UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O papel da Calculadora Gráfica na Atividade Matemática com Funções de alunos do 10.º Ano

Ângela Santos Mota

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Mestrado em Ensino da Matemática

2013

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O papel da Calculadora Gráfica na Atividade Matemática com Funções de alunos do 10.º Ano

Ângela Santos Mota

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Leonor Santos e co-orientado pelo Professor Doutor João Pedro Boto

Mestrado em Ensino da Matemática

2013

Resumo

Este estudo tem como objetivo principal compreender de que forma alunos do 10.º ano integram a calculadora gráfica na sua atividade matemática ao resolverem tarefas envolvendo funções. Com este propósito, procurei averiguar qual o tipo de tarefas envolvendo funções que induz, indiretamente, alunos do 10.º ano a usar calculadora gráfica na sua resolução; em que dimensões do uso da calculadora gráfica os alunos revelam estar a desenvolver o pensamento crítico e; quais as principais dificuldades que os alunos do 10.º ano têm ao trabalhar com a calculadora gráfica.

O estudo baseia-se nos resultados obtidos durante a lecionação de seis aulas que decorreu no início do 3.º período do ano letivo de 2012/2013 com uma turma do 10.º ano de escolaridade da Escola Secundária Professor José Augusto Lucas em Linda-a-Velha, no âmbito da lecionação dos subtópicos "Inequações de 2.º grau", "Funções de grau superior a 2" e "Inequações de grau superior a 2". Os dados recolhidos são provenientes da entrevista à professora cooperante, da observação de aulas, da recolha documental e do meu diário de bordo.

Os resultados obtidos evidenciam que os alunos recorrem à calculadora gráfica consoante o tipo de expressão algébrica da situação matemática apresentada e não conforme o tipo de tarefa proposta. Alguns alunos revelaram ter desenvolvido pensamento crítico que envolve aspetos trabalhados na aula. Os erros e as dificuldades identificadas focam-se na falta de rigor apresentada nos esboços, nas resoluções incompletas e na ausência de compreensão das potencialidades da calculadora gráfica.

Palavras-chave: Calculadora gráfica, dificuldades, funções, pensamento crítico, tecnologia.

Abstract

This study has as main objective to understand the way that 10th grade students integrate graphic calculator in their mathematical exercise to solve problems involving functions. To address this subject, I aimed to understand which kind of exercises involving functions induced, indirectly, the use of graphic calculator to reach their solution. Furthermore, I targeted the features of the graphic calculator that stimulates the critical thinking and I inspected which are the main difficulties that 10th grade students have when working with a graphic calculator.

The study is based in results that were obtained during the six lectures that I taught in the 3rd period of the scholar year 2012/2013 to a class of the 10th grade from Escola Secundária Professor Augusto Lucas in Linda-a-Velha. In those lectures, the subtopics taught were “Inequations of second degree”, “Functions of second and superior degree” and “Inequations of second or higher degree”. The data used in this study was collected from an interview with the teacher, who was cooperating in the study, from lectures’ observation, from document compilation and from my work diary.

The results obtained evidence that students use the graphic calculator according with the type of algebraic expression of the mathematical situation presented and not according with the task proposed. Some students showed that they developed their critical thought that involves aspects worked in during the lectures. The errors and the difficulties identified result from the lack of accuracy presented in the sketches, in some incomplete resolutions and in the fact of students do not totally understand the graphic calculator potentialities.

Key-words: Critical thinking, difficulties, functions, graphic calculator, technology.

Agradecimentos

À professora Leonor Santos, por ter acompanhado todo este trabalho de forma muito paciente e respeitadora. Pelo material indicado, pelos *emails* trocados e pelos comentários construtivos. Pelo rigor, sabedoria e exigência.

Ao professor João Pedro, pelos esclarecimentos matemáticos e pelas sugestões e opiniões construtivas manifestadas.

À (Professora) Ana (Vieira), por ter sido uma ótima professora, sempre dedicada e disponível. Pelos conselhos e críticas, pelas chamas de atenção. Pelas experiências partilhadas. Pela aprendizagem que me proporcionou.

Aos alunos da turma de intervenção, por me terem aceite como sua professora! Heterogéneos, com muito potencial e especiais, cada um à sua maneira, foram a minha primeira turma e foi com muito prazer que aprendi com eles.

À Escola Secundária Professor José Augusto Lucas, por ter possibilitado a realização deste estudo, em particular às professoras de Matemática por tão bem me terem acolhido.

À Ana Filipa, minha colega de estágio, por ter embarcado nesta aventura. Um pedido de desculpas pelo que falhou e uma palavra de agradecimento pelo que de bom existiu.

À Raquel Franco, a minha professora de Biologia. Por ser uma amiga e uma presença constante desde o 10.º ano. Por me ter orientado quando me senti mais perdida e me ter ajudado a nunca deixar de acreditar no meu sucesso e felicidade aos vários níveis. Alguém com quem me identifico bastante e com quem conto constantemente.

Um agradecimento muito especial a todos os meus amigos que me têm acompanhado nos últimos tempos. Por estarem presentes, mais longe ou mais perto, há mais ou há menos tempo! Por serem únicos e por fazerem a diferença nos meus dias e noites! Por me animarem quando fiquei em casa a trabalhar e por nunca me terem deixado de acreditar!

… *Joana Banana*, aquela amiga e companheira! A minha filhota. A pessoa que está presente há anos a fio e que me acompanha nos vários campos da vida.

… *Fred*, aquele palerma que melhor me conhece! Não há quem me irrite como ele o faz... Mas faz parte dele e o lugar dele, só a ele pertence.

… *Adolfo* e *Pedro*, meus companheiros dos bailaricos do Verão! Os responsáveis por, noite após noite, me tirarem de casa para dançar, festejar, arejar a cabeça… ou simplesmente, para aparvalhar!

… *Jessica*, minha preta dourada! A companheira que tanta força e incentivo me tem dado nos últimos meses. Incansável na procura do meu bem-estar!

… *Sofia*, minha cuzuda que me completa! Melhor companhia para sair é difícil… ninguém me compreende como ela e é ótimo ter alguém assim!

… *Carvalho*, meu fugitivo constante! Não é capaz de ficar sossegado por um bocadinho… O principal culpado do meu gosto por viajar e alargar horizontes,

… *Vanessa*, minha ginasta e futebolista e guitarrista e veterinária! Tanta coisa que faz parte dela e tão preciosos os momentos em que estou com ela.

… *Gabriela*, minha companheira-de-mocho única! Tardes de desabafos, conselhos, incentivo e força que fizeram a diferença para continuar a caminhada.

… *Ana Cláudia*, minha colega que sabe bem o que é isto! Uma presença importante nesta fase, pela força, troca de ideias e conselhos partilhados.

… *Karé*, minha tagarela nas noites na varanda! Por me ter ouvido noites e noites a fio, mesmo quando o cansaço queria falar mais alto.

… *Andreia*, minha psicóloga! Sim, por vezes foi mesmo a minha psicóloga e ajudou-me a ver as coisas por outro prisma. Foi ótimo tê-la como vizinha do 43.

… *Seabra*, meu desportista! Ao seu jeito subtil, com as suas morangoskas, boa disposição e companhia, foi um verdadeiro apoio nos momentos mais difíceis.

… *Fred*, meu Açoouures! Pelas conversas e conselhos de quem já passou por isto, pelos momentos para arejar as ideias e descontrair.

… *Marina*, minha keijinha! Pelas tardes na biblioteca onde o sofrimento, a tensão, o stress e as dificuldades foram partilhadas pela sua forma única de ser.

… *Américo*, meu daltónico despistado! Pela sua maneira muito própria de ser mas que me contagia com a boa disposição e me alegra.

… *Zita*, minha lady-cota! A moça que se conseguiu rir das minhas parvoíces durante os trabalhos e me dar na cabeça quando menos me empenhei.

… *Mia*, minha Luna! Pela espontaneidade, sinceridade e capacidade de “puxar pelos atacadores quando começo a levantar os pés da terra em direção a lua”.

Por fim, mas não em último, um agradecimento à minha família. Por me terem “deixado ir” quando senti que isso seria bom para mim e por me apoiarem nas minhas decisões. Por tentarem fazer as coisas da melhor forma que sabem e sempre terem procurado o melhor para mim. Pela compreensão e confiança depositadas em mim.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Anexos

CAPÍTULO I

Introdução

Digna de um lugar de destaque entre as outras ciências, a Matemática surge como uma ciência cujas aprendizagens e competências por ela trabalhadas e desenvolvidas devem funcionar como alicerces de conhecimentos e formas de pensar sobre o mundo real e, em particular, sobre a ciência experimental (Ministério da Educação, 2002). “Todas as pessoas necessitam de conhecer e compreender a matemática. Todos os alunos devem ter a oportunidade e o apoio necessário para aprender matemática, com significado, com profundidade e compreensão” (NCTM, 2007, p. 5).

A disciplina de Matemática A no ensino secundário visa, entre outros aspetos, desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real, formular e resolver problemas e comunicar; apela ainda à memória, ao rigor, ao pensamento crítico e à criatividade dos alunos. Verificam-se, deste modo, condições que permitem afirmar que os conhecimentos e as aprendizagens desenvolvidos nesta disciplina não se cingem aos conteúdos matemáticos em si, mas também aos valores e atitudes que se trabalham nestas aulas (ME, 2002).

O programa da disciplina de Matemática A refere quatro grandes áreas – Cálculo Diferencial, Geometria, Funções e Sucessões e Probabilidades e Estatística – que possibilitam a contemplação e trabalho dos principais conteúdos e competências que a aprendizagem da Matemática envolve. Além destes, são também referidos seis temas transversais onde estão contemplados, entre outros, a aplicação e modelação matemática, a resolução de problemas e o uso da tecnologia, temas que pressupõem uma abordagem sistemática ao longo dos anos e que devem ser considerados nas indicações metodológicas das planificações. Abordados à medida que forem sendo necessários, considerando sempre o sentido de oportunidade, as suas vantagens e limitações, estes temas contribuem para uma formação mais completa do aluno (Costa & Rodrigues, 2011).

Indicada como uma ferramenta de uso obrigatório na disciplina durante o ensino secundário, surge a calculadora gráfica. O seu uso pode ser exigido nos enunciados dos exercícios, por iniciativa própria dos alunos ou por incentivo dos professores. Há enunciados que explicitam que se pretende uma representação gráfica como resposta e, nestes casos, os alunos recorrem à calculadora na resolução do solicitado. Acontece também que o método de resolução não esteja especificado e, neste caso, os alunos serão, de certa forma, influenciados pela cultura que o professor transmitiu à turma ao longo das aulas. De facto, os alunos tendem a seguir os métodos usados e apresentados pelo professor ao longo do trabalho nas aulas e se o professor incentiva o uso da calculadora, certamente os alunos terão tendência a recorrer à sua utilização mesmo que não esteja explicitamente sugerida nos enunciados (Rocha, 2000, citado por Semião & Canavarro, 2008).

Motivações

Ao escolher o meu tema de estudo, tive em conta que a intervenção realizada decorreria com uma turma de 10.º ano, cuja planificação anual já estava previamente feita e os tópicos a estudar definidos. Analisando os documentos construídos, percebi que a minha intervenção se enquadraria na unidade das Funções.

É durante o 10.º ano, no estudo das funções, que os alunos contactam pela primeira vez com a calculadora gráfica. Enquanto aluna, não me senti entusiasmada por poder recorrer a ela na resolução das tarefas, em parte, porque considero que a sua introdução em aula não tenha sido feita de forma a poder tirar o maior partido das suas funcionalidades. Para Rocha (2000, citado por Semião & Canavarro, 2008), num ambiente de sala de aula onde a tecnologia é eficazmente inserida, nota-se uma diminuição dos momentos expositivos e um aumento dos momentos dedicados a atividades de investigação e trabalho em grupo, o que permite aos alunos desempenhar um papel mais ativo na sua própria aprendizagem. No entanto, não foi isto que aconteceu nas minhas aulas enquanto aluna, e indo ao encontro das conclusões de Semião e Canavarro (2008), recorria à calculadora gráfica, essencialmente, para confirmar os resultados que obtivera analiticamente.

Desde cedo percebi que a professora Ana Vieira (professora cooperante que me acompanhou) é uma grande defensora do uso das calculadoras gráficas em sala de aula, integrando-as na sua prática de ensino. Assim, a experimentação, investigação e resolução de problemas, são estimuladas, conduzindo a uma dinâmica em aula que possibilita uma abordagem mais investigativa dos conteúdos matemáticos trabalhados.

Uma vez que considero determinante a forma como a calculadora gráfica é introduzida aos alunos de 10º ano, e tendo em conta que esta ferramenta é essencial e de uso obrigatório no programa, decidi focar e orientar o meu estudo no papel que a calculadora gráfica desempenha na atividade matemática dos alunos.

Objetivos e questões do Estudo

Tendo em consideração as indicações do programa e as condições da intervenção realizada, o principal objetivo deste estudo é compreender de que forma alunos do 10.º ano integram a calculadora gráfica na sua atividade matemática ao resolverem tarefas envolvendo funções. Para estruturar este trabalho, formulei as três questões de investigação que se seguem:

i. Qual o tipo de tarefas envolvendo funções que induz, indiretamente, alunos do 10.º ano a usar a calculadora gráfica na sua resolução?
ii. Em que dimensões do uso da calculadora gráfica os alunos revelam estar a desenvolver o pensamento crítico?
iii. Quais as principais dificuldades que alunos do 10.º ano têm ao trabalhar com a calculadora gráfica?

O estudo apresentado foi desenvolvido no âmbito da lecionação dos subtópicos “Inequações de 2.º grau”, “Funções de grau superior a 2” e ”Inequações de grau superior a 2”, com uma turma do 10.º ano da Escola Secundária Professor José Augusto Lucas com 3.º ciclo e Secundário, em Linda-a-Velha, Oeiras, ao longo de seis aulas de noventa minutos que decorreram no início do terceiro período do ano letivo de 2012/1013.

Organização do Estudo

Este estudo que apresento é composto por diversos capítulos, desenvolvidos tendo em conta os objetivos definidos e a unidade didática em que se enquadra. No capítulo “Enquadramento curricular e didático”, faço uma breve revisão da literatura que foca, principalmente, o papel das calculadoras gráficas e do professor na sala de aula e na aprendizagem matemática dos alunos.

No terceiro capítulo "Contexto Escolar" faço uma breve caracterização da escola e da turma de intervenção. O capítulo seguinte "Unidade Didática" inicia-se com a articulação da unidade didática à luz do programa e com a abordagem aos conceitos matemáticos trabalhados durante a intervenção. Ainda nesta secção, apresento as estratégias de ensino seguidas e uma breve descrição das aulas lecionadas. Procuro, ainda, justificar e apresentar os instrumentos e procedimentos da recolha de dados.

O quinto e último capítulo "Análise e Reflexão" surge dividido em duas grandes partes: na primeira, analiso os dados recolhidos tendo em conta a problemática definida e, na segunda, faço uma síntese do trabalho realizado, destaco as principais conclusões e termino com uma reflexão final sobre o impacto da minha prática letiva e da construção deste trabalho na minha aprendizagem.

CAPÍTULO II
Enquadramento curricular e didático

Neste capítulo que se refere ao enquadramento curricular e didático, começarei por abordar a calculadora gráfica e o seu papel na aprendizagem do aluno e no ensino da Matemática. Assumindo um papel determinante na sala de aula, a parte seguinte será dedicada ao papel do professor em aula e às várias metodologias pelas quais pode optar. Termino com uma referência às tarefas matemáticas e outra dedicada ao pensamento crítico.

A calculadora gráfica na aprendizagem matemática

Com algumas características semelhantes às dos computadores, as calculadoras gráficas vieram trazer um novo fôlego à integração da tecnologia no ensino da Matemática. São menos poderosas que os computadores e não os substituem, mas permitem alcançar benefícios educacionais extremamente semelhantes (Barley, 1994, citado em Rocha, 2001).

As primeiras recomendações sobre o uso das calculadoras gráficas no ensino da Matemática foram feitas no ano letivo de 1995/1996 e foi a partir daí que os professores começaram a prestar mais atenção a estas ferramentas (Rocha, 2001). Dois anos mais tarde, no ano letivo de 1997/1998, as calculadoras gráficas passaram, então, a ser referidas no programa da disciplina como ferramentas de uso obrigatório durante as aulas e a sua utilização foi permitida em exame. Assim, as calculadoras gráficas na sala de aula começaram a ser uma realidade e as escolas adquiriram alguns exemplares para emprestar aos alunos que não as podiam adquirir (Rocha, 2001).

Para os autores do programa de matemática do ensino básico (ME, 2007), as calculadoras devem ser encaradas como um recurso em situações cuja prioridade não são os cálculos e procedimentos, mas sim a estratégia de resolução da tarefa e a interpretação e avaliação dos resultados. Prevendo-se o desenvolvimento das competências gráficas dos alunos e a sua interpretação e manipulação, o programa de Matemática A (ME, 2002) defende que não é possível atingir todos os objetivos e vertentes contemplados sem recorrer à tecnologia. No entanto, Consciência (2009) alerta que sem planos de implementação coerentes e acessíveis, é previsível que as tecnologias não aperfeiçoem o ensino e a aprendizagem da matemática.

Conferindo uma maior autonomia na construção do saber, a calculadora permite a produção de exemplos próprios, formulação e teste de conjeturas próprias; proporcionando imagens visuais das ideias matemáticas, facilitando a organização/análise de dados e realizando cálculos de forma exata e eficaz, a tecnologia revela-se uma ferramenta essencial para o ensino, a aprendizagem e o fazer matemática (NCTM, 2007). É ainda possível desenvolver generalizações e procurar padrões, já que facilmente se consegue observar um largo número de exemplos simbólicos, gráficos ou numéricos (Consciência, 2009). Assim, a calculadora vem permitir que os alunos se libertem de cálculos excessivos e se concentrem na compreensão de conceitos, resultados e ideias-chave (Romano & Ponte, 2008; Consciência, 2009).

As vivências da sala de aula parecem influenciar bastante os critérios em que os alunos se baseiam para decidir relativamente à conveniência de recorrer à calculadora gráfica. De facto, verifica-se que “os alunos mostram uma tendência clara para utilizar a máquina da forma e nas circunstâncias em que foram ensinados a fazê-lo” (Rocha, 2001, p. 5).

A desvalorização da aprendizagem do funcionamento da calculadora leva a que algumas das suas características e potencialidades não sejam conhecidas pelos alunos, pois os seus conhecimentos cingem-se apenas a aspetos trabalhados em aula e abordados pelo professor. As tentativas de descobrir novas potencialidades são pouco frequentes e nota-se um aumento na confiança na utilização de um determinado conjunto de comandos mais habituais aos quais se recorre sempre que permitem obter os resultados pretendidos (Rocha, 2001).

Desde que é ferramenta de uso obrigatório na disciplina, a calculadora gráfica tem sido alvo de diversos estudos que se centram essencialmente nas suas potencialidades para o desenvolvimento de conceitos e no desempenho dos alunos que utilizam a calculadora gráfica como recurso. No entanto, estudos que foquem os erros associados à utilização da máquina ou a sua utilização em situações de avaliação formal são menos frequentes (Rocha, 2001).

Nos estudos realizados por Rocha (2001) e Doerr e Zangor (2000), enumeraram-se os diferentes fins para que a calculadora gráfica foi utilizada pelos alunos na resolução das várias tarefas, dos quais se destacam: i) confirmação de resultados - os alunos recorrem à calculadora após terem concluído a sua resolução e procuram validar/rejeitar os seus resultados/conjeturas; ii) alternativa à resolução analítica - porque assim está indicado, porque se sentem mais confortáveis ou face a dificuldades advindas de tarefas que, à partida, não sabem abordar e; iii) visualização - quando a resolução de questões necessita da elaboração/interpretação de gráficos.

Nas questões onde se requer explícita ou implicitamente a elaboração/ interpretação de um gráfico e nas que envolvem a resolução de equações ou inequações, os alunos parecem não ter dúvidas quanto à conveniência do uso da calculadora, sendo a rapidez de resposta um argumento determinante para esta opção. A calculadora é ainda considerada útil para a resolução de tarefas que à partida o aluno não sabe como abordar. Contudo, os alunos recorrem à calculadora gráfica essencialmente para fazer cálculos aritméticos e para confirmar resultados obtidos analiticamente (Doerr e Zangor, 2000; Rocha, 2001; Semião e Canavarro, 2008).

Graham, Headlam, Honey, Sharp, e Smith (2003) também atribuem importância à forma como a calculadora gráfica é usada nos momentos de avaliação: i) quasi-científica – quando não se usam as potencialidades da calculadora gráfica, encarando-a como uma mera calculadora científica; ii) semi-proficiente – recorre-se a algumas potencialidades gráficas na calculadora, ficando aquém do seu uso mais eficiente; iii) proficiente – são utilizadas as potencialidades da calculadora gráfica de forma apropriada na resolução da tarefa proposta. Dos três alunos-alvo dos estudos desenvolvidos por Semião e Canavarro (2008), dois utilizaram a calculadora gráfica de forma semi-proficiente nos momentos de avaliação e uma aluna utilizou-a de forma proficiente.

Uma das professoras envolvidas no estudo de Romano e Ponte (2008) refere que "o excesso de confiança na máquina que a calculadora induz nos alunos é a sua maior limitação" (p. 176). A tendência é achar que "só por carregar no botão, aquilo já está tudo bem" (p. 176), existindo uma utilização cega da tecnologia sem sentido crítico face aos resultados.

Rocha (2001) alega que os alunos revelam dificuldades em relacionar a informação obtida por processos algébricos com a informação proveniente da calculadora, defendendo que é necessário envolver os alunos em atividades que englobem o contato com representações gráficas e a exploração das implicações que a janela de visualização tem no aspeto do gráfico. Nos estudos de Guin e Trouche

(1999) e de Ward (1998) foram detetados alunos que pensam que o gráfico é apenas o que aparece no ecrã ou que as assíntotas fazem parte do gráfico; alunos que não compreendem os efeitos que a alteração da escala e do intervalo provoca no gráfico da função e também alunos que optam por recorrer ao método “carrega-no-botão-e-logo-se-vê”.

A calculadora gráfica na aprendizagem das funções

Permitindo trabalhar e articular as várias representações das funções - simbólica, gráfica e numérica -, a calculadora proporciona ao aluno uma oportunidade para desenvolver uma visão orientada para o objeto, essencial ao desenvolvimento do conceito, de fortalecer a possível conexão entre as diferentes representações e até de aproveitar a combinação delas para eliminar as desvantagens de cada uma (Consciência, 2008; Ramos & Raposo, 2008). Em particular, a representação gráfica permite uma abordagem visual, revelando-se intuitiva e apelativa (Ramos & Raposo, 2008). A visualização gráfica veio, então, dar significado à aprendizagem matemática de alunos e professores, permitindo que a calculadora gráfica assuma um papel importante no processo ensino-aprendizagem e influencie a Matemática que se ensina e aprende (Doerr & Zangor, 2000).

É no estudo das funções que os alunos têm o primeiro contacto com as calculadoras gráficas, pelo que, de início, é notória alguma dificuldade em estabelecer uma estratégia de utilização da máquina. E, mesmo quando os comandos que permitem traçar gráficos e fazer *zooms* estão dominados, nota-se que ainda não houve a interiorização de todos os que já são conhecidos, pelo que é complicado estabelecer um plano de atuação que faça um aproveitamento efetivo das potencialidades disponibilizadas (Rocha, 2001).

Notam-se dificuldades nos alunos em integrar as informações obtidas por processos algébricos com as informações obtidas a partir da calculadora. Segundo Hector (1992, citado em Rocha, 2001), estas dificuldades têm origem na experiência matemática dos alunos que, até aqui, nunca foram confrontados com a necessidade de decidir quais os valores e escalas mais adequados para representar graficamente uma função. Por exemplo, perceber que dadas limitações na janela de visualização permitem que o gráfico de qualquer função, por mais curvo que seja, possa ser visualizado como uma reta é uma ideia completamente nova para os alunos.

A interpretação da informação disponibilizada pela calculadora gráfica, nomeadamente, a adequada interpretação dos gráficos apresentados parece ser uma das principais questões colocadas aos alunos, sendo várias as situações onde se registam dificuldades.

Interpretar corretamente aquilo que parece ser uma representação global do gráfico de uma função que não o é, não levanta, segundo Rocha (2001), problemas a alunos habituados a refletir e a analisar as informações disponibilizadas. Mas, para alunos que abordam dadas questões quase automaticamente sem refletir sobre elas, o caso traz dificuldades pois é necessário algum cuidado a utilizar a máquina e analisar os resultados obtidos para poder detetar situações potencialmente enganadoras.

Perante imagens incompletas de um dado gráfico, a interpretação correta das mesmas revela-se uma tarefa mais complexa e diferente da anterior. Ao encarar uma imagem incompleta – por exemplo, duas retas verticais e representação de uma parábola – os alunos revelam dificuldade em identificar a zona do gráfico que estão a observar, sendo que, tais dificuldades se agravam quando o recurso a *zooms* não altera eficientemente a visualização em questão (Rocha, 2001).

Também os casos em que o gráfico das funções está completamente fora da janela de visualização se revelam muito complicados. Nestas situações, os alunos tendem a verificar repetidamente se a expressão da função está bem inserida, alternando entre a expressão e o gráfico. Depois é iniciada uma sucessão de zooms até que se visualize uma parte do gráfico, que nem sempre é bem sucedida.

Relativamente aos *zooms*, os alunos tendem a usá-los para melhorarem a visualização do gráfico da função pretendida, mas geralmente, fazem-no sem aceder ao menu *window* para poderem ter uma noção dos valores que estão a ser apresentados nos eixos. Assim, os gráficos obtidos são interpretados de uma forma completamente dissociada dos valores da janela de visualização. Este procedimento leva ainda a que não haja uma preocupação em associar valores numéricos à representação obtida. Como consequência disto, a interpretação da imagem obtida e a compreensão do efeito das alterações dos valores da janela de visualização do gráfico são mais difíceis (Rocha, 2001).

É, então, fundamental que aquando da preparação das aulas, o professor tenha presente que a noção de janela de visualização é nova para os alunos, devendo ser criadas oportunidades para perceber que as alterações na janela de visualização podem alterar por completo o aspeto do gráfico visualizado. De ressalvar ainda que as tarefas propostas não devem ter características muito idênticas para que não se dê o caso de os alunos apenas explorarem uma parte reduzida das potencialidades da calculadora. Assim, " a diversidade das propostas de trabalho dará provavelmente origem a uma variedade de atuações, contribuindo para uma melhor compreensão do funcionamento da calculadora gráfica" (Rocha, 2001, p. 17).

O professor e a tecnologia na sala de aula

O sucesso da utilização da tecnologia depende da utilização que é feita e da sua adequação às características do currículo a implementar (Rocha, 2000, citado por Semião & Canavarro, 2008). De facto, para que a tecnologia melhore a aprendizagem matemática e desempenhe um papel fulcral nas aulas, as ferramentas a utilizar deverão ser selecionadas e utilizadas tendo em conta os objetivos definidos (NCTM, 2007).

Visando o sucesso do ensino, Ponte (1995) defende que é necessária uma reformulação do trinómio Matemática-aluno-professor. O objetivo é conseguir que:

> - na aprendizagem se contacte com uma Matemática mais viva, muito mais próxima do espírito investigativo que caracteriza a atividade dos matemáticos;
> - o aluno passe a desempenhar um papel mais ativo e autónomo, definindo e aprofundando os seus domínios de interesse, e usando com desembaraço uma variedade de ferramentas para o seu estudo;
> - o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e contínuo aperfeiçoamento de situações de aprendizagem (p. 7).

Prevê-se que as experiências matemáticas a propor aos alunos sejam ricas e variadas, levando-os a envolver-se e a assumir uma postura ativa, com atos de reflexão e troca de conhecimento (ME, 2002). Mas, para tal, o professor tem de estar ciente do seu papel dentro da sala de aula.

A confiança, o à vontade e a segurança do professor face à tecnologia que está a usar, bem como o conhecimento das suas funcionalidades, potencialidades e dificuldades influencia a sua postura em sala de aula e a forma como a integração dos materiais é feita em aula (Rocha, 2008; Consciência, 2008). É ao conhecer as capacidades da máquina que se pode compreender e interpretar corretamente o que é obtido no visor e tirar partido do uso da mesma pois um professor utilizará adequadamente a tecnologia se estiver familiarizado e confortável com a sua utilização e abordagem (Powers & Blubaugh, 2005). Esta familiaridade e conforto podem partir dos próprios professores e da sua iniciativa de experimentar e explorar modelos para integrar a tecnologia nas práticas diárias em aula, visando melhorar a aprendizagem matemática (Consciência, 2009). É muito importante que o professor tenha um certo cuidado e atenção na seleção/criação das tarefas que promovem o uso da tecnologia, pois pode correr o risco de não tirar proveito das suas capacidades de forma coerente e eficaz (NCTM, 2007).

A preparação do professor afeta a forma como ensina e como encoraja os alunos a recorrer ou não à tecnologia, como os alerta para as suas potencialidades e limitações (Doerr & Zangor, 2000). Conhecendo previamente as vantagens e limitações da calculadora e as principais dificuldades ao trabalhar com ela, um professor pode integrá-las eficientemente no processo ensino-aprendizagem, utilizando-as para gerar oportunidades de aprendizagem na turma (Guin & Trouche, 1999; Garcias & Borba, 2000, citado por Ramos & Raposo, 2008). Tal conhecimento é adquirido com experiência e formação que não deve deixar de ser uma constante na vida do professor, já que a tecnologia e as orientações relativas à sua integração estão em constante evolução.

A falta de conhecimento pedagógico relacionado com a tecnologia é apontada por Vrasidas e Glass (2005, citados por Rocha, 2012) como a principal razão para o não aproveitamento das vantagens do uso da tecnologia. Os autores defendem que os professores "precisam de ter um conhecimento da tecnologia, do conteúdo e de aspetos de natureza pedagógica e que a formação, centrada exclusivamente em torno da tecnologia e da sua utilização de um ponto de vista técnico, não é suficiente" (p. 61). Reforçando as ideias anteriores, Niess (2005) destaca a necessidade dos professores desenvolverem um conhecimento abrangente sobre a relação entre o conteúdo e a tecnologia, defendendo que é preciso ter um conhecimento que integre uma profunda compreensão da Matemática, do processo de ensino-aprendizagem e da tecnologia para se poder estar preparado para ensinar Matemática.

"A tecnologia tem a característica única de consistir numa ferramenta de ensino que requer um conjunto específico de capacidades operativas e um leque de estratégias e procedimentos educativos" (Guerrero, 2005, citado em Rocha, 2012). Posto isto, para utilizar eficientemente a tecnologia como parte do processo de ensino, é necessário um conhecimento que integre o conhecimento de aspetos específicos do funcionamento da tecnologia, o conhecimento pedagógico relativo à utilização da mesma no ensino, o conhecimento aprofundado dos conteúdos matemáticos e o conhecimento de quando e como é mais conveniente utilizar a tecnologia. Este conhecimento relativo à tecnologia é designado por Conhecimento Pedagógico da Tecnologia - PTK (Pedagogical Technology Knowledge) – e tem os seus alicerces nos conteúdos específicos a ensinar (Guerrero, 2005, citado em Rocha, 2012). Existem cinco componentes centrais que caraterizam o PTK: duas ligadas ao conhecimento pedagógico, uma associada ao conhecimento de conteúdos e, por fim, duas relacionadas com o conhecimento pedagógico de conteúdos.

As componentes ligadas ao conhecimento pedagógico dizem respeito aos princípios gerais do ensino e à organização e gestão da sala de aula; ao conhecimento do professor e da sua capacidade para lidar com aspetos relacionados com a utilização da tecnologia como suporte do ensino e da aprendizagem; à capacidade do professor de manter um bom ambiente em sala de aula, gerindo o trabalho entre os alunos da turma; à capacidade para promover um novo ensino que deixa de estar focado no professor.

A componente relacionada com o conhecimento dos conteúdos baseia-se no conhecimento aprofundado do conteúdo; refere a crescente responsabilidade do professor em deter um amplo e aprofundado conhecimento; defende que um professor tem de ter a capacidade de gerir as investigações dos alunos, bem como a confiança e a segurança necessária para lidar adequadamente às questões deles.

As componentes associadas ao conhecimento pedagógico de conteúdos focam as conceções e o uso da tecnologia e a especificidade pedagógica face ao conteúdo; abrangem as ideias do professor sobre a tecnologia como suporte de ensino de determinado conteúdo e a sua contribuição para a melhoria da aprendizagem; focam o conhecimento que o professor detém da utilização adequada da tecnologia, tendo em conta a conveniência dos recursos e a forma como tal deve ser implementado.

Rematando a ideia, Rocha (2012) sugere que o conhecimento para ensinar Matemática com tecnologia (CEMT) é um conhecimento que se desenvolve a partir dos conhecimentos de domínios base que evoluem à medida que vão sendo estabelecidas interações entre estes. São quatro os domínios base: o conhecimento da Matemática, do ensino-aprendizagem, da tecnologia e do currículo.

Doerr e Zangor (2000) afirmam que “as características de uma ferramenta não lhe são intrínsecas, mas construídas através das ações e atividades das pessoas” e

Consciência (2009) menciona que "a calculadora gráfica pode ser integrada na prática profissional mas tal não significa que esta seja substancialmente diferente da prática sem calculadora" (p. 107).

Se a tecnologia está presente na sala de aula, o professor deve deixar de ser apenas um definidor de tarefas ou um expositor de conteúdos para assumir um papel de orientador de trabalho ou um recurso para alguma dificuldade que possa surgir (Doerr & Zangor, 2000). Mais, as mudanças a existir em aula não se devem limitar à postura do professor, mas também aos objetivos a definir, aos métodos de avaliação, à estrutura das aulas e às interações entre alunos-professor-tecnologia em aula (Farrel, 1996).

Existe, para Farrel (1996) e Rocha (2008), uma relação entre as opções metodológicas tomadas pelos professores e a forma como a calculadora é integrada no processo ensino-aprendizagem, pelo que há alteração no comportamento do professor em função da presença da tecnologia. Rocha (2001) refere que os critérios em que os alunos se baseiam para recorrer (ou não) à calculadora gráfica são influenciados pelas suas experiências na sala de aula, revelando que há uma tendência para utilizar a máquina da mesma maneira que foram ensinados a fazê-lo.

Andrade (2007) realizou um estudo de caso com três professores do ensino secundário, cujo objetivo é perceber como é feita a integração da calculadora gráfica na prática profissional. Um dos professores mostrou facilidade em trabalhar com a calculadora, promovendo a sua utilização em atividades que promoviam a exploração e assumindo um papel de facilitador da aprendizagem. Opostamente, as outras professoras usaram a calculadora para tarefas rotineiras e, frequentemente, para confirmarem resultados obtidos analiticamente, assumindo, por isso, um papel de transmissoras de conhecimentos. Nas turmas destas professoras, a integração da calculadora não veio alterar significativamente o ensino, pois esta é usada, essencialmente, para confirmação de resultados. Assim, professores que encaram a calculadora como uma ferramenta para cálculos, praticam um ensino focado no professor cujos objetivos se centram nos conteúdos; por outro lado, professores que encaram a calculadora como uma ferramenta de ensino valorizam um método centrado no aluno, visando atingir objetivos relacionados com os alunos e a disciplina.

Tarefas matemáticas

As tarefas matemáticas em que os alunos se envolvem e os materiais com os quais trabalham, enquadram e centralizam as suas oportunidades de aprendizagem da Matemática na escola. Boas propostas de tarefas que exijam raciocínio e comunicação matemática promovem capacidades de resolução de problemas e estabelecimento de conexões. Tarefas que podem ser abordadas de várias formas exigem que os alunos reflitam sobre diferentes estratégias e resultados, pesem os prós e contras das várias alternativas e ponderem caminhos distintos, facilitando significativamente o discurso na aula (NCTM, 1994).

Qualquer tarefa tem um dado nível de desafio matemático e estrutura associado. Relativamente ao nível de desafio, e considerando os conhecimentos dos alunos, as tarefas são agrupadas em tarefas de desafio reduzido ou elevado. Relativamente à estrutura, uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido, enquanto uma tarefa aberta tem um grau de indeterminação significativo face ao que é dado e pedido (Ponte, 2005).

Um ensino que visa alcançar os vários objetivos curriculares deve considerar tarefas que percorram os vários tipos. De facto, tarefas de natureza mais fechada desenvolvem o raciocínio matemático dos alunos, enquanto aquelas que têm um cariz mais aberto apelam ao estímulo da autonomia e capacidade de lidar com situações complexas por parte dos alunos. As tarefas mais acessíveis permitem que os alunos atinjam um elevado grau de sucesso e consequente desenvolvimento da sua autoconfiança, enquanto as tarefas mais desafiantes levam os alunos a ter experiências matemáticas estimulantes (Ponte, 2005).

Conforme o grau de desafio e estrutura que uma dada tarefa apresenta, ela pode ser categorizada como exercício, problema, exploração ou investigação, conforme se pode observar no seguinte diagrama (Figura 2.1).

Figura 2.1 - Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e abertura (Ponte, 2005)

Assumindo uma natureza aberta, surgem as explorações e investigações que apelam à autonomia dos alunos. Numa exploração, o aluno tem elementos/ informações que lhe irão permitir começar a trabalhar imediatamente, pois o desafio é reduzido. Numa investigação, o grau de desafio é elevado e o aluno pode ter mais dificuldades em iniciar o trabalho.

Adotando um nível de desafio reduzido e uma estrutura fechada, o exercício surge como consolidação de conhecimentos anteriormente adquiridos, pelo que o aluno conhece um processo imediato de resolução e é capaz de o usar. Já o problema, embora também tenha perfeitamente indicado o que é dado e pedido e teste a compreensão dos conceitos fundamentais a trabalhar, constitui um momento mais desafiante para o aluno.

"O teu problema pode ser modesto; mas desafia a tua curiosidade e leva-te a inventar estratégias, e se o conseguires resolver por ti próprio, experimentaste a tensão e disfrutaste do triunfo da descoberta" (Polya, 1973, p. v). A resolução de um problema divide-se, segundo o autor, em quatro fases: i) compreensão - Quais os dados? Qual o desconhecido?; ii) definição de um plano – Já resolvi alguma tarefa idêntica? Isto é-me familiar? Que etapas devo percorrer nesta resolução?; iii) execução do plano – ao cumprir as várias etapas, os resultados obtidos fazem sentido? Está correto o que estou a fazer?- e; iv) análise retrospetiva da solução obtida – respondi ao que era pretendido?.

Visando o sucesso dos alunos e do projeto ensino-aprendizagem, os professores devem considerar nas planificações as várias estratégias de ensino a praticar. O professor deve definir as tarefas a desenvolver (considerando a natureza de cada uma), bem como qual o papel do aluno e do professor em cada momento. Importante também é a definição de um tempo para cada momento.

O pensamento crítico

O espírito crítico é responsável por pormos em prática as capacidades críticas face ao nosso pensamento e ao dos outros, sendo que o pensamento crítico surge como processo de avaliação ou julgamento que assenta num pensamento reflexivo e razoável para decidir o que fazer ou no que acreditar (Ennis, 1985).

Tendemos a recorrer ao pensamento crítico em diversas situações, nomeadamente, na identificação do foco, análise de argumentos, formulação de questões de esclarecimento, definição de termos, julgamento da qualidade das definições, identificação de hipóteses não fundamentadas, julgamento da credibilidade das fontes, observação e julgamento da qualidade da informação reportada, dedução, indução, construção e avaliação de juízos de valor (Ennis, 1985).

Bayer (1995, citado por Innabi & Sheik, 2006), refere ainda que a resolução de problemas, o pensamento criativo e o processo de tomada de decisão fazem parte do pensamento crítico para poder julgar e avaliar determinada coisa.

Este tipo de pensamento pode dividir-se e ocorrer em três fases distintas: i) no início do processo de resolução de um problema num contexto de interação com o mundo e outras pessoas; ii) durante o processo de raciocínio, baseado no conhecimento anterior e antes de se tirarem conclusões; resulta da indução, dedução e juízos de valor e; iii) no final do processo de decisão sobre o que fazer ou no que acreditar (Ennis, 1985).

Para os alunos pensarem de forma crítica, os professores devem ajudá-los a desenvolver capacidades, competências e atitudes que lhes permitirão ter uma mente inquisitiva, racional, persistente e apropriada. Devem também auxiliá-los a serem capazes de procurar informação relevante onde possam assentar ideias com o objetivo de clarificar e persistir na procura de resultados relevantes (Jorge, 2011).

Para tal, os professores devem ensinar os seus alunos a explorar múltiplas perspetivas e tentar estabelecer conexões para que possam estar capacitados para aprender e pensar em contextos diferentes. Devem questionar, estimular a interpretação de informação e dados e desenvolver hipóteses para poderem compreender e avaliar as várias suposições ou explicações que lhes surjam em situações alternativas.

Analisando alguns estudos sobre as perceções do pensamento crítico dos professores, Howe (2000, citado por Innabi & Sheik, 2006) refere que a maioria dos docentes afirma que o pensamento crítico faz parte dos seus ensinamentos, mas apenas muito poucos foram capazes de o ensinar efetivamente. Focando as várias abordagens e estilos de pensar no ensino, conclui-se que os professores que avaliam criticamente o seu próprio ensino, são mais propensos a demonstrar um estilo reflexivo de ensino.

CAPÍTULO III
Contexto Escolar

Neste capítulo farei o contexto escolar - descrição da escola e da turma - em que a intervenção letiva se realizou. Num total de seis aulas de 90 minutos, a intervenção realizou-se no início do terceiro período, com a turma C do 10.º ano da Escola Secundária Professor José Augusto Lucas em Linda-a-Velha, concelho de Oeiras.

Caracterização da Escola

A Escola Secundária Professor José Augusto Lucas tem alunos do 7.º ao 12.º ano é a sede do Agrupamento de Escolas de Linda-a-Velha e Queijas, constituído este ano letivo. Sendo a única escola com ensino secundário no agrupamento, é a principal escolha dos alunos após a conclusão do 9.º ano. Os alunos desta escola são, essencialmente, da classe média-alta, embora existam alguns casos socialmente mais desfavorecidos.

Caracterização da Turma

A turma à qual fui afeta é constituída por 30 alunos, dezoito raparigas e doze rapazes; as idades da turma, de acordo com os dados recolhidos no início do ano, variam entre os 14 e os 16 anos. Não existem repetentes do 10.º ano e há um aluno com um Programa Educativo Individual.

Esta turma pertence ao agrupamento de Ciências e Tecnologias. Os motivos que levaram os alunos a escolher este agrupamento apresentam-se sintetizados no gráfico seguinte (Figura 3.1). As razões “Considero este percurso o mais adaptado para a carreira profissional que mais me atrai” e “Gosto das disciplinas que o integram” foram as mais escolhidas, enquanto “os meus professores acharam que teria mais sucesso neste curso” e “os meus amigos fizeram esta escolha” foram escolhidas apenas por um aluno.

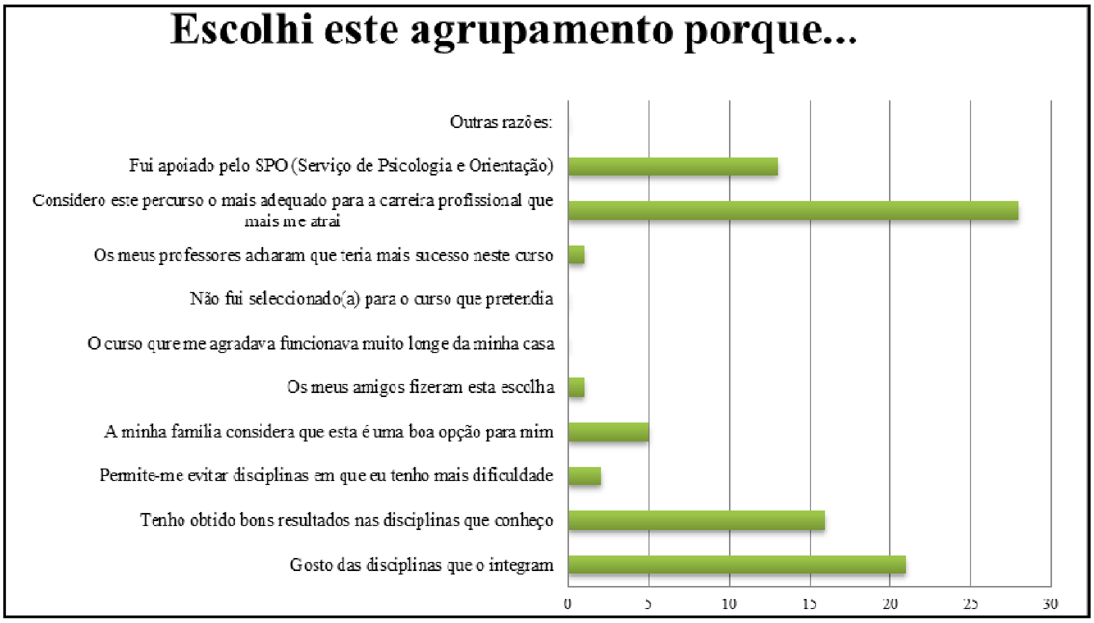


Figura 3.1 - Razões apontadas para a escolha do agrupamento

A maioria dos alunos frequentou o 9.º ano nesta escola ou na Escola EB 2,3 Professor Noronha Feio, em Queijas, à exceção de uma aluna que veio de Carnaxide. Pelo gráfico abaixo apresentado, a maioria dos alunos (67%) reside na freguesia de Linda-a-Velha ou numa das freguesias com as quais faz fronteira, sendo que apenas 33% residem em freguesias mais distantes.

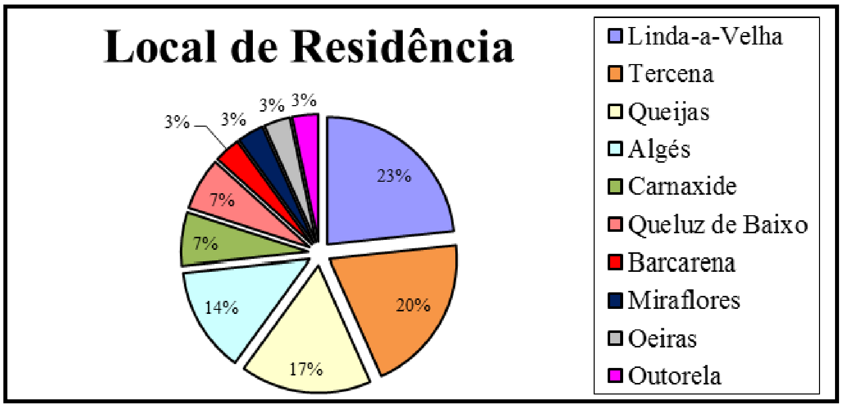


Figura 3.2 - Local de Residência dos alunos

A professora cooperante considera "esta turma grande demais, 30 alunos é um exagero", o que dificulta o trabalho em aula. Uma "turma com um bom, muito bom desempenho, com miúdos bem comportados e sem nenhum problema disciplinar… miúdos simpáticos". Mesmo sem olhar para as notas, "há alunos que se percebe que são bons alunos, interessados, curiosos e que pensam pela cabecinha deles". Considerando que existe heterogeneidade no aproveitamento da turma, destaca sete alunos muito bons que se mostram interessados, curiosos e capazes de pensar autonomamente, cinco alunos mais fracos e outros medianos. Acrescenta que “são alunos que trabalham bem em grupo, em geral, mas que há casos particulares em que isso nem sempre acontece”.

A figura que se segue, ilustra, então, os resultados obtidos pela turma no primeiro período (Figura 3.3). A média final foi de 13,6 valores, o que corresponde a um aproveitamento razoavelmente bom.

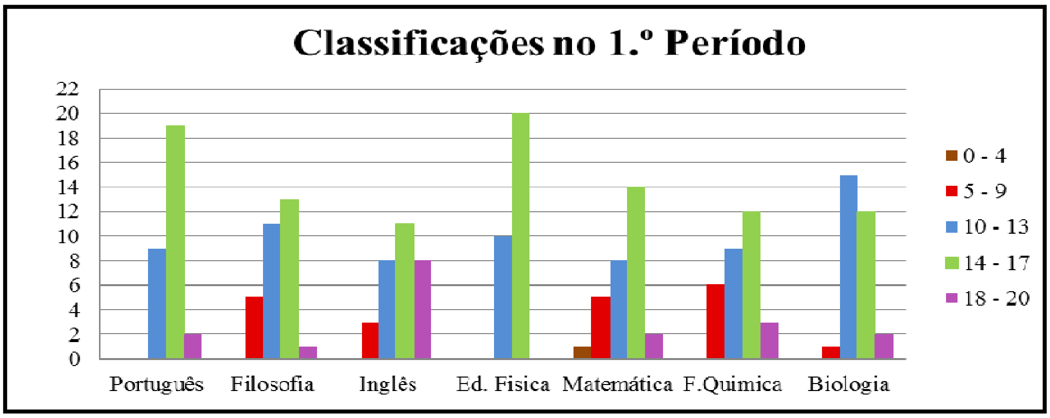


Figura 3.3 - Classificações da turma no 1.º Período

Examinando a disciplina de Matemática em particular, existem 80% de positivas e apenas 20% de níveis inferiores a 10 (sendo que um deles está no intervalo 0-4). Com uma média de 13,2 valores, o aproveitamento a esta disciplina é razoavelmente bom (Figura. 3.4).

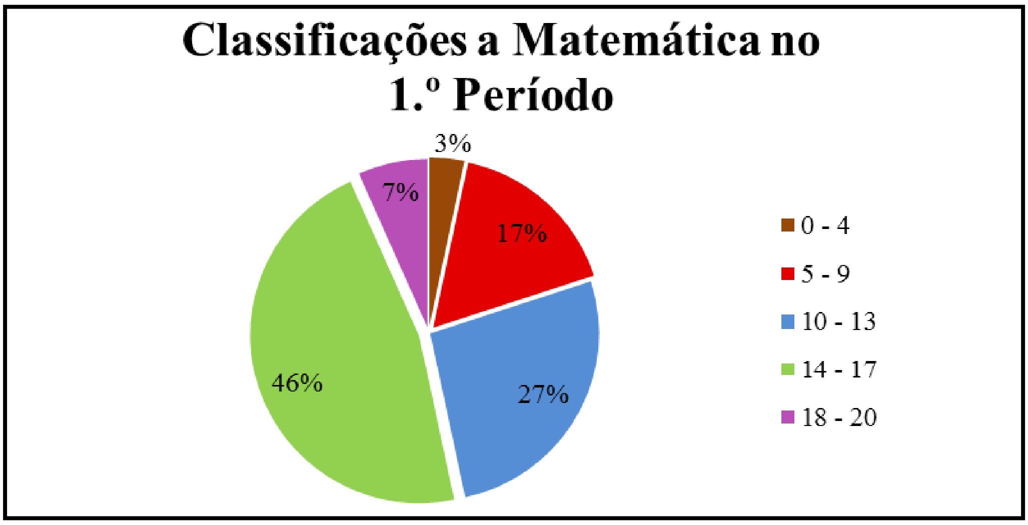


Figura 3.4 - Classificações a Matemática no 1.º Período

No início do segundo período houve dois alunos que anularam a matrícula às disciplinas de Matemática e de Física e Química A. As médias das várias disciplinas não sofreram alterações significativas (Figura 3.5), sendo a média global de 13,8 valores. A disciplina de Matemática A é a que regista maior número de alunos com nível inferior a 10, sendo Inglês e Matemática as disciplinas com maior número de alunos com nível superior a 17. Em Educação Física, as notas são as mais uniformes, existindo 22 alunos com nota entre 14 e 17.

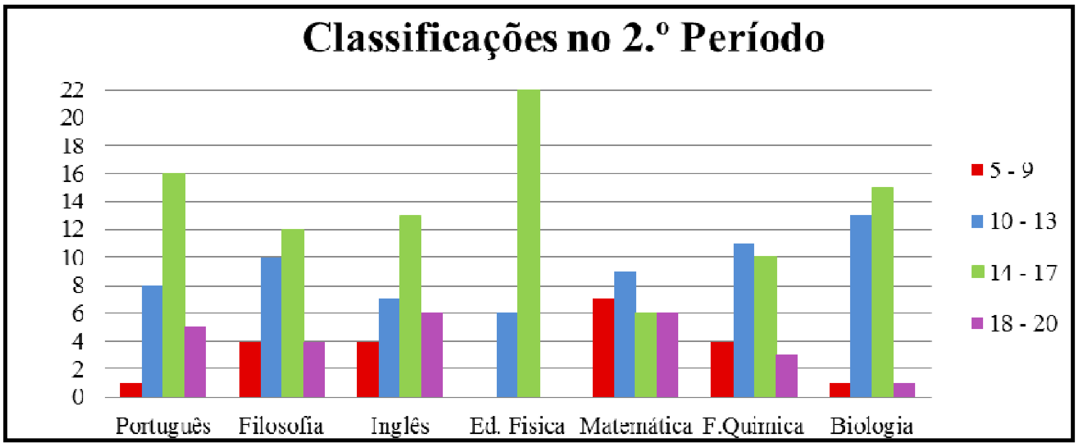


Figura 3.5 - Classificações da turma no 2.º Período

Focando a Matemática em particular, existem 75% de positivas e 25% de níveis inferiores a 10 (mais 5% que no período anterior) (Figura 3.6). Com uma média de 13,1 valores, o aproveitamento a esta disciplina é razoavelmente bom. De seguida, apresenta-se o gráfico que traduz as classificações da turma à disciplina no segundo período:

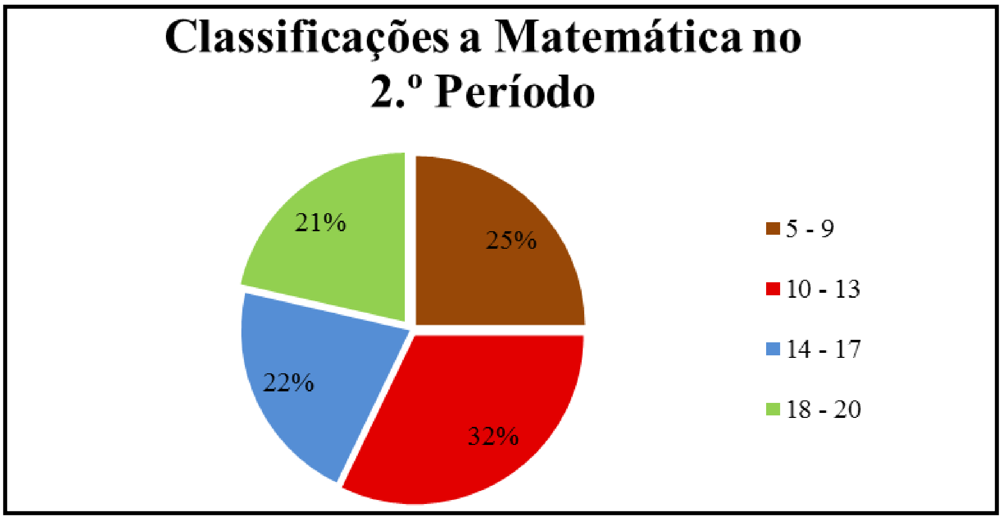


Figura 3.6 - Classificações a Matemática no 2.º Período

A observação de aulas veio reforçar a opinião da professora cooperante. A turma é muito simpática, bem comportada e interessada, sendo que as aulas são verdadeiros momentos de aprendizagem conjunta. Foi muito bom poder trabalhar com estes alunos e desenvolver este estudo no ambiente proporcionado.

CAPÍTULO IV
Unidade Didática

A intervenção letiva que serve de base a este estudo inseriu-se no segundo tema do programa de Matemática A para o 10.º ano, Funções e gráficos, funções polinomiais e função módulo, e realizou-se no início do 3.º período. Os conteúdos principais das minhas aulas foram os polinómios de 3.º e 4.º grau e as inequações e o uso da tecnologia, tema transversal do programa, também esteve presente. Nas planificações que fiz, tentei diversificar a metodologia do trabalho em aula e proporcionar momentos de aprendizagem para os alunos. As tarefas propostas tinham como principais objetivos consolidar conteúdos trabalhados nas aulas anteriores e introduzir/aprofundar os novos conteúdos a trabalhar.

Este capítulo inicia-se com a articulação da unidade didática, isto é, com o enquadramento dos conteúdos trabalhados no programa e na planificação letiva, seguindo-se um subcapítulo que aborda os principais conceitos matemáticos trabalhados durante a intervenção. Apresento, depois, as estratégias de ensino consideradas e descrevo sucintamente as aulas que lecionei durante a intervenção. Para finalizar o capítulo, refiro quais os instrumentos e procedimentos de recolha de dados que considerei e a sequência e as características das tarefas adotadas.

Articulação da Unidade Didática

O programa de Matemática A para o 10.º ano está dividido em três grandes temas: i) Geometria no plano e no Espaço I; ii) Funções e gráficos, funções polinomiais, função módulo e; iii) Estatística.

No 10.º ano, os conhecimentos sobre funções vão ser ampliados com base no estudo analítico, numérico e gráfico que privilegie o trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente. Em particular faz-se o estudo detalhado de algumas funções polinomiais e da função módulo e resolvem-se analítica, gráfica e numericamente algumas equações e inequações. A capacidade de relacionar fórmulas e representações geométricas é fundamental para o mundo de hoje, pelo que, este tema deverá fornecer uma formação para a vida (ME, 2002).

O estudo do tema das funções e gráficos iniciou-se no dia 30 Janeiro e prolongou-se até 20 Maio. Até ao dia 8 de Abril – início da minha intervenção – os alunos trabalharam o conceito de função, algumas propriedades das funções (domínio e contradomínio, objetos e imagens, monotonia e sinal de uma função, extremos e extremantes, injetividade e continuidade), a função afim, a função módulo e a função quadrática.

Para as seis aulas por mim lecionadas, os objetivos definidos envolveram o estudo das funções de 3.º e 4.º grau e as inequações. No que toca a estes conteúdos, o programa (ME, 2002) dá especial ênfase à modelação matemática – usando, por exemplo, dados concretos recolhidos pelas calculadoras gráficas - e à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos - nomeadamente quando se envolvam inequações – sendo que a resolução numérica ou gráfica deve ser sempre confrontada com conhecimentos teóricos. É referido também que a resolução analítica deve ser usada sempre que a natureza do problema assim o aconselhar. O estudo analítico de polinómios deve ser suscitado pela resolução de problemas e ser sempre acompanhado pela verificação numérica ou gráfica das conclusões obtidas.

A tecnologia é, além de uma ferramenta, uma fonte de atividade, de investigação e de aprendizagem, pelo que é de utilização obrigatória (ME, 2002). Tem como objetivo preparar os estudantes para uma sociedade em que os meios informáticos terão um papel considerável na resolução de problemas de índole científica. Sobre o uso da calculadora gráfica, o programa refere que:

> Ao usar a calculadora gráfica ou o computador, os estudantes devem observar que podem ser apresentadas diferentes representações gráficas de um mesmo gráfico, variando as escalas; devem sempre traçar um número apreciável de funções tanto manualmente em papel quadriculado ou papel milimétrico como usando calculadora gráfica ou computador escolhendo o melhor retângulo de visualização; devem ser incentivados a elaborar conjeturas, evitando conclusões apressadas, sendo sistematicamente treinados na análise crítica de todas as suas conclusões (ME, 2002, p. 7).

É sugerido aos professores o recurso particular à máquina calculadora gráfica para dez tipos de atividades, destacando-se: as manipulações algébricas para a resolução de equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos (e vice-versa); a modelação, simulação e resolução de situações problemáticas; os métodos visuais para a resolução de equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável com métodos algébricos;

as experiências matemáticas, elaboração e análise de conjeturas; a investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática; e a antevisão de conceitos do cálculo diferencial. Usar a calculadora gráfica neste tipo de atividades vai permitir ao aluno fazer uma melhor ligação entre os conhecimentos adquiridos via algébrica e os adquiridos via gráfica, pois é incentivado o seu confronto e complementaridade. De destacar o uso da tecnologia nos problemas cuja solução é impraticável com métodos algébricos, onde a calculadora é vista como uma ferramenta capaz de “ir mais longe” (ME, 2002).

Assuntos fundamentais presentes na Unidade Didática

Considerando os conteúdos trabalhados durante a intervenção realizada, existem alguns conceitos que devem ser analisados e explicados. As definições que apresento de seguida são baseadas no Compêndio de Álgebra (1957 e 1983), de Sebastião e Silva e de Silva Paulo.

As funções

A ligação de símbolos numéricos e letras, que figuram no lugar de números, por meio de sinais de operações e parêntesis, permite obter as *expressões literais*. Podendo ter vários valores diferentes, as letras dizem-se *variáveis*, enquanto os símbolos numéricos, que representam um só valor, se dizem *constantes*.

Considerando a expressão $9x^2-1$, a letra x não designa um número determinado, podendo ter o valor que lhes quisermos atribuir. Cada valor atribuído a x irá determinar um valor para $9x^2-1$, pelo que a expressão também não assume um único valor. Assim, se escrevermos $y=9x^2-1$, x e y são variáveis. Como os valores de y dependem dos valores que forem atribuídos a x, dizemos que y é uma variável dependente e que x é uma variável independente.

Então, “y é função de x” significa que existe uma correspondência unívoca entre os valores de x e os valores de y, pois a cada valor de x corresponde um dado valor de y.

Os monómios e os polinómios

Monómios são expressões algébricas cujas operações indicadas sobre as variáveis são, quanto muito, multiplicações, podendo ser um número ou o produto de um número por variáveis. $-x^2$ e 3π são exemplos de monómios. Quando um monómio não é somente um número, distinguimos o *coeficiente* - parte numérica – e a *parte literal* – parte constituída por letras. O *grau* de um monómio é a soma dos expoentes das variáveis que constituem a sua parte literal.

Os *polinómios* são as expressões que se obtêm com a ligação por notação aditiva de vários monómios, que passam a chamar-se *termos do polinómio*. O *grau* de um polinómio é o maior dos graus dos monómios que o constituem; se o polinómio se reduz a uma constante, o seu grau é zero.

As inequações

A toda a fórmula que se obtém ao ligar duas expressões com o sinal < ou >, chama-se *desigualdade*, sendo que a expressão do lado esquerdo se chamará *primeiro membro* e a do lado direito será o *segundo membro*. Se os dois membros forem expressões numéricas, a desigualdade é verdadeira ou falsa. Se existir, pelo menos num dos membros, uma ou mais variáveis, a desigualdade pode tornar-se verdadeira ou falsa, dependendo dos valores atribuídos à variável (ou às variáveis). Neste caso, a desigualdade diz-se uma *inequação* e a variável ou as variáveis presentes nos membros dizem-se *incógnitas da inequação.*

Resolver a inequação é encontrar as suas *soluções*, isto é, encontrar todos os números reais (ou agrupamento de reais) que ao serem atribuídos à variável (ou variáveis) convertem a inequação numa desigualdade numérica verdadeira. Uma inequação será *possível* ou *resolúvel* se tiver, pelo menos, uma solução, e *impossível* ou *irresolúvel*, caso contrário. Por exemplo, $x+3>0$ é possível e $x^2+1<0$ é impossível. Também pode acontecer que uma inequação admita como soluções todos os números reais (ou agrupamentos de reais), como por exemplo $x^2+y^2> -1$ e, neste caso, a inequação chama-se desigualdade absoluta ou inidentidade.

Chamar-se-á *inequação do 2.º grau em x* a toda a inequação que se consiga reduzir à forma $ax^2+bx+c>0$, onde $a\neq0$.

Estratégias Seguidas

"Ensinar é desenvolver uma ação especializada, fundada em conhecimento próprio, de fazer com que alguém aprenda alguma coisa que se pretende e se considera necessária" (Roldão, 2010, p. 14). No entanto, a aprendizagem não é garantida em absoluto porque está dependente do desenvolvimento de determinados procedimentos por parte do aprendente.

As várias estratégias adotadas e tarefas propostas para as aulas dependem, obviamente, dos objetivos pensados para cada momento da aula e têm em conta a problemática e os objetivos definidos, o tema matemático onde se inserem e as características dos alunos do estudo.

Foi definido no início da intervenção um plano geral que focava os conteúdos a abordar, os objetivos a atingir e os vários momentos da aula a preparar (ver Anexo 1 – Plano de Intervenção). Neste plano também defini as aulas em que iria proceder à recolha de dados. De ressalvar que este plano não foi seguido à risca, tendo sofrido algumas alterações resultantes da necessidade de adaptar o que tinha previsto para ir ao encontro da aprendizagem dos alunos.

A metodologia de trabalhão mais frequente foi o trabalho autónomo a pares e/ou em pequenos grupos para a exploração das tarefas – é o método de trabalho habitualmente desenvolvido nas aulas da turma e é propício à troca de ideias e raciocínios. Não recorri ao trabalho individual porque os alunos não estão habituados a trabalhar sozinhos, gostando de trocar ideias entre si e fazer o trabalho em conjunto. Em geral, após o trabalho autónomo por parte dos alunos, segue-se uma discussão/explicação de ideias em grande grupo para consolidação de conclusões das tarefas realizadas. Durante o trabalho autónomo dos alunos, eu circulei pela sala de aula e assumi o papel de orientadora, questionando e orientando o trabalho deles. Ao acompanhar o desempenho dos alunos nestes momentos, assumi também o papel de observadora, pois fui analisando e selecionando o material que considerava pertinente para a discussão em turma. Terminado o momento de trabalho a pares/pequenos grupos, seguiu-se a discussão em grande grupo, onde o meu papel se focou na gestão da discussão, questionando os alunos sobre as suas resoluções. Tentei destacar: i) exemplos corretos – para todos poderem ter uma resolução correta; ii) exemplos com erros – para a turma ter contacto com o erro e o corrigisse e; iii) exemplos que pudessem ter raciocínios ou ideias diferentes e interessantes –

para a turma poder contactar com raciocínios alternativos e para que os alunos responsáveis por eles pudessem sentir o seu trabalho valorizado.

Também houve momentos que assumiram um carácter mais expositivo e que se focaram mais em mim – foi o caso da abordagem aos vários processos de resolução de inequações do 2.º grau, na segunda aula – pois o objetivo era clarificar conhecimentos e esclarecer dúvidas provenientes da aula anterior.

Nos vários momentos da aula, é essencial transmitir a importância de os alunos registarem por escrito as resoluções e os conteúdos discutidos. Em particular, os comentários que julgarem adequados e as observações realizadas ao usar a calculadora gráfica, descrevendo cuidadosamente as propriedades constatadas e justificando devidamente as suas conclusões relativamente aos resultados esperados – desenvolve-se o pensamento crítico e a capacidade de comunicação matemática (ME, 2002).

No que toca às tarefas propostas, a seleção das atividades a desenvolver torna-se de extrema importância, pois aquelas que forem selecionadas devem contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, a conjeturar, a experimentar, a provar, a avaliar e a desenvolver diversas atitudes promotoras de boas aprendizagens matemáticas (ME, 2002). Nas minhas escolhas, recorri ao manual quando as propostas apresentadas correspondiam aos meus objetivos e contruí fichas com tarefas adaptadas de propostas do GAVE que considerei uma mais-valia para a aprendizagem da turma. Ao trabalhar com a calculadora, pareceu-me essencial abordar tarefas com contextos reais e de carácter problemático.

Além do cuidado na escolha das tarefas da aula, também é importante selecionar tarefas interessantes para os trabalhos de casa. Na minha opinião, limitar o trabalho da disciplina às aulas não é suficiente para a maioria dos alunos, pelo que, para conseguirem consolidar as aprendizagens e explorar os conteúdos trabalhados, devem complementar o trabalho da aula com algum trabalho em casa.

Descrição das aulas lecionadas

Sucintamente, segue-se uma breve descrição das aulas por mim lecionadas que inclui, por vezes, algumas observações e reflexões apuradas nos momentos de discussão pós-aulas.

<u>Aula 1, dia 8 Abril</u>

Por motivos pessoais, eu não estava suficientemente concentrada na aula e não a tinha preparado no seu pleno, pelo que foi decorrendo um pouco à deriva, com muita confusão no ar. Verificou-se falta de rigor na linguagem e escrita, e os conceitos não foram devidamente abordados e aprofundados. Esta aula teve, na minha opinião, um balanço negativo.

Depois de ditar o sumário, dei algumas indicações – não muito explícitas - sobre a metodologia de trabalho a desenvolver no momento seguinte e não defini o tempo de resolução da tarefa, o que conduziu a um ritmo de trabalho lento.

Os alunos trabalharam em grupo, havendo discussão de ideias entre eles como era pretendido, mas não houve uma discussão em grande grupo, pelo que as ideias trocadas entre os grupos apenas ficaram para eles, não tendo sido aproveitadas para a turma. As dificuldades registadas, mais ou menos comuns aos grupos, foram sempre esclarecidas apenas para o grupo – as mais frequentes deveriam ter sido abordadas para toda a turma e tal não aconteceu.

O primeiro momento terminava com uma discussão de ideias (sobre inequações de 2.º grau) que estava prevista para quando a maioria dos alunos terminasse a segunda tarefa proposta, pois uma das perguntas pedia a resolução de uma inequação de 2.º grau e, até ao momento, os alunos só a sabiam resolver graficamente. O objetivo da discussão era os alunos aprenderem a resolver inequações analiticamente.

Iniciando-se com um notável atraso face à planificação prevista, esta discussão de ideias não foi posta em prática corretamente: alguns alunos ainda não tinham chegado à referida pergunta e, da minha parte, não houve a contextualização da discussão ou uma introdução ao que se iria discutir. Contribuindo para um momento verdadeiramente mal conseguido, a discussão em si não foi bem pensada: não foram consideradas, da minha parte, possíveis dificuldades dos alunos e, ao deparar-me com elas, não as consegui agarrar e esclarecer. Acabei a tentar aproveitar uma ideia de cada lado e a confusão que se instalou foi notória: não houve delineação de um raciocínio lógico e coerente, ficaram ideias no ar, o discurso foi confuso e os alunos pouco perceberam do que se estava a tratar. No fim, tinha um quadro muito mal apresentado, com as ideias dispersas… Quadro onde não se percebia nada!

A confusão prolongou-se até ao fim da aula. A planificação não foi cumprida e os objetivos definidos não foram alcançados.

Aula 2, dia 10 Abril

Continuaram a existir lacunas e aspetos a melhorar, mas esta aula revelou uma evolução em alguns pontos: houve um maior cuidado com a linguagem usada (oral e escrita), uma melhor gestão do espaço do quadro e uma definição prévia do tempo de resolução de cada tarefa. No entanto, ainda foi frequente colocar uma questão a um aluno/turma e ser eu mesma a responder e esperar demasiado tempo pelas intervenções dos alunos o que provoca uma quebra de ritmo. As melhorias notadas partiram de um esforço e de uma maior preocupação para com elas, bem como de uma melhor postura física e psicológica.

Como a discussão de ideias sobre a resolução de inequações de 2.º grau na primeira aula tinha sido muito confusa e ficado muito aquém do pretendido, esta segunda aula começou precisamente com a abordagem aos vários processos de resolução de inequações de 2.º grau. Aliás, um dos objetivos para esta aula era precisamente consolidar a resolução de inequações do 2.º grau.

Depois de escrever no quadro a inequação $x^2+2x \geq 0$, solicitei aos alunos que sugerissem um processo de resolução. A ordem pela qual os vários processos foram sugeridos foi diferente daquela em que pensei previamente, mas isso não afetou a abordagem a cada um deles. Os três processos foram abordados calmamente e com o contributo da turma, mas nenhum ficou completo – isto levou a que, mais tarde, alunos se queixassem que não lhes tinha sido apresentada nenhuma resolução "do princípio ao fim".

Outras inequações foram escritas do quadro de seguida, solicitando-se aos alunos que, a pares, as resolvessem recorrendo ao processo que quisessem e achassem mais adequado. No fim, estas resoluções foram recolhidas para futura análise, mas faltou uma breve observação inicial na qual explicasse à turma que as resoluções iam ser recolhidas no final.

Depois de concluir o segundo momento, saltei imediatamente para o quarto, pois o terceiro revelou-se desnecessário e já restava pouco tempo para o final da aula. Assim sendo, as fichas de trabalho (Anexo 4: Aula 2 - Ficha) foram distribuídas e foram dadas as instruções para o trabalho de grupo.

Durante cerca de 10 minutos, os alunos trabalharam na ficha e trocaram ideias em grupo. Ainda antes do fim da aula, e por me aperceber que alguns grupos não estavam a conseguir resolver o primeiro exercício da ficha, interrompi as resoluções para esclarecer algumas dúvidas no quadro, nomeadamente, as referentes à determinação da área do jardim. No entanto, a aula estava mesmo a terminar e a intervenção não foi bem conseguida. A resolução dos restantes exercícios da ficha ficou para trabalho de casa.

Nesta aula, a planificação não foi seguida à risca nem concluída. Já os objetivos foram, quanto a mim, alcançados.

Aula 3, dia 11 Abril

Esta aula iniciou-se com uma intervenção da professora Ana Vieira para esclarecer alguns aspetos sobre o funcionamento das máquinas calculadoras gráficas, utilizando o viewscreen da texas e ao simulador da casio. Esta intervenção deveria ter sido preparada e realizada por mim, mas tal não se verificou.

Seguiu-se a discussão de alguns aspetos relevantes na resolução dos exercícios da ficha dada no fim da aula anterior. Mal comecei a discussão, deparei-me com uma dificuldade (já prevista na véspera aquando a preparação da discussão): como os alunos tinham terminado a resolução em casa e eu não os tinha acompanhado, eu não tinha a menor ideia das dificuldades sentidas, dos erros existentes, dos processos adotados. Também não sabia quem efetivamente tinha terminado a resolução e quem não tinha voltado a pegar na ficha.

A conclusão da ficha tinha ido para trabalho de casa e os alunos já deviam ter pensado sobre os exercícios propostos. Por isso, durante esta discussão, apenas referi os processos por alto, fazendo um apanhado geral das ideias sem resolver "do princípio ao fim" os exercícios propostos. Desta forma, os alunos que tinham dedicado algum tempo em casa à resolução da ficha conseguiram, provavelmente, acompanhar o momento, enquanto os que não o tinham feito não o conseguiram fazer.

Para o momento seguinte, foi distribuída uma ficha (Anexo 6: Aula 3 - Ficha) para resolver em grupo cujo objetivo era os alunos encararem as funções polinomiais como produto de funções afins.

Durante a resolução, houve grupos bastante empenhados e sem grandes dificuldades em responder a cada pergunta, mas também houve grupos com um ritmo muito lento e que revelaram muitas dificuldades.

Advertida na primeira aula para que não deixasse os grupos trabalharem muito tempo sem pontos da situação e interrupções para discussões de ideias, resolvi interromper as resoluções quando me apercebi que a maioria dos alunos tinha concluído a resolução do exercício 1.

No entanto, apesar de ter os tópicos da discussão pensados previamente, a discussão voltou a não ser bem conseguida, não conseguindo manter um raciocínio continuado durante a discussão, nem gerir as intervenções dos alunos e conduzi-los a tirar as conclusões pretendidas. As conclusões foram sendo alcançadas, mas muitas vezes por mim ou por condução minha, que não era o que pretendia.

Esta aula começou e terminou com dois momentos que não soube aproveitar da melhor forma, voltando a ser bastante notório o raciocínio confuso, a falta de rigor na linguagem usada e a ausência de estratégias eficientes para o cumprir dos objetivos traçados. Mais uma vez, a planificação não foi cumprida.

Aula 4, dia 15 Abril

Nesta aula foi-me apontada uma má postura da minha parte que reconheço. A aula anterior não correu da melhor forma e senti-me de facto, desmotivada para a nova aula que ainda nem tinha começado. E, inevitavelmente, isso foi transmitido à turma, influenciando o seu envolvimento em aula.

Retomando o trabalho da aula anterior, os grupos continuaram a resolver a ficha sobre as funções polinomiais como produto de funções afins, mas para tentar acelerar o ritmo de trabalho, algumas alíneas foram anuladas.

Para tirar as conclusões pretendidas, os alunos estavam a aplicar processos semelhantes aos utilizados na aula anterior, mas o ritmo de trabalho não foi mais elevado, antes pelo contrário, verificou-se mais lento. O tempo dedicado à resolução revelou-se muito superior ao previsto e o ritmo a que a correção/ discussão de ideias decorreram também foi lento.

Toda a discussão foi feita comigo no quadro a fazer aquilo que os alunos já tinham feito nos lugares, momento que teria sido melhor aproveitado se tivessem sido os alunos a ir ao quadro: assim eu poderia circular pelos grupos e envolver a turma. E porquê repetir “perceberam?”? Afinal, quem percebeu diz que sim e quem não percebeu, nada diz. Os alunos que não perceberam e querem perceber tomam a iniciativa de perguntar. Esta pergunta não traz nada de novo, tornando-se desnecessária. E de facto, apesar de não estar a ter resultados com a pergunta, continuei a repeti-la várias vezes. As ideias previstas para a discussão foram abordadas, mas fiquei com a sensação de que não houve conhecimento novo a ser transmitido, sendo um momento sem frutos.

Concluído este assunto, distribuí as fichas (Anexo 8: Aula 4 - Ficha) sobre as famílias de funções cúbicas cuja resolução seria discutida em turma. Com o auxílio de uma apresentação em *powerpoint*, abordaram-se apenas as primeiras duas famílias das funções cúbicas, mas novamente numa confusão de ideias que apenas foram despejadas, levando os alunos a copiar do quadro as informações apresentadas.

A meio da discussão, tocou para a saída, tendo ficado o restante preenchimento da ficha para trabalho de casa, pois as informações necessárias estavam no manual. Esta aula ficou muito aquém dos objetivos e planificação previstos.

Aula 5, dia 17 Abril

Nesta aula pretendia concluir a ficha sobre as famílias de funções cúbicas, generalizar propriedades de funções polinomiais de grau par e ímpar, resolver inequações de grau superior a 2 e ainda iniciar a resolução de uma ficha com problemas adaptados do GAVE. Muito para uma aula só...

A aula iniciou-se com a projeção das páginas do manual onde estavam as informações necessárias à resolução das alíneas restantes… E aprendi uma lição “não deves definir a tua interação supondo que os alunos fizeram o trabalho de casa, passando apenas por algumas questões pontuais”. Que foi o que, de facto, fiz. Supondo que os alunos tinham consultado o manual e preenchido a ficha (inclusive tinha havido oficina na véspera), apenas fiz um apanhado geral de ideias, sem explicações cuidadas sobre os diferentes aspetos e sem um raciocínio contínuo com a interação dos alunos. As conclusões foram tiradas por mim e apenas oralmente, faltaram questões verdadeiramente desafiantes, bem como uma síntese final sobre as funções cúbicas.

No momento seguinte, solicitei aos alunos que, a pares, resolvessem duas inequações de grau superior a três, uma fatorizada e outra não. Enquanto os alunos resolveram o proposto, circulei pela sala para apurar processos de forma a enriquecer a discussão seguinte.

A inequação que não estava fatorizada foi resolvida graficamente sem dificuldades de maior. Em relação à que estava fatorizada, poucos foram os alunos que tiraram partido da factorização: pretendendo-se um quadro de sinal, a maioria dos alunos optou por desenvolver os produtos e, no fim, introduzir a expressão na calculadora. Na discussão que se seguiu, queria que os alunos percebessem que é escusado desenvolver os produtos se o objetivo é por na máquina, mas mais que isso, que eles fossem capazes de perceber que podiam ter feito o quadro de sinal. Mas, tantas foram as ideias lançadas que a confusão se voltou a instalar até que se ouviu um aluno a dizer “mas não é preciso nada disto” quando essa frase deveria ter sido dita por mim. Alimentei uma discussão de ideias e processos desnecessários em vez de construir um caminho mais simples para os alunos.

Ainda com a confusão no ar, os alunos avançaram para a proposta seguinte, não sendo o ambiente da aula o mais favorável ao trabalho dos alunos. Houve ainda tempo para uma última discussão de ideias sobre a resolução da referida proposta, embora não tenha voltado a focar os aspetos mais relevantes com clareza e rigor.

Mais uma aula terminou com a planificação por cumprir, com ideias muito vagas, discursos pouco rigorosos, mau aproveitamento de ideias por parte dos alunos.

Aula 6, dia 18 Abril

Esta última aula tinha com objetivo principal desenvolver o pensamento crítico dos alunos face aos gráficos apresentados pela calculadora. Não sendo a continuação de nenhum assunto pendente das últimas aulas muito confusas, estava bem mais confiante para os vários momentos desta aula, notando-se na minha postura.

Projetei parte do gráfico de uma função que parecia uma parábola (Anexo 12: Aula 6 - Projeções) e perguntei à turma que tipo de função achavam ser, ao que eles responderam, sem hesitar, “parábola”. Mostrei assinalados os zeros e o máximo entre eles cuja abcissa não era o ponto médio dos zeros e logo eles concluíram que não era uma parábola. Dando a expressão da função representada, foi solicitado aos alunos que encontrassem uma boa janela de visualização para verem uma parte significativa do gráfico, sendo que o primeiro aluno a encontrar a iria escrever no quadro.

Mostrei depois parte do gráfico de uma função que aparentava ser uma cúbica, mas que era uma quártica. Dando novamente a expressão da função representada, tornei a solicitar aos alunos o mesmo exercício.

A segunda parte da aula consistiu na resolução de uma ficha de trabalho (Anexo 10: Aula 5 - Ficha) com problemas adaptados de sugestões do GAVE, sendo que os alunos deviam trabalhar a pares/grupo.

A resolução da ficha decorreu a bom ritmo, com os alunos empenhados e solicitando-me vários esclarecimentos. A maioria dos pares/grupos conseguiu fazer grande parte da ficha em aula e levantar dúvidas pertinentes.

O exercício dois gerou dúvidas em quase todos os alunos e, por isso, foi alvo de discussão de ideias em grande turma. Verificando que a maioria dos alunos ainda demonstrava dificuldades em trabalhar com as transformações de funções, fazendo todos o mesmo erro, pedi a uma aluna que fosse ao quadro e fizesse esse mesmo erro para que fosse esclarecido em turma. Numa conversa em que fui a protagonista em vez dos alunos (outra vez), penso que a turma percebeu o erro e o assunto ficou esclarecido. Ainda houve tempo para abordar uma outra alínea, mas não foi feito até ao fim porque a aula acabou entretanto.

Penso que esta tenha sido uma aula em que os objetivos definidos e a planificação foram satisfatoriamente cumpridos, considerando que a aula teve um saldo positivo.

Instrumentos e Procedimentos de Recolha de dados

Tratando-se de um trabalho de carácter investigativo, é necessário que os métodos de recolha de dados sejam previamente ponderados, sendo que, para a realização deste estudo, foi necessário recolher vários tipos de dados. Para começar, foi feita uma recolha de documentos da direção de turma e do Serviço de Psicologia e Orientação (SPO), para poder caracterizar a turma e fazer uma apreciação do seu aproveitamento.

A entrevista é um dos vários métodos de recolha de dados, cujo objetivo é obter as informações desejadas com a máxima eficácia e a mínima distorção (Tuckman, 2005). Também com o objetivo de caracterizar a turma, foi feita uma entrevista semiestruturada à professora cooperante, orientada por um guião/conjunto de pontos a focar que foi adaptado ao longo da mesma, conforme se achasse necessário. A entrevista foi gravada e foram retiradas frases da professora que considerei pertinentes para a caracterização da turma.

Durante o ano fui retirando diversas notas de campo sobre o que fosse considerando relevante e útil para a realização do estudo e presente relatório, complementando a restante informação recolhida. Assim, no meu diário de bordo, constam anotações sobre momentos pontuais da sala de aula, apontamentos provenientes das reflexões pós-aula com os professores orientadores, professora cooperante e colega de estágio - permitiu reter algumas ideias sobre metodologias a aplicar ou não, sobre a minha postura e sobre formas de interagir com a turma - e algumas notas que considerei importantes - ideias para a intervenção que iria realizar, opiniões da professora cooperante sobre variados assuntos, etc..

As questões do estudo procuravam perceber: i) Qual o tipo de tarefas envolvendo funções que induz, indiretamente, alunos do 10.º ano a usar a calculadora gráfica na sua resolução; ii) Em que dimensões do uso da calculadora gráfica os alunos revelam estar a desenvolver o pensamento crítico; iii) Quais as principais dificuldades que alunos do 10.º ano têm ao trabalhar com a calculadora gráfica. Recolher produções escritas dos alunos realizadas em aula permite-me analisar a forma como eles apresentam as respostas, nomeadamente, a organização das mesmas, a notação utilizada e o rigor com que esboçam os gráficos. Assim, para conseguir responder a questões definidas, escolhi tarefas do manual e/ou construí tarefas que foram propostas aos alunos para depois recolher as resoluções e analisar. Segue-se a apresentação e contextualização das tarefas recolhidas.

Aula 2: Resolver inequações de 2.º grau

$$\boxed{\textbf{(2.2)}\ x^2-3x \leq 0 \quad ; \quad \textbf{(2.3)}\ -x^2+2x+3 \geq 0}$$

Figura 4.1 – Inequações da tarefa 2 da aula 2

A resolução destas inequações foi proposta a pares e ocorreu na segunda aula (ver Anexo 3: Aula 2 – Plano de Aula). Já tendo contactado com alguns processos possíveis de resolução, esta tarefa constituía um exercício para os alunos. Esta tarefa tinha dois objetivos distintos: para os alunos, aplicar os métodos abordados e consolidar raciocínios, e, para mim, perceber se os alunos tendem a recorrer ou não à calculadora durante a resolução e, se sim, para quê.

<u>Aula 5: Resolver inequações de 3.º grau</u>

(4.1.1) $-3(x+2)(x-1)^2<0$; **(4.1.2)** $x^3+2x^2-15x-5<0$

Figura 4.2 – Inequações da tarefa 4 da aula 5

Tal como na tarefa anterior, a resolução destas inequações também foi proposta a pares, mas durante a aula 5 (ver Anexo 9: Aula 5 – Plano de Aula). No entanto, neste caso, os alunos ainda não tinham contactado previamente com possíveis métodos de resoluções, pelo que esta tarefa constituía um problema para eles. Mais uma vez, existiam dois objetivos distintos: para os alunos, aplicar conhecimentos anteriores neste novo problema e, para mim, perceber se os alunos tendem a recorrer ou não à calculadora durante a resolução e, se sim, para quê.

<u>Aula 6: Encontrar boas janelas de visualização</u>

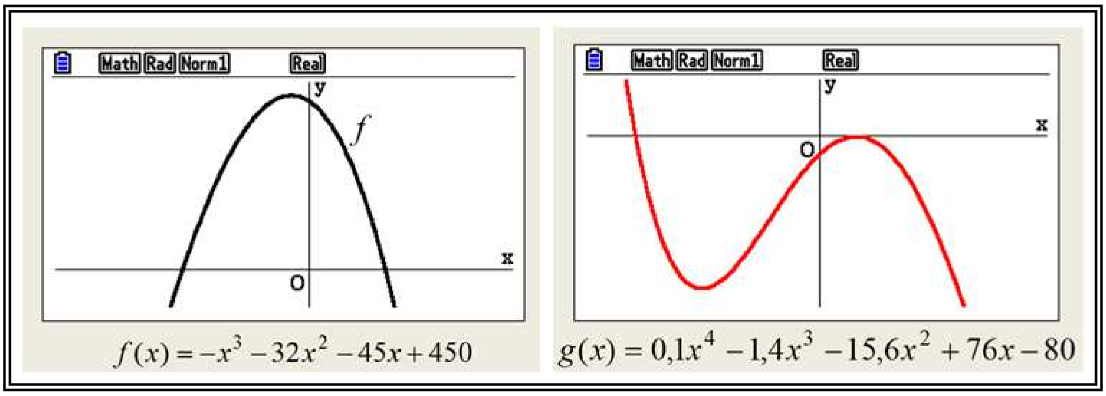


Figura 4.3 – Projeção da tarefa 2 da aula 6

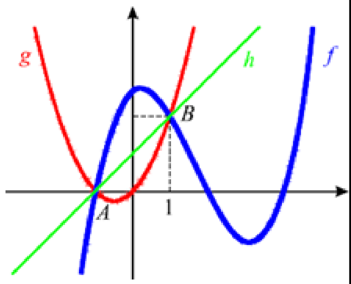
Na sexta aula (ver Anexo 11: Aula 6 – Plano de Aula), apenas mostrei as curvas dos gráficos como aqui estão e questionei a turma sobre o grau da função representada. No primeiro caso, os alunos da turma responderam ser do 2.º grau e, no caso seguinte, do 3.º grau, mas quando confrontados com as expressões analíticas das funções em questão, perceberam que estavam enganados. Então, foi-lhes desafiado que encontrassem uma janela de visualização que lhes permitisse ver uma zona significativa do gráfico da função em questão. O primeiro objetivo da tarefa era que os alunos usassem as potencialidades do *zoom* da calculadora para superar o desafio lançado, enquanto o segundo era que eu conseguisse perceber como é que os alunos recorrem ao zoom da calculadora e se revelam pensamento crítico nas opções tomadas.

Aula 6: Resolver Equações e Inequações de 3.º grau

3. Na figura ao lado, estão representadas graficamente três funções, f, g e h, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- a função f é definida pela expressão $\frac{1}{3}(x+1)(x-2)(x-4)$;
- o gráfico da função g é definido pela expressão x^2+x;
- o gráfico da função h é uma recta paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares;
- os pontos A e B pertencem aos gráficos das três funções;
- o ponto A tem ordenada 0;
- o ponto B tem abcissa 1.



1. Defina analiticamente a função h, depois de determinar a ordenada do ponto B.

2. Determina o conjunto solução da inequação $f(x)<0$, sem recorrer à calculadora.

3. A equação $f(x)=g(x)$ tem três soluções, sendo uma delas maior do que 1. Determine essa solução, utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora.

Figura 4.4 – Tarefa 3 da ficha sobre funções polinomiais da aula 6

Esta era a última tarefa da ficha distribuída na aula 6 (ver Anexo 11: Aula 6 – Plano de Aula) e resultava da adaptação de uma proposta do GAVE, sendo que o meu interesse de análise se foca apenas na segunda e terceira alínea.

No enunciado da segunda alínea, é dito aos alunos que não podem recorrer à calculadora, mas é do meu interesse perceber se, mesmo com a indicação, há alunos que recorrem a ela. No entanto, repare-se que a expressão em questão está fatorizada, os zeros da função retiram-se por observação direta e a resolução pode ser integralmente analítica.

Na terceira alínea, é indicado aos alunos que devem recorrer às capacidades gráficas da calculadora para resolverem a equação pedida. É do meu interesse averiguar como são feitos os registos e construída a resposta com as informações provenientes da calculadora.

CAPÍTULO V
Análise e Reflexão

Este capítulo é composto por dois subcapítulos: i) apresentação e análise de dados e ii) balanço reflexivo. No primeiro subcapítulo, apresento e analiso as resoluções dos alunos que recolhi durante as aulas que lecionei, tendo em conta a problemática e as questões definidas no início deste estudo. No segundo subcapítulo, tiro as conclusões do presente estudo e faço uma reflexão pessoal sobre todo o percurso inerente à realização deste trabalho.

Apresentação e Análise dos Dados

Considerando as três questões de investigação formuladas no início deste estudo, neste subcapítulo procuro apresentar e analisar os dados - resoluções de vários alunos da turma - que recolhi nas aulas que lecionei. Cada subparte é dedicada a uma das questões formuladas.

O tipo de tarefas e o uso da calculadora gráfica

A primeira pergunta da investigação visa perceber qual o tipo de tarefas envolvendo funções que induz, indiretamente, alunos do 10.º ano a usar a calculadora gráfica na sua resolução. De entre o material recolhido, selecionei quatro tarefas para analisar: dois exercícios (propostos na segunda aula) e dois problemas (propostos na quinta aula).

A segunda aula iniciou-se com a abordagem de vários processos de resolução de inequações, analíticos e gráficos. Concluída a abordagem e esclarecidas as dúvidas dos alunos, foi proposta aos alunos a resolução de várias inequações, de onde destaco (2.2) $x^2-3x<0$ e (2.3) $-x^2+2x+3\geq 0$ (ver Anexo 3: Aula 2 – Plano de Aula). Uma vez que anteriormente já tinham sido explorados vários processos de resolução das mesmas, o grau de desafio destas tarefas era reduzido e, estando claramente indicado o propósito da tarefa, a natureza era fechada.

Analisando as resoluções da inequação (2.2), conclui-se que todos os alunos optaram por recorrer a uma resolução analítica. De seguida, apresento os dois processos utilizados.

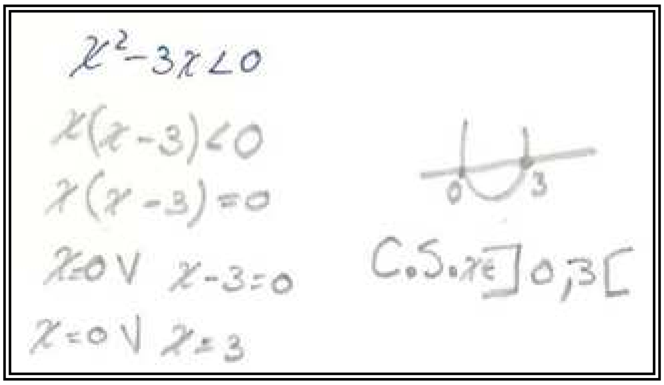


Figura 5.1 – Resolução do Aluno A da inequação 2.2 da Aula 2

A estrutura desta primeira resolução (Figura 5.1) é muito semelhante à maioria das restantes: os alunos começam por considerar uma equação e encontrar os seus zeros, esboçar a parábola, voltar a considerar a inequação e escrever o conjunto-solução da mesma. É uma resolução muito simples, de carácter analítico, e que permite obter o conjunto solução muito rapidamente e sem grande probabilidade de erro, tal é a simplicidade da mesma. Os alunos que optaram por esta resolução têm uma resolução certa, apresentando por vezes, pequenos erros/pormenores que refletem a ausência de rigor matemático.

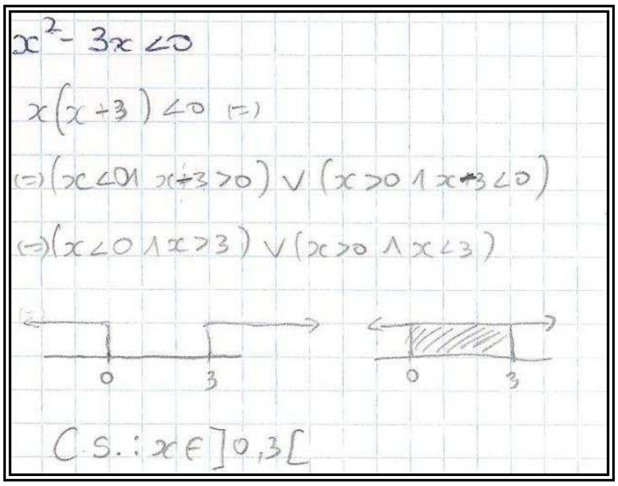


Figura 5.2 – Resolução do Aluno B da inequação 2.2 da Aula 2

Apenas alguns alunos optaram por esta segunda resolução (Figura 5.2), também analítica. A resolução baseia-se num raciocínio já trabalhado em anos anteriores: pretendendo-se que um produto de dois fatores seja negativo, os mesmos têm de ter sinais contrários. Os alunos transformam a inequação dada noutras equivalentes, resolvem-nas e, no fim, operam com as disjunções/conjunções entre elas. O aluno responsável por esta resolução recorreu à reta real para fazer a interseção das soluções das várias inequações para depois obter o conjunto-solução. Mais uma vez, as resoluções apresentadas estão corretas, podendo ter alguns erros por falta de rigor matemático.

Ao resolver a inequação (2.3), a maioria dos alunos contínua a optar por uma resolução analítica, mas há alguns exemplos de resoluções gráficas. Apresento, de seguida, três resoluções diferentes, sendo que a primeira é gráfica e as outras duas são analíticas.

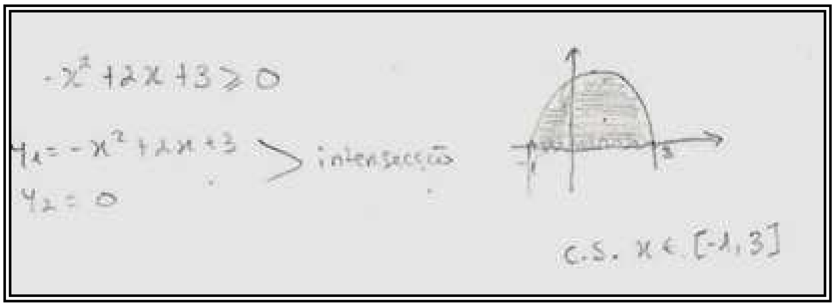


Figura 5.3 – Resolução do Aluno C da inequação 2.3 da Aula 2

Como os resultados necessários para a determinação do conjunto-solução advêm exclusivamente da calculadora, esta é uma resolução gráfica (Figura 5.3). Os alunos que optaram por esta resolução introduziram as equações $y_1 = -x^2+2x+3$ e $y_2 = 0$ na calculadora, visualizaram os gráficos das mesmas e calcularam os pontos de interseção dos mesmos. Por observação do gráfico, os alunos concluem o conjunto-solução sem dificuldade.

Esta resolução usa a calculadora gráfica como alternativa à resolução analítica (Rocha 2000; Doerr e Zangor, 2000); são utilizadas as potencialidades da calculadora gráfica de forma apropriada na resolução da tarefa, pelo que a utilização é proficiente (Graham et al, 2003).

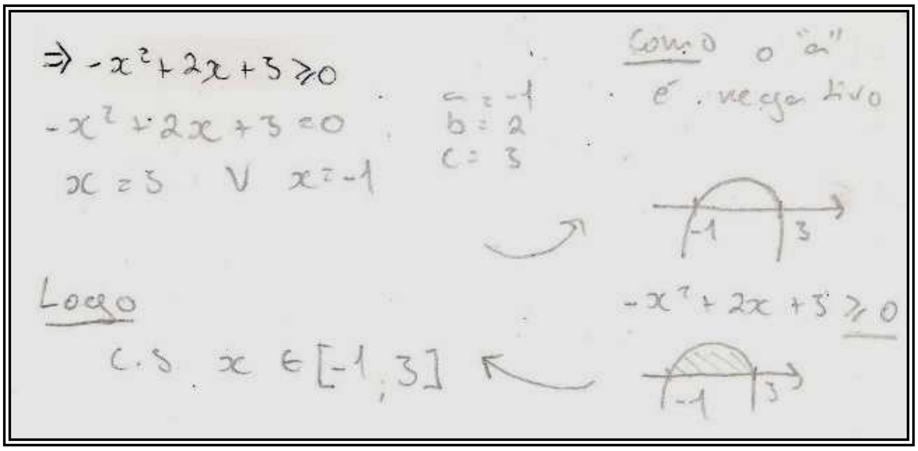


Figura 5.4 – Resolução do Aluno D da inequação 2.3 da Aula 2

Esta segunda resolução (Figura 5.4) usa as capacidades da calculadora gráfica, mas a conclusão final é obtida por métodos analíticos. Como se pode ver pela indicação dos valores de *a, b, c,* o aluno recorre a um programa para determinar as raízes do polinómio de 2.º grau, Depois, analisando as características da expressão da parábola que tem, o aluno esboça a mesma e é da análise desse esboço que o conjunto-solução é determinado. Nesta inequação, este foi o processo de resolução escolhido pela maioria dos alunos, não se registando muitas dificuldades.

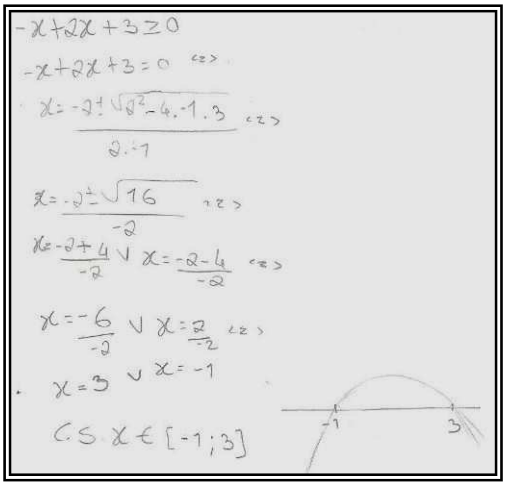


Figura 5.5 – Resolução do Aluno E da inequação 2.3 da Aula 2

O terceiro processo de resolução utilizado pelos alunos recorre a métodos exclusivamente analíticos (Figura 5.5). Os alunos que escolheram este processo optaram por determinar os zeros analiticamente através da fórmula resolvente, fazendo depois o esboço da parábola e concluindo o conjunto-solução pela análise do mesmo. O raciocínio é muito idêntico ao do processo anterior, mas aqui os zeros são determinados analiticamente e no processo anterior, recorre-se às capacidades da calculadora. Este processo envolve mais cálculos, sendo que há maior probabilidade de erro.

O estudo nas inequações de grau superior a 2 iniciou-se na quinta aula, com a proposta de resolução de duas inequações, $-3(x+2)(x-1)^2<0$ (4.1.1) e $x^3+2x^2-15x-5\geq 0$ (4.1.2) (ver Anexo 9: Aula 5 – Plano de Aula). Estas foram as primeiras inequações de grau superior a 2 que os alunos resolveram; no entanto, nas aulas anteriores já tinham sido trabalhados conteúdos (de vertente gráfica e analítica) que lhes permitiriam resolver autonomamente as inequações propostas. O grau de desafio das tarefas era elevado e de natureza fechada.

Analisando as resoluções da inequação (4.1.1), detetei três estratégias de resolução distintas, as quais apresento de seguida.

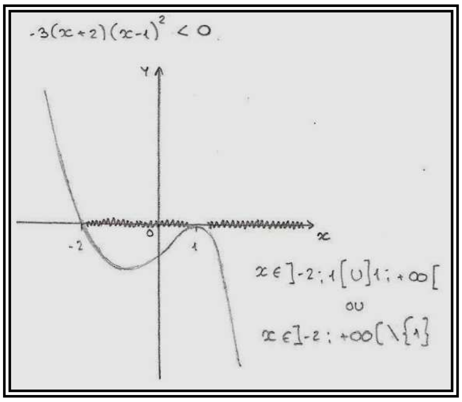


Figura 5.6 – Resolução do Aluno F da inequação 4.1.1 da Aula 5

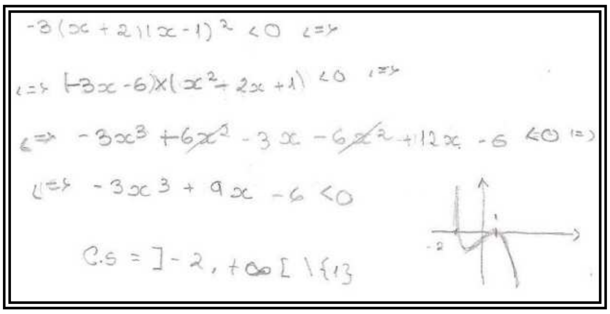
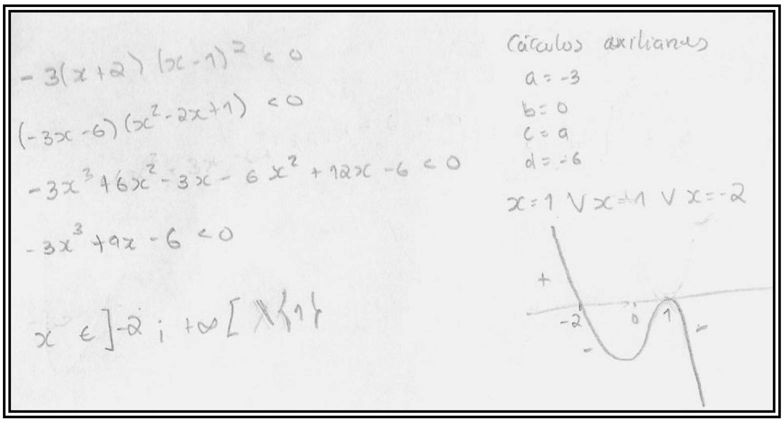


Figura 5.7 – Resolução do Aluno G da inequação 4.1.1 da Aula 5

Poucos foram os alunos que optaram por esta estratégia de resolução (Figuras 5.6 e 5.7). Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, os alunos que têm uma resolução idêntica ao aluno F, esboçaram o gráfico associado à inequação dada e fizeram a interpretação do mesmo para determinar o conjunto-solução pretendido. Já os alunos que apresentaram resoluções idênticas ao aluno G, delinearam a mesma estratégia que os anteriores, mas procederam a manipulações algébricas da expressão (suscetíveis de erros) antes de a introduzir na calculadora para visualizarem o gráfico correspondente. Ambas gráficas, estas resoluções são muito simples e conduzem rapidamente o aluno a determinar o conjunto-solução. No entanto, devido às manipulações algébricas apresentadas no segundo caso, este é mais suscetível de erro que o primeiro.



$$-3(x+2)(x-1)^2<0$$
$$(-3x-6)(x^2-2x+1)<0$$
$$-3x^3+6x^2-3x-6x^2+12x-6<0$$
$$-3x^3+9x-6<0$$
$$x\in\,]-2\,;+\infty[\,\setminus\{1\}$$

Cálculos auxiliares

$a=-3$

$b=0$

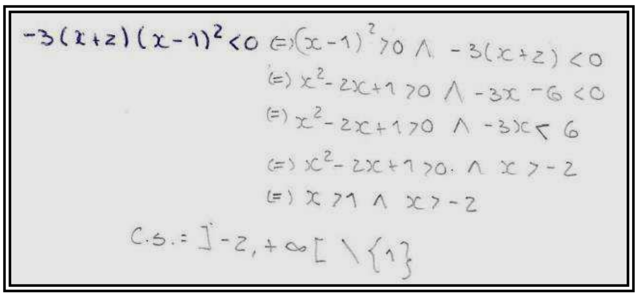
$c=9$

$d=-6$

$x=1 \vee x=1 \vee x=-2$

Figura 5.8 – Resolução do Aluno H da inequação 4.1.1 da Aula 5

Esta resolução (Figura 5.8), a mais frequente na turma, recorre a capacidades da calculadora gráfica, mas a conclusão final é obtida por métodos analíticos (semelhante à estratégia do aluno D, na Figura 5.4). Os alunos que optam por esta estratégia, recorrem à calculadora gráfica para determinar as raízes do polinómio associado à inequação dada e, para tal, têm de proceder a manipulações algébricas para terem a expressão do polinómio na forma canónica. Conhecendo os valores das raízes e analisando as características do polinómio, o aluno esboça a mesma e é da análise desse esboço que o conjunto-solução é determinado. Este processo de resolução não é complexo, mas as manipulações algébricas apresentadas são, mais uma vez, suscetíveis de erro, podendo conduzir a conjuntos-solução errados.



$$-3(x+2)(x-1)^2<0 \Leftrightarrow (x-1)^2>0 \wedge -3(x+2)<0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1>0 \wedge -3x-6<0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1>0 \wedge -3x<6$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1>0 \wedge x>-2$$
$$\Leftrightarrow x\neq 1 \wedge x>-2$$
$$C.S.:\ ]-2,+\infty[\ \setminus\{1\}$$

Figura 5.9 – Resolução do Aluno I da inequação 4.1.1 da Aula 5

Foram poucos os alunos a optar por esta resolução (Figura 5.9), de carácter analítico (semelhante à resolução do aluno B, na Figura 5.2). Pretendendo-se que um produto de fatores seja negativo, os mesmos têm de ter sinais contrários; como $(x-1)^2$ é sempre positivo, $-3(x+2)$ terá de ser negativo. Os alunos transformam a inequação dada noutras equivalentes, resolvem-nas e, no fim, operam com as disjunções/conjunções entre elas. Esta resolução é, talvez, a menos simples.

A maioria dos alunos optou por resolver a inequação (4.1.2) por processos gráficos, embora também se registem casos em que se recorre a capacidades da calculadora gráfica e a conclusão final é obtida por métodos analíticos. Analisando as etapas de resolução das duas estratégias, conclui-se que são muito semelhantes.

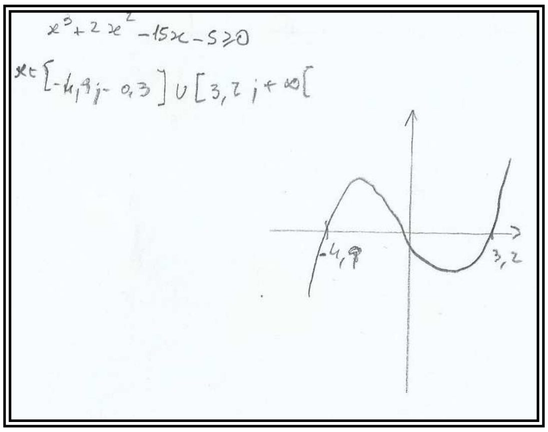


Figura 5.10 – Resolução do Aluno J da inequação 4.1.2 da Aula 5

A maioria dos alunos apresenta uma resolução idêntica à do aluno J (Figura 5.10). Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, estes alunos esboçaram o gráfico associado à inequação dada e fizeram a interpretação do mesmo para determinar o conjunto-solução pretendido. Mais uma vez, esta resolução é muito simples e conduz rapidamente o aluno a determinar o conjunto-solução.

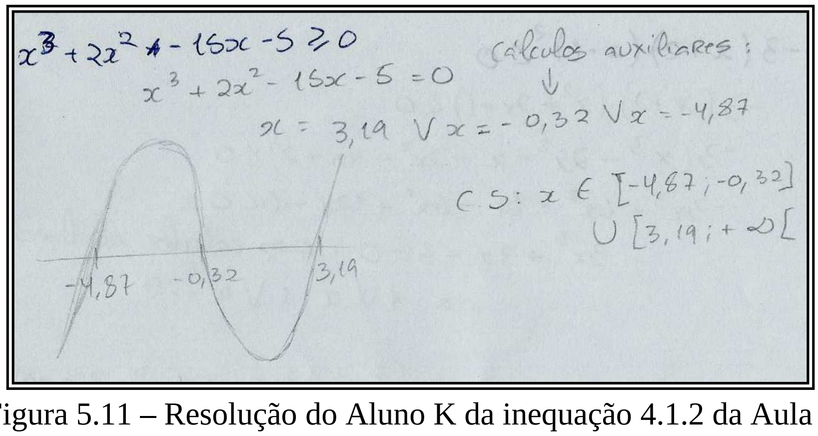


Figura 5.11 – Resolução do Aluno K da inequação 4.1.2 da Aula 5

Como já aconteceu em resoluções anteriormente apresentadas, os alunos que optam por esta estratégia (Figura 5.11) recorrem a capacidades da calculadora gráfica, mas obtêm a conclusão final por métodos analíticos (semelhante às estratégias dos alunos D e H, nas Figura 5.4 e 5.8). Tendo o polinómio associado à inequação dada na forma canónica, os alunos recorrem à calculadora gráfica para determinar as raízes do mesmo e esboçarem o respetivo esboço. É da análise desse esboço que o conjunto-solução é determinado. Este processo de resolução não é complexo, mas as manipulações algébricas apresentadas são, mais uma vez, suscetíveis de erro, podendo conduzir a conjuntos-solução errados.

Considerando as resoluções das duas primeiras inequações apresentadas (exercícios), verifica-se que há alunos a optar quer por processos analíticos quer por processos que recorrem às capacidades da máquina. Então, neste caso, talvez a escolha não esteja relacionada com o tipo de tarefa, mas com o enunciado em si.

De facto, a inequação (2.2) era facilmente factorizável, pelo que os alunos rapidamente conseguiram determinar as suas raízes, esboçar a parábola e obter o conjunto-solução pretendido. Já no segundo caso, a expressão da inequação (2.3) não tinha uma factorização imediata, pelo que a determinação das raízes envolvia um processo menos imediato – foi nesta fase que as escolhas dos alunos divergiram, recorrendo quer a métodos analíticos, quer às capacidades da calculadora.

Analisando as resoluções das duas últimas inequações (problemas), constata-se que as opções dos alunos da turma se dividem, mas que há determinadas estratégias sempre presentes: uma exclusivamente gráfica e uma que tira usa as capacidades da calculadora para alguns processos intermédios, mas cuja conclusão surge analiticamente. Tal como nos exercícios, perante expressões fatorizáveis, há alunos a optar por resoluções analíticas e alunos a optar por resoluções gráficas; perante expressões não fatorizáveis imediatamente, há alunos que se cingem à resolução gráfica e alunos que tentam uma resolução analítica, embora recorram a capacidades da calculadora em passos intermédios.

Perante esta análise, a estratégia dos alunos parece relacionar-se mais com o tipo de expressão algébrica da situação matemática apresentada do que com o tipo de tarefa proposta.

O pensamento crítico face aos resultados da calculadora

A segunda pergunta de investigação definida visa perceber em que dimensões do uso da calculadora gráfica os alunos revelam estar a desenvolver o pensamento crítico. De entre o material recolhido, irei analisar resoluções provenientes de uma tarefa exploratória proposta na sexta aula.

A sexta aula iniciou-se com uma tarefa exploratória que desafiava os alunos a descobrir uma janela de visualização que lhes permitisse ver uma zona significativa do gráfico de uma dada função. Foram dadas duas funções: (2.1) $f(x)= -x^3-32x^2-45x+450$ e (2.2) $g(x)=0.1x^4-1,4x^3-15.6x^2+76x-80$ (ver Anexo 11: Aula 6 – Plano de Aula). Analisarei, de seguida, algumas resoluções desta tarefa que ilustram uma atitude crítica face aos resultados obtidos.

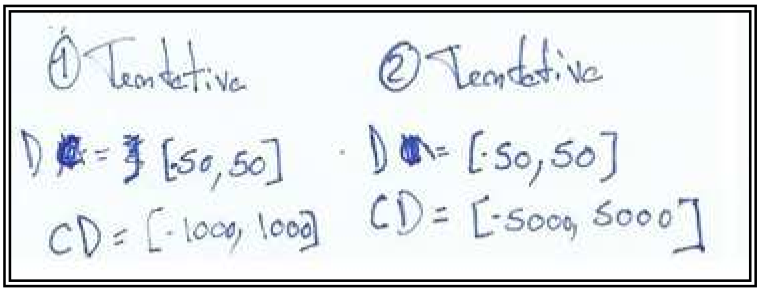


Figura 5.12 – Resolução do Aluno L da tarefa 2.1 da Aula 6

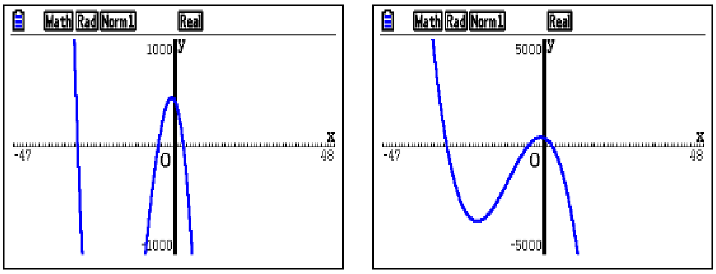


Figura 5.13 – Visualizações na calculadora do Aluno L da tarefa 2.1 da Aula 6

O aluno L apresenta os valores utilizados nas duas tentativas feitas, mas não indica o método utilizado para responder à tarefa nem os esboços dos gráficos que visualizou na calculadora.

Analisando a resolução do aluno e as visualizações obtidas[1], a primeira não permitia visualizar uma zona significativa do gráfico da função, pelo que o aluno teve de proceder a alterações. Nestas alterações, verifica-se que o domínio escolhido se manteve e apenas o contradomínio registou alterações. Apesar de o aluno não mencionar a estratégia que seguiu para alterar os valores, parece-me que recorreu ao *zoom fit* para encontrar uma janela de visualização melhor, uma vez que esta opção mantém o domínio e altera apenas os valores do contradomínio.

Por sua vez, o aluno M apresenta os valores utilizados nas duas tentativas feitas, indica o método utilizado para responder à tarefa e o esboço do último gráfico que visualizou na calculadora (Figura 5.14).

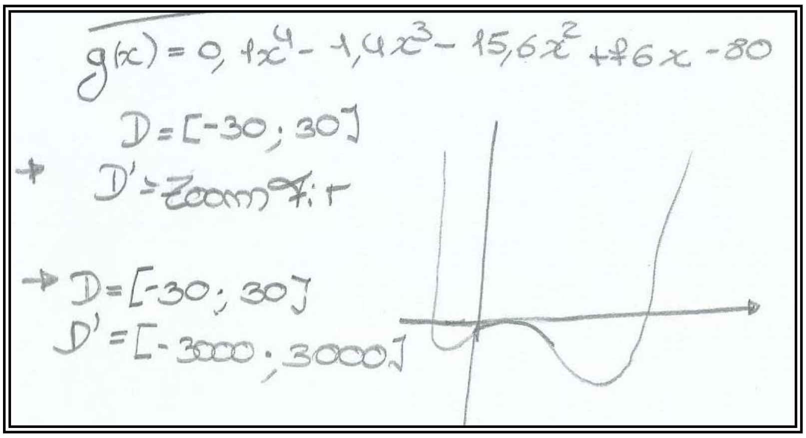


Figura 5.14 – Resolução do Aluno M da tarefa 2.2 da Aula 6

Analisando a resolução, podemos afirmar que o aluno definiu manualmente o domínio da janela de visualização, mas que o contradomínio foi definido com auxílio da ferramenta de *zoom fit*. Na minha opinião, seria de esperar que o aluno mencionasse quais os valores do contradomínio que foram obtidos com a ferramenta, mas tal não acontece. Como, de seguida, se verifica uma alteração – talvez manual – dos valores do contradomínio da janela de visualização, creio que a ferramenta do *zoom fit* não permitiu ao aluno uma visualização significativa do gráfico. Estes novos valores para a janela de visualização já permitiram uma imagem nas condições pedidas e o aluno esboça – embora com pouco rigor – o gráfico obtido.

[1] Embora o aluno não tenha tido o cuidado de incluir as visualizações na sua resposta, mediante os valores da janela de visualização apresentados, tracei os gráficos visualizados. Esta ação repetir-se-á sempre que considere necessário.

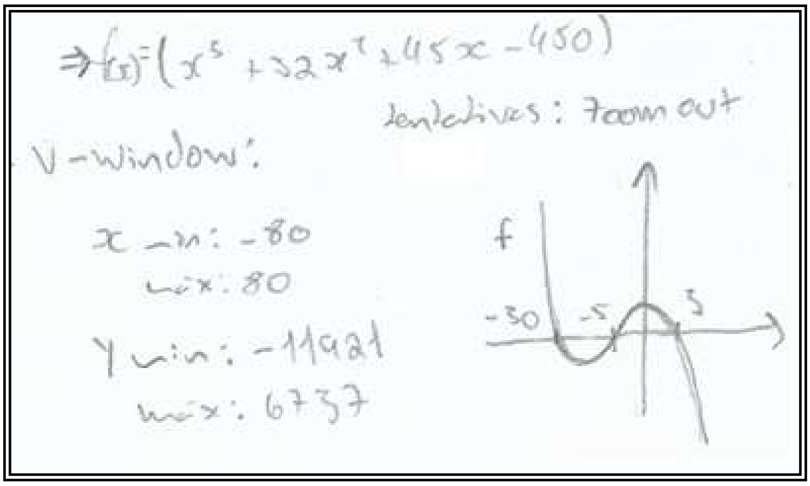


Figura 5.15 – Resolução do Aluno N da tarefa 2.1 da Aula 6

A resolução do aluno N (Figura 5.15) apenas apresenta os valores e o esboço do gráfico obtidos na última tentativa realizada, mas o aluno tem o cuidado de indicar o método utilizado para responder à tarefa proposta.

Ao contrário dos dois alunos anteriores que recorreram à ferramenta do *zoom fit* para conseguirem visualizar uma zona significativa do gráfico da função, este aluno optou por recorrer ao *zoom out* e tem o cuidado de o indicar na sua resposta. No entanto, o aluno não regista ou faz qualquer referência aos resultados que obteve antes de chegar à resposta final, indicando, assim, apenas os valores da janela de visualização e o gráfico obtido que satisfazem o que foi solicitado na tarefa.

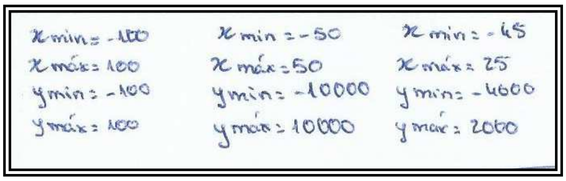


Figura 5.16 – Resolução do Aluno O da tarefa 2.1 da Aula 6

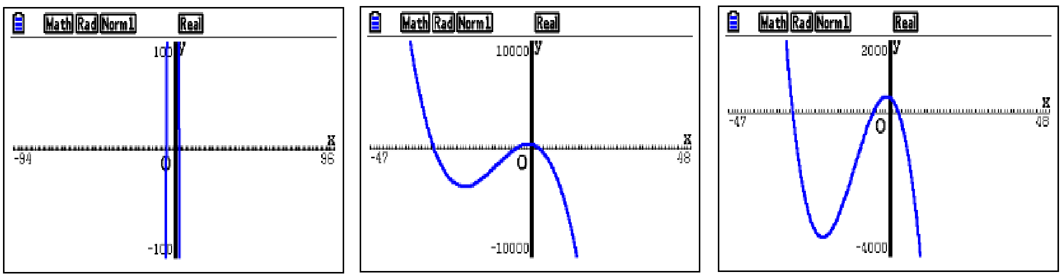


Figura 5.17 – Visualizações na calculadora do Aluno O da tarefa 2.1 da Aula 6

Tal como na resolução do aluno L, também o aluno O apenas apresentou os valores da janela de visualização, omitindo o processo que originou as várias tentativas e os gráficos visualizados em cada uma (Figuras 5.16 e 5.17).

Por observação da resolução apresentada e das visualizações obtidas, penso que o aluno O definiu todas as janelas de visualização manualmente. Na minha opinião, a primeira janela foi definida para “ver o que acontece e a partir daí trabalhar”. Tendo obtido a visualização apresentada, o aluno encurtou os valores do domínio e aumentou bastante os valores do contradomínio, pois o gráfico visualizado aproximava-se pouco daquilo que era pretendido. Já o segundo gráfico obtido corresponde ao que foi proposto na tarefa, mas o aluno procede ainda a uma terceira janela de visualização onde encurta o contradomínio e obtém, assim, um gráfico que permite visualizar melhor a curva em torno da origem.

É, então, de realçar esta resolução, pois, ao contrário do que se verificou nos casos anteriores, este aluno não concluiu a sua resolução ao obter uma visualização significativa do gráfico da função dada, mas apenas quando a visualização obtida fornecia uma boa visualização de todas as zonas do gráfico.

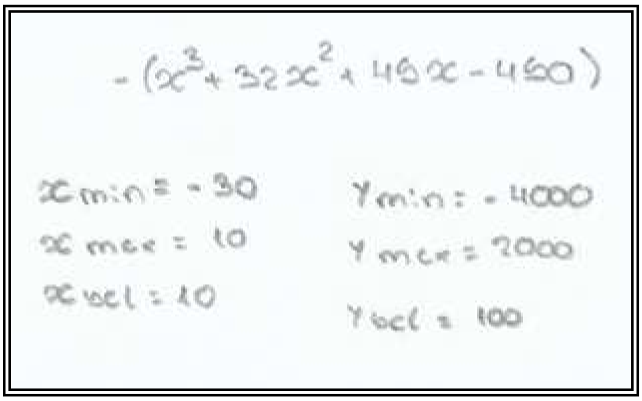


Figura 5.18 – Resolução do Aluno P da tarefa 2.1 da Aula 6

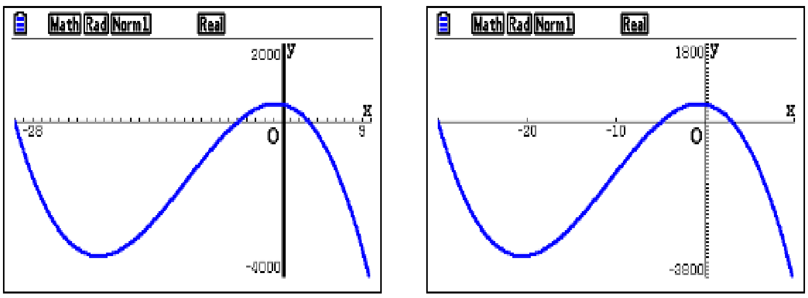


Figura 5.19 – Visualizações na calculadora do Aluno P da tarefa 2.1 da Aula 6

Esta última resolução da Tarefa 2.1 da Aula 6 respeitante ao aluno P (Figuras 5.18 e 5.19) assemelha-se à resolução do aluno N que concentra a sua resposta apenas na última tentativa efetuada e às resoluções dos alunos L e O que apenas indicam os valores da janela de visualização obtidos, omitindo o processo que origina novas tentativas e os gráficos obtidos.

A particularidade desta resolução está na indicação dos valores de "*xscl*" e "*yscl*", que foram alterados manualmente. Os dois gráficos que apresento na Figura 5.19 têm os mesmos valores de domínio e contradomínio da janela de visualização, diferindo apenas na escala dos eixos. Observando as suas visualizações, conclui-se que a forma do gráfico é a mesma (como seria de esperar) e que a diferença está apenas nos valores apresentados nos eixos.

Em síntese, a análise apresentada permite-me afirmar que nenhum dos alunos inclui na sua resposta todos os resultados que obteve. Os alunos L, O e P apenas apresentam os valores da janela de visualização obtidos, omitindo o processo que os leva a obter cada tentativa e os gráficos visualizados em cada uma. O aluno M escreve que obteve o contradomínio com a ferramenta *zoom fit*, mas não indica quais são os valores obtidos, e o esboço do gráfico que apresenta é muito pouco rigoroso. O aluno N indica como obteve o *zoom* apresentado – ferramenta *zoom out* – mas não contempla na sua resposta os dados das várias tentativas que fez.

No entanto, apesar de as resoluções estarem incompletas, revelam que os alunos já desenvolveram capacidades críticas face aos resultados obtidos. Os alunos L e M recorrem ao *zoom fit*, pois já aprenderam que, fixando um dado domínio de visualização, a calculadora procura um bom contradomínio com o auxílio desta ferramenta. O aluno N percebe que a visualização inicial omite uma parte significativa do gráfico da função e, por isso, opta por recorrer ao *zoom out* para aumentar a sua janela de visualização. O aluno O obtém uma janela de visualização satisfatória, mas decide procurar uma janela de visualização melhor. Por fim, o aluno P altera e destaca os valores de xscl e yscl, alteração essa que facilita a interpretação do gráfico.

Todas estas atitudes demonstradas pelos alunos foram abordadas em aula em aulas anteriores, não sendo fruto de explorações dos alunos. A meu ver, são cuidados de apresentação de resposta que contribuem para uma resposta mais completa.

Principais dificuldades no trabalho com a calculadora gráfica

Com a terceira pergunta de investigação procuro perceber quais as principais dificuldades que os alunos do 10.º ano têm ao trabalhar com a calculadora gráfica. De entre o material recolhido, selecionei sete resoluções de tarefas distintas que ilustram os principais erros e dificuldades encontrados.

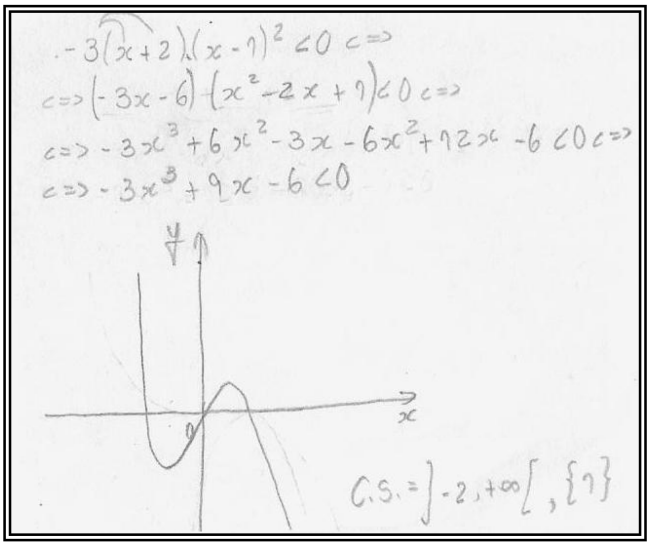


Figura 5.20 – Resolução do Aluno Q da tarefa 4.1.1 da Aula 5

Tal como se pode ver na Figura 5.18, para resolver a inequação dada, o aluno procede a manipulações algébricas, esboça o gráfico e determina o conjunto-solução pedido. O esboço apresentado está bastante incompleto, pois não apresenta escala, nem assinala pontos de referência a ter em conta. Este erro era bastante frequente no início do trabalho com as funções, mas ao longo das várias aulas, a maioria dos alunos deixou de o cometer.

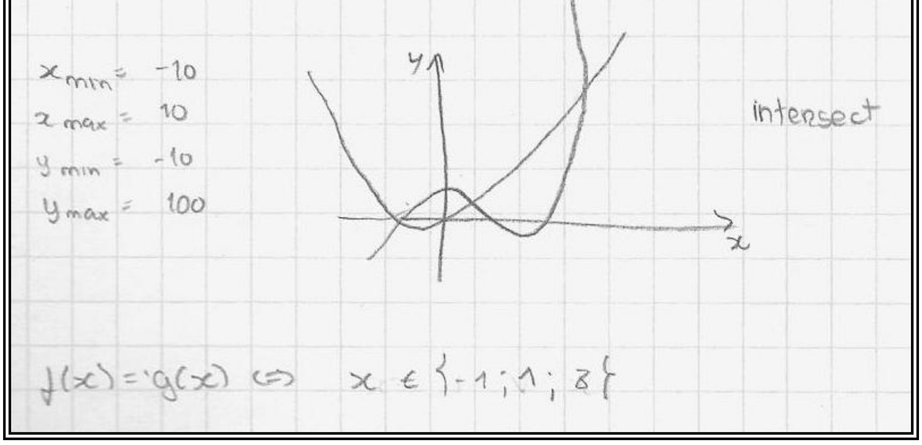


Figura 5.21 – Resolução do Aluno R da tarefa 3.3.3 da Aula 6

A resolução do aluno R, apresentada na Figura 5.19, é de cariz gráfico e recorre às potencialidades da calculadora gráfica, mas a resolução apresentada está bastante incompleta. O aluno tem a preocupação de indicar os valores da janela de visualização, mas falta-lhe rigor ao esboçar o gráfico visualizado: as curvas estão bastante distorcidas, os valores dos pontos de referência estão ausentes e a escala nos eixos não está assinalada. Tal como o erro apresentado na Figura 5.18, a ausência dos valores dos pontos de referência era erro era frequente no início do trabalho com as funções, mas ao longo das várias aulas foi desaparecendo. Os erros relacionados com o rigor das curvas traçadas e indicação da escala nos eixos tenderam a permanecer.

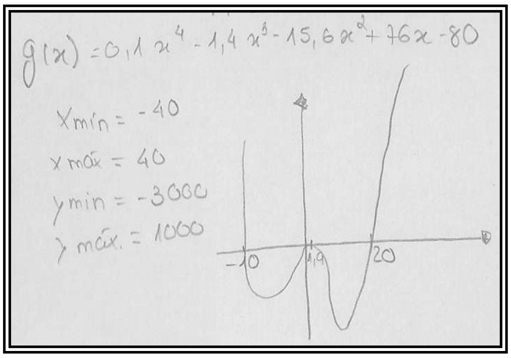


Figura 5.22 – Resolução do Aluno S da tarefa 4.1.2 da Aula 5

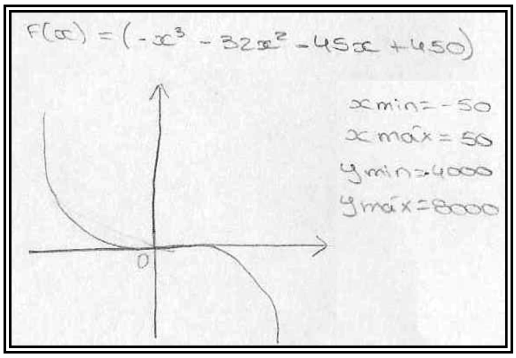


Figura 5.23 – Resolução do Aluno T da tarefa 4.1.1 da Aula 5

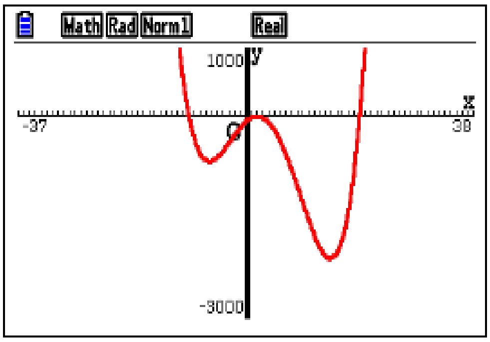


Figura 5.24 – Visualização na calculadora do Aluno S

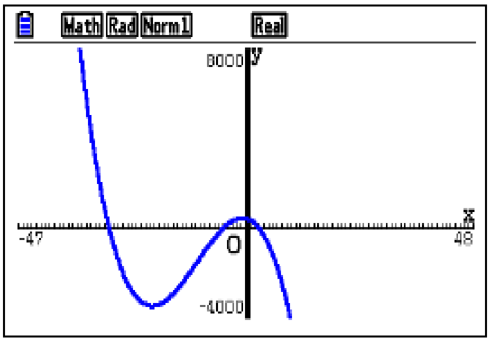


Figura 5.25 – Visualização na calculadora do Aluno T

Os alunos S e T apresentam resoluções onde indicam os valores da janela de visualização e esboçam o gráfico visualizado, assinalando os pontos de referência (Figuras 5.20 a 5.23). No entanto, ambos apresentam visualizações muito distorcidas, como se pode comprovar pela comparação dos esboços feitos e das visualizações obtidas na calculadora gráfica. Tal como afirmado na análise da resolução anterior (Figura 5.19), os esboços pouco rigorosos continuaram a registar-se.

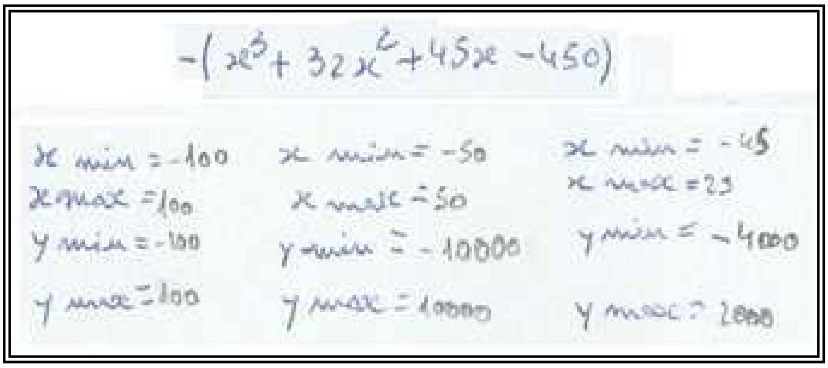


Figura 5.26 – Resolução do Aluno U da tarefa 2.2 da Aula 6

Na sua resolução (Figura 5.24), o aluno U recorre à calculadora gráfica para encontrar uma janela de visualização que permita visualizar uma parte significativa do gráfico da função dada. No entanto, ao apresentar a sua resolução no papel, esta surge bastante incompleta: apenas são apresentados os valores das janelas de visualização, ficando a faltar os esboços dos gráficos observados. Apresentar nas resoluções apenas os valores das janelas de visualização é um erro bastante frequente na turma, que persistiu ao longo das aulas.

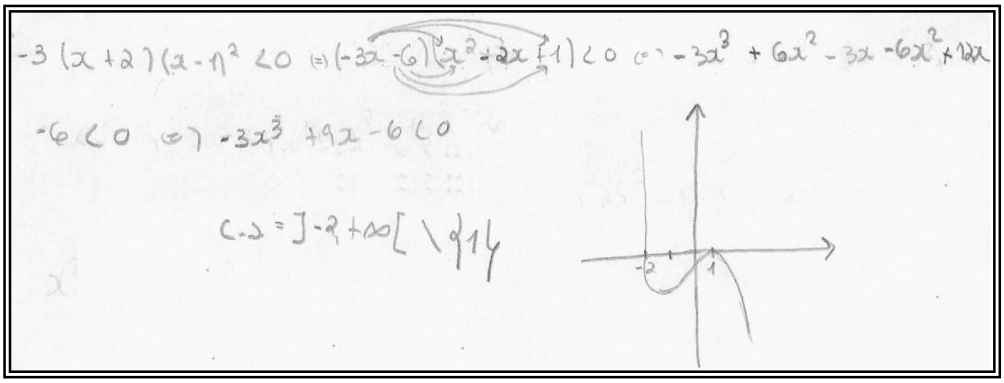


Figura 5.27 – Resolução do Aluno V da tarefa 4.1.1 da Aula 5

Na resolução apresentada na Figura 5.25, o aluno V procede a manipulações algébricas da expressão, com o fim de a introduzir na calculadora para visualizar o gráfico associado à inequação e, por observação direta, chegar ao conjunto-solução. Este procedimento revela dificuldades em recorrer às potencialidades da calculadora, pois o aluno não compreende que pode introduzir a expressão, quer fatorizada, quer na forma canónica, pois são expressões equivalentes. Esta dificuldade foi registada em vários alunos ao longo de várias aulas.

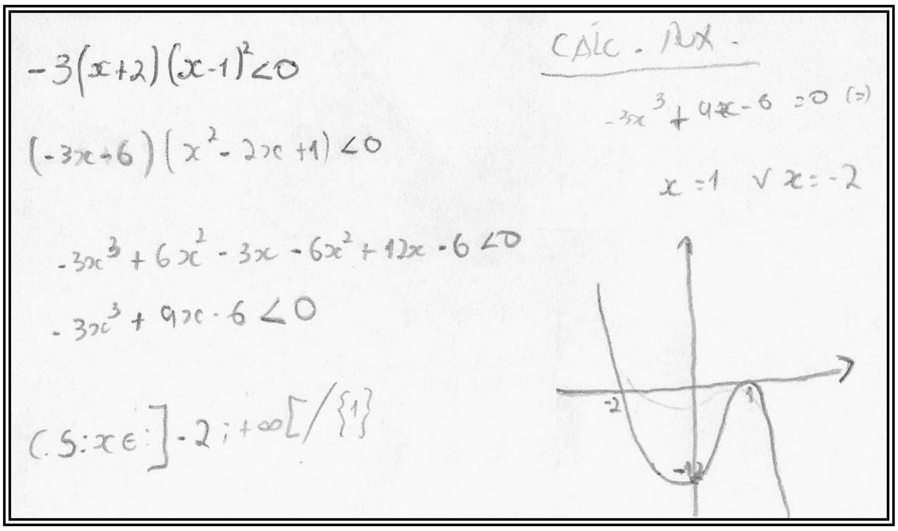


Figura 5.28 – Resolução do Aluno X da tarefa 4.1.1 da Aula 5

Nesta resolução (Figura 5.26), o aluno X recorre a capacidades da calculadora gráfica e obtém a conclusão final por interpretação direta do esboço realizado. Durante o processo apresentado, o aluno X procede a manipulações algébricas da expressão, com o fim de obter a expressão na forma canónica e descobrir os valores dos zeros da expressão através da calculadora. Depois de conhecer os zeros, o aluno introduz a expressão obtida na calculadora para visualizar o gráfico respetivo. Este procedimento revela dificuldades em compreender as potencialidades da calculadora, pois o aluno dedica parte do processo à descoberta dos zeros da expressão e outra à visualização do gráfico da expressão, quando a calculadora gráfica tem potencialidades para descobrir os zeros a partir do gráfico construído. Esta dificuldade foi registada em vários alunos ao longo de várias aulas.

É no capítulo das funções que os alunos contactam pela primeira vez com a visualização gráfica fornecida pela calculadora. Assim sendo, é normal que as suas resoluções sejam pouco rigorosas e incompletas e que tenham dificuldades em trabalhar com algumas potencialidades da calculadora.

Os erros e dificuldades apresentados focam-se essencialmente na falta de rigor nos esboços apresentados, nas resoluções incompletas e na falta de compreensão de dadas potencialidades da calculadora. São erros e dificuldades frequentes nos alunos do 10.º ano, mas que, com as chamadas de atenção por parte do professor e do trabalho do aluno, são, na sua maioria, gradualmente ultrapassados.

Balanço Reflexivo

Este subcapítulo encerra o trabalho realizado e é composto por três partes: uma breve síntese do presente estudo, as principais conclusões apuradas que incluem as respostas às perguntas colocadas no início e uma reflexão pessoal e global.

Síntese do Estudo

Este estudo tem como objetivo principal compreender de que forma alunos do 10.º ano integram a calculadora gráfica na sua atividade matemática ao resolverem tarefas envolvendo funções. Com este propósito, procuro responder às seguintes questões de investigação:

i. Qual o tipo de tarefas envolvendo funções que induz, indiretamente, alunos do 10.º ano a usar a calculadora gráfica na sua resolução?
ii. Em que dimensões do uso da calculadora gráfica os alunos revelam estar a desenvolver o pensamento crítico?
iii. Quais as principais dificuldades que alunos do 10.º ano têm ao trabalhar com a calculadora gráfica?

O estudo apresentado foi desenvolvido no âmbito da lecionação dos subtópicos “Inequações de 2.º grau”, “Funções de grau superior a 2” e ”Inequações de grau superior a 2”, com uma turma do 10.º ano da Escola Secundária Professor José Augusto Lucas com 3.º ciclo e Secundário, em Linda-a-Velha, Oeiras

, ao longo de seis aulas de noventa minutos que decorreram no início do terceiro período do ano letivo de 2012/1013. Os dados recolhidos são provenientes da entrevista, da observação de aulas, da recolha documental e do meu diário de bordo.

A análise de dados foi orientada e subdividida em três partes de acordo com as perguntas de investigação definidas. Assim sindo, as categorias de análise foram o tipo de tarefas e o uso da calculadora, o pensamento crítico face aos resultados da calculadora e as principais dificuldades no trabalho com a calculadora gráfica.

Principais conclusões

Depois de saber que a minha intervenção iria decorrer numa turma de 10.º ano e de escolher focar o meu estudo no papel da calculadora gráfica na atividade matemática com funções, defini as três perguntas de investigação que iriam orientar o meu estudo. Assim sendo, concluída a análise dos resultados, importa realçar a resposta obtida para cada questão levantada.

Qual o tipo de tarefas envolvendo funções que induz, indiretamente, alunos do 10.º ano a usar a calculadora gráfica na sua resolução?

A análise de algumas resoluções de dois exercícios e dois problemas propostos à turma levou-me a concluir que a estratégia de resolução dos alunos parece relacionar-se mais como o tipo de expressão algébrica apresentada do que com o tipo de tarefa proposta.

Há três tipos de resolução distintas entre a turma: i) completamente analítica; ii) inteiramente gráfica e; iii) essencialmente analítica mas que recorre às capacidades da calculadora para passos intermédios. Quer nos exercícios, quer nos problemas propostos, perante expressões fatorizadas ou facilmente fatorizáveis, a maioria da turma divide-se entre a primeira e a segunda resolução, conforme as preferências de cada um. Já quando a expressão não é facilmente fatorizável, as principais opções já recaem sobre o segundo e o terceiro tipo de resolução.

Em que dimensões do uso da calculadora gráfica os alunos revelam estar a desenvolver o pensamento crítico?

Ao trabalharem com as potencialidades das ferramentas de *zoom*, ao reconhecerem a importância dos valores da escala de cada eixo e ao refinarem a janela de visualização, os alunos revelam estar a desenvolver o pensamento crítico.

De facto, e em concordância com a ideia de Ennis (1985), estes mecanismos são comprovativos do desenvolvimento do pensamento crítico, pois os alunos revelam uma ponderação refletida sobre os resultados obtidos.

Quais as principais dificuldades que alunos do 10.º ano têm ao trabalhar com a calculadora gráfica?

Nesta fase da aprendizagem, foi muito frequente que os alunos apresentassem resoluções incompletas, encontrando-se várias resoluções que só indicassem os valores da janela de visualização ou que indicassem esboços de gráficos sem a identificação de pontos de referência ou escala associada. A ausência de valores numéricos associados às representações (principalmente a ausência da escala) é referida por Rocha (2001) como uma consequência do facto de os gráficos serem obtidos sem se recorrer ao menu window.

A falta de rigor dos esboços apresentados também foi identificada, sendo que em alguns casos alterou por completo a visualização gráfica obtida. Segundo Hector (1992, citado em Rocha, 2001), estas dificuldades podem ter origem na experiência matemática dos alunos, mas como se veio a verificar, a maioria destes erros foi ultrapassada gradualmente, com o contínuo trabalho desenvolvido nas aulas.

Ao contrário dos erros identificados, as dificuldades em trabalhar com as potencialidades da calculadora gráfica persistiram nas aulas seguintes, nomeadamente: i) o facto de não ser necessário ter uma expressão na forma canónica para a poder introduzir na calculadora e visualizar o seu gráfico e; ii) a possibilidade de determinar os zeros de uma função a partir da visualização gráfica. Tal facto é apresentado por Rocha (2001) ao referir que o primeiro contacto dos alunos com a calculadora gráfica é no estudo das funções e que de início é notória alguma dificuldade em estabelecer uma estratégia de utilização da máquina que aproveite efetivamente as potencialidades da máquina.

Reflexão final

Este último ano foi um verdadeiro desafio para mim, uma autêntica roda-viva.

O bichinho de ser professora existe há muitos anos – já em pequena obrigava os meus irmãos a serem meus alunos – mas só há relativamente pouco tempo se tornou um verdadeiro objetivo.

Sempre tive consciência que ser professor não é só dar aulas e que há um grande e importante trabalho por trás ao qual é preciso dedicar muitas horas. Achei que estava preparada para tal. E talvez no fundo estivesse. Mas na prática, à superfície, não estava. Embora tivesse a certeza do que queria, não foi fácil passar para o lado de lá da sala de aula.

Foi um ano de verdadeiras aprendizagens. Foi um ano em que fiz coisas que nunca tinha feito antes, recheado de novas experiências, ambientes e pessoas. E o que de início foi fantástico pelo fascínio e pela novidade, a seu tempo deu lugar a "Será que é mesmo isto que quero? O que estou aqui a fazer? Estarei à altura do desafio a que me proponho?". Dúvidas e mais dúvidas surgiram e, não, não as encarei bem. Não soube lidar a situação e isso veio a refletir-se no meu desempenho enquanto professora estagiária.

Centrar o meu estudo no papel da calculadora gráfica foi uma opção que tomei por considerar que é uma ferramenta fundamental no ensino e aprendizagem da disciplina, mas também por sentir que conhecia pouco do seu funcionamento e que era uma lacuna que eu tinha. Propus-me, então, saber mais sobre o ensino com a tecnologia, a procurar literatura sobre o assunto e a estudar as opiniões e estudos dos investigadores. Mas foi aqui que o muro desabou.

Apesar de estar ciente do processo que tinha pela frente, senti-me incapaz de o conseguir por em prática. Senti que não sabia o suficiente e que não estava a conseguir alargar o meu conhecimento sobre o assunto. Tornei-me uma pessoa dentro da sala de aula que não queria ser, com uma postura menos positiva e com menos espírito de entrega, dedicação e disponibilidade.

O pânico maior chegou quando tive de preparar a lecionação. Percebi que tinha de ser, que tinha de o fazer. E fiz, com mais ou menos confiança e preparação, mas fiz. Fiquei verdadeiramente triste comigo mesma e com o meu desempenho. Sabia quer era capaz de muito mais e melhor. Não tinha dado o melhor de mim.

O ano acabou e tive de parar de adiar o inadiável: começar a escrever o relatório. Bati com a cabeça de cada vez que encarei os meus maus resultados que se refletiram nas aulas dadas ou de cada vez que percebi que fiquei muito aquém das expetativas iniciais. Fiquei triste e desiludida comigo mesma.

Com o início da escrita e de um sério investimento no trabalho, as coisas começaram a compor-se. As peças do puzzle começaram a ligar-se e, gradualmente, tudo começou a fazer sentido.

Três meses e meio depois, o trabalho está pronto. E, embora nunca esperasse tal sensação, estou feliz. Sinto-me realizada e, afinal de contas, consegui superar o desafio a que me propus.

Como já referi, foi um trabalho com muitas aprendizagens nos mais variados campos. Um ano de verdadeiro crescimento no saber ser, saber estar e saber fazer. Aprendi muitas coisas sobre a calculadora gráfica e o seu papel na aprendizagem dos alunos, mas talvez as maiores aprendizagens não se foquem aí.

Aprendi a não ser negativista perante um desafio que está a correr menos bem, a como encontrar força extra e inteligência necessária para dar a volta. Aprendi a ponderar e refletir as minhas decisões e os impactos que têm, não só para mim como para os outros. Aprendi que, por vezes, dar um tempo e deixar as coisas em standby também pode ser bom. Aprendi a gerir o tempo e a definir prioridades.

Foi uma aventura extremamente enriquecedora e com um balanço muito positivo. Espero que quando voltar a uma sala de aula ou a fazer parte de um grande projeto como este, conseguir que a experiência, o conhecimento e a aprendizagem que levo deste ano se reflitam na minha postura, empenho e dedicação.

Referências

Andrade, M. J. & Oliveira, H. (2008). *Uma Boa Janela de Visualização? Sim,*
Andrade, M. J. & Oliveira, H. (2008). *Uma Boa Janela de Visualização? Sim,*
Obrigada! in Tecnologias e Educação Matemática. SPCM-SEM.

Consciência, M. (2008). *Calculadoras gráficas: Alguns aspetos técnicos a ter em conta na sua utilização in Tecnologias e Educação Matemática*. SPCM-SEM.

Consciência, M. (2009). *A Calculadora Gráfica na Aprendizagem das Funções no Ensino Secundário*. Tese de doutoramento. Lisboa: APM.

Costa, B & Rodrigues, E. (2011). *Novo Espaço 10.* Porto: Porto Editora.

Doerr, H. & Zangor, R. (2000). *Creating Meaning for and with the Graphing Calculator. Educational Studies in Mathematics,* 41, pp. 143-163.

Ennis, R. H. (1985). *A logical basis for measuring critical thinking skills.* Educational Leadership 43(2): 44–48

Farrel, A. (1996). *Roles and Behaviors in Technology- Integrated Precalculus Classrooms. Journal of Mathematical Behavior,* 15, pp. 35-53.

Graham, T., C. Headlam, S. Honey, J. Sharp and A.Smith. (2003). *The Use of Graphics Calculators by Students in an Examination: What do they really do?* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 34 no.3 319 – 344

Guin, D., & Trouche L. (1999), *The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators*, The International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3(3), 195-227.

Innabi, H & El Sheikh, O. (2006). *The Change in Mathematics Teachers‟ Perceptions of Critical Thinking After 15 Years of Educational Reform* in *Jordan*. Educational Studies in Mathematics, Vol. 64, pp. 45-68.

ME (2002). *Programa de Matemática A. Ensino Secundário*. Lisboa: DGIDC

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC

NCTM (1994). *Normas profissionais para o Ensino da Matemática* (tradução da APM) Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (tradução de Magda Melo). Lisboa: APM.

Niess, M. L. (2005). *Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge*. Teaching and Teacher Education, 21 (5), 509 – 523.

Polya, G. (1973) *How to Solve It.* Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

Ponte, J. P. (1995). *Novas tecnologias na aula de Matemática. Educação e Matemática*, 34, 2-7.

Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em matemática*. APM

Powers, R., & Blubaugh, W. (2005). *Technology in mathematics education: Preparing teachers for the future. Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 5(3/4), 254-270.

Ramos, C. & Raposo, L. (2008). *A Calculadora Gráfica e as representações Matemáticas: uma Experiência in Tecnologias e Educação Matemática*. SPCM-SEM.

Rocha, H. (2001). *Calculadoras gráficas: Que utilização?* In Actas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática (pp. 233-252). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2008). *O Professor e a Integração da Calculadora gráfica no ensino da Matemática Experiência in Tecnologias e Educação Matemática*. SPCM-SEM.

Rocha, H. (2012) *A integração da calculadora gráfica no ensino da Matemática: Estudo sobre as práticas curriculares de professores do ensino secundário*. Tese de doutoramento. Lisboa: APM.

Roldão, M. C. (2010). *Estratégias de Ensino. O saber e o agir do professor*. Vila Nova de Gaia: Fundação Manuel Leão.

Romano, E. & Ponte, J. P. (2008). *A Calculadora Gráfica e o Ensino da Matemática in Tecnologias e Educação Matemática*. SPCM-SEM.

Semião, M. J. & Canavarro, A. (2008). *A Utilização da Calculadora Gráfica na Aula de Matemática: Um estudo com alunos do 12.º Ano no Âmbito das Funções in Tecnologias e Educação Matemática*. SPCM-SEM.

Silva, J. S. & Paulo, J. D. S. (1957) *Compêndio de Álgebra Volume I.* Segunda Edição. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

Silva, J. S. & Paulo, J. D. S. (1983) *Compêndio de Álgebra Tomo II.* Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

Tuckman, B. (2005). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Gulbenkian.

Ward, R. A. (1998). *Graphing calculator-associated strategies used by and misconceptions of high school students*. Acedido a 5 de Setembro de 2013 em http://mathforum.org/technology/papers/papers/ward.html

Anexos

Anexo 1: Plano de Intervenção

Data	Sumário	Objetivos	Momentos da Aula	Recolha de Dados
8 Abril	Resolução de equações e inequações do 2.º grau	- Trabalhar com equações do 2.º grau em contexto real (problema). - Aprender e consolidar o processo de resolução de inequações do 2.º grau.	- Problemas envolvendo equações e inequações do 2.º grau: propostas 21, 25 e 28. - Breve explicação sobre Inequações do 2.º grau. - Exercícios envolvendo inequações do 2.º grau: exercício 50.	Não existirá.
10 Abril	Consolidação dos processos de resolução de inequações de 2.º grau. Resolução de problemas do GAVE.	- Consolidar a resolução de inequações do 2.º grau. - Resolver problemas de contexto real.	- Explicação sobre processos de resolução de inequações do 2.º grau. - Resolução de problemas do GAVE.	Não existirá.
11 Abril	Funções quadráticas e polinomiais como produto de funções afins.	- Trabalhar funções quadráticas e polinomiais enquanto produto de fatores.	- Resolução de uma ficha de trabalho[2]. - Em discussão da turma, consolidação de algumas ideias importantes a reter sobre funções polinomiais[3].	Não existirá.
15 Abril	Resolução de Problemas com equações e inequações de grau superior ou igual a 2.	- Resolver equações e inequações de grau superior ou igual a 2.	- Resolução da tarefa 14 com suporte do Sketchpad. - Estudo de inequações do 2.º grau através da sua factorização. - Resolução de inequações de grau superior a 2[4].	Recolha da resolução de algumas inequações.
17 Abril	- Ficha de trabalho sobre equações e inequações.	- Consolidar o estudo de funções quadráticas e polinomiais.	- Ficha de trabalho com escolhas múltiplas e perguntas de resposta aberta adaptadas de material do GAVE.	Recolha da resolução da ficha de trabalho.
18 Abril	- Representação gráfica de várias funções. - Mini-ficha de avaliação.	- Explorar o pensamento crítico dos alunos. - Avaliar conhecimentos trabalhados nas últimas aulas.	- Ficha com partes de gráficos e respetivas equações.[5] - Mini Ficha[6].	Recolha da resolução da ficha de trabalho. Recolha das mini-fichas.

[2] Dadas várias funções afins, será pedido que se obtenham funções polinomiais que resultem do produto entre elas e daí se fará o estudo das mesmas.

[3] Polinómios de grau ímpar têm, pelo menos, um zero; polinómios de grau par têm limites iguais em infinito; relação entre o sinal de a e os limites em infinito.

[4] Incluir um ou dois casos em que a janela de visualização standart possa conduzir a respostas incorretas.

[5] Modificando a janela de visualização, é possível que uma parábola pareça uma reta, por exemplo. Ou uma cúbica um parábola. O objetivo será perceber se os alunos relacionam o gráfico que visualizam com a expressão que lhes é dada.

[6] Terá, pelo menos, um exercício onde o processo de resolução não será definido no enunciado, pretendendo-se estudar qual a opção dos alunos.

Anexo 2: Aula 1, 8 Abril – Plano de Aula

MATEMÁTICA	Secundário - 10.ºC	Lições n.º 135 / 136

TÓPICO: Funções **SUBTÓPICO:** Equações e Inequações do 2.º grau

SUMÁRIO

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO 2.º GRAU.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DA AULA
→ Trabalhar com equações de 2.º grau em contexto real (problema). → Aprender e consolidar o processo de resolução de inequações de 2.º grau.

PRINCIPAIS TÓPICOS, NOÇÕES OU CONCEITOS ENVOLVIDOS	TEMAS E CAPACIDADES TRANSVERSAIS
→ Equações e Inequações do 2.º grau.	Resolução de problemas; Tecnologia.

RECURSOS	
A trazer pelo aluno	**A trazer pelo professor**
Manual (Parte 2) e caderno diário. Calculadora Gráfica	Manual (parte 2) e Calculadora Gráfica.

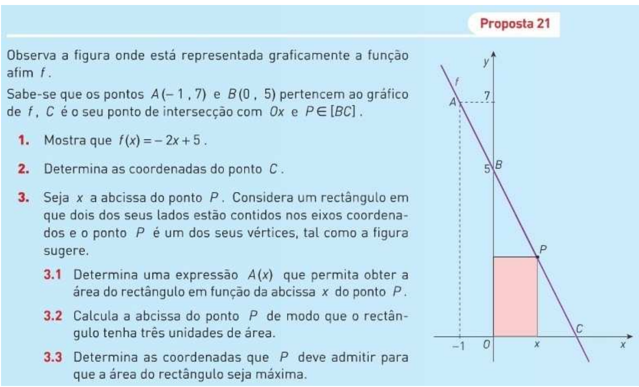
METODOLOGIA DA AULA
A resolução dos problemas e dos exercícios será a pares; a explicação relativa às inequações será em grande grupo.

MOMENTOS DA AULA	
→ (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas	→ 9 minutos
→ (2) Problemas envolvendo equações e inequações do 2.º grau: propostas 21, 25 e 28.	→ 45 minutos
→ (3) Breve explicação sobre Inequações do 2.º grau.	→ 10 minutos
→ (4) Exercícios envolvendo inequações do 2.º grau: exercício 50.	→ 25 minutos
→ (5) Registo do TPC no quadro.	→ 1 minuto

DESENVOLVIMENTO DA AULA	TEMPO PREVISTO	
→ **(1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.**	**9 minutos**	*10h20*
→ **(2) Problemas envolvendo equações e inequações do 2.º grau: propostas 21, 25 e 28.** *<u>Nota</u>: As três propostas envolvem funções quadráticas enquadradas num contexto real.*	**45 minutos**	*10h29*

Proposta 21:

(1) A existirem dificuldades, deverão advir de erros no cálculo (rapidamente corrigíveis) ou associados à necessidade em que uma equação linear é da forma y=mx+b. Neste segundo caso, perguntas como *"que tipo de gráfico é este? Como é a expressão geral deste tipo de funções? O que significa m, b, x e y? Como se calcula m? E como obter o b?"* poderão esclarecer as


Proposta 21

Observa a figura onde está representada graficamente a função afim f.

Sabe-se que os pontos $A(-1, 7)$ e $B(0, 5)$ pertencem ao gráfico de f, C é o seu ponto de intersecção com Ox e $P \in [BC]$.

1. Mostra que $f(x) = -2x + 5$.
2. Determina as coordenadas do ponto C.
3. Seja x a abcissa do ponto P. Considera um rectângulo em que dois dos seus lados estão contidos nos eixos coordenados e o ponto P é um dos seus vértices, tal como a figura sugere.
   - 3.1 Determina uma expressão $A(x)$ que permita obter a área do rectângulo em função da abcissa x do ponto P.
   - 3.2 Calcula a abcissa do ponto P de modo que o rectângulo tenha três unidades de área.
   - 3.3 Determina as coordenadas que P deve admitir para que a área do rectângulo seja máxima.

dúvidas existentes.

(2) Não deverão existir dúvidas.
(3.1) As dúvidas devem surgir sobre o comprimento do retângulo. O esclarecimento passa por fazê-los concluir que é a ordenada de P, dada pela função a que pertence.

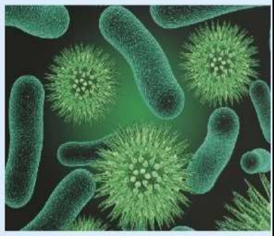
(3.2) A questão não deverá levantar dúvidas.

(3.3) Os alunos podem optar por uma resolução gráfica ou analítica. A ter dúvidas na gráfica, deverão estar relacionados com o manuseamento da máquina. A resposta destes alunos deverá conter uma representação gráfica do que visualizaram na máquina. Relativamente aos alunos que optem pela resolução analítica, terão de calcular o vértice da parábola. O esclarecimento será um relembrar do processo para tal: reconhecer o máximo como o vértice da parábola, encontrar os zeros, fazer a média entre as suas abcissas e obter a abcissa do vértice.

Proposta 25:

Proposta 25

Num laboratório foi estudada a evolução de uma colónia de bactérias. Às 8 h, fez-se a primeira contagem e as seguintes realizaram-se em cada hora decorrida. Verificou-se que o número N de bactérias, em milhares, h horas após o início da contagem, é dado por $N(h) = -h^2 + 4h + 9$.



1. Quantas bactérias havia às 8 horas?
2. Qual foi o resultado da segunda contagem?
3. Calcula $N(2) - N(1)$ e interpreta o resultado no contexto do problema.
4. Em que período do dia o número de bactérias foi superior a 9000 ?
5. Descreve a evolução da colónia desde as 8 horas até às 13 horas.

(1) Não deverão existir dúvidas. No entanto, é possível que algum aluno faça N(8) e só depois perceba que devia ter feito N(0).

(2) Não deverão existir dúvidas.

(3) No cálculo pedido, não deverão existir dúvidas. A interpretação do resultado obtido é que poderá gerar dúvidas, mas questões como “O que significa N(2)? E N(1)? E se agora fizer a subtração?” deverão ser úteis no esclarecimento solicitado.

(4) Os alunos deverão optar por uma resolução gráfica, pois ainda não lhes foi explicada a resolução analítica. A maioria dos alunos introduzirá a equação da parábola na calculadora para ver o gráfico, mas nem todos introduzirão a equação y=9000. O objetivo será levar os alunos a introduzir a tal equação e procurar os pontos de interseção entre os dois gráficos.

(5) Os alunos deverão responder por observação direta do gráfico que têm nas calculadoras, não devendo gerar muitas dúvidas. Perguntas de esclarecimento, caso existam, serão no sentido de os levar a ver a monotonia da função e os valores em alguns momentos.

Proposta 28:

Proposta 28

A função L representa o lucro, em milhares de euros, da produção mensal de uma fábrica, de x centenas de peças e é definida por:

$$L(x) = -0{,}5x^2 + 4x - 3 .$$

1. Calcula $L(0)$ e diz o que representa o valor obtido.
2. Calcula $L(2)$ e interpreta $\frac{L(2)}{200}$ no contexto do problema.
3. Determina o lucro máximo e o respectivo número de peças que devem ser produzidas.
4. Quantas peças devem ser produzidas para manter um lucro superior a 3500 € ?

(1) Não deverão existir dúvidas.

(2) Não deverão existir dúvidas no cálculo, mas na interpretação pedida é provável que surjam algumas. O esclarecimento passará por questionar o significado de L(2), e de seguida, o pedido.

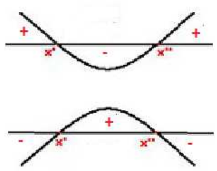
(3) Os alunos podem optar por uma resolução gráfica ou analítica. A ter dúvidas na gráfica, deverão estar relacionados com o manuseamento da máquina. A resposta destes alunos deverá conter uma representação gráfica do que visualizaram na

máquina. Relativamente aos alunos que optem pela resolução analítica, terão de calcular o vértice da parábola. O esclarecimento será um relembrar do processo para tal: reconhecer o máximo como o vértice da parábola, encontrar os zeros, fazer a média entre as suas abcissas e obter a abcissa do vértice. A resposta obtida será x=4 e L(4)=5. Pode acontecer que alguns alunos não se lembrem que o x são centenas (e por isso temos 400 peças) e que o L(x) são milhares (e por isso o lucro são 5000 euros).

(4) Os alunos deverão optar por uma resolução gráfica, pois ainda não lhes foi explicada a resolução analítica. Depois de terem feito o exercício 4 da proposta anterior, espera-se que neste existam menos dúvidas, pois a resolução é idêntica. Em necessidade de esclarecimento sobre o processo, será idêntico ao usado nesse exercício. Este exercício pode gerar dúvidas relativamente ao lucro de 3500€, que terá de ser introduzido como y=3,5 e os valores de x aproximados às centésimas.

(3) Breve explicação sobre Inequações do 2.º grau. — **10 minutos** — *11h14*

<u>Nota</u>: Devido aos ritmos heterogéneos da turma, para alguns alunos este momento decorrerá a meio da resolução das propostas anteriores, mas, a meu ver, é importante que as conclusões sejam feitas em turma e antes do início da resolução do exercício que se segue.



- O objetivo desta explicação é que os alunos compreendam que para resolverem uma inequação do 2.º grau, devem seguir o seguinte processo: arranjar a inequação para estar na forma $ax^2+bx+c \geq 0$ ou $ax^2+bx+c \leq 0$; calcular os zeros da parábola em questão; reparar no sinal de *a* e concluir a orientação da concavidade da parábola; identificar se a zona pretendida está entre os dois zeros ou na restante parte.

- Das propostas anteriores, será alvo de abordagem, em grande grupo, o exercício 25.4, pois trata inequações do 2.º grau.
- Depois de solicitar a um aluno que explique uma possível resolução (provavelmente, gráfica), questionarei a turma "E se eu não utilizar a máquina? De que forma poderei proceder?".
- Penso que existam alunos a conseguir cogitar o processo que pretendo, pelo que pedirei a um aluno que explique para a turma. Como é possível que com a explicação do colega nem todos compreendam, eu tornarei a explicar o pretendido.
- Após a explicação, questionarei o que há a fazer para, por um processo semelhante, encontrar a solução para $x^2-6x \leq -5$ (concavidade voltada para cima e, por isso, a solução é o intervalo entre os zeros). Novamente, penso que alguns alunos não tenham dificuldade em perceber a situação descrita, solicitando-lhes a explicação.
- Posto isto farei um pequeno resumo da explicação do processo a usar, sendo que os alunos retomarão o trabalho de seguida.

→ **(4) Exercícios envolvendo inequações do 2.º grau: exercício 50.** — **25 minutos** — *10h24*

- Este exercício é constituído por várias alíneas com inequações para resolver. É um exercício importante para consolidar as aprendizagens relativas às inequações.

***<u>Dificuldades</u>**: Em princípio, depois da explicação dada, os alunos sabem que têm de desenvolver a inequação até estar na forma $ax^2+bx+c \geq 0$ ou $ax^2+bx+c \leq 0$. Dúvidas poderão advir do próprio desenvolvimento, por exemplo. Chegando à referida forma, não se esperam muitas dificuldades.*

→ **(5) Registo do TPC no quadro:** — **1 minuto** — *11h49*

- Para trabalho de casa os alunos devem concluir o exercício 50 (página 55), a proposta 26 (página 116) e a proposta 43 (página 123).

COMENTÁRIOS

→ <u>TAREFAS COMPLEMENTARES</u>: Devido aos ritmos de trabalho muito heterogéneos existentes nesta turma, caso algum aluno conclua as tarefas propostas antes do fim da aula, ser-lhes-ão sugeridos as tarefas para o trabalho de casa.

Anexo 3: Aula 2, 10 Abril – Plano de Aula

MATEMÁTICA	Secundário – 10.ºC	Lições n.º 137 / 138

TÓPICO: Funções **SUBTÓPICO:** Equações e Inequações do 2.º grau

SUMÁRIO

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO 2.º GRAU: CONSOLIDAÇÃO.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DA AULA
→ Consolidar a resolução de inequações do 2.º grau. → Resolver problemas de contexto real.

PRINCIPAIS TÓPICOS, NOÇÕES OU CONCEITOS ENVOLVIDOS	TEMAS E CAPACIDADES TRANSVERSAIS
→ Equações e Inequações do 2.º grau.	Resolução de problemas; Tecnologia.

RECURSOS	
A trazer pelo aluno	**A trazer pelo professor**
Manual (Parte 2) e caderno diário. Calculadora Gráfica	Manual (parte 2) e Calculadora Gráfica. Ficha de Trabalho.

METODOLOGIA DA AULA
Explicação sobre processos de resolução de inequações do 2.º grau em grande grupo. Resolução de exercícios sobre inequações a pares. Resolução de problemas do GAVE em grande grupo/pares.

MOMENTOS DA AULA	
→ (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas	→ 9 minutos
→ (2) Explicação sobre processos de resolução de inequações do 2.º grau.	→ 45 minutos
→ (3) Resolução de exercícios sobre inequações.	→ 15 minutos
→ (4) Resolução de problemas do GAVE	→ 20 minutos
→ (5) Registo do TPC no quadro.	→ 1 minuto

DESENVOLVIMENTO DA AULA	TEMPO PREVISTO	
→ **(1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.**	**9 minutos**	*10h20*
→ **(2) Explicação sobre processos de resolução de inequações do 2.º grau.** Visto a discussão na última aula ter sido um pouco confusa e existirem, certamente, muitas ideias confusas entre os alunos, a primeira parte da aula será dedicada à consolidação da resolução de inequações do 2.º grau, incluindo-se explicação de processos e resolução de exercícios. **(2.1)** $x^2+2x \geq 0$ Na última aula, foram referidos pelos alunos três formas de resolver esta inequação. Nesta aula, os três serão abordados pela ordem com que surgirem como propostas pelos alunos. Para facilitar a compreensão dos raciocínios e porque considero ser importante que nenhum seja apagado, dividirei o quadro em três partes, uma para cada resolução. Pretendo que os alunos percebam que as três são válidas. No fim da abordagem aos três	**45 minutos**	*10h29*

processos, salientarei que o primeiro não poderá ser utlizado quando o enunciado explicitar que se pretende uma resolução sem recorrer à calculadora gráfica.

1) *Resolução gráfica*
Introdução da função na calculadora e, por observação direta da parábola, conclui-se que a função assume valores positivos para $x \in]-\infty;-2] \cup [0;+\infty[$.

***Dificuldades**: Este processo é muito simples, pois resulta da observação direta do gráfico; penso que não deverão existir dificuldades.*

2) *Resolução recorrendo à equação*
São encontrados os zeros da equação e reparando que a concavidade da parábola está voltada para cima, então perceber que a solução é $x \in]-\infty;-2] \cup [0;+\infty[$.

***Dificuldades**: Este processo gerou alguma confusão entre os alunos. Tentarei optar por lhes questionar o que significa "≥", esperando que eles respondam "ser maior ou igual a zero", seguindo-se o sentido da concavidade. Depois farei um esboço de uma parábola com dois zeros e perguntar-lhes-ei onde estará a zona que me interessa, esperando que eles concluam onde está. Daqui, eles deverão perceber que devem, então, calcular os zeros da parábola para poderem concluir a resposta pretendida.*

3) *Resolução que mantém a inequação*
Sabendo que $AxB>0 \Leftrightarrow (A>0 \wedge B>0) \vee (A<0 \wedge B<0)$, fazer o mesmo para a inequação dada; fazer os cálculos necessários e concluir que a solução é $x \in]-\infty;-2] \cup [0;+\infty[$.

***Dificuldades**: Começarei por relembrar a equivalência acima indicada, bem como a de AxB<0. Voltando ao exercício, fazer-se-á o desenvolvimento da expressão, resolvendo-se as inequações obtidas. No fim, será preciso operar as conjunções e disjunções e isso poderá levantar algumas dúvidas. Tentarei esclarece-las com recurso à reta real.*

(2.2) $x^2-3x \leq 0$
Não havendo dúvidas sobre a inequação anterior, será pedida a resolução, a pares desta inequação. Durante a resolução circularei pela sala para algum esclarecimento que seja necessário e para ir vendo as resoluções dos alunos. A solução é $x \in [0;3]$.

(2.3) $-x^2+2x+3 \geq 0$
Recorrendo agora a uma expressão cuja factorização não é direta, penso que os alunos deverão optar pelo primeiro ou pelo segundo processo referido. Durante a resolução circularei pela sala para algum esclarecimento que seja necessário e para ir vendo as resoluções dos alunos. A solução é $x \in [-1;3]$.

(2.4) $x^2-6x+10 \geq 0$
A solução desta inequação é $\mathbb{R}$, pois toda a parábola está acima do eixo dos xx. Durante a resolução circularei pela sala para algum esclarecimento que seja necessário e para ir vendo as resoluções dos alunos.
***Dificuldades**: Os alunos que optarem pela resolução gráfica não deverão ter dificuldades, pois facilmente vêem que a função é sempre positiva. Os alunos que optarem pela resolução (2) poderão ter dificuldades ao verem que a função não tem zeros; questionarei "O que significa a equação ser impossível? O que sabemos então sobre a função? Como é o seu gráfico? Em que região do plano está?".*

(2.5) $x^2-6x+10 \leq 0$
A solução desta inequação é $\emptyset$, pois toda a parábola está acima do eixo dos xx, não tomando valores negativos ou nulos. Este caso apenas será estudado no quadro e logo a seguir ao anterior.

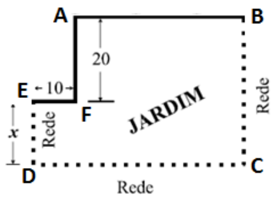
→ **(3) Resolução de exercícios sobre inequações**.
Será proposto aos alunos que iniciem a resolução das alíneas do exercício 50 para

15 minutos | *11h14*

<table>
<tr><td>
consolidarem a aprendizagem anterior. Eu circularei pela sala para verificar se os alunos estão a acompanhar e se ainda existem dúvidas entre a turma.
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

→ **(4) Resolução de problemas do GAVE**

Depois de praticarem a resolução de inequações fora de um dado contexto, será resolvido, em turma, um problema adaptado de um teste intermédio (Maio 2008).



(4.1) ***Determinar a expressão da área do jardim***

Para calcular a área do jardim é necessário dividir a figura em duas partes, calculando a área de cada uma, somando depois as expressões. Para calcular as áreas, é preciso determinar quanto mede cada lado do jardim. CB= 20+x, porque BC=AE+ED=20+x. Quanto a CD é preciso reparar que a rede irá medir 100metros e, a partir dessa informação, fazer *DC=100-x-20-x=80-2x*.

<u>Dificuldades</u>:

Perceber que têm de dividir a área do jardim em duas partes - ser-lhes-á sugerido que o façam para terem retângulos, dos quais já sabem calcular a área.

Escrever o comprimento dos lados em função de x. Quanto ao lado CB, bastará reparar que este mede o mesmo que a soma das medidas do AE e ED. O Lado DC obter-se-á depois de notar que a rede toda (ED +DC+CB) mede 100 metros, pelo que DC=100-ED-BC.

(4.2) ***Encontrar a área máxima***

Sendo uma parábola com a concavidade voltada para baixo, a área máxima corresponde ao vértice da parábola. *Os alunos podem calculá-lo pela fórmula ou através da média dos zeros da função. Não poderão utilizar a calculadora, conforme referido no enunciado. (10,1600)*

<u>Dificuldades</u>*: Penso que os alunos não terão dificuldades na resolução desta alínea.*

(4.3) ***Resolver uma inequação***

Os alunos terão de resolver a inequação $-2x^2 + 40x + 1400 > 750$, podendo escolher livremente o processo de resolução. ($x < 30,6$).

<u>Dificuldades</u>*: A dificuldade desta alínea está em perceber "e onde foi o 750?" quando se opta por uma resolução analítica. Tentarei explicar que "$x + 5 > 2$ é o mesmo que $x + 5 - 2 > 0$" e que, por isso, o 750 também pode mudar de membro, ficando a inequação a resolver $-2x^2 + 40x + 650 > 0$.*

</td><td>

20 minutos

</td><td>

10h29

</td></tr>
<tr><td>

→ **(5) Registo do TPC no quadro.**

- Para trabalho de casa os alunos devem concluir o exercício 50 (página 55) e a proposta 26 (página 116) e a proposta 43 (página 123).

</td><td>

1 minuto

</td><td>

11h49

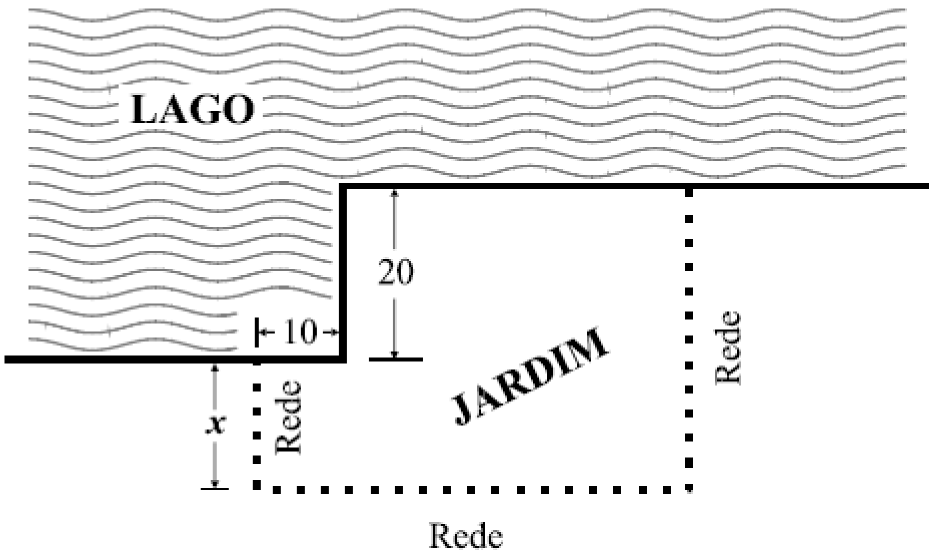
</td></tr>
</table>

COMENTÁRIOS
→ <u>TAREFAS COMPLEMENTARES</u>: Devido aos ritmos de trabalho muito heterogéneos existentes nesta turma, caso algum aluno conclua as tarefas propostas antes do fim da aula, ser-lhes-ão sugeridos as tarefas para o trabalho de casa.

Anexo 4: Aula 2, 10 Abril – Ficha de Trabalho

O JARDIM E O LAGO

Pretende-se construir um jardim junto a um lago, conforme a figura ilustra.
Três lados do jardim confinam com o lago e os outros três ficam definidos por uma rede.
Pretende-se que lados consecutivos do jardim sejam sempre perpendiculares.



As dimensões indicadas na figura estão expressas em metros.
Tal como a figura mostra, x é a medida, em metros, de um dos lados do jardim.
Vão ser utilizados, na sua totalidade, 100 metros de rede.

1. Mostre que a área, em m^2, do jardim, é dada, em função de x, por $a(x) = -2x^2 + 40x + 1400$.

2. **Sem recorrer à calculadora**, determine o valor de x para o qual é máxima a área do jardim e determine essa área máxima.

3. Neste jardim pretende-se construir uma zona de piquenique, pelo que a área do jardim tem de ser superior a 750 m^2. Determina os valores que x pode tomar e apresenta o resultado arredondado às décimas.

Anexo 5: Aula 3, 11 Abril – Plano de Aula

MATEMÁTICA	Secundário – 10.ºC	Lições n.º 139 / 140

TÓPICO: Funções **SUBTÓPICO:** Funções Polinomiais

SUMÁRIO

FUNÇÕES QUADRÁTICAS E POLINOMIAIS COMO PRODUTO DE FUNÇÕES AFINS.

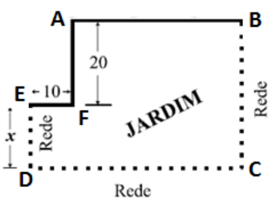
PRINCIPAIS OBJETIVOS DA AULA
→ Trabalhar funções quadráticas e polinomiais enquanto produto de fatores.

PRINCIPAIS TÓPICOS, NOÇÕES OU CONCEITOS ENVOLVIDOS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
→ Produto de fatores. → Estudo de uma função.	Resolução de problemas; Tecnologia e Matemática

RECURSOS	
A trazer pelo aluno	**A trazer pelo professor**
Manual (Parte 2) e caderno diário. Calculadora Gráfica	Manual (parte 2) e Calculadora Gráfica. Ficha de Trabalho.

METODOLOGIA DA AULA
Momentos de discussão e consolidação em grande grupo. Resolução da ficha de trabalho em pequeno grupo, com momentos de discussão em grande grupo.

MOMENTOS DA AULA	
→ (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas	→ 9 minutos
→ (2) Discussão de alguns aspetos do problema do GAVE da aula anterior.	→ 15 minutos
→ (3) Resolução de uma ficha de trabalho sobre polinomiais enquanto produto de afins.	→ 45 minutos
→ (4) Consolidação de algumas ideias importantes sobre funções polinomiais,	→ 20 minutos
→ (5) Registo do TPC no quadro.	→ 1 minuto

DESENVOLVIMENTO DA AULA	TEMPO PREVISTO	
→ **(1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.**	**9 minutos**	*10h20*
→ **(2) Discussão de alguns aspetos do problema da aula anterior.** Este problema começou a ser resolvido na aula anterior, em trabalho a pares. Conclusão ficou para trabalho de casa e falta uma breve discussão sobre a tarefa.  **(2.1)** ***Determinar a expressão da área do jardim*** Para calcular a área do jardim é necessário (1) dividir a figura em duas partes, calculando a área de cada uma, somando depois as expressões ou (2)calcular a área do retângulo grande, subtraindo-lhe 200. Quanto às medidas dos lados, CB= 20+x, porque BC=AE+ED=20+x; *DC=100-x-20-x=80-2x* porque a rede irá medir 100metros.	**15 minutos**	*10h34*

__Dificuldades__:
Perceber que têm de dividir a área do jardim em duas partes - ser-lhes-á sugerido que o façam para terem retângulos, dos quais já sabem calcular a área.
Escrever o comprimento dos lados em função de x. Quanto ao lado CB, bastará reparar que este mede o mesmo que a soma das medidas do AE e ED. O Lado DC obter-se-á depois de notar que a rede toda (ED +DC+CB) mede 100 metros, pelo que DC=100-ED-BC.

(2.2) ***Encontrar a área máxima***
Sendo uma parábola com a concavidade voltada para baixo, a área máxima corresponde ao vértice da parábola. *Os alunos podem calculá-lo pela fórmula ou através da média dos zeros da função. Não poderão utilizar a calculadora, conforme referido no enunciado. (10,1600)*

(2.3) ***Resolver uma inequação***
Os alunos terão de resolver a inequação $-2x^2 + 40x + 1400 > 750$, podendo escolher livremente o processo de resolução. ($0 \leq x < 30,6$).
__Dificuldades__: Optando por uma resolução gráfica, será necessário esclarecer a representação do gráfico obtido no caderno, pois é preciso ter em consideração o contexto do problema, respeitando o domínio e o contradomínio. Numa resolução analítica, a dificuldade está em perceber "e onde foi o 750?" quando se opta por um resolução analítica. Tentarei explicar que "$x + 5 > 2$ é o mesmo que $x + 5 - 2 > 0$" e que, por isso, o 750 também pode mudar de membro, ficando a inequação a resolver $-2x^2 + 40x + 650 > 0$.

→ **(3) Resolução de uma ficha de trabalho sobre polinomiais enquanto produto de afins.**

45 minutos | *10h49*

__Nota__: Esta ficha tem um carácter exploratório orientado, ou seja, há questões novas para os alunos, mas pela sequência de questões pretende-se que eles consigam chegar às conclusões

O objetivo desta ficha de trabalho é que os alunos encarem as funções quadráticas e polinomiais como produto de funções afins. Assim sendo, quando eu faço o produto entre fatores do 1.º grau, vou obtendo funções de grau superior.

A resolução desta ficha irá sendo interrompida para fazer uma rápida consolidação de ideias. Momento muito importante neste tipo de tarefa. Seguem-se algumas das ideias a destacar:
- Os zeros da polinomial são os mesmos que os fatores que a constitui.
- Para descobrir o sinal da função produto, este sai facilmente por observação do sinal dos seus fatores.
- Número de fatores do 1.º grau envolvidos determina o grau que a função polinomial terá.
- A construção de um quadro de sinal com mais que uma função.
- Zeros simples, zeros duplos e zeros triplos.

(1) ***Polinómio de 2.º grau (função quadrática)***
(b) Nesta alínea, os alunos podem definir a expressão da função, pô-la na calculadora e completar o quadro, mas também podem fazê-lo através da análise do sinal dos fatores da função. Uma vez que é uma pergunta nova, é provável que não consigam fazer. Tentarei ajudá-los através de "o que tu sabes sobre a função p? E o que é que nós sabemos sobre produtos?"
(e) Esta alínea tem a mesma resposta que a (a). No entanto, não penso que muitos alunos o compreendam imediatamente. Parece-me que uns recorrerão à fórmula resolvente e outros à lei do anulamento do produto.
(g) "O que é que é para fazer aqui?" será, certamente, a abordagem deles à questão. Como esta pergunta é para ser levada à discussão, não adiantarei muito no esclarecimento de dúvidas sobre a mesma. Pretendo apenas que escrevam o que considerarem importante.

(2) ***Polinómio de 3.º grau (função cúbica)***
(c) Dúvidas sobre "que tipo é?". Pretendo apenas que eles concluam que é de 3.º grau.

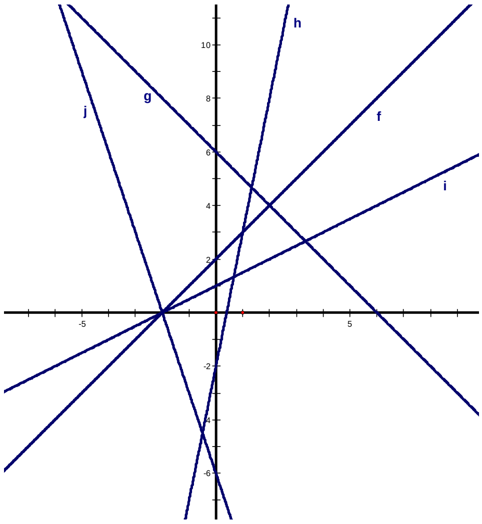
(3) ***Polinómio de 4.º grau***
Ao contrário dos dois casos anteriores em que o número de zeros distintos era igual ao

grau da função, neste caso apenas existem três zeros distintos, existindo um zero duplo. → **(4) Consolidação de algumas ideias importantes sobre funções polinomiais** Este momento ocorrerá quando uma parte significativa da turma (metade dos grupos) tiver concluído a resolução da ficha. Se tal não acontecer, será o início da próxima aula. Aos alunos que forem terminando, ser-lhes-ão sugeridas alíneas do trabalho de casa. - O tipo delas é sempre "polinomial de ? grau"; existem funções polinomiais de grau par ou de grau ímpar *(nota: não nos referimos à paridade da função, mas sim ao grau da sua expressão analítica),* e "?" corresponde ao expoente do termo de maior grau da função. - Todas estas funções são contínuas. - O domínio em todas é $\mathbb{R}$. - Funções de grau ímpar têm contradomínio $\mathbb{R}$. - Funções de grau ímpar têm pelo menos um zero - Funções de grau ímpar: *se $a<0$:* $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$; $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$ (e vice-versa) , isto é, os limites em infinito são sempre contrários. - Funções de grau par podem não ter zeros. - Funções de grau par: *se $a<0$:* $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$; $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$ (e vice-versa), isto é, os limites em infinito são sempre iguais.	**20 minutos**	*11h35* ~
→ **(5) Registo do TPC no quadro.** Para trabalho de casa os alunos devem concluir o exercício 103 (página 84), exercícios 105 ao 108 (página 85 e 86), proposta 22 (página 115) e propostas 52 e 53 (página 126).	**1 minuto**	*11h49*

COMENTÁRIOS
→ TAREFAS COMPLEMENTARES: Devido aos ritmos de trabalho muito heterogéneos existentes nesta turma, caso algum aluno conclua as tarefas propostas antes do fim da aula, ser-lhes-ão sugeridos as tarefas para o trabalho de casa.

Anexo 6: Aula 3, 11 Abril – Ficha de Trabalho

Considera as funções afins f, g, h, i, j , cujos gráficos se apresentam ao lado. As suas expressões analíticas são as seguintes:



$f(x)=x+2$, $g(x)=-x+6$, $h(x)=5x-2$, $i(x)=\frac{1}{2}x+1$, $j(x)= -3x-6$.

1. Considera as funções f(x) e g(x).
    a. Indica os zeros das funções.
    b. Constrói um quadro de sinal das funções f(x), g(x) e p(x), onde p(x)=(f *x* g)(x).
    c. Calcula a expressão de p(x).
    d. Que tipo de função é p(x)?
    e. Quais os zeros da função p(x)?
    f. Faz um esboço do gráfico de p(x).
    g. Observa as características das funções f(x), g(x) e p(x). Que relações consegues estabelecer entre as três?

2. Considera as funções g(x), h(x) e j(x).
    a. Indica os zeros das funções.
    b. Constrói um quadro de sinal das funções g(x), h(x) e j(x) e q(x), onde q(x)=(g *x* h *x* j)(x).
    c. Calcula a expressão de q(x). Que tipo de função é q(x)?
    d. Quais os zeros da função q(x)?
    e. Faz um esboço do gráfico de q(x).
    f. Observa as características das funções g(x), h(x) e j(x) e q(x). Que relações consegues estabelecer entre as quatro?

3. Considera as funções f(x), g(x), h(x) e i(x).
    a. Constrói um quadro de sinal das funções f(x), g(x), h(x), i(x) e r(x), onde r(x)=(f *x* g *x* h *x* i)(x).
    b. Calcula a expressão de r(x). Que tipo de função é?
    c. Faz um esboço do gráfico de r(x). Observa as características das funções f(x), g(x), h(x), i(x) e q(x). Que relações consegues estabelecer entre as cinco?

Anexo 7: Aula 4, 15 Abril – Plano de Aula

MATEMÁTICA	Secundário – 10.ºC	Lições n.º 141 / 142

Tópico: Funções **Subtópico:** Funções Polinomiais

SUMÁRIO

Conclusão da Resolução e discussão da ficha de trabalho sobre funções polinomiais.

Famílias de funções cúbicas.

Resolução de inequações de grau superior a 2.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DA AULA
→ Conhecer as várias famílias de funções cúbicas, gráfica e analiticamente. → Resolver inequações de grau superior a 2.

PRINCIPAIS TÓPICOS, NOÇÕES OU CONCEITOS ENVOLVIDOS	TEMAS e CAPACIDADES TRANSVERSAIS
→ Funções cúbicas. → Inequações de grau superior a 2.	Resolução de problemas; Tecnologia e Matemática

RECURSOS	
A trazer pelo aluno	**A trazer pelo professor**
Manual (Parte 2) e caderno diário. Calculadora Gráfica.	Manual (parte 2) e Calculadora Gráfica. Fichas de trabalho. Computador e projetor.

METODOLOGIA DA AULA
Conclusão da resolução da ficha em pequenos grupos. Discussão e consolidação de ideias em grande grupo. Abordagem às famílias de funções cúbicas em grande grupo. Resolução de inequações de grau superior a 2 em pares.

MOMENTOS DA AULA	
→ (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas	→ 9 minutos
→ (2) Conclusão da resolução da ficha de trabalho sobre polinomiais enquanto produto de afins e Consolidação de algumas ideias importantes sobre funções polinomiais.	→ 30 minutos
→ (3) Famílias de funções cúbicas.	→ 25 minutos
→ (4) Resolução de inequações de grau superior a 2.	→ 25 minutos
→ (5) Registo do TPC no quadro.	→ 1 minuto

DESENVOLVIMENTO DA AULA	TEMPO PREVISTO	
→ **(1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.**	**9 minutos**	*10h20*
→ **(2) Conclusão da resolução da ficha de trabalho sobre polinomiais enquanto produto de afins e Consolidação de algumas ideias importantes sobre funções polinomiais** Na aula passada, apenas foi discutida a primeira pergunta, relativa às funções quadráticas. Ficaram a faltar as restantes, sobre os polinómios de 3.º e 4.º grau.	**30 minutos**	*10h29*

Os alunos resolverão as alíneas que faltarem e no fim, haverá um momento de discussão final e conclusão de algumas ideias:
- Os zeros da polinomial são os mesmos que os fatores que a constitui.
- Para descobrir o sinal da função produto, este obtém-se facilmente por observação do sinal dos seus fatores.
- Número de fatores do 1.º grau envolvidos determina o grau que a função polinomial terá.
- A construção de um quadro de sinal com mais que uma função.
- Zeros simples, zeros duplos e zeros triplos.

Consolidação de algumas ideias importantes sobre funções polinomiais
- Mantendo os quadros de sinal construídos na discussão, haverá a projeção dos gráficos.
- São funções "polinomiais do ? grau"; existem funções polinomiais de grau par ou de grau ímpar *(<u>nota</u>: não nos referimos à paridade da função, mas sim ao grau da sua expressão analítica),* e "?" corresponde ao expoente do termo de maior grau da função.
- Todas estas funções são contínuas.
- O domínio em todas é $\mathbb{R}$.

- Funções de grau ímpar têm contradomínio $\mathbb{R}$.
- Funções de grau ímpar têm pelo menos um zero
- Funções de grau ímpar: <u>*se $a<0$:*</u> $x\to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$; $x\to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$ (e vice-versa) , isto é, os limites em infinito são sempre contrários.

- Funções de grau par podem não ter zeros.
- Funções de grau par: <u>*se $a<0$:*</u> $x\to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$; $x\to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$ (e vice-versa), isto é, os limites em infinito são sempre iguais.

→ **(3) Famílias de funções cúbicas**

25 minutos | *10h59*

- Será feita a exploração deste tema através da projeção de vários gráficos, fazendo uma análise dos mesmos em grande grupo. Os alunos terão uma ficha com os vários gráficos a projetar, devendo registar na ficha o que for discutido.

(1) $y=ax^3,\ a\neq 0$
- Só tem um zero (ou raiz), que é o 0. Este zero tem multiplicidade 3.(número de vezes que o fator aparece na factorização).
- Objetos simétricos têm imagens simétricas, isto é, y(-x)= -y(x). Há uma simetria em relação à origem do referencial. Estas funções dizem-se funções ímpares.

(2) $y=a(x-\alpha)^3,\ a\neq 0$
- Também só tem um zero de multiplicidade 3, que é o α.

(3) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)^2,\ a\neq 0$
- Tem dois zeros: α é um zero simples e β é um zero duplo.

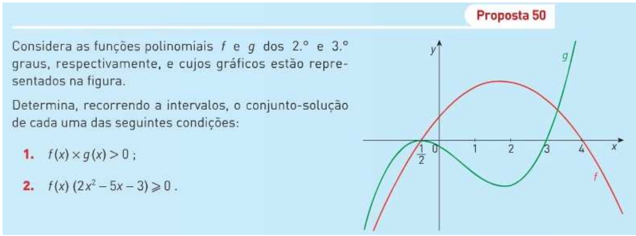
(4) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\lambda),\ a\neq 0$
- Tem três zeros: α, β e λ são três zeros simples.

(5) $y=a(x-\alpha)(x^2+k),\ a\neq 0,\ k>0$
- O fator (x^2+k) não se anula, só existindo um zero simples, o α.

→ **(4) Resolução de inequações de grau superior a 2.**

25 minutos | *11h24*

(4.1) Será pedido aos alunos que, a pares, resolvam as seguintes inequações: $-3(x+2)(x-1)^2<0$ e $x^3+2x^2-15x-5\geq 0$. Ao fim de 5minutos haverá um momento de discussão.
- A primeira inequação pode ser resolvida graficamente ou através do quadro de sinal, enquanto a segunda apenas graficamente. O objetivo será que os alunos

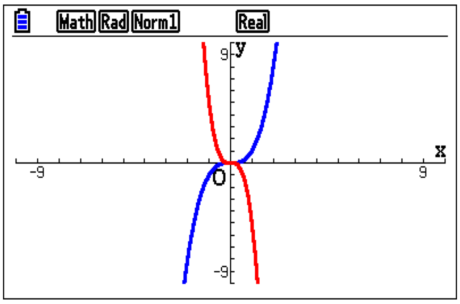
vejam as duas resoluções e as compreendam. Será recolhida a resolução dos alunos. (4.2) Resolução da proposta 50: duas inequações com informações gráficas e analíticas. ***Dificuldades***: *Se os alunos tiverem compreendido os quadros de sinal e as explicações que deles decorreram, não deverão ter dificuldades na resolução da tarefa. Caso contrário, o esclarecimento passará por re-explicar isso.*  **Proposta 50** Considera as funções polinomiais f e g dos 2.º e 3.º graus, respectivamente, e cujos gráficos estão representados na figura. Determina, recorrendo a intervalos, o conjunto-solução de cada uma das seguintes condições: **1.** $f(x) \times g(x) > 0$; **2.** $f(x)\,(2x^2 - 5x - 3) \geqslant 0$.		
→ **(5) Registo do TPC no quadro.** Para trabalho de casa os alunos devem fazer os exercícios 51,52 e 53 (páginas 55 e 56), exercícios 101, 102 e 103 (página 84), 105, 106, 107 e 108 (páginas 85 e 86) e tarefa 10 (página 57).	**1 minuto**	*11h49*

COMENTÁRIOS
→ <u>TAREFAS COMPLEMENTARES</u>: Devido aos ritmos de trabalho muito heterogéneos existentes nesta turma, caso algum aluno conclua as tarefas propostas antes do fim da aula, ser-lhes-á sugerido tarefas do trabalho de casa.

Anexo 8: Aula 4, 15 Abril – Ficha de Trabalho

FAMÍLIAS DE FUNÇÕES CÚBICAS

1



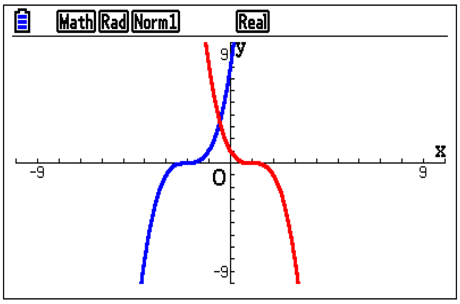
Família:

Zeros:

y_1=

y_2=

2



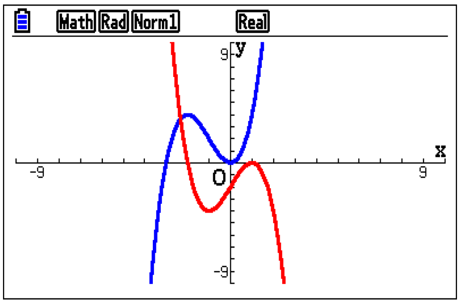
Família:

Zeros:

y_3=

y_4=

3



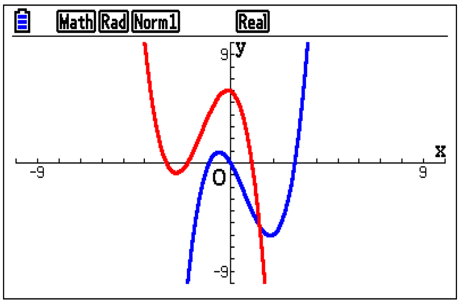
Família:

Zeros:

y_5=

y_6=

4



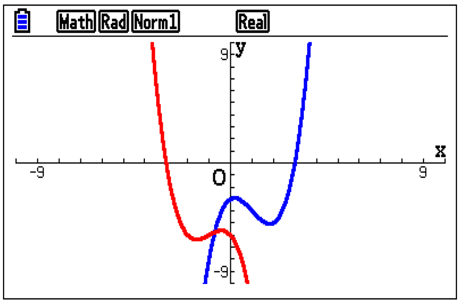
Família:

Zeros:

y_7=

y_8=

5



Família:

Zeros:

y_9=

y_{10}=

Anexo 9: Aula 5, 17 Abril – Plano de Aula

MATEMÁTICA	Secundário – 10.ºC	Lições n.º 143 / 144

TÓPICO: Funções **SUBTÓPICO:** Funções Polinomiais

SUMÁRIO

GENERALIZAÇÕES SOBRE FUNÇÕES POLINOMIAIS.

RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES DE GRAU SUPERIOR A 2.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ADAPTADOS DE PROPOSTAS DO GAVE.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DA AULA
→ Generalizar propriedades de funções polinomiais de grau par e impar: → Resolver inequações de grau superior a 2, gráfica e analiticamente.

PRINCIPAIS TÓPICOS, NOÇÕES OU CONCEITOS ENVOLVIDOS	TEMAS e CAPACIDADES TRANSVERSAIS
→ Funções polinomiais. → Inequações.	Resolução de problemas; Tecnologia e Matemática

RECURSOS	
A trazer pelo aluno	**A trazer pelo professor**
Manual (Parte 2) e caderno diário. Calculadora Gráfica. Ficha de Trabalho	Manual (parte 2) e Calculadora Gráfica. Ficha de Trabalho. Computador e projetor.

METODOLOGIA DA AULA
Conclusão do estudo das famílias de funções cúbicas e generalizações sobre funções polinomiais em grande grupo. Resolução de inequações de grau superior a 2 e das propostas do GAVE em pares.

MOMENTOS DA AULA	
→ (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas	→ 9 minutos
→ (2) Conclusão do estudo das famílias de funções cúbicas.	→ 10 minutos
→ (3) Generalizações sobre funções polinomiais.	→ 20 minutos
→ (4) Resolução de inequações de grau superior a 2.	→ 25 minutos
→ (5) Resolução de Propostas do GAVE.	→ 25 minutos
→ (6) Registo do TPC no quadro.	→ 1 minuto

DESENVOLVIMENTO DA AULA	TEMPO PREVISTO	
→ **(1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.**	**9 minutos**	*10h20*
→ **(2) Conclusão do estudo de famílias de funções cúbicas.** A conclusão da ficha foi para trabalho de casa, tendo sido sugerida a consulta do manual. Neste momento será projetado o próprio manual e será feita uma rápida correção da ficha, com destaque para o tipo de zeros existente em cada família.	**10 minutos**	*10h29*

→ **(3) Generalizações sobre funções polinomiais.**

15 minutos

10h39

Partindo da pergunta "qual a diferença entre uma função cúbica e uma função quadrática?" (onde se esperam respostas relacionadas com o grau do polinómio e aspetos dos gráficos), seguir-se-á para a projeção de gráficos de funções polinomiais de grau ímpar ($(x-1)^3$, $(x-1)^5$,($x-1)^7$) e par ($(x+2)^2$, $(x+2)^4$ e $(x+2)^6$). Depois de desfazer a ideia de que as três funções polinomiais de grau par são quadráticas e que as de grau ímpar apresentadas são cúbicas (sobrepondo os gráficos e mostrando as respetivas expressões), a discussão terá como objetivo concluir que nas funções pares os limites em infinito são iguais, enquanto as funções ímpares têm limites, em infinito, diferentes. Consequentemente, as ímpares têm sempre, pelo menos, um zero e as pares não.

→ **(4) Resolução de inequações de grau superior a 2.**

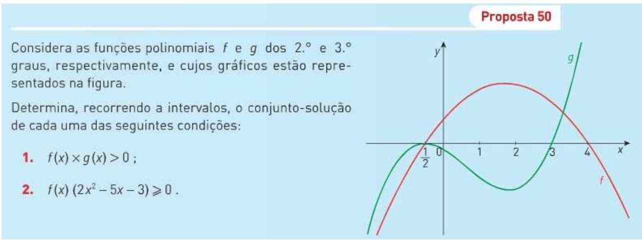
25 minutos

10h54

(4.1) Será pedido aos alunos que, a pares, resolvam as seguintes inequações: $-3(x+2)(x-1)^2 <0$ (4.1.1) e $x^3+2x^2-15x-5\geq 0$ (4.1.2). Ao fim de 5minutos haverá um momento de discussão com toda a turma.

- A primeira inequação pode ser resolvida graficamente ou através do quadro de sinal, enquanto a segunda apenas graficamente. O objetivo será que os alunos vejam as duas resoluções e as compreendam. Será recolhida a resolução dos alunos.

(4.2) Resolução da proposta 50: duas inequações com informações gráficas e analíticas.


Proposta 50

Considera as funções polinomiais f e g dos 2.° e 3.° graus, respectivamente, e cujos gráficos estão representados na figura.

Determina, recorrendo a intervalos, o conjunto-solução de cada uma das seguintes condições:

1. $f(x)\times g(x)>0$;
2. $f(x)\,(2x^2-5x-3)\geqslant 0$.

***Dificuldades**: Se os alunos tiverem compreendido os quadros de sinal e as explicações que deles decorreram, não deverão ter dificuldades na resolução da tarefa. Caso contrário, o esclarecimento passará por re-explicar isso.*

→ **(5) Resolução de Propostas do GAVE.**

30 minutos

11h19

- Duas escolhas múltiplas saídas em testes intermédios e uma pergunta aberta com três funções: uma afim, uma quadrática e uma cúbica.

(1) O contradomínio da função pode gerar alguma confusão, mas que rapidamente se desfaz se eles esboçarem o gráfico e analisarem as informações que têm: se o *a* é positivo, a concavidade da parábola está voltada para cima; se apenas há um zero, então o vértice da parábola está no eixo xx. Logo, o contradomínio é $[0,+\infty[$.

(2) Aos alunos que manifestarem dificuldades, será sugerido que esbocem o gráfico de -*f(x)* e depois reparem em quantas unidades o devem transladar e em que sentido.

***Nota**: Em ambas as escolhas múltiplas, os alunos devem justificar a opção, explicando como pensaram.*

(3)

(3.1) Sendo paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, o seu declive é 1. A ordenada de B é 2, o que significa que houve uma translação da reta segundo o vetor (0,1). Logo, se a equação da bissetriz é y=x, a função h será dada por y=x+1.

(3.2) Graficamente, os alunos devem conseguir dizer qual a parte da função que satisfaz a condição pedida. No entanto, como não têm os valores dos zeros da função, deverão optar por fazer um quadro de sinais. Os alunos mais perspicazes, poderão notar que, pela expressão da função, os zeros serão -1, 2 e 4 e, nesse caso, a resposta é direta após observação do gráfico.

(3.3) É possível que os alunos tenham dificuldades logo na interpretação da pergunta, não compreendendo de imediato o que lhes é pedido: As funções f e g intersectam-se no ponto A e no ponto B, sendo a abcissa de B, 1. Se no enunciado se diz que há um terceiro ponto de intersecção e que é maior que 1, então esse ponto estará à direita de B. Depois, pondo ambas as funções na calculadora, os alunos devem procurar uma janela de visualização que mostre o ponto pretendido. Em caso de dificuldade, ser-lhes-á sugerido que usem o zoom auto / zoom fit e, desde que o domínio contenha o 8, o zoom pedido mostrará o ponto. → **(6) Registo do TPC no quadro.** Para trabalho de casa os alunos devem fazer os exercícios 101, 102 e 103 (página 84), os exercícios 105, 106, 107 e 108 (páginas 85 e 86).	**1 minuto**	*11h49*

COMENTÁRIOS
→ TAREFAS COMPLEMENTARES: Devido aos ritmos de trabalho muito heterogéneos existentes nesta turma, caso algum aluno conclua as tarefas propostas antes do fim da aula, ser-lhes-ão sugeridos as tarefas para o trabalho de casa.

Anexo 10: Aula 5, 17 Abril – Ficha de Trabalho

1. Sejam *a, b* e *c* três números reais.

Seja *f* a função, de domínio ℝ, definida por $f(x)=ax^2+bx+c$.

Sabe-se que:

- $a > 0$.
- a função *f* tem um único zero, que é o número real 5.

Qual é o contradomínio de *f* ?

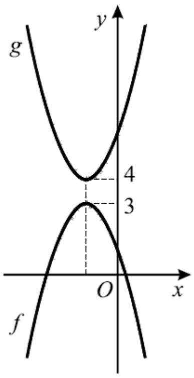
(A) $]-\infty,0]$ **(B)** $[0,+\infty[$ **(C)** $]-\infty,5]$ **(D)** $[5,+\infty[$

(Teste Intermédio, Maio 2010)

2. Na figura ao lado estão representadas, em referencial o.n. *xOy*, duas parábolas geometricamente iguais, que são os gráficos de duas funções quadráticas, *f* e *g*.

Os vértices das duas parábolas têm a mesma abcissa.

A ordenada de um dos vértices é igual a 3 e a ordenada do outro vértice é 4.



Qual das expressões seguintes define a função *g*?

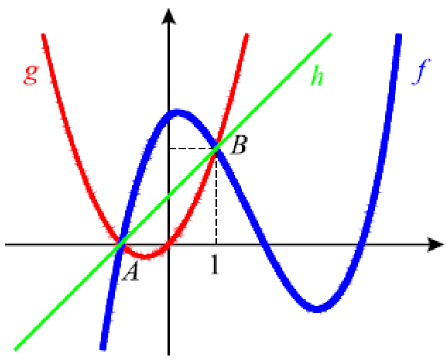
(A) -f(x)+7 **(B)** -f(x)+1 **(C)** -[f(x)+1] **(D)** -[f(x)+7]

(Teste Intermédio, Maio 2009)

3. Na figura ao lado, estão representadas graficamente três funções, *f*, *g* e *h*, de domínio ℝ.

Sabe-se que:

- a função *f* é definida pela expressão $\frac{1}{3}(x+1)(x-2)(x-4)$;
- o gráfico da função *g* é definido pela expressão x^2+x;
- o gráfico da função *h* é uma recta paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares;
- os pontos *A* e *B* pertencem aos gráficos das três funções;
- o ponto *A* tem ordenada 0;
- o ponto *B* tem abcissa 1.



1. Defina analiticamente a função *h*, depois de determinar a ordenada do ponto *B*.

2. Determina o conjunto solução da inequação $f(x)<0$, sem recorrer à calculadora.

3. A equação $f(x)=g(x)$ tem três soluções, sendo uma delas maior do que 1. Determine essa solução, utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora.

Anexo 11: Aula 6, 18 Abril – Plano de Aula

MATEMÁTICA	Secundário – 10.ºC	Lições n.º 145 / 146

TÓPICO: Funções **SUBTÓPICO:** Funções Polinomiais

SUMÁRIO

TAREFAS SOBRE JANELAS DE VISUALIZAÇÃO NA MÁQUINA CALCULADORA GRÁFICA.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ADAPTADOS DE PROPOSTAS DO GAVE.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DA AULA
→ Desenvolver o pensamento crítico face aos gráficos apresentados na calculadora; → Resolver tarefas de aplicação dos conteúdos trabalhados; → Consolidar a resolução de inequações.

PRINCIPAIS TÓPICOS, NOÇÕES OU CONCEITOS ENVOLVIDOS	TEMAS e CAPACIDADES TRANSVERSAIS
→ Janela de visualização na máquina gráfica. → Características de uma função polinomial.	Resolução de problemas; Tecnologia e Matemática

RECURSOS	
A trazer pelo aluno	**A trazer pelo professor**
Manual (Parte 2) e caderno diário. Calculadora Gráfica	Manual (parte 2) e Calculadora Gráfica. Ficha de Trabalho.

METODOLOGIA DA AULA
Resolução das propostas do GAVE a pares. Resolução das tarefas sobre visualização de gráficos individualmente, com apresentação/discussão de uma resposta em grande grupo.

MOMENTOS DA AULA	
→ (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas	→ 9 minutos
→ (2) Tarefas sobre visualização de gráficos.	→ 20 minutos
→ (3) Resolução de Propostas do GAVE.	→ 30 minutos
→ (4) Resolução de tarefas do manual, envolvendo inequações.	→ 30 minutos
→ (5) Registo do TPC no quadro.	→ 1 minuto

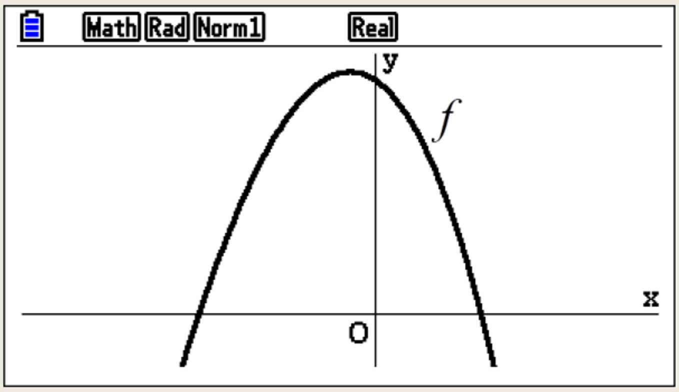
DESENVOLVIMENTO DA AULA	TEMPO PREVISTO	
→ **(1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.**	**9 minutos**	*10h20*
→ **(2) Tarefas sobre visualização de gráficos.** - O objetivo deste momento é que os alunos usem as capacidades da calculadora gráfica para responder ao desafio lançado. ***Nota**: Uma estratégia para encontrar uma boa janela de visualização pode passar pela consulta da tabela de valores da função.* **(2.1)** Será mostrado parte do gráfico $f(x)=x^3+32x^2+45x-450$ que parece uma parábola e questionarei os alunos sobre que função será aquela. Depois de esperar que	**20 minutos**	*10h29*

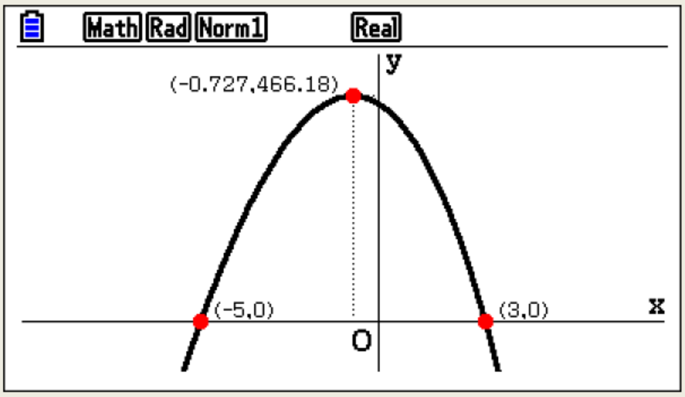
eles me respondam que é uma parábola, ser-lhes-á mostrado o mesmo gráfico, mas com as coordenadas dos zeros e do máximo assinaladas. Ao questionar-lhes novamente sobre que tipo de gráfico será aquele, espero que eles sejam capazes de dizer que uma parábola não pode ser porque a "abcissa do vértice não é o ponto médio dos zeros". Então, dar-lhes-ei a expressão da função e pedirei que descubram uma janela de visualização que lhes permita ver uma zona significativa do gráfico. O primeiro aluno a terminar irá ao computador ajustar a janela de visualização de acordo com o que fez. **(2.2)** Será mostrado parte do gráfico $g(x)=0{,}1x^4-1{,}4x^3-15{,}6x^2+76x-80$ que parece uma função cúbica e questionarei os alunos sobre que função será aquela. Depois de esperar que eles me respondam que é uma função cúbica, dar-lhes-ei a expressão da função e pedirei que descubram uma janela de visualização que lhes permita ver uma zona significativa do gráfico. O primeiro aluno a terminar irá ao computador ajustar a janela de visualização de acordo com o que fez.		
→ **(3) Resolução de Propostas do GAVE**. - Duas escolhas múltiplas saídas em testes intermédios e uma pergunta aberta com três funções: uma afim, uma quadrática e uma cúbica. Esta resolução será recolhida e será pedido aos alunos que justifiquem todos os raciocínios e cálculos, pois é importante que eles consigam escrever aquilo que pensaram. **(4)** O contradomínio da função pode gerar alguma confusão, mas que rapidamente se desfaz se eles esboçarem o gráfico e analisarem as informações que têm: se o ***a*** é positivo, a concavidade da parábola está voltada para cima; se apenas há um zero, então o vértice da parábola está no eixo xx. Logo, o contradomínio é [0,+∞[. **(5)** Aos alunos que manifestarem dificuldades, será sugerido que esbocem o gráfico de -*f(x)* e depois reparem em quantas unidades o devem transladar e em que sentido. ***Nota**: Em ambas as escolhas múltiplas, os alunos devem justificar a opção, explicando como pensaram.* **(6)** **(3.1)** Sendo paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, o seu declive é 1. A ordenada de B é 2, o que significa que houve uma translação da reta segundo o vetor (0,1). Logo, se a equação da bissetriz é y=x, a função h será dada por y=x+1. **(3.2)** Graficamente, os alunos devem conseguir dizer qual a parte da função que satisfaz a condição pedida, sendo que a dificuldade da alínea pode estar na identificação dos zeros. À partida, os alunos não deveriam ter tal dúvida porque foi estudada e trabalhada na análise das famílias de funções cúbicas, mas se tiverem, ser-lhes-á pedido que consultem a ficha e tentem indicar os zeros da função. Automaticamente ou com alguma indicação, os alunos deverão notar que, segundo a expressão da função, os zeros serão -1, 2 e 4, sendo a resposta é direta após observação do gráfico. **(3.3)** É possível que os alunos tenham dificuldades logo na interpretação da pergunta, não compreendendo de imediato o que lhes é pedido: As funções f e g intersectam-se no ponto A e no ponto B, sendo a abcissa de B, 1. Se no enunciado se diz que há um terceiro ponto de intersecção e que é maior que 1, então esse ponto estará à direita de B. Depois, pondo ambas as funções na calculadora, os alunos devem procurar uma janela de visualização que mostre o ponto pretendido. Em caso de dificuldade, ser-lhes-á sugerido que usem o zoom auto / zoom fit e, desde que o domínio contenha o 8, o zoom pedido mostrará o ponto.	**30 minutos**	*10h49*

→ **(4) Resolução de tarefas do manual, envolvendo inequações.** - A resolução de inequações ainda suscita muitas dúvidas nos alunos. Assim sendo, o momento final da aula será dedicado à resolução de tarefas propostas pelo manual que envolvam inequações, com vista ao esclarecimento de algumas dúvidas existentes. Os exercícios propostos farão parte da lista de trabalhos de casa e a escolha dos exercícios para a aula dependerá do tempo que faltar para o fim da aula.	**30 minutos**	*11h19*
→ **(5) Registo do TPC no quadro.** Para trabalho de casa os alunos devem resolver os exercícios 111, 113 e 114 (páginas 91 e 92), o desafio da página 85, a proposta 47 (página 124) e a proposta 58 (página 128).	**1 minuto**	*11h49*

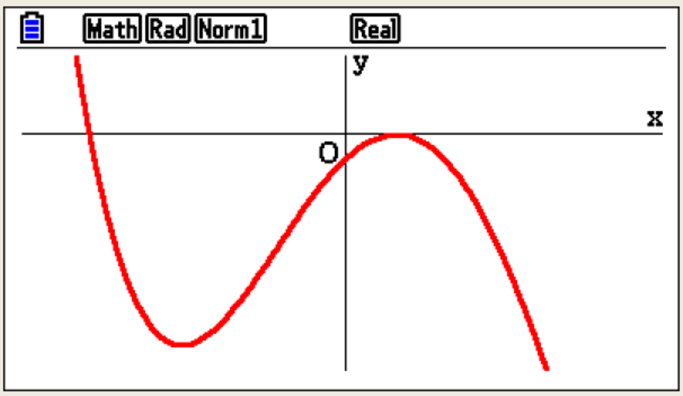
COMENTÁRIOS
→ TAREFAS COMPLEMENTARES: Devido aos ritmos de trabalho muito heterogéneos existentes nesta turma, caso algum aluno conclua as tarefas propostas antes do fim da aula, ser-lhes-ão sugeridos as tarefas para o trabalho de casa. O último momento da aula envolve a resolução de tarefas relacionadas com inequações, retiradas do manual e que farão parte dos TPC's a enviar.

Anexo 12: Aula 6, 18 Abril – Funções projetadas





$$f(x) = -x^3 - 32x^2 - 45x + 450$$



$$g(x) = 0{,}1x^4 - 1{,}4x^3 - 15{,}6x^2 + 76x - 80$$

Anexo 13: Autorização Enviada aos Encarregados de Educação

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação,

No âmbito do Estágio Curricular do Mestrado em Ensino de Matemática, da Universidade de Lisboa, estou a desenvolver um projeto de investigação intitulado “O papel da calculadora gráfica na atividade matemática com funções de alunos do 10.º Ano”. Para o desenvolvimento deste trabalho serão recolhidos dados em contexto de sala de aula na turma do(a) seu(sua) educando(a). Este projeto tem por objetivo compreender de que forma alunos do 10.º ano integram a calculadora gráfica na sua atividade matemática ao resolverem tarefas envolvendo funções. Para tal tentarei perceber qual o tipo de tarefas envolvendo funções que induz, indiretamente, alunos do 10.º ano a usar a calculadora gráfica na sua resolução, em que dimensões do uso da calculadora gráfica os alunos revelam estar a desenvolver o pensamento crítico e quais as principais dificuldades que alunos do 10.º ano têm ao trabalhar com a calculadora gráfica.

Serão objeto de análise os materiais produzidos em aula pelos alunos que poderão ser complementados com transcrições de entrevistas pós-aula. A recolha de dados envolverá a recolha documental dos materiais produzidos pelos alunos, podendo incluir a gravação em áudio de alguns momentos da aula.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem ao seu(sua) educando(a). Da participação neste trabalho não resultará qualquer prejuízo para o(a) aluno(a), podendo, pelo contrário, trazer-lhe benefícios na atividade da matemática.

Face ao exposto, solicita-se a autorização para a recolha de dados com o(a) seu(sua) educando(a).

Agradecemos antecipadamente a colaboração e atenção dispensada.

Com os melhores cumprimentos,

Lisboa, 2 de Abril de 2013

A investigadora	A professora de Matemática
___________________________	___________________________
(Ângela Santos)	(Ana Vieira)

- -

Autorizo o(a) meu(minha) educando(a) _____________________________________ n.º___ do 10.ºC, a participar na recolha de dados dirigida pela investigadora Ângela Santos, no âmbito de uma investigação sobre o papel da calculadora gráfica na atividade matemática dos alunos.

Lisboa, ___ de __________de 2013

O/A Encarregado/a de Educação

____