(60)

UM MODELO INPUT-OUTPUT NÃO-LINEAR

joão ferreira do amaral

LISBOA JUNHO DE 1983

RESERVADO

UM MODELO INPUT-OUTPUT NÃO-LINEAR

Lisboa, Maio de 1983.

JOÃO FERREIRA DO AMARAL

Í N D I C E

A presente dissertação foi preparada sob a orientação do Professor Leif Johansen da Universidade de Oslo. Infelizmente, porém, o Professor Johansen faleceu subitamente em finais de 1982 sem ter tido tempo de completar os comentários, que prometera, à versão final deste trabalho, que lhe tinha sido enviada pouco tempo antes do seu falecimento.

É difícil de descrever o muito que, na actual versão, esta dissertação deve ao Professor Leif Johansen. Sem dogmatismos nem ideias feitas, o Professor Johansen abriu-me novas perspectivas, evitou que seguisse por caminhos inúteis e, inclusivamente, facultou-me material bibliográfico diverso, algum dele ainda em vias de publicação. A recordação da sua orientação constituirá um estímulo importante em trabalhos futuros.

Também sem me ter sido concedido o regime de equiparação a bolseiro por parte do Instituto Nacional de Investigação Científica esta dissertação não teria sido possível. Às Direcções do Departamento Central de Planeamento e do Instituto Superior de Economia, agradeço a confiança que em mim depositaram, de que, durante esse regime, faria trabalho útil. Espero não ter iludido essa confiança.

Ao Professor Bento Murteira e ao colega Dr. José João Marques da Silva agradeço as palavras de estímulo que, em diversas ocasiões, me ajudaram a levar a cabo esta tarefa.

Calorosos agradecimentos são também devidos à Sra. D. Maria do Carmo Oliveira pela competência, interesse (e coragem!) com que dactilografou esta dissertação. Dificilmente se poderia ter realizado trabalho com mais perfeição.

Lisboa, Maio de 1983.

I N T R O D U Ç Ã O

1. Preliminares

Quando se utiliza o modelo de Leontieff (LM) $x_{ij} = a_{ij}x_j$ para analisar uma economia de n sectores/bens, em que $x_{ij} =$ = montante do bem i necessário para produzir x_j unidades do bem j e a_{ij} é um coeficiente técnico constante, está a admitir-se que para cada x_j obtemos apenas um montante necessário x_{ij} e que existem rendimentos constantes à escala. Contudo, como Pasinetti (1977, pag. 69) afirma:

"In practice, changes in the technical coefficients can arise from two quite distinct sources. The first one is that the returns to scale may be increasing or decreasing (...) But there is a second source of variation of the technical coefficients: technical progress. And this is much more awkwar to deal with. Technical progress acts upon the various coefficients quite autonomously, sometimes independently of the scale of production, sometimes in conjunction with it. The important factor therefore, in this respect, is time".

Para ultrapassar as dificuldades acima mencionadas, algun modelos mais gerais têm sido propostos. Assim, Sandberg (1973 considerou o modelo (SM) $x_{ij} = f_{ij}(x_j)$ em que f_{ij} é uma função qualquer, satisfazendo apenas um conjunto limitado de condiçõe Por outro lado, alguns modelos do tipo $a_{ij} = a_{ij}(t)$ têm sido desenvolvidos em resposta ao segundo tipo de observações avançadas por Pasinetti.[1]

No entanto, consideramos que modelos como os acima mencionados não descrevem adequadamente todos os aspectos relevantes da questão. Por essa razão, formulámos um modelo mais geral que, embora diferindo dos modelos dependentes da variável tempo pode, em certos casos traduzir uma situação de progresso tecnológico.

Com efeito, o coeficiente técnico x_{ij}/x_j pode variar também por outra ordem de razões, nomeadamente as relacionadas com a maior ou menor dificuldade do sector i fornecer o input requerido x_{ij}. Por exemplo, existem boas razões para crer que, se existirem dificuldades na produção do sector i, os seus fornecimentos para os restantes sectores possam diminuir em termos relativos. Em alguns casos este efeito pode ser considerado uma situação especial de progresso tecnológico, o que significa que não aceitamos a formulação $a_{ij}(t)$ para exprimir todos os casos de progresso técnico. A variável tempo, aliás, nada explica.

Para tratar casos como este podemos usar um modelo muito geral, tal como o de Lahiri (1976) com uma formulação em que $x_{ij}/x_j = a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$. No entanto, este modelo é demasiado geral e, por consequência, torna-se difícil basear nele uma

---

(1) O método RAS de actualização de coeficientes técnicos pode ser considerado um exemplo desse tipo de modelos. Em Carter et al (1970) encontram-se alguns exemplos e aplicações.

análise teórica. Para dar um exemplo, é extremamente difícil de saber se

$$\frac{\partial x_{ij}}{\partial x_k} \gtrless 0 \qquad \text{para sectores } k \neq i,j.$$

Com base no que se disse, pode afirmar-se, de uma forma pouco rigorosa, que o problema dos rendimentos à escala tem que ver fundamentalmente com a expressão da função $x_{ij} = f_{ij}(\ )$ e que o progresso técnico se traduz em muitos casos na introdução de argumentos diferentes para a função $f_{ij}(\ )$.

A formulação que utilizaremos na presente dissertação é baseada no modelo de Lahiri mas é menos geral. O nosso modelo, que designaremos por GM, admite que para cada par (i,j) de sectores temos $x_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$, ou seja, que o fornecimento do sector i ao sector j é uma função (não necessariamente linear) do total das produções dos sectores i e j, respectivamente. No entanto, para o modelo ser tratável temos de introduzir mais algumas hipóteses.

2. Primeiras hipóteses relativas ao GM (2)

Consideremos uma economia fechada com n sectores/bens e, para cada par de sectores i e j, $x_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$. As funções f_{ij} são contínuas e têm derivadas parciais contínuas em $R^+ = \{(x_i, x_j) \mid (x_i, x_j) \geqslant 0\}$.

O comportamento das funções f_{ij} rege-se pelas seguintes condiçõe

(2) Trata-se apenas das primeiras hipóteses. Mais adiante restringiremos de novo o campo de estudo.

$$f_{ij}(x_i,x_j) \geqslant 0, \qquad \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} \geqslant 0, \qquad \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} = 0 \iff f_{ij} \equiv 0.$$

$$f_{ij}(x_i,0) = 0 \qquad \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \geqslant 0.$$

Por enquanto, não introduziremos a hipótese de ser $f_{ij}(0,x_j) = 0$ para qualquer $x_j \neq 0$, porque é útil considerar o SM e o LM como casos especiais da nossa formulação. No entanto, isto obrigará, para o modelo continuar a fazer sentido, a restringir novamente o domínio de $f_{ij}(x_i,x_j)$ de R^+ para um novo conjunto $R' \subset R$, com $R' = \{(x_i,x_j) \mid x_i \geqslant x_i^{min}(x_j),\ x_j \geqslant 0\}$ conforme se verá mais adiante (ver pag.60).

É útil, neste momento, comparar a nossa formulação com as de Sandberg e Lahiri e avaliarmos o que ganhamos e o que perdemos quando a introduzimos.

3. Comparação com o SM

Consideremos uma economia traduzida por um SM, com $x_{ij} = f_{ij}(x_j)$ e as seguintes situações.

No período t os n sectores produzem um dado vector $X = \bar{X}$ e no período t+1 todos os sectores à excepção do sector i produzem o mesmo valor, enquanto o sector i produz um montante menor. Como é evidente, se a especificação do modelo for $x_{ij} = f_{ij}(x_j)$ é a procura final do sector i que sofre o impacto total da redução de produção do sector (à excepção de um montante relativo à redução do fornecimento x_{ii}). Assim, uma economia como esta demonstraria uma extraordinária falta de capacidade para se adaptar a uma nova situação; tratar-se-ia de um sistema rígido.

Uma rigidez como esta será, obviamente, difícil de encontrar na prática, uma vez que todos os sistemas económicos dispõem de meios que lhes permitem adaptar a sua estrutura produtiva a novas condições.

Assim, o exemplo descrito permite-nos identificar dois tipos de situação em que o GM fornece uma visão mais realista do que o SM:

a) Dificuldades na produção de um sector fornecedor de inputs intermédios. O GM introduz a possibilidade de substituição de um input na produção de outros sectores, evitando assim que as dificuldades de produção se repercutam quase integralmente na procura final.

b) Aumento na produção de alguns sectores que, pelo facto de possuirem um maior dinamismo podem substituir-se como inputs intermédios a outros sectores no processo produtivo. Este tipo de situação, frequente em situações de progresso técnico, é exemplificado pela evolução da utilização de energia eléctrica a partir das últimas décadas do século XIX.

Como veremos no Capítulo 2, as melhorias que, neste contexto, obtemos com o GM resultam do facto de que podemos introduzir substituição no processo produtivo. Contudo, teremos também de avaliar o que perdemos em relação ao modelo de Lahiri.

4. Comparação com o modelo de Lahiri

Quando escrevemos $x_{ij}= f_{ij}(x_i, x_j)$, supomos que com $x_i= \bar{x}_i$ e $x_j= \bar{x}_j$ o fornecimento do sector $\underline{i}$ ao sector $\underline{j}$ é sempre o mesmo, quaisquer que sejam os outros fornecimentos x_{ik}, $k\neq i,j$, ainda que outro sector $\underline{k}$, $k\neq i,j$, aumente substancialmente a sua produção. Claro que esta é uma hipótese bastante forte, pois é difícil de explicar como é que é possível ao sector $\underline{j}$ continuar a comprar o mesmo montante ao sector $\underline{i}$ quando a produção deste é limitada e um outro sector aumenta fortemente a sua própria procura de inputs de $\underline{i}$.(1)

Contudo, em alguns casos podemos considerar o GM uma aproximação razoável do modelo de Lahiri.

Por exemplo, consideremos

$$x_{ij}= f_{ij}(x_1,\ldots, x_n) \quad \text{com} \quad \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \geqslant 0, \quad \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} > 0$$

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \leqslant 0, \quad i,j\neq k, \quad \text{e} \quad x_2= \bar{x}_2,\ldots, x_n= \bar{x}_n, \quad k=1$$

---

(1) Este é um problema de autonomia. Ver Johansen (1977, I, pag. 315)

com um aumendo dx_k na produção do sector $\underline{k}$, k=1.

Teremos, evidentemente $dx_{ij} \leqslant 0$ (uma vez que $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \leqslant 0$, i,j
Como a produção de cada sector i≠k se conserva constante, obtemos um aumento no fornecimento de cada sector $\underline{i}$ para a procura final, a não ser que

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} \geqslant \sum_{j=2}^{n} \left| \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \right| \qquad (1)$$

Como não existe razão para que dy_i seja positivo, isto é, que quando o sector $\underline{i}$ é substituido na produção do sector $\underline{j}$ $\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \leqslant 0\right)$, sucede o contrário na procura final, teremos de supor que

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} \geqslant \sum_{j=2}^{n} \left| \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \right|$$

Assim, o efeito da variação de x_{ij} induzida por x_k é "pequeno" comparado com o do efeito sobre x_{ik}. Este é o caso do GM (e, como é evidente, do SM).

Assim, poderemos concluir que, em certos casos, o GM é uma boa aproximação do modelo de Lahiri, pelo menos quando

---

(1) Com efeito

$$0 = dx_i = \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} dx_k + dy_i \qquad \text{e}$$

$$dy_i \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} \geqslant - \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} = \sum_{j=2}^{n} \left| \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \right|$$

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \leqslant 0, \quad i,j \neq k.$$

Além disso, é muito mais fácil trabalhar com o GM do que com o modelo de Lahiri.

5. Alguns problemas sobre a especificação do GM

a) Agregação

Com a formulação GM verificamos imediatamente que não é possível agregar um tal modelo de n para $m < n$ sectores. Com efeito, quando consideramos um sector k, na nova agregação, tal que $x_k = x_i + x_j$, não obtemos necessariamente $x_{kr} = f_{kr}(x_k, x_r)$. Embora isto suceda com o GM, a verdade é que o mesmo também acontece com o SM e, até, com o LM. Neste último caso este facto é muitas vezes esquecido e a maior parte das agregações que se fazem esquecem este problema, limitando-se a supor que os coeficientes técnicos passam de constantes a variáveis. O problema é, no entanto, mais profundo, pois o que na verdade acontece é que já não temos uma função $x_{ij} = a_{ij} x_j$ pois, para cada valor $x_j = \bar{x}_j$, podemos obter diversos x_{ij} que lhe correspondam.

Em resumo: a nossa divisão em n sectores com a correspondente especificação terá de manter-se ao longo de todo o estudo

b) Dimensão

Um outro problema que surge é o que se refere às unidades de medida das variáveis. Quando escolhemos um período para a produção os valores x_i estão medidos em unidades monetárias. Teremos de ter a certeza de que, quando medimos as mesmas variáveis x_i com um múltiplo ou submúltiplo da unidade monetária previamente escolhida, obteremos as mesmas propriedades para o modelo. Isto é, se em vez da unidade monetária inicial usarmos uma outra unidade valendo 1/k vezes a inicial, obtemos

$$f_{ij}(kx_i, kx_j) = kx_{ij}$$

Isto é verdade apenas quando f_{ij} for homogénea de grau 1, o que é um caso muito particular. Se usarmos uma especificação mais geral, se mudarmos a unidade monetária, teremos também de mudar a função f_{ij}.

Noutros termos, uma vez que assentamos numa especificação $x_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$ medida numa determinada unidade monetária teremos de trabalhar sempre com essa mesma unidade. De outra forma teremos de mudar as funções f_{ij}.

Vamos ver o que acontece quando adaptamos funções a uma nova unidade monetária. Teremos de encontrar funções $g^k_{ij}(x_i, x_j)$ tais que

$$g^k_{ij}(kx_i,\ kx_j) = k\ f_{ij}(x_i,\ x_j).$$

E temos

$$\frac{\partial g^k_{ij}}{\partial y_i} \cdot k = k\ \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \qquad \text{com} \qquad y_i = kx_i.$$

Donde

$$\frac{\partial g^k_{ij}}{\partial y_i} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 g^k_{ij}}{\partial y_i^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial x_i^2}$$

e, em geral

$$D^n g^k_{ij} = k^{1-n} D^n f_{ij}.$$ (1)

O que foi dito permite-nos definir o seguinte princípio metodológico que será válido ao longo de toda a presente dissertação: Apenas as expressões referentes a elasticidades, coeficientes técnicos e primeiras derivadas de f_{ij} deverão ser comparadas com números abstractos.

c) Preços

A nossa análise considera todas as variáveis relevantes medidas a preços constantes de um determinado período. Assim, não consideramos explicitamente a variação de preços relativos como causadora da substituição de um input no processo produ-

---

(1) Obviamente, quando f_{ij} é homogénea de grau $\underline{m}$

$$g^k_{ij}(x_i, x_j) = k^{1-m} f_{ij}(x_i, x_j)$$

tivo. O GM exprime a existência de substituição relacionando--a com os níveis de produção dos sectores fornecedor e comprador, mas não analisa os factores (preços, decisões de um órgão de planeamento, etc.) que são usados para induzir a substituição. Como Kornai (1971, pag. 259) refere:

"The explanation of changes in the input pattern of production which relies exclusively on prices is a poor one. Changes in factor combinations are explained, in the final analysis, by changes in the volume of resources available, and in this relation by processes of technical progress."

O GM, tal como é utilizado na presente dissertação, refere-se e descreve sempre a esfera real da economia, com uma única excepção: o planeamento de um sector intermédio, que é analisado no Capítulo 2.

d) Vectores $X \geqslant \Theta$ para os quais existe um $Y \geqslant \Theta$ (1)

A formulação do GM não garante que para cada $X \geqslant \Theta$ exista um $Y \geqslant \Theta$. Note-se que, uma vez que estamos a analisar uma economia fechada, esta condição é necessária para o funcionamento do sistema económico. Como tal, merece um tratamento mais desenvolvido, que é levado a cabo no Capítulo 1.

(1) Com a nossa notação X é sempre um vector da produção e Y um vector da procura final.

e) Definição dos coeficientes técnicos

Com a especificação do GM não poderemos ter a certeza de que, para todos os $X \geqslant \Theta$ obtemos $\sum_i \frac{f_{ij}(x_i, x_j)}{x_j} < 1$.

Esta é uma condição importante para a aplicação empírica do modelo e é tratada nos Capítulos 1 e 2.

REFERÊNCIAS

JOHANSEN, Leif, "Lectures on macroeconomic planning", North-Holland, 1977-78.

KORNAI, Jãnos, "Anti-equilibrium", North-Holland, 1971.

LAHIRI, Sajal, "Input-Output Analysis with Scale-Dependent Coefficients", Econometrica, Vol. 44, No. 5, 1976.

PASINETTI, Luigi L., "Lectures on the theory of production", Macmillan, London, 1977.

SANDBERG, I.W., "A Nonlinear Input-Output Model of a Multi-sectored Economy", Econometrica, Vol. 41, No. 6, 1973.

C A P Í T U L O 1

FLEXIBILIDADE E MODELOS INPUT/OUTPUT

1. Definição e formulação do problema

Sejam $A(X)$ e $B(X)$ duas tecnologias referentes, respectivamente, ao sistema económico A e ao sistema económico B, ambos com os mesmos $\underline{n}$ sectores. Vamor supor que os elementos de $A(X)$ e $B(X)$ são funções contínuas.

Seja $\mathcal{X}_A$ o conjunto de todos os $X \geqslant \Theta$ tais que existe um vector $Y \geqslant \Theta$ tal que

$$Y = X - A(X)X.$$

DEFINIÇÃO: O sistema A é mais flexível (I) do que o sistema B se e só se

$$\mathcal{X}_A \supset \mathcal{X}_B.$$

Seja W_A o conjunto de todos os $X \geqslant \Theta$ tais que existe um vector $V \geqslant \Theta$ tal que

$$V = X - \hat{X}A(X)^T i \quad \text{onde} \quad i = [1, \ldots 1]^T.$$

DEFINIÇÃO: O sistema A é mais flexível (II) que o sistema B se e só se

$$W_A \supset W_B.$$

As definições apresentadas permitem enunciar o seguinte teorema:

TEOREMA 1 Se $A(X) \leqslant B(X)$, então A é mais flexível (I) e (II) do que B.

Dem: Para cada $X \in \mathfrak{X}_B$ e $X^* \in W_B$ temos, respectivamente,

$$0 \leqslant y_i^B = x_i - \sum_j f_{ij}{}^B (x_1, \ldots, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant x_i - \sum_j f_{ij}{}^A (x_1, \ldots, x_n) = y_i{}^A$$

$$0 \leqslant \upsilon_i^B = x_i^* - \sum_j f_{ji}{}^B (x_1^*, \ldots, x_n^*) \leqslant$$

$$\leqslant x_i^* - \sum_j f_{ji}{}^A (x_1^*, \ldots, x_n^*) = \upsilon_i{}^A$$

e

$$x_i \in \mathfrak{X}_A, \quad x_i^* \in W_A, \quad \text{q.e.d.}$$

Embora este teorema seja muito simples, é bastante importante, conforme veremos mais tarde. Por agora, é suficiente notar que nos permite concluir que se o sistema A é mais flexível (I) que o sistema B, não se segue necessariamente (embora possa suceder) que o sistema B é mais flexível (II) do que o sistema .

DEFINIÇÃO: Um modelo input/output é tratável se e só se

$$W_A \cap \mathfrak{X}_A \neq \emptyset, \neq \{\theta\} .$$

TEOREMA 2 Se $0 \leqslant A(X) \leqslant A^*$ onde A^* é uma matriz de coefici[e]ntes técnicos constantes tais que $\sum_j a_{ji} < 1$, $\forall_i = 1,\ldots,n,$ então $A(X)$ é tratável.

Dem: Como $\mathcal{X}_{A^*} \cap W_{A^*} \neq \{\theta\}$, $\neq \emptyset$, pelo Teorema 1, a demonstração é imediata.

Contudo, é fácil encontrar modelos não-tratáveis. E os exemplos poderão ser encontrados mesmo em relação a modelos diferentes daqueles que são obviamente não-tratáveis. Claro que, por exemplo, um modelo LM em que, para algum sector i, $\sum_j a_{ji}$ seja superior a 1 é obviamente não-tratável. Mas um exemplo como o que se segue já não é tão patentemente não--tratável.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta x_1 & + & (1-\beta)x_2^{0.5} \\ \\ \alpha x_1^{\;2} & + & \beta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \end{bmatrix}$$

com $0<\beta<1$, $\alpha>(1-\beta)$. Quando $x_1>0$, $x_2>0$ temos

$$\beta x_1 + \alpha x_1^{\;2} \leqslant x_1 \Longrightarrow x_1 \leqslant \frac{1-\beta}{\alpha} < 1$$

$$\beta x_1 + (1-\beta)x_2^{0.5} \leqslant x_1 \Longrightarrow x_2^{\;0.5} \leqslant x_1 \Longrightarrow x_2 < 1$$

$$(1-\beta)x_2^{\;0.5} + \beta x_2 \leqslant x_2 \Longrightarrow x_2^{\;0.5} \geqslant 1 \Longrightarrow x_2 \geqslant 1$$

Se $x_1=0$, vem $x_2=0$ porque $x_1 \geqslant \beta x_1 + (1-\beta)x_2^{0.5}$

Se $x_2=0$, vem $x_1=0$ porque $x_2 \geqslant \beta x_2 + \alpha x_1^{\;2}$

Então, $W_A \cap \mathfrak{X}_A = \{(0,0)\}$, e o sistema é não-tratável.

Este exemplo mostra que devemos ser cuidadosos quando desenvolvemos uma teoria input/output não linear. Não é suficiente garantir que, para cada i exista um conjunto não vazio $W_i \neq \{\theta\}$ tal que $\sum_j \frac{x_{ji}}{x_i} < 1$. É preciso que todos os W_i se conjuguem de uma forma tal que $\mathfrak{X} \cap W \neq \{\theta\}$, $\neq \emptyset$. Isto não tem sido suficientemente afirmado na teoria dos modelos input/output.

Uma situação colocada, de certo modo, no extremo oposto dos modelos não-tratáveis é aquela em que $\mathfrak{X}_A = R^+$ e/ou $W_A = R^+$. Neste caso, o sistema tem o grau máximo de flexibilidade (I) e/ou (II) respectivamente. Se $W_A \cap \mathfrak{X}_A = R^+$ diremos que o modelo é <u>ideal</u>.

<u>TEOREMA 3</u> O sistema A tem o máximo grau de flexibilidade (I) quando $\{a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\} =$

$$= \left\{ \frac{b_{ij}(x_i)x_i}{x_j} \right\} \quad \text{e} \quad \sum_j b_{ij}(x_i) \leq 1.$$

Dem: Quando $x_i \geq 0$ temos

$$x_i - \sum_j f_{ij}(x_1,\ldots,x_n) = x_i - \sum_j \frac{b_{ij}(x_i)\cdot x_i}{x_j} \cdot x_j =$$

$$= \left[1 - \sum_j b_{ij}(x_i)\right] x_i \geq 0.$$

q.e.d.

Um exemplo de um tal modelo é aquele em que $b_{ij}(x_i) = f_{ij}$ constante, ou, por outras palavras, uma economia sujeita a um total racionamento na distribuição dos inputs intermédios. (Como é evidente, uma economia deste tipo dificilmente funcionar. Trata-se de um exemplo extremo.)

Seria também fácil demonstrar o seguinte:

TEOREMA 4 A tem o máximo grau de flexibilidade (II) se $\{a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\} = \{a_{ij}(x_j)\}$ e $\sum_i a_{ij}(x_j) < 1$.

Quando $a_{ij}(x_j) = a_{ij}$ temos, evidentemente, o LM.

Um teorema mais importante referente à flexibilidade é, no entanto, o seguinte:

TEOREMA 5 Nenhum sistema adequadamente descrito pelo SM, com pelo menos uma $f_{ij} \neq 0$, $i \neq j$, $x \neq 0$, tem o máximo grau de flexibilidade (I).

Dem: Para cada $\underline{i}$ temos $y_i = x_i - \sum_j f_{ij}(x_j)$ com, pelo menos, um fornecimento $f_{ij} \neq 0$ para um dado par (i,j). Suponhamos que $X^{(i)} = \overline{X}^{(i)}$ onde $X^{(i)}$ é o vector X sem a componente i. Então, quando $x_i \to 0$ temos, para x_i suficientemente pequeno, $y_i < 0$.

q.e.d.

Assim, nenhum modelo SM com interesse (isto é, um modelo SM com pelo menos um $x_{ij} \neq 0$ para $i \neq j$) é um modelo ideal. Por outro lado, um exemplo será dado mais adiante (pag.64) de um GM que é um modelo ideal. Poderemos então concluir que, de todos os modelos $x_{ij} = f_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ com interesse, <u>o mais simples [1] que pode ser ideal é o GM.</u>

Além disso, uma condição necessária para um modelo ser ideal é a seguinte:

<u>TEOREMA 6</u> Se $A(X)$ é um modelo ideal então $\inf_x \{A(x)\} = \hat{\Lambda}$, ond

$\hat{\Lambda}$ é uma matriz diagonal de coeficientes $0 \leq \lambda_i < 1$.

Dem: Suponhamos que $\inf_x \{A(X)\} = \Lambda$ com pelo menos um elemento $\lambda_{ij} > 0$, $i \neq j$. Para todos os $X \geqslant 0$, $A(X) \geqslant \Lambda$. Pelo Teorema 5 $\mathfrak{X}_\Lambda \neq R^+$ e, pelo Teorema 1 $\mathfrak{X}_A \subset \mathfrak{X}_\Lambda$. Então, Λ é uma matriz diagonal. Por outro lado, não é possível ter $\lambda_i \geqslant 1$ para todos os i, pois nã seria possível ter $W_A = R^+$.

q.e.d.

O conceito de flexibilidade (I) é importante também do po to de vista da capacidade produtiva, conforme a próxima secção demonstra.

---

(1) Isto é, o de menor número de argumentos.

2. Flexibilidade (I)

O conceito de flexibilidade é importante porque nos dá os meios de avaliar as possibilidades de um dado sistema económico atingir a utilização plena da sua capacidade.

Seja $\bar{X}$ o vector de capacidade máxima existente numa dada economia.[1] Não existe nenhuma razão para se admitir que $\bar{Y} = \bar{X} - A(\bar{X})\bar{X}$ é tal que $\bar{Y} \geqslant \theta$ a não ser que A tenha o máximo grau de flexibilidade (I).

Ao caso $\mathfrak{X}_A = R^+$ damos o nome de caso neoclássico porque é sempre possível atingir a capacidade máxima, desde que o vector resultante da procura final seja aceitável pelos agentes económicos. No entanto, não é só o caso neoclássico que é interessante. Quando $\mathfrak{X}_A \neq R^+$ pode ser importante saber se $\mathfrak{X}_A$ é um conjunto conexo (ou antes, arco-conexo) ou até um conjunto convexo, uma vez que se $\bar{X} \in \mathfrak{X}_A$ for o vector da capacidade máxima e se X_o for o vector da produção actual pode ser importante saber se $\bar{X}$ pode ser obtido a partir de X_o através de um processo progressivo de pequenos saltos. Se $\mathfrak{X}_A$ for um conjunto conexo isso é evidentemente possível, embora possa ser necessário reduzir inicialmente a produção de alguns sectores para se obter um caminho mais suave no futuro. Contudo, quando $\mathfrak{X}_A$ for convexo podemos sempre obter $\bar{X}$ de X_o de uma forma mais suave através do caminho $\lambda X_o + (1-\lambda)\bar{X}$ com $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Alguns exemplos para uma economia de dois sectores.

---

(1) Esta capacidade máxima deverá entender-se como o máximo que é susceptível de se produzir dada a dotação de factores primários existente na economia.

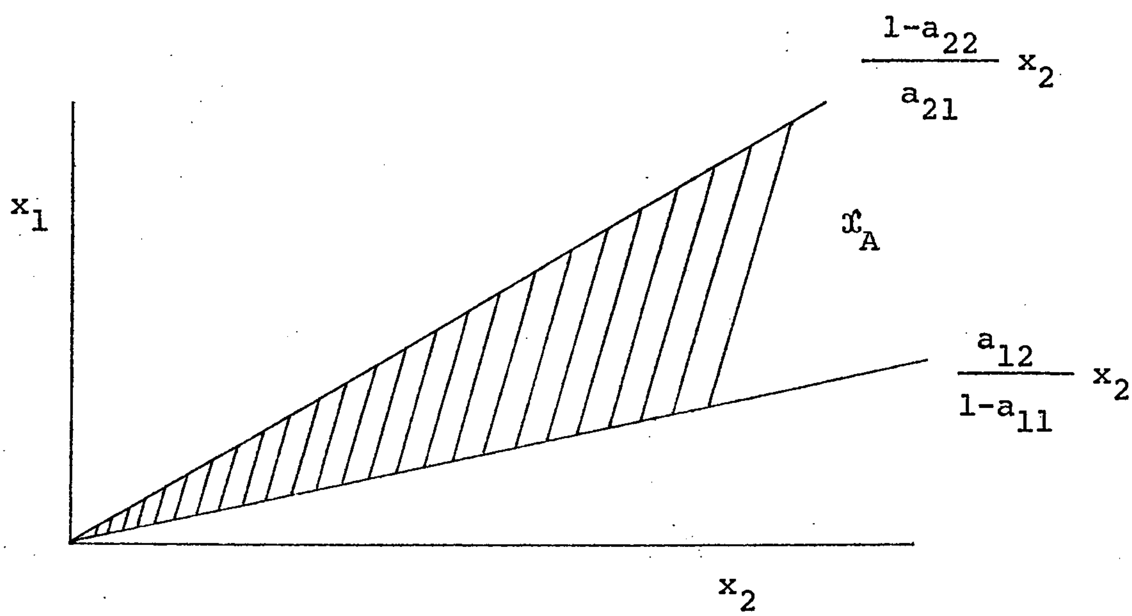
1) Consideremos o sistema

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \geq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \Longrightarrow x_1 \geq \frac{a_{12}}{1 - a_{11}} \; x_2$$

$$x_2 \geq a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \Longrightarrow x_1 \leq \frac{1 - a_{22}}{a_{21}} \; x_2$$

E $\mathfrak{X}_A$ é um conjunto convexo.



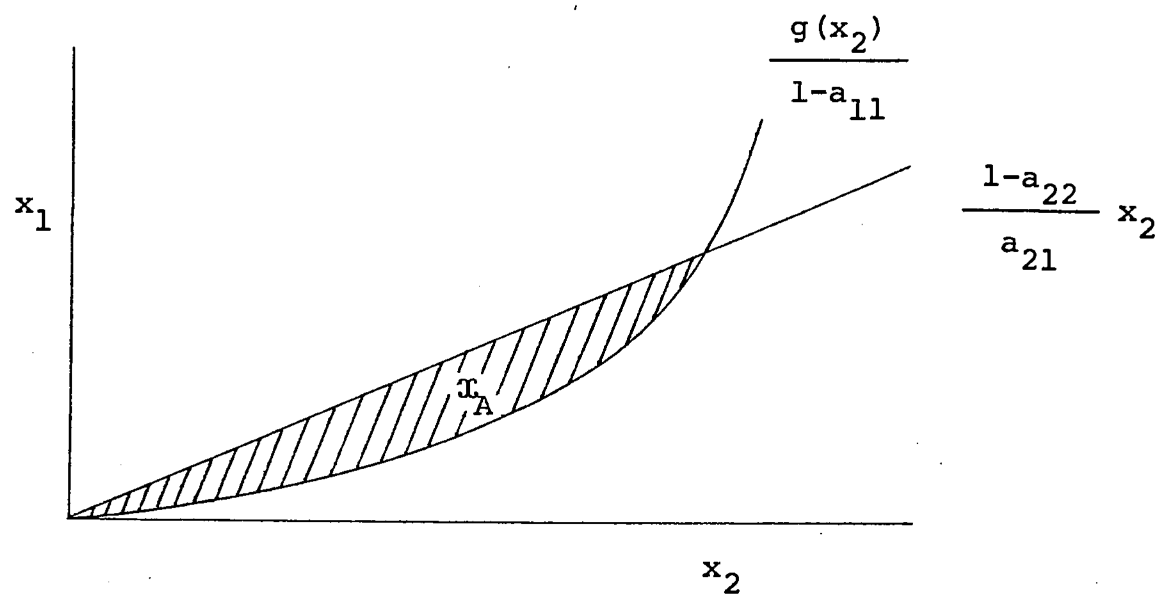
2)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + g(x_2) \\ \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \geqslant a_{11}x_1 + g(x_2) \implies x_1 \geqslant \frac{g(x_2)}{1-a_{11}}$$

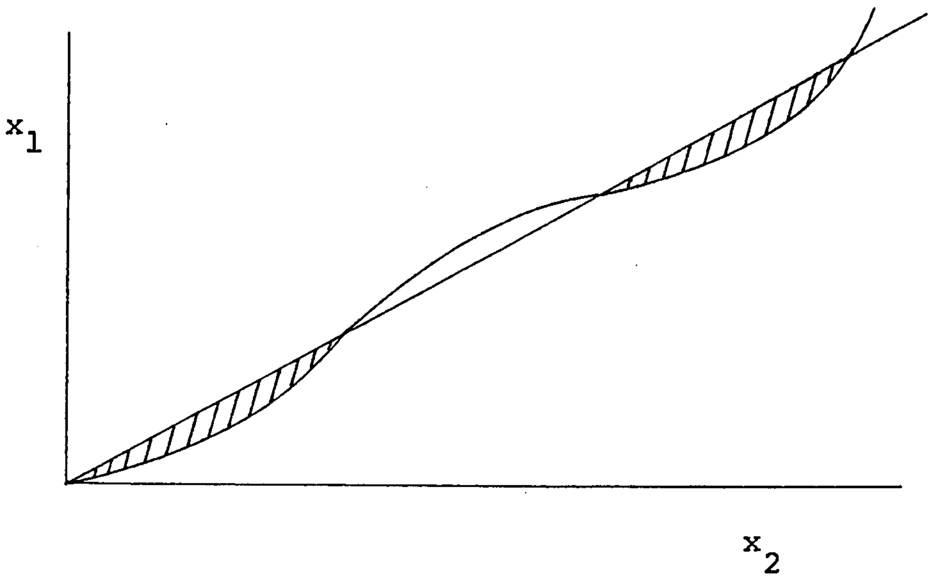
$$x_2 \geqslant a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \implies x_1 \leqslant \frac{1-a_{22}}{a_{21}} x_2$$

Se $g(x_2)$ for uma função convexa, poderemos obter uma situação como esta



E $\mathfrak{X}_A$ é um conjunto convexo mas limitado.

Se $g(x_2)$ tiver dois pontos de inflexão, $\mathcal{X}_A$, pode, em certos casos ser representado por



E $\mathcal{X}_A$ é um conjunto não conexo.

O conjunto $\mathcal{X}_A$ é convexo quando se verifica a seguinte condiçã

TEOREMA 7 Se as i funções

$$g_i(x_1,\ldots x_n) = \sum_j f_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$$

forem convexas, o conjunto $\mathcal{X}_A$ é convexo.

Dem: Para cada i, com X^o, $X^1 \in \mathcal{X}_A$, temos

$$g_i\left[\lambda x_1^o + (1-\lambda)x_1^1, \ldots, \lambda x_n^o + (1-\lambda)x_n^1\right] \leqslant$$

$$\leqslant \lambda g_i(x_1^o, \ldots, x_n^o) + (1-\lambda) g_i(x_1^1, \ldots, x_n^1).$$

e

$$y_i^* = \lambda x_i^o + (1-\lambda)x_1^1 - g_i\left[\lambda x_1^o + (1-\lambda)x_1^1, \ldots, \lambda x_n^o + (1-\lambda)x_n^1\right] \geqslant$$

$$\geqslant \lambda\left[x_i^o - g_i(x_1^o, \ldots, x_n^o)\right] + (1-\lambda)\left[x_i^1 - g_i(x_1^1, \ldots, x_n^1)\right] =$$

$$= \lambda y_i^o + (1-\lambda)y_i^1 \geqslant 0, \quad \text{pois} \quad y_i^o \geqslant 0 \quad \text{e} \quad y_i^1 \geqslant 0$$

q.e.d.

Notemos que se f_{ij} forem funções convexas também o é $\sum_j f_{ij}$. Na sua análise, Sandberg exclui funções f_{ij} convexas, o que exclui alguns casos importantes em que temos a certeza que o conjunto $\mathcal{X}_A$ é convexo.

Mas é interessante introduzir também um teorema para a não-convexidade.

TEOREMA 8 Se existirem pontos X^1, X^o, $X^1 > X^o \geqslant \theta$ tais que $X^1 = A(X^1)X^1$, $X^o \geqslant A(X^o)X^o$ e, pelo menos para um sector i $1 > \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{x_j^1 - x_j^o}{x_i^1 - x_i^o}$, onde

as derivadas são calculadas numa dada vizinhança de X^1 mas não necessariamente no mesmo ponto, $\mathcal{X}_A$ é um conjunto não-convexo.

$F_i(x_1, \ldots x_n)$ é a notação que utilizamos para

$\sum_j f_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$

Dem: Para cada X^* tal que $X^o < X^* < X^1$ temos

$$x_i^* - x_i^1 - F_i(x_1^*,\ldots,x_n^*) + F_i(x_1^1,\ldots,x_n^1) = y_i^* - y_i^1$$

e

$$y_i^* - y_i^1 = (x_i^* - x_i^1) - \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} (x_j^* - x_j^1)$$ onde

as derivadas são calculadas em pontos intermédios de $\bigotimes_j \left[x_j^*, x_j\right]$.(1) Podemos escrever

$$y_i^* - y_i^1 = (x_i^* - x_i^1) \left[1 - \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{x_j^* - x_j^1}{x_i^* - x_i^1}\right]$$

Consideremos agora $X^* = \lambda X^1 + (1-\lambda)X^o$. Temos

$$y_i^* - y_i^1 = \left[\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^o - x_i^1\right] \left[1 - \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\lambda x_j^1 + (1-\lambda)x_j^o - x_j^1}{\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^o - x_i^1}\right]$$

$$y_i^* - y_i^1 = (1-\lambda)(x_i^o - x_i^1) \left[1 - \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{x_j^o - x_j^1}{x_i^o - x_i^1}\right]$$

$0<\lambda<1$

Então $y_i^* < 0$, se escolhermos X^* suficientemente perto de X^1 ta que $\bigotimes_j \left[x_j^*, x_j\right]$ esteja incluido na vizinhança de X^1 onde

$$1 > \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{x_j^1 - x_j^o}{x_i^1 - x_i^o}$$

Como $X^o, X^1 \in \mathfrak{X}_A$ e $X^* = \lambda X^1 + (1-\lambda)X^o \notin \mathfrak{X}_A$, $\mathfrak{X}_A$ é um conjunto não-convexo.

q.e.d.

---

(1) $\bigotimes_j \left[x_j^*, x_j\right]$ representa o produto Cartesiano dos intervalos $\left[x_j^*, x_j\right]$

Observação: Note-se que, quando $X^o = \Theta$, temos a condição

$$1 > \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{x_j^1}{x_i^1} ,$$ que é mais fácil de tratar.

Devemos insistir no facto de que, quando $\mathfrak{X}_A \neq R^+$, pode ser perigoso para o equilíbrio do sistema económico ter incentivos para as unidades produtivas que lhes favoreçam a total utilização da capacidade, uma vez que nos podemos aproximar de um vector $\overline{X}$ tal que $\overline{X} \notin \mathfrak{X}_A$ e o sistema não poderá funcionar. Talvez que muitos dos actuais desiquilíbrios da economia mundial (que é uma economia fechada) possam ser explicados por uma situação deste tipo.

Até agora definimos a flexibilidade (I) para todos os pontos $X \geqslant \Theta$ tais que $Y \geqslant \Theta$. Contudo, para sermos mais realistas d veríamos definir flexibilidade em relação com vectores $Y \geqslant Y^*$ o de Y^* é um vector mínimo para a procura final.

Teremos agora um conjunto $\mathfrak{X}_A^*$ de todos os vectores $X \geqslant \Theta$ tais que

$$\mathfrak{X}_A^* = \left\{ X \geqslant \Theta \mid X - A(X)X \geqslant Y^* \right\}$$

Os teoremas 1 e 7 continuam válidos. Será também interessante verificar em que condições poderemos considerar esta nova flexibilidade como uma mera translação de Θ para Y^*. Temos o seguinte teorema:

<u>TEOREMA 9</u> Se $X^1 \leqslant X^2 \Longrightarrow A(X^1) \geqslant A(X^2)$, então $X - X^* \in \mathfrak{X}_A \Longrightarrow X \in \mathfrak{X}_A^{Y^*}$, onde $Y^* = X^* - A(X^*)X^*$ é o vector de procura final mínima.

Dem: $\qquad \Theta \leqslant X - X^{*} \leqslant X.$ $\quad$ Portanto

$$A(X - X^{*}) \geqslant A(X)$$

$$I - A(X - X^{*}) \leqslant I - A(X)$$

Se $X - X^{*} \in \mathfrak{X}_A$, $\quad X - X^{*} \geqslant \Theta$ e, por definição de $\mathfrak{X}_A$ temos

$$\left[I - A(X - X^{*}) \right] (X - X^{*}) \geqslant \Theta, \text{ de forma que}$$

$$\left[I - A(X) \right] (X - X^{*}) \geqslant \Theta, \text{ isto é}$$

$$\left[I - A(X) \right] X \geqslant \left[I - A(X) \right] X^{*} \geqslant \left[I - A(X^{*}) \right] X^{*}$$

visto que $\quad X^{*} \leqslant X \Longrightarrow I - A(X^{*}) \leqslant I - A(X)$

portanto $\quad Y \geqslant Y^{*} \quad$ e $\quad X \in \mathfrak{X}_A^{Y^{*}}$

q.e.d.

Se as hipóteses do Teorema 9 forem válidas, poderemos reduzir o estudo da flexibilidade restrita ao conceito inicial. Contudo, uma vez que a condição $X^1 \leqslant X^2 \Longrightarrow A(X^1) \geqslant A(X^2)$ é demasiado restritiva, um diferente conceito de flexibilidade - a flexibilidade local - é por vezes necessário.

3. Flexibilidade local (I)

Até este momento usámos o conceito de flexibilidade para cada sistema económico e o seu conjunto $\mathfrak{X}_A$. Contudo, conforme conjecturâmos na discussão de formulação dos modelos SM e GM (INTRODUÇÃO, pag. 5), é possível admitir que um GM é mais flexível que um SM. Podemos agora investigar esta questão.

Em primeiro lugar, convem lembrar que, em geral, não é fá cil comparar, em abstracto, a flexibilidade de um GM com a de um SM. Na verdade, como verificâmos no Teorema 1, a flexibilidade varia com a magnitude dos coeficientes técnicos. Um SM qu tenha menores coeficientes que um GM é, obviamente, mais flexível (I) e (II) do que este. Por essa razão, vamos introduzir o conceito de flexibilidade local para tratarmos satisfatoriamente desta questão.

DEFINIÇÃO: Um sistema A é localmente mais flexível (I) do que um sistema B no ponto $X^o \in \mathcal{X}_A \cap \mathcal{X}_B$ se, para cada $dX^o \geqslant \Theta$ tal que $dY^o_B = dY^o(dX^o) \geqslant \Theta$ se obtem $dY^o_A = dY^o_A(dX^o) \geqslant \Theta$

Observação: Note-se que, quando $X^o = X^*$ (como na secção anterio esta definição permite-nos estudar variações locais próximas d vector mínimo da procura final Y^*.

Entretanto, antes de usar esta definição para comparar o SM e o GM do ponto de vista da flexibilidade, teremos de retirar todos os efeitos da magnitude dos coeficientes e das suas variações locais. O teorema seguinte, nas suas hipóteses, con sidera precisamente esta questão.

TEOREMA 10 Seja $X^o \geq \Theta$ e $Y^o(X^o) \geq \Theta$ e consideremos dois sistemas $x_{ij} = g_{ij}(x_j)$ e $x_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$ tais que

$$f_{ij}(x_i^o, x_j^o) = g_{ij}(x_j^o)$$

$$e_{x_j}^{f_{ij}} + e_{x_i}^{f_{ij}} = e_{x_j}^{g_{ij}} \text{ no ponto } X^o. \text{ (1)}$$

Se $K e_{x_j}^{f_{ij}} \leq e_{x_i}^{f_{ij}}$ onde $0 < K \leq 1$ é uma constante

e se
$$\sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \leq \frac{K}{K+1} \text{ (2)}$$

então o sistema $x_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$ é localmente mais flexível (I) do que o sistema $x_{ij} = g_{ij}(x_j)$ no ponto X^o.

Dem: Para provarmos o teorema teremos de mostrar que, para cada $dY^o(dX^o) \geq \Theta$, $dX^o \geq \Theta$ para o sistema $x_{ij} = g_{ij}(x_j)$, obtemos $dY^{*o}(dX^o) \geq \Theta$ para o sistema $x_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$. Isto é, se

---

(1) $e_{x_i}^{f_{ij}}$ representa a elasticidade de f_{ij} em relação a x_i

(2) $\frac{K}{K+1}$ é necessariamente uma quantidade abstracta, tal como já tínhamos visto no princípio metodológico da INTRODUÇÃO, pag. 10.

$$1) \quad dy_i = dx_i - \sum_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j} dx_j \geqslant 0 \qquad dx_i \geqslant 0, \quad \forall_i = 1,\ldots,n$$

temos

$$2) \quad dy_i^* = dx_i - \sum_{i\neq j} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} dx_j - \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} dx_i \geqslant 0$$

ou, como $1 > \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}$

$$2') \quad dx_i \geqslant \frac{\sum_{i\neq j} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} dx_j}{1 - \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}}$$

Como, por 1) $dx_i \geqslant \sum_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j} dx_j$, é suficiente provar que

$$\sum_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j} dx_j \geqslant \frac{\sum_{i\neq j} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} dx_j}{1 - \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}}$$

Como $e_{x_j}^{g_{ij}} = e_{x_i}^{f_{ij}} + e_{x_j}^{f_{ij}}$ e $f_{ij}(x_i^o, x_j^o) = g_{ij}(x_j^o)$ vem

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}\,\frac{x_i^o}{x_j^o} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} \qquad \text{para } i \neq j.$$

Então, é suficiente provar que

$$\sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}\,\frac{x_i^o}{x_j^o}\,dx_j + \sum_{i\neq j} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j}\,dx_j \geqslant \frac{\displaystyle\sum_{i\neq j} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j}\,dx_j}{1 - \displaystyle\sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}}$$

Como $\displaystyle\sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} < 1$ isto verifica-se se

$$3)\qquad \left(1 - \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}\right)\left(\sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}\,\frac{x_i^o}{x_j^o}\,dx_j\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{i\neq j} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j}\,dx_j\right)\left(\sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}\right)$$

E, se provarmos 3) o teorema está demonstrado.

Como $K\, e^{f_{ij}}_{x_j} \leqslant e^{f_{ij}}_{x_i}$, temos

$$K \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} x_j^o \leqslant \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} x_i^o$$

e

$$\sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \frac{x_i^o}{x_j^o} dx_j \geqslant K \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} dx_j$$

Por outro lado, $\displaystyle\sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \leqslant \frac{K}{K+1}$

Então,

$$\left(1 - \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}\right) \left(\sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \frac{x_i^o}{x_j^o} dx_j\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 - \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}\right) K \left(\sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} dx_j\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 - \frac{K}{K+1}\right) K \left(\sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} dx_j\right) = \frac{K}{K+1} \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} dx_j \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}\right) \left(\sum_{i \neq j} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} dx_j\right)$$

3) é verdadeira e o teorema está provado.

Poderemos agora ver que, para termos a certeza de que o GM é localmente mais flexível do que o SM, é suficiente supor que o efeito de introdução da variável x_i em comparação com o efeito da variável x_j é relativamente importante $\left(K\, e_{x_j}^{f_{ij}} \leqslant e_{x_i}^{f_{ij}}\right)$ desde que, claro, a variação resultante de x_i seja inferior a $\frac{K}{K+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Por outro lado, notemos que, dadas as suas hipóteses, o teorema é útil principalmente para comparar duas tecnologias alternativas para o mesmo sistema, uma vez que seria extremamente improvável que dois sistemas mostrassem exactamente a mesma situação $g_{ij}(x_j^o) = f_{ij}(x_i^o, x_j^o)$ para um dado ponto X^o.

4. Conclusão

Numa economia fechada (por exemplo, a economia mundial) poderão surgir problemas sérios na procura final disponível se cada sector produzir em capacidade máxima. Além disso, incentivos para produzir à máxima utilização de capacidade poderão ser perigosos (ver Kornai (1971), pag. 316 no que respeita a planos "tensos").

Além disso, conforme verificámos com o Teorema 1, estes problemas podem tornar-se mais sérios quando, em algumas fases do crescimento económico, os coeficientes técnicos aumentam.

Finalmente, o Teorema 10 mostra que uma regulação autoritária da tecnologia da economia, através por exemplo, da definição de normas para os coeficientes técnicos, apenas dependentes da escala de produção do utilizador pode, sob certas condições, levar a uma situação mais rígida do que uma outra situação em que à tecnologia de cada sector é permitido variar de acordo com a disponibilidade dos seus inputs.

REFERÊNCIAS

KORNAI, Jãnos, "Anti-equilibrium", North-Holland, 1971.

SANDBERG, I.W., "A Nonlinear Input-Output Model of a Multisectored Economy", Econometrica, Vol. 41 No. 6, 1973.

C A P Í T U L O 2

ANÁLISE GERAL DO GM

1. O problema da substituição

É bem conhecido que o LM não permite substituição de produtos intermédios no processo produtivo. No que respeita ao SM é possível considerar substituição de inputs desde que o nível de produção do sector utilizador não fique constante. Isto pode ser apresentado de uma forma mais rigorosa.

DEFINIÇÃO: Existe possibilidade de <u>substituição estática</u> na produção de um dado sector j quando o mesmo nível de produção $\bar{x}_j$ é alcançado com diferentes proporções de, pelo menos, um input intermédio (isto é, com pelo menos dois diferentes coeficientes técnicos para o mesmo sector fornecedor). Existe possibilidade de <u>substituição dinâmica</u> quando diferentes níveis de produção x_j^1, x_j^2,... podem ser obtidos com diferentes coeficientes técnicos de pelo menos um sector fornecedor.

Vê-se imediatamente que o GM permite a existência de substituição estática e dinâmica, enquanto o SM só permite substituição dinâmica. O LM não permite nenhuma substituição.

A fim de medir as possibilidades de substituição poderemos utilizar a taxa de crescimento do coeficiente técnico de cada par (i,j), pela seguinte forma:

$$1)\qquad \frac{d\,\dfrac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_j}}{\dfrac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_j}} = \left(e_{x_j}^{f_{ij}} - 1\right)\frac{dx_j}{x_j} + e_{x_i}^{f_{ij}}\,\frac{dx_i}{x_i}$$

Quando todos os sectores crescem à mesma taxa, isto é quando $\frac{dx_i}{x_i} = \frac{dx_j}{x_j}$, a elasticidade dos coeficientes em relação à produção é dada por

$$\frac{d\,\dfrac{f_{ij}}{x_j}}{\dfrac{f_{ij}}{x_j}} \cdot \frac{x_j}{dx_j} = e_{x_i}^{f_{ij}} + e_{x_j}^{f_{ij}} - 1$$

Por outro lado, poderemos também definir para o coeficiente de procura $\frac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_i}$ a taxa de crescimento

$$2)\qquad \frac{d\,\dfrac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_i}}{\dfrac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_i}} = \left(e_{x_i}^{f_{ij}} - 1\right)\frac{dx_i}{x_i} + e_{x_j}^{f_{ij}}\,\frac{dx_j}{x_j}$$

e, usando 1) e 2) definimos finalmente a elasticidade do coe-ficiente técnico em relação ao coeficiente de procura

$$\sigma_{ij} = \frac{d\,\dfrac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_j}}{\dfrac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_j}} \; \frac{\dfrac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_i}}{d\,\dfrac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_i}} = \frac{\left(e_{x_j}^{f_{ij}} - 1\right)\dfrac{dx_j}{x_j} + e_{x_i}^{f_{ij}}\,\dfrac{dx_i}{x_i}}{e_{x_j}^{f_{ij}}\,\dfrac{dx_j}{x_j} + \left(e_{x_i}^{f_{ij}} - 1\right)\dfrac{dx_i}{x_i}}$$

que, por sua vez, nos dá a percentagem de variação do coefici ente técnico que corresponde à variação relativa do coeficien de procura.

Obviamente, quando $\dfrac{dx_i}{x_i} = \dfrac{dx_j}{x_j}$, $\sigma_{ij} = 1$.

Consideremos $|\sigma_{ij}|$ como uma medida de substituição.

Quando $e_{x_i}^{f_{ij}} + e_{x_j}^{f_{ij}} = 1$, isto é, quanto existem rendimentos c(tantes à escala, temos

$$\sigma_{ij} = - \frac{e_{x_i}^{f_{ij}}}{e_{x_j}^{f_{ij}}}$$

e a elasticidade é negativa. Isto é, o facto de que um sector compra em percentagem mais da produção de outro sector signi-fica que ele usa uma proporção menor (em relação à sua própria produção) de fornecimentos desse sector como input intermédio. Notemos também que, se

$$\frac{dx_i}{x_i}, \; \frac{dx_j}{x_j} > 0 \quad \text{e} \quad e_{x_i}^{f_{ij}} \, , \; e_{x_j}^{f_{ij}} > 1$$

(1) Uma aplicação empírica pode ver-se mais, adiante, Capítulo

temos $\sigma_{ij} > 0$; o mesmo resultado $\sigma_{ij} > 0$ é obtido quando $e_{x_i}^{f_{ij}}, e_{x_j}^{f_{ij}} < 1$ e

$$\frac{e_{x_j}^{f_{ij}}}{1 - e_{x_i}^{f_{ij}}} \cdot \frac{dx_i}{x_i} < \frac{dx_j}{x_j} < \frac{e_{x_i}^{f_{ij}}}{1 - e_{x_j}^{f_{ij}}} \cdot \frac{dx_i}{x_i}$$

Estes exemplos ilustram o facto de que quando um sector aumen ta a sua participação nas vendas de um outro sector i, isso nã implica que ela consuma relativamente mais do input i. Tudo de pende das taxas de crescimento da produção e dos rendimentos ã escala.

Por outro lado, notemos que podemos escrever σ_{ij} como

$$\sigma_{ij} = \frac{e_{x_j}^{f_{ij}} \frac{dx_j}{x_j} + \left(e_{x_i}^{f_{ij}} - 1\right) \frac{dx_i}{x_i} + \frac{dx_i}{x_i} - \frac{dx_j}{x_j}}{e_{x_j}^{f_{ij}} \frac{dx_j}{x_j} + \left(e_{x_i}^{f_{ij}} - 1\right) \frac{dx_i}{x_i}} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{dx_i}{x_i} - \frac{dx_j}{x_j}}{e_{x_j}^{f_{ij}} \frac{dx_j}{x_j} + \left(e_{x_i}^{f_{ij}} - 1\right) \frac{dx_i}{x_i}}$$

$$\sigma_{ij} = 1 + \frac{\dfrac{dx_i}{x_i} - \dfrac{dx_j}{x_j}}{\left(e_{x_j}^{f_{ij}} - 1\right)\dfrac{dx_j}{x_j} + e_{x_i}^{f_{ij}}\dfrac{dx_i}{x_i} + \dfrac{dx_j}{x_j} - \dfrac{dx_i}{x_i}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\sigma_{ij}^{*} - 1} = \frac{\sigma_{ij}^{*}}{\sigma_{ij}^{*} - 1}$$

em que $$\sigma_{ij}^{*} = \frac{\left(e_{x_j}^{f_{ij}} - 1\right)\dfrac{dx_j}{x_j} + e_{x_i}^{f_{ij}}\dfrac{dx_i}{x_i}}{\dfrac{dx_i}{x_i} - \dfrac{dx_j}{x_j}} =$$

$$= \frac{d\,\dfrac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_j}}{d\,\dfrac{x_i}{x_j}} \; \frac{\dfrac{x_i}{x_j}}{\dfrac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_j}}$$

isto é, σ_{ij}^{*} é a elasticidade da variação do coeficiente técnico em relação à proporção das produções dos dois sectores.

2. Funções de produção e funções de procura

2.1 Funções de produção

Para cada par (i,j) o GM admite que $x_{ij}= f_{ij}(x_i,x_j)$. Como f_{ij} é uma função crescente de x_j, existe uma função inversa f_{ij}^{-11} tal que

$$x_j= f_{ij}^{-11}(x_{ij},x_i).$$

Note-se que f_{ij}^{-11} é uma função crescente de x_{ij} e uma função não-crescente de x_i, uma vez que, quando consideramos a função implícita $x_j(x_i)$, obtemos

$$\bar{x}_{ij}- f_{ij}(x_i,x_j) = 0$$

e, portanto

$$\frac{dx_j}{dx_i} = - \frac{\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_j}} \leqslant 0$$

A interpretação do que fica dito é imediata. Com efeito, para um dado nível de produção $x_i= \bar{x}_i$, quanto maior for a quantidade x_{ij} fornecida ao sector j, tanto maior é a produção deste sector

Quando $x_{ij}= \bar{x}_{ij}$, um valor mais baixo para x_i significa que existe uma escassez relativa do input i e, portanto, o mesmo montante $x_{ij}= \bar{x}_{ij}$ permite ao sector j produzir um volume maior x_j, uma vez que a escassez relativa de i introduzirá a sua substituição nos processos tecnológicos. Portanto, dado $x_{ij} = \bar{x}_{ij}$, x_j é uma função não-crescente de x_i.

Repare-se agora que as já mencionadas limitações do GM (INTRODUÇÃO, pag. 6) se tornam evidentes. Com efeito, se supo· sermos que $x_j = f_{ij}^{-11}(x_{ij}, x_i)$ é uma função não-crescente de x_i, teremos também que admitir que um crescimento de x_i resulta de i ser usado mais intensamente em todo o processo produtivo e não apenas de existir um aumento autónomo da procura de i por parte de outro sector $k \neq j$.

Tendo em atenção o que fica dito podemos agora definir uma função de produção para o sector j, dado o vector

$$\bar{X}^{(j)} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{j-1}, \bar{x}_{j+1}, \ldots, \bar{x}_n).$$

A função escreve-se

$$F^{j}_{\bar{X}(j)}(x_{1j}, \ldots, x_{nj}) = \min_{i} \left\{ f_{ij}^{-11}(x_{ij}, \bar{x}_i) \right\}, \quad x_{ij} \leqslant \bar{x}_i \quad (1)$$

Podemos assim constatar que, para cada sector, não existe uma função de produção dada uma vez por todas, uma vez que ela depende do nível de produção atingido pelos outros sectores.

É fácil provar as seguintes propriedades:

---

(1) A componente j é, evidentemente, $f_{jj}^{-11}(x_{jj})$

P.1 - Para cada $\overline{X}^{(j)}$, $F^{j}_{\overline{X}(j)}(\Theta) = 0$, uma vez que $f_{ij}(\overline{x}_i, 0)=0$
e

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} > 0.$$

P.2 - Se existir pelo menos um coeficiente técnico

$\dfrac{f_{ij}(x_i, x_j)}{x_j}$ limitado inferiormente por um número $a_{ij} >$

então $F^{j}_{\overline{X}(j)} < +\infty$ para todos os vectores

$x_{ij} = (x_{1j}, \ldots x_{nj})$.

Com efeito, neste caso, pelo menos para um dos i's tem-se $\lim_{x_j \to \infty} f_{ij}(\overline{x}_i, x_j) = +\infty$ e, portanto $x_j = f^{-11}_{ij}(x_{ij},$ não tem assíntota vertical. Então, x_j é finito e tambem o é $F^{j}_{\overline{X}(j)}$.

P.3 - Se $X^{o}_{ij} \geqslant X^{1}_{ij}$, então $F^{j}_{\overline{X}(j)}(X^{o}_{ij}) \geqslant F^{j}_{\overline{X}(j)}(X^{1}_{ij})$

É imediato, devido à monotonia de f^{-11}_{ij}.

P.4 - $F^{j}_{\overline{X}(j)}$ é semi-contínua superior em $\Theta \leqslant X_{ij} \leqslant \overline{X}$.

É uma consequência da continuidade de f^{-11}_{ij}.

P.5 - Se $f^{-11}_{ij}(x_{ij}, \overline{x}_i)$ for quase-côncava em $0 \leqslant x_{ij} \leqslant \overline{x}_i$, $F^{j}_{\overline{X}(j)}$ é quase-côncava em

$$X^{(j)}_{ij} \leqslant \overline{X}^{(j)}_i, \ 0 \leqslant x_{jj}.$$ (1)

---

(1) Que é, obviamente, um conjunto convexo.

Com efeito,

$$F^{j}_{\bar{X}(j)}\left[\lambda X^{o}_{ij} + (1-\lambda)X^{1}_{ij}\right] =$$

$$= f^{-11}_{kj}\left[\lambda x^{o}_{kj} + (1-\lambda)x^{1}_{kj},\ \bar{x}_k\right] \geqslant$$

$$\geqslant \min\left[f^{-11}_{kj}\ (x^{o}_{kj},\bar{x}_k),\ f^{-11}_{kj}\ (x^{1}_{kj},\ \bar{x}_k)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \min\left[F^{j}_{\bar{X}(j)}\ (X^{o}_{ij}),\ F^{j}_{\bar{X}(j)}\ (X^{1}_{ij})\right]$$

E, por esta forma, verificámos as cinco propriedades que Shephard (1970, pag. 22) considera serem as de uma função de produção.(1)

Mas um outro processo de estudar as funções de produção deste trabalho seria considerá-las como um elemento da classe $\mathcal{F}_{(j)}$ das funções $F^{j}_{\bar{X}(j)}$, definida pelos vectores $X^{(j)} \in R^{+}$. Um caso interessante é, evidentemente, aquele em que $X^{(j)} = X^{*(j)}$, onde $X^{*(j)}$ é o vector da capacidade máxima.

Mas deverá salientar-se que todo este estudo só se aplica à análise da função de produção de <u>um sector</u> isoladamente, considerando que os outros produzem um determinado volume $X^{(j)}$.

Uma relação óbvia é

$$X_o^{(j)} \geqslant X_1^{(j)} \Longrightarrow F^{j}_{X_1(j)} \geqslant F^{j}_{X_o(j)} \quad \text{para} \quad X^{(j)}_{ij} \leqslant X^{(j)}_{1}\ ,\quad x_{jj} \geqslant 0.$$

---

(1) Não consideramos a sexta propriedade

P.6 - Para cada $X_{ij} > 0$, $F^{j}_{\bar{X}(j)}(\lambda X_{ij}) \to \infty$ quando $\lambda \to \infty$

porque $x_{ij} \leqslant \bar{x}_i$.

Esta relação pode tornar-se importante se quisermos estudar o caminho $X^{(j)} = \lambda X_o^{(j)} + (1-\lambda)X_1^{(j)}$, a partir de um dado vector $X_1^{(j)}$ para o vector $X_o^{(j)} > X_1^{(j)}$ de capacidade máxima dos restantes n-1 sectores.

2.2 Funções de procura

Podemos também definir uma função procura tal como definimos a função de produção. Contudo, para o fazer, teremos de admitir que

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} > 0 \quad \text{e não apenas que} \quad \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \geqslant 0.$$

Podemos escrever $x_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$ e $x_i = f_{ij}^{-12}(x_i, x_j)$, que nos dá a produção no sector i que é necessária para satisfazer a procura do sector j quando o nível de produção de j é x_j.

Tal como no caso da função de produção, temos, para cada $\bar{X}^{(j)}$

$$G^j_{\bar{X}^{(j)}} = \max_j \left\{ f_{ij}^{-12} \ (x_{ij}, \bar{x}_j) \right\} \qquad x_{ij} \leqslant \bar{x}_j \qquad (1)$$

Temos agora um máximo, uma vez que o sector i tem de satisfazer a procura de todos os sectores.

---

(1) Esta é uma condição necessária para que exista um valor acrescentado não-negativo no sector j.

Obviamente, $\frac{\partial f^{-12}}{\partial x_{ij}} > 0$, $\frac{\partial f^{-12}}{\partial x_j} < 0$, como no caso da função de produção.

A definição de uma função de procura pode ser útil para o estudo do processo de planeamento de um sector produtor de bens intermédios, como se verifica na próxima secção.

3. O planeamento de um sector intermédio

Vamos considerar uma economia onde existem dois objectivos $\bar{x}_i$ e $\bar{x}_j$ para a produção do sector i e do sector j, respectivamente. O objectivo $\bar{x}_i$ é um máximo, uma vez que consideramos que o sector i produz um recurso escasso; um outro sector, k, utiliza i para produzir um input intermédio para o sector j. Este, por sua vez, produz um bem considerado essencial, sendo pois $\bar{x}_j$ um objectivo considerado mínimo. Um exemplo será i = energia; k = adubos; j = agricultura. Vamos admitir que não existem efeitos de feedback, isto é, que não existe a necessidade de utilizar a produção de j para, directa ou indirectamente, produzir k ou i. Existe um órgão central de planeamento (OCP) que escolhe $\bar{x}_i$ e $\bar{x}_j$ e tenta determinar os fornecimentos x_{ik} e x_{kj} que equilibram a produção do sector k. As funções $f_{ik}(x_i, x_k)$ e $f_{kj}(x_k, x_j)$ existem embora desconhecidas do OCP. Por outro lado, assume-se que estão fixados todos os outros fornecimentos x_{km} e todos os outros inputs x_{mk}.

Um processo possível de determinar os fornecimentos x_{ik} e x_{kj} será o de organizar um diálogo iterativo entre o OCP e o sector k tal que, em cada iteração t o OCP propõe atribuições de inputs i ao sector k, x_{ik}^t e de inputs k ao sector j, x_{kj}^t , que estão relacionados com o equilíbrio do sector k durante a iteração t-1.

Assim,

$$x_{ik}{}^t = x_{ik}{}^{t-1} + g_1\left({}^*x_k{}^{t-1},\ {}^{**}x_k{}^{t-1}\right)$$

$$x_{kj}{}^t = x_{kj}{}^{t-1} + g_2\left({}^*x_k{}^{t-1},\ {}^{**}x_k{}^{t-1}\right)$$

onde

$x_{ik}{}^t$, $x_{kj}{}^t$ = atribuições sugeridas na iteração t

${}^*x_k{}^t$ = máxima produção do sector k com a atribuição $x_{ik}{}^t$

${}^{**}x_k{}^t$ = mínima produção do sector k necessária para preencher a atribuição $x_{kj}{}^t$.

Finalmente suporemos que

$$\min_m \left\{ f_{mk}^{-11}\ (x_{mk},\ \bar{x}_m) \right\} = f_{ik}^{-11}\ (x_{ik},\ \bar{x}_i)$$

e

$$\max_p \left\{ f_{kp}^{-12}\ (x_{kp},\ \bar{x}_p) \right\} = f_{kj}^{-12}\ (x_{kj},\ \bar{x}_j)$$

Conforme já foi mencionado (INTRODUÇÃO, pag.11) não tratamos aqui da esfera real da economia mas sim da esfera de controlo, através do seguinte algoritmo.

O OCP começa por sugerir x_{ik}^{o} e x_{kj}^{o} que são as atribuições consideradas mais eficientes segundo algum critério que não nos interessa discutir. Conhecendo a sua tecnologia e a procura dos outros sectores que não o sector j, o sector k determina os montantes

$$^{*}x_k^o = f_{ik}^{-11} (x_{ik}^o , \bar{x}_i)$$

$$^{**}x_k^o = f_{kj}^{-12} (x_{kj}^o , \bar{x}_j)$$

Se $^{*}x_k^o \neq {}^{**}x_k^o$ a iteração começa.

Um caminho possível para convergência é dado por

$$g_1\left({}^{*}x_k^{t-1}, {}^{**}x_k^{t-1}\right) = -\mu\left({}^{*}x_k^{t-1} - {}^{**}x_k^{t-1}\right)$$

$$g_2\left({}^{*}x_k^{t-1}, {}^{**}x_k^{t-1}\right) = \mu\left({}^{*}x_k^{t-1} - {}^{**}x_k^{t-1}\right)$$

onde μ é uma constante positiva.

Se existirem funções desconhecidas $f_{ik}^{-11}(x_{ik},x_i)$ e $f_{kj}^{-12}(x_{kj},x_j)$ temos, para $x_i = \bar{x}_i$ e $x_j = \bar{x}_j$

$$^{*}x_k^{t-1} = f_{ik}^{-11} (x_{ik}^{t-1}, \bar{x}_i) \quad \text{e} \quad {}^{**}x_k^{t-1} = f_{kj}^{-12} (x_{kj}, \bar{x}_j)$$

Portanto,

$$x_{ik}^{t} = x_{ik}^{t-1} - \mu \left[f_{ik}^{-11} (x_{ik}^{t-1}, \bar{x}_i) - f_{kj}^{-12} (x_{kj}^{t-1}, \bar{x}_j) \right]$$

$$x_{kj}^{t} = x_{kj}^{t-1} + \mu \left[f_{ik}^{-11} (x_{ik}^{t-1}, \bar{x}_i) - f_{kj}^{-12} (x_{kj}^{t-1}, \bar{x}_j) \right]$$

ou, com

$$S_t = f_{ik}^{-11} (x_{ik}^{t}, \bar{x}_i) - f_{kj}^{-12} (x_{kj}^{t}, \bar{x}_j)$$

$$x_{ik}^{t} = x_{ik}^{t-1} - \mu S_{t-1}$$

$$x_{kj}^{t} = x_{kj}^{t-1} + \mu S_{t-1}$$

Porém,

1) $$f_{ik}^{-11} (x_{ik}^{t}, \bar{x}_i) = f_{ik}^{-11} (x_{ik}^{t-1}, \bar{x}_i) - \mu S_{t-1} \frac{df^{-11}(x_{ik}^{*}, \bar{x}_i)}{dx_{ik}}$$

2) $$f_{kj}^{-12} (x_{kj}^{t}, \bar{x}_j) = f_{kj}^{-12} (x_{kj}^{t-1}, \bar{x}_j) + \mu S_{t-1} \frac{df_{kj}^{-12}(x_{kj}^{*}, \bar{x}_j)}{dx_{kj}}$$

onde $x_{ik}^{*} \in (x_{ik}^{t-1}, x_{ik}^{t})$ e $x_{kj}^{*} \in (x_{kj}^{t-1}, x_{kj}^{t})$

Subtraindo 2) de 1), temos

$$S_t = S_{t-1} - \mu S_{t-1}\left[\frac{df^{-11}(x^*_{ik}, \bar{x}_i)}{dx_{ik}} + \frac{df^{-12}_{kj}(x^*_{kj}, \bar{x}_j)}{dx_{kj}}\right]$$

Se $0 < B \leqslant \dfrac{df^{-11}_{ik}(x_{ik}, \bar{x}_i)}{dx_{ik}} + \dfrac{df^{-12}_{kj}(x_{kj}, \bar{x}_j)}{dx_{kj}} < A < +\infty$

para cada $x_{ik} \leqslant \bar{x}_i$, e cada $x_{kj} \leqslant \bar{x}_j$, podemos escrever

$$1 > 1 - \mu B \geqslant 1 - \mu\left[\frac{df^{-11}_{ik}(x^*_{ik}, \bar{x}_i)}{dx_{ik}} + \frac{df^{-12}_{kj}(x^*_{kj}, \bar{x}_j)}{dx_{kj}}\right] > 1 - \mu A$$

Se $0 < \mu \leqslant \dfrac{1}{A}$, $1 - \mu A \geqslant 0$, e podemos escrever

$$\left|1 - \mu B\right| \geqslant \left|1 - \mu\left[\frac{df^{-11}_{ik}(x^*_{ik}, \bar{x}_i)}{dx_{ik}} + \frac{df^{-12}_{kj}(x^*_{kj}, \bar{x}_j)}{dx_{kj}}\right]\right|$$

Então

$$|S_t| \leqslant |S_{t-1}|\,|1 - \mu B| = |S_{t-1}|\,(1 - \mu B)$$

e

$$0 \leqslant |S_t| \leqslant (1 - \mu B)^t\,|S_o|$$

Quando $t \to \infty$, $\lim |S_t| = 0$. Isto é, provamos o seguinte teorema.

TEOREMA 11 Quando a soma $\frac{df_{ik}^{-11}}{dx_{ik}} + \frac{df_{kj}^{-12}}{dx_{kj}}$ é limitada inferiormente por $B > 0$ e superiormente por $A < +\infty$, para cada x_{ik} e x_{kj} tais que $x_{ik} \leqslant \bar{x}_i$ e $x_{kj} \leqslant \bar{x}_j$, a iteração converge se $0 < \mu \leqslant \frac{1}{A}$.

A interpretação é imediata. Como em muitos outros esquemas iterativos (veja-se Johansen (1978), II, pag. 208-212) não devemos ser demasiado ambiciosos na rapidez de convergência (isto é, $\mu A \leqslant 1$) especialmente quando f_{ik}^{-11} e f_{kj}^{-12} reagem intensamente a x_{ik} e x_{kj}, respectivamente.

É fácil de provar o seguinte teorema:

TEOREMA 12 Os valores finais x_{ik}^{∞} e x_{kj}^{∞} pertencem a um intervalo que não depende do valor de μ.

Dem: Temos

$$x_{ik}^{t} = x_{ik}^{o} - \mu \sum_{l=1}^{t} s_{l-1}$$

$$x_{kj}^{t} = x_{kj}^{o} + \mu \sum_{l=1}^{t} s_{l-1}$$

e

$$\left| x_{ik}^{t} - x_{ik}^{o} \right| = \mu \left| \sum_{l=1}^{t} s_{l-1} \right| \leqslant \mu \sum_{l=1}^{t} \left| s_{l-1} \right|$$

$$\left| x_{kj}^{t} - x_{kj}^{o} \right| = \mu \left| \sum_{l=1}^{t} s_{l-1} \right| \leqslant \mu \sum_{l=1}^{t} \left| s_{l-1} \right|$$

portanto

$$|x_{ik}^{t} - x_{ik}^{o}| \leqslant \mu|S_o| \sum_{n=0}^{t-1} (1-\mu B)^n = \mu|S_o| \frac{1-(1-\mu B)^t}{\mu B}$$

$$|x_{kj}^{t} - x_{kj}^{o}| \leqslant \mu|S_o| \sum_{n=0}^{t-1} (1-\mu B)^n = \mu|S_o| \frac{1-(1-\mu B)^t}{\mu B}$$

Com $t \to \infty$ vem

$$|x_{ik}^{\infty} - x_{ik}^{o}| \leqslant \frac{|S_o|}{B}$$

$$|x_{kj}^{\infty} - x_{kj}^{o}| \leqslant \frac{|S_o|}{B}$$

e estes intervalos não dependem de μ. q.e.d.

Note-se que não é certo que x_{ik}^{∞} seja $< \bar{x}_i$ ou mesmo que x_{ik}^{∞} seja $\leqslant \beta_k^i \bar{x}_i$ onde β_k^i seria a máxima proporção do input $\underline{i}$ que o OCP consideraria ser de fornecer ao sector k. (Claro, $x_{ik}^{o} \leqslant \beta_k^i \bar{x}_i$). (1) Se de facto $x_{ik}^{\infty} > \beta_k^i \bar{x}_i$ então temos uma situação de escassez que pode ser transmitida ao sector k se o OCP dá instruções ao sector i para fornecer apenas $\beta_k^i \bar{x}_i$

---

(1) A situação $x_{ik}^{\infty} > \beta_k^i \bar{x}_i$ não poderá ser interpretada rigorosamente como um caso de sucção tal como é definido em Kornai (1971, pag. 253) porque não é fácil interpretar $\bar{x}_j$ como uma aspiração de compradores. Contudo, é um caso semelhante de escassez.

ao sector k. E esta situação pode ainda ser transmitida ao sector j se k produzir apenas $x_k = f_{ik}^{-11}(\bar{x}_{ik}, \bar{x}_i)$ onde $\bar{x}_{ik} = \beta_k^i \, \bar{x}_i$.

Se o sistema de transmissão de informação for o da variação de preços, esta situação leva a um aumento do preço relativo de i. Outros sectores poderão consumir relativamente menos da produção do sector i e a proporção β_k^i pode, portanto, aumentar.

Tendo analisado o GM de um ponto de vista geral em todo este capítulo, estamos agora aptos a estudar uma especificação mais concreta deste tipo de modelos.

REFERÊNCIAS

JOHANSEN, Leif, "Lectures on macroeconomic planning", North-Holland, 1978.

KORNAI, János, "Anti-equilibrium", North-Holland, 1971.

SHEPHARD, Ronald W., "Theory of cost and production functions", Princeton University Press, New Jersey, 1970.

CAPÍTULO 3

O MODELO GM: ESPECIFICAÇÃO CONCRETA

1. Introdução

A especificação do GM que vamos utilizar no presente Capítulo assegura que o modelo é sempre tratável e inclui os casos mais importantes de flexibilidade. A hipótese mais importante é a seguinte

HIPÓTESE Para todos os pares (i,j), tem-se

$$C_0^{ij} \leqslant \frac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_j} \leqslant C_1^{ij} \quad \text{onde} \quad C_0^{ij} \quad \text{e} \quad C_1^{ij}$$

são constantes, e $C_0^{ij} \geqslant 0$. Além disso

$$\sum_j \frac{f_{ji}(x_j,x_i)}{x_i} = A_i, \quad 0 < A_i \leqslant 1, \quad \forall i = 1,\dots,n.$$

Com esta hipótese podemos escrever

$$f_{ij}(x_i,x_j) = \left[(1-\alpha^{ij})\, C_0^{ij} + \alpha^{ij} C_1^{ij}\right] x_j$$

$$\text{com} \quad 0 \leqslant \alpha^{ij} \leqslant 1 \quad \text{e} \quad \alpha^{ij} = g^{ij}(x_i,x_j).$$

Quando A_i é uma constante, existe um sector residual que, por convenção, consideramos ser o sector $\underline{n}$. (Uma interpretação deste facto é fornecida mais adiante, pag. 73 .) Para o n-ésim sector temos, desta forma,

$$A_i - \sum_{j=1}^{n-1} C_0^{ji} \geqslant \frac{f_{ni}(x_n, x_i)}{x_i} \geqslant A_i - \sum_{j=1}^{n-1} C_1^{ji}$$

e, para assegurar que $x_{ni} \geqslant 0$ é suficiente que

$A_i \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} C_1^{ji}$. A nossa especificação pode, assim, ser resumida da seguinte maneira

$$x_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j) = \left[\left(1-g^{ij}(x_i, x_j)\right) C_0^{ij} + g^{ij}(x_i, x_j)\; C_1^{ij}\right] x_j$$

$$0 \leqslant g^{ij}(x_i, x_j) \leqslant 1 \qquad C_1^{ij} \geqslant C_0^{ij} \geqslant 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n-1 \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{f_{ji}}{x_i} = A_i \qquad i = 1, \ldots, n \qquad 0 < A_i \leqslant 1$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} C_1^{ji} \leqslant A_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

Podemos estudar agora alguns casos de interesse relacionados com as funções $g^{ij}(x_i, x_j)$.

2. O caso geral $\alpha^{ij} = g^{ij}(x_i, x_j)$

Em primeiro lugar, teremos de assegurar que esta formulação seja consistente com a formulação mais geral do GM vista no Capítulo 2.

2.1 Condições para $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \geqslant 0$ e $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} > 0$

Temos $\quad f_{ij}(x_i,x_j) = \left[C_0^{ij} + g^{ij}(x_i,x_j)(C_1^{ij} - C_0^{ij})\right] x_j$

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} = C_0^{ij} + \left(C_1^{ij} - C_0^{ij}\right)\left(g^{ij}(x_i,x_j) + \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_j} x_j\right)$$

Quando $\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{g^{ij}} > - \frac{C_0^{ij}}{C_1^{ij} - C_0^{ij}} \cdot \frac{1}{g^{ij}} - 1$, obtemos

$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} > 0$. Portanto, se $e_{x_j}^{g_{ij}} > -1$ temos

$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} > 0$.

Em relação a $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}$ temos

$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} = \left(C_1^{ij} - C_0^{ij}\right) \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} x_j$ e é suficiente que

$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} \geqslant 0$ para obter $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \geqslant 0$.

2.2 Homogeneidade e quase-homogeneidade

Quando se trata de teoria de produção é útil, muitas vezes, considerar aspectos relativos à homogeneidade da função de produção. Mesmo sem introduzir preços, isto pode ser essencial relativamente à teoria do crescimento, uma vez que no caso de homogeneidade é possível concluir alguma coisa acerca do comportamento do output quando os inputs crescem a uma determinada taxa λ. Nesta secção tentaremos investigar a compatibilidade entre homogeneidade e as nossas hipóteses relativas ao GM.

Para esse fim, usaremos o conceito de quase-homogeneidade (QH). (Veja-se Al-Ayat et al (1979).)

Diz-se que a função $h(x_1,\ldots,x_n)$ é QH de grau $\underline{m}$ dados $k_1,\ldots,k_n$ se, e só se, para cada $\lambda > 0$

$$h(\lambda^{k_1}x_1,\lambda^{k_2}x_2,\ldots,\lambda^{k_n}x_n) = \lambda^m\, h\,(x_1,\ldots,x_n)$$

Não é difícil provar alguns teoremas relativos a estas funções [(1)], nomeadamente:

- A função $h(x_1,\ldots,x_n)$ é QH de grau $\underline{m}$ dados $(k_1,\ldots,k_n)$ se e só se é QH de grau $m/_p$ dados $(k_{1/p},\ldots,k_{n/p})$.
- Se $y = h(x_1,x_2)$ é homogénea (H) de grau $\underline{n}$ e se $x_1 = h^{-11}(x_2,y)$ existe, $h^{-11}(x_2,y)$ é QH de grau $1/n$ dados $(1/n,1)$ ou, o que é o mesmo, é QH de grau 1 dados $(1,n)$. Se a notação for $x_1 = h^{-11}(y,x_2)$, h^{-11} será QH de grau $1/n$ dados $(1,1/n)$. (O mesmo é verdadeiro para $x_2 = h^{-12}(y,x_1)$.)

---

(1) Ver APÊNDICE 1

- Inversamente, se $x_1 = \psi(x_2, y)$ é QH de grau 1 dados $(1,n)$ e se $y = \psi^{-1}(x_1, x_2)$ existe, ψ^{-1} é H de grau n.

Consideremos agora a i-ésima componente da função de produção isto é, $x_j = f_{ij}^{-11}(x_{ij}, x_i)$. Se f_{ij}^{-11} é H de grau N, $x_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$ QH de grau 1 dados $(1,N)$. Isto é, para cada $\lambda > 0$

$$f_{ij}(\lambda x_i, \lambda^N x_j) = \lambda f_{ij}(x_i, x_j)$$

e com

$\lambda = x_j^{-1/N}$ temos

$$f_{ij}\left(\frac{x_i}{x_j^{1/N}}, 1\right) = \frac{1}{x_j^{1/N}} f_{ij}(x_i, x_j)$$

Por consequência,

$$\frac{f_{ij}(x_i, x_j)}{x_j} = x_j^{\frac{1-N}{N}} f_{ij}\left(\frac{x_i}{x_j^{1/N}}, 1\right)$$

Com $x_i = x_j^{1/N}$ temos

$$\frac{f_{ij}(x_i, x_j)}{x_j} = x_j^{\frac{1-N}{N}} f_{ij}(1,1)$$

e $\dfrac{f_{ij}(x_i, x_j)}{x_j}$

torna-se maior que C_1^{ij} para suficientemente grandes montantes de x_j (se $N < 1$), ou para suficientemente pequenos montantes de x_j se $N > 1$, conforme os casos. Provamos assim o seguinte teorema:

<u>TEOREMA 13</u> Se o GM for especificado como no presente Capítulo e se as funções de produção tiverem componentes homogéneas, não é possível para o modelo ser definido para todos os $X \geqslant \Theta$ excepto se o grau de homogeneidade for $N = 1$.

O resultado é, de certo modo, desencorajante. Quando queremos o máximo grau de flexibilidade (II) para o GM estamos, ipso facto, a excluir todas as funções de produção de componentes homogéneas, à excepção do caso $N = 1$. Assim, teremos duas possibilidades, se queremos manter o máximo grau de flexibilidade (II):

a) Trabalhar com funções de produção H de grau 1, o que é equivalente a considerar funções $x_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$ H de grau 1

b) Utilizar uma aproximação às funções f_{ij} QH de grau 1 dados (1,N), usando funções f_{ij} QH de grau N dados (1,1

Vamos examinar cada uma destas possibilidades.

3. Funções $f_{ij}(x_i,x_j)$ H de grau 1 e QH de grau N dados (1,N)

3.1 Funções f_{ij} H de grau 1

Como $f_{ij}(x_i,x_j) = \left[C_0^{ij} + \left(C_1^{ij} - C_0^{ij}\right) g^{ij}(x_i,x_j)\right] x_j$, se

$f_{ij}(x_i,x_j)$ é H de grau 1, $g^{ij}(x_i,x_j)$ é H de grau 0, isto é,

$$g^{ij}(x_i,x_j) = g^{ij}\left(\frac{x_i}{x_j}\right) ,$$

para a qual continuaremos a utilizar o mesmo símbolo g^{ij}.

Esta situação acontece quando os coeficientes técnicos se mantêm constantes quando as produções de todos os sectores crescem à mesma taxa. Em algumas teorias do crescimento esta é um hipótese bem conhecida: em equilíbrio dinâmico não existem alterações de tecnologia.

Um exemplo possível de uma formulação deste tipo é o seguinte:

$$\alpha^{ij} = g^{ij}\left(\frac{x_i}{x_j}\right) = \frac{1}{1 + h^{ij}\left(\frac{x_i}{x_j}\right)} \quad \text{em que} \quad h^{ij}$$

é uma função não-crescente de $\dfrac{x_i}{x_j}$.

É, também, interessante notar que, com $g^{ij} = g^{ij}\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)$, para se ter $\dfrac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} \geqslant 0$ e $\dfrac{\partial f^{ij}}{\partial x_j} > 0$ é suficiente que

$$\frac{dg^{ij}}{d\frac{x_i}{x_j}} \geqslant 0 \qquad \text{e} \qquad e^{\,g_{ij}}_{\,\frac{x_i}{x_j}} < 1$$

onde "e" representa a elasticidade.

A primeira condição é óbvia. Para a segunda, temos

$$0 < \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} = - \frac{dg^{ij}}{d\,\frac{x_i}{x_j}} \cdot \frac{x_i}{x_j^2} \left(C_1^{ij} - C_0^{ij}\right) x_j + C_0^{ij} + g^{ij}\left(\frac{x_i}{x_j}\right)\left(C_1^{ij} -\right.$$

e é suficiente que

$$\frac{dg^{ij}}{d\frac{x_i}{x_j}} \cdot \frac{x_i}{x_j} \left(C_1^{ij} - C_0^{ij}\right) < g^{ij} \left(\frac{x_i}{x_j}\right) \left(C_1^{ij} - C_0^{ij}\right)$$

3.2 Funções f_{ij} QH de grau N dados (1,N)

Temos $$f_{ij}(\lambda x_i, \lambda^N x_j) = \lambda^N f_{ij}(x_i, x_j)$$

e $$\left[C_0^{ij} + \left(C_1^{ij} - C_0^{ij}\right) g^{ij} \ (\lambda x_i, \lambda^N x_j)\right] \lambda^N x_j =$$

$$= \lambda^N \left[C_0^{ij} + \left(C_1^{ij} - C_0^{ij}\right) g^{ij} \ (x_i, x_j)\right] x_j$$

Portanto $g^{ij}(\lambda x_i, \lambda^N x_j) = g^{ij}(x_i, x_j)$, isto é, g^{ij} é QH de grau 0 dados (1,N). Com $\lambda = x_j^{-1/N}$ temos

$$g^{ij}(x_i, x_j) = g^{ij}\left(\frac{x_i}{x_j^{1/N}}, 1\right) = g^{ij}\left(\frac{x_i}{x_j^{1/N}}\right)$$, para o qual

mantemos o mesmo símbolo g^{ij}. Um exemplo que é possível para todos os pares (x_i, x_j) é o seguinte:

$$\alpha^{ij} = g^{ij}(x_i, x_j) = \frac{1}{1 + h^{ij}\left(\dfrac{x_i}{x_j^{1/N}}\right)}$$ onde h^{ij} é uma função não-crescente.

Como no parágrafo anterior, é fácil de verificar que, se

$$\frac{dg^{ij}}{d\dfrac{x_i}{x_j^{1/N}}} \geqslant 0 \quad \text{e} \quad N > e_{\frac{x_i}{x_j^{1/N}}}^{g_{ij}}, \quad \text{temos} \quad \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \geqslant 0 \text{ e } \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} > 0.$$

Notemos também que se f_{ij} é QH de grau N dados (1,N), temos para a função procura $x_i = f_{ij}^{-12}(x_{ij}, x_i)$:

$$f_{ij}^{-12}(\lambda^N x_{ij}, \lambda^N x_j) = f_{ij}^{-12}\left[f_{ij}(\lambda x_i, \lambda^N x_j), \lambda^N x_j\right] = \lambda x_i$$

e f_{ij}^{-12} é H de grau 1/N. Isto significa que, se não é possível ter o máximo grau de flexibilidade (II) com funções de produçã de componentes homogêneas de grau $N \neq 1$, é, todavia possível te o máximo grau de flexibilidade (II) com funções procura H de grau $N \neq 1$.

Obviamente, isto resulta de não se impor também um grau má ximo de flexibilidade (I). Embora não necessitemos de ter sempi um grau máximo de flexibilidade (I) existe, no entanto, uma cor dição <u>fraca</u> de flexibilidade (I) que as funções f_{ij} deveriam ve rificar.

4. Condição fraca de flexibilidade (I)

Para $x_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$ fazer sentido é necessário que $f_{ij}(x_i, x_j) \leqslant x_i$.

Com $f_{ij}(x_i, x_j) - x_i = 0$ podemos definir uma função implícita

$$x_i = x_i^{MIN}(x_j)$$

tal que, para cada x_j obtemos o valor mínimo de x_i que torna a especificação $f_{ij}(x_i, x_j)$ com significado.

É uma hipótese natural admitir que $\dfrac{dx_i^{MIN}}{dx_j} > 0$, isto é, que para valores superiores de x_j sejam necessários maiores valores a produzir pelo sector i.

Desta forma,

$$\frac{dx_i^{MIN}}{dx_j} = \frac{\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_j}}{1 - \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}} > 0, \quad \text{isto é,} \quad \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} < 1.$$

A condição $\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} < 1$ pode ser escrita para diferentes especificações de $g^{ij}(x_i, x_j)$.

- caso geral $\quad g^{ij}(x_i, x_j) \quad \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} < \dfrac{1}{x_j} \dfrac{1}{C_1^{ij} - C_0^{ij}}$

- $g^{ij} = g^{ij}\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right) \quad \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{dg^{ij}}{d\dfrac{x_i}{x_j}} < \dfrac{1}{C_1^{ij} - C_0^{ij}}$

- $g^{ij} = g^{ij}\left(\dfrac{x_i}{x_j^{1/N}}\right) \quad \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{dg^{ij}}{d\dfrac{x_i}{x_j^{1/N}}} < \dfrac{1}{C_1^{ij} - C_0^{ij}} \dfrac{1}{x_j^{\frac{N-1}{N}}}$

5. Resumo das secções 1 - 4. Um exemplo.

Para obter uma especificação, com sentido, de $f_{ij}(x_i,x_j)$ temos de impor condições às funções g^{ij}.

a) Para ter $\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \geqslant 0$ e $\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} > 0$, basta

supor que $\dfrac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} \geqslant 0$ e $e_{x_j}^{g_{ij}} > -1$.

b) Se $\dfrac{dx_i^{MIN}(x_j)}{dx_j} > 0$, temos $\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} < 1$ e

$0 \leqslant \dfrac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} < \dfrac{1}{x_j} \; \dfrac{1}{c_1^{ij} - c_0^{ij}}$. Portanto $\lim\limits_{x_j \to \infty} \dfrac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} =$

Uma vez que $\dfrac{f_{ij}}{x_j} = c_0^{ij} + \left(c_1^{ij} - c_0^{ij}\right) g^{ij}(x_i,x_j)$, temos

$$\frac{\partial \dfrac{f^{ij}(x_i,x_j)}{x_j}}{\partial x_i} = \left(c_1^{ij} - c_0^{ij}\right) \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_i}$$

e podemos concluir que, quando $x_j \to \infty$, o coeficiente técnico do sector i para o sector j se torna cada vez mais rígido em relação a x_i. Portanto, é possível dizer que, com esta hipótese, o sistema se torna mais rígido com o crescimento económico.

c) Se $C_0^{ij} \leqslant \frac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_j} \leqslant C_1^{ij}$ para todos os pares (x_i,x_j), as funções de produção não podem ter componentes homogêneas de grau $N \neq 1$. Contudo, as funções procura poderão ter.

Um exemplo de uma função f_{ij} H de grau 1 que satisfaz todas estas condições é:

$$f_{ij}(x_i,x_j) = \left[C_0^{ij} + \left(C_1^{ij} - C_0^{ij} \right) \cdot \frac{x_i}{x_i + x_j} \right] x_j$$

$$f_{ij}(x_i,x_j) = \frac{C_1^{ij} x_i x_j + C_0^{ij} x_j^2}{x_i + x_j}$$

$$g^{ij}(x_i,x_j) = \frac{x_i}{x_i + x_j} = \frac{x_i/x_j}{1 + x_i/x_j}$$

e com $z = x_i/x_j$

$$\frac{dg^{ij}(z)}{dz} = \frac{1}{(1+z)^2} < 1 < \frac{1}{C_1^{ij} - C_0^{ij}}$$

$$e_z^{g^{ij}} = \frac{1}{1+z} < 1$$

6. Flexibilidade do modelo

Uma vez que, para todos os (i,j) temos $C_0^{ij} \leqslant \frac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_j} \leqslant C_1^{i}$

usando o Teorema 1 (pag. 14) podemos dizer que o GM, tal como foi formulado neste Capítulo, é mais flexível (I) e (II) do que o modelo $X = C_1^* X + Y$ onde

$$C^* = \begin{bmatrix} C_1 \\ d_1 \end{bmatrix} , \quad C_{1\,(n-1xn)} = \left\{ C_1^{ij} \right\} , \quad d_1 = \left[A_1 - \sum_{j=1}^{n-1} C_0^{j1}, \ldots, A_n - \sum_{j=1}^{n-1} C_0^{jn} \right.$$

e menos flexível que o modelo $X = C_o^* X + Y$, com notações similares.

Por outro lado, como $A_i \leqslant 1$, podemos concluir que esta especificação do GM tem o máximo de flexibilidade (II).

Usando esta especificação é, agora, possível dar o exemplo de um modelo ideal, tal como foi prometido anteriormente (pag.
Consideremos o modelo

$$f_{ii}(x_i) = \beta_{ii} x_i \qquad \underset{i \neq j}{f_{ij}}(x_i, x_j) = \frac{\beta_{ij} x_i x_j}{x_i + n x_j} \qquad i,j = 1,\ldots,n$$

Com

1) $\sum_{j \neq i} \frac{\beta ij}{n} + \beta_{ii} < 1 \qquad i = 1,\ldots,n$

2) $\sum_{j \neq i} \beta_{ji} + \beta_{ii} < 1$

Esta especificação pode escrever-se

$$f_{ij}(x_i, x_j) = \left[0 + (\beta_{ij} - 0) \cdot \frac{1}{1 + n \frac{x_j}{x_i}} \right] x_j$$

$$C_0^{ij} = \delta_{ij}\beta_{ij} \quad , \quad (\delta_{ij} = \text{Kronecker}) \quad , \quad C_1^{ij} = \beta_{ij}$$

$$g^{ij}(x_i,x_j) = \frac{1}{1 + n\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)^{-1}}$$

A única diferença entre esta e a nossa anterior especificação é que $\sum_{j=1}^{n} x_{ji}/x_i$ não é necessariamente constante. Mas esta não é uma característica essencial do GM.

Para provar que o modelo é ideal, usamos 2) para obter

$$\sum_{j\neq i} \beta_{ji}x_i + \beta_{ii}x_i < x_i, \quad \text{e assim}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ji}(x_j,x_i) \leqslant \sum_{j\neq i} \beta_{ji}x_i + \beta_{ii}x_i < x_i$$

e o modelo tem o máximo de flexibilidade (II).

Por outro lado, de 1)

$$x_i - \sum_j f_{ij}\ (x_i,x_j) = x_i(1 - \beta_{ii}) - \sum_{j\neq i} \frac{\beta_{ij}x_ix_j}{x_i + nx_j} =$$

$$= x_i(1 - \beta_{ii}) - x_i \sum_{j\neq i} \frac{\beta_{ij}x_j}{x_i + nx_j} > x_i(1-\beta_{ii}) - x_i \sum_{j\neq i} \frac{\beta_{ij}}{n} >$$

$$> x_i(1 - \beta_{ii}) - x_i(1 - \beta_{ii}) = 0$$

e o modelo tem o máximo grau de flexibilidade (I).

Notemos que, tal como o Teorema 6 demonstra, se tem $\inf \left[A(X)\right]$ com $\hat{B} = \left\{\delta_{ij}\beta_{ij}\right\}$.

7. O SM e a flexibilidade

Em muitos casos, as condições que são impostas sobre as funções $f_{ij}(x_j)$ do SM são introduzidas no ponto $X = \Theta$.(1)

Contudo, conforme vimos anteriormente (pag.18), um modelo SM nunca pode ser ideal e, portanto, não existe razão para crer que, quando consideramos todos os n sectores simultaneamente faça sentido definir $f_{ij}(x_j)$ na origem ou próximo dela.

Uma formulação que talvez valha a pena introduzir é aquela que corresponde à formulação do GM. Isto é:

$$x_{ij} = f_{ij}(x_j) = \left[c_0^{ij} + \left(c_1^{ij} - c_0^{ij}\right) g^{ij}(x_j)\right] x_j$$

com $0 \leqslant g^{ij}(x_j) \leqslant 1$. Neste caso, temos $\mathfrak{X}_{C_0} \supset \mathfrak{X} \supset \mathfrak{X}_{C_1}$ e $\mathfrak{W}_{C_0} \supset \mathfrak{W} \supset \mathfrak{W}_{C_1}$, e, com $\sum_j c_1^{ji} < 1$ para cada i, o sistema tem o máximo grau de flexibilidade (II).

Também é interessante verificar o que acontece, neste caso, à condição $f'_{ij}(x_j) \leqslant f'_{ij}(0)$, utilizada por Sandberg. Temos

$$f'_{ij}(x_j) = \left[c_0^{ij} + \left(c_1^{ij} - c_0^{ij}\right) g^{ij}(x_j)\right] + \left(c_1^{ij} - c_0^{ij}\right) g'^{ij}(x_j) \cdot x_j$$

e $\quad f'_{ij}(x_j) \leqslant c_0^{ij} + \left(c_1^{ij} - c_0^{ij}\right) g^{ij}(0) = f'_{ij}(0) \iff$

---

(1) Veja-se, por exemplo, Sandberg (1973) onde $f'_{ij}(x_j) < f'_{ij}(0)$.

$$\Leftrightarrow \quad g^{ij}(0) - g^{ij}(x_j) \geqslant g^{ij'}(x_j)\cdot x_j$$

que é sempre verificada quando $g^{ij'}(x_j) \leqslant 0$.

Por outro lado, uma vez que $0 \leqslant g^{ij}(x_j) \leqslant 1$, temos

$g^{ij}(0) - g^{ij}(x_j) \leqslant 1$ e

$$g^{ij'}(x_j) \leqslant \frac{1}{x_j}$$

Integrando entre 1 e x_j temos

$$g^{ij}(x_j) - g^{ij}(1) \leqslant \log x_j.$$

Como $\quad g^{ij}(x_j) = \dfrac{f_{ij}(x_j)}{x_j\left(C_1^{ij} - C_0^{ij}\right)} - \dfrac{C_0^{ij}}{C_1^{ij} - C_0^{ij}}$, temos

$$g^{ij}(x_j) - g^{ij}(1) = \frac{f_{ij}(x_j)}{x_j\left(C_1^{ij} - C_0^{ij}\right)} - \frac{f_{ij}(1)}{C_1^{ij} - C_0^{ij}} \leqslant \log x_j$$

e

1) $\quad f_{ij}(x_j) \leqslant \left[\log x_j \left(C_1^{ij} - C_0^{ij}\right) + f_{ij}(1)\right] x_j, \qquad x_j \geqslant 1.$

Contudo, quando $f'_{ij}(x_j) \leqslant f'_{ij}(0)$ temos, para todos os $x_j \geqslant 0$

2) $\quad f_{ij}(x_j) \leqslant f'_{ij}(0)x_j + f_{ij}(0) = f'_{ij}(0)\cdot x_j$

Comparando 1) e 2) vemos que 1) não é sempre trivial porque quando $f'_{ij}(0) \geqslant f'_{ij}(x_j)$ e

$$0 \leqslant \log x_j < \frac{f'_{ij}(0) - f_{ij}(1)}{C_1^{ij} - C_0^{ij}} \quad , \text{ temos}$$

$$\frac{f_{ij}(x_j)}{x_j} \leqslant \left[\left(C_1^{ij} - C_0^{ij} \right) \log x_j + f_{ij}(1) \right] < f'_{ij}(0)$$

e assim encontramos uma condição (1) que é verificada pelo SM com a especificação assumida quando $f'_{ij}(x_j) \leqslant f'_{ij}(0)$.

REFERÊNCIAS

AL-AYAT, Rokaya and FARE, Rolf, "Almost Ray-Homothetic Production Correspondences", Journal of Economics, Springer-Verlag, Vol. 39, No. 1-2, 1979.

KOLM, Serge-Christophe, "Structures meta-homogènes des productions et préférences", CEPREMA, Paris.

SANDBERG, I.W., "A Nonlinear Input-Output Model of a Multisectored Economy", Econometrica, Vol 41, No. 6, 1973.

APÊNDICE 1

FUNÇÕES QUASE-HOMOGÊNEAS

DEFINIÇÃO $F(x_i, \ldots, x_n)$ é QH de grau N dados $(M_1, \ldots, M_n)$ se, e só se, para cada $\lambda > 0$

$$F(\lambda^{M_1} x_1, \ldots, \lambda^{M_n} x_n) = \lambda^N F(x_1, \ldots x_n)$$

TEOREMA 14 Se $F(x_1, \ldots, x_n)$ é QH de grau N dados $(M_1, \ldots, M_n)$ então

$$N = \sum_{i=1}^{n} M_i e^F_{x_i} \qquad \text{onde} \qquad e^F_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{F}$$

Dem:

$$F(\lambda^{M_1} x_1, \ldots, \lambda^{M_n} x_n) - F(x_1 \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i (\lambda^{M_i} - 1) + \sigma$$

onde $\sigma \to 0$ quando $\lambda^{M_i} \to 1$ isto é, quando $\lambda \to 1$

Como $F(x_1, \ldots, x_n)$ é QH

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i (\lambda^{M_i} - 1) + \sigma = (\lambda^N - 1) F(x_1, \ldots, x_n)$$

dividindo por $(\lambda - 1) F(x_1, \ldots x_n)$ obtemos

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{F} \frac{\lambda^{M_i} - 1}{\lambda - 1} + \frac{\sigma}{(\lambda - 1) F} = \frac{\lambda^N - 1}{\lambda - 1}$$

Quando $\lambda \to 1$, como σ é de ordem superior a $\sqrt{\sum(\lambda^{M_i} - 1)^2 x_i^2}$

e $\lim\limits_{\lambda \to 1} \dfrac{\lambda^{M_i} - 1}{\lambda - 1} = M_i$, temos

$$\sum_i e^F x_i M_i = N$$

q.e.d.

<u>TEOREMA 15</u> Se $F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$ e $g_i(x_i)$ são H de grau $M_i \neq 0$, $F(x_1, \ldots x_n)$ é QH de grau M_1 dados $\left(1, \dfrac{M_1}{M_2}, \ldots, \dfrac{M_1}{M_n}\right)$

Dem:

$$F\left(\lambda x_1, \lambda^{\frac{M_1}{M_2}} x_2, \ldots, \lambda^{\frac{M_1}{M_n}} x_n\right) = \sum_i g_i\left(\lambda^{\frac{M_1}{M_i}} x_i\right) =$$

$$= \sum_i \lambda^{M_1} g_i(x_i) = \lambda^{M_1} \sum_i g_i(x_i) = \lambda^{M_1} F(x_1, \ldots, x_n)$$

q.e.d.

<u>TEOREMA 16</u> Se $x_1 = \psi(x_2, y)$ é QH de grau 1 dados $(1, M)$ e se $y = \psi^{-1}(x_1, x_2)$ existe, ψ^{-1} é H de grau M.

Dem: $$\psi^{-1}(\lambda x_1,\lambda x_2) = \psi^{-1}\left[\lambda\psi(x_2,y),\lambda x_2\right] =$$

$$= \psi^{-1}\left[\psi(\lambda x_2,\lambda^M y),\lambda x_2\right] = \lambda^M y = \lambda^M \psi^{-1}(x_1,x_2)$$

q.e.d.

<u>TEOREMA 17</u> Se $y = h(x_1,x_2)$ é H de grau M e se $x_1 = h^{-1}(x_2,y)$ existe, $h^{-1}(x_2,y)$ é QH de grau $1/M$ dados $(1/M, 1)$.

Dem: $$h^{-1}(\lambda^{1/M}x_2,\lambda y) = h^{-1}\left[\lambda^{1/M}x_2,\lambda h(x_1,x_2)\right] =$$

$$= h^{-1}\left[\lambda^{1/M}x_2, h\left(\lambda^{1/M}x_1,\lambda^{1/M}x_2\right)\right] = \lambda^{1/M}x_1 =$$

$$= \lambda^{1/M}h^{-1}(x_2,y)$$

q.e.d

<u>TEOREMA 18</u> Se $y = f(x_1,x_2)$ é H de grau $M \neq 1$, e se $x_1 = f^{-1}(x_2,y)$ existe e é uma função homogênea, $f(x_1,x_2)$ tem elasticidades parciais constantes.

Dem: Pelo Teorema 17, f^{-1} é QH de grau $1/M$ dados $(1/M, 1)$. Pelo Teorema 14,

$$e_{x_2}^{f^{-1}} \cdot \frac{1}{M} + e_{y}^{f^{-1}} = \frac{1}{M} .$$

Se f^{-1} for também função homogênea de grau P, temos

$$e_{x_2}^{f^{-1}} + e_{y}^{f^{-1}} = P. \qquad \text{Então}$$

$$e_{x_2}^{f^{-1}} \left(\frac{1}{M} - 1\right) = \frac{1}{M} - P \quad \text{e se} \quad M \neq 1, \quad e_{x_2}^{f^{-1}}$$

é constante, e também o é $e_{y}^{f^{-1}}$. Quando f^{-1} é uma função de elasticidades constantes, também o é $f(x_i, x_2)$.

C A P Í T U L O 4

A SOLUÇÃO DE $X = X(Y)$

Chegamos a uma altura do nosso estudo que permite analisa as condições que asseguram a existência de uma solução $X \geqslant \Theta$ p ra cada vector $Y \geqslant \Theta$.

Nas análises tradicionais, nomeadamente as referentes ao SM e ao LM, este problema tem sido cuidadosamente estudado, um vez que tem uma importância fundamental no processo de planeamento a médio ou longo prazos. É interessante, agora, examina este problema usando a especificação do GM considerada no Capítulo anterior. Porém, antes de iniciarmos esta análise teremos de dizer mais alguma coisa acerca do sector n que, conforme di semos, é um sector considerado residual.

1. O sector n

A formulação $x_{ni} = A_i x_i - \sum_{j=1}^{n-1} f_{ji}(x_j, x_i)$ faz sentido sempre que considerarmos que a contribuição dos factores primários para o processo produtivo não é substancialmente diferente da cor tribuição dos inputs intermédios. Com efeito, neste caso, se considerarmos o sector n representando a contribuição dos facto res primários para a produção de cada sector, o aumento da contribuição relativa dos inputs intermédios causa um decréscimo d contribuição relativa dos inputs primários e vice-versa.

Neste Capítulo suporemos que o valor acrescentado em cada sector j pode ser dividido em duas partes: uma que representa a contribuição dos inputs primários e outra que representa o excedente gerado no sector j. Assim,

$$x_j - \sum_{i=1}^{n-1} x_{ij} = \underbrace{(1-A_j)x_j}_{\text{excedente}} + \underbrace{\left[A_j x_j - \sum_{i=1}^{n-1} f_{ij}(x_i, x_j) \right]}_{\text{contribuição dos factores primários}}$$

Como sempre ao longo do presente trabalho, todas as variáveis se encontram avaliadas a preços constantes de um dado período.

Outras hipóteses são feitas relativamente aos fluxos x_{nj}:

$x_{nn} = 0$ Isto é, não existe contributo directo dos factores primários para a sua contribuição para a produção;

$x_{in} = 0$ Os inputs primários não são produzidos durante o período da produção. A sua contribuição é obtida exclusivamente de um dado stock existente no início do período do processo produtivo. Uma alternativa podia ser a de se considerar x_{in} = produção do bens destinados à manutenção da força de trabalho à substituição do stock de capital; neste caso, porém, poderia mesmo pôr-se a questão de se saber se deveriam continuar a ser denominados factores primários;

$y_n = 0$ Não existe contribuição directa dos factores primários para a procura final.

Notemos que, com estas hipóteses, cada componente y_i (i=1,...,n- pode ser dividida em quatro partes:

$$y_i = y_i^1 + y_i^2 + y_i^3 + y_i^4$$

onde

y_i^1 = contribuição do sector i para a substituição de ben: de capital usados no processo produtivo, mantendo as sim o stock de capital apto a funcionar no período seguinte;

y_i^2 = contribuição do sector i para o stock de bens de cor sumo necessários à manutenção da força de trabalho para o período seguinte;

y_i^3 = contribuição do sector i para o aumento do stock de capital;

y_i^4 = contribuição do sector i para o consumo não essencia

Nesta dissertação não analisaremos cada uma destas componentes separadamente, embora, indubitavelmente esse assunto co titua uma questão importante, como o modelo dinâmico de Leontieff demonstra. Por conseguinte, para cada sector i (i=1,...,n-1), consideraremos o valor agregado y_i, embora ad tamos que esta agregação constitui uma simplificação que pode esconder alguma rigidez importante relativa às diferentes componentes de y_i.

Das hipóteses acima listadas conclui-se que não existe pr priamente uma "produção" x_n. Este montante apenas pode ser interpretado como a soma das contribuições dos inputs primários para a produção de cada um dos restantes sectores.

É a altura de sermos mais específicos acerca do que consideramos ser a contribuição dos factores primários.

DEFINIÇÃO x_{ni} é a soma do valor do stock de capital consumido durante o período de produção com a remuneração da força de trabalho utilizada no mesmo período.

Algumas alternativas poderão ser consideradas em relação trabalho. Uma possibilidade seria a de considerar o valor do trabalho necessário no sentido de Marx (I, pag.136). Contudo, isto levar-nos-ia a trabalhar com valores e não com preços, o que nos conduziria para fora do âmbito do presente trabalho.[1] Uma segu possibilidade seria a de considerar a remuneração do trabalho e x_{ni} como sendo o equivalente ao consumo, a nível mínimo de subsistência, da força de trabalho empregue no sector i. Uma vez que esta alternativa poderia conduzir a dificuldades sobre a interpretação do salário médio que dela resultaria, preferimos inclu em x_{ni} toda a remuneração da força de trabalho empregue no sector, já que poderemos sempre supor verdadeira a hipótese, necessariamente restritiva, de que esta remuneração é exactamente igua ao custo (a preços constantes de um período dado) dos bens necessários à manutenção da força de trabalho.

No que respeita ao stock de capital, uma alternativa seria a de considerar os bens de capital como produtos produzidos conjuntamente, tal como Sraffa (1975, Capítulo X) considera.

(1) Os problemas de misturar preços com valores são analisados em Morishima (1973, Capítulos 6 e 7) e Abraham-Frois (1980, pag. 255)

Contudo, esta hipótese tornaria a análise demasiado complexa em termos formais pelo que preferimos a formulação já re ferida. Podemos agora continuar com a análise.

Quando escrevemos $x_{ni} = A_i x_i - \sum_{j=1}^{n-1} f_{ji}(x_j, x_i)$ estamos a s por que existe uma possibilidade de substituição entre inputs intermédios e factores primários. Consideremos, por exemplo, $x_k = \bar{x}_k$ $(k \neq j, n)$. Para cada j, se x_{jk} (e só ele) varia, existe uma variação simétrica de x_{nk}. Esta possibilidade de substituição introduz um certo realismo na análise porque é perfeitamen te razoável admitir que uma variação no consumo de um input in termédio irá induzir a instalação de diferentes equipamentos c uma utilização diversa da força de trabalho. Contudo, existem também outras consequências que já não são tão positivas mas q teremos necessariamente de admitir ao longo desta análise. Ass

a) Não é possível analisar a substituição capital/trabalho porque a contribuição dos dois factores é tomada em conjunto.

b) Para a mesma produção $\bar{x}_j$, se um uso mais intenso de um input intermédio i levar à utilização de um equipamento de vida mais curta, poderemos ter um aumento em dua contribuições - x_{ij} e x_{nj} - o que, com o mesmo montant $\bar{x}_j$ não é possível com o nosso modelo. Claro que, muito provavelmente, o que nós teríamos nesta situação seria que A_j já não se manteria constante, uma vez que só fa sentido usar um equipamento de vida mais curta se ele for mais barato; portanto, a remuneração do capital (i cluída no excedente $(1-A_j)$) seria menor. Em qualquer ca uma situação deste tipo não pode ser analisada com o no modelo.

2. Existência de uma solução $X \geqslant \Theta$ para cada $Y \geqslant \Theta$

Com a nossa formulação necessitamos apenas de provar a existência de solução para os primeiros n-1 sectores, porque, como

$$A_i \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} c_1^{ji}$$

a não-negatividade de x_{ni} é sempre assegurada.

Por outro lado, uma vez que $x_{in} = 0$ $(i=1,\ldots,n)$, os primei[ros] n-1 sectores podem ser considerados como um bloco separado

$$x_i = \sum_{j=1}^{n-1} f_{ij}(x_i, x_j) + y_i \qquad i = 1,\ldots,n-1$$

Utilizaremos agora um resultado provado por Lahiri (1976) para um modelo mais geral. Lahiri prova que, se f_{ij} forem contí[-] nuas e não-decrescentes (o que é o nosso caso), se $\overline{F}$ for a matriz suprema de

$$\left\{ \frac{f_{ij}(x_i, x_j)}{x_j} \right\} ,$$

e se $\lambda(\overline{F})$ (o maior valor-próprio de $\overline{F}$) for < 1, existe uma solução $X \geqslant \Theta$ para cada $Y \geqslant \Theta$.

Com as nossas hipóteses é extremamente fácil encontrar a m[a]triz $\overline{F}$, uma vez que coincide com a matriz C^1 dos coeficientes $\left\{ c_1^{ij} \right\}$. Por conseguinte, se se tiver $\lambda(C^1) < 1$ a existência de solução está assegurada. Como $1 \geqslant A_i \geqslant \sum_j c_1^{ji}$ $i=1,\ldots,n-1$, bas[ta] assegurar que $1 > A_i$ para que exista a soluçao $X \geqslant \Theta$ para cada $Y \geqslant \Theta$

Isto é, basta supor que cada sector produz um excedente positi vo para se ter a certeza que existe uma solução $X \geqslant \Theta$ para cada $Y \geqslant \Theta$. Ou, alternativamente, que cada sector utiliza sempre uma contribuição positiva de factores primários para produzir um m tante também positivo.

Note-se que esta conclusão só é válida quando

$$C_0^{ij} \leqslant \frac{f_{ij}(x_i,x_j)}{x_j} \leqslant C_1^{ij}$$ é verificada para todos os pares

$(x_i,x_j) \geqslant 0$, e daí a importância da análise que foi feita sobre este assunto.

3. Unicidade da solução

Este problema já não é tão simples de tratar como o anteri Com efeito, as condições 1 e 3 usadas por Lahiri (pag. 953 e 95 não são verificadas, em geral, no nosso caso. Por exemplo, a c dição 3 diz que

$$x_i^1 \geqslant x_i^0, \quad x_j^1 \geqslant x_j^0 \Longrightarrow \frac{f_{ij}(x_i^1,x_j^1)}{x_j^1} \geqslant \frac{f_{ij}(x_i^0,x_j^0)}{x_j^0}$$

o que não é sempre verdadeiro. Teremos de seguir outro caminho

Notemos, em primeiro lugar, que, com as nossas hipóteses acerca do sector <u>n</u>, se provarmos a unicidade para os primeiros <u>n-1</u> sectores, teremos também provado a unicidade para todos os <u>n</u> sectores.

Por conseguinte, podemos começar por demonstrar o seguinte teorema:

TEOREMA 19 Se para cada $i = 1,\dots,n-1$

$$1 > \sum_j \frac{\partial f_{ij}(x_i^{(kj)}, x_j)}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial f_{ij}(x_i^{(lj)}, x_j^{(qj)})}{\partial x_j},$$

então a solução é única.

As notações $x_i^{(k_j)}$, $x_j^{(q_j)}$, $x_j^{(l_j)}$ indicam que as derivadas não são necessariamente calculadas nos mesmos pontos.

Dem: Suponhamos que existem X e Z tais que

$$x_i - \sum_j f_{ij}(x_i, x_j) = z_i - \sum_j f_{ij}(z_i, z_j) = y_i$$

então

$$x_i - z_i - \left[\sum_{j \neq i} f_{ij}(x_i, x_j) - \sum_{j \neq i} f_{ij}(z_i, x_j)\right] -$$

$$- \left[f_{ii}(x_i) - f_{ii}(z_i)\right] - \left[\sum_{j \neq i} f_{ij}(z_i, x_j) - \sum_{j \neq i} f_{ij}(z_i, z_j)\right] =$$

e

$$x_i - z_i - \sum_j \frac{\partial f_{ij}(x_i^{(kj)}, x_j)}{\partial x_i}(x_i - z_i) -$$

$$- \sum_{j \neq i} \frac{\partial f_{ij}(z_i, x_j^{(qj)})}{\partial x_j}(x_j - z_j) = 0$$

onde

$$x_i^{(kj)} \in (x_i, z_i) \qquad e \qquad x_j^{(qj)} \in (x_j, z_j)$$

Podemos escrever

$$N(X - Z) = \Theta$$

onde $$n_{ii} = 1 - \sum_j \frac{\partial f_{ij}(x_i^{(k_j)}, x_j)}{\partial x_i}$$

$$n_{ij} = - \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} (z_i, x_j^{(q_j)})$$

Como

$$1 > \sum_j \frac{\partial f_{ij}(x_i^{(k_j)}, x_j)}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} (x_i^{(1_j)}, x_j^{(q_j)})$$

e $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} > 0$, $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \geqslant 0$, N tem uma diagonal dominante

e N^{-1} existe. Por conseguinte $X = Z$

q.e.d.

OBSERVAÇÃO Chandler (1980), quando trata o SM utiliza a condiç

$$\frac{df_{ij}}{dx_j} \leqslant m_{ij}$$ onde I-M é uma matriz P. (1)

A nossa condição pode verificar-se em certos casos onde não se verifica a de Chandler, como demonstra o seguinte exemplo.

Seja $$\frac{df_{ij}}{dx_j} = \frac{x_j}{2x_j + 1} \qquad i,j = 1,2$$

(1) Isto é, de menores principais positivos.

$$N = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x_1}{2x_1 + 1} & - \dfrac{x_2^*}{2x_2^* + 1} \\ - \dfrac{x_1^{**}}{2x_1^{**} + 1} & 1 - \dfrac{x_2}{2x_2 + 1} \end{bmatrix}$$

Como

$1 > \dfrac{x_1}{2x_1 + 1} + \dfrac{x_2^*}{2x_2^* + 1}$, então N^{-1} existe. Contudo, como

$$m_{ij} = \frac{1}{2}, \qquad I - M = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e $(I - M)^{-1}$ não existe.

4. Monotonia da solução

Um problema diferente é o da monotonia da solução, uma vez que, mesmo que provemos a monotonia para os primeiros n-1 sectores não se segue daí a monotonia também para o sector n.

Comecemos por tentar obter condições para a monotonia em relação aos primeiros n-1 sectores. Temos de provar que, para $Y^1 \geqslant Y^2$ se obtem $X^1 \geqslant X^2$. Empregando as hipóteses e o raciocínio do teorema anterior, temos

$$N\,(X^1 - X^2) = Y^1 - Y^2 \geqslant \Theta$$

Se as condições do teorema se verificam, N tem uma diagonal qua se dominante, é uma matriz P e $N^{-1} \geq [\bar{0}]$.

Então,

$$(X^1 - X^2) = N^{-1}(Y^1 - Y^2) \geq \Theta$$

e provámos o seguint teorema:

<u>TEOREMA 20</u> Nas condições do Teorema 19, a solução é monótona para os primeiros <u>n-l</u> sectores.

No que respeita ao sector <u>n</u>, a monotonia nem sempre se consegue obter. Temos

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_{ni} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} f_{ji}(x_j, x_i)$$

e

$$dx_n = \sum_{i=1}^{n-1} A_i dx_i - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_{ji}}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f_{ji}}{\partial x_i} dx_i \right)$$

$$dx_n = \sum_{i=1}^{n-1} A_i dx_i - \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ji}}{\partial x_i} \right) \right] dx_i$$

(em que f_{ii} não se repete).

Para obter $dx_n \geq 0$ para cada $dx_i \geq 0$, $i=1,\ldots,n-1$ é suficiente que

$$A_i \geq \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ji}}{\partial x_i} \right)$$

A condição $A_i \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ji}}{\partial x_i} \right)$ (sem repetição de f_{ii}

assegura pois uma monotonia local. Para um resultado mais ger bastará assegurar que

$$A_i \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ji}}{\partial x_i} \right) \qquad i = 1,\ldots,n-1$$

mas onde as derivadas poderão ser calculadas em pontos diferentes, como no Teorema 19.(1)

Podemos, assim, identificar as seguintes situações com interesse (em que se entende, sempre, não haver repetição de f_{ii}

a) Para cada $i = 1,\ldots,n-1$

$$A_i \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ji}}{\partial x_i} \right).$$ Se $A_i < 1$ esta condição implica que

$$1 > \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ji}}{\partial x_i} \right).$$ Existe uma solução única e monótona para todos os <u>n</u> sectores.

Dizemos que o sistema é <u>tecnologicamente estável</u>.

---

(1) Como explicámos acima, no exemplo relativo a Chandler, preferimos esta condição a uma condição de supremo.

b) Para cada i=1,...,n-1, pelo menos uma das seguintes condições se verifica

$$1 > \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} \right)$$

$$1 > \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ji}}{\partial x_i} \right)$$

Existe uma solução única e monótona para os primeiros n-1 sectores. Não é garantido que a solução seja monótona para o sector <u>n</u>.

O sistema chama-se <u>tecnologicamente quase-estável</u>. Com ef to, um aumento da procura final não significa necessariamente um aumento da contribuição dos inputs primários, nomeadamente um aumento do emprego. Esta situação poderá ser importante de detectar quando se utilizam políticas conjunturais de pendor Keynesiano no sentido de obter um aumento do emprego através de um aumento da procura efectiva.

c) Se nenhuma das condições a) ou b) é verificada, o sistema é <u>tecnologicamente instável</u>. Podemos obter mais que uma solução $X \geqslant \Theta$ para alguns $Y \geqslant \Theta$.

Podemos agora provar um importante teorema relativo aos primeiros <u>n-1</u> sectores.

TEOREMA 21 Se um sistema econômico B é tal que $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} \leqslant a_{ij}$

$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} \leqslant a_{ii}$ onde as derivadas da última desigualdade não são necessariamente calculadas no mesmo ponto e se $A = \{a_{ij}\}$ é tal que I-A é uma matri P, então $\mathfrak{X}_B$ é um conjunto arco-conexo. $\mathfrak{X}_B$ é o conjunto de todos os $X \geqslant \Theta$ tais que $Y \geqslant \Theta$ onde X e Y se referem aos primeiros n-1 sectores.

OBSERVAÇÃO: Se $\sum_{j \neq i} a_{ij} + a_{ii} < 1$ o sistema é, obviamente, quase-estável.

Começaremos a demonstrar o teorema provando o seguinte le

LEMA A correspondência $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ é contínua.

Dem: Como vimos, para cada Y^1 e Y^2 temos

$$N\,(X^1 - X^2) = Y^1 - Y^2$$

N é uma matriz P, pois $N \geqslant I-A$ e I-A é uma matriz P. Por conseguinte, $X^1 - X^2 = N^{-1}(Y^1 - Y^2)$ e a correspondência $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ existe. Por outro lado,

$$[\bar{0}] \leqslant N^{-1} \leqslant (I - A)^{-1}$$

e, portanto, os elementos de N são sempre finitos e limitados. Por consequência, quando $Y^1 \to Y^2$, $X^1 \to X^2$ e $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ é contínua.

q.e.d.

A demonstração do teorema segue-se imediatamente. Com efeito, como $\{Y \mid Y \geqslant \Theta\}$ é um conjunto arco-conexo e como $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ existe e é unívoca e contínua, $f^{-1}(Y)$ é um conjunto arco-conexo. Mas obviamente,

$$f^{-1}(Y) = \mathcal{X}_B \quad (1)$$

o que prova o teorema.

Temos também, imediatamente, o seguinte corolário:

<u>COROLÁRIO</u> Com a especificação do GM apresentada no Capítulo 1 e com as condições do Teorema 21, $\mathcal{W}_B \cap \mathcal{X}_B$ é um conjunto arco-conexo para os primeiros <u>n-1</u> sectores.

Este corolário é importante porque, para tais sistemas económicos, é sempre possível atingir o vector da capacidade máxima (se ele pertencer a $\mathcal{W}_B \cap \mathcal{X}_B = \mathcal{X}_B$) a partir de qualquer vector dado $X_0 \in \mathcal{X}_B$, sem deixar o conjunto $\mathcal{X}_B$. (Notemos, todavia, que se o sistema não for estável não é certo que o vector $X \leqslant \bar{X}$ - onde $\bar{X}$ é o vector de capacidade máxima - seja susceptível de ser produzido, mesmo que $\bar{X}$ o seja, pois pode existir falta de disponibilidade de factores primários.)

Terminámos, assim, o estudo das condições das soluções do GM, que nos levou também a analisar o problema, já levantado no Capítulo 1, das condições em que é possível afirmar que o conjunto $\mathcal{X}_B$ é conexo.

---

(1) Note-se que é só porque para cada $Y \geqslant \Theta$ existe um $X \geqslant \Theta$ que podemos provar que $f^{-1}(Y) \subset \mathcal{X}_B$.

REFERÊNCIAS

ABRAHAM-FROIS, G., "Elementos de teoria da produção", Estampa, 1980.

CHANDLER, Parkash, "The non-linear input/output model", 1980.

LAHIRI, Sajal, "Input-Output Analysis with Scale-Dependent Coefficients", Econometrica, Vol. 44, No. 5, 1976.

MARX, Karl, "O Capital", Delfos.

MORISHIMA, Michio, "Marx's economics", Cambridge University Press, 1973.

SRAFFA, Piero, "Production of commodities by means of commodities", Cambridge University Press, 1975.

C A P Í T U L O 5

O GM E O CRESCIMENTO ECONÓMICO

1. Introdução

Neste capítulo iremos estudar alguns aspectos relativos ao crescimento económico, embora limitemos a nossa análise ao caso do crescimento equilibrado. Todos os sectores apresentam, assim, um crescimento da produção a uma taxa constante $\lambda > 0$. Trata-se pois da análise de um caminho de crescimento equilibrado, embora este equilíbrio só seja postulado no que respeita à produção, pois não faremos a hipótese de que outras variáveis, como o investimento ou o emprego,cresçam à mesma taxa.

Por outro lado, o quadro da nossa análise não é o mesmo do do modelo dinâmico de Leontieff.(1) Estamos interessados nas condições que permitem que seja gerado um excedente suficiente para a formação de capital necessário para garantir o caminho do crescimento. O valor acrescentado formado em cada sector deverá, assim, ser suficiente para remunerar o emprego no sector, para cobrir o valor do capital consumido durante o processo produtivo e produzir o excedente necessário ao crescimento. Contudo, não investigaremos aqui se a produção de bens de equipamento em cada sector é ou não suficiente para satisfazer a procura de bens de equipamento necessários ao crescimento - que é o problema do modelo dinâmico de Leontieff. Estamos, assim, mais in

---

(1) Para uma análise desse tipo, referida a um modelo não-linear, ver Persson (1980).

teressados "em colunas" do que "em linhas", embora com a consciência que se trata de uma análise parcial.

Duas hipóteses principais irão ser necessárias para este capítulo:

a) O excedente gerado em cada sector é uma proporção constante $(1 - A_i)$ de produção do sector. Em geral $A_i \neq A_j$ m admitimos que todos os A_i se mantêm constantes ao lon do tempo.

b) A taxa de lucro,(1) que nós definimos como sendo

$$T(t) = \frac{(1 - A_i)x_i(t)}{K_i(t)}$$

onde $K_i(t)$ é o stock de capital fixo utilizado no processo produtivo, é suposta igual para todos os sectore embora variável ao longo do tempo.

A hipótese de $T(t)$ ser a mesma para todos os sectores é também considerada por Brody (1970), embora num contexto de certa forma diferente. Para Brody, se existir uma tecnologia constante (coeficientes técnicos e coeficientes de capital constantes) a taxa de lucro e sistema de preços são determinados simultaneamente se taxa de lucro for a mesma para todos os sectores. No n so caso, supomos que a taxa de lucro é a mesma mas ape a preços constantes. Isto significa que a verdadeira ta xa de lucro poderá ser superior ou inferior para cada

(1) Não se trata de uma verdadeira taxa de lucro porque é calcu lada a preços constantes. Poderíamos talvez designá-la por taxa do excedente.

sector de acôrdo com os seus ganhos ou perdas em razões de tr
ca com os outros sectores.

Com a) e b) podemos escrever

$$T(t) = \frac{(1-A_i)x_i(t)}{K_i(t)} = \sum_l \frac{(1-A_l)x_l(t)}{\sum K_l(t)}$$

2. Taxa de lucro, capital e coeficientes capital/produção. Uma análise global.

2.1 A taxa de lucro T(t)

Podemos escrever

$$T(t) = \frac{(1-A_i)x_i(t)}{C_i(t)x_i(t)} = \frac{1-A_i}{C_i(t)} \qquad i = 1,\dots,n-1$$

onde $C_i(t)$ é o coeficiente capital/produção.

Uma vez que consideramos uma economia fechada, o inve
timento líquido é uma proporção $\beta(t)$, $0 \leqslant \beta(t) \leqslant 1$ do excede
te total gerado na economia. Temos então

$$\left[\sum C_i(t)x_i(t)\right]' = \beta(t)\sum(1-A_i)x_i(t)$$

onde o 1º membro é, evidentemente, o investimento. Integra
do ambos os membros de 0 a t, obtemos

$$\int_0^t \beta(t)\sum(1-A_i)x_i(t)dt = \sum C_i(t)x_i(t) - \sum C_i(0)x_i(0$$

---

(1) Como anteriormente o sector $\underline{n}$ é a contribuição dos inputs primários. Os "$\sum$" são calculados de 1 a n-1. O símbolo "/" significa $\frac{d}{dt}$

e, como $\sum c_i(t)x_i(t) = \dfrac{\sum(1-A_i)x_i(t)}{T(t)}$ temos

$$T(t) = \frac{\sum(1-A_i)x_i(t)}{\int_0^t \beta(t)\sum(1-A_i)x_i(t)dt + \sum c_i(0)x_i(0)}$$

Como consideramos um crescimento equilibrado para a produção, $x_i(t) = x_i(0)\,l^{\lambda t}$.[1]

Por conseguinte,

$$T(t) = \frac{\sum(1-A_i)x_i(0)\,l^{\lambda t}}{\sum(1-A_i)x_i(0)\int_0^t \beta(t)\,l^{\lambda t}dt + \dfrac{\sum(1-A_i)x_i(0)}{T(0)}}$$

e, finalmente

1) $$T(t) = \frac{T(0)\,l^{\lambda t}}{1 + T(0)\int_0^t \beta(t)\,l^{\lambda t}dt}$$

Como $0 \leqslant \beta(t) \leqslant 1$, temos

$$\frac{1}{\lambda}(\,l^{\lambda t} - 1) \geqslant \int_0^t \beta(t)\,l^{\lambda t}dt \geqslant 0$$

---

(1) O símbolo "l" representa o número "e".

Portanto
$$\frac{\lambda T(0)\ell^{\lambda t}}{T(0)\ell^{\lambda t}+\left(\lambda - T(0)\right)} \leqslant T(t) \leqslant T(0)\ell^{\lambda t}$$

e temos duas funções que enquadram $T(t)$.

É interessante analisar as condições que asseguram que $T(t)$ seja uma função crescente ou decrescente no tempo.

De 1) temos

$$T'(t) = T(0)\ \frac{\lambda \ell^{\lambda t}\left[1 + T(0)\int_0^t \beta(t)\ell^{\lambda t}dt\right] - T(0)\beta(t)\ell^{\lambda t}\ell^{\lambda t}}{\left[1 + T(0)\int_0^t \beta(t)\ell^{\lambda t}dt\right]^2}$$

e

$$2)\quad T'(t) \gtreqless 0 \iff \lambda T(0)\int_0^t \beta(t)\ell^{\lambda t}dt \gtreqless T(0)\beta(t)\ell^{\lambda t} - \lambda$$

$T(t)$ mantem-se constante se e só se

$$\lambda T(0)\int_0^t \beta(t)\ell^{\lambda t}dt = T(0)\beta(t)\ell^{\lambda t} - \lambda$$

Derivando ambos os membros

$$\lambda T(0)\beta(t)\ell^{\lambda t} = T(0)\left[\lambda\beta(t) + \beta'(t)\right]\ell^{\lambda t}$$

Isto é $\quad T(0)\,\beta'(t) = 0, \qquad \beta(t) = \text{constante}$

Inversamente, se $\beta(t) = \overline{\beta}$ obtemos, de 1)

$$T(t) = \frac{T(0)\,l^{\lambda t}}{1 + T(0)\,\overline{\beta}\,\frac{1}{\lambda}\,(l^{\lambda t} - 1)} = \frac{T(0)\,l^{\lambda t}}{\frac{T(0)\,\overline{\beta}}{\lambda}\,l^{\lambda t} + \left[1 - \frac{T(0)\,\overline{\beta}}{\lambda}\right]}$$

e o único caso em que $T(0)$ se mantem constante vem dado por

$$1 = \frac{T(0)\,\overline{\beta}}{\lambda}\,, \quad \text{isto é} \quad T = T(t) = \frac{\lambda}{\beta}$$

Assim provámos o seguinte teorema:

<u>TEOREMA 22</u> No caso de um crescimento equilibrado para a produção, a uma taxa constante $\lambda > 0$, a taxa de lucro mantem-se constante se e só se a proporção do excedente que se dirige a investimento não varia e é tal que

$$\overline{\beta} = \frac{\lambda}{T(0)}\,.$$

<u>Observação</u>: Este resultado é, evidentemente, válido para um grande número de modelos. Assim, por exemplo, Morishima (1978, pag.1· obtem um resultado semelhante com um modelo diferente. Note-se também que não é possível ter $T(t)\beta(t) = \lambda$ a não ser que $T(t)$ e $\beta(t)$ sejam constantes. (Ver Apêndice 2)

O caso $T(t)$ não é o único de interesse. Podemos, também, provar o seguinte teorema:

TEOREMA 23 Se $T(0)\beta(0) > \lambda$, existe um intervalo $[0,\delta]$ onde $T(t)$ é uma função decrescente. Se $T(0)\beta(0) < \lambda$, existe um intervalo $[0,\delta^*]$ onde $T(t)$ é função crescente.

Se $\beta(t)$ for uma função crescente e $T(0)\beta(0) \geqslant \lambda$, $T(t)$ é uma função decrescente. Se $\beta(t)$ for uma função decrescente e $T(0)\beta(0) \leqslant \lambda$, $T(t)$ é uma função crescente.

Dem: De 2) com $t=0$, a primeira parte do teorema é evidente.

Vamos provar a segunda parte quando $\beta(t)$ é uma função crescente

Dividindo 2) por $\ell^{\lambda t} - 1$ obtemos (uma vez que $\lambda > 0$)

$$T'(t) \underset{<}{\geqq} 0 \Leftrightarrow \frac{T(0)\displaystyle\int_0^t \beta(t)\ell^{\lambda t}dt}{\frac{1}{\lambda}(\ell^{\lambda t}-1)} \underset{<}{\geqq} \frac{T(0)\beta(t)\ell^{\lambda t}-\lambda}{\ell^{\lambda t}-1}$$

e, pelo teorema do valor médio

$$T'(t) \underset{<}{\geqq} 0 \Leftrightarrow T(0)\beta^* \underset{<}{\geqq} \frac{T(0)\beta(t)\ell^{\lambda t}-\lambda}{\ell^{\lambda t}-1}$$

onde $\beta^* \in \left[\beta(0),\beta(t)\right]$, com $\beta^* \leqslant \beta(t)$ pois $\beta(t)$ é uma função crescente.

Então,

$$T(0)\beta^* \leqslant T(0)\beta(t)$$

Por outro lado, $T(0)\beta(0) \geqslant \lambda$ pelo que

$$T(0)\beta(t) > \lambda \quad \text{e}$$

$$T(0)\beta(t)\,l^{\lambda t} - T(0)\beta(t) < T(0)\beta(t)\,l^{\lambda t} - \lambda$$

$$T(0)\beta(t) < \frac{T(0)\beta(t)\,l^{\lambda t} - \lambda}{l^{\lambda t} - 1}$$

Por conseguinte,

$$T(0)\beta^{*} \leqslant T(0)\beta(t) < \frac{T(0)\beta(t)\,l^{\lambda t} - \lambda}{l^{\lambda t} - 1}$$

e

$T'(t) < 0$. Uma demonstração semelhante para $T'(t) > 0$.

q.e.d.

2.2 O caminho de crescimento de K(t) e o coeficiente capital/produção

É fácil obter o caminho de crescimento para K(t). Como

$$K(t) = \sum C_i(t)\,x_i(t) = \frac{\sum (1 - A_i)\,x_i(t)}{T(t)} \quad \text{e}$$

$$K(t) = K(0) + \int_0^t \beta(t) \sum (1 - A_i)\,x_i(0)\,l^{\lambda t}dt$$

obtemos

$$K(t) = K(0)\left[1 + T(0)\int_0^t \beta(t)\,l^{\lambda t}dt\right]$$

Por outro lado,

$$\frac{K'(t)}{K(t)} = \frac{K(0)T(0)\beta(t)l^{\lambda t}}{K(0)\left[1 + T(0)\int_0^t \beta(t)l^{\lambda t}dt\right]} = T(t)\beta(t)$$

e vemos imediatamente que a taxa de crescimento de $K(t)$ é λ se e só se

$$\beta(t) = \beta = \frac{\lambda}{T(0)} = \frac{\lambda}{T}$$, o que é coerente com a observação da página 94 e o Apêndice 2.

A expressão para o investimento líquido é dada por

3) $K'(t) = K(0)T(0)\beta(t)l^{\lambda t}$

Devemos salientar que nada foi suposto em relação à tecnologia de economia, nomeadamente no que respeita a coeficientes capital/produção.

A expressão para o coeficiente capital/produção que possibilita o crescimento da produção à taxa λ é dado por

$$C(t) = \frac{K(0)\left[1 + T(0)\int_0^t \beta(t)l^{\lambda t}dt\right]}{\sum x_i(0)l^{\lambda t}}$$

Como estamos a trabalhar com uma agregação fixa (ver INTRODUÇÃO, pag.8), e como todos os sectores crescem à mesma taxa λ, é possível encontrar um significado para a expressão de $C(t)$.(1)

---

(1) $C(t)$ é a média ponderada

$$C(t) = \frac{\sum K_i(t)}{\sum x_i(t)} = \frac{\sum \frac{K_i(t)}{x_i(t)} x_i(0)}{\sum x_i(0)}$$

Como $\quad 0 \leqslant \beta(t) \leqslant 1 \quad$ e $\quad C(0) = \dfrac{K(0)}{\sum x_i(0)}$, obtemos

$$C(0)\ell^{-\lambda t} \leqslant C(t) \leqslant C(0)\ell^{-\lambda t}\left[1 + \frac{T(0)}{\lambda}(\ell^{\lambda t} - 1)\right]$$

$$C(0)\ell^{-\lambda t} \leqslant C(t) \leqslant \frac{C(0)T(0)}{\lambda} + \left(1 - \frac{T(0)}{\lambda}\right)C(0)\ell^{-\lambda t}$$

e, para cada t, temos um intervalo para o coeficiente capital/produção. Se o coeficiente capital/produção sair fora destes limites não é possível para a economia sustentar um caminho de crescimento equilibrado para a produção, se o excedente for obtido da forma indicada, isto é por $\sum(1-A_i)x_i(t)$.

Obviamente, quando $\quad T(0) \leqslant \lambda, \quad C(t) \leqslant C(0) \quad$ e

quando $\quad T(0) \geqslant \lambda, \quad C(t) \leqslant \dfrac{C(0)T(0)}{\lambda}$

3. <u>Produção, investimento e emprego. Análise global</u>.

Tem-se verificado historicamente que, durante certos perío-dos, nomeadamente em períodos de take-off,(1) a produtividade global cresce ao mesmo tempo que cresce o peso do investimento líquido no PIB. Isto significa que a taxa de crescimento do PIB se encontra, nesses períodos, entre a taxa de crescimento do in-vestimento líquido (que lhe é superior) e a taxa de crescimento do emprego.

Um modelo geral com uma especificação que descreve uma situação deste tipo foi desenvolvido em Amaral (1977) e Amaral (1979). Nesta secção, utilizaremos uma aplicação dessa especi-

(1) Rostow (1962), pag. 8, Kuznets (1973) pag. 238

ficação mais geral ao nosso caso presente, em termos globais. Na próxima secção, a análise será feita em termos sectoriais.

Contudo, em vez da taxa de crescimento do PIB utilizaremo a taxa de crescimento da produção (λ), que não coincide necess riamente com a do PIB, pois a tecnologia não é necessariamente homogénea de grau 0.(1)

Com esta alteração, seguindo Amaral (1977), temos

$$\lambda = \sigma \frac{K''(t)}{K'(t)} + (1-\sigma)m(t) \qquad \text{onde}$$

σ é uma constante tal que $0 < \sigma < 1$ e $m(t)$ é a taxa de crescimen do emprego. $\frac{K''(t)}{K'(t)}$ é, claro, a taxa de crescimento do investim to líquido.

De 3), pag. 97, podemos escrever

$$\frac{K''(t)}{K'(t)} = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} + \lambda. \qquad \text{Por consequência}$$

$$\lambda = \sigma \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} + \sigma\lambda + (1-\sigma)m(t) \qquad \text{e}$$

1) $$m(t) = \lambda - \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}$$

Desta equação podemos imediatamente concluir:

(1) Na maior parte dos casos, porém, λ não diferirá substancialmente da taxa de crescimento do PIB.

i) Não é possível ter $m(t) < \lambda$ com $\underline{m}$ constante. Com efeito, isso implicaria que $\beta(t)$ deixaria de ser uma função limitada.

ii) $m(t) = m = \lambda$ se e só se $\beta(t) = \overline{\beta} = \dfrac{\lambda}{T}$

iii) A única possibilidade de ter uma produtividade crescente $\left(m(t) < \lambda\right)$ é ter uma função $\beta(t)$ crescente.

Se $T(0)\beta(0) \geqslant \lambda$ isso significa (Teorema 23) que um crescimento da produtividade vem associado com um decréscimo da taxa de lucro.

iv) Se $\beta'(t) > 0$, $m(t) \underset{t\to\infty}{\to} \lambda$ porque, sendo $\beta(t)$ uma função limitada, $\dfrac{\beta'(\infty)}{\beta(\infty)} = 0$ e $m(\infty) = \lambda$. A taxa de crescimento do emprego cresce para λ e a taxa de crescimento da produtividade desce, portanto, para 0.

Também é interessante ligar os caminhos do emprego $\left(L(t)\right)$ e do capital. Temos

$$\frac{L'(t)}{L(t)} = \lambda - \frac{\sigma}{1-\sigma}\,\frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\,.$$ Integrando ambos os membros temos

$$\log L(t) = \lambda t - \frac{\sigma}{1-\sigma}\log\beta(t) + L^{*}$$

e

$$L(t) = L^{**}\,l^{\lambda t}\,\beta(t)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

Como $L^{**} = L(0)\,\beta(0)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$ podemos escrever

$$L(t) = L(0)\,\ell^{\lambda t}\left(\frac{\beta(t)}{\beta(0)}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

ou

$$2)\qquad \beta(t) = \beta(0)\,\ell^{\lambda\frac{(1-\sigma)}{\sigma}t}\left(\frac{L(t)}{L(0)}\right)^{\frac{(\sigma-1)}{\sigma}}$$

Substituindo $\beta(t)$ na expressão do capital (pag. 96) por 2) temos:

$$K(t) = K(0)\left[1 + T(0)\int_0^t \beta(0)\,\ell^{\lambda\frac{(1-\sigma)}{\sigma}t}\left(\frac{L(t)}{L(0)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\ell^{\lambda t}dt\right]$$

e

$$K(t) = K(0)\left[1 + T(0)\,\beta(0)\,L(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\int_0^t L(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\,\ell^{\frac{\lambda}{\sigma}t}dt\right]$$

Esta expressão, que liga capital e trabalho, é necessária na secção seguinte, para que possamos prosseguir a nossa análise, agora a nível sectorial.

4. Produção, investimento e emprego; análise sectorial

O objectivo desta secção é o de investigar a coerência d(
resultados globais obtidos nas secções 1 - 3, com a evolução s(
torial.

Para esse fim, vamos introduzir novas hipóteses:

i) A taxa de crescimento do trabalho é a mesma para todos os sectores.

ii) Para cada sector i, existe uma proporção constante $\delta_i > 0$ do stock de capital que é gasta no processo produtivo em cada período.

iii) A análise é feita a preços constantes, mas o salário médio $W_i(t)$ pode variar no tempo.

Observações: A hipótese i) significa que a produtividade (prc dução/emprego) cresce à mesma taxa em todos os sectores. A hip tese ii) é, evidentemente, uma hipótese forte mas que é utiliz da normalmente em teoria do crescimento. Uma alternativa seri a de considerar uma proporção constante do nível de produção.

Com estas hipóteses e as anteriores relativas à taxa de l cro, podemos escrever

$$T(t)K_i(t) = (1 - A_i)x_i(t)$$

$$K_i(t) = K(t)\,\frac{(1 - A_i)x_i(0)}{\sum(1-A_j)x_j(0)}$$

e

$$K_i(t) = \frac{(1-A_i)x_i(0)}{\sum (1-A_j)x_j(0)} K(0)\left[1 + T(0)\beta(0)L(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \int_0^t L(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \, l^{\frac{\lambda}{\sigma}t} \, d\right.$$

ou seja

$$1)\quad K_i(t) = K_i(0)\left[1 + T(0)\beta(0)L_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \int_0^t L_i(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \, l^{\frac{\lambda}{\sigma}t} \, dt \right] \quad (1)$$

uma vez que, pela hipótese i)

$$\left(\frac{L(t)}{L(0)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = \left(\frac{L_i(t)}{L_i(0)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

Com a especificação do GM utilizada no Capítulo 3 e as hipóteses i) e iii), podemos escrever

$$2)\quad A_i x_i(t) = \sum_j f_{ji}\Big(x_j(t), x_i(t)\Big) + \delta_i K_i(t) + W_i(t)L_i(t)$$

Introduzindo 1) em 2), temos

$$3)\quad \Big(A_i - \Theta_i(t)\Big)x_i(t) = \delta_i K_i(0) + \delta_i K_i(0)T(0)\beta(0)L_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \int_0^t L_i(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \, l^{\frac{\lambda}{\sigma}t}$$

$$+ W_i(t)L_i(t)$$

onde

$$\Theta_i(t) = \sum_j \frac{f_{ji}\Big(x_j(t), x_i(t)\Big)}{x_i(t)}$$

(1) Note-se que com i) (pag. 102) e esta relação o modelo

$$\lambda = \sigma\frac{K''}{K'} + (1-\sigma)m(t)$$

é também válido para cada sector.

Obviamente, $\sum_j C_0^{ji} \leqslant \Theta_i(t) \leqslant \sum_j C_1^{ji}$

ou, com $\psi_i(t) = A_i - \Theta_i(t)$

$$A_i - \sum C_1^{ji} \leqslant \psi_i(t) \leqslant A_i - \sum_j C_0^{ji}$$

Derivando 3), obtemos

$$4)\quad \left[\psi'_i(t) + \lambda\psi_i(t)\right] x_i(0)\,\ell^{\lambda t} =$$

$$= B_0^i\, L_i(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\, \ell^{\frac{\lambda}{\sigma}t} + W_i'(t)L_i(t) + W_i(t)L_i'(t)$$

onde

$$B_0^i = \delta_i K_i(0)T(0)\beta(0)L_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}$$

que é uma equação diferencial em $L_i(t)$, que pode ser resolvida para certos casos especiais.

4.1 1º Caso: $\psi_i(t) = \psi_i(0)\,\ell^{-\lambda t}$

Este caso só é possível se $A_i = \sum_j C_1^{ji}$ e $A_i \geqslant \sum_j C_0^{ji} + \psi_i(0)$, isto é, quando $\psi_i(0) \leqslant \sum_j (C_1^{ji} - C_0^{ji})$.

Os inputs intermédios aumentam o seu peso no total dos inputs necessários e a participação dos inputs primários decres para 0. Isto não significa que o valor acrescentado que não é excedente tenda para 0. Pelo contrário, fica constante:

$$\psi_i(0)\ell^{-\lambda t} \cdot x_i(0)\ell^{\lambda t} = \psi_i(0)x_i(0)$$

Vamos ver o que sucede às outras variáveis.

Com $\psi_i(t) = \psi_i(0)\ell^{-\lambda t}$, a equação 4) fica da seguinte forma

$$B_0^i\, L_i(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\, \ell^{\frac{\lambda}{\sigma}t} + W_i'(t)L_i(t) + W_i(t)L_i'(t) = 0$$

Esta é uma equação de Bernoulli que é facilmente resolvida com substituição

$$L_i(t) = Z(t)^{\sigma}$$

Temos

$$B_0^i\, Z(t)^{\sigma-1}\ell^{\frac{\lambda}{\sigma}t} + W_i'(t)Z(t)^{\sigma} + \sigma W_i(t)Z'(t)Z(t)^{\sigma-1} = 0$$

e

$$Z'(t) + \frac{1}{\sigma}\,\frac{W_i'(t)}{W_i(t)}\,Z(t) = -\,\frac{B_0^i}{\sigma}\,\frac{\ell^{\frac{\lambda}{\sigma}t}}{W_i(t)}$$

Resolvendo esta equação para Z(t) temos

$$Z(t) = W_i(t)^{-\frac{1}{\sigma}}\left[-\,\frac{B_0^i}{\sigma}\int \ell^{\frac{\lambda}{\sigma}t}\, W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\,dt + D\right]$$

e

$$L_i(t) = \frac{1}{W_i(t)}\left[-\,\frac{B_0^i}{\sigma}\int \ell^{\frac{\lambda}{\sigma}t}\, W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\,dt + D\right]^{\sigma}$$

onde D é uma constante. Integrando de 0 a t, temos

$$L_i(t) = \frac{1}{W_i(t)}\left[-\frac{B_0^i}{\sigma}\int_0^t l^{\frac{\lambda}{\sigma}t} W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} dt + L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}\right]^{\sigma}$$

Como $B_0^i > 0$ e $\int_0^t l^{\frac{\lambda}{\sigma}t} W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} dt$ é uma função crescente com o tempo, a solução é possível para todos os valores de t s é só se

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t l^{\frac{\lambda}{\sigma}t} W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} dt = \bar{M} \quad \text{onde}$$

$$-\frac{B_0^i}{\sigma}\bar{M} + L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} \geqslant 0 \quad \text{isto é,}$$

$$\bar{M} \leqslant \frac{\sigma L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}}{B_0^i}$$

Para que

$\int_0^\infty l^{\frac{\lambda}{\sigma}t} W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} dt$ seja convergente é necessário que

$\lim_{t\to\infty} l^{\frac{\lambda}{\sigma}t} W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} = 0$, isto é, que $\lim_{t\to\infty} W_i(t) = 0$,

que é obviamente uma situação sem interesse prático.

Assim, provámos o teorema seguinte:

TEOREMA 24 Com as hipóteses i) - iii) não é possível o valor acrescentado que não é excedente manter-se constante, a não ser que o salário médio tenda para 0.

Esta conclusão é interessante porque é uma consequência di recta da hipótese feita na Secção 3 relativa à evolução do inve timento e do emprego. Sem esta hipótese, não existiria razão v lida para que o valor acrescentado não se pudesse manter consta te, embora isso viesse a constituir uma situação estranha: um crescimento de produção a uma taxa $\lambda > 0$ e um valor acrescentado (não excedente) constante.

4.2 2º Caso: $\psi_i(t) = \overline{\psi}_i$

Este é o caso do LM e de todos os modelos GM em que $f_{ji}(x_j(t), x_i(t))$ são H de grau 1.

Neste caso, é fácil de verificar que, se $W_i(t)$ e $L_i(t)$ crescem a taxas constantes $\underline{n}$ e $\underline{m}$, respectivamente, então teremos de ter $n = 0$ e $m = \lambda$ (como também poderíamos deduzir da condição i) da página 100).

Este resultado mostra que, com uma tecnologia homogénea, n é possível o salário médio crescer a uma taxa positiva constant quando a produtividade e o investimento líquido crescem a taxas constantes.

Contudo, o caso mais interessante é o seguinte:

4.3 3º Caso: $\psi_i(t) = \mu_i \dfrac{W_i(t)L_i(t)}{x_i(t)}$, $\mu_i > 1$

Em geral, a teoria do crescimento admite que o coeficient capital/produto médio é uma função não-decrescente no tempo.Ta vez a razão para esta hipótese resulte de se constatar o factc já acima referido, de que, em muitos períodos o investimento l quido cresce mais do que o PIB. Contudo, não é possível conclu deste facto que o coeficiente capital/produto médio é uma funç não-decrescente com o tempo. Na realidade, o investimento pod crescer indefinidamente a uma taxa superior à do PIB e o coefi ciente capital/produto continuar a decrescer.

O caso que vamos tratar é o exemplo de que é possível enc trar um caminho de crescimento económico tal que

a) o coeficiente capital/produção decresce

b) a produtividade é uma função crescente no tempo

c) o investimento líquido cresce mais rapidamente do que a produção.

De 1) $\psi_i(t) = \mu_i \dfrac{W_i(t)L_i(t)}{x_i(t)}$ $\mu_i > 1$ podemos escrever

$$\mu_i \frac{W_i(t)L_i(t)}{x_i(t)} = \delta_i \frac{K_i(t)}{x_i(t)} + \frac{W_i(t)L_i(t)}{x_i(t)}$$

$$\frac{K_i(t)}{L_i(t)} = \frac{\mu_i - 1}{\delta_i} W_i(t)$$

Esta é uma relação útil entre o capital por trabalhador e o sa lário médio. No Capítulo 6 trataremos esta relação em termos neoclássicos. Por agora, contudo, é suficiente substituir 1) e 4) (pag. 104) para obter

$$x_i(t)\left[\mu_i\frac{L_i'(t)W_i(t)}{x_i(t)}+\mu_i\frac{L_i(t)W_i'(t)}{x_i(t)}-\mu_i\lambda\frac{L_i(t)W_i(t)}{x_i(t)}+\lambda\mu_i\frac{L_i(t)W_i(t)}{x_i(t)}\right.$$

$$= B_0^i\, L_i(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\, l^{\frac{\lambda}{\sigma}t} + W_i'(t)L_i(t) + W_i(t)L_i'(t)$$

Por consequência

$$B_0^i\, L_i(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\, l^{\frac{\lambda}{\sigma}t} + (1-\mu_i)W_i'(t)L_i(t) + (1-\mu_i)W_i(t)L_i'(t) = 0$$

Esta equação é de novo uma equação de Bernoulli que pode ser resolvida pelo mesmo processo, obtendo-se

$$L_i(t) = \frac{1}{W_i(t)}\left[-\frac{B_0^i}{\sigma(1-\mu_i)}\int_0^t l^{\frac{\lambda}{\sigma}t}\, W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\,dt + L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}\, W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}\right]^{\sigma}$$

Notemos que já não é necessário que $\lim_{t\to\infty} W_i(t) = 0$, pois

$$-\frac{B_0^i}{\sigma(1-\mu_i)} > 0 \qquad \text{já que} \qquad \mu_i > 1$$

Obtivemos assim um caminho para $L_i(t)$. Contudo, teremos de verificar se esta solução garante que

a) $0 < \beta(t) \leq 1$, supondo $\beta(0) > 0$

b) $A_i - \sum C_i^{ji} \leq \psi_i(t) \leq A_i - \sum_j C_0^{ji}$

a) $0 < \beta(t) \leq 1$

Introduzindo $L_i(t)$ em 2) (pag. 101) temos

$$\beta(t) = \beta(0) \, l^{\lambda \frac{(1-\sigma)}{\sigma} t} \, L_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \, W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \, .$$

$$\cdot \left[\frac{B_0^i}{(\mu_i - 1)\sigma} \int_0^t l^{\frac{\lambda}{\sigma} t} \, W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} dt + L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} \, W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} \right]^{\sigma - 1}$$

Suponhamos que $W_i'(t) \geq 0$ e $\lim_{t\to\infty} W_i(t) = W < +\infty$

Neste caso, temos

$$\int_0^t l^{\frac{\lambda}{\sigma} t} \, W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} dt \geq W_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \, \frac{\sigma}{\lambda} \left(l^{\frac{\lambda}{\sigma} t} - 1 \right).$$

Como $\sigma - 1 < 0$

e $W_i(t) \leq W$, temos

$$\beta(t) \leq \beta(0) \, L_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \, W^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \, l^{\lambda \frac{(1-\sigma)}{\sigma} t} \, .$$

$$\cdot \left[W_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \, \frac{\sigma}{\lambda} \left(l^{\frac{\lambda}{\sigma} t} - 1 \right) \frac{B_0^i}{(\mu_i - 1)\sigma} + L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} \, W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} \right]^{\sigma - 1}$$

e

$$1)\quad \beta(t) \leqslant \beta(0)\, L_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\, W^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \,\cdot$$

$$\cdot \left[\frac{B_0^i W_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)} + \left(L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}\, W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} - \frac{B_0^i W_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)} \right) e^{-\frac{\lambda}{\sigma} t} \right]^{\sigma-}$$

Suponhamos que $\lambda \geqslant T(0)\,\beta(0)$. Como

$$B_0^i = \delta_i K_i(0)\, T(0)\, \beta(0)\, L_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \quad \text{e} \quad \frac{\mu_i - 1}{\delta_i} = \frac{K_i(0)}{L_i(0)\, W_i(0)}$$

podemos escrever

$$\lambda \geqslant T(0)\,\beta(0) \implies \frac{W_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} B_0^i}{\lambda(\mu_i - 1)} \leqslant L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}\, W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}$$

e o segundo membro de 1) é uma função não-decrescente com o tempo.

Quando $t \to \infty$ temos

$$\beta(t) \leqslant \beta(0)\, L_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\, W^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \left(\frac{T(0)\,\beta(0)}{\lambda} \right)^{\sigma-1} L_i(0)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\, W_i(0)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

isto é,

$$\beta(t) \leqslant \beta(0) \left(\frac{\lambda}{T(0)\,\beta(0)} \right)^{1-\sigma} \left(\frac{W}{W_i(0)} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}$$

Acabámos, assim, de provar o seguinte teorema:

TEOREMA 25 Se $W_i'(t) \geq 0$, $\lim_{t\to\infty} W_i(t) = W < +\infty$, $\lambda \geq T(0)\beta(0)$ e

$$\beta(0)\left(\frac{\lambda}{T(0)\beta(0)}\right)^{1-\sigma}\left(\frac{W}{W_i(0)}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \leq 1, \text{ temos}$$

$0 < \beta(t) \leq 1$

e o caminho encontrado para $L_i(t)$ é admissível.

Observação: Notemos que, para um dado λ, o teorema implica que $\underline{W}$ não deve ser demasiado grande em relação a $W_i(0)$. Isto é, os salários reais não deverão crescer demasiado.

Vamos ver o que sucede quanto à condição b)

b) $A_i - \sum_j C_1^{ji} \leq \psi_i(t) \leq A_i - \sum_j C_0^{ji}$

Com 1) podemos escrever

$$\psi_i(t) = \frac{\mu_i \left[\frac{B_0^i}{(\mu_i - 1)\sigma} \int_0^t l^{\frac{\lambda}{\sigma}t} W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} dt + L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}\right]^{\sigma}}{x_i(t)}$$

Se $W_i(0) \leq W_i(t) \leq W < +\infty$ como em a), obtemos

$$\frac{\mu_i \left[\frac{B_0^i W_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{(\mu_i - 1)\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\lambda}\left(l^{\frac{\lambda}{\sigma}t} - 1\right) + L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}\right]^{\sigma}}{x_i(t)} \leq \psi_i(t) \leq$$

$$\leqslant \frac{\left[\dfrac{B_0^i W^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{(\mu_i-1)\sigma} \cdot \dfrac{\sigma}{\lambda}\left(l^{\frac{\lambda}{\sigma}t}-1\right)+L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}\right]^{\sigma}}{x_i(t)}$$

e

$$2)\quad \frac{\mu_i}{x_i(0)}\left[\frac{B_0^i W_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i-1)}+\left(L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}-\frac{B_0^i W_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i-1)}\right)l^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right]^{\sigma}$$

$$\leqslant \psi_i(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu_i}{x_i(0)}\left[\frac{B_0^i W^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i-1)}+\left(L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}-\frac{B_0^i W^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i-1)}\right)l^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right]^{\sigma}$$

Se supusermos, como em a), que $\lambda \geqslant T(0)\beta(0)$, temos

$$\frac{W_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} B_0^i}{\lambda(\mu_i-1)} \leqslant L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}$$

e o primeiro membro de 2) é uma função não-crescente com o tempo. Assim, $\psi_i(t)$ é maior que o valor dessa função para $t=\infty$. Isto é,

$$\psi_i(t) \geqslant \frac{\mu_i}{x_i(0)}\left(\frac{B_0^i W_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)}\right)^{\sigma} = \left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{\sigma} \frac{\mu_i L_i(0) W_i(0)}{x_i(0)}$$

$$\psi_i(t) \geqslant \psi_i(0) \left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{\sigma}$$

Por outro lado, se $\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda} \leqslant \left(\frac{W_i(0)}{W}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}$ temos

$$\frac{B_0^i W^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{(\mu_i - 1)\lambda} = \left(\frac{W}{W_i(0)}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \frac{T(0)\beta(0)}{\lambda} L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}}$$

e o segundo membro de 2) é uma função não-crescente com o tempo. Então, com $t = 0$, temos

$$\psi_i(t) \leqslant \mu_i \frac{L_i(0) W_i(0)}{x_i(0)} = \psi_i(0) .$$

Provámos, assim, o seguinte teorema:

<u>TEOREMA 26</u> Se $W'_i(t) \geqslant 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} W_i(t) = W < +\infty$ e

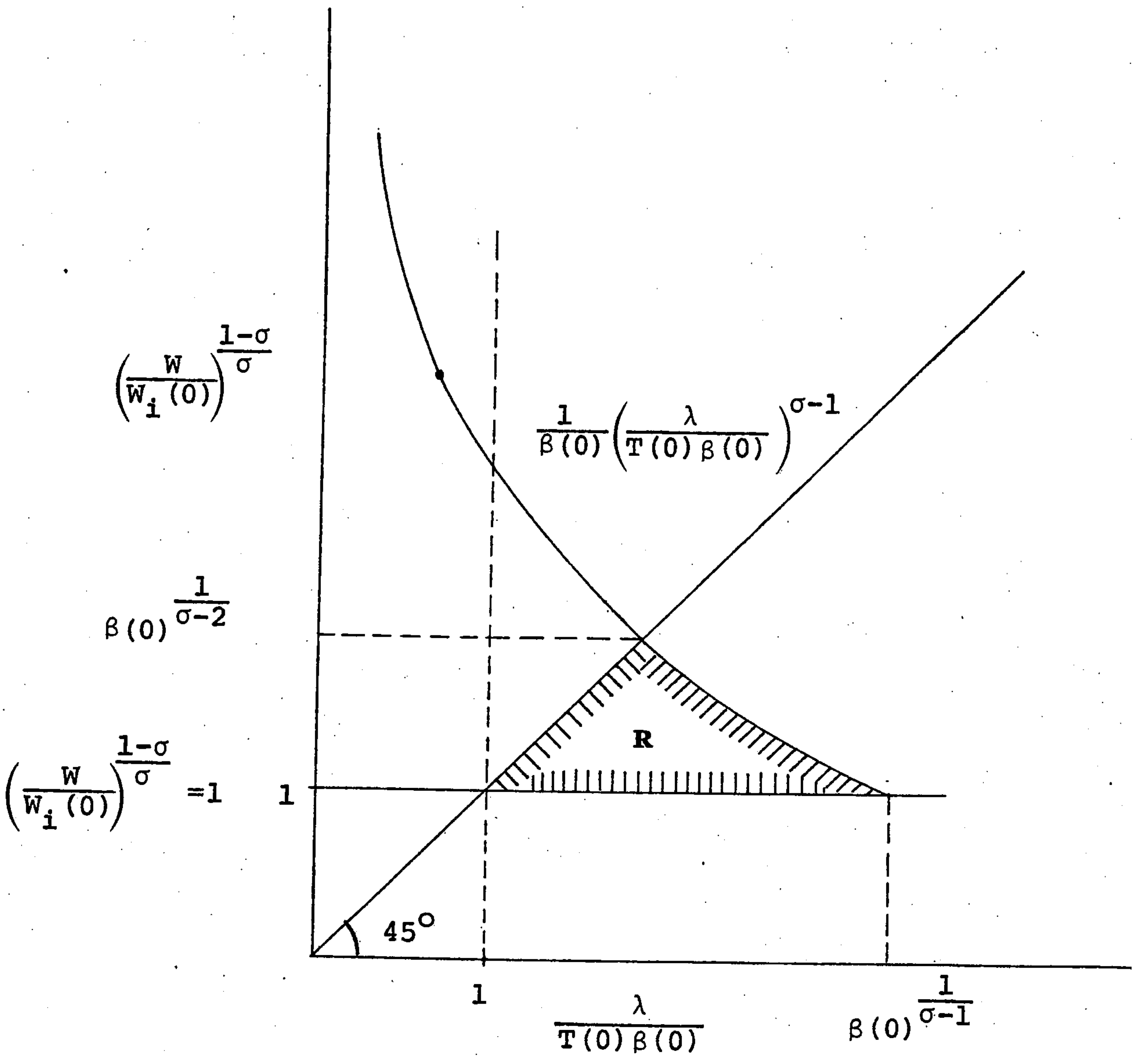
$$1 \geqslant \left(\frac{W_i(0)}{W}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \geqslant \frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}$$ temos

$$\psi_i(0)\left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{\sigma} \leqslant \psi_i(t) \leqslant \psi_i(0).$$ Se

$$\psi_i(0) \leqslant A_i - \sum C_0^{ji} \quad \text{e} \quad \psi_i(0)\left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{\sigma} \geqslant A_i - \sum C_1^{ji}$$

O caminho para $\psi_i(t)$ é admissível.

As condições dos Teoremas 25 e 26 podem ser representadas graficamente: o conjunto R é o conjunto onde as duas condições se verificam.



c) Capital e coeficiente capital/produção

Como $K_i(t) = \dfrac{\mu_i - 1}{\delta_i} W_i(t) L_i(t)$ o coeficiente capital/

/produção vem

$$\frac{K_i(t)}{x_i(t)} = \frac{(\mu_i - 1) l^{-\lambda t}}{\delta_i x_i(0)} \left[\frac{B_0^i}{\sigma(\mu_i - 1)} \int_0^t l^{\frac{\lambda}{\sigma} t} W_i(t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} dt + L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} \right]^{\sigma}$$

Se $W_i(0) \leqslant W_i(t) \leqslant \overline{W}$, temos

$$\frac{K_i(t)}{x_i(t)} \leqslant \frac{\mu_i - 1}{\delta_i x_i(0)} \left[\frac{B_0^i W^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)} + \left(L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} - \frac{B_0^i W^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)} \right) l^{-\frac{\lambda}{\sigma} t} \right]^{\sigma}$$

E, se $\dfrac{T(0)\beta(0)}{\lambda} \leqslant \left(\dfrac{W_i(0)}{W} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}$ como em b) temos

$$\frac{B_0^i W^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)} \leqslant L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} .$$ Portanto,

$$\frac{K_i(t)}{x_i(t)} \leqslant \frac{\mu_i - 1}{\delta_i} \frac{L_i(0) W_i(0)}{x_i(0)} = \frac{K_i(0)}{x_i(0)} .$$ Isto é,

<u>TEOREMA 27</u> Se $1 \geqslant \left(\dfrac{W_i(0)}{W} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \geqslant \dfrac{T(0)\beta(0)}{\lambda}$ $C_i(t)$ é

limitado superiormente por $C_i(0)$.

Um caso interessante é aquele em que $W_i(t) = W_i(0)$

d) $W_i(t) = W_i(0)$

Neste caso, temos

$$L_i(t) = \frac{1}{W_i(0)}\left[\frac{\left(B_0^i W_i(0)\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)}\,\ell^{\frac{\lambda}{\sigma}t} + L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} - \frac{\left(B_0^i W_i(0)\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)}\right]^{\sigma}$$

E podemos escrever

$$\frac{L_i(t)}{x_i(t)} = \frac{1}{W_i(0)\,x_i(0)}\Biggl[\frac{\left(B_0^i W_i(0)\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)} + \left(L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} - \frac{\left(B_0^i W_i(0)\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)}\right)\ell^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}$$

$$\frac{K_i(t)}{x_i(t)} = \frac{\mu_i - 1}{\delta_i x_i(0)}\left[\frac{\left(B_0^i W_i(0)\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)} + \left(L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} - \frac{\left(B_0^i W_i(0)\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)}\right)\ell^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right]^{\sigma}$$

Se $\lambda > T(0)\beta(0)$, isto é, se $L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} > \dfrac{\left(B_0^i W_i(0)\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)}$,

ambas as funções são decrescentes. Então,

$$\frac{L'_i(t)}{L_i(t)} < \frac{x'_i(t)}{x_i(t)} \qquad \text{e} \qquad \frac{L'(t)}{L(t)} < \lambda$$

pelo que o investimento líquido cresce a uma taxa superior à da produção.

Por outro lado, todos os coeficientes capital/produção sectoriais são funções decrescentes, pelo que também o é o coeficient global. Aqui temos um exemplo do que foi afirmado na pag. 108

Podemos resumir estes factos no seguinte teorema:

<u>TEOREMA 28</u> Se $\lambda > T(0)\beta(0)$, $W_i(t) = W_i(0)$, $\beta(0) \leqslant \left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{1-}$ e

$$\psi_i(0) \leqslant A_i - \sum C_0^{ji}, \quad \psi_i(0)\left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{\sigma} \geqslant A_i - \sum C_1^{ji}$$

então o caminho

$$L_i(t) = \frac{1}{W_i(0)}\left[\frac{B_0^i W_i(0)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\lambda(\mu_i - 1)}\left(e^{\frac{\lambda}{\sigma}t} - 1\right) + L_i(0)^{\frac{1}{\sigma}} W_i(0)\right.$$

é admissível e o investimento líquido cresce a uma taxa superior à da produção com um coeficiente capital/produção decrescente. Os valores seguintes verificam-se para $t = \infty$.

$$\frac{K_i(\infty)}{x_i(\infty)} = \frac{K_i(0)}{x_i(0)}\left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{\sigma} \qquad C(\infty) = C(0)\left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{\sigma}$$

$$\frac{x_i(\infty)}{L_i(\infty)} = \frac{x_i(0)}{L_i(0)}\left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{-\sigma}$$

$$\frac{K'_i(\infty)}{x_i(\infty)} = \frac{K'_i(0)}{x_i(0)}\left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{\sigma-1}$$

$$\psi_i(\infty) = \psi_i(0) \left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{\sigma}$$

$$\beta(\infty) = \beta(0) \left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{\sigma-1}$$

$$T(\infty) = T(0) \left(\frac{T(0)\beta(0)}{\lambda}\right)^{-\sigma}, \qquad \beta(\infty)T(\infty) = \lambda$$

Quer $\beta(t)$ quer $T(t)$ são funções crescentes com o tempo.

REFERÊNCIAS

AMARAL, João Ferreira do, "Um modelo simples de crescimento económico", Economia , 1977.

AMARAL, João Ferreira do, "Crescimento económico óptimo", Economia, 1979.

BRODY, András, "Proportions, Prices and Planning", North-Holland, 1970.

KUZNETS, Simon, "Crescimento económico moderno", Aguilar, 1973.

MORISHIMA, Michio, "Equilibrium, Stability and Growth", Oxford, 1978.

PERSSON, Hakan, "On the theory of non-linear input-output models", 1980.

ROSTOW, W.W., "The stages of economic growth", Cambridge, 1962.

A P Ê N D I C E 2

Se $T(t)\beta(t) = \lambda$ então $T(t)$ e $\beta(t)$ são constantes.

Com efeito, temos

$$T(t)\beta(t) = \frac{T(0)\ell^{\lambda t}\beta(t)}{T(0)\int_0^t \beta(t)\ell^{\lambda t}dt + 1} = \lambda$$

Integrando ambos os membros, temos

$$\log\left(T(0)\int_0^t \beta(t)\ell^{\lambda t}dt + 1\right) = \lambda t + \bar{M} \qquad \bar{M}=0$$

$$T(0)\int_0^t \beta(t)\ell^{\lambda t}dt + 1 = \ell^{\lambda t}$$

Derivando

$$T(0)\beta(t)\ell^{\lambda t} = \lambda \ell^{\lambda t}$$

e

$$T(0)\beta(t) = \lambda, \qquad \beta(t) = \frac{\lambda}{T(0)}$$

q.e.d.

C A P Í T U L O 6

A CONDIÇÃO $\psi_i(t) = \mu_i \dfrac{L_i(t)W_i(t)}{x_i(t)}$ E AS FUNÇÕES NEOCLÁSSICA

1. Introdução

O objectivo deste capítulo é analisar a condição

$$\psi_i = \mu_i \frac{W_i(t)L_i(t)}{x_i(t)}$$

usada no capítulo anterior e avaliar do seu significado em rela- ção às hipóteses da teoria neoclássica.

Note-se, contudo, que não se trata de introduzir hipóteses neoclássicas na nossa teoria, porque tal não seria possível. Apenas tentamos traduzir, em termos neoclássicos, a condição is lada

$$\psi_i = \mu_i \frac{L_i(t)W_i(t)}{x_i(t)}$$

quando nada mais é conhecido sobre o funcionamento do sistema económico.

Podemos escrever

$$\delta_i \frac{K_i(t)}{x_i(t)} + \frac{W_i(t)L_i(t)}{x_i(t)} = \mu_i \frac{L_i(t)W_i(t)}{x_i(t)} \qquad \mu_i > 1$$

e

$$W_i(t) = \Theta_i \frac{K_i(t)}{L_i(t)} \qquad \Theta_i = \frac{\delta_i}{\mu_i - 1} > 0$$

Para cada período, supondo a existência de função de produção F(K,L) com a maximização do lucro e concorrência perfeit temos

$$W = \frac{\partial F}{\partial L} = \Theta \frac{K}{L}$$

onde abandonamos o símbolo "t" porque supomos que esta relação se verifica em cada período.

Se F(K,L) for H de grau 1, para cada par (K,L) temos

$$\frac{F}{L} = \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{K}{L} + \frac{\partial F}{\partial L}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{\frac{F}{L} - \frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}$$

Portanto

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \Theta \frac{\frac{F}{L} - \frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}$$

e

$$\left(\frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{1}{\Theta} + 1\right) \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{F}{L}$$

E, assim, a análise pode prosseguir por duas vias:

a) Estudando as funções que satisfazem $\frac{\partial F}{\partial L} = \psi(L) . \frac{K}{L}$ onde $\psi(L)$ é uma função arbitrária de L. Em particular, $\psi(L)$ pode ser constante, mas consideraremos sempre funções F(K,L) que sejam QH.

b) Estudando as funções F(K,L) que verificam

$$\left[\frac{\partial F}{\partial K}\cdot\frac{1}{\Theta}+\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)^{\alpha}\right]\frac{\partial F}{\partial L}=\frac{F}{L}\quad \text{com } \alpha \text{ real}$$

(α= 0, 0,5, 1, 2 são os casos de mais fácil tratamento)

Contudo, como b) sai de alguma forma do nosso objectivo principal, deixaremos esse estudo para o Apêndice 3.

2. <u>Funções que verificam</u> $\frac{\partial F}{\partial L} = \psi(L) \cdot \frac{K}{L}$

Temos $\frac{\partial F}{\partial L} = \psi(L) \cdot \frac{K}{L}$ onde F(K,L) é suposta QH de grau N dados (M,P), isto é, (ver Apêndice 1)

$$1)\quad NF = M\frac{\partial F}{\partial K}\cdot K + P\frac{\partial F}{\partial L}\cdot L$$

Integrando em relação a L, temos

$F(K,L) = \int \frac{\psi(L)}{L}\cdot K dL + \Psi(K)$, onde $\Psi(K)$ é uma função de K arbitrária. Derivando em relação a K, temos

$p = \frac{\partial F}{\partial K} = \int \frac{\psi(L)}{L}\, dL + \Psi'(K)$. Comparando com p em 1) temos

$\left(\text{com } q = \frac{\partial F}{\partial L}\right)$

$$2)\quad \int \frac{\psi(L)}{L}\, dL + \Psi'(K) = \frac{NF - PqL}{MK} = \frac{N}{M}\cdot\frac{F}{K} - \frac{P}{M}\psi(L)$$

uma vez que

$$q = \psi(L)\cdot\frac{K}{L}$$

Substituindo $\frac{F}{K} = \int \frac{\psi(L)}{L}\, dL + \frac{\Psi(K)}{K}$ em 2, obtemos

$$\left(1 - \frac{N}{M}\right) \int \frac{\psi(L)}{L}\, dL + \frac{P}{M}\, \psi(L) = \frac{N}{M}\, \frac{\Psi(K)}{K} - \Psi'(K)$$

e temos uma equação diferencial em K.

Como $\psi(L)$ é apenas função de L e $\Psi(K)$ apenas função de K, temos necessariamente

$$3)\quad \left(1 - \frac{N}{M}\right) \int \frac{\psi(L)}{L}\, dL + \frac{P}{M}\, \psi(L) = -S_0 = \text{constante.}$$

Derivando, vem

$$\left(1 - \frac{N}{M}\right) \frac{\psi(L)}{L} + \frac{P}{M}\, \psi'(L) = 0$$

Resolvendo para $\psi(L)$

$$\psi(L) = S_1^{\int \frac{N-M}{P} \cdot \frac{1}{L} dL} = S_1 L^{\frac{N-M}{P}}$$

Por outro lado, se $N \neq M$

$$4)\quad \Psi'(K) - \frac{N}{M}\, \frac{\Psi(K)}{K} = S_0$$

Resolvendo para $\Psi(K)$ temos

$$\Psi(K) = S_2 K^{\frac{N}{M}} + \frac{M}{M-N}\, S_0 K,$$ que permite escrever

$$F(K,L) = \int S_1 L^{\frac{N-M}{P} - 1}\, dL \cdot K + S_2 K^{\frac{N}{M}} + \frac{M}{N-M}\, S_0 K$$

e $$F(K,L) = \frac{P}{N-M} S_1 K L^{\frac{N-M}{P}} + S_2 K^{\frac{N}{M}} + \frac{M}{N-M} S_0 K$$

Obviamente, de 3) $S_0 = 0$. Então,

$$F(K,L) = \frac{P}{N-P} S_1 K L^{\frac{N-M}{P}} + S_2 K^{\frac{N}{M}}$$

que é a expressão geral para as funções QH de grau N dados (M,P) (M≠N) que verificam $\frac{\partial F}{\partial L} = \psi(L) \cdot \frac{K}{L}$, onde $\psi(L)$ é necessariamente

$$\psi(L) = S_1 L^{\frac{N-M}{P}} .$$

Fizemos todas estas deduções supondo $N \neq M$. Porém, quando $N = M$, temos, de 4)

$$\frac{\Psi(K)}{K} - \Psi'(K) = S_3$$

e, por conseguinte,

$$\Psi(K) = S_4 K - S_3 K \log K.$$

Por outro lado, $\psi(L) = S_1$ com $\frac{P}{M} S_1 = S_3$, pelo que

$$\int \frac{\psi(L)}{L} dL = S_1 \log L = \frac{M}{P} S_3 \log L$$ e obtemos

$$F(K,L) = \frac{M}{P} S_3 \log L \cdot K + S_4 K - S_3 K \log K$$

isto é,

$$F(K,L) = S_3 \log \frac{L^{M/P}}{K} \cdot K + S_4 K$$

que dá a expressão geral das funções QH de grau N dados (M=N,P) que verificam

$$\frac{\partial F}{\partial L} = S_3 \frac{M}{P} \cdot \frac{K}{L}$$

Provamos, desta forma, o importante teorema seguinte:

TEOREMA 29 De todas as funções QH de grau N dados (M,P) as únicas que verificam $\frac{\partial F}{\partial L} = \Theta \cdot \frac{K}{L}$ são aquelas em que M = N.

COROLÁRIO As únicas funções H que verificam $\frac{\partial F}{\partial L} = \Theta \frac{K}{L}$ são as de grau N = 1.

Dem: É imediata, pois uma função é H de grau N se e só se é QH de grau N dados (1,1).

Como as funções H de grau 1 são importantes sob diversos pontos de vista, estudaremos na próxima secção as funções

$$F(K,L) = S_3 \log\left(\frac{L}{K}\right) \cdot K + S_4 K$$

2. As funções $F(K,L) = S_3 \log\left(\frac{L}{K}\right) \cdot K + S_4 K$

Em primeiro lugar, vamos identificar o conjunto onde F(K,L) pode ser definida. Supomos $S_3, S_4 > 0$

Como

$$\frac{\partial F}{\partial K} = -S_3 + S_3 \log\left(\frac{L}{K}\right) + S_4$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0 \quad \text{se e só se} \qquad \log\left(\frac{L}{K}\right) > \frac{S_3 - S_4}{S_3}$$

isto é, se e só se

$$\frac{L}{K} > l^{\frac{S_3-S_4}{S_3}} \quad \text{ou} \quad \frac{K}{L} < l^{\frac{S_4-S_3}{S_3}}$$

ou, noutros termos,

$$\frac{F - S_4K}{S_3K} > \frac{S_3 - S_4}{S_3}$$

isto é, $\frac{F}{K} > S_3$.

A isoquanta vem dada por

$$G(K,L) = S_3\log\left(\frac{L}{K}\right)\cdot K + S_4K - \bar{F} = 0$$

e

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{S_3\frac{K}{L}}{(S_4-S_3) + \log\left(\frac{L}{K}\right)S_3} < 0$$

Por outro lado, como $\frac{\partial G}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial^2 G}{\partial L^2} = -S_3\frac{K}{L^2} < 0$,

$\frac{\partial^2 G}{\partial K \partial L} = \frac{S_3}{L} > 0$ e $\frac{dK}{dL} < 0$, podemos escrever

$$\frac{\partial G}{\partial K}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial L^2} + \frac{dK}{dL}\;\frac{\partial^2 G}{\partial K \partial L}\right) < 0$$

Além disso, $\frac{\partial G}{\partial L} > 0$, $\frac{\partial^2 G}{\partial K \partial L} > 0$, $\frac{dK}{dL} < 0$, $\frac{\partial^2 G}{\partial K^2} = -\frac{S_3}{K} < 0$

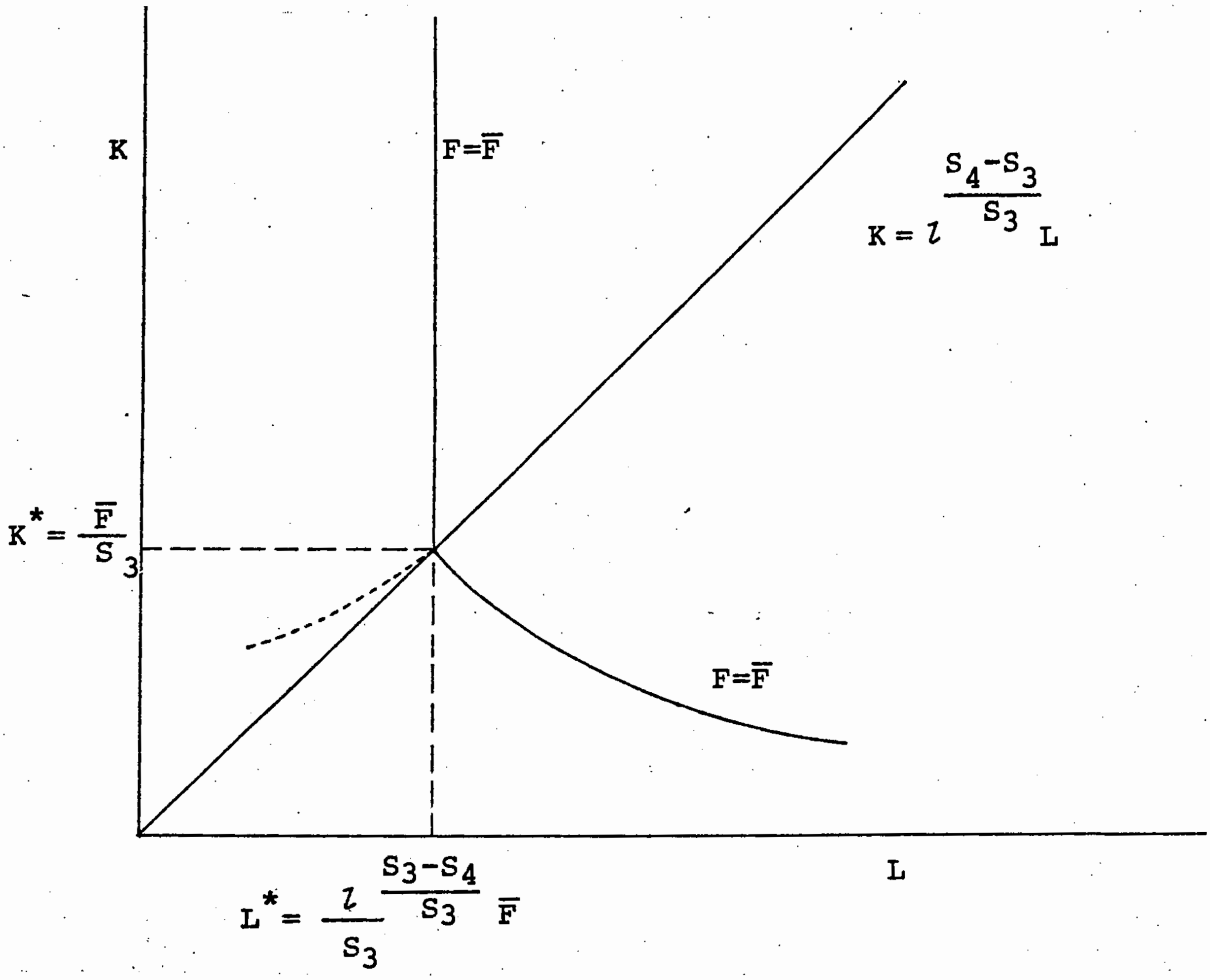
pelo que $-\frac{\partial G}{\partial L}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial K \partial L} + \frac{dK}{dL}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial K^2}\right) < 0$

E podemos concluir que

$$\frac{d^2K}{dL^2} = - \frac{\frac{\partial G}{\partial K}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial L^2} + \frac{dK}{dL}\frac{\partial^2 G}{\partial K \partial L}\right) - \frac{\partial G}{\partial L}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial K \partial L} + \frac{dK}{dL}\frac{\partial^2 G}{\partial K^2}\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial K}\right)^2} > 0$$

Por outro lado, $\lim_{L \to +\infty} K(L) = 0$ (1)

Então, a isoquanta tem a forma



---

(1) Suponhamos que existia um $L = \bar{L} > 0$ tal que $K=0$. Poderíamos escrever $0 = S_3 \log\left(\frac{L}{K}\right) \cdot K + S_4 K - \bar{F} \Rightarrow S_3 \frac{\log\left(\frac{L}{K}\right)}{\frac{1}{K}} + S_4 K - \bar{F} = 0$ e, qua do $L \to L$ $S_3 \frac{\log\left(\frac{L}{K}\right)}{\frac{1}{K}} \to 0$, o que é impossível pois $\bar{F} \neq 0$. Suponhamos agora que existia um $K = \bar{K} > 0$ tal que $L = +$ Obviamente, isso também não é possível. Então $\lim_{L \to +\infty} K(L) = 0$

Isto significa que existe uma possibilidade limitada de substituição pois o trabalho é sempre necessário à produção e não pode ser inferior a L* dado por:

$$S_3 \log\left(\frac{L^*}{\frac{\bar{F}}{S_3}}\right) \cdot \frac{\bar{F}}{S_3} + \frac{S_4}{S_3}\bar{F} - \bar{F} = 0$$

Isto é, inferior a

$$L^* = \frac{l^{\frac{S_3 - S_4}{S_3}}}{S_3}\bar{F}$$

É também simples obter a elasticidade de substituição.

Temos

$$\sigma = \frac{L}{K}\left(-\frac{dK}{dL}\right)\frac{d\left(K/L\right)}{d\left(-\frac{dK}{dL}\right)} =$$

$$= \frac{S_3}{(S_4 - S_3) + \log\left(\frac{L}{K}\right)S_3} \times \frac{d\left(K/L\right)}{\frac{S_3 d\left(\frac{K}{L}\right)\left[(S_4 - S_3) + \log\left(\frac{L}{K}\right)S_3\right] - S_3^2 d\,\log\left(\frac{L}{K}\right)\frac{K}{L}}{\left[(S_4 - S_3) + \log\left(\frac{L}{K}\right)S_3\right]^2}} =$$

$$= \frac{d\left(K/L\right)}{d\left(K/L\right) - \frac{S_3 d\,\log\left(\frac{L}{K}\right)\frac{K}{L}}{(S_4 - S_3) + \log\left(\frac{L}{K}\right)S_3}} =$$

$$\sigma = \frac{d\left(K/L\right)}{d\left(K/L\right) - \dfrac{S_3 d\left(\frac{L}{K}\right)\cdot \frac{K^2}{L^2}}{(S_4 - S_3) + \log\left(\frac{L}{K}\right)S_3}} =$$

$$= \frac{d\left(K/L\right)}{d\left(K/L\right) + \dfrac{S_3\, d\left(K/L\right)}{(S_4 - S_3) + \log\left(\frac{L}{K}\right)S_3}} =$$

$$= \frac{(S_4 - S_3) + \log\left(\frac{L}{K}\right)S_3}{S_4 + \log\left(\frac{L}{K}\right)S_3}$$

$$\sigma = 1 - \frac{S_3}{\frac{F}{K}} = 1 - S_3\frac{K}{F}$$

e como $\frac{F}{K} \geqslant S_3 > 0$, $0 \leqslant \sigma < 1$,

quanto maior for o coeficiente capital/produto tanto mais rígida se torna a substituição entre K e L.

APÊNDICE 3

A FAMÍLIA $\left[\frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{1}{\Theta} + \left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)^{\alpha}\right] \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{F}{L}$

Neste Apêndice estudamos a família $\left(\frac{p}{\Theta} + p^{\alpha}\right) q = \frac{F}{L}$ para alguns valores de α.

1. 1º caso: $\alpha = 2$

Temos

$$G(F,L,p,q) = \left(\frac{p}{\Theta} + p^2\right) q - \frac{F}{L} = 0$$

Formando a equação

$$\frac{dL}{\frac{\partial G}{\partial q}} = - \frac{dp}{p\frac{\partial G}{\partial F} + \frac{\partial G}{\partial K}}$$

$$\frac{dL}{\frac{p}{\Theta} + p^2} = - \frac{dp}{-\frac{p}{L}}$$

$$\frac{dL}{L} = \left(\frac{1}{\Theta} + p\right) dp$$

e integrando, temos

$$\log L = \frac{1}{\Theta} p + \frac{p^2}{2} + M$$

onde M é constante.

Então, $p = -\frac{1}{\theta} + \sqrt{\frac{1}{\theta^2} + 2\log L - 2M}$, pois que

sendo $\theta > 0$, $p > 0$. Então,

$$\frac{\partial F}{\partial K} = -\frac{1}{\theta} + \sqrt{\frac{1}{\theta^2} + 2\log L - 2M}$$

Integrando em ordem a K, obtemos

$$1) \quad F(K,L) = -\frac{1}{\theta}K + \left(\sqrt{\frac{1}{\theta^2} + 2\log L - 2M}\right)K + \psi(L)$$

onde $\psi(L)$ é uma função arbitrária. Por outro lado,

$$\left(\frac{p}{\theta} + p^2\right) q = \frac{F}{L} \qquad \text{pelo que}$$

$$2) \quad q = \frac{F/L}{\frac{p}{\theta} + p^2} = \frac{F/L}{-\frac{1}{\theta^2} + \frac{\sqrt{D(L)}}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} + D(L) - \frac{2\sqrt{D(L)}}{\theta}}$$

onde

$$D(L) = \frac{1}{\theta^2} + 2\log L - 2M$$

$$q = \frac{F/L}{D(L) - \frac{1}{\theta}\sqrt{D(L)}}$$

Derivando 1) em ordem a L, temos

$$q = \frac{K}{\sqrt{D(L)}\cdot L} + \psi'(L)$$

Se compararmos com 2), temos

$$\frac{K}{\sqrt{D(L)}\cdot L} + \psi'(L) = \frac{F/L}{D(L) - \frac{1}{\Theta}\sqrt{D(L)}}$$

e, usando 1)

$$\frac{K}{\sqrt{D(L)}\cdot L} + \psi'(L) = \frac{-\frac{1}{\Theta}\cdot\frac{K}{L} + \sqrt{D(L)}\cdot\frac{K}{L} + \frac{\psi(L)}{L}}{D(L) - \frac{1}{\Theta}\sqrt{D(L)}}$$

$$\frac{K}{L}\left[\frac{D(L)}{\sqrt{D(L)}} - \frac{1}{\Theta} + \frac{1}{\Theta} - \sqrt{D(L)}\right] = \psi'(L)\left[\frac{1}{\Theta}\sqrt{D(L)} - D(L)\right] + \frac{\psi(L)}{L}$$

Então

$$\frac{\psi(L)}{L} + \psi'(L)\left[\frac{1}{\Theta}\sqrt{D(L)} - D(L)\right] = 0$$

Integrando esta equação, obtemos

$$\psi(L) = M_1 \, l^{\int \frac{1}{L\left[D(L) - \frac{1}{\Theta}\sqrt{D(L)}\right]} dL}$$

Vamos calcular $\int \frac{1}{L\left[D(L) - \frac{1}{\Theta}\sqrt{D(L)}\right]} dL$.

Vem

$$\int \frac{1}{L\left[D(L) - \frac{1}{\Theta}\sqrt{D(L)}\right]} dL = \int \frac{1}{L\sqrt{D(L)}} \, \frac{1}{\left[\sqrt{D(L)} - \frac{1}{\Theta}\right]} dL$$

Como

$$\left[\sqrt{D(L)} - \frac{1}{\Theta}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{D(L)}} \cdot \frac{2}{L} = \frac{1}{L\sqrt{D(L)}},$$ podemos

escrever

$$\int \frac{1}{L\sqrt{D(L)}\left[\sqrt{D(L)} - \frac{1}{\Theta}\right]}\, dL = \int \frac{u'}{u}\, dL \quad \text{onde}$$

$u = \sqrt{D(L)} - \dfrac{1}{\Theta}$. Então,

$$\psi(L) = M_1 \mathit{l}^{\log\left|\sqrt{D(L)} - \frac{1}{\Theta}\right|} = M_1\sqrt{D(L)} - \frac{M_1}{\Theta}$$

e, finalmente

$$F(K,L) = -\frac{1}{\Theta}K + \sqrt{D(L)}\cdot K + M_1\sqrt{D(L)} - \frac{M_1}{\Theta}$$

$$F(K,L) = \left(\sqrt{D(L)} - \frac{1}{\Theta}\right)(K + M_1)$$

com

$$D(L) = \frac{1}{\Theta^2} + 2\log L - 2M$$

2. <u>2º caso: $\alpha = 1$</u>

Como em 1. formamos a equação

$$\frac{dL}{\frac{\partial G}{\partial q}} = -\frac{dp}{p\frac{\partial G}{\partial F} + \frac{\partial G}{\partial K}}$$

A equação é, agora

$$\left(\frac{1}{\Theta} + 1\right) pq = \frac{F}{L}$$

$$G = \left(\frac{1}{\Theta} + 1\right) pq - \frac{F}{L} \equiv 0. \qquad \text{Então,}$$

$$\frac{dL}{\left(\frac{1}{\Theta} + 1\right) p} = - \frac{dp}{-\frac{p}{L}} \qquad \text{e} \qquad \frac{dL}{L} = \left(\frac{1}{\Theta} + 1\right) dp$$

$$\log L = \left(\frac{1}{\Theta} + 1\right) p + M \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial K} = p = \frac{\log L - M}{\frac{1}{\Theta} + 1}$$

Integrando em ordem a K

$$1)\ F(K,L) = \frac{\log L - M}{\frac{1}{\Theta} + 1} \cdot K + \psi(L)$$

Por outro lado,

$$q = \frac{F/L}{\left(\frac{1}{\Theta} + 1\right) p} = \frac{\frac{\log L - M}{\frac{1}{\Theta} + 1} \cdot \frac{K}{L} + \frac{\psi(L)}{L}}{\left(\frac{1}{\Theta} + 1\right) \frac{\log L - M}{\left(\frac{1}{\Theta} + 1\right)}}$$

$$q = \frac{\frac{\log L - M}{\frac{1}{\Theta} + 1} \cdot \frac{K}{L} + \frac{\psi(L)}{L}}{\log L - M}$$

Derivando 1) em ordem a L e comparando com esta expressão, vem

$$\frac{1}{\frac{1}{\Theta}+1}\cdot\frac{K}{L}+\psi'(L) = \frac{1}{\frac{1}{\Theta}+1}\cdot\frac{K}{L}+\frac{1}{\log L - M}\cdot\frac{\psi(L)}{L}$$

pelo que

$$\frac{\psi'(L)}{\psi(L)} = \frac{1}{L\,(\log L - M)}$$

e

$$\psi(L) = M_1 l^{\int \frac{1}{L\,(\log L - M)}\,dL} =$$

$$= M_1 l^{\log|\log L - M|} = M_1(\log L - M)$$

e, finalmente

$$F(K,L) = \frac{\log L - M}{\frac{1}{\Theta}+1}\cdot K + M_1(\log L - M)$$

$$F(K,L) = (\log L - M)\left(\frac{\Theta}{1+\Theta}\cdot K + M_1\right)$$

3. <u>3º caso: $\alpha = 0.5$</u>

Seguindo o mesmo método, com $\left(\frac{p}{\Theta}+p^{0.5}\right)q = \frac{F}{L}$

$$\frac{dL}{\frac{p}{\Theta}+p^{0.5}} = \frac{dp}{\frac{p}{L}} \qquad \text{e}$$

$$\frac{dL}{L} = \left(\frac{1}{\Theta} + p^{-0.5}\right)dp$$

$$\log L = \frac{1}{\Theta}\, p + 2p^{0.5} + M$$

e, com $\quad p^{0.5} = Z$

$$\frac{1}{\Theta} Z^2 + 2Z + M - \log L = 0$$

$$Z = \frac{-2 + \sqrt{4 - \frac{4}{\Theta} M + \frac{4}{\Theta} \log L}}{\frac{2}{\Theta}}$$

$$p = Z^2 = \frac{1 + D(L) - 2\sqrt{D(L)}}{\frac{1}{\Theta^2}} \qquad \text{onde}$$

$$D(L) = 1 - \frac{1}{\Theta} M + \frac{1}{\Theta} \log L$$

Integrando em ordem a K, vem

1) $$F(K,L) = \frac{1 + D(L) - 2\sqrt{D(L)}}{\frac{1}{\Theta^2}} \cdot K + \psi(L)$$

Por outro lado,

$$q = \frac{F/L}{\frac{p}{\Theta} + p^{0.5}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1 + D(L) - 2\sqrt{D(L)}}{\frac{1}{\Theta^2}} \cdot \dfrac{K}{L} + \dfrac{\psi(L)}{L}}{\dfrac{1 + D(L) - 2\sqrt{D(L)}}{\frac{1}{\Theta}} + \dfrac{-1 + \sqrt{D(L)}}{\frac{1}{\Theta}}}$$

$$q = \frac{\dfrac{1 + D(L) - 2\sqrt{D(L)}}{1/\Theta} \cdot \dfrac{K}{L} + \dfrac{\psi(L)}{\Theta L}}{D(L) - \sqrt{D(L)}}$$

Derivando 1) em ordem a L e comparando, temos

$$\frac{\dfrac{1}{\Theta L}}{\dfrac{1}{\Theta^2}} \cdot K - \frac{2}{\dfrac{2\sqrt{D(L)}\,\Theta L}{\Theta^2}} \cdot K + \psi'(L) =$$

$$= \frac{\dfrac{1 + D(L) - 2\sqrt{D(L)}}{\dfrac{1}{\Theta}} \cdot \dfrac{K}{L} + \dfrac{\psi(L)}{\Theta L}}{D(L) - \sqrt{D(L)}}$$

e

$$\frac{\psi(L)}{\Theta L\left[D(L) - \sqrt{D(L)}\right]} - \psi'(L) = 0$$

pelo que

$$\psi(L) = M_1 l^{\int \frac{1}{\Theta L\left[D(L) - \sqrt{D(L)}\right]} dL}$$

Vamos calcular

$$\int \frac{1}{\Theta L\left[D(L) - \sqrt{D(L)}\right]} dL \text{ . } \quad \text{Temos}$$

$$\int \frac{1}{\Theta L\left[D(L) - \sqrt{D(L)}\right]} dL = \int \frac{1}{\Theta L\sqrt{D(L)}\left[\sqrt{D(L)} - 1\right]} dL$$

Como $\quad \left[\sqrt{D(L)} - 1\right]' = \dfrac{1}{2\,\Theta L\,\sqrt{D(L)}}$ $\quad$ temos

$$\int \frac{1}{\Theta L\left[\,D(L) - \sqrt{D(L)}\,\right]}\,dL = 2\int \frac{1}{2\Theta L\sqrt{D(L)}\left[\,\sqrt{D(L)} - 1\,\right]}\,dL =$$

$$= 2\,\log\left|\sqrt{D(L)} - 1\right|$$

Então,

$$\psi(L) = M_1\left[\,\sqrt{D(L)} - 1\,\right]^2$$

e

$$F(K,L) = \frac{1 + D(L) - 2\sqrt{D(L)}}{\frac{1}{\Theta^2}}\,K + M_1\left[\sqrt{D(L)} - 1\right]^2$$

$$F(K,L) = \left[\sqrt{D(L)} - 1\right]^2\left(\Theta^2 K + M_1\right)$$

com

$$D(L) = 1 - \frac{1}{\Theta}\,M + \frac{1}{\Theta}\,\log L$$

Podemos resumir estes resultados no quadro seguinte:

α	F(K,L)
0.5	$F(K,L) = \left(\sqrt{D(L)} - 1\right)^2 \left(\Theta^2 K + M_1\right)$ $D(L) = 1 - \frac{1}{\Theta} M + \frac{1}{\Theta} \log L$
1	$F(K,L) = \left(\log L - M\right)\left(\frac{\Theta}{1+\Theta} K + M_1\right)$
2	$F(K,L) = \left(\sqrt{D(L)} - \frac{1}{\Theta}\right)(K + M_1)$ $D(L) = \frac{1}{\Theta^2} + 2\log L - 2M$

É fácil de verificar que, de todas estas funções, apenas

$$F(K,L) = (\log L - M)\left(\frac{\Theta}{1+\Theta} K + M_1\right)$$

pode verificar

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \rho \frac{K}{L} \quad \text{quando } M_1 = 0 \quad \text{e} \quad \rho = \frac{\Theta}{1+\Theta}$$

Mais geralmente, é possível provar o seguinte teorema:

<u>TEOREMA 30</u> De toda a família $(\beta p + p^{\alpha}) q = \frac{F}{L}$, as únicas funções que vèrificam $\frac{\partial F}{\partial L} = \Theta \frac{K}{L}$ são as que se obtêm com $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$.

Dem: A expressão geral para as funções que verificam $\frac{\partial F}{\partial L} = \Theta \frac{K}{L}$

é $$F(K,L) = \Theta K \log L + \Psi(K)$$

Derivando em ordem a K e formando a equação $(\beta p + p^{\alpha}) = \frac{F}{L}$, temos

$$\left\{\beta\Theta \log L + \beta\Psi'(K) + \left[\Theta \log L + \Psi'(K)\right]^{\alpha}\right\}\Theta\frac{K}{L} = \Theta\frac{K}{L}\log L + \frac{\Psi(K)}{L}$$

$$\beta\Theta^2 \log LK + \left\{\beta\Psi'(K) + \left[\Theta \log L + \Psi'(k)\right]^{\alpha}\right\}\Theta K = \Theta K \log L + \Psi(K)$$

Esta é uma equação diferencial em $\Psi(K)$ cuja solução depende de L (que seria uma contradição) a não ser que $\alpha = 0$ e

$\beta = \frac{1}{\Theta}$ ou $\alpha=1$ e $\Theta^2(1+\beta) = \Theta$, isto é $\Theta = \frac{1}{1+\beta}$

q.e.d.

No Capítulo 6 estudâmos um caso de $\alpha = 0$, quando $F(K,L)$ era H de grau 1.

É interessante estudar agora um caso de $\alpha = 0$ quando $F(K,L)$ é não-homogénea.

4. O caso $\alpha=0$. Estudo da família $(\gamma + \beta p)q = \frac{F}{L}$

Esta família é importante porque a equação

$$(\gamma + \beta p)q = \frac{F}{L}$$

pode ser posta na forma:

$$e_L^F = \frac{1}{\gamma + \beta p}$$

que generaliza a função de elasticidade constante. Como não é possível resolvê-la explicitamente, vamos tentar uma solução geral

$$F(K,L) = \psi(\log L)\cdot\Psi(K)$$

Derivando em ordem a L e K, temos

$$\left[\gamma + \beta\psi(\log L)\Psi'(K)\right] \frac{d\psi}{dy}\cdot\frac{1}{L}\,\Psi(K) = \frac{\psi(y)}{L}\cdot\Psi(K)$$

onde $y = \log L$

$$\left[\gamma + \beta\psi(y)\Psi'(K)\right] \frac{d\psi}{dy} = \psi(y)$$

Esta é uma equação diferencial em $\psi(y)$ cuja solução depende de K (o que seria contraditório) a não ser que $\Psi'(k)$=constante ou $\beta=0$. Então, com $\beta\neq 0$, temos $\Psi(K) = C_0K + C_1$ e a equação fica

$$\left[\gamma + \beta C_0\psi(y)\right] \frac{d\psi}{dy} = \psi(y)$$

$$\psi(y) = \frac{\gamma \frac{d\psi}{dy}}{1-\beta C_0 \frac{d\psi}{dy}}$$

que é uma equação de Lagrange. Para resolvê-la, consideremos $\frac{d\psi}{dy} = P$.

Com $Z = \psi(y)$, temos

$$Z = \frac{\gamma P}{1-\beta C_0 P} .$$

Derivando em ordem a y,

$$P = \frac{\gamma \frac{dP}{dy}(1-\beta C_0 P) + \beta C_0 \frac{dP}{dy} \gamma P}{(1-\beta C_0 P)^2}$$

e

$$P = \frac{\gamma}{(1-\beta C_0 P)^2} \frac{dP}{dy}$$

ou

$$\frac{dy}{dP} = \frac{\gamma}{P(1-\beta C_0 P)^2}$$

Integrando em ordem a P dá

$$y = \gamma \log \frac{P}{1-\beta C_0 P} + \frac{\gamma}{1-\beta C_0 P} + M$$

Como $P = \dfrac{d\psi}{dy} = \dfrac{\psi(y)}{\gamma + \beta C_0 \psi(y)}$,

podemos escrever

$$y = \gamma \log \frac{\dfrac{\psi(y)}{\gamma + \beta C_0 \psi(y)}}{1 - \beta C_0 \dfrac{\psi(y)}{\gamma + \beta C_0 \psi(y)}} + \frac{\gamma}{1 - \dfrac{\beta C_0 \psi(y)}{\gamma + \beta C_0 \psi(y)}} + M$$

$$y = \gamma \log \frac{\psi(y)}{\gamma} + \gamma + \beta C_0 \psi(y) + M$$

Como $\psi(y) = \psi(\log L) = \dfrac{F}{C_0 K + C_1}$,

temos

$$\log L = \gamma \log \frac{F}{\gamma(C_0 K + C_1)} + \gamma + \frac{\beta C_0 F}{C_0 K + C_1} + M$$

e temos a solução obtida duma forma implícita

$$G(F,K,L) = 0$$

Podemos calcular

$$\frac{\partial F}{\partial K} = - \frac{\partial G / \partial K}{\partial G / \partial F} \qquad \frac{\partial F}{\partial L} = - \frac{\partial G / \partial L}{\partial G / \partial F}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{-1/L}{-\dfrac{\gamma}{F} - \dfrac{\beta C_0}{C_0 K + C_1}} = \frac{(C_0 K + C_1) F}{(\gamma C_0 K + \gamma C_1 + \beta C_0 F) L}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = - \frac{-\gamma \dfrac{C_0}{C_0K+C_1} - \dfrac{\beta C_0^{\,2} F}{(C_0K+C_1)^2}}{-\dfrac{\gamma}{F} - \dfrac{\beta C_0}{C_0K+C_1}} = \frac{C_0F}{C_0K+C_1}$$

e

$$e_L^F = \frac{C_0K + C_1}{\gamma C_0K + \gamma C_1 + \beta C_0F}$$

$$e_K^F = \frac{C_0K}{C_0K + C_1}$$

$F(K,L)$ não verifica $\dfrac{\partial F}{\partial L} = \Theta \dfrac{K}{L}$ a não ser que $\gamma = 0$ e $C_1 = 0$, como o caso já visto na pāgina 140. Com efeito, tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{(C_0K + C_1)F}{(\gamma C_0K + \gamma C_1 + \beta C_0F)L} = \frac{\left(C_0 + \dfrac{C_1}{K}\right)F}{(\gamma C_0K + \beta C_0F + \gamma C_1)} \cdot \frac{K}{L}$$

Conclusão
****

Deste apêndice podemos concluir que as funções que verificam $\dfrac{\partial F}{\partial L} = \Theta \dfrac{F}{L}$ são casos muito especiais de certas famílias mais gerais onde se integram. É possível encontrar funções que satisfazem condições mais gerais ,

$$\left(\frac{p}{\Theta} + p^{\alpha}\right)q = \frac{F}{L} \quad \text{com} \quad \alpha \neq 0$$

ou

$$(\gamma + \beta p)q = \frac{F}{L} \quad \text{com} \quad \gamma \neq 1$$

mas essas, em geral não verificam

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \Theta \frac{F}{L}$$

Por outro lado, demos um exemplo de obtenção de uma função de produção de uma forma implícita. Contudo, deverá notar-se que algumas das funções que obtivemos não satisfazem certas condições de 2ª ordem que em geral se impõem às funções de produção e que permitem, por exemplo, calcular a maximização do lucro.

C A P Í T U L O 7

UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO EMPÍRICA

1. Problemas da aplicação empírica

Quando se pretende aplicar um modelo como o GM a uma economia determinada, dois tipos de dificuldade podem surgir:

- se se tratar de uma pequena economia aberta, já não é válida uma das hipóteses básicas que fizemos ao longo de todo o trabalho: que não existia comércio externo
- se não existirem índices de preços para a produção e fornecimentos intersectoriais não poderemos reduzir todos os valores a preços base de um determinado ano, hipótese que também foi considerada em todo o trabalho. Este aspecto é particularmente importante quando está em causa a análise de uma evolução temporal da economia.

Uma possibilidade de ultrapassar a primeira dificuldade seria a de considerar, em vez do modelo

$$x_{ij} = f_{ij}\ (x_i, x_j),$$

o modelo

$$x_{ij} = f_{ij}\ (x_i + m_i\ , x_j)$$

onde m_i representaria a importação de produtos do sector i. Par não se introduzirem n variáveis m_i adicionais poder-se-ia consi derar $m_i = \alpha_i(x_i + m_i)$ com α_i constante entre 0 e 1, o que permitiri manter a especificação

$$x_{ij} = f^*_{ij}\ (x_i, x_j),$$

embora à custa de uma limitação: a não introdução de substituição de importações em relação à produção total de cada sector. Este último aspecto, quando se analisa o caso português, é suficientemente importante para obstar à aplicação de uma tal especificação.

2. Uma aplicação empírica à economia portuguesa

Para esta aplicação, que se trata de uma mera ilustração, vamos considerar apenas um sector fornecedor: o da electricidade, gás e água que, até recentemente, não apresentou níveis significativos de importação. Consideraremos, além disso, 14 sectores utilizadores, de acordo com a seguinte lista:

Sector 1: Agricultura e silvicultura
" 2: Pesca e conservas
" 3: Extractivas
" 4: Alimentação
" 5: Bebidas e tabaco
" 6: Têxteis, vestuário e calçado
" 7: Madeira, cortiça e mobiliário
" 8: Papel e tipografia
" 9: Químicas e derivados do petróleo

Sector 10: Minerais não metálicos
" 11: Metalúrgicas de base
" 12: Produtos metálicos
" 13: Máquinas e material eléctrico
" 14: Material de transporte

O nosso objectivo vai ser o de tentar adiantar alguma coisa acerca das funções, supostas existentes, $x_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$ em que o sector i será sempre o sector da electricidade, gás e água e j variará de 1 a 14.

Os dados de base a utilizar constam das matrizes de relações interindustriais (GEBEI), para 1964 (1) e 1974, a preços no produtor. A evolução corresponderá, pois, ao período 1964-74.

Levanta-se agora o segundo problema considerado em 1., isto é, a forma de reduzir todos os preços à mesma base, neste caso, os preços de 1974 a preços de 1964. Infelizmente, esta dificuldade é inultrapassável quando se pretenda uma análise rigorosa, uma vez que não existem séries de índices de preços da produção para todos os sectores considerados. Para obter uma aproximação utilizaremos, para deflactores da produção, os índices de preços do VAB de cada sector, tal como foram calculados pelo INE (Contas Nacionais). Faremos, também,

---

(1) - O GEBEI obteve, para 1964, a matriz a preços do produtor com base na matriz a preços do utilizador do INII.

a hipótese de que os deflaccionadores dos fornecimentos x_{ij} são iguais, qualquer que seja o sector utilizador j.

A análise será prosseguida utilizando o conceito de elasticidade de substituição introduzido no Capítulo 2, pag. 36.

Conforme se viu, definimos

$$\sigma_{ij} = \frac{\dfrac{da_{ij}}{a_{ij}}}{\dfrac{db_{ij}}{b_{ij}}} \quad \text{em que} \quad a_{ij} = \frac{f_{ij}(x_i, x_j)}{x_j} \quad \text{é o}$$

coeficiente técnico e $b_{ij} = \dfrac{f_{ij}(x_i, x_j)}{x_i}$ é o coeficiente da procura.

Como vimos também (pag. 36) quando f_{ij} apresenta rendimentos constantes à escala tem-se $\sigma_{ij} < 0$. Faremos a hipótese, nesta exemplificação, que sempre que σ_{ij} for negativa, há boas razões para crer que as funções f_{ij} apresentem rendimentos constantes à escala (o que, obviamente, a teoria não garante, uma vez que σ_{ij} pode ser negativa sem que f_{ij} apresente rendimentos constantes).

No caso de ser $\sigma_{ij} > 0$, distinguiremos ainda duas situações

a) $db_{ij} > 0$ e $da_{ij} > 0$

Neste caso, existem rendimentos decrescentes. Com efeito, teríamos aqui que os fornecimentos do sector i ao sector j cresceriam a uma taxa instantânea superior quer à de x_i quer à de x_j, o que significa que existem rendimentos decrescentes.

b) $db_{ij} < 0$ e $da_{ij} < 0$

Por razões inversas das anteriores temos, neste caso, rendimentos crescentes.

Na situação presente não temos, obviamente, um acréscimo infinitesimal, mas sim acréscimos $\Delta a_{ij} = a_{ij}^{74} - a_{ij}^{64}$ e $\Delta b_{ij} = b_{ij}^{74} - b_{ij}^{64}$. Continuaremos, porém, a admitir que se mantêm válidos os raciocínios anteriores mesmo para estes acréscimos.

Com estas prevenções calcularam-se os valores de σ_{ij} para o período 1964 e 1974, que constam do Quadro 1. Deste quadro podemos extrair as seguintes conclusões:

- é possível que os fornecimentos aos sectores agricultura, extractivas, alimentares, têxteis, madeira, químicas minerais não metálicos e metalúrgicas de base apresentem rendimentos constantes;
- os fornecimentos aos sectores máquinas e material eléctrico e material de transporte apresentam rendimentos crescentes;
- os restantes sectores apresentam rendimentos decrescentes.

Não deixa de ser interessante apontar o grande valor absoluto da elasticidade correspondente ao sector agrícola (29,5), o que é provavelmente consequência da aleatoriedade da produção do sector, extremamente dependente das condições climatéricas.

QUADRO 1 - COEFICIENTES E ELASTICIDADES

Sectores	Coeficiente técnico 1964 preços correntes	Coeficiente técnico 1974 preços de 1964	Coeficiente de procura 1964 preços correntes	Coeficiente de procura 1974 preços de 1964	σ_{ij}
1	0,0009	0,0023	0,0057	0,0054	-29,5
2	0,0009	0,0098	0,0012	0,0027	7,91
3	0,0237	0,0288	0,0088	0,0054	-0,56
4	0,0073	0,0096	0,0505	0,0300	-0,78
5	0,0074	0,0099	0,0043	0,0055	1,21
6	0,0135	0,0174	0,0791	0,0763	-8,16
7	0,0113	0,0295	0,0236	0,0212	-15,79
8	0,0124	0,0511	0,0142	0,0529	1,15
9	0,0321	0,0334	0,0967	0,0704	-0,15
10	0,0547	0,0617	0,0612	0,0462	-0,52
11	0,0281	0,0443	0,0307	0,0222	-2,08
12	0,0112	0,0328	0,0150	0,0201	5,67
13	0,0086	0,0083	0,0106	0,0102	0,92
14	0,0060	0,0044	0,0101	0,0095	4,49

3. Uma especificação de rendimentos constantes

Identificámos 8 sectores onde é possível admitir a existência de rendimentos constantes para a função $f_{ij}(x_i,x_j)$. Para eles pode tentar-se estimar esta função com uma especificação simples a satisfazer as condições do GM. Consideremos a seguinte especificação:

$$x_{ij}= f_{ij}(x_i x_j) = \left[C_0^{ij} \left(1 - \frac{x_i}{x_i + x_j}\right) + C_1^{ij} \frac{x_i}{x_i + x_j} \right] x_j$$

De acordo com a apresentação do GM (pag. 63) tem-se

$$g_{ij}(x_i,x_j) = \frac{x_i}{x_i + x_j} = \frac{1}{1 + \frac{x_j}{x_i}} = g_{ij}\left(\frac{x_i}{x_j}\right) \text{ e } f_{ij} \text{ é,}$$

pois, homogénea de grau 1.

A função pode apresentar-se, mais compactamente, da seguinte forma:

$$x_{ij} = f_{ij}(x_i,x_j) = \frac{C_1^{ij} x_i x_j + C_0^{ij} x_j^2}{x_i + x_j}$$

Quando se conhecem os valores x_{ij}, x_i e x_j para dois períodos é possível, em geral, estimar C_0^{ij} e C_1^{ij}. Vem, neste caso,

$$x_{ij}{}^{0} = \frac{C_1^{ij}\, x_i^0\, x_j^0 + C_0^{ij}\, {x_j^0}^2}{x_i^0 + x_j^0}$$

$$x_{ij}{}^{1} = \frac{C_1^{ij}\, x_i^1\, x_j^1 + C_0^{ij}\, {x_j^1}^2}{x_i^1 + x_j^1} \qquad \text{donde}$$

$$C_0^{ij} = \frac{x_i^0 x_j^0 x_{ij}{}^{1}(x_i^1 + x_j^1) - x_i^1 x_j^1 x_{ij}{}^{0}(x_i^0 + x_j^0)}{x_j^0(x_i^0 {x_j^1}^2 - x_j^0 x_i^1 x_j^1)}$$

se $x_i^0 x_j^1 \neq x_j^0 x_i^1$ isto é, se $\dfrac{x_j^1}{x_j^0} = \dfrac{x_i^1}{x_i^0}$

e

$$C_1^{ij} = \frac{x_{ij}{}^{0} x_i^0 + x_{ij}{}^{0} x_j^0}{x_i^0 x_j^0} - C_0^{ij}\, \frac{x_j^0}{x_i^0}$$

Podemos calcular para os diferentes sectores os valores de C_0^{ij} e C_1^{ij}, uma vez que conhecemos x_{ij}, x_i e x_j para 1964 e 1974. Calculando, por exemplo, para os sectores das transformadoras que possivelmente apresentam rendimentos constantes, obtemos o Quadro 2.

QUADRO 2

Coeficientes C_0^{ij} e C_1^{ij} estimados

Sectores	Coeficiente C_0^{ij}	Coeficiente C_1^{ij}	Coeficiente real 1964	Coeficien[t]e real 197[4]
Alimentação	0,0048	0,0247	0,0073	0,0096
Têxteis	0,0008	0,0881	0,0135	0,0174
Madeira	-0,0115	0,0590	0,0113	0,0295
Químicas	0,0279	0,0449	0,0321	0,0334
Minerais não metálicos	0,0218	0,0917	0,0547	0,0617
Metalúrgicas de base	-0,0071	0,0664	0,0281	0,0443

Da análise deste quadro concluímos que apenas os sectores da madeira e das metalúrgicas de base apresentam limites inferiores para C_0^{ij} que são negativos e portanto não significativos. Poder-se-ia postular, para estes dois sectores, que $C_0^{ij} = 0$, o que seria estranho pois não é crível que qualquer dos sectores possa dispensar o consumo de energia eléctrica. Será talvez preferível admitir que o forte aumento dos coeficientes técnicos registado nestes sectores não pode ser adequadamente descrito por uma função como a que foi utilizada