

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA GEOGRÁFICA, GEOFÍSICA E ENERGIA



Análise quantitativa de dados sísmicos: Inversão e AVO

Boualem Wahid Amadeu Pereira

Dissertação

Mestrado em Ciências Geofísicas

Especialização em Geofísica Interna

2014

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA GEOGRÁFICA, GEOFÍSICA E ENERGIA



Análise quantitativa de dados sísmicos: Inversão e AVO

Boualem Wahid Amadeu Pereira

Dissertação

Mestrado em Ciências Geofísicas

Especialização em Geofísica Interna

Orientador: Prof. Doutor Luís Manuel Matias

2014

Em memória do meu Pai Arnaldo Pereira

Agradecimentos

O trabalho realizado, que representa um passo significativo para o meu amadurecimento profissional e intelectual, nunca ter-se-ia concretizado sem o contributo inestimável de diversas pessoas e instituições. A estes(as) gostaria de endereçar algumas palavras de agradecimento.

A minha Mãe, Fátima Pereira, pela extraordinária mulher que é, e pelo inesgotável amor. Espero que um dia possa abeirar-me da sua integridade e sabedoria. Ao meu irmão, Abdelkader Pereira, pelo companheirismo, amor e proteção. Sem vocês nada disso teria sentido.

O meu profundo agradecimento ao meu Director de Exploração na Sonangol E.P., Eng. Severino Cardoso, pelo apoio e pela confiança que sempre em mim depositou. Este projecto nunca teria sido possível se não fosse pelo seu encorajamento, mesmo me parecendo que pouco poderei fazer para que me sinta meritório, e ensinamentos.

Ao Professor Luís Matias por me ter aturado e comigo compartilhar o seu conhecimento. Este trabalho também é seu. A única forma que encontro para agradecer-lhe é a promessa de uma amizade com longevidade da minha parte.

Aos meus colegas no DEGGE pela simpatia e acolhimento que tiveram com este velhinho.

Ao DEGGE pelo apoio prestado disponibilizando os meios necessários a realização do trabalho e aos seus professores pelo conhecimento transmitido.

Meus “Kambas” obrigado por continuarem a serem fieis companheiros, espero agora puder compensar a ausência muitas vezes notória.

Por último, e por razões óbvias não menos importante, o meu agradecimento a Sonangol E.P. por ter permitido e apoiado financeiramente a realização deste projecto.

Resumo

A interpretação quantitativa de dados sísmicos, recorrendo a inversão antes e depois do “stack” e a análise da variação da amplitude com o “offset”, para identificação e caracterização de possíveis reservatórios de hidrocarbonetos, constitui, actualmente, uma importante área de aplicação da geofísica de exploração de dados sísmicos. Invertendo os dados sísmicos é possível estimar, a partir dos dados registados, parâmetros físicos que caracterizam o meio que se pretende estudar. Neste trabalho, a inversão é efectuada iterativamente recorrendo ao método de inversão baseado em modelos, onde sismogramas sintéticos, gerados a partir de um modelo inicial, são comparados com os dados sísmicos reais para medir o nível de similaridade entre ambos, definindo-se assim a função de custo. A partir da diferença obtida o modelo inicial é actualizado e melhorado e comparado novamente com os dados sísmicos registados. Os parâmetros necessários à geração dos sintéticos, $\mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d}$, são determinados considerando métodos de decomposição adequados para estimar a inversa do operador \mathbf{G} . Na introdução teórica são desenvolvidos alguns métodos para resolver este problema.

A análise da variação da amplitude com o “offset” (AVO) é efectuada partindo das equações de Zoeppritz e obtendo aproximações para estas, que facilitam a implementação e interpretação das observações. A aproximação de Shuey, resultante da aproximação de Aki–Richards, permite definir os atributos gradiente, intercepto e curvatura. Podem ser definidos vários atributos AVO que representados em gráficos cruzados (“crossplots”) permitem identificar e seleccionar respostas geralmente devidas a presença de reservatórios de hidrocarbonetos.

Neste trabalho são estudados dados sísmicos 2D “pós–stack” e “pré–stack”

Palavras-chave: Inversão, AVO, Indicadores directos de hidrocarbonetos, Atributos AVO.

Abstract

Quantitative Seismic interpretation of seismic data using pre-stack and post-stack inversion and amplitude variation with offset analysis, for identification and characterization of potential hydrocarbon reservoirs, is nowadays an important area study in seismic exploration. Physical parameters of the medium can be predicted by inverting the recorded data.

In this work, the inversion is performed iteratively using model based inversion where synthetics are generated from an initial model and compared with the actual seismic data to measure the level of similarity between them, defining the cost function. This difference between the initial model and the real data allow us to updated and improve the model for further comparison. The parameters needed to generate the synthetic, $\mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d}$, are determined considering suitable decomposition methods to estimate the inverse operator \mathbf{G} . Some methods to solve this problem are developed in the theory section of inversion.

Starting from Zoeppritz equations, amplitude variation with offset analysis (AVO) can be performed by approximations that turns the implementation and interpretation of the amplitudes observed easier. The Shuey approximation, obtained from Aki–Richards approximation, define the AVO attributes gradient, intercept and curvature. It is possible to define several AVO attributes that can be crossplotted to identify and select some behaviors usually due to the presence of hydrocarbon reservoirs .

In this work, 2D pre-stack and post-stack seismic data are analyzed.

Keywords: Inversion, AVO, Quantitative Interpretation, Direct Hydrocarbon Indicators

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
I Introdução Teórica	1
1 Propagação de ondas sísmicas	2
1.1 Introdução	2
1.2 A equação de onda	10
1.2.1 Solução da equação de onda acústica	13
1.3 Partição de energia numa interface plana	16
1.3.1 Coeficiente de reflexão acústico	16
1.3.2 Coeficiente de reflexão elástico	23
2 Inversão de dados geofísicos	25
2.1 Introdução	25
2.2 Métodos de inversão baseados em modelos	27
2.2.1 Métodos lineares e linearizáveis	29
2.2.2 Solução pelo método dos quadrados mínimos	32
2.2.3 Decomposição em valores singulares (DVS)	36
2.2.4 Restrição de soluções	37
2.2.5 Incertezas associadas a estimação dos parâmetros	40
2.2.6 Regularização	42
2.3 Inversão sísmica	45
2.3.1 Modelo convolutivo	46
2.3.2 Inversão de dados sísmicos baseada em modelos	47
3 Variação da amplitude com o “offset”	49
3.1 Teoria do AVO	50

3.1.1	Aproximações para as equações de Zoeppritz	50
3.1.2	Física das formações rochosas e as relações entre os parâmetros elásticos e os parâmetros petrofísicos	54
3.2	Interpretação de dados AVO	60
II	Aplicações	74
4	Inversão sísmica “pós-stack”	75
4.1	Correlação das diagrfias e extração da “wavelet”	78
4.2	Modelo inicial e informação à priori	87
4.3	Inversão dos dados sísmicos	89
5	Inversão e AVO de dados sísmicos “pré-stack”	97
5.1	Modelação AVO	100
5.2	Análise AVO	100
5.3	Inversão dos dados	110
5.3.1	Inversão Independente para obtenção das impedâncias P e S	115
5.3.2	Inversão simultânea	119
6	Conclusão	137
	Bibliografia	142

Parte I

Introdução Teórica

Capítulo 1

Propagação de ondas sísmicas

Ut tensio sic vis – “as the extension, so the force”

Robert Hooke (1676)

Para lidarmos com as ferramentas utilizadas na prospecção sísmica, e em particular na aquisição, processamento e interpretação quantitativa de dados sísmicos, é necessário conhecer os fundamentos básicos da teoria de propagação de ondas sísmicas.

Neste capítulo serão descritos, sucintamente, os princípios físicos que regem a propagação de ondas sísmicas em meios elásticos.

1.1 Introdução

Considere-se que um determinado corpo, de volume V , é sujeito a forças superficiais, $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{F}}{dS}$, e a forças de corpo (internas), $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, (figura 1.1). A força total, a que o corpo está sujeito, pode ser dada pela equação seguinte:

$$\mathbf{F}_T = \iint_S \mathbf{T} dS + \iiint_V \mathbf{f} dV \quad (1.1)$$

Pela 2ª Lei de Newton, obtém-se a seguinte equação para o balanço do momento linear:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{T} dS + \iiint_V \mathbf{f} dV &= \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV \\ &= \iiint_V \rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} dV \end{aligned} \quad (1.2)$$

O vector das tensões, \mathbf{T} , pode ser representado pela equação,

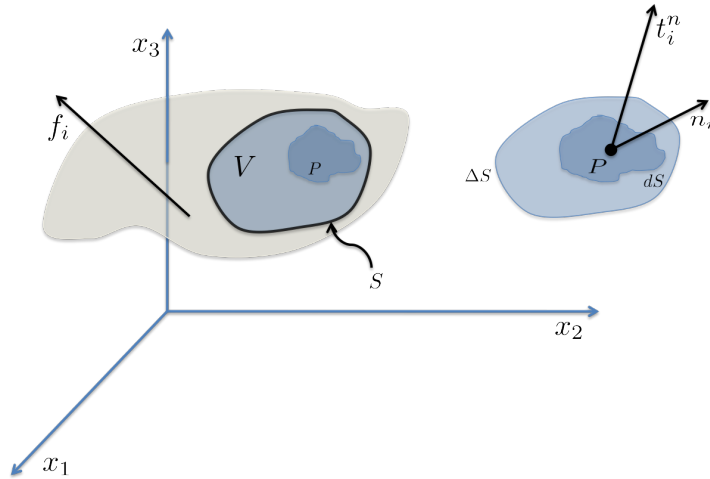


Figura 1.1: Representação do elemento de volume considerado.

$$\mathbf{T}^{(e_i)} = \mathbf{T}_1^{(e_i)} \mathbf{e}_1 + \mathbf{T}_2^{(e_i)} \mathbf{e}_2 + \mathbf{T}_3^{(e_i)} \mathbf{e}_3 \quad (1.3)$$

onde os elementos $T_j^{(e_i)}$ representam as componentes ao longo do eixo dos x_j s. Esta equação pode ser igualmente representada na forma matricial, como se segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^{(e_1)} \\ \mathbf{T}^{(e_2)} \\ \mathbf{T}^{(e_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^{(e_1)} & \mathbf{T}_2^{(e_1)} & \mathbf{T}_3^{(e_1)} \\ \mathbf{T}_1^{(e_2)} & \mathbf{T}_2^{(e_2)} & \mathbf{T}_3^{(e_2)} \\ \mathbf{T}_1^{(e_3)} & \mathbf{T}_2^{(e_3)} & \mathbf{T}_3^{(e_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

O tensor das tensões, σ_{ij} , representa a j -ésima componente da força superficial que actua sobre uma superfície cuja normal é paralela ao eixo dos x_i s, (ver figura 1.2).

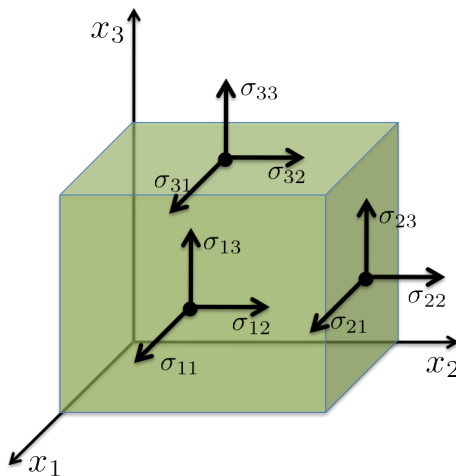


Figura 1.2: Representação das componentes do tensor das tensões.

Para podermos avaliar as forças em termos de planos arbitrários considere-se a situação representada na figura 1.3. Tem-se portanto;

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)} \mathbf{n}_1 + \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)} \mathbf{n}_2 + \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)} \mathbf{n}_3 = \sigma^T \mathbf{n} \quad (1.5)$$

A equação anterior pode ser representada mais convenientemente, em termos das suas componentes, como se segue:

$$T_j^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij} n_i \quad (1.6)$$

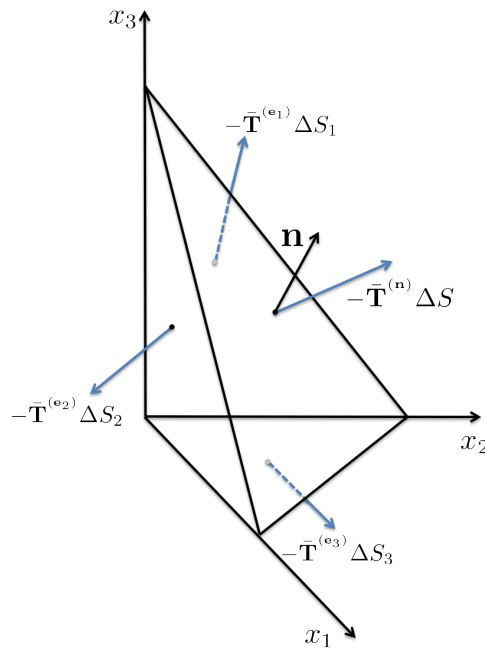


Figura 1.3: Tetraedro de Cauchy. Geometria utilizada para definir o tensor das tensões em planos arbitrários.

Atendendo as equações 1.2 e 1.6, vem que;

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_i - \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \right) dV = 0$$

Como o volume considerado é arbitrário, a equação integral anterior será válida se o integrando for identicamente nulo, obtendo-se a equação do movimento seguinte:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t} \right) \quad (1.7)$$

Saliente-se que, na expressão anterior, a velocidade e a aceleração das partículas foram obtidas considerando que o elemento de volume é móvel, ou seja, são consideradas derivadas

materiais. Com efeito,

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t} \quad (\text{aceleração})$$

e

$$v_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t} \quad (\text{velocidade})$$

Para deformações infinitesimais é possível desprezar, sem perda de precisão, a parte não-material, isto é, considera-se que $v_i \approx \frac{\partial u_i}{\partial t}$. Nestas condições, obtém-se a geralmente denominada equação do movimento de Cauchy:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.8)$$

No estudo a seguir, iremos considerar corpos sólidos elásticos lineares, onde a relação entre a tensão e a deformação é linear (Lei de Hooke generalizada).

Os corpos sólidos deformam-se quando são sujeitos a forças externas, originando forças internas. A relação entre a a tensão e a deformação depende essencialmente da natureza desta e de factores externos (temperatura, por exemplo) que possam influenciar o sistema em estudo. Diz-se que a deformação é elástica se o corpo deformado retornar a sua forma inicial quando são cessadas as forças que a originaram. Em caso contrário a deformação diz-se plástica. Em ambos os casos, a magnitude da deformação depende da magnitude da força aplicada e da natureza do material envolvido. No estudo a seguir, iremos considerar que as deformações são elásticas.

A Lei de Hooke generalizada estabelece que cada uma das componentes do tensor das tensões, σ_{ij} , é uma combinação linear de todas as componentes no tensor das deformações, ε_{kl} ,

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.9)$$

onde c_{ijkl} é um tensor de quarta ordem, com $3^4 = 81$ componentes, geralmente denominado por tensor de elasticidade ou de rigidez. Este é intrinsecamente dependente da direcção pois, tanto σ_{ij} como ε_{kl} dependem da direcção em que os fenómenos, que os caracterizam, ocorrem, pelo que, para um determinado ponto do espaço, os valores de c_{ijkl} definem o nível de possível existência de anisotropia. Com efeito, se o tensor de elasticidade for dependente da posição então o meio em estudo é não-homogéneo.

Atendendo a simetria dos tensores de deformação e tensão e a equação 1.9, é possível facil-

mente concluir que o tensor de elasticidade é um tensor invariante, isto é, que $c_{ijkl} = c_{jikl}$ e $c_{ijkl} = c_{ijl}$, reduzindo o número de componentes independentes do tensor de elasticidade para 36 e o número de equações, que integram a Lei de Hooke, para 6 equações. (Pujol [2003], Ikelle and Amundsen [2005], Yilmaz [2001]). Estas componentes podem ser representadas por uma matriz, C_{IJ} , em que se consideram apenas os pares (i, j) e (k, l) , onde $i \leq j$ e $k \leq l$, respectivamente. Fazendo as seguintes substituições de índices,

$$\begin{cases} I = i & \text{se } i = j \\ I = 9 - (i + j) & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

e

$$\begin{cases} J = k & \text{se } k = l \\ J = 9 - (k + l) & \text{se } k \neq l \end{cases}, \quad k, l \in \{1, 2, 3\}$$

é possível representar o tensor c_{ijkl} pela matriz seguinte:

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{61} & \cdots & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

A equação 1.9 poderá ser representada, na forma matricial, como se segue:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Os meios elásticos onde as propriedades que os caracterizam são idênticas em todas as direcções designam-se por isotropicos, e a matriz de elasticidade anterior possui apenas dois parâmetros elásticos independentes, C_{11} e C_{44} (Ikelle and Amundsen [2005]). Com efeito,

$$C_{ISO} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{11} - 2C_{44} & C_{11} - 2C_{44} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} - 2C_{44} & C_{11} & C_{11} - 2C_{44} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} - 2C_{44} & C_{11} - 2C_{44} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Os parâmetros de Lamé, λ e μ , podem ser definidos em termos dos parâmetros elásticos anteriores, como se segue:

$$\begin{cases} \lambda = C_{11} - 2C_{44} \\ \mu = C_{44} \end{cases} \quad (1.13)$$

Substituindo as equações 1.13 na matriz 1.12 obtém-se:

$$C_{Lamé} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Atendendo aos resultados anteriores, é possível obter a seguinte equação para a Lei de Hooke (equação 1.9) em meios isotropicos:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.15)$$

Considerando a definição do tensor das deformações infinitesimal, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, vem;

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.16)$$

O parâmetro de Lamé μ constitui uma medida de rigidez. De facto, atendendo a equação 1.15 e considerando apenas as componentes não diagonais de ε_{ij} (tensões cisalhantes) e que $\lambda = 0$, tem-se:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.17)$$

Verifica-se que μ , geralmente designado por módulo de rigidez ou cisalhante, é um coeficiente

que relaciona a tensão aplicada com a alteração da forma do elemento de volume em estudo. Por outro lado, devido a condições de estabilidade do problema, onde é necessário exercer trabalho para deformar o elemento material, a matriz 1.14 tem de ser definida positiva, pelo que $\mu > 0$.

Considere-se agora o caso em que μ tende para zero e apenas as componentes diagonais do tensor das deformações (tensões normais). Pela mesma equação 1.15 tem-se:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} = \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \lambda \varphi \quad (1.18)$$

Onde $\varphi = \frac{V'-V}{V} = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$ é a dilatação cúbica.

Verifica-se, pela equação 1.18, que o parâmetro λ comporta-se de forma semelhante ao módulo de compressibilidade k , definido mais adiante.

Atendendo a Lei de Hooke para meios isotrópicos, equação 1.15 vem,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}) \quad (1.19)$$

Contraindo os índices ij , vem que;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ii} - \lambda \delta_{ii} \varepsilon_{kk}) \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{kk} &= \frac{\sigma_{kk}}{(3\lambda + 2\mu)} \end{aligned}$$

Substituindo o resultado anterior na equação 1.19 tem-se:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \right) \quad (1.20)$$

Considere-se o caso em que a tensão aplicada é uniaxial (ver figura 1.4),

$$\sigma_{ij} = \sigma_{11} = \begin{cases} \sigma_{11}, & i = j = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

pelo que apenas as componentes diagonais de ε_{ij} não são nulas. Com efeito,

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}(\lambda + \mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\sigma_{11}\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad (1.22)$$

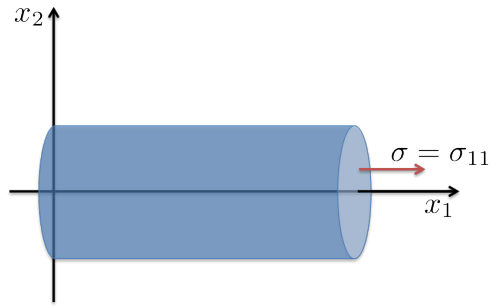


Figura 1.4: Tensão uniaxial aplicada a um cilindro de referência.

Nas condições descritas, as equações anteriores permitem constatar que a barra é submetida a uma extensão longitudinal, ao longo do eixo dos xxs , e a uma contração ao longo do plano transversal definido pelos restantes eixos coordenados.

Definindo o módulo de Young, Y , como a razão entre a tensão e a extensão longitudinal e a razão de Poisson, σ , como a razão entre a contração transversal e a extensão longitudinal, tem-se:

$$Y = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (1.23)$$

$$\sigma = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (1.24)$$

Os parâmetros de Lamé, acima definidos, podem ser representados, em função do módulo de Young e da razão de Poisson, como se segue:

$$\lambda = \frac{Y\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \quad (1.25)$$

$$\mu = \frac{Y}{2(1 + \sigma)} \quad (1.26)$$

Considere-se agora o caso hidrostático, onde a tensão, de magnitude P , é aplicada segundo as direcções normais;

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} \Rightarrow \sigma_{kk} = -3P$$

Pela equação 1.20 vem,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(-P\delta_{ij} + \frac{3P\lambda\delta_{ij}}{3\lambda + 2\mu} \right) = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \quad (1.27)$$

Verifica-se que as únicas componentes não nulas do tensor das deformações hidrostáticas são os elementos da diagonal principal.

O parâmetro elástico que permite avaliar a variação de volume (que é negativo quando há redução de volume do elemento material) por unidade de pressão exercida denomina-se geralmente por compressibilidade, k , e pode ser dado por:

$$k = \frac{-\frac{\Delta V}{V}}{P} = \frac{-\varepsilon_{kk}}{P} \quad (1.28)$$

Como o traço de ε_{ij} é dado por,

$$\text{Tr}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{kk} = -\frac{3P}{3\lambda + 2\mu} \quad (1.29)$$

Vem que,

$$k = \frac{1}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} \quad (1.30)$$

O inverso da compressibilidade é geralmente denominado por módulo de incompressibilidade, K , e pode ser dado por:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (1.31)$$

1.2 A equação de onda

Como foi abordado na secção anterior, nos meios isotrópicos e homogéneos a relação entre a tensão e a deformação é dada pela equação 1.15. Assim, considerando a equação do movimento, equação 1.8, e a definição de tensor das deformações infinitesimais, introduzida na secção anterior, vem,

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \delta_{ij} \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + f_i$$

Recorrendo a definição do delta de Kronecker e a linearidade dos operadores diferenciais, obtém-se a equação de onda elástica,

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) u_i + f_i \quad (1.32)$$

A equação de onda elástica, na forma vectorial, pode ser representada pela seguinte equação:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1.33)$$

Considerando a identidade vectorial,

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (1.34)$$

vem,

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (1.35)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = V_P^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - V_S^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{F} \quad (1.36)$$

Onde, $V_P = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$ e $V_S = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$ representam, respectivamente, a velocidade das ondas P e S, como iremos verificar a seguir.

Na secção anterior vimos que a dilatação está directamente relacionada com a variação do volume devido a deformação;

$$\frac{V' - V}{V} \approx \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varphi = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.37)$$

Por outro lado define-se o vector de rotação, devido a deformação do elemento material, como o rotacional do vector de deslocamento:

$$\Psi = \nabla \times \mathbf{u} \quad (1.38)$$

Substituindo as equações 1.37 e 1.38 na equação 1.35, obtém-se a seguinte expressão para a equação de onda elástica:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla \varphi - \mu \nabla \times \Psi + \mathbf{f} \quad (1.39)$$

A equação 1.39 descreve a propagação da onda em termos da variação de volume, descrita pelo campo divergente, e da forma, caracterizada pelo campo rotacional. Para podermos

identificar devidamente os tipos de ondas associadas a propagação, em meios isotrópicos e homogêneos, é necessário separar as duas componentes referidas.

Aplicado o operador divergência à equação 1.39, e atendendo que em meios homogêneos λ e μ são constantes tem-se:

$$\nabla \cdot \left[\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right] = (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \nabla \varphi - \mu \nabla \cdot \nabla \times \Psi + \nabla \cdot \mathbf{f}$$

Como $\nabla \cdot \nabla \times \Psi = 0$ e $\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \text{Lap } \varphi$, e considerando a densidade constante e trocando a ordem das derivadas mistas, vem que;

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) &= (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi \\ \Leftrightarrow \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi \\ \Leftrightarrow \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.40)$$

A equação 1.40 constitui a equação de onda para as ondas P , com velocidade de propagação

$$V_P = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.41)$$

e função de onda definida pela dilatação, $\varphi(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, que está associada a variação de volume, pelo que, este tipo de ondas são igualmente designadas por ondas de pressão. Contudo, a presença dos dois parâmetros de Lamé sugere que este tipo de ondas induzem, ao meio em que se propagam, uma variação de volume e de forma.

Na obtenção da equação 1.40 desprezou-se, por conveniência, a contribuição da fonte \mathbf{f} , bastando caso seja necessário, e como iremos verificar na secção 1.2.1, inclui-la de forma adequada.

Aplicando o operador rotacional a equação 1.39 tem-se:

$$\nabla \times \left[\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right] = (\lambda + 2\mu) \nabla \times \nabla \varphi - \mu \nabla \times \nabla \times \Psi$$

Atendendo ao facto de o rotacional de um gradiente ser nulo, e de que a divergência do rotacional é igualmente nula e, considerando a identidade 1.34 e a definição 1.38, tem-se, nas mesmas condições assumidas no estudo das ondas P , a seguinte equação de onda para as ondas S :

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\mu [\nabla (\nabla \cdot \Psi) - \nabla^2 \Psi]$$

$$\Leftrightarrow \nabla^2 \Psi = \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (1.42)$$

Neste caso a função de onda é dada pelo vector de rotação, $\Psi(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, e a velocidade das ondas S ,

$$V_S = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.43)$$

depende apenas do parâmetro de Lamé μ , sugerindo que a propagação deste tipo de ondas induzem uma alteração da forma do elemento material, enquanto que o volume deste permanece constante. Com efeito, o facto de $\Psi = \nabla \times \mathbf{u} \Rightarrow \nabla \cdot \Psi = 0$ permite concluir que o campo Ψ é um campo conservativo em relação ao volume.

Pela definição de módulo de imcompressibilidade, equação 1.31, obtém-se a seguinte expressão para a velocidade das ondas P :

$$V_P = \left(\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.44)$$

Assim, como a razão entre a velocidade das ondas P e a velocidade das S ,

$$\frac{V_P}{V_S} = \left(\frac{k}{\mu} + \frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.45)$$

é superior a unidade, pois como vimos anteriormente $K > 0$ e $\mu > 0$, a velocidade das ondas P é superior a velocidade das ondas S . Por essa razão, as ondas P são também designadas por ondas primárias e as ondas S de secundárias.

1.2.1 Solução da equação de onda acústica

Na secção 1.2 foram obtidas as equações que descrevem a propagação de ondas sísmicas em meios homogéneos e isotrópicos. Pelas equações 1.40 e 1.42 verifica-se que tanto ψ como Φ satisfazem a equação de onda acústica,

$$\Delta \Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1.46)$$

onde, $c = V_P, V_S$.

– Solução unidimensional para $\rho(\mathbf{x})$ e $c(\mathbf{x})$ constantes:

Neste caso particular iremos considerar, por convenção, que o vector posição é $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$.

Tem-se portanto,

$$\Psi_{xx} = \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \Psi_{tt} \quad (1.47)$$

Aplicando a transformada de Fourier (TF), no domínio do tempo, a ambos os membros da equação 1.47 obtém-se:

$$\mathcal{F}[\Psi_{xx}(\mathbf{x}, t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{c^2} \Psi_{tt}(\mathbf{x}, t)\right]$$

Com efeito,

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{c^2} \Psi_{tt}(\mathbf{x}, t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c^2} \Psi_{tt}(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt$$

Recorrendo ao resultado para a transformada de Fourier de derivadas de segunda ordem e atendendo a equação 1.47, vem que:

$$\mathcal{F}[\Psi_{xx}(\mathbf{x}, t)] = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{F}[\Psi(\mathbf{x}, t)] \quad (1.48)$$

Quando ω é constante, a transformada é apenas função da posição, \mathbf{x} . Definindo $\phi(\mathbf{x}) = \mathcal{F}[\Psi(\mathbf{x}, t)]$, obtém-se uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes,

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \phi(x) = 0 \quad (1.49)$$

cuja solução pode ser dada por:

$$\mathcal{F}[\Psi(\mathbf{x}, t)] = \widehat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \widehat{f}(\omega) e^{-i\frac{\omega}{c}x} + \widehat{g}(\omega) e^{i\frac{\omega}{c}x} \quad (1.50)$$

Aplicando a TF inversa na equação anterior vem que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\omega^{-1} \widehat{\Psi}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{F}_\omega^{-1} \left[\widehat{f}(\omega) e^{-i\frac{\omega}{c}x} + \widehat{g}(\omega) e^{i\frac{\omega}{c}x} \right] \\ \Leftrightarrow \Psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{-i\left(t-\frac{x}{c}\right)\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\omega) e^{-i\left(t+\frac{x}{c}\right)\omega} d\omega \end{aligned}$$

Pelo que;

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = f(t) * \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + g(t) * \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (1.51)$$

Para f, g e c quaisquer, obtém-se a denominada solução de D’lambert:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}, t) &= f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \\ &= f\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) \end{aligned} \quad (1.52)$$

– *Solução da equação de onda acústica com fonte:*

A equação de onda acústica com fonte para meios com densidade e velocidade constantes pode ser dada pela equação seguinte:

$$\frac{1}{c^2} \Psi_{tt} - \Delta \Psi(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t) \quad (1.53)$$

Onde, $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Considerando uma fonte impulsiva, $F(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)\delta(t)$ para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, tem-se a seguinte equação para o problema em estudo:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} G_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta G(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}, t) \\ G(\mathbf{x}, t) = 0, t < 0 \quad (\text{Causalidade}) \end{cases} \quad (1.54)$$

A equação 1.54 é geralmente denominada por equação causal e a função $G(\mathbf{x}, t)$ por função de Green.

Aplicando a transformada de Fourier no tempo e no espaço, o vector de posição, \mathbf{x} , é transformado no número de onda, \mathbf{k} , e o tempo em frequência. Com efeito,

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}\right] = -\frac{\omega^2}{c^2} \widehat{G}(\mathbf{k}, \omega) \\ \mathcal{F}[\Delta G(\mathbf{x}, t)] = -\|\mathbf{k}\|^2 \widehat{G}(\mathbf{k}, \omega) \end{cases}$$

Igualando os termos obtidos, tem-se:

$$\widehat{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\|\mathbf{k}\|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (1.55)$$

Aplicando a inversa da TF a equação 1.57 obtém-se a seguinte equação integral para a função de Green.

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\omega t} \frac{1}{\|\mathbf{k}\|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (1.56)$$

A equação 1.56 pode ser resolvida escolhendo um sistema de coordenadas apropriado, para o número de onda, e recorrendo ao teorema de Cauchy-Riemann para funções complexas. Apesar de, neste caso, a aplicação destes métodos ser bastante directa, estes envolvem uma manipulação considerável nos diversos pontos, tornando-a bastante exhaustiva, pelo que remetemos os detalhes à Bleistein [1984], por exemplo, onde é efectuada uma abordagem clara e pormenorizada.

A solução da equação de onda acústica para uma fonte impulsiva pontual, pode ser dada pela seguinte equação:

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}\|} \delta\left(t - \frac{\|\mathbf{x}\|}{c}\right) \quad (1.57)$$

Saliente-se que, se pretendemos obter uma solução para uma fonte $F(\mathbf{x}, t)$ conhecida, ou estimada, basta convolve-la com a função de Green obtida na equação 1.57 [Bleistein, 1984], isto é,

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{x}, t) * F(\mathbf{x}, t) \quad (1.58)$$

1.3 Partição de energia numa interface plana

Iremos analisar, a seguir, o fenómeno da partição da energia de uma onda plana incidente sobre uma interface de separação entre dois meios distintos. Será primeiramente analisado o caso em que apenas ondas P estão envolvidas, obtendo-se uma expressão para o coeficiente de reflexão acústico. A seguir, estudaremos o caso em que ocorre conversão para ondas P incidentes, ou seja, são também originadas ondas S reflectidas e transmitidas.

Finalmente, é apresentada a situação geral em que ambos tipos de ondas incidem sobre a superfície de separação. As equações que descrevem este problema são geralmente designadas por equações de Zoeppritz.

1.3.1 Coeficiente de reflexão acústico

No estudo a seguir, considera-se que as ondas incidentes, transmitidas e reflectidas são ondas P . Considere-se que uma onda P plana, que se propaga num determinado meio acústico com densidade ρ_1 e velocidade v_1 , incide sobre uma interface de separação igualmente plana,

conforme é representado na figura 1.5. Uma parte da energia incidente é reflectida, com um ângulo de reflexão θ_1 , e a restante transmitida, com ângulo de transmissão θ_2 , para o meio acústico de densidade ρ_2 e velocidade de propagação v_2 .

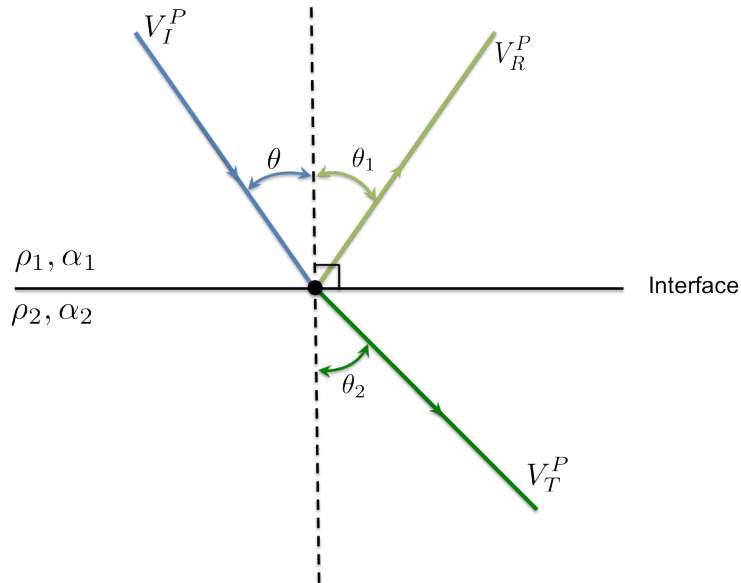


Figura 1.5: Partição de energia de uma onda P em meios acústicos

Na secção 1.2.1 verificamos que a solução da equação de onda pode ser dada pela equação 1.52. Como as funções envolvidas nessa equação são arbitrárias, é necessário impor determinadas condições caso queiramos obter uma solução particular, como condições de fronteira por exemplo. De momento, iremos apenas apenas manipula-la recorrendo as propriedades da transformada de Fourier de forma a obtermos uma expressão que permita efectuar uma interpretação física adequada.

Aplicando a transformada de Fourier a um dos termos do segundo membro da equação 1.2.1, pois basta considerar um dos termos para caracterizar a propagação, tem-se:

$$\hat{f}\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) = \hat{f}(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right)}$$

O resultado anterior permite constatar que a TF de funções com atraso no argumento, neste caso o atraso é dado pelo termo $\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}$, sofre uma mudança de fase, dada pelo termo $e^{-i\omega\left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right)}$.

Pela definição da TF e considerando o resultado do parágrafo anterior, é possível representar a solução da equação de onda acústica como se segue:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right)} \hat{f}(\omega) \quad (1.59)$$

Representando a harmónica por $\Psi_\omega(t) = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega t}$ vem que;

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{f}(\omega) \Psi_\omega \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c} \right) \quad (1.60)$$

Conclui-se que para caracterizar uma determinada onda plana basta considerar, inicialmente, o termo harmónico e efectuar a soma das restantes componentes.

Atendendo a natureza oscilatória das ondas sísmicas é possível representar a solução da equação de onda acústica, equação 1.46, pela equação seguinte:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = A \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c} \right) \right] = A \quad (1.61)$$

Onde A representa a amplitude e c a velocidade.

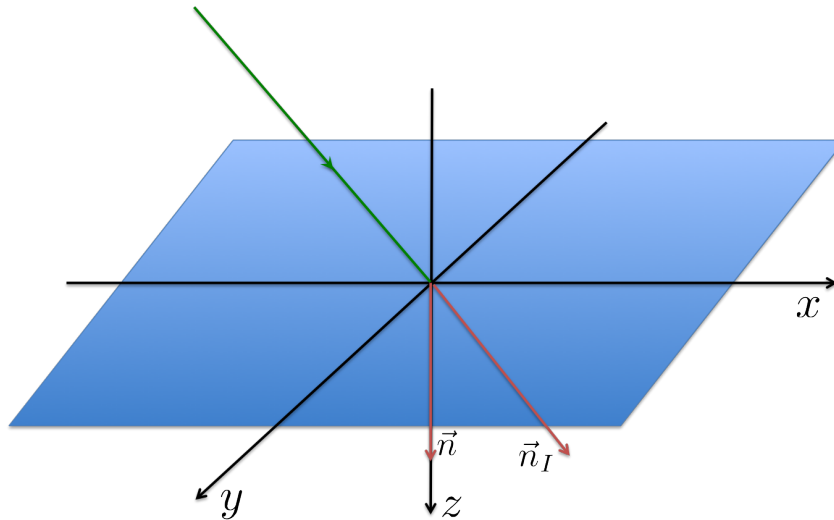


Figura 1.6: Partição energia

Considerando um sistema de coordenadas apropriado, onde o eixo dos z coincide com a normal ao plano considerado, é possível mover livremente os restantes eixos (ver Figura 1.6).

Atendendo a solução 1.61, a onda incidente pode ser representada pela seguinte equação:

$$\phi_i(\mathbf{x}, t) = a_i e^{i\omega \left(t - \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{x}}{v_1} \right)} \quad (1.62)$$

Sendo as ondas resultantes igualmente planas é possível defini-las de forma análoga;

$$\phi_r(\mathbf{x}, t) = a_r e^{i\omega \left(t - \frac{\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{x}}{v_1} \right)} \quad \text{Onda Reflectida} \quad (1.63)$$

$$\phi_t(\mathbf{x}, t) = a_t e^{i\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{x}}{v_2}\right)} \quad \text{Onda Transmitida} \quad (1.64)$$

Para podermos determinar os parâmetros das equações anteriores, é necessário impor condições de fronteira, ou seja, condições que terão de ser verificadas ao longo do plano de separação considerado. São impostas as seguintes condições de fronteira:

- **Continuidade da pressão.**

Nesta condição de fronteira dinâmica, requere-se que as componentes da tensão exercida sobre a interface de separação em ambos os meios seja idêntica,

$$\rho_1 \phi_i(\mathbf{x}, t) + \rho_1 \phi_r(\mathbf{x}, t) = \rho_2 \phi_t(\mathbf{x}, t)$$

Definindo as normais como se segue;

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_i = (n_i^1, n_i^2, n_i^3) \\ \mathbf{n}_r = (n_r^1, n_r^2, n_r^3) \\ \mathbf{n}_t = (n_t^1, n_t^2, n_t^3) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{x} = n_i^1 x + n_i^2 y \quad \leftarrow \text{Incidente} \\ \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{x} = n_r^1 x + n_r^2 y \quad \leftarrow \text{Reflectida} \\ \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{x} = n_t^1 x + n_t^2 y \quad \leftarrow \text{Transmitida} \end{array} \right.$$

vem que,

$$\rho_1 \left[a_i e^{-i\omega\left(\frac{n_i^1 x_1 + n_i^2 x_2}{v_1}\right)} + a_r e^{-i\omega\left(\frac{n_r^1 x_1 + n_r^2 x_2}{v_1}\right)} \right] = \rho_2 a_t e^{-i\omega\left(\frac{n_t^1 x_1 + n_t^2 x_2}{v_2}\right)} \quad (1.65)$$

A equação 1.65 é válida para todos $(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2$, sendo portanto igualmente válida para $x_1 = x_2 = 0$, pelo que:

$$\rho_1 (a_i + a_r) = \rho_2 a_t \quad (1.66)$$

- **Continuidade da aceleração normal.**

Na condição de fronteira cinemática, impõem-se que a aceleração das partículas em ambos meios, ao longo da fronteira, seja idêntica. A equação seguinte traduz a condição pretendida:

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} (\phi_I(\mathbf{x}, t) + \phi_R(\mathbf{x}, t)) \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial}{\partial z} \phi_T(\mathbf{x}, t) \right|_{z=0}$$

Substituindo as equações 1.62 – 1.63 na equação anterior tem-se,

$$a_I \frac{n_I^3}{v_1} e^{-i\omega \left(\frac{n_I^1 x_1 + n_I^2 x_2}{v_1} \right)} + a_R \frac{n_R^3}{v_1} e^{-i\omega \left(\frac{n_R^1 x_1 + n_R^2 x_2}{v_1} \right)} = a_T \frac{n_T^3}{v_2} e^{i\omega \left(\frac{n_T^1 x_1 + n_T^2 x_2}{v_2} \right)}, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.67)$$

Avaliando a equação 1.67 em $x_1 = x_2 = 0$, tem-se:

$$a_i \frac{n_i^3}{v_1} + a_r \frac{n_r^3}{v_1} = a_t \frac{n_t^3}{v_2} \quad (1.68)$$

Pelas equações 1.65 e 1.67 vem que,

$$\frac{n_i^1}{v_1} = \frac{n_r^1}{v_1} = \frac{n_t^1}{v_2} \quad (1.69)$$

e

$$\frac{n_i^2}{v_1} = \frac{n_r^2}{v_1} = \frac{n_t^2}{v_2} = 0 \quad (1.70)$$

Pela condição $n_r^2 = n_t^2 = 0$ conclui-se que \vec{n}_r e \vec{n}_t estão no plano (x, z) , ou seja, o fenômeno em estudo ocorre neste plano (ver figura 1.7).

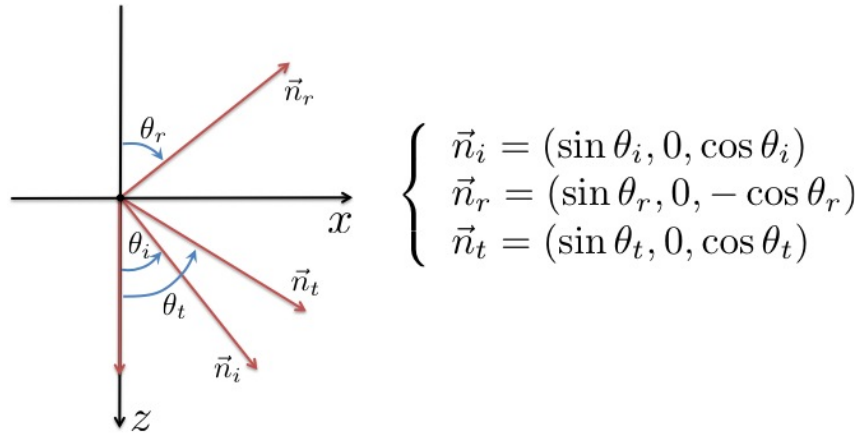


Figura 1.7: Partição energia e representação das normais das ondas envolvidas

O coeficiente de reflexão pode ser definido como a razão entre a amplitude da onda reflectida com a amplitude da onda incidente,

$$R = \frac{a_r}{a_i}.$$

Define-se igualmente o coeficiente de transmissão por,

$$T = \frac{a_t}{a_i}$$

Considerando as equações 1.66 e 1.68 vem que:

$$\begin{cases} 1 + R = \frac{\rho_2}{\rho_1} T \\ \cos \theta_i - R \frac{\cos \theta_r}{v_1} = \frac{v_1}{v_2} T \cos \theta_t \end{cases} \quad (1.71)$$

Atendendo a condição 1.69 e a definição das respectivas normais, obtém-se a denominada Lei de Snell:

$$\frac{\sin \theta_i}{v_1} = \frac{\sin \theta_r}{v_1} = \frac{\sin \theta_t}{v_2} = p \quad (1.72)$$

onde p é o parâmetro de raio.

Conclui-se que, nas condições consideradas, o ângulo de reflexão é idêntico ao ângulo de incidência, ou seja, que $\theta_i = \theta_r$.

Pela Lei de Snell e as equações 1.71, obtém-se as seguintes expressões para o coeficiente de reflexão e transmissão, respectivamente:

$$R = \frac{v_2 \rho_2 \cos \theta_i - v_1 \rho_1 \cos \theta_t}{v_2 \rho_2 \cos \theta_i + v_1 \rho_1 \cos \theta_t} \quad (1.73)$$

$$T = \frac{\rho_1}{\rho_2} (1 + R) \quad (1.74)$$

O coeficiente de reflexão em função do ângulo de incidência, θ , pode ser dado pela equação seguinte:

$$R(\theta) = \frac{v_2 \rho_2 \cos \theta - v_1 \rho_1 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \sin^2 \theta}}{v_2 \rho_2 \cos \theta + v_1 \rho_1 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \sin^2 \theta}} \quad (1.75)$$

Para ângulos de incidência nulos (incidência normal), $\theta = 0$, o coeficiente de reflexão é dado pela equação:

$$R = \frac{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}{\rho_2 v_2 + \rho_1 v_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad \text{onde } Z_i = \rho_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.76)$$

O termo Z_i é geralmente denominado por impedância acústica. Na Parte 2, serão obtidos perfis de impedâncias, para caracterizar reservatórios de hidrocarbonetos, recorrendo a inversão de dados sísmicos (ver capítulo 2 onde é desenvolvida a teoria para esse método).

Considerando que $\theta = \theta_1 = \theta_2$, conforme a representação efectuada na figura 1.8, e a Lei de Snell,

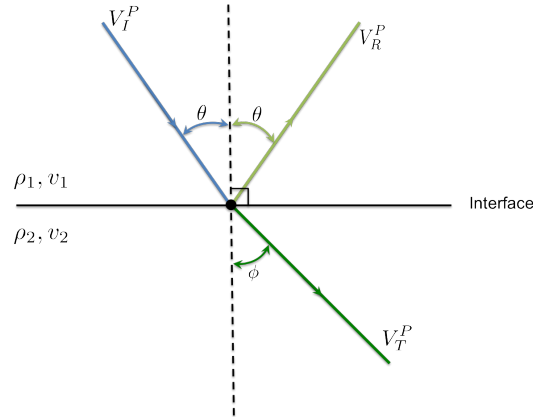


Figura 1.8: Partição de energia em meios acústicos para ângulos de incidência e reflexão idênticos

$$\frac{\sin \theta}{v_1} = \frac{\sin \phi}{v_2} = p, \quad (1.77)$$

o coeficiente de reflexão poderá, neste caso, ser representado pela expressão seguinte:

$$R = \frac{\rho_2 v_2 \cos \theta - \rho_1 v_1 \cos \phi}{\rho_2 v_2 \cos \theta + \rho_1 v_1 \cos \phi} \quad (1.78)$$

Por outro lado,

$$\begin{cases} \cos \theta = \sqrt{1 - v_1^2 p^2} \\ \cos \phi = \sqrt{1 - v_2^2 p^2} \end{cases} \quad (1.79)$$

pelo que, o coeficiente de reflexão pode ser representado em função do parâmetro de raio, p , como se segue:

$$R(p) = \frac{\rho_2 v_2 \sqrt{1 - v_1^2 p^2} - \rho_1 v_1 \sqrt{1 - v_2^2 p^2}}{\rho_2 v_2 \sqrt{1 - v_1^2 p^2} + \rho_1 v_1 \sqrt{1 - v_2^2 p^2}} \quad (1.80)$$

Os resultados anteriores permitem efectuar as seguintes constatações:

- *Ângulo crítico:*

Denomina-se por ângulo crítico, θ_c , o ângulo a partir do qual existe reflexão total, isto é, toda a energia incidente é reflectida. Neste caso, como é possível verificar pelas equações 1.77 e 1.79, temos que:

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \sin^2 \theta}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta_c = \frac{v_1}{v_2} \quad (1.81)$$

Pelo que,

- Se $\theta < \theta_c \Rightarrow R \in \mathbb{R}$ e $|R| < 1$.
- Se $\theta = \theta_c \Rightarrow R(\theta_c) = 1$ e $T(\theta_c) = \frac{2\rho_2}{\rho_1}$.
- Se $\theta_c < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow R \in \mathbb{C}$ e $|R| = 1$.
- Se a velocidade do meio onde se propaga a onda incidente for superior a do meio subjacente, $v_1 > v_2$, então o ângulo das ondas transmitidas é inferior ao das ondas incidentes, $\theta > \phi$ (ver figura 1.8). Neste caso não existe ângulo crítico e as ondas incidentes podem ser transmitidas para todos os ângulos incidentes.
- Se a velocidade do meio onde se propaga a onda incidente for inferior a do meio subjacente, $v_1 < v_2$, então o ângulo das ondas transmitidas é superior ao das ondas incidentes, $\theta < \phi$ (ver figura 1.8).
- Se $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow R = -1$.
- *Fronteira livre*: Se $v_2 = 0 \Rightarrow R(\theta) = -1$ e $T(\theta) = \frac{\rho_2}{\rho_1}(1 + R) = 0$, ou seja, não há transmissão.

1.3.2 Coeficiente de reflexão elástico

No estudo efectuado a seguir, considera-se um modelo semelhante ao utilizado na secção 1.3.1 e adiciona-se as ondas resultantes da conversão de ondas P em ondas S . A incidência de ondas P poderá originar ondas P e S reflectidas e transmitidas. Na figura 1.9 são representadas as ondas referidas.

Neste caso, existem três variáveis, a velocidade das ondas P , α , a velocidade das ondas S , β , e a densidade dos meios, ρ_1 para o meio onde as ondas incidentes e reflectidas se propagam e ρ_2 para o meio onde as ondas são transmitidas. Considera-se igualmente que a velocidade das ondas P é superior que a velocidade das ondas S , $0 \leq \beta < \alpha$.

De forma análoga ao caso acústico obtém-se a seguinte expressão para a Lei de Snell:

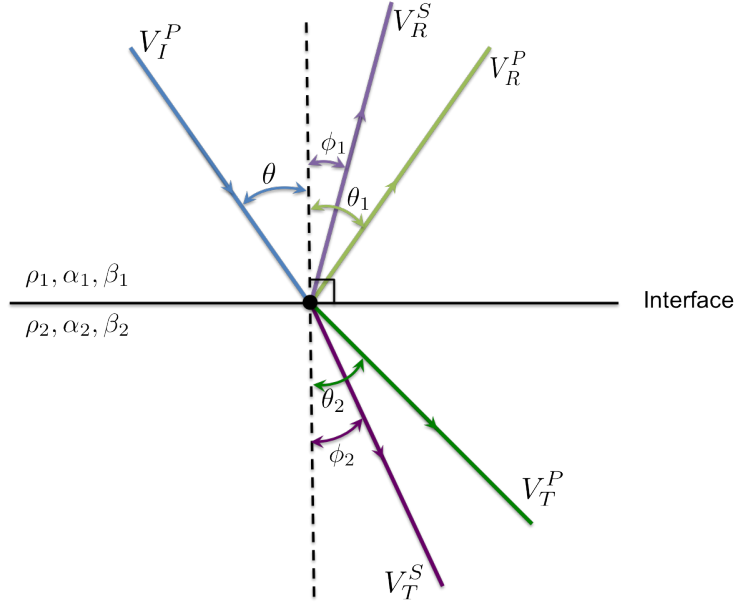


Figura 1.9: Partição de energia de uma onda P em meios elásticos

$$\frac{\sin \theta}{\alpha_1} = \frac{\sin \theta_1}{\alpha_1} = \frac{\sin \theta_2}{\alpha_2} = \frac{\sin \phi_1}{\beta_1} = \frac{\sin \phi_2}{\beta_2} = p \quad (1.82)$$

Para determinar os coeficientes de reflexão e transmissão, das ondas P e S , são consideradas condições de fronteira semelhantes as introduzidas para o caso acústico e seguida uma abordagem análoga. Limitar-nos-emos a apresentar o resultado, remetendo os detalhes para as referências Aki and Richards [2002], Ikelle and Amundsen [2005], Yilmaz [2001] ou Bleistein [1984]. Assim, nas condições referidas, tem-se as seguintes equações para os coeficientes pretendidos, considerando apenas ondas P incidentes:

$$\begin{bmatrix} R_{PP} \\ R_{PS} \\ T_{PP} \\ T_{PS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & -\cos \phi_1 & \sin \theta_2 & \cos \phi_2 \\ \cos \theta_1 & -\sin \phi_1 & \cos \theta_2 & -\sin \phi_2 \\ \sin 2\theta_1 & \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cos 2\phi_1 & \frac{\rho_2 \beta_2^2 \alpha_1}{\rho_1 \beta_1^2 \alpha_2} \sin 2\theta_2 & \frac{\rho_2 \beta_2 \alpha_1}{\rho_1 \beta_1^2} \cos 2\phi_2 \\ -\cos 2\theta_1 & \frac{\beta_1}{\alpha_1} \sin 2\phi_1 & \frac{\rho_2 \alpha_2}{\rho_1 \alpha_1} \cos 2\phi_2 & -\frac{\rho_2 \beta_2}{\rho_1 \alpha_1} \sin 2\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ \sin 2\theta_1 \\ \cos 2\phi_1 \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

As equações 1.83 são geralmente denominadas por equações de Zoeppritz e desempenham um papel fundamental no estudo da variação da amplitude com o “offset”. Como iremos verificar no capítulo 3, existem diversas aproximações que facilitam a visualização e interpretação da informação disponibilizada por estas equações.

Capítulo 2

Inversão de dados geofísicos

A teoria da inversão é constituída por uma série de técnicas matemáticas que permitem inferir determinadas propriedades que caracterizam um determinado sistema em estudo, a partir de dados registados. Neste capítulo, serão abordadas as técnicas matemáticas que permitem efectuar o estudo pretendido.

2.1 Introdução

A inversão de dados sísmicos é uma ferramenta essencial na determinação das propriedades elásticas do subsolo, onde a informação registada, dados sísmicos, é convertida em informação intervalar, ou seja, obtêm-se estimativas para os diversos parâmetros que possam caracterizar um modelo que represente a região em estudo.

No estudo que irá ser efectuado, assume-se a existência de um método específico, normalmente caracterizado por um modelo ou por uma teoria matemática, que permita relacionar os parâmetros do modelo considerado aos dados observados, ou seja, que descreva o modelo em estudo. Existem dois aspectos fundamentais a ter em conta: (i) desenvolvimento de algoritmos e (ii) interpretação dos resultados. No estudo que iremos efectuar, o ponto (i) será desenvolvido neste capítulo enquanto que o (ii) será abordado no capítulo 3, onde é introduzido o conceito de variação da amplitude com o "offset".

Partindo de uma determinada lei física, que descreve um certo fenómeno, é possível, de uma forma geral, obter determinados valores teóricos (ou resultados) que traduzem o fenómeno em estudo (a geração de sismogramas sintéticos constitui um exemplo). A este processo denomina-se problema directo, ou modelo directo (ver figuras 2.1 e 2.2 onde é efectuada uma representação esquemática dos problemas envolvidos).

Os métodos de inversão podem ser classificados, em duas categorias principais, de acordo

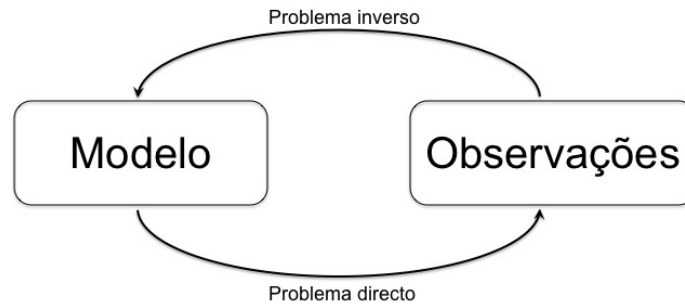


Figura 2.1: Problemas inverso e directo.

com as seguintes técnicas :

1. Métodos de inversão directos (ou baseadas num operador).

Este seria intuitivamente o método mais adequado de a implementar visto que, esta técnica baseia-se unicamente na(s) equação(ões) que descrevem o fenómeno em estudo, bastando "reverter" o operador. Contudo, estes algoritmos são instáveis e os parâmetros são geralmente determinados por "tentativa e erro".

Este método baseia-se na formulação de um operador, atendendo ao problema directo em causa, que é aplicado aos dados observados para determinar um modelo que represente a região em estudo. Este, é determinado directamente a partir dos dados não se assumindo nada acerca dos parâmetros que caracterizam o modelo que se pretende encontrar, assumindo-se apenas a variabilidade deste.

2. Métodos de inversão baseados em modelos.

Sendo este o método empregue no estudo efectuado (ver Parte II), ir-se-á descreve-lo com mais detalhe nas secções seguintes.

Nestes métodos recorre-se a um determinado modelo pré-definido para gerar dados sintéticos. Estes são comparados com os dados observados. É então definida uma função de ajuste, também denominada por função objectivo ou função de custo, que permite medir o nível de similaridade entre os dados registados e os dados sintéticos resultantes do problema directo e recorrendo aos parâmetros obtidos. Recorrendo a técnicas de optimização, estimam-se os parâmetros que minimizem a função de ajuste considerada.

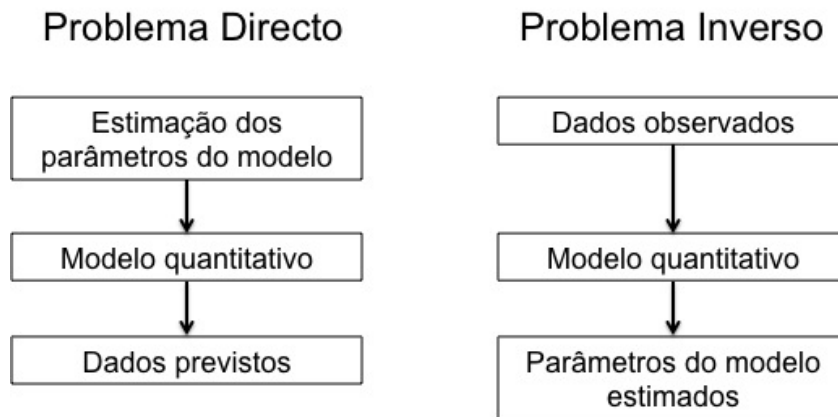


Figura 2.2: Representação geral das diferentes etapas nos problemas directo e inverso.

2.2 Métodos de inversão baseados em modelos

O ponto de partida, para uma grande maioria dos problemas inversos, é a caracterização dos dados registados. Assim, considerando que são registadas N observações define-se a seguinte entidade para os representar:

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_N]^T \quad (2.1)$$

De forma análoga, define-se outra entidade para representar os M parâmetros do modelo:

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_M]^T \quad (2.2)$$

Assumindo que os dados, \mathbf{d} , e os parâmetros, \mathbf{m} , podem ser relacionados recorrendo a um determinado operador, \mathbf{f} , vem que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = 0 \iff \begin{cases} f_1(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = 0 \\ f_2(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = 0 \\ \vdots \\ f_L(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

O objectivo da teoria da inversão é o de "inverter" as equações 2.3 de forma a obter estimativas para os parâmetros do modelo \mathbf{m} . O nível de complexidade dos problemas inversos está directamente relacionado a complexidade das equações 2.3. Existem alguns casos especiais que convém destacar.

- *Forma linear implícita*: O operador é linear ou seja;

$$\mathbf{f}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = 0 = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} = \mathbf{F}\mathbf{x} \quad (2.4)$$

Onde, $\mathbf{F} = [F]^{L \times (M+N)}$ e $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^T & \mathbf{m}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_N & m_1 & m_2 & \dots & m_M \end{bmatrix}^T$

- *Forma explícita*: Existem casos em que é possível separar os parâmetros dos dados para formarem $L = N$ equações que são lineares em relação aos dados mas que continuam não lineares em relação aos parâmetros (caracterizada pelo operador g),

$$\mathbf{f}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}) = 0 \quad (2.5)$$

- *Forma linear explícita*: Neste caso o operador g é igualmente linear constituindo uma matriz $N \times M$ com $L = N$. Tem-se portanto,

$$\mathbf{f}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m} = 0 \quad (2.6)$$

Geralmente, pretende-se determinar os valores dos parâmetros que constituem um determinado modelo. Convém salientar que devido a varias circunstâncias, como erros associados ou de não ser possível aplicar restrições ao modelo, a determinação destes parâmetros é normalmente inexacta. É portanto necessário efectuar determinados compromissos entre os resultados obtidos e os pretendidos.

O problema inverso consiste, neste caso, na determinação de um, ou mais modelos, que minimizem a diferença existente entre os dados registados e os dados sintéticos gerados. Definindo o erro de previsão, e , como a diferença desejada, vem que:

$$\mathbf{e} = \mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^{pre} = \mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G}(\mathbf{m}) \quad (2.7)$$

Para quantificar o nível de similaridade entre os dados, recorre-se normalmente a noção de norma para obter-se uma medida do “comprimento” ou “tamanho” da entidade em estudo. Definindo a norma- p por [Menke, 2012]:

$$\|\mathbf{e}\|_p = \left[\sum_{i=1}^N |e_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}, p = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Pelo que a norma-2 será dada por:

$$\|\mathbf{e}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^N |e_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[(\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G}(\mathbf{m}))^T (\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G}(\mathbf{m})) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

Esta-se agora em condições de definir a função de custo, acima referida, como se segue,

$$E_r(\mathbf{m}) = \frac{\|\mathbf{e}\|_p}{p} \quad (2.10)$$

Por conveniência (mais adiante adiante tornar-se-á claro) redefine-se a função de custo:

$$E(\mathbf{m}) = p E_r(\mathbf{m}) \quad (2.11)$$

Como já foi referido, a solução para o problema inverso consiste na minimização da função de custo $E(\mathbf{m})$.

2.2.1 Métodos lineares e linearizáveis

Os problemas inversos mais simples de resolver são os que podem ser representados pela equação 2.6, onde a relação entre os dados e os parâmetros é linear,

$$\mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{d} \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{G} = [G]^{N \times M}$, $\mathbf{m} = [m]^{M \times 1}$ e $\mathbf{d} = [d]^{N \times 1}$.

Por analogia com a teoria das equações integrais denomina-se, geralmente, a matriz \mathbf{G} por núcleo dos dados ("data Kernel"). No caso de dados discretos, que é o objecto do nosso estudo, o problema inverso pode ser caracterizado pela seguinte equação:

$$d_i = \sum_{j=1}^M G_{ij} m_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.13)$$

Na grande maioria das aplicações, dados sísmicos por exemplo, a relação entre os dados e os parâmetros não é linear. Contudo, existem casos em que é possível estabelecer determinadas condições ou restrições que permitam linearizar essa relação. As restrições dependem essencialmente do problema em questão.

Outra abordagem geralmente utilizada na linearização do problema baseia-se na consideração de perturbações nos dados e nos parâmetros para obter-se uma relação linear entre estas. Assume-se que os dados observados, \mathbf{d}^{obs} , resultam da aplicação de um determinado operador f sobre um modelo \mathbf{m} , que resulta da adição de uma pequena perturbação $\Delta\mathbf{m}$ à um modelo de referência \mathbf{m}_0 , ou seja, $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m}$. Define-se então,

$$\mathbf{d}^{obs} = \mathbf{f}(\mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m}) \quad (2.14)$$

e os dados obtidos a partir do modelo de referência, normalmente denominados por dados sintéticos, por:

$$\mathbf{d}^{sint} = \mathbf{f}(\mathbf{m}_0) \quad (2.15)$$

Expandindo a equação 2.14 em séries de Taylor em torno de \mathbf{m}_0 vem,

$$\mathbf{f}(\mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m}) = \mathbf{f}(\mathbf{m}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \Delta\mathbf{m} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}^2} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \Delta\mathbf{m}^2 + \dots \quad (2.16)$$

Substituindo a equação 2.15 na equação 2.16 e ignorando os termos de ordem superior a um obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{obs} &= \mathbf{d}^{sint} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \Delta\mathbf{m} \\ \Leftrightarrow \mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^{sint} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \Delta\mathbf{m} \\ \Leftrightarrow \Delta\mathbf{d} &= \mathbf{G}_0 \Delta\mathbf{m} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Onde, $\mathbf{G}_0 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0}$ é a matriz de sensibilidade. Obtivemos uma relação linear entre as perturbações nos dados e as perturbações nos parâmetros do modelo.

Para resolver o problema 2.12 basta inverter o operador \mathbf{G} :

$$\mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{d} \quad (2.18)$$

Analogamente, o problema 2.17 pode ser resolvido invertendo o operador sensibilidade, \mathbf{G}_0 , para actualizar a perturbação do modelo:

$$\Delta\mathbf{m} = \mathbf{G}_0^{-1} \Delta\mathbf{d} \quad (2.19)$$

A obtenção das soluções 2.18 e 2.19 não é evidente pois, logo a partida, a determinação de matrizes inversas é muitas vezes computacionalmente proibitiva. Normalmente, recorre-se a outros métodos para obter uma estimativa da solução desejada (ver secções seguintes). Por outro lado, a obtenção destas soluções acarretam algumas questões essenciais [Tarantola,

2005, Menke, 2012, Sen and Stoffa, 2013]:

- *Existência da solução.*

A existência de solução depende directamente da existência da inversa G^{-1} .

- *Unicidade da solução.*

Outra importante questão nos problemas inversos, e que está no cerne desta, é a unicidade, ou possibilidade da mesma, da solução encontrada. Com efeito, diz-se que uma determinada solução é única se para dois modelos distintos m_1 e m_2 se tem $Gm_1 = d_1 \neq d_2 = Gm_2$, isto é, se o operador G for injectivo. Se a condição anterior não for verificada, vários modelos poderão explicar os dados observados e a solução não será única, como é desejado. A seguir são identificadas algumas razões que poderão estar na origem da falta de unicidade dos problemas inversos.

- O problema de o modelo poder ser *identificável* através dos dados está igualmente relacionado com a unicidade do problema inverso. Nos dados sísmicos, por exemplo, o tempo de propagação (utilizado para determinar a velocidade de propagação) é, igualmente, uma função da distância do receptor a fonte (“offset”), pelo que os traços correspondentes a baixos ângulos de reflexão não traduzem completamente a velocidade de propagação. Poderá portanto existir um conjunto restrito de velocidades que também reflectam os dados observados, levando a falta de unicidade para as velocidades estimadas.

Como iremos ver mais adiante outra questão directamente relacionada com a unicidade é a resolução dos dados registados.

- A dimensão dos modelos utilizados para representar e estudar os parâmetros físicos, que caracterizam a Terra, são na sua generalidade dimensionalmente infinitos (como é o caso do semi-espaço, “half-space”, utilizado em modelos convolutivos), havendo portanto um lapso de unicidade à partida. Com efeito, as propriedades físicas da Terra são funções contínuas das coordenadas espaciais e a sua determinação, a partir de dados observados, é finita. Esta discretização do problema leva a inexistência de unicidade dos resultados.

- *Estabilidade do método.*

A forma como pequenos erros, presentes nos dados, se propagam aos parâmetros do modelos é avaliada pela estabilidade do método. Uma solução estável torna o método

insensível a pequenos erros nos dados. Assim, soluções instáveis podem provocar falta de unicidade.

- *Robustez e problemas mal postos.*

A robustez é um indicador do nível de insensibilidade a um número reduzido de erros que possam interferir no processo em estudo (“outliers”). Diz-se que um problema inverso é *mal-posto* se não existir unicidade e estabilidade no método utilizado. Nos casos em que o problema é mal-posto são, frequentemente utilizadas técnicas de regularização que permitem contornar este problema.

2.2.2 Solução pelo método dos quadrados mínimos

Atendendo as equações 2.9 e 2.11 obtém-se a seguinte equação para o erro total:

$$E(\mathbf{m}) = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{d} - \mathbf{Gm})^T (\mathbf{d} - \mathbf{Gm}) \quad (2.20)$$

Para o caso discreto, atendendo a equação 2.13, tem-se:

$$E = \sum_{i=1}^N \left[\left(d_i - \sum_{j=1}^M G_{ij} m_j \right) \left(d_i - \sum_{k=1}^M G_{ik} m_k \right) \right] \quad (2.21)$$

A seguir decompõem-se os termos e permuta-se adequadamente a ordem dos somatórios. Note-se que os índices j e k são mudos, pois representam a mesma entidade e apenas foram utilizados para distinguir os elementos que representam. Com efeito,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^N d_i d_i - \sum_{i=1}^N \left(d_i \sum_{k=1}^M G_{ik} m_k \right) - \sum_{i=1}^N \left(d_i \sum_{j=1}^M G_{ij} m_j \right) + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^M G_{ij} m_j \sum_{k=1}^M G_{ik} m_k \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N d_i d_i - 2 \sum_{i=1}^N \left(d_i \sum_{k=1}^M G_{ik} m_k \right) + \sum_{j=1}^M \left[\sum_{k=1}^M \left(m_k m_j \sum_{i=1}^N G_{ik} G_{ij} \right) \right] \end{aligned}$$

Pelo que,

$$E = \sum_{i=1}^N d_i d_i - 2 \sum_{k=1}^M \left(m_k \sum_{i=1}^N G_{ik} d_i \right) + \sum_{j=1}^M \left[\sum_{k=1}^M \left(m_k m_j \sum_{i=1}^N G_{ik} G_{ij} \right) \right] \quad (2.22)$$

O método dos mínimos quadrados (MMQ) consiste na determinação de mínimos locais derivando a função em estudo e igualando o resultado obtido a zero, resolvendo as equações obtidas. Para a função de custo 2.22, determinam-se as derivadas em ordem aos parâmetros

do modelo, $\partial E/\partial m_l$, para $l = 1, \dots, M$. Para o último termo do segundo membro tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_l} \left\{ \sum_{j=1}^M \left[\sum_{k=1}^M \left(m_k m_j \sum_{i=1}^N G_{ik} G_{ij} \right) \right] \right\} &= \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^M \left[\frac{\partial}{\partial m_l} (m_k m_j) \sum_{i=1}^N G_{ik} G_{ij} \right] \right\} \\ &= \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^M \left[\left(m_j \frac{\partial m_k}{\partial m_l} + m_k \frac{\partial m_j}{\partial m_l} \right) \sum_{i=1}^N G_{ik} G_{ij} \right] \right\} \\ &= \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^M \left[(m_j \delta_{kl} + m_k \delta_{jl}) \sum_{i=1}^N G_{ik} G_{ij} \right] \right\} \end{aligned}$$

Pela definição da distribuição delta de kronecker, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$, conclui-se que, para os índices envolvidos, $k = l$ e $j = l$, pelo que $k = j$ e portanto $m_j \delta_{kl} + m_k \delta_{jl} = 2m_j$. Aplicando esses resultados a equação anterior vem,

$$\frac{\partial}{\partial m_l} \left\{ \sum_{j=1}^M \left[\sum_{k=1}^M \left(m_k m_j \sum_{i=1}^N G_{ik} G_{ij} \right) \right] \right\} = 2 \sum_{j=1}^M \left(m_j \sum_{i=1}^N G_{il} G_{ij} \right) \quad (2.23)$$

Derivando o segundo termo obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_l} \left[\sum_{k=1}^M \left(m_k \sum_{i=1}^N G_{ik} d_i \right) \right] &= \sum_{k=1}^M \left[\left(\frac{\partial m_k}{\partial m_l} \sum_{i=1}^N G_{ik} d_i + m_k \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial m_l} (G_{ik} d_i) \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^M \left[\delta_{kl} \sum_{i=1}^N G_{ik} d_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^N G_{il} d_i \end{aligned} \quad (2.24)$$

A derivada do primeiro termo do segundo membro é nula visto não existir dependência em m .

Com efeito,

$$\sum_{i=1}^N d_i d_i = 0 \quad (2.25)$$

Finalmente, substituindo as equações 2.23–2.25 em 2.22 e igualado-se o resultado a zero tem-se:

$$\frac{\partial E}{\partial m_l} = -2 \sum_{i=1}^N G_{il} d_i + 2 \sum_{j=1}^M \left(m_j \sum_{i=1}^N G_{il} G_{ij} \right) = 0 \quad (2.26)$$

Matricialmente,

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{m} - \mathbf{G}^T \mathbf{d} = 0 \quad (2.27)$$

onde $\mathbf{G}^T \mathbf{G} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{M \times M}$ e $\mathbf{G}^T \mathbf{d} = [\mathbf{G}^T \mathbf{d}]^{M \times 1}$.

A equação 2.27 permite estimar o modelo desejado. Assim, multiplicando ambos os membros desta equação por $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$, assumindo que esta inversa existe, obtém-se o seguinte modelo estimado:

$$\mathbf{m}^{est} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d} \quad (2.28)$$

O problema consiste na determinação da inversa da matriz quadrada, e não negativa, $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$. A decomposição de Cholesky permite resolver a equação 2.28 sem se ter que determinar directamente a inversa. Contudo, a implementação desta matriz é frequentemente numericamente instável pelo que é aconselhável lidar directamente com o sistema 2.12 (ver secção 2.2.3).

Uma condição necessária para que a solução do problema 2.12 seja única, é que o número de equações seja igual ao número de parâmetros que se pretende determinar. Esta situação ocorre quando as dimensões dos dados e dos parâmetros são idênticas ($N = M$), como iremos verificar, mais adiante, quando for introduzido o conceito de informação a priori. É possível classificar os problemas inversos atendendo a este critério [Menke, 2012, Sen and Stoffa, 2013].

– *Problemas indeterminados:*

Se a informação fornecida pela equação 2.12 for insuficiente para obter uma solução única, o problema diz-se indeterminado. Neste caso existem mais parâmetros do que dados ($M > N$), ou seja, existem mais incógnitas que equações. Contudo, podem existir casos em que é razoável admitir erros de previsão não nulos (mas suficientemente pequenos) e existir unicidade para apenas um conjunto restrito de parâmetros.

Se o erro de previsão for nulo, denomina-se, geralmente, os problemas por indeterminados puros. Este caso será abordado mais adiante, quando for introduzido o conceito de informação a priori.

– *Problemas sobre-determinados:*

Poderá ocorrer situações com “excesso” de informação, isto é, quando esta é superior a quantidade de parâmetros a determinar. Geralmente, isso ocorre quando $N > M$. A discretização do problema, que é originalmente contínuo e normalmente indeterminado, poderá originar um problema bem determinado ou mesmo sobre-determinado. O sistema de equações resultante, não permite determinar uma solução que se ajuste a todos os dados, a não ser que estes es-

tejam dispostos ao longo de uma linha recta.

– *Problemas mistos*

Na pratica, os problemas inversos são geralmente uma combinação de problemas indeterminados e sobre-determinados. Nestes casos poderá acontecer que apenas parte dos parâmetros sejam completamente caracterizados pelos dados.

2.2.2.1 Métodos de máxima verosimilhança

Os dados registados são geralmente afectados por ruído, pelo que é conveniente representá-los considerando as incertezas associadas. É igualmente possível que os dados sejam correlacionados. Assim sendo, considera-se cada registo como uma variável aleatória, e assumindo que a correspondente função de densidade de probabilidade (fdp) é uma Gaussiana então, a probabilidade de ocorrência de determinado valor é dada pela equação:

$$p(\mathbf{d}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}})^T C_d^{-1} (\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}}) \right] \quad (2.29)$$

Onde $\bar{\mathbf{d}}$ representa a média amostral e C_d^{-1} a matriz de covariâncias.

No caso linear, os dados obtidos, pela aplicação do operador \mathbf{G} , são valores médios e \mathbf{d} representa realizações individuais. Tem-se portanto,

$$p(\mathbf{d}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m})^T C_d^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}) \right] \quad (2.30)$$

No método de máxima verosimilhança (MMV) maximiza-se a fdp (não necessariamente gaussiana) para obter os valores óptimos para os parâmetros do modelo. Nos casos em que a fdp é uma gaussiana, este método não difere muito do método dos quadrados mínimos. Para maximizar a equação 2.30 recorre-se ao método dos quadrados mínimos para minimizar o expoente desta equação, ou seja, minimiza-se a seguinte equação de custo:

$$E_1(\mathbf{m}) = (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m})^T C_d^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}) \quad (2.31)$$

A solução é análoga à 2.28 e equivalente à esta quando a matriz de covariâncias é a identidade. Quando não é possível determinar, ou estimar, a matriz C_d ou quando os dados possuem dimensões diferentes, recorre-se normalmente a uma matriz de atribui diferentes “pesos” aos dados (\mathbf{W}_d). Neste caso considera-se a seguinte função de custo [Sen and Stoffa, 2013]:

$$E_1(\mathbf{m}) = (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m})^T \mathbf{W}_d (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}) \quad (2.32)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}_r \Sigma_r \mathbf{V}_r^T \quad (2.36)$$

Pelo que,

$$\mathbf{G}^{-1} = (\mathbf{V}_r^T)^{-1} \Sigma_r^{-1} \mathbf{U}_r^{-1}$$

Atendendo a ortogonalidade das matrizes, i.e, $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$ e $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$, tem-se que:

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1} \mathbf{U}_r^T \quad (2.37)$$

Substituindo as equações 2.36 e 2.37 na equação 2.18 tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{est} &= \mathbf{G}^{-1} \mathbf{d} = \mathbf{G}^{-1} [\mathbf{G} \mathbf{m}] = \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1} \mathbf{U}_r^T \mathbf{U}_r \Sigma_r \mathbf{V}_r^T \mathbf{m} \\ &= \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1} \mathbf{I} \Sigma_r \mathbf{V}_r^T \mathbf{m} = \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1} \Sigma_r \mathbf{V}_r^T \mathbf{m} \\ &= \mathbf{V}_r \mathbf{I} \mathbf{V}_r^T \mathbf{m} \end{aligned}$$

Finalmente, obtém-se a seguinte solução para os parâmetros do modelo:

$$\mathbf{m}^{est} = [\mathbf{V}_r \mathbf{V}_r^T] \mathbf{m} = \mathbf{R} \mathbf{m} \quad (2.38)$$

Note-se que, se o núcleo de \mathbf{V} for nulo ($\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$) então $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, ou seja, o modelo estimado será exacto. Na maioria dos casos, $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ e os parâmetros obtidos são médias ponderadas, dos valores exactos desconhecidos, cujos “pesos” são definidos pela matriz \mathbf{R} , geralmente denominada por *matriz de resolução*.

2.2.4 Restrição de soluções

Nas secções anteriores, foram introduzidos métodos que permitem resolver o problema linear inverso. Como já foi referido, estes problemas são essencialmente mal-postos, não havendo portanto unicidade da solução. Uma forma de tentar contornar este problema é introduzir determinadas restrições ao modelo que se pretende determinar. Estes podem conter diversa informação prévia acerca do sistema em estudo, destacando-se as seguintes [Jackson, 1979, Sen and Stoffa, 2013];

– *Método de Backus-Gilbert*

Este método baseia-se na obtenção de médias dos parâmetros, unicamente determinados a partir dos dados. O objectivo é determinar um operador \hat{G} para as médias, \hat{m} , tal que,

$$\hat{m} = \hat{G}d \quad (2.39)$$

Adicionando a equação 2.12 a componente associada ao erro aleatório, que se presume ser nulo em média e com covariâncias conhecidas, vem:

$$d = Gm + e \quad (2.40)$$

Pelo que,

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \hat{G}Gm + \hat{G}e \\ \Leftrightarrow \hat{m} &= Hm + \hat{G}e \end{aligned} \quad (2.41)$$

As colunas da matriz $H = \hat{G}G$, podem ser consideradas como “filtros” que permitem aproximar os valores \hat{m} aos valores reais. Os valores de \hat{m} dependem unicamente dos dados observados mas, apenas poderão constituir uma aproximação razoável dos dados se a matriz H for suficientemente próxima da identidade ou se os elementos de m forem suficientemente “bem-postos” para que a solução resultante (equação 2.41) não se afaste significativamente da suposta solução correcta.

Subtraindo m , a ambos os membros da equação 2.41 tem-se,

$$\hat{m} - m = (\hat{G}G - I)m + \hat{G}e \quad (2.42)$$

Para que o erro, $\hat{m} - m$, tenda para zero é necessário que a característica do operador G seja igual ao número total de parâmetros, $Car(G) = M$, isto é, que seja completa. O grau de similaridade entre os valores médios calculados e os parâmetros verdadeiros pode ser medido recorrendo a seguinte expressão:

$$s_k = \sum_{i,j} H_{ki} P_{ij} H_{kj} \quad (2.43)$$

Se o elementos de H_{ki} forem significativamente diferentes da identidade, δ_{ki} , então os valores de s_k são proporcionalmente incrementados (“penalizados”) pela acção da matriz P , razão pela qual é também denominada por “matriz de penalização”.

Assumindo que o erro médio é nulo e que a matriz de covariâncias, C^e , é conhecida a variância

dos erros aleatórios, resultantes da determinação dos parâmetros médios, é dada por:

$$\sigma_k^2 = \sum_{i,j} \widehat{G}_{ki} C_{ij}^e \widehat{G}_{kj} \quad (2.44)$$

Este método baseia-se numa seleção adequada dos elementos \widehat{G}_{ki} , de forma a que os resultados das equações 2.43 e 2.44 sejam suficientemente pequenos. Assim, admitindo que os valores médios, \widehat{m} , traduzem correctamente os valores registados, os coeficientes \widehat{G}_{ki} têm igualmente que ser sujeitos a restrições:

$$\sum_{j=1}^M H_{kj} = 1 \quad (2.45)$$

O processo descrito não determina necessariamente um modelo para as médias estimadas, podendo mesmo não satisfazer a equação exacta 2.40. O que deve ser retido é que os modelos que traduzam os dados e que sejam “filtrados” pela aplicação de H_{kj} (também designada por núcleo de resolução) o resultado será semelhante à \widehat{m}_k , com erro médio nulo e variância σ_k^2 em relação a este.

– *Positividade dos parâmetros:*

Frequentemente, é possível, dependendo do problema físico em questão, considerar que os parâmetros assumem apenas valores positivos, restringindo assim o problema inverso.

– *Modelo à priori:*

Esta forma de restrição do problema é frequentemente utilizada em problemas de inversão de dados geofísicos, e particularmente na inversão sísmica (ver parte II). Quando é possível dispor de informação suficiente para elaborar um modelo preliminar das propriedades que caracterizam o sistema em estudo, impõem-se restrições, ao problema inverso, que permitem reduzir as incertezas associadas e limitar (ou resolver) a questão de unicidade da solução. Assim, para além de minimizar-se a função de custo são impostos limites, considerando o modelo preliminar referido, aos parâmetros previstos.

Seja \mathbf{m}^r o modelo restritivo (informação a priori) então, a função de custo modificada será dada por:

$$E_r(\mathbf{m}) = (\mathbf{d} - G\mathbf{m})^T (\mathbf{d} - G\mathbf{m}) + w (\mathbf{m} - \mathbf{m}^r)^T (\mathbf{m} - \mathbf{m}^r)$$

O factor w permite atribuir diferentes “pesos” aos erros dos parâmetros e dos dados. Para atribuir pesos distintos aos parâmetros de um determinado modelo recorre-se normalmente a matriz de covariâncias, C_m , para os parâmetros. Esta permite estimar o grau de certeza do

modelo à priori. Pelo que,

$$E_r(\mathbf{m}) = (\mathbf{d} - G\mathbf{m})^T C_d^{-1} (\mathbf{d} - G\mathbf{m}) + (\mathbf{m} - \mathbf{m}^r)^T C_m^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}^r) \quad (2.46)$$

– *Suavização de modelos:*

Como iremos verificar, na parte II, é muitas vezes necessário que as propriedades físicas que caracterizam um determinado modelo em estudo apresentem uma variação que não seja abrupta, ou seja, que o modelo seja “suave”. De forma análoga ao MMV (equação 2.32) a função de custo é definida considerando uma função de suavização, \mathbf{W}_m , para os parâmetros do modelo. Com efeito,

$$E_s(\mathbf{m}) = (\mathbf{d} - G\mathbf{m})^T \mathbf{W}_d (\mathbf{d} - G\mathbf{m}) + (\mathbf{m} - \mathbf{m}^r)^T \mathbf{W}_m (\mathbf{m} - \mathbf{m}^r) \quad (2.47)$$

2.2.5 Incertezas associadas a estimação dos parâmetros

Um dos maiores problemas, nos métodos de prospecção geofísicos, é o conteúdo de ruído presente. Como é sabido, existem diferentes algoritmos que permitem atenuar o ruído de forma a maximizar a razão sinal ruído. No caso dos dados sísmicos, esta é uma das fases de maior relevância no processamento de dados sísmicos, sendo objecto de intensa investigação. Na inversão de dados, a presença de ruído (que pode ser devido a vários factores, desde coerentes a aleatórios) incrementa o erro associado a determinação dos parâmetros. Por outro lado, o nível de sensibilidade que estes possuem está directamente relacionado com o nível de incerteza na determinação dos mesmos pelo que, mesmo na ausência de ruído, poderão existir diferentes valores para os parâmetros que sejam consistentes com os dados registados. Assim, o problema inverso ficará completamente descrito se, para além de se estimar os valores dos parâmetros, \mathbf{m}^{est} , se quantificar as incertezas associadas a esta determinação. Assuma-se que a fdp do modelo é uma Gaussiana de média \mathbf{m}^{est} com covariância $\text{Cov}(\mathbf{m}^{est})$. Atendendo a equação 2.28 tem-se:

$$\begin{aligned} [\text{Cov}(\mathbf{m}^{est})] &= \left[(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \right] \sigma_d^2 \mathbf{I} \left[(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \right]^T = \sigma_d^2 (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \\ &= \mathbf{G}^g \mathbf{C}_d \mathbf{G}^g \end{aligned} \quad (2.48)$$

Expandindo o erro de previsão em séries de Taylor, em torno de um mínimo adequado, vem;

$$E(\mathbf{m}) = E(\mathbf{m}_0) + \left. \frac{\partial E}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \Delta \mathbf{m} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{m}^2} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \Delta \mathbf{m}^2 \quad (2.49)$$

$$\Leftrightarrow \Delta E(\mathbf{m}) = E(\mathbf{m}) - E(\mathbf{m}^{est}) = [\mathbf{m} - \mathbf{m}^{est}]^T \left[\left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{m}^2} \right]_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} [\mathbf{m} - \mathbf{m}^{est}]$$

Onde $\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{m}^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial m_i \partial m_j}$ e $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{m}} = 0$, pois a expansão é efectuada em torno de um mínimo.

Atendendo a equação 2.22, vem que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial m_p \partial m_q} &= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M G_{ij} \frac{\partial m_j}{\partial m_p} \sum_{k=1}^M G_{ik} \frac{\partial m_k}{\partial m_q} = 2 \sum_{i=1}^N G_{ip} G_{iq} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{m}^2} \right] &= \mathbf{G}^T \mathbf{G} \end{aligned} \quad (2.50)$$

pelo que,

$$[\text{Cov}(\mathbf{m}^{est})] = \sigma_d^2 \left(\left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{m}^2} \right)^{-1} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{est}} \quad (2.51)$$

Conclui-se assim que a covariância dos parâmetros estimados depende da incerteza dos dados e da “curvatura” da função de custo.

Existem duas abordagens, geralmente utilizadas, para a determinação da variância [Menke, 2012]:

– *Variância a priori*

Baseia-se na precisão do processo de aquisição dos dados (erros de medição, por exemplo).

– *Variância a posteriori*

A estimativa é efectuada atendendo a dimensão dos erros associados ao processo de estimação.

Considere-se a seguinte aproximação para o erro quadrático médio:

$$\sigma_d^2 \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2$$

Adequando a equação anterior de forma a que o número de parâmetros coincidam com o número de dados vem;

$$\sigma_d^2 \approx \frac{1}{N - M} \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (2.52)$$

As estimativas a posteriori são geralmente sobre-estimadas, pois a falta de precisão nos dados estão directamente relacionadas com o erro de previsão. Por outro lado, pela equação 2.51 é possível verificar que mesmo que os dados não sejam correlacionados, e possuam variância idêntica, os parâmetros poderão apresentar variâncias distintas e estar correlacionados.

Finalmente, definindo o desvio padrão para o erro por,

$$\sigma_E = [2(N - M)]^{1/2} \sigma_d^2$$

e substituindo este resultado em 2.51, obtem-se a seguinte expressão para a covariância dos parâmetros:

$$[\text{Cov}(\mathbf{m}^{est})] = \frac{\sigma_E}{[2(N - M)]^{1/2}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{m}^2} \right]_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{est}}^{-1} \quad (2.53)$$

2.2.6 Regularização

Nas secções anteriores o problema inverso foi resolvido impondo restrições, à solução pretendida, adicionando-se um novo erro ao problema. O erro total resulta, portanto, da contribuição dos erros associados aos dados, E_d , e dos associados aos parâmetros, E_m . Com efeito,

$$E = E_d + \alpha E_m \quad (2.54)$$

onde o termo α permite atribuir diferentes “pesos” aos termos envolvidos. A este procedimento designa-se por *regularização*, permitindo “controlar” os efeitos que as restrições impostas ao modelo têm sobre a solução do problema inverso.

É possível estabilizar problemas inversos mal-postos adicionando um modelo normado. De facto, o número de condição associado a solução de quadrados mínimos (equação 2.28) é consideravelmente elevado. Para tentar contornar este problema introduz-se uma restrição (também designada por restrição lateral) que impõe um limite máximo para a solução:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{m}} \|\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}\|_2 \\ \text{s.a. } \|\mathbf{m}\| \leq k \end{aligned}$$

O objectivo da regularização é a obtenção de métodos eficientes e estáveis para a inclusão da restrição pretendida, permitindo obter soluções igualmente estáveis e robustas. Assim, para sistemas lineares, do tipo 2.12, com característica inferior ao número de parâmetros é necessário recorrer a informação adicional para obter uma solução aceitável, pois, como já foi anteriormente referido, poderão existir inúmeras soluções que descrevam igualmente bem o

$$\mathbf{W}_m^1 = \mathbf{D}_1^T \mathbf{D}_1 \quad (2.59)$$

$$\mathbf{W}_m^2 = \mathbf{D}_2^T \mathbf{D}_2$$

A solução de quadrados mínimos, para minimização da função de erro 2.57, pode ser dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{m}^{est} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \alpha \mathbf{W}_m^{-1}] \mathbf{G}^T \mathbf{d} \quad (2.60)$$

Considere-se a decomposição em valores singulares discutida na secção 2.2.3,

$$\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Sigma} &= \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \text{ e } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0 \\ \mathbf{U}^T \mathbf{U} &= \mathbf{I}_n = \mathbf{U}^T \mathbf{V} \end{aligned}$$

Com efeito,

$$\begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \\ \mathbf{G}^T = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{G}^T \mathbf{G} &= \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \\ \Rightarrow (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} &= (\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{\Sigma}^T)^{-1} \mathbf{V}^{-1} \\ \Rightarrow (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T &= (\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T \end{aligned} \quad (2.61)$$

Substituindo 2.61 na equação 2.28, tem-se:

$$\mathbf{m}^{est} = (\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{d} = (\mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T) \mathbf{d} \quad (2.62)$$

Considerando que existem p valores singulares não-nulos, então;

$$\mathbf{U}^T \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \mathbf{d} \\ \mathbf{u}_2^T \mathbf{d} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_p^T \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

ou seja, cada elemento de $\mathbf{U}^T \mathbf{d}$ é o producto interno das p primeiras colunas de \mathbf{U} com \mathbf{d} .

Pelo que,

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{u}_1^T \mathbf{d} \\ \frac{1}{\sigma_2} \mathbf{u}_2^T \mathbf{d} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_p} \mathbf{u}_p^T \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Verifica-se, pela equação 2.63, que valores singulares pequenos afectam consideravelmente a solução de quadrados mínimos, quando a presença de ruído é significativa.

Atendendo a solução de quadrados mínimos amortecida, equação 2.56, tem-se a seguinte expressão em termos da DVS:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}\Sigma^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T + \alpha\mathbf{I}) \mathbf{m} &= \mathbf{V}\Sigma^T\mathbf{U}^T\mathbf{d} \\ \Leftrightarrow (\mathbf{V}\Sigma^T\Sigma\mathbf{V}^T + \alpha\mathbf{I}) \mathbf{m} &= \mathbf{V}\Sigma^T\mathbf{U}^T\mathbf{d} \end{aligned}$$

Tem-se portanto,

$$m_\alpha = \sum_{i=1}^b \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha} \frac{\mathbf{U}_i^T \mathbf{d}}{\sigma_i} \mathbf{V}_i \quad (2.64)$$

Recorrendo a equação anterior é possível “contornar” o problema devido a presença de valores singulares demasiado pequenos, adicionando valores positivos ao quadrado destes.

2.3 Aplicação à dados sísmicos

A teoria subjacente à inversão de dados sísmicos, enquadra-se no problema inverso abordado nas secções anteriores. É portanto suficiente abordar, de forma sucinta, a teoria que permite caracterizar os dados sísmicos e definir o operador \mathbf{G} , necessário para implementar a inversão. Assim, dependendo dos parâmetros que se pretende determinar, define-se o operador mais

adequado a ser utilizado.

No capítulo 1, foi abordada a teoria da propagação das ondas sísmicas em meios elásticos, tendo-se obtido as equações que as regem e algumas das suas soluções. Com o advento da computação, é hoje possível desenvolver e implementar algoritmos baseados na equação de onda completa para inverter os dados sísmicos, definindo-se um operador que descreve a propagação integralmente. Estes métodos são geralmente designados por inversão de forma de onda completa (“full wave form inversion”) e constituem uma das áreas mais promissoras da geofísica de exploração.

Contudo, o objectivo do nosso estudo é a determinação de perfis de impedâncias para a caracterização de reservatórios de hidrocarbonetos. É portanto necessário considerar as séries de reflectividades definidas no primeiro capítulo e na teoria desenvolvida no capítulo 3, a seguir.

Começaremos por descrever o modelo convolutivo, que permite caracterizar os dados sísmicos registados, e definiremos em seguida o operador directo, G , e a relação funcional entre os dados observados e os parâmetros do modelo, necessários para obter as impedâncias pretendidas.

2.3.1 Modelo convolutivo

No modelo unidimensional mais utilizado para representar o traço sísmico registado considera-se que este é o resultado da convolução entre a “wavelet” e a série de reflectividades, adicionados ao ruído:

$$T(t) = w(t) * R(t) + n(t) \quad (2.65)$$

onde, $T(t)$ representa o traço sísmico registado, $R(t)$ o coeficiente de reflexão, $w(t)$ a “wavelet” e $n(t)$ o ruído presente.

Na figura 2.3 é efectuada uma ilustração do modelo convolutivo definido pela equação anterior. Aplicando a transformada de Fourier (TF), a ambos os membros da equação 2.65, e considerando de momento, por questões práticas, que o ruído é nulo, obtém-se uma representação do modelo convolutivo no domínio da frequência. Com efeito,

$$\mathcal{F}[T(t)] = \mathcal{F}[w(t)] \times \mathcal{F}[R(t)] \quad (2.66)$$

Como a TF é uma função complexa, é recorrente considerar os espectros de amplitude e de fase das componentes envolvidas. Estes podem ser definidos como se segue:

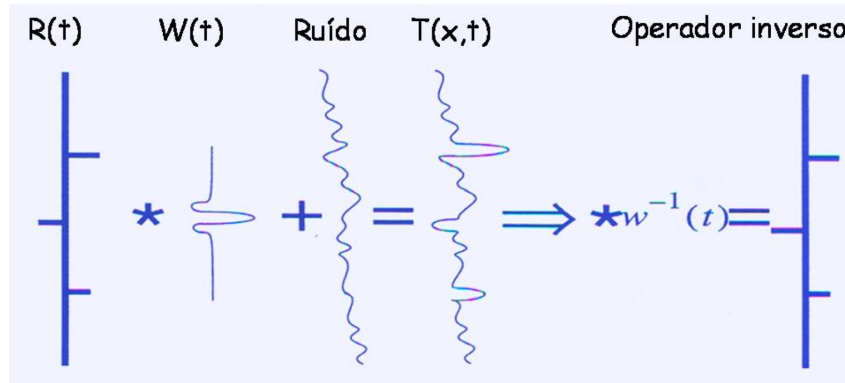


Figura 2.3: Ilustração do modelo convolutivo

$$\left| \hat{T}(\omega) \right| = |\hat{w}(\omega)| \times \left| \hat{R}(\omega) \right| \quad \leftarrow \quad \text{Espectro de amplitude} \quad (2.67)$$

$$\theta_T(\omega) = \theta_w(\omega) + \theta_R(\omega) \quad \leftarrow \quad \text{Espectro de fase} \quad (2.68)$$

Constata-se que a convolução aplicada implica multiplicar as amplitudes e adicionar as fases envolvidas.

2.3.2 Inversão de dados sísmicos baseada em modelos

A equação 2.65 sugere a aplicação de um operação inverso, ω^{-1} , para obter a série de reflectividades. Com efeito,

$$R(t) = T(t) * \omega^{-1}(t) - n(t) \quad (2.69)$$

A determinação da reflectividade por este método requer um conhecimento da variação da “wavelet”. Esta pode ser estimada recorrendo a diagragias, de densidade e velocidade para obter a reflectividade, e ao modelo convolutivo. Contudo, este método é normalmente utilizado para obter a “wavelet” necessária para construção de modelos iniciais para inverter os dados recorrendo a metodos semelhantes aos descritos nas secções anteriores. Como iremos verificar no capítulo 4, recorre-se a este método para determinar a “wavelet”. Para obter o coeficiente de reflexão, e conseqüentemente as impedâncias, invertem-se os dados sísmicos seguindo um raciocínio semelhante ao que é descrito a seguir.

Na secção 2.2 foi descrito o método de inversão baseada em modelos com algum pormenor. Foram igualmente analisadas diversas alternativas para resolver o problema inverso linear

2.12. Na solução dos quadrados mínimos constatou-se que os parâmetros podem ser obtidos considerando o operador \mathbf{G} e uma relação funcional entre os dados observados e os parâmetros que caracterizam o meio. Com efeito,

$$\mathbf{m}^{est} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}$$

A relação entre os dados observados e os parâmetros do modelo pode ser dada pela equação 2.65, onde $d_i = T(t_i)$. Na inversão “pós-stack”, considera-se o coeficiente de reflexão normal definido pela equação 1.76.

Capítulo 3

Variação da amplitude com o “offset”

Na secção 1.3 foi analisada a partição de energia numa interface plana de separação entre dois meios elásticos distintos. Como foi possível verificar, este fenómeno é globalmente descrito pelas equações de Zoeppritz, equações 1.83, que incorporam os coeficientes de reflexão para todos os tipos de ondas envolvidas. Nestas, a variação da amplitude das ondas reflectidas depende directamente do ângulo de incidência constituindo a base para a teoria da variação da amplitude com o “offset”, ou, como é mais conhecida, pela abreviação AVO proveniente da expressão “Amplitude Variation with Offset”. Esta variação permite inferir diversos parâmetros elásticos que caracterizam o meio em estudo, como iremos verificar nas secções seguintes. O método AVO é actualmente amplamente utilizado pela indústria para planificação de poços ou na monitorização de reservatórios. Na figura 3.1, é efectuada uma representação de uma coleção de traços para um determinado CMP (“CMP gather”), com correção NMO, onde é possível constatar a referida variação (neste caso há um aumento da amplitude com o “offset”), no evento em torno dos 1,25s.

Um dos objectivos da análise quantitativa de dados sísmicos é a determinação das propriedades físicas das rochas e fluídos que constituem a região em estudo. Estas propriedades podem ser obtidas a partir dos parâmetros elásticos, obtidos por inversão AVO, realizando uma nova inversão. O estudo das propriedades físicas das rochas, e as respectivas técnicas geralmente utilizadas para a obtenção dos parâmetros que as caracterizam, não constitui o objectivo principal deste trabalho, pelo que, será apenas efectuada uma breve introdução a física das rochas, introduzindo-se as equações que foram utilizadas para elaborar os modelos desenvolvidos durante a análise e inversão AVO discutida no capítulo 5.

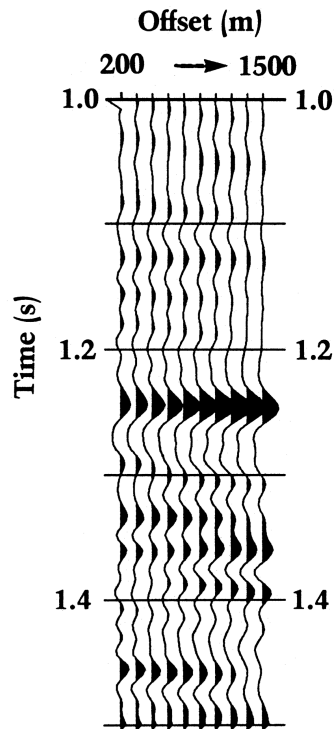


Figura 3.1: Representação de um “offset gather” onde é possível verificar a variação da amplitude com o “offset” [Yilmaz, 2001].

3.1 Teoria do AVO

Na secção 1.3.2 foram introduzidas as equações de Zoeppritz que permitem avaliar a amplitude das ondas resultantes da incidência de uma onda plana P . Estas equações dependem do ângulo de incidência, e não da distância a fonte (“offset”), sendo portanto mais correcto denominar o estudo, que delas advém, por variação da amplitude com o angulo (é mais frequentemente utilizada a abreviação AVA, da expressão em inglês “Amplitude Variatios with Offeset”).

A forma como a amplitude das ondas varia em função da distancia permite efectuar diversas inferências acerca dos parâmetros elásticos que caracterizam o meio.

3.1.1 Aproximações para as equações de Zoeppritz

As equações de Zoeppritz são não lineares e envolvem a inversão de uma matriz 4×4 e a multiplicação por uma outra matriz, sendo necessário efectuar inversões não lineares para a resolver, aumentado consideravelmente custos associados e dificultando significativamente o estudo pretendido. Verificamos, no capítulo 2, que existem situações em que é possível linearizar o problema inverso.

Vários autores realizaram simplificações, das equações de Zoeppritz, que facilitam consideravelmente a visualização dos efeitos causados pela variação de um determinado parâmetro. Nestas aproximações considera-se que existe contraste fraco, ou seja, que:

$$\left| \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \right| \ll 1, \quad \gamma = \alpha, \beta, \rho$$

A seguir iremos destacar algumas destas aproximações, utilizando a mesma nomenclatura da secção 1.3.2.

– *Aproximação de Bortfeld (1961):*

Nesta aproximação, os termos devidos aos efeitos acústicos e elásticos são separados, como é possível verificar pela equação seguinte;

$$R_{PP}(\theta) \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha_2 \rho_2 \cos \theta_1}{\alpha_1 \rho_1 \cos \theta_2} \right) + \left(\frac{\sin \theta_1}{\alpha_1} \right)^2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) \left[2 + \frac{\ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}{\ln \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right)} \right] \quad (3.1)$$

Contudo, esta equação é de pouca utilidade prática, pois não é efectuada uma representação explícita da dependência directa com o ângulo de incidência ou o “offset”.

– *Aproximação de Aki e Richards:*

Nesta abordagem, é efectuada uma parametrização considerando as variações na densidade, na velocidade das ondas S e na velocidade das ondas P , de forma a obter-se uma expressão que permite exprimir, explicitamente, a variação da amplitude com o ângulo de incidência.

$$R_{PP}(\theta) = \frac{1}{2} (1 - 4\bar{\gamma}^2 \sin^2 \bar{\theta}) \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} + \frac{1}{2} \sec^2 \bar{\theta} \frac{\Delta\alpha}{\bar{\alpha}} - 4\bar{\gamma}^2 \sin^2 \bar{\theta} \frac{\Delta\beta}{\bar{\beta}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\rho = \rho_{i+1} - \rho_i \\ \Delta\alpha = \alpha_{i+1} - \alpha_i \\ \Delta\beta = \beta_{i+1} - \beta_i \\ \bar{\rho} = \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2} \\ \bar{\theta} = \frac{\theta_{i+1} + \theta_i}{2} \\ \bar{\alpha} = \frac{\alpha_{i+1} + \alpha_i}{2} \\ \bar{\beta} = \frac{\beta_{i+1} + \beta_i}{2} \\ \bar{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Na equação anterior foram utilizados os índices genéricos $i + 1$ e i para identificar o meio onde as ondas incidentes (e reflectidas) se propagam e o meio subjacente (onde as ondas são transmitidas), respectivamente. Uma importante propriedade associada a esta aproximação é a simetria desta, em contraste com a assimetria das equações de Zoeppritz originais. Se-

gundo Bakus (1992), a sobreposição de ondas P reflectidas e a conversão, local, em ondas S podem cancelar, em média, as assimetrias previstas pelas equações de Zoeppritz, tornando, em determinados casos, a aproximação 3.2 mais adequada.

Para determinarmos os factores envolvidos nesta aproximação, a partir da inversão das amplitudes observadas, é necessário reformular a expressão em sucessivas janelas de ângulos de incidência. Na aproximação apresentada a seguir, os termos da equação 3.2 são adequadamente manipulados.

– *Equação de Shuey:*

Manipulando as equações de Aki – Richards [Shuey, 1985], é possível obter a seguinte equação para o coeficiente de reflexão;

$$R_{PP}(\theta) = A + B \sin^2 \theta + C \tan^2 \theta \sin^2 \theta, \begin{cases} A = R_{PP}(0^\circ) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \\ B = \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \frac{\Delta\beta}{\beta} - 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \frac{\Delta\rho}{\rho} \\ C = \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \end{cases} \quad (3.3)$$

Esta equação constituiu a base para o desenvolvimento pratico da análise AVO, como iremos verificar na secção 3.2. A equação de Shuey, à três termos, pode ser representada em termos da razão de Poisson, equação 1.24, por [Ikelle and Amundsen, 2005]:

$$R_{PP}(\theta) = R_{PP}(0^\circ) + \left(R_{PP}(0^\circ) Q_0 + \frac{2\Delta\bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}^2} \right) \sin^2 \theta, \begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\ \Delta\sigma = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \\ Q_0 = Q - 2(1 - Q) \frac{1 - 2\bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}} \\ Q = \frac{\frac{\Delta\alpha}{\alpha}}{\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta\beta}{\beta}} \end{cases} \quad (3.4)$$

Onde, σ_1 e σ_2 representam as razões de Poisson dos meios incidentes e transmitidos, respectivamente.

Na figura 3.2 são representados os coeficientes de Zoeppritz e as aproximações de Bortfeld e Aki–Richards, para dois modelos distintos. Repare-se que ambas aproximações apresentam um comportamento muito similar a representação da amplitude determinada pela equação de Zoeppritz.

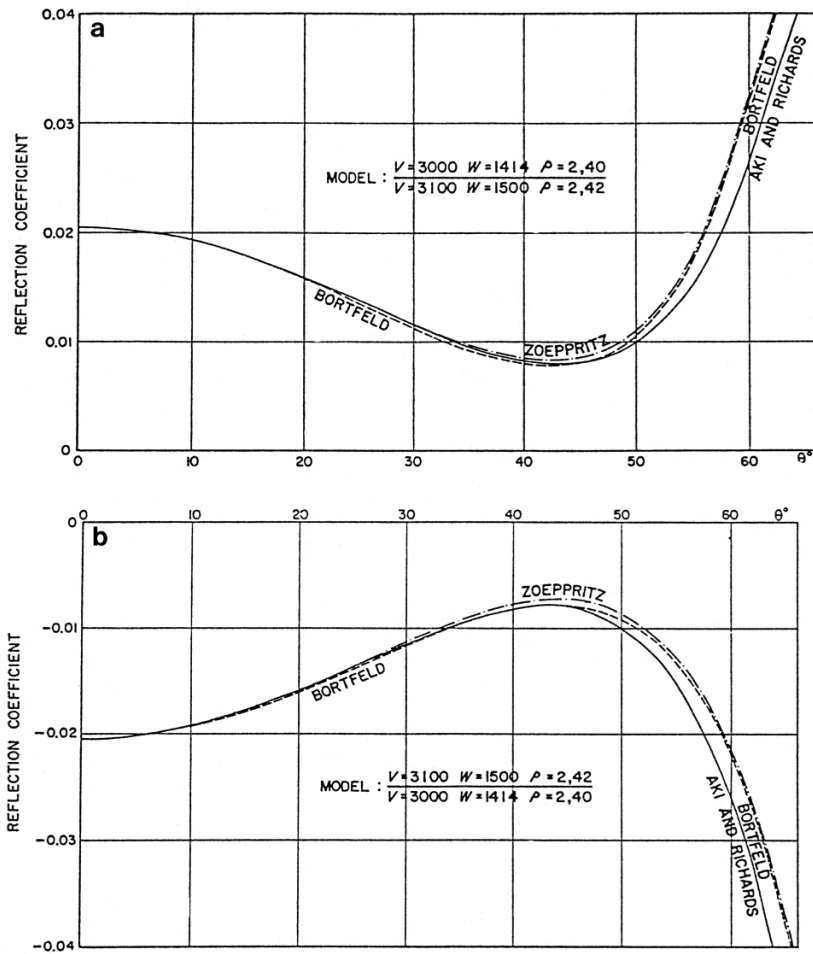


Figura 3.2: Representação do coeficiente de reflexão $R_{PP}(\theta)$ recorrendo as equações de Zoeppritz, Bortfeld e Aki-Richards [Smith and Gidlow, 1987]

3.1.2 Física das formações rochosas e as relações entre os parâmetros elásticos e os parâmetros petrofísicos

A caracterização de um determinado meio, ou reservatório, pelos parâmetros elásticos não constitui, geralmente, um indicador directo de hidrocarbonetos. De facto, as velocidades das ondas P e S e a densidade do meio permitem descrever o comportamento elástico mas não fornecem informação directa acerca dos fluidos que poderão estar presentes nem acerca da porosidade e permeabilidade da formação.

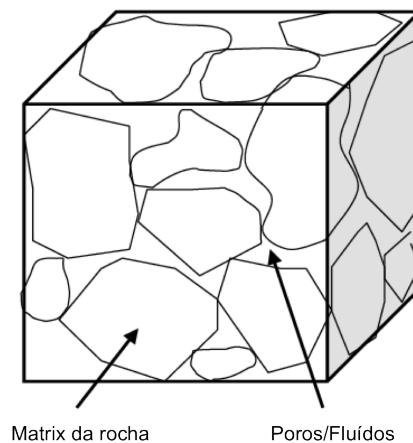


Figura 3.3: Representação da estrutura interna de um elemento de volume

Na figura 3.3 é efectuada uma representação da estrutura de uma formação rochosa, que é formada por uma matriz intercalada por espaços “vazios” denominados por poros. Assim, dependendo destes parâmetros petrofísicos diferentes comportamentos poderão ser esperados. Na figura 3.4 são representadas, a título meramente ilustrativo, possíveis formações rochosas. A porosidade, ϕ , é definida pela razão entre o volume dos “espaços vazios”, V_{void} , e o volume total, V_{tot} ,

$$\phi = \frac{V_{\text{void}}}{V_{\text{tot}}}, \quad (3.5)$$

enquanto que permeabilidade permite avaliar o nível da conectividade entre os poros. Existem diversas equações, provenientes de resultados laboratoriais e teóricos, que permitem relacionar os parâmetros elásticos aos parâmetros petrofísicos. A seguir serão abordadas algumas destas equações.

Considere-se que uma determinada rocha saturada com porosidade ϕ possui uma densidade mineral (matriz) ρ_m e que a densidade do fluído, homogéneo, nos poros é ρ_{fl} . A densidade total da rocha saturada, poderá ser dada por:

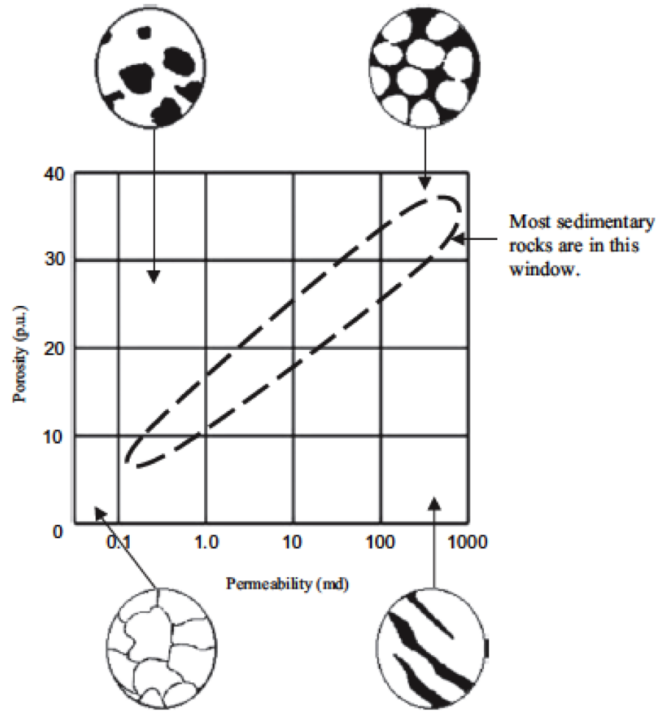


Figura 3.4: Meios com diferentes porosidades e permeabilidades. [Ikelle and Amundsen, 2005]

$$\rho_{sat} = (1 - \phi) \rho_m + \phi \rho_{fl} \quad (3.6)$$

Na expressão anterior considerou-se que os poros estão preenchidos por um fluido homogêneo. Considerando que estes contêm água e hidrocarbonetos, a densidade nos poros em função da saturação da água, S_a , da densidade da água, ρ_a e da densidade média dos hidrocarbonetos, ρ_{hc} , pode ser dada pela seguinte equação:

$$\rho_f = \rho_a S_a + \rho_{hc} (1 - S_a) \quad (3.7)$$

Substituindo este resultado na equação 3.6, tem-se:

$$\rho_{sat} = (1 - \phi) \rho_m + \phi \rho_a S_a + \phi \rho_{hc} (1 - S_a) \quad (3.8)$$

Para efectuar a relação pretendida recorre-se ao problema da substituição de fluidos. Neste, tenta-se entender e prever a dependência existente entre as velocidades de propagação, e a impedância, e o conteúdo em fluidos existentes nos poros. São então considerados os efeitos devidos a alteração da densidade e a alteração do módulo de compressibilidade. A compressibilidade de uma formação que não contém fluidos (rocha seca) pode ser determinada a partir das compressibilidades da matrix e dos poros:

$$\frac{1}{K_{seco}} = \frac{1}{K_m} + \frac{\phi}{K_\phi} \quad (3.9)$$

Onde, ϕ , K_{seco} e K_m são a porosidade, a incompressibilidade da rocha seca e a incompressibilidade da matriz, respectivamente. O termo K_ϕ é a incompressibilidade nos poros, e pode ser representada como se segue;

$$\frac{1}{K_\phi} = \frac{1}{v_p} + \frac{\partial v_p}{\partial \sigma} \quad (3.10)$$

Onde, v_p é o volume dos poros e σ representa o incremento da tensão confinante devido a propagação da onda através do meio.

A compressibilidade da rocha saturada pode ser dada por:

$$\frac{1}{K_{sat}} = \frac{1}{K_m} + \frac{\phi}{K_\phi + \frac{K_{fl}K_m}{K_m - K_{fl}}} \quad (3.11)$$

Como na grande maioria das rochas $K_{fl} \ll K_m$, poderemos considerar a seguinte aproximação:

$$\frac{1}{K_{sat}} \approx \frac{1}{K_m} + \frac{\phi}{K_\phi + K_{fl}} \quad (3.12)$$

Atendendo à equação 3.9, é possível representar K_{sat} em função de K_{seco} ,

$$K_{sat} = K_{seco} + \frac{\left(1 - \frac{K_{seco}}{K_m}\right)^2}{\frac{\phi}{K_{fl}} + \frac{1 - \phi}{K_m} - \frac{K_{seco}}{K_m^2}} \quad (3.13)$$

As equações 3.9 e 3.13 são normalmente denominadas por equações de Biot-Gassmann. Estas equações permitem solucionar o problema de substituição de fluidos. Neste, as velocidades sísmicas em rochas saturadas com um determinado fluido são utilizadas para prever a velocidade em rochas saturadas com um fluido distinto, ou, de forma análoga, prevêem-se as velocidades em rochas saturadas a partir das velocidades avaliadas em rochas “secas”, e vice-versa.

Pelas equações 3.9 e 3.12 verifica-se que a alteração da porosidade resulta numa alteração do modulo de rigidez dos poros, K_ϕ . É igualmente possível constatar, pela equação 3.12, que rochas com valores de K_ϕ elevados apresentam porosidade reduzida, resultando numa capacidade de acomodação de fluidos igualmente reduzida.

Eliminando o termo K_ϕ obtém-se a seguinte equação [Mavko et al., 2009]:

$$\frac{K_{sat}}{K_m - K_{sat}} = \frac{K_{seco}}{K_m - K_{seco}} + \frac{K_{fl}}{\phi(K_m - K_{fl})} \quad (3.14)$$

Resultando igualmente a seguinte relação para os módulos de cisalhamento:

$$\mu_{sat} = \mu_{seco} \quad (3.15)$$

Para formações rochosas isotrópicas, as equações Gassmann 3.14 e 3.15 permitem prever a alteração no módulo de rigidez com a alteração no conteúdo em fluidos. Saliente-se que o módulo de cisalhamento, μ , permanesse inalterado. Recorde-se que os módulos de rigidez e cisalhamento estão relacionados com as velocidades de propagação pelas equações 1.43 e 1.44, e que a densidade pode ser obtida recorrendo a equação 3.6.

Considerando o coeficiente de Biot,

$$C_{biot} = 1 - \frac{K_{seco}}{K_m}, \quad (3.16)$$

e o módulo do fluido, M , por

$$\frac{1}{M} = \frac{\phi}{K_{fl}} + \frac{C_{biot} - \phi}{K_m}, \quad (3.17)$$

é possível representar a equação 3.13 como se segue:

$$K_{sat} = K_{seco} + C_{biot}^2 M \quad (3.18)$$

Tem-se os seguintes resultados extremos em relação a porosidade de formações rochosas;

– Se $C_{biot} = 0$ ($K_{seco} = K_m$), então $K_{sat} = K_{seco}$ e formação é não-porosa.

– Se $C_{biot} = 1$ ($K_{seco} = 0$), então $\frac{1}{K_{sat}} = \frac{\phi}{K_{fl}} + \frac{1-\phi}{K_m}$, pelo que existem partículas em suspensão.

A formula obtida é geralmente denominada por equação de Wood.

A seguir, é apresentada uma metodologia para o problema de substituição de fluidos de Gassmann [Mavko et al., 2009]. Considera-se um cenário inicial, para o fluido identificado como “fluido 1”, com velocidades $V_S^{(1)}$ e $V_P^{(1)}$ e densidade $\rho^{(1)}$. Iremos contactar no capítulo 5, onde será efectuada uma análise e inversão AVO de dados sísmicos 3D, que as velocidades referidas podem ser obtidas recorrendo a diagrfias ou obtidas a partir de métodos teóricos, por inversão ou modelos de Castagna, para estimar a velocidade das ondas S a partir da velocidade das ondas P .

1. Extração dos módulos de reigidez e cisalhamento a partir de $V_P^{(1)}$, $V_S^{(1)}$ e $\rho^{(1)}$:

$$K^{(1)} = \rho \left(\left(V_P^{(1)} \right)^2 - \frac{4}{3} \left(V_S^{(1)} \right)^2 \right)$$

$$\mu^{(1)} = \rho \left(V_S^{(1)} \right)^2$$

2. Aplicação da equação de Gassmann 3.14, para obter a correspondente transformação no módulo de rigidez:

$$\frac{K_{sat}^{(2)}}{K_m - K_{sat}^{(2)}} - \frac{K_{fl}^{(2)}}{\phi \left(K_m - K_{fl}^{(2)} \right)} = \frac{K_{sat}^{(1)}}{K_m - K_{sat}^{(1)}} - \frac{K_{fl}^{(1)}}{\phi \left(K_m - K_{fl}^{(1)} \right)}$$

3. Considera-se que não há alteração no módulo de cisalhamento:

$$\mu_{sat}^{(2)} = \mu_{sat}^{(1)}$$

4. Correção da densidade recorrendo a equação 3.6:

$$\rho^{(2)} = \rho^{(1)} + \phi \left(\rho_{fl}^{(2)} - \rho_{fl}^{(1)} \right)$$

5. Determinação das velocidades:

$$V_P^{(2)} = \sqrt{\frac{K_{sat}^{(2)} + \frac{4}{3}\mu_{sat}^{(2)}}{\rho^{(2)}}} \quad (3.19)$$

$$V_S^{(2)} = \sqrt{\frac{\mu_{sat}^{(2)}}{\rho^{(2)}}} \quad (3.20)$$

Nas equações anteriores, consideraram-se formações com fluidos uniformes, em que a alteração da incompressibilidade é devida a saturação por um determinado fluido. É possível adaptar as equações de Gassmann para misturas constituídas por gás, óleo e água, obtendo-se as equações de Reuss para os modulos efectivos [Mavko et al., 2009]:

$$\frac{1}{\bar{K}_{fl}} = \frac{S_g}{K_g} + \frac{S_o}{K_o} + \frac{S_a}{K_a} \quad (3.21)$$

$$\bar{\rho}_{fl} = S_g \rho_g + S_o \rho_o + S_a \rho_a \quad (3.22)$$

onde, S_g , S_o e S_a são as saturações para o gás, óleo e água, respectivamente.

Estas equações são válidas para distribuições uniformes das fases dos fluidos considerados.

Assim, quando a mistura não é uniforme consideram-se as médias efectivas de Voigt:

$$\bar{K}_{fl} = S_g + K_g + S_o K_o + S_a K_a \quad (3.23)$$

É possível relacionar a velocidades das ondas P e S a partir da relação empírica seguinte [Castagna et al., 1985]:

$$\alpha = c_0 + c_1 \beta \quad (3.24)$$

onde, os coeficientes c_0 e c_1 são empiricamente determinados, consoante o tipo de litologia envolvida, e α e β representam as velocidades das ondas P e S , respectivamente. Em [Castagna et al., 1985], são sugeridos os valores $c_0 = 1360 \text{ m s}^{-1}$ e $c_1 = 1.16$, medidos em formações clásticas saturadas com água.

A equação 3.24 define uma recta, geralmente denominada por “mudrock”. Contactou-se que, em geral, reservatórios de gás em arenitos estão acima da “mudrock”, enquanto que os carbonatos situam-se abaixo desta. Na figura 3.5 é ilustrada esta situação.

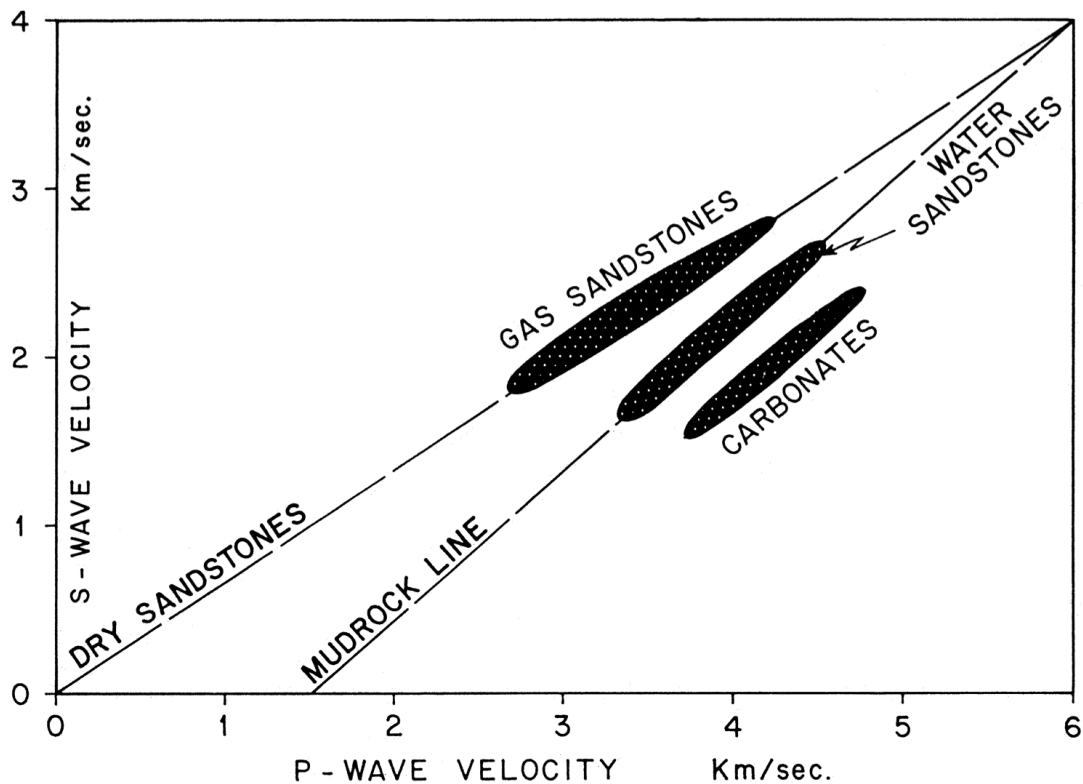


Figura 3.5: Representação da “mudrock” obtida pela relação de Castagna [Castagna et al., 1985].

A “mudrock” pode ser estendida a outras litologias, recorrendo a equação de Greenberg–Castagna,

$$\beta = a\alpha^2 + b\alpha + c \quad (3.25)$$

e atribuindo diferentes valores aos coeficientes a , b e c , consoante a litologia da formação em estudo. Greenberg e Castagna (1992) propuseram alguns valores, representados a seguir.

- *Arenitos*: $\beta = -0.856 \text{ km s}^{-1} + 0.804\alpha$
- *Calcários*: $\beta = -1.031 \text{ km s}^{-1} + 1.017\alpha - 0,055\alpha^2$
- *Dolomite*: $\beta = -0.078 \text{ km s}^{-1} + 0.583\alpha$
- *Xistos*: $\beta = -0.867 \text{ km s}^{-1} + 0.770\alpha$

3.2 Interpretação de dados AVO

Para modelar a variação da amplitude recorre-se as equações de Zoeppritz ou as equações linearizadas. Considerando a equação 3.3, é possível definir os seguintes coeficientes:

$$A = R_{PP}(0^\circ) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \quad \leftarrow \text{Intercepto} \quad (3.26)$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \frac{\Delta\beta}{\beta} - 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \frac{\Delta\rho}{\rho} \quad \leftarrow \text{Gradiente} \quad (3.27)$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \quad \leftarrow \text{Curvatura} \quad (3.28)$$

Atendendo a equação 3.4 e considerando que $\sigma \approx \frac{1}{3}$, obtém-se a seguinte equação aproximada [Castagna and Backus, 1993]:

$$R_{PP}(\theta) \approx R_{PP}(0^\circ) + \left(\frac{4}{9} \Delta\sigma - R_{PP}(0^\circ) \right) \sin^2 \theta \quad (3.29)$$

Constata-se que, intercepto corresponde ao valor do coeficiente de reflexão normal, e o gradiente constitui uma aproximação para a variação da razão de Poisson.

Para ângulos de incidência inferiores à 30° , $0^\circ < \theta < 30^\circ$, é possível truncar o terceiro termo do segundo membro da equação 3.3, obtendo-se a equação de Shuey à dois termos:

$$R_{PP}(\theta) = A + B \sin^2 \theta, \quad \left\{ \begin{array}{l} A = R_{PP}(0^\circ) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \\ B = \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \frac{\Delta\beta}{\beta} - 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \frac{\Delta\rho}{\rho} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Como iremos verificar na capítulo 5, a representação gráfica do coeficiente de reflexão, recorrendo as equações de Shuey, permite-nos obter valores para os diferentes atributos AVO. Na figura 3.6, é efectuada uma representação, a título de exemplo, da técnica geralmente utilizada para a obtenção dos parâmetros A e B , onde são “picadas” as amplitudes e efectuada uma regressão linear no plano definido por $R_P(\theta)$ e $\sin^2(\theta)$.

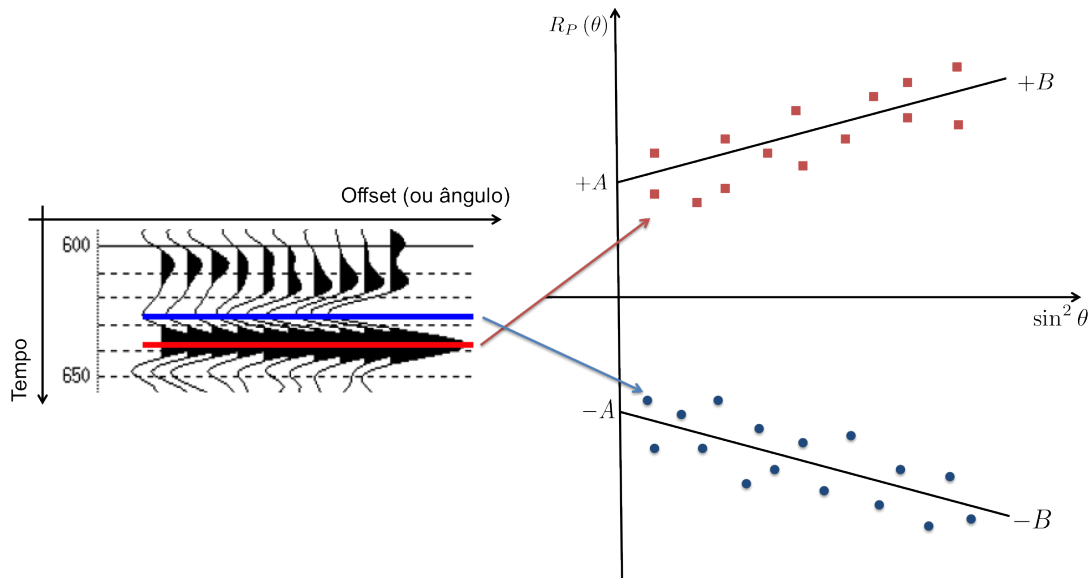


Figura 3.6: Representação da equação linear de Shuey para amplitudes “picadas”. Exemplo de um reservatório de gás de arenitos de classe III.

Baseando-se na relação existente entre a variação da razão de Poisson e a presença de hidrocanetos, podem ser estabelecidas as seguintes classes de respostas AVO:

- *Classe I:* A impedância acústica do meio onde se propaga a onda incidente, é inferior a do meio subjacente, onde se propagam as ondas transmitidas, e o coeficiente de reflexão normal, das ondas P , é acentuadamente positivo apresentado um decréscimo progressivo e acentuado da amplitude com o aumento do ângulo de incidência, com possibilidade de alteração de fase (polaridade), conforme ilustração efectuada na figura 3.7. Nesta, é representado um sintético criado a partir das diagrfias, igualmente representadas. Repare-se que existe um aumento da velocidade das ondas P , α , e da densidade na região do reservatório e, conseqüentemente, um aumento da impedância acústica. Existe igualmente um aumento da velocidade das ondas S , β , e um decréscimo da razão $\frac{\alpha}{\beta}$.
- *Classe II:* A diferença entre as impedâncias acústicas dos dois meios é mínima, e, em muitos casos, a velocidade e a densidade variam em sentidos opostos. O coeficiente

de reflexão acústico apresenta, nestes casos, uma amplitude modesta, tanto no sentido negativo como no positivo. A variação da amplitude com o ângulo de incidência é significativa. Na figura 3.8 são exemplificadas as observações efectuadas.

- *Classe III*: A impedância acústica do meio onde se propaga a onda incidente, é superior a do meio subjacente, onde se propagam as ondas transmitidas, e o coeficiente de reflexão normal, das ondas P , é acentuadamente negativo, aumentando, em valor absoluto, com o aumento do ângulo de incidência.

Os “bright spots” clássicos, apresentam geralmente anomalias pertencentes a esta classe. No caso particular de reservatórios de arenitos, é recorrente utilizar a “regra de ouro”, para o topo do reservatório, que estabelece a existência de aumento progressivo, no sentido negativo, do coeficiente de reflexão acústico. De facto, estas classes I, II e III foram originalmente introduzidas para descrever reservatórios de gás de arenitos. Existem porém reservatórios que apresentam respostas que contrariam a “regra de ouro” referida. Por essa razão, foi adicionada a classe descrita a seguir.

- *Classe IV*:

Nesta classe, o coeficiente de reflexão é igualmente negativo mas apresenta um decréscimo com o aumento do ângulo de incidência.

Uma técnica frequentemente utilizada na análise AVO, consiste na representação gráfica do intercepto e do gradiente (“crossplot”). Esta representação permite-nos distribuir as classes de AVO nos diferentes quadrantes (figura 3.10). Na figura 3.11 é efectuada uma representação semelhante salientando a posição geralmente ocupada pelos limites dos reservatórios nas diferentes classes.

Considere-se a situação de um reservatório arenítico delimitado superiormente por uma descontinuidade estratigráfica que o separa de uma formação xistosa. Neste caso, os arenitos de classe I situam-se no quarto quadrante da representação gráfica referida, sendo A positivo e B negativo. Os arenitos de classe II apresentam uma impedância acústica muito semelhante à dos xistos que os cobrem, e podem ser enquadrados nos quadrantes 2, 3 e 4. Os arenitos de classe III apresentam uma impedância acústica inferior a dos xistos e podem e ser posicionados no terceiro quadrante. Finalmente, os arenitos de classe IV são posicionados no segundo quadrante.

Recorrendo a classificação exposta no parágrafo anterior, é possível delimitar um determinado reservatório seleccionando os pontos da representação, de forma adequada, conforme o exemplo representado na figura 3.12. Neste exemplo, são seleccionados os pontos que se julgam

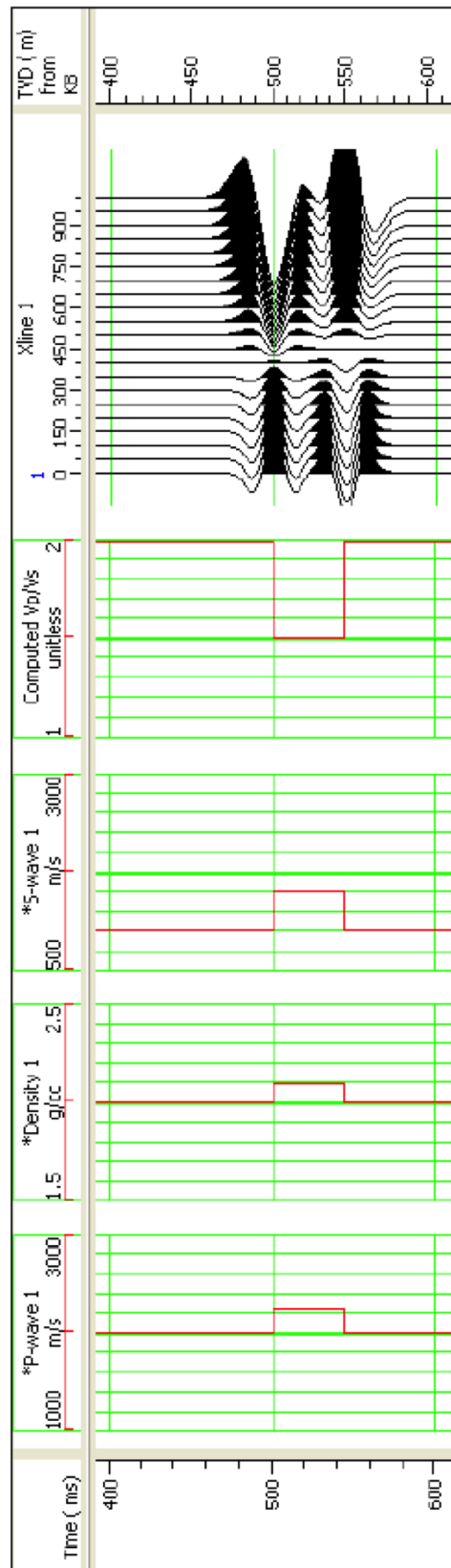


Figura 3.7: Resposta AVO de Classe I

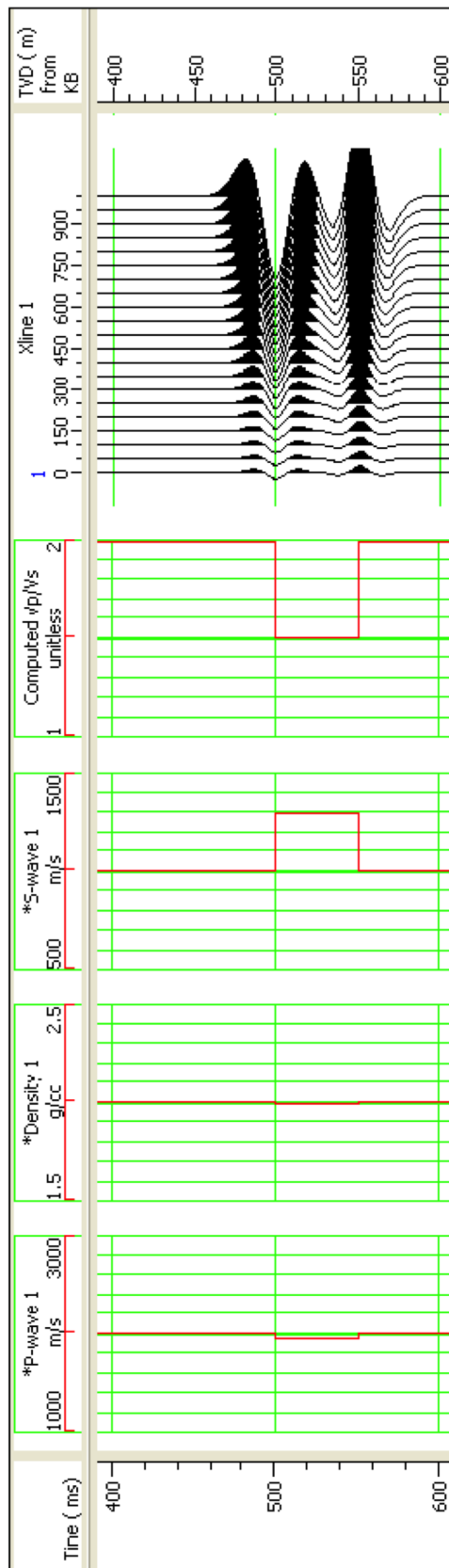


Figura 3.8: Resposta AVO de Classe II

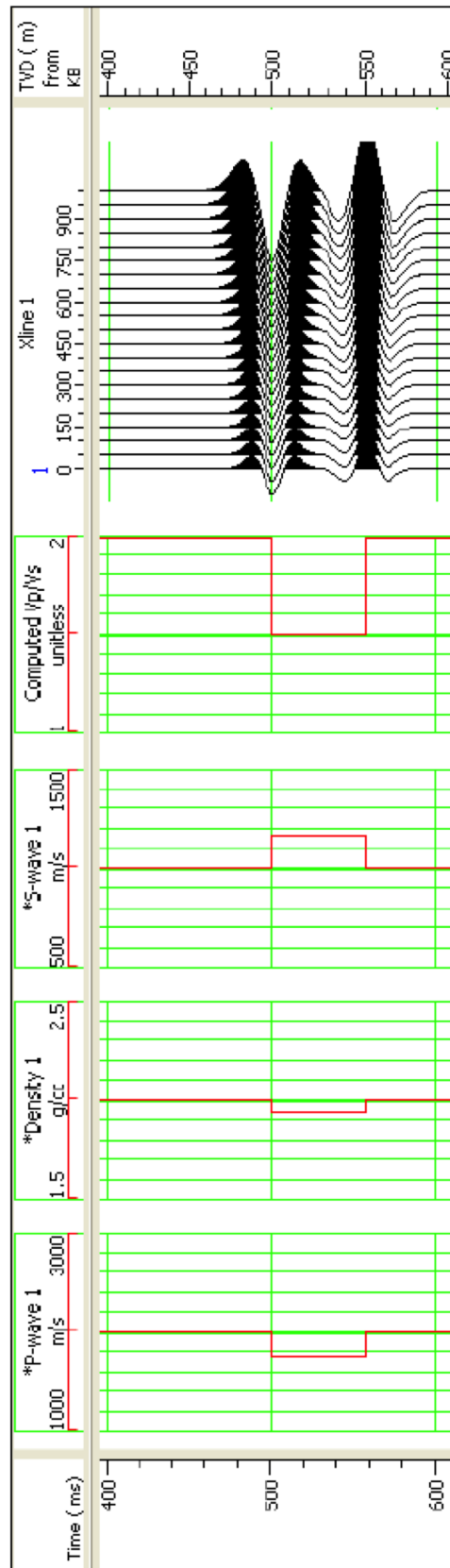


Figura 3.9: Resposta AVO de Classe III

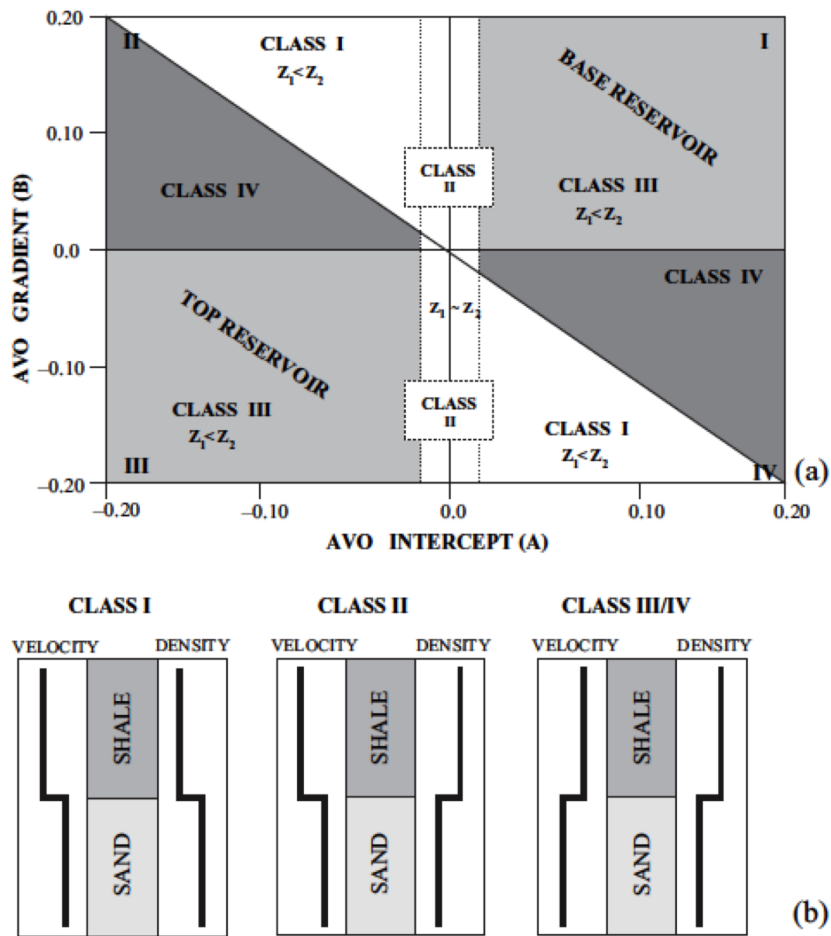


Figura 3.10: Gráfico do Intercepto (A) vs Gradiente (B) para classificação da classes AVO [Ikelle and Amundsen, 2005].

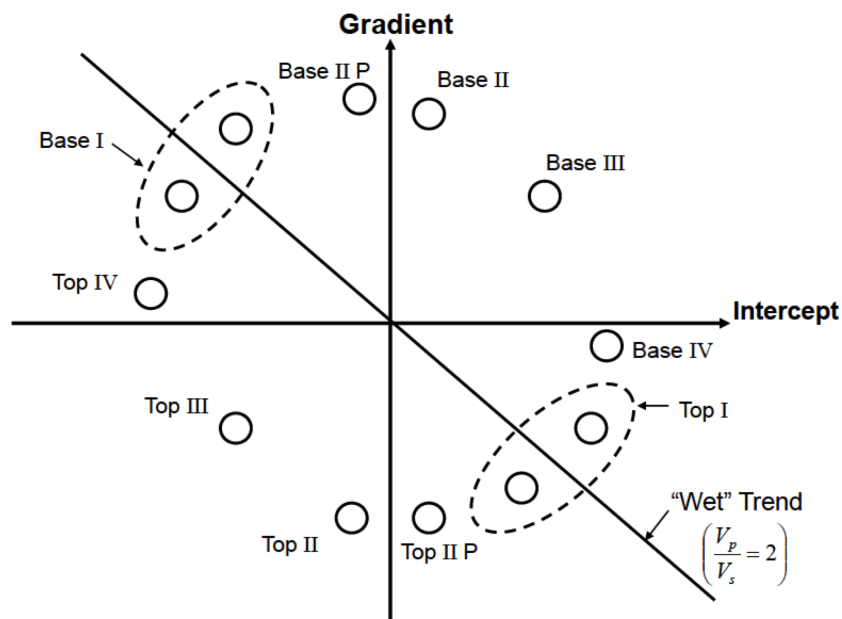


Figura 3.11: Gráfico do Intercepto (A) vs Gradiente (B) para identificação do topo e da base de reservatórios.

pertencer ao limite superior do reservatório (no 3º quadrante) e ao limite inferior do reservatório (2º quadrante).

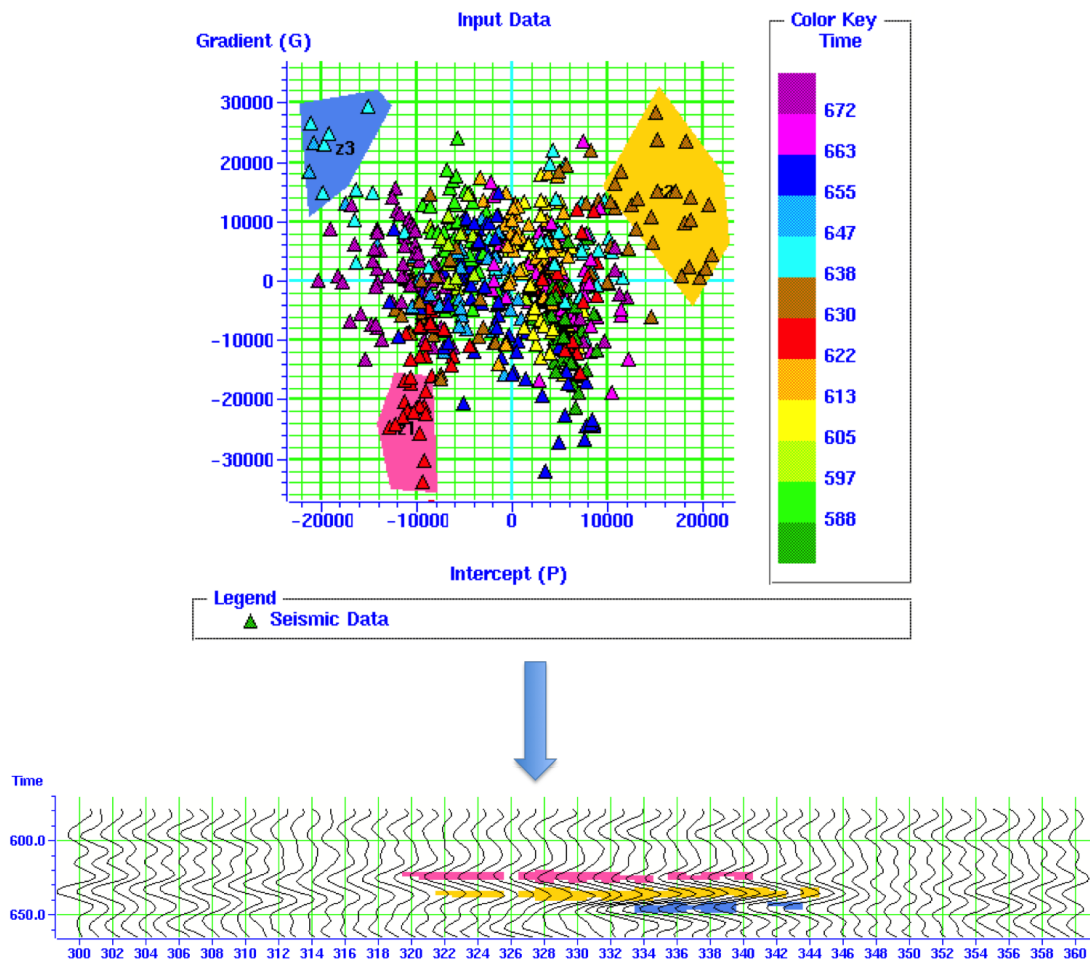


Figura 3.12: Exemplo de aplicação do “crossplot“ A vs B para caracterização de um reservatório de gás.

Existem outros atributos que podem ser obtidos directamente do intercepto e do gradiente. Os mais frequentemente utilizados são:

– Produto AVO ($A \times B$):

A grande maioria das anomalias AVO apresentam um comportamento semelhante ao representado na figura 3.6. O produto $-A \times -B = +AB$ permite delinear o limite superior do reservatório, enquanto que o produto $+A \times +B = +AB$ o limite inferior. Na figura 3.13 é representado um exemplo de aplicação deste atributo, onde são obtidos os limites referidos, para um determinado reservatório.

– Variação calibrada da razão de Poisson ($A + B$):

Atendendo a equação 3.29 verifica-se que:

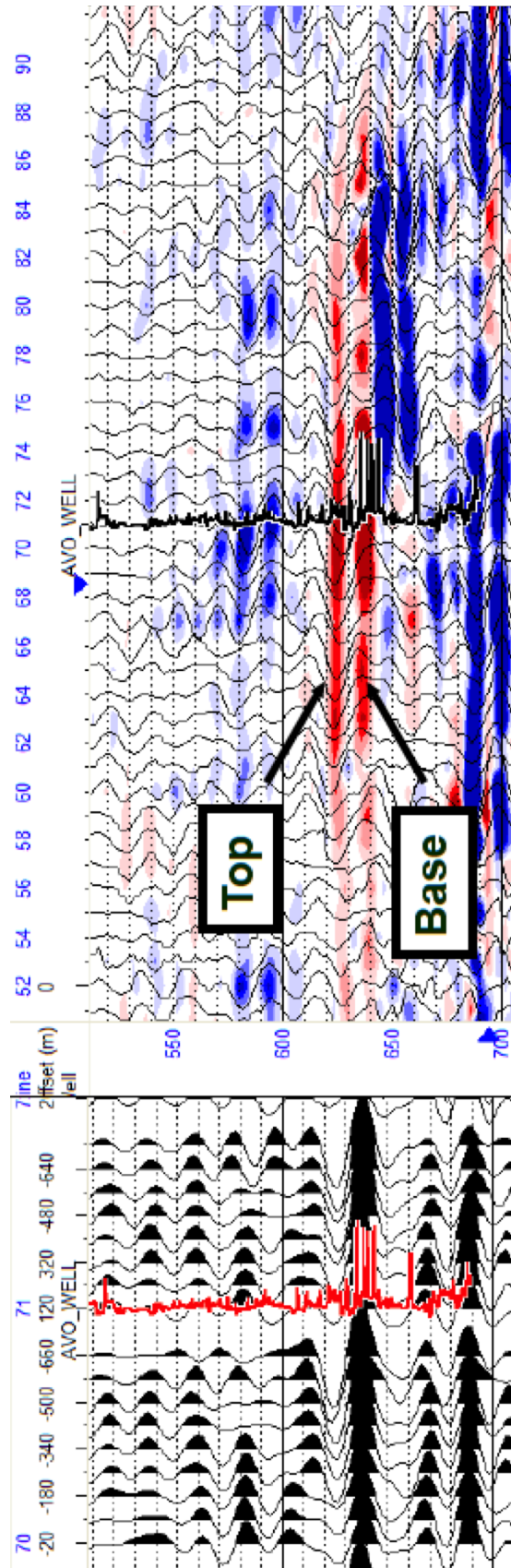


Figura 3.13: Exemplo de aplicação do atributo $A \times B$.

$$B = \frac{4}{9}\Delta\sigma - A \Rightarrow A + B = \frac{4}{9}\Delta\sigma \quad (3.31)$$

Verifica-se que, assumindo que a razão de Poisson para o meio circundante é constante e igual à $\frac{1}{3}$ a adição do intercepto com o gradiente é proporcional a variação da razão de Poisson. Na figura 3.14, é representado um exemplo de aplicação deste atributo, onde é possível constatar uma resposta negativa no limite superior do reservatório, que corresponde a um decréscimo da razão de Poisson, e uma resposta positiva no limite inferior (aumento da razão de Poisson).

– Reflectividade cisalhante ($A - B$):

Considerando a equação 3.3, e assumindo que, para o meio circundante, é válida a razão $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2}$, obém-se:

$$B = \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - \frac{\Delta\beta}{\beta} - \frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho} \quad (3.32)$$

Atendendo as definições alternativas para os coeficientes de reflexão normais das ondas P e S ,

$$\begin{aligned} R_P(0^\circ) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \\ R_S(0^\circ) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\beta}{\beta} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

e a equação 3.32, vem que:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) - \left(\frac{\Delta\beta}{\beta} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \\ \Leftrightarrow B &= R_P(0^\circ) - 2R_S(0^\circ) \end{aligned} \quad (3.34)$$

A equação, de atributos AVO, para estimar a reflectividade das ondas S poderá ser dada pela equação seguinte:

$$R_S(0^\circ) = \frac{1}{2} (A - B) \quad (3.35)$$

Tem-se, portanto, que a diferença entre o intercepto e o gradiente é directamente proporcional ao coeficiente de reflexão normal das ondas S . Na figura 3.15 é representado um exemplo

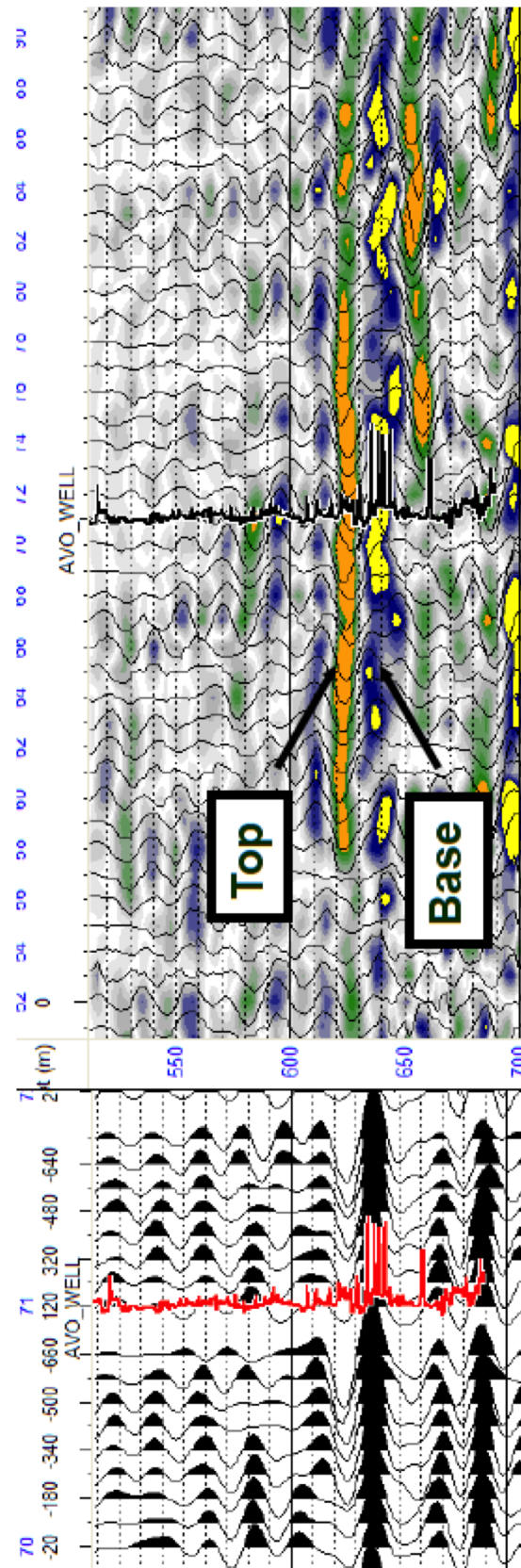


Figura 3.14: Exemplo de aplicação do atributo $A + B$.

onde a diferença $A - B$ traduz um aumento da impedância cisalhante na fronteira superior do reservatório.

– Factor de fluido:

Considerando que o terceiro termo do segundo membro da equação 3.3 é nulo, é possível obter a seguinte expressão para o coeficiente de reflexão [Wiggins et al., 1984]:

$$R(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) - 8 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\beta}{\beta} \right) \right] \right\} \sin^2 \theta \quad (3.36)$$

$$+ \left[2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \frac{\Delta\rho}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho} \right] \sin^2 \theta$$

Substituindo as equações 3.33 na equação anterior vem,

$$R(\theta) = R_P(0^\circ) + \left[R_P(0^\circ) - 8 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 R_S(0^\circ) \right] \sin^2 \theta + \left[2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \frac{\Delta\rho}{\rho} \sin^2 \theta \quad (3.37)$$

Fatti et al. (1994) reorganizam esta equação, como se segue:

$$R_P(\theta) = c_1 R_P(0^\circ) + c_2 R_S(0^\circ), \quad \begin{cases} c_1 = 1 + \tan^2 \theta \\ c_2 = -8 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta \end{cases} \quad (3.38)$$

Pela equação 3.38, verifica-se que é possível determinar os coeficientes $R_P(0^\circ)$ e $R_S(0^\circ)$ de forma análoga a determinação dos parâmetros AVO, A e B . Um exemplo elucidativo é representado na figura 3.16, onde são apresentadas secções sísmicas distintas para $R_P(0^\circ)$ e $R_S(0^\circ)$, obtidas a partir dos “gathers” igualmente representados. Repare-se como a anomalia se torna evidente na secção para R_S .

Como iremos verificar a seguir, os coeficientes extraídos permitem determinar atributos que facilitam a quantificação da prospectividade de possíveis reservatórios de hidrocarbonetos.

Diferenciando ambos os membros da equação de Castagna (equação 3.24),

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = c_1 \frac{\beta}{\alpha} \frac{\Delta\beta}{\beta}, \quad (3.39)$$

define-se o factor de fluido por:

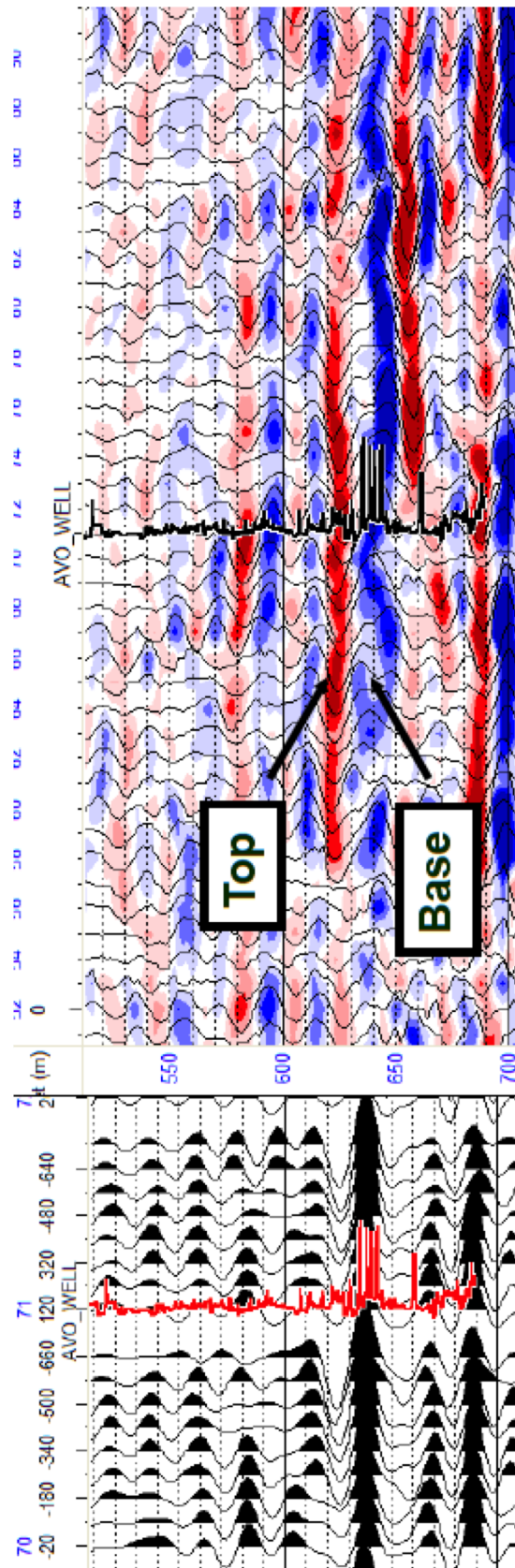


Figura 3.15: Exemplo de aplicação do atributo $A - B$.

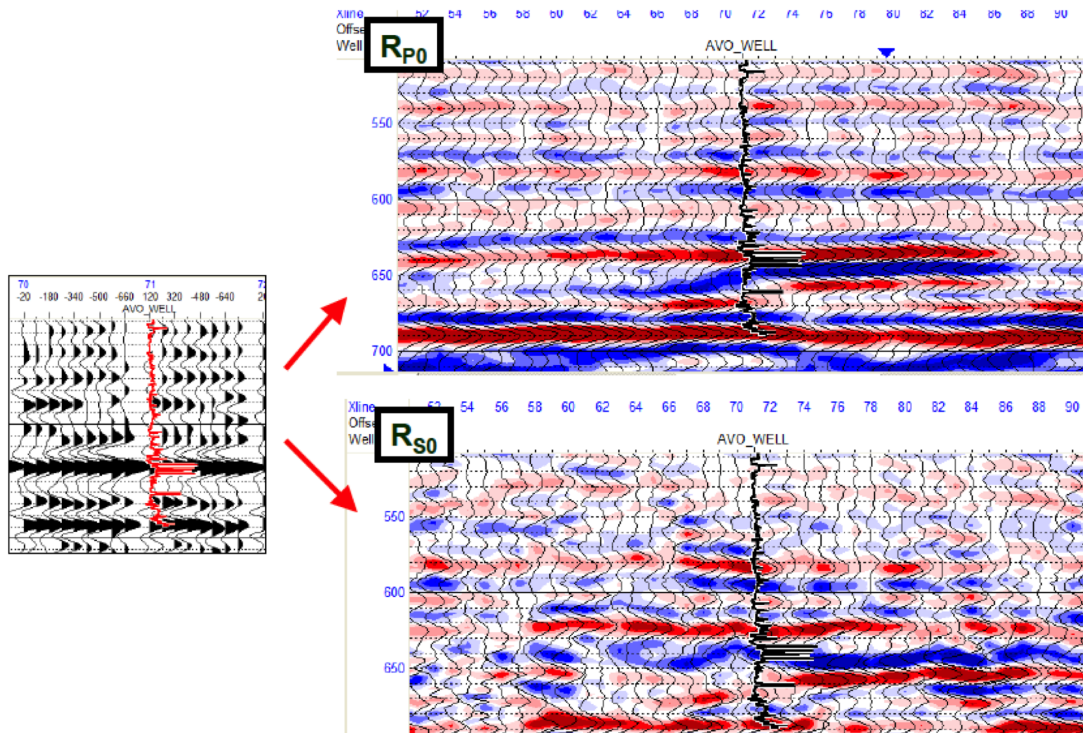


Figura 3.16: Exemplo de extração e representação dos coeficientes $R_P(0^\circ)$ e $R_S(0^\circ)$.

$$\Delta F = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - c_1 \frac{\beta}{\alpha} \frac{\Delta\beta}{\beta} \quad (3.40)$$

$$\Leftrightarrow \Delta F = R_P - c_1 \frac{\beta}{\alpha} R_S \quad (3.41)$$

Se ΔF assumir valores próximos de zero, então esta-se em presença de uma formação saturada com água. Por outro lado, se uma formação arenítica estiver saturada de gás o factor de fluido será negativo na fronteira superior do reservatório e positivo na base deste.

Recordando a definição da “mudrock”, efectuada na secção 3.1.2, verifica-se normalmente que, em reservatórios de gás areníticos, o factor de fluido na base e topo do reservatório desvia-se consideravelmente desta. Este é um resultado previsível visto que litologias distintas das formações saturadas com água apresentam um desvio em relação a linha definida pela “mudrock” (ver figura 3.5).

Parte II

Aplicações

Capítulo 4

Inversão sísmica “pós-stack”

Nas secções seguintes, iremos descrever a inversão efectuada, a dados sísmicos “pós-stack” adquiridos no campo Blackfoot localizado a cerca de 15 Km à sudeste da cidade de Strathmore em Alberta no Canada, para obter perfis de impedância, prestando-se especial atenção a região de interesse.

Foi utilizado um cubo sísmico constituído por 119 inlines e 81 crosslines, com um intervalo de amostragem de 2 ms e 501 amostras por traço. Para auxiliar, e melhorar a precisão dos resultados, recorreu-se a diversas diagrafias de 13 poços distintos distribuídos pela região abrangida pelo cubo sísmico. Na figura 4.1, são representadas a linhas sísmicas que limitam o cubo sísmico analisado e a localização dos poços referidos.

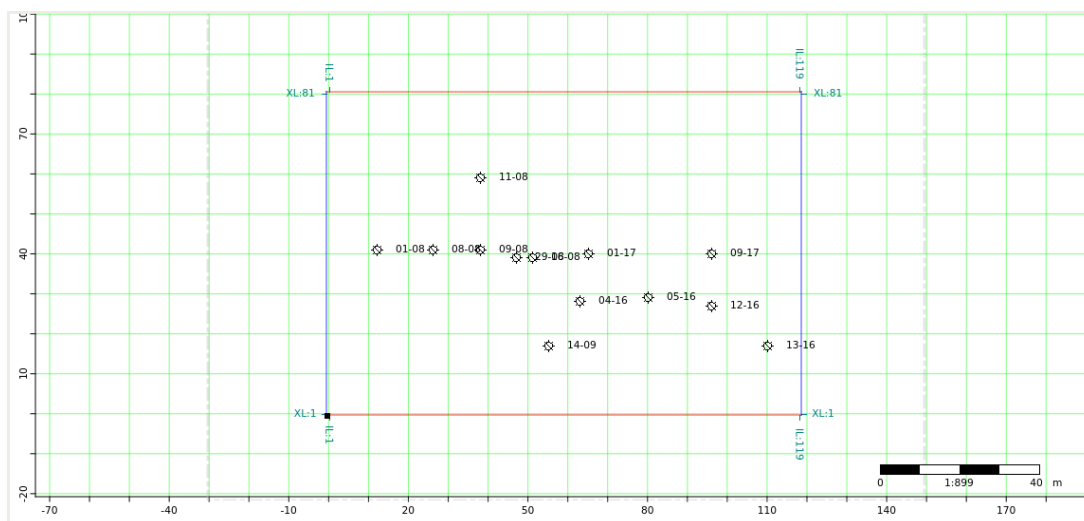


Figura 4.1: Mapa dos dados utilizados: Linhas sísmicas e poços

Na figura 4.2 é representada a crossline 42 e na figura 4.3 a inline 42. São igualmente representados os horizontes que delimitam a região de interesse e os poços que as cruzam.

Constata-se que a região de interesse, onde está localizado o reservatório que se pretende caracterizar, situa-se na janela temporal 1000 – 1100 ms.

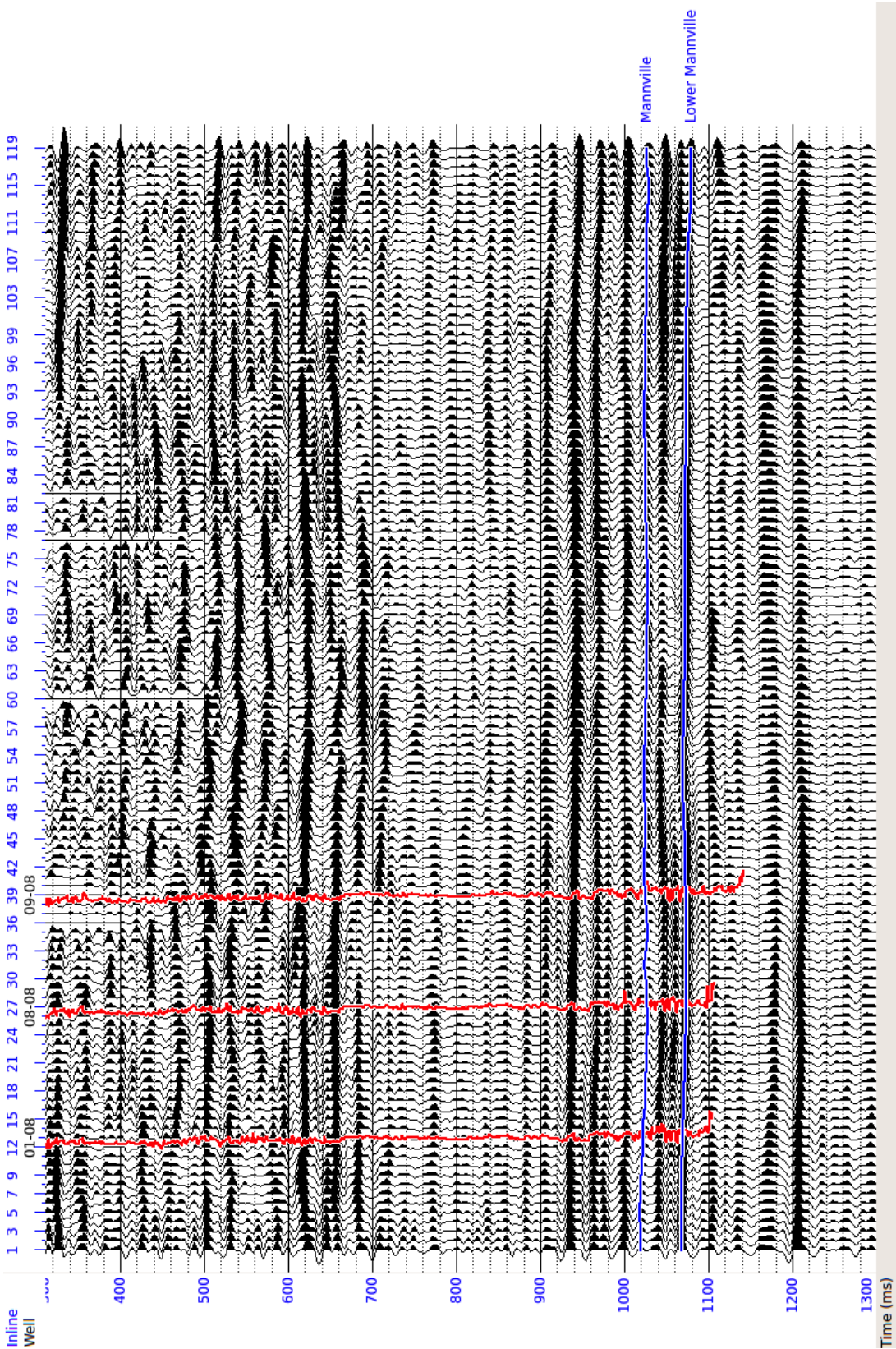


Figura 4.2: Representação da “crossline” 42:

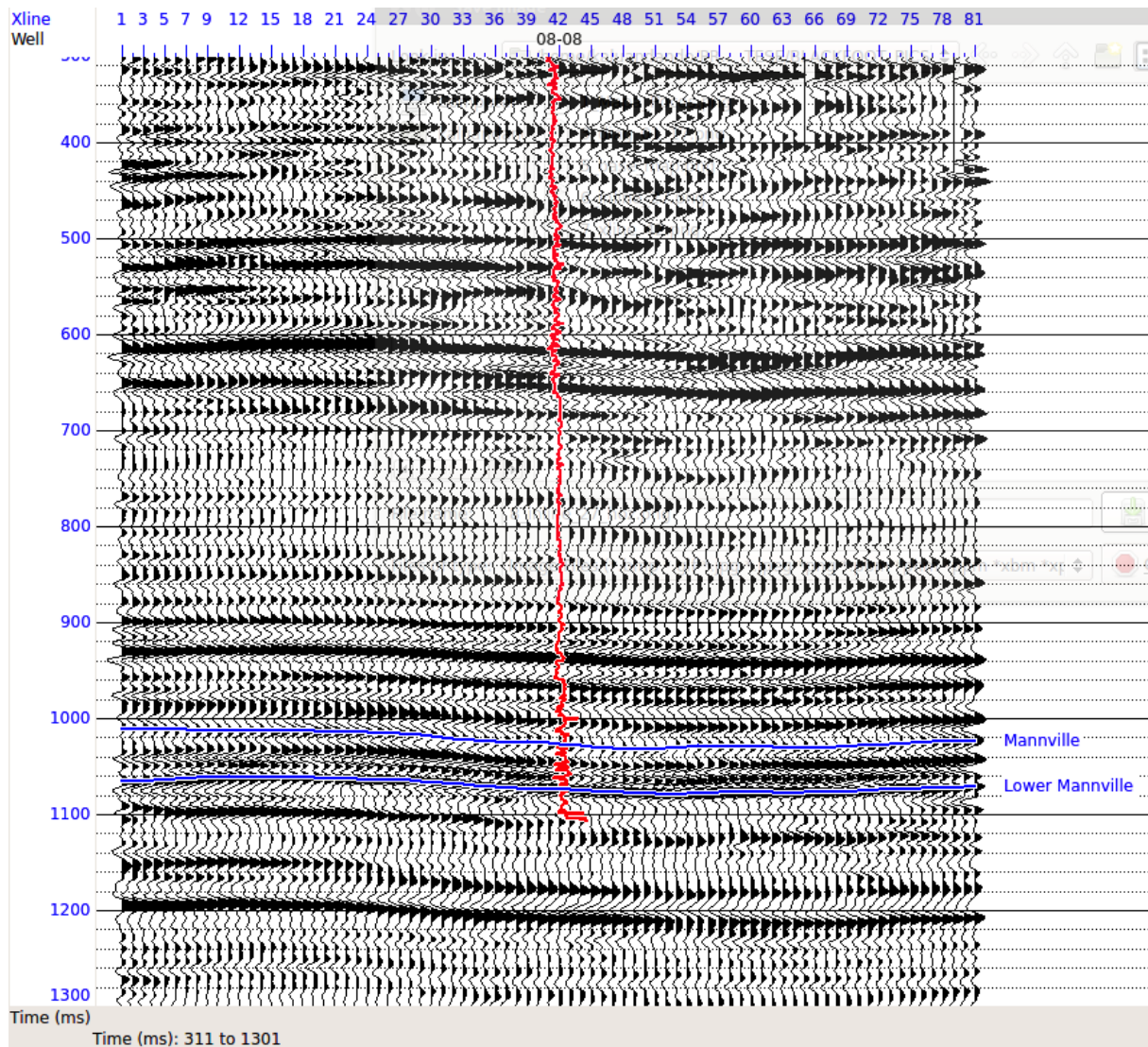


Figura 4.3: Representação da “Inline” 27

Para a realização do trabalho foram utilizados os seguintes recursos:

- Sistema operativo : Linux 32-bit
- Hardware:
 - Processador: Intel® Core™ i7-3610QM CPU @ 2.30GHz × 8
 - Memoria ram: 16 GB
- Software: Hampson-Russell (HRS-9/R-1.4)

Na figura 4.4 são representadas as principais etapas que foram seguidas durante a realização do trabalho e que serão descritas secções seguintes.

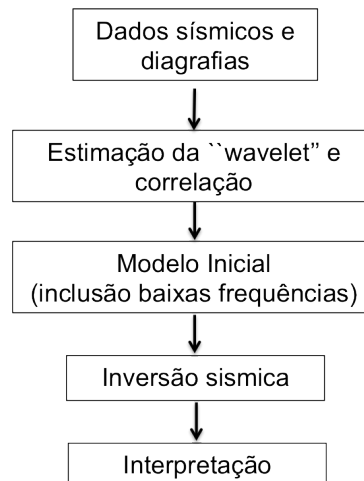


Figura 4.4: Sequência seguida para inverter os dados sísmicos

4.1 Correlação das diagrfias e extração da “wavelet”

Para reduzir as incertezas e a falta de unicidade associadas a inversão, recorre-se normalmente a modelos iniciais, que podem ser obtidos pela informação contida nas diagrfias, que permitem obter as primeiras estimativas para as propriedades que caracterizam o meio que se pretende estudar. Recorrendo a informação à priori e introduzindo algumas restrições aos parâmetros a serem estimados, é possível obter resultados que estejam mais próximos da realidade, como é detalhado no capítulo 2, onde foi introduzida a teoria para resolver problemas inversos.

Atendendo a definição de impedância acústica, equação 1.76, e considerando as diagrfias para a densidade e a velocidade, é possível obter um modelo inicial de impedâncias nos locais onde as diagrfias foram registadas. Para pudermos associar as impedâncias obtidas ao cubo sísmico, é necessário efectuar a conexão entre ambos nos locais onde estas impedâncias foram obtidas. Como as diagrfias são medidas em profundidade (m) e os dados sísmicos em tempo (s), é necessário converter um dos dados para que ambos estejam no mesmo domínio. Como é evidente opta-se pela conversão das diagrfias, pois o número de operações e os erros associados a essa conversão são significativamente inferiores. Por outro lado, é sabido que a mudança de domínio nos dados sísmicos depende do modelo de velocidade disponível, normalmente obtido por análise de velocidades ou pelo modelo resultante da migração. Mesmo que os modelos obtidos sejam melhorados por interpolação entre os poços que estejam disponíveis, estes nunca são exactos e apresentam normalmente erros associados que podem ser preponderantes na planificação de futuros poços. Apesar das incertezas referidas, o método sísmico tem-se revelado indispensável na exploração e produção

de reservatórios de hidrocarbonetos. Como iremos constatar de seguida, o método utilizado na conversão das diagrfias permite obter um resultado, principalmente na área de interesse, bastante preciso.

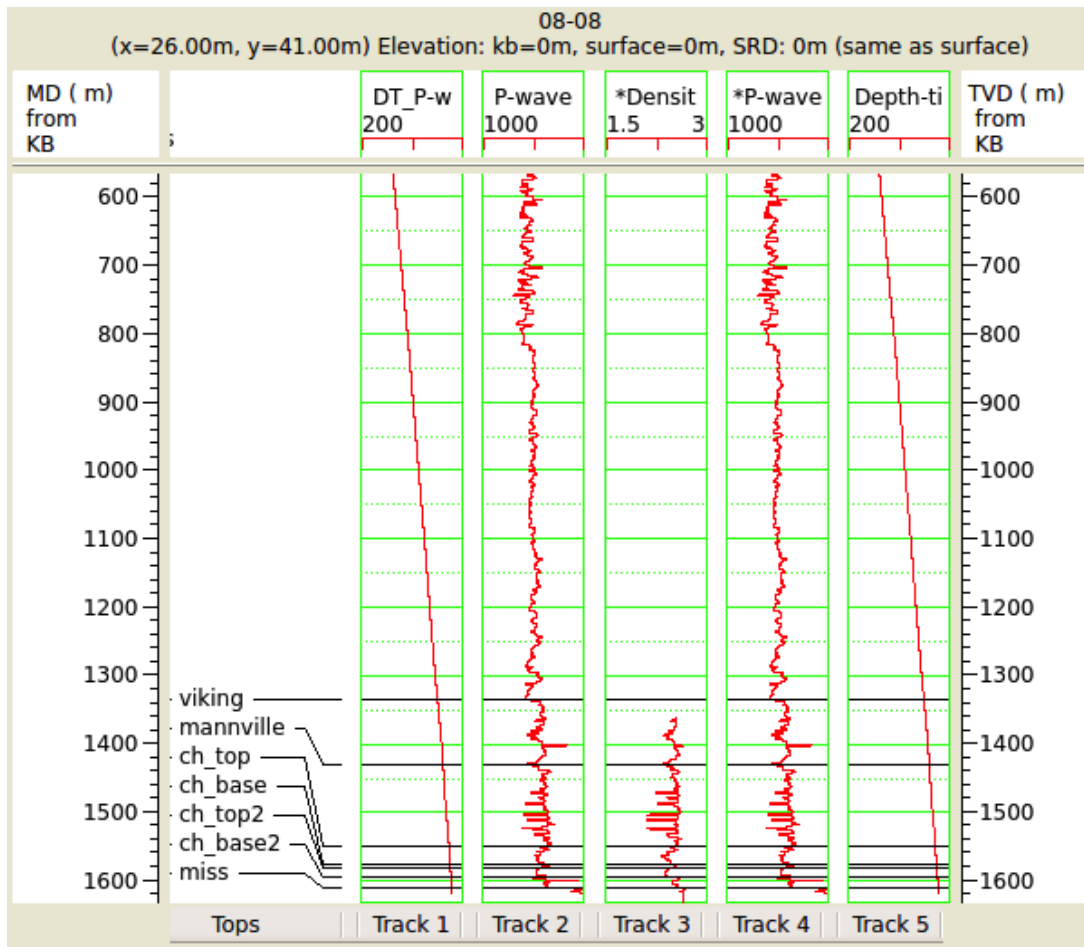


Figura 4.5: Representação das diagrfias da densidade e velocidade e da curva de conversão profundidade – tempo (Poço 08-08).

Na figura 4.5 são representadas as diagrfias originais para poço 08-08, onde o eixo vertical representa a profundidade em metros.

É efectuada uma primeira conversão profundidade – tempo utilizando uma tabela determinada a partir da diagrfia acústica (velocidades) e recorrendo a expressão,

$$t_i = 2 \sum_{j=1}^i \frac{d_j}{v_j} \quad (4.1)$$

onde, t_j , d_j e v_j representam o tempo de percurso da onda até a camada j , a espessura da camada j e a velocidade de propagação na camada j , respectivamente. Note-se que o tempo de propagação até uma determinada camada depende da velocidade de propagação de todas as camadas que atravessa. Por outro lado, como as diagrfias não registam, frequentemente,

informação acerca das camadas próximas da superfície é frequente efectuar uma extrapolação entre a primeira medição e a superfície para que seja possível correlacionar com todo o registo sísmico. Saliente-se que esta aproximação não afectará o nosso estudo pois a área de interesse localiza-se em profundidades superiores abrangidas pelas diagrfias. A curva obtida é representada na figura 4.5.

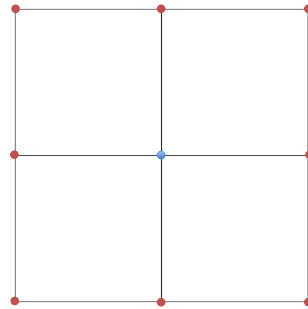


Figura 4.6: Malha utilizada para extração do traço compósito: recorre-se a 9 pontos em redor para efectuar a interpolação

São igualmente criados os traços compósitos, efectuando uma média dos traços sísmicos ao redor do poços que se pretende correlacionar, para que sejam comparados com o sintético criado a partir das diagrfias. No nosso caso, estes foram criados considerando apenas os primeiros nódos, ou seja, foram utilizados 9 nódos, correspondentes à 9 traços sísmicos, conforme a representação efectuada na figura 4.6.

Para criar os traços sintéticos devidos aos dados disponibilizados pelas diagrfias, basta convolver a série de reflectividades, obtidas pelas diagrfias de velocidade e de densidade, com a “wavelet”. Com efeito,

$$T(t) = w(t) * R(t) + n(t)$$

No estudo efectuado consideramos que a componente devido ao ruído é nula, o que obviamente reduz a precisão dos resultados obtidos. Esta limitação não inviabiliza, contudo, a utilidade dos resultados (ver capítulo 6 onde serão analisadas algumas questões relacionadas com a precisão e qualidade dos resultados obtidos). Como não foi ainda extraída nenhuma “wavelet”, gerou-se uma “wavelet standard”, representada da figura 4.10, de fase nula e centrada na origem. Ao longo deste trabalho iremos utilizar a convenção para a polaridade do sinal em que os “picos” representam um aumento da impedância acústica, em dados de fase nula.

Obtiveram-se os primeiros resultados, representados na figura 4.8, que permitem efectuar uma primeira avaliação do nível de correlação existente entre as diagrfias e os dados sísmicos.

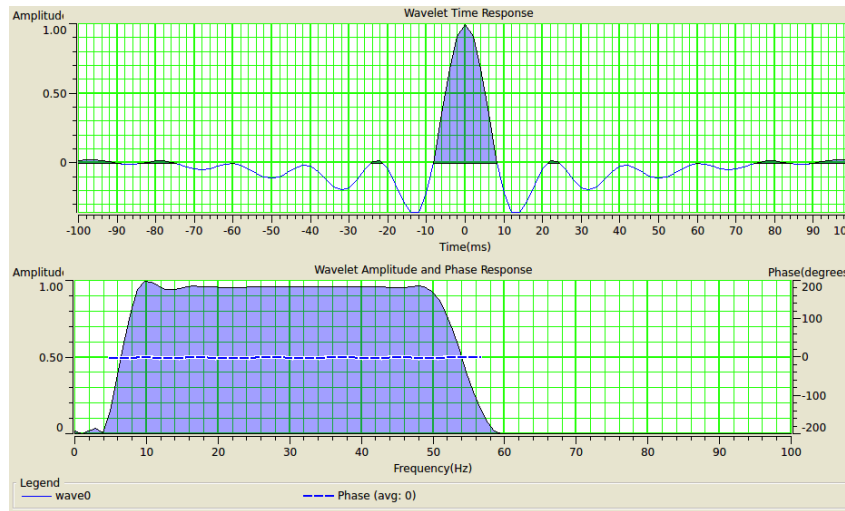


Figura 4.7: “Wavelet standard” utilizada para gerar os primeiros traços sintéticos.

Nesta, são representadas as diagragias, os traços compósitos (a vermelho) e o sintético gerado a partir da “wavelet” referida no parágrafo anterior (a azul). Constacta-se que existe um desfasamento considerável entre os eventos do sintético e os compósitos.

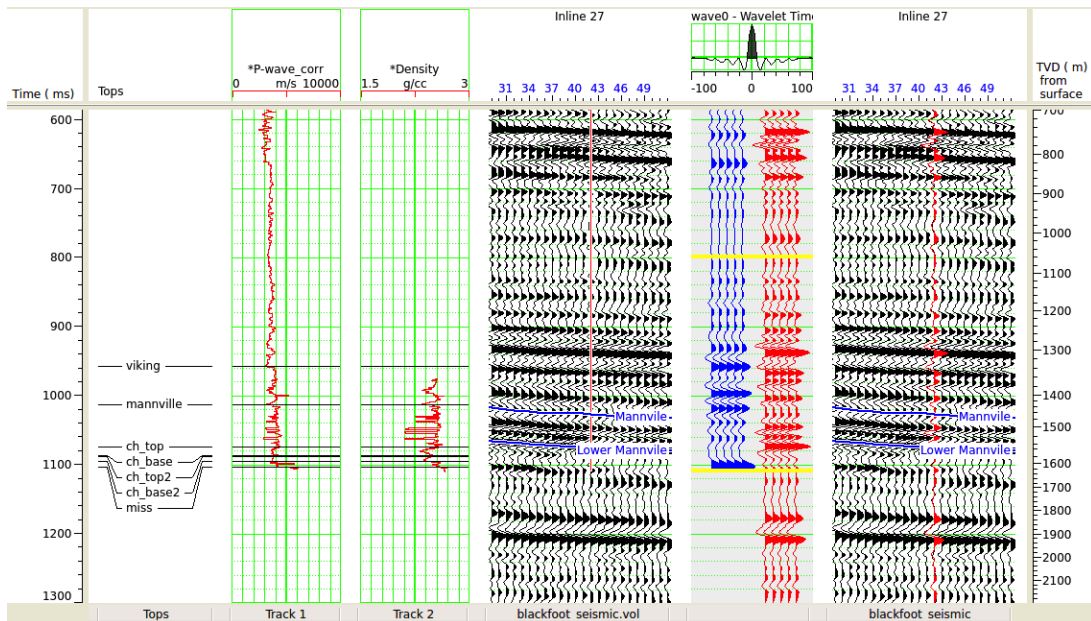


Figura 4.8: Representação dos primeiros sintéticos e traços compósitos gerados para o processo de correlação.

Uma medida da similaridade entre as diagragias e os dados sísmicos é a correlação. É portanto possível determinar um intervalo de tempo onde os dois tipos de dados (sinais) são mais semelhantes. Na figura 4.9 é representado um exemplo elucidativo, onde dois sinais com a mesma forma mas deslocados um do outro são correlacionados (este exemplo foi extraído de

[Yilmaz, 2001]).

	2	1	-1	0	0	Output	Lag
0 0 2 1 -1						-2	-4
0 0 2 1 -1						1	-3
0 0 2 1 -1						6	-2
0 0 2 1 -1						1	-1
0 0 2 1 -1						-2	0
0 0 2 1 -1						0	1
0 0 2 1 -1						0	2
0 0 2 1 -1						0	3
0 0 2 1 -1						0	4

Figura 4.9: Correlação entre dois sinais discretos [Yilmaz, 2001]

Neste exemplo, o primeiro sinal, $(2, 1, -1, 0, 0)$, é convolvido com o segundo sinal, $(0, 0, 2, 1, -1)$ sem que este seja revertido, obtendo-se uma correlação máxima de 6 para o atraso -2 , sugerindo um ajuste de duas amostras.

Um procedimento semelhante, ao descrito no parágrafo anterior, é seguido para obter o gráfico da correlação entre as diagragias e os dados sísmicos, representado na figura 4.11.

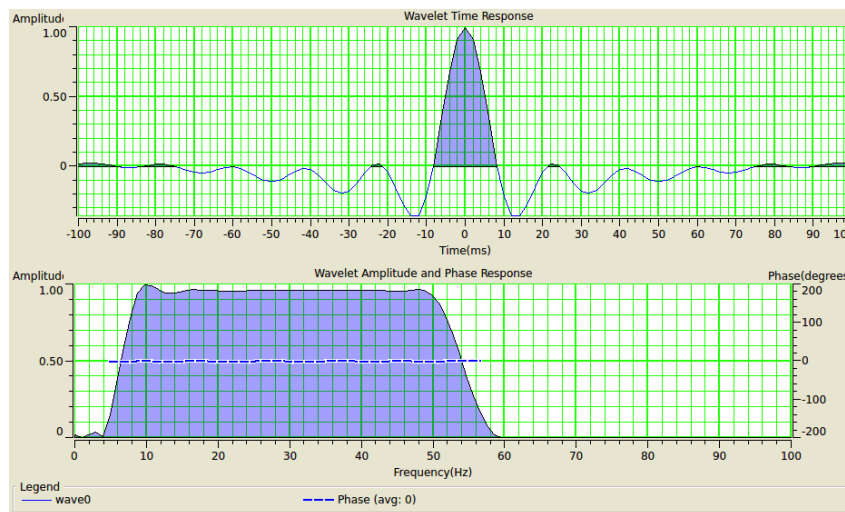


Figura 4.10: “Wavelet” extraída dos dados sísmicos.

O objectivo desta análise, é de minimizar o coeficiente para atrasos nulos, modificando a curva de conversão profundidade–tempo e, em simultâneo extrair simultaneamente a “wavelet”. Verifica-se que se obteve uma correlação máxima para um atraso de 7 ms , o que sugere um ajuste de mesma ordem no sentido descendente, e um ajuste entre os dados de 43%. O baixo valor obtido para o ajuste devesse essencialmente ao tipo de “wavelet” que foi utilizada, que não reflecte as propriedades do meio. Por essa razão, resolveu-se não aplicar o ajuste sugerido e procedeu-se a extração de uma nova “wavelet” que caracterize mais correctamente a

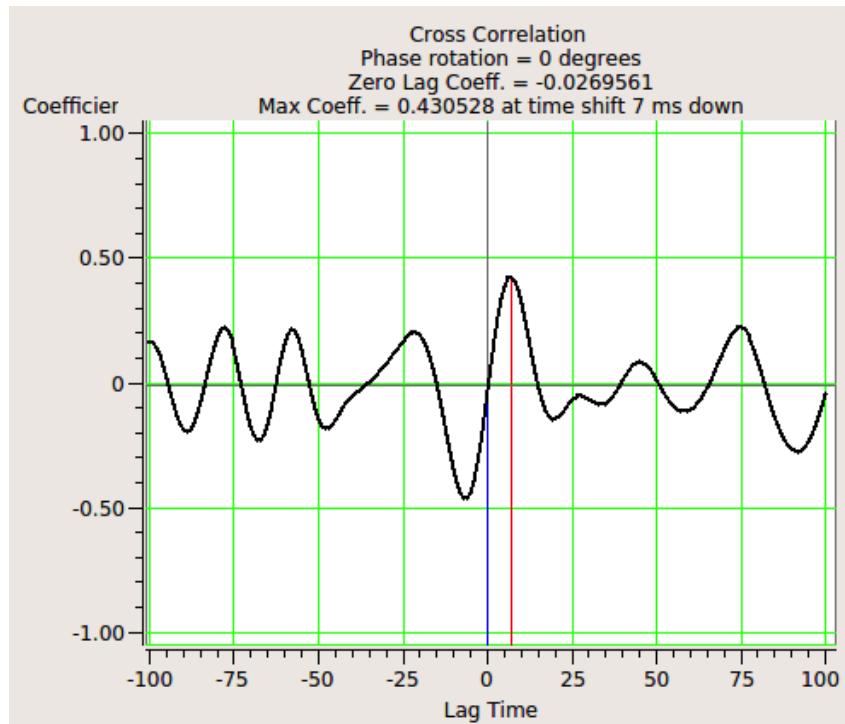


Figura 4.11: Correlação entre os sintéticos e os dados sísmicos

resposta do meio.

Convém ainda acrescentar que, a função que conversão profundidade – tempo, descrita acima, não é geralmente suficiente para que o modelo de impedâncias gerado, a partir das diagrfias, se ajuste adequadamente aos dados sísmicos. Esta falta de ajuste poderá ser devida a diversos factores. Logo a partida, a equação utilizada para a conversão, equação 4.1, poderá não traduzir correctamente a trajectória das ondas, mesmo tratando-se de dados de poço visto que, estas para além de dependerem das propriedades do meio dependem igualmente da geometria de aquisição utilizada. No entanto, diversos resultados práticos e a optimização da geometria de aquisição permitem utilizar a referida expressão sem grande perda de precisão, o que evidencia que esta poderá não ser uma questão preponderante para a debilidade a função de conversão. A possibilidade de os níveis de referência (“datum”) serem distintos e o facto de a velocidade média das camadas mais superficiais serem desconhecidas influenciam consideravelmente os erros introduzidos na conversão desejada. Por outro lado, os possíveis erros na medição das diagrfias afectam consideravelmente a determinação dos tempos de percurso. Outra questão não menos importante, e que constituí um dos tópicos mais importantes do processamento de dados sísmicos, é a possibilidade de a migração dos dados resultarem num posicionamento erróneo dos eventos sísmicos.

Nas estimativas da “wavelet”, efectuadas a seguir, assume-se que esta é constante no tempo

e no espaço. A invariância temporal implica que a inversão a ser realizada seja otimizada para uma determinada janela temporal, que como veremos será escolhida de forma a que contenha a área de interesse. Ao se assumir que é invariante no espaço, presume-se que os dados sísmicos tenham sido correctamente, ou mesmo perfeitamente, processados de forma a que as variações da “wavelet” no espaço tenham sido devidamente removidas.

Existem duas formas distintas geralmente utilizadas para estimar a “wavelet”:

(i) Recorrendo aos dados sísmicos. Neste efectuam-se apenas as autocorrelações dos dados sísmicos assumindo-se que a fase é conhecida. Os principais parâmetros desta extração são o comprimento do traço (normalmente longo para melhorar as determinações estatísticas), a janela temporal (que deve ser no mínimo duas vezes superior ao comprimento de onda da “wavelet”) e o comprimento da “wavelet”. Esta “wavelet” é normalmente designada por “wavelet” estatística. Para maior detalhe sobre este método e como ele foi implementado sugerimos a leitura do artigo “Theory of the strata program” disponibilizado gratuitamente pela Compagnie Générale de Géophysique.

(ii) Recorrendo as diagrfias e aos dados sísmicos. Neste método considera-se o modelo convolutivo. É portanto realizada uma inversão no domínio da frequência semelhante a descrita na secção 2.3.

O método (ii) requer que os dados sísmicos e as diagrfias sejam correctamente correlacionadas, pelo que é primeiramente extraída uma “wavelet” recorrendo ao método estatístico e posteriormente aplicado o método (ii), que fornece um resultado mais preciso.

Na figura 4.12 é representada a “wavelet” estatística determinada. Para obtê-la, considerou-se apenas uma linha sísmica (crossline 42) e definiu-se uma janela temporal de 800 – 1200 ms e o um comprimento de 200 ms para a “wavelet” de fase constante.

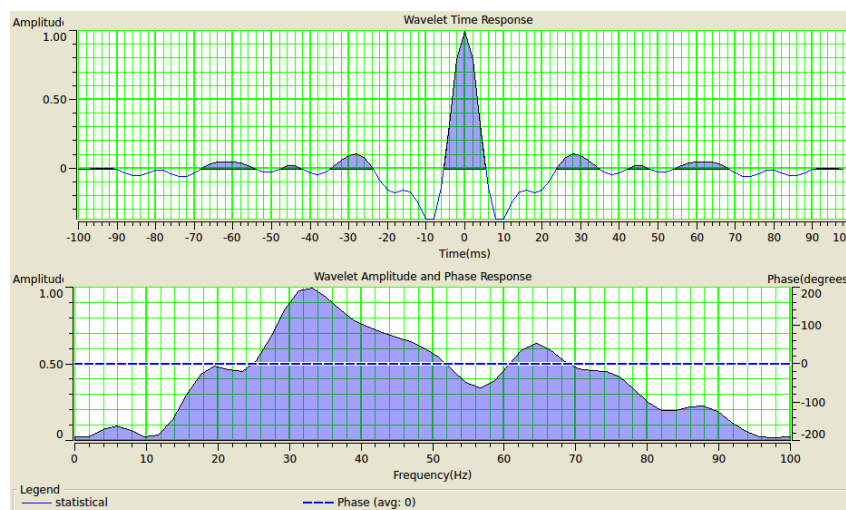


Figura 4.12: “Wavelet” estatística extraída dos dados sísmicos.

Obtida a “wavelet”, é efectuada uma análise análoga, a descrita no início desta secção, a situação em que se considerou uma “wavelet” padrão. Obtiveram-se os resultados representados na figura 4.13, onde é possível constatar que existe um afastamento notório entre eventos correspondentes.

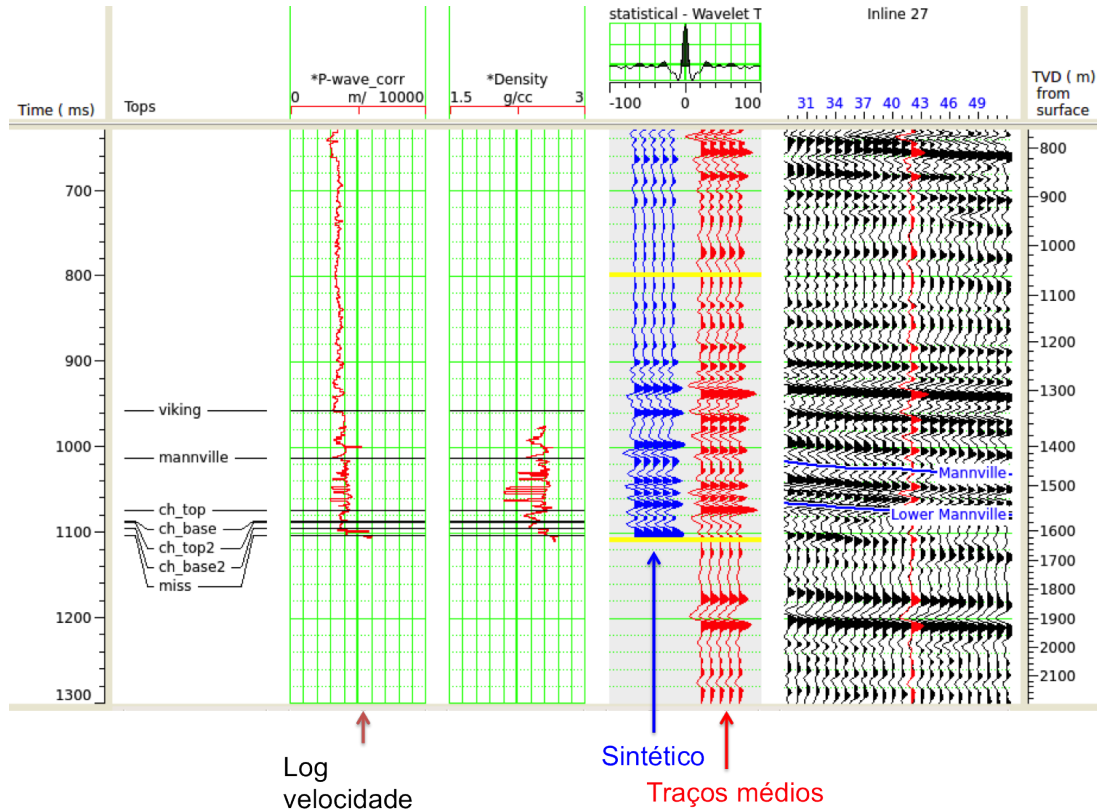


Figura 4.13: Representação dos sintéticos e traços compostos gerados para o processo de correlação.

O gráfico da correlação, representado na figura 4.14, sugere que seja aplicado um ajuste de $6ms$ e que existe um ajuste considerável entre os dados, 72% . Comparando este resultado com o obtido a partir da “wavelet” padrão, confirma-se que a informação contida no sintético obtido, considerando a “wavelet” estatística, aproxima-se consideravelmente a disponibilizada pelos dados sísmicos reais.

Aplicando o ajuste sugerido, os eventos são consideravelmente alinhados. Contudo, estes apresentam um desfasamento residual que pode ser corrigido manualmente, “picando” os horizontes referentes aos mesmos eventos, em ambos sismogramas, conforme a representação efectuada na figura 4.15. Obtém-se, finalmente, o ajuste representado na figura 4.16.

O gráfico da correlação, figura 4.17, confirma que o ajuste foi correctamente aplicado, mas a assimetria presente poderá indicar que existe um erro residual na fase dos traços sintéticos. Estando as diagrfias devidamente correlacionadas, é possível reduzir este erro determinando

uma nova “wavelet” a partir destas. Na estimação da nova “wavelet” recorre-se aos dados sísmicos, para determinar o espectro de amplitude, de forma análoga a extração da estatística descrita acima, e diagrfias para determinar a fase, considerada constante. Com efeito, na obtenção da fase determinou-se um filtro $w(t)$ que resolva a equação $T(t) = w(t) * R(t)$ pelo método dos quadrados mínimos, de forma completamente análoga ao problema descrito na secção 2.2.2. Obtém-se assim a “wavelet”, representada na figura 4.18, onde é determinado o espectro de amplitude e espectro de fase, que apresenta um valor médio de rotação de -39° .

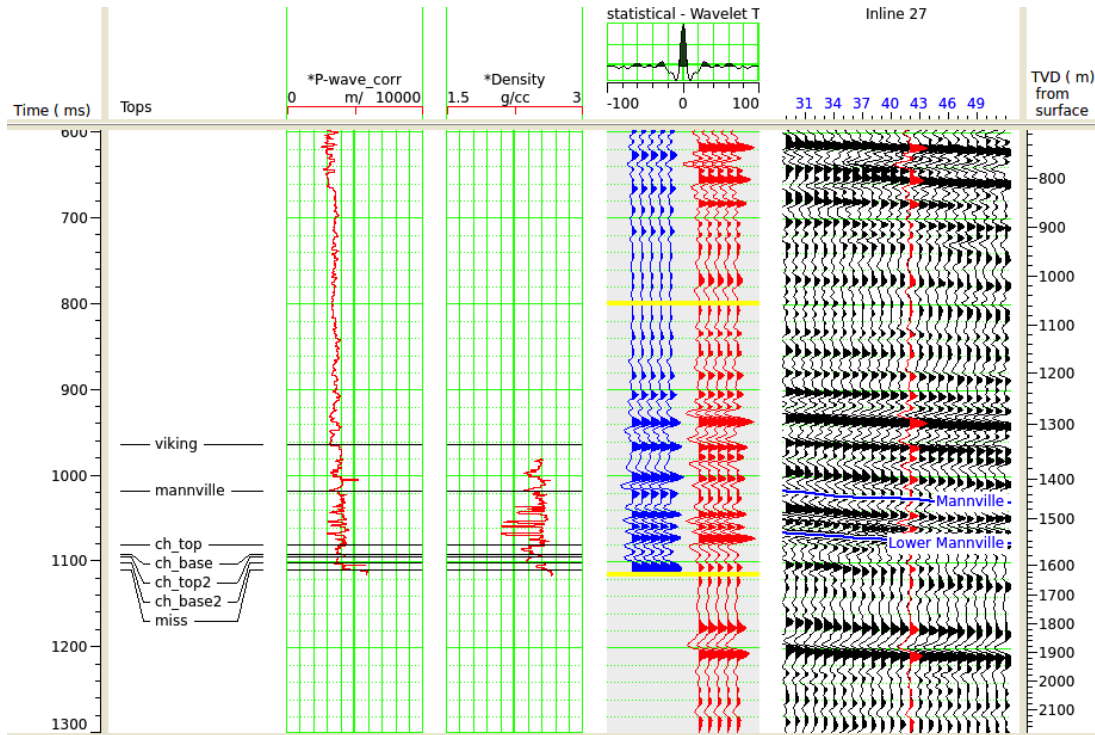


Figura 4.16: Representação dos sintéticos e traços compósitos depois de aplicados os ajustes finais

O gráfico da correlação entre o sismograma sintético, obtido considerando a nova “wavelet”, e os traços compósitos, figura 4.19, apresenta uma simetria considerável, indicando que a fase foi satisfatoriamente corrigida, e a correlação máxima existente é de 75%. Existe, portanto, uma melhoria em relação a extração anterior. De forma análoga, ao caso anterior, é sugerido um ajuste de -2 ms para as diagrfias.

4.2 Modelo inicial e informação à priori

Quando se invertem os dados sísmicos, para obter as impedâncias acústicas, é necessário incluir uma gama frequências considerável. Como o conteúdo em baixas frequências dos dados sísmicos é limitado, é necessário recorrer as diagrfias para tentar-se “recuperar” as

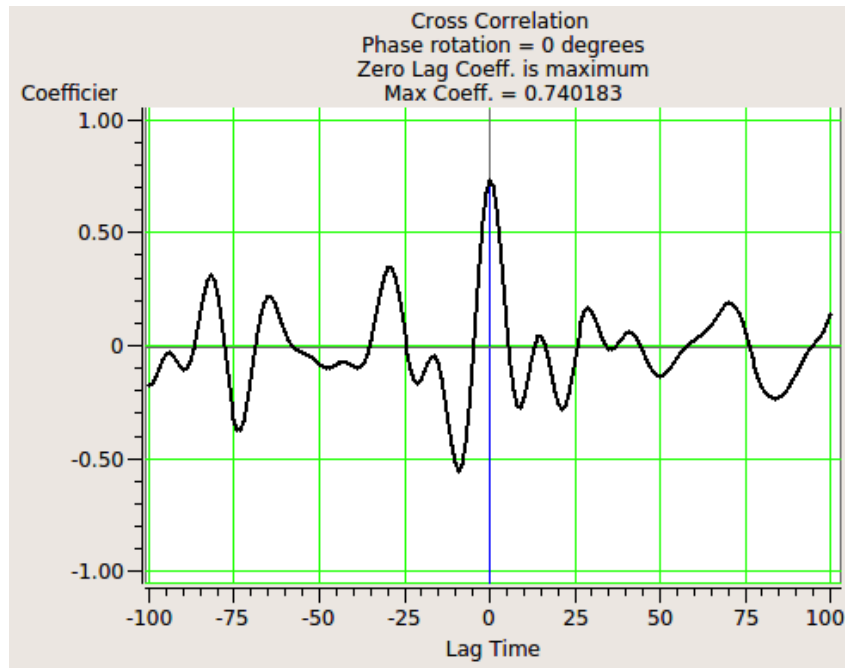


Figura 4.17: Correlação entre os traços sintéticos e os traços médios com ajustes

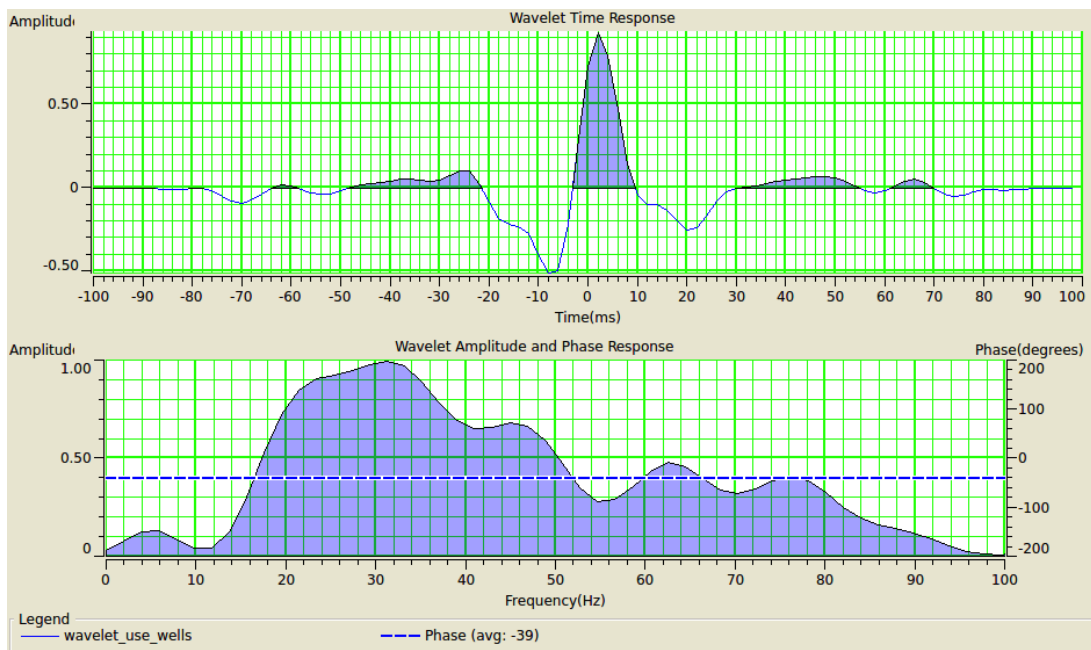


Figura 4.18: “Wavelet” obtida considerando as diagrfias

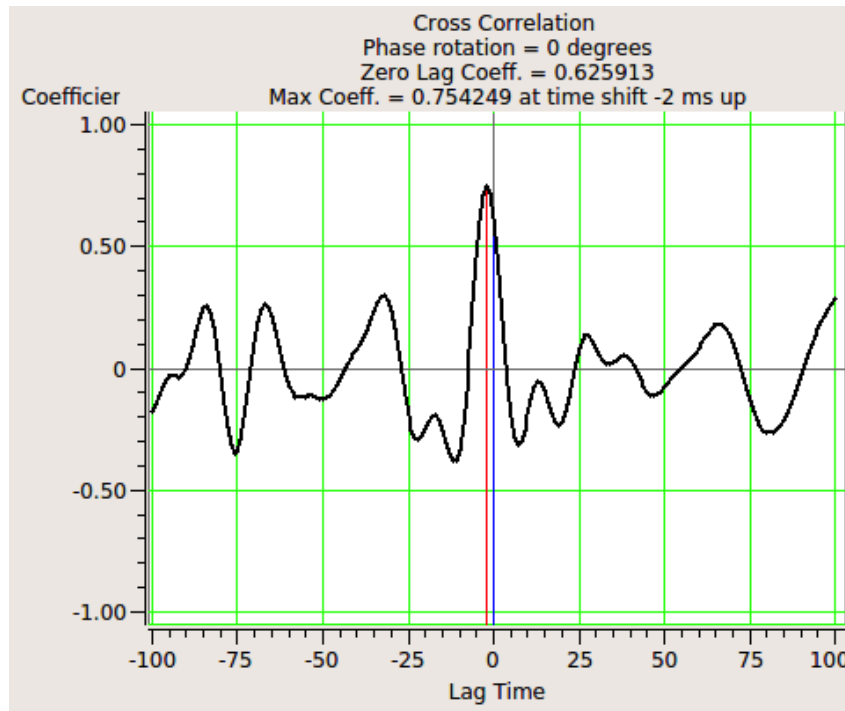


Figura 4.19: Correlação entre os traços sintéticos e os traços médios com “wavelet” obtida considerando as diagrafas

baixas frequências em falta. Assim, recorrendo a determinados poços, L_i , é possível efectuar uma interpolação em que os pesos atribuídos variam com o inverso da distância ao poço, d_i . Com efeito,

$$L_{int} = \sum_i W_i L_i \quad (4.2)$$

Onde $W_i = \frac{d_i^{-2}}{\sum_j d_j^{-2}}$ representa o peso a ser atribuído. Considerando horizontes distintos, estendem-se ou coprimem-se impedâncias entre eles, recorrendo a relação anterior. Aplicado um filtro passa baixas, são interpolados os poços e obtido um modelo de impedâncias para o cubo sísmico a ser invertido. Na figura 4.20 é representado o modelo suave obtido, onde a distribuição de impedâncias é dada por um mapa de cores, conforme legenda de cores anexada.

4.3 Inversão dos dados sísmicos

No capítulo 2, foi abordada a teoria dos problemas inversos, com particular destaque aos casos lineares, ou linearizáveis, e na secção 2.3 foi abordado o caso particular de dados sísmicos. Nesta secção, iremos inverter os dados sísmicos para determinar um perfil de impedâncias.

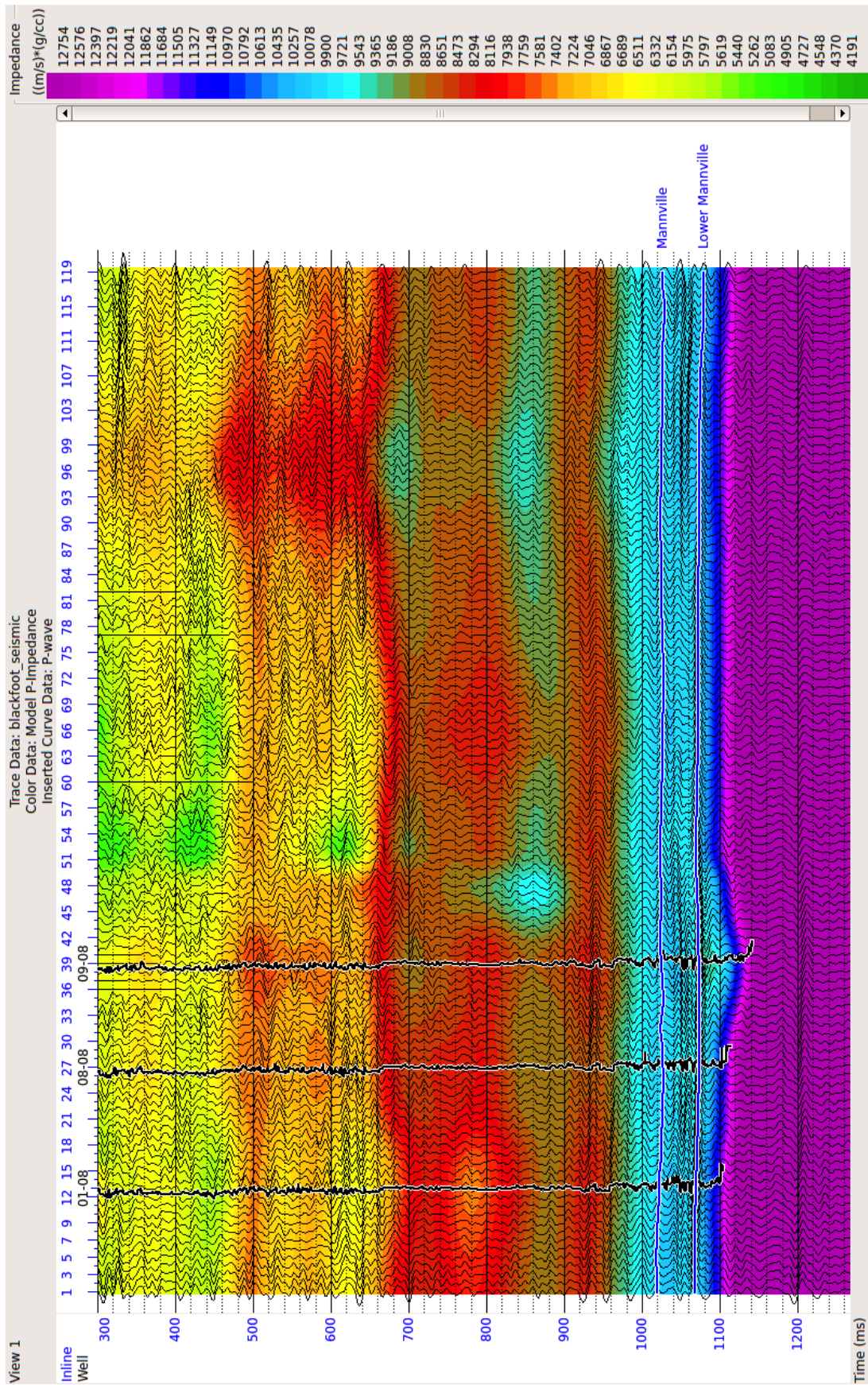


Figura 4.20: Modelo de impedâncias inicial

Antes de se inverter o cubo sísmico, são efectuados testes, nas regiões que contêm poços, para otimizar os parâmetros de inversão e realizar um controlo de qualidade preliminar. Na figura 4.21, são representados os resultados para o poço 01-8, onde à azul, sobreposto a diagrafia acústica original, representa-se o traço invertido e, a direita destes, o sintético determinado a partir das impedâncias invertidas (a vermelho) e os traços compósitos (a preto). O último gráfico corresponde a diferença entre os dois sismogramas citados, i.e., ao erro na determinação. A análise deste permite concluir que a inversão é bastante satisfatória, ou seja, que a “wavelet” utilizada traduz correctamente os dados e que as restrições (diagrfias, limites para os parâmetros estimados e modelo inicial) utilizadas melhoram significativamente o resultado do problema inverso. O gráfico para o perfil de erro, figura 4.22, permite confirmar estes resultados. No capítulo 2, é efectuado um estudo detalhado do problema inverso e de como este pode ser aplicado aos dados sísmicos.

Analizados e otimizados os parâmetros de inversão, nos locais onde existem diagrfias, foi aplicado o algoritmo de inversão para estimar as impedâncias acústicas.

Na figura 4.23, é representado o resultado obtido para a “crossline” 42, e na figura 4.24 é destacada a região de interesse. Verifica-se que o reservatório é devidamente destacado, o que permitirá estimar diversos parâmetros petrofísicos e caracterizar o reservatório, tanto em relação a sua geometria ou, comparando com estudos anteriores, avaliar a sua evolução. A partir dos valores das impedâncias acústicas obtidas, e a uma modelo de velocidades estimado é possível efectuar diversas inferencias acerca das propriedades físicas que caracterizam o meio, e em particular a região onde se localiza o reservatório, como foi possível verificar no estudo teórico efectuado. A avaliação das propriedades físicas que podem ser obtidas, não constitui o objecto de estudo do presente trabalho, a pesar de no capítulo seguinte, onde é efectuada uma análise AVO e invertidos dados sísmicos antes do “stack”, serem obtidos alguns parâmetros petrofísicos, recorrendo, por exemplo, ao problema da substituição de fluidos.

Efectuando um corte em torno da base do reservatório, é possível avaliar a geometria do reservatório e verificar a variação das propriedades físicas em torno deste. Na figura 4.24 é representado o corte referido, para uma janela de 20 ms. É possível avaliar a extensão do reservatório considerando a região verde, na parte central do mapa.

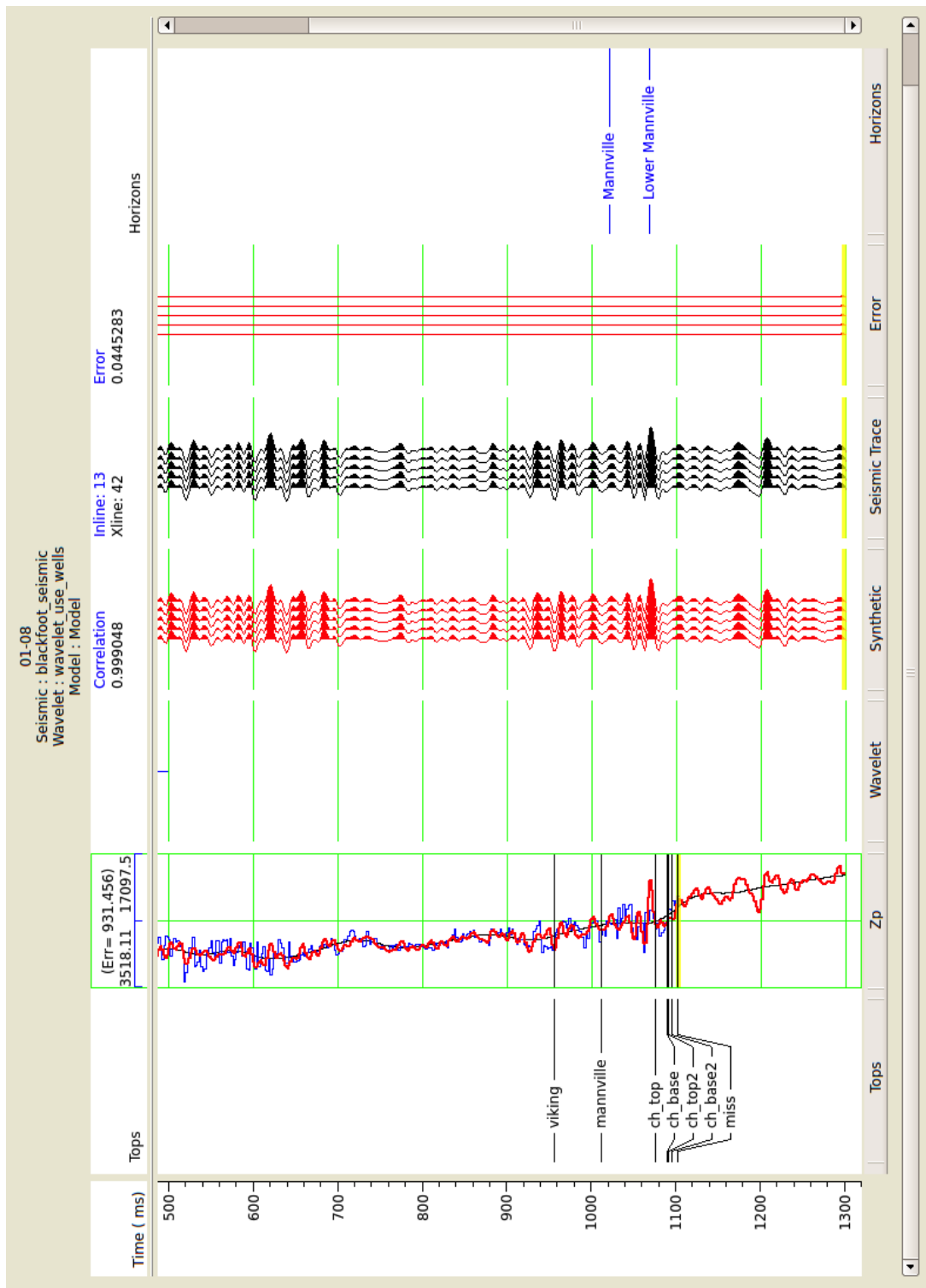
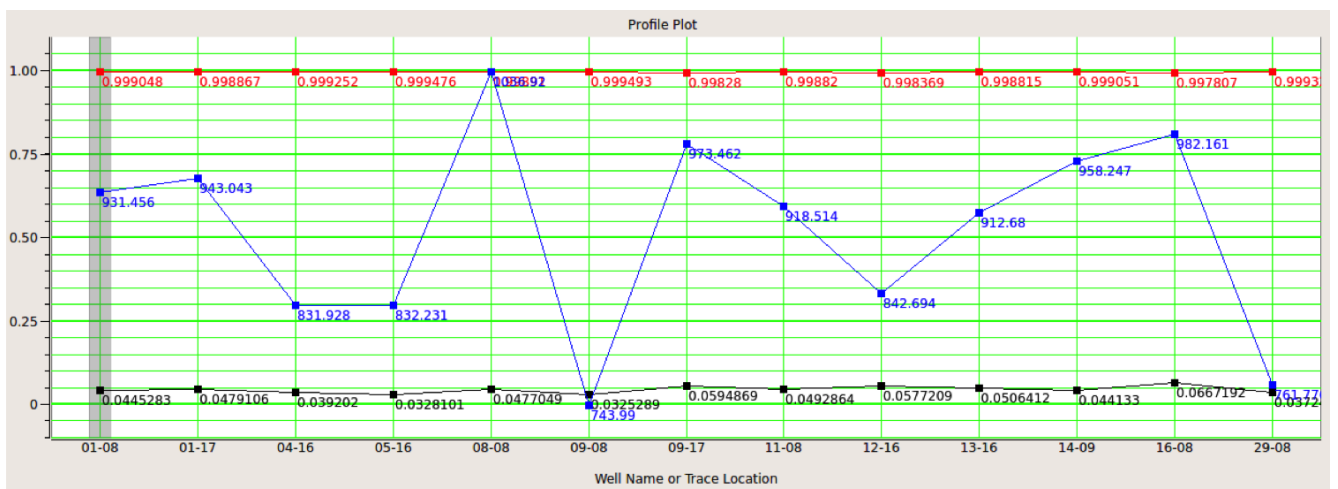


Figura 4.21: Teste de inversão no poço 1-08



Legenda: Inverted Synthetic Correlation = 0.998874
 Inverted Relative Error = 0.0481323
 Error between Original Log and Inverted Result
 ■ Synthetic Correlation
 ■ Synthetic Error
 ■ P-Impedance (Total= 903.43 min= 743.99 max= 1036.92)

Figura 4.22: Perfil dos erros da inversão

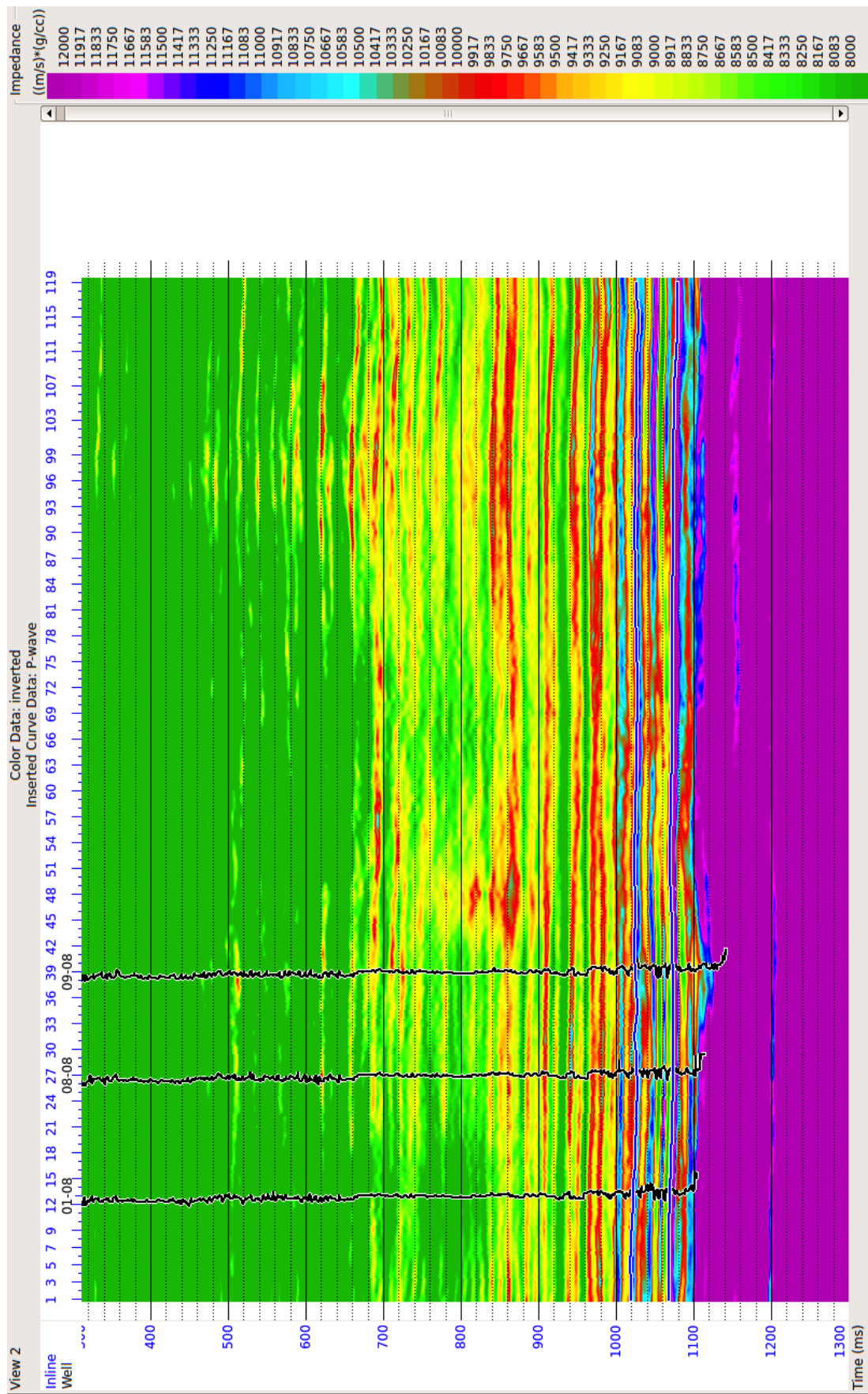


Figura 4.23: Modelo de impedâncias obtido por inversão

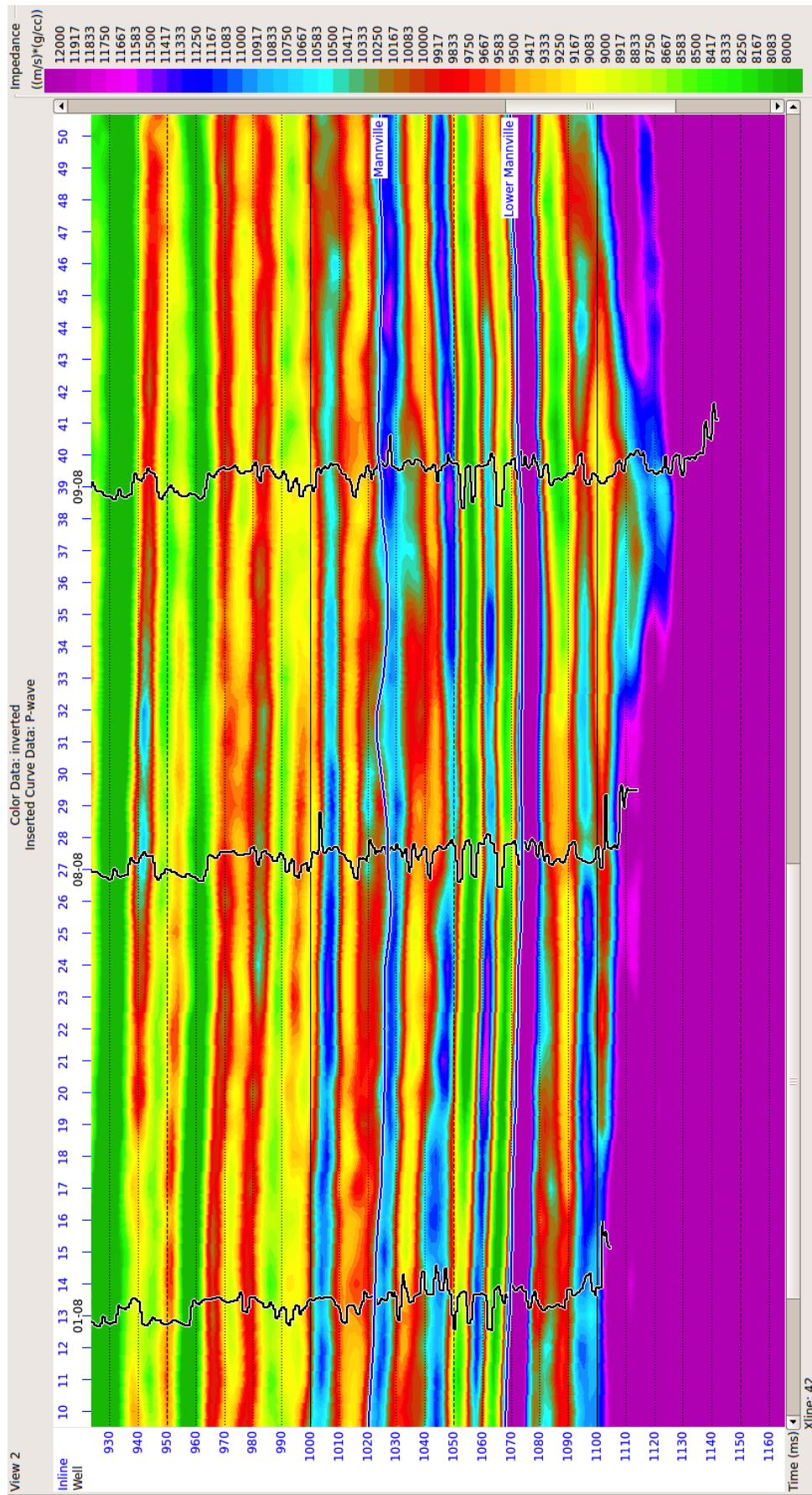


Figura 4.24: Modelo de impedâncias obtido por inversão: Região de interesse

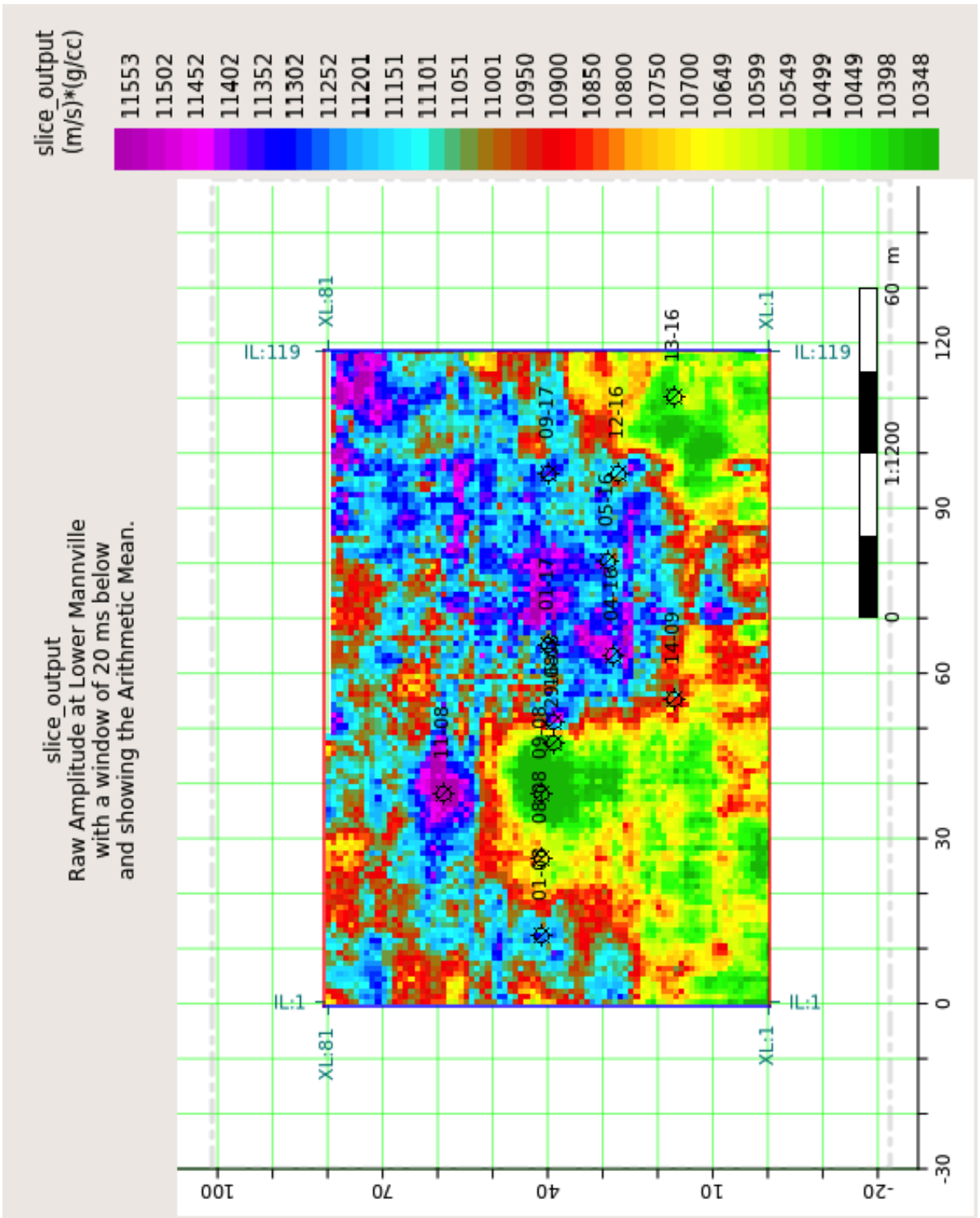


Figura 4.25: Corte horizontal em torno da base do evento alvo

Capítulo 5

Inversão e AVO de dados sísmicos “pré-stack”

Neste capítulo, será descrito o trabalho realizado em dados sísmicos “pré-stack”. Serão analisados dados sísmicos 2D, efectuando uma análise AVO e uma inversão para obter um perfil de impedâncias acústicas. Os detalhes acerca dos métodos aplicados foram discutidos, com algum detalhe, nos capítulos 4 e 3.

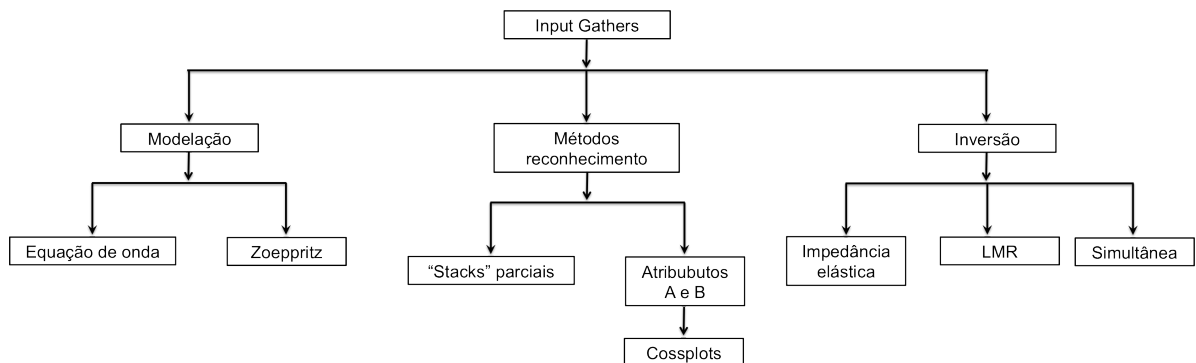


Figura 5.1: Ilustração das metodologias AVO

Na figura 5.1 são representados os métodos geralmente utilizados no estudo de dados sísmicos antes do “stack”. Foram analisados e implementados alguns destes métodos. Com efeito, foi efectuada uma modelação recorrendo as equações de Zoeppritz (ou as equações linearizadas) e determinados os atributos AVO, e respectivos “crossplots”. Foram igualmente efectuadas inversões (individuais, simultâneas e elásticas) para estimar as impedâncias.

Foram utilizados dados sísmicos 2D, referentes a formação cretácica de arenitos “Colony” na parte oriental do Canada. Por estudos anteriores, estimou-se que a formação contém 50% de água e 50% de gás. Na figura 5.2 são representados alguns “gathers”, e na figura 5.3 as

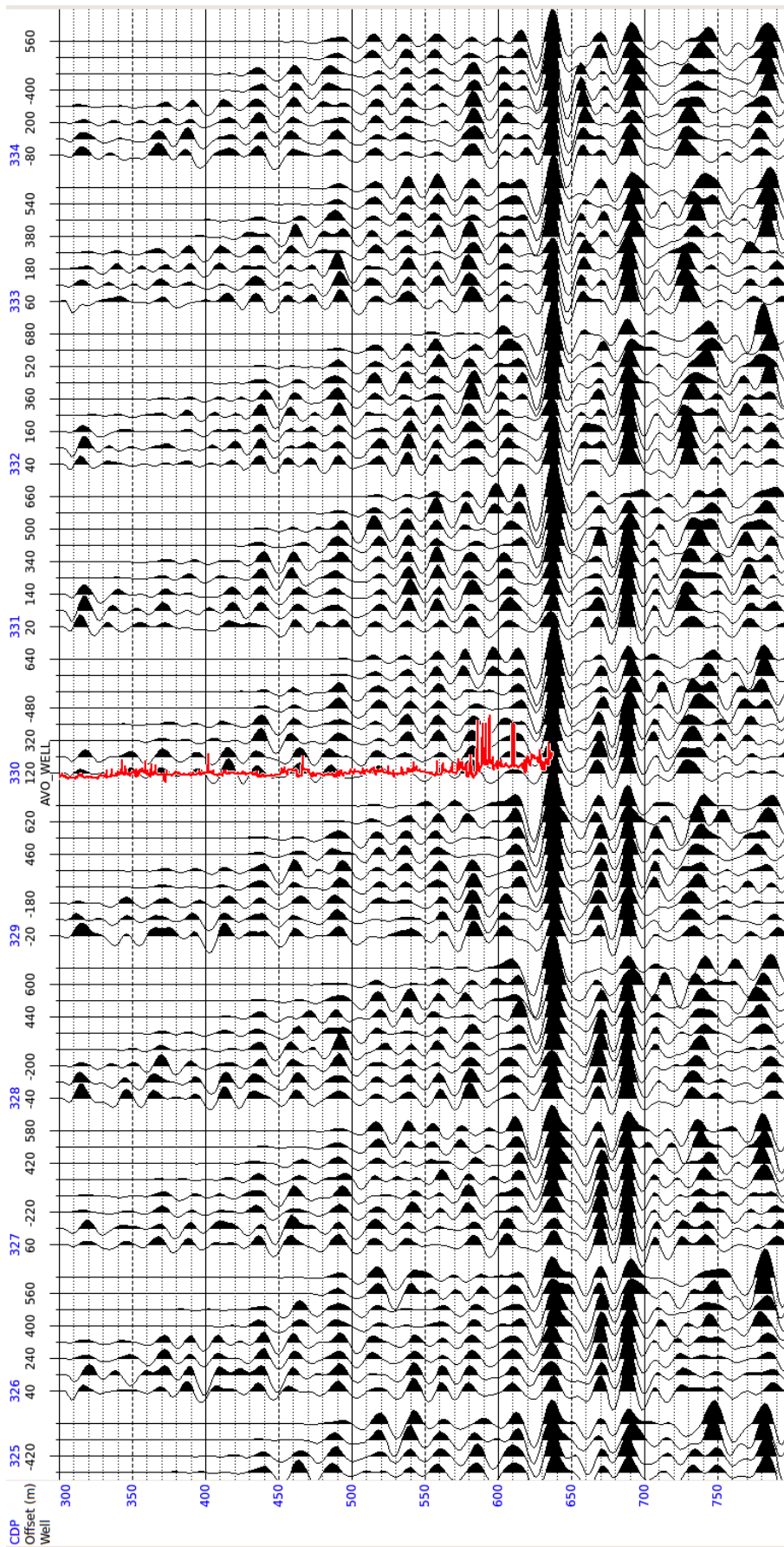


Figura 5.2: CDP "Gathers"

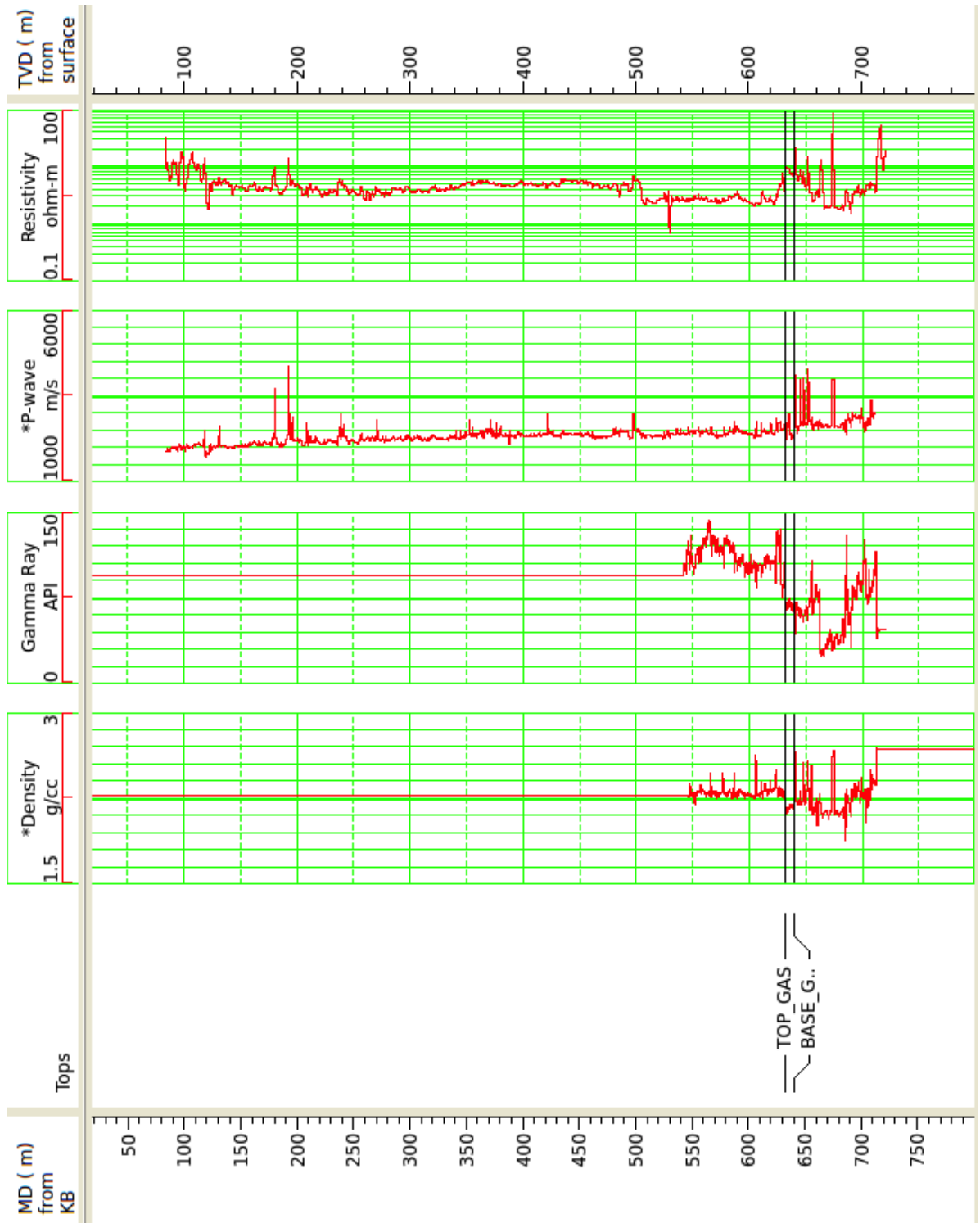


Figura 5.3: Dados registrados no poço utilizado

diagrafias registadas no poço disponível. Nestas são indicados os limites do reservatório de gás que se pretende caracterizar.

5.1 Modelação AVO

Para se efectuar a modelação AVO são necessárias diagrafias para a velocidade das ondas P e S, e uma diagrafia do perfil de densidades. Como, neste caso, não existem diagrafias para a velocidade das ondas S, é necessário estima-las considerando uma determinada relação matemática entre os parâmetros disponibilizados pelas diagrafias disponíveis e as velocidades que se pretende estimar. A velocidade dentro do reservatório foi estimada iterativamente, considerando a equação 3.25, efectuando sucessivas regressões para determinar o valor dos coeficientes para cada constituinte. Fora deste, considerou-se a equação 3.24.

Para completar a definição do modelo, determina-se a porosidade considerando a equação 3.8 e assume-se que o conteúdo em fluidos no reservatório é de 50% de gás e 50% de água. Além disso, considerou-se que a matriz é constituída unicamente por quartzo (arenitos). Na figura 5.4 são representados alguns valores do processo descrito, e na figura 5.5 a pseudo-diagrafia para as velocidades das ondas S obtida.

Foram definidas, primeiramente, as condições geológicas que se pretende modelar, ou seja, são definidos diferentes cenários utilizando distintas combinações para o conteúdo em fluidos na região alvo (reservatório). Definiram-se três cenários distintos. Um definido pelas diagrafias, outro em que se considera a situação de “óleo puro” e a derradeira constituída por água saturada com sal (“pure brine”). Na figura 5.7 são representados os resultados para os diferentes cenários referidos. Repare-se que a resposta das ondas S é bastante semelhante, enquanto que a densidade do “pure oil” é bastante semelhante a densidade registada.

A seguir, foi obtido um modelo baseado nas equações de Zoeppritz, introduzidas na secção 1.3.2 e descritas na secção 3.1. Foram, portanto, determinados os coeficientes de reflexão, de forma análoga ao procedimento descrito no capítulo 4, recorrendo a “wavelet” representada na figura 5.6. Os sintéticos para os três cenários referidos encontram-se representados na figura 5.8. Verifica-se que as respostas, em termos da amplitude, no topo do reservatório diferem consoante o cenário considerado.

5.2 Análise AVO

Na secção anterior foram obtidos sintéticos recorrendo as equações de Zoeppritz e as diagrafias disponíveis. A seguir será efectuado um estudo considerando os dados sísmicos e a teoria

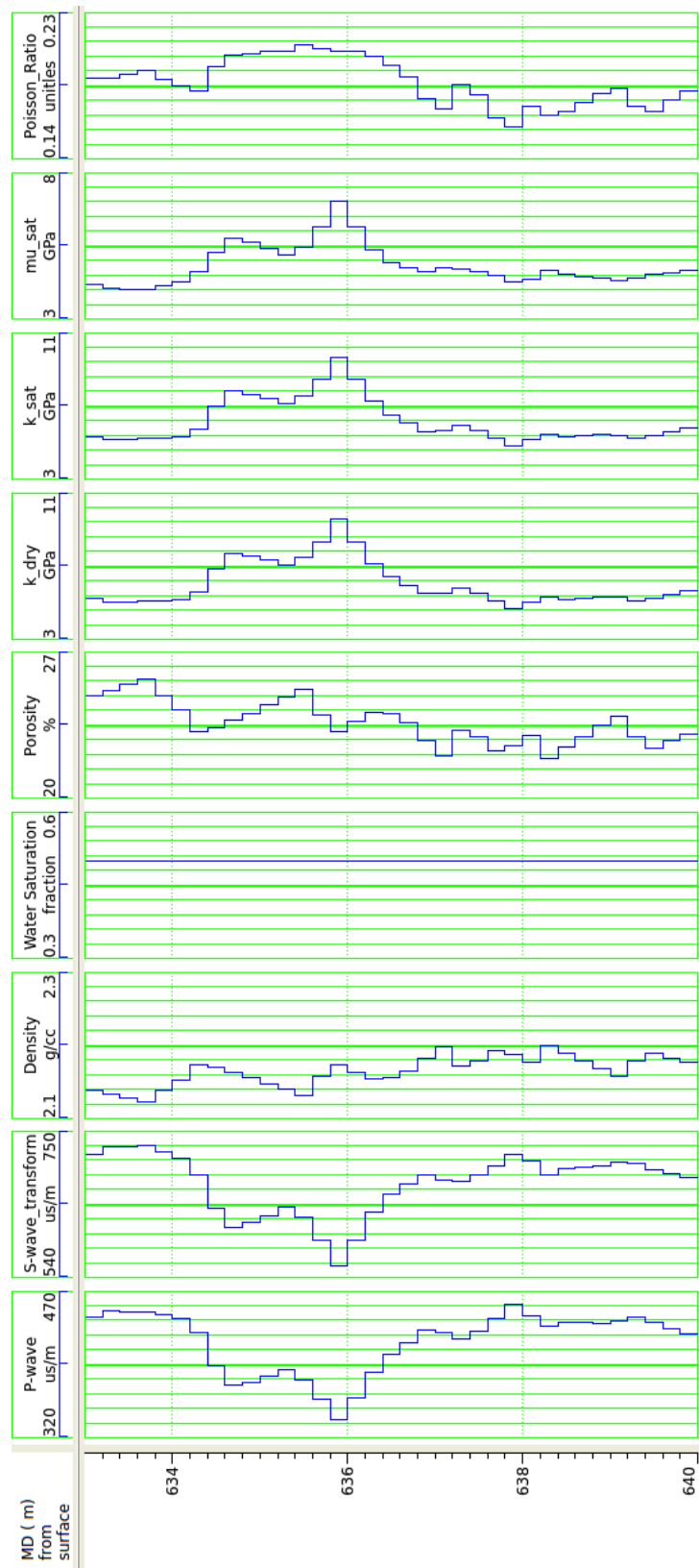


Figura 5.4: Valores calculados na estimacão da velocidade das ondas S

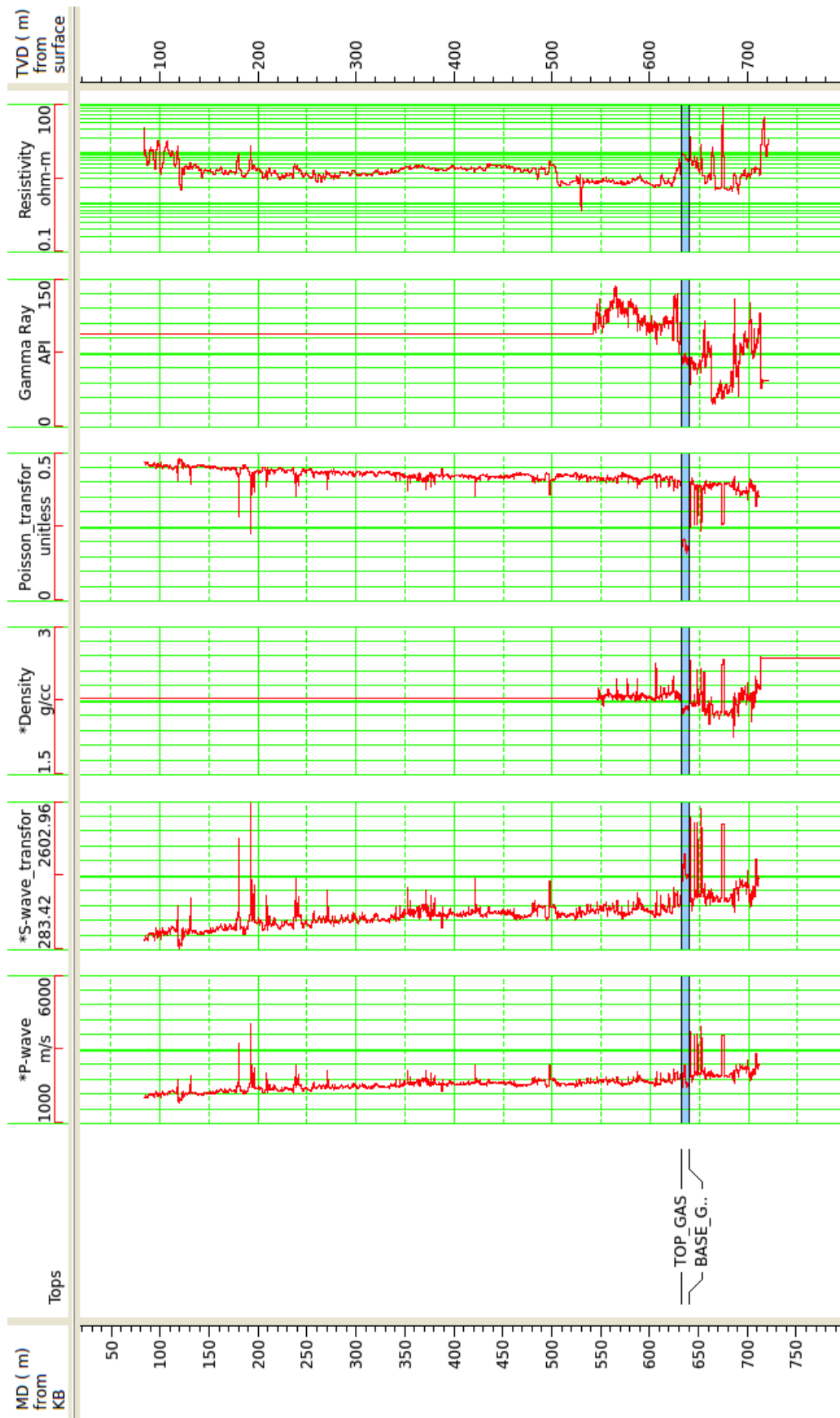


Figura 5.5: Diagramas utilizadas para construção do modelo AVO, incluindo as velocidades estimadas para as ondas S

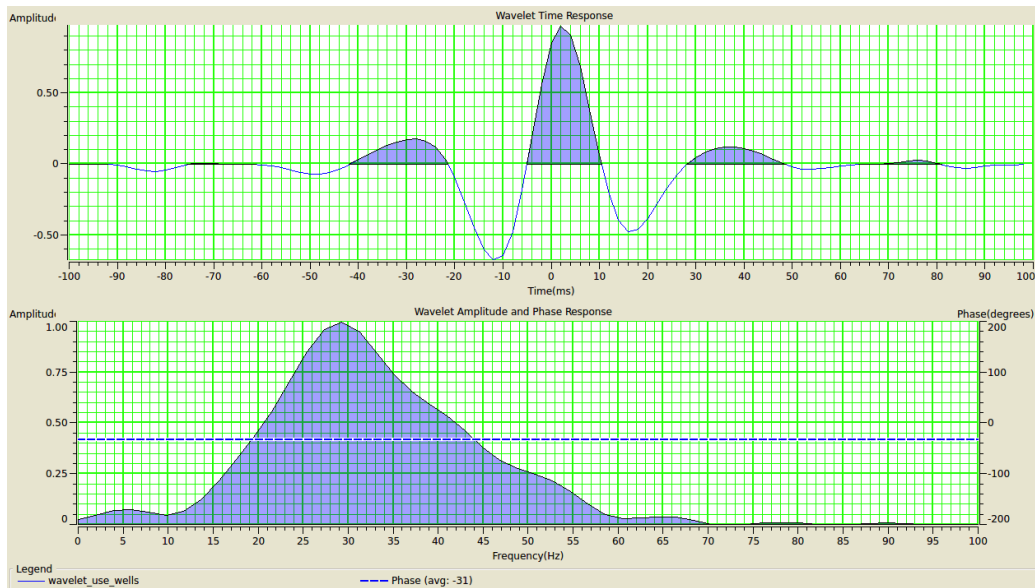


Figura 5.6: “Wavelet” utilizada para criar os sintéticos

desenvolvida na secção 3.2.

Efectuando um “CDP stack”, figura 5.9, é possível observar a existência de um “bright spot” na região de interesse. Este pode ser devido a presença de hidrocarbonetos ou a variação súbita na litologia. A análise AVO permite efectuar uma interpretação quantitativa que facilita a identificação das causas que poderão estar na origem da anomalia referida, como a obtenção de parâmetros que possibilitem estudos de caracterização da região abrangida.

Para aumentar a razão sinal–ruído é frequentemente efectuada uma média dos pontos comuns em profundidade (Common Depth Point – CDP). O resultado deste processo é geralmente designado por “Super Gather”. Na figura 5.10 são representados alguns dos “super gathers” obtidos, considerando 5 “gathers” adjacentes e 11 “offsets”, constatando-se facilmente que os eventos são mais claros e consistentes e apresentam uma pronunciada anomalia AVO, em torno da região de interesse.

A seguir efectuou-se uma análise AVO, para um CDP particular (CDP – 330), considerando a relação de Shuey à dois termos, equação 3.30. Para tal é necessário transformar primeiramente os “gathers” do domínio de “offset” (distância) para o domínio de ângulo de incidência. Na figura 5.11 são ilustrados os resultados obtidos. Nesta, são representados os valores picados, linha vermelha no “gather”, em função do “offset”, e a curva obtida considerando a equação de Shuey referida.

Na figura 5.12, são representados os pontos picados em função do quadrado do seno do ângulo de incidência. Como seria de esperar a obtém-se uma relação linear entre ambos e que pode ser confirmada pela linha recta referente a equação de Shuey.

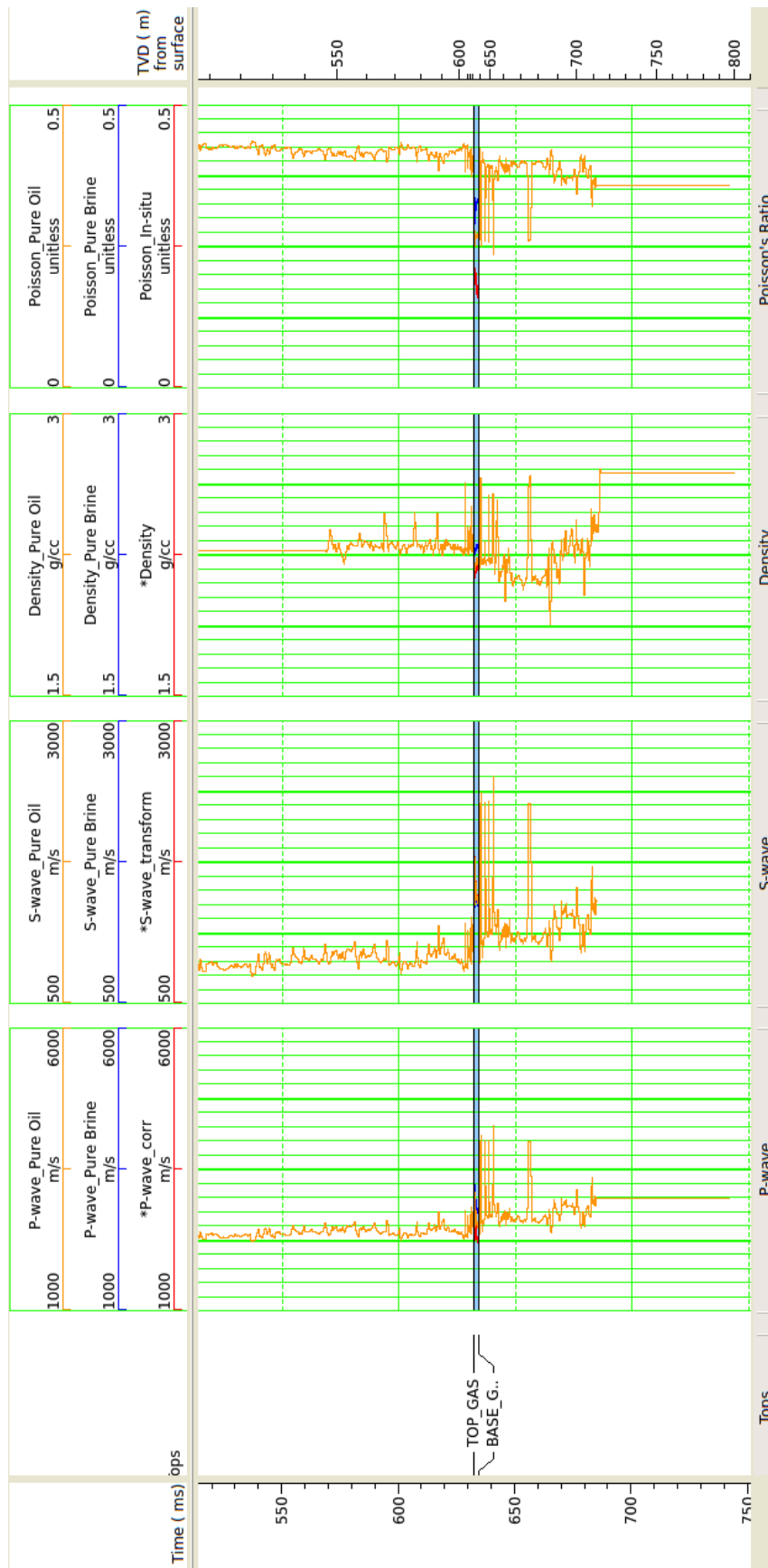


Figura 5.7: Representação dos diferentes cenários para os mesmos parâmetros registados nas diagragias

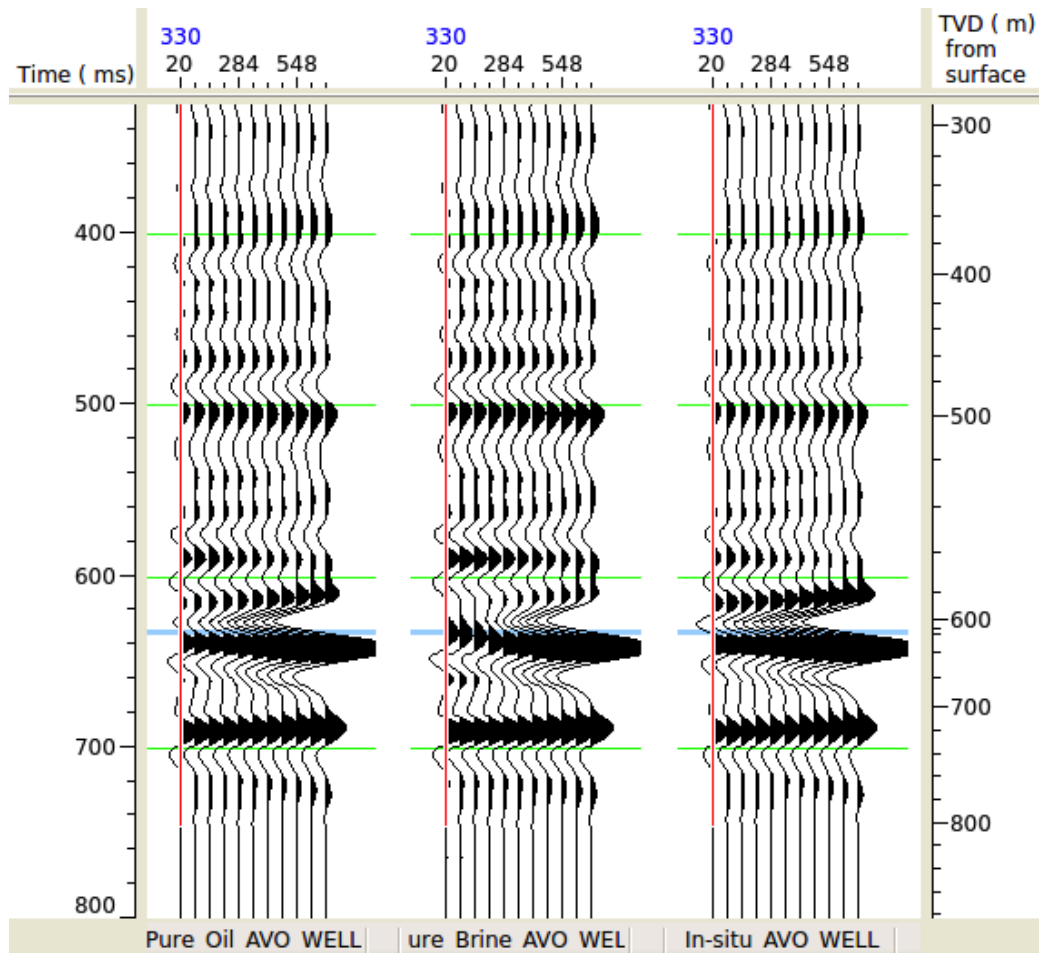


Figura 5.8: Sintéticos gerados considerando as relações de Zoeppritz

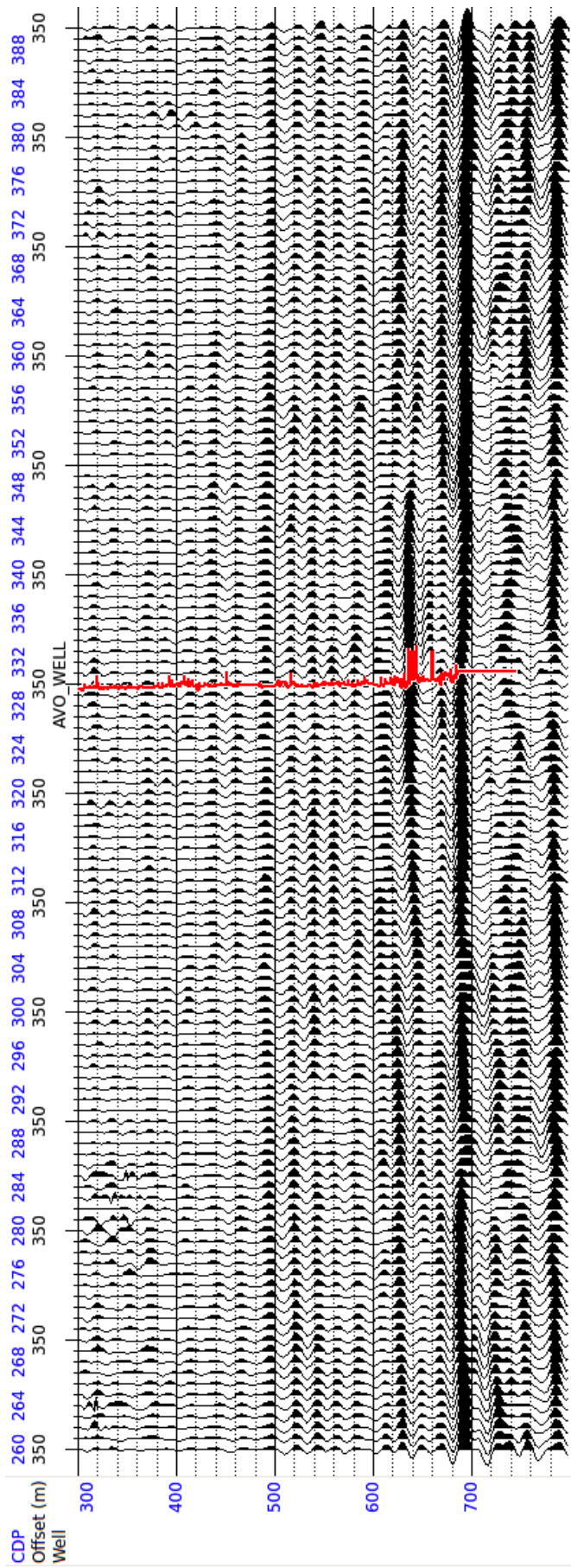


Figura 5.9: Secção sísmica dos dados analisados

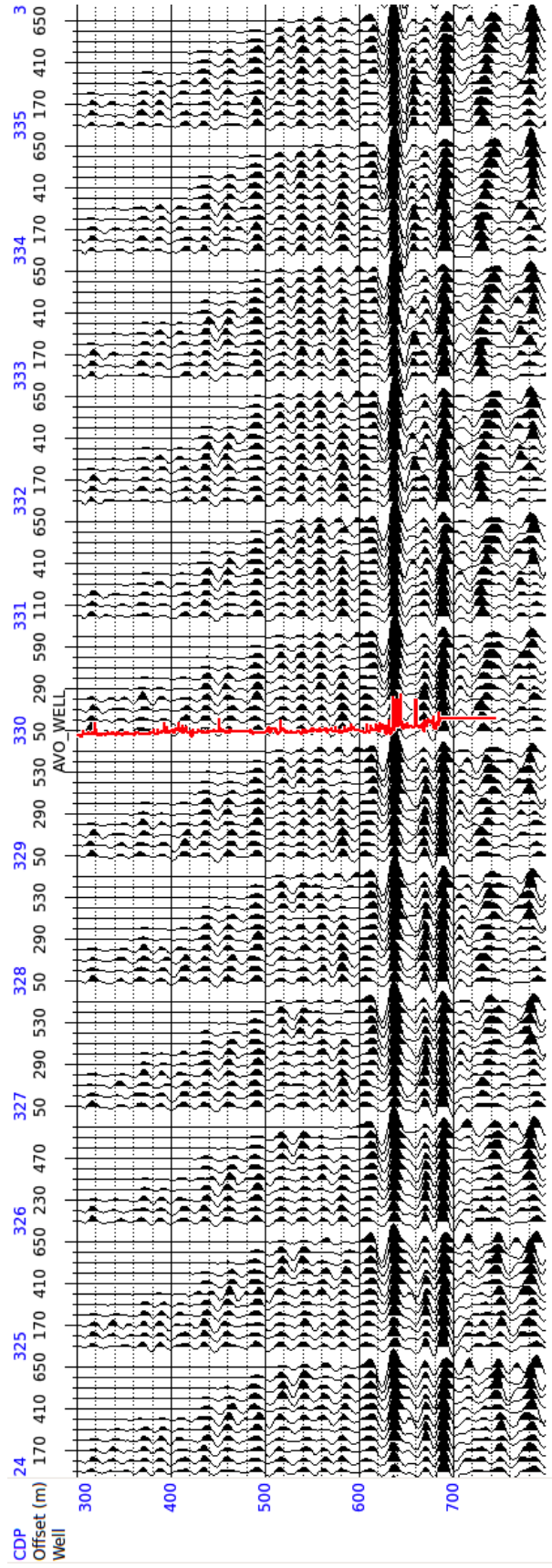


Figura 5.10: Representação dos “Super Gathers” obtidos

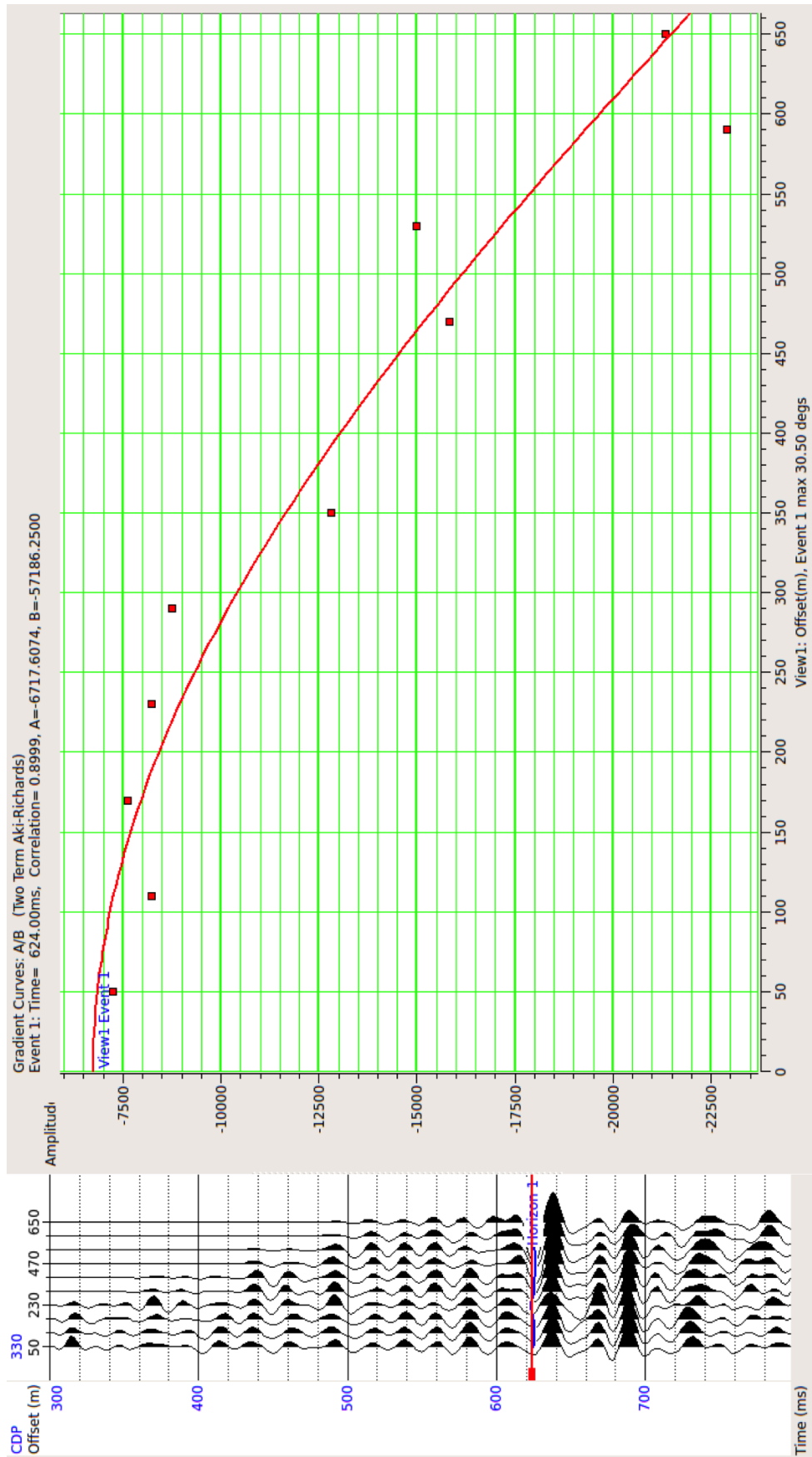


Figura 5.11: Gráfico da amplitude em função do ângulo de incidência. São representados os pontos registados e a curva obtida pela equação de Shuey à dois termos

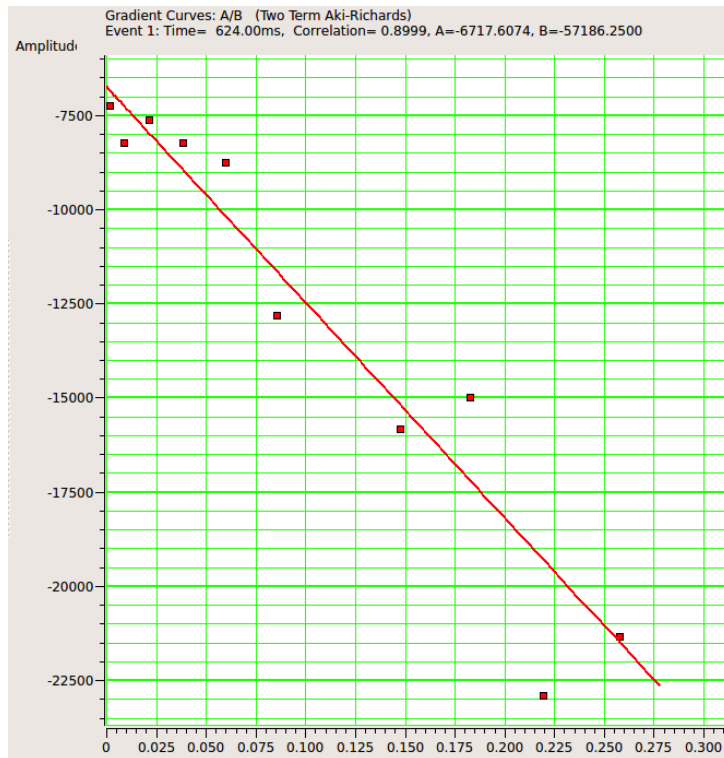


Figura 5.12: Representação da amplitude em função do quadrado do seno do ângulo de incidência

A resposta obtida sugere que se trata de uma anomalia de classe III (ver secção 3.2), havendo um aumento da amplitude com o “offset”. De facto, efectuando um estudo semelhante para a base do reservatório de arenitos, constata-se que existe igualmente um aumento da amplitude com o “offset” (ver figura 5.14 onde são representadas as variações para o topo e a base do reservatório). Avaliando o gráfico do intercepto e do gradiente, figura 5.13, verifica-se que os valores determinados para o intercepto/gradiente, da base e do topo do reservatório, apresentam um comportamento semelhante a classificação efectuada na secção 3.2, reforçando a sugestão efectuada.

Efectuada a análise da anomalia AVO, aplicou-se os parâmetros determinados a todo os dados sísmicos recorrendo a equação de Shuey a dois termos e efectuando combinações dos atributos AVO, conforme abordagem efectuada na secção 3.2.

Na figura 5.15 são representados os traços que representam o intercepto (A) calculado e o mapa de cores é obtido considerando o producto entre o intercepto e o gradiente ($A \times B$). Tratando-se de uma anomalia de classe III, observa-se uma forte resposta positiva no topo e na base do reservatório (em torno dos 630 ms).

Como foi referido na secção 3.2, o atributo $A + B$ é, em certo grau, proporcional a variação da razão de Poisson, pelo que é efectuada uma representação análoga a anterior considerando

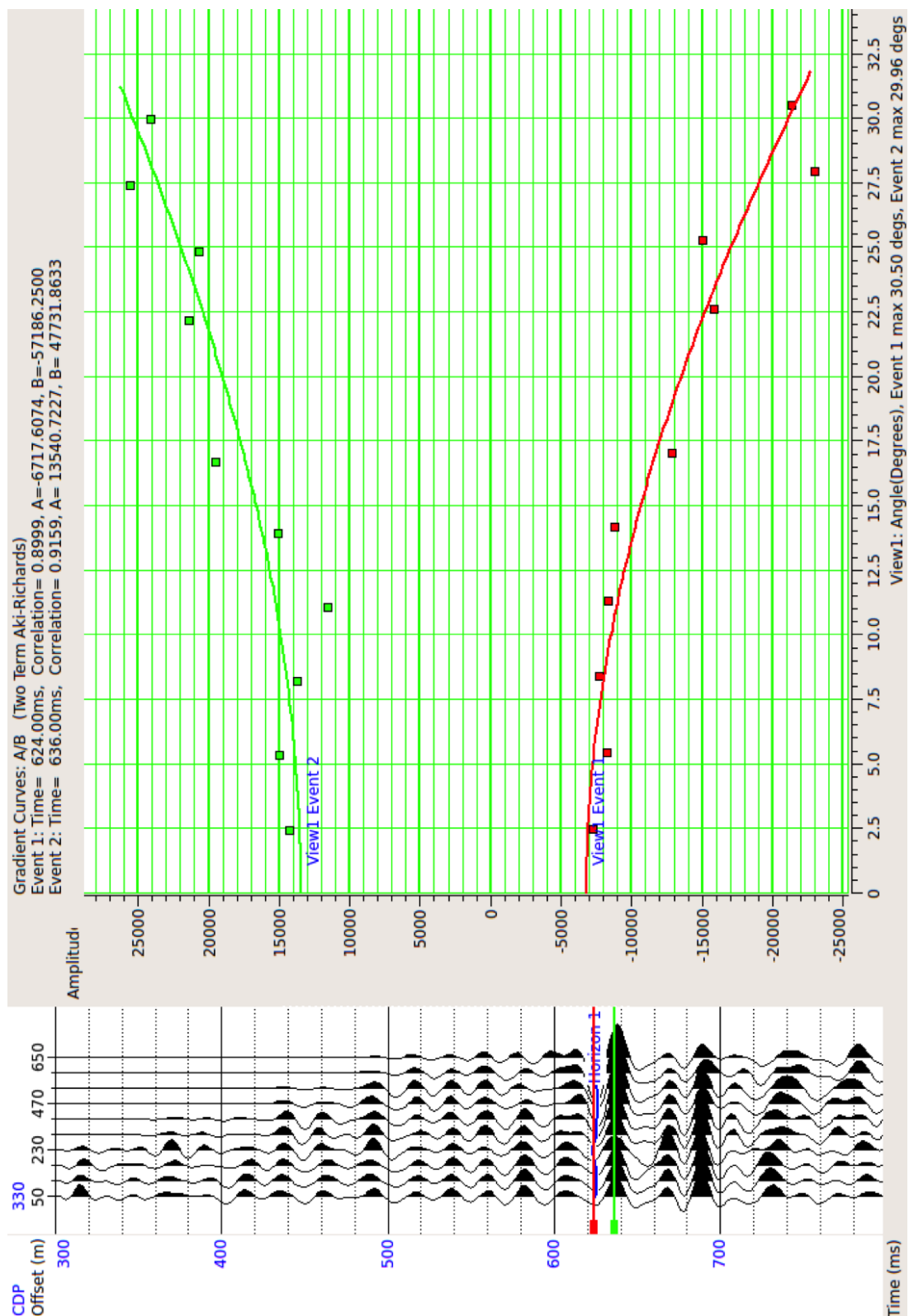


Figura 5.14: Representação da amplitude em função do “offset” para a base (a verde) e o topo (a vermelho) do reservatório.

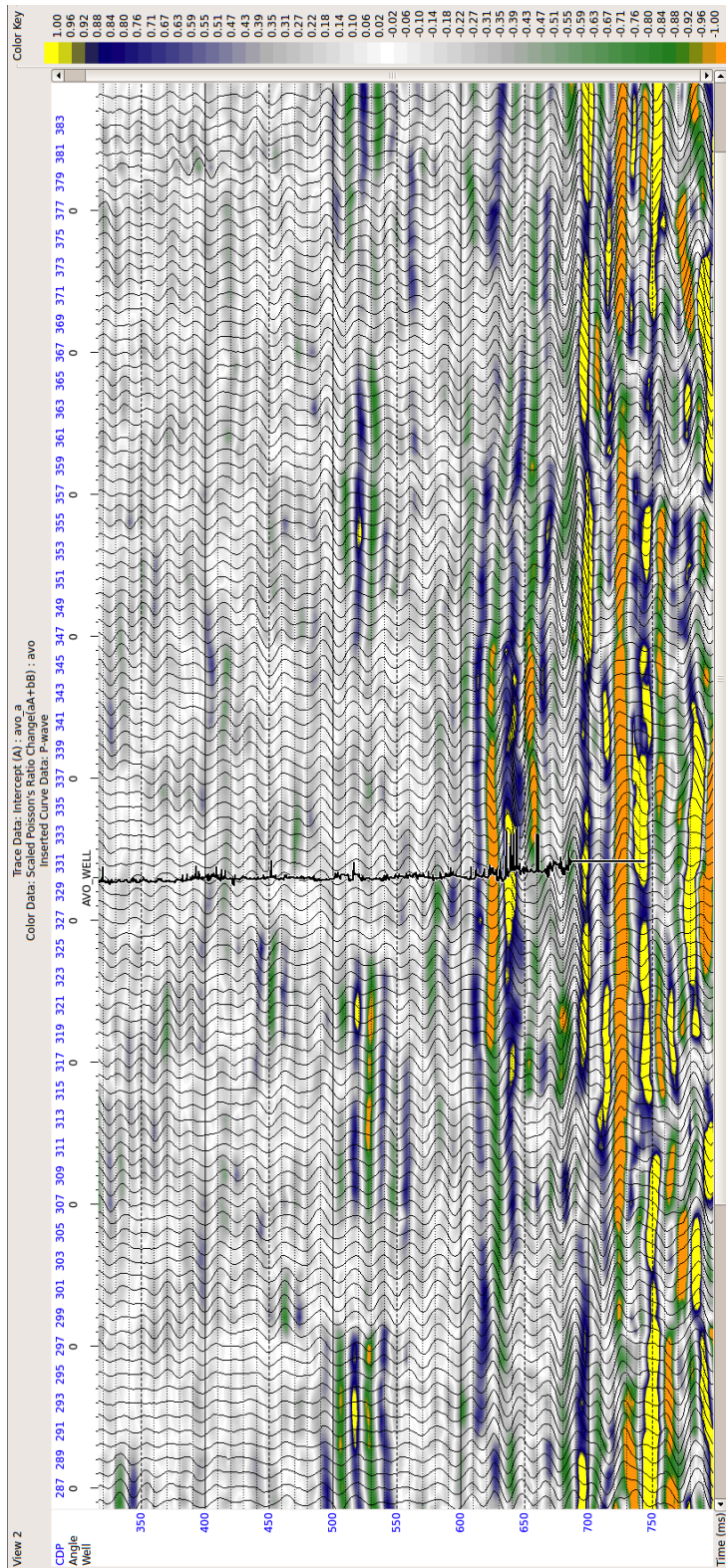


Figura 5.16: Secção obtida para o intercepto A. O mapa de cores, $A + B$, permite estimar a variação da razão de Poisson.

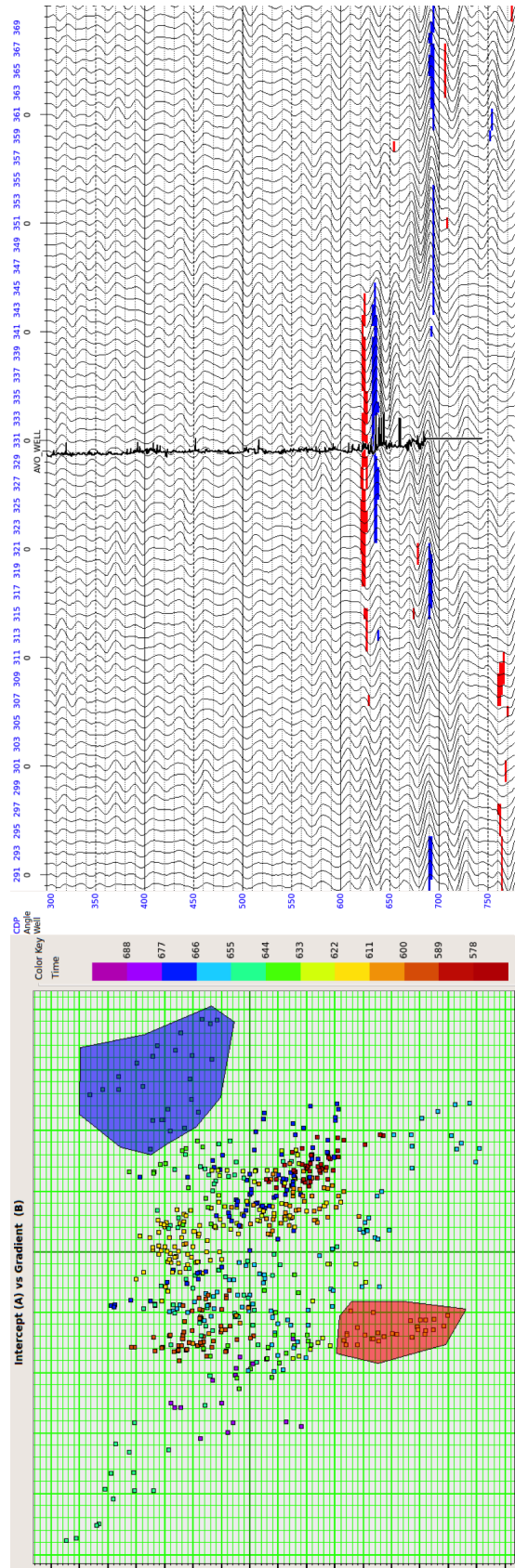


Figura 5.17: Gráfico Intercepto/Gradiente.

a densidade e a impedância das ondas S, para estimar as propriedades dos fluídos contidos na formação que se pretende caracterizar.

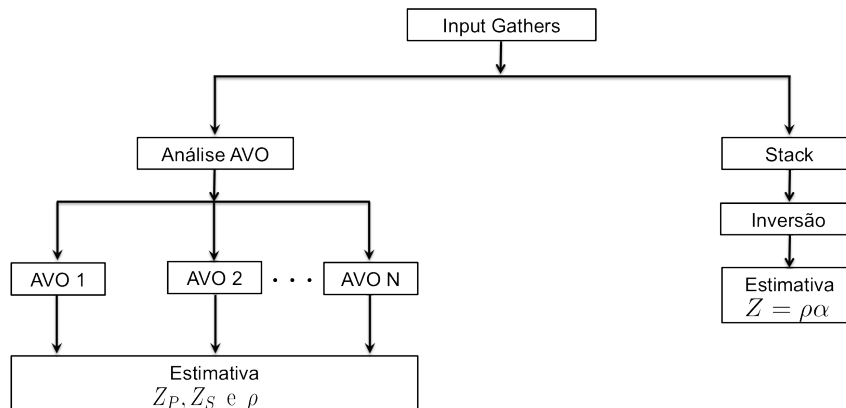


Figura 5.18: Diagrama ilustrativo dos processos de inversão.

Efectuando uma inversão “pré-stack” atendendo a diversos atributos AVO, previamente determinados, é possível estimar, de forma simultânea, determinados parâmetros que permitem inferir a litologia e o conteúdo em fluídos, como é ilustrado na figura 5.18.

A seguir são indicadas, a título ilustrativo, alguns atributos geralmente utilizados.

- *Intercepto e gradiente*
- *“Stacks” para diferentes ângulos de incidência:*
- *Inversão da impedância elástica*
- *Determinação independente de R_P e R_S*
- *Inversão de R_P e R_S para estimar as impedâncias Z_P e Z_S*
- *Análise Lambda–Mu–Rho (LMU) de Z_P e Z_S*
- *Inversão simultânea para obtenção de Z_P, Z_S e ρ*

No trabalho realizado foram efectuadas duas inversões distintas, descritas a seguir.

5.3.1 Inversão Independente para obtenção das impedâncias P e S

Neste método, são primeiramente extraídos, de forma independente, os coeficientes de reflexão normais R_P e R_S (conforme ilustração efectuada na figura 5.19). Para tal, considera-se a equação de Shuey, equação 3.3, devidamente modificada:

$$R_P(\theta) = (1 + \tan^2 \theta) R_P - 8 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta R_S + \left[4 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta - \tan^2 \theta \right] \frac{\Delta\beta}{\beta} \quad (5.1)$$

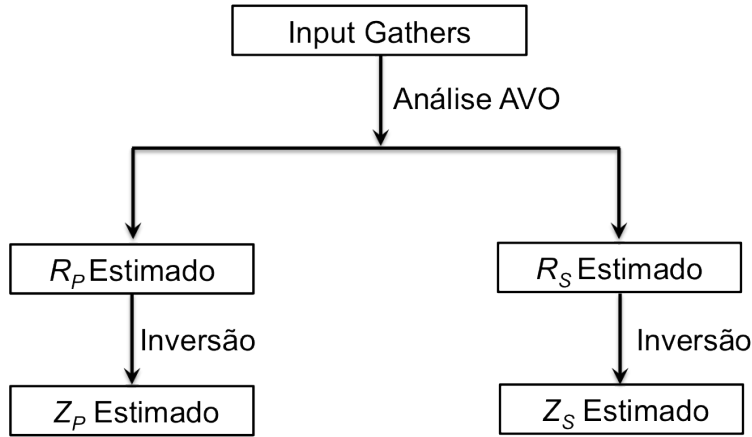


Figura 5.19: Diagrama ilustrativo do processo de inversão independente.

Truncando o último termo, do segundo membro da equação anterior, e extraindo, para cada evento t_i , os N valores observados, conforme é ilustrado na figura 5.20, é possível determinar os coeficientes de reflexão recorrendo a equação matricial seguinte:

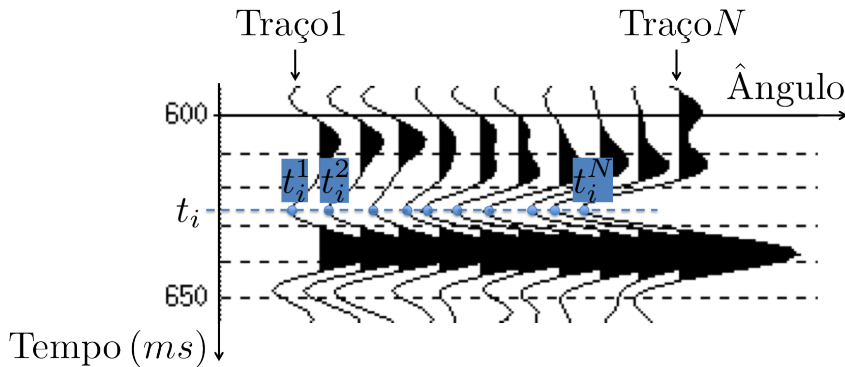


Figura 5.20: Ilustração do processo de extração dos valores para determinação de R_P e R_S .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_P \\ R_S \end{bmatrix}}_{\text{Incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 + \tan^2 \theta_1 & -8 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta_1 \\ 1 + \tan^2 \theta_2 & -8 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 + \tan^2 \theta_N & -8 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta_N \end{bmatrix}^{-1}}_{\text{Inversa Generalizada}} \underbrace{\begin{bmatrix} R_P(\theta_1) \\ R_P(\theta_2) \\ \vdots \\ R_P(\theta_N) \end{bmatrix}}_{\text{Observações}} \quad (5.2)$$

Foram então estimados R_P e R_S representados nas figuras 5.21 e 5.22, respectivamente. Constata-se que existe uma forte resposta positiva para R_S na interface em torno dos 620 ms

e que a resposta R_P , neste mesmo evento, é relativamente fraca e de polaridade contrária.

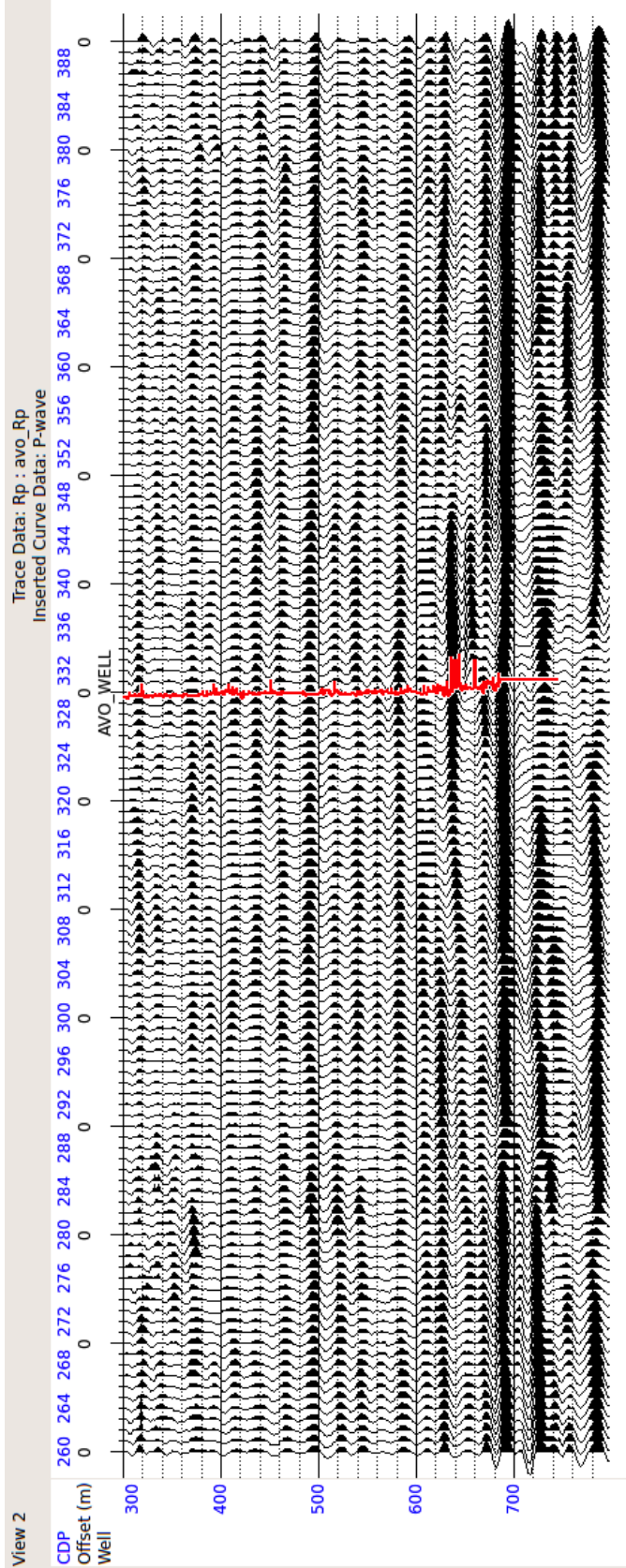


Figura 5.21: Secção R_P estimada.

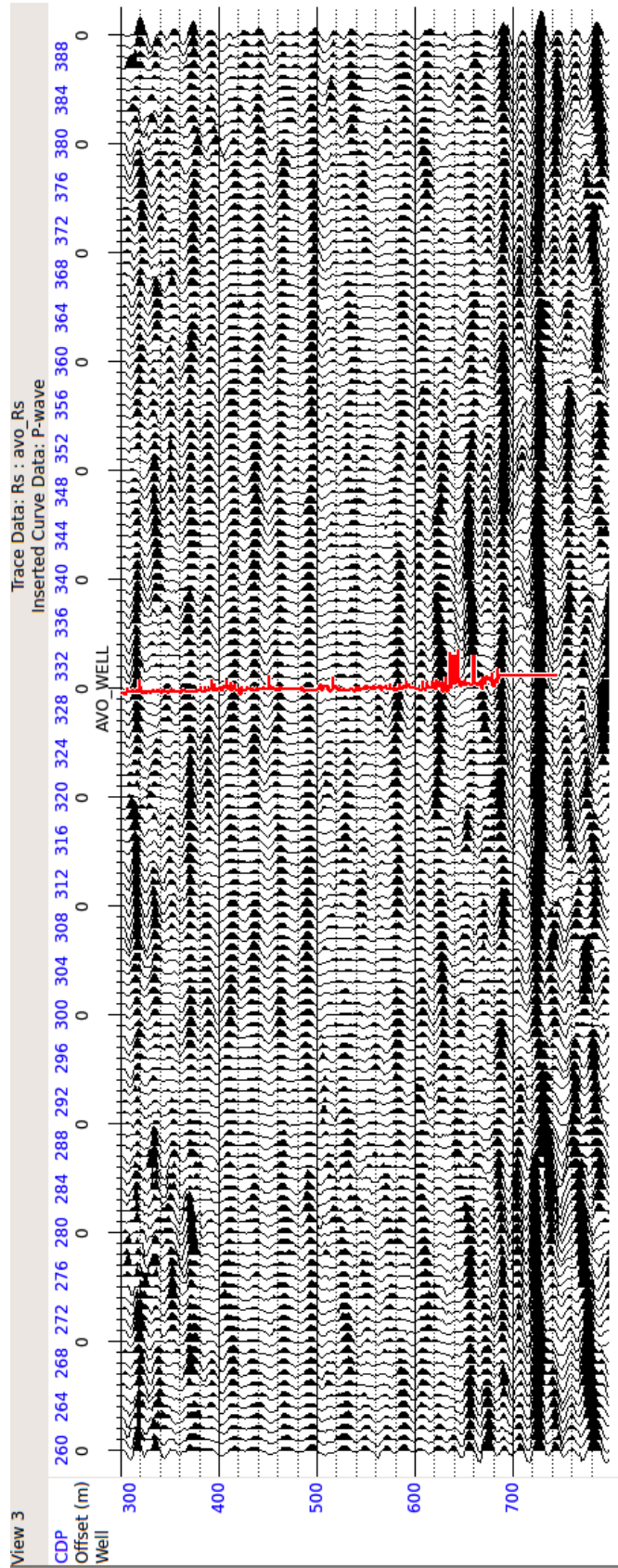


Figura 5.22: Secção R_S estimada.

Na figura 5.23 é representado, por um mapa de cores, o factor de fluído estimado (ver secção 3.2). Repare-se na forte resposta negativa em torno dos 620 ms (topo do reservatório) e a forte resposta positiva na base do reservatório.

Estimados os coeficientes de reflexão, foram efectuadas inversões “pós-stack” para estimar R_P e R_S , separadamente. O procedimento seguido é análogo ao efectuado no capítulo 4, pelo que serão apenas apresentados os resultados mais relevantes.

– Inversão dos dados R_P :

Na figura 5.24 representa-se o modelo de impedâncias inicial utilizado para a inversão.

Obteve-se o modelo de impedâncias representado na figura 5.25. É possível identificar facilmente a anomalia existente na região de interesse, permitindo assim não só obter alguns parâmetros quantitativos como caracterizar a geometria do reservatório. O baixo valor verificado em torno dos 630 ms poderá indicar a presença de um reservatório de gás de arenitos.

– Inversão dos dados R_S :

Para a inversão elaborou-se o modelo inicial representado na figura 5.26.

Na figura 5.27 são representadas as impedâncias cisalhantes obtidas invertendo a secção R_S estimada acima, onde é possível constatar um aumento desta na região de interesse, ao contrário do que foi verificado para os valores de Z_P .

A seguir foi efectuada uma representação gráfica de Z_P e Z_S , figura 5.29, para avaliar a possibilidade de serem identificadas anomalias indicadoras de presença de hidrocarbonetos. Verifica-se que existe um padrão linear global, com possibilidade de existência de uma região saturada com gás. Selecionando a região referida, ver figura 5.29, constatamos que esta pertence a área abrangida pelo reservatório, constituindo portanto um bom indicador de hidrocarbonetos.

5.3.2 Inversão simultânea

Nesta secção será descrita a inversão “pré-stack” efectuada para estimar, simultaneamente, as impedâncias das ondas P, Z_P , e S, Z_S .

Os coeficientes da equação da equação 5.1, utilizada na secção anterior, não possuem dimensão idêntica, facto que poderá tornar as soluções para R_S e a densidade, ρ , instáveis para pequenos “offsets”. Na inversão simultânea efectuada considerou-se que as impedâncias e a densidade estão relacionadas e o seguinte modelo linear para o meio:

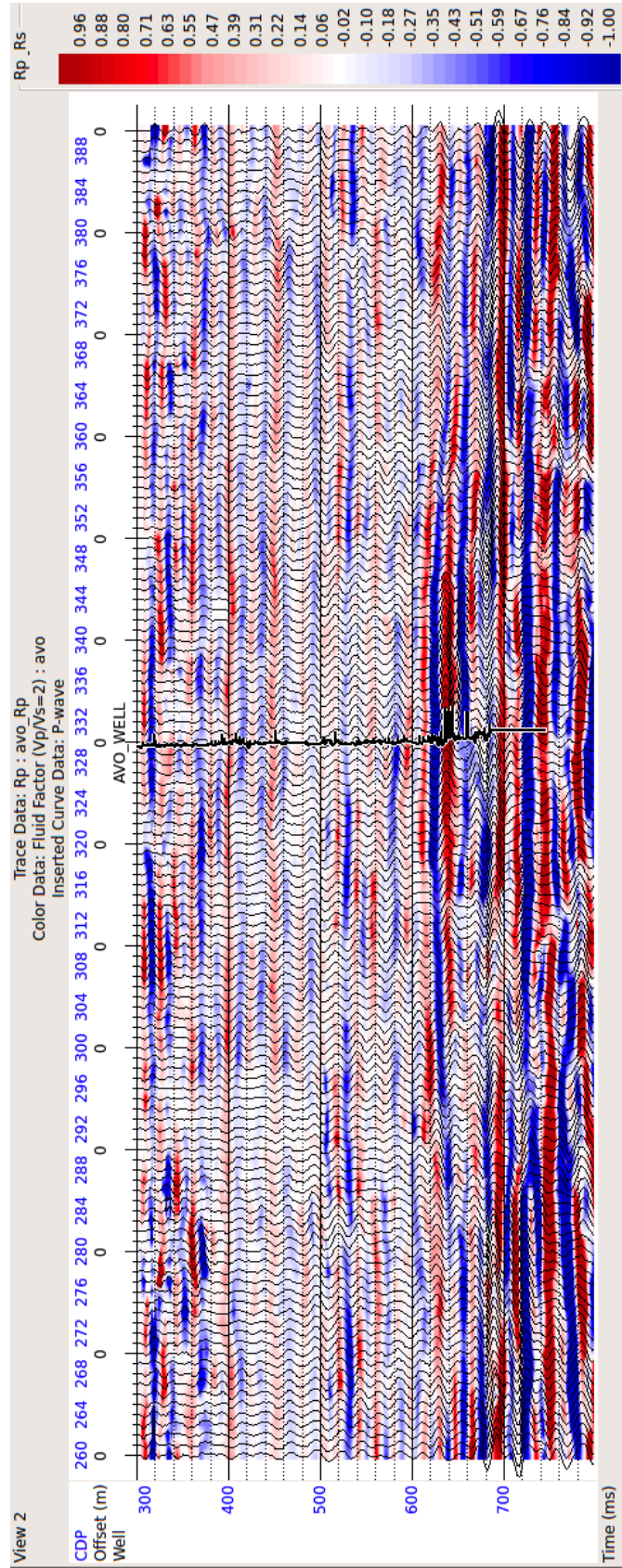


Figura 5.23: Secção R_p com o factor de fluido estimado (mapa de cores).

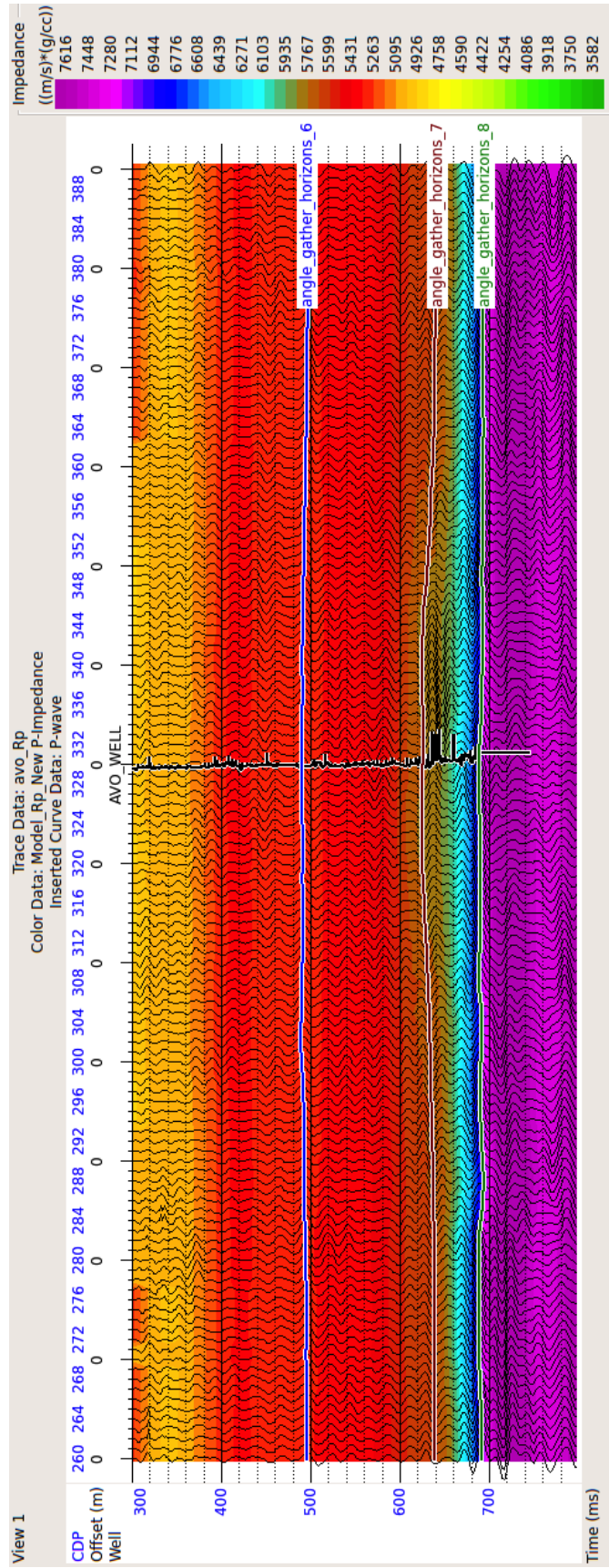


Figura 5.24: Modelo inicial para a inversão R_P

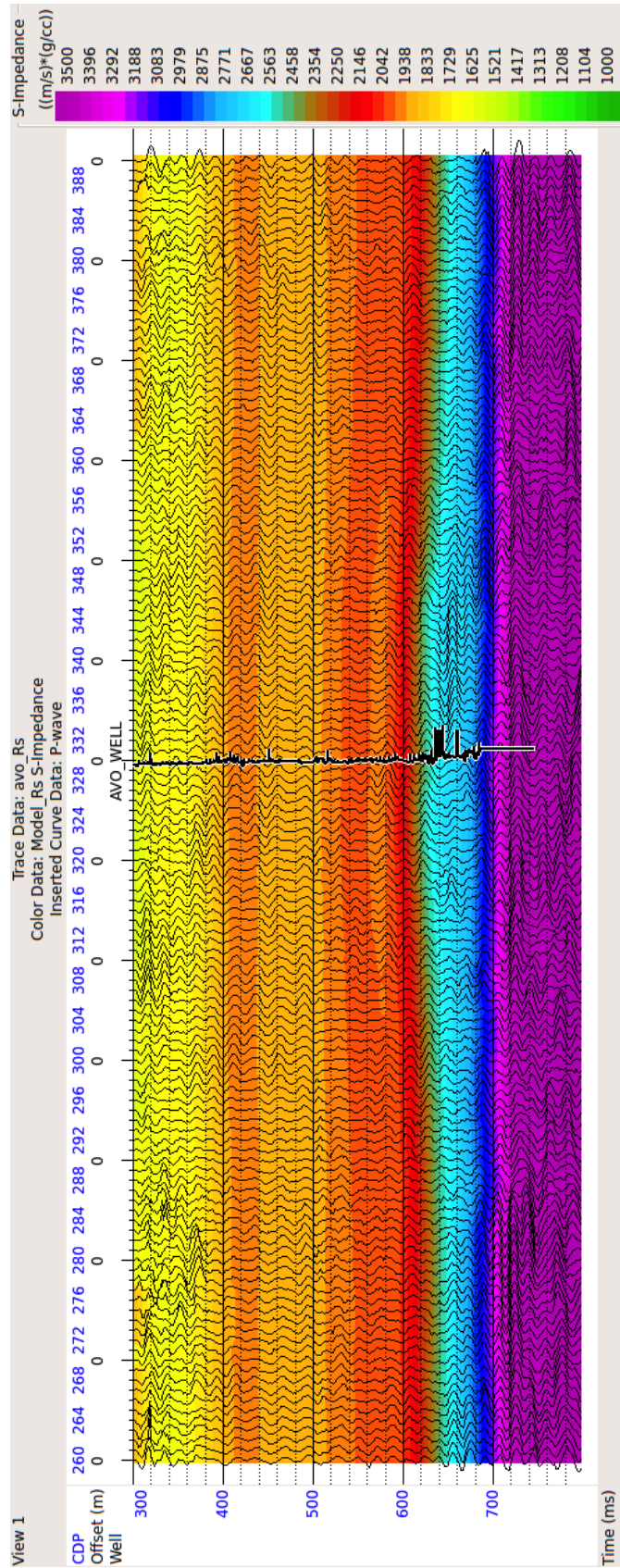


Figura 5.26: Modelo inicial para a inversão R_S

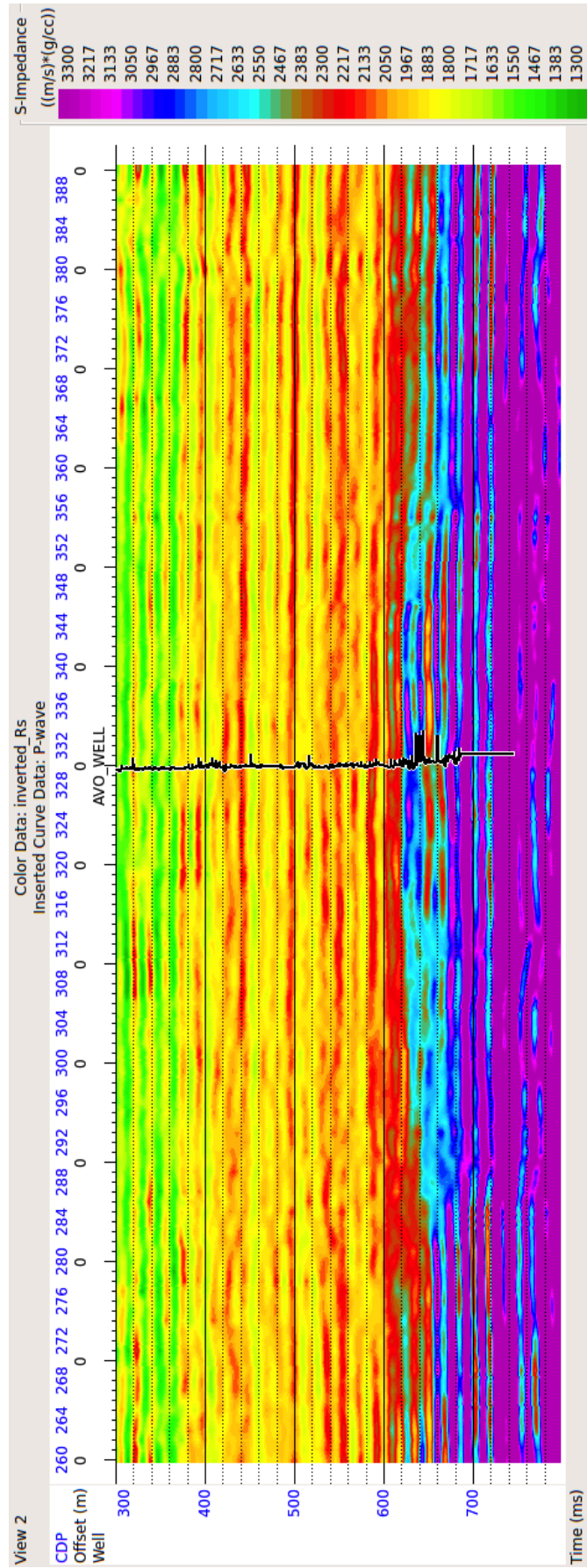


Figura 5.27: Modelo de impedâncias obtido por inversão dos dados R_S

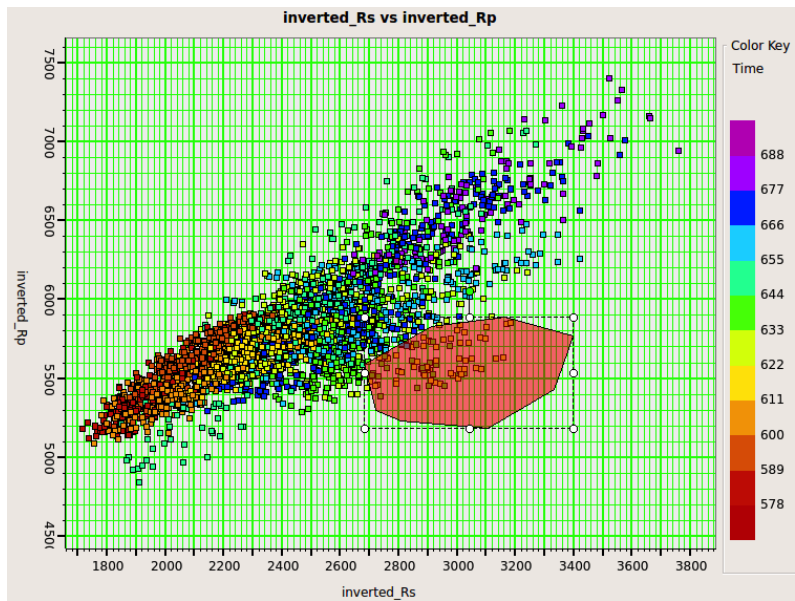


Figura 5.28: “Crossplot” de R_P e R_S

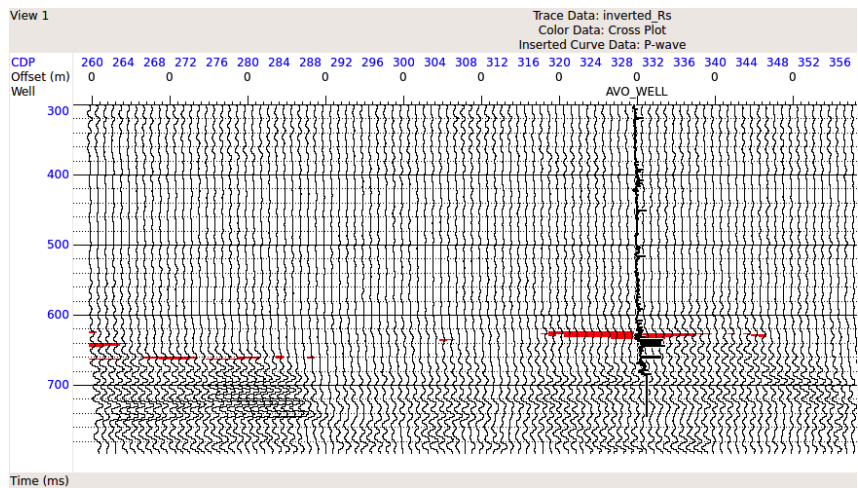


Figura 5.29: Representação da região seleccionada no “Crossplot” de R_P vs R_S

$$\ln(Z_S) = k \ln(Z_P) + k_c + \Delta \ln Z_S \quad (5.3)$$

$$\ln(\rho) = m \ln(Z_P) + m_c + \Delta \ln \rho$$

Pretende-se, portanto, determinar os desvios em relação ao ajuste linear, conforme representação efectuada na figura 5.30. Este processo permite impor restrições para reduzir o problema da falta de unicidade da inversão sísmica. Com efeito, supõem-se que na ausência de hidrocarbonetos a relação entre os parâmetros representados é aproximadamente linear.

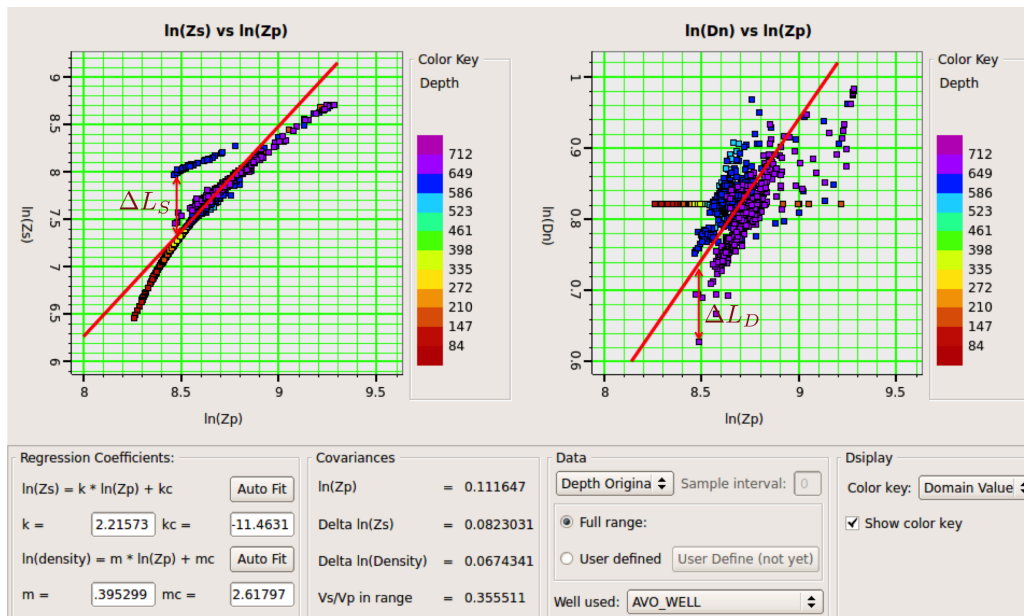


Figura 5.30: Gráficos logarítmicos para determinar a tendência do meio envolvente.

Foi aplicada uma inversão baseada em modelos, seguindo uma estratégia semelhante aos métodos descritos no capítulo 2. Considerou-se a seguinte equação, obtida atendendo ao modelo convolutivo (equação 2.65) e a equação 5.1, para os traços sísmicos registados:

$$T(\theta) = \frac{1}{2}c_1W(\theta)DL_P + \frac{1}{2}c_2W(\theta)DL_S + W(\theta)c_3DL_D, \quad \left\{ \begin{array}{l} L_S = \ln Z_S \\ L_D = \ln \rho \\ L_P = \ln Z_P \\ W(\theta) \leftarrow \text{“Wavelet”} \\ D \leftarrow \text{Matrix das derivadas} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Atendendo a linearização anterior, dado pela equação 5.3, e as equações 5.4 vem que:

$$T(\theta) = c'_1 W(\theta) D L_P + c'_2 W(\theta) D \Delta L_S + W(\theta) c_3 D L_D, \quad \begin{cases} c'_1 = \frac{1}{2} c_1 \\ c'_2 = \frac{1}{2} c_2 \end{cases} \quad (5.5)$$

A equação anterior pode ser implementada considerando a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} T(\theta_1) \\ T(\theta_2) \\ \vdots \\ T(\theta_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_1(\theta_1) W(\theta_1) D & c'_2(\theta_1) W(\theta_1) D & c_3(\theta_1) W(\theta_1) D \\ c'_1(\theta_2) W(\theta_2) D & c'_2(\theta_2) W(\theta_2) D & c_3(\theta_2) W(\theta_2) D \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c'_1(\theta_N) W(\theta_N) D & c'_2(\theta_N) W(\theta_N) D & c_3(\theta_N) W(\theta_N) D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_P \\ \Delta L_S \\ \Delta L_D \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

O algoritmo implementado segue, em linhas gerais, os passos descritos a seguir:

1. “Inputs” necessários

- N traços sísmicos em função do ângulo de incidência.
- N “wavelets” para cada traço. Como iremos verificar não é geralmente necessário determinar todas as “wavelets”.
- Modelo inicial para Z_P , Z_S e ρ .

2. Determinação dos valores mais adequados para k e m que caracterizam a equação 5.3. Estes valores foram determinados nos parágrafos anteriores (ver figura 5.30).

3. Inicializar a solução (estimativa inicial), para lidar com o problema devido a deficiência do conteúdo em baixas frequências, como se segue;

$$\begin{bmatrix} L_P & \Delta L_S & \Delta L_D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \log(Z_{P_0}) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Onde Z_{P_0} é o modelo de impedâncias inicial.

4. Minimização da função de custo, definida no capítulo 2, recorrendo ao método de otimização dos gradientes conjugados.

5. Determinação dos valores pretendidos recorrendo as equações seguintes;

$$\begin{aligned} Z_P &= \exp(L_P) \\ Z_S &= \exp(kL_P + k_c + \Delta L_S) \\ \rho &= \exp(mL_P + m_c + \Delta L_D) \end{aligned}$$

Para dados “pré-stack” a “wavelet” é geralmente estimada em intervalos de 15° . Como os dados sísmicos estudados apresentam um ângulo de incidência máximo de 30° , estimaram-se as duas “wavelets” representadas na figura 5.31.

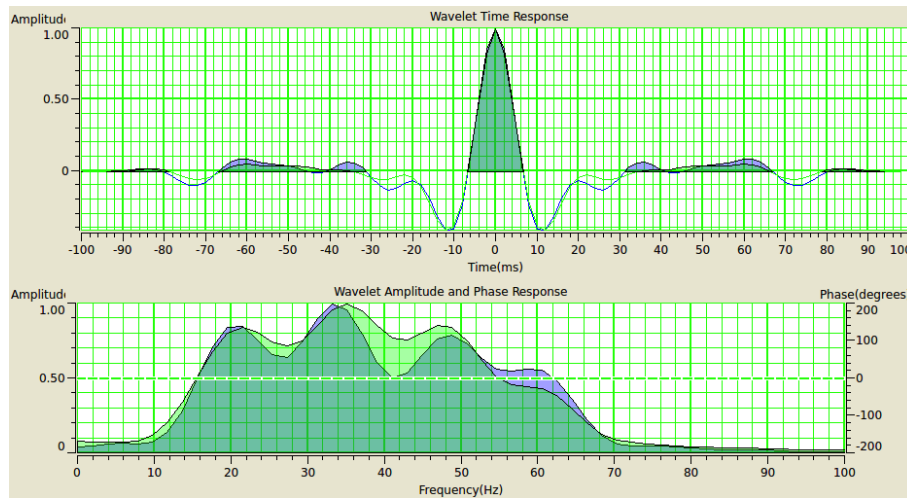


Figura 5.31: “Wavelets” para dois ângulos distintos

Analogamente a inversão efectuada para os dados com “offset” nulo, foram primeiramente invertidos os dados na região que contém a diagrafia registada. Os resultados desta operação encontram-se representados na figura 5.32. Verifica-se que os valores resultantes da inversão (traços a vermelho) apresentam um ajuste significativo em relação as diagrafias (traços a azul). O sintético criado a partir dos parâmetros obtidos apresentam igualmente um comportamento muito similar aos dados sísmicos reais. Este resultado é confirmado pela representação do erro de estimação, último gráfico a direita, que apresentam valores significativamente pequenos.

Depois de optimizados os parâmetros, inverteu-se todo volume sísmico. Recorde-se que a inversão é efectuada iterativamente de forma a actualizar o modelo inicial a partir do erro obtido em cada iteração. Assim, quando a função de custo atinge um valor “razoável” considera-se que o método converge para uma solução aceitável para os parâmetros que se pretenda estimar.

Os valores obtidos para a impedância Z_P são representados na figura 5.33. De forma idêntica ao resultado obtido a inversão “pós-stack” obteve-se uma anomalia com baixos valores de impedâncias na área de interesse. havendo contudo uma melhoria significativa na resolução dos valores estimados o que permite caracterizar mais correctamente a geometria e os parâmetros que caracterizam o reservatório.

Um resultado semelhante foi determinado para as impedância Z_S , representadas na figura

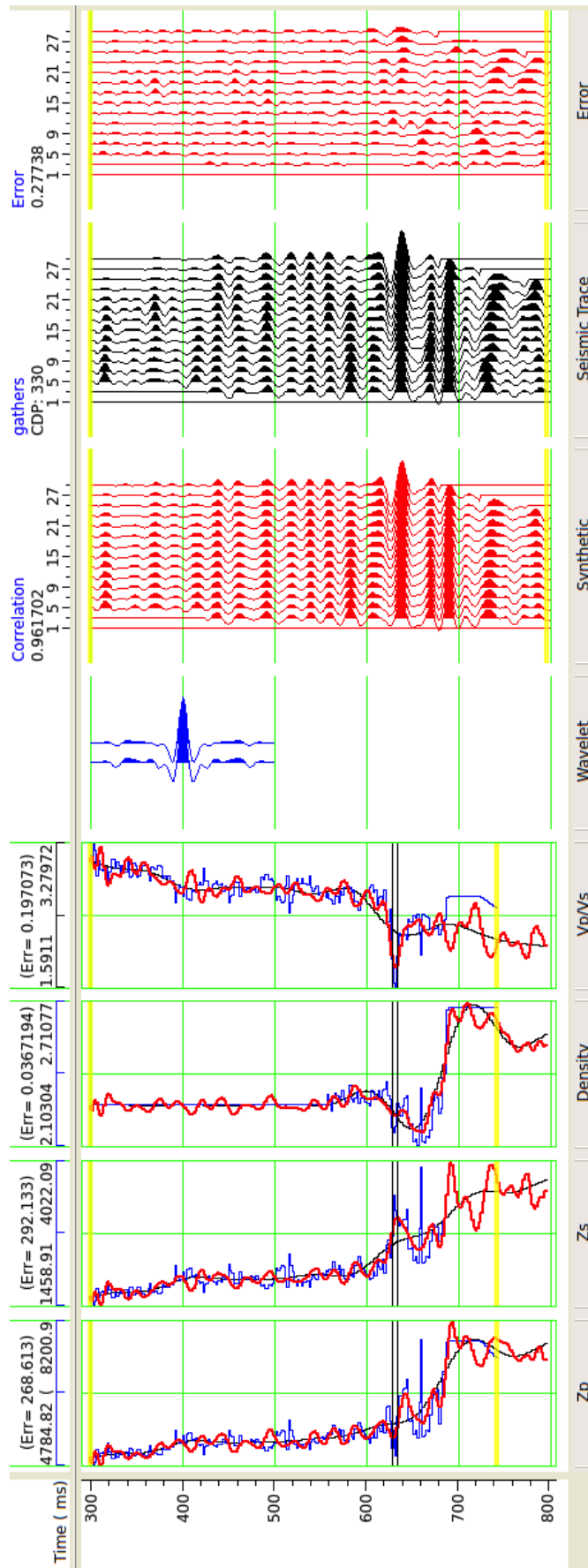


Figura 5.32: "Wavelets" para dois ângulos distintos

5.34, onde a impedância sofre um aumento significativo.

Em ambos os casos, Z_P e Z_S , verifica-se uma melhoria significativa, em relação as estimativas obtidas na inversão “pós-stack”, na resolução dos valores estimados permitindo melhorar a caracterização do reservatório (geometria e parâmetros físicos).

Foram igualmente obtidas estimativas para a razão entre as velocidades das ondas P e S, $\frac{\alpha}{\beta}$, e para a densidade do meio, figuras 5.35 e 5.36 respectivamente. Os valores de $\frac{\alpha}{\beta}$ na área de interesse sofrem um decréscimo drástico em relação aos valores do meio circundante, o que poderá indicar a presença de um reservatório de gás.

Foi efectuado, por último, um “crossplot” dos valores da razão $\frac{\alpha}{\beta}$ e das impedâncias Z_P . A distribuição destes valores, figura 5.37, sugere a existência de uma zona saturada de gás na parte inferior do terceiro quadrante. Selecionando os pontos referidos é possível destacar convenientemente a região saturada de gás (figura 5.38).

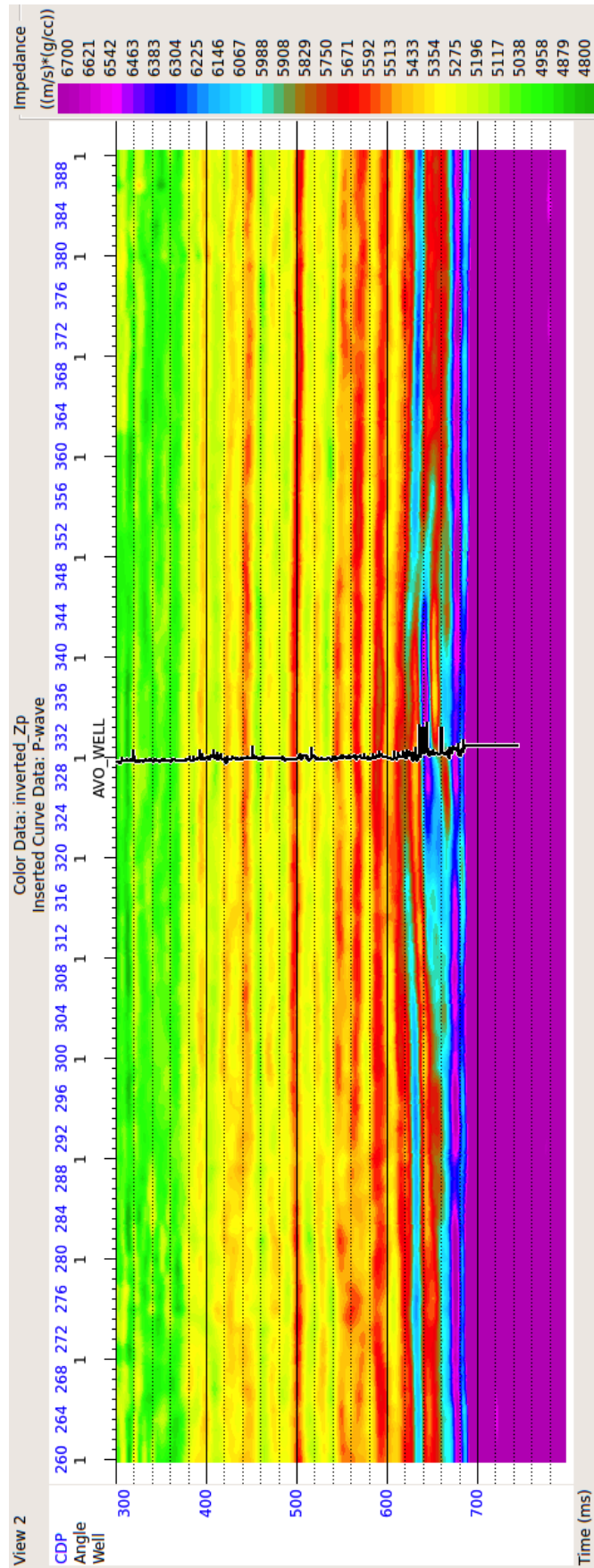


Figura 5.33: Seção com os valores da impedância Z_P obtidos por inversão

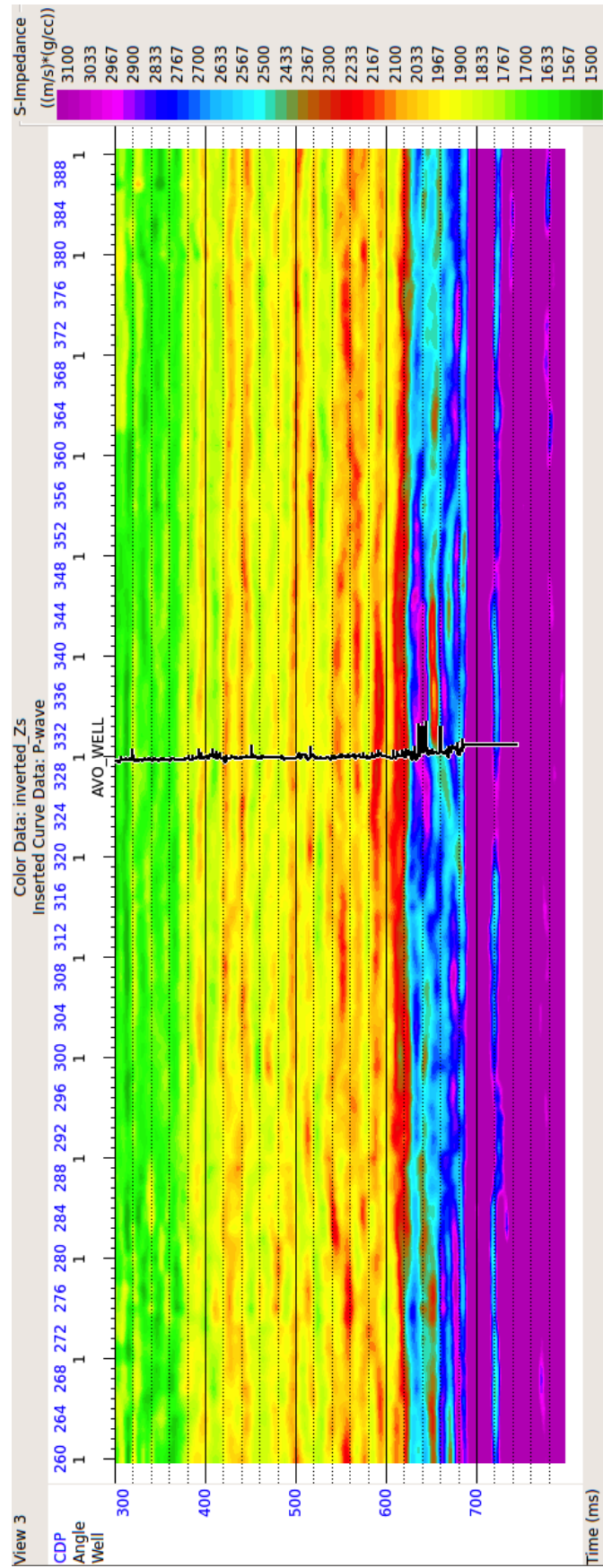


Figura 5.34: Secção com os valores da impedância Z_S obtidos por inversão

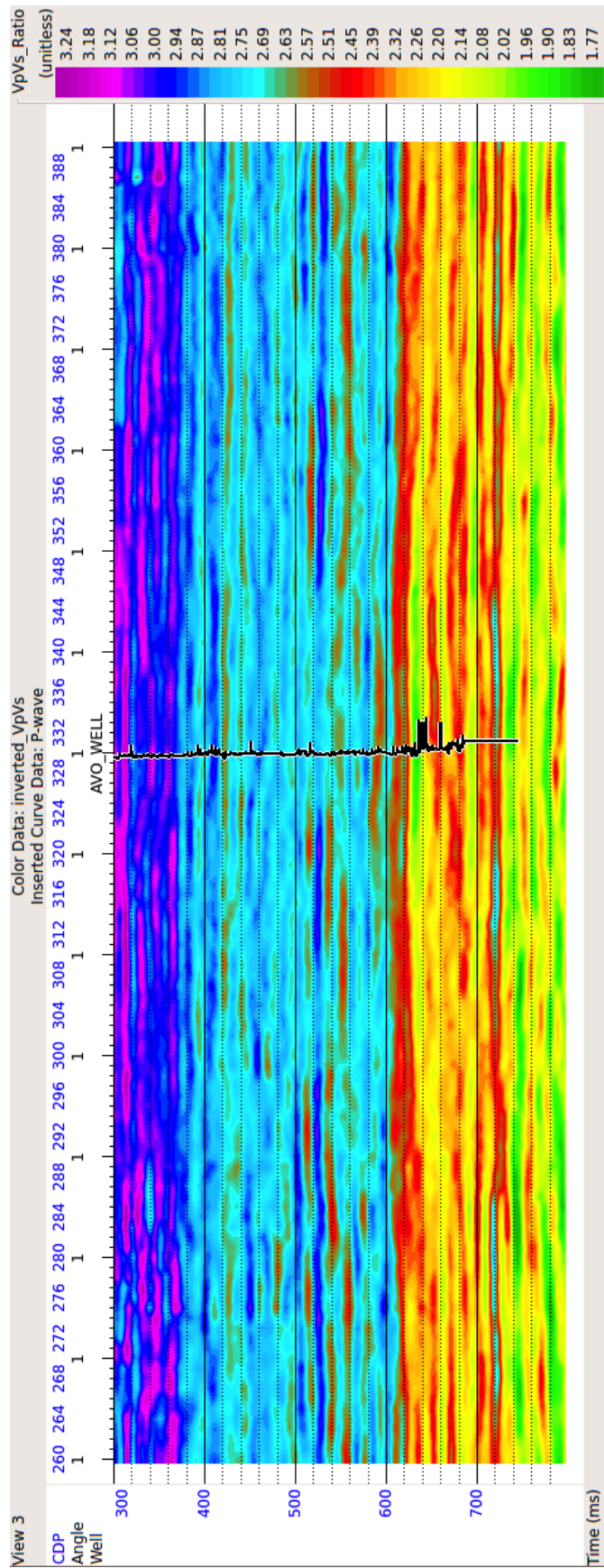


Figura 5.35: Secção com os valores $\frac{\alpha}{\beta}$ obtidos.

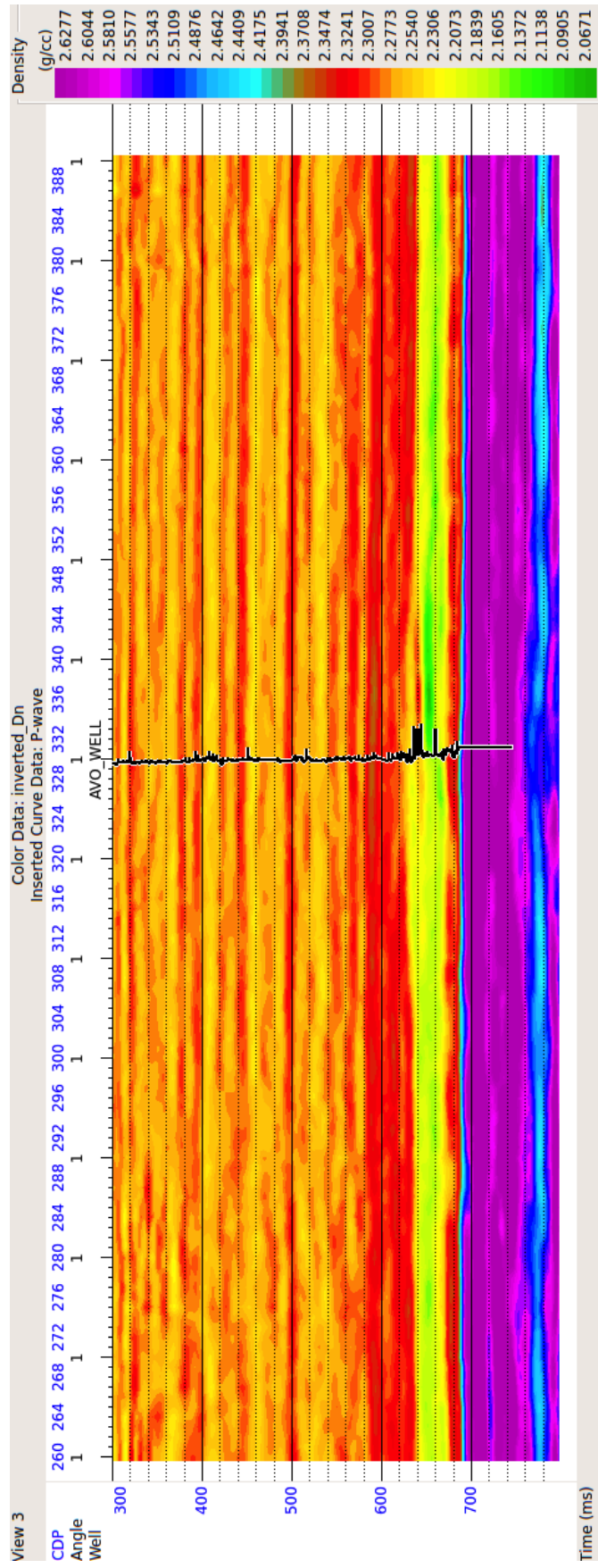


Figura 5.36: Secção com os valores $\frac{\alpha}{\beta}$ obtidos.

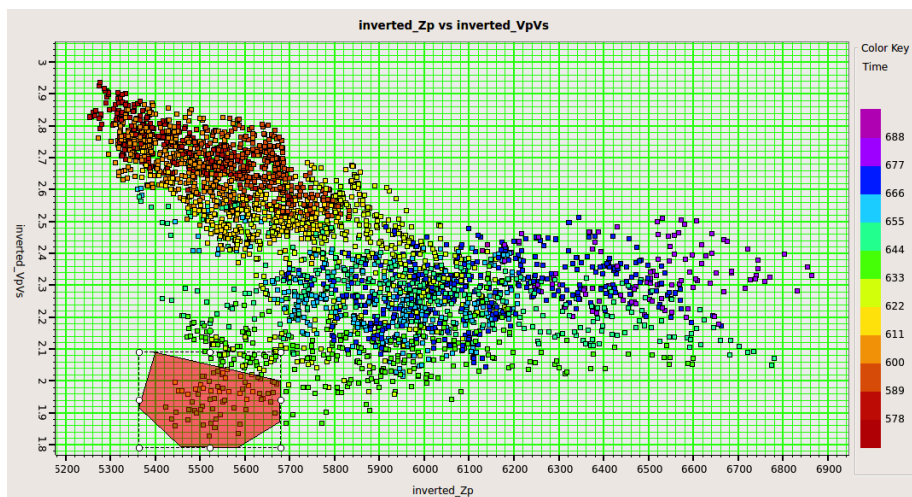


Figura 5.37: “Crossplot” Z_P vs $\frac{\alpha}{\beta}$. A região selecionada poderá traduzir uma área saturada de gás.

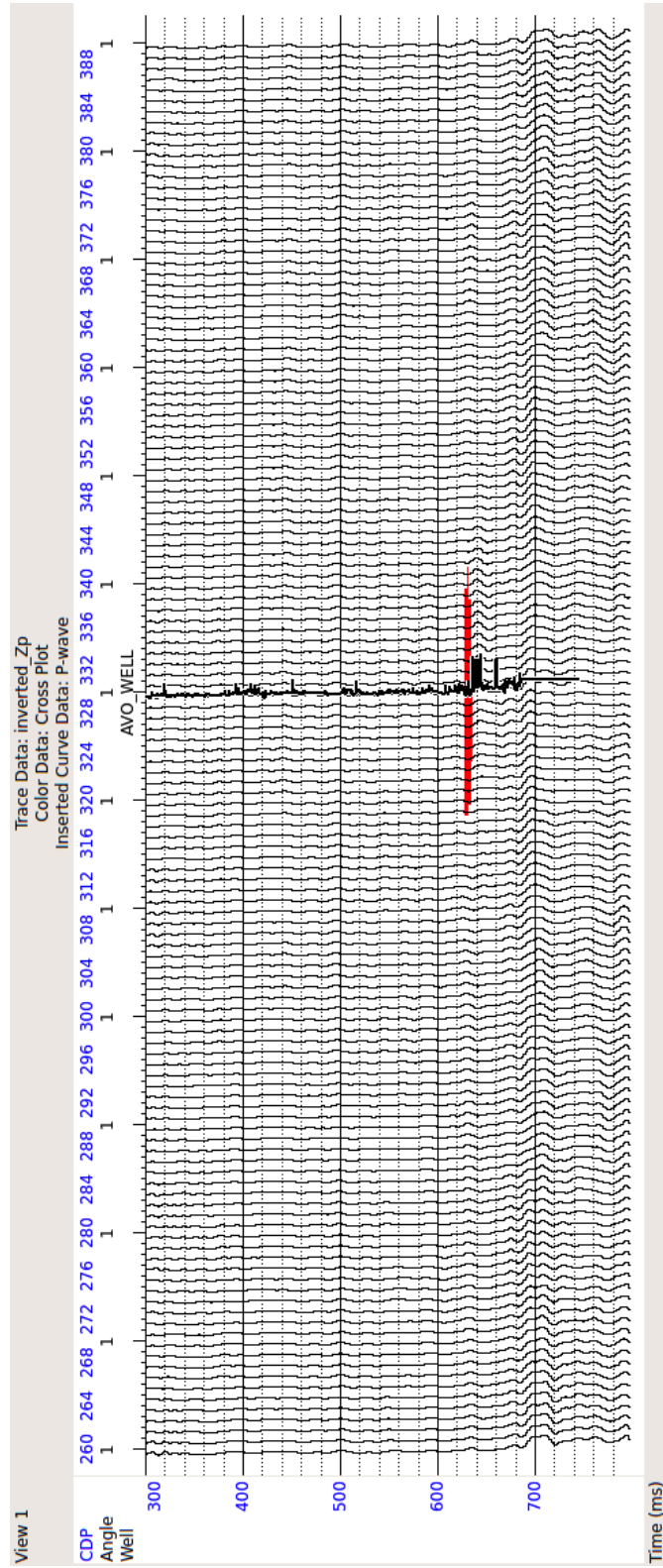


Figura 5.38: Representação dos pontos seleccionados no “Crossplot” Z_P vs $\frac{\alpha}{\beta}$.

Capítulo 6

Conclusão

Na primeira parte deste trabalho, foram abordados os fundamentos teóricos necessários para efectuar uma análise quantitativa de dados sísmicos, com o intuito de caracterizar possíveis reservatórios de hidrocarbonetos. Constatou-se que para alcançar o objectivo desejado, é necessário considerar diversos tópicos e estabelecer as relações existentes entres estes.

Para analisar, conveniente, a informação disponibilizada pelos dados sísmicos registados, é crucial entender, primeiramente, os fundamentos físicos inerentes a propagação das ondas sísmicas, que se baseiam na mecânica de meios contínuos, para estabelecer as equações que descrevem este fenómeno, o que permite identificar os principais tipos de ondas existentes e respectivas velocidades de propagação e, conseqüentemente, os tipos de deformações causados pela passagem das ondas sísmicas. A análise destas deformações permite obter importantes parâmetros físicos que caracterizam o meio, como é o caso dos módulos de incompressibilidade e de Young, da razão de Poisson ou os parâmetros de Lamé. Estes parâmetros desempenham um papel central no estudo da física das rochas, onde se tenta prever a composição e o conteúdo em fluidos de formações rochosas e correlacionar os parâmetros petrofísicos obtidos aos dados sísmicos.

Os modelos obtidos recorrendo ao método de substituição de fluidos, permitem prever a relação entre os parâmetros obtidos dos dados sísmicos e o conteúdo em fluidos. Contactou-se que, apesar de os modelos obtidos serem estimados recorrendo a equações aproximadas e a valores determinados laboratorialmente estes permitem deduzir satisfatoriamente as propriedades petrofísicas da região estudada.

A inversão de dados sísmicos permite inferir algumas propriedades físicas características do meio por onde as ondas sísmicas registadas se propagaram. Foi possível verificar, tanto na abordagem teórica como nas implementações efectuadas, que o problema inverso engloba um série de questões pertinentes relacionadas com o nível de fidelidade dos resultados que

se podem obter. De facto, é necessário prestar especial atenção ao problema da possível falta de unicidade das soluções encontradas. É portanto necessário introduzir algumas técnicas adicionais, como a restrição dos modelos, ou recorrer a informação adicional, geralmente disponibilizadas por diagrfias ou a estudos efectuados anteriormente.

Verificamos que o processo de correlação entre as diagrfias e os dados sísmicos desempenha um papel importante no estudo efectuado. Com efeito, estas foram utilizadas em diversas etapas do estudo, como na introdução de algumas restrições ao problema inverso, nos testes de inversão e na estimação das “wavelets”. Se a correlação for deficiente, a qualidade dos resultados finais poderá ficar gravemente comprometida.

A qualidade dos dados sísmicos disponíveis, que poderá depender da qualidade da aquisição e do processamento e da complexidade da região, é fundamental para o estudo que foi efectuado. No processo de inversão são consideradas todas reflexões presentes, incluindo possíveis múltiplos e ruídos. No caso dos dados que foram invertidos, a qualidade destes, na região alvo, era bastante satisfatória, pelo que os resultados obtidos nesta região é significativamente aceitável. Por outro lado, a banda de frequências dos dados sísmicos é consideravelmente limitada, principalmente no conteúdo em baixas frequências, importantes para o processo de inversão. Para reduzir os efeitos causados por essa limitação foi elaborado um modelo inicial de baixas frequências considerando as diagrfias disponíveis.

A análise AVO de dados sísmicos constitui uma ferramenta poderosa para a identificação e caracterização de possíveis reservatórios de hidrocarbonetos. Neste trabalho, foram introduzidos diversos conceitos que permitem efectuar uma interpretação quantitativa dos dados sísmicos, analisando a variação das amplitudes sísmicas com o aumento do “offset”. Nesta análise existem, igualmente, diversas incertezas associadas a informação obtida que podem ser devidas a diversos factores. A partida, as equações geralmente utilizadas não são exactas e os dados sísmicos poderão afectar consideravelmente o resultado final. Nas aplicações efectuadas recorreu-se a uma gama considerável de técnicas para obter, com sucesso, resultados que permitiram caracterizar devidamente o reservatório de gás em estudo.

Neste projecto, considerou-se que o meio em estudo é isotrópico. Sabe-se contudo que as propriedades físicas do subsolo geralmente variam em todas as direcções, ou seja, são inerentemente anisotrópicas. Um estudo considerando a anisotropia referida e impedâncias elásticas poderão conduzir a resultados que estejam mais próximos da realidade, mas este não se inseria nos objectivos traçados para o projecto realizado.

Devido as diversas incertezas associadas, como foi referido nos parágrafos anteriores, é

razoável denominar, com alguma generalidade, a geofísica de exploração como uma ciência de anomalias, caracterizadas por valores que se desviam dos valores esperados (ou circundantes). Por essa razão, existe sempre o risco do estudo efectuado não traduzir exactamente as propriedades que se pretende inferir. Contudo, estes estudos poderão ser de grande utilidade para a redução dos riscos na detecção de reservatórios, como é o caso da análise AVO que permite, frequentemente, reduzir os riscos associados a perfuração de poços para produção de hidrocarbonetos.

Considerando os parâmetros elásticos determinados e recorrendo a teoria da física das rochas, abordada sucintamente na secção 3.1.2, é possível determinar outros parâmetros físicos, porosidade e permeabilidade por exemplo, e elaborar modelos que traduzam o comportamento do reservatório, resultando numa caracterização mais completa do reservatório. Contudo, este estudo não está inserido nos objectivos que foram traçados para o trabalho realizado.

O objectivo do trabalho realizado consistiu na obtenção de parâmetros físicos que podem ser determinados recorrendo à dados sísmicos.

Atendendo aos resultados obtidos nas implementações efectuadas, podemos concluir que foram alcançados os objectivos definidos. Foi possível caracterizar, em relação aos parâmetros elásticos, convenientemente os reservatórios analisados.

Bibliografia

- Keitti Aki and Paul G. Richards. *Quantitative Seismology*. University Science Books, second edition, 2002.
- Per Avseth, Tapan Mukerji, and Gary Mavko. *Quantitative Seismic Interpretation: Applying Rock Physics Tools to Reduce Interpretation Risk*. Cambridge University Press, March 2005.
- N. E. Bakke and B. Ursin. Thin-bed avo effects. *Geophysical Prospecting*, 46(6):571–587, 1998.
- Norman Bleistein. *Mathematical Methods for Wave Phenomena*. Academic Press, Inc., 1984.
- G. Cambois. *AVO inversion and elastic impedance – SEG Technical Program Expanded Abstracts 2000*, chapter 36, pages 142–145.
- J. Castagna and H. Swan. Principles of avo crossplotting. *The Leading Edge*, 16(4):337–344, 1997.
- J. Castagna, M. Batzle, and R. Eastwood. Relationships between compressional-wave and shear-wave velocities in clastic silicate rocks. *GEOPHYSICS*, 50(4):571–581, 1985.
- J. Castagna, H. Swan, and D. Foster. Framework for avo gradient and intercept interpretation. *GEOPHYSICS*, 63(3):948–956, 1998.
- John P. Castagna and Milo M. Backus, editors. *Offset-Dependent Reflectivity – Theory and Practice of AVO Analysis*. Society of Exploration Geophysicists, 1993.
- P. Connolly. Elastic impedance. *The Leading Edge*, 18(4):438–452, 1999.
- D. Foster, R. Keys, and F. Lane. Interpretation of avo anomalies. *GEOPHYSICS*, 75(5):75A3–75A13, 2010.
- Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, third edition, 1996.

- M.L. Greenberg and J.P. Castagna. Shear-wave velocity estimation in porous media: Theoretical formulation, preliminary verification and applications. *Geophysical Prospecting*, 40: 195–209, 1992.
- D. Hampson. Avo inversion, theory and practice. *The Leading Edge*, 10(6):39–42, 1991.
- Luc T. Ikelle and Lasse Amundsen. *Introduction to Petroleum Seismology*. Society of Exploration Geophysicists, 2005.
- D. D. Jackson. The use of a *priori* data to resolve non-uniqueness in linear inversion. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 57(1):137–157, 1979.
- Y. Li, J. Downton, and Y. Xu. Practical aspects of avo modeling. *The Leading Edge*, 26(3): 295–311, 2007.
- Gary Mavko, Tapan Mukerji, and Jack Dvorkin. *The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis of Porous Media*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, May 2009.
- William Menke. *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. Academic Press, third edition, 2012.
- Jose Pujol. *Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology*. Cambridge University Press, 2003.
- Brian H. Russell. *Introduction to Seismic Inversion Methods*. Society of Exploration Geophysicists, 1988.
- Mrinal K. Sen and Paul L. Stoffa. *Global Optimization Methods in Geophysical Inversion*. Academic Press, second edition, 2013.
- R. Shuey. A simplification of the Zoeppritz equations. *GEOPHYSICS*, 50(4):609–614, 1985.
- G.C Smith and P.M. Gidlow. Weighted stacking for rock property estimation and detection of gas. *Geophysical Prospecting*, 35(9):993–1014, 1987.
- Ivar Stakgold and Michael Holst. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. Wiley, third edition, 2011.
- A. Tarantola. Linearized inversion of seismic reflection data. *Geophysical Prospecting*, 32: 998–1015, 1984a.
- A. Tarantola. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *GEOPHYSICS*, 49(8):1259–1266, 1984b.

A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM, first edition, 2005.

Strata theory. *Theory of the strata program*.

David S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Wiley, third edition, 2010.

R. Wiggins, G.S. Kenny, and C.D. McClure. A method for determining and displaying the shear-wave reflectivity's of a geologic formation: European patent application. *Mobil Oil Corporation*, 1984.

Öz Yilmaz. *Seismic Data Analysis*. Society of Exploration Geophysicists, 2001.