

Recebido em 11 de Setembro de 1958.

Sobre o novo método de balanço hidrológico do solo de THORNTHWAITE-MATHER (*)

pele

Prof. P. DE VARENNES E MENDONÇA
da Cadeira de Hidráulica Geral e Agrícola

RESUMO

Este trabalho destina-se a estabelecer a teoria matemática do novo método de balanço hídrico do solo, proposto em 1955 por THORNTHWAITE e MATHER.

Mostra que, mediante a introdução de parâmetros adimensionais, o procedimento, ilustrado por esses autores somente para a capacidade utilizável de 300 mm, pode ser simplesmente generalizado e compendiado em duas fórmulas apenas, fórmulas cuja aplicação se torna imediata com o auxílio de uma única tábua numérica.

INTRODUÇÃO

No antigo método de balanço hidrológico de THORNTHWAITE, bem conhecido na Península Ibérica através da obra de TAMÉS (1950), admitia-se que, enquanto o limite inferior da capacidade utilizável não era atingido, a intensidade média da evapotranspiração real se mantinha constante e igual ao seu valor potencial, isto é, aceitava-se que, na ausência de afluxo meteórico, a água útil era evapotranspirada a taxa independente do teor de humidade do solo.

(*) Comunicação ao XXIV Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências, Madrid, 14-19 Novembro 1958.

Apesar de alguns autores (HALKIAS, VEIHMAYER and HENDRICKSON, 1955) considerarem o facto como confirmado pelos dados experimentais, há fortes razões para crer que, pelo contrário, a intensidade do fenómeno evapotranspiratório se vá atenuando à medida que o tempo passa. Concretizando, poderá supor-se que a taxa da perda real B da água do solo seja função crescente do volume armazenado A , e a hipótese mais simples é a da proporcionalidade directa:

$$1) \quad \frac{dB}{dt} = kA,$$

com k constante. É esta a hipótese basilar do novo método preconizado por THORNTWHAITE e MATHER.

No seu trabalho (THORNTWHAITE and MATHER, 1955), estes autores reportam-se sistematicamente à capacidade utilizável $U = 300$ mm, a única que as tabelas e o ábaco apresentados permitem abordar (*).

A finalidade da presente memória é o tratamento matemático da questão, de forma a obter as fórmulas e a tábua necessárias à resolução prática dos casos concretos respeitantes a qualquer valor de U .

ESTABELECIMENTO DAS FÓRMULAS

Supondo preenchida na origem dos tempos a capacidade de campo, na ausência de afluxo a perda de água B até ao instante t vale

$$2) \quad B = U - A$$

e 1) escreve-se

$$3) \quad \frac{dB}{dt} = k(U - B).$$

(*) Em Novembro de 1958, durante a revisão das provas tipográficas do presente artigo, o autor recebeu da firma C. W. Thornthwaite Associates anúncio de que (embora datado de 1957) acabava de ser publicado o trabalho de THORNTWHAITE e MATHER intitulado *Instructions and Tables for Computing Potential Evapotranspiration and the Water Balance*, contendo, entre outras, «Soil Moisture Retention Tables for Soils with Water Holding Capacities Ranging from 25 mm to 400 mm and 1 inch to 16 inches».

Seja L a perda de água potencial no intervalo de tempo T , quer dizer, a diferença entre a evapotranspiração potencial e a precipitação no mesmo intervalo. Então, visto nas condições indicadas a evapotranspiração real coincidir com a potencial para $t = 0$, tem-se

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{t=0} = kU = \frac{L}{T},$$

donde

$$k = \frac{L}{UT}$$

e, por substituição em 3),

$$\frac{dB}{dt} = \frac{L}{UT} (U - B).$$

Integrando, resulta

$$\int_0^B \frac{dB}{U-B} = \frac{L}{UT} \int_0^T dt,$$

isto é,

$$4) \quad \log \frac{U}{U-B} = \frac{L}{U},$$

que, por 2), se escreve

$$5) \quad \log \frac{A}{U} = -\frac{L}{U},$$

ou

$$6) \quad \frac{A}{U} = e^{-\frac{L}{U}},$$

onde A , tal como B em 4), tem o valor correspondente a $t = T$.

Adoptando U para unidade, ou seja, considerando os valores reduzidos. adimensionais,

$$7) \quad \alpha = \frac{A}{U}$$

e

$$8) \quad \lambda = \frac{L}{U},$$

a fórmula 6) toma o aspecto

$$9) \quad \alpha = e^{-\lambda}.$$

A Tábua de logarítmos naturais dos inversos, colocada no fim, foi organizada de modo a fornecer α em função de λ com erro inferior a 0,001.

Em climas, como o mediterrânico, em que o ano hidrológico comporta uma época de escassa precipitação, pode suceder que, para valores de U acima de certo limite, a capacidade de campo nunca chegue a saturar-se.

Torna-se então necessário, para efectuar o balanço, determinar o armazenamento máximo no fim da época húmida.

Para simplificar a exposição, vai considerar-se o caso do balanço mensal reportado ao ano médio.

Sejam N e P as somas dos valores mensais, respectivamente, negativos e positivos das diferenças entre precipitação R e evapotranspiração potencial E :

$$10) \quad \begin{cases} N = \sum \text{neg} (R - E), \\ P = \sum \text{pos} (R - E). \end{cases}$$

Sejam ainda n e p os respectivos valores reduzidos:

$$11) \quad \begin{cases} n = \frac{N}{U}, \\ p = \frac{P}{U}. \end{cases}$$

O valor X de L correspondente ao último mês do período húmido, depois de reduzido,

$$12) \quad x = \frac{X}{U},$$

para que, fechando o ciclo, o armazenamento retome nesse mês o valor do ano anterior, deve satisfazer às seguintes condições:

$$\begin{cases} \lambda = x & \longrightarrow & \alpha = y + p, \\ \lambda = x - n & \longrightarrow & \alpha = y, \end{cases}$$

as quais, por 9), equivalem a

$$\begin{cases} y + p = e^{-x} \\ y = e^{-x+n}, \end{cases}$$

donde

$$13) \quad x = -\log \frac{p}{1 - e^n},$$

fórmula de simples utilização mediante o auxílio da já mencionada Tábua anexa.

É claro que a determinação só é necessária quando for

$$14) \quad p < 1 - e^n.$$

Esta condição nunca pode ser satisfeita por $p > 1$, isto é, $P > U$. Logo, praticamente, o cálculo só é de efectuar para $P < U$.

EXEMPLOS

Como exemplos de aplicação, apresentam-se a seguir os balanços hídricos mensais de dois solos, ambos com a capacidade utilizável $U = 150$ mm, situados um na Tapada da Ajuda (Lisboa) e o outro em Faro.

As primeiras sete linhas dos mapas de cálculo dizem respeito à avaliação das evapotranspirações potenciais E , a partir das temperaturas centígradas médias mensais \bar{T} e das latitudes geográficas (39° N para Lisboa e 37° N para Faro), realizada pelas fórmulas de THORNTHWAITTE (1948).

E_1 designa a evapotranspiração potencial «não corrigida», c o coeficiente de insolação astronómica, \bar{E} a evapotranspiração real, D o deficit hídrico e S o *superavit*.

E_1 , E , R , L , A , \bar{E} , D e S estão expressos em milímetros.

Os dados, \bar{T} e R , relativos a 1921-50, foram extraídos dos mapas n.ºs 12 e 19 do SERVIÇO METEOROLÓGICO NACIONAL (1956).

O expoente a vale 1,734 para a Tapada da Ajuda e 1,836 para Faro.

No primeiro caso, sendo $P = 294,2 > U$, não foi preciso utilizar a fórmula 13).

Para Faro, tem-se $P = 122,7 < U$, $N = -569,4$, $p = 0,818$, $n = -3,796$, $e^n = 0,023$, $1 - e^n = 0,977$ e $p/(1 - e^n) = 0,837$, donde $x = 0,178$ e $X = 26,7$ (valores de λ e L , respectivamente, para Março).

É no cômputo das linhas 10 a 14 que o novo método difere do antigo. Ao passo que neste, enquanto o armazenamento A se não anulava, os valores negativos de $(R - E)$ eram as suas próprias variações ΔA , no novo método eles servem apenas para determinar as perdas potenciais acumuladas L , a partir das quais (por intermédio de λ e x se propõe no presente trabalho) se calculam os armazenamentos e só depois os respectivos acréscimos ΔA .

SUMMARY

The mathematical theory involved in the THORNTHWAITE and MATHER new method for evaluating the water balance is developed.

It is shown that the introduction of dimensionless parameters — a , λ , n and p , defined by the formulas 7), 8) and 11), where U represents the storage capacity, A the actual storage, L the accumulated potencial water loss, N the sum of the negative and P that of the positive differences between precipitation and potencial evapotranspiration — allows the computation to be carried out, for all values of U , by means of the two equations 9) e 13).

Moreover, the use of both these equations can be made very easy with the help of a single table, that of the natural logarithms of the reciprocals, given at the end of the paper.

BIBLIOGRAFIA

HALKIAS, N. A., F. J. VEIHMAYER and A. H. HENDRICKSON

1955 Determining Water Needs for Crops from Climatic Data. *Hilgardia* 24 (9): 207-233.

SERVIÇO METEOROLÓGICO NACIONAL

1956 *O Clima de Portugal*, fasc. 9: Valores médios dos elementos climáticos no território nacional em 1921-1950. Lisboa.

TAMÉS ALARCÓN, Cayetano

1950 Cálculo del Agua Necesária para el Riego y Empleo de Águas Salinas. *Publ. Minist. Agric., Madr., Monogr.*, 1.

THORNTHWAITE, C. W.

1948 An approach toward a rational classification of climate. *Geogr. Rev.* 38: 55-94.

THORNTHWAITE, C. W. and J. R. MATHER

1955 The Water Balance. *Publ. Clim. Drexel Inst. Technol.* 8 (1).

TÁBUA

dos Logaritmos Naturais dos Inversos

	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,00	∞	6,908	6,215	5,809	5,521	5,298	5,116	4,962	4,828	4,711
0,01	4,605	4,510	4,423	4,343	4,269	4,200	4,135	4,075	4,017	3,963
0,02	3,912	3,863	3,817	3,772	3,730	3,689	3,650	3,612	3,576	3,540
0,03	3,507	3,474	3,442	3,411	3,381	3,352	3,324	3,297	3,270	3,244
0,04	3,219	3,194	3,170	3,147	3,124	3,101	3,079	3,058	3,037	3,016
0,05	2,996	2,976	2,957	2,937	2,919	2,900	2,882	2,865	2,847	2,830
0,06	2,813	2,797	2,781	2,765	2,749	2,733	2,718	2,703	2,688	2,674
0,07	2,659	2,645	2,631	2,617	2,604	2,590	2,577	2,564	2,551	2,538
0,08	2,526	2,513	2,501	2,489	2,477	2,465	2,453	2,442	2,430	2,419
0,09	2,408	2,397	2,386	2,375	2,364	2,354	2,343	2,333	2,323	2,313
0,10	2,303	2,293	2,283	2,273	2,263	2,254	2,244	2,235	2,226	2,216
0,11	2,207	2,198	2,189	2,180	2,172	2,163	2,154	2,146	2,137	2,129
0,12	2,120	2,112	2,104	2,096	2,087	2,079	2,071	2,064	2,056	2,048
0,13	2,040	2,033	2,025	2,017	2,010	2,002	1,995	1,988	1,981	1,973
0,14	1,966	1,959	1,952	1,945	1,938	1,931	1,924	1,917	1,911	1,904
0,15	1,897	1,890	1,884	1,877	1,871	1,864	1,858	1,852	1,845	1,839
0,16	1,833	1,826	1,820	1,814	1,808	1,802	1,796	1,790	1,784	1,778
0,17	1,772	1,766	1,760	1,754	1,749	1,743	1,737	1,732	1,726	1,720
0,18	1,715	1,709	1,704	1,698	1,693	1,687	1,682	1,677	1,671	1,666
0,19	1,661	1,655	1,650	1,645	1,640	1,635	1,630	1,625	1,619	1,614
0,20	1,609	1,604	1,599	1,595	1,590	1,585	1,580	1,575	1,570	1,565
0,21	1,560	1,556	1,551	1,546	1,542	1,537	1,532	1,528	1,523	1,519
0,22	1,514	1,510	1,505	1,501	1,496	1,492	1,487	1,483	1,478	1,474
0,23	1,470	1,465	1,461	1,457	1,452	1,448	1,444	1,440	1,435	1,431
0,24	1,427	1,423	1,419	1,415	1,411	1,406	1,402	1,398	1,394	1,390
0,25	1,386	1,382	1,378	1,374	1,370	1,366	1,363	1,359	1,355	1,351
0,26	1,347	1,343	1,339	1,336	1,332	1,328	1,324	1,321	1,317	1,313
0,27	1,309	1,306	1,302	1,298	1,295	1,291	1,287	1,284	1,280	1,277
0,28	1,273	1,269	1,266	1,262	1,259	1,255	1,252	1,248	1,245	1,241
0,29	1,238	1,234	1,231	1,228	1,224	1,221	1,217	1,214	1,211	1,207
0,30	1,204	1,201	1,197	1,194	1,191	1,187	1,184	1,181	1,178	1,174
0,31	1,171	1,168	1,165	1,162	1,158	1,155	1,152	1,149	1,146	1,143
0,32	1,139	1,136	1,133	1,130	1,127	1,124	1,121	1,118	1,115	1,112
0,33	1,109	1,106	1,103	1,100	1,097	1,094	1,091	1,088	1,085	1,082
0,34	1,079	1,076	1,073	1,070	1,067	1,064	1,061	1,058	1,056	1,053
0,35	1,050	1,047	1,044	1,041	1,038	1,036	1,033	1,030	1,027	1,024
0,36	1,022	1,019	1,016	1,013	1,011	1,008	1,005	1,002	1,000	0,997
0,37	0,994	0,992	0,989	0,986	0,983	0,981	0,978	0,976	0,973	0,970
0,38	0,968	0,965	0,962	0,960	0,957	0,955	0,952	0,949	0,947	0,944
0,39	0,942	0,939	0,936	0,934	0,931	0,929	0,926	0,924	0,921	0,919

	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,40	0,916	0,914	0,911	0,909	0,906	0,904	0,901	0,899	0,896	0,894
0,41	892	889	887	884	882	879	877	875	872	870
0,42	868	865	863	860	858	856	853	851	849	846
0,43	844	842	839	837	835	832	830	828	826	823
0,44	821	819	816	814	812	810	807	805	803	801
0,45	0,799	0,796	0,794	0,792	0,790	0,787	0,785	0,783	0,781	0,779
0,46	777	774	772	770	768	766	764	761	759	757
0,47	755	753	751	749	747	744	742	740	738	736
0,48	734	732	730	728	726	724	722	719	717	715
0,49	713	711	709	707	705	703	701	699	697	695
0,50	0,693	0,691	0,689	0,687	0,685	0,683	0,681	0,679	0,677	0,675
0,51	673	671	669	667	666	664	662	660	658	656
0,52	654	652	650	648	646	644	642	641	639	637
0,53	635	633	631	629	627	625	624	622	620	618
0,54	616	614	612	611	609	607	605	603	601	600
0,55	0,598	0,596	0,594	0,592	0,591	0,589	0,587	0,585	0,583	0,582
0,56	580	578	576	574	573	571	569	567	566	564
0,57	562	560	559	557	555	553	552	550	548	546
0,58	545	543	541	540	538	536	534	533	531	529
0,59	528	526	524	523	521	519	518	516	514	512
0,60	0,511	0,509	0,507	0,506	0,504	0,503	0,501	0,499	0,498	0,496
0,61	494	493	491	489	488	486	485	483	481	480
0,62	478	476	475	473	472	470	468	467	465	464
0,63	462	460	459	457	456	454	453	451	449	448
0,64	446	445	443	442	440	439	437	435	434	432
0,65	0,431	0,429	0,428	0,426	0,425	0,423	0,422	0,420	0,419	0,417
0,66	416	414	412	411	409	408	405	405	403	402
0,67	400	399	397	396	395	393	392	390	389	387
0,68	386	384	383	381	380	378	377	375	374	373
0,69	371	370	368	367	365	364	362	361	360	358
0,70	0,357	0,355	0,354	0,352	0,351	0,350	0,348	0,347	0,345	0,344
0,71	342	341	340	338	337	335	334	333	331	330
0,72	329	327	326	324	323	322	320	319	317	316
0,73	315	313	312	311	309	308	307	305	304	302
0,74	301	300	298	297	296	294	293	292	290	289
0,75	0,288	0,286	0,285	0,283	0,282	0,281	0,280	0,278	0,277	0,276
0,76	274	273	272	270	269	268	267	265	264	263
0,77	261	260	259	257	256	255	254	252	251	250
0,78	248	247	246	245	243	242	241	240	238	237
0,79	236	234	233	232	231	229	228	227	226	224

	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,80	0,223	0,222	0,221	0,219	0,218	0,217	0,216	0,214	0,213	0,212
0,81	211	209	208	207	206	205	203	202	201	200
0,82	198	197	196	195	194	192	191	190	189	188
0,83	186	185	184	183	182	180	179	178	177	176
0,84	174	173	172	171	170	168	167	166	165	164
0,85	0,163	0,161	0,160	0,159	0,158	0,157	0,155	0,154	0,153	0,152
0,86	151	150	149	147	146	145	144	143	142	140
0,87	139	138	137	136	135	134	132	131	130	129
0,88	128	127	126	124	123	122	121	120	119	118
0,89	117	115	114	113	112	111	110	109	108	106
0,90	0,105	0,104	0,103	0,102	0,101	0,100	0,099	0,098	0,097	0,095
0,91	094	093	092	091	090	089	088	087	086	084
0,92	083	082	081	080	079	078	077	076	075	074
0,93	073	071	070	069	068	067	066	065	064	063
0,94	062	061	060	059	058	057	056	054	053	052
0,95	0,051	0,050	0,049	0,048	0,047	0,046	0,045	0,044	0,043	0,042
0,96	041	040	039	038	037	036	035	034	033	031
0,97	030	029	028	027	026	025	024	023	022	021
0,98	020	019	018	017	016	015	014	013	012	011
0,99	010	009	008	007	006	005	004	003	002	001

Exemplo: $0,837 = e^{-0,178}$.