UNIVERSIDADE DE LISBOA

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

AS REPRESENTAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDADE INVERSA

Maria Luísa Ribeiro Abranches de Almeida Simões Bolota

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e Secundário

2011

UNIVERSIDADE DE LISBOA

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

AS REPRESENTAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDADE INVERSA

Orientadora: Professora Doutora Hélia Oliveira

Co-orientadora: Professora Doutora Suzana Nápoles

Maria Luísa Ribeiro Abranches de Almeida Simões Bolota

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e Secundário

2011

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Hélia Oliveira, pelo constante incentivo e exigência, pela disponibilidade e confiança manifestadas, e por ter acreditado em mim desde o primeiro momento.

À co-orientadora, Professora Doutora Suzana Nápoles, pela ajuda prestada ao longo deste ano.

Aos Professores Doutores, Leonor Santos, Henrique Guimarães, Maria João Gouveia e Margarida César que me ajudaram a "trilhar" novos caminhos.

Aos meus colegas da Faculdade de Ciências, Filipe e Joana e a todos os colegas do Mestrado, pelo incentivo e ajuda em todos os momentos.

A todo o Colégio, nos elementos da direcção, nos colegas docentes e não docentes onde desenvolvi este trabalho, por me ter apoiado na sua realização.

Ao meu professor cooperante Carlos Pires que aceitou este desafio e partilhou sempre comigo todos os momentos de trabalho, com enorme profissionalismo, dedicação e muita amizade.

Aos meus colegas e amigos Ana e Nuno, pelo incentivo, colaboração e disponibilidade.

A todos os alunos, em especial aos alunos escolhidos para este estudo, que de forma carinhosa aceitaram os meus desafios e colaboraram nas minhas propostas.

À Babey e à Isabel, por compreenderem sempre as minhas ausências, "com um sorriso carinhoso".

Em especial, à Joana ao Diogo e ao Tony, pelo incentivo e apoio e especialmente pela forma paciente como me acompanharam durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais (em lugares diferentes), por estarem sempre ao meu lado, apoiando-me e incentivando-me.

Resumo

Este trabalho pretende analisar como os alunos utilizam as representações de uma função e como estabelecem conexões entre elas, para interpretar e resolver problemas de proporcionalidade inversa bem como as dificuldades por eles apresentadas. A utilização dos conhecimentos sobre proporcionalidade directa, em especial as representações que lhes estão associadas é o ponto de partida deste estudo, de forma a introduzir a proporcionalidade inversa.

O estudo assenta na leccionação de seis aulas de 90 minutos, no tema de Proporcionalidade Inversa e segue uma metodologia qualitativa, baseada em estudos de caso. Os participantes são os alunos de uma turma de 9.º ano do Ensino Básico. A recolha de dados é feita da observação e registo das aulas leccionadas, da recolha das resoluções dos alunos das tarefas propostas, de um teste escrito, questões do 1.º teste intermédio de Matemática de 2010/2011 e duma entrevista a um grupo de alunos.

Os resultados evidenciam estratégias diferentes por parte dos alunos, na resolução de tarefas que envolvem a proporcionalidade inversa, a partir das representações verbais e numéricas. Alguns alunos reconhecem a existência de proporcionalidade inversa a partir da invariância do produto de duas variáveis e a partir daí resolvem os problemas "invertendo" o raciocínio, outros apoiam-se no contexto e recorrem ao método da tentativa e erro. Perante a representação sob a forma de expressão algébrica, há alunos que revelam dificuldades na resolução de problemas porque não atribuem significado às variáveis. Ao invés, há quem se apoie na sua vivência, apesar de manifestar dificuldades na escrita de expressões, conseguindo resolver problemas, em especial, os que envolvem situações de contexto da semi-realidade. É sobretudo quando está envolvida a representação algébrica, que surgem mais dificuldades nas conexões entre representações. Perante as representações gráfica e tabelar, de uma maneira geral recolhem a informação necessária sem problemas.

Palavras-chave: Representações, funções, proporcionalidade Inversa, resolução de problemas.

Abstract

This study aims to examine how students use one function's multiple representations and how they establish connections among them, to interpret and solve inverse proportionality problems, as well as the difficulties they face. The use of students' knowledge of direct proportionality, in particular the representations associated with it, is the starting point of this study for introducing the inverse proportionality.

The study is based on the teaching of six lessons of 90 minutes each on the topic of Inverse Proportionality and follows a qualitative methodology based on case studies. The participants are students in a class of grade 9 in an elementary school. Data collection is done through the observation and recording of lessons, the collection of students' resolutions of the proposed tasks, a written test, questions from the national middle year test, and an interview applied to some students.

The results show the use of different strategies by students, when solving inverse proportionality problems, in verbal and numerical representations. Some students recognize the existence of inverse proportionality from the invariance of the product of two variables, and then solve problems "inverting" the reasoning. Other students rely on context and use the method of trial and error.

Given the algebraic expression, there are students who have difficulties in solving problems because they don't attribute meaning to variables. Instead, there are students who rely on their experience, despite difficulties in written expressions, and are able to solve problems, in particular those involving a context from the semi-reality.

It is especially when it is involved the algebraic representation, that students have more difficulties in the connecting the various representations. Usually when confronting themselves with the graphical representation and the table, the students collect the required information without problems.

Keywords: Representations, Functions, Inverse Proportionality, Resolution of Problems.

Índice

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Índice de Anexos

Introdução

O tema do meu trabalho desenvolve-se em torno das representações na resolução de problemas de proporcionalidade inversa e incidiu especificamente sobre a unidade de ensino "Proporcionalidade Inversa", incluída no tema da Álgebra, trabalhada no 9.º ano, no início do 2.º período. Nesta unidade, propus-me trabalhar com os alunos, as várias representações (algébrica, verbal, gráfica e tabular) de uma função, na interpretação e resolução de problemas e modelação de situações de proporcionalidade directa e inversa, as funções do tipo $y = kx$ e $y = \frac{k}{x}$ com k diferente de zero.

Tendo em conta os desafios que nos são lançados hoje no ensino da Matemática, assentes nas novas finalidades, objectivos gerais e específicos da disciplina e na melhor utilização dos recursos disponíveis, preparei cuidadosamente a minha intervenção lectiva, procurando, desta forma, cumprir com as indicações do programa de Matemática (ME, 2007).

Neste sentido, de acordo com o programa da disciplina de Matemática, para o último ano do 3.º ciclo, e com o novo programa da matemática, pretende-se que os alunos alarguem e aprofundem o estudo das relações, nomeadamente da proporcionalidade directa e proporcionalidade inversa, ambas trabalhadas como funções. Um dos propósitos principais de ensino do novo programa de Matemática do Ensino Básico é também desenvolver nos alunos a capacidade de resolução de problemas.

Este estudo pretende contribuir para alterar a ideia de que a álgebra é apenas um conjunto de regras a memorizar, sendo antes um tema onde a interpretação e a resolução de problemas têm importância fundamental, daí a relevância dada no novo programa às várias representações. O meu estudo, no âmbito da Álgebra, pretende compreender em que medida os alunos do 9.º ano conseguem utilizar as várias representações para resolver problemas de proporcionalidade inversa. Para responder à minha problemática, formulei as seguintes questões:

- Como é que os alunos mobilizam o seu conhecimento matemático sobre proporcionalidade directa, em particular as representações que lhes estão associadas, na resolução de problemas de Proporcionalidade Inversa?

- De que forma os alunos usam as várias representações (tabelas, gráficos, expressão analítica) na resolução de problemas? E que conexões estabelecem entre elas?
- Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas relativos à Proporcionalidade Inversa?

Um aspecto central do meu papel, enquanto professora, assenta na preparação de aulas e na elaboração de tarefas, porque acredito que são importantes para a aprendizagem dos alunos e ao mesmo tempo permitem perceber melhor como é estes, a partir das várias representações e conceitos algébricos que já conheciam, resolvem problemas, em especial perante situações de proporcionalidade inversa.

A elaboração das tarefas foi feita com a preocupação de propor problemas predominantemente de contexto de semi-realidade, apesar de surgirem também problemas de matemática pura (Ponte, 2005), estabelecendo a ponte com situações de proporcionalidade directa, promovendo a aprendizagem cooperativa e a discussão dos resultados em grupo turma.

Estas tarefas para além de pretenderem desenvolver nos alunos uma *compreensão* da Matemática (reconhecendo regularidades e compreendendo relações e acompanhando um raciocínio ou estratégia matemática), pretendem que os alunos lidem com ideias matemáticas em diversas *representações* (lendo e interpretando representações simbólicas, traduzindo informação a partir duma representação e estabelecendo conexões com outras e usando as representações para modelar várias situações) desenvolvendo nos alunos a capacidade de *comunicar* as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático, de forma a usar as várias representações e procedimentos matemáticos (estabelecendo *conexões* entre eles) para *resolver problemas*, com o objectivo de serem capazes de realizar actividades matemáticas com autonomia.

Assim, o meu estudo pretende ir ao encontro das capacidades transversais referidas no programa (ME, 2007), no que se refere à resolução de problemas e à comunicação matemática, na vertente oral e escrita, em particular a que decorre da participação nos momentos de discussão em pequeno e grande grupo, procurando compreender como são utilizadas as várias representações na resolução desses problemas.

1. Enquadramento do estudo

A problemática do estudo, que me propus desenvolver no âmbito da leccionação da unidade didáctica Proporcionalidade Inversa, no 9.º ano de escolaridade, pretende compreender de que forma as representações são usadas na resolução de problemas de proporcionalidade inversa.

Para o efeito os alunos são levados a interpretar e representar situações usando linguagem e procedimentos algébricos, a compreender e usar o conceito de função, em particular de proporcionalidade directa e inversa, e a resolver problemas, comunicando e raciocinando, modelando situações recorrendo a procedimentos algébricos, o que vai ao encontro dos objectivos previstos tanto pelo Currículo Nacional do Ensino Básico como pelo programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), no que diz respeito ao tema em questão.

As representações, algébrica, gráfica e tabelar, surgem em ambos os documentos referidos. No primeiro é referido como uma competência a desenvolver nos alunos de forma a terem "aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas (…) e a sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade directa e inversa." (ME-DEB, 2001, p. 67). No segundo, surge nos objectivos específicos, no sentido de dar resposta ao propósito principal de ensino "desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem com a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos." (ME, 2007, p. 55).

1.1. A aprendizagem da proporcionalidade em Matemática, numa perspectiva de desenvolvimento do pensamento algébrico

1.1.1. O pensamento algébrico

De acordo com o Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007) ao longo do 1.º e do 2.º ciclo, os alunos desenvolvem o seu pensamento algébrico, isto é desenvolvem ideias algébricas a partir de sequências e regularidades e de exploração de diversos tipos de relações que levem à determinação da lei de formação da sequência.

Por outro lado, no Currículo Nacional é referida a importância dada na utilização da matemática para resolver problemas, não se ficando apenas pela aquisição de de regras e técnicas. Portanto, as várias representações e conexões entre elas são fundamentais na resolução de problemas.

Fiorentini, Miorim e Miguel (in Ponte, 2006) propõem um ensino da Álgebra, que leve os alunos a "pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essa regularidade através de estruturas ou expressões matemáticas, para pensar analiticamente, estabelecer relações entre grandezas variáveis" (p. 87).

Como diz Arcavi (in Ponte, 2006), no pensamento algébrico dá-se atenção não apenas aos objectos mas às relações entre eles, relações estas sempre que possível de forma a raciocinar de modo abstracto. Por isso privilegia-se o estudo de padrões e regularidades.

Também Tabach e Friedlander (2009) defendem que a aprendizagem de regras e procedimentos deve ser baseada inicialmente em objectivos aos quais seja atribuído significado, pois só assim podem justificar os seus procedimentos. Consideram ainda que a interpretação baseada na experiência pessoal torna-se mais sólida e concluem dos estudos feitos que diferentes interpretações encaminham para diferentes soluções e a comparação das soluções levam à necessidade de interpretações adicionais do problema. Desta forma, é fundamental estabelecer uma conexão entre a aritmética e a álgebra.

Kaput e Blanton, (in Ponte, 2006) consideram que o pensamento algébrico, enquanto orientação transversal do currículo, significa: promover hábitos de pensamento e de representação em que se procure a generalização, sempre que possível; tratar os números e as operações algebricamente como objectos formais para o pensamento algébrico e promover o estudo de padrões e regularidades, a partir do 1.º ciclo.

Desta forma, é importante tornar a Álgebra acessível a todos os alunos, criando um ambiente de aula motivador e desafiante que possibilite a aprendizagem com compreensão, isto é, perceber o significado matemático.

Assim, Kaput (in Ponte, 2006) apresenta algumas mudanças que considera necessárias, relativamente ao ensino e aprendizagem da Álgebra, como começar a aprendizagem "cedo", integrando-a com a aprendizagem de outros assuntos. Defende a inclusão de várias formas de pensamento algébrico onde as conexões são de grande importância para a compreensão da matemática.

Curiosamente, estas mudanças, sugeridas por Kaput em 1999, encontram-se bem patentes no programa da Matemática (ME, 2007), onde a iniciação do pensamento algébrico tem lugar no 1.º ciclo.

É também apontada como um dos objectivos gerais do programa a capacidade dos alunos lidarem com ideias matemáticas em diversas representações (ME, 2007) e serem capazes de as utilizar em diferentes situações seleccionando a representação mais adequada à situação em estudo.

1.1.2. A Aprendizagem da proporcionalidade enquanto função

<u>O conceito de função</u>

A existência de uma ligação muito estreita entre os fenómenos naturais e o conceito de função confere a este último um papel preponderante no nosso quotidiano.

A função é um instrumento que permite descrever situações diversas e fazer previsões nas várias áreas do saber, contribuindo assim para melhor compreender a realidade.

Foram problemas práticos, como o estudo das vibrações das cordas dos instrumentos musicais, que levaram Dirichlet (1805-1859) a definir função como uma correspondência arbitrária entre os valores de duas variáveis, tal como hoje é definida:

Definição (**Dirichlet**, 1837): Uma função f: A$\rightarrow$ B consiste em dois conjuntos e uma regra que associa a cada $x \in$ A um único elemento de B. Esta correspondência é representada por $y = f(x)$ ou $x \mapsto f(x)$. Diz-se que y é a imagem de x e x é a imagem inversa de y.

Na terminologia actual o conjunto A é designado por domínio da função f. Ao conjunto $f(A)$ dos valores y que correspondem a pelo menos um $x \in A$ chama-se *contradomínio* da função: $f(A) = \{ y : \exists x \in A$ tal que $y = f(x) \}$.

À letra x (ou qualquer outra) que representa o elemento genérico do domínio A

da função, chama-se *variável independente*; por seu lado, a letra y (ou qualquer outra) que representa o elemento de $f(A)$ que a função faz corresponder a um valor genérico do domínio, é designada por *variável dependente*.

Se A $\in \mathbb{R}$ **e** B $\in \mathbb{R}$, f diz-se uma função real de variável real.

É necessário clarificar desde a primeira abordagem que a definição de uma função não se circunscreve à indicação de uma regra para transformação de variáveis, sendo determinante o conhecimento dos conjuntos a que estas variáveis dizem respeito.

De acordo com a definição dada, o conhecimento sobre a função está completo conhecendo-se o seu domínio e a sua expressão analítica. Assim, duas funções f e g são iguais se tiverem o mesmo domínio e para qualquer ponto do domínio se tiver $f(x) = g(x)$. Por exemplo, as funções f e g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2$, para $x \geq 1$ são funções distintas pois têm domínios diferentes. Com os dados pode-se apenas dizer que $f = g$ em [1,+∞[.

Por outro lado, as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x-1)^2 + 2x - 1$ são idênticas: com efeito, f e g têm o mesmo domínio e as expressões x^2 e $(x-1)^2 + 2x - 1$ são equivalentes.

Em muitos casos o domínio de uma função consiste no conjunto de valores para os quais a sua expressão analítica tem sentido. Nesses casos pode-se omitir a referência concreta ao domínio: pode-se escrever

$$f(x) = \frac{x-1}{x-3}$$

sem especificar o seu domínio, pois considera-se que o domínio é o maior conjunto onde a função tem sentido, ou seja o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Há, no entanto, situações em que é necessária a indicação do domínio da função. Suponha-se, por exemplo, que se considera a função h que relaciona a temperatura em graus Celsius com a temperatura em graus Fahrenheit. A função h tem por expressão analítica $h(x) = \frac{9}{5}x + 32$, sendo o seu domínio constituído pelos números x maiores ou iguais a -273,15 (zero absoluto). A indicação do domínio de h é neste caso absolutamente necessária, já que a função f definida por $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ está definida para todo o x real.

As funções surgem associadas a tabelas, gráficos, expressões verbais e expressões algébricas, pelo que o trabalho com funções leva os alunos a considerar as letras como variáveis, as expressões como correspondências, o referencial cartesiano como um espaço onde é apresentado o resultado da relação entre variáveis e o sinal de igualdade como a indicação da identidade entre dois processos. O seu estudo contribui para o desenvolvimento da literacia matemática, no que se refere à capacidade para resolver problemas da vida real, enquanto cidadão preocupado e crítico.

O Conceito de Proporcionalidade

O conceito de proporcionalidade traduz uma relação entre duas variáveis x e y. Se $y = mx$ onde m é uma constante diferente de zero, dizemos que y é directamente proporcional a x. Surge naturalmente associada à proporcionalidade directa uma função do tipo $y = mx$, com m diferente de zero.

Pode-se afirmar que os alunos reconhecem situações de proporcionalidade duma forma intuitiva: "*Três quilogramas de morangos custam 2,25€. Quanto custam 2,5 quilogramas?*". Reconhecem a existência de uma relação entre duas variáveis, a quantidade de morangos e o preço. Se variar a quantidade de morangos, o preço total varia proporcionalmente. Esta é a origem do raciocínio multiplicativo. Podem resolver a questão, procurando saber o preço de cada quilo, para depois multiplicar por 2,5Kg ou utilizando a regra de três simples.

Desde cedo que se desenvolve no indivíduo a noção de proporcionalidade, em diversas situações, principalmente as ligadas a preços. As várias estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problemas de proporcionalidade directa são diversas como "redução à unidade" - estratégia mais intuitiva usada por alunos mais novos, comparação das razões e regra de três simples. A compreensão deste conceito é determinante para a introdução do conceito de proporcionalidade inversa.

No nosso quotidiano surgem situações onde o que se mantém invariável é o produto de duas variáveis, $xy = k$ com k constante diferente de zero, conduzindo à introdução do conceito de proporcionalidade inversa. Esta designação justifica-se plenamente já que neste caso a variável y é directamente proporcional a $\frac{1}{x}$, isto é, y é proporcional ao inverso de x.

Exemplifica-se em seguida esse tipo de situações:

Encomendou-se uma mobília a um carpinteiro. Para organizar o trabalho o carpinteiro elaborou o seguinte quadro:

Horas de trabalho por dia	Dias gastos na execução da obra
4	30
6	20
8	15
10	12

1. A relação entre o número de horas de trabalho por dia e o número de dias gastos na execução da obra é uma proporcionalidade inversa. Explica porquê.
2. Qual é a constante da proporcionalidade? Que significado tem neste exemplo?
3. Se o carpinteiro trabalhasse nessa obra apenas duas horas por dia, quantos dias levaria ele a executá-la para a completar no mesmo número de horas?
4. E se quisesse completar o trabalho em 24 dias, quantas horas deveria trabalhar diariamente?

Sistematizando ideias de diversos autores, Silvestre e Ponte (2009), sugerem que o raciocínio proporcional envolve três condições: (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de natureza proporcional de situações que não o têm; (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (iii) capacidade de resolução de vários tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afectado pelos dados numéricos, pelo contexto, pela linguagem utilizada e pela forma como os problemas são apresentados.

As representações assumem um papel fundamental em Matemática. Para o NCTM (2007), as representações deverão ser a base da compreensão das relações matemáticas.

Segundo a DGIDC, existem quatro modos principais de representar uma função: através de enunciados verbais, usando a linguagem natural; graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros; aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências.

Estes modos de representação podem ser usados em conjunto, sendo a informação relativa a uma dada função apresentada muitas vezes parcialmente numa representação e parcialmente noutras representações.

Assim, os alunos devem compreender que uma função é uma correspondência unívoca entre dois conjuntos, em que a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada, onde se satisfaz uma certa condição. Podemos ilustrar essa situação em diagrama sagital, fazendo corresponder a cada elemento do domínio uma e uma só imagem. Esta representação é também útil para exemplificar correspondências entre dois conjuntos que são funções e correspondências entre dois conjuntos que não o são, por exemplo, a Joana tem duas nacionalidades, logo, a correspondência entre pessoas e nacionalidades não é uma função.

No 3.º ciclo, as representações mais importantes do conceito de função são as tabelas, os gráficos cartesianos e as expressões algébricas. As tabelas permitem representar funções em que o domínio tem um número significativo de elementos e os gráficos cartesianos e as expressões algébricas permitem representar funções cujo domínio é um conjunto infinito.

1.2. Representações

1.2.1. As representações nas orientações curriculares

A representação desempenha papel extremamente importante na educação matemática e inclui também "a educação aritmética", tal como refere Nakahara (2008). Todo o seu trabalho assenta no Princípio de Bruner EIS, onde salienta que é possível dividir a representação em três classificações, que descrevem as etapas de desenvolvimento sequencial da representação:

(E) representação enativa

(I) a representação icónica

(S) a representação simbólica

Em 1989, o National Council of Teachers of Mathematics apresentou um documento inovador: a publicação do seu currículo e normas de avaliação para a

Matemática Escolar (Jones, 2006). Este documento apresenta uma visão da matemática da escola para o final do século XX. Incluem-se nesta visão não apenas as normas de conteúdo, mas também quatro normas de processo que descreve o núcleo de fazer matemática, comum a todos os níveis de ensino: 1) a resolução de problemas, 2) raciocínio, 3), comunicação e 4) conexões. Talvez um dos aspectos mais inovadores das Normas foi o facto de, para além do conteúdo matemático a ser ensinado, há que atender às maneiras como os alunos devem aprender: "o que um aluno aprende depende em grande medida de como ele ou ela tenha aprendido" (Jones, 2006).

Neste projecto, um quinto processo de representação foi adicionado aos quatro originais. Um argumento para a sua inclusão nas normas de matemática assenta em três razões: 1) a fluência na tradução entre diferentes formas de representações de base para ser capaz de formar conceitos e pensar matematicamente, 2) a forma como as ideias matemáticas são representadas pelos professores tem um impacto sobre a matemática apreendida e 3) os alunos precisam de prática na construção de suas próprias representações para resolverem os seus problemas (Jones, 2006).

Muitos autores referem uma articulação entre as várias representações – numérica, algébrica, tabelar, gráfica e verbal. Quanto maior for o conhecimento e compreensão, por parte dos alunos, das várias representações e das conexões que se podem estabelecer entre elas, maior capacidade têm para compreender situações reais possibilitando-lhes a interligação entre os diversos conhecimentos. Além do mais, as representações permitem aos alunos organizar e comunicar as suas ideias, daí a sua importância. O uso dessas representações – verbais, numéricas, gráficas e algébricas – é muito importante para a aprendizagem, pois tornam a comunicação muito mais eficaz.

As várias representações aparecem também nos *Princípios e Normas* (NCTM, 2000) como elementos essenciais na aprendizagem da Matemática. Segundo o NCTM (2000), as representações não devem ser vistas como finalidades, mas sim como elementos essenciais na compreensão e comunicação de ideias matemáticas. Desta forma as representações desempenham um papel fundamental na compreensão e na resolução de problemas. A aprendizagem das representações deve ser entendida como um instrumento fundamental na compreensão e comunicação de ideias matemáticas.

Alguns autores referem, ainda, que os alunos, à medida que vão avançando no nível de aprendizagem da matemática, recorrem a diferentes representações (desde o recurso a um exemplo concreto a matrizes, passando por tabelas, gráficos e representação algébrica), identificando pontos fortes e fracos de cada uma delas.

Também o programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) dá bastante importância às representações em todos os níveis de ensino, o que não acontecia anteriormente. O programa de matemática refere o desenvolvimento da capacidade de passar de uma forma de representação para outra e escolher a representação mais adequada perante uma situação concreta. Outra novidade no programa é o reconhecimento do uso de representações pessoais em todos os ciclos, bem como a importância dada às representações, enquanto forma de comunicação matemática.

Podemos ainda encontrar no novo programa de Matemática, indicadores que reportam para a importância de conhecer e trabalhar com diferentes representações, como se pode verificar nos seguintes tópicos:

- Ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação;
- Traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
- Elaborar e usar representações para registar, interpretar e reflectir sobre situações matemáticas e não matemáticas;
- Usar representações para modelar, interpretar e reflectir sobre situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais. (ME, 2007, p. 5).

As representações estão associadas ao estudo de funções, mais concretamente às que representam situações de proporcionalidade directa e proporcionalidade inversa. O NCTM (2000) também destaca a importância dos vários tipos de representação de uma função, no 3.º ciclo do ensino básico.

O trabalho a que me propus envolve, para além das representações verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas, a análise das relações existentes entre essas representações e de que forma elas são utilizadas para resolver problemas, em especial situações de proporcionalidade inversa. Pretendo estudar como é que os alunos passam dumas representações para outras, de modo a resolver de forma mais eficaz os problemas algébricos propostos, tornando assim a aprendizagem significativa.

Os alunos devem compreender que uma função é uma correspondência unívoca entre dois conjuntos, em que a cada elemento do conjunto de partida, o domínio da função, corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.

Na introdução ao estudo das funções podemos recorrer ao diagrama sagital. Esta representação é muito útil para exemplificar correspondências entre dois conjuntos, que poderão ser funções ou não; por exemplo, a Joana tem duas nacionalidades, logo, a correspondência entre pessoas e nacionalidades não é uma função.

No 3.º ciclo, as representações mais importantes do conceito de função são as tabelas, os gráficos cartesianos e as expressões algébricas. Uma tabela é suficiente para caracterizar uma função desde que contenha as imagens de todos os elementos do domínio. Na generalidade dos casos as tabelas são construídas a partir de expressões algébricas para apoiar a construção de gráficos.

Como se pode verificar, no *Currículo Nacional*, a competência matemática a desenvolver no domínio da Álgebra e Funções, ao longo de todos os ciclos, inclui "a aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos" (ME, 2001, p. 66). Para além dos aspectos gerais comuns a todos os ciclos, há ainda a considerar aspectos específicos para o 3.º ciclo, que passo a indicar:

- A compreensão do conceito de função e das facetas que pode apresentar, como correspondência entre conjuntos e como relação entre variáveis;
- A aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;
- A sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade directa e inversa. (ME, 2001, p. 67).

No tema Álgebra, apresentado no novo programa de Matemática do 3.º ciclo, alarga-se e aprofunda-se o estudo das relações, nomeadamente da proporcionalidade directa e introduz-se a inversa, ambas trabalhadas como funções (ME, 2007). As funções são um elemento fundamental do desenvolvimento do pensamento algébrico, como tal devem ser estudadas nas suas várias representações, enquanto ferramentas de resolução de problemas e permitem compreender melhor a realidade.

Contudo, os alunos apresentam dificuldades no que se refere à análise do contexto do problema, à interpretação dos dados fornecidos e à interpretação dos gráficos de funções, no que diz respeito à obtenção de dados qualitativos. A maior dificuldade prende-se com a generalização dos valores numéricos e utilização de variáveis para a obtenção da expressão algébrica e com a conexão entre as várias representações.

A importância das representações ganha relevo para comunicar e exprimir ideias matemáticas.

Assim, nós, professores, devemos contribuir para o desenvolvimento da literacia matemática dos alunos.

1.2.2. As representações no Ensino da Matemática

Para Duval (2006), as representações semióticas e conversão das representações são importantes em todo o processo de aquisição do conhecimento matemático: "Nenhuma actividade matemática pode ser levada a cabo sem usar um sistema de representação semiótico, porque o processo matemático envolve sempre *a substituição de uma representação semiótica por outra*" (p. 107, itálico no original).

Para este autor, as representações semióticas são utilizadas para comunicar (ex: representação verbal, algébrica e gráfica): "O papel desempenhado pelos símbolos, ou mais exactamente pelos sistemas semióticos de representação, não se resume à designação dos objectos matemáticos ou à comunicação, mas consiste também no trabalho com os objectos matemáticos" (p. 107). Para ele o principal problema das representações é a passagem de uma representação para outra.

Para Duval, é preciso distinguir dois tipos de transformações entre representações: o tratamento e a conversão. O tratamento consiste em transformar uma representação numa outra pertencente ao mesmo registo. A conversão transforma uma representação pertencente a um registo numa representação pertencente a outro registo. Também para ele, a linguagem natural é igualmente importante, sobretudo na "descodificação" dos enunciados dos problemas e na comunicação de ideias. Duma forma geral, o estudo das representações em matemática assenta por um lado no papel que desempenham na aprendizagem e por outro na importância da utilização de várias representações do mesmo objecto e como se articulam entre si.

Assim, já Raposo (2009), no seu estudo, refere Eisner o qual expõe cinco ideias relativamente à relação entre as representações e o pensamento: "(i) as representações que utilizamos para pensar limitam o nosso pensamento; (ii) cada representação, sendo mediada por "materiais" específicos, impõe as suas próprias exigências e limitações, conduzindo ao desenvolvimento de ferramentas cognitivas diferentes; (iii) a escolha da representação influencia não só o que se consegue representar, mas também aquilo a que se consegue aceder; (iv) a associação de representações aumenta a acessibilidade à informação e consequentemente à compreensão e aprendizagem; e (v) uma forma de representação pode ser utilizada de maneiras diferentes, cada uma delas apelando a formas de pensamento diferentes." (in Raposo, 2009, p. 19)

Friedlander e Tabach (2001) defendem que a capacidade para trabalhar com várias representações permite eliminar as desvantagens de cada uma delas, tornando "o processo de aprendizagem da Álgebra significativo e efectivo". Para cada tipo de representação são indicadas algumas vantagens e desvantagens, que passo a indicar:

vantagens:

- a representação verbal, que surge a partir do enunciado de um problema e na interpretação dos resultados, estabelece a conexão entre a Matemática e a vida real;
- a representação numérica, muito importante na compreensão inicial de um problema;
- a representação gráfica, facilitadora de aprendizagem, graças ao apelo da visão;
- a representação algébrica é uma forma sintética de representar uma dada situação, que permite a generalização.

desvantagens:

- a representação verbal, depende de individuo para individuo podendo dificultar a comunicação matemática;
- a representação numérica não permite generalizações;
- a representação gráfica pode apenas fornecer uma informação aproximada, dificultando a identificação exacta da solução do problema, pois depende de muitos factores, como a escala, por exemplo;
- a utilização apenas da representação algébrica pode dificultar a interpretação

dos resultados.

Friedlander e Tabach (2001), defendem que o trabalho com as várias representações deve começar, com a iniciação da Álgebra, havendo pois a preocupação de preparar tarefas que obriguem os alunos a recorrer às várias representações, familiarizando-se com elas e estabelecendo relações entre elas, atribuindo-lhes significado. De acordo com os seus estudos, a utilização das representações, também depende da fase da aprendizagem da Álgebra onde os alunos se encontram (numa fase inicial recorrem mais às representações verbais e numéricas e numa fase posterior a representações gráficas e algébrica, esta última envolvendo um elevado grau de abstracção).

Por sua vez, Tripathy (2008) dá muita importância às representações visuais na resolução de problemas pois conseguem estabelecer a relação entre elementos concretos e simbólicos. Assim, os professores devem elaborar tarefas que estimulem os alunos a pensar visualmente e os incentivem a utilizar diferentes representações, nomeadamente a linguagem verbal e a linguagem algébrica, enfatizando assim a ideia de que a utilização de múltiplas representações para a compreensão de um conceito matemático é fundamental para uma aprendizagem significativa da matemática, reforçando a ideia de Triphathy (2008)

Relativamente às dificuldades apresentadas pelos alunos, a maior delas prende-se com a articulação entre representações, em especial perante a resolução de um problema onde é necessário uma compreensão global dos conceitos matemáticos.

De acordo com os estudos feitos por Elia et al. (2007) sobre funções e suas representações, os alunos tiveram melhor desempenho nas tarefas que recorriam a gráficos e pior desempenho em tarefas que recorriam a expressões algébricas, nomeadamente em problemas que requeriam a conversão de representação verbal ou gráfica para a representação algébrica.

De acordo com as conclusões apresentadas por Raposo (2009) é muito importante que na abordagem das funções, no 3.º ciclo e no ensino secundário, se utilizem as representações verbais, numéricas, algébricas e gráficas e sobretudo, que se enfatize a relação entre elas, de forma a evitar a compartimentação que parece existir, especialmente entre a representação algébrica e as representações gráfica e verbal. Considera ainda que se deva dar à representação verbal um papel mais importante do que aquele que se tem dado habitualmente, por considerá-la uma representação válida, sugerindo a diversificação de tarefas de forma a estabelecer conexões entre as várias representações.

Já Candeias (2010) confirmava no seu estudo os resultados de Goldin (2003) e Duval (2002, 2004). Os alunos do 3.º ciclo, no estudo das funções, utilizam frequentemente uma ou mais representações e é na mudança de representação que mostram sentir mais dificuldade. É na ligação entre fórmulas, gráficos, diagramas e expressões verbais das relações, como na interpretação de gráficos e na manipulação de símbolos, que residem as dificuldades sentidas. No seu estudo, verificou que, através da resolução das várias tarefas, englobando os quatro tipos de representações, as dificuldades inicialmente sentidas pelos alunos foram-se dissipando, evidenciando no final uma aprendizagem significativa em comparação com o início do estudo.

Para muitos autores é importante a utilização de várias representações, por permitir uma maior abrangência ao nível da recolha de informação, tentando sempre potenciar as vantagens de cada uma. Outro ponto a reter é a importância atribuída por muitos autores ao papel das representações na resolução de problemas por um lado, na comunicação de ideias, por outro, e ainda na ajuda preciosa ao nível da organização do trabalho.

Relativamente à globalidade das representações é notória que aquela onde os alunos apresentam mais dificuldades é a representação algébrica, já que exige um maior nível de conhecimentos matemático (variável dependente, independente, conceito de função…), assim como a passagem de uma representação para outra.

2. Unidade de Ensino - Proposta Pedagógica

2.1. Caracterização da turma

O estudo incide sobre uma turma do 9.º ano de escolaridade do Colégio D. Luísa Sigea, composta por vinte e sete alunos, sendo que dezasseis são raparigas e onze rapazes. A idade dos alunos, recolhida no início do ano lectivo, varia entre os treze e os quinze anos.

Idades	Número de Alunos
13	1
14	22
15	4

Quadro 1 – Idades dos alunos da turma sobre a qual incide o estudo

Dentro desta turma, os agregados familiares são na sua grande maioria constituídos por famílias entre três a seis elementos. Em termos de formação académica, verifica-se que grande parte dos encarregados de educação tem formação universitária. Relativamente à vida escolar, observa-se que os Encarregados de Educação são atentos e participativos acompanhando os seus educandos no seu processo educativo, participando em grande número nas reuniões de pais e solicitando o Director de Turma com frequência. Estes contactos com o Director de Turma fazem-se presencialmente, no entanto, cada vez mais surge o contacto através do correio electrónico.

Todos os alunos desta turma frequentaram o ensino pré-primário e a maioria fez o seu percurso escolar no ensino particular. Vinte e três alunos não tiveram retenções durante o primeiro e segundo ciclos. Quatro alunos já tiveram uma retenção.

Da turma, quatro alunos estão integrados num Programa Educativo Individual, pelo que a avaliação é adequada as características de cada um deles.

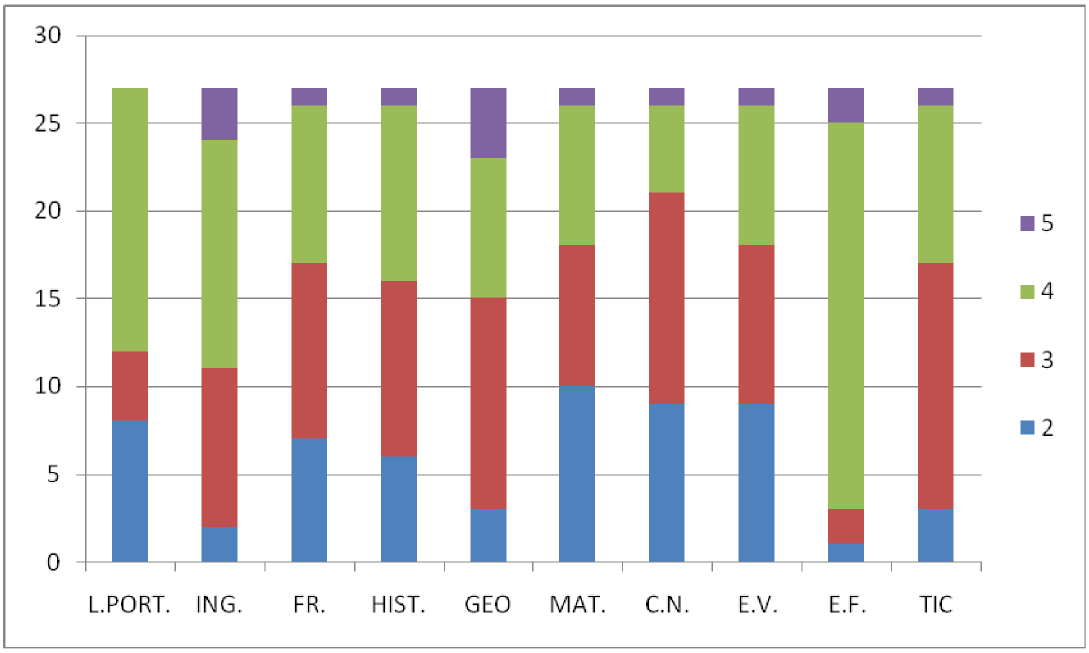
Relativamente à prática diária de estudo, a grande maioria dos alunos afirma ter um local de estudo próprio em casa, destacando-se o seu quarto para tal efeito. Cinco alunos frequentam com regularidade a sala de estudo, no Colégio.

Todos os alunos são possuidores de computadores e apenas um não tem telemóvel. Relativamente ao computador, a utilização é habitual e desenvolta. Nota-se, contudo que os alunos, apesar de algum à vontade nas principais ferramentas de trabalho (navegadores, comunidades, programas de produtividade), apresentam algumas lacunas do ponto de vista de questões mais técnicas, tendo um fraco sentido de segurança e privacidade no que toca à utilização da Internet.

Um aspecto que é conveniente salientar é que a maioria dos alunos manifesta gosto em frequentar esta escola e, quando se pergunta as razões que levaram à escolha da mesma, são apontados a qualidade elevada do ensino, a formação que é dada a nível humano e cívico e o espírito de família que envolve o colégio.

O Conselho de Turma, no final do 1.º período, considerou o aproveitamento apenas de suficiente, uma vez que piorou em relação à avaliação intercalar, verificou-se que o número de faltas (trabalhos de casa, material) duplicou e que quarenta por cento dos alunos desta turma apresentam três ou mais níveis inferiores a três, bem reveladora de falta de empenho e estudo, apesar das capacidades que possuem.

Os resultados obtidos no final do primeiro período estão representados no gráfico que se segue, destacando que há 5 alunos que se encontram no Quadro de Honra do Colégio:



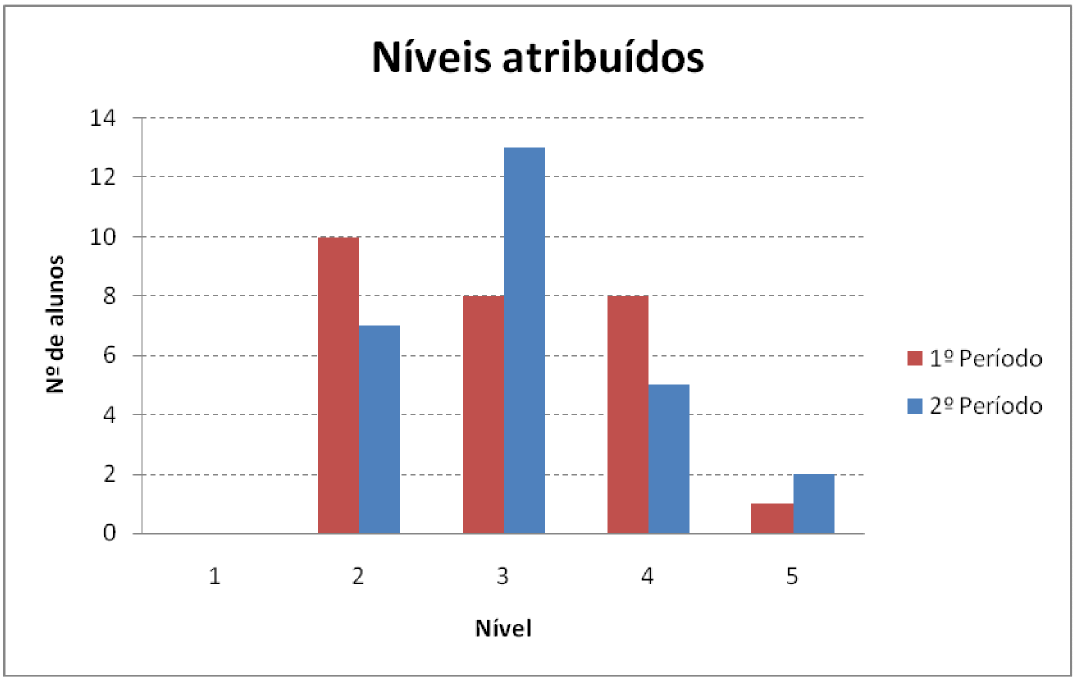
Quadro 2 – Resultados do 1.º período, dos alunos da turma sobre a qual incide o estudo.

Relativamente à questão que aborda as estratégias didácticas, os alunos dizem preferir trabalhar em grupo.

Após várias estratégias de melhoria, desde recurso a espaços personalizados de "100 dúvidas", aulas de reforço de aprendizagem, contactos com encarregados de educação, trabalhos em pequenos grupos, os alunos melhoraram os seus resultados.

Quanto ao aproveitamento da disciplina de Matemática obtida nos dois períodos escolares podemos afirmar que do primeiro para o segundo período melhorou, havendo uma diminuição de 11% de classificações de nível 2. O nível 3 do primeiro para o segundo período teve um acréscimo de 18%. Dos alunos que obtiveram nível 4 no primeiro período um melhorou o seu aproveitamento e dois obtiveram uma classificação inferior (nível 3).

Em termos gerais o aproveitamento do primeiro para o segundo período melhorou em 11%.



Quadro 3 – Níveis atribuídos aos alunos da turma, no 1.º e 2.º períodos.

Os professores da turma, consideram que há um grupo de alunos com muita falta de trabalho e empenho, prejudicando o bom ritmo que a turma podia ter. As maiores dificuldades prendem-se com falta de hábitos de trabalho, interpretação e resolução de problemas e dificuldades de cálculo.

Segundo a análise dos resultados obtidos no final do 2.º período, verifica-se que os alunos têm um aproveitamento satisfatório na maioria das disciplinas, apresentando mais dificuldades nas disciplinas de Língua Portuguesa, História e Matemática. Dos vinte e sete alunos, dez obtiveram três ou mais níveis inferiores a três, incluindo neste número dois dos alunos de necessidades educativas especiais.

O aproveitamento na disciplina de Matemática pode ser considerado apenas de satisfatório, com uma média de classificação de nível 3.07. Na disciplina de Matemática, é muitas vezes utilizado o computador enquanto recurso, utilizam materiais para eles preparados disponibilizados na plataforma do colégio e participam em desafios e concursos, como as Olimpíadas da Matemática, SuperT, ALEA, Sumdog, entre outros.

2.2. Apresentação da Unidade de Ensino

Embora este grupo de alunos do 9.º ano esteja abrangido pelo programa de Matemática de 1991, ao preparar este conjunto de aulas, com o consentimento do professor cooperante e porque entendemos ser uma mais valia para a aprendizagem destes alunos, tive em conta as orientações do novo Programa de Matemática do Ensino Básico e Secundário (ME, 2007). Assim, a presente proposta insere-se no tema Proporcionalidade Inversa, incluído na Álgebra trabalhada no 9.º ano de escolaridade. Este tema foi leccionado entre os dias 24 de Janeiro e 3 de Fevereiro do presente ano lectivo. Durante a minha intervenção, houve necessidade de várias adaptações dos planos de aula.

Durante as referidas aulas, foram trabalhados os subtemas que se apresentam no quadro abaixo (Quadro 4).

Tópicos	N.º de aulas previstas (90m)
Proporcionalidade Directa (revisão)	1
Introdução à Proporcionalidade Inversa	1
Função da proporcionalidade inversa	1
Leitura e interpretação de gráficos	1,5
Representação gráfica de funções	1,5

Quadro 4 - Subtemas a trabalhar no âmbito da unidade Proporcionalidade Inversa

Os objectivos específicos que pretendi atingir, nesta unidade temática de Proporcionalidade Inversa, foram:

- Analisar uma função a partir das suas representações e interpretar a sua variação;
- Analisar e identificar situações de proporcionalidade directa e inversa com funções do tipo $y = kx$ e $yx = k$, respectivamente;
- Representar gráfica e algebricamente situações de proporcionalidade directa e inversa;
- Resolver problemas e modelar situações utilizando funções.

No terceiro ciclo, segundo o programa (ME, 2007), institucionaliza-se o uso da linguagem algébrica, trabalha-se com expressões, equações, inequações e funções, procurando desenvolver no aluno a capacidade de lidar com diversos tipos de relações matemáticas. Além do mais, pretende-se o desenvolvimento das capacidades matemáticas, como a resolução de problemas, não só como um objectivo de aprendizagem em si mesmo mas também a aprendizagem dos diversos conceitos e representações. O raciocínio matemático e a comunicação matemática são outras capacidades transversais que se pretendem desenvolver. Tendo em conta a problemática definida e o tema onde esta se enquadra, com vista a atingir os objectivos atrás indicados, foram elaboradas tarefas com problemas e exercícios de forma a levar os alunos a procurar a representação mais adequada para resolver a situação.

As tarefas propostas pretenderam ser diversificadas e desafiantes, e que levassem os alunos a depararem-se com as várias representações. Desta forma, tendo em conta os objectivos do estudo, seria também possível perceber qual a que usam preferencialmente, perante determinada situação, atendendo às vantagens e desvantagens de cada uma e, simultaneamente, identificando as suas dificuldades.

Porque a aprendizagem só se torna significativa se os alunos aprenderem a fazer, pretendi que realizassem as actividades de forma autónoma e em par para promover a discussão e o trabalho colaborativo, destinando sempre um momento para discussão do trabalho realizado ao nível do grande grupo – turma.

Os planos de aula e as tarefas propostas encontram-se em anexo (anexo 1 e anexo 2, respectivamente).

2.2.1. Aulas Leccionadas

Como já referi anteriormente, a escolha do tema em estudo prendeu-se com facto de ser um tema que pode ser explorado em termos das várias representações, assunto este importante na resolução de problemas.

De acordo com o previamente estabelecido, leccionei seis aulas de 90 minutos, onde foi trabalhado o tema: Proporcionalidade Inversa.

2.2.2. Planos de Aula

Os planos de aula foram elaborados tendo em conta a planificação de longo prazo do professor cooperante e titular da turma assim como as características da turma. Também teve que ter em conta que o teste intermédio de 7 de Fevereiro contemplava a Proporcionalidade Inversa, como um dos temas a avaliar.

Assim, a planificação da unidade centrou-se em seis aulas que decorreram de 24 de Janeiro a 6 de Fevereiro. Estes planos foram pensados sem grande rigidez de forma a permitir liberdade de acção ao professor perante a espontaneidade dos alunos, para escolher os caminhos mais adequados, ainda que de acordo com os objectivos por mim propostos. Ao preparar os planos de aula, o professor surge como impulsionador da descoberta do conhecimento, tendo um papel fundamental, na minha opinião, em facilitar o processo de aprendizagem. Desta forma tive sempre uma postura atenta de forma a aproveitar as intervenções pertinentes dos alunos, tornando-as momentos de aprendizagem.

Data	Tópicos	Objectivos	N.º aulas (90m)	Tarefas
24/1	Grandezas directamente proporcionais; Constante de Proporcionalidade; Função linear; Representações.	Identificar relações de proporcionalidade directa, inversa e de sem proporcionalidade	1	“À Procura de Proporciona-lidade1”

Data	Tópicos	Objectivos	N.º aulas (90m)	Tarefas
26/1	Grandezas inversamente proporcionais; Constante de proporcionalidade inversa; Representações Gráficas.	Identificar situações de proporcionalidade inversa, construir tabelas, gráficos e interpretar a informação	1	"À Procura de Proporciona-lidade2"
27/1	Grandezas inversamente proporcionais; Representações gráfica, tabular e algébrica.	Resolver problemas com recurso às várias representações; Desenvolver a capacidade de comunicação e estabelecimento de conexões.	1	"À Procura de Proporciona-lidade3"
31/1	Função de Proporcionalidade Inversa.	Identificar situações de proporcionalidade inversa; Desenhar gráficos de funções.	1	"Função de Proporciona-lidade Inversa"
2/2	Função de Proporcionalidade Inversa.	Estabelecer conexões entre as várias representações; Resolver problemas.	1	tarefas do manual "Circuito"
3/2	Leitura e interpretação de gráficos.	Interpretar o enunciado de um problema (representação verbal) e escolher as representações que melhor permitem resolver o problema; Relacionar as várias representações.	1	"Leitura e Interpreta-ção de gráficos"

2.2.3. Estratégias de Ensino

De acordo com o novo programa, a aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno, e este é estruturado, em grande medida, pelas tarefas propostas pelo professor (ME, 2007).

Indo ao encontro aos objectivos de aprendizagem da Matemática, é fundamental o conhecimento dos conceitos matemáticos, modos de os representar e utilizar as conexões entre eles, de forma a resolver problemas e comunicar as suas ideias.

Assim é importante a planificação por parte do professor da sua prática lectiva:

> Toda a planificação realizada pelo professor tem, implícita ou explicitamente, uma estratégia de ensino. Esta estratégia materializa-se na actividade do professor – o que ele vai fazer – e na actividade do aluno – o que o professor espera que o aluno faça – e tem de prever um tempo para a realização dessas actividades (…) A planificação detalhada do professor deve prever vários momentos de trabalho e a utilização de diferentes tipos de tarefas. A diversificação de tarefas e de experiências de aprendizagem é uma das exigências com que o professor se confronta. (ME, 2007)

Assente nas indicações do novo Programa, depois de identificados os conteúdos a leccionar e tendo em conta os objectivos gerais de aprendizagem, definidos na planificação anual do professor cooperante e os objectivos específicos nela apresentados, elaborei um plano que me permitia, por um lado, leccionar os conteúdos programáticos e, por outro, alcançar os objectivos a que me propus, com a preocupação de escolher estratégias de ensino diversificadas, para motivar os alunos à aprendizagem.

Em termos de dinâmica de aulas, estas centraram-se sobretudo na realização de tarefas pelos alunos, por mim propostas, fomentando o trabalho em par e a posterior discussão entre grupos e ao nível da turma. Assim, procurei promover nos alunos um papel activo no desenvolvimento das actividades, de forma a que construíssem o seu conhecimento, sempre com a preocupação da compreensão dos procedimentos matemáticos e do estabelecimento de conexões, quer ao nível do domínio da Matemática, quer com outros domínios do conhecimento, sempre que oportuno.

Para além disso, desencadeei sempre que possível momentos de reflexão, discussão e análise crítica envolvendo os alunos, pois acredito que estes aprendem de forma sustentada se reflectirem sobre as actividades realizadas.

2.2.4. Tarefas utilizadas

Para abordar este tema foram elaboradas uma sequência de tarefas (anexo 2) que pretendia, por um lado, rever conhecimentos e, por outro, desenvolver nos alunos o espírito de descoberta e o estabelecimento de conexões associados à capacidade de comunicação, na resolução de problemas.

As aulas centraram-se, essencialmente, nas tarefas apresentadas nas fichas, por mim elaboradas, e no manual adoptado, recorrendo com frequência à projecção de acetatos, como síntese e consolidação dos objectivos visados.

Ficha 1 ("À Procura de Proporcionalidade 1 …") - anexo 2

A ficha pretendia ser o ponto de partida para o estudo da Proporcionalidade Inversa, recorrendo para isso a uma breve revisão, através da resolução de problemas de Proporcionalidade Directa e formas de representar essas situações. Através da resolução destes problemas, pretendia que os alunos relacionassem as variáveis presentes e conjecturassem sobre a existência ou não de proporcionalidade directa.

Ficha 2 - TPC -("À Procura de Proporcionalidade …") - anexo 2

Esta ficha tem um conjunto de tarefas, onde as representações gráficas, tabelar, algébrica e verbal têm um papel primordial, no sentido de ajudar os alunos a recordar todas estas representações em situações onde exista ou não proporcionalidade directa, apelando à sua capacidade de relacionação.

Ficha 3 - ("À Procura de Proporcionalidade 1A …") - anexo 2

Esta ficha foi planeada para o dia 25/01, na aula de Educação Visual, porque a professora de Educação Visual já tinha avisado não poder estar. Esta ficha foi preparada para ser um momento de avaliação "diagnóstica" a toda a turma e funcionar como "pontapé de saída" da aula de 26/01.

A ficha foi recolhida a todos os alunos e corrigida por mim, para melhor perceber os conhecimentos que os alunos tinham acerca de proporcionalidade directa e suas representações (tabelas, gráficos, expressão algébrica), a forma como conseguiam estabelecer conexões, a resolução de problemas e como justificavam os passos utilizados na resolução. Para além disso pretendi que resolvessem um problema do quotidiano de proporcionalidade inversa, sem ainda terem conhecimento deste conceito.

Ficha 4 - (“À Procura de Proporcionalidade 2”) - anexo 2

Esta tarefa pretendia “arrancar” com a Proporcionalidade Inversa, relacionar as grandezas em questão e perceber como estão entre si relacionadas. A partir daqui, pretendia explorar as diferentes representações, tendo em conta que estamos perante situações de proporcionalidade inversa.

Para fazer uma síntese desta ficha, preparei um acetato que ajudou a consolidar estes conhecimentos.

Ficha 5 - (“À Procura de Proporcionalidade 3 … ”) - anexo 2

Esta ficha é constituída por um conjunto de questões, onde é solicitado aos alunos que indiquem como é que as variáveis variam entre si, que identifiquem de que tipo de proporcionalidade se trata e como relacionam a informação a partir das várias representações (tabelas, gráficos, expressão algébrica).

Atingir os objectivos desta ficha, significa que os alunos conseguiram identificar o tipo de proporcionalidade e a constante de proporcionalidade.

Ficha 6 - (“Função de Proporcionalidade Inversa ”) - anexo 2

Esta tarefa foi preparada para ser realizada em aula, a pares. Pretendia, por um lado, extrair informação e identificar a constante de proporcionalidade caso exista, por outro, indicar o tipo de proporcionalidade a partir das várias representações. Para além disso, apresentava situações do quotidiano onde o conceito de função aparece frequentemente.

Ficha 7 - (“Função de Proporcionalidade Inversa ”) - anexo 2

Esta ficha foi preparada para sintetizar ideias acerca da proporcionalidade inversa com o intuito de estabelecer conexões entre as várias representações, de forma a que os alunos retirassem a informação a partir delas.

Ficha 8 - (“Corrida… Interpretação de gráficos”) - anexo 2

Esta ficha, de carácter exploratório, pretendia relacionar informação verbal com a gráfica e a numérica, apelando para conceitos da Física.

Ficha 9 - (“Leitura e Interpretação de Gráficos”) - anexo 2

Esta ficha pretendia funcionar como síntese das aulas anteriores e como ferramenta de preparação para o teste intermédio. As questões apresentadas exigem que os alunos estabeleçam conexões entre as várias representações e delas retirem as informações necessárias para resolver problemas e permitir-me a mim, enquanto professora, perceber melhor como é que os alunos mobilizam os seus conhecimentos para resolver problemas e quais as suas estratégias de resolução e suas maiores dificuldades.

2.3. Síntese das aulas

1.ª aula – 24 de Janeiro

A aula teve início com a apresentação de uma nova planta da sala criada de forma a que os seis alunos, objecto de estudo, estivessem juntos, para que se procedesse à gravação áudio da sua actividade.

Introduzi o tema "Proporcionalidade" e ajudei os alunos a fazer uma breve revisão sobre grandezas directamente proporcionais, variáveis dependente e independente, constante de proporcionalidade e seu significado, formas de representar situações de proporcionalidade (tabelas, gráficos, expressão algébrica). De seguida, distribuí a tarefa (ficha 1) e dei as instruções para a sua realização, mais concretamente que fizessem em par as duas primeiras questões, para de seguida se proceder a uma reflexão conjunta.

A maioria dos alunos utilizou a regra de três simples para resolver a questão 1 e não tiveram dificuldades na questão 2.

Quanto à questão 3, a sua resolução não foi pacífica. Registou-se alguma discussão entre os vários pares e houve necessidade de lembrar um problema já visto, anteriormente, que relacionava o número de cavalos com a ração necessária para os alimentar. Alguns alunos disseram de imediato que as tábuas tinham que ser mais pequenas, logo não havia proporcionalidade directa. Este problema ajudou-os a perceber que não se podia resolver com a "regra de três simples".

Finalmente, a questão 4 foi resolvida facilmente tendo os alunos estabelecido a conexão com o que tinham vivenciado ao prepararem a sua viagem de finalistas. Provocou entusiasmo na resolução e discussão da resolução, ainda que de forma um pouco ruidosa.

Assim sendo, considero que os objectivos definidos no plano foram atingidos, de acordo com o planificado.

Antes de finalizar a aula distribuí uma ficha de revisão (ficha 2) para ser realizada como trabalho de casa e informei-os que no dia seguinte, que a aula de Educação Visual seria substituída por uma de Matemática (porque a professora não poderia estar), sendo-lhes dada uma ficha para avaliação (ficha 3) sobre proporcionalidade.

Posso afirmar que, perante a ficha toda 16% apresentaram resultados pouco satisfatórios, no entanto relativamente ao problema que envolvia proporcionalidade inversa (velocidade/tempo), 44% não o conseguiram resolver.

Também percebi que a representação onde a maioria dos alunos apresentava dificuldades era a algébrica, o que me alertou para o facto de ter que dar mais atenção a esta representação.

2.ª aula – 26 de Janeiro

A aula foi iniciada com a entrega da ficha (ficha 3) corrigida, realizada no dia anterior, acompanhada de uma reflexão sobre as várias resoluções. As questões de escolha múltipla foram analisadas com muito cuidado e esclarecidas algumas dúvidas. Na questão de aplicação directa dos conhecimentos de proporcionalidade directa não apresentaram dificuldades, no entanto, a questão que relacionava velocidade e tempo foi bem resolvida por alguns, porque segundo eles "aplicam-se o que demos em Física". Apresentei sob a forma de acetato a resolução da questão do Gonças, que envolvia proporcionalidade inversa.

Este acetato foi o pontapé de saída para o novo tema.

Distribuí a nova tarefa (ficha 4) e pedi que a resolvessem em pares. A primeira questão levou algum tempo a ser resolvida. Na construção de rectângulos, alguns alunos apresentaram dificuldades na relação entre a largura e o comprimento e só construíram a tabela depois de discutida. Afirmam que quando a largura passa para o dobro, o comprimento fica "menor". Atingi os objectivos específicos desta tarefa e consegui que os alunos percebessem as diferenças entre proporcionalidade directa e inversa, concretamente associando uma recta que passa pela origem do referencial a uma situação de proporcionalidade directa e uma hipérbole a uma situação de proporcionalidade inversa.

Projectei um acetato, ao fim de 30 minutos, com vários rectângulos de área 12, para promover a discussão. De seguida passaram para a questão 2. Esta questão provocou um enorme entusiasmo e vários comentários, como, "…por dois pontos passa uma recta" e logo a seguir, "…não, a linha não pode ser uma recta…". Todos os alunos usaram números inteiros. Foi-lhes dito que poderiam ter usado também fracções. Constatei, ainda, que os alunos que construíram a tabela avançaram mais rapidamente porque a informação estava organizada.

Na questão 2, as alunas com melhor desempenho, à questão "O que há em comum nas coordenadas dos pontos?", responderam rapidamente e sem receio que: "O produto é igual a 12" e as "coordenadas desses pontos são divisores de 12". Os alunos com desempenho mais fraco só marcaram no referencial três rectângulos e tiveram dificuldade em fazer o referencial. As alunas de desempenho médio, construíram seis rectângulos, porque usaram 3 x 4, 4 x 3, 6 x 2, 2 x 6, 1 x 12 e 12 x 1. E afirmaram ainda que "se multiplicarmos um pelo outro dá sempre 12."

Perante a desenvoltura dos alunos, sugeri-lhes que me indicassem outros números cujo produto fosse 12. De imediato disseram, que as dimensões de um rectângulo não podem ser negativas. É verdade, disse eu, mas sem nos encontrarmos no contexto das dimensões há outros pares de números? Surgiram então os pares (-2; -6); (-4; -3); (-1; -12).

Projectei um acetato onde constataram que esses pontos são marcados no 3.º quadrante. Chegou-se à conclusão que a representação gráfica é uma hipérbole de dois ramos e que esses ramos são simétricos. No caso do problema das áreas só interessava o ramo do 1.º quadrante. São levantadas algumas questões curiosas, como a da Inácia: "e se fosse (-2, 6)?"

- Não pertenceria a esta hipérbole, mas a uma no 2.º e 4.º quadrantes e a constante seria agora -12.

Alertei para o conjunto de informações que se podem tirar a partir dum gráfico.

No final desta actividade, lancei um problema:

> "Quero pintar esta sala. O empreiteiro diz que precisa de 6 horas. Se puser dois homens, quantas horas leva cada um (mantendo-se a condição de trabalho)?"
> Os alunos disseram de imediato 3.
> "E se só dispuséssemos de 4 horas, quantos homens eram necessários?", perguntei eu.

> O Samuel respondeu: 6 : 4 = 1,5 e disse logo de seguida: “Mas não pode ser!”

Aproveitei de imediato estas intervenções para distinguir entre a solução dum exercício e a solução dum problema. Foram tiradas conclusões e registadas no quadro e cadernos, no entanto teria sido necessário um pouco de mais tempo, porque alguns alunos ainda ficaram com dúvidas.

No entanto, a maioria dos objectivos foi atingida e considero que foi muito proveitosa a apresentação das resoluções em acetatos.

3.ª aula – 27 de Janeiro

A aula decorreu na sala habitual do 9.º ano, tal como as anteriores. Após ter-se escrito o sumário, procedeu-se à correcção do tpc e foi lançado o problema:

> “Quatro operários pintam uma casa em cinco dias. Quantos operários seriam necessários para pintar a mesma casa em dois dias?”
> 4 x 5 = 20
> 20 : 2 = 10 operários, resposta imediata.

Foi possível identificar que havia pontos no gráfico que não faziam sentido no contexto do problema (ex. 4 horas e 1,5 homens).

Perante esta questão, a Elisa afirma: “Há uma infinidade de pontos!”

A nova ficha “À procura da Proporcionalidade 3” foi distribuída e foram estabelecidas conexões entre as várias representações. Os alunos identificaram que se tratava de proporcionalidade inversa e o objectivo foi conseguido: levar os alunos a olhar para as tabelas e tirar a expressão algébrica a partir delas. Os três pares de alunos completaram bem as tabelas referentes a proporcionalidade directa e proporcionalidade inversa e encontraram bem a expressão algébrica, indicando a constante de proporcionalidade. No entanto, surgiram dificuldades na questão 2.3.

Só quando se chegou à discussão ao nível da turma, as dúvidas foram esclarecidas. Foi referido que, para que a tabela não corresponda a uma situação de proporcionalidade directa ou inversa, bastaria alterar um valor, mas, uma vez que é pedida uma expressão algébrica, é necessário preenchê-la com cuidado, recorrendo aos conhecimentos de sequência e de termos gerais de sequência.

Como esta questão já surgiu perto do final da aula, e porque me pareceu que não foi entendida por todos, registei que voltaria a ela na aula seguinte, pois parece-me importante a interpretação dessas tabelas. Considero que apesar das dificuldades surgidas para alguns alunos, a maioria resolveu bem a tarefa e promoveram-se bons momentos de discussão a dar seguimento na aula seguinte.

4.ª aula – 31 de Janeiro

Começámos por registar o sumário e deu-se início à correcção do TPC e procedi ao esclarecimento de dúvidas. Com a correcção alertei para o facto de problemas, como o do microondas, admitirem a existência de proporcionalidade inversa; isto é, o microondas, ao ser ligado a 600 Wats, atinge de imediato a potência que se indica.

De seguida é-lhes pedido que resolvam a pares as questões 1 e 2, da página 22 do manual (Matemática 9 – Maria Augusta Neves, Porto Editora), onde é dada uma função e é solicitada a tabela e representação gráfica.

No momento da discussão aproveitou-se para recordar o domínio onde a função está definida e alertar para o facto de uma correspondência definida em domínios diferentes originar diferentes funções com contradomínios diferentes.

Foi de seguida distribuída a ficha de Função de Proporcionalidade Inversa (ficha 6), a ser resolvida a pares para depois ser discutida em conjunto. Durante a resolução, como habitualmente, ia passeando por entre todos os alunos, observando as suas resoluções e pequenas discussões e dando algumas pistas àqueles que sentiam mais dificuldades.

Na discussão verificou-se que a maior dificuldade se prendeu com a questão 4, que envolvia horas e minutos e os alunos tiveram dificuldade em converter 3,75h em 3h45m, daí que a resolução foi feita no quadro, passo a passo, para permitir um melhor entendimento.

A tarefa atingiu os objectivos propostos que eram, essencialmente, resolver e interpretar problemas recorrendo às várias representações, obrigando-os a comunicar os seus raciocínios e as suas escolhas. No final foi solicitado como trabalho de casa, para ser recolhido no dia seguinte, o exercício 3, da página 22, do manual.

5.ª aula – 2 de Fevereiro

À semelhança das aulas anteriores e seguindo a mesma dinâmica, a aula foi dividida em três momentos:

- recolha do trabalho de casa (nem todos entregaram);
- resolução da questão 6, da página 23 e da questão 4, da página 27 do manual e posterior discussão com partilha de resultados e apresentação da resolução sob a forma de acetato. Foram sempre alertados para as condições ideais dos problemas. A questão 4 foi abordada de forma mais rápida, dado que a anterior demorou mais tempo na sua realização e pretendeu alertar os alunos para as "unidades" que são dadas e aquelas que são solicitadas. Posso afirmar que a maioria dos alunos atingiu esse objectivo;
- entrega da ficha de trabalho (ficha 7), que estava dividida em duas partes, uma chamada de função de proporcionalidade inversa e outra de circuito. Na primeira parte não apresentaram dúvidas, o que não se verificou na segunda parte.

Os alunos demoraram algum tempo a ler o enunciado e a perceber o que era pedido. Muitos tiveram dificuldade em aplicar a noção de perímetro da circunferência, apenas alguns alunos perceberam que a distância de A ao ponto médio de [BC] é 1.

Na questão 1.1, não apresentaram dificuldades, enquanto que na 1.2, só duas alunas a resolveram e com base nos conhecimentos de Física.

A questão 1.3 apresentou muitas dúvidas por parte dos alunos. Como terminou a aula, não houve tempo para a sua resolução. No entanto, solicitei, ainda, como trabalho de casa, a questão 3, da página 22 do manual.

6.ª aula – 3 de Fevereiro

A última destas seis aulas, pretendeu ser uma síntese de toda esta unidade lectiva leccionada e de forma a permitir eventuais esclarecimentos de dúvidas face ao teste intermédio da semana seguinte.

Comecei por informar os alunos de que a tarefa "circuito" seria interrompida porque envolve conhecimentos de Física, nomeadamente rapidez média e movimento uniforme, e que nesta altura com a proximidade do teste intermédio, não teríamos tempo de abordar com a necessária profundidade.

Procedeu-se à discussão do trabalho de casa, de modo a que todos ficassem esclarecidos. Aproveitou-se para estabelecer conexões com o tema "Semelhanças" e recordar o significado de figuras equivalentes. Este trabalho permitiu ainda recordar a relação entre a área de um triângulo e a do rectângulo a partir do qual o primeiro foi construído. A aula foi pois reformulada, com a projecção de acetatos (gráficos e expressões algébricas, onde era solicitado que fizessem conexões entre tabelas e gráficos), que serviram de esclarecimento a questões que não me pareceram ter ficado claras para os alunos na aula anterior.

Estes acetatos e respectiva exploração criaram um momento de grande envolvência por parte dos alunos, como síntese de todo o trabalho desenvolvido. Os alunos estabeleceram as conexões necessárias entre as representações, comunicando de forma justificada as suas escolhas.

Foi distribuída a ficha “Leitura e interpretação de gráficos” (ficha 9) e solicitada a realização da questão 1 para ser, em seguida, discutida. Nesta questão a maior dificuldade foi traduzir em linguagem matemática o enunciado de um problema que seria resolvido sob a forma de sistema. Há ainda dois alunos que o tentaram resolver pelo método de tentativa e erro.

Pedi, de seguida, que resolvessem a questão 4, dado o avançado da hora, para perceber as dificuldades que tinham em inventar um problema que traduzisse uma relação de proporcionalidade inversa. Curiosamente não houve nenhum aluno que relacionasse $y = \frac{360}{x}$, com o problema inicial da primeira destas aulas, em que surgiam rectângulos de área 12 ($x \times y = 12$).

Para além desta questão, muitos alunos avançaram para as questões 2 e 3, de forma autónoma, e foi com satisfação que verifiquei que os alunos conseguiram:

- recolher informação de uma tabela;
- completar o gráfico a partir de uma tabela;
- relacionar a gráfico com a expressão algébrica;
- resolver problemas.

Fez-se, ainda, a discussão destas duas questões no quadro, com o contributo de alguns alunos.

A questão 5 foi solicitada como trabalho de casa e passou-se, de imediato, em conjunto para a realização da questão 6, onde era necessário estabelecer conexões entre: representação verbal, representação tabelar, representação algébrica e representação gráfica.

A maioria dos alunos estabeleceu sem problemas estas conexões, apesar de manifestarem mais dificuldades ao nível da representação algébrica e na verificação se a curva do gráfico era efectivamente uma hipérbole.

Nesta discussão final, os alunos perceberam a importância da interpretação dos dados, na justificação dos seus raciocínios e comprovaram dificuldades na comunicação das suas ideias. Como pode ser verificado, esta aula teve que ser reformulada, tendo em conta o apresentado inicialmente. Logo, o plano de aula foi também alterado de forma a criar verdadeiros momentos de significativa aprendizagem, com a envolvência dos alunos. Daí o tempo destinado à discussão ser fundamental.

3. Metodologia do Estudo

Neste capítulo apresento as opções metodológicas deste estudo, cujo objectivo é identificar os conhecimentos matemáticos dos alunos sobre proporcionalidade directa, em particular as representações que lhes estão associadas e como mobilizam esses conhecimentos na resolução de problemas de Proporcionalidade Inversa, identificando as principais dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas relativos a Proporcionalidade Inversa. Descreve igualmente a forma como foram seleccionados os participantes, os instrumentos de recolha de dados e qual o processo de análise de dados utilizado.

3.1. As opções metodológicas

A metodologia adoptada seguiu uma abordagem qualitativa, pois pretendo fazer uma análise descritiva dos dados, relacionando os dados obtidos através do teste escrito (anexo 2) e do teste intermédio (anexo 2) e das entrevistas.

Esta abordagem qualitativa assenta no paradigma interpretativo, onde são valorizadas as interpretações que os alunos fazem perante as situações que lhe são fornecidas, cabendo ao investigador explicitar esse significado.

As características do meu trabalho relacionam-se com algumas características da investigação qualitativa apresentadas por Bogdan e Biklen (1994): (i) a fonte directa de recolha de dados é o ambiente natural, sendo o investigador o principal instrumento de recolha de dados; (ii) é descritiva; (iii) o interesse pelos processos adoptados; (iv) a análise de dados é de forma indutiva; e (v) o significado é de importância fundamental nesta abordagem. Assim, através da análise das estratégias escolhidas pelos alunos face aos problemas propostos, conseguirei identificar de forma mais objectiva as dificuldades deles.

No início do ano lectivo de 2010/2011, antes de iniciar a recolha de dados, pedi autorização para o efeito à direcção do Colégio, ao professor titular da turma do 9.º ano e aos encarregados de educação. O pedido de autorização aos encarregados de educação foi feito por escrito (anexo 3), tendo sido devolvido com a respectiva autorização assinada.

A recolha de dados para análise incide na observação das aulas e pequenos registos, gravação de áudio, recolha das tarefas realizadas dentro e fora da sala de aula. Nos momentos de recolha de dados, terei oportunidade de questionar os alunos quanto às estratégias por eles utilizadas, de forma a melhor compreender o papel das várias representações na resolução de problemas de proporcionalidade inversa.

O registo áudio vai-me permitir obter a discussão entre os elementos que constituem cada par, acerca da estratégia de resolução e quanto ao tipo de representação preferida, pois nem sempre isto é registado na folha da resolução.

Procedeu-se à elaboração de uma nova planta aprovada pelo professor titular e pelo director de turma. Pedi aos alunos compreensão e colaboração e que não apagassem as suas produções ainda que estivessem erradas, para que eu as pudesse analisar. Recorrerei ainda ao diário de bordo elaborado diariamente, para evitar esquecimentos.

Com a análise das tarefas, conseguirei perceber as maiores dificuldades dos alunos, quais os caminhos utilizados para chegar à solução e quais os conhecimentos que foram mobilizados, de forma a responder às questões que coloquei na minha problemática.

O estudo da Proporcionalidade Inversa estava previsto para o início do 2.º período, como tal planeei as aulas e as tarefas a aplicar bem como o teste escrito, cuja informação seria objecto de tratamento. Para além disso as questões do teste intermédio nacional de 7/2/2011, relativamente a Proporcionalidade Inversa, também seriam alvo de análise qualitativa.

Depois da correcção e análise dos testes de todos os alunos da turma, foram realizadas duas entrevistas a seis alunos, entre Fevereiro e Março. Estas entrevistas tiveram como objectivo a clarificação de aspectos que surgiram durante a análise dos testes, e a identificação e descrição das estratégias bem como das dificuldades dos alunos durante a resolução de problemas. A entrevista a alguns alunos permite recolher dados descritivos, a partir do próprio aluno.

3.2. Participantes

Os participantes deste estudo são os alunos de uma turma do 9.º ano do Ensino

Básico do Colégio D. Luísa Sigea.

A escola. A turma pertence a uma escola privada na zona do Estoril, englobando alunos de todos os ciclos de ensino e do ensino pré-escolar. A maioria dos alunos entra no colégio com quatro anos e prosseguem até ao final do 9.º ano. Grande parte da população escolar tem grandes expectativas face à escola, existindo elevadas taxas de sucesso. A primeira opção assenta no prosseguimento de estudos atingindo o ensino superior.

A turma. A turma é constituída por 27 alunos, com idades compreendidas entre 13 e 15 anos, sendo 11 rapazes e 16 raparigas. Segundo opinião do professor de Matemática, alguns alunos são pouco empenhados e organizados, com falta de hábitos de estudo, como pode ser verificado no incumprimento dos trabalhos de casa, mas também existe um grupo de alunos muito interessados e trabalhadores. Nas aulas de Matemática, a maioria dos alunos são participativos, revelando algumas dificuldades ao nível da comunicação matemática, nomeadamente na explicação do seu raciocínio. Relativamente ao comportamento, são alunos conversadores e que se distraem com facilidade. O aproveitamento da turma é positivo, mas os níveis obtidos são muito heterogéneos.

Os alunos objecto de estudo de caso. A recolha de dados será feita, com especial incidência, a três grupos de dois alunos, com níveis de aprendizagem diferentes, um par de alunos com grandes capacidades matemáticas ao nível do raciocínio e comunicação matemática, um par de alunos com capacidades e muito empenho e esforço em ultrapassar as suas dificuldades e um par de alunos com algum atraso na aprendizagem, devido essencialmente a falta de trabalho e empenho. Destes, foram analisados apenas três alunos para a elaboração de estudos de caso.

3.3. Métodos de recolha de dados

A recolha de dados deste estudo foi realizada a partir dos seguintes instrumentos:

- Observação e registo de aulas;

- Teste escrito;
- Teste intermédio;
- Entrevistas.

Observação e registo de aulas (seis aulas de 90 minutos)

A observação é um instrumento muito poderoso, e no meu caso como já conheço bem os alunos, por já ter sido professora deles nos últimos anos, permite-me recolher informação directa e de imediato sobre o objecto em estudo. Ora, desde Setembro de 2010, assisto às 5 horas semanais desta turma, à excepção dos dias em que ocorrem momentos de avaliação, tendo a possibilidade de intervir na sala de aula, com o consentimento do professor titular.

Assim a observação permite-me caracterizar melhor a turma, relativamente à forma como os alunos se relacionam entre si e como reagem às tarefas propostas. Durante as aulas foram retiradas notas, comentários e observações. Esses registos foram mais completos nas aulas por mim leccionadas, com a ajuda do "diário de bordo" (anexo 1), de forma a facilitar a análise dos registos efectuados.

Nas aulas, houve sempre a possibilidade de esclarecer dúvidas a alunos, trabalhando em equipa com o professor titular.

Teste escrito

O teste escrito, especificamente elaborado para este estudo, procurava identificar estratégias e dificuldades dos alunos. Pretendia ainda verificar se os alunos eram capazes de estabelecer conexões entre as várias representações e como as usavam para resolver problemas de proporcionalidade inversa.

O teste (anexo 2) é constituído por cinco grupos de questões, com uma média de quatro questões por grupo. Algumas das questões do teste foram adaptadas de itens de exames nacionais do 9.º ano. Outras questões foram baseadas em tarefas de manuais do 8.º e 9.º anos de escolaridade e adaptadas. O processo de construção do teste incluiu um momento de recolha de itens, a partir das fontes citadas. Depois de seleccionados, os itens foram alvo de algumas alterações, de acordo com uma grelha de caracterização das questões (anexo 2) de forma a constituírem um conjunto diversificado e abrangente. No aperfeiçoamento do teste, colaborou também o professor da turma.

A matriz ajuda a identificar os assuntos de forma a ter uma visão global das capacidades visadas. Assim, as questões propostas relacionam diferentes representações, havendo variação ao nível da representação em que é apresentado o problema. Para melhor compreender como é que os alunos relacionam as várias representações, a ordem pela qual estas são solicitadas também se altera.

A representação algébrica está presente na maioria das questões, uma vez que na ficha diagnóstico era a que apresentava mais dificuldades por parte dos alunos, sendo pedida a sua escrita em três das questões, a partir do gráfico ou do cálculo e análise de valores numéricos. A interpretação da expressão algébrica na análise contextualizada de um problema é solicitada na entrevista. Foi dada grande importância também à representação gráfica, presente em quatro das questões colocadas. As questões colocadas, relativas à representação gráfica, incidem sobretudo na interpretação em contextos reais, na associação entre o gráfico e situações de proporcionalidade directa ou inversa, e na associação entre o gráfico e a expressão algébrica correspondente.

A representação sob a forma de tabela também surge em duas questões, de forma a compreender como é que os alunos extraem informação a partir da tabela e como passam dela para outro tipo de representação.

A maior parte das questões apresenta problemas contextualizados, sem esquecer problemas puramente matemáticos. As várias questões abrangem dois dos tipos de funções estudadas no 3.º ciclo – funções de proporcionalidade directa e a proporcionalidade inversa, esta última objecto do meu estudo.

A utilização destes tipos de funções tinha como objectivo estudar como é que os alunos recorrem às várias representações para resolver problemas de proporcionalidade inversa, partindo dos conhecimentos que já possuem de proporcionalidade directa, identificando as suas estratégias e, ao mesmo tempo, as dificuldades apresentadas.

Teste intermédio

O teste intermédio, de 7 de Fevereiro de 2011, elaborado pelo júri de exame nacional, continha duas questões relacionadas com o tema do meu estudo. Assim, com base nas respostas dadas pelos alunos, procurei identificar estratégias de resolução e dificuldades dos mesmos. Pretendi verificar como os alunos tiravam informação das várias representações e como estabeleciam conexões entre elas.

Entrevistas

As entrevistas foram realizadas aos seis alunos escolhidos, durante o intervalo de almoço, aula de Formação Cívica e aula de Estudo Acompanhado, com o consentimento quer dos alunos quer dos respectivos professores, tendo por base questões sobre a resolução do teste por mim elaborado e do teste intermédio.

A entrevista é utilizada para recolher informação a partir do próprio aluno entrevistado, de forma a que o investigador perceba melhor a estratégia aplicada.

Tendo por base a análise dos testes, seleccionei previamente os aspectos a aprofundar na entrevista. Para além das definidas previamente, surgiram novas questões durante o decorrer das mesmas, tendo em conta as reacções dos entrevistados.

Durante as entrevistas, solicitava a cada aluno que explicasse e justificasse a resolução apresentada, procurando explicar os processos de resolução e identificando estratégias e dificuldades dos alunos durante a resolução de problemas que envolviam situações de proporcionalidade e de que forma utilizavam as várias representações.

As entrevistas foram realizadas num gabinete do colégio, em dias e horas combinados com os alunos. Tiveram uma duração média de 90 minutos, foram gravadas em áudio e transcritas na íntegra.

Para cada entrevista, foi elaborado um guião de questões que se centrava no esclarecimento e justificação das estratégias e dificuldades sentidas pelos alunos.

3.4. Análise de dados

A análise de dados é uma das etapas da investigação e permite ao investigador descrever, explicar e retirar conclusões a partir do seu estudo.

Esta análise incidiu por um lado sobre as informações recolhidas ao longo das seis aulas leccionadas e por outro sobre os testes realizados pelos alunos (os elaborados por mim e o intermédio), observação directa e as transcrições das entrevistas. Procedi à sua análise de forma indutiva, partindo dos dados recolhidos e procurando relacioná-los.

O processo de análise foi iniciado depois da realização do teste escrito, e antes da entrevista. A análise do teste, do teste intermédio e da entrevista, permitiu identificar as diferentes características dos alunos relativamente ao processo de resolução, à forma como utilizam as várias representações e como estabelecem conexões entre elas, bem como as suas principais dificuldades. Depois de terminada a recolha de dados, as aulas, o teste, o teste intermédio e as entrevistas foram sujeitos a uma análise, mais aprofundada, de forma a procurar evidências.

4. Apresentação e análise de dados

Tendo em conta que o objectivo do meu estudo é compreender como os alunos do 9.º ano conseguem utilizar as várias representações para resolver problemas de proporcionalidade inversa, procurei fazer a análise tendo em conta: as conexões entre representações, os processos de resolução e as estratégias e dificuldades.

Para além disso centrei-me no desempenho dos alunos no que se refere à utilização e interpretação de informação, a partir de tabelas, gráficos e expressão algébrica e ainda à escrita de expressões e sua interpretação, no sentido de melhor compreender as estratégias e dificuldades dos alunos, salientando os elementos mais relevantes para cada um dos casos.

De seguida, centrei-me na passagem da representação gráfica para representação algébrica e vice-versa, da representação verbal para as representações numérica, algébrica e gráfica e em identificar qual das representações era a mais privilegiada pelos alunos. Por fim, permitiu-me procurar diferenças entre a forma como resolvem os problemas contextualizados e os problemas puramente matemáticos.

4.1. Análise das Resoluções das Tarefas Propostas na turma

4.1.1. Primeira Aula (24 Janeiro)

A tarefa proposta para a aula de 24 de Janeiro teve como objectivo rever conceitos de proporcionalidade directa, interpretar situações de inexistência de proporcionalidade e fornecer pistas para a existência de proporcionalidade inversa.

A primeira questão envolvia proporcionalidade directa aplicada à receita dum bolo. Foi resolvida sem problemas por todos os grupos, mas de formas diferentes: uns utilizaram uma tabela, outros pura e simplesmente efectuaram os cálculos com recurso à regra de três simples, e outros por redução à unidade, como pode ser confirmado nos resultados abaixo indicados:

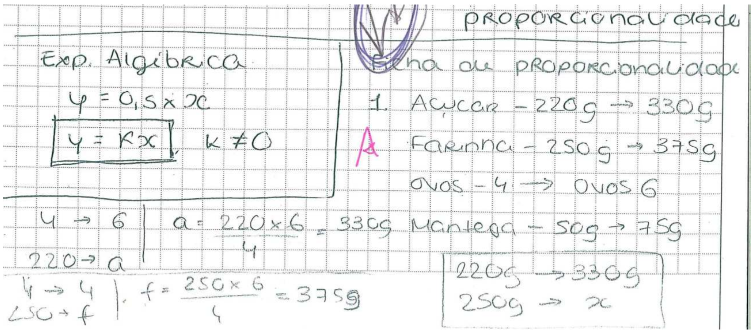


Figura 1 – Resolução da questão 1 pela Inácia e Maria

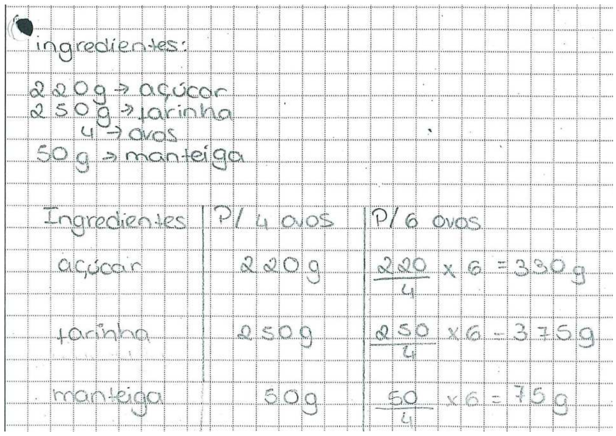


Figura 2 – Resolução da questão 1 pela Elisa e Jo

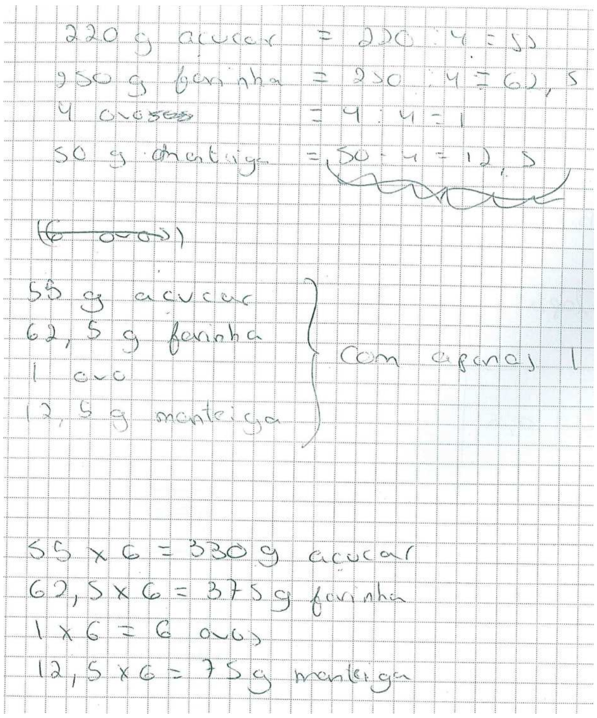


Figura 3 – Resolução da questão 1, pelo Rui e Paulo

De seguida, os alunos explicaram sem dificuldades, que as grandezas *idade* e *peso* não variavam de acordo com as “regras de proporcionalidade directa”, mostrando desta forma que percebiam bem o significado de proporcionalidade directa.

A questão 3, onde era pedido o número de tábuas (com outra medida) para assoalhar uma sala, já coberta com 420 tábuas de 16 cm de largura e igual comprimento às tábuas iniciais), suscitou grande discussão entre os alunos:

> **Professora:** O que se mantém constante?
> **Alunos:** “A área”.
> **Professora:** Qual a relação das larguras das tábuas?
> **Rui:** “A largura diminui”.
> **Professora:** Então, se a largura diminui e o comprimento se mantém…
> **Inácia:** “o número de tábuas tem de ser maior!”

Depois desta discussão entre grupos e turma, os grupos de alunos apresentaram diferentes resoluções, utilizando a inversão de valores:

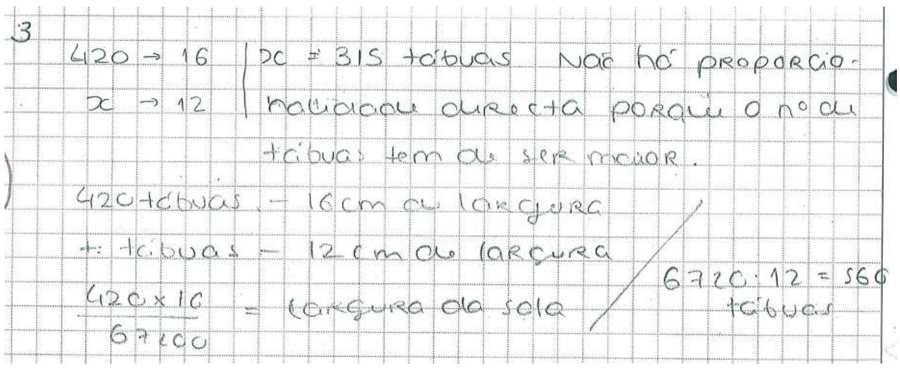


Figura 4 – Resolução da questão 3 pela Inácia e pela Maria

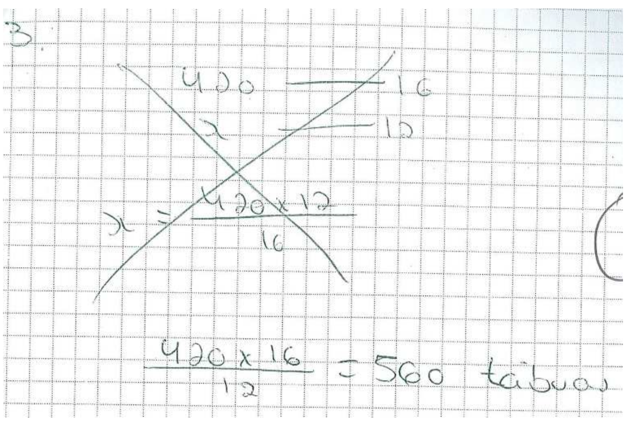
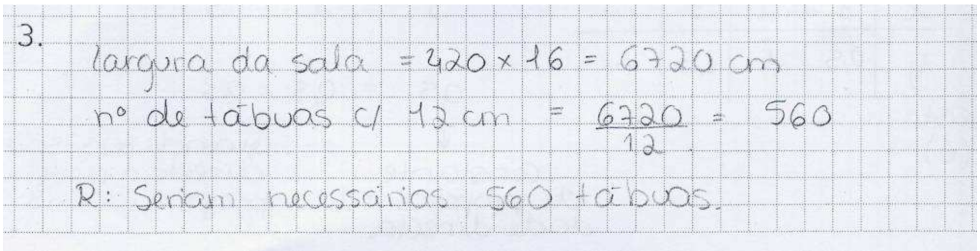


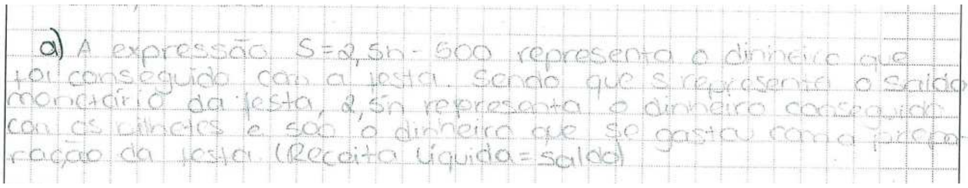
Figura 5 – Resolução da questão 3, pelo Rui e pelo Paulo



3.
largura da sala = 420 × 16 = 6720 cm
nº de tábuas c/ 12 cm = $\frac{6720}{12}$ = 560
R: Seriam necessárias 560 tábuas.

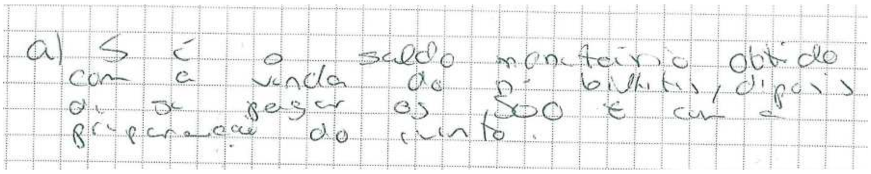
Figura 6 – Resolução da questão 3 pela Elisa e pela Jo

Na questão 4, é solicitado o significado atribuído à expressão S = 2,5 n – 500. As respostas são apresentadas de maneiras diferentes:



a) A expressão S=2,5n-500 representa o dinheiro que foi conseguido com a festa. Sendo que S representa o saldo monetário da festa, 2,5n representa o dinheiro conseguido com os bilhetes e 500 o dinheiro que se gastou com a preparação da festa. (Receita líquida = saldo)

Figura 7 – Resolução da questão 4 pela Elisa e pela Jo



a) S é o saldo monetário obtido com a venda de n bilhetes, depois de se pagar os 500 € com a preparação do evento.

Figura 8 – Resolução da questão 4 pelo Rui e pelo Paulo

Todos os pares de alunos justificaram de forma correcta que não se tratava de uma relação de proporcionalidade directa porque, mesmo que não vendessem bilhetes, já tinham tido um custo de 500 € e, portanto, a resposta a f), para identificar o gráfico correspondente, eliminou de imediato o gráfico A. As questões para averiguar o lucro máximo esperado e o saldo monetário a apurar pretendiam apelar para conceitos do dia-a-dia e atribuir-lhes significado.

4.1.2. Segunda Aula (26 Janeiro)

Na questão 1, foi pedido para desenharem rectângulos de área 12, considerando que cada duas quadrículas é 1 cm. Apesar de ser pedida uma tabela, nem todos a construíram.

No grupo da Inácia e da Maria, ambas “discutiam” a construção dos rectângulos:

Maria: 2 quadradinhos é como se fosse 1 cm. Como posso construir?
Inácia: Imagina… Para dar 12 é 3 vezes quanto? 3 x 4 =12. Agora temos de arranjar outros. Ah! O 1 vai ficar gigante.

A partir da construção, tiveram alguma dificuldade em perceber que os rectângulos tinham em comum a área. Com uma pequena ajuda por parte da professora e aproveitando sempre todas as intervenções dos vários grupos, responderam sem problemas às questões colocadas, quanto à forma como variavam entre si as dimensões do rectângulo e completaram a expressão c x l = 12, identificando-a como uma situação de Proporcionalidade Inversa. É interessante verificar as várias resoluções:

A Elisa e a Jo desenharam três rectângulos com medidas 6 x 2, 3 x 4, 1 x 12 e construíram, sem problemas, a tabela estabelecendo relações entre a largura e o comprimento dos rectângulos de área 12 cm^2.

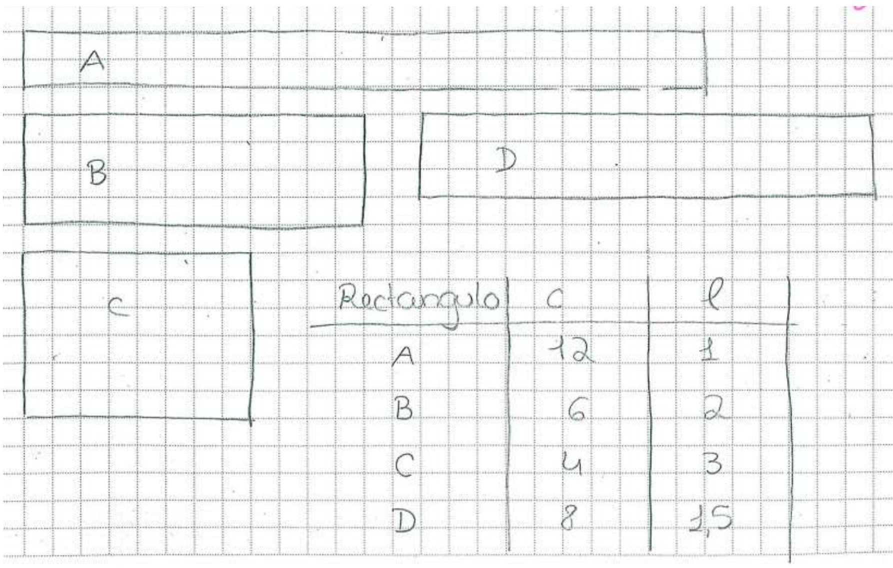


Figura 9 – Resolução da questão 1 da Ficha 4 pela Elisa e pela Jo

O Rui e o Paulo apresentaram dificuldades na relação entre a largura e o comprimento. A tabela só foi construída depois de discutida, ao nível da turma.

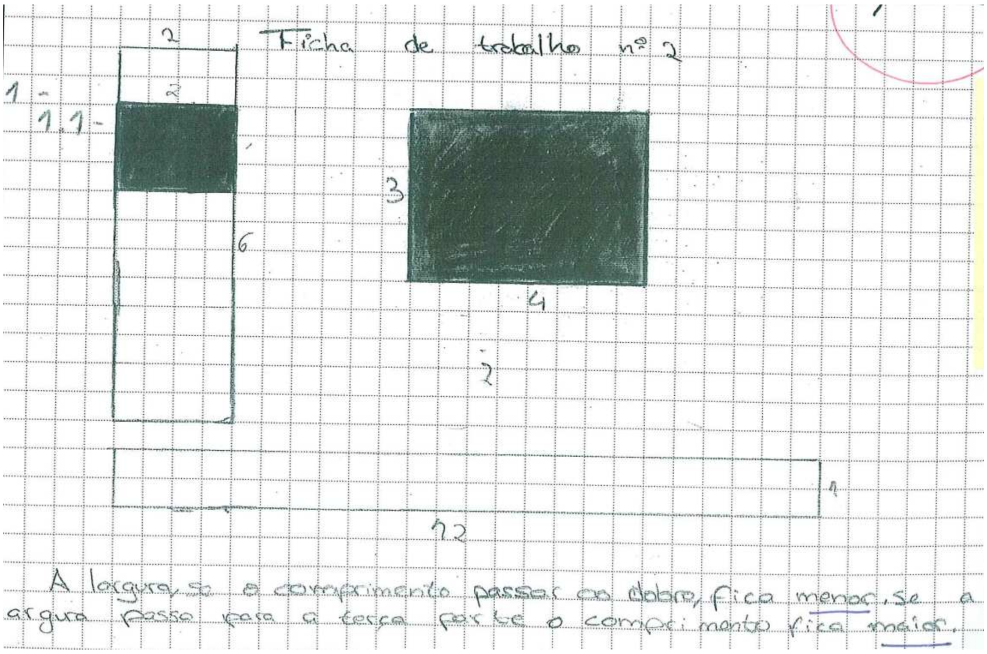


Figura 10 – Resolução da questão 1 da Ficha 4 pelo Rui e pelo Paulo

Afirmam que quando a largura passa para o dobro, o comprimento fica “menor”.

Trinta minutos após o início da aula, fez-se uma paragem para apresentação dos resultados e discussão. Foi curioso verificar que todos usaram números inteiros. Assim coube à professora perguntar se poderiam ter usado fracções, ao que responderam de imediato que sim.

Pude verificar que os alunos que organizaram a informação avançaram mais rapidamente.

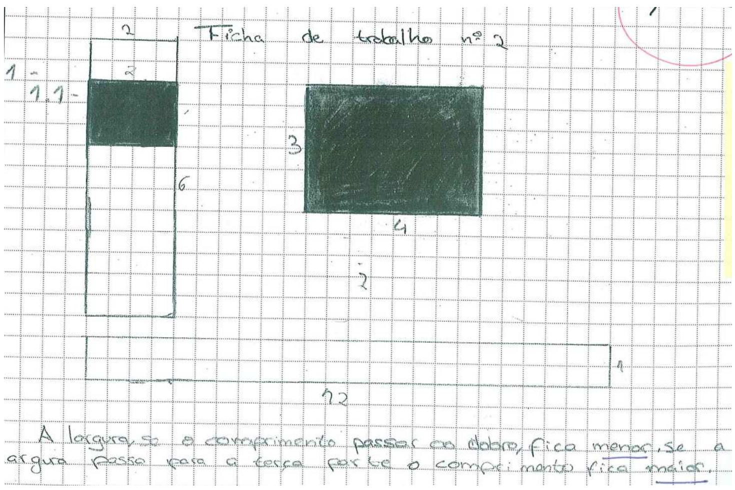


Figura 11 – Resolução da questão 1 da Ficha 4 pelo Rui e pelo Paulo

Na questão 2 era solicitado que dispusessem os rectângulos justapostos com um dos vértices em cima do ponto (0, 0) e que desenhassem a curva (à qual se deu o nome de hipérbole) que unia os vértices de todos os rectângulos opostos a (0,0).

A Elisa e a Jo usaram oito rectângulos e desenharam a linha curva.

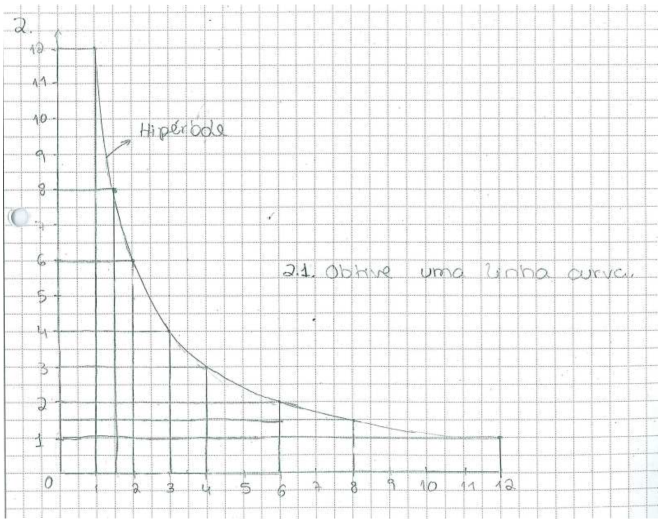


Figura 12 – Resolução da questão 2 da Ficha 4 pela Elisa e pela Jo

> **Professora:** O que há em comum nas coordenadas dos pontos?
> **Alunos:** O produto é igual a 12.
> As coordenadas desses pontos são divisores de 12.

Esta foi a resposta de muitos alunos da turma.

Já o Rui e o Paulo, só marcaram no referencial três rectângulos e com muita dificuldade:

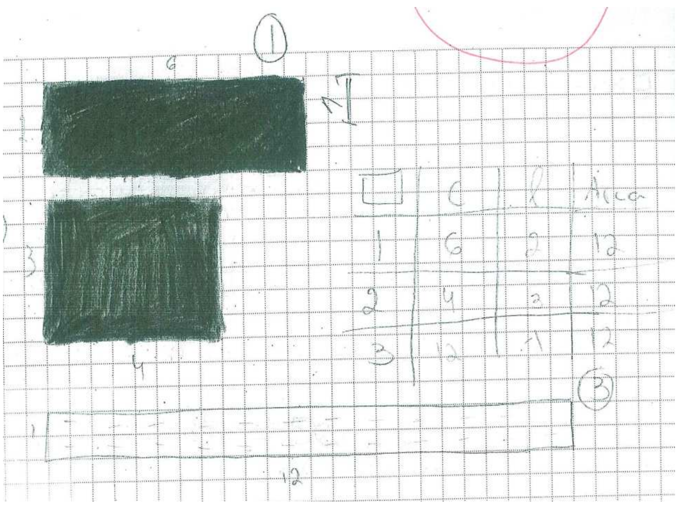


Figura 13 – Resolução da questão 1 da Ficha 4 pelo Rui e pelo Paulo

A Inácia e a Maria construíram seis rectângulos, porque usaram as dimensões: 3 x 4, 4x3, 6 x 2, 2 x 6, 1 x 12 e 12 x 1. E afirmaram que "se multiplicarmos um pelo outro dá sempre 12". De seguida, pedi à turma que indicassem outros números cujo produto fosse 12 e surgiram os seguintes pares: (-2; -6), (-4; -3) e (-1; -12). Em conjunto, estes pontos foram marcados no referencial que estava no quadro e os alunos verificaram que estavam no 3.º quadrante.

> **Elisa:** Então, a representação gráfica é uma hipérbole de dois ramos!
> **Professora:** É verdade.
> Os alunos referiram ainda: os dois ramos são simétricos!
> **Inácia:** E se fosse (-2, 6)?
> **Professora:** Achas que pertencia a esta hipérbole?
> **Inácia:** Não.
> **Marta:** Estava no 2.º e 4.º quadrante.
> **Professora:** Muito bem! Então a constante seria ainda 12?
> **Rui:** Não, seria agora -12.

A partir desta discussão, aproveitei para alertar para o conjunto de informações que se podem tirar a partir dum gráfico.

No final desta actividade, foi lançado o seguinte problema:

> "Quero pintar esta sala. O empreiteiro diz que precisa de 6 horas. Se puser dois homens, quantas horas leva cada um (mantendo-se obviamente as condições de trabalho)?"

Disseram de imediato 3!

> **Professora:** E se só dispuséssemos de 4 horas, quantos homens eram necessários?
> **Todos:** 6 : 4 = 1,5
> Mas não pode ser! – diz o Samuel, porque "não se pode partir um homem"!
> **Professora:** Muito bem! Isto é um alerta para distinguir entre a solução do exercício e a solução do problema.

4.1.3. Terceira Aula (27 Janeiro)

Após correcção do problema do TPC, foi proposto o desafio seguinte:

> "Quatro operários pintam uma casa em cinco dias. Quantos operários seriam necessários para pintar a mesma casa em dois dias?"
> 4 x 5 = 20
> 20 : 2 = 10 operários

Este problema permitiu recordar o problema da aula anterior e consolidar os conhecimentos.

> **Professora:** Então só temos alguns pontos no gráfico?
> **Elisa:** Há uma infinidade de pontos.

Também se recordou o que uma outra aluna afirmara no final da aula anterior: "Com 2 pontos temos uma recta".

> **Professora:** Será sempre assim?
> O Samuel disse: Não! Pode ser uma curva.

De seguida foi colocado o exercício:

— É dada a função *f*, definida por $f : x \longmapsto y = \dfrac{8}{x}$.

De que proporcionalidade se trata? Qual é a constante?

Completa a tabela:

x	1	2	4	-1	-2	8
y						

Como se chama gráfico de função?

Haverá algum ponto onde $x = y$?

Todos os alunos responderam sem problemas a a) e completaram a tabela, indicando o nome do gráfico de função.

Quanto à d), a Elisa disse de imediato que o ponto onde $x = y$ era $\left(\sqrt{8}, \sqrt{8}\right)$ e de seguida a Marta acrescentou $\left(-\sqrt{8}, -\sqrt{8}\right)$.

Depois perguntei quanto era $\sqrt{8}$ e rapidamente disseram $2\sqrt{2}$, mobilizando os conhecimentos que tinham de aulas anteriores, reforçando a necessidade de estabelecer conexões para que a aprendizagem seja verdadeiramente significativa. Com a ajuda de material de desenho, marquei no quadro $\sqrt{2}$ e o ponto $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$, verificando que pertencia à hipérbole. Aproveitei para desenhar a recta $y = x$ e mostrar-lhes os pontos que pertenciam à recta e à hipérbole, ou seja, um ponto que representava uma situação de proporcionalidade directa e uma situação de proporcionalidade inversa.

De seguida, foi distribuída a tarefa: "À procura da Proporcionalidade 3".

Na questão 1, a partir de uma tabela era pedido para identificarem de que tipo de proporcionalidade se tratava, indicando a respectiva constante.

Rui e Paulo respondem:

4 x 30 = 120	
6 x 20 = 120	120 é a constante
8 x 15 = 120	

Quando é solicitada qual o tipo de proporcionalidade em causa, há alunos que tentam descobrir a relação entre variáveis, antes de fazer cálculos. Por exemplo, Elisa e Jo respondem: "Trata-se de Proporcionalidade inversa, porque o produto entre as variáveis correspondentes é igual e K = 120".

Já a Inácia e a Maria, respondem: "Trata-se de proporcionalidade inversa, porque, à medida que se dobra o número de horas de trabalho, os dias gastos reduzem para metade".

A questão 2, cujo objectivo era levar os alunos a preencher as tabelas e escrever a expressão algébrica, admitindo que existe, por um lado, proporcionalidade directa, por outro, que existe proporcionalidade inversa e, por outro ainda, que não existe proporcionalidade. Só nesta última opção os alunos apresentaram mais dificuldades e só a partir da discussão perceberam que bastava mudar um ponto. Com uma tabela onde só um ponto é dado, tudo pode acontecer.

Posso afirmar que o objectivo desta questão foi muito bem conseguido e permitiu aos alunos chegarem à expressão algébrica por vários caminhos.

É de notar ainda que, na proporcionalidade directa, as expressões que surgiram foram duas:

$y = \frac{1}{2}x$ e $x = 2y$

Daqui aproveitei para reflectir em conjunto com a turma que as expressões algébricas podem ser escritas de diversas formas. Quando era pedido para completarem a tabela, admitindo que não existia qualquer situação de proporcionalidade, os resultados foram diversificados, como se ilustra a seguir.

O grupo da Elisa e Jo resolveu da seguinte forma, sem problemas:

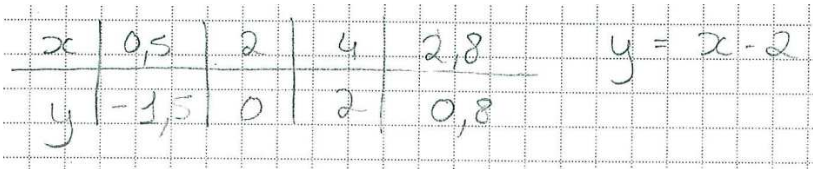


Figura 14 – Resolução da questão 2 pela Elisa e pela Jo

O grupo da Inácia e Maria não conseguiu resolver a questão sem a ajuda da professora.

O Paulo e o Rui preencheram as duas primeiras tabelas mas tiveram dificuldades em encontrar a expressão algébrica e não conseguiram fazer a questão 2.3.

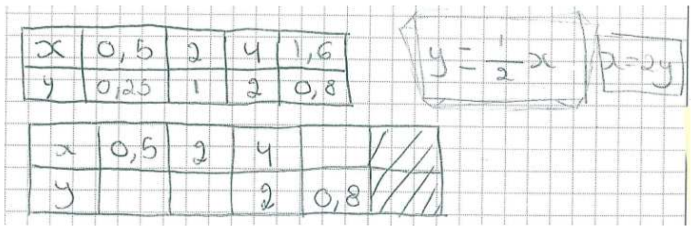


Figura 15 – Resolução da questão 2 pelo Rui e pelo Paulo

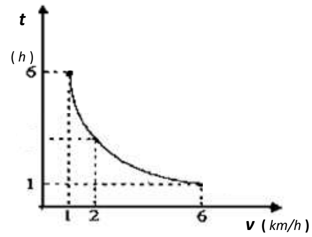
Só quando se chegou à discussão ao nível da turma, as dúvidas foram esclarecidas.
Em jeito de conclusão, foi referido no final da aula que, para que a tabela não represente uma situação de proporcionalidade directa ou inversa, basta alterar um valor. Como esta questão já surgiu perto do final da aula, penso voltar a ela na próxima aula, pois é importante a interpretação dessas tabelas.

4.1.4. Quarta Aula (31 Janeiro)

Antes de ser distribuída a tarefa para esta aula, procedeu-se à correcção do TPC relativamente a duas questões (3, 4) que tinham ficado por resolver na aula passada, da ficha “À procura da proporcionalidade inversa 3…”.

A questão 3 não suscitou dificuldades aos alunos e serviu apenas para reforçar que a sua resolução parte do pressuposto de condições ideais, isto é, que quando se liga o “microondas na potência de 600 wats, este atinge de imediato essa potência”.

Quanto à questão:

> O gráfico seguinte traduz a variação da velocidade média com o tempo necessário para percorrer uma certa distância.
>
> 
>
>
> O que acontece a ***t***, quando a velocidade aumenta?
>
> Escreva uma expressão analítica da função que relaciona ***t*** e ***v***.
>
> Que tempo demora o percurso se a velocidade for 2 km/h?
>
> Qual deve ser a velocidade necessária para percorrer a distância em 3 horas?
>
> Selecciona a afirmação verdadeira, justificando a tua escolha:
>
> O gráfico traduz proporcionalidade inversa entre *o tempo e a distância*.
>
> O gráfico traduz proporcionalidade directa entre as variáveis nele representadas.
>
> O tempo aumenta, porque a velocidade aumenta.
>
> 6 km é a distância mencionada. ,

onde era solicitada, por um lado, a interpretação de gráfico e, por outro, a escrita da expressão algébrica correspondente, os alunos não apresentaram dificuldades, como se pode verificar, porque (me pareceu que) estavam bem presentes as aprendizagens de Física, relativamente a velocidade e tempo.

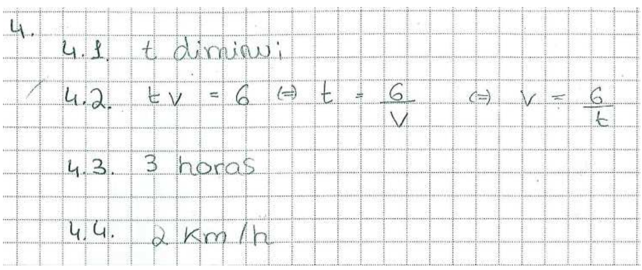


Figura 16 – Resolução da questão 4 pela Elisa e pela Jo

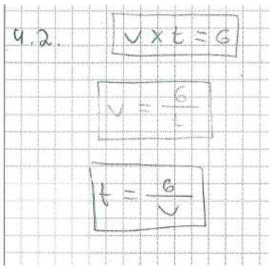


Figura 17 – Resolução da questão 4 pelo Rui e pelo Paulo

A tarefa "Função de Proporcionalidade Inversa" remetia para a identificação duma situação de proporcionalidade e da respectiva constante a partir duma tabela e dum gráfico.

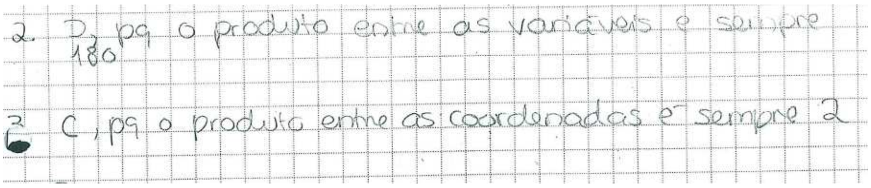


Figura 18 – Resolução das questões 2 e 3 pela Elisa e pela Jo

Todos chegam à constante a partir do produto das coordenadas de cada ponto, indicadas no gráfico, e a partir do produto dos valores correspondentes no caso de estarem perante uma tabela.

A questão 4 pretendia que os alunos interpretassem um determinado gráfico, relacionando-o com a informação verbal dada, sendo-lhes pedido o tempo da viagem de regresso. Como se tratava duma pergunta de escolha múltipla, onde os resultados eram dados em horas e minutos, alguns alunos mostraram dificuldades, sobretudo na conversão de 3,75 h em 3 h 45 m, outros resolveram sem problemas como pode ser verificado:

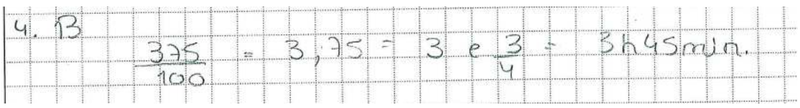


Figura 19 – Resolução da questão 4 pela Elisa e pela Jo

Na discussão geral, os alunos perceberam que o que se mantinha constante era a distância.

Professora: Pelo que vi nos vossos registos, perceberam que a distância de ida era igual à do regresso (275 km) e estabeleceram a relação:

$V = \frac{d}{t}$

E depois?

Samuel: Substituímos os valores: $100 = \frac{375}{t}$ e t = 3,75 h

Inácia: Mas na resposta não está este valor, logo era 3,45 h.

Elisa: Não pode ser, porque 3,45 h é diferente de 3,75.

Jo: Pois, 3,75 = 3 + 0,75 e 0,75 x 60 = 45 minutos. Logo, a resposta era B.

Esta última questão mostrou que muitos alunos ainda têm dificuldades na conversão de horas em minutos, decorrente da interpretação e conversão da linguagem matemática para linguagem corrente.

4.1.5. Quinta Aula (2 de Fevereiro)

A tarefa "Função de proporcionalidade inversa" tinha como objectivo relacionar as várias representações e observar como os alunos transitavam duma para outra.

A primeira questão pretendia que, a partir duma tabela, escrevessem a expressão algébrica e, de seguida, estabelecessem a correspondência entre expressão algébrica e gráfico. Já a questão 2 pretendia a escrita de uma expressão algébrica a partir de uma tabela. No entanto, a primeira baseava-se num contexto de semi-realidade (número de fatias e massa de cada fatia em gramas) e a outra era puramente matemática com variáveis *x* e *y* com valores não inteiros na tabela. Na primeira questão, os alunos, dum modo geral, não apresentaram dificuldades em passar da tabela para a expressão. Apontam ainda o facto de, na questão 1, o peso da pizza ser 4,8 kg, o que é um valor muito pouco real, o que demonstra bem o sentido crítico dos alunos que deve ser valorizado. Quanto à escolha do gráfico para representar a situação de proporcionalidade inversa, a discussão surgiu:

Elisa: Eliminámos B e D, porque em B a recta cortava o eixo dos *y* em -2 e tinha que ser em 2, porque temos y = x + 2.

Rui: O "D" não pode ser, porque tem uma linha constante.

Samuel: Então, só pode ser o "A" e o "C".

Jo: Só pode ser o "A", porque a constante é 3.

Para a maioria dos alunos, foi fácil entender; para outros, nem tanto. Pareceu-me que alguns podem ter ficado com a ideia que esse ponto seria o ponto de intersecção e não o valor dado pela expressão analítica. Esta minha dúvida foi esclarecida aquando da discussão.

A questão 3 suscitou muitas dificuldades para muitos alunos, talvez porque os valores eram números racionais não inteiros. Por outro lado, os alunos com mais dificuldades não tentaram sequer procurar a constante de proporcionalidade.

Passou-se de seguida à terceira parte da aula, com a tarefa: “Corrida… Interpretação de gráficos”. Esta tarefa pretendia, primeiro, que os alunos estabelecessem uma relação entre a informação verbal e a representação numérica, ao pedir-lhes a distância total percorrida. Grande parte dos alunos apresentou dificuldades ao nível da interpretação e descodificação das informações dadas. Ao ser pedido o gráfico que traduzia a distância ao ponto de partida em cada minuto da corrida (1.2), muitos também apresentaram dificuldades, à excepção de alguns, que voltaram a estabelecer a ligação com o já aprendido na Física. Foi então que surgiram comentários como: “velocidade média é diferente de rapidez média!...”.

Dado que os dois primeiros momentos da aula demoraram mais do que o previsto e uma vez que foi preciso sintetizar ideias, dado que estavam a surgir muitas dúvidas, não foi possível concluir esta terceira etapa da aula.

4.1.6. Sexta Aula (3 de Fevereiro)

Passou-se, de imediato, à correcção do TPC (manual: pág. 22, n.º 3). Aproveitei para recordar com os alunos os conhecimentos sobre semelhança de figuras e o conceito de figuras equivalentes. Como se pode verificar em rectângulos equivalentes, a relação entre os comprimentos da base e da altura ilustram uma situação de proporcionalidade inversa, como se pode ver:

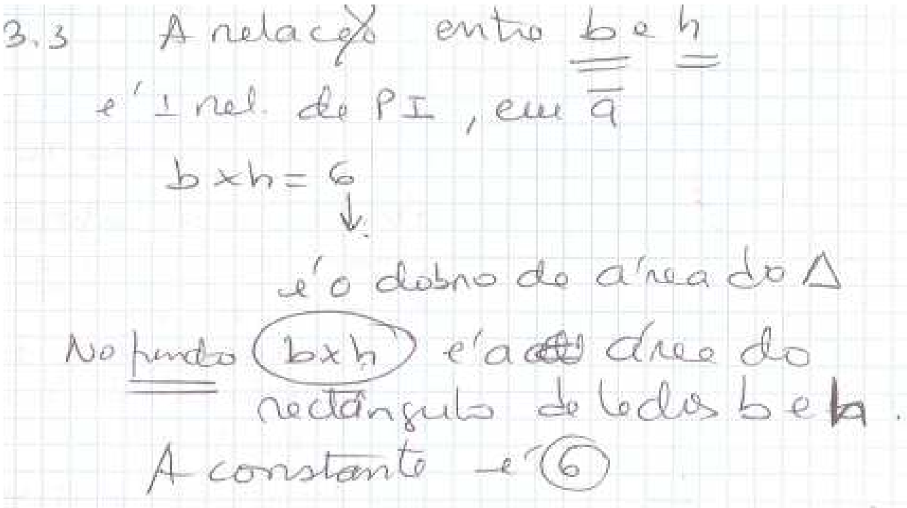


Figura 20 – Resolução da questão 3 pela Elisa e pela Jo

Foi de seguida projectado o acetato seguinte:

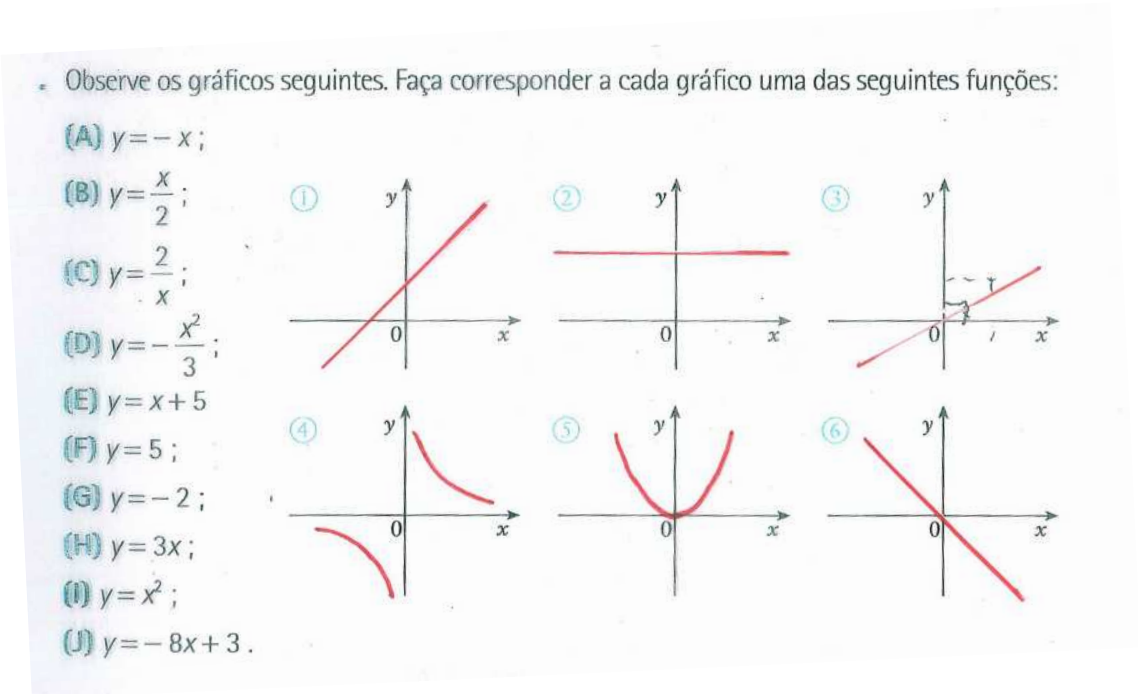
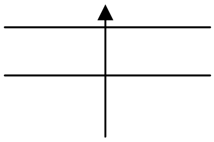


Figura 21 – Acetato

e deu-se tempo para realizar a tarefa e proceder à discussão.

Esta tarefa pretendia recordar as expressões algébricas de funções afim, linear e constante e de proporcionalidade inversa. Da discussão, apercebi-me que os alunos iam eliminando as possibilidades de atribuir uma determinada expressão a um gráfico.

Dizia a Marta:

> **Marta:** Como o gráfico é:
>
> 
>
> então tem de ser y = 5 ou y = -2, mas como está acima de zero, tem de ser y = 5.

De seguida, estabeleceram a correspondência entre $y = \frac{2}{x}$ e a hipérbole.

> **Inácia:** Lógico que $y = \frac{2}{x}$ é a hipérbole, porque há proporcionalidade inversa e a constante é 2.

Esta tarefa foi muito proveitosa para sistematizar ideias e estabelecer conexões entre expressões analíticas e gráficos respectivos. De seguida, com o objectivo de diversificar abordagens, distribuí a tarefa “Leitura e Interpretação de Gráficos”.

Perante a questão 1.1 da ficha 9, no anexo 2, a maioria dos alunos disse: B ou C.

> **Rui:** Tenho que fazer a contas primeiro! (…) É o C.
> **Elisa / Jo:** É o C, porque começa com 80 cêntimos e ao fim de 20 segundos gasta 20 x 0,5 = 10. Fica, portanto, com 70, como mostra o gráfico.

A questão 1.2 pretendia ser uma revisão da resolução de sistemas. A maioria dos alunos teve muita dificuldade em traduzir a informação/representação verbal para representação algébrica.

Apenas os alunos Jo, Elisa, Marta, John e Victoria a resolveram sob a forma de sistema de equações. O Paulo pura e simplesmente não tentou, dizendo: “Não percebo nada disto!”.

Já o Rui tentou mais uma vez resolver por tentativa e erro, mas não chegou à solução.

Figura 22 – Resolução da questão 1.2 pelo Rui

Foi pedido à Jo que fosse ao quadro explicar a resolução do seu grupo.

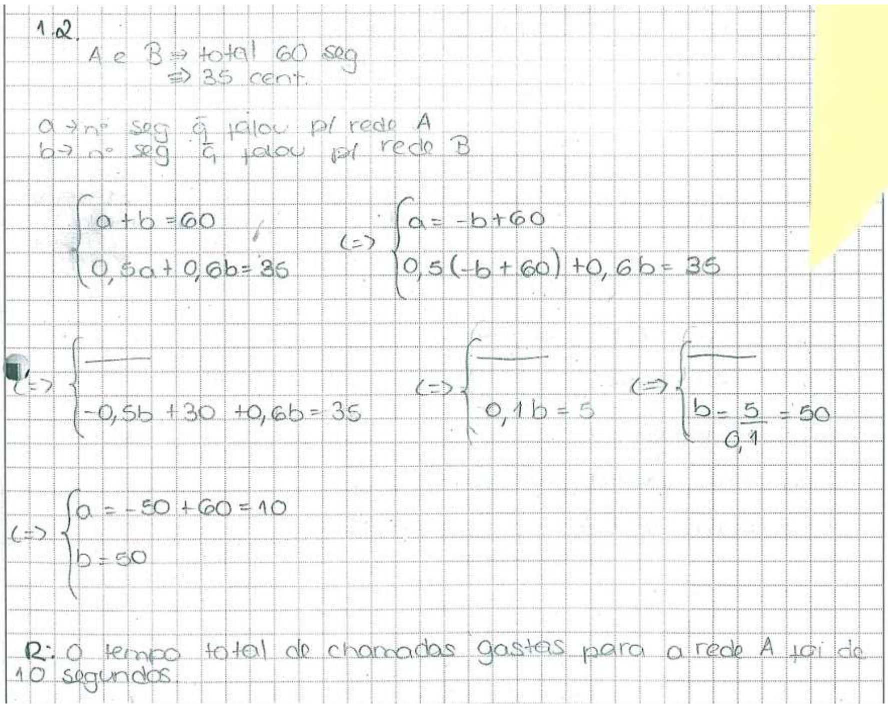


Figura 23 – Resolução da questão 1.2 pela Elisa e pela Jo

A questão 1.3 (escrever a expressão analítica a partir duma situação de proporcionalidade directa a partir dum gráfico) foi resolvida sem problemas por todos.

Pedi de seguida que passassem à questão 4, dado o avançado da hora, onde era pedido que escrevessem o enunciado dum problema que fosse traduzido por $y = \frac{360}{x}$.

Tiveram muitas dificuldades e não relacionaram de imediato com a questão colocada para arranque da unidade: “Desenhar rectângulos de área 12”.

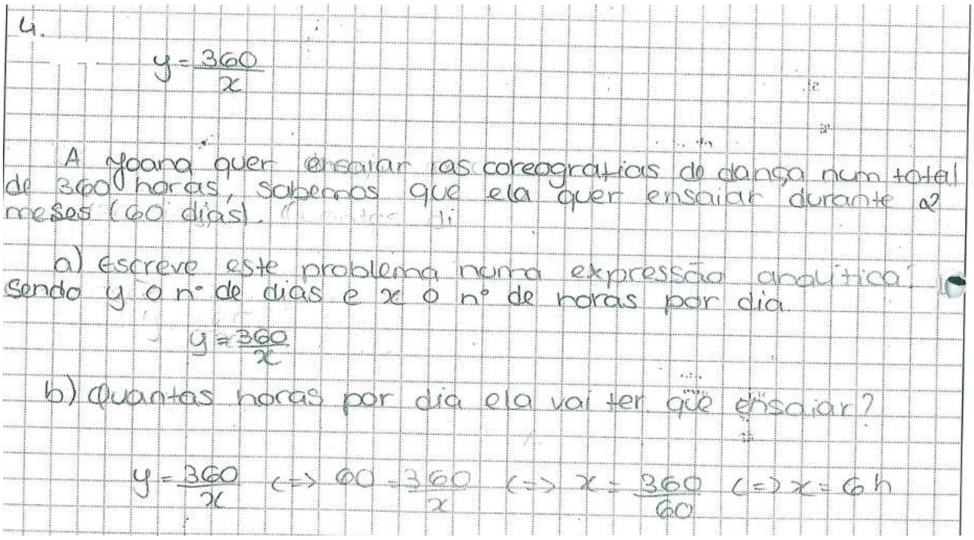


Figura 24 – Resolução da questão 4 pela Jo

O tempo de aula chegou ao fim e foi com agrado que verifiquei, a partir da observação dos cadernos, que também as questões 2 e 3 foram bem resolvidas por muitos alunos, o que me permitiu concluir que conseguiram: recolher informação a partir duma tabela; transferir a informação duma tabela para a sua representação gráfica; estabelecer a conexão entre a representação gráfica e tabelas com a expressão algébrica correspondente e desta forma resolveram o problema recorrendo às várias representações e estabelecendo conexões entre elas.

Como síntese, posso afirmar a partir das observações das produções efectuadas pelos vários alunos e pelas suas intervenções em aula, que os objectivos previstos para a unidade de Proporcionalidade Inversa foram atingidos pela maioria dos alunos.

4.2. Os Casos

Nesta secção irei analisar os dados recolhidos através dos dois testes realizados e da entrevista, relativamente aos três alunos, Elisa, Inácia e Rui, que seleccionei para estudo de caso.

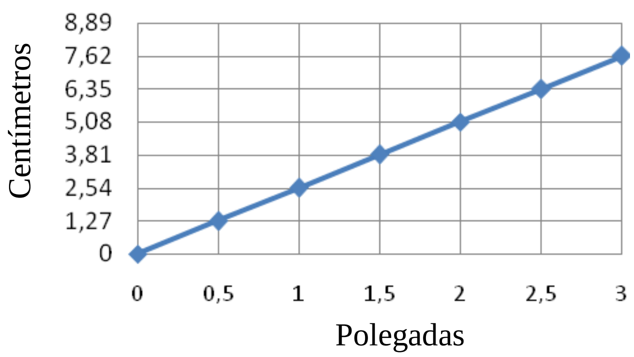
4.2.1. Elisa

A Elisa tem 15 anos, é tímida, curiosa, responsável, trabalhadora e muito boa aluna. No 1.º período do 9.º ano, obteve nível 5, assim como no 2.º período. Nas aulas, é autónoma, interessada e discreta na forma como participa. Considera a escola como um lugar de verdadeira aprendizagem para o seu futuro. É uma aluna que gosta muito de aprender. Está sempre atenta nas aulas, realiza com celeridade as tarefas que lhe são propostas e cumpre sempre com os trabalhos de casa.

O uso da representação verbal e algébrica

Quer em situações de proporcionalidade directa, quer inversa, Elisa consegue perceber sem dificuldade a relação entre as variáveis envolvidas e escrever a expressão algébrica.

Por exemplo, a partir do gráfico



refere:

> **Elisa:** Para afirmar que se tratava de uma situação de proporcionalidade directa, vi que o gráfico era uma recta e passava pela origem e fazendo o quociente entre as variáveis, dava sempre o mesmo.

Assim, quando lhe foi pedida a expressão algébrica que relacionasse o comprimento da diagonal (d) do ecrã duma TV, em cm, e o número de polegadas (p) que lhe corresponde, a Elisa apresenta a seguinte resposta:

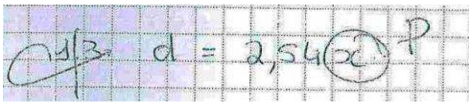


Figura 25 – Resolução da questão 1.3

A aluna justifica a sua resposta afirmando:

> **Elisa:** Escrevi isto, porque o valor que correspondia a 1 polegada no gráfico era 2,54, logo isto representava o declive e a ordenada na origem não existia, era zero.

Numa outra questão, a partir de informação verbal, a Elisa reconheceu que estava perante uma situação de proporcionalidade inversa, verificou para isso que o produto dos valores das duas variáveis era fixo:

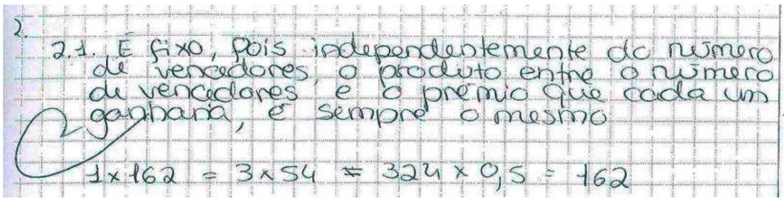


Figura 26 – Resolução da questão 2.1

Na entrevista, a aluna explica:

> **Elisa:** Primeiro, vi que a relação entre N e P era uma relação de proporcionalidade inversa, porque o produto entre eles era sempre o mesmo e isso era o prémio total que seria dividido pelas pessoas.

A Elisa conseguiu facilmente extrair a informação necessária através de uma tabela e estabeleceu rapidamente a conexão com a representação algébrica:

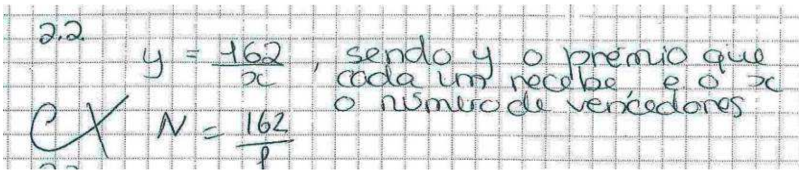


Figura 27 – Resolução da questão 2.2

> **Elisa:** O produto entre eles vai dar sempre o prémio total. Certo?
> Então y x $x = 162$.

A Elisa conseguiu ainda extrair informação, ao utilizar a expressão algébrica como uma ferramenta, estabelecendo uma relação entre a representação algébrica e a verbal. Perante uma questão com carácter comparativo de dois comprimentos cada um expresso em unidades diferentes, a resolução foi simples, convertendo uma medida noutra, como se indica a seguir:

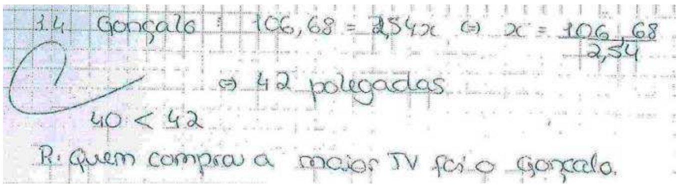


Figura 28 – Resolução da questão 3.4

> **Professora:** Porque resolveste desta forma?
> **Elisa:** Usei a explicação do exercício anterior para converter os centímetros em polegadas e depois comparei. Escrevi isto porque vi o valor que correspondia a 1 polegada no gráfico (aqui estabelece também uma relação com a representação gráfica).

Aqui, tal como referi em cima, a Elisa usa a expressão algébrica como uma ferramenta, para resolver situações e daí "ser só aplicar", como ela própria refere:

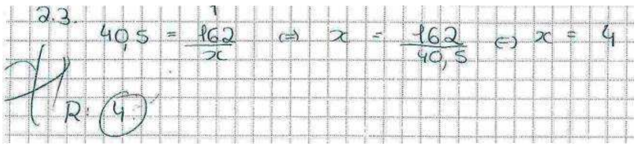


Figura 29 – Resolução da questão 2.3

E ainda explica na entrevista da seguinte forma:

> **Elisa:** Se cada um recebe 40.5, dividi o prémio total por 40.5 para saber quantos totalistas havia. Deu 4. Mas não devia ter contado com o João.
> **Professora:** Porquê?
> **Elisa:** Porque o que era pedido era o número de totalistas para além dele.
> **Professora:** Qual deveria ter sido a resposta?
> **Elisa:** 3.

Perante a questão 5:

> Considere o seguinte problema: "O produto de dois números positivos, ***a*** e ***b*** é 18. Quais são esses números?"

A Elisa explica a resolução de forma clara e bem reveladora dos conhecimentos adquiridos, escrevendo sem dificuldades a expressão algébrica a partir da representação verbal:

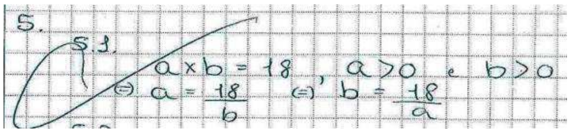


Figura 30 – Resolução da questão 5

Ao pedir-lhe para explicar a sua resolução, a aluna diz:

> **Elisa:** Então … Porque têm de ser números positivos. Se um fosse negativo, dava negativo. Porque era um dado referido no enunciado.

Elisa identifica, rapidamente, a forma como as grandezas em causa variam entre si relacionando-as com o tipo de proporcionalidade em causa, caso exista.

Na questão 3, do teste em anexo 2, a Elisa respondeu:

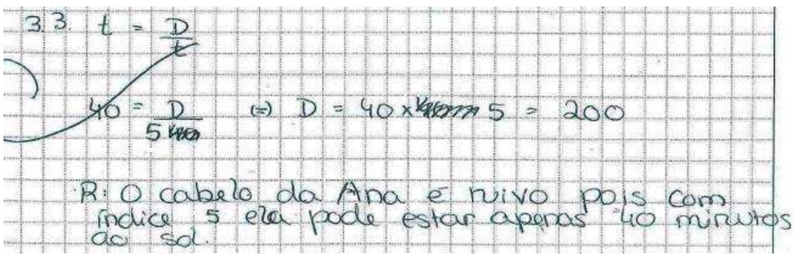


Figura 31 – Resolução da questão 3.3

> **Elisa:** Primeiro, descodifiquei a informação. Escrevi a expressão a partir do enunciado, substituí os valores da tabela e gráfico na expressa e depois fiz a equação 40 = D/5 e D = 200.
> **Professora:** O que era o D?
> **Elisa:** Era o número que na tabela correspondia à cor do cabelo e

dos olhos.
Professora: O que deu?
Elisa: Pela tabela, deu cabelo ruivo.

Assim, perante a questão 6 do teste intermédio de 7 de Fevereiro de 2011:

A tabela que a seguir se apresenta traduz uma relação de proporcionalidade inversa entre as grandezas x e y

X	75	100
Y	a	1,5

Qual é o valor de *a* ?

A resposta dada é:

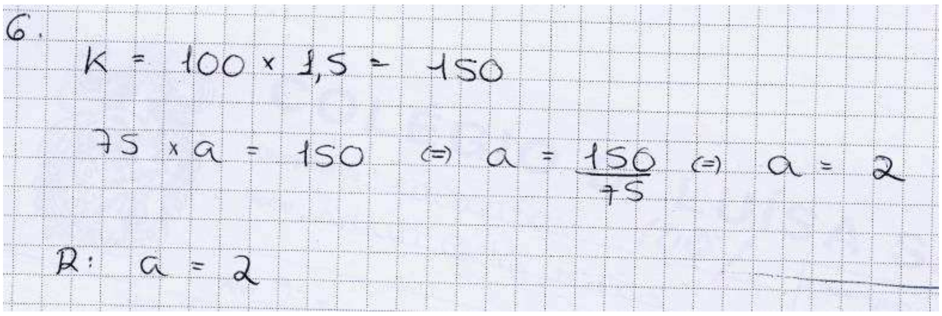


Figura 32 – Resolução da questão 6

Professora: Porque foste encontrar primeiro a constante K?
Elisa: Vi na tabela, os valores que tinham correspondência, ou seja 100 e 1,5 e como era dito que existia uma relação de proporcionalidade inversa, fui calcular K = 100 x 1,5. E depois resolvi a equação 75 x a = 150

Elisa consegue estabelecer a relação entre a informação verbal e a expressão algébrica que caracteriza uma situação de proporcionalidade inversa para de seguida transpor essa informação para a representação em tabela.

Na questão 7 do teste intermédio (anexo 2),

O Jorge reside numa aldeia do norte de Portugal e vai frequentemente a Lisboa. Quando o Jorge se desloca à velocidade média de 80km/h, demora mais uma hora do que quando se

desloca à velocidade média de 100km/h. Qual é a distância, em quilómetros, que o Jorge percorre quando se desloca da sua aldeia a Lisboa?
Mostra como chegaste à tua resposta.

A Elisa resolve sem dificuldades o problema descodificando a informação verbal dada, passando à representação algébrica e estabelecendo conexões com conhecimentos já adquiridos.

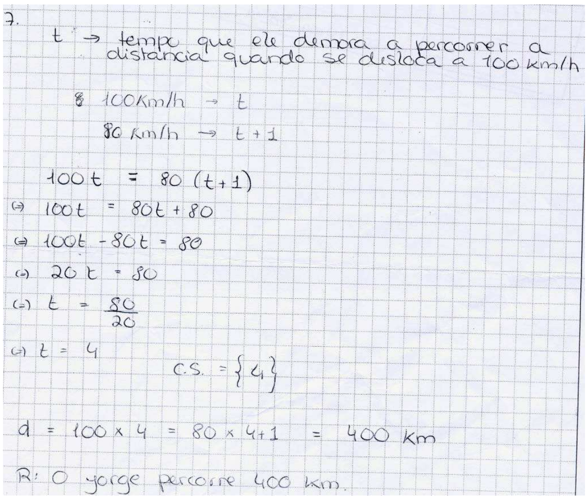


Figura 33 – Resolução da questão 7

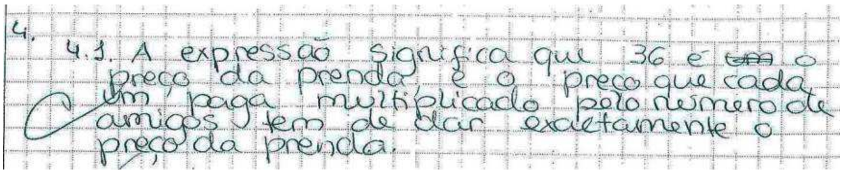
Professora: Porque escreveste a expressão 100 t = 80 (t + 1)?
Elisa: Ora, Num certo tempo t, a velocidade era de 100 Km/h.
E se a velocidade for menor, com certeza que leva mais tempo, porque a distância é fixa. Assim, se for a 80 Km/h, percorre a mesma distância mas com mais uma hora, logo 80 (t +1), vai dar essa distância, que é igual a 100 t, por isso igualei.
Descobri o tempo gasto, a partir da multiplicação 100 x 4 = 400 Km.

<u>O uso da Representação em tabela</u>

A partir da questão seguinte era pedido, inicialmente, que explicasse o significado da expressão no contexto do problema:

No dia dos anos do João, os seus amigos compraram uma prenda sem saber ainda qual o número dos que queriam participar. Arranjaram uma expressão que relaciona o número de amigos que participam na prenda **(*n*)** e a quantia que cabe a cada um **(*q*): *n* x *q* = 36**.

A Elisa percebe o significado da expressão e estabelece a ligação com a situação de proporcionalidade inversa onde o produto das variáveis é invariante.


4.

4.1. A expressão significa que 36 é ~~um~~ o preço da prenda é o preço que cada um paga multiplicado pelo número de amigos tem de dar exactamente o preço da prenda.

Figura 34 – Resolução da questão 4.1

Professora: Qual o significado de 36?
Elisa: Ah! 36 é o preço total da prenda que será dividido por cada pessoa que quer pagar. Assim para saber quantos amigos contribuíram para a prenda se cada um tiver pago 2 €, era fácil:

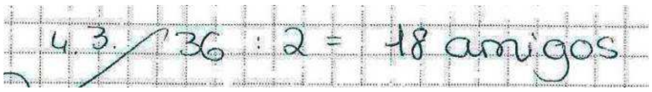
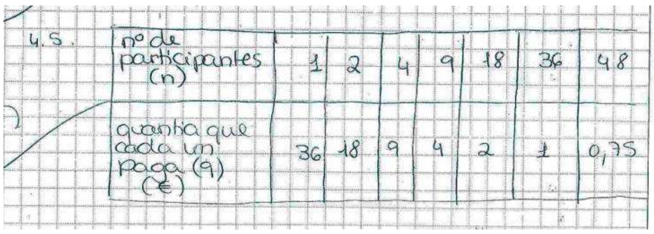

4.3. 36 : 2 = 18 amigos

Figura 35 – Resolução da questão 4.3

Porque o produto entre o número de amigos e o que cada pagou deve ser sempre o mesmo. Que era, 36!

Quando solicitada para transferir a informação para uma tabela, respondeu desta forma:


4.5.

nº de participantes (n)	1	2	4	9	18	36	48
quantia que cada um paga (q) (€)	36	18	9	4	2	1	0,75

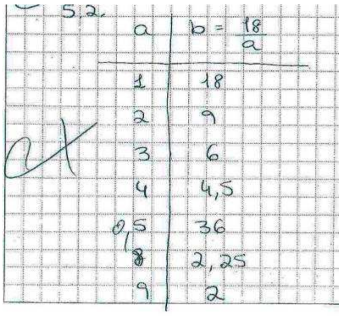
Figura 36 – Resolução da questão 4.5

Esclareceu então como preencheu a tabela:

“Para preencher a tabela, peguei no 36 € e dividi pelos vários participantes e vi com quanto cada um contribuía”.

Da mesma maneira, perante a questão 5:

“Considere o seguinte problema: “O produto de dois números positivos, a e b é 18. Quais são esses números?”, a Elisa, a partir da expressão algébrica que escreve e a partir da representação verbal, constrói sem dificuldade a tabela pedida,



5.2.

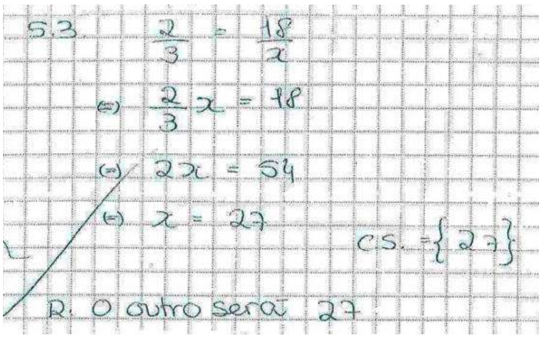
a	$b = \frac{18}{a}$
1	18
2	9
3	6
4	4,5
0,5	36
8	2,25
9	2

Figura 37 – Resolução da questão 5.2

e explica o seu raciocínio:

> **Elisa:** Defini o “a”?
> **Professora:** Atribuíste valores?
> **Elisa:** Sim. E através da expressão para cada “a” encontrei o “b”.

Para descobrir o valor correspondente a 2/3, recorre à expressão que lhe permitiu construir a tabela anterior, resolvendo uma equação, como pode ser verificado.



5.3. $\frac{2}{3} = \frac{18}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 18$

$\Leftrightarrow 2x = 54$

$\Leftrightarrow x = 27$

C.S. $= \{27\}$

R: O outro será 27.

Figura 38 – Resolução da questão 5.3

> **Elisa:** Já que o $a = \frac{2}{3}$ então fiz uma equação, uma vez que o produto deve ser sempre igual a 18.
> $b = 18 \div \frac{2}{3}$

Aqui, mostrou muita facilidade em manipular a expressão analítica em causa.

O uso da Representação gráfica

Quando lhe é pedido que identifique o gráfico correspondente à situação a x b = 18, escolhe o D e explica a sua escolha:

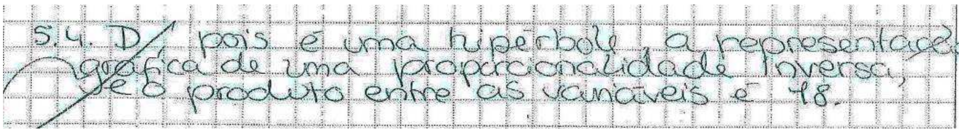


Figura 39 – Resolução da questão 5.4

> **Elisa:** Primeiro, pensei numa curva porque o gráfico tem de ser uma hipérbole por ser proporcionalidade inversa. Vi qual deles é que representava pontos (coordenadas dos pontos) cujo produto dava sempre 18. Era o D. Assim há proporcionalidade inversa porque o produto das coordenadas (dos pontos) é sempre o mesmo: a x b = 18
> **Professora:** Como variam a e b?
> **Elisa:** Um aumenta e outro diminui. Eles variam inversamente, se um aumentar para o dobro o outro diminuiu para a metade.

A Elisa consegue relacionar várias representações sem qualquer dificuldade.

Perante um gráfico que relacionava número de polegadas e centímetros do comprimento da diagonal de um ecrã dum televisor, onde era solicitado que indicassem o número de polegadas correspondente a 6,35cm de comprimento, Elisa utiliza a regra de três simples.

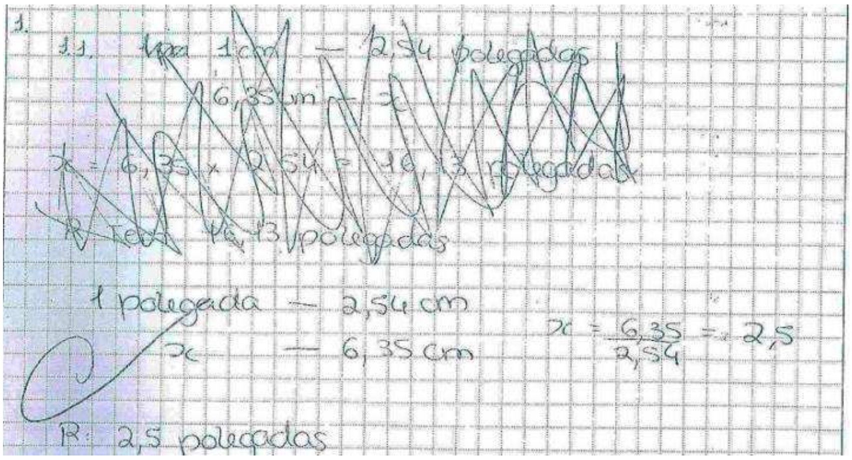


Figura 40 – Resolução da questão 1.1

Quando questionada na entrevista, sobre a forma de resolução, respondeu de imediato:

> **Elisa:** Primeiro não reparei no gráfico, se fosse logo pelo gráfico, tinha visto imediatamente a correspondência, porque é uma recta que passa pela origem, logo trata-se de uma situação de proporcionalidade directa, mas como no dia do teste não vi, utilizei a regra de três simples.

Na questão 3 do teste, a partir de informação, verbal, de uma expressão algébrica e de um gráfico, a Elisa utilizou toda a informação verbal e, de forma segura, responde recorrendo ao gráfico, como descreve de seguida:

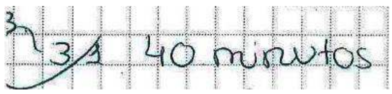


Figura 41 – Resolução da questão 3.1

> **Elisa:** Procurei no gráfico no eixo que correspondia ao índice (x) o 5 e vi a que número correspondia, tendo em conta a hipérbole.
> **Professora:** O número encontrado foi?
> **Elisa:** 40 minutos.

Quando lhe foi pedido o índice correspondente a uma exposição de 50 minutos, respondeu de imediato, a partir do gráfico:

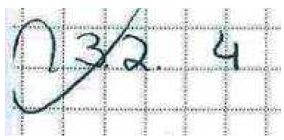


Figura 42 – Resolução da questão 3.2

> **Elisa:** Aqui fiz ao contrário. Fui ao eixo dos y’s, encontrei 50 e vi a sua correspondência no eixo dos x’s.
> **Professora:** Como?
> **Elisa:** Através da hipérbole. Onde deu 4.

Na questão 3.4 do teste (anexo 2), apresenta a resposta que se encontra na figura 43.

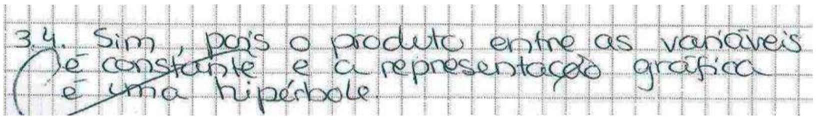


Figura 43 – Resolução da questão 3.4

A Elisa explica na entrevista a sua resolução:

> **Elisa:** Usei o gráfico e multipliquei os valores:
> 40 x 5 = 200, 50 x 4 = 200, 7 x 30 = este não pertence à hipérbole e 10 x 20 = 200
> **Professora:** Porque multiplicaste?
> **Elisa:** Para ver se o produto é constante. Como é sempre igual a 200, trata-se de uma hipérbole e por isso uma relação de proporcionalidade inversa.
> **Professora:** Como se pode ver se existe proporcionalidade inversa?
> **Elisa:** Primeiro, vejo a forma da linha. Se tiver algo a ver com hipérbole, vou verificar se o produto das coordenadas dos pontos que pertencem à linha é sempre o mesmo. Se for, é proporcionalidade inversa.

Mais uma vez, a Elisa consegue estabelecer de forma segura, uma relação entre a informação dada por um gráfico, a informação verbal e a expressão algébrica correspondente, revelando uma boa compreensão da situação.~

4.2.2. Inácia

Inácia tem 14 anos e é simpática, faladora e com pouca autoconfiança. Pensa que com o seu trabalho seria capaz de fazer melhor. Acha que estuda muito, sobretudo quando tem testes ou trabalhos para apresentar, mas quando chega ao teste não consegue fazer melhor. No 1.º período, obteve nível 3 a Matemática, assim como no 2.º período. Nas aulas, é pouco participativa por insegurança, reconhecendo que a sua conversa prejudica o seu aproveitamento. Considera ainda que a escola é importante para o seu futuro e que a disciplina de Matemática é útil na resolução de situações do dia-a-dia. Pensa que o esforço dispendido com a disciplina não é compensado.

O uso da representação verbal e algébrica

Inácia apoia-se muito na escrita das expressões, identificando primeiro de que tipo de proporcionalidade se trata, a partir das quais resolve os problemas propostos.

Quando lhe foi pedida a expressão algébrica (1.3 do teste (anexo 2)) que relacionasse o comprimento da diagonal (d) do ecrã duma TV, em cm, e o número de polegadas (p) que lhe corresponde, respondeu da seguinte forma:

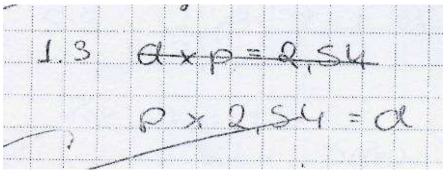


Figura 44 – Resolução da questão 1.3

> **Inácia:** Tive que pensar um pouco e cheguei à conclusão que:
> polegada x constante = diagonal
> **Professora:** Então e qual a constante?
> **Inácia:** 2,54

Na questão 2, "O 1.º prémio do Euromilhões do passado 20 de Janeiro foi atribuído", que a seguir se apresenta a aluna não deu resposta.

> O João jogou no Euromilhões e ganhou. Resolveu fazer previsões quanto ao prémio que lhe caberia, tendo em conta que podia haver mais totalistas.

Número de totalistas (N)	1	3	162	324
Prémio que recebe cada totalista, em milhões de euros (P)	162	54	1	0,5

> O prémio total do Euromilhões é fixo ou varia com o número de totalistas? Justifica a resposta.
> Escreve a expressão que traduza a relação entre o prémio que recebe cada totalista e o número de totalistas.

No entanto, aquando da entrevista, e depois de reler a questão a Inácia afirma:

Inácia: Que estupidez! Claro que não varia nada. O prémio total é sempre o mesmo. O que cada um recebe é que varia consoante o número de totalistas.
Professora: Então é fixo ou variável?
Inácia: Fixo, claro.
Professora: E qual o valor do prémio?
Inácia: 162.
Professora: Que variáveis estão em causa?
Inácia: N (número de totalistas) e P (prémio).
Professora: Consegues agora explicar de que tipo de proporcionalidade se trata?
Inácia: Claro, que só pode ser inversa, porque N x k = P, então N x 162= P
Professora: Mas tu disseste, que tinhas que dividir o prémio pelo número de totalistas. Então como ficava?
Inácia: 162 / N = P, e para ser inversa, tenho que ver:
1 x 162 = 162 ; 3 x 54 = 162 ; 162 x 1 = 162 ; 324 x 0,5 = 162
Então N x P = 162

Perante a questão 5 do teste em anexo 2, a Inácia, não o resolve bem porque não identifica correctamente a operação envolvida.

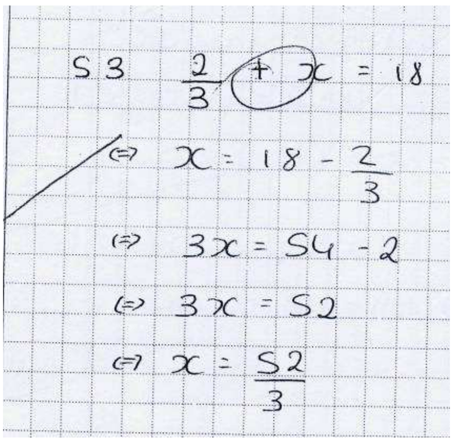


Figura 45 – Resolução da questão 5.3

Com a intervenção da professora, resolveu a questão de imediato estabelecendo uma conexão com o problema anterior.

Inácia: Então é fácil, é como o anterior : a x b = 18.

Possivelmente porque se trata de uma questão descontextualizada, a Inácia apresentou mais dificuldades.

Na questão 3 do teste (anexo 2), a partir da informação verbal, da expressão algébrica e de um gráfico a Inácia explicou:

> **Inácia:** É fácil, porque basta olhar para o gráfico e estabelecer a correspondência. Respondo mal no teste, mas já percebi! Se só pode estar 50m, o índice é 4 se claro está o tipo de pele for igual ao da Ana.
>
> Na tabela que se segue, apresentam-se, para cada um dos principais tipos de pele da população europeia, algumas das características físicas que lhe estão associadas e o valor constante D.

Tipo de pele	Cor do cabelo	Cor dos olhos	D
1	Ruivo	Azul	200
2	Louro	Azul/verde	250
3	Castanho	Cinza/Castanho	350
4	Preto	Castanho	450

> Qual é a cor do cabelo da Ana? Explica como obtiveste a tua resposta.

A Inácia respondeu da seguinte forma:

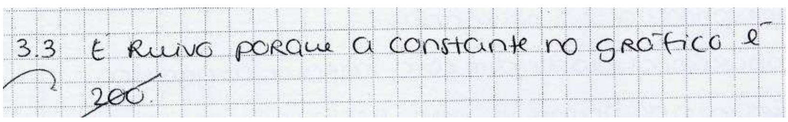


Figura 46 – Resolução da questão 3.3

E acrescentou …

> **Inácia:** Se D é a constante, então 50 = x / 4 e x = 200 para qualquer ponto do gráfico.
> **Professora:** Como chegaste a essa conclusão?
> **Inácia:** Fui à tabela.

Aqui, a partir da expressão algébrica estabelece a relação entre a representação numérica e os valores da tabela para responder à questão.

Na questão 7 do teste intermédio, em anexo 2. a Inácia não conseguiu transferir sozinha a informação verbal para a informação algébrica. Só na entrevista com a ajuda da professora, conseguiu resolver o problema

Professora: O que pretendem no problema?
Inácia: A distância.
Professora: A distância percorrida é a mesma?
Inácia: É a mesma. O valor da velocidade é que muda.
Professora: Qual a expressão que relaciona velocidade, distância e tempo?
Inácia: Ora, v = e/t ou e = v x t
Professora: Então como podes estabelecer a relação entre as velocidades e os tempos respectivos?

v (velocidade)		t (tempo)
80 Km/h	………………………….	y = x + 1
100 Km/h	………………………….	X

Assim para a velocidade de 80Km/h, escreveu *e = 80 x (x + 1)*, mas só com a ajuda da investigadora colocou os parêntesis.

Para a velocidade de 100 Km/h, não hesitou em escrever*: e = 100* x *x*

Professora: O que sabemos destes dois espaços?
Inácia: São iguais! (… silêncio). Então, faço um sistema.

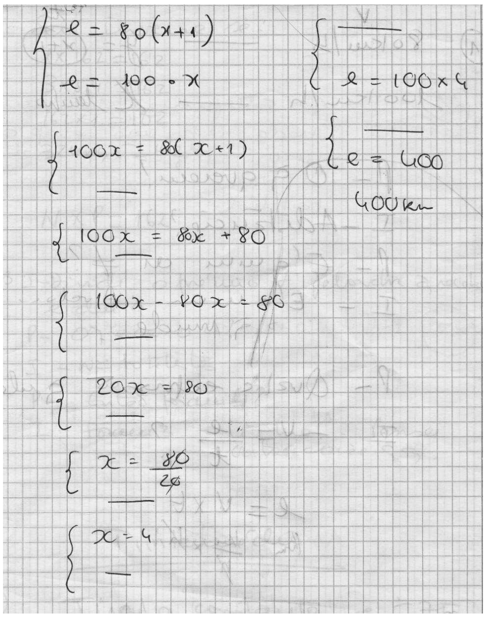


Figura 47 – Resolução da questão 7 (TI)

“Descobri o tempo gasto e a partir daí cheguei à distância”, disse a Inácia.

Aqui, mais uma vez, se pode constatar que a Inácia está muito ligada às regras e procedimentos matemáticos para resolver problemas.

<u>O uso da Representação em tabela</u>

A partir da questão 4:

> No dia dos anos do João, os seus amigos compraram uma prenda sem saber ainda qual o número dos que queriam participar. Arranjaram uma expressão que relaciona o número de amigos que participam na prenda **(*n*)** e a quantia que cabe a cada um **(*q*): *n* x *q* = 36**.

era solicitado o significado da expressão.

A Inácia percebeu rapidamente o significado da expressão.

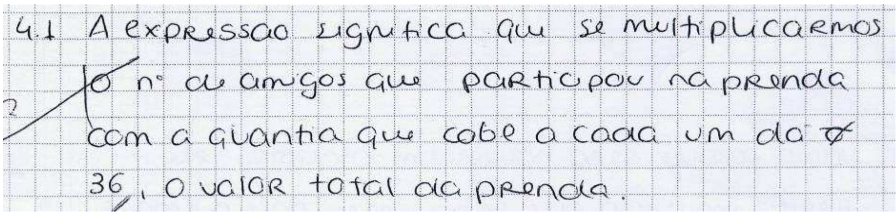


Figura 48 – Resolução da questão 4.1

> **Professora:** Qual o significado de 36?
> **Inácia:** É a quantia total da prenda.

A Inácia está muito agarrada à expressão algébrica, para resolver as situações.

Verbaliza, ainda, que, “cada vez que entra um amigo na prenda, paga menos proporcionalmente”.

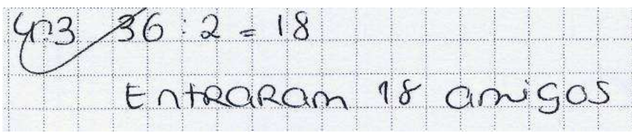


Figura 49 – Resolução da questão 4.3

Quando solicitada para transferir a informação para uma tabela, preencheu sem problemas a tabela e esclareceu: ”Descobri primeiro a constante e depois apliquei, ‘virando’ os valores”.

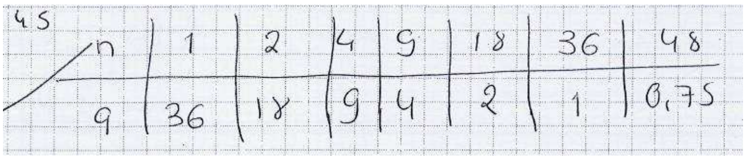


Figura 50 – Resolução da questão 4.5

De igual forma, perante a questão 5:

> Considere o seguinte problema: “O produto de dois números positivos, ***a*** e ***b*** é 18. Quais são esses números?

A Inácia, quando solicitada a expressão algébrica a partir da expressão verbal e a sua conversão em tabela, não consegue resolver porque confunde produto com adição, como pode ser verificado pelas suas resoluções:

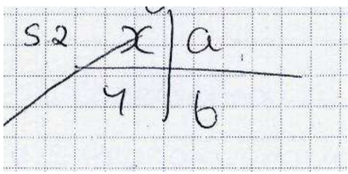


Figura 51 – Resolução da questão 5.2

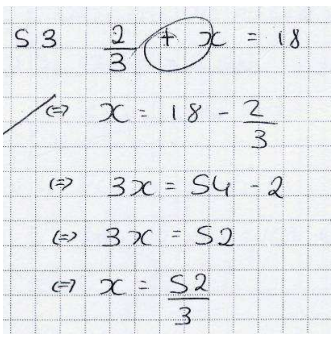


Figura 52 – Resolução da questão 4.1

Aqui, mais uma vez, mostrou estar muito agarrada à “mecanização” dos procedimentos algébricos.

Na questão 3 do teste (anexo 2), a partir da informação verbal, da expressão algébrica e de um gráfico, a Inácia explicou:

Inácia: É fácil, porque basta olhar para o gráfico e estabelecer a correspondência. Respondo mal no teste, mas já percebi! Se só pode estar 50m, o índice é 4 se claro está o tipo de pele for igual ao da Ana.

A Inácia respondeu da seguinte forma:

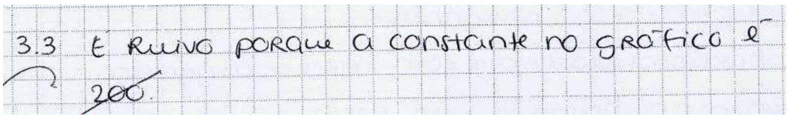


Figura 53 – Resolução da questão 3.3

e explicou:

Inácia: Se D é a constante, então 50 = x / 4 e x = 200 para qualquer ponto do gráfico.
Professora: Como chegaste a essa conclusão?
Inácia: Fui à tabela.

Conseguiu pois, sem aparente dificuldade, relacionar entre si as várias representações e passar de umas para outras.

Na questão 6 do teste intermédio, em anexo 2 , a professora questiona:

Professora: Porque foste encontrar primeiro a constante K?
Inácia: Porque é mais fácil!

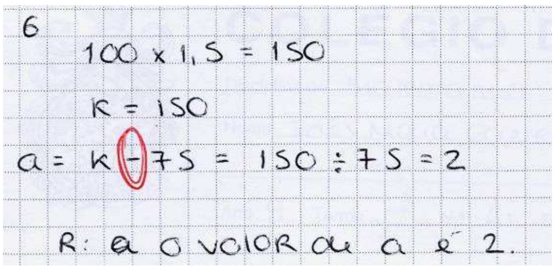


Figura 54 – Resolução da questão 6 (TI)

Inácia: Ah, que estúpida! Pus “menos” em vez do sinal de divisão.

Consegue estabelecer, ainda que com algumas dificuldades uma relação entre a expressão verbal e tabelar, apoiada na expressão algébrica geral que traduz uma situação de proporcionalidade inversa.

O uso da Representação gráfica

Na questão1 da TV que relaciona centímetros e polegadas, reconhece a existência de proporcionalidade directa, a partir da representação gráfica, “uma recta que passa pelo ponto (0,0), a origem do referencial”, e desta forma consegue de imediato transferir a informação para a representação algébrica:

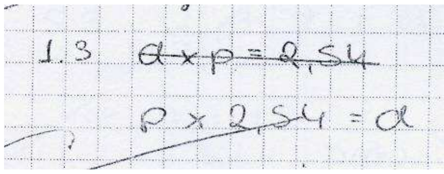


Figura 55 – Resolução da questão 1.3

Perante um gráfico que relacionava número de polegadas e centímetros do comprimento da diagonal de um ecrã dum televisor, onde era solicitado que indicassem o número de polegadas correspondente a 6,35cm de comprimento, Inácia explica de forma clara a sua resolução: ”Vi no gráfico onde a recta passava nos 6,35cm e qual a correspondência em polegadas”.
Ao ser-lhe pedido que identificasse o gráfico correspondente à situação a x b = 18, escolhe o gráfico D e explica a escolha da seguinte forma:

Figura 56 – Resolução da questão 5.4

> **Professora:** Porque escolheste D e não C?
> **Inácia:** Ora, porque é uma hipérbole!
> **Professora:** Como tens a certeza?
> **Inácia:** (… silêncio)

Como se pode ver, Inácia não utiliza a representação numérica para verificar se se trata verdadeiramente de uma situação de proporcionalidade inversa.

Na questão 3 do teste, a partir da informação verbal, da expressão algébrica e de um gráfico a Inácia explicou:

> **Inácia:** É fácil, porque basta olhar para o gráfico e estabelecer a correspondência. Respondo mal no teste, mas já percebi! Se só pode estar 50m, o índice é 4 se claro está o tipo de pele for igual ao da Ana.

Conseguiu pois, sem aparente dificuldade, relacionar entre si as várias representações e passar de umas para outras.

Relativamente à questão 3.4 do teste (anexo 2), a Inácia responde e explica:

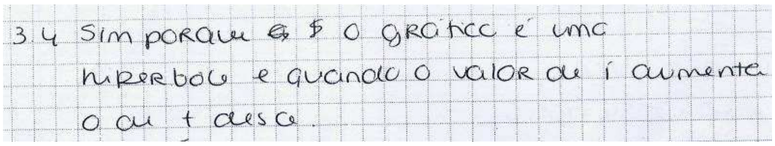


Figura 57 – Resolução da questão 3.4

> Porque multipliquei várias vezes e dava sempre 200.

Aqui a Inácia verifica a existência de proporcionalidade inversa, mais pela "observação do gráfico", do que pela verificação da constância do produto das variáveis.

Verifica-se, pois, que a Inácia é uma aluna que está muito agarrada às regras algébricas, tendo alguma dificuldade em interpretar as situações.

4.2.3. Rui

Rui tem 15 anos, é simpático, falador e muito despreocupado. É um aluno com enormes capacidades mas com uma grande inércia ao trabalho. Acha que não ter "negas" é suficiente no ensino básico e que no secundário é que vai começar a estudar.

Admite que estuda somente quando tem testes e nem sempre faz os trabalhos propostos. No 1.º período, obteve nível 2 a Matemática e no 2.º período, nível 3. Nas aulas, é pouco participativo e reconhece que a conversa prejudica o seu aproveitamento. Considera ainda que a escola é importante para o seu futuro como desportista e que a disciplina de Matemática é para si muito difícil.

O uso da representação verbal e algébrica

Na primeira questão do teste (anexo 2), pretendia-se que os alunos escrevessem a expressão algébrica de uma situação de proporcionalidade directa. Rui responde da seguinte forma: "Fui ao gráfico e vi que 6,35 correspondia a 2,5 polegadas", tendo sido, posteriormente questionado na entrevista sobre a sua resposta:

> **Professora:** E o que te leva a pensar que se trata de uma situação de proporcionalidade directa?
> **Rui:** Porque a polegada ia aumentando sempre 0,5 e em centímetros também aumentava sempre o mesmo valor. Vi na calculadora. O aumento era sempre proporcional e constante.
> **Professora:** E porque não fizeste a expressão algébrica solicitada?
> **Rui:** Não percebo como se faz!
> **Professora:** Queres relacionar centímetros (y) com polegadas (x). Experimenta organizar a informação em tabela.
> **Rui:** Assim?

X	Y
1	2,54
2	5,08

> **Professora:** Porque dizes que se trata de proporcionalidade directa?
> **Rui:** Porque …

$$\frac{2,54}{1} = \frac{5,08}{2} = \frac{3,81}{1,5} = \frac{6,35}{2,5} = \frac{7,62}{3} = 2,54$$

> **Professora:** Então, qual a expressão geral de uma situação deste tipo?
> **Rui:** $\frac{y}{x} = k$
> **Professora:** Neste caso concreto, qual era o valor de k ?
> **Rui:** (…) k = 2,54, ou seja, a expressão:

$$\frac{y}{x} = k \qquad y = 2,54 \cdot x \qquad \frac{2,54}{1} = k = 2,54$$

Rui identifica a constante, mas tem dificuldades em escrever a respectiva expressão algébrica.

Na questão 1.4 era necessário converter polegadas em centímetros. Rui diz: "Passei das 40 polegadas para 80 e experimentei com 80, para ver o que dava. Dava "cento e tal centímetros". Assim fiz 80 x 1,27 = 101 polegadas e concluí que a TV com maior diagonal era a do Gonçalo.

Professora: Mas porque multiplicaste por 1,27?
Rui: Porque em *y* aumenta sempre 1,27 e tentei multiplicar para ver o que dava. Imaginei uma tabela com mais valores por polegada.
Professora: Agora como farias, uma vez que já sabes a expressão?
Rui: Agora era fácil, … ora $y = 2{,}54 \times x$ e portanto,
$x = 40$ polegadas
$y = 2{,}54 \times 40 = 101{,}60$
Rui: Assim o Gonçalo tinha comprado uma TV com mais centímetros de diagonal, porque a do Gonçalo era de 106,68 cm e a conta que fiz era 101,60 cm.

Na questão 2, do teste (anexo 2), as questões 2.1 e 2.2 são mal respondidas, porque não interpretou bem a informação.

No entanto, na entrevista o Rui chega à resolução.

Professora: Lê de novo a pergunta 2. Achas que o prémio varia?
Rui: Para mim varia.
Professora: O prémio total não é o prémio de cada um!
Rui: Ah! Está bem! Claro! O prémio total é fixo. Se houver só um, é 162 milhares.
Professora: De novo é pedida uma expressão a partir dos valores de uma tabela. Já fizemos uma expressão em 1. Como farias?
Rui: Ora, $\frac{y}{x} = \cdots$ Isto não vai dar bem!, porque no "primeiro" dava e no "segundo não". Não é proporcionalidade directa! Tinha que fazer de outra maneira.
Professora: O que é agora fixo?
Rui: 162 – prémio total.
Professora: Como obténs o prémio total?
Rui: Como estão relacionadas as variáveis, sei que é sempre a dividir.

162 : 1 = 162
162 : 3 = 54
162 : 162 = 1

Professora: O que fica constante?
Rui: 162 = K. Então, N x P = K, ou seja N x P = 162.
Professora: Então de que proporcionalidade se trata?
Rui: Proporcionalidade inversa. Porque a constante é sempre a mesma e quando uma aumenta a outra diminui.
Professora – Na questão 2.3 fizeste bem. Porquê?

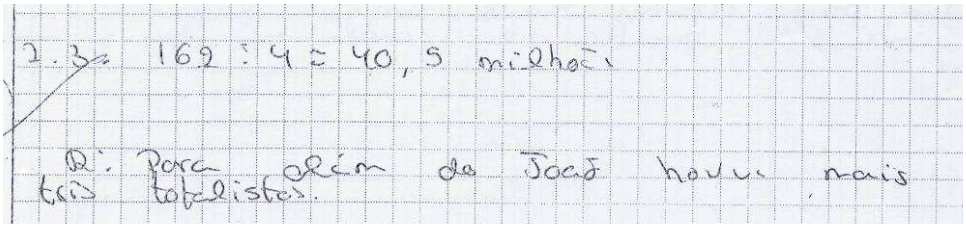

2.3: 162 : 4 = 40,5 milhões
R: Para além do João houve mais três totalistas.

Figura 58 – Resolução da questão 2.3

Rui: É fácil, continuei a tabela. Por tentativa e erro, cheguei ao 4 e depois como queriam para além do João, o João não podia contar, por isso respondi 3.
Professora: Interpretaste bem, mas usaste de novo o método de tentativa e erro.

O Rui, de uma maneira geral, interpreta bem o problema, percebe a relação existente entre as variáveis mas tem uma grande dificuldade em escrever a sua representação algébrica.

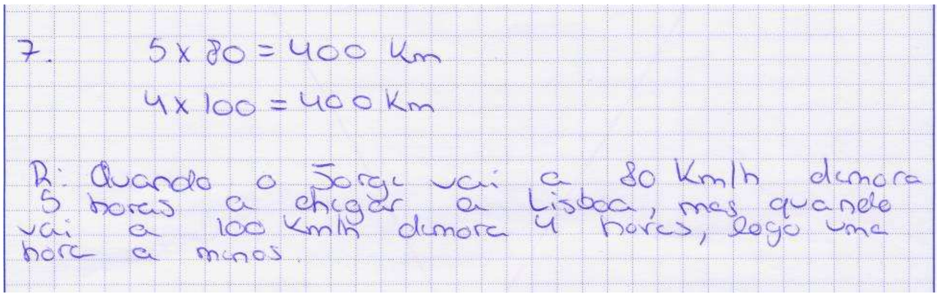
No teste, o Rui não conseguiu escrever a expressão pedida na questão 4. Durante a entrevista e, depois de já ter reflectido sobre outras questões, chegou à expressão. O processo para lá chegar foi o seguinte:

Professora: Qual é a expressão?
Rui: n x q = 36. Quer dizer, o número de amigos do João vezes a quantia que coube a cada um dar que é o valor da prenda.

Já na questão 5 do teste, em anexo 2, a conversão de representação verbal em representação algébrica foi feita sem problemas: a x b = 18

Limitou-se a traduzir em linguagem matemática um enunciado (com carácter “mais matemático”).

Relativamente também à questão 7 do teste intermédio, em anexo 2, o Rui resolve, como se pode ver.


7. 5 x 80 = 400 Km
4 x 100 = 400 Km

R: Quando o Jorge vai a 80 Km/h demora 5 horas a chegar a Lisboa, mas quando vai a 100 Km/h demora 4 horas, logo uma hora a menos.

Figura 59 – Resolução da questão 7 (TI)

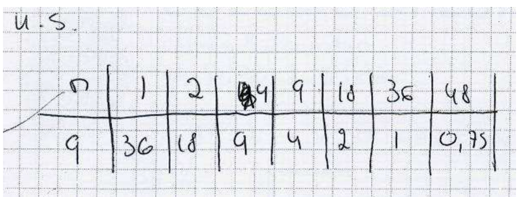
> **Professora:** Porque resolveste assim?
> **Rui:** Fui ver o que havia em comum e percebi que era a distância.
> O que muda é o tempo.
> Se experimentei com t = 2 e t = 3, para 80 km/h e 100 km/h e não dava até que deu 4 h e 5 h.

Quando da passagem da representação algébrica para a verbal, percebe-a mas tem dificuldade em utilizá-la para calcular valores numéricos. Utiliza sempre o contexto para resolver o problema e, mais uma vez, recorre às suas vivências pessoais, para, através do método de tentativa e erro, conseguir resolver problemas.

<u>O uso da representação em tabela</u>

Na questão 4.5 do teste, em anexo 2, onde é pedida a representação da informação em tabela, o Rui respondeu bem às questões seguintes inclusive à construção de uma tabela e explicou como fez:

> **Rui:** Fiz 36 : 2 = 18. Troquei na expressão,
> 36 (valor da prenda) : 2 (quantia de cada um)
> e deu o *n* que é 18. Fui dividindo 36 por cada valor de *n*. Voltei a "trocar" a expressão inicial. Assim, construí a tabela:


4.5.

n	1	2	4	9	18	36	48
q	36	18	9	4	2	1	0,75

Figura 60 – Resolução da questão 4.5

Da mesma maneira, na construção da tabela para dar resposta ao facto de arranjar pares de números positivos cujo produto dê 18, fê-la sem problemas com excepção de um valor, por não ter calculadora.

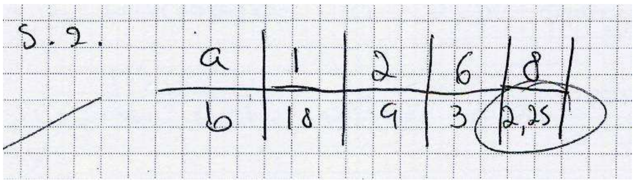


Figura 61 – Resolução da questão 5.2

> **Professora:** Se um número for 2/3 qual seria o outro para que o produto seja 18?
> **Rui:** $\frac{2}{3} \times 27 = 18$
> **Professora:** Como chegaste a 27?
> **Rui:** Experimentei vários valores até encontrar o 27.
> **Professora:** Não podias ter feito de outra forma?
> **Rui:** (… silêncio …)
> **Professora:** Então?
> **Rui:** Ah! $18 \div \frac{2}{3} = \frac{18}{1\,(3)} \div \frac{2}{3}$
> **Professora:** É preciso o mesmo denominador para dividir fracções?
> **Rui:** $18 \div \frac{2}{3} = 18 \times \frac{3}{2} = 9 \times 3 = 27$

O Rui apresentou dificuldades na divisão de racionais. Só compreendeu com o exemplo $18 \div \frac{1}{2} = 18 \times 2$

Na questão 3.3 era solicitado a interpretação de uma tabela com recurso a representação numérica.

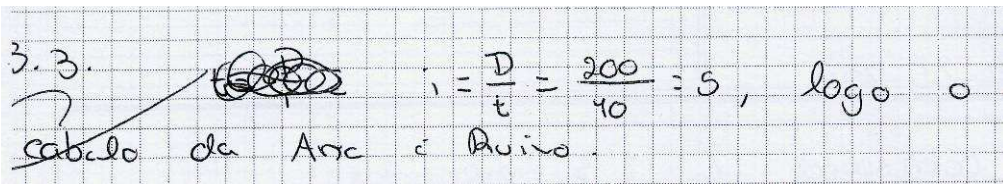


Figura 62 – Resolução da questão 3.3

Rui: Aqui foi fácil! Substituí os valores na fórmula e encontrei

D = 200

I =5

t = 40

e depois fui à tabela e vi que para D = 200, o cabelo é ruivo.

Perante a questão 6, do teste intermédio de 7/2/2011, em anexo 2, o Rui resolve da seguinte forma:

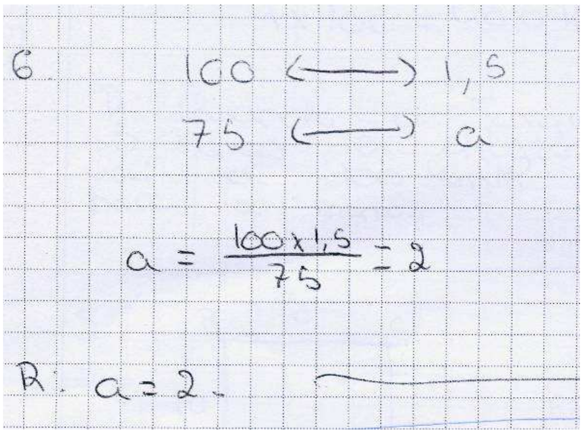


Figura 63 – Resolução da questão 6 (TI)

Professora: Porque foste encontrar primeiro a constante K?
Rui: 100 x 1,5 : 75 = 2, apliquei regra de "inversão", porque existe proporcionalidade inversa.

<u>O uso da representação gráfica</u>

Ao ser-lhe pedido para identificar o gráfico correspondente à situação descrita por "a x b = 18", escolhe o C (erradamente) e explica a opção tomada.

Rui: É o C porque o D não parece proporcional.

A professora explicou de novo a importância de multiplicar as coordenadas de todos os pontos para averiguar se havia constante.

Rui: Ah! Agora já sei que tenho de verificar, antes de escolher o gráfico.

Na questão 3.1, que estabelece a relação entre uma representação algébrica e um gráfico e, de seguida, é solicitado uma conexão com uma tabela, o Rui não apresentou quaisquer dificuldades e explica: “fui ver ao gráfico e vi o que corresponde a 0,5”. Na questão 3.2 , refere igualmente que “fui também ao gráfico”.

Na questão 3.4, em que se pretende saber como variam as grandezas entre si e se existe proporcionalidade inversa, o aluno apresenta a seguinte resposta:

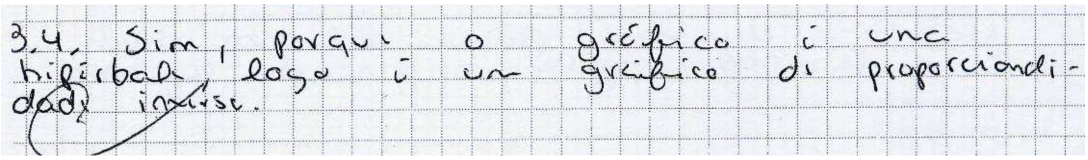

3.4. Sim, porque o gráfico é uma hipérbole, logo é um gráfico de proporcionali-dade inversa.

Figura 64 – Resolução da questão 3.4

> **Professora:** Respondes, “Sim, porque o gráfico é uma hipérbole, logo é um gráfico de proporcionalidade inversa.” Porquê?
> **Rui:** Porque há uma constante.
> **Professora:** Como a encontras?
> (Silêncio … por parte do Rui)

Só com ajuda da Professora, percebeu que tinha de verificar que 50 x 4 = 200, 40 x 5 = 200, 10 x 20 = 200…

O Rui, quando da passagem da representação algébrica para a verbal, percebe-a mas tem dificuldade em utilizá-la para calcular valores numéricos. Utiliza sempre a informação do contexto para resolver o problema.

5. Conclusão

Apresento, de seguida, as conclusões do meu estudo que me parecem mais pertinentes, indicadas de acordo com as questões da problemática.

Começo por sintetizar como é que os alunos mobilizam o seu conhecimento matemático sobre proporcionalidade directa, em particular as interpretações que lhe estão associadas, e quais as estratégias que usam na resolução de problemas de proporcionalidade inversa.

A seguir, analiso as conexões estabelecidas entre as várias representações e como é que os alunos as utilizam para resolver problemas e, por fim, apresento as principais dificuldades que manifestaram na resolução de problemas de proporcionalidade inversa.

Aproveito, ainda, sempre que possível, para estabelecer ligações com outros autores.

5.1. Mobilização do conhecimento matemático sobre proporcionalidade directa para resolver situações de proporcionalidade inversa

No que diz respeito à mobilização do conhecimento de proporcionalidade directa, os três alunos — Elisa, Inácia e Rui — atribuem ao termo “proporcionalidade” o significado de igualdade entre duas razões, como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou como função linear, representada graficamente por uma recta que passa na origem do referencial. No entanto, de acordo com a experiência escolar dos alunos, surgem condicionantes ao desenvolvimento do seu raciocínio proporcional, quando estes se centram na mecanização de procedimentos e verbalização de regras (Silvestre & Ponte, 2009). Esta situação é, de certo modo, visível no caso de Inácia, que se mostra muito “agarrada” às regras e procedimentos, por exemplo à “regra de três simples”, apresentando dificuldades na compreensão da estrutura matemática da relação proporcional.

Em contrapartida, dado que o conceito de proporcionalidade directa está presente em muitos fenómenos da vida real, a vivência dos alunos pode ser um factor facilitador de aprendizagem. Tal verifica-se com o Rui, que consegue distinguir relações de natureza proporcional de outras que o não são e, porque as compreende, consegue resolver os problemas. Os três alunos conseguem resolver os problemas de valor omisso pela regra de três simples ou pela procura de regularidades (no caso do Rui).

Para resolver problemas de proporcionalidade inversa, utilizam os conhecimentos de proporcionalidade directa, adaptando-os. Também aqui encontramos diferenças entre os três alunos.

A Inácia identifica o tipo de proporcionalidade em causa e depois aplica a regra de invariância do produto. Recorre com frequência ao algoritmo da regra de três simples para proporcionalidade directa e à inversão do raciocínio para calcular valores em situações de proporcionalidade inversa.

O Rui recorre muito à comparação entre as variáveis, à procura de regularidades, chegando mesmo a afirmar que utiliza a regra de três inversa. O aluno procura a relação existente entre as variáveis a partir duma estratégia informal e, por vezes, rudimentar (processo da tentativa e erro), sem se aperceber do significado da invariância.

Quando se encontram perante situações problemáticas apresentadas em gráficos, todos relacionam a hipérbole com situações de proporcionalidade inversa, mas apenas a Elisa recorre à representação numérica para confirmar que se trata de proporcionalidade inversa.

A Elisa identifica o tipo de proporcionalidade a partir da relação entre as variáveis, compreende o significado de constante no contexto do problema e estabelece conexões entre as regularidades numéricas e entre as variáveis. A facilidade com que estabelece a relação entre a representação algébrica e a verbal prende-se com o facto de dar sentido aos números que surgem na informação, o mesmo acontecendo quando interpreta uma expressão e quando recolhe informação a partir de um gráfico. O Rui parte sempre do contexto e das suas vivências, procurando regularidades.

Com a compreensão das regularidades, é possível a construção do conceito de proporcionalidade, tal como refere o estudo de Steffe e Thompson (in Silvestre & Ponte, 2009). Neste estudo, observou-se que os alunos conseguiram chegar ao conceito de proporcionalidade inversa a partir dos conceitos de proporcionalidade directa.

5.2. Relação entre representações e como as utilizam para resolver problemas

Interpretação dada através de informação verbal e tabelas e sua conexão

Elisa, Inácia e Rui utilizam o reconhecimento de invariância do produto e a inversão do raciocínio para calcular valores. Recorrem às representações numéricas, como passo intermédio, estando de acordo com os resultados dos trabalhos de Friedlander e Tabach (2001). As dificuldades da Inácia prendem-se com a tradução em linguagem matemática da linguagem corrente e no facto de ter mais confiança na expressão algébrica, ao contrário do Rui, que utiliza preferencialmente as regularidades.

O Rui consegue interpretar bem a informação dada, quer verbalmente quer sob a forma de tabela, pois recorre ao contexto e utiliza a inversão de valores para descobrir a constante. Só apresenta dificuldades quando surgem números fraccionários, pois não adquiriu as regras das operações com números fraccionários.

A Elisa resolve sem dificuldades o problema, descodificando a informação verbal dada, passando à representação algébrica e estabelecendo conexões com o conhecimento já adquirido. A Elisa percebe o significado da expressão algébrica e estabelece a ligação com a situação de proporcionalidade inversa, relacionando-a com a invariância do produto das variáveis. A partir daqui, constrói facilmente a tabela correspondente.

<u>Interpretação e utilização de expressões — escrita de expressões</u>

A maneira como utilizam e interpretam as expressões, bem como fazem a escrita das mesmas, é completamente diferente para os três alunos em estudo.

A Elisa não apresenta quaisquer problemas. Percebe o significado da expressão, estabelece a relação entre as variáveis e a partir daí escreve, sem dificuldades, a expressão algébrica, à qual atribui significado.

Já a Inácia, apoia-se na escrita da expressão como ferramenta para resolver problemas, sem lhe atribuir verdadeiro significado e daí nem sempre conseguir resolver os problemas propostos. A Inácia utiliza, muitas vezes, a expressão algébrica para calcular valores, o que está de acordo com os resultados do estudo de Raposo (2009), segundo o qual, a representação algébrica predomina no pensamento de muitos alunos, no entanto, tem dificuldade em atribuir-lhe significado.

O Rui interpreta bem a expressão algébrica, pois apoia-se muito no contexto e na sua vivência diária, para fazer a interpretação global, identificando as situações de proporcionalidade directa e de proporcionalidade inversa, mas não consegue escrever a expressão algébrica de forma imediata. Só o faz com ajuda e apoiado sempre no método de tentativa e erro. Os erros que comete parecem resultar de uma aplicação de fórmulas descontextualizadas. As questões que lhe são propostas a partir de um contexto real não lhe trazem dificuldades.

Interpretação e representação gráfica

Perante a informação dada graficamente, todos os alunos interpretam a situação, mas de formas diferentes. Reconhecem a hipérbole como gráfico de proporcionalidade inversa. No entanto, apenas a Elisa recorre ao cálculo numérico para verificar a invariância do produto, procurando estabelecer a correspondência entre as coordenadas dos pontos do gráfico e os valores de uma tabela ou os obtidos por uma expressão.

O Rui estabelece sem dificuldades a conexão entre a representação gráfica, a verbal e a representação em tabela. A Inácia, por sua vez, estabelece sem dificuldades a conexão entre a representação gráfica com a verbal e com a representação em tabela e recorre, com frequência, à escrita da expressão que lhe permite calcular valores.

Em jeito de síntese, relativamente à conexão entre as várias representações e como as utilizam para resolver problemas, posso dizer que, quanto à passagem entre representação verbal e algébrica, a Elisa não apresenta dificuldades, o que não acontece com o Rui que, apesar de muitas vezes resolver os problemas, não consegue passar da representação verbal para a algébrica. Já a Inácia, recorre à relação entre as variáveis, descobre primeiro a constante e depois passa para a expressão, mas manifesta alguma dificuldade em atribuir-lhe significado.

As diferenças entre o Rui e a Inácia prendem-se também com o tipo de problemas que são propostos. O Rui tem mais dificuldades em problemas puramente matemáticos, sendo o seu desempenho melhor em problemas de contexto real, o que não acontece com a Inácia.

No entanto, todos são capazes de passar da representação numérica para a algébrica.

No que diz respeito à relação entre a representação gráfica e as demais representações, todos estabelecem bem estas conexões. No entanto, há grandes diferenças entre a Inácia o Rui. A Inácia identifica primeiro o tipo de proporcionalidade, utiliza os cálculos para chegar à constante de forma a escrever a expressão algébrica, a partir da qual resolve o problema. O Rui baseia-se no contexto para dele extrair a informação necessária para resolver problemas, mas apresenta dificuldades em transferir essa informação para a representação algébrica. Por vezes, a Inácia e o Rui não conseguem mudar de uma representação algébrica para uma gráfica de forma "consistente", parecendo que tratam a representação algébrica e a gráfica de uma função de proporcionalidade inversa "como objectos matemáticos distintos", como refere Duval (2006, p. 124). É, pois, muito importante, propor tarefas onde surjam diferentes representações, através das quais se possam estabelecer conexões para resolver problemas, melhorando assim a compreensão dos conceitos pelos alunos.

Também no meu estudo, tal como no de Raposo (2009), no que diz respeito à relação entre as representações gráfica e algébrica, são raros os alunos que associam directamente as expressões algébricas das funções aos respectivos gráficos, sendo que na sua maioria utilizam como passo intermédio as representações numéricas. Este resultado mostra, igualmente, a importância da representação numérica na compreensão inicial de um problema, tal como referem Friedlander e Tabach (2001).

Verifica-se, neste estudo, tal como mencionam Friedlander e Tabach (2001), que são vários os factores que levam os alunos a optar por uma ou outra representação, encontrando-se entre eles os seguintes: "as características da tarefa, a preferência pessoal, o estilo de pensamento do aluno ou a procura de ultrapassar dificuldades encontradas com outras representações" (p. 12).

5.3. Dificuldades dos alunos na resolução de problemas e estratégias utilizadas

As dificuldades sentidas pelos alunos estão relacionadas com o seu nível de conhecimento matemático, mas também com as suas características pessoais. A Elisa consegue sem dificuldades resolver os problemas propostos, sejam eles puramente matemáticos ou de contexto real. Atribui significado às variáveis, à relação entre elas e a partir daí consegue estabelecer relações entre as várias representações. O facto de recorrer à organização de informação, ajuda-a a passar de umas representações para as outras. A Inácia, como tem dificuldade em atribuir significado às variáveis, apoia-se na escrita da expressão algébrica para resolver problemas. Se, por vezes, não consegue chegar à expressão, não resolve a situação. Está muito agarrada às regras e procedimentos matemáticos. O Rui, por oposição, interpreta a informação mas de forma pouco organizada, o que dificulta muitas vezes a resolução. Para ele, a interpretação da relação existente entre as variáveis é fundamental para conseguir resolver os problemas, sempre muito apoiado na sua vivência pessoal, apesar de ter dificuldades em conseguir escrever expressões algébricas que traduzam situações de contexto real.

Estas dificuldades, tal como Raposo (2009) conclui, sugerem a necessidade de dar uma maior atenção à linguagem verbal na aprendizagem das funções, não só nos enunciados das tarefas, mas também na explicitação do significado de cada uma das representações de uma função.

Os resultados deste estudo podem ser interessantes para outros professores, uma vez que ajudam a compreender os erros cometidos pelos alunos. Neste sentido, tal como refere Candeias (2010), é importante a divulgação de propostas como esta, que combinam uma vertente didáctica (contendo sugestões de tarefas e de estratégias), com uma vertente de investigação que permita analisar os resultados obtidos. De facto, é fundamental que, após a aplicação de tarefas, se proceda a uma reflexão conjunta sobre os conteúdos matemáticos e processos de resolução que tenham surgido. Além disso, parece-me também importante que os professores continuem a investigar e a reflectir sobre a sua prática profissional, para compreenderem o modo como esta influencia a aprendizagem dos alunos, e que relação tem com os erros que os alunos cometem e nas dificuldades que sentem.

5.4. Reflexão Final

Para concluir, graças a conhecer bem os alunos, a escolha dos três alunos para o estudo não foi difícil. A maior dificuldade foi estabelecer o paralelo entre a literatura e os resultados das entrevistas assim como a complexidade do processo de análise de dados.

Foi interessante observar que o momento da realização das entrevistas correspondeu também para os alunos a momentos de aprendizagem significativa. Foi uma experiência muito enriquecedora para alunos e professora. Muitas vezes, “pensar alto”, tal como também Raposo (2009) referenciou, levou-os a detectar erros de raciocínio e a reflectir sobre a adequabilidade das suas estratégias. No dia a dia, muitas vezes, há alunos que perante perguntas que lhes parecem demasiado complicadas, desistem de tentar resolvê-las. Nas entrevistas, pelo contrário, os alunos envolveram-se de forma positiva nos problemas, explicando os seus raciocínios e caminhos utilizados na resolução e esforçando-se por explicar a sua dificuldade. Creio que esses momentos foram importantes na sua aprendizagem.

Penso que este estudo ajuda a reflectir como é que os alunos usam as várias representações e como estabelecem conexões entre elas, reforçando as conclusões das teses de Raposo (2009) e de Candeias (2010), e permitem a nós professores pensar em tarefas que facilitem esta aprendizagem. O estudo também permitiu concluir que, desde cedo, é importante a utilização dessas mesmas representações. Por outro lado, temos de ter o cuidado na forma como as apresentamos, de maneira a não condicionar os alunos na sua utilização. A descrição das estratégias e dificuldades dos alunos que este estudo proporciona, poderá ser tida em conta pelos professores no momento da planificação deste tema, ajudando a definir os aspectos que devem ser enfatizados.

A realização deste trabalho, em especial o momento das entrevistas, foi bastante enriquecedor, pois permitiu-me conhecer melhor o processo de resolução utilizado por cada aluno, a forma como usavam as várias representações para resolver problemas de proporcionalidade inversa e ainda compreender melhor as suas dificuldades, reforçando a ideia de que o processo de ensino-aprendizagem é um processo dinâmico e colaborativo entre professores e alunos.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2009). O *pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos*. Quadrante 16(2), 81-118.

Candeias, A. (2010). *Aprendizagem das funções no 8.º ano com auxilio do software GeoGebra*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Elia, I., Panoura, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 533-556.

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Jones, A. W. (2006). The Fifth Process Standard: An Argument to Include Representation in Standards 2000.

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Retirado em 21 de Julho de 2008 de http://www.eric.ed.gov.

Ministério da Educação (1991). Programa de Matemática – Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem – 3.º Ciclo do Ensino Básico. Lisboa: DGEBS.

Ministério da Educação (2001). Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais. Lisboa: DEB.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Nakahara, Tadao. Cultivating Mathematical Thinking through Representation – Utilizing The Representational System.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*, 1-16.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Raposo, L. (2009). *O papel das representações algébricas na aprendizagem das funções*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Schultz, J. E., & Waters, M. S. (2000). Why Representations?. In Mathematics Teacher (Vol.93, No.6)

Tabach, M. & Friedlander, A. (2009). Money context. In Mathematics Teaching in the Middle school, 14 (8))

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13(8)*, 438-445.

ANEXO 1 – Planos de unidade e de aula

PLANO DE UNIDADE

UNIDADE DIDÁCTICA: PROPORCIONALIDADE INVERSA. REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

DISCIPLINA: MATEMÁTICA Nº DE AULAS PREVISTAS: 10	9.º ANO 2010/2011

OBJECTIVOS:

Gerais:

G_1 – Resolver problemas da vida corrente, da Matemática ou de outras ciências que envolvam proporcionalidade directa.

G_2 – Reconhecer situações de proporcionalidade directa em situações da vida corrente indicando a constante de proporcionalidade.

G_3 – Ler, interpretar e construir tabelas e gráficos relativos a funções do tipo $x \mapsto y = kx$.

G_4 – Resolver problemas da vida corrente, da Matemática ou de outras ciências que envolvam proporcionalidade inversa.

G_5 – Reconhecer situações de proporcionalidade inversa em situações da vida corrente indicando a constante de proporcionalidade

G_6 – Construir tabelas ou gráficos de proporcionalidade inversa a partir de dados fornecidos.

G_7 – Interpretar e explorar gráficos fornecidos.

Específicos:

E_1 – Dar exemplos de correspondências identificando as que são funções.

E_2 – Identificar numa função o domínio e contradomínio, reconhecendo objecto e imagem.

E_3 – Interpretar o significado da constante de proporcionalidade directa.

E_4 – Interpretar o significado da constante de proporcionalidade inversa.

E_5 – Reconhecer gráficos que não representem funções.

E_6 – Representar situações de proporcionalidade inversa por tabelas e gráficos.

E_7 – Ler informação representada graficamente.

Formativos:

F_1 – Utilizar correctamente a calculadora.

F_2 – Manifestar hábitos de reflexão.

F_3 – Revelar a capacidade de “fazer” a par de “saber como fazer”.

F_4 – Utilizar conscientemente técnicas de cálculo algébrico.

F_5 – Utilizar a Matemática na resolução de problemas correntes.

F_6 – Revelar sentido de rigor (e confiança) nos processos de elaboração mental.

F_7 – Matematizar situações da vida real.

F_8 – Criar hábitos de trabalho.

F_9 – Trabalhar com destreza com régua, esquadro e compasso.

F_{10} – Escrever e desenhar facilmente e de forma legível.

F_{11} – Desenvolver o aspecto lúdico da Matemática.

F_{12} – Revelar capacidade de criar soluções pessoais para novos problemas.

F_{13} – Aplicar conhecimentos, capacidades já adquiridas em diversas ocasiões, na resolução de problemas.

Nota:

No desenvolvimento deste plano de regências não se faz referência aos objectivos formativos, uma vez que se pretende que estejam presentes ao longo da leccionação de toda esta unidade assim como ao longo de todo o percurso escolar dos alunos.

As fichas de trabalho encontram-se em anexo.

CONTEÚDOS	OBJ.	DESENVOLVIMENTO

Para introduzir esta unidade começar por apresentar os vários sentidos que pode tomar a palavra função. Por exemplo:

- A componente fundamental do organismo humano é a água. Diariamente, grande quantidade dessa água é eliminada através de **funções** várias tais como: respiração, transpiração, urina.
- Ele cumpriu a sua **função**…
- Para compreendermos as **funções** do sangue, teremos de conhecer a sua constituição…
- A **função** da polícia é manter a ordem…
- O teu sucesso a Matemática é **função** do teu estudo…

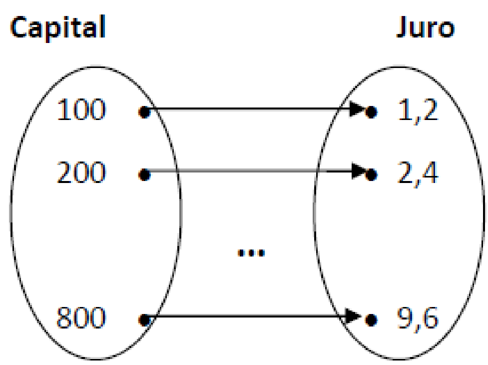
Em seguida, apresentar o seguinte exemplo:

Exemplo1:

Observe a tabela que traduz a correspondência entre o capital e o seu juro. O capital mínimo é de 100 euros.

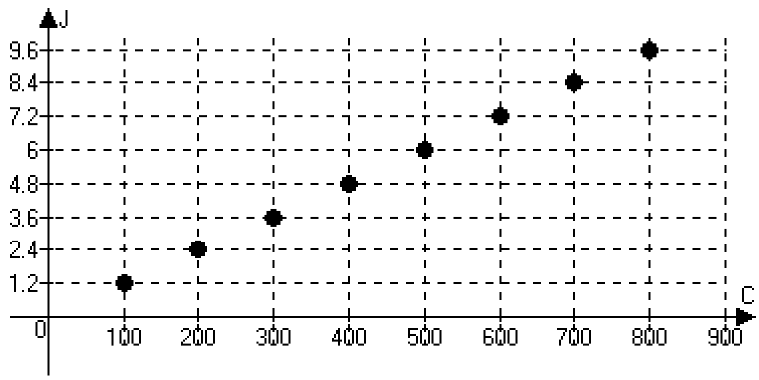
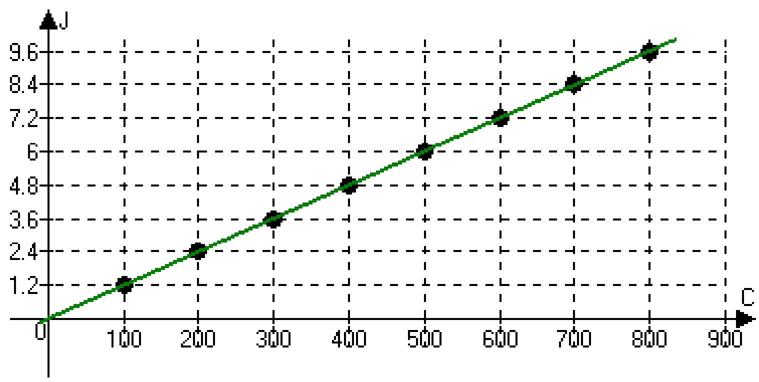
Capital em € (C)	100	200	300	400	500	600	700	800
Juros em € (J)	1,2	2,4	3,6	4,8	6	7,2	8,4	9,6

Em todos os casos existe uma correspondência unívoca entre o capital e o juro.



Uma correspondência deste tipo, em que a cada elemento do primeiro conjunto corresponde um e um só elemento do segundo conjunto chama-se função:

CONTEÚDOS	OBJ.	DESENVOLVIMENTO
		Definição: Chama-se **função** a toda a correspondência entre duas variáveis se a cada valor da variável independente (*x*) corresponde um e um só valor da variável dependente (*y*). Uma função representa-se por uma letra minúscula, por exemplo *f*, (porque é a primeira letra da palavra função). Partindo do exemplo dado anteriormente, identificar o domínio e o contradomínio de uma função, ou seja: • O conjunto do Capital é o **domínio** da função e cada elemento deste conjunto chama-se **objecto**. • O conjunto do Juro chama-se **contradomínio** da função e cada elemento deste conjunto chama-se **imagem**. Referir que existem vários modos para definir uma função, tais como, por: ➢ Um diagrama; ➢ Uma tabela; ➢ Um gráfico; ➢ Uma expressão algébrica; ➢ Uma expressão em linguagem corrente. Os alunos devem aperceber-se das vantagens e desvantagens de cada forma de definir uma função e de se passar de uma para outra. Exemplo2: Um electrocardiograma deve ser apresentado por um gráfico. As tabelas dão uma leitura simples e rigorosa dos dados. Na geometria a função que nos dá a área de um quadrado deve ser apresentado por uma expressão algébrica.

CONTEÚDOS	OBJ.	DESENVOLVIMENTO
		Propor aos alunos a representação gráfica dos dados do exemplo1.  Esta situação pode ser expressa pela seguinte expressão algébrica: $J = 0{,}012C$ Em seguida verificar que todos os pontos estão situados sob uma recta que passa pela origem do referencial.  Concluir que as varáveis C e J são directamente proporcionais. Definição: Duas grandezas x e y são **directamente proporcionais** quando é constante a razão entre os seus valores. A essa constante chama-se constante de proporcionalidade directa e representa-se por k. $\frac{y}{x} = k$ Expressão algébrica: $y = kx$ Graficamente, duas grandezas x e y são **directamente proporcionais** quando todos os pontos estão situados sob uma recta que passa pela origem do referencial.

CONTEÚDOS	OBJ.	DESENVOLVIMENTO

Toda a situação de proporcionalidade directa pode traduzir-se por uma função do tipo $y = kx$ ou $f(x) = kx$ ou ainda $f: x \mapsto y = kx$.

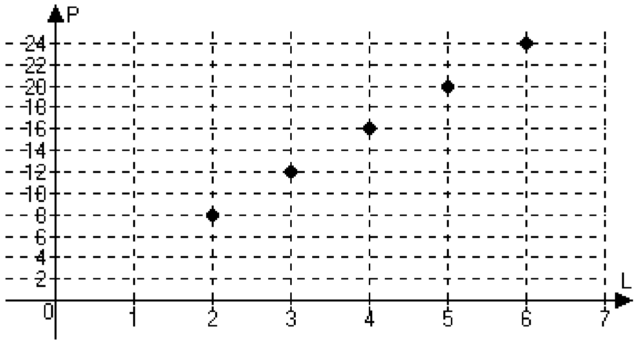
Propor aos alunos a resolução do seguinte exercício.

Exercício: Verifique se o lado de um quadrado é directamente proporcional ao seu perímetro.

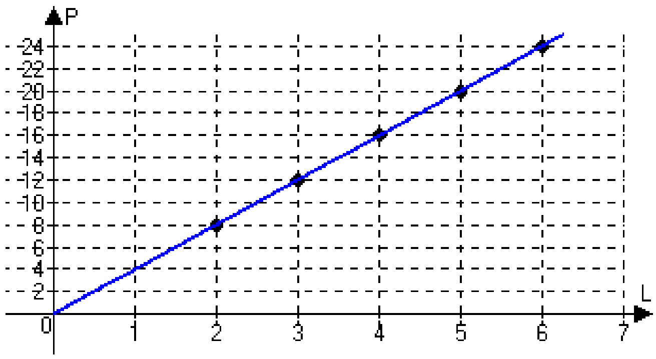
Na resolução deste exercício sugerir aos alunos que construam uma tabela como a seguinte:

Lado do quadrado (L)	2	3	4		6
Perímetro do quadrado (P)		12		20	

A função algébrica associada é: $P = 4L$, cuja representação gráfica é a seguinte:



Verificar que todos os pontos estão situados sob uma semi-recta com origem na origem do referencial.



CONTEÚDOS	OBJ.	DESENVOLVIMENTO
Enquadramentos		Para definir a proporcionalidade inversa recorrer à exploração do seguinte problema: Problema: Estude a variação da medida do comprimento e da largura em rectângulos cuja medida da área é de 12 cm^2. Como estratégia de resolução construir uma tabela que permita observar a relação que existe entre a medida do comprimento e a medida da largura.

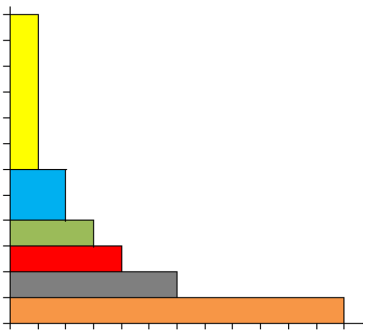
Rectângulos	Comprimento x	Largura y	Área $x \times y$
A	1	12	12
B	2	6	12
C	3	4	12
D	4	3	12
E	6	2	12
F	12	1	12

Verificar com os alunos que à medida que o valor do comprimento aumenta o valor correspondente à largura diminui.

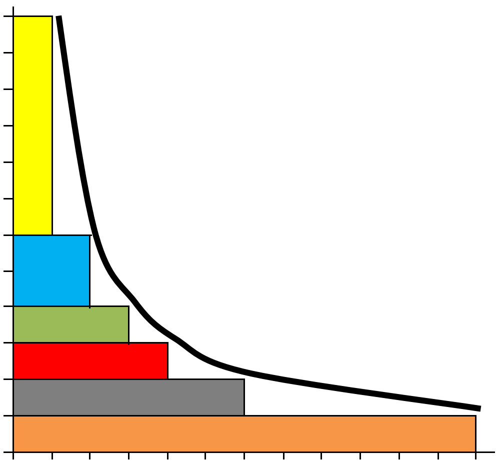
Genericamente, quando uma das dimensões duplica a outra passa metade, quando triplica a outra passa a um terço, quando uma quadruplica a outra passa a um quarto, etc.

O produto entre os valores das duas dimensões é a medida da área que se pretende, sempre constante.

Em seguida, propor aos alunos que construam os rectângulos e que os representem lado-a-lado num referencial cartesiano do seguinte modo:



CONTEÚDOS	OBJ.	DESENVOLVIMENTO
		Pedir aos alunos que tracem a linha que une os vértices do canto superior direito de cada um dos rectângulos.



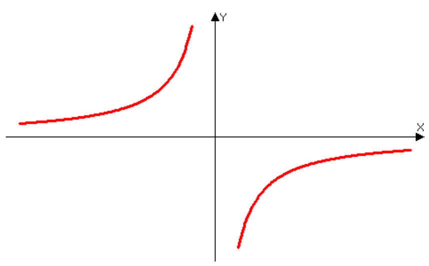
Definição: Duas grandezas x e y, não nulas, são **inversamente proporcionais** quando é constante o produto entre os seus valores.

$xy = k$, onde k representa a constante de proporcionalidade inversa.

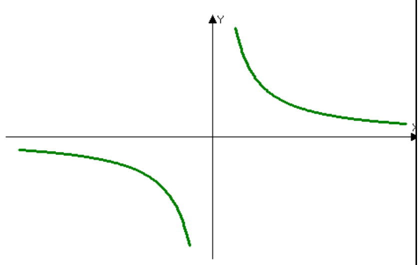
Expressão algébrica: $y = \dfrac{k}{x}$.

Graficamente, duas grandezas x e y são **inversamente proporcionais** quando todos os pontos estão situados sob uma hipérbole.

($k < 0$)



($k > 0$)



Propor a resolução dos exercícios …do livro de texto da página ….

CONTEÚDOS	OBJ.	DESENVOLVIMENTO

Isaac Newton formulou a lei da gravitação universal e a sua fórmula traduz-se por:

$$f = k\frac{M \times m}{d^2}$$

Se a aplicarmos à Terra e à Lua, onde ***M*** e ***m*** serão, respectivamente, as massas dos dois astros e ***d*** a distância que os separa. Esta lei ajuda-nos a perceber que entre os dois astros se exerce uma força de atracção ***f*** cuja grandeza é directamente proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa.

Propor aos alunos a resolução do seguinte exercício:

Exercício:

- Averigúe em que casos existe proporcionalidade directa e, em caso afirmativo, indica a constante de proporcionalidade e escreve uma expressão algébrica que relacione as variáveis.

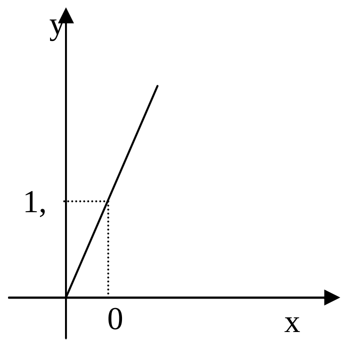
1.1.

x	1	1,4	2,3	7
y	1,5	2,1	4,45	10,5

1.2.

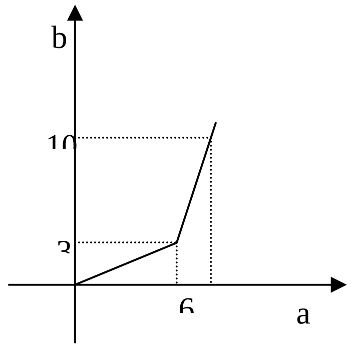
a	2	3	4	8	6	5	4,1
b	4	6	8	16	12	10	8,2

1.3.



CONTEÚDOS	OBJ.	DESENVOLVIMENTO

1.4.



- Relativamente à seguinte tabela, escreve uma expressão que relaciona as variáveis *x* e *y* e diz o nome do gráfico representado pela expressão, de modo que ...

x	0,5	2	4	
y			2	0,8

- *x* e *y* sejam directamente proporcionais (indique também a constante de proporcionalidade directa).
- *x* e *y* sejam inversamente proporcionais (indique também a constante de proporcionalidade inversa).
- Não exista qualquer tipo de proporcionalidade.

Por vezes é muito difícil definir uma função por meio de uma expressão algébrica, mas facilmente pode ser representada graficamente.

A análise de gráficos é importante para se compreenderem situações do dia-a-dia.

UNIDADE 5: Proporcionalidade Inversa. Representações Gráficas.			
Temas e Sub-temas	N.º de aulas	Objectivos	Experiências de Aprendizagem
Proporcionalidade directa (revisão) Resolução de problemas usando proporcionalidade directa Proporcionalidade inversa Função de proporcionalidade inversa	6	- Identificar relações de proporcionalidade directa. - Construir tabelas relacionando variáveis. - Construir gráficos de funções do tipo $y = ax + b$. - Definir proporcionalidade directa. - Resolver problemas aplicando a relação de proporcionalidade directa. - Identificar situações de proporcionalidade inversa. - Construir tabelas relacionando variáveis. - Definir proporcionalidade inversa. - Desenhar o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa. - Identificar gráficos de uma função de proporcionalidade inversa. - Resolver problemas envolvendo proporcionalidade inversa.	Tipo de tarefas: - Resolução de exercícios para a aquisição e consolidação de conhecimentos. - Actividades de resolução de problemas, de raciocínio, de comunicação e argumentação. - Tarefas de investigação e pesquisas. - Actividades seleccionadas dos “Mil itens”.

UNIDADE 5: Proporcionalidade Inversa. Representações Gráficas.			
Temas e Sub-temas	N.º de aulas	Objectivos	Experiências de Aprendizagem
Leitura e interpretação de gráficos Representação gráfica de funções	4	- Ler e interpretar gráficos. - Descrever a história relacionada com um gráfico. - Resolver problemas com dados obtidos em gráficos.	

UNIDADE 5: Proporcionalidade Inversa. Representações Gráficas.
Recursos   Manual, fichas de trabalho, material de desenho. Competências a desenvolver nesta unidade - Compreensão do conceito de função e das facetas que pode apresentar, como correspondência entre conjuntos e como relação entre variáveis. - Aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas . - Sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade directa e inversa(...). - Reconhecimento de situações de proporcionalidade directa e inversa (...) e aptidão para resolver problemas no contexto de tais situações. - Reconhecimento do significado de fórmulas no contexto de situações concretas e a aptidão para usá-las na resolução de problemas. - Aptidão para usar diferentes representações para resolver problemas (...), assim como para realizar procedimentos algébricos simples.

Matemática 9.º ano

Professora: Maria Luísa Simões Bolota

Unidade Temática: Proporcionalidade Inversa	**Data:** 24-01-2011 **Sala:** 9.º ano

Tema: Proporcionalidade directa (revisões) Sumário: Breve recordar dos conceitos em que assenta a proporcionalidade directa. Realização da tarefa “” À Procura de proporcionalidade 1 …”.
Tópicos: (Conceitos, conteúdos) • Grandezas directamente proporcionais; • Constante de proporcionalidade directa; • Função linear; • Representações de situações de proporcionalidade directa.
Objectivos Específicos: • Identificar relações de proporcionalidade directa; • Identificar relações de proporcionalidade inversa; • Identificar relações onde não existe proporcionalidade; • Resolver problemas.
Recursos: Tarefa ” À Procura de proporcionalidade 1 …”, (adaptada do Novo Espaço – Matemática 7º ano, Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues, Porto Editora e projecto 1001 itens do GAVE)
Estratégias: A Tarefa a ser desenvolvida em trabalho de pares, pretende levar os alunos a ler, interpretar os problemas, recordar os conceitos onde assenta a proporcionalidade directa. Expectativas: com a realização da tarefa, fazer com que os alunos identifiquem situações de proporcionalidade, analisem a relação que existe entre as variáveis e recordem o significado de grandezas directamente proporcionais e de constante de proporcionalidade.
Avaliação: Observação e registo de aula. No dia seguinte em Estudo Acompanhado os alunos realizarão uma ficha de trabalho para averiguar se os conceitos relacionados com proporcionalidade directa estão adquiridos.

Matemática 9.º ano

Professora: Maria Luísa Simões Bolota

Desenvolvimento da aula:

- Introdução do tema a abordar e escrita do Sumário. (5 minutos)
- Apresentação da tarefa, explicação do pretendido. (5 minutos)
- Realização da tarefa. Trabalho a pares com o apoio dos professores na sala de aula. (50 minutos)
- Correcção e discussão da tarefa no quadro aproveitando para fazer uma revisão sobre os tópicos relacionados com Proporcionalidade Directa. (30 minutos)

-
- Aproveitar a questão 1) para relacionar as várias representações de uma situação de proporcionalidade directa (gráfica, tabela e algébrica) e fomentar a discussão.
- Com a questão 4 pretendo que os alunos conjecturem sobre a existência ou não de proporcionalidade directa, resolvam um problema de contexto real e interpretem o gráfico respectivo.

Notas:

- Receio que a tarefa não seja concluída por todos, pois se for necessário terá que se utilizar parte do tempo previsto para a sua resolução a rever conceitos.
- Ao longo da aula, se verificar que tudo será realizado , iniciar-se-á a ficha realizada para TPC.
- Poderá ser arriscado pensar que os alunos possam autonomamente realizar a questão 4, no entanto é uma turma com bons alunos e tenho a certeza que haverá pelo menos dois ou três a concluir com êxito.

Matemática 9.º ano

Professora: Maria Luísa Simões Bolota

Unidade Temática: Proporcionalidade Inversa	**Data:** 26-01-2011 **Sala:** 9.º ano

Tópicos: (Conceitos, conteúdos)

- Grandezas inversamente proporcionais;
- Constante de proporcionalidade inversa;
- Representações gráficas.

Objectivos Específicos:

- Identificar situações de proporcionalidade inversa;
- Construir e interpretar tabelas relacionando variáveis;
- Construir e interpretar gráficos.

Recursos:

Tarefa " À Procura de proporcionalidade 2 …", (adaptado de Matemática 9, de Leonor Vieira, Francelino Gomes e Mª José Burnay). Acetatos; Material de desenho.

Estratégias:

Partir de um problema de velocidade e tempo, para introduzir a proporcionalidade inversa, e investigar a relação entre as grandezas consideradas.

Tarefa exploratória a ser desenvolvida em trabalho de pares.

Expectativas: com a realização da tarefa, fazer com que os alunos entendam o significado de grandezas inversamente proporcionais e de constante de proporcionalidade e associem a tabela e expressão algébrica de uma situação de proporcionalidade inversa à sua representação gráfica.

Avaliação:

Registo de áudio e recolha da resolução da tarefa, para uma análise mais cuidadosa da forma como está a decorrer o processo de ensino-aprendizagem..

Matemática 9.º ano

Professora: Maria Luísa Simões Bolota

Desenvolvimento da aula:

1. Introdução do tema a abordar e escrita do Sumário. (5 minutos)
2. Entrega e breve **reflexão** sobre a Ficha de Proporcionalidade Directa. (20 minutos)
3. Discussão da **questão 4**, para estabelecer a ponte com o objectivo da aula: Proporcionalidade Inversa. (5 minutos)
4. Apresentação e realização da tarefa a pares. (40 minutos)
5. Discussão da tarefa no quadro e elaboração de uma síntese (20 minutos).
6. Aproveitar a tarefa para relacionar as várias representações de uma situação de proporcionalidade inversa (gráfica, tabela e algébrica) e fomentar a discussão.
7. Com a questão 2 pretendo que os alunos conjecturem sobre o gráfico obtido, de forma a levar-me a explicar-lhes que se trata do ramo de uma hipérbole.
8. De seguida, peço-lhes que, esquecendo o problema em que nos encontramos, que indiquem pares de números , cujo produto dê 12. Surgirão, espero eu, pares de números negativos, (-6; -2), por exemplo, o que me levará a explicar a existência de outro ramo da hipérbole.

COLÉGIO D.LUISA SIGEA

ANEXO 1

Matemática 9.º ano

Professora: Maria Luísa Simões Bolota

Unidade Temática: Proporcionalidade Inversa	**Data:** 27-01-2011 **Sala:** 9.º ano

Tema: Proporcionalidade inversa

Sumário:

Proporcionalidade inversa: tabela, gráficos e expressão algébrica.

Tópicos: (Conceitos, conteúdos)

- Grandezas inversamente proporcionais;
- Representações: gráfica, tabular e algébrica.

Objectivos Específicos:

- Identificar situações de proporcionalidade inversa;
- Resolver e interpretar problemas recorrendo às várias representações.

Recursos:

Tarefa " À Procura de proporcionalidade 3 …"

Estratégias:

Recordar a relação entre as dimensões de um rectângulo, com uma área fixa, feita na aula anterior e traduzir a relação através de uma expressão. Recordar o significado da constante.

Realização a pares da Tarefa " À Procura de proporcionalidade 3 …"

Expectativas: A tarefa, pretende contribuir para uma melhor consolidação relativamente a situações de proporcionalidade inversa e suas representações.

Avaliação:

Recolha da tarefa realizada em aula, para análise e registo das resoluções.

Desenvolvimento da aula:

- Introdução do tema a abordar e escrita do Sumário. (5 minutos)
- Correcção do TPC. (5 minutos)
- Partir da da tarefa do dia anterior e mostrar síntese. (15 minutos)
- Apresentação e realização da tarefa a pares. (40 minutos)
- Discussão da tarefa no quadro e elaboração de uma síntese (25 minutos) .
-
- Aproveitar a tarefa para relacionar as várias representações de uma situação de proporcionalidade inversa (gráfica, tabela e algébrica) e fomentar a discussão, no sentido de serem os alunos a escolherem a representação que consideram mais adequada para resolver cada um dos problemas.

Unidade Temática: Proporcionalidade Inversa	**Data: 31**-01-2011 **Sala:** 9.º ano

Tema: Proporcionalidade inversa

Sumário:

Correcção do TPC. Função de proporcionalidade inversa.

Resolução de problemas.

Tópicos: (Conceitos, conteúdos)

- Função de proporcionalidade inversa;
- Domínio e Contradomínio de uma função;
- Identificar gráficos de proporcionalidade inversa;
- Resolução de problemas.

Objectivos Específicos:

- Identificar situações de proporcionalidade inversa a partir das várias representações;
- Desenhar o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa;
- Resolver e interpretar problemas recorrendo às várias representações.

Recursos:

Tarefa " Função de Proporcionalidade Inversa"; manual e material de escrita.

Estratégias:

Recordar a noção de função, domínio e contradomínio de uma função.

Através de um gráfico e de uma tabela, identificar o domínio e contradomínio de uma função.

Realização a pares da Tarefa " Função de Proporcionalidade Inversa"

Expectativas: A tarefa, pretende contribuir para uma melhor consolidação relativamente a situações de proporcionalidade inversa e suas representações. Espero que esta tarefa facilite a aprendizagem dos alunos relativamente à compreensão da proporcionalidade inversa, enquanto função.

Avaliação:

Durante a aula, observação e registo do desenvolvimento da actividade nos alunos e TPC a recolher na aula seguinte.

Desenvolvimento da aula:

- Introdução do tema a abordar e escrita do Sumário. (5 minutos)
- Correcção do TPC (conclusão da ficha da aula passada) (10 minutos)
- Realização dos exercícios do manual: Pág.22 – 1,2. (10 minutos)
- Recorrendo aos conhecimentos dos alunos, recordar: função, domínio e contradomínio de função, chamando a atenção para o facto de a mesma expressão analítica, estar definida em domínios diferentes, leva a que existam contradomínios diferentes (10 minutos)
- Apresentação e realização da tarefa em par, para permitir a discussão.
- A professora percorre os grupos, ouve as dúvidas, coloca outras questões e encoraja
- os alunos quanto à resolução da tarefa. (35 minutos)
- Discussão da tarefa, em grande grupo, com elaboração de uma síntese no quadro
- (20 minutos).

COLÉGIO D.LUISA SIGEA

ANEXO 1

Matemática 9.º ano

Professora: Maria Luísa Simões Bolota

Unidade Temática: Proporcionalidade Inversa	**Data: 2**-02-2011 **Sala:** 9.º ano

Tema: Proporcionalidade inversa Sumário: Função de proporcionalidade inversa - conclusão. Resolução de problemas.
Tópicos: (Conceitos, conteúdos) • Função de proporcionalidade inversa; • Resolução de problemas.
Objectivos Específicos: • Relacionar os vários tipos de representação; • Resolver e interpretar problemas recorrendo às várias representações, dando significado às expressões.
Recursos: Manual e ficha : "Circuito".
Estratégias: Realização da Tarefa " Circuito" a pares. Expectativas: A tarefa, pretende contribuir para uma consolidação de conhecimentos, recorrendo a conceitos já aprendidos e apelando à interpretação e representação.
Avaliação: Durante a aula, observação e registo da actividade desenvolvida pelos alunos. Realização de uma ficha em casa, a recolher no dia seguinte.

Desenvolvimento da aula:

- Introdução do tema a abordar e escrita do Sumário. (5 minutos)
- Recolha do TPC. (5 minutos) – Pág.22 – 3;
- Realização dos exercícios/problemas do Manual – Pág. 23 – 6; Pág. 27 - 4 , seguida de discussão ao nível da turma. (25 minutos)
- Apresentação e realização da tarefa a par. (30 minutos)
- Discussão da tarefa no quadro e elaboração de uma síntese (30 minutos).

COLÉGIO D.LUISA SIGEA

ANEXO 1

Matemática 9.º ano

Professora: Maria Luísa Simões Bolota

<u>Unidade Temática</u>: Proporcionalidade Inversa	**Data: 3**-02-2011 **Sala:** 9.º ano
<u>Tema:</u> Proporcionalidade inversa Sumário: Leitura e interpretação de gráficos – conclusão.	
Tópicos: (Conceitos, conteúdos) • Leitura e interpretação de gráficos.	
Objectivos Específicos: • Interpretar o enunciado de um problema de contexto real e procurar as soluções de um problema. • Escrever o enunciado de um problema. • Relacionar os vários tipos de representações.	
Recursos: Tarefa " Leitura e interpretação de gráficos."	
Estratégias: Depois de corrigir o TPC e alguns problemas do manual (Pág. 26 – 2 ; Pág.27 – 4 e Pág. 31 – 4) , solicita-se a realização da Tarefa " Leitura e interpretação de gráficos", a pares. Expectativas: A tarefa, pretende contribuir para uma consolidação de conhecimentos e esclarecimento de possíveis dúvidas.	
Avaliação: Verificação do tpc e registos da resolução da tarefa.	

Matemática 9.º ano

Professora: Maria Luísa Simões Bolota

Desenvolvimento da aula:

- Introdução do tema a abordar e escrita do Sumário. (5 minutos)
- Realização dos exercícios/problemas do Manual Pág.26 – 2, Pág.31 - 4 (para estabelecer a relação entre as expressões algébricas e suas representações gráficas e Pág.31 – 5 (para estabelecer a relação entre representações gráficas e tabelas, verificando a existência ou não de proporcionalidade inversa. Discussão destes exercícios/problemas (30 minutos)
- Apresentação de uma actividade a partir de um acetato, para ser resolvida pelo grande grupo-turma. (10minutos)
- Apresentação e realização da tarefa, mais propriamente das questões: 1,3 e 4 a par.
- (30 minutos)
- Discussão da tarefa no quadro (15 minutos).

ANEXO 2 – Fichas de trabalho, Teste Intermédio, teste e caracterização das questões do teste

Ficha 1

COLÉGIO D.LUISA SIGEA

À PROCURA DE PROPORCIONALIDADE 1...

1. O bolo da avó da Rita leva os seguintes ingredientes: 220g de açúcar, 250g de farinha, 4 ovos e 50g de manteiga. Para fazer a mesma receita com 6 ovos, que quantidades dos outros ingredientes se devem utilizar?

2. A Rita já fez 3 meses! No quadro estão registados os seus pesos com 1, 2 e 3 meses de idade.

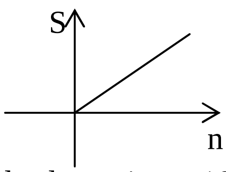
Idade	1 mês	2 meses	3 meses
Peso	3,8Kg	4,7Kg	5,8 Kg

Poderás dizer qual vai ser o peso da Rita quando tiver 4 meses? Justifica.

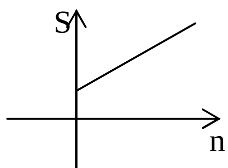
3. O chão da sala da Rita, está coberta com 420 tábuas de 16 cm de largura. Para o assoalhar de novo com tábuas do mesmo comprimento, mas de 12 cm de largura, quantas tábuas são necessárias?

4. A turma do 9.º ano, da irmã da Rita, para angariar fundos para a sua viagem, está a organizar uma passagem de modelos, a realizar num auditório com capacidade para 400 alunos. A turma gastou na preparação do evento (decoração, som, iluminação) 500 € e decidiu cobrar 2,5 € por cada bilhete. O João e a Inês ficaram responsáveis pela análise financeira da festa e arranjaram a expressão: $S = 2{,}5n - 500$, para calcular o saldo monetário da festa (S) em função do número de bilhetes vendidos (n).
   a) Explica o significado de: $S = 2{,}5n - 500$.
   b) Trata-se de uma situação de proporcionalidade directa? Justifica.
   c) Qual é o número mínimo de bilhetes que têm de vender para que não haja prejuízo?
   d) Qual é o lucro máximo que a turma do 9.º ano pode esperar?
   e) Determina o saldo monetário a apurar se forem vendidos 150 bilhetes. Interpreta o resultado.
   f) Qual dos gráficos poderá representar a relação entre o saldo monetário (S) e o número de bilhetes vendidos (n)? Justifica a resposta.

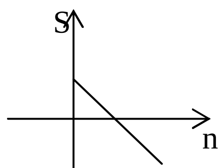
(A)



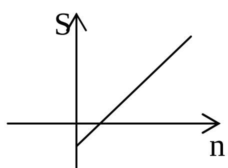
(B)



(C)



(D)



(adaptado do projecto 1001 itens e do livro Matemática 9, Leonor Vieira, Francelino Gomes e Mª José Burnay)

COLÉGIO D.LUISA SIGEA

À PROCURA DE PROPORCIONALIDADE ...

1. Há várias receitas para confeccionar pão-de-ló. Numa das receitas deste bolo, pode ler-se:

Pão-de-Ló

- 4 ovos (inteiros)
- 14 gemas
- 250 g de açúcar
- 60 g de farinha de trigo

A quantidade de cada um dos ingredientes é directamente proporcional ao número de ovos inteiros utilizados na receita.

1.1. Determina a quantidade de açúcar e a quantidade de farinha necessárias no caso de serem utilizados 6 ovos inteiros em vez de 4 ovos.

1.2. Copia a tabela e completa-a.

Nº de ovos inteiros	4	10		18
Quantidade de açúcar (g)	250		750	

1.3. O que significa $\frac{250}{4}$?

1.4. Indica uma expressão algébrica que relacione a quantidade de açúcar y com o número x de ovos inteiros utilizados em cada receita.

1.5. A Joana ao fazer esta receita utiliza as quantidades de todos os ingredientes indicadas na receita à excepção dos ovos inteiros, que coloca 2 em vez de 4.

Podemos afirmar que existe proporcionalidade directa entre as variáveis? Justifica.

(Adaptado do Novo Espaço – Matemática 7º ano, Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues, Porto Editora)

2. Qual dos seguintes gráficos corresponde a uma função de proporcionalidade directa?

Gráfico A

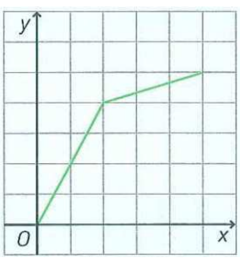


Gráfico B

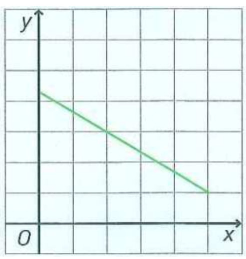


Gráfico C

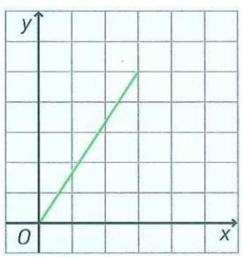
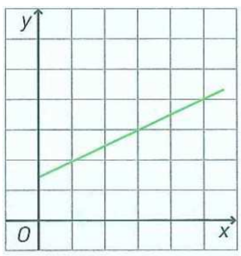


Gráfico D



Indica quais os motivos que te levam a rejeitar os restantes gráficos.

(Adaptado do Novo Espaço – Matemática 7º ano, Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues, Porto Editora)

3. Averigua em que casos existe proporcionalidade directa e, nesses casos, indica a constante de proporcionalidade e escreve uma expressão algébrica que relacione as variáveis.

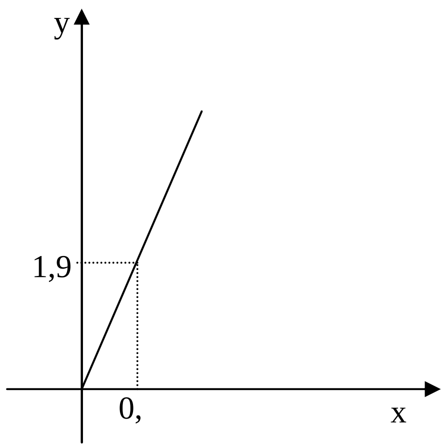
A

x	1	1,4	2,3	7
y	1,5	2,1	4,45	10,5

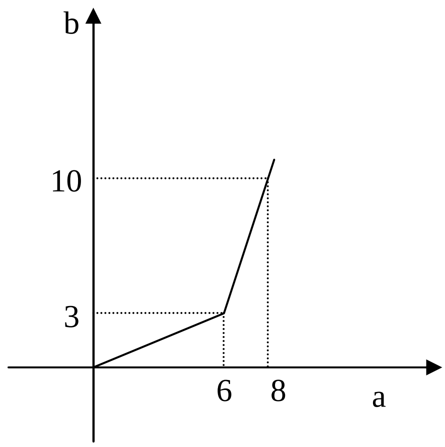
B

a	2	3	4	8	6	5	4,1
b	4	6	8	16	12	10	8,2

C



D



4. Uma bebida é feita misturando concentrado de laranja e água, na razão 1:4, o que significa que, ao dividirmos uma certa quantidade da mistura em cinco partes, quatro são de água e uma é de concentrado de laranja.

4.1. Indica a percentagem de concentrado de laranja que é utilizada nessa mistura.

4.2. Considera a função que relaciona a quantidade de água (y) com a de concentrado de laranja (x).

4.2.1. Escreve uma expressão algébrica que relacione as duas variáveis.

4.2.2. Determina a quantidade de água que é necessária para 0,5 l de concentrado.

4.2.3. Pretende-se fazer um jarro com 2 litros de mistura. Quais são as quantidades de água e de concentrado de laranja que devem ser utilizadas?

(Novo Espaço – Matemática 7º ano, Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues, Porto Editora)

Ficha 3

COLÉGIO D.LUISA SIGEA

À PROCURA DE PROPORCIONALIDADE 1A...

1. Para cada uma das seguintes questões, escolhe a(s) opção(opções) que te parece(m) correcta(s):

1.1. Para averiguar se uma <u>tabela</u> representa uma situação de <u>proporcionalidade directa</u> entre duas grandezas, basta verificar ...

(A) se quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta;

(B) se quando uma grandeza diminui, a outra também diminui;

(C) se se pode passar de uma linha da tabela para a outra, multiplicando todos os seus valores pelo mesmo número;

(D) se a razão entre dois quaisquer valores respectivos é constante e diferente de zero;

(E) nenhuma das anteriores.

1.2. Para averiguar se um <u>gráfico</u> representa uma situação de <u>proporcionalidade directa</u> entre duas grandezas, basta verificar ...

(A) se o gráfico é uma recta;

(B) se o gráfico é uma curva;

(C) se o gráfico é uma recta que passa pela origem do referencial;

(D) se o gráfico é uma recta horizontal;

(E) nenhuma das anteriores.

1.3. Para averiguar se uma <u>expressão algébrica</u> representa uma situação de <u>proporcionalidade directa</u> entre duas grandezas *x* e *y*, basta observar que ...

(A) a expressão é do tipo $y = ax + b$, com *a* e *b* diferentes de zero;

(B) a expressão é do tipo $y = ax$, sendo a um número negativo;

(C) a expressão é do tipo $y = ax$, sendo a um número positivo;

(D) a expressão é do tipo $k = \frac{x}{y}$, sendo k maior do que zero.

(E) nenhuma das anteriores.

2. Observa a tabela de proporcionalidade directa:

Peso de maçãs (***p***, em Kg)	4	5	
Custo (***C***, em €)		10	12

a) Completa a tabela.

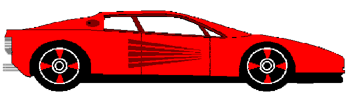
b) Qual a constante de proporcionalidade do custo pelo peso?

c) Escreve a expressão algébrica que traduz a relação entre as variáveis ***p*** e ***C***.

3. O Sr. Miguel comprou uma caixa com 322 parafusos. Se ele tivesse comprado três caixas e meia, quantos parafusos tinha comprado?

4. Um automóvel demora cerca de 4 horas de Lisboa a Braga com uma velocidade média de 90 Km.

4.1. Quanto demorará a uma velocidade de 60 Km/h?



4.2. Trata-se de uma situação de proporcionalidade directa? Justifica.

COLÉGIO D.LUISA SIGEA

À PROCURA DE PROPORCIONALIDADE 2...

1. No teu caderno, constrói vários rectângulos diferentes, mas todos com $12cm^2$ de área.
   Regista as dimensões (***c, l***) desses rectângulos numa tabela.

1.1. Que acontece à largura do rectângulo quando o comprimento passa para o dobro?

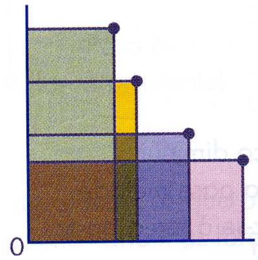
- E se a largura passa para a terça parte?

1.2. Que acontece ao comprimento se a largura passar para o triplo?

1.3. Completa agora : ***c*** x ***l*** = ...

1.4. De que tipo de proporcionalidade se trata?

2. Desenha de novo esses rectângulos e coloca-os como mostra a figura.



2.1. Une através de uma linha, os vértices opostos a **O** de todos os rectângulos nas condições dadas.

- Que tipo de linha obtiveste?

2.1. Regista as coordenadas dos pontos encontrados. O que têm em comum esses pontos?

2.3.Verifica a partir do gráfico, se os rectângulos com dimensões (1,5 ; 8) e (3,5; 6) pertencem a esta "família" de rectângulos. Justifica a tua resposta.

2.4. Escreve uma expressão algébrica desta representação gráfica.

2.5. Das expressões seguintes, escolhe uma equivalente à expressão indicada em 2.4, justificando a tua escolha.

(A) $y = \frac{x}{12}$ (B) $12 \times y = x$ (C) $y = \frac{12}{x}$

(adaptado de Matemática 9, de Leonor Vieira, Francelino Gomes e Mª José Burnay)

COLÉGIO D.LUISA SIGEA

À PROCURA DE PROPORCIONALIDADE 3...

1. Foi pedido a um carpinteiro que fizesse uma mobília o mais rapidamente possível.
   Depois de pensar um pouco, ele apresentou uma tabela com três hipóteses:

Horas de trabalho por dia	Dias gastos na execução da mobília
4	30
6	20
8	15

1.1. De que tipo de proporcionalidade se trata? Justifica.

1.2. Qual é a constante de proporcionalidade e o que significa esse valor nesta situação concreta?

1.3. Mantendo estas condições, quantos dias levaria o carpinteiro a completar a mobília se trabalhasse apenas 3 horas por dia?

2. Relativamente à seguinte tabela, escreve uma expressão que relaciona as variáveis x e y e diz o nome do gráfico representado pela expressão, de modo que ...

x	0,5	2	4	
y			2	0,8

2.1. x e y sejam directamente proporcionais (indica também a constante de proporcionalidade directa).

2.2. x e y sejam inversamente proporcionais (indica também a constante de proporcionalidade inversa).

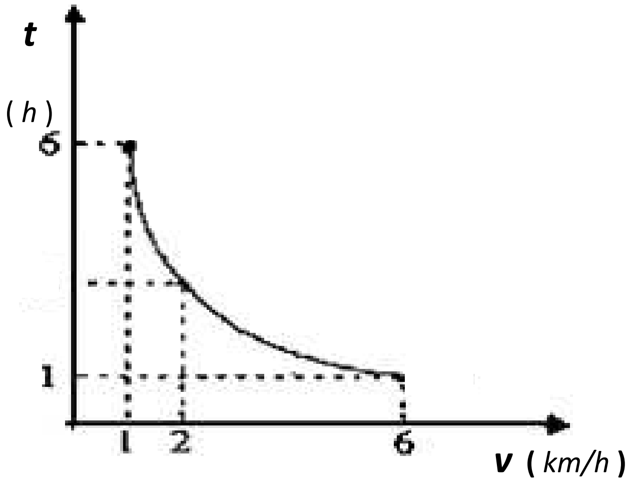
2.3. Não exista qualquer tipo de proporcionalidade.

3. Num microondas, um frango leva 6 minutos a cozinhar com a potência de 400 Watts.

3.1. Quanto tempo levaria a cozinhar o frango com uma potência de 600 Watts?

3.2. Qual a constante de proporcionalidade?

4. O gráfico seguinte traduz a variação da velocidade média com o tempo necessário para percorrer uma certa distância.



4.1. O que acontece a ***t***, quando a velocidade aumenta?

4.2. Escreve uma expressão analítica da função que relaciona t e v.

•

4.3. Que tempo demora o percurso se a velocidade for 2 km/h?

•

4.4. Qual deve ser a velocidade necessária para percorrer a distância em 3 horas?

4.5. Selecciona a afirmação <u>verdadeira</u>, justificando a tua escolha:

(A) O gráfico traduz proporcionalidade inversa entre *o tempo e a distância*.

•

(B) O gráfico traduz proporcionalidade directa entre as variáveis nele representadas.

•

(C) O tempo aumenta, porque a velocidade aumenta.

•

(D) 6 km é a distância mencionada.

COLÉGIO D.LUISA SIGEA

FUNÇÃO DE PROPORCIONALIDADE INVERSA

Para cada uma das seguintes questões indique a opção correcta, **justificando**:

1. A representação gráfica de uma função de proporcionalidade inversa é:

   (A) Uma recta que não passa na origem.

   (B) Uma recta que passa na origem.

   (C) Uma parábola.

   (D) Uma hipérbole.

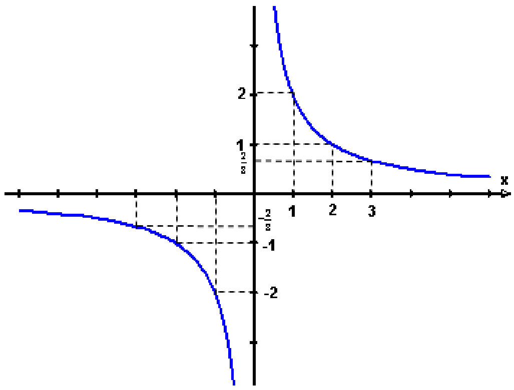
2. Na tabela seguinte registaram-se as velocidades médias de um automóvel e os tempos gastos a percorrer uma certa distância.

Velocidade média (km/h)	90	60	45	36
Tempo (horas)	2	3	4	5

A constante de proporcionalidade é:

(A) 20 (B) 45 (C) 90 (D) 180

3. Observa o seguinte gráfico:



Qual o valor de *k* de modo que a expressão analítica $y = \frac{k}{x}$ defina o gráfico anterior:

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1 (C) 2 (D) 3

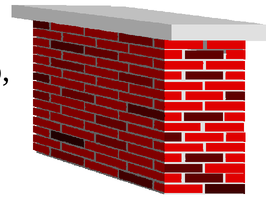
4. O gráfico seguinte representa a viagem que o António realizou a Braga de comboio.

Se o comboio que o trouxe de volta a casa viajasse a uma velocidade média de 100km/h, quanto tempo demoraria a viagem de regresso?

(A) 3 horas
(B) 3 horas e 45 minutos
(C) 4 horas e vinte e cinco minutos
(D) 5 horas

5. Trinta pedreiros gastaram 150 horas para fazer metade de um muro.

Para completar o muro, quantas horas deverão trabalhar, ao mesmo ritmo, 50 pedreiros?



(A) 250 horas
(B) 75 horas
(C) 60 horas
(D) 90 horas

Retirado do banco de itens – Gave

Nome: ______________________________________ Nº _________ Data: ________________

FUNÇÃO DE PROPORCIONALIDADE INVERSA

COLÉGIO D.LUISA SIGEA

1. A tabela seguinte mostra a relação entre o número de fatias (n) em que uma pizza pode ser dividida e a massa (p) em gramas, de cada uma das fatias da pizza.

A massa (p) de cada uma das fatias de pizza é inversamente proporcional ao número de fatias (n).

Número de fatias (n)	8	10	12
Massa das fatias (p) em g	600	480	400

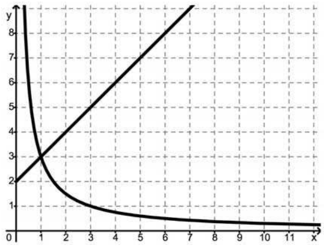
1.1. O que representa a constante de proporcionalidade inversa, no contexto do problema?

1.2. Escreve uma expressão que relaciona o número de fatias (n) à respectiva massa (p).

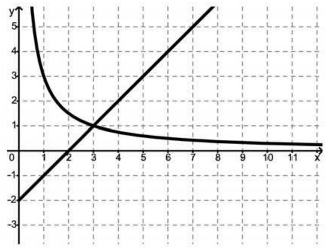
2. Considera as funções definidas por y =x +2 para $x \geq 0$ e $y = \frac{3}{x}$ para $x > 0$.

Em qual dos seguintes referenciais estão os gráficos das duas funções?

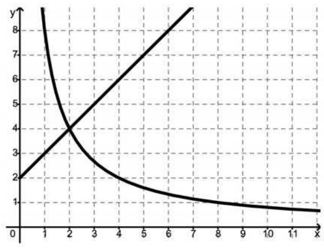
☐ Referencial A



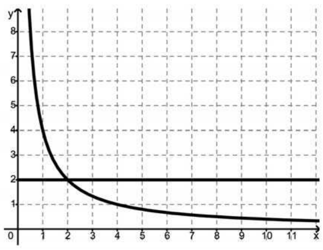
☐ Referencial B



☐ Referencial C



☐ Referencial D



(Prova 23/1ª Chamada/2008 Exame Nacional Matemática 9.º ano)

3. Qual das expressões corresponde à tabela? Justifica a tua opção.

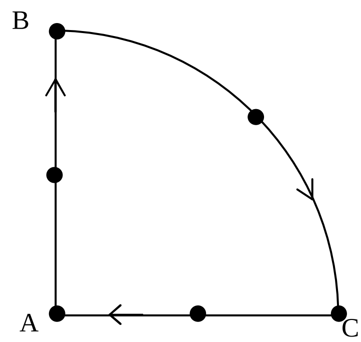
x	3/4	2	4	8
y	16/9	2/3	1/3	1/6

(A) $y = \frac{4}{3x}$ (B) $y = \frac{3}{4x}$ (C) $y = \frac{4}{3}x$ (D) $y = \frac{12}{x}$

COLÉGIO D.LUISA SIGEA

CORRIDA...Interpretação de gráficos.

1. Numa 6ª feira ao fim da tarde o José resolveu ir correr num parque perto da sua casa. Optou por correr num circuito composto por três etapas como se ilustra no esquema seguinte: a partir do ponto assinalado com a letra A uma primeira etapa de 1 quilómetro em linha recta, traduzida pelo segmento de recta AB, uma segunda etapa traduzida pelo arco BC correspondente a um quarto da circunferência com centro em A e raio AB e uma terceira etapa de regresso ao ponto de partida em linha recta, traduzida pelo segmento de recta CA. Os pontos A, B e C, assim como os pontos médios de cada etapa, estão assinalados no parque com marcos.



   O José começou a correr às 18 horas e ao fim de 3 minutos atingiu o ponto médio da primeira etapa. Parou durante um minuto para tirar uma pedra de um sapato e, uma vez calçado o sapato, reiniciou a corrida, atingindo o ponto B às 18 horas e 7minutos. Sem parar continuou a correr a segunda etapa e chegou ao ponto C às 18horas e 16 minutos, seguindo de imediato para o terceiro percurso. Chegou ao ponto de partida às 18 horas e 25 minutos. O José manteve em cada etapa o ritmo da corrida, sem fazer acelerações nem abrandamentos

   1.1. Indica a distância total percorrida pelo José, aproximada às centésimas.

   1.2. Esboça um gráfico que traduza a distância ao ponto de partida em cada minuto da corrida do José.

   1.3. Qual das três etapas foi percorrida com maior velocidade? E com menor velocidade? Justifica as tuas respostas.

2. No dia seguinte de manhã o José voltou ao parque coma sua amiga Mariana e começaram a correr às 10 horas. Às 10 horas e 10 minutos atingiram o marco que assinala metade do percurso BC e pararam durante dois minutos. Como estava bastante calor o José resolveu encurtar o percurso, seguindo em linha recta para o ponto A, onde chegou às 10 horas e 20 minutos. A Mariana resolveu realizar o percurso completo e chegou 4 minutos depois.

   2.1. Esboça um gráfico que traduza a distância ao ponto de partida em cada instante da corrida da Mariana.

   2.2. Quem correu mais depressa? O João ou a Mariana? Justifica a tua resposta.

COLÉGIO D.LUISA SIGEA

LEITURA E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS

1. Para efectuar chamadas do seu telemóvel, para duas redes (*A* e *B*), o preço, em cêntimos, que o Paulo tem a pagar por cada segundo de duração de uma chamada é o seguinte:

Rede	Preço por segundo (em cêntimos)
A	0,5
B	0,6

1.1. O Paulo tem 80 cêntimos disponíveis para efectuar chamadas do seu telemóvel. Após ter iniciado uma chamada para a rede *A*, o dinheiro disponível foi diminuindo, até ser gasto na sua totalidade. Qual dos quatro gráficos que se seguem representa esta situação? Justifica.

Gráfico **A**

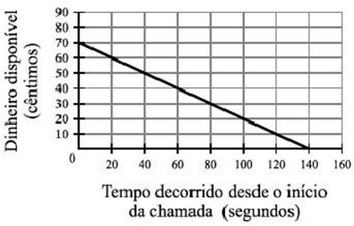


Gráfico **B**

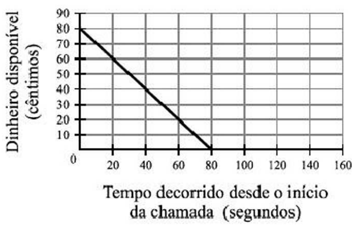


Gráfico **C**

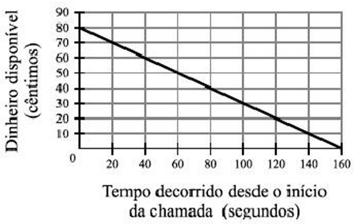
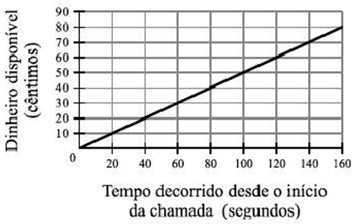


Gráfico **D**



1.2. Ontem, o Paulo só efectuou chamadas do seu telemóvel para as redes *A* e *B*. A soma dos tempos de duração dessas chamadas foi de 60 segundos e, no total, o Paulo gastou 35 cêntimos. Qual foi o tempo total de duração das chamadas efectuadas pelo Paulo, para a rede *A?* Apresenta todos os cálculos que efectuares e, na tua resposta, indica a unidade.

1.3. Qual dos gráficos apresentados na alínea 1, representa uma função de proporcionalidade directa? Em caso afirmativo, **escreve uma expressão analítica** para essa função de proporcionalidade directa.

2. A máquina de lavar a roupa da Maria avariou. Pelo telefone, ligou para uma empresa especializada em arranjo de máquinas. O custo do arranjo seria 25 euros para a deslocação da máquina mais 12 euros por hora de trabalho.

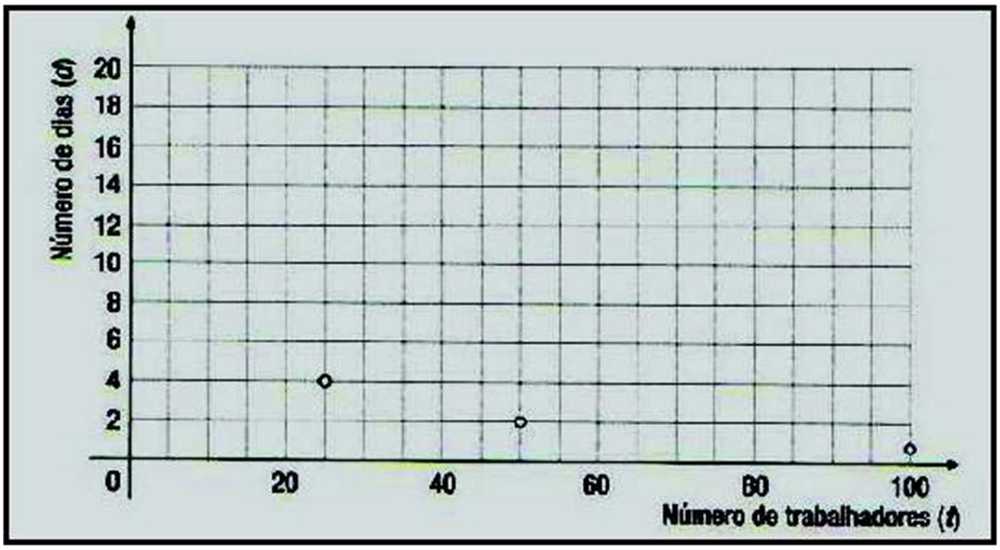
2.1. Escreve uma equação que traduza o custo do arranjo da máquina de lavar roupa.

2.2. Se a Maria pagou pelo arranjo da máquina 73 euros, quantas horas levou a máquina a arranjar?

3. Para planear a apanha de uva, na quinta de Alzubar, constituiu-se a seguinte tabela:

N° de trabalhadores (t)	100	50	25
N° de dias que demora a apanha de uva (d)	1	2	4

3.1. Assinala no gráfico o tempo correspondente à apanha de uva feita por 5, por 10 e por 20 trabalhadores.



3.2. Assinala com um **x** a fórmula que relaciona o número de trabalhadores (t) com o número de dias (d) necessários para apanhar uva, na quinta de Alzubar.

☐ $100\,t = d$ ☐ $\frac{t}{d} = 100$ ☐ $t + d = 100$ ☐ $t \times d = 100$

3.3. Na quinta de Alzubar, a apanha da uva demorou quatro dias, e foram apanhados, no total, 80000 kg de uva. Em média, quantos quilogramas de uva apanhou cada trabalhador por dia?

4. Escreve o enunciado de um problema que possa ser traduzido por:

$$y = \frac{360}{x}$$

5. Uma fábrica de pronto-a-vestir comprou uma quantidade de tecido que lhe dá exactamente para fazer 140 vestidos, levando cada um 2,5 m de tecido.

Se cada vestido levasse apenas 2 m, quantos vestidos se poderiam fazer com a mesma quantidade de tecido?

6. Existem vários rectângulos, de dimensões diferentes, com 18 cm^2 de área.

Copia e completa a tabelo seguinte, indicando, em cm, o comprimento e a largura de três rectângulos diferentes (A, B e C), com 18 cm^2 de área.

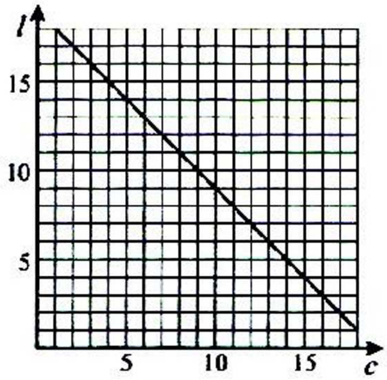
	Rectângulo A	Rectângulo B	Rectângulo C
Comprimento (cm)	4		
Largura (cm)		0,5	

6.1. Escreve uma expressão analítica que te permita obter o comprimento (c) em função da largura (l).

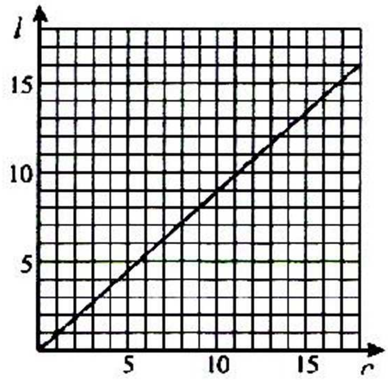
-

6.2. Qual dos gráficos seguintes pode representar a relação entre a largura (l) e o comprimento (c)?

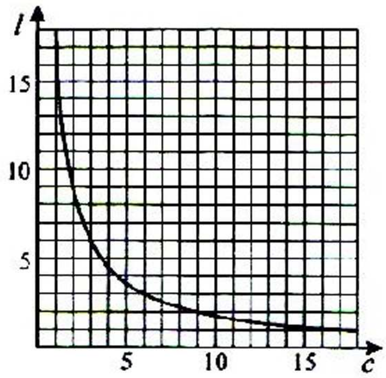
☐ Gráfico A



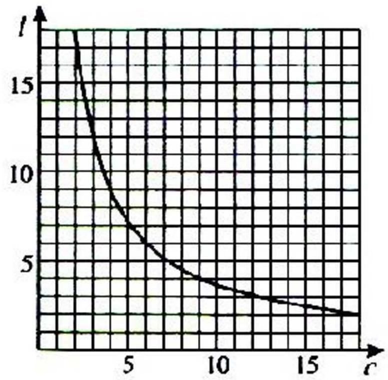
☐ Gráfico B



☐ Gráfico C



☐ Gráfico D



Teste Intermédio

Matemática

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 07.02.2011

9.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 6/2001, de 18 de Janeiro

Identifica claramente, na folha de respostas, a versão do teste (1 ou 2) a que respondes.

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corrector. Sempre que precisares de alterar ou de anular uma resposta, risca de forma clara o que pretendes que fique sem efeito.

Escreve de forma legível a numeração dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresenta apenas uma resposta. Se apresentares mais do que uma resposta a um mesmo item, só a primeira é classificada.

Podes utilizar a máquina de calcular com que habitualmente trabalhas.

Para responderes aos itens de escolha múltipla, escreve, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a opção correcta.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

O teste inclui, na página 2, um formulário.

Formulário

Números

Valor aproximado de *p* (pi): 3,14159

Geometria

Perímetro do círculo: $2pr$, sendo r o raio do círculo

Áreas

Paralelogramo: $Base \times Altura$

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Círculo: $p\,r^2$, sendo r o raio do círculo

Volumes

Prisma e cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide e cone: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

1. O Manuel tem, num saco, três bolas indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 3

1.1. O Manuel retira uma bola do saco, regista o número da bola e repõe a bola no saco.

O Manuel repete este procedimento doze vezes.

A sequência $1, 1, 2, 3, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 1$ é a sequência dos números registados pelo Manuel.

Indica a mediana deste conjunto de números.

1.2. Admite agora que o Manuel retira uma bola do saco, regista o número da bola e **não** repõe a bola no saco. Em seguida, retira outra bola do saco e regista também o número desta bola.

Qual é a probabilidade de o produto dos números que o Manuel registou ser um número par?

Apresenta a resposta na forma de fracção.

Mostra como chegaste à tua resposta.

2. Um dos trabalhos realizados pelo João para a disciplina de Matemática consistiu em fazer o registo das idades dos alunos do 9.º ano da sua escola e em elaborar um gráfico da distribuição dos alunos por idades.

O gráfico que o João elaborou está correcto.

Na Figura 1, está representado esse gráfico.

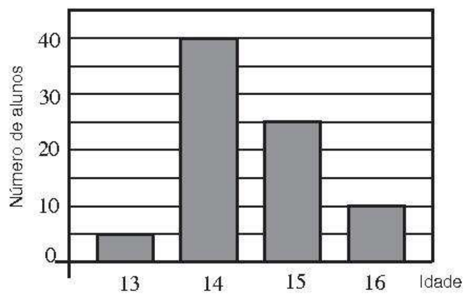


Figura 1

2.1. Qual é a média das idades dos alunos do 9.º ano da escola do João?

Mostra como chegaste à tua resposta.

2.2. Escolheu-se, ao acaso, um aluno do 9.º ano da escola do João.

Esse aluno tem menos de 15 anos.

Qual é a probabilidade de esse aluno ter 13 anos?

Transcreve a letra da opção correcta.

(A) $\frac{5}{13}$ **(B)** $\frac{5}{27}$ **(C)** $\frac{5}{45}$ **(D)** $\frac{5}{58}$

3. Seja $A =]-1, 2[$ e seja $B =]-3, 0[$

Em qual das opções seguintes está representado o conjunto $A \cap B$?

Transcreve a letra da opção correcta.

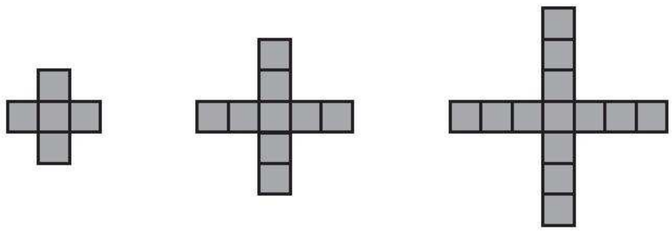
(A) $\{x \in \mathbb{R}: x > -1 \wedge x < 0\}$

(B) $\{x \in \mathbb{R}: x > -3 \wedge x < 0\}$

(C) $\{x \in \mathbb{R}: x > -1 \wedge x < 2\}$

(D) $\{x \in \mathbb{R}: x > -3 \wedge x < 2\}$

4. Na Figura 2, estão representados os três primeiros termos de uma sequência que segue a lei de formação sugerida na figura.



1.º termo 2.º termo 3.º termo

Figura 2

4.1. Quantos quadrados são necessários para construir o 7.º termo da sequência?

4.2. Existe algum termo desta sequência com 389 quadrados?

Mostra como chegaste à tua resposta.

5. Na Figura 3, estão representados:

- um quadrado $[ABCD]$
- um pentágono regular $[EFGHI]$
- um triângulo equilátero $[JKL]$
- um segmento de recta $[LM]$ tal que $LM = 1$

A Figura 3 não está desenhada à escala.

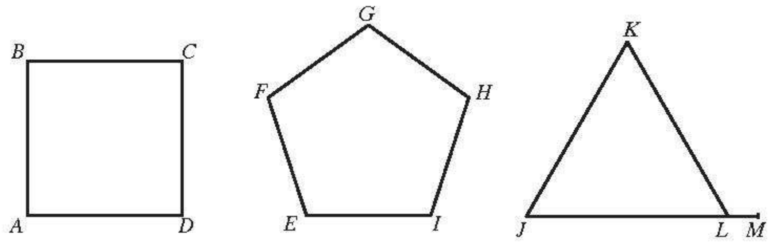


Figura 3

Acerca do perímetro do quadrado $[ABCD]$, sabe-se que:

- é um número natural menor do que 45
- é igual ao perímetro do pentágono $[EFGHI]$
- é igual à soma do perímetro do triângulo $[JKL]$ com o comprimento do segmento $[LM]$

Também se sabe que os comprimentos dos lados do quadrado, do pentágono e do triângulo são números naturais.

Determina o perímetro do quadrado $[ABCD]$

Mostra como chegaste à tua resposta.

6. A tabela que a seguir se apresenta traduz uma relação de proporcionalidade inversa entre as grandezas x e y

x	75	100
y	a	1,5

Qual é o valor de a ?

7. O Jorge reside numa aldeia do norte de Portugal e vai frequentemente a Lisboa.

Quando o Jorge se desloca à velocidade média de $80\,\mathrm{km/h}$, demora mais uma hora do que quando se desloca à velocidade média de $100\,\mathrm{km/h}$

Qual é a distância, em quilómetros, que o Jorge percorre quando se desloca da sua aldeia a Lisboa?

Mostra como chegaste à tua resposta.

8. Resolve a inequação seguinte.

$$\frac{1}{2}(x-1) \geq 4(1+x)-3x$$

Apresenta o conjunto solução na forma de um intervalo de números reais.

Apresenta os cálculos que efectuares.

9. Considera o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} y - x = 5 \\ x = \dfrac{y}{2} - 3 \end{cases}$$

Qual é o par ordenado $(x,\ y)$ que é solução deste sistema?

Apresenta os cálculos que efectuares.

10. Qual das expressões seguintes é equivalente a $(x-2)^2+6x$?

Transcreve a letra da opção correcta.

(A) x^2+2x+4

(B) x^2+6x+4

(C) $x^2+10x-4$

(D) x^2+6x-4

11. Relativamente à Figura 4, sabe-se que:

- $[ACEF]$ é um quadrado;
- $[BCDG]$ é um quadrado;
- $AC = x$
- $BC = 9$

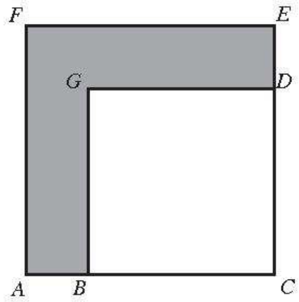


Figura 4

11.1. Escreve uma expressão simplificada do perímetro da região representada a sombreado.

Mostra como chegaste à tua resposta.

11.2. Admite que $AC = 12$

O quadrado $[BCDG]$ é uma redução do quadrado $[ACEF]$

Indica a razão de semelhança dessa redução.

12. Na Figura 5, está representado um rectângulo $[ABCD]$. Os vértices A e D são pontos da recta real.

Sabe-se ainda que:

- o ponto E é um ponto da recta real;
- $AB = 2$
- $BC = 4$
- $AE = AC$
- ao ponto A corresponde o número $1 - \sqrt{20}$

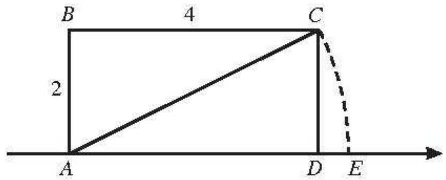


Figura 5

Determina o número que corresponde ao ponto E

Mostra como chegaste à tua resposta.

13. Na Figura 6, está representado o trapézio rectângulo $[ABCD]$. O ponto E pertence ao lado $[AB]$

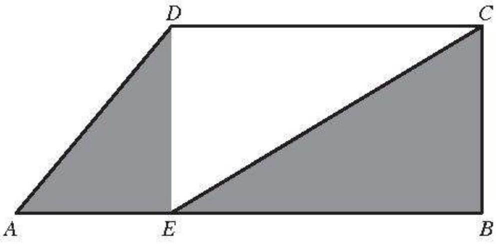


Figura 6

Sabe-se que:

- $AE = \frac{1}{3} AB$
- $EB = DC$
- a área do trapézio $[ABCD]$ é $20\,\text{cm}^2$

Qual é a área da região representada a sombreado?

Transcreve a letra da opção correcta.

(A) $10\,\text{cm}^2$

(B) $12\,\text{cm}^2$

(C) $14\,\text{cm}^2$

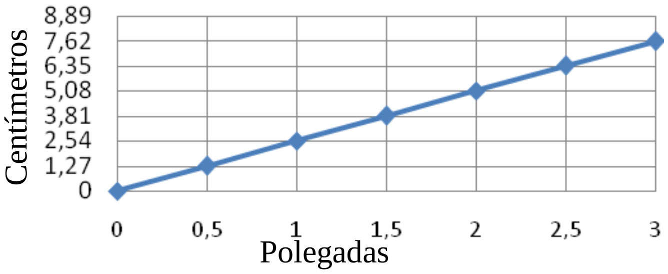
(D) $16\,\text{cm}^2$

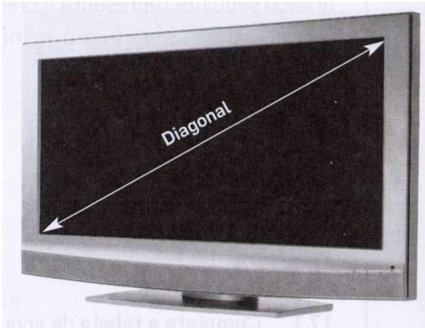
FIM

COTAÇÕES

1.		
	1.1.	4 pontos
	1.2.	7 pontos
2.		
	2.1.	7 pontos
	2.2.	5 pontos
3.		5 pontos
4.		
	4.1.	4 pontos
	4.2.	7 pontos
5.		6 pontos
6.		4 pontos
7.		7 pontos
8.		9 pontos
9.		8 pontos
10.		5 pontos
11.		
	11.1.	7 pontos
	11.2.	4 pontos
12.		6 pontos
13.		5 pontos
TOTAL		**100 pontos**

1. Por vezes, o comprimento da diagonal do ecrã dum televisor é indicada em polegadas. No gráfico que se segue, podes ver a relação aproximada existente entre esta unidade de comprimento e o centímetro.





1.1. A quantas polegadas corresponde a diagonal do ecrã de uma TV com 6,35 cm de comprimento?

1.2. De que tipo de proporcionalidade dada se trata? Justifica.

1.3. Escreve uma expressão que traduza a relação entre o comprimento da diagonal (***d***) do ecrã duma TV, em cm, e o número de polegadas (***p***) que lhe corresponde.

1.4. O Gonçalo comprou uma TV com 106,68 cm de diagonal. A Marta também comprou uma, mas com 40 polegadas de diagonal. Qual dos dois comprou a TV com maior diagonal?

(Adaptado do Exame Nacional do Ensino Básico, 1ªchamada, 2007)

2. O 1º prémio do Euromilhões do passado 20 de Janeiro foi atribuído.

O João jogou no Euromilhões e ganhou. Resolveu fazer previsões quanto ao prémio que lhe caberia, tendo em conta que podia haver mais totalistas.

Número de totalistas (N)	1	3	162	324
Prémio que recebe cada totalista, em milhões de euros (P)	162	54	1	0,5

2.1. O prémio total do Euromilhões é fixo ou varia com o número de totalistas? Justifica a resposta.

2.2. Escreve a expressão que traduza a relação entre o prémio que recebe cada totalista e o número de totalistas.

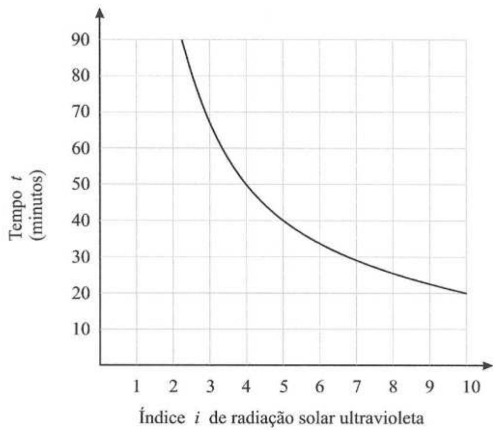
2.3. Sabendo que o prémio recebido pelo João foi de 40,5 milhões de euros, quantos totalistas, para além dele tiveram prémio?

3. Quando se vai à praia, é preciso ter cuidado com o tempo de exposição ao sol, para que não se forme eritema (vermelhão na pele), devido a queimadura solar.

O tempo máximo, *t*, em minutos, de exposição directa da pele ao sol sem formar eritema pode ser calculado através da fórmula $t = \frac{D}{i}$, em que:

- i representa o índice de radiação solar ultravioleta;
- D é um valor constante para cada tipo de pele.

O gráfico que se apresenta a seguir traduz essa relação para o tipo de pele da Ana.



3.1. A Ana foi à praia numa altura em que o índice de radiação solar ultravioleta era 5. Quantos minutos, no máximo, é que ela poderá ter a pele directamente exposta ao sol, sem ficar com eritema?

3.2. A Joana, amiga da Ana, só pode estar 50 minutos, no máximo exposta ao sol, sem ficar com eritema. Qual seria o índice de radiação solar ultravioleta nessa altura?

3.3. Na tabela que se segue, apresentam-se, para cada um dos principais tipos de pele da população europeia, algumas das características físicas que lhe estão associadas e o valor constante D.

Tipo de pele	Cor do cabelo	Cor dos olhos	D
1	Ruivo	Azul	200
2	Louro	Azul/verde	250
3	Castanho	Cinza/Castanho	350
4	Preto	Castanho	450

Qual é a cor do cabelo da Ana? Explica como obtiveste a tua resposta.

3.4. A relação entre o tempo máximo, de exposição directa da pele ao sol sem formar eritema e o índice de radiação solar ultravioleta são inversamente proporcionais? Justifica a tua resposta.

(Adaptado do Exame Nacional do Ensino Básico, 1ªchamada, 2010)

4. No dia dos anos do João, os seus amigos compraram uma prenda sem saber ainda qual o número dos que queriam participar.

   Arranjaram uma expressão que relaciona o número de amigos que participam na prenda (***n***) e a quantia que cabe a cada um (***q***): $\boldsymbol{n \times q = 36}$.

4.1. Explica o significado da expressão no contexto da situação.

4.2. Qual o valor da prenda comprada pelos amigos do João?

4.3. Sabendo que cada amigo entrou com 2€, para a prenda do João, quantos amigos contribuíram para a prenda?

4.4. O número de amigos do João que queriam participar na compra da prenda e a quantia que cabe a cada um, são inversamente proporcionais? Justifica a tua resposta.

4.5. Constrói uma tabela que permita representar a relação entre a quantia que cabe a cada um (***q***) e o número de amigos participantes (***n***), para o caso de o número de participantes na prenda do João ser 1, 2, 4, 9, 18, 36 e 54.

5. Considera o seguinte problema: "O produto de dois números positivos, ***a*** e ***b*** é 18. Quais são esses números?"

5.1. Escreve a expressão algébrica que traduz este problema.

5.2. Representa essa função através de uma tabela.

5.3. Se um dos números for 2/3, qual é o outro, para que o produto seja 18?

5.4. Qual dos gráficos seguintes pode representar a relação entre dois números positivos ***a*** e ***b***, cujo produto é 18? Justifica a resposta.

Gráfico A

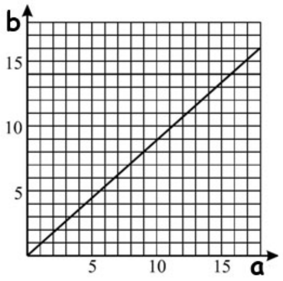


Gráfico B

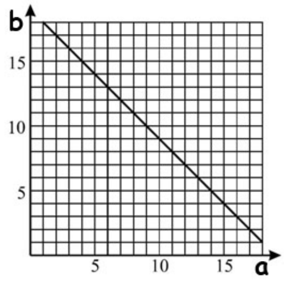


Gráfico C

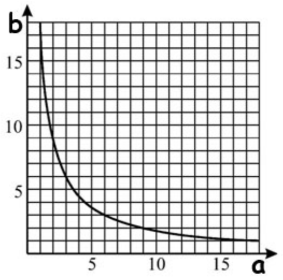
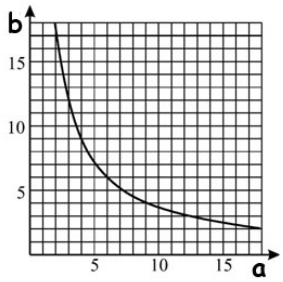


Gráfico D



5.5. Qual é o produto das coordenadas de cada um dos pontos obtidos? Qual o significado que lhe atribuis no contexto deste problema?

(Adaptado do Exame Nacional do Ensino Básico, 1.ª chamada, 2010)

Caracterização das questões do teste

Questão	Objectivos	Tipo de função	Tipo de situação	Representações
1.1.	- Ler informação representada graficamente	Proporcionalidade directa	Contextualizada	Gráfica Algébrica Verbal Numérica
1.2.	- Reconhecer situações de proporcionalidade directa em situações da vida corrente			
1.3.	- Representar situações de proporcionalidade directa através de uma expressão algébrica			
1.4.	- Cálculo de valores numéricos através da utilização de várias estratégias (expressão algébrica, regra de três simples, etc)			
2.1.	- Resolver problemas da vida corrente, que envolvam proporcionalidade inversa.	Proporcionalidade inversa	Contextualizada	Verbal Numérica Algébrica
2.2.	- Representar situações de proporcionalidade inversa através de uma expressão algébrica			
2.3.	- Cálculo de valores numéricos através da utilização de várias estratégias (expressão algébrica, regra de três inversa)			

Questão	Objectivos	Tipo de função	Tipo de situação	Representações
3.1.	- Ler, interpretar e explorar gráficos	Proporcionalidade inversa	Contextualizada	Verbal Gráfica Numérica Tabelar
3.2.	- Ler, interpretar e explorar gráficos			
3.3.	- Ler, interpretar e analisar tabelas e gráficos em situações de proporcionalidade inversa			
3.4.	- Reconhecer situações de proporcionalidade inversa e sua justificação			
4.1.	- Reconhecer situações de proporcionalidade inversa em situações da vida corrente	Proporcionalidade inversa	Contextualizada	Verbal Algébrica Numérica Tabelar Gráfica
4.2.	- Interpretar o significado da constante de proporcionalidade inversa			
4.3.	- Cálculo e interpretação de valores numéricos			

Questão	Objectivos	Tipo de função	Tipo de situação	Representações
4.4.	- Reconhecimento de proporcionalidade inversa			
4.5.	- Construir tabelas ou gráficos de proporcionalidade inversa a partir de dados fornecidos			
5.1.	- Representar situações de proporcionalidade inversa através de uma expressão	Proporcionalidade inversa	Puramente matemática	Numérica Gráfica Algébrica
5.2.	- Representar uma função através de uma tabela			
5.3.	- Cálculo de valores numéricos			
5.4.	- Interpretar e explorar gráficos fornecidos e identificar os representam uma situação de proporcionalidade inversa.			
5.5	- Calcular a constante de proporcionalidade inversa e interpretar o seu significado			

ANEXO 3 - Autorizações

Pedido de Autorização – Direcção do Colégio

À Direcção do Colégio D. Luísa Sigea

Eu, Maria Luísa Ribeiro Abranches de Almeida Simões Bolota, professora de Matemática, venho solicitar autorização para concretizar, neste colégio, o projecto de investigação em ensino intitulado "As representações na resolução de problemas de proporcionalidade inversa, no 9.º ano". Este projecto visa perceber a forma como os alunos utilizam as várias representações para resolver problemas de proporcionalidade inversa, em alunos do 9.º ano de escolaridade, e integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Ensino da Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

A concretização deste projecto implicará a recolha de dados de alunos do 9.º ano, referente à disciplina de Matemática. O trabalho terá por base o desempenho dos alunos do 9.º, na primeira metade do 2.º Período nas diversas tarefas propostas. Serão objecto de análise, nesta investigação: i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula pelos alunos, como, por exemplo, fichas de trabalho e testes; ii) transcrições de algumas das interacções geradas entre eles; e iii) transcrições de entrevistas que lhes sejam realizadas, fora da sala de aula. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio de alguns destes momentos. Em todo o processo serão sempre salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e ao próprio colégio. Os encarregados de educação serão informados sobre este estudo, sendo essencial o seu consentimento, para possibilitar a participação dos alunos que
nele pretendam vir a colaborar.

10 de Setembro de 2010

Pede deferimento,

____

(Maria Luísa Ribeiro Abranches de Almeida Simões Bolota)

Comunicação – Director de Turma

Exma. Sr. Director de Turma do 9.º ano

Eu, Maria Luísa R. Abranches de Almeida Simões Bolota, professora de Matemática, venho comunicar que a turma do 9.º ano irá participar, durante o 2.º Período, no projecto de investigação em ensino intitulado "As várias representações na Proporcionalidade Inversa". A concretização deste projecto encontra-se deferida pela Direcção do colégio. O interesse dos alunos em participar voluntariamente neste estudo e o consentimento dos respectivos Encarregados de Educação serão duas condições essenciais para que se efective a sua participação neste projecto. O trabalho terá por base o desempenho dos alunos do 9.º, devidamente autorizados, sendo objecto de análise, nesta investigação: i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula, como, por exemplo, fichas de trabalho e testes; ii) transcrições de algumas das interacções geradas entre alunos; e iii) transcrições de entrevistas que lhes sejam realizadas, fora da sala de aula. A realização destas entrevistas decorrerá, em horário previamente acordado com os alunos. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio de alguns destes momentos.

Em todo o processo serão sempre salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição.

Antecipadamente grata pela colaboração de todos os intervenientes.

15 de Dezembro de 2010

A professora Tomei Conhecimento:

____

____

Pedido de Autorização – Encarregados de Educação

Exmo.(a) Senhor(a)
Encarregado de Educação

Para dar seguimento ao trabalho que tenho vindo a desenvolver no Mestrado em Ensino da Matemática, da Universidade de Lisboa, pretendo realizar o estudo na unidade curricular denominada "***Proporcionalidade Inversa. Representações Gráficas***", que é um dos tópicos do tema Álgebra do 9.º ano de escolaridade.

De acordo com o programa da disciplina de Matemática, para o último ano do 3.º ciclo pretende-se que os alunos alarguem e aprofundem o estudo das relações, nomeadamente da proporcionalidade directa e proporcionalidade inversa, ambas trabalhadas como funções.

Para a realização deste estudo necessito de proceder:

i) a fotocópia de trabalhos realizados pelos alunos;

ii) a gravação áudio de aulas;

iii) a aplicação de um questionário e de uma entrevista aos alunos.

Todos os dados recolhidos destinam-se exclusivamente a realização deste estudo, estando protegida a privacidade de todos os alunos.

Solicito autorização para a citada recolha de dados, na qual o seu educando participará, pedindo que assine e devolva o destacável.

Agradeço desde já a colaboração prestada.

Com os meus cumprimentos

____

(Maria Luísa Ribeiro Abranches de Almeida Simões Bolota)

AUTORIZAÇÃO

Depois de tomar conhecimento dos objectivos do estudo acima referido, autorizo a participação do meu educando ______________________________________, nº _____ do 9.º ano. Estoril, _____ / ____ / _____

(Assinatura do Encarregado de Educação)

ANEXO 4 – Diário de Bordo

Tarefa		Tempo previsto	
		Tempo gasto	

Antes da aula (expectativas do professor)

Durante a aula	
Introdução da tarefa	Instruções iniciais
Reacções dos alunos	

Desenvolvimento da tarefa

- atitudes do professor / questões colocadas e reacções obtidas
- questões específicas colocadas pelos alunos
- dificuldades e comentários dos alunos
- atitudes dos alunos no desenvolvimento da tarefa e estratégias utilizadas

Desenvolvimento da tarefa (cont.)

Discussão geral	
Intervenções	Principais conclusões

Outros aspectos a destacar

Após a aula	
Aspectos conseguidos	Aspectos a melhorar
Papel do professor / investigador	
Reflexos na investigação	

Observações