



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

**Departamento de Economia**

**Working Paper Nº 3/97**

**Utilização de Metodologias de  
Controlo Óptimo em Problemas  
de Política Económica**

*Maria Cândida Ferreira*



**Universidade Técnica de Lisboa**

**Lisboa  
1997**

## **Publicações Recentes do Departamento de Economia**

- 3/96 - Matrizes de contabilidade social para Portugal: período 1986-90 - Dr<sup>a</sup> Susana Santos
- 4/96 - Productive efficiency and quality competition - Prof. José Pedro Pontes
- 5/96 - A posição da economia portuguesa na "convergência beta" (ou nas "regressões entre países") - Dr. João Carlos Lopes
- 6/96 - Central places and development: an economic appraisal of the portuguese regional decentralization - Prof. José Pedro Pontes
- 7/96 - Retórica e comunicação para economistas - Prof. José Pedro Pontes
- 8/96 - Procura residencial de electricidade em Portugal - uma aplicação do teste dhf para a integração sazonal - Prof. José Zorro Mendes
- 1/97 - How long is the long time? A critical review of historical methods in economic research - Prof. Francisco Louçã
- 2/97 - Efficiency in Portuguese Stock Exchange Indexes: runs tests and BDS statistics - Dr. António Pedro Afonso e Dr. João Cláudio Teixeira

### ***Departamento de Economia***

Instituto Superior de Economia e Gestão (ISEG/"Económicas")  
da Universidade Técnica de Lisboa

R. Miguel Lupi, 20  
Tel: ++/351/1/3925942

1200 LISBOA  
Fax: ++/351/1/3966407

PORTUGAL  
e-mail: \_\_@iseg.utl.pt

Documento de Trabalho Nº 3/97  
Departamento de Economia  
Instituto Superior de Economia e Gestão  
Universidade Técnica de Lisboa

Working Paper Nr. 3/97  
Department of Economics  
Institute of Economics and Business  
Administration  
Technical University of Lisbon

## **UTILIZAÇÃO DE METODOLOGIAS DE CONTROLO ÓPTIMO EM PROBLEMAS DE POLÍTICA ECONÓMICA**

Maria Cândida Ferreira\*

Abril 1997

\* Professora Auxiliar  
Departamento de Economia  
Instituto Superior de Economia e Gestão  
R. Miguel Lupi, 20  
1200 Lisboa  
Tel.: 392.58.00  
Fax: 396.64.07

## RESUMO

Tendo presentes algumas preocupações expressas por autores como E. Malinvaud, E. Morin e R. Stacey que, no início da década de 90, questionam a metodologia seguida na investigação económica e defendem a necessidade de introdução de novos conceitos e metodologias já conhecidas noutras áreas científicas, o presente artigo questiona a possibilidade de utilização de metodologias de Controlo Óptimo em problemas da política económica.

A partir da formalização geral de um problema de controlo óptimo com aplicação à política económica, discutem-se algumas questões metodológicas que se colocam quando pretendemos aplicá-lo a problemas concretos da esfera económica, analisando as possibilidades de interpretação dos resultados obtidos e a flexibilização da própria metodologia, adaptando-a a problemas económicos específicos.

Baseando-se em propriedades comuns ao funcionamento de sistemas dinâmicos, as metodologias de controlo óptimo, podem revelar-se muito úteis na análise de problemas económicos que impliquem decisões sequenciais, num contexto de maior ou menor incerteza e, ainda, na análise da complexidade da evolução dos próprios sistemas e das características do seu comportamento que muitas vezes se apresenta caótico.

## ABSTRACT

Having in mind the questions presented by some authors like E. Malinvaud, E. Morin and R. Stacey, in the beginning of the 90 years, namely, the questions about the methodology of the economic research and the necessity of the introduction of new concepts and methodologies which have been used in other scientific areas, we analyse in this paper the possibilities of application of Optimal Control methodologies to problems of economic policy.

We begin with the formalization of a general problem of optimal control applied to economic policy and analyse some methodological problems which come on when we try to apply them to some concrete problems of the economic area, and then we discuss the possibilities of interpretation of the results and the flexibility of the methodology, which can be adapted to specific economic problems.

The methodologies of optimal control are based on the common properties of the dynamic systems and they can be very useful in the analysis of the economic problems which imply sequential decisions, in a context of uncertainty, and even in the analysis of the complexity of the evolution of the economic systems and their performance, which sometimes seems to be rather chaotic.

# UTILIZAÇÃO DE METODOLOGIAS DE CONTROLO ÓPTIMO EM PROBLEMAS DE POLÍTICA ECONÓMICA (\*)

Cândida Ferreira(\*\*)

## 1. INTRODUÇÃO

No início da década de 90 E. Malinvaud, numa obra de reflexão sobre as Vias da Investigação Macroeconómica (1991) questiona a metodologia seguida na investigação actual, e as hipóteses que continuamos a formular para o funcionamento dos sistemas económicos, sublinhando, nomeadamente, que

1º) nunca como agora tivemos tantos recursos à nossa disposição, tanta informação estatística e tanta possibilidade de confronto dos resultados obtidos com as teorias vigentes, mas

2º) o incremento da actividade de investigação tem, talvez paradoxalmente, conduzido ao aumento da desconfiança sobre os princípios seguidos, sobre os métodos e metodologias adoptados e, até, sobre as próprias teorias.

---

(\*) O presente artigo baseia-se na investigação realizada na Tese de Doutoramento "Estabilização e controlo dos sistemas económicos - contribuição para uma análise crítica das metodologias de controlo óptimo" defendida no ISEG em Julho de 1996.

(\*\*) Prof<sup>a</sup>. Auxiliar do ISEG.

São preocupações e paradoxos que também se manifestam noutras áreas científicas e que contribuem para a introdução de novos conceitos filosóficos, como o de "Pensamento Complexo", apresentado por E. Morin (1991), ao mesmo tempo que defende o desenvolvimento da Teoria Sistémica que teria entre outras a vantagem de:

*" se situar a um nível transdisciplinar, que permite simultaneamente conceber a unidade da ciência e a diferenciação das ciências, não apenas segundo a natureza material do seu objecto, mas também segundo os tipos e as complexidades dos fenómenos de associação/organização. Neste último sentido o campo da teoria dos sistemas é, ... de uma amplitude que se estende a todo o cognoscível"*(1).

Na mesma altura, dedicando-se ao estudo do "Caos Científico", também Stacey defende que

*"... existe um padrão perfeitamente regular na sequência de comportamentos que todas as regras de feedback não linear da mesma categoria seguem, independentemente da sua origem, gases, reacções químicas, insectos a reproduzirem-se num arbusto, mercados de petróleo ou organizações empresariais. Todas elas passam por fases de estabilidade, ciclos fixos, caos e crescimento explosivo, à medida que o parâmetro de controlo é aumentado de forma a tornar os mecanismos mais sensíveis. Somos capazes de identificar os mecanismos de feedback, bem como somos capazes de prever os padrões de comportamento que seguem, e mesmo quando o caos vai ocorrer"* (2)

---

(1) MORIN, E. (1991), pag. 25

(2) STACEY,R. 1991, pag.228.

Estas preocupações com a possível unidade dos conhecimentos científicos, com a utilização e transposição de resultados obtidos no estudo de determinados sistemas, para sistemas de outro tipo mas, talvez, com propriedades semelhantes, não são novas, embora continuem a permanecer actuais.

A partir da teoria dos sistemas e tendo por base as propriedades dinâmicas que os caracterizam (nomeadamente a controlabilidade e estabilidade), desenvolvem-se, primeiro em problemas de engenharia, técnicas matemáticas de CONTROLO ÓPTIMO.

Os problemas de Controlo Ótimo apresentam métodos de formulação e regulação de sistemas dinâmicos, através da definição e aplicação de regras ou mecanismos de carácter mais ou menos automático.

Matematicamente, a resolução de um problema deste tipo, parte dos resultados conhecidos sobre as possibilidades de utilização de sistemas de equações às diferenças ou diferenciais para representação do funcionamento dos sistemas dinâmicos e procura a maximização, ou minimização, de objectivos previamente definidos através da definição de regras de controlo a introduzir no sistema, quando ele se desvia da trajectória pretendida.

A aplicação das técnicas de Controlo Ótimo a problemas da área económica, nomeadamente na definição e possível avaliação das medidas de política económica inicia-se pelos finais dos anos 60 e desenvolve-se na década de 70 com a contribuição, entre outros, de autores como M.Aoki, Pitchford, Preston, Buitter, Kamien, Schwartz e G. Chow, com a defesa da utilização de modelos determinísticos ou estocásticos e a especificação das metodologias de cálculo adequadas.

No entanto, como técnica de resolução matemática de problemas, com carácter mais ou menos automático, o Controlo Ótimo levanta, muitas questões sobre a sua possível aplicação a áreas especificamente económicas.

Nas próximas páginas começaremos por apresentar a formulação geral dos problemas de controlo óptimo, que poderão ser utilizados na definição e análise de medidas de política económica, para depois nos debruçarmos sobre algumas questões metodológicas que eles suscitam e, por fim, salientarmos as possibilidades de interpretação dos resultados obtidos ao nível da esfera económica e, concretamente, à política económica.

## 2. FORMALIZAÇÃO GERAL DO PROBLEMA

A formalização geral de um problema de controlo óptimo com aplicação à política económica poderá ser, em termos discretos e deterministas:

$$\text{Min } W = 1/T \left[ \sum_0^T (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t) \right]$$

s.a:

$$y_t = A y_{t-1} + C x_t + b_t$$

com  $y_0 = \text{conhecido}$

sendo

$y_t$  = vector das  $n$  variáveis endógenas que se consideram relevantes para caracterizar o estado do sistema, onde, normalmente, se incluem as  $m$  variáveis objectivo e os  $r$  controlos que são endogeneizados

$a_t$  = vector dos valores que os decisores consideram desejáveis para essas mesmas variáveis endógenas

$K_t$  = matriz diagonal, semi-definida positiva, de dimensão igual aos vectores  $y_t$  e  $a_t$ , com as ponderações que os decisores atribuem a cada uma das variáveis objectivo e, eventualmente, também aos controlos

$x_t$  = vector dos  $r$  instrumentos de política (controlos)

$A$  e  $C$  = matrizes de coeficientes constantes

$b_t$  = vector das variáveis exógenas não sujeitas a controlo

A resolução do problema consistirá na determinação de regras de controlo (funções de reacção) que se admitem do tipo:

$$x_t = G_t y_{t-1} + g_t$$

onde:

$G_t$  = matriz de dimensão  $r \times n$  dos valores que indicam a forma possível de actuação dos controlos para conduzir a uma melhor aproximação dos objectivos pretendidos e

$g_t$  = vector  $r \times 1$  que representa a evolução autónoma das variáveis de controlo.

A introdução desta função de reacção no sistema anterior conduz-nos à expressão que define a evolução do sistema sob efeito dos controlos

$$y_t = (A + CG_t) y_{t-1} + (b_t + Cg_t)$$

e permite-nos obter o valor de  $y_t$  a introduzir na função objectivo e minimizar o valor da perda ( $W$ ) devida aos desvios destes

valores em relação aos objectivos (  $a_t$  ) que previamente se definem como desejáveis.

A partir desta formalização geral vamos começar por discutir algumas questões que se colocam quando partimos de um modelo económico concreto e procuramos utilizá-lo na definição e avaliação de medidas de política económica.

### 3. QUESTÕES METODOLÓGICAS

A aplicação de metodologias de controlo óptimo a problemas concretos da esfera económica, nomeadamente no âmbito da política económica, suscitam, pelo menos a discussão de três questões relevantes.

A primeira destas questões prende-se com as características do próprio modelo utilizado para representação do funcionamento do sistema económico que deverá satisfazer as condições que garantem a sua *controlabilidade*.

Na verificação desta propriedade exige-se uma transformação matemática do sistema, representando-o em *espaço de estados*. Mas, como a representação em espaço de estados não é uma só, sendo possíveis várias formalizações, teremos, previsivelmente, algumas dificuldades, não só ao nível da calculatória, como também, na interpretação dos resultados.

A segunda questão refere-se ao tipo de função objectivo escolhida e com o papel determinante das *ponderações* atribuídas aos objectivos (e, eventualmente também aos controlos) através da especificação dos valores de uma matriz de ponderações (K) que se inclui na função objectivo.

A terceira questão que abordaremos será a possibilidade de inclusão do risco e incerteza inerentes a qualquer processo de decisão e, naturalmente, também na política económica, que conduziu à formulação de modelos de controlo óptimo estocástico e ao desenvolvimento de metodologias para a sua resolução. São metodologias que exigem algum esforço de formulação e nos cálculos necessários para a resolução dos problemas e que nem sempre conduzem a resultados de imediata interpretação económica.

### 3.1. CONTROLABILIDADE DO SISTEMA ECONÓMICO E REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS

A controlabilidade de um sistema dinâmico define-se, em geral, como a possibilidade de se determinar uma sequência de controlos capazes de, num intervalo de tempo finito, conduzirem o sistema a partir de uma situação inicial para outra situação final que se considera melhor do que a que o sistema autonomamente atingiria.

Para sistemas estáticos esta propriedade foi analisada por Tinbergen e deu origem à conhecida condição de Tinbergen - o sistema só será controlável se o número de controlos linearmente independentes for igual ou superior ao número de objectivos linearmente independentes.

A sua verificação com sistemas dinâmicos foi desenvolvida, sobretudo, por Aoki (1976, 1987) junto com Canzoneri (1979) e exige que os sistemas sejam de primeira ordem.

Para a transformação de um sistema de uma ordem qualquer num sistema de primeira ordem Aoki propõe que se utilize a sua representação em espaço de estados. Para o conseguir, define um vector de variáveis intermédias entre os inputs e os outputs do sistema, as variáveis de estado, que resultam de uma mera transformação matemática das variáveis do sistema e que funcionam como a "memória" desse sistema, ou seja, contêm toda a informação necessária para definir o funcionamento do sistema.

Com uma representação deste tipo, isto é, incluindo no vector de estado toda a informação sobre a evolução do sistema, Aoki especifica e define as condições matemáticas para a verificação de três conceitos de controlabilidade:

a) a possibilidade de se definirem sequências de controlos, capazes de, num intervalo de tempo finito, conduzirem o sistema desde um estado inicial para um estado final (controlabilidade estado);

b) a possibilidade de, a partir também de um ponto inicial do sistema, se conseguirem atingir resultados desejáveis para o output do sistema (controlabilidade output);

c) a possibilidade de, não só se atingir o ponto desejado, como de, nos momentos posteriores, o sistema não se afastar demasiado dele (controlabilidade trajectória).

Em problemas de controlo óptimo aplicados à política económica utilizam-se normalmente sistemas dinâmicos do tipo que apresentámos anteriormente

$$y_t = A y_{t-1} + C x_t + b_t$$

onde se admite que  $y_t$  caracteriza o estado do sistema mas, definindo-se esse estado apenas com as variáveis objectivo da

política económica e os controlos escolhidos para os obter que são endogeneizados.

Existindo, ainda, um vector  $b_t$  que, como dissemos, inclui as variáveis exógenas, não sujeitas a qualquer controlo, poderão surgir algumas dificuldades na verificação da controlabilidade do sistema, nomeadamente:

a) dificilmente se verificará a controlabilidade estado do sistema, tal como Aoki a define, uma vez que agora o estado não resume toda a história passada do sistema (faltam os valores de  $b_t$ ), e, quando os controlos são definidos pela resolução do sistema, a sua endogeneização traduz-se na inclusão de linhas de zeros na matriz  $A$ , ou seja, na impossibilidade de se atingirem valores previamente definidos como desejáveis para as variáveis de controlo;

b) a presença do vector  $b_t$  poderá ainda dificultar que se atinjam exactamente os valores previamente definidos para os objectivos (controlabilidade output). Mas, desde que o sistema inicial não seja muito instável (matematicamente, se os valores próprios da matriz  $A$  não forem todos superiores à unidade) não deverá ser impossível a obtenção de regras (sequências) de controlos que actuem sobre o sistema e o conduzam para os objectivos pretendidos. A influência previsível da inclusão dessas regras sobre a evolução do sistema poderá, aliás, também ser analisada com o cálculo prévio dos valores próprios das matrizes  $(A+CG_t)$  que não deverão exceder a unidade para as soluções serem convergentes;

c) nas condições da alínea anterior, isto é, desde que o sistema inicial não seja muito instável e se determinem regras de controlo que não conduzam a soluções exposivas ou muito divergentes, apesar da presença de variáveis exógenas não sujeitas a qualquer

controle e da evolução autónoma dos próprios controles (vector  $g_t$ ), podemos também admitir que, a priori, o sistema não só se aproximará dos valores pretendidos para os objectivos como, posteriormente, não tenderá a afastar-se muito deles (controlabilidade trajectória).

Com sistemas dinâmicos questiona-se ainda a necessidade de se cumprir ou não a regra que Tinbergen definiu para os sistemas estáticos. Em muitas aplicações concretas verifica-se que não é necessário cumpri-la e que, devido às interacções entre os próprios controles e à reacção dinâmica dos sistemas sob a sua influência, se torna possível controlá-los com um número de instrumentos independentes inferior ao número de objectivos independentes (1).

### 3.2. FUNÇÃO OBJECTIVO

A verificação da controlabilidade do sistema confirma apenas a possibilidade de se virem a determinar regras de controle capazes de actuarem sobre o sistema e o conduzirem para os objectivos previamente definidos.

Para definição dessas regras de controle que permitirão resolver o problema e escolher qual delas conduz ao melhor resultado teremos que introduzir uma função objectivo.

---

(1) Para verificação do número mínimo de controles necessários para controlar um sistema dinâmico desenvolveram-se metodologias a partir do cálculo dos multiplicadores dinâmicos (Friedman, 1975) ou com a decomposição do sistema em equações independentes (Petit, 1990).

As funções objectivo mais utilizadas nos problemas de controlo óptimo aplicados à política económica são do tipo da que anteriormente apresentámos

$$\text{Min } W = 1/T \left[ \sum_0^T (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t) \right]$$

Com esta formulação específica, o valor mínimo desta função quadrática, que traduz o resultado do problema, dependerá de três ordens de grandezas, que são:

- 1) os valores obtidos para as variáveis incluídas no vector de estado  $y_t$  após a introdução da regra de controlo
- 2) os valores previamente definidos para os objectivos a atingir  $a_t$
- 3) as ponderações atribuídas a cada um dos objectivos  $e$ , eventualmente também aos controlos através da matriz diagonal  $K_t$ .

Haverá, assim, que ter algum cuidado na interpretação do resultado obtido e na escolha da regra de controlo que se considera mais adequada.

Por outro lado, são previsíveis algumas dificuldades na determinação dos valores dos objectivos. Mesmo admitindo que o modelo consegue incluir os objectivos mais relevantes para a política económica em determinado período, raras vezes as autoridades decisoras apresentarão os objectivos por que se regem de forma clara e quantificada <sup>(1)</sup> obrigando-nos a escolher valores

---

(1) Em Chow (1981, cap. 16) encontramos uma metodologia de resolução que permite obter não só as regras de controlo como os próprios objectivos da política económica que também são considerados como incógnitas do problema.

que se pretendem com alguma dose de realismo mas, muitas vezes são arbitrários.

Ao lidarmos com valores hipotéticos estamos, obviamente, a aumentar a incerteza e a influenciar, por vezes de forma determinante, o valor do resultado do problema.

A mesma situação se verifica com os valores das ponderações incluídas na matriz K, escolhidas também de forma arbitrária e que irão influenciar o resultado do problema.

Bastará pensar na diferença entre a situação de se considerar uma matriz K constante ao longo de todo o intervalo de controlo, ou, inversamente, uma matriz variável nesse intervalo. E que tipo de variação? Valores decrescentes, por exemplo, significarão que se está a privilegiar os resultados no curto prazo, em detrimento dos valores obtidos mais para o fim do intervalo. Inversamente, com ponderações crescentes, centraremos as nossas preocupações no final do intervalo de controlo.

Em qualquer situação, a escolha das ponderações da matriz corresponderá também a uma hierarquia atribuída aos próprios objectivos (e, como dissemos, eventualmente também aos controlos).

Com tantas escolhas arbitrárias, facilmente se conclui que, mais do que um método de definição de medidas económicas a aplicar a um sistema concreto, este tipo de metodologias nos conduzem a análises e ensaios de resultados previsíveis que nos ajudarão a conhecer melhor o sistema económico e a sua previsível reacção a medidas específicas.

### 3.2. FORMULAÇÃO ESTOCÁSTICA

A consciência da arbitrariedade e, sobretudo do risco e incerteza inerentes a qualquer processo de decisão e, naturalmente que também na política económica, conduziu ao desenvolvimento de metodologias de cálculo de problemas de controlo óptimo estocástico.

Em termos estocásticos pode-se utilizar uma formulação do tipo

$$\text{Min } E W = E \frac{1}{T} \left[ \sum_0^T (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t) \right]$$

s.a:

$$y_t = A y_{t-1} + C x_t + b_t + u_t$$

com  $y_0 = \text{conhecido}$

sendo  $E = \text{valor esperado da perda (W)}$

$u_t = \text{perturbações aleatórias que actuam sobre o sistema}$

O objectivo do problema será, agora, minimizar o valor esperado  $E$  da perda resultante da diferença entre os valores obtidos para as variáveis incluídas no vector de estado  $y_t$  e os valores que definimos previamente como objectivos a atingir para essas mesmas variáveis  $a_t$ , diferença essa que, tal como na situação determinista, será valorizada pelas respectivas ponderações atribuídas aos diversos objectivos através dos valores definidos para a matriz  $K_t$ .

A minimização da função objectivo continua sujeita às restrições impostas pelo modelo escolhido para representar o funcionamento do sistema económico, onde agora se inclui um novo vector,  $u_t$ , onde se apresentam as perturbações aleatórias que actuam sobre o

sistema, matematicamente, seria desejável que fosse um vector de média, independente de  $u_s$ , para  $t \neq s$ , e com uma matriz de covariâncias que podemos designar por  $V$ .

A resolução consistirá, também, na determinação de uma regra de controlo do tipo da utilizada na situação determinista

$$x_t = G_t y_{t-1} + g_t$$

regra essa que se incluirá no sistema, e fará com que ele prossiga com uma trajectória definida por

$$y_t = (A + CG_t) y_{t-1} + (b_t + Cg_t) + u_t$$

A resolução do problema, neste caso, terá que ter em conta a presença dos factores aleatórios representados pelo vector  $u_t$  e terá que passar pela análise da sua possível influência sobre a evolução do sistema.

Uma forma de o conseguir será a partir dos resíduos obtidos na estimação do modelo e da respectiva matriz de variâncias-covariâncias. Se os resíduos forem independentes e identicamente distribuídos poderão ser utilizados na determinação da distribuição de probabilidades e fornecer os valores representativos dos choques que se admitem sobre o sistema (1).

Assim, a resolução do problema em termos estocásticos exigirá que se simulem  $N$  situações, seguindo a distribuição de probabilidades representativa da evolução dos resíduos, sendo  $N$  um número suficientemente elevado para não influenciar, por si só, os resultados.

---

(1) Metodologia sugerida e utilizada, entre outras obras, em Bryant e alii editores (1993).

Conhecidos esses resultados, comparam-se as soluções respectivas para concluir sobre a possível influência dos choques aleatórios sobre o sistema.

Claro que, na prática, o processo se pode revelar complicado, não só porque a priori é difícil admitir que os resíduos obtidos na estimação do modelos sejam independentes e identicamente distribuídos como, mesmo que se conseguisse ultrapassar essa dificuldade, nomeadamente pela escolha de uma hipótese de distribuição de probabilidades, teremos sempre que contar com o cálculo do número N de simulações que, como dissemos, terá que ser bem elevado.

Outras metodologias utilizadas para a resolução de problemas deste tipo, nomeadamente as que se baseiam na obra de G. Chow, sugerem a decomposição do problema e da respectiva função objectivo em duas partes:

1) uma parte determinista

$$\text{Min } W_1 = 1/T \left[ \sum_0^T (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t) \right]$$

s.a:

$$y_t = A y_{t-1} + C x_t + b_t$$

com

$$y_0 = \text{conhecido}$$

2) e outra parte estocástica

$$\text{Min } E W_2 = E 1/T \left[ \sum_0^T y_t^{*'} K_t y_t^* \right]$$

s.a:

$$y_t^* = A y_{t-1}^* + C x_t^* + u_t$$

com  $y^*_0 = \text{conhecido}$

sendo  $y^*_t$  a solução óptima do problema determinista e  $x^*_t$  os respectivos controlos óptimos.

Esta decomposição do problema em duas partes baseia-se no Princípio do "Equivalente Certo" (*Certainty Equivalence*).

Princípio segundo o qual, num problema estocástico do tipo do anterior, ou seja, com uma função objectivo quadrática e um modelo linear para representar as restrições impostas pelo funcionamento do sistema económico, a regra de controlo obtida para o problema em termos deterministas coincide com a regra de controlo do problema estocástico.

Para que tal se verifique será, no entanto, necessário que a incerteza seja de tipo aditivo e que o número de controlos não seja inferior ao número de objectivos (ou, mais precisamente, ao número de elementos não nulos da matriz de ponderações  $K_t$ ) situação em que a trajectória óptima ( $y^*_t$ ) do problema determinista coincidirá exactamente com os objectivos e, conseqüentemente, a mínima perda esperada ( $W_1$ ) será nula.

A perda esperada da parte estocástica ( $W_2$ ) dificilmente será nula, pois o sistema estará sujeito aos choques aleatórios e, para quantificar esta perda será também necessário conhecer a matriz  $V$  das variâncias e covariâncias de  $u_t$ , ou, pelo menos, de uma sua estimativa a partir dos valores obtidos com a estimação do modelo, utilizando-se a fórmula

$$\begin{aligned} \text{Min } E W_2 &= E 1/T \left[ \sum_0^T y^{*t}{}' K_t y^{*t} \right] = \\ &= \text{Min } E W_2 = E 1/T \left[ \sum_0^T \text{tr } K_t V_t \right] \end{aligned}$$

A principal limitação à verificação do Princípio do "Equivalente Certo" diz respeito ao tipo de incerteza possível - de tipo aditivo - o que impede a inclusão da incerteza sobre o valor dos coeficientes do modelo.

Entretanto, a imposição sobre o número de controlos não poder ser inferior ao número de objectivos, recorda a regra de Tinbergen sobre a controlabilidade dos sistemas. Os sistemas dinâmicos, como dissemos anteriormente, poderão ser controláveis com um número de controlos inferiores mas, nesse caso, segundo o Princípio do "equivalente certo" não será possível garantir que a solução da parte determinista do problema seja óptima.

É uma conclusão previsível, se tivermos presente a verificação da controlabilidade dos sistemas segundo as definições de Aoki que, como dissemos, inclui toda a informação sobre a evolução do sistema no vector de estado.

Um sistema sujeito à influência de factores exógenos não sujeitos a qualquer controlo e, por maioria de razões, se admitirmos a influência de factores aleatórios, dificilmente será um sistema que respeite as condições definidas para a controlabilidade estado.

Mas, mesmo que não seja possível a condução do sistema exactamente para os valores definidos para os objectivos, poderá tentar-se a sua aproximação e analisar-se a sua previsível evolução sob o efeito dos vários controlos.

As dificuldades e cuidados inerentes à utilização deste tipo de metodologias quando procuramos aplicá-las a problemas da política económica não anularão a sua possível utilidade e potencialidades inerentes à sua aplicação, potencialidades que procuraremos sublinhar no próximo ponto.

#### 4. UTILIZAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Apesar das dificuldades apontadas nos pontos anteriores e de muitas outras por vezes só sentidas perante a resolução de um problema de controlo óptimo concreto, algumas razões justificam o desenvolvimento deste tipo de metodologias.

São vantagens inerentes à utilização de modelos matemáticos para formalização das questões económicas - busca de maior rigor e transparência no equacionar dos problemas e, se possível, também na sua solução.

No caso do controlo óptimo e, concretamente, da sua aplicação à política económica procura-se analisar e quantificar, as questões essenciais em problemas de política económica, nomeadamente:

- 1) a escolha dos objectivos mais relevantes em determinado período de tempo - variáveis que, como vimos, se incluirão no vector de estado do sistema ( $y_t$ );
- 2) a quantificação dos valores desejáveis para esses mesmos objectivos ( $a_t$ ) - valores que, como dissemos, nem sempre são explícitos nas intenções das autoridades decisoras;
- 3) a hierarquização desses mesmos objectivos - ponderações atribuídas na matriz  $K_t$  da função objectivo;

- 4) a existência de controlos capazes de influenciarem o sistema na obtenção desses mesmos objectivos - verificação da controlabilidade do sistema;
- 5) formulação dessas políticas - regras de controlo a adoptar;
- 6) avaliação dos resultados a que conduzem - valor da mínima perda esperada que se obtém pelo cálculo da função objectivo;
- 7) comparação de hipóteses alternativas, quer dos instrumentos (outras regras de controlo) quer das ponderações atribuídas às variáveis incluídas no vector de estado (objectivos e controlos) através dos valores da matriz  $K_t$ ;
- 8) consideração da incerteza inerente a todo o processo de decisão e análise dos seus possíveis resultados - metodologias de resolução dos problemas em termos estocásticos.

Gostaríamos ainda de sublinhar que uma das principais vantagens da utilização deste tipo de metodologias poderá ser a possibilidade da sua adaptação a problemas concretos, com um modelo já estimado e objectivos e controlos escolhidos tendo por base a situação económica real.

Adaptações que poderão passar pelo teste de hipóteses de variação de valores dos objectivos e, sobretudo, dos controlos e das respectivas ponderações a inserir na matriz  $K$ , o que nos permitirá retirar conclusões não só sobre o funcionamento do sistema económico, como da sua sensibilidade à actuação dos diversos controlos.

A dependência dos resultados em relação a valores previamente definidos, com destaque para as ponderações atribuídas através da matriz K, poderá ser explorada e desenvolvida, testando-se a resposta do sistema a diferentes prioridades ao nível dos objectivos escolhidos (isoladamente ou em conjunto com outros) e analisando a sua possível compatibilidade, questionando-se ainda as melhores escolhas para os controlos a inserir no sistema.

Ponderações distintas ao nível da referida matriz K poderão ser ainda utilizadas diferenciando análises de resultados a obter ao longo do intervalo de controlo, nomeadamente, na distinção de resultados a obter no curto ou no mais longo prazo.

Assim, como atrás já referimos, poderemos talvez concluir que a utilização deste tipo de metodologias, não podendo nem devendo ser entendida como método de definição de medidas como as que caracterizam a política económica, nem conseguindo nunca eliminar o risco e incerteza a elas inerentes, poderá, pelo menos, contribuir para um melhor conhecimento do próprio sistema e das suas respostas previsíveis à actuação dos diversos controlos, ao longo de um determinado intervalo.

## 5. NOTAS CONCLUSIVAS

Ao referirmos algumas das questões metodológicas e as dificuldades que se colocam quando pretendemos utilizar técnicas de controlo óptimo aplicadas a problemas de decisão sequencial, nomeadamente ao nível da política económica, pretendemos, sobretudo, sublinhar a necessidade referida por Malinvaud, de se desenvolver a teoria sistémica e a possível utilidade dos resultados por ela obtidos, alargando-os a outras áreas do conhecimento.

Tivemos ainda presente o aspecto defendido, também no início da nossa década, por autores como Stacey que, explicitamente refere que:

*"Os modelos racionais são, em muitos aspectos, tão deterministas como a física tradicional. Existem regras e procedimentos que determinam o equilíbrio, do mesmo modo que existem leis Newtonianas que estabelecem o equilíbrio entre os corpos naturais. Quando esse determinismo falha, os modelos racionais refugiam-se nas leis da probabilidade, semelhantes às que são encontradas na teoria de evolução darwiniana. Tal como os organismos, na natureza usam a mutação genética de uma forma gradual, também as organizações usam métodos graduais por tentativas e erros para lidarem com níveis muito altos de incerteza". (1)*

É neste sentido que afirmamos que as metodologias de controlo óptimo, baseando-se em propriedades comuns ao funcionamento de vários sistemas dinâmicos, poderão também ser aplicadas na análise de problemas que impliquem a decisão, num contexto de maior ou menor incerteza, mas que nunca poderão ser entendidas como método para se obter a resposta, em termos totalmente

---

(1) STACEY, R. (1991) pag. 164-165.

deterministas, do melhor procedimento a adoptar quando se pretende actuar ao nível da política económica.

Entendido apenas como instrumento de trabalho e sem nunca pretender ser mais do que isso, o controlo óptimo, apesar das limitações que apontámos e de outras mais ou menos discutidas (1), poderá revelar a sua utilidade no aprofundar do estudo da complexidade política económica, no sentido defendido por Morin, e tem merecido o desenvolvimento de várias metodologias, nomeadamente com a utilização de modelos não lineares, a introdução de funções objectivo não quadráticas e da incerteza de tipo não aditivo que permite questionar os próprios coeficientes do modelo (2).

Por outro lado, o Controlo Óptimo não se dirige especificamente a decisões no campo da política económica. A utilização da Programação Dinâmica como método de resolução de problemas de Controlo permite a sua aplicação a qualquer problema que se caracterize por um processo de decisão de natureza sequencial (3).

Os problemas de controlo óptimo e as metodologias que permitem desenvolver poderão vir ainda a revelar-se úteis, nomeadamente, se pretendermos aprofundar o estudo da complexidade dos

---

(1) Uma das mais conhecidas é a célebre crítica de Lucas que questiona a possibilidade de utilização de modelos econométricos na avaliação das políticas económicas e analisa o efeito das decisões do sector privado da economia (Lucas, R.E., 1972, 1976); posteriormente, Kydland e Prescott apontarão a inconsistência temporal dos programas de controlo da política económica, insistindo na necessidade de se aprofundar o estudo das flutuações económicas e dos choques provocados pela introdução da tecnologia mas, sem intervenção directa das autoridades decisoras (KYDLAND, F. E. e PRESCOTT, E. C. 1977 e 1980)

(2) Merecendo especial destaque as contribuições ao nível da Teoria do Controlo Óptimo aplicado à política económica de autores como M. Aoki e G. Chow, sobretudo na década de 70, de Syalo e alii (1983), Ryley (1987) e Briant e alii (1993).

(3) Potencialidades sublinhadas em obras clássicas sobre as possíveis aplicações das técnicas de Controlo Óptimo à esfera económica, sendo de sublinhar, entre outras as de Bellman e Dreyfus (1965), Hermer (1972), Miller (1979), Bennoussan e alii (1980), Seierstad e Sydsaeter (1987).

sistemas dinâmicos que muitas vezes apresentam características de comportamento que se designa por "caos científico" reconhecendo que "a ordem gera a desordem", (Stacey, 1991, cap.7) ou seja

1) que os movimentos simples de controlo produzem padrões de comportamento surpreendentemente complexos, sendo alguns dos quais inerentemente aleatórios e

2) que são precisas apenas mudanças muito pequenas no parâmetro de controlo, para alterar o comportamento do sistema ao longo do tempo, fazendo com que ele passe de ciclos perfeitamente previsíveis para outros de padrões aleatórios.

E ainda nesta linha, reafirma-se a utilidade das metodologias de controlo óptimo que poderão contribuir para se provar se será verdade que

*"As regras que geram o comportamento caótico são perfeitamente deterministas. Podem ser identificadas e medidas. Por isso, é possível, pelo menos em princípio, identificar as condições que podem levar o comportamento de um sistema a tornar-se caótico. Podemos prever a ocorrência do próprio caos, embora nunca se consiga prever o caminho específico que um sistema caótico vai seguir".<sup>(1)</sup>*

As possíveis semelhanças no comportamento dos sistemas de várias áreas que, como referimos, estão na origem das próprias metodologias de controlo óptimo e que reencontrámos nas preocupações de autores como Malinvaud, Morin e Stacey só poderão ser demonstradas num processo de aprendizagem sobre as propriedades dos sistemas e da sua evolução ao longo do tempo - aprendizagem que, só por si, nos parece justificar a aplicação e desenvolvimento de métodos e metodologias de cálculo que se baseiem nos mecanismos de controlo óptimo.

---

(1) STACEY, R. 1991, pag. 228

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AOKI, M. (1976) - Optimal control and System Theory in Dynamic Economic Analysis - North-Holland.
- AOKI, M. (1987) - State Space Modelling of Time Series - Springer-Verlag.
- AOKI, M. e CANZONERI, M. (1979) - "Sufficient conditions for control of target variables and assignment of instruments in dynamic macroeconomic models", International Economic Review, vol. 20, Nº 3, pag. 605-616.
- BELLMAN, R. E. (1971) - Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes, Academic Press.
- BELLMAN, R. E. e DREYFUS, S. E. (1965) - La Programmation Dynamique et ses Applications, Dunod (tradução de Applied Dynamic Programming, Princeton University Press).
- BENSOUSSAN, A., KLEINDORFER, P e TAPIERO, C.S. (1980) - Applied Stochastic Control in Econometrics and Management Science, North-Holland Publishing Company.
- BRYANT, R.C., CURRIE, D.A., FRENKEL, J.A., MASSON, P.R. e PORTES, R.- editores (1989) - Macroeconomic Policies in an Interdependent World, The MIT Press.
- BRYANT, R. C., HOOPER, P. e MANN, C.L.- editores (1993) - Evaluating Policy Regimes - New Research in Empirical Macroeconomics, The Brookings Institution.
- BUITER, W. e GERSOVITZ, M. (1984) - "Controllability and the theory of economic policy", Journal of Public Economics, vol. 24, Nº1, pag. 127-129.
- CALVO, G.A. (1978) - "On the Time Consistency of Optimal Policy in a Monetary Economy", Econometrica, vol. 46, Nº 6, pag. 1411-1428.
- CHANG, F-R. (1988) - "The Inverse Optimal Problem: A Dynamic Programming Approach", Econometrica, vol. 56, Nº 1, pag. 147-172.
- CHOW, G. (1975) - Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, John Wiley and Sons.
- CHOW, G. (1981) - Econometric Analysis by Control Methods, John Wiley and Sons.
- CRAVEN, B.D. (1978) - Mathematical Programming and Control Theory, Chapman and Hall, Halsted Press Book (John Wiley and Sons).
- DAVIS, M.H.A. (1977) - Linear Estimation and Stochastic Control, Chapman and Hall, Halsted Press (John Wiley and Sons).
- FERREIRA, C. (1989) - O Controlo Ótimo em Economia, Dissertação de Mestrado, ISEG.
- FERREIRA, C. (1994) - Propriedades dinâmicas de um modelo simples de política económica, Actas da Conferência do CEMAPRE, ISEG.
- FERREIRA, C. (1996) - Estabilização e Controlo dos Sistemas Económicos - contributo para uma análise crítica das metodologias de controlo ótimo Tese de Doutoramento, ISEG.
- FRIEDMAN, B.M. (1975) - Economic Stabilization Policy: Methods in Optimization, North-Holland Publishing Company.

- HELMER, J-Y. (1972) - La Commande Optimale em Économie - Applications à l'économie et à la recherche opérationnelle du calcul des variations, du principe de Pontryagin et de la programmation dynamique, Dunod.
- HOLLY, S., RUSTEM, B. e ZARROP, M.B. - editores (1979) - Optimal Control for Econometric Models - An Approach to Economic Policy Formulation, St. Martin's Press.
- HUGHES HALLETT, A.J. (1989) - "Econometrics and the theory of economic policy: the Tinbergen-Theil contributions 40 years on", Oxford Economic Papers, vol. 41, Nº 1, pag. 189-214.
- KAMIEN, M.I. e SCHWARTZ, N.L. (1991-2ª edição, 1981-1ª edição) - Dynamic Optimization: the Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, North-Holland.
- KENDRICK, D. (1981) - Stochastic Control Methods for Economic Models, McGraw Hill Book Company.
- KORNAI, J. e MARTOS, B (1973) - "Autonomous Control of the Economic System" Econometrica, Vol. 41, Nº 3, Maio, pag.509-528.
- KYDLAND, F. E. e PRESCOTT, E. C. (1977) - "Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans", Journal of Political Economy, vol. 85, pag. 473-493.
- KYDLAND, F. E. e PRESCOTT, E. C. (1980) - "Dynamic Optimal Taxation, Rational Expectations and Optimal Control", Journal of Economic Dynamics and Control, vol. 2, pag. 79-91.
- LELAND, H. E. (1974) - "Optimal Growth in a Stochastic Environment" The Review of Economic Studies, Vol. XLI (1), Nº 125, Janeiro, pag.75-86.
- LEVINE, P. e CURRIE, D. (1985) - "Dynamics and Decision Making", European Economic Review vol. 27, Nº 2, pag. 141-163.
- LUCAS, R.E. (1976) - "Econometric policy evaluation: a critique", Journal of Monetary Economics, Supplement, Carnigie-Rochester Conference Series on Public Policy, Nº 1, pag. 19-46.
- LUCAS, R.E. (1988) - "On the Mechanics of Economic Development", Journal of Monetary Economics, vol. 22, pag. 3-42.
- LUCAS, R.E. e PRESCOTT. (1971) - "Investment under Uncertainty", Econometrica, vol. 39, pag. 659-681.
- MALINVAUD, E. (1991) - Voies de la recherche macroéconomique, Editions Odile Jacob.
- MARTINS, V. (1983) - Regulação nos Modelos Macroeconómicos, tese de doutoramento, ISE.
- MILLER, R.E.. (1979) - Dynamic Optimization and Economic Applications, McGraw-Hill International Book Company.
- PESTON, M.H. (1974) - Theory of Macroeconomic Policy, Philip Allan.
- PETIT, M.L. (1990) - Control theory and dynamic games in economic policy analysis, Cambridge University Press.
- PITCHFORD, J.D. e TURNOVSKY, S.J. (1977) - Applications of Control Theory to Economic Analysis, John Wiley and Sons.
- PINDYCK, R.S. (1973) - "Optimal Policies for Economic Stabilization" Econometrica, Vol. 41, Nº 3, Maio, pag.529-560.
- PRESCOTT, E.C.. (1977) - "Should Control Theory Be Used for Economic Stabilization?", Journal of Monetary Economics, vol. 7 (Suplemento), pag.13-38.
- PRESTON, A.J. (1974) - "A Dynamic Generalization of Tinbergen's Theory of Policy", The Review of Economic Studies, vol. XLI (1), Nº 125, pag. 65-73.
- RIPLEY, B. D. (1987) - Stochastic Simulation, John Wiley and Sons.

- SARGENT, T.J. (1987) - Dynamic Macroeconomic Theory, Harvard University Press.
- SCHEINKMAN, J.A. (1978) - "Stability of Optimal Control Separable Hamiltonians and Investment Theory", The Review of Economic Studies, vol. XLV (3), Nº 141, (Outubro) pag. 559-570.
- SCHUSS, Z. (1980) - Theory and Applications of Stochastic Difference Equations - Springer.
- SEIERSTAD, A. e SYDSAETER, K. (1987) - Optimal Control Theory with Economic Applications, North-Holland.
- STACEY, R.D. (1995) - A Fronteira do Caos, Bertrand Editora (Trad. de The Chaos Frontier, 1991, Butter Worth-Heinemann, Lda).
- STEVENSON, A., MUSCATELLI, V. e GREGORY, M. (1988) - Macroeconomic Theory and Stabilization Policy, Philip Allan.
- STOKEY, N.L. e LUCAS R.E. (1989) - Recursive Methods in Economic Dynamics, Harvard University Press.
- SYSLO, M.M, DEO, N e KOWALIC, J.S. (1983) - Discrete Optimization Algoritms with Pascal Programs, Prentice-Hall.
- TAYLOR, J. B. (1979) - "Estimation and Control of a Macroeconomic Model with Rational Expectations", Econometrica, vol. 47, Nº 5, pag. 1267-1286.
- TINBERGEN, J. (1956) - Economic Policy: Principles and Design, North-Holland Publishing Company.
- TONDINI, G. (1984) - "Further discussion on controllability and the theory of economic policy", Journal of Public Economics, vol. 24, Nº1, pag. 123-125.
- TRAIN, K.E. (1994-3ª edição, 1ª edição - 1991) - Optimal Regulation, The MIT Press.
- UEBE, G. (1977) - "A Note on Aoki's Perfect Controllability of a Linear Macro-economic Model", The Review of Economic Studies, vol. XLIV (1), Nº 136, pag191-2.
- WOHLMANN, H-W. (1984) - "A Note on Aoki's Conditions for Path Controllability of Continuous-Time Dynamic Economic Systems", The Review of Economic Studies, vol.LI (2), Nº165, pag. 343-349.
- WOHLMANN, H-W. e KROMER, W. (1983) - "A Note of Buitter's Sufficient Condition for Perfect Output Controllability of a Rational Expectations Model", Journal of Economic Dynamics and Control, vol.6, pag. 201-205.
- WOHLMANN, H-W. e KROMER, W. (1984) - "Sufficient Conditions for Dynamic Path Controllability of Economic Systems", Journal of Economic Dynamics and Control, vol.7, pag. 315-330.