe que esta não era verdadeira. Dois alunos deixam a expressão em branco e outros dois alunos apenas referem que a expressão é falsa. Por outro lado, João apresenta a seguinte justificação:

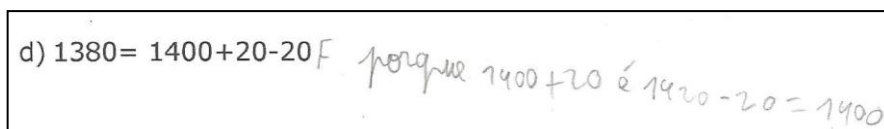


d) $1380 = 1400 + 20 - 20$ F Porque $1400 >$ que 1380 .

Figura 222 - Resolução de João.

Neste caso, João refere que 1400 é maior que 1380, mas não explica a ligação com a restante expressão ou se apenas olha para os dois primeiros termos.

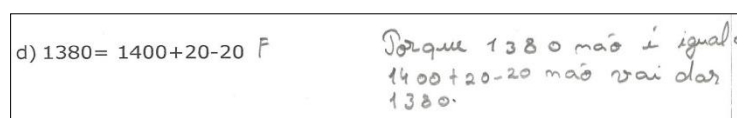
O próximo conjunto de três alunos justifica a sua resposta através do resultado que obtêm da segunda parte da expressão:



A rectangular box containing handwritten text. On the left, it says 'd) 1380 = 1400 + 20 - 20 F'. To the right, there is a calculation: 'porque 1400 + 20 é 1420 - 20 = 1400'.

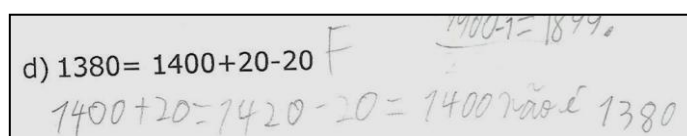
Figura 223 - Resolução de Mauro.

Por último, os restantes alunos (6) desenvolvem uma justificação mais completa porque envolvem todos os elementos da expressão na justificação, mostrando que não podem estar a falar de uma igualdade porque são valores diferentes:



A rectangular box containing handwritten text. On the left, it says 'd) 1380 = 1400 + 20 - 20 F'. To the right, there is a justification: 'Porque 1380 não é igual a 1400 + 20 - 20 não vai dar 1380.'

Figura 224 - Resolução de Tânia.



A rectangular box containing handwritten text. On the left, it says 'd) 1380 = 1400 + 20 - 20 F'. To the right, there is a calculation: '1400 + 20 = 1420 - 20 = 1400 não é 1380'. Above this calculation, there is a small calculation: '1400 - 20 = 1380'.

Figura 225 - Resolução de David.

De um modo geral, os alunos conseguem resolver todas as expressões e desenvolver uma justificação que demonstra, de forma clara, como chegam ao resultado.

5.6.3. Discussão de resultados da sessão 6

A análise de dados mostra que os alunos compreendem as relações de igualdade e recorrem a um raciocínio relacional para justificar as suas estratégias. Nesta sessão existe um maior recurso a estratégias relacionais do que computacionais. Os alunos recorrem a estratégias como a operação inversa e ao uso de expressões matemáticas para representar o que é dito em linguagem natural. A representação pictórica é também uma estratégia usada pelos alunos, principalmente na questão 1, para representar filas e cadeiras. As justificações para as suas estratégias são apresentadas, em linguagem natural, mas em muitos casos, os alunos acabam também por apresentar justificações em linguagem matemática, através de expressões que criam para complementar o que foi dito.

No que diz respeito a generalizações, na primeira questão os alunos conseguem desenvolver frases que representam uma generalização. Essas generalizações, são desenvolvidas no momento de discussão em grupo, não por um único aluno mas sim pela turma.

Por último, é de registrar as dificuldades que os alunos mostram ao longo da sessão e que acabam por estar presentes em todas as sessões. Em primeiro lugar, a interpretação do enunciado do problema traz sempre dificuldades na representação. Esta dificuldade acentua-se na segunda alínea da primeira questão, onde os alunos têm que interpretar e optar por uma das três afirmações apresentadas. A dificuldade de interpretação do problema está sempre associada à representação errada das expressões, ou seja, como existe a necessidade de justificar as suas respostas, os alunos acabam por apresentar expressões erradas, tendo por base a má interpretação do enunciado. Alguns alunos, quando lhes é apresentada uma expressão e lhes é pedido que comprovem a sua veracidade, não conseguem perceber as relações que se estabelecem entre os números. Outros, embora compreendam a relação que se estabelece e consigam detetar se a expressão é verdadeira ou falsa, apresentam justificações com erros de resolução, tal como acontece na expressão c) da questão 2.

5.7. Sessão 7

A sessão 7 é constituída por dois problemas intitulados "Pensa num número", em que se pretende trabalhar a relação de igualdade tendo como objetivo que cheguem à conclusão que obtêm novamente o número inicial. Para além disso é importante que os alunos iniciem um processo de generalização em cada uma das questões. A primeira questão envolve a multiplicação e a divisão e a segunda utiliza as quatro operações, tal como podemos observar na figura seguinte:

Pensa num número.
Multiplica esse número por 6.
Agora divide por dois.
Divide o resultado por 3.
Que número obtiveste?
O que conseguiste descobrir? Porque é que isto acontece?

Figura 226 - Questão 1 da sessão 7.

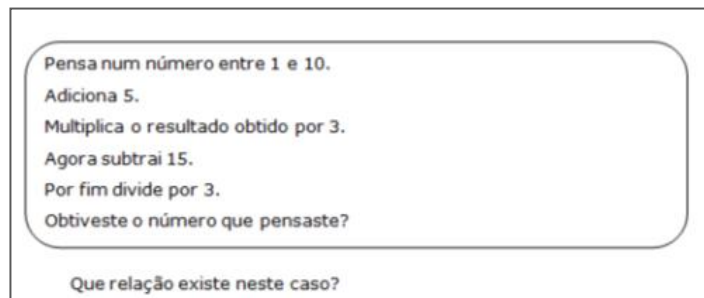


Figura 227 - Questão 2 da sessão 7.

5.7.1. Análise da Questão 1

Inicialmente, todos os alunos (14) chegam ao resultado correto e percebem que o resultado é o número que escolhem. Na apresentação das estratégias os alunos recorrem a diferentes maneiras para justificar as suas resoluções. O primeiro grupo, constituído por cinco alunos, chega ao resultado final através de estratégias operacionais:

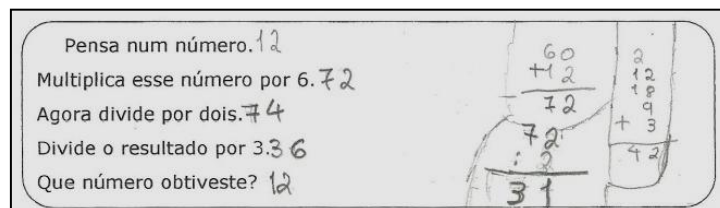


Figura 228 - Resolução de Beatriz.

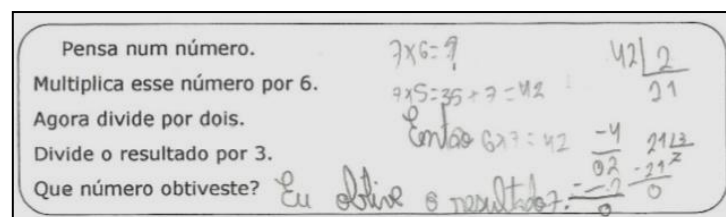


Figura 229 - Resolução de Ricardo.

Tanto na resolução de Ricardo como de dois colegas, os cálculos que os alunos desenvolvem relacionam-se com a divisão. David, que trabalha com Ricardo, explica a sua estratégia para conseguir chegar ao resultado final:

Investigadora – Vamos ver outro exemplo, David.

David – 7

Investigadora – Escolheram o 7. Então fizeram como?

David – 7×6 . Nós não sabíamos, então fizemos 7×5 igual a 35.

Investigadora – Sim...

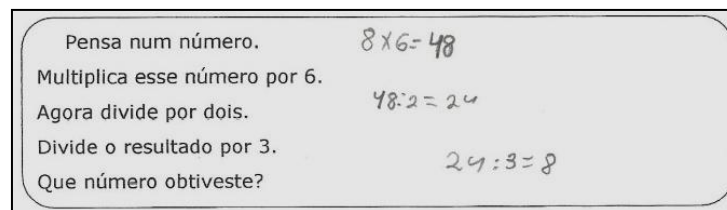
David – E aos 35 somamos mais 7 que deu 42. Então 6×7 igual a 42.

Depois 42 a dividir por 2 deu 21. Depois 21 a dividir por 3 igual a 7.

Investigadora – O que é que aconteceu?
David – Deu o mesmo número.

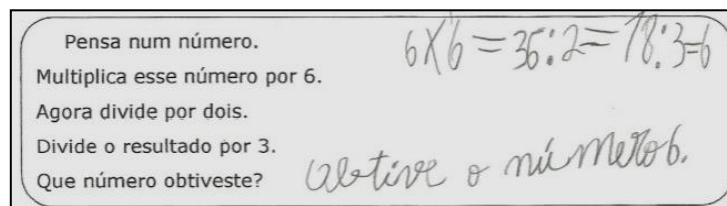
Embora utilizem estratégias operacionais, em alguns momentos de resolução, os alunos conseguem arranjar uma estratégia relacional para resolver e expressão 7×6 . Já na resolução de Beatriz e Laura, as alunas recorrem à divisão, mas o procedimento não está correto, bem como o seu resultado. Para além disso, para encontrar o resultado da multiplicação de 12×6 , encontram os valores 60 e 12 para chegar ao resultado de 72.

Outro conjunto de alunos, sete, apresenta cada uma das expressões relacionadas com as frases apresentadas.



Pensa num número. $8 \times 6 = 48$
Multiplica esse número por 6. $48 : 2 = 24$
Agora divide por dois.
Divide o resultado por 3. $24 : 3 = 8$
Que número obtiveste?

Figura 230 - Resolução de Rafael.



Pensa num número. $6 \times 6 = 36 : 2 = 18 : 3 = 6$
Multiplica esse número por 6.
Agora divide por dois.
Divide o resultado por 3.
Que número obtiveste? *obtive o número 6.*

Figura 231 - Resolução de João.

Neste caso, e talvez porque todos os números escolhidos são inferiores a 10, nenhum aluno recorre a estratégias operacionais para resolver a questão. A resolução de Rafael reflete o que foi feito também nas resoluções dos restantes colegas, ou seja, os alunos apresentam cada uma das expressões separadamente, ao contrário de João, que apesar da representação não estar correta, interpreta o problema como uma relação e não como expressões separadas. Ao longo da discussão em grande grupo, os alunos descrevem as suas estratégias:

Investigadora – O Gonçalo e o João digam lá que número é que vocês escolheram.

Gonçalo – 6.

Investigadora – Então começaram por fazer o quê?

Gonçalo – 6×6 igual a 36.

Investigadora – E depois.

Gonçalo – 36 a dividir por 2... 18. 18 a dividir por 3 igual a 6.

Por último, outros dois alunos somente registam a informação das últimas frases:

Pensa num número.	6	54	3	27	$30:3=10$	Quê obtiveste o número?
Multiplica esse número por 6.	12	60	6	30		10
Agora divide por dois.	18		9			
Divide o resultado por 3.	24		12			
	30		15			
	36		27			
	42		24			
Que número obtiveste?	48					

Figura 232 - Resolução de Tânia.

Os alunos apresentam a tabuada do 6 e do 3 e a expressão que divide o resultado por 3. Através destes elementos conseguimos perceber que o número escolhido é o 10. No momento de discussão coletiva, Tânia e Tiago fazem referência à tabuada:

Investigadora – Tânia e Tiago digam lá que número é que vocês escolheram.

Tiago – 10.

Investigadora – Então vamos fazer o quê?

Tiago – A tabuada do 6.

Investigadora – Para?

Tiago – E depois dividimos por 2...

Investigadora – Calma, calma então vocês fizeram o quê? 10×6 ?

Tiago - ... (O aluno não consegue explicar a sua estratégia.)

Investigadora – Vocês pensaram num número.

Tiago – 10.

Investigadora – Depois o que é que vos pedia?

Tânia – Multiplicar esse número por 6.

Investigadora – Então vamos multiplica-lo por 6. Quanto é que dá?

Tiago – 60. Depois dividimos por 2 que dá 30. Depois 30 a dividir por 3 igual a 10.

Investigadora – Que número é que vos deu então?

Tânia – 10.

Quando iniciamos a discussão para tentar perceber porque é que o resultado é sempre igual ao número que escolheram inicialmente, Gonçalo avança com uma justificação, que os colegas não aceitam.

Investigadora – (...) Porque é que vocês acham que isto acontece? Diz lá Gonçalo.

Gonçalo – Porque eram números pares.

Investigadora – Não tens aqui números ímpares?

David – Tem. O 3 e o 7.

David arranja dois exemplos que contrariam o que Gonçalo afirma, fazendo com que o aluno não desenvolva a sua justificação. Ao longo da discussão os alunos tentam desenvolver uma frase que mostra o que é pedido nesta alínea, enquanto Rafaela regista no quadro o que os colegas dizem:

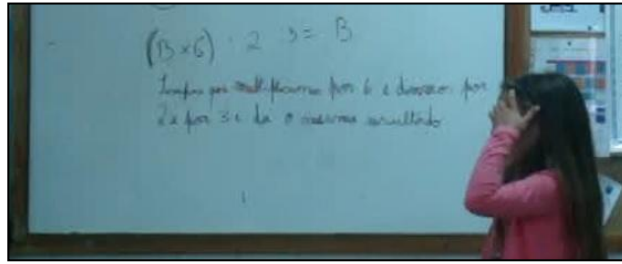


Figura 233 - Rafaela no quadro a registar a generalização.

Investigadora – Então sempre que multiplicamos por 6, ajudem lá a Rafaela...

Duarte – Vai dar sempre o mesmo número.

Investigadora – Calma Duarte. Se multiplicarmos por 6 vai dar o mesmo número?

Rafael – Não.

Investigadora – Então temos que multiplicar por 6 e fazer o quê?

Tiago – Dividir por 2 e por 3.

David – E dividimos por 2 e por 3.

Duarte – Dá o mesmo número.

No quadro acabamos por registar a frase “Sempre que multiplicamos por 6 e dividimos por 2 e por 3 dá sempre o mesmo resultado”.

Também neste momento, e para perceber se esta estratégia acontece com outros números, substituímos o número 6 pelo 8 e os números seguintes por 2 e por 4. Com este exemplo também tentamos desenvolver uma frase que demonstra o que é dito:

Investigadora – Então sempre que multiplicamos por 8 e dividimos por 2 e por 4 (estava a ler o que foi escrito por Laura, no quadro) vai dar o quê?

Tiago – Vai dar o mesmo resultado.

Investigadora – Que resultado?

Tiago – Que nós pensamos.

Investigadora – Então vamos compor melhor. Vai dar o quê?

David – O resultado que nós pensamos.

Investigadora – E que resultado é esse que nós pensamos?

Tiago – 8

Investigadora – É só o número 8?

Tiago – Não, todos os números que nós quisermos.

De um modo geral, os alunos nesta alínea conseguem perceber as relações que se estabelecem e desenvolvem, em grande grupo, uma frase que demonstra esta relação. Para além disso, e no momento de trabalho a pares, desenvolvem estratégias relacionais para conseguir resolver o que é pedido.

5.7.2. Análise da questão 2

Nesta alínea, os alunos chegam à conclusão que dá sempre o mesmo número e também aqui, conseguimos iniciar um processo de generalização. Esta situação é mais complexa, mas de um modo geral, os alunos conseguem perceber as relações que se estabelecem.

As primeiras estratégias são de duas alunas que trabalham em conjunto e que apresentam somente o resultado sem mostrar como chegam ao resultado. Presumo que tenham feito algum cálculo mental:

Pensa num número entre 1 e 10. 5
Adiciona 5. 10
Multiplica o resultado obtido por 3. 30
Agora subtrai 15. 15
Por fim divide por 3. 5
Obtiveste o número que pensaste? 5

Figura 234 - Resolução de Laura.

Outros três alunos apresentam as expressões em cada uma das frases, mas apresentam também o algoritmo das expressões em que têm mais dificuldades. Gonçalo e David apresentam o algoritmo da divisão e Tiago o da subtração:

Pensa num número entre 1 e 10. $7 + 5 = 12$
Adiciona 5. $12 \times 3 = 36$
Multiplica o resultado obtido por 3. $36 - 15 = 21$
Agora subtrai 15. $21 \div 3 = 7$
Por fim divide por 3.
Obtiveste o número que pensaste? 7

Figura 235 - Resolução de David.

Pensa num número entre 1 e 10. $2 + 5 = 7$
Adiciona 5. $7 \times 3 = 21$
Multiplica o resultado obtido por 3. $21 - 15 = 6$
Agora subtrai 15.
Por fim divide por 3. $6 \div 3 = 2$
Obtiveste o número que pensaste? 2

Figura 236 - Resolução de Tiago.

Tiago, ao apresentar a sua estratégia oralmente não faz qualquer referência à maneira de chegar ao número 6:

Investigadora – Tiago que número é que puseram?

Tiago – 2.

Investigadora – O Tiago e a Tânia puseram o número 2. Começaram por fazer o quê?

Tiago – $2 + 5$ igual a 7.

Tânia – 7×3 igual a 21.

Investigadora – E a seguir?

Tiago – Depois $21 - 15$ igual a 6. E depois $6 : 3$ igual a 2.

Investigadora – O que é que aconteceu?
Tiago – Deu o mesmo resultado.

Por último, os restantes alunos apresentam uma expressão para cada uma das frases apresentadas, não necessitando de recorrer ao algoritmo:

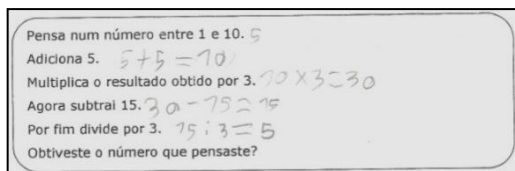


Figura 237 - Resolução de Mauro.

A resolução de Mauro reflete o que acontece à grande maioria dos alunos, ou seja, os alunos criam as expressões à medida que as informações vão surgindo. João, apresenta a sua expressão como um todo, tal como aconteceu na questão anterior, muito embora esta estratégia não esteja correta:

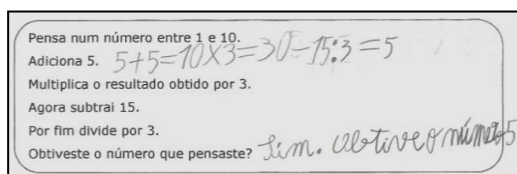


Figura 238 - Resolução de João.

Na resolução de Duarte e Rafaela, constato que, em determinada altura, os alunos recorrem a uma estratégia relacional para conseguir subtrair o número 15 ao que encontram:

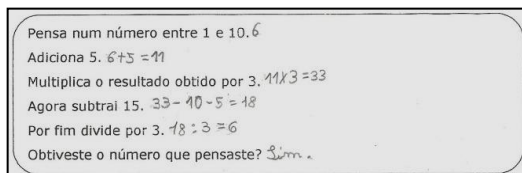


Figura 239 - Resolução de Rafaela.

Também no momento de discussão em grande grupo, os alunos explicam como chegam ao valor 18, sem recorrer ao algoritmo:

Investigadora – Duarte.
Duarte – Pensei no número 6. Fiz $6 + 5$ igual a 11. 11×3 igual a 33.
Investigadora – A seguir?
Duarte – $33 - 15$ igual a 18. Então posso fazer $33 - 10 - 5$ igual a 18.
Investigadora – E a seguir?
Duarte – $18 : 3$ igual a 6.
Investigadora – O que é que aconteceu aqui mais uma vez?
Vários alunos – Deu o mesmo resultado.

De seguida, quando questiono sobre a relação que existe, os alunos têm a noção que o resultado é igual ao número que escolhem:

A relação que existe neste caso é que todos os números que pensarmos é sempre o mesmo resultado.

Figura 240 - Resolução de Gonçalo.

Após esta confirmação, que chega depois da apresentação de cada uma das estratégias, iniciamos o processo de generalização, sem qualquer número em concreto, escrevemos no quadro cada uma das etapas:

Investigadora – O que é que acontece aqui? Fazemos o quê primeiro?
 Tiago – Adicionamos 5.
 Investigadora – E depois?
 Tiago – Multiplicamos por 3 o resultado.
 Rafaela – Vezes 3.
 Investigadora – Multiplicamos vezes 3 o resultado que deu. E depois.
 Mara – Menos 15.
 Tiago – Subtraímos 15.
 Investigadora – De onde é que vem este número 15?
 David – Do $\times 3$.

Neste caso, David compreende de imediato que o número 15 surge da multiplicação de 5 vezes 3. Alguns alunos acabam por registar na folha de trabalho o que fomos escrevendo no quadro, à medida que íamos falando. O símbolo D foi o símbolo escolhido pelos alunos para representar *qualquer número*:

$$\begin{aligned} & \textcircled{D} + 5 \times 3 = 15 \\ & \quad \quad \quad \downarrow \\ & \quad \quad \quad 15 \\ & = \textcircled{D} + 5 \times 3 - 15 : 3 = \textcircled{D} \end{aligned}$$

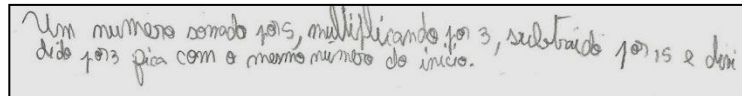
Figura 241 - Resolução de Laura

Posteriormente, os alunos desenvolvem uma frase que descreve o que se passava com esta situação:

Investigadora – Conseguem arranjar uma frase para isto?
 Rafaela – Sim. O número que nós...
 David – O número inicial mais 5...
 Rafaela – Multiplicado...
 Investigadora – Calma não ponhas já multiplicado.
 Rafaela – Somado mais 5
 Investigadora – Calma então temos... Um número ... vocês vão-me ditar e eu vou escrever.
 Rafaela – Somado, multiplicado, subtraído...
 Investigadora – É sempre pelo mesmo número?
 Tiago – Somado com 5, multiplicado por 3...
 Rafaela – Subtraído por 15,

Rafael – E dividido por 3...
Investigadora – O que é que acontece?
Tiago – Fica o mesmo número do início.

Após o diálogo e o registo no quadro, os alunos escrevem na ficha de trabalho o que é escrito no quadro:



Um número com o 1015, multiplicando por 3, subtraído por 15 e daí daí por 3 fica com o mesmo número do início.

Figura 242 - Resolução de Rodrigo.

Para finalizar, percebe-se que os alunos compreendem as relações entre os números. Com alguma ajuda, desenvolvem uma generalização que demonstra a situação que lhes é apresentada.

5.7.3. Discussão dos resultados da sessão 7

Ao longo da sessão 7 percebemos que os alunos compreendem as relações de igualdade apresentadas com estes dois problemas. Detetamos essa compreensão nas diferentes estratégias que apresentam, bem como nos raciocínios e justificações que fazem. As generalizações também marcaram esta sessão e, no momento de discussão coletiva, os alunos iniciam processos de generalização, principalmente em linguagem natural.

No que diz respeito às estratégias utilizadas, os alunos registam cada umas das expressões referentes às indicações que são dadas, ou seja, não vêem o problema como um todo, mas sim dividido em pequenas partes. Apenas João, mostra as expressões todas ligadas entre si, o que nos leva a crer que olha para o problema como um conjunto e não como frases estanques. Quando sentem necessidade de recorrer a cálculos, porque os números que utilizam são superiores a 10, em alguns momentos utilizam um raciocínio operacional. Isto fica demonstrado quando recorrem aos algoritmos da divisão e da subtração para encontrar o resultado de uma operação. Também recorrem a estratégias relacionais para encontrar os valores que necessitam, nomeadamente, à decomposição de fatores para simplificar as multiplicações ou subtrações sucessivas. Em alguns casos, usam a tabuada (questão 1) para encontrar um valor desconhecido.

As justificações que apresentam estão sempre muito ligadas aos exemplos apresentados. Quando são questionados sobre a relação que existe, os alunos explicam oralmente que vai dar sempre o mesmo resultado, contudo, só conseguem iniciar um processo de generalização com alguma ajuda da minha parte. Inicialmente, estão muito ligados aos exemplos apresentados e não

conseguem abstrair-se. No momento de discussão, conseguem desenvolver frases que demonstram a relação de igualdade e percebem que podem trocar o número escolhido por outro, e chegam à conclusão que vão sempre obter o número inicial. As frases e as expressões criadas são desenvolvidas em conjunto, no momento de discussão coletiva. Como não conseguem abstrair-se de exemplos concretos, posso afirmar que as suas dificuldades passam, fundamentalmente, pelo processo de generalização. Os alunos compreendem que o resultado é igual ao número inicial, mas não conseguem, de forma autónoma, criar uma generalização. Outra dificuldade que demonstram pode estar relacionada com a incapacidade que têm para criar estratégias relacionais para substituir o algoritmo da divisão. Como a aprendizagem do algoritmo da divisão é realizada no 2.º período, os alunos acabam por recorrer ao que lhes é mais familiar.

Para finalizar, penso que se existir um trabalho contínuo com este tipo de tarefas, certamente que ajudaremos os alunos a chegar a generalizações mais completas e mais corretas, quer em linguagem natural, quer em linguagem simbólica, desenvolvendo uma maior autonomia na sua produção.

5.8. Sessão 8

Esta última sessão é de avaliação, tendo por objetivo perceber a que tipo de estratégias recorrem para solucionar as expressões apresentadas, bem como perceber o raciocínio que utilizam para justificar as suas estratégias, ou seja, se ainda utilizam um raciocínio operacional e sentem a necessidade de recorrer ao algoritmo, ou se tendem a justificar segundo as relações que se estabelecem entre os números e as operações. Torna-se importante perceber as justificações que os alunos desenvolvem, quer ao nível da escrita, mas também oralmente, para entender se existe uma compreensão efetiva das relações.

Esta sessão é constituída por duas questões de valor omisso e de verdadeiro e falso, com as quatro operações, tendo decorrido com 13 alunos. A aula desenvolve-se tal como as sessões anteriores, com uma apresentação da tarefa, momento de realização e, por fim, discussão em grande grupo. Neste caso, e como esta sessão tem como objetivo perceber o que cada aluno aprende, a realização da ficha de trabalho é feita individualmente. Como alguns alunos são mais rápidos na realização dos primeiros problemas, vão resolvendo outros problemas que estavam preparados, caso houvesse mais tempo. Contudo, esses problemas não são analisados, pelo facto de nem todos os alunos os terem realizado e porque não houve tempo de os discutir em grande grupo. De seguida, passo à análise de cada uma das questões desta última sessão.

5.8.1. Análise da questão 1

Esta questão é composta por quatro expressões de valor omissivo, em que o objetivo é encontrar um valor de modo a tornar a expressão verdadeira:

1. Completa cada uma das expressões com o valor em falta. Justifica a tua resposta.

$$73 \times \underline{\quad} = 73 \times 10 + 73 \times 2$$
$$\underline{\quad} + 22 = 15 + 24$$
$$80 : 4 = 80 : \underline{\quad} : \underline{\quad}$$
$$55 - \underline{\quad} = 50 - 10$$

Figura 243 - Questão 1 da sessão 8.

É importante relembrar que os alunos não têm necessidade de recorrer a cálculos para conseguir encontrar o valor omissivo em cada uma das quatro expressões.

5.8.1.1. Análise da alínea 1 ($73 \times \underline{\quad} = 73 \times 10 + 73 \times 2$)

Logo no início da discussão coletiva percebo que existe um entendimento desta relação de igualdade e que a maioria dos alunos não interpreta a segunda parte da expressão como o resultado:

Investigadora – O que é que significa este sinal de igual?

David – Que tem que ser o resultado igual

Tânia – Que $73 \times$ um número tem que dar igual àquele daquele lado (estava a referir-se à segunda parte da expressão).

Ao analisar as suas resoluções, percebo que seis alunos adicionam os fatores que estão a multiplicar (10 e 2) e compreendem que o valor omissivo é 12:

$73 \times 12 = 73 \times 10 + 73 \times 2$

$17 + 22 = 15 + 24$

R: Se eu somar 10 + 2 vai somar o numero que falta.

Figura 244 - Resolução de Tânia.

$73 \times 12 = 73 \times 10 + 73 \times 2$ Porque $10 + 2$ é igual a 12.

Figura 245 - Resolução de Mara.

No momento de discussão coletiva, percebe-se que os alunos compreendem qual a razão de ser o valor 12:

Investigadora – Porquê Tânia?

Tânia – Porque se 73×10 e 73×2 é o mesmo que 73×12 .

Investigadora – E porque é que é o mesmo, ajudem a vossa colega.

Rafaela – Porque 10 mais 2 é igual a 12.

Outra aluna, Rafaela, justifica a sua escolha apresentando a expressão ao contrário:

$$73 \times 12 = 73 \times 10 + 73 \times 2 \quad \text{Porque } 73 \times 10 + 73 \times 2 = 73 \times 12.$$

Figura 246 - Resolução de Rafaela.

Rafaela não explica que relação existe entre cada membro da expressão e justifica a sua escolha reorganizando cada membro. Também dois alunos apresentam o valor correto, contudo Duarte não regista qualquer justificação e Gonçalo desenvolve duas justificações, como podemos observar na figura seguinte:

$$73 \times 12 = 73 \times 10 + 73 \times 2 \quad \text{Porque 3 vezes 12 = 36 que depois ficou o 6 e o 6 foi para o ultimo resultado que deu 77 = 776.}$$

Figura 247 - Resolução de Gonçalo.

Em primeiro lugar, através de traços que regista na expressão, Gonçalo entende que tem que adicionar os dois fatores e apresenta o número 12 como valor omissso. Em segundo lugar, recorrendo a linguagem natural explica a multiplicação de 73×12 , mas a sua explicação não está totalmente correta. Gonçalo não resolve corretamente o cálculo 73×12 .

Nas últimas três resoluções os alunos não encontram o valor omissso correto para demonstrar uma igualdade, tal como podemos observar:

$$73 \times 18 = 73 \times 10 + 73 \times 2 \quad \text{Porque se tenta e três vezes tanto se igual a dezanove e três.}$$

Figura 248 - Resolução de Beatriz.

resposta.

$$73 \times 156 = 73 \times 10 + 73 \times 2 \quad \text{Porque } 73 \times 10 + 73 \times 2 = 756$$

Figura 249 - Resolução de João.

$$73 \times 146 = 73 \times 10 + 73 \times 2$$

Porque $73 \times 2 = 146$.

Figura 250 - Resolução de Tiago.

Na resolução de Beatriz, a aluna encontra o valor 18, mas quando lhe peço para explicar a sua estratégia, Beatriz não consegue arranjar explicação. No caso de João, para além de apresentar o valor incorreto, o aluno interpreta o valor omissa como resultado e não como elemento de uma igualdade. Por último, Tiago resolve a multiplicação 73×2 e não compreende que, deste modo, a expressão não representa uma igualdade.

5.8.1.2. Análise da alínea 2 ($___ + 22 = 15 + 24$)

Nesta alínea somente um aluno não encontra o valor correto para mostrar a expressão verdadeira:

$$39 + 22 = 15 + 24$$

Porque $10 + 20 = 30$ e $5 + 4 = 9$ e se somar todo mais dá 39.

Figura 251 - Resolução de Tiago.

Tiago interpreta o valor omissa como um resultado da expressão e não como um valor da relação de igualdade. No momento de discussão, Tiago justifica a sua resposta da seguinte maneira:

Tiago – 15 mais 24 dá 39.

Outra estratégia é apresentada por Beatriz que identifica o valor correto, mas o resultado da sua justificação não é válido:

$$17 + 22 = 15 + 24$$

Porque dez mais quinze e dois é 27.

Figura 252 - Resolução de Beatriz.

Nesta resolução percebe-se que a aluna apaga o que faz em primeiro lugar e tenta corrigir colocando outro valor. No próximo conjunto de alunos, dez, para encontrar o valor omissa calculam a segunda parte da expressão e só depois disso é que encontram o valor que falta. Embora o valor seja o correto, as suas justificações são diferentes:

$$17 + 22 = 15 + 24$$

39

Porque 7 mais 2 não dá 9 e 1 mais 2 não dá 3.

Figura 253 - Resolução de Gonçalo.

Gonçalo apresenta o valor para a segunda parte da expressão, mas não faz qualquer referência sobre a maneira de chegar ao 17. Outro conjunto de alunos apresenta, em primeiro lugar, o valor de $15 + 24$ e só depois apresenta o valor para $17 + 22$:

$$17 + 22 = 15 + 24$$

Porque $15 + 24 = 39$ então $22 + 17 = 39$

Figura 254 - Resolução de Ricardo.

Por último, os alunos também apresentam a sua justificação começando pelo lado da expressão que contem o valor omisso:

$$17 + 22 = 15 + 24$$

Li eu juntar $22 + 17$ vai dar 39, e juntar $15 + 24$ é igual a 39.

Figura 255 - Resolução de David.

Neste caso, presume-se que os alunos encontram o valor omisso e só depois elaboram a justificação. Quando pergunto o porquê do número 17, David apresenta a seguinte justificação:

Investigadora – Então que número é que tem que ficar? Diz lá David?

David – 17.

Investigadora – Porquê 17?

David – Porque se nós somarmos 7 mais 2 vai dar 9 e 1 mais 2 vai dar 3. E tudo vai dar 39.

Também compreendemos que David já teria encontrado o valor 17 e a justificação que dá é somente a confirmação da igualdade. A última resolução é de João, que demonstra recorrer a um raciocínio de compensação para encontrar o valor omisso:

$$17 + 22 = 15 + 24$$

Porque no 24 tem de 2 e no 15 tem de 22

Figura 256 - Resolução de João.

João mostra interesse em apresentar a sua estratégia porque até então, ninguém justifica como ele:

Investigadora – Diz (João).

João – Eu escrevi porque no 24 tira-se 2 e no 15 temos que acrescentar mais 2.

5.8.1.3. Análise da alínea 3 ($80 : 4 = 80 : \underline{\quad} : \underline{\quad}$)

Nesta alínea Mauro é o único aluno que não encontra os valores corretos:

Handwritten resolution of Mauro for the problem $80 : 4 = 80 : \underline{20} : \underline{40}$. The student has written "a mais 1 deu 39" and "porque 80:4=80:20 e 200 dividir por 40".

Figura 257 - Resolução de Mauro.

Mauro não compreende que o valor omissos tem que ser inferior a 4 e encontra dois valores bastante superiores. Todos os restantes alunos encontram os valores corretos, não mostrando grande dificuldade na sua resolução:

Laura – Eu já sei qual é o resultado.
Investigadora – E qual é o resultado, Laura.
Laura – 2
Mara – Só 2?
Laura – A dividir por 2.

Contudo, algumas das justificações que apresentam não são suficientemente válidas para justificar a escolha do valor omissos. Um conjunto de cinco alunos justifica a sua escolha apresentando novamente toda a expressão, mas não explica a relação que existe entre cada elemento:

Handwritten resolution of Rafaela for the problem $80 : 4 = 80 : \underline{2} : \underline{2}$. The student has written "Porque 80:4 é a mesma coisa que 80:2:2 é igual".

Figura 258 - Resolução de Rafaela.

Handwritten resolution of Laura for the problem $80 : 4 = 80 : \underline{2} : \underline{2}$. The student has written "Porque 80:4 é igual a 20 e 80:2:2 é igual a de 80:4" and "55 - 15 = 50 - 10".

Figura 259 - Resolução de Laura.

Também nesta situação, Laura quando apresenta a sua justificação refere um valor errado, mas logo compreende o seu erro:

Laura – Professora possa dizer?
Investigadora – Diz lá a tua resposta.
Laura – Porque 80 a dividir por 4 é igual a 4, e 80 a dividir por 2 e a dividir por 2 é igual a 80 a dividir por 4.
Investigadora – Calma tu disseste que 80 a dividir por 4 é igual a ?
Laura – 4... É igual a 2.
Mara – Também não é.

Laura – (A aluna ficou a pensar e chegou à resposta correta) É igual a 20.

Outro aluno, João, justifica a sua escolha resolvendo a expressão que encontra:

$80 : 4 = 80 : 2 : 2$ Porque $80 : 4 = 20$ e $80 : 2 = 40 : 2 = 20$.

Figura 260 - Resolução de João.

João apresenta a sua justificação oral da mesma maneira como regista na sua ficha de trabalho, ou seja, o aluno encontra o valor final de cada lado da expressão:

João – Porque 80 a dividir por 4 é igual a 20 e 80 a dividir por 2 é igual a 40 e a dividir por 2 é igual a 20.

Outros dois alunos, David e Tiago, compreendem a razão do valor omissos ser o 2:

$80 : 4 = 80 : 2 : 2$ Porque $2 \times 2 = 4$, então $80 : 4$ é $80 : 2 : 2$.

Figura 261 - Resolução de David.

Os alunos sabem que a operação inversa da divisão é a multiplicação, por isso, 2×2 é 4. Por outro lado, Mara e Gonçalo identificam o número 2 como sendo metade de 4:

$80 : 4 = 80 : 2 : 2$ Porque metade de 4 é 2.

Figura 262 - Resolução de Mara.

$80 : 4 = 80 : 2 : 2$ Porque ao invés de dividir o 4 que dá 2.

Figura 263 - Resolução de Gonçalo.

Gonçalo, inclusive, faz uma ligação entre os valores omissos, o que nos leva a crer que o aluno sabe que dividir por 4 é o mesmo que dividir duas vezes por 2. A última justificação é de Beatriz, contudo esta não está muito relacionada com o resultado.

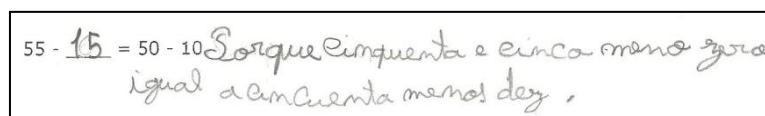
$80 : 4 = 80 : 2 : 2$ Porque ao invés de dividir por quatro dá o resultado.

Figura 264 - Resolução de Beatriz.

Ao analisar a sua resposta percebe-se que Beatriz apaga os valores para colocar o 2. No último termo, percebe-se que a aluna teria o número 80, o que nos leva a crer que no primeiro valor omissos Beatriz pode ter colocado 4 para mostrar uma igualdade. A última resolução é de Duarte que, apesar de colocar o valor correto, não apresenta qualquer justificação.

5.8.1.4. Análise da alínea 4 ($55 - \underline{\quad} = 50 - 10$)

Nesta alínea, três alunos não apresentam o valor que demonstra uma igualdade. Em primeiro lugar, Beatriz regista como valor omissos 0:

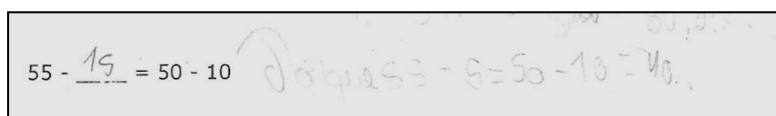


$$55 - 15 = 50 - 10$$

Porque cinquenta e cinco menos quinze igual a cinquenta menos dez.

Figura 265 - Resolução de Beatriz.

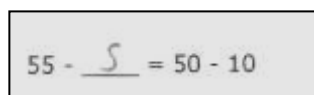
Embora o valor presente seja 15, percebe-se que a aluna retifica o valor que tinha. Tal facto também se comprova pela justificação que apresenta. A aluna afirma que ao colocar 0 a primeira parte da expressão fica igual à segunda. Os restantes dois alunos, Duarte e Ricardo, apresentam o número 5 como valor omissos:



$$55 - 15 = 50 - 10$$

Depois $55 - 5 = 50 - 10 = 40$.

Figura 266 - Resolução de Ricardo.



$$55 - 5 = 50 - 10$$

Figura 267 - Resolução de Duarte.

Enquanto Duarte não desenvolve qualquer justificação para a sua resposta, Rodrigo embora tenha retificado posteriormente percebemos, pela sua justificação, que escolhe o número 5. No momento de discussão coletiva, Ricardo apresenta a mesma justificação:

- Investigadora – Porque é que puseste 5 no início? Oh Ricardo porque é que puseste 5?
 Ricardo – 55 menos 5 igual a 50. ...
 Investigadora – Então e depois?
 Ricardo – 50 menos 10 igual a 40.

Os restantes alunos, dez, encontram o valor correto e compreendem que têm que retirar mais 5 valores da primeira parte da expressão. No que se refere à

justificações apresentadas, sete alunos fazem referência às duas subtrações, mas não explicam como chegam ao número 15:

55 - 15 = 50 - 10 Porque no 50 menos 10 dá 40 então ao 55 tenho de se tirar 15 que deu 40 para dar o mesmo número do 50 - 10.

Figura 268 - Resolução de Gonçalo.

55 - 15 = 50 - 10 Porque 50 - 10 = 40 e 55 - 15 = 40

Figura 269 - Resolução de João.

Na discussão em grande grupo, João justifica qual a razão de ter mudado a sua resposta de 5 para 15. Nesta situação, o aluno tem uma noção completa da relação de igualdade quando diz: “se fosse 5 não dava porque 55 menos 5 era só 50 e é 50 menos 10 que dava 40. E eu pus 5 e depois acrescentei-lhe os 10.”

Neste grande grupo as justificações tanto são apresentadas em linguagem natural, como na resolução de Gonçalo, ou em linguagem simbólica, no caso de João. Neste último, o aluno limita-se a reproduzir a expressão apresentada, mas com os resultados de cada uma das partes. No momento de discussão coletiva, também Laura apresenta uma justificação sobre como chegou ao valor 15, mas esta justificação não se encontra na sua resolução:

Laura – Era 50 menos 10 e do resultado 40. Eu pus 15, porque 55 menos 15 é igual a 40.

Investigadora – E como é que tu chegaste ao 15?

Laura – Eu pus assim... eu fiz sempre menos 5. 55 menos 5 é igual a 50.

Depois 50 menos 5 é igual a 45 e 45 menos 5 é igual a 40.

Investigadora – Então foste retirando de quanto em quanto?

Laura – 5 em 5.

55 - 15 = 50 - 10 Porque 55 - 15 é igual a quarenta e 50 - 10 também é 40.

Figura 270 - Resolução de Laura.

O último grupo é de três alunos que explicam a forma como chegaram ao valor 15:

55 - 15 = 50 - 10 tinha 55 e tinha do dar 50 - 10 = 40 então tirei 10 deu 45 - 5 = 40

Figura 271 - Resolução de Mauro.

$$55 - 19 = 50 - 10$$

porque a $50-10=40$ então $70+5=75,$

Figura 272 - Resolução de David.

Estes dois alunos têm a necessidade de encontrar o valor da segunda parte da expressão, mas apesar deste facto ambos percebem que têm que tirar 5 valores de 55 e acrescentar ao 10:

Investigadora – Mauro como é que tu fizeste?

Mauro – Tinha 55 e tinha de dar 50 menos 10 que é igual a 40. Tirei 10 deu 45, menos 5 e deu 40.

(...)

David – Eu fiz 50 menos 10 dá 40. Depois percebi que 10 mais 5 dava 15 então somei esse 10 mais 5 que dava 15 e subtraí 55 menos 15.

Investigadora – Onde é que tu foste arranjar o 5?

David – Disse 15.

Investigadora – Sim mais tu disseste 10 mais 5 igual a 15. Onde é que tu foste buscar o 5?

David – Dos 55.

Por outro lado, Tiago não faz qualquer referência ao 40 e percebe que tem que acrescentar 5 valores ao subtrativo apresentado.

$$55 - 15 = 50 - 10$$

porque tira 5 de 55 e acrescenta ao 10 que dá 15.

Figura 273 - Resolução de Tiago.

De um modo geral, os alunos resolvem com sucesso as quatro expressões apresentadas e encontram o valor omissivo de modo a tornar a expressão verdadeira. As suas justificações são variadas, mas os alunos tendem a desenvolver justificações relacionadas apenas com as expressões apresentadas.

5.8.2. Análise da questão 2

Esta questão é composta por três alíneas de verdadeiro e falso e os alunos têm que identificar se as expressões são verdadeiras ou falsas e justificar a sua escolha. A figura seguinte apresenta a questão 2 e as suas expressões:

2. Das seguintes expressões mostra quais são as verdadeiras e as falsas. Justifica a tua resposta mostrando a relação que existe nas expressões.

a) $123 - 23 > 132 - 31$

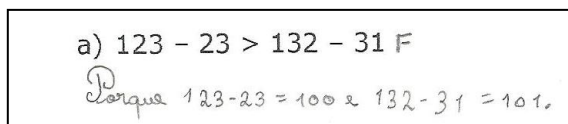
b) $248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5$

c) $243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2$

Figura 274 - Questão 2 da sessão 8.


5.8.2.1. Análise da expressão a) ($123 - 23 > 132 - 31$)

Na primeira expressão todos os alunos identificam a expressão como falsa, mas as justificações que desenvolvem são diferentes. Cinco alunos apresentam os resultados de cada uma das partes da expressão e, deste modo, demonstram compreender que 100 é menor que 101:



a) $123 - 23 > 132 - 31$ F
Porque $123 - 23 = 100$ e $132 - 31 = 101$.

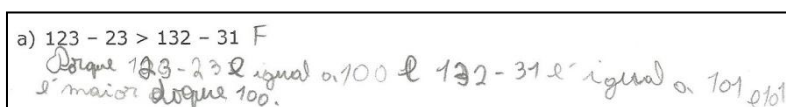
Figura 275 - Resolução de Rafaela.



F a) $123 - 23 > 132 - 31$
₁₀₀ ₁₀₁

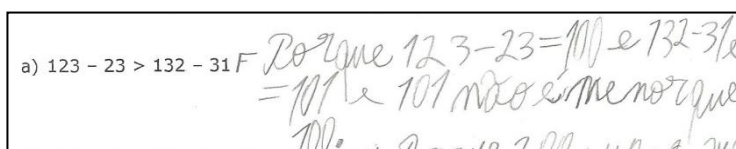
Figura 276 - Resolução de Rafaela.

Nestas duas resoluções, os alunos apresentam as suas estratégias em linguagem matemática, mostrando apenas, tal como já foi referido, o resultado de cada parte da expressão. O grupo seguinte, de seis alunos, regista justificações completas, o que demonstra que conseguem identificar quais os valores maiores ou menores:



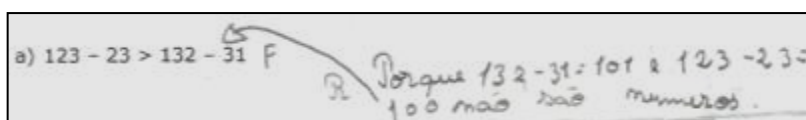
a) $123 - 23 > 132 - 31$ F
Porque $123 - 23$ é igual a 100 e $132 - 31$ é igual a 101, 101 é maior do que 100.

Figura 277 - Resolução de Rafaela.



a) $123 - 23 > 132 - 31$ F Porque $123 - 23 = 100$ e $132 - 31 = 101$ e 101 não é menor que 100. Porque 100 é menor que 101.

Figura 278 - Resolução de João.



a) $123 - 23 > 132 - 31$ F Porque $132 - 31 = 101$ e $123 - 23 = 100$ mas são números.

Figura 279 - Resolução de Tânia.

Nas duas primeiras resoluções os alunos encontram o valor de cada expressão e elaboram uma afirmação sobre se o valor é maior ou menor que outro. Deste modo, apenas compreendemos a resolução de Tânia quando, no momento de discussão coletiva, a aluna apresenta a sua estratégia:

Tânia – Porque 100 é menor que 101.

(...)

Tânia – Professora posso ler o meu?

Investigadora – Podes diz lá.

Tânia – Porque 132 menos 31 igual a 101 e 123 menos 23 é igual a 100.
Não são iguais os números.

Neste caso, a aluna mostra que 100 é menor que 101, mas também justifica dizendo que esta expressão não representa uma igualdade. Este tipo de justificações também se verifica com Laura:

Laura – Professora posso ler a minha resposta?

Investigadora – Lê lá a tua resposta.

Laura – Porque 123 menos 23 não é igual a 132 menos 31.

Outra resolução é de David que apenas afirma que dá outro resultado:



a) $123 - 23 > 132 - 31$ F Porque dá outro resultado.

Figura 280 - Resolução de David.

Apesar da sua justificação não transmitir a compreensão por esta relação, este entendimento surge quando pergunto a todo o grupo como colocaríamos a expressão verdadeira e David consegue responder ao que pergunto:

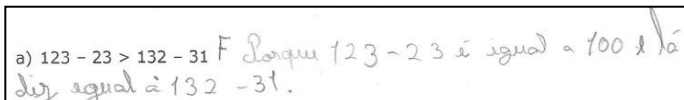
Investigadora – Se nós quiséssemos pôr esta expressão verdadeira o que é que tínhamos que fazer?

David – Trocar o sinal e pôr o sinal de menor.

Investigadora – Ah colocar o sinal de menor. Então como é que ficava? 123...

David – 123 menos 23 é menor do que 132 menos 31.

Neste momento percebe-se que o aluno identifica corretamente os símbolos e compreende esta relação. Por último, apresento a resolução de Mara, que embora tenha colocado a afirmação como falsa, a sua justificação não está correta:



a) $123 - 23 > 132 - 31$ F Porque 123 - 23 é igual a 100 e lá diz igual a 132 - 31.

Figura 281 - Resolução de Mara.

A aluna identifica o sinal como sendo de igualdade e não como símbolo de maior.

5.8.2.2. Análise da alínea b) ($248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5$)

Nesta alínea também nem todos os alunos conseguem perceber a relação, registando a expressão como falsa. Dois alunos, Mauro e Beatriz afirmam que a expressão é falsa:

b) $248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5$ F
 2057 285 15
 2 porque tem metade mais 100

Figura 282 - Resolução de Mauro.

b) $248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5$ V
 e verdade porque 248 vezes cinco não dá 200.

Figura 283 - Resolução de Beatriz.

No caso de Mauro, o aluno terá tentado obter o valor para cada membro da expressão o que o leva a afirmar que a expressão estaria falsa. No caso de Beatriz, a aluna retifica a sua resposta para verdadeira, mas mais uma vez, acaba por não alterar a sua justificação. Neste caso, existe a noção que Beatriz vê o 200 como resultado do primeiro membro da expressão e não como uma igualdade.

Um conjunto de quatro alunos justifica a veracidade da expressão com a mesma expressão e não consegue explicar o porquê de cada uma das partes ser igual:

b) $248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5$ V
 Porque 248×5 é igual 200×5 , 40×5 e 8×5 .

Figura 284 - Resolução de Laura.

b) $248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5$ V
 Porque 248 é igual a $200 + 5 + 40 + 5 + 8 = 248$.

Figura 285 - Resolução de Mara.

No caso de Mara a aluna percebe que o 248 é o mesmo que $200 + 40 + 8$, mas não representa de forma correta e afirma que o segundo membro da expressão é igual a 248. Na discussão em grande grupo, os alunos justificam como apresentam na ficha de trabalho.

Investigadora – Diz lá Laura.

Laura – Porque 248 vezes 5 é igual a 200 vezes 5, 40 vezes 5 e 8 vezes 5.

O próximo conjunto de alunos, três, sente necessidade de efetuar os cálculos e perceber se estavam a falar dos mesmos valores:

b) $248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5$ V
 Porque $248 \times 5 = 1240$ e $200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5 = 1240$.

Figura 286 - Resolução de Rafaela.

$$\checkmark \text{ b) } 248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5$$

$\underbrace{248}_{1240}$
 $\underbrace{200}_{1000}$
 $\underbrace{40}_{200}$
 $\underbrace{8}_{40}$

Figura 287 - Resolução de Duarte

$$\text{b) } 248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5 \checkmark$$

$\underbrace{248}_{1240}$
 $\underbrace{200}_{1000}$
 $\underbrace{40}_{200}$
 $\underbrace{8}_{40}$

$\begin{array}{r} 1000 \\ 200 \\ 40 \\ \hline 1240 \end{array}$

Porque $248 \times 5 = 1240$
 mas se eu juntar tudo
 fica 1240

$$\text{c) } 243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2 \checkmark$$

Figura 288 - Resolução de Tânia.

Na resolução de Rafaela e Duarte, os alunos não apresentam qualquer cálculo, o que leva a crer que desenvolvem cálculos mentais. No caso de Tânia, a aluna apresenta a adição final dos valores, mas olhando com mais atenção percebemos que o resultado de 40×5 não está correto. Apesar disso, Tânia apresenta o resultado final igual.

O último grupo de quatro alunos justifica a existência da relação de igualdade:

$$\text{b) } 248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5 \checkmark$$

Porque no número está 200x5,
 40x5 e 8x5.

Figura 289 - Resolução de David.

$$\text{b) } 248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5 \checkmark$$

Porque $200 + 40 + 8 = 248$

Figura 290 - Resolução de João.

$$\text{b) } 248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5 \checkmark$$

Porque $200 + 40 + 8 = 248$

Figura 291 - Resolução de Tiago.

$$\text{b) } 248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5 \checkmark$$

Porque $200 + 40 + 8 = 248$

Figura 292 - Resolução de Gonçalo.

No caso de David, o aluno apresenta uma justificação em que não se consegue compreender a relação que se estabelece, mas explica corretamente no momento de discussão coletiva:

David – Eu pus verdadeiro. Porque... o número está 200 vezes 5 e depois 40 vezes 5 e 8 vezes 5. E no entanto se somarmos vai dar 248.

Investigadora – Ok, João.

João – 200 mais 40 mais 8 é igual a 248.

João acompanha a explicação de David e compreende porque se fala de uma igualdade. Por outro lado, Tiago, mostra uma compreensão de cada uma das ordens e percebe que existe uma decomposição:

Tiago – o 2 é 200 o 4 é 40 e o 8 é 8. Todos dão 248.

Por último, na resolução de Gonçalo, percebe-se que o aluno para além de encontrar um valor para cada membro da expressão, completa a sua resposta com uma afirmação sobre a existência de uma igualdade entre 248 e $200 + 40 + 8$.

5.8.2.3. Análise da alínea c) ($243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2$)

Tal como vimos em alíneas anteriores, nem todos os alunos conseguem acertar e, neste caso referem que a expressão é verdadeira. Dos alunos que afirmam que a expressão é falsa, algumas justificações acabam por não refletir o porquê da expressão ser falsa. Em primeiro lugar, surge a resolução de Tânia, a única aluna a registar a expressão como verdadeira:

The image shows a student's handwritten work for problem c). The problem is written as $c) 243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2$ with a checkmark. The student has calculated $243 \times 5 = 1215$ and $243 \times 10 = 2430$. There are also some additional calculations and notes: 1215 , 1215 , 2430 , 43 , 243 , $\times 10$, 2430 , and the note "fica 1240". There is also a note "Dan 2430 ao todo."

Figura 293 - Resolução de Tânia.

Tânia resolve cada um dos membros da expressão, contudo não multiplica o segundo membro da expressão por 2, o que faz com que os valores sejam iguais em cada um dos membros. Mesmo assim, a aluna ignora o símbolo apresentado e mostra uma igualdade entre as expressões.

Também Duarte encontra os valores para cada membro da expressão, mostrando que o segundo é maior que o primeiro:

The image shows a student's handwritten work for problem c). The problem is written as $F) c) 243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2$. The student has calculated $243 \times 5 = 1215$ and $243 \times 10 \times 2 = 4860$. There are also some additional calculations and notes: 1215 , 2420 , $2470 +$, and $21 = 2450$.

Figura 294 - Resolução de Duarte.

Nesta resolução percebemos que Duarte desenvolve duas multiplicações, ou seja, em primeiro lugar efetua 243×10 e, de seguida, adiciona 20 (resultado de 10×2). Outra resolução é de Gonçalo que adiciona os fatores de cada membro da expressão, $10 + 2$ e $5 + 2$:

c) $243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2$ F
 Porque o número 12 pode dar um resultado maior.

Figura 295 - Resolução de Gonçalo.

Gonçalo regista a sua resposta de forma incorreta, mas percebe-se que o aluno tem noção que o segundo membro da expressão apresenta valores maiores.

A resolução seguinte é de Beatriz:

c) $243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2$ é falso porque 243 vezes 5 resulta a não do 243.

Figura 296 - Resolução de Beatriz.

Aqui, mais uma vez, a aluna vê o símbolo de maior como uma igualdade e, acima de tudo, olha para o segundo 243 como resultado da expressão, ignorando tudo o resto que vêm a seguir.

Um grupo de quatro alunos segue os passos de Beatriz e justifica a sua escolha como não sendo uma igualdade:

c) $243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2$ F
 Porque $243 \times 5 \times 2$ não é igual a $243 \times 10 \times 2$.

Figura 297 - Resolução de Rafael.

Todos os alunos mostram que a expressão é falsa. No entanto, não fazem qualquer referência ao símbolo de maior, mas sim ao sinal de igualdade. Neste caso podemos afirmar que os alunos estão mais habituados à relação de igualdade.

Por outro lado, Mauro mostra compreender que a diferença entre cada membro da expressão é de 5 valores, mas não faz referência a qual dos lados é maior ou menor:

c) $243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2$ F
 porque tem 5 a mais do que o outro

Figura 298 - Resolução de Mauro.

Outros três alunos referem os valores que existem em cada membro, mas não desenvolvem qualquer relação com o símbolo de maior:

c) $243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2$ F
 Porque $5 \times 2 = 10$ e mais $10 \times 2 = 20$

Figura 299 - Resolução de Rafaela.

c) $243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2$ F. Porque aparece 5x2 e não 10x2.

Figura 300 - Resolução de João.

Por último, aparece Tiago que desenvolve uma justificação tendo em atenção a relação de ordem e não de igualdade:

c) $243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2$ F. Porque o 10 é maior que o 5 e o 2 é igual a 2.

Figura 301 - Resolução de Tiago.

Com esta justificação Tiago mostra que o segundo membro da expressão é maior. No momento de discussão coletiva, e já a caminhar para o final da aula, os alunos conseguem mostrar a razão da expressão ser falsa:

Investigadora - É verdadeira ou falsa.

Vários alunos - Falsa.

Investigadora - Porquê?

Rafaela - Porque 5 vezes 2 é igual a 10, mas 10 vezes 2 é igual a 20.

Investigadora - Então aqui era a mesma coisa que estarmos a multiplicar por quanto?

David - por 10 e por 20.

Investigadora - Diz lá João.

João - porque aparece 5 vezes 2 e não 10 vezes 2.

Também nesta última questão os alunos demonstram compreender a relação de ordem, mas a grande mudança regista-se nas justificações que apresentam porque se relacionam muito com a relação de igualdade. Apesar deste facto, a grande maioria dos alunos resolve com sucesso as expressões apresentadas.

5.8.3. Discussão dos resultados da sessão 8

Ao longo desta sessão os alunos mostram, na sua maioria, compreender tanto a relação de igualdade como a relação de ordem. Detetamos esta compreensão quando afirmam que, perante um sinal de igual, os valores de cada membro da expressão têm que ser sempre iguais. O mesmo acontece ao identificarem um símbolo de maior ou menor e têm a noção que existe sempre um membro da expressão maior que outro. Apesar desta compreensão estar presente na grande maioria dos alunos, alguns ainda tendem a interpretar o sinal de igual como um sinal operacional que demonstra um resultado logo de seguida. Esta

situação é explícita no caso de Beatriz que demonstra não compreender a relação de igualdade como uma relação, mas sim como a apresentação de um resultado. Este facto pode estar relacionado com a chegada tardia desta aluna ao estudo, uma vez que participa apenas nas últimas três sessões. Outra dificuldade que se verifica é que os alunos, para justificarem as relações de ordem nas expressões de verdadeiro e falso recorrem à relação de igualdade, ou seja, numa expressão que apresente um símbolo de maior ou menor, elaboram uma justificação mostrando que as duas partes da expressão não são iguais. Deste modo, podemos afirmar que os alunos estão mais confortáveis com a relação de igualdade, tendo mais dificuldade em justificar as suas respostas quando trabalham com a relação de ordem.

Relativamente às estratégias utilizadas, os alunos centram-se sobretudo em estratégias relacionais, evidenciando pouco estratégias operacionais. Efetuam cálculos mentalmente como é o caso de expressões que envolvem multiplicação por 2, 5 ou 10. Em algumas expressões que envolvem subtração, os alunos fazem um raciocínio de compensação, sem para isso recorrer ao algoritmo.

O uso de raciocínio relacional também se verifica quando os alunos justificam as suas respostas e tentam explicar as relações existentes entre cada membro da expressão. Estas justificações das relações assentam, fundamentalmente, nas expressões apresentadas e em nenhum momento se percebe que os alunos fazem generalizações, quer em linguagem natural, quer em linguagem simbólica.

Para finalizar, penso que os alunos, por se tratar de uma sessão de avaliação das aprendizagens e pelo modo de trabalho ser individual, mostraram mais dificuldades na realização das tarefas propostas, facto que se nota pelo tempo que necessitam para resolver cada uma das questões e também pelos resultados que se evidenciam.

5.9. Análise comparativa entre estudo piloto e estudo principal

Neste ponto pretendo fazer uma comparação entre as resoluções da turma do estudo piloto e do estudo principal, relativamente às três sessões comuns.

5.9.1. Sessão 1

Para a análise da sessão 1, tomo como referência as expressões trabalhadas nas turmas. Deste modo, analiso as cinco expressões comuns aos dois estudos na

questão 1 e todas as expressões na questão 2. Começo por apresentar os quadros que mostram a percentagem de respostas corretas a cada expressão.

Quadro 7 - Desempenho dos alunos das turmas E e F na questão 1 da sessão 1.

Expressões		Respostas certas		Respostas Incorretas	
		Turma E	Turma F	Turma E	Turma F
1	$20 \times \underline{\quad} = 22$	86%	100%	14%	0%
2	$15 = \underline{\quad} + 10$	86%	100%	14%	0%
3	$6 = \underline{\quad} - 12$	22%	8%	78%	92%
4	$\underline{\quad} : 2 = 9$	93%	100%	7%	0%
5	$16 = 8 \times \underline{\quad}$	93%	100%	7%	0%

Quadro 8 - Desempenho dos alunos das turmas E e F na questão 2 da sessão 1.

Expressões		Respostas corretas		Respostas incorretas	
		Turma E	Turma F	Turma E	Turma F
1	$10 + 1 > \underline{\quad}$	93%	100%	7%	0%
2	$\underline{\quad} > 5 \times 2$	71%	92%	29%	8%
3	$10 - 5 > \underline{\quad}$	86%	100%	14%	0%
4	$\underline{\quad} > 18 - 2$	71%	100%	29%	0%
5	$15 : 3 < \underline{\quad}$	79%	92%	21%	8%

Com os dois quadros percebe-se que ambas as turmas estão num patamar bastante positivo de respostas corretas, embora a turma F tenha uma maior percentagem de respostas corretas do que a turma E. Verifica-se, também, que a turma F é mais homogénea relativamente aos resultados obtidos, o que pode estar relacionado com o facto de existir uma maior número de alunos com grandes dificuldades de aprendizagem na turma E.

Analisando o quadro 1 percebemos que a expressão 3 foi aquela em que os alunos mostraram mais dificuldades. O facto dos membros da expressão não estarem posicionados do modo habitual, pode ter influenciado o grande número de respostas incorretas. Relativamente às estratégias utilizadas, as duas turmas recorrem, na grande maioria, a estratégias relacionais, nomeadamente a operação

inversa, decomposição e adição sucessiva de números. Na expressão 1 da questão 1 que os alunos conseguiram fazer a generalização (em linguagem natural) que *multiplicar um número por um dá sempre esse número*.

Também conseguimos detetar diferenças relativamente à dinâmica de sala de aula. Embora as tarefas tenham sido semelhantes, os alunos da Turma E mostram-se mais participativos, muito embora os alunos com mais dificuldade só participem e intervenham quando é pedido. A turma F mostra interesse pela sessão, mas não demonstra tanto à vontade e confiança como a turma E.

5.9.2. Sessão 2

Tal como na sessão 1, esta análise apenas incide nas questões e expressões realizadas nas duas turmas. Para a análise comparativa das duas turmas iremos analisar as questões que foram realizadas na turma F, pelo facto da turma E ter expressões que foram posteriormente retiradas por achar que não seriam tão importantes no estudo principal. Deste modo, o seguinte quadro permite comparar as percentagens de respostas entre cada turma na questão 1:

Quadro 9 - Desempenho dos alunos das turmas E e F na questão 1 da sessão 2.

Expressão numérica		Resultados				Representação na reta			
		Correto		Incorreto		Correto		Incorreto	
		Turma E	Turma F	Turma E	Turma F	Turma E	Turma F	Turma E	Turma F
1	$15 + 5 - 5$	100%	100%	0%	0%	71%	54%	29%	46%
2	$10 - 4 + 4$	93%	100%	7%	0%	71%	54%	29%	46%
3	$3 + 10 - 10$	100%	100%	0%	0%	71%	54%	29%	46%

Verificamos que a turma F encontra o valor correto em todas as expressões e a turma E mostra alguma dificuldade na expressão 2. Contudo, quando observamos as colunas da representação na reta verificamos que a turma E obtém melhores resultados que a turma F. Apesar das percentagens apresentadas, os alunos das duas turmas compreendem a relação de igualdade que se estabelece, chegando a uma generalização que apenas apareceu no momento de discussão

coletiva, uma vez que nas fichas de trabalho os alunos recorrem a exemplos concretos para justificar o seu raciocínio.

No que diz respeito às estratégias utilizadas, a grande maioria dos alunos recorre à reta numérica e à representação pictórica para resolver a questão 2. Também aqui existe uma melhor compreensão por parte da turma F e somente uma aluna não consegue completar o seu raciocínio.

5.9.3. Sessão 3

Nesta última sessão não é possível fazer uma comparação entre os resultados das duas turmas dada a diferença entre as tarefas propostas nos dois estudos.

Capítulo 6

Conclusão

Neste capítulo começo por apresentar a síntese do estudo e as conclusões relacionadas com a relação de igualdade e desigualdade. De seguida apresento o balanço final, tendo em conta o que apresento nas conclusões. Por último, termino com uma reflexão onde refiro cada um dos momentos da investigação e o que foi para mim, enquanto investigadora e professora, trabalhar neste estudo.

6.1. Síntese do estudo

A aprendizagem da Álgebra nos primeiros anos de escolaridade tem vindo a ser cada vez mais valorizada. Esta aprendizagem deve ser desenvolvida em estreita ligação com a Aritmética, através de tarefas diversificadas que promovam a capacidade de raciocinar sobre as relações que se estabelecem. Ganham assim grande importância as propriedades dos números, operações e relações.

Este estudo procura mostrar como se pode desenvolver o raciocínio relacional através da realização de tarefas incidindo nas relações de igualdade e desigualdade e de que maneira se pode ajudar os alunos nesta compreensão. O quadro conceptual foca-se em dois grandes pontos. O primeiro apresenta a noção de *early algebra*, indicando as razões da sua importância no ensino da Álgebra nos primeiros anos. Especial atenção é dada ao raciocínio relacional, mostrando como a ênfase nesta aprendizagem conduz a resultados positivos. É igualmente importante considerar os tipos de tarefas que contribuem para o desenvolvimento deste raciocínio. O segundo aspeto aqui analisado é a importância que a interpretação do sinal de igual tem no raciocínio relacional. Percebemos que os alunos têm que ter a

noção dos diferentes significados do sinal de igual para que esta aprendizagem seja feita com sentido.

Relembro que o principal objetivo do estudo é compreender como pode ser desenvolvido o raciocínio relacional dos alunos do 3.º ano, ao longo de uma experiência de ensino, dando importância às relações de igualdade e desigualdade e à capacidade de generalização das expressões através de tarefas que envolvem quantidades desconhecidas. Para compreender este desenvolvimento procuro responder às seguintes questões:

1. Durante a experiência de ensino, que evolução se regista nos significados dos alunos relativamente às relações de igualdade e de desigualdade? Começam a recorrer a raciocínio relacional em vez de usarem apenas raciocínio operacional?

2. Que generalizações, nomeadamente sobre propriedades matemáticas, os alunos revelam serem capazes de fazer?

3. Que tipo de justificação utilizam os alunos em tarefas que envolvem estas relações?

4. Que estratégias utilizam e que dificuldades apresentam os alunos na resolução das tarefas?

O estudo segue uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo. A modalidade é experiência de ensino, sendo a recolha de dados feita com uma turma do 3.º ano, a partir dum ensaio prévio feito num estudo piloto numa outra turma do mesmo ano.

6.2. Conclusões do estudo

O capítulo 1 apresenta o objetivo do estudo bem como as questões que o estruturam. Com este balanço procuro responder a cada uma das questões tendo em conta a análise feita em cada sessão e perceber de que modo é o objetivo do estudo é conseguido. As respostas às questões de investigação são apresentadas tendo em conta dois aspetos fundamentais, a relação de igualdade e relação de desigualdade.

Questão 1. Evolução nos significados dos alunos relativamente às relações de igualdade e desigualdade e uso de raciocínio relacional e operacional. Antes do início do estudo os alunos reconhecem, com alguma facilidade, o sinal de igual. Mostram-se, naturalmente, habituados a trabalhar com a expressão mais comum, $a + b = c$, tal como é referido por Carpenter, Franke e Levi (2003). Para além

disso, costumam solucionar os problemas através dos algoritmos e apenas David utiliza estratégias relacionais. Relativamente à relação de ordem, os alunos já tinham contactado com os sinais que lhe estão associados em anos anteriores.

Na sessão de diagnóstico os alunos identificam as expressões de igualdade e, na grande maioria, os resultados são 100% positivos, mostrando que os alunos conseguem encontrar o valor omissos. Para além disso, através das estratégias relacionais que os alunos usam, verificamos que recorrem com mais facilidade ao raciocínio relacional do que ao operacional. Na relação de desigualdade, os alunos também conseguem identificar os símbolos de maior e menor e, na grande maioria, encontram valores omissos corretos para as expressões. Nesta primeira sessão, também elaboram generalizações de modo intuitivo, o que leva a crer que possuem alguma compreensão sobre as propriedades dos números, embora não as identifiquem. Em toda a sessão, os alunos relacionam as justificações com as expressões que estão a trabalhar, mas não as conseguem alargar para outros casos, falando simplesmente em casos concretos.

Inicialmente, estava previsto que os alunos recorressem a mais estratégias computacionais, tanto na relação de igualdade como também na relação de desigualdade facto que não se verificou pois somente uma aluna recorreu ao algoritmo para encontrar ou justificar o seu valor omissos. As principais dificuldades demonstradas pelos alunos relacionam-se com o facto de procurarem usar a propriedade comutativa em expressões que envolvem a subtração.

Nas sessões seguintes onde a relação de igualdade é trabalhada (sessões 2, 4, 5, 6, 7) a grande maioria dos alunos recorre a raciocínio relacional, conseguindo analisar as expressões através das relações que se estabelecem e indo mais além do que apenas ver o resultado de uma expressão. É verdade que em alguns momentos muitos alunos recorrem a raciocínio operacional (sessões 3 e 7), mas isso não acontece com tanta frequência. Na sessão 3, por ser dedicada exclusivamente à relação de desigualdade, os alunos sentem necessidade de determinar o valor de cada membro da expressão para identificar qual deles é maior. Para obter esses valores, os alunos optam por recorrer ao algoritmo. Na sessão 7, recorrem ao raciocínio operacional porque, na grande maioria dos casos, trata-se de expressões que envolvem a divisão e onde sentem necessidade de encontrar o valor omissos através do algoritmo. Deste modo, podemos afirmar que os alunos têm confiança com o uso do raciocínio relacional e tentam desenvolver estratégias que lhes permitem compreender e interpretar as relações existentes em cada uma das expressões.

Questão 2. Generalizações. Os alunos não conseguem apresentar generalizações em todas as sessões, existindo momentos onde não evidenciam

qualquer tipo de frase ou expressão que demonstre uma generalização. Na grande maioria dos casos, as generalizações são apresentadas em linguagem natural, sendo realizadas no momento de discussão coletiva. Em alguns casos pontuais, essas generalizações são feitas de forma natural, por alguns alunos, e sem qualquer ajuda. Estas generalizações são feitas tendo como base a relação que se estabelece entre os números e as operações (sessões 2, 5, 6 e 7).

Questão 3. Justificações. Outra questão do estudo refere-se às justificações que os alunos utilizam. Estas justificações são realizadas tendo em conta exemplos concretos apresentados em cada uma das sessões e para descrever o que reflete a expressão. Ou seja, os alunos elaboram uma descrição sobre a expressão, em vez de explicar o porquê daquela relação existir. Estas justificações tanto são apresentadas em linguagem natural como em linguagem simbólica. Nas últimas sessões existem situações onde os alunos recorrem a uma justificação oral diferente da que apresentam na ficha de trabalho, o que nos leva a crer que estas justificações aparecem para complementar o que é dito por escrito.

Questão 4. Estratégias e dificuldades dos alunos. Na resolução de cada uma das tarefas as estratégias utilizadas pelos alunos são, na sua maioria, relacionais. Nas sessões onde são apresentadas representações diferentes (sessões 2 e 4) os alunos utilizam os modelos da reta numérica e modelo retangular para as restantes questões. A representação pictórica, a decomposição de fatores, a operação inversa, bem como a adição e subtração sucessivas estão sempre presentes ao longo das sessões. Contudo, os alunos também utilizam estratégias operacionais. Identifica-se o uso dos algoritmos nas sessões em que os alunos recorrem ao raciocínio operacional (sessões 3 e 7). Desta forma, pode afirmar-se que a forma como os alunos raciocinam está diretamente relacionada com as estratégias que apresentam.

Relativamente às dificuldades apresentadas, verificamos que nas primeiras questões os alunos mostram dificuldade em identificar corretamente os símbolos associados à relação de ordem, o que já não se verifica na última sessão. As maiores dificuldades envolvem a capacidade de justificar as relações que surgem em cada expressão. Outras dificuldades surgem quando aparecem representações para os quais os alunos ainda não estão preparados e não conseguem relacionar com as representações que conhecem (sessão 5). Quando são apresentados problemas com um enunciado, os erros que os alunos apresentam refletem dificuldades de interpretação (sessão 6). Também verificamos que os alunos não conseguem, de forma autónoma, chegar a uma generalização e têm dificuldade em abstraírem-se de exemplos concretos para justificar as relações existentes.

6.3. Balanço final

A grande maioria dos alunos consegue reconhecer as relações que são trabalhadas e interpreta corretamente tanto o sinal de igual como o de maior e menor. Os alunos deixam de interpretar a relação de igualdade numa conceção limitada, apenas como resposta a um cálculo (Carpenter, Franke, & Levi, 2003), e demonstram desenvolver capacidades para raciocinar matematicamente compreendendo as relações estabelecidas (Carpenter, Levi, Franke & Zeringue, 2005). No final das sessões, os alunos conseguem olhar para as expressões e reconhecer as relações existentes entre os números e as operações e desenvolvem a capacidade de resolver questões não apenas por raciocínio operacional, mas também relacional. Desta forma, a sua aprendizagem da Aritmética é muito mais significativa conduzindo-os a uma melhor aprendizagem da Álgebra, tal como referido no estudo de Carpenter, Franke e Levi (2003). Tal como indicam Valverde e Vega-Castro (2013) os alunos conseguem aliar o sentido estrutural das expressões com o raciocínio relacional, ou seja, observam muito mais as relações e a estrutura das expressões de modo a tentar resolvê-las sem recorrer a raciocínio operacional.

Relativamente às justificações apresentadas, verifica-se que os alunos sentem dificuldade em justificar e explicar a razão de escolherem determinados números. Usam maioritariamente a expressão com a qual trabalham para justificar a sua escolha e não tentam generalizar ou justificar através de outros exemplos. Tal como referem Carpenter, Franke e Levi (2003), os alunos têm dificuldade em justificar sem recorrer a casos específicos. Também neste estudo esta situação se verifica. Nos casos em que os alunos conseguem desenvolver generalizações demonstram ter um conhecimento das propriedades para explicar os procedimentos. Diversos autores (e.g., Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011; Carpenter, Levi, Franke & Zeringue, 2005) afirmam que nas tarefas que envolvem valor omissivo ou verdadeiro e falso, os alunos tomam consciência das propriedades, mesmo não tendo total conhecimento sobre elas e não sabendo o seu nome. Tal como acontece noutros estudos (e.g., Carpenter, Franke e Levi, 2003; Carpenter, Levi, 2000), também nesta investigação as primeiras generalizações estão relacionadas com o número 0. Relativamente à dinâmica que se criou para que as generalizações se desenvolvessem, torna-se importante referir que os alunos eram encorajados a partilhar as suas ideias, para que os colegas conseguissem compreender o que o aluno fez. Tal como no estudo de Ellis (2011), as generalizações eram elaboradas em momentos de discussão coletiva, através de debates e partilha de ideias. Também nestes momentos de discussão coletiva, foram criadas expressões generalizáveis, mas que apenas surgem quando é pedido,

de forma explícita, para criar uma frase ou expressão que demonstre o que foi feito, ou seja, não conseguem utilizar símbolos e criar expressões generalizadas com autonomia (Arcavi, 2006).

Ao longo de todas as sessões, privilegiam estratégias relacionais. Inicialmente, e tal como já referi, alguns recorrem a estratégias computacionais para encontrar o valor omissso. Contudo, ao longo das sessões optam normalmente por estratégias relacionais, muito embora todas as tarefas pudessem ser realizadas através de estratégias computacionais. Tal como em estudos de Stephan e Wang (2008) este tipo de tarefas promove o raciocínio relacional porque os alunos compreendem as relações e porque se pede que descrevam as relações que se evidenciam em cada uma das expressões. Percebemos também que, tal como no estudo de Carpenter, Franke e Levi (2003), com este tipo de tarefas os alunos procuram o valor omissso ou tentam perceber qual é a veracidade da expressão através de raciocínio relacional e desenvolvem estratégias de simplificação de cálculos para solucionar questões aritméticas. Apesar disso, algumas dessas estratégias acabam por não estar corretas, nomeadamente em algumas expressões que envolvem a subtração. Nas questões de valor omissso, os alunos, numa fase inicial, generalizam a propriedade comutativa da adição para expressões que envolvem a subtração. Nestas situações, têm consciência da existência desta propriedade e que esta pode ser utilizada para simplificar cálculos, mas não compreendem que ela não se aplica à subtração (Fuson et al., 1997). Outro aspeto que é importante analisar são os erros cometidos por uma aluna, Beatriz, que apenas chegou nas últimas sessões do estudo e que não se verificam em mais nenhum aluno nas últimas sessões. A aluna não interpreta a relação de igualdade do mesmo modo dos colegas e vê o sinal de igual como resposta a um cálculo. Esta dificuldade esteve presente na relação de ordem onde a aluna não compreende que um membro da expressão tem que ser maior que outro.

Ao longo do estudo, houve uma melhoria significativa no trabalho a pares. Os alunos conseguem trabalhar cada vez mais em conjunto e desenvolvem uma só resolução em vez de cada um trabalhar na sua resolução. Com estas sessões, os alunos recorrem muito menos a raciocínio operacional, conseguindo tirar partido das relações que cada expressão apresenta. Verifica-se que um trabalho baseado na discussão em grande grupo, com partilha de ideias, ajuda os alunos na justificação das suas estratégias. Registou-se uma melhoria na apresentação de estratégias dos alunos e, mesmo no caso de estratégias que são diferentes das apresentadas pelo grande grupo, os alunos sentem necessidade de partilhar para compreenderem se a sua resolução está correta (Bishop & Goffree, 1986). Também nos momentos de discussão coletiva os alunos tentam perceber os erros dos

colegas e compreender o que pode ser alterado ou melhorado. É nesta partilha de estratégias e nas explicações que os alunos desenvolvem para mostrar o que fazem, que se regista uma melhoria significativa ao longo do estudo. Se em sessões específicas a atenção e concentração dos alunos estava quebrada, de um modo geral, procuraram sempre mostrar o que cada par tinha feito e como tinham solucionado as tarefas apresentadas. Se este tipo de tarefas for usual, o processo de generalização poderá tornar-se mais autónomo, passando a ser uma prática recorrente para os alunos.

6.4. Reflexão final

Neste capítulo apresentei os resultados do estudo e o que consegui identificar relativamente às aprendizagens dos alunos. Contudo, para além das conclusões anteriormente mencionadas, falta referir o que aprendi enquanto investigadora e professora. Esta reflexão tem como objetivo ajudar-me a fazer uma retrospectiva do que foi conseguido na investigação, bem como, o que pode ser melhorado em estudo futuros.

Enquanto investigadora, as diferentes fases de trabalho foram muito importantes. Inicialmente dei grande atenção à formulação dos objetivos e questões de estudo, bem como com a organização do quadro conceptual. Esta fase inicial permitiu-me organizar e refletir sobre as ideias que queria desenvolver e fazer as leituras necessárias para que pudesse aprofundar mais sobre os temas de estudo, mas também para me ajudar a planear a fase seguinte. Nesta fase tive a dificuldade em encontrar literatura sobre a relação de desigualdade, mas mesmo assim não deixou de ser um tema muito importante ao longo de todo o estudo. Após este momento de leitura e organização do quadro conceptual comecei a planear cada sessão e perceber o que pretendia em cada uma. Estas duas fases iniciais ajudaram-me a antecipar as estratégias e a maneira como os alunos poderiam reagir às diferentes tarefas apresentadas.

O momento de recolha de dados foi uma experiência nova enquanto investigadora. Foi muito enriquecedor trabalhar com estas duas turmas, bem como com a professora que as acompanhava. Contudo, nesta fase também existiram dificuldades que foram sendo ultrapassadas ou contornadas. Uma das maiores dificuldades prendeu-se com o tempo limitado para cada uma das sessões. Embora sejam 90 minutos, em alguns momentos o tempo acabou por ser insuficiente para desenvolver as tarefas um pouco mais. A gestão do tempo, entre a realização da tarefa a pares e a sua discussão em grande grupo acabou por não ser um aspeto tão conseguido. Para além disso o facto de ter o papel de investigadora e

professora ao mesmo tempo acabou por tirar muita da minha atenção e, em muitos casos, houve informação que se perdeu porque não consegui estar com lentes de investigadora porque muitos aspetos só os consegui observar já na fase da transcrição dos dados.

Após a fase de recolha de dados, a sua análise torna-se muito interessante e bastante trabalhosa. Nesta fase pude perceber como se elaboravam as categorias de análise e compreender como iria organizar todos os dados que tinha. Tornou-se muito difícil, mas ao mesmo tempo interessante, tentar compreender para que categorias colocaria determinadas resoluções que os alunos realizavam, sabendo à partida que as categorias estavam interligadas e que, em muitos casos, a informação não era tão explícita como por vezes se pretende.

A outra reflexão que faço é enquanto professora. Foi bastante enriquecedor poder voltar a uma sala de aula e estar diante de uma turma novamente e poder desenvolver um trabalho que apela ao raciocínio de cada aluno acreditando nas suas capacidades e tendo consciência que podem sempre atingir o que se pretende. Ou seja, no final deste estudo, compreendo que os alunos podem efetivamente, raciocinar para além do óbvio e não identificar apenas as relações simples e triviais. Consigo compreender que esta maneira de encarar as relações de igualdade e de desigualdade traz realmente frutos, tanto a longo como a curto prazo porque os alunos enriquecem o seu raciocínio e desenvolvem a sua maneira de justificar e expor as suas estratégias. A dinâmica de sala de aula também me trouxe novidades e me fez crescer enquanto professora, compreendendo que o trabalho a pares desenvolve capacidades que o trabalho individual não consegue. A partilha de ideias, o desenvolvimento de um trabalho em conjunto tentando chegar a um consenso são aspetos que não se desenvolvem quando o trabalho é mais solitário. A discussão em grande grupo também me mostrou que a aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio tem que passar por este momento de aula. Desde cedo, os alunos aprendem a respeitar as opiniões dos colegas e, acima de tudo, a refletir sobre o trabalho que é realizado. Percebi que os alunos podem assim ganhar confiança para defender o seu trabalho ou até mesmo ficarem conscientes sobre as mudanças que podem realizar.

Penso que existem muitas coisas que ficaram por abordar mas que seria impossível abarcar numa única investigação. Acredito que esta investigação pode ser o início de futuros estudos na área do raciocínio relacional continuando a explorar a relação de igualdade, e também a relação de desigualdade até porque não existem grandes estudos sobre estas duas relações em conjunto.

Se voltasse a realizar o estudo faria algumas coisas de modo diferente. Embora tenha crescido como investigadora, e também como professora, esta

reflexão ajuda-me a compreender que existem alguns pontos que podem e devem melhorar em futuros estudos. Em primeiro lugar, penso que deverá existir uma separação entre o papel de professora e de investigadora. Penso que é importante conseguir observar e identificar tudo o que os alunos fazem, tendo apenas o olhar de observadora. Senti falta também de realizar entrevistas a alguns alunos para conseguir perceber melhor os seus raciocínios. Mais uma vez, em estudos futuros, penso que analisar uma turma por inteiro não mostra de forma pormenorizada se os objetivos foram alcançados. A meu ver, os estudos de caso podem também mostrar uma realidade que neste estudo não consegui perceber porque a minha análise tem por base toda a turma e não me foquei num grupo específico. Por último, se continuar a desenvolver este estudo gostaria de continuar a investigar as duas relações por igual. Tenho noção que a relação de igualdade tem mais importância e é trabalhada de forma vertical ao longo dos anos, mas também acredito que com relação de ordem podemos ajudar os alunos a tomar consciência das inúmeras possibilidades de resolução que podem surgir.

Referências

- Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: DES – ME.
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores (pp. 29- 48)*. Lisboa: SEM-SPCE.
- Bardin, L. (2011). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70, Lda.
- Bishop, A., & Goffree, F. (1986). *Classroom organization and dynamics*. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education (pp. 309-365)*. Dordrecht: D. Reidel, (Tradução de José Manuel Varandas, Hélia Oliveira e João Pedro da Ponte)
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. J. (2011). Early algebra: the big ideas and essential understanding. In Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. J. (Eds.), *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM. p. 7-31.
- Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Brocardo, J. (2011). Uma linha de desenvolvimento do cálculo mental: começando no 1.º ano e continuando até ao 12.º ano. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro & J. P. Ponte (Eds.), *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. APM (pp.17-29).
- Canavarro, A., P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante 2*, 81 – 118.
- Carpenter, T, Levi. L., Franke, M. L., Zeringue, J.K. (2005). Algebra in elementary school: developing relational thinking. *ZDM*, 37(7), p. 53- 59.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carpenter, T. P., Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. NCISLA/Mathematics & Science - University of Wisconsin–Madison.
- Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 669-705)*. Reston, VA: NCTM e IAP.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13.

- Ellis, A., B. (2011). Generalizing-promoting actions: how classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(4),308 – 345.
- Fuson, C. K., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit *addition and subtraction*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2, 130-162.
- Gravemeijer, K. (2005). *What makes mathematics so difficult, and what can we do about it?* In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.
- Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning?. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317- 326.
- Long, M. J., & Ben-Hur, M. (1991). Informação sobre a aprendizagem através da entrevista clínica. *Arithmetic Teacher*, XX, 157-167.
- Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: Um estudo com alunos do 1.º ciclo*. (Tese de Doutoramento em Educação, Didática da Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa).
- Mestre, C., & Oliveira, H. (2011). Compensação e variação: um estudo sobre o pensamento relacional de alunos do 4.º ano de escolaridade. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte, (Eds.), *EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 195-218). Lisboa: SPIEM.
- ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.
- ME (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: ME.
- Molina, M., Castro, E.,& Castro, H. (2009). Elementary student's understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(7), 341-368.
- Molina, M. (2006). *Desenrrollo de pensamento relacional y comprensión del signo igual por alunos de terceiro de educación primaria*. (Tese de Doutoramento, Didática da Matemática, Universidade de Granada, Granada).
- National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- National Council of Teachers of Mathematics (1944). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: IIE e APM.
- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J.P., Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Skovsmose, O. (2000). *Cenários para investigação*. *Bolema*, 14, 66-91.

- Stein, M. K. & Smith, M.S. (1998). *Mathematical tasks as a framework for reflection from research to practice*. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275 (tradução);
- Stephens, M., & Wang, X. (2008). Investigating some junctures in relational thinking: a study of year 6 and year 7 students from Australia and China. *Journal of Mathematics Education*, 1(1), 28-39.
- Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: preservice elementary teacher's awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 249-278.
- Valverde, G., Vega - Castro, D. (2013). Acerca de las nociones sentido estructural y pensamiento relacional. In L. Rico, M. C. Cañadas, . Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigacion en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 119 - 125). Granada. Espanha: Editorial Comares.

Anexos

Anexo 1 - Planificação da unidade de Ensino e quadro com a evolução dos tópicos ao longo das da sessões

Sessões	Tópicos a desenvolver	Objetivos	Natureza das Tarefas	Modo de trabalho	Duração
Sessão 1 Ficha Diagnóstica;	Relação de igualdade e relação de ordem; Entendimento dos sinais de igual e símbolo de maior e menor; Números pequenos até 20.	Avaliar a compreensão do sinal de igual e símbolo de maior e menor; Identificar e analisar as estratégias utilizadas, detetando o uso do raciocínio relacional ou do raciocínio computacional; Perceber se existe dificuldade com alguma operação aritmética.	Tarefa diagnóstica envolvendo a adição, subtração, multiplicação e divisão (4 questões cada uma); Tipo de tarefas: exercícios	Individual;	90 min
Sessão 2 Descobre as igualdades	Relação de igualdade; Questões de valor omissos no 2.º membro da expressão; Números pequenos até 20;	Ser capaz de compreender a reta numérica como estratégia de cálculo, e utilizá-la para entender a relação entre os números de cada expressão; Ser capaz de entender que ao subtrair e adicionar o mesmo número o valor inicial não se irá alterar; Ser capaz de falar sobre as relações que são estabelecidas; Ser capaz de desenvolver estratégias de resolução do problema, sem recorrer a cálculos; Ser capaz de reconhecer as diversas estratégias utilizadas como válidas.	Tarefas de aprendizagem envolvendo: - a adição e a subtração na mesma expressão(4 questões); - estratégias de compensação. Tipo de tarefas: exercícios e problemas.	Trabalho de pares	90 min
Sessão 3	Relação de ordem; Questões de valor omissos no 1.º e 2.º membros da expressão; Uso dos sinais de <, > ou =. Números grandes entre 20 e 55.	Ser capaz de utilizar os símbolos de >, < ou = estabelecendo relações corretamente, de modo a que a expressão fique verdadeira; Ser capaz de arranjar valores tendo em atenção os símbolos apresentados; Ser capaz de transpor o que é dito em linguagem natural para linguagem matemática; Ser capaz de elaborar um raciocínio de compensação, analisando as expressões numéricas e procurando as relações entre os números. Elaborar novas expressões através do mesmo raciocínio de compensação.	Tarefas de aprendizagem envolvendo: - expressões com uma operação; - adição e subtração (três expressões com adição e três expressões com subtração); Tipo de tarefas: exercícios e problemas.	Trabalho de pares	90 min
Sessão 4 A estratégia da Maria	Relação de igualdade; Expressões valor omissos no 2.º membro; Números grandes entre 100 a 251.	Reconhecer e saber usar o modelo retangular; Ser capaz de decompor um dos fatores em números mais pequenos para ajudar no cálculo; Ser capaz de compreender a propriedade distributiva, mesmo não sendo formalmente; Ser capaz de encontrar outras estratégias de resolução, sem recorrer a cálculos.	Tarefas de aprendizagem envolvendo: - a adição e a multiplicação. - o uso das propriedades das operações; Tipo de tarefas: problemas.	Trabalho a pares	90 min
Sessão 5	Relação de igualdade; Questões de verdadeiro e falso;	Ser capaz de reconhecer a relação que se estabelece entre os elementos da primeira parte da expressão, com os elementos da segunda parte; Ser capaz de decompor fatores, como ajuda para a	Tarefas de aprendizagem envolvendo: - a multiplicação e divisão; Tipo de tarefas: problemas.	Trabalho a pares	90 min

	Expressões com dois a três termos. Números grandes entre 100 a 251	resolução da expressão; Ser capaz de transformar em linguagem natural ou simbólica as expressões apresentadas; Ser capaz de criar mais expressões envolvendo esta estratégias de decomposição.			
Sessão 6	Relação de igualdade e desigualdade; Questões de valor omissivo 1º e 2º membro; Questões de verdadeiro e falso; Expressões com três a quatro e cinco termos.	Ser capaz de encontrar as diferentes estratégias de resolução do problema (formas de compor as cadeiras para a festa de natal); Ser capaz de fazer generalizações através de linguagem natural e simbólica. Ser capaz de reconhecer a relação que se estabelece entre os elementos da primeira parte da expressão, com os elementos da segunda parte; Ser capaz de reconhecer o uso das propriedades na resolução da expressão. Ser capaz de justificar as relações existentes e referir a estreita ligação dos números com as operações utilizadas.	Tarefas de aprendizagem envolvendo: - representação tabular; - a adição, subtração, multiplicação e divisão; - uso das propriedades; Tipo de tarefas: problemas.	Trabalho a pares	90 min
Sessão 7 "Pensa num número"	Questões de valor omissivo; Generalização em linguagem natural e simbólica; Expressões com quatro a cinco termos.	Ser capaz de estabelecer relações entre os números envolvidos, percebendo que ao utilizar as operações inversas o número irá continuar igual; Ser capaz de entender que isto acontece para qualquer número e a partir daí conseguir generalizar em linguagem natural através das diferentes etapas que são pedidas.	Tarefas de aprendizagem envolvendo: - adição, multiplicação, subtração e divisão; - três a quatro operações na mesma expressão; - o uso das propriedades das operações; Tipo de tarefas: tarefas de exploração.	Trabalho a pares	90 min
Sessão 8 Avaliação Final	Relação de ordem e de igualdade; Propriedades das operações; Generalização;	Identificar que aprendizagens foram conseguidas ao longo da unidade de ensino; identificar	Tarefas de avaliação envolvendo a adição, multiplicação, subtração e divisão. Tipo de tarefas: exercícios.	Trabalho individual	90 minutos

Quadro com a evolução dos tópicos ao longo das sessões

	1.º Sessão Diagnóstico	2.º Sessão	3.º Sessão	4.º Sessão	5.º Sessão	6.º Sessão	7.º Sessão	8.º Sessão Avaliação
Operações aritméticas	4 operações aritméticas;	2 operações aritméticas– adição e subtração;	2 operações aritméticas– adição e subtração;	2 operações aritméticas- adição e multiplicação;	2 operações aritméticas – Multiplicação e divisão;	4 operações aritméticas adição, multiplicação, subtração e divisão;;	4 operações aritméticas-	4 operações aritméticas;
Relação	Relação de igualdade; Relação de ordem;	Relação de igualdade;	Relação do ordem;	Relação de igualdade;	Relação de igualdade	Relação de ordem; Relação de igualdade;	Relação de igualdade	Relação de igualdade; Relação de ordem;
Operações apresentadas	1 operação em cada expressão;	2 operações em cada expressão;	2 operações em cada expressão;	2 a 3 operações	2 a 3 operações	2 a 3 operações	3 a 4 operações;	2,3 e 4 operações em cada expressão
Grandeza dos números	Números pequenos (até 20);	Números pequenos (até 20);	Números grandes (de 20 até 55);	Números grandes (de 100 até 251);	Números grandes (a partir do 100);	Números grandes (entre 100 a 2500);	Números grandes	Números pequenos, médios e grandes
Tipo de questão	Questões de valor omissivo no 1.º e 2.º membro;	Questões de valor omissivo 2.º membro;	Questões de valor omissivo – 1.º e 2.º membro ;	Questões de valor omissivo 2.º membro;	Questões de verdadeiro e falso;	Valor omissivo no 1º e 2.º membro; Questões de verdadeiro e falso	Questões de valor omissivo 2.º membro;	Questões de valor omissivo no 1.º e 2.º membro; Questões de verdadeiro e falso
Termos das expressões	Expressões com 3 termos;	Expressões com 3 termos;	Expressões com 3 e 4 termos;	Expressões com 3 e 4 termos;	Expressões com 5 termos;	Expressões com 3, 4 e 5 termos;	4 a 5 termos em cada expressão	Expressões com 3, 4 e 5 termos
Estratégias	Estratégias relacionais ou computacionais	Compensação	Compensação	Decomposição de fatores (propriedade distributiva)	Decomposição; Uso das propriedades; Generalização em linguagem natural ou simbólica;	Uso das propriedades – comutativa e associativa. Generalizações em linguagem natural.	Decomposição; Uso das propriedades; Generalização em linguagem natural	Compensação Decomposição; Uso das propriedades; Generalização em linguagem natural
Representações	Linguagem natural na justificação	Reta numérica; Linguagem natural	Linguagem natural e linguagem matemática.	Modelo Retangular; Linguagem natural	Linguagem natural	Representação tabelar Linguagem natural	Linguagem natural	Linguagem natural, linguagem matemática, reta numérica, modelo retangular.

Anexo 2 - Ficha de trabalho n.º 1

Sessão 1 – Tarefa Diagnóstica
Experiência de Ensino – Turma F/ 3.ºAno

Nome: _____ Data: ___/___/___

1. Completa cada uma das expressões com o valor em falta de modo a torná-las verdadeiras. Justifica a tua resposta.

$20x \text{ ______} = 20$	
$15 = 5 + \text{ ______}$	
$6 = \text{ ______} - 12$	
$\text{ ______} : 2 = 9$	
$16 = 8x \text{ ______}$	

2. Completa com o valor que falta, de acordo com os sinais, de modo a que a expressão fique verdadeira. Justifica a tua resposta.

$10+1 > \underline{\quad}$	
$\underline{\quad} < 5 \times 2$	
$10-5 > \underline{\quad}$	
$\underline{\quad} > 18-2$	
$15:3 < \underline{\quad}$	

Anexo 3 - Ficha de trabalho n.º 2

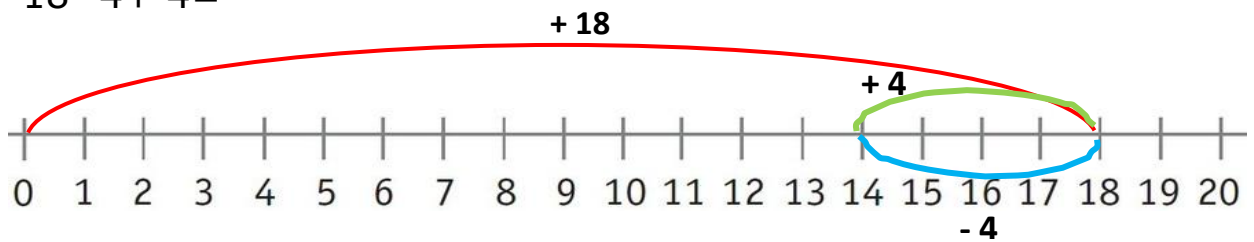
Sessão 2

Experiência de Ensino – Turma F/ 3.ºAno

Nome: _____ Data: ___/___/___

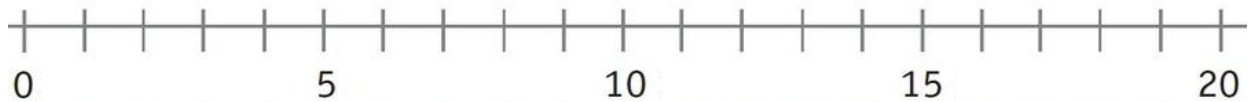
1. Na turma da Inês, os alunos resolveram as expressões que a professora apresentou da seguinte maneira:

$18 - 4 + 4 =$

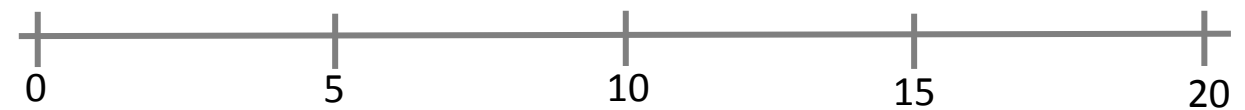


1.1 Resolva as seguintes expressões através da mesma estratégia.

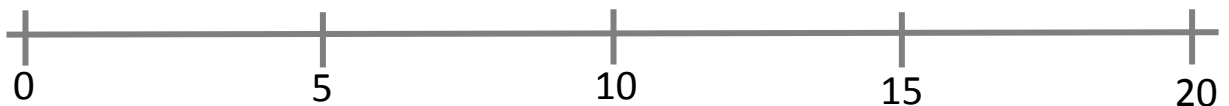
$15 + 5 - 5 =$



$10 - 4 + 4 =$



$3 + 10 - 10 =$



1.2. Consegues descobrir a relação existente em cada uma das expressões?

2. No dia do corta mato, os alunos da turma do 3^o F participaram nesta atividade. Ao longo do percurso existem várias estacas numeradas que vão indicando o caminho. A estaca que se encontra na meta é a número 30.

Na primeira volta, enquanto o Lucas estava na estaca número 11, a Clarisse estava na estaca 25. Quantas estacas faltam ao Lucas para conseguir ficar junto da Clarisse.



2.1. Descobre o número que falta sem recorrer a cálculos. Justifica a tua resposta.

Anexo 4 - Ficha de trabalho n.º 3

Sessão 3

Experiência de Ensino – Turma F/ 3.ºAno

Nome: _____ Data: ___/___/___

1. Indica, para cada um dos casos os valores que tornam as afirmações verdadeiras.

a) $___ + 12 < 27$

b) $26 > 6 + ______$

c) $30 > ______ - 11$

2. Completa cada uma das questões com os sinais de $<$, $>$ ou $=$ para que se tornem verdadeiras. Justifica a tua resposta.

$$38 + 45 ______ 40 + 43$$

$$40 + 45 ______ 41 + 45$$

$$39 + 42 ______ 40 + 43$$

$$52 - 25 ______ 50 - 25$$

$$52 - 29 ______ 52 - 27$$

3. A Mariana estava com o seu colega Diogo a resolver as algumas expressões numéricas.

Na expressão $20+2> \underline{\quad}$ a Mariana encontrou o valor 20 e o Diogo respondeu $10+2$. Ambos tinham a resposta correta. Explica porquê.

4. A Joana estava a ver a sua coleção de cromos e percebeu que dos 30 cromos que tinha, 10 cromos eram repetidos e deu-os ao seu irmão Rodrigo.

O irmão foi contar o total de cromos que tinha e disse à Joana: *Com os cromos que me deste fiquei com mais cromos do que tu.*



$$30-10 \underline{\quad} \underline{\quad}$$

4.1. Completa a expressão que demonstre o que o Rodrigo disse. Explica porquê.

Anexo 5 - Ficha de trabalho n.º 4

Sessão 4

Estudo Principal – Turma F/ 3.ºAno

Nome: _____ Data: ___/___/___

A estratégia da Maria

1. A Maria, para calcular a expressão 5×123 , recorreu ao esquema seguinte:

X	100	20	3
5	500	100	15

$$5 \times 123 = 500 + 100 + 15 = 615$$

1.1. Consegues explicar a estratégia que a Maria utilizou para resolver a expressão? Justifica a tua resposta

1.2. Se a expressão for 8×458 , será que conseguimos utilizar o mesmo modelo?

1.3. Consegues arranjar outra estratégia para resolver a expressão sem recorrerem ao algoritmo?

Anexo 6 - Ficha de trabalho n.º 5

Sessão 5

Estudo Principal – Turma F/ 3.ºAno

Nome: _____ Data: ___/___/___

1. Na turma do 3.º ano, alguns alunos decidiram resolver as expressões, sem recorrerem a cálculos. Observa como fizeram:

Rita



Quero calcular 150×6 e sei que 150×2 é igual a 300 e 300×3 é igual a 900.

$$\text{Então } 150 \times 6 = 150 \times 2 \times 3 = 900$$

Mariana



Quero calcular 120×20 e sei que 120×10 é igual a 1200 e 1200×2 é igual a 2400.

$$\text{Então } 120 \times 20 = 120 \times 10 \times 2 = 2400$$

Pedro



Quero calcular $80 : 8$ e sei que $80 : 2$ é igual a 40 e $40 : 4$ é igual a 10.

$$\text{Então } 80 : 8 = 80 : 2 : 4 = 10$$

André



Quero calcular $100 : 4$, mas não consigo.

Ah! Mas sei bem que $100 : 2$ é 50 e $50 : 2 = 25$.

$$\text{Então } 100 : 2 : 2 = 25$$

$$100 : 4 = 100 : 2 : 2 = 25$$

1.1. Estes alunos utilizaram as mesmas estratégias para resolver as expressões. Explica essa estratégia.

1.2. Consegues arranjar mais exemplos que comprovem esta estratégia? Justifica a tua resposta.

2. Os colegas da turma continuaram a usar esta estratégia para resolver as expressões numéricas. Descobre as que são verdadeiras e as que são falsas. Justifica a tua resposta.

a) $200 \times 15 = 200 \times 10 + 5 = 2005$

b) $480 : 20 = 480 : 10 : 2 = 24$

c) $240 : 8 = 240 : 4 : 4 = 15$

Anexo 7 - Ficha de trabalho n.º 6

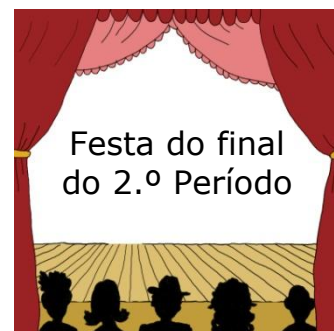
Sessão 6

Estudo Principal – Turma F/ 3.ºAno

Nome: _____ Data: ____/____/____

1. Na escola da Luana, todas as turmas vão fazer uma atividade para a festa de final do 2.º Período. Para receber os pais no grande dia, vão ser colocadas 100 cadeiras no polidesportivo.

1.1. Quantas filas, como o mesmo número de cadeiras, se podem fazer com as 100 cadeiras. Explica o teu raciocínio.



1.2. No dia da festa, os alunos optaram por fazer 4 filas com 25 cadeiras. As duas primeiras filas ficaram com os lugares todos ocupados, mas a fila 3 foi ocupada por dois grupos de 11 pessoas cada um e a fila 4 tinha quatro famílias com 6 pessoas cada uma.

Das seguintes afirmações escolhe a verdadeira e justifica a tua resposta.

a) A fila 3 tem um maior número de pessoas que a fila 4.

b) A fila 3 tem um menor número de pessoas que a fila 4.

c) A fila 3 tem o mesmo número de pessoas que a fila 4.

2. Algumas das expressões apresentadas não são verdadeiras. Descobre quais são, sem recorrereres a cálculos. Justifica a tua resposta.

a) $257 + 105 + 33 = 257 + 33 + 105$

b) $460 = 40 \times 10 + 60 \times 10$

c) $2500 - 601 = 2500 - 500 - 100 - 1$

d) $1380 = 1400 + 20 - 20$

3. Cria uma expressão numérica e apresenta aos teus colegas mostrando se é verdadeira ou falsa.

Anexo 8 - Ficha de trabalho n.º 7

Sessão 7 – Pensa num número
Estudo Principal – Turma F/ 3.ºAno

Nome: _____ Data: ___/___/___

Pensa num número.

Multiplica esse número por 6.

Agora divide por dois.

Divide o resultado por 3.

Que número obtiveste?

O que conseguiste descobrir? Porque é que isto acontece?

Pensa num número entre 1 e 10.

Adiciona 5.

Multiplica o resultado obtido por 3.

Agora subtrai 15.

Por fim divide por 3.

Obtiveste o número que pensaste?

Que relação existe neste caso?

Anexo 9 - Ficha de trabalho n.º 8

Sessão 8

Estudo Principal – Turma F/ 3.ºAno

Nome: _____ Data: ___/___/___

1. Completa cada uma das expressões com o valor em falta. Justifica a tua resposta.

$$73 \times \underline{\quad} = 73 \times 10 + 73 \times 2$$

$$\underline{\quad} + 22 = 15 + 24$$

$$80 : 4 = 80 : \underline{\quad} + \underline{\quad} : 2$$

$$55 - \underline{\quad} = 50 - 10$$

2. Das seguintes expressões mostra quais são as verdadeiras e as falsas. Justifica a tua resposta mostrando a relação que existe nas expressões.

a) $123 - 23 > 132 - 31$

b) $248 \times 5 = 200 \times 5 + 40 \times 5 + 8 \times 5$

c) $243 \times 5 \times 2 > 243 \times 10 \times 2$

3. Pensa num número entre 1 e 10. Adiciona 8. Agora divide por 4. Divide o resultado por 2.. Obtiveste o número que pensaste?

a) Consegues arranjar mais algum exemplo com esta relação?

4. Resolve as seguintes expressões sem recorreres a cálculos.

a) $572 + 299 =$

b) $528 : 4 =$

c) $1300 - 499 =$

Anexo 10 - Fichas de trabalho das sessões do estudo piloto

Sessão 1 – Tarefa Diagnóstica
Estudo Piloto – Turma E/ 3.ºAno

Nome: _____ Data: ___/___/___

1. Completa cada uma das expressões com o valor em falta de modo a torná-las verdadeiras. Justifica a tua resposta.

$\underline{\quad} * 17 = 19$	
$20x \underline{\quad} = 20$	
$10 - \underline{\quad} = 8$	
$14 : \underline{\quad} = 7$	
$15 = 5 + \underline{\quad}$	
$6 = \underline{\quad} - 12$	
$\underline{\quad} : 2 = 9$	
$16 = 8x \underline{\quad}$	

2. Completa com o valor que falta, de acordo com os sinais, de modo a que a expressão fique verdadeira. Justifica a tua resposta.

$10+1 > \underline{\quad}$	
$\underline{\quad} < 5 \times 2$	
$\underline{\quad} = 16 + 2$	
$10-5 > \underline{\quad}$	
$3 \times 4 = \underline{\quad}$	
$\underline{\quad} > 18-2$	
$15:3 < \underline{\quad}$	

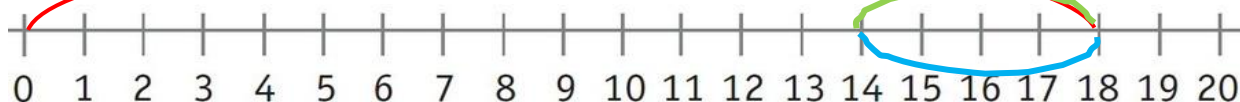
Sessão 2

Estudo Piloto – Turma E/ 3.ºAno

Nome: _____ Data: ___/___/___

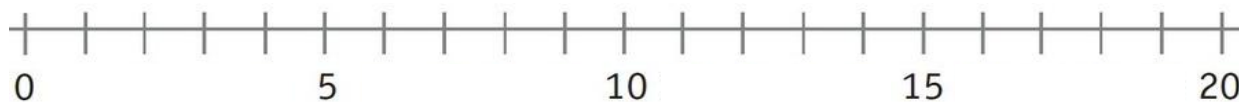
1. Na turma da Inês, os alunos resolveram as expressões que a professora apresentou da seguinte maneira:

$$18 - 4 + 4 =$$

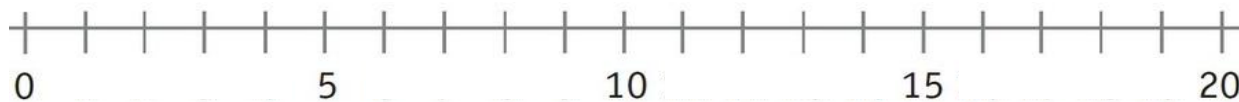


1.1 Resolva as seguintes expressões através da mesma estratégia.

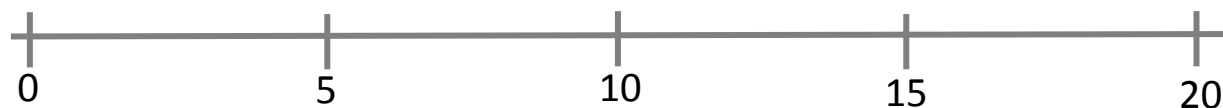
$$15 + 5 - 5 =$$



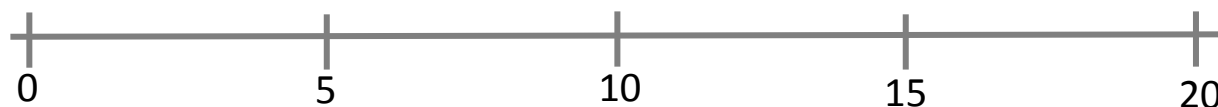
$$3 + 10 - 10 =$$



$$10 - 4 + 4 =$$



$$16 - 2 + 2 =$$



1.1. Consegues descobrir a relação existente em cada uma das expressões?

2. No dia do corta mato, os alunos da turma do 3^o E participaram nesta atividade. Ao longo do percurso existem várias estacas numeradas que vão indicando o caminho. A estaca que se encontra na meta é a número 30.

Na primeira volta, enquanto o Lucas estava na estaca número 11, a Clarisse estava na estaca 25. Quantas estacas faltam ao Lucas para conseguir ficar junto da Clarisse.



- 2.1. Descobre o número que falta sem recorrer a cálculos. Justifica a tua resposta.

Sessão 3

Estudo Piloto – Turma E/ 3.ºAno

Nome: _____ Data: ___/___/___

1. A Mariana estava com o seu colega Diogo a resolver as algumas expressões numéricas.

Na expressão $20+2> \underline{\quad}$ a Mariana encontrou o valor 20 e o Diogo respondeu $10+2$. Ambos tinham a resposta correta. Explica porquê.

2. Indica, para cada um dos casos os valores que tornam as afirmações verdadeiras.

d) $\underline{\quad} + 12 < 27$

e) $26 > 6 + \underline{\quad}$

f) $30 > \underline{\quad} - 11$

2.1 Compara os teus valores com os dos teus colegas e confirma se todas as expressões são verdadeiras.

3. A Joana estava a ver a sua coleção de cromos e percebeu que dos 30 cromos que tinha, 10 cromos eram repetidos e deu-os ao seu irmão Rodrigo.

O irmão foi contar o total de cromos que tinha e disse à Joana: *Com os cromos que me deste fiquei com mais cromos do que tu.*



$$30-10 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

- 3.1. Completa a expressão que demonstre o que o Rodrigo disse. Explica porquê.

4. Completa cada uma das questões com os sinais de $<$, $>$ ou $=$ para que se tornem verdadeiras. Justifica a tua resposta.

$$38+ 45 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 40+ 43$$

$$40+ 45 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 41+ 45$$

$$39+ 42 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 40+ 43$$

$$52- 27 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 50- 25$$

$$52- 29 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 52- 27$$

- 4.1. Que relação existe entre as expressões?

4.2. Qual é a diferença entre as expressões que envolvem a adição e as que envolvem a subtração?

5. Elabora mais duas expressões onde apliques esta estratégia.

Anexo 11 - Autorizações aos Encarregados de Educação e à Direção do Agrupamento

Soure, 7 de janeiro de 2010

Exmo. (ª) Sr. (ª) Encarregado(a) de Educação,

No âmbito da realização do Projeto de Dissertação de Mestrado em Educação na área de especialização da Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, pretendo desenvolver uma investigação, relacionada com o desenvolvimento do raciocínio algébrico em alunos do 3.º ano de escolaridade através das relações entre os números e as operações envolvidas.

O principal objetivo do estudo é compreender como pode ser desenvolvido o raciocínio relacional dos alunos do 3.º ano, ao longo de uma experiência de ensino, dando importância às relações de igualdade e de desigualdade e à capacidade de generalização das expressões.

Para esse efeito necessito de realizar uma recolha de dados com as turmas do 3º ano de escolaridade na EB1/2 de Soure.

Esta recolha implicará a gravação áudio e vídeo do trabalho realizado pelos alunos, bem como fotografias dos seus cadernos. Os nomes dos alunos serão alterados, de modo a preservar a sua identidade.

Este trabalho já está autorizado pela professora da turma e pelo director do Agrupamento de Escolas de Soure, faltando para a sua concretização a devida autorização dos encarregados de educação.

Os resultados deste trabalho assim como toda a documentação recolhida é absolutamente confidencial e não poderá ser usada para outro fim que não seja o acima referido.

Na esperança da sua melhor colaboração e apoio, somos, com os melhores cumprimentos

*Mónica Raquel Cerca
Docente do grupo 110*

Depois de preenchido agradecemos a devolução aos professores da turma.

Autorizo/não autorizo (riscar o que não interessa) o meu educando, _____
_____, a participar na investigação no âmbito Projeto de Dissertação de Mestrado em Educação na área de especialização da Didática da Matemática, que me foi apresentado.

Soure, 07 de janeiro de 2014

Assinatura do Enc. Educação: _____

Depois de preenchido agradecemos a devolução aos professores da turma.

Autorizo/não autorizo (riscar o que não interessa) o meu educando, _____
_____, a participar na investigação no âmbito Projeto de Dissertação de Mestrado em Educação na área de especialização da Didática da Matemática, que me foi apresentado.

Soure, 07 de janeiro de 2014

Assinatura do Enc. Educação: _____

Depois de preenchido agradecemos a devolução aos professores da turma.

Autorizo/não autorizo (riscar o que não interessa) o meu educando, _____
_____, a participar na investigação no âmbito Projeto de Dissertação de Mestrado em Educação na área de especialização da Didática da Matemática, que me foi apresentado.

Soure, 07 de janeiro de 2014

Assinatura do Enc. Educação: _____

**Exmo. Sr.
Diretor do Agrupamento de Escolas
SOURE**

Soure, 6 de janeiro de 2014

Assunto: Pedido de autorização para uma investigação

No âmbito da realização do Projeto de Dissertação de Mestrado em Educação na área de especialização da Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, pretendo desenvolver uma investigação relacionada com o desenvolvimento do raciocínio algébrico em alunos do 3.º ano de escolaridade através das relações entre os números e as operações envolvidas. Este tipo de raciocínio, que se inclui dentro do raciocínio algébrico, e que procura desenvolver as relações entre os elementos de uma expressão numérica designa-se por raciocínio relacional.

Deste modo, o principal objetivo do estudo é compreender como pode ser desenvolvido o raciocínio relacional dos alunos do 3.º ano, ao longo de uma experiência de ensino, dando importância às relações de igualdade e de desigualdade e à capacidade de generalização das expressões.

Para esse efeito necessito de realizar uma recolha de dados com as turmas do 3º ano de escolaridade na EB1/2 de Soure, pelo que venho junto de V. Exª. solicitar a devida autorização.

A docente das duas turmas e da área curricular em observação – professora Paula Simões Soares- foi informada e esclarecida pessoalmente sobre os objetivos, metodologias e atividades a desenvolver, tendo dado a sua autorização e manifestado clara disponibilidade para aceitar a realização do referido estudo.

Após a autorização de V. Ex., será solicitada a respetiva autorização dos encarregados de educação.

Na esperança da melhor colaboração e apoio de V. Exª, somos respeitosamente,

*Mónica Raquel Cerca
Docente do grupo 110*