

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO  
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

**Análise espectral de sucessões cronológicas:**  
Estudo comparativo da aplicação de janelas

SARA LOUREIRO DE ALMEIDA

Abril 1993



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO  
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

I. S. E. G.	
E.	Biblioteca
1572-4.	40058

RESERVADO

HA 30.3  
A46  
1993

**Análise espectral de sucessões cronológicas:  
Estudo comparativo da aplicação de janelas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do  
grau de Mestre em Matemática Aplicada à Economia e Gestão

SARA LOUREIRO DE ALMEIDA

Abril 1993

## RESUMO:

Avalia-se o efeito da utilização de janelas no alisamento dos espectros de sucessões cronológicas, simuladas de acordo com modelos probabilísticos ARMA ("AutoRegressive Moving Average"), até à 2ª ordem.

As sucessões foram subdivididas em blocos de igual dimensão, sobre os quais se aplicaram janelas retardadas exponenciais (Gauss), de potência (Parzen e Welch) e de coseno (Hamming e Hanning). A análise espectral foi realizada pelo método de Welch - que emprega a "Fast Fourier Transform" e recorre à média dos periodogramas modificados, - comparando-se os espectros obtidos com os espectros teóricos relativos a cada um dos modelos.

A metodologia foi aplicada a um caso real, ajustando-se um modelo ARMA a uma sucessão cronológica proveniente de uma estação meteorológica automática, e comparando os resultados do alisamento dos espectros da sucessão real com os obtidos a partir da sucessão simulada.

O efeito produzido pela janela de Welch é oposto ao das janelas de Hanning e de Gauss: nos casos em que a primeira conduz ao menor afastamento relativamente ao espectro teórico, as últimas conduzem aos maiores erros, e reciprocamente. No entanto, não parece existir uma janela "óptima", independentemente do modelo ajustado ao processo em estudo.



## AGRADECIMENTOS

*Agradecer nem sempre é fácil. Cumpre-me fazê-lo agora.*

*A todos os que ao longo deste período aturaram os meus pedidos e impaciências e não me negaram ajuda.*

*Ao Instituto Hidrográfico que me deu não só a oportunidade, mas também todo o apoio, tanto em tempo como em meios, sem os quais o trabalho não teria sido possível.*

*Aos membros da Divisão de Oceanografia Física, senão pelo seu apoio directo, pelo tolerar da minha ausência espiritual.*

*Ao amigo António Jorge da Silva, pois foi muito mais do que apoio o que me deu.*

*E por último, mas não em último, ao Prof. Doutor Daniel Müller que inspirou, orientou e reviu o trabalho que vos apresento.*



ao Zé

## ÍNDICE

1 Introdução .....	1
2 Modelos Probabilísticos para sucessões cronológicas .....	3
Processos estocásticos	3
Processos estocásticos estacionários	4
Funções de autocovariância e de autocorrelação	5
Alguns processos estocásticos e suas características	8
Processo puramente aleatório	8
Processo médias móveis	9
Processos autoregressivos	16
Processos mistos	22
3 Análise espectral .....	25
Domínio do tempo vs domínio da frequência	25
Séries de Fourier	27
Integrais de Fourier	32
Análise espectral de processos estacionários	36
Relação entre a função densidade espectral e as funções autocovariância e autocorrelação	38
Espectros de alguns processos	43
Processo puramente aleatório	45
Processo de médias móveis	46
Processo autoregressivo	48
Processo misto	50
Estimação do espectro	53
Algumas janelas usadas na prática	55

4	Aplicação prática a sucessões simuladas . . . . .	55
	Introdução	55
	Obtenção das sucessões	55
	Metodologia utilizada	57
	Análise espectral das sucessões simuladas	59
	Comparação dos resultados espectrais	76
5	Uma aplicação real . . . . .	81
6	Conclusões . . . . .	89
7	BIBLIOGRAFIA . . . . .	91
8	ANEXOS . . . . .	93
	A. Cálculos das funções de transferência	I
	B. Listagens de programas utilizados	V
	C. Médias e desvios-padrão das sucessões simuladas	XIII
	D. Espectros teóricos e empíricos das sucessões simuladas	XVII
	E. Listagem de erros	XLVI



# 1 Introdução

O estudo das periodicidades é cada vez mais importante em todos os ramos das ciências, tanto físicas como humanas. Analisam-se os períodos de diversos fenómenos, como a maré, as correntes oceânicas, o crescimento da batata, a produção nacional de alimentos, o fluxo de tráfego ou o movimento de populações.

O registo da observação destes fenómenos dá origem às sucessões cronológicas.

O estudo das sucessões cronológicas faz-se em dois domínios: o do tempo e o da frequência. No primeiro, utilizam-se funções de autocorrelação para identificar o seu comportamento e, com o seu auxílio, ajustar modelos probabilísticos que pretendem reflectir os processos e prever a sua evolução. No domínio da frequência, utiliza-se uma técnica que permite identificar as periodicidades associadas a cada uma das sucessões: a análise espectral.

Este trabalho insere-se no âmbito da análise espectral, mais especificamente na técnica que conduz ao alisamento do espectro, através da aplicação de janelas.

Não foi ambição deste trabalho o conseguir chegar a um critério de escolha de qual a janela mais apropriada para "ver" cada fenómeno mas tão somente verificar quais as diferenças introduzidas nos resultados pela aplicação de algumas delas, as mais usuais, quando aplicadas a sucessões simuladas das quais se conhece o modelo subjacente.

O trabalho iniciou-se com a simulação de um conjunto de sucessões, para o que se utilizou o "package" *AUTOBOX*.

Depois, e utilizando o método sugerido por Welch, fez-se passar as sucessões por janelas e realizou-se de seguida o cálculo do seu espectro.

Feitos os cálculos e representados graficamente os resultados verificou-se dos efeitos produzidos pelo afastamento do resultado em relação ao modelo teórico que se encontrou por programação directa, utilizando-se o *ITSM* como comparação.

A observação deste afastamento permitiu verificar que realmente não parece existir uma janela melhor mas que a escolha irá sempre depender do conhecimento existente do processo e do modelo que lhe está subjacente.

A representação gráfica foi realizada utilizando o *GRAPHER* e nela se fez a observação visual que deu origem à primeira comparação.

A apresentação do trabalho realizado foi organizada em quatro capítulos base. No primeiro apresentam-se os modelos probabilísticos para as sucessões cronológicas usados neste trabalho. As funções de autocorrelação e respectivos correlogramas foram produzidos com o *STATGRAPHIC*. No segundo uma pequena introdução à análise espectral, no terceiro

o desenvolvimento da aplicação do processamento proposto e comparação dos efeitos da aplicação das janelas às sucessões simuladas e no quarto o resultado do mesmo processamento aplicado a uma sucessão "real" obtida numa estação meteorológica, cujo modelo subjacente aos dados tinha sido identificado utilizando o *AUTOBOX*.

Estes quatro capítulos são seguidos das conclusões possíveis tendo em vista a comparação realizada.

Tal como é sugerido por alguns autores o uso generalizado de janelas com o simples critério de disponibilidade, ou seja a janela que está no *software* instalado, parece realmente não ser o melhor pois diferentes modelos, diferentes parâmetros, diferentes dimensões, etc. fazem com que a escolha tenha que ser realmente cuidadosa; os resultados podem ser bastante diferentes pondo em causa tratamentos posteriores. E, citando Priestley, "*existe mérito considerável na construção de um método sensato, que poderemos então usar para comparar o funcionamento das janelas padrão ou para derivar a forma da janela "ótima". Seguindo esta linha estamos de acordo com os princípios estabelecidos para a inferência geral estatística onde se definem medidas de eficiência para estimadores e depois se deriva a forma para a qual o estimador tem a máxima eficiência*".

Não se pretendia chegar lá mas sentiu-se bastante a falta do tal critério sensato.

## 2 Modelos Probabilísticos para sucessões cronológicas

O estudo do comportamento dos processos estocásticos pelas suas funções de autocorrelação e autocorrelação parcial e o seu ajustamento a modelos paramétricos são uma das técnicas mais usadas da análise no domínio do tempo.

Apresentam-se neste capítulo alguns dos conceitos básicos de estacionaridade, passando depois ao estudo dos modelos probabilísticos, introduzidos por Box & Jenkins e conhecido como modelos ARMA ("Autoregressive Moving Average Models").

### 2.1 Processos estocásticos

A análise matemática estuda funções determinísticas. Em oposição a esta análise clássica, quase todos os ramos das ciências se dedicam a fenómenos cujas realizações envolvem factores aleatórios. São exemplo, os registos de flutuação de preço de determinada mercadoria, as variações de natalidade ou mortalidade da população, os registos de um electrocardiograma ou os registos meteorológicos. São estes conjuntos de observações feitas sequencialmente em períodos de tempo determinados, que se designam por *sucessões cronológicas*. A uma sucessão cronológica corresponde, assim, uma *realização* ou trajectória de uma sucessão de variáveis, sendo o *processo estocástico*, essa família de variáveis aleatórias  $\{X(t), t \in T\}$ , onde  $T$  representa o conjunto de instantes em que o processo está definido.

Um processo cujos registos podem ser efectuados continuamente no tempo, diz-se a tempo contínuo e representa-se por  $\{X(t) : t \in T\}$ , sendo  $T = ]-\infty, \infty[$  no caso geral.

Processos cujos registos se obtêm em intervalos de tempo específicos, igualmente espaçados, dizem-se a tempo discreto e representam-se  $\{X_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . É sobre estes que irá incidir esta análise.

O objectivo do estudo de sucessões cronológicas é inferir sobre o processo estocástico que lhe está subjacente, isto é, entender o mecanismo probabilístico desse processo partindo da observação de apenas uma realização.

Os processos estocásticos são descritos especificando-se a função de distribuição de  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$  para qualquer conjunto de instantes  $t_1, t_2, \dots, t_n$  e um qualquer inteiro positivo  $n$ ,

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n).$$

Quando se está em presença de uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, conhecer  $F(x) = P(X_i \leq x)$ ,  $x \in ]-\infty, \infty[$ , que corresponde à descrição de 1ª ordem, é suficiente. Quando existir dependência entre variáveis é necessário recorrer a descrições de ordem superior. Destas o caso geral, *ordem n*, corresponde ao conhecimento da função de distribuição  $F(x_1, \dots, x_n)$ . Quando o processo depende de variáveis não independentes, como é o caso dos estudados mais à frente, a sua caracterização, para um processo estocástico de valores reais  $X_t$ , passa pelo conhecimento das funções seguintes:

média	$\mu_t = E[X_t]$
variância	$\sigma_t^2 = E[X_t - \mu_t]^2$
covariância	$\gamma(t_1, t_2) = E[(X_{t_1} - \mu_{t_1})(X_{t_2} - \mu_{t_2})]$
correlação	$\rho(t_1, t_2) = \gamma(t_1, t_2) / \sigma_{t_1} \sigma_{t_2}$ .

## 2.2 Processos estocásticos estacionários

Uma classe particular dos processos estocásticos é a dos processos estacionários.

Heuristicamente um processo estocástico é *estacionário* se as suas características de aleatoriedade não variarem ao longo do tempo, ou seja, não apresenta alteração temporal das propriedades estatísticas. O sistema diz-se assim, estável. Processos que se obtêm de sistemas estáveis dizem-se *estacionários*.

Quando existe variação das características de aleatoriedade os processos dizem-se *não estacionários* ou *evolutivos*. A figura I-1 é exemplo de um tal processo.

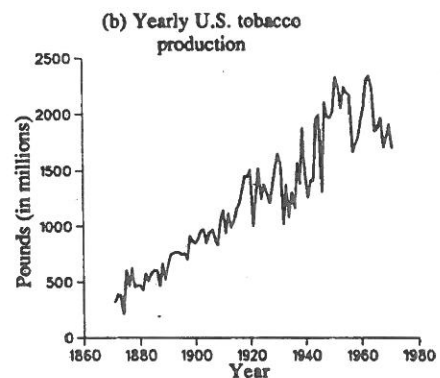


Fig. I - 1. Exemplo de um processo evolutivo (de Wei 1990)

Um processo  $\{X_t, t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  define-se como *estritamente (ou fortemente) estacionário* se a função de distribuição conjunta de  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$  for a mesma de  $X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau} \forall t_1, \dots, t_n, \tau$  e  $\forall n$ .

Na prática é difícil a verificação desta propriedade. No caso dos processos fracamente estacionários até à 2ª ordem, em vez de exigir a igualdade das funções de distribuição, traduz as características comuns através dos momentos até à 2ª ordem, que se supõe existirem. Nestes processos, a média e a variância são constantes ao longo do tempo e a covariância  $\gamma(t_1, t_2)$  só depende da diferença entre os instantes  $t_2 - t_1$ , não dependendo da origem do tempo.

Um caso típico de processo fracamente estacionário até à 2ª ordem é o ruído branco (figura I-2), que serve de alicerce à construção de outros processos estacionários, como se verá mais adiante.

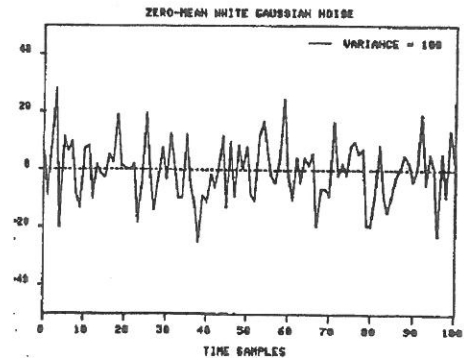


Fig. I-2. Ruído branco - Exemplo de processo fracamente estacionário (de Orfanidis S., 1990)

Se a estacionaridade do processo é forte, mas existirem momentos até à 2ª ordem então o processo é fracamente estacionário.

Sempre que no decorrer deste trabalho se omitir a referência ao tipo de estacionaridade esta corresponderá a estacionaridade fraca.

### 2.3 Funções de autocovariância e de autocorrelação

Para um processo estocástico estacionário  $X_t$  de média  $\mu$ , a *função autocovariância* do processo é definida por

$$\begin{aligned} \gamma_\tau &= \text{cov}(X_t, X_{t+\tau}) \\ &= E[(X_t - \mu)(X_{t+\tau} - \mu)] \end{aligned}$$

e  $\gamma_\tau$ , para cada valor de  $\tau$ , mede a covariância entre pares de valores separados por um intervalo de comprimento  $\tau$ , designado por "lag".

Para fins interpretativos é costume utilizar-se esta função dividida pela variância do processo, obtendo-se a função *autocorrelação (FAC)*,

$$\rho_\tau = \gamma_\tau / \gamma_0$$

onde  $\gamma_0 = E[(X_t - \mu)^2] = \text{var}[X_t] = \sigma^2, \forall t$ .

Esta função define uma medida de relacionamento entre valores de  $X_t$  desfasados de  $\tau$  unidades. Deste modo, quando  $\tau$  aumenta, verifica-se em geral que, a correlação entre  $X_t$  e  $X_{t+\tau}$  decresce e conseqüentemente será de esperar que  $\gamma_\tau$  e  $\rho_\tau$  decaiam para zero para  $|\tau| \rightarrow \infty$ .

A função autocovariância possui as seguintes propriedades:

- P.1.  $\gamma_0 = \sigma^2, \forall t$
- P.2.  $|\gamma_\tau| \leq \gamma_0, \forall \tau$  (Priestley: 1981)
- P.3. Quando  $X_t$  é um processo de valores reais,  $\gamma_\tau = \gamma_{-\tau}, \forall t$  (Priestley: 1981).

Paralelamente para a função autocorrelação têm-se:

- P.1.  $\rho_0 = 1$
- P.2.  $|\rho_\tau| \leq 1, \forall \tau$
- P.3. Quando  $X_t$  só tem valores reais,  $\rho_\tau = \rho_{-\tau}, \forall t$ .

Destas propriedades estabelece-se que a função autocorrelação tem o valor máximo na origem ( $\tau=0$ ), em relação à qual é simétrica, por isso a representação gráfica é apenas efectuada para  $\tau > 0$ .

Há ainda uma condição necessária para que uma função seja função autocovariância (autocorrelação) de um processo:

- P.4. A função autocovariância (autocorrelação) é semidefinida positiva (Wei: 1990).

Uma outra função que desempenha um papel fundamental na identificação dos processos que se irão estudar é a *função autocorrelação parcial (FACP)*, representada por  $\phi_{kk}$  e definida para os valores de  $k = 1, 2, \dots$  como o coeficiente de ordem  $k$  da regressão linear múltipla de  $X_{t+k}$  sobre  $X_{t+k-1}, \dots, X_{t+1}, X_t$ , considerando-se, sem perda de generalidade,  $E[X_t] = 0$ ,

$$X_{t+k} = \phi_{k1} X_{t+k-1} + \phi_{k2} X_{t+k-2} + \dots + \phi_{kk} X_t + e_{t+k}$$

onde  $e_{t+k}$  é o erro não correlacionado com  $X_{t+k-j}$  para  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Para  $k = 0$  estabelece-se por convenção que  $\phi_{kk} = 1$ .

Esta função mede a correlação entre  $X_t$  e  $X_{t+k}$ , tendo em conta que os efeitos produzidos por  $X_{t+1}, \dots, X_{t+k-1}$  são conhecidos e removidos,  $\phi_{kk} = \text{corr}(X_t, X_{t+k} | X_{t+1}, \dots, X_{t+k-1})$ .

Multiplicando por  $X_{t+k-j}$  com  $j = 1, 2, \dots, k$  ambos os membros da equação anterior e tomando esperanças matemáticas obtém-se

$$\gamma_j = \phi_{k1} \gamma_{j-1} + \dots + \phi_{kk} \gamma_{j-k}$$

e dividindo por  $\gamma_0$ , chega-se às equações,

$$\rho_j = \phi_{k1} \rho_{j-1} + \dots + \phi_{kk} \rho_{j-k}$$

conhecidas com equações de Yule-Walker.

Aplicando a regra de Cramer a estas equações a função autocorrelação parcial, pode ser calculada a partir do conhecimento das funções de autocorrelação:

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}}$$

vindo para os primeiros valores de  $k$ ,

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_3(1 - \rho_1^2) + \rho_1(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_2)}{1 - 2\rho_1^2(\rho_2 + 1) - \rho_2^2}$$

## 2.4 Alguns processos estocásticos e suas características

A escolha dos modelos probabilísticos que se irão caracterizar, processos a tempo discreto até à 2ª ordem, recaiu sobre aqueles que foram seleccionados para a aplicação prática apresentada mais à frente.

### 2.4.1 Processo puramente aleatório

Este é o processo a tempo discreto mais simples.

Um processo  $\{X_t, t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  diz-se *puramente aleatório* se consistir numa sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas, isto é,  $cov(X_s, X_t) = 0, \forall s \neq t$ .

Para o processo ser estacionário até à segunda ordem é necessário que:

$$E[X_t] = \mu_e, \forall t \quad (\text{normalmente } \mu_e = 0)$$

e que

$$var[X_t] = \sigma_e^2, \forall t$$

Este processo, que serve de base de construção a todos os outros modelos probabilísticos apresentados, também é conhecido por *ruído branco* e é referenciado por  $\{\epsilon_t\}$ .

Pode verificar-se que a função de autocovariância tem a forma seguinte:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & k=0 \\ 0 & k=\pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

ou seja, só não é nula em zero.

A função autocorrelação do processo, obtida pela forma descrita anteriormente, vem,

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k=\pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

e a função autocorrelação parcial

$$\phi_{kk} = 0, \quad \forall k \neq 0.$$

#### 2.4.2 Processo médias móveis

Tendo por base os processos mais simples, os puramente aleatórios  $\{\varepsilon_t\}$ ,  $\{X_t, t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  é um processo *médias móveis de ordem q*, simbolicamente *MA(q)*, se satisfazer a equação

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

em que  $E[\varepsilon_t] = 0$  e  $var[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2$ ,  $\forall t$ , sendo  $\theta_1, \dots, \theta_q$  os parâmetros do processo.

Utilizando o operador atraso  $B$ , que transforma o valor do processo no instante  $t$ , no valor anterior  $t-1$ , ou seja,  $B \varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$ , tem-se

$$X_t = \Theta(B) \varepsilon_t$$

em que

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q.$$

Uma vez que  $1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2 < \infty$ , os processos médias móveis finitos são sempre estacionários. Com efeito,

a)  $E[X_t] = 0$ , visto que  $X_t$  se exprime como função de  $\varepsilon_t$  de média nula.

b)  $var[X_t] = \sigma_x^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)$ , independente do valor de  $t$ .

c)

$$\begin{aligned} cov(X_t, X_{t-k}) &= \gamma_k = E[X_t X_{t-k}] \\ &= E[(\varepsilon_t - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-k} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-k-q})] \\ &= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q), & 1 \leq k \leq q \\ 0, & k > q \end{cases} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \rho_k &= \rho_{-k} \\ &= E[X_t X_{t-k}] / \sigma_x^2 \\ &= \begin{cases} (\sigma_\varepsilon^2 / \sigma_x^2) (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q), & 1 \leq k \leq q \\ 0, & k > q \end{cases} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, & 1 \leq k \leq q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

Como se pode verificar a função de autocorrelação é sempre nula a partir da ordem do processo. Por outras palavras, a função autocorrelação de um processo médias móveis de ordem  $q$  tem um corte brusco para zero a partir do "lag"  $q$ . Se o parâmetro é positivo,  $\rho_1$  é negativo e vice-versa se o parâmetro for negativo o primeiro valor da fac é positivo.

Na figura I-3 pode analisar-se o cronograma de uma sucessão simulada do processo média móveis de 1ª ordem,  $X_t = \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1}$  com 280 pontos, verificando-se em relação à sucessão residual,  $\{\varepsilon_t\} \sim N(0, 0.1)$ .

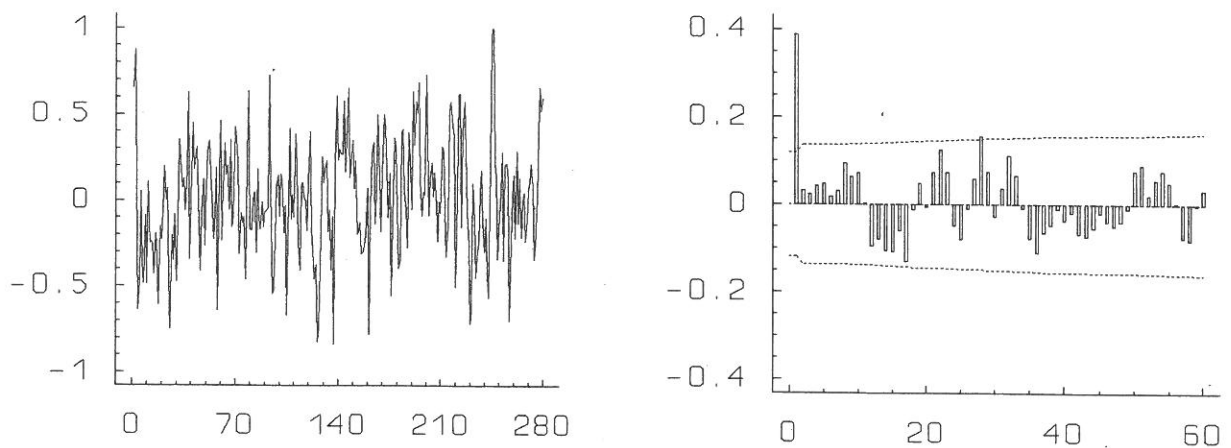


Fig. I - 3. Cronograma (à esquerda) e FAC (à direita) da sucessão simulada para o processo  $X_t = \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1}$

No gráfico referente à função de autocorrelação apresentam-se a tracejado, os limites do teste de significância de Bartlett<sup>1</sup>, permitindo identificar os valores que são significativamente diferentes de zero. No caso da fig.I-3 constata-se a existência de um único pico significativo, havendo um corte brusco para zero a partir do "lag" 1.

Para a sucessão simulada do processo médias móveis de 2<sup>a</sup> ordem,  $X_t = \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1} - 0.2 \varepsilon_{t-2}$ , apresenta-se o cronograma (fig.I-4) e a respectiva fac. Neste caso, no correlograma (gráfico da função de autocorrelação) detecta-se um valor significativamente diferente de zero para  $k=3$ , o que definitivamente não é habitual neste tipo de processos, sendo apenas a partir desse valor que se identifica o corte brusco para zero.

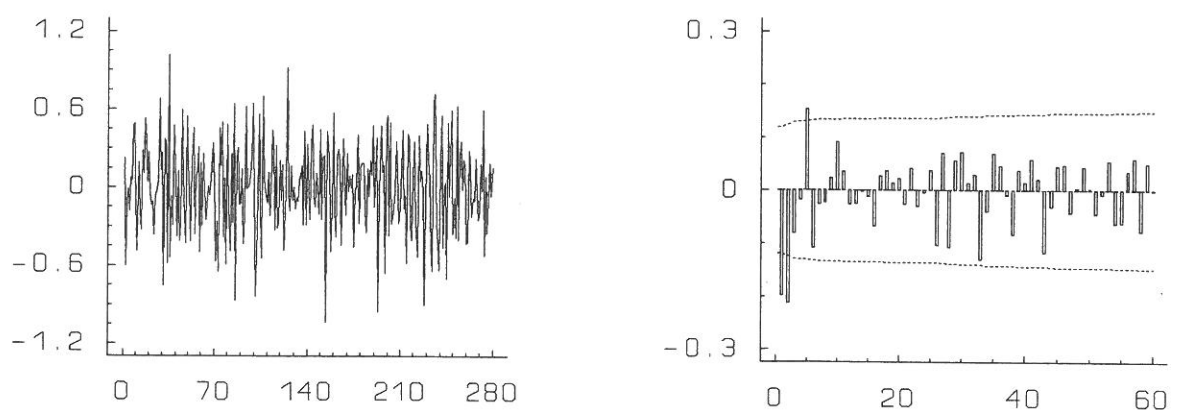


Fig. I-4. Cronograma (à esquerda) e FAC (à direita) da sucessão simulada para o processo

$$X_t = \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1} - 0.2 \varepsilon_{t-2}$$

Uma característica importante destes processos é a da invertibilidade.

Um processo MA(q) diz-se *invertível* se existe uma sucessão de constantes  $\{\pi_j\}$  tal

que  $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$  e

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}, \quad t = 0, \pm 1, \dots$$

<sup>1</sup> No teste de Bartlett constrói-se o intervalo para os valores das autocorrelações com base nos coeficientes das autocorrelações estimadas,  $r_k$  e respectivos erro padrão,  $s(r_k)$ . Ao testar  $H_0: \rho_0 = 0$  para  $k=1, 2, \dots$ , valores fora do intervalo  $\pm 2 s(r_k)$  são considerados significativos ao nível de 5%.

Brockwell prova que um *processo médias móveis* de ordem  $q$ ,  $X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ , é *invertível* se e só se  $\Theta(z) \neq 0$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| \leq 1$ .

Concretizando, esta condição para as duas primeiras ordens:

- no caso dos MA(1), facilmente se verifica que a condição  $|\theta_1| < 1$  assegura a invertibilidade do processo;
- para os MA(2), pode demonstrar-se (Wei: 1990) que as condições,

$$|\theta_2| < 1$$

$$\theta_2 + \theta_1 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

garantem a invertibilidade destes processos.

Considere-se o seguinte exemplo, em que se definem dois processos médias móveis:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

$$Z_t = \varepsilon_t - \frac{1}{\theta} \varepsilon_{t-1}$$

verifica-se que estes processos têm a mesma função de autocorrelação, no entanto se  $|\theta| < 1$  o processo  $\{X_t\}$  é invertível e o processo  $\{Z_t\}$  não é.

A função de autocorrelação é um instrumento identificativo do processo sendo portanto necessário garantir que a cada processo está associada uma, e só uma, função de autocorrelação. É a verificação da invertibilidade dos processos, que vai garantir que a cada um deles está associada uma e uma só função de autocorrelação.

Continuando a caracterizar este tipo de processos, convém analisar a função autocorrelação parcial, para modelos até à 2ª ordem. Utilizando a definição e concretizando para a *fac* determinada anteriormente, vem:

- para MA(1),

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^4}$$

$$\phi_{22} = \frac{-\theta_1^2(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^6}$$

e em geral, de acordo com Box e Jenkins (1976),

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta_1^k(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(k+1)}}, \text{ para } k \geq 1.$$

Por análise desta expressão verifica-se que a FACP de um MA(1) tem um decaimento exponencial para zero dependente do sinal de  $\theta_1$ ;

- para o MA(2), atendendo ao facto de  $\rho_k = 0$ , se  $k > 2$ , tem-se

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1 \rho_2 (2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)}, \dots$$

A FACP decai exponencialmente ou de uma forma sinusoidal, dependendo das raízes do polinómio  $1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0$ .

Para os processos apresentados anteriormente mostra-se o gráfico da FACP permitindo estudar e seu comportamento. No gráfico estão representados, a tracejado, os limites do teste de significância de Jenkins e Daniels<sup>2</sup>, permitindo a identificação dos valores que são significativamente diferentes de zero.

---

<sup>2</sup> Este teste estabelece os limites de significância para os coeficientes estimados da autocorrelação parcial, com base no erro padrão estimado,  $S(\hat{\phi}_{kk}) = n^{-1/2}$ . Ao testar  $H_0: \phi_{kk} = 0$  valores que fiquem fora do intervalo  $\pm 2/\sqrt{n}$  são considerados significativamente diferentes de zero.

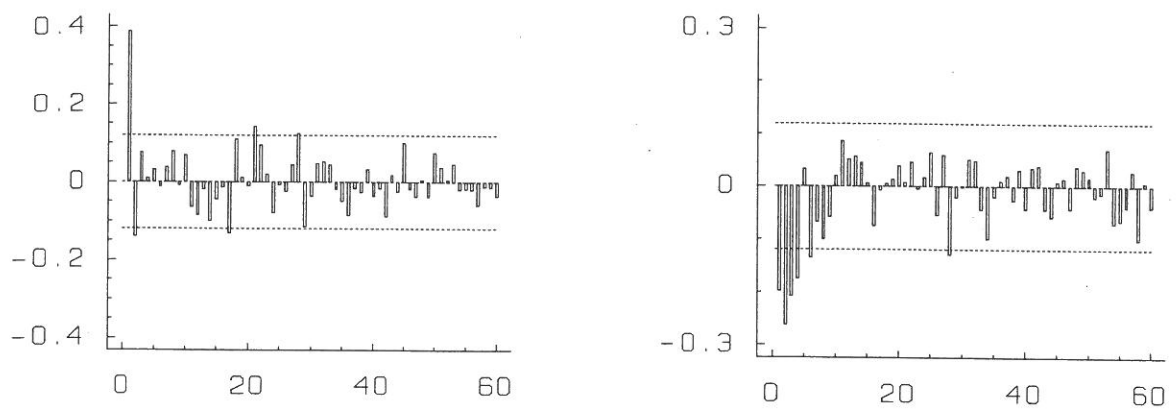


Fig. I-5. À esquerda a FACP da sucessão da fig. I-3 e à direita FACP da sucessão da fig. I-4

### 2.4.3 Processos autoregressivos

Diz-se que  $\{X_t, t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  é um processo *autoregressivo de ordem p*, notando-se  $AR(p)$ , se

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \dots - \varphi_p X_{t-p} = \varepsilon_t$$

onde  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  são parâmetros reais e  $\{\varepsilon_t\}$  um processo puramente aleatório com  $E[\varepsilon_t] = 0$  e  $var[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2, \forall t$ . Utilizando o operador atraso  $B$ , este processo pode ser escrito de uma forma mais compactada, vindo:

$$\Phi(B)X_t = \varepsilon_t$$

em que

$$\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p$$

Pela definição dos *processos autoregressivos* é possível expressar  $\varepsilon_t$  numa combinação linear finita de  $X_t$ , o que implica que estes processos são sempre *invertíveis*.

Se as raízes da equação  $\Phi(B) = 0$  estiverem fora do círculo unitário, Brockwell *et al.* provam que  $\{X_t\}$  se pode expressar como

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

com  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$  sendo os  $\psi_j$  ( $j=0, \dots, \infty$ ) determinados a partir da equação funcional

$$\Phi(B)\Psi(B) = 1 \text{ e } \Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j.$$

Nestas condições, se as raízes do polinómio  $\Phi(B)$  estiverem fora do círculo unitário o processo  $AR(p)$  é estacionário.

Concretizem-se agora, algumas propriedades do processo até à segunda ordem:

a) AR(1)

Sendo o processo  $\Phi(B)X_t = \varepsilon_t$  com  $\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B$  estacionário (ou seja,  $|\varphi_1| < 1$ ), pode-se escrever

$$X_t = \frac{\varepsilon_t}{\Phi(B)} = \Psi(B) \varepsilon_t$$

onde  $\Psi(B) = 1 + \psi_1(B) + \psi_2(B) + \dots$  tal que  $\Phi(B)\Psi(B) = 1$ .

Desta última expressão podem calcular-se os valores de  $\psi_j$  ( $j \geq 1$ ), assim

$$(1 - \varphi_1 B)(1 + \psi_1(B) + \psi_2(B) + \dots) = 1$$

efectuando as multiplicações, vem

$$1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots + \\ - \varphi_1 B - \varphi_1 \psi_1 B^2 - \varphi_1 \psi_2 B^3 - \dots = 1$$

ou seja, se igualarmos os coeficientes de  $B^j$  tem-se

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \varphi_1$$

$$\psi_2 - \varphi_1 \psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \varphi_1^2$$

$$\psi_3 - \varphi_1 \psi_2 = 0 \Rightarrow \psi_3 = \varphi_1^3$$

...

Donde, por substituição na expressão de  $\{X_t\}$  virá:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j}.$$

Nestas condições a média do processo será

$$E[X_t] = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j E[\varepsilon_{t-j}] = 0$$

e

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_{t+h}, X_t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \left( \sum_{j=0}^n \varphi_1^j \varepsilon_{t+h-j} \right) \left( \sum_{k=0}^n \varphi_1^k \varepsilon_{t-k} \right) \right] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \varphi_1^{|h|} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^{2j} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \varphi_1^{|h|} / (1 - \varphi_1^2) \end{aligned}$$

que não depende do valor de  $t$ , logo o processo é *estacionário até à 2ª ordem*.

Ainda nas condições anteriores, a função autocorrelação de um processo AR(1) é dada por

$$\rho_k = \begin{cases} \varphi^k, & k \geq 1 \\ \rho(-k), & k < 0 \end{cases}$$

continuando a manter  $\rho_0 = 1$ . Sendo  $|\varphi| < 1$ , a FAC decai exponencialmente para zero, dependendo do sinal de  $\varphi$ .

A figura I-6 representa um exemplo de uma sucessão simulada de 280 pontos de um processo AR(1) em que  $\{\varepsilon_t\} \sim N(0, 0.1)$ . À esquerda identifica-se uma distribuição em torno da média nula e à direita a fac mostra um decaimento sinusoidal para zero desde o primeiro lag.

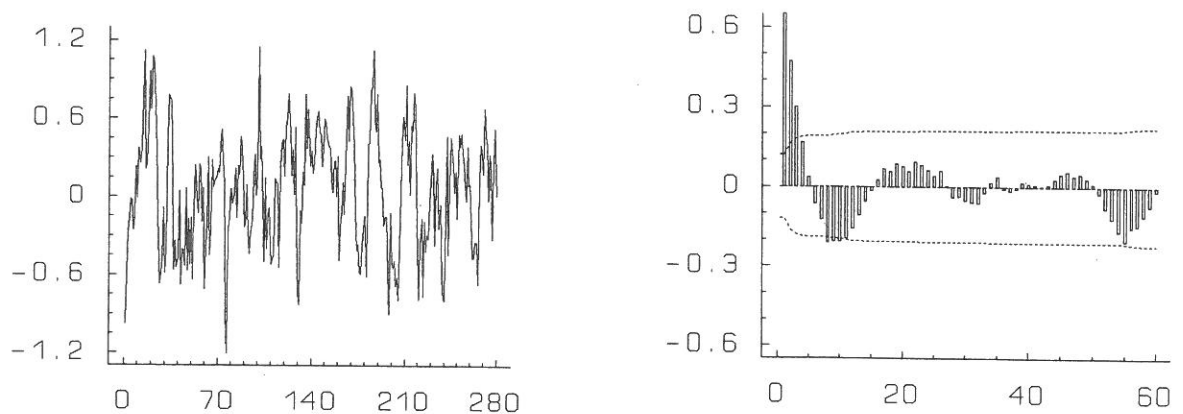


Fig. I-6. Cronograma (à esquerda) e FAC (à direita) da sucessão simulada do processo  $X_t = -0.7 X_{t-1} + \varepsilon_t$

A função autocorrelação parcial para o processo AR(1) é dada por,

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \rho_1 = \varphi_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = 0 \\ \phi_{33} &= 0 \\ \phi_{44} &= \dots\end{aligned}$$

constatando-se que, para valores de  $k > 1$ , há um corte abrupto para zero tal como é exemplificado na figura I - 7.

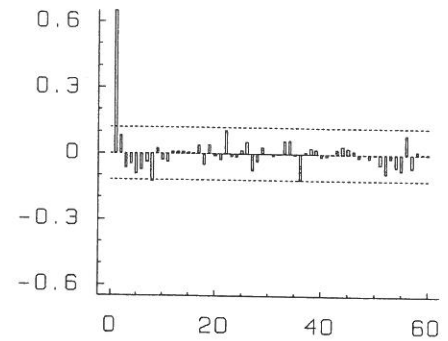


Fig. I-7. FACP do processo da fig.I-6

b) AR(2)

De um modo semelhante ao caso de 1ª ordem, para garantir a estacionaridade do processo as raízes do polinómio  $\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2$  devem estar fora do círculo unitário, o que segundo Wei (1990), é equivalente a exigir que os parâmetros  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  pertençam à região triangular constituída por

$$\begin{aligned}\varphi_2 + \varphi_1 &< 1 \\ \varphi_2 - \varphi_1 &< 1 \\ -1 &< \varphi_2 < 1.\end{aligned}$$

Para determinar a função autocovariância, considera-se

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

depois de ter multiplicado ambos os membros por  $X_{t-k}$  para  $k \geq 0$  e tomando os valores esperados, obtém-se

$$E(X_t X_{t-k}) = \varphi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) + \varphi_2 E(X_{t-2} X_{t-k}) + E(\varepsilon_t X_{t-k})$$

donde, para  $k=0$  com  $E(\varepsilon_t X_t) = \sigma_\varepsilon^2$ , tem-se

$$\gamma_0 = \varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$$

e, para  $k \geq 1$ , com  $E(\varepsilon_t X_{t-k}) = 0$ ,  $k > 0$  tem-se

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2}$$

A função de autocorrelação para  $k \geq 1$ , obtém-se dividindo a última expressão por  $\gamma_0$ ,

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2}$$

Particularizando, para  $k=1$  e  $k=2$  efectuados os cálculos, tem-se

$$\rho_1 = \frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2}$$

$$\rho_2 = \frac{\varphi_1^2}{1 - \varphi_2} + \varphi_2$$

para  $k \geq 3$ ,  $\rho_k$  pode determinar-se por recorrência, a partir da expressão geral.

O comportamento de um processo autoregressivo de 2ª ordem pode verificar-se no exemplo seguinte. :

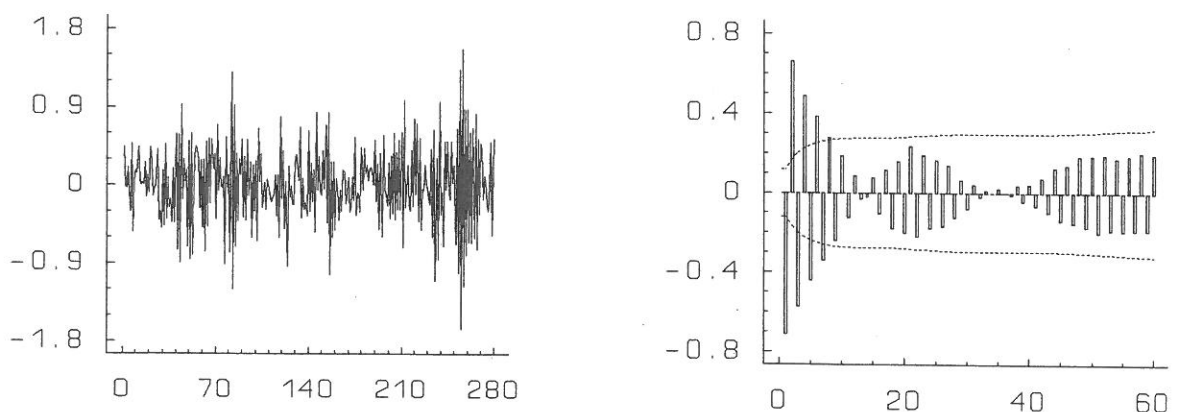


Fig. I-8. Cronograma (à esquerda) e FAC (à direita) da sucessão simulada do processo

$$X_t = -0.5 X_{t-1} + 0.3 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

Pela definição de função autocorrelação parcial e tomando a expressão de  $\rho_k$

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2}$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \varphi_2$$

$$\phi_{kk} = 0, \quad k \geq 3.$$

Consoante  $k$  aumenta, a FAC (fig. I-8) decai exponencialmente ou de forma sinusoidal para zero, enquanto que a FACP tem um corte brusco para zero a partir do lag 2, como se vê na figura(I-9).

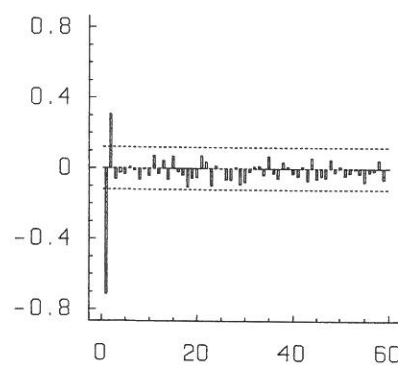


Fig. I-9. FACP do processo AR(2) apresentada na fig.I-8.

A comparação do comportamento dos processos autoregressivos e de médias móveis, permite identificar uma dualidade existente entre estes processos.

Ao expressar o processo autoregressivo  $\{X_t\}$  como

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

mostra-se que qualquer processos autoregressivo finito e estacionário é equivalente a um processo médias móveis infinito.

Do mesmo modo, se  $X_t = (1 - \theta_1 B) \varepsilon_t$  é um processo MA(1) invertível, tem-se:

$$\xi(B) X_t = \frac{X_t}{1 - \theta_1 B} = \varepsilon_t$$

e através de uma dedução semelhante à anterior determinavam-se os  $\xi^j (j \geq 1)$  e concluiu-se que

$$(1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \dots) X_t = \varepsilon_t$$

Donde, um processo de médias móveis finito e invertível corresponde a um processo autoregressivo infinito.

Em resumo, um processo autoregressivo AR(p) estacionário pode expressar-se como um processo MA de ordem infinita. De forma análoga, um processo MA(q) invertível, corresponde a um AR de ordem infinita.

Esta relação dual entre processos AR e MA verifica-se também nas funções autocorrelação e autocorrelação parcial. Enquanto a FAC de um AR(p) decai para zero e a FACP tem um corte brusco a partir do "lag" p, no processo MA(q), o atenuamento para zero é na FACP e o corte brusco é a partir do "lag" q da FAC.

Esta dualidade é muito importante, pois permite uma caracterização dos processos autoregressivos e médias móveis que será bastante útil na fase de identificação de processos ajustados a sucessões cronológicas.

#### 2.4.4 Processos mistos

Sendo um grande número de processos reais descritos, tanto por modelos autoregressivos, como por modelos médias móveis, era natural o aparecimento de *modelos mistos*. Estes são formados pela junção dos dois tipos de modelos, conduzindo muitas vezes a modelos com menos parâmetros, proporcionando portanto melhores resultados.

Referenciados genericamente por *ARMA(p,q)*, esses processos  $X_t$  verificam a equação

$$\Phi(B) X_t = \Theta(B) \varepsilon_t$$

em que  $p$  é a ordem do polinómio autoregressivo,

$$\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p$$

e  $q$  a do polinómio de médias móveis,

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q.$$

Estes processos apresentam as características seguintes:

- a) são estacionários se as raízes do polinómio  $\Phi(B)$  estão fora do círculo unitário.
- b) são invertíveis se as raízes do polinómio  $\Theta(B)$  estão fora do círculo unitário.

Assume-se ainda que, as equações referidas não têm raízes comuns.

Particularize-se para  $p=1$  e  $q=1$  para determinar a função de autocovariância do processo misto, no caso de um processo estacionário e invertível,

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

multiplicando ambos os membros por  $X_{t-k}$  com  $k \geq 0$  e aplicando esperanças matemáticas tem-se

$$E(X_t X_{t-k}) = \varphi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) + E(\varepsilon_t X_{t-k}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} X_{t-k})$$

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} + E(\varepsilon_t X_{t-k}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} X_{t-k})$$

com

$$k=0 \quad \begin{aligned} E(\varepsilon_t X_t) &= \sigma_\varepsilon^2 \\ E(\varepsilon_{t-1} X_t) &= (\varphi_1 - \theta_1) \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

donde

$$\gamma_0 = \varphi_1 \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1 (\varphi_1 - \theta_1) \sigma_\varepsilon^2$$

e para os outros valores de  $k$ , tem-se

$$k=1 \Rightarrow \gamma_1 = \varphi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

$$k > 1 \Rightarrow \gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1}$$

Interligando estas expressões, obtém-se como resultado

Para a função autocorrelação, partindo das expressões anteriores, virá

A observação da figura I-10 permite conhecer o cronograma da sucessão simulada do processo  $X_t + 0.3 X_{t-1} = \varepsilon_t - 0.7 \varepsilon_{t-1}$  e cuja função autocorrelação se apresenta na fig. I-10. Verifica-se um decaimento exponencial, a partir de  $k \geq 1$ , tendo um comportamento

$$\gamma_0 = \left[ \frac{1 - 2\varphi_1\theta_1 + \theta_1^2}{1 - \varphi_1^2} \right] \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \left[ \frac{(\varphi_1 - \theta_1)(1 - \varphi_1\theta_1)}{1 - \varphi_1^2} \right] \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} \quad k \geq 2$$

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{(\varphi_1 - \theta_1)(1 - \varphi_1\theta_1)}{1 + \theta_1(\theta_1 - 2\varphi_1)}$$

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} \quad k \geq 2$$

semelhante ao da FAC do processo AR(1).

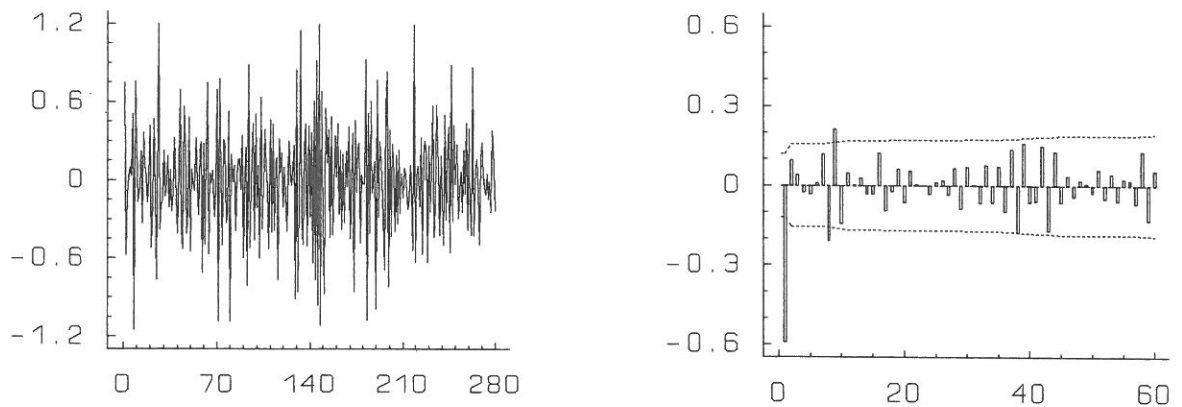


Fig.I-10. Cronograma (à esquerda) e FAC (à direita) da sucessão simulada do processo

$$X_t + 0.3X_{t-1} = \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1}$$

Este decaimento é amaciado se  $\varphi_1$  é positivo e alternado se negativo.

Além disso, como se constata pela expressão anterior, o sinal de  $\rho_1$  depende de  $(\varphi_1 - \theta_1)$  que determina o local de decaimento da exponencial.

Relembrando a FACP dos processos de média móvel de 1ª ordem, verifica-se uma certa semelhança entre os comportamentos das duas funções, a sua FACP também decai para zero, assim como a FAC, com uma forma que depende dos parâmetros  $\varphi_1$  e  $\theta_1$ .

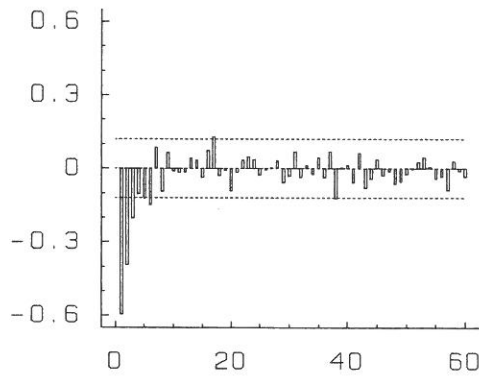


Fig. I-11. FACP do processo ARMA(1,1) da fig. I-10

Para o caso geral dos processos ARMA(p,q), determinam-se as expressões das funções autocorrelação de um modo semelhante. Sejam:

- a) A função autocorrelação, obtém-se para  $k \geq q+1$ , e tem a seguinte expressão

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$$

O seu comportamento é idêntico à da FAC do processo AR(p), decaindo para zero para "lags" superiores a q. No entanto as primeiras autocorrelações, até esse "lag", dependem dos parâmetros AR e MA.

- b) A função de autocorrelação parcial vai corresponder a uma mistura de decaimento exponencial e/ou sinusoidal dependendo das raízes das equações  $\Phi(B) = 0$  e  $\Theta(B) = 0$ .

As figuras I-12 e I-13 representam o caso de um processo ARMA(2,1) proveniente, à semelhança dos exemplos anteriores, de uma sucessão simulada com 280 pontos com  $\{\epsilon_t\} \sim N(0, 0.1)$ .

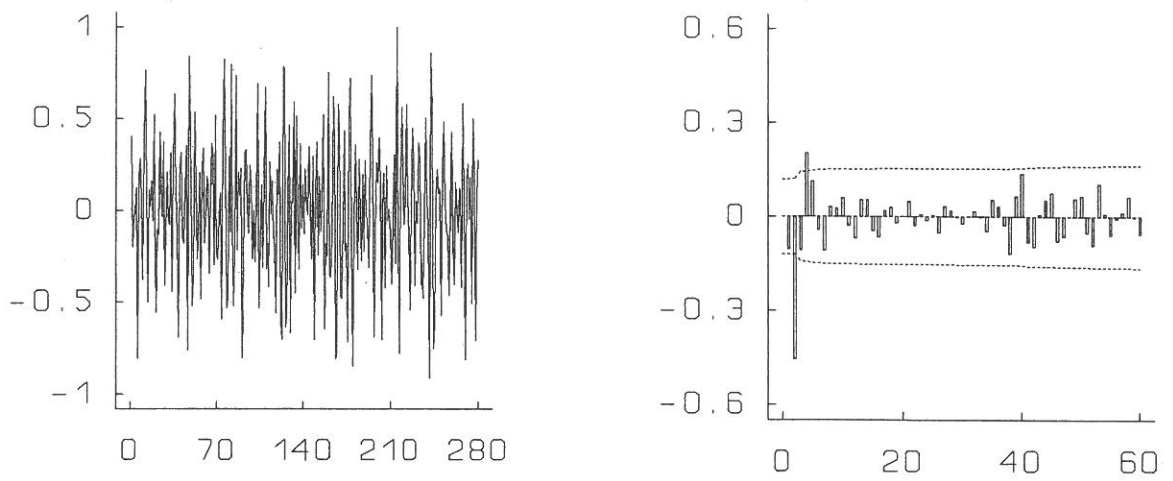


Fig.I-12. Cronograma (à esquerda) e FAC (à esquerda) da sucessão simulada do processo

$$X_t - 0.2X_{t-1} + 0.4X_{t-2} = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

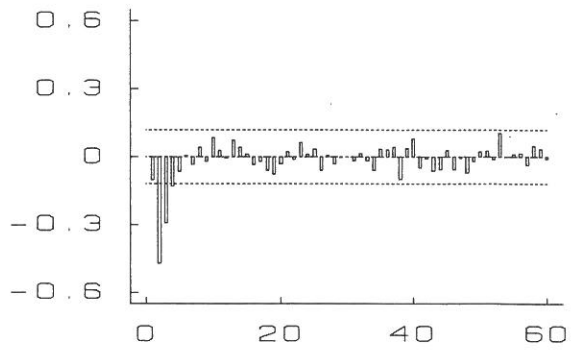


Fig. I-13. FACP do processo apresentado na fig. I-12.

### 3 Análise espectral

No capítulo anterior caracterizaram-se os processos estocásticos no domínio do tempo utilizando funções como as de autocorrelação e autocorrelação parcial. Uma alternativa a este estudo no domínio do tempo é a realizada no domínio da frequência, fazendo uso da análise de Fourier, que permite estudar o comportamento de sucessões por decomposição sinusoidal em diferentes frequências.

Neste capítulo apresentam-se algumas considerações gerais sobre séries e integrais de Fourier, sendo identificado o espectro de um processo estacionário como transformada de Fourier da função de autocovariância. Para os processos apresentados no capítulo anterior, é determinada a função densidade espectral.

Por fim para tornar a questão da não consistência das estimativas espectrais é proposto o alisamento através da aplicação de janelas retardadas.

#### 3.1 Domínio do tempo vs domínio da frequência

Ao analisar no domínio do tempo uma sucessão cronológica, como por exemplo a da figura II-1, podem identificar-se várias periodicidades. Observa-se um longo período à volta da dimensão total do sinal, outro bastante mais curto correspondente a cerca de 20 dias e ainda um outro, que a resolução gráfica não permite identificar com exactidão mas que andarà perto dos 7 dias. Mas a simples inspecção visual não permite tirar conclusões definitivas sobre as frequências e respectivas amplitudes contidas no sinal.

No entanto, fazendo a passagem para o domínio das frequências, já é possível concluir algo de definitivo. Simpliciter, é esta passagem que dá origem ao espectro da sucessão.

A metodologia utilizada para o cálculo do espectro, que será a seu tempo explicada, consistiu na subdivisão do sinal original, com 8192 registos distanciados de 1 hora, em 4 sub-séries de 2048 pontos, para as quais foram determinados os espectros. Os valores representados graficamente na figura II-2, resultam das respectivas médias por sub-série.

Através deste espectro é possível identificar os períodos do sinal, que se encontram assinalados no gráfico. O pico de maior amplitude corresponde a um conjunto de frequências ao redor de 0.08 e perto da frequência nula verifica-se um ligeiro pico não identificado.

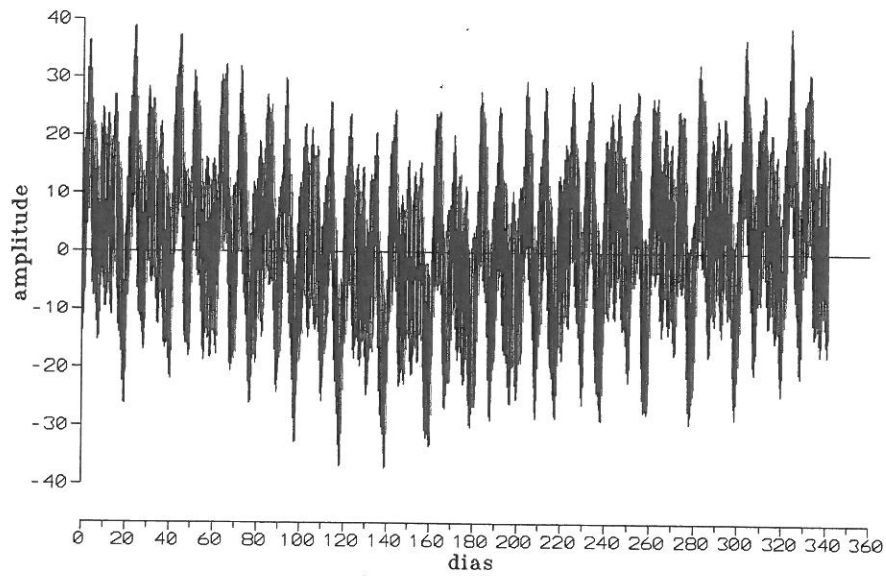


Fig. II-1. Cronograma de uma sucessão

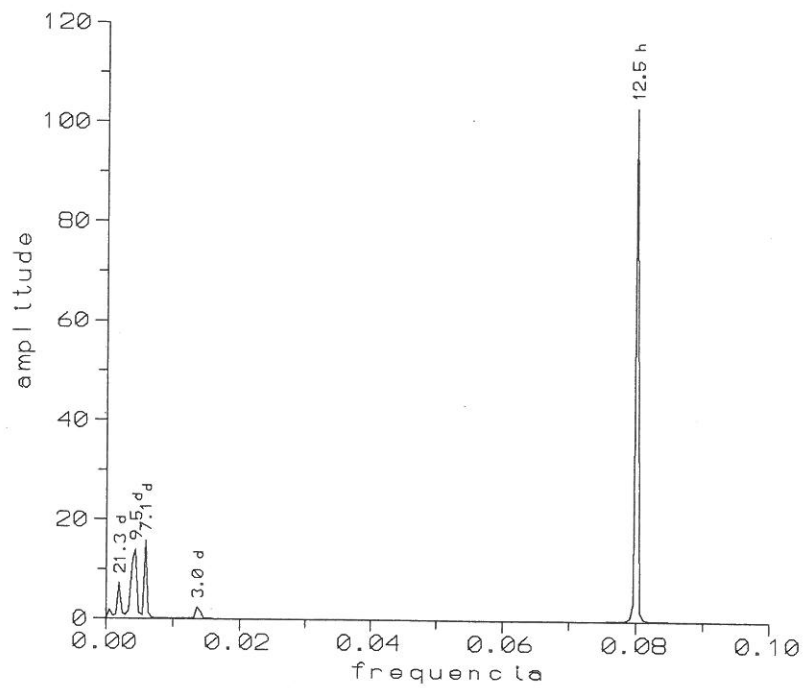


Fig. II-2. Espectro da sucessão apresentada na fig.II-1.

De facto, o sinal que se tem vindo a analisar foi gerado artificialmente através da

função:

$$c(t) = 15 \sin\left(\frac{2\pi}{12.5} t\right) + 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3 \times 24} t\right) + 6 \sin\left(\frac{2\pi}{7 \times 24} t - \frac{\pi}{6}\right) + 8 \sin\left(\frac{2\pi}{10 \times 24} t - \frac{\pi}{5}\right) + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{20 \times 24} t - \frac{\pi}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{180 \times 24} t\right) + 5 \cos\left(\frac{2\pi}{360 \times 24} t\right) + 0.004 t + 0.02$$

e corresponde-lhe o espectro discreto apresentado na figura II-3.

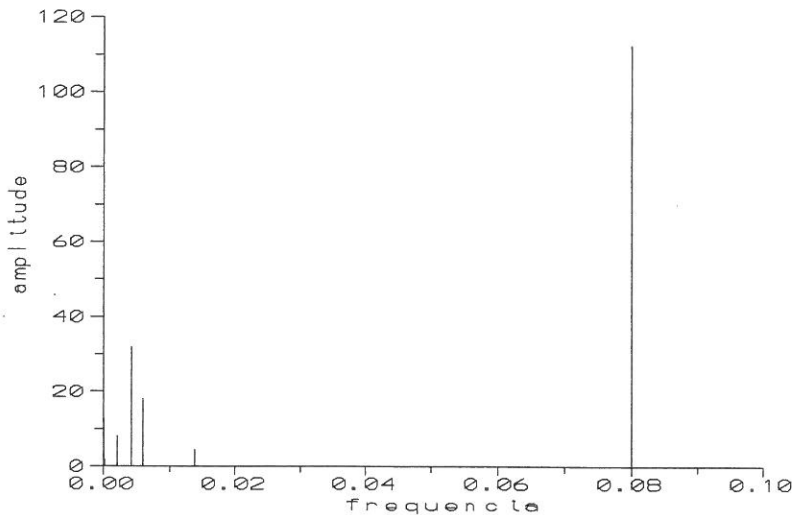


Fig. II-3. Espectro do sinal  $c(t)$

Ao comparar os dois espectros verifica-se que a análise espectral não conseguiu resolver o problema, transformando o espectro da sucessão apresentada na Fig. II-3, que deveria ser de riscas, num espectro contínuo (Fig.II-2). As diferenças de amplitude que se verificam para as frequências correspondentes, são devidas à repartição de energia. Constata-se ainda que a dimensão de cada bloco ( $\pm 85.3d$ ), sendo inferior a 180 dias, condiciona a identificação de períodos mais longos e a resolução espectral.

### 3.2 Séries de Fourier

A análise espectral não é mais do que uma modificação da análise de Fourier permitindo trabalhar directamente com processos estocásticos em vez das habituais funções determinísticas. As duas análises têm no entanto, como objectivo comum, a decomposição em termos de funções sinusoidais.

A justificação da utilização de funções trigonométricas, é dada por Bloomfield (1976) quando diz que, embora outras funções periódicas partilhem de propriedades das funções sinusoidais, a vantagem do seu uso na análise de sucessões cronológicas é referente ao seu comportamento em termos de alterações na escala do tempo.

Uma função real de variável real,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *periódica* de período  $T$  se verificar a propriedade

$$f(x) = f(x + kT), \forall x \in \mathbb{R} \text{ com } k \in \mathbb{Z}, T \in \mathbb{R}.$$

Ao mais pequeno valor de  $T$  que verifica esta equação chama-se *período fundamental* da função  $f$ .

A *frequência*  $f_0$ , número de ciclos por unidade de tempo, obtém-se da relação  $f_0 = 1 / T$ .

Considera-se a função periódica, conhecida como função harmónica,

$$f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

em que o período, o mais pequeno intervalo de tempo necessário para completar um ciclo sinusoidal, é  $T = 2\pi / \omega$  ( $\omega = 2\pi / T$ ), sendo  $\omega$  a frequência angular em radianos e  $\omega / 2\pi$  a frequência em ciclos por unidade de tempo.

Assim pode-se expressar a harmónica em termos do período

$$\begin{aligned} f(t) &= a \cos \frac{2\pi t}{T} + b \sin \frac{2\pi t}{T} \\ &= R \cos(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

em que  $R = (a^2 + b^2)^{1/2}$  é a amplitude da harmónica, com  $a = R \cos \theta$  e  $b = -R \sin \theta$  e  $\theta = \arctg(-b/a)$  é a fase da harmónica.

Se uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for periódica de período  $2\pi$ , isto é  $f(t) = f(t + 2k\pi)$  com  $k \in \mathbb{Z}$ , e satisfizer as condições de Dirichlet (i) e (ii),

i)  $f$  é absolutamente integrável no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , quer dizer que existe sempre e é finito

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$$

ii) tem um número finito de descontinuidades e de máximos e mínimos no intervalo  $[-\pi, \pi]$ ;

então pode demonstrar-se que a *série de Fourier*,

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

converge, para todos os valores de  $t$  e é igual a  $\frac{1}{2}\{f(t-0) + f(t+0)\}$ , representando  $a_k$  e  $b_k$  os *coeficientes de Fourier*,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

A primeira condição de Dirichlet (i) é fundamental para garantir a existência dos coeficientes  $a_k$ , com efeito,

$$|a_k| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) \cos kt| \, dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, dt < \infty.$$

Com um raciocínio semelhante tira-se a conclusão respeitante aos coeficientes  $b_k$ .

Além de verificar as condições Dirichlet, se a função for periódica e contínua no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , então a série de Fourier converge para todos os valores de  $t$  e é igual a  $f(t)$ .

Este modo de expressar  $f(t)$ , válido para todos os valores de  $t$ , corresponde a uma decomposição em termos de somas de harmónicas. Esta representação de funções periódicas pode ser interpretada do ponto de vista físico, interligando energia e frequência.

Sendo  $f$  uma função de período  $2\pi$ , designa-se por *energia total* no intervalo  $[-\pi, \pi]$  o integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 \, dt.$$

Tendo em conta as propriedades das funções seno e cosseno no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , conhecidas como relações de ortogonalidade:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos st dt = 0, \quad s \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos st dt = 0, \quad \forall s, k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \sin st dt = 0, \quad s \neq k$$

e ainda,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt = \pi, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt dt = \pi, \quad k = 1, 2, \dots$$

deduz-se para séries de Fourier, a *relação de Parseval*,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 dt = \pi \left[ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

Tomando  $E_0 = a_0/2$  e  $E_k = [(a_k^2 + b_k^2)/2]^{1/2}$ , para  $k=1, 2, \dots$ , a energia total no intervalo  $[-\pi, \pi]$  pode-se representar por  $2\pi \sum_{k=0}^{\infty} E_k^2$ . Esta grandeza, correspondendo à quantidade de energia associada ao período  $2\pi$ , pode no entanto, considerar-se suficiente para caracterizar o comportamento global da função, visto esta ser periódica de período  $2\pi$ .

Outra forma de abordar este problema é considerar a energia associada à unidade de tempo. Este conceito físico, conhecido por *potência*, obtém-se da energia total dividindo pelo período,

$$\text{potência total} = \frac{\text{energia total em } [-\pi, \pi]}{2\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k^2.$$

Cada  $E_k^2$  está associado a um termo particular da série de Fourier representando a contribuição para a potência total dada pela harmónica de ordem  $k$ ,  $a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt$ .

Em vez de referir os termos pelo valor de  $k$ , sob o ponto de vista físico recorre-se preferencialmente à frequência respectiva. Se considerar a unidade de tempo  $t$ , expresso em segundos, a harmónica  $k$  tem a *frequência*  $(k/2\pi)$  *ciclos por segundo*, ou abreviadamente,  $(k/2\pi)$  c.p.s.. A quantidade  $k$  refere-se como *frequência angular*, sendo normalmente notada por  $\omega$  e expressa em *radianos por segundo*. A relação entre frequência, em c.p.s. e a frequência angular, em radianos por segundo, será: *frequência angular* = *frequência*  $\times 2\pi$ .

Assim, cada  $E_k^2$  representa a contribuição para a potência total do termo da série de Fourier, com frequência  $(k/2\pi)$  c.p.s., ou com frequência angular  $k$  ( $\omega$ ) radianos por segundo.

Estes conceitos podem generalizar-se para o caso em que  $f(t)$  é uma função periódica de período  $2T$ . Efectuando uma mudança de variável na escala do tempo, verifica-se que este caso se reduz ao anterior. Seja, então,  $g(t)$  uma nova função, em que  $g(t) \equiv f(tT/\pi)$ .

Na hipótese de se verificarem as condições de Dirichlet e sendo  $g(t)$  periódica de período  $2\pi$ , pode-se obter o seguinte desenvolvimento em série de Fourier, para os pontos de continuidade de  $f$ :

$$g(s) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ks + b_k \operatorname{sen} ks).$$

Donde, efectuando a mudança de variável, virá

$$f(t) \equiv g(\pi t/T) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi t}{T} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi t}{T} \right),$$

em que

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \cos ks \, ds \equiv \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos \frac{k\pi t}{T} \, dt, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \operatorname{sen} ks \, ds \equiv \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi t}{T} \, dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, a energia total associada ao intervalo de tempo  $[-T, T]$  é dada por

$$\int_{-T}^T [f(t)]^2 dt = 2T \sum_{k=0}^{\infty} E_k^2$$

e a potência total, no mesmo intervalo, é resultante de,

$$\frac{\text{energia total em } [-T, T]}{2T} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k^2,$$

sendo  $E_k^2$  a contribuição para a potência total do termo da série de Fourier com frequência  $(k/2T)$  c.p.s., ou de forma equivalente, com frequência angular de  $(k\pi/T)$  radianos por segundo.

### 3.3 Integrais de Fourier

Analise-se agora o caso de uma função  $f(t)$  não periódica. Como não existe estrutura periódica, não se pode expressar  $f(t)$  em termos de série de Fourier válida para  $\forall t$ .

Considerando o método habitual de restringir uma função a um intervalo finito, pode-se obter, para esse intervalo, a sua representação em série de Fourier. Assim, tomando o intervalo  $[-T, T]$  e definindo a função  $f_T(t)$  do seguinte modo:

tem-se  $f_T(t)$  periódica no intervalo considerado, de período  $2T$ , e assumindo as condições usuais, vem para os pontos de continuidade,

$$f_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos 2\pi f_k t + b_k \text{ sen } 2\pi f_k t),$$

onde as frequências são  $f_k = k/2T$  e  $b_0 = 0$ .

Relembrando que  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \text{ sen } \alpha$ , e que

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

pode-se representar  $f_T(t)$  em forma de uma exponencial complexa:

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i f_k t}$$

em que

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_k - i b_k), & k \geq 1 \\ a_0/2, & k = 0 \\ \frac{1}{2} (a_{|k|} + i b_{|k|}), & k \leq -1. \end{cases}$$

Substituindo  $a_k$  e  $b_k$  pelas expressões anteriores, obtêm-se os *coeficientes complexos de Fourier*:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_T(t) e^{-2\pi i f_k t} dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-2\pi i f_k t} dt \end{aligned}$$

uma vez que  $f_T(t)$  coincide com  $f(t)$  no intervalo  $[-T, T]$ .

Assim, para  $-T \leq t \leq T$  e com  $\Delta f_k = f_k - f_{k-1} = 1/2T$ , vem

$$f(t) \equiv f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-T}^T f(t) e^{-2\pi i f_k t} dt \right] e^{2\pi i f_k t} \Delta f_k.$$

Considerando  $T \rightarrow \infty$ , tem-se  $f_T(t)$  de período ilimitado, ou seja  $f_T(t) \rightarrow f(t)$  e  $\Delta f_k \rightarrow 0$ . Deste modo, e sem entrar em grande rigor matemático, podemos dizer que o somatório transforma-se num integral e obtêm-se como limite (admitindo que existem os dois integrais), a representação de  $f(t)$  no *integral de Fourier*, para os pontos de continuidade,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{2\pi i f t} df$$

onde  $F(f) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i f t} dt$  representa a *transformada de Fourier* de  $f(t)$ .

Pode-se apresentar, alternativamente, a transformada de Fourier escrita de outro modo,

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos 2\pi ft - i \operatorname{sen} 2\pi ft) dt$$

$$= a(f) - i b(f)$$

com a correspondente representação gráfica na figura II-4.

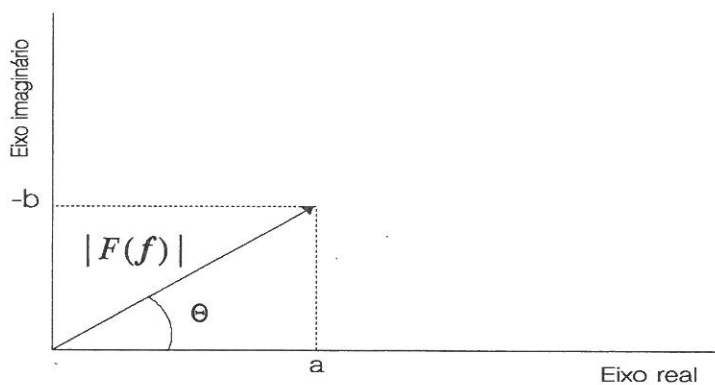


Fig. II-4. Demonstração gráfica das componentes de Fourier (Báth: 1974)

Uma condição suficiente para que  $F(f)$  esteja definida para todas as frequências  $f$  é que  $f(t)$  seja absolutamente integrável no intervalo  $]-\infty, \infty[$ , com efeito,

$$|F(f)| < \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |e^{-2\pi i f t}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty .$$

Apresentando a definição de transformada de Fourier em termos de frequência angular,  $\omega$ ,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega ,$$

onde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

e, de forma idêntica ao que se fez para séries de Fourier, obtem-se outra expressão para a relação de Parseval, que permite definir a energia total no intervalo  $]-\infty, \infty[$ . Assumindo que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt < \infty$$

tem-se

$$\text{energia total em } ]-\infty, \infty[ = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

A expressão  $|F(\omega)|^2 d\omega$  representa a contribuição para a energia total das componentes de  $f(t)$  que têm frequências entre  $\omega$  e  $\omega + d\omega$ . Interpreta-se assim, como uma medida da densidade de energia, para a qual contribuem as componentes com frequência na vizinhança de  $\omega$ . Por esse motivo, costuma-se chamar  $|F(\omega)|^2$  como *função densidade espectral de energia*. Esta interpretação resulta do facto de se tratar de uma distribuição sobre um domínio contínuo de frequências.

### 3.4 Análise espectral de processos estacionários

Até este momento tem-se lidado apenas com funções determinísticas, mas quando se passa para o estudo de processos estocásticos surgem alguns problemas.

Em primeiro lugar, um processo estocástico não corresponde a uma função, mas a uma família de funções que determinam as diferentes trajectórias do processo. Para tornar este problema, faz-se a aplicação do estudo a uma única realização do processo.

Em segundo lugar, não há qualquer garantia dessa realização ser periódica ou absolutamente integrável, por isso não se pode expressar em série ou integral de Fourier.

Assim, utiliza-se a técnica da truncagem para construir uma restrição do processo.

Considere-se então, um processo estocástico a tempo contínuo  $\{X(t)\}$  e seja  $x(t)$  uma sua trajectória; tomando um número arbitrário  $T$ , define-se a função

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T \leq t \leq T \\ 0, & - \end{cases}$$

Trata-se de uma função amortecida nas extremidades (por construção), que verifica portanto, a condição de ser absolutamente integrável. Assumindo que é uma função contínua, pode-se expressar em integral de Fourier,

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_T(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

onde

$$\begin{aligned} F_T(\omega) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-i\omega t} dt, \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

A expressão  $|F_T(\omega)|^2 d\omega$ , de uma forma semelhante ao anterior, pode interpretar-se como a contribuição para a energia total das componentes de  $x_T(t)$  que têm frequências entre  $\omega$  e  $\omega + d\omega$ .

Considerando  $T \rightarrow \infty$ ,  $x_T(t)$  e  $x(t)$  seriam idênticas para todo o  $t$  e, nestas condições, poderia pensar-se em  $\lim_{T \rightarrow \infty} |F_T(\omega)|^2$  para caracterizar  $x(t)$ . No entanto, em geral, esse limite não existe.

Actuando do mesmo modo que para as funções periódicas, se se considerar a potência definida como uma medida da energia por unidade de tempo, será possível, sob certas condições, que o limite quando  $T \rightarrow \infty$  já exista para todo o  $\omega$ . Nestas condições,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{2T}$$

irá representar a contribuição para a potência total de  $x(t)$  dada pelas componentes com frequências entre  $\omega$  e  $\omega + d\omega$ .

A análise que se tem vindo a efectuar incide sobre uma única realização do processo. Portanto, para caracterizá-lo em termos das propriedades de potência/frequência, é natural determinar a média das contribuições das diferentes realizações, isto é,  $E[|F_T(\omega)|^2 / 2T]$ .

Obtém-se assim, quando o limite existir, a contribuição média para a potência total das componentes do processo estocástico que têm frequências compreendidas entre  $\omega$  e  $\omega + d\omega$ ,

$$h(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ E \left[ \frac{|F_T(\omega)|^2}{2T} \right] \right\}$$

Esta função  $h(\omega)$  chama-se *função densidade espectral* ou mais simplesmente *espectro* de  $X(t)$  e desempenha um papel primordial na análise espectral, nomeadamente permitindo a caracterização dos processos estocásticos estacionários, como adiante se verá.

### 3.5 Relação entre a função densidade espectral e as funções autocovariância e autocorrelação

A determinação do espectro, a partir da definição apresentada no parágrafo anterior, não se vislumbra como uma tarefa fácil. Assim, apresenta-se uma alternativa mais simples, recorrendo à função autocovariância do processo.

Seja  $\{X(t)\}$  um processo estocástico estacionário a tempo contínuo, tal que  $E[X(t)] = 0 \forall t$ . Existindo função densidade espectral  $h(\omega)$ ,  $\forall \omega$  e função autocovariância  $\gamma(\tau)$ ,  $\forall \tau$  prova-se (Priestley, 1981) que,  $h(\omega)$  é a transformada de Fourier de  $\gamma(\tau)$ , isto é,

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Ao estabelecer este resultado, verifica que é condição suficiente para que exista a função densidade espectral, que a função autocovariância tenha transformada de Fourier. Para tal, é necessário que  $\gamma(\tau)$  seja absolutamente integrável. Ou seja, a função densidade espectral  $h(\omega)$  existe para todo o  $\omega$ , se  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(\tau)| d\tau < \infty$ .

Na condição da função autocovariância ser absolutamente integrável e quando  $\gamma(\tau)$  for contínua para  $\tau = 0$  (i.e., é contínua em todo o domínio), prova-se que se pode expressar  $\gamma(\tau)$  como a transformada de Fourier inversa da densidade espectral, isto é,

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Para processos estacionários reais, como a função autocovariância é par, isto é,  $\gamma(\tau) = \gamma(-\tau)$ , a expressão complexa de  $h(\omega)$  simplifica-se, reduzindo-se a

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

podendo-se, deste modo, verificar que a função densidade espectral também é uma função par,  $h(\omega) = h(-\omega)$ ,  $\forall \omega$ .

Fazendo um raciocínio idêntico com a função autocovariância viria,

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

e tomando  $\tau = 0$  tem-se

$$\sigma_x^2 \equiv \gamma(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) d\omega.$$

Esta última expressão mostra que, o espectro pode ser interpretado como uma decomposição da variância do processo. Verifica-se pois, que a variância do processo  $\sigma_x^2$  é uma medida correspondente à potência total, ou seja, para a qual contribuam as componentes de  $\{X(t)\}$  de todas as frequências.

Um pico no espectro indicará uma importante contribuição para a variância das componentes com frequência nesse intervalo. A título de exemplo, a análise da figura II-5 permite dizer que as componentes de baixa frequência não contribuem tão significativamente para a variância em comparação com as componentes da alta frequência.

Dividindo a função densidade espectral pela variância do processo, obtém-se a *função densidade espectral normalizada*,

$$f(\omega) = \frac{h(\omega)}{\sigma_x^2}.$$

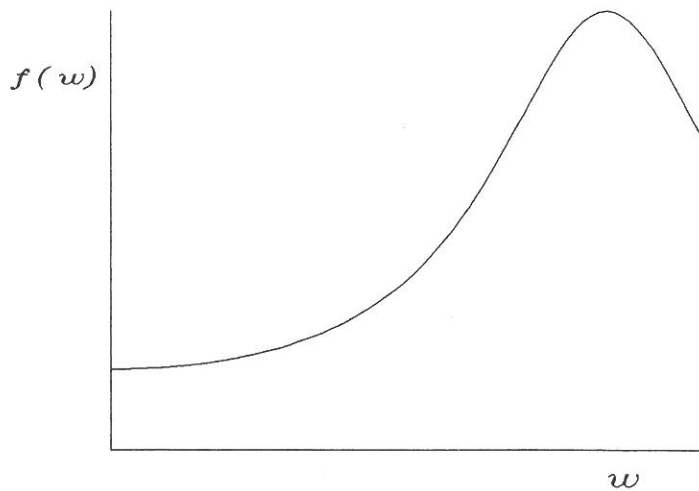


Fig. II-5. Exemplo de um espectro

Relembrando a definição de espectro e a relação entre as funções autocovariância e autocorrelação, tem-se

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Na prática a utilização de  $h(\omega)$  e  $f(\omega)$  é indiferente, visto que ambas contêm a mesma informação. Contudo  $f(\omega)$ , ao gozar das propriedades P.1. e P.2. que se apresentam de seguida, permite estabelecer um paralelo entre a função densidade espectral e a função densidade de probabilidade.

P.1.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega = 1$ , pela definição de  $f(\omega)$ .

P.2.  $f(\omega) \geq 0, \forall \omega$ , pois  $|F_T(\omega)|^2 \geq 0 \Rightarrow h(\omega) \geq 0 \Rightarrow f(\omega) \geq 0, \forall \omega$

P.3. Para processos de valores reais, a função é simétrica, isto é,  $f(\omega) = f(-\omega)$ . Por este motivo, a representação gráfica desta função faz-se apenas para valores não negativos da frequência.

A função densidade espectral dos processos estacionários não existe sempre, tal como acontecia para a função densidade de probabilidade para as variáveis aleatórias. É necessário verificar determinadas condições para garantir a existência de  $f(\omega)$ .

Partindo da definição de *transformada de Fourier-Stieltjes*, a não existência da função densidade espectral pode ser ultrapassada. Seja

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

em que  $F(\omega)$  é referida como *função de distribuição espectral*. Priestley(1981) prova, sob certas condições, que a função de distribuição espectral existe sempre e que se verifica a relação apresentada.

Este resultado, conhecido como *teorema de Wiener-Khintchine*, diz que a condição necessária e suficiente para que  $\rho(\tau)$  seja a função de autocorrelação de um processo estocástico estacionário contínuo, é que exista a função  $F(\omega)$ , com as propriedades de uma função de distribuição no intervalo  $]-\infty, \infty[$ , (i.e.,  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$ , e  $F(\omega)$  não decrescente) verificando para todo o  $\tau$ ,

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega).$$

Quando  $F(\omega)$  for diferenciável tem-se  $F'(\omega) = f(\omega)$  ou seja,  $dF(\omega) = f(\omega) d\omega$ , e a expressão da transformada de Fourier-Stieltjes de  $\rho(\tau)$  corresponde à expressão anterior, da transformada de Fourier inversa da função densidade espectral.

Até este momento tem-se lidado com processos de parâmetros contínuos, ou seja, observados continuamente no tempo, mas quando se estudam sucessões cronológicas, é feita uma discretização das observações para os instantes  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e obtêm-se processos a tempo discreto, referidos  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ . Quando  $t$  é restrito a valores inteiros, as funções de autocorrelação são definidas de um modo semelhante para valores inteiros de  $k$ , sendo conseqüentemente, os integrais substituídos por somas discretas e as funções espectrais são definidas apenas no intervalo  $]-\pi, \pi[$ .

Para processos estacionários de parâmetro discreto, o teorema de Wiener-Khintchine tem equivalência no *Teorema de Wold*:

É condição necessária e suficiente para que  $\rho_k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  seja a função de autocorrelação do processo estacionário  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , que exista a função  $F(\omega)$ , com

propriedades de função de distribuição no intervalo  $]-\pi, \pi[$ , (i.e.  $F(-\pi) = 0$ ,  $F(\pi) = 1$  e  $F(\omega)$  não decrescente) sendo

$$\rho_k = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega k} dF(\omega), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A função densidade espectral normalizada para processos a tempo discreto tem equivalência à anteriormente apresentada para processos a tempo contínuo.

Se  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  um processo estocástico real a tempo discreto, se existir, a função densidade espectral normalizada será igual a

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k \cos k\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

e uma vez que  $f(\omega)$ , é simétrica, e que  $\rho(0) = 1$ , tem-se

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos k\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Para finalizar este parágrafo convém ainda referir um problema que resulta da discretização.

Parece claro, que ao considerar o processo  $X_t$  definido apenas nos instantes  $t$ , igualmente espaçados  $\Delta t$ , se perde alguma informação em termos espectrais, nomeadamente nas componentes de alta frequência, não sendo possível distinguir entre os valores  $\exp(i\omega t)$  e  $\exp[i(\omega + 2k\pi/\Delta t)t]$ . As componentes de  $X_t$  com frequências  $\omega \pm 2\pi/\Delta t$ ,  $\omega \pm 4\pi/\Delta t$ ,  $\omega \pm 6\pi/\Delta t$ , ... aparentam todas ter frequência  $\omega$ , e dizem-se suas "aliases". Note-se que, qualquer frequência fora do intervalo  $]-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t[$  tem a sua "alias" dentro desse intervalo.

À mais elevada frequência acerca da qual se pode obter informação, chama-se *frequência de Nyquist*, e neste caso é igual a  $\pi/\Delta t$ .

E se em vez da frequência angular  $\omega$ , se utilizar a frequência em ciclos por unidade de tempo, como  $\omega = 2\pi f$ , tem-se

$$\omega \leq \frac{\pi}{\Delta t} \Rightarrow f \leq \frac{1}{2\Delta t}$$

Normalmente, neste tipo de análise, como se usa  $\Delta t = 1$  e a função densidade espectral é simétrica, a representação gráfica faz-se em termos do domínio de frequências  $[0, 1/2]$ .

### 3.6 Espectros de alguns processos

A dedução das expressões dos espectros dos processos apresentados no cap. I, torna-se por vezes algo trabalhosa, quando efectuada a partir da definição. Recorre-se assim à utilização de filtros/transformadores lineares que permitem simplificar a determinação dos espectros.

Admitindo um sistema linear e independente do tempo, pode-se estabelecer uma relação entre as funções "input"  $Y_t$  e "output"  $X_t$ , ambas correspondentes a processos de parâmetros discretos,

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} g_u Y_{t-u} \\ &= \left( \sum_{u=-\infty}^{\infty} g_u B^u \right) Y_t \\ &= G(B) Y_t \end{aligned}$$

em que  $\{g_u\}$  é uma função determinística, independente da forma do "input"  $Y_t$ , invariável com o tempo e absolutamente integrável e  $G$  representa a função transferência do sistema.

Se se considerar  $Y_u$ , um processo estocástico estacionário de variância  $\sigma_Y^2$  e função autocorrelação  $\rho_Y(\tau)$  tem-se, partindo da expressão da covariância de uma combinação linear (Priestley, 1981),

$$\text{cov}(X_t, X_{t+\tau}) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} g_u g_v \text{cov}(Y_{t-u}, Y_{t-v+\tau}),$$

passando para a função autocorrelação, vem

$$\sigma_X^2 \rho_X(\tau) = \sigma_Y^2 \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} g_u g_v \rho_Y(u+\tau-v),$$

onde  $\sigma_X^2$ ,  $\rho_X(\tau)$  são respectivamente a variância e autocorrelação do processo  $X_t$  estacionário.

Tomando a expressão da função densidade espectral de  $X_t$

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_X(\tau) e^{-i\omega\tau},$$

e multiplicando pela variância obtém-se

$$\sigma_X^2 f_X(\omega) = \frac{\sigma_X^2}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_X(\tau) e^{-i\omega\tau}.$$

Substituindo a expressão anterior de  $\sigma_X^2 \rho_X(\tau)$ ,

$$\sigma_X^2 f_X(\omega) = \frac{\sigma_Y^2}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g_u g_v \rho_Y(u+\tau-v) e^{-i\omega\tau},$$

e fazendo associações tem-se,

$$\sigma_X^2 f_X(\omega) = \frac{\sigma_Y^2}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{\infty} g_u e^{i\omega u} \sum_{v=-\infty}^{\infty} g_v e^{-i\omega v} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_Y(u+\tau-v) e^{-i(u+\tau-v)\omega}.$$

Constatando que o 2º somatório corresponde ao complexo conjugado do 1º e ainda, com a mudança de variável  $k = u + \tau - v$  tem-se, admitindo que  $Y_t$  tem espectro contínuo com função densidade espectral  $f_Y(\omega)$  existindo para todo o  $\omega$ ,

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_Y(u+\tau-v) e^{-i(u+\tau-v)\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_Y(k) e^{-ik\omega} = 2\pi f_Y(\omega).$$

Tomando  $\Gamma(\omega) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} g_u e^{-i\omega u} \equiv G(e^{-i\omega})$  obtém-se

$$\sigma_X^2 f_X(\omega) = \sigma_Y^2 |\Gamma(\omega)|^2 f_Y(\omega), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi,$$

ou de forma equivalente, a expressão que servirá de base à determinação dos espectros, será

$$\sigma_X^2 f_X(\omega) = \sigma_Y^2 |G(e^{-i\omega})|^2 f_Y(\omega), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

A existência da função transferência é garantida, pelo facto de  $g_u$  ser absolutamente integrável. Note-se que, toda a dedução pressupõe que  $\{X_t\}$  tem variância finita, isto é,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Gamma(\omega)|^2 h_Y(\omega) d\omega < \infty .$$

Como aplicação destes resultados deduzem-se as expressões das funções densidade espectral dos processos apresentados no cap.I.

### 3.6.1 Processo puramente aleatório

Sendo o processo discreto mais simples, consistindo apenas numa sucessão de variáveis não correlacionadas, pode-se determinar a função densidade espectral para o processo de valores reais através da sua função autocovariância,

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cos k\omega , \quad -\pi \leq \omega \leq \pi .$$

Substituindo os valores da função autocovariância, apresentados no cap.I, tem-se,

$$h(\omega) = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} , \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi]$$

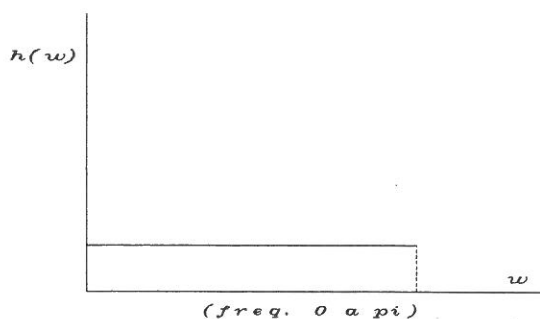


Fig. II-6. Espectro do processo puramente aleatório

O processo puramente aleatório tem um espectro que é uma linha horizontal (fig.II-6). O que implica que a contribuição para a variância das componentes das diferentes frequências é constante, ou de outro modo, a potência total é uniformemente distribuída por todas as frequências.

### 3.6.2 Processo de médias móveis

Neste processo e nos seguintes utiliza-se a noção de função transferência, introduzida anteriormente. No entanto, serão apenas apresentados os resultados da determinação dos espectros, sendo o desenvolvimento dos cálculos referente aos vários modelos feito no anexo A, no final deste trabalho.

Seja o processo de médias móveis de primeira ordem,

$$X_t = \Theta(B) \varepsilon_t$$

com  $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B$ .

Utilizando a relação determinada anteriormente,

$$\sigma_x^2 f_x(\omega) = \sigma_y^2 |G(e^{-i\omega})|^2 f_y(\omega), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi,$$

com  $Y_t = \varepsilon_t$  vem  $f_y(\omega) = 1/2\pi$ ,  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  e tendo em conta que neste caso a função transferência é  $\Theta(e^{-i\omega})$ , tem-se

$$\sigma_x^2 f_x(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |1 - \theta_1 e^{-i\omega}|^2.$$

Ou seja, o espectro de um processo de médias móveis de 1ª ordem, vem dado por

$$h(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} (1 - 2\theta_1 \cos \omega + \theta_1^2)$$

Para determinação dos espectros, tanto para este modelo como para os seguintes, desenvolveu-se programação (em anexo B) adaptada a realização destes cálculos. Os resultados obtidos por estes programas foram comparados com o do "software" comercial ITSM.

O processo MA(1) apresentado no capítulo anterior,  $X_t = \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1}$ , tem o espectro representado na fig.II-7 ao considerar a variância do ruído branco dada por  $\sigma_\varepsilon^2 = 0.1$ .

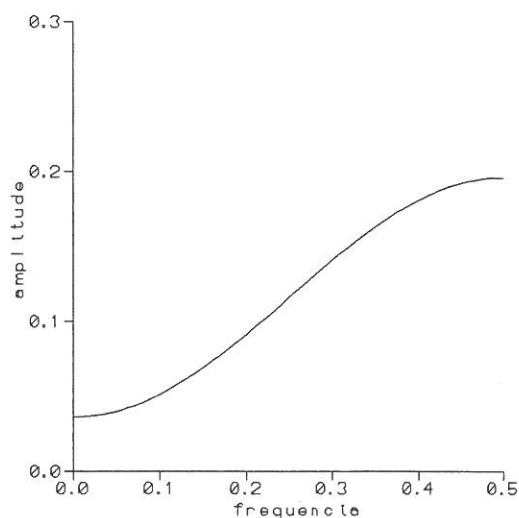


Fig. II-7. Espectro do processo  $X_t = \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1}$

De um modo geral se  $\theta > 0$ , verifica-se que a contribuição para a variância do processo é mais intensa por parte das componentes de alta frequência.

Para o processo de 2ª ordem, com um raciocínio idêntico, obtém-se

$$\sigma_x^2 f_x(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |1 - \theta_1 e^{-i\omega} - \theta_2 e^{-2i\omega}|^2,$$

resultando após alguns cálculos (anexo A), a expressão geral para o espectro de um processo médias móveis de 2ª ordem,

$$h(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [(1 + \theta_2)^2 - 2\theta_1(1 - \theta_2)\cos \omega + \theta_1^2 - 4\theta_2 \cos^2 \omega].$$

Com a mesma variância residual do processo MA(1) apresentado anteriormente, representa-se na fig.II-8 o espectro do processo MA(2),  $X_t = \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1} - 0.2 \varepsilon_{t-2}$ .

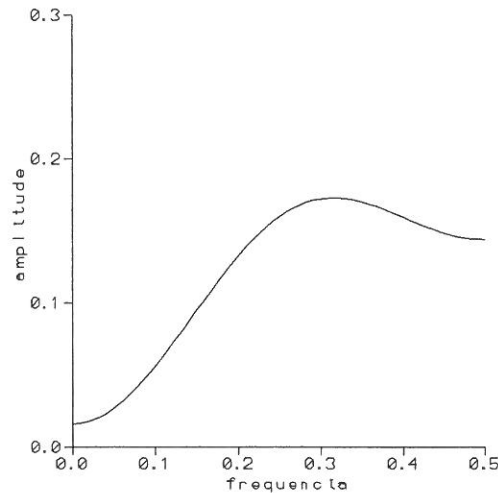


Fig. II-8. Espectro do processo  $X_t = \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1} - 0.2 \varepsilon_{t-2}$

Como os processos de ordem superior saem fora do âmbito deste trabalho, não tem interesse especificar a expressão correspondente ao seu espectro.

### 3.6.3 Processo autoregressivo

Relembrando a expressão do processo estacionário AR(1) de parâmetro discreto, apresentada no capítulo anterior,

$$\Phi(B)X_t = \varepsilon_t$$

com  $\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B$ ,  $|\varphi_1| < 1$  e onde  $\{\varepsilon_t\}$  é um processo puramente aleatório, fazendo-se  $Y_t = \varepsilon_t$  ( $f_Y(\omega) = 1/2\pi$ ,  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ ) virá, com função transferência  $\Phi(e^{-i\omega})$ , a expressão geral para o espectro dos modelos autoregressivos de 1ª ordem

$$\begin{aligned} h(\omega) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \varphi_1 e^{-i\omega}|^2} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{(1 - 2\varphi_1 \cos \omega + \varphi_1^2)}. \end{aligned}$$

A figura II-9 apresenta um exemplo de espectro dos processos AR(1), concretizado para  $X_t = -0.7 X_{t-1} + \varepsilon_t$  com variância residual 0.1.

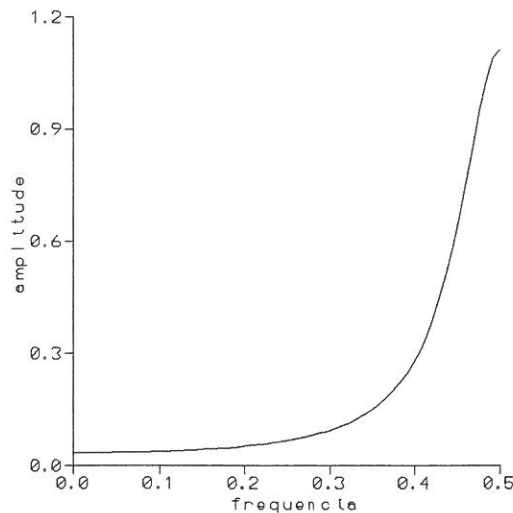


Fig. II-9. Espectro do processo  $X_t = -0.7 X_{t-1} + \varepsilon_t$

Verifica-se, de um modo geral, que se  $\varphi < 0$  as componentes de alta frequência têm uma maior contribuição para a variância do processo.

Para o caso do modelo AR(2) o raciocínio é idêntico. Seja,

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2) X_t = \varepsilon_t,$$

considerando a função transferência  $\Phi(e^{-i\omega}) = 1 - \varphi_1 e^{-i\omega} - \varphi_2 e^{-2i\omega}$ , e sendo  $Y_t = \varepsilon_t$  ( $f_Y(\omega) = 1/2\pi$ ,  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ ) obtém-se como expressão geral para o espectro dos AR(2),

$$\begin{aligned} h(\omega) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \varphi_1 e^{-i\omega} - \varphi_2 e^{-2i\omega}|^2} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{[(1 + \varphi_2)^2 - 2\varphi_1(1 - \varphi_2)\cos \omega + \varphi_1^2 - 4\varphi_2 \cos^2 \omega]} \end{aligned}$$

A representação gráfica do processo de 2ª ordem apresentado anteriormente no cap.I,  $X_t = -0.5 X_{t-1} + 0.3 X_{t-2} + \varepsilon_t$  é a seguinte:

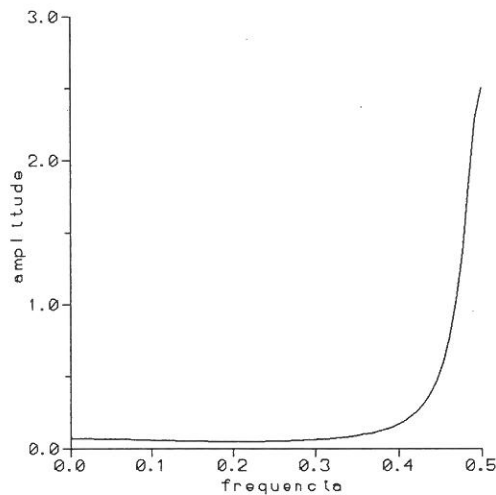


Fig. II-10. Espectro do processo  $X_t = -0.5 X_{t-1} + 0.3 X_{t-2} + \varepsilon_t$

### 3.6.4 Processo misto

Tendo presente a definição de processo misto, apresentada no capítulo precedente,

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t,$$

a expressão do espectro para este tipo de modelos será,

$$\sigma_x^2 f_x(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\Theta(e^{-i\omega})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2}.$$

Concretizando para o processo ARMA(1,1) será

$$h(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|1 - \theta_1 e^{-i\omega}|^2}{|1 - \varphi_1 e^{-i\omega}|^2},$$

ou seja,

$$h(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1 - 2\theta_1 \cos \omega + \theta_1^2}{1 - 2\varphi_1 \cos \omega + \varphi_1^2}.$$

O espectro do processo misto apresentado no cap.I tem a representação gráfica seguinte:

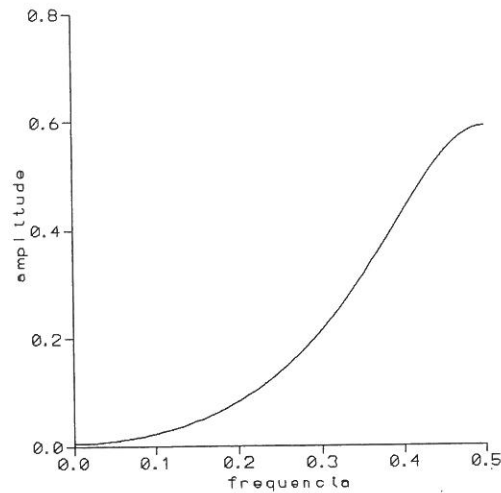


Fig. II-11. Espectro do processo  $X_t + 0.3 X_{t-1} = \epsilon_t - 0.7 \epsilon_{t-1}$

No caso do processo ARMA(1,2), a função densidade espectral tem a seguinte expressão,

$$h(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \frac{[(1 + \theta_2)^2 - 2\theta_1(1 - \theta_2)\cos\omega + \theta_1^2 - 4\theta_2\cos^2\omega]}{1 - 2\varphi_1\cos\omega + \varphi_1^2}$$

Finalmente para o ARMA(2,1), o espectro vem dado por

$$h(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \frac{1 - 2\theta_1\cos\omega + \theta_1^2}{[(1 + \varphi_2)^2 - 2\varphi_1(1 - \varphi_2)\cos\omega + \varphi_1^2 - 4\varphi_2\cos^2\omega]}$$

Como aplicação da sucessão simulada do processo ARMA(2,1) apresentado no capítulo anterior o espectro tem o seguinte gráfico:

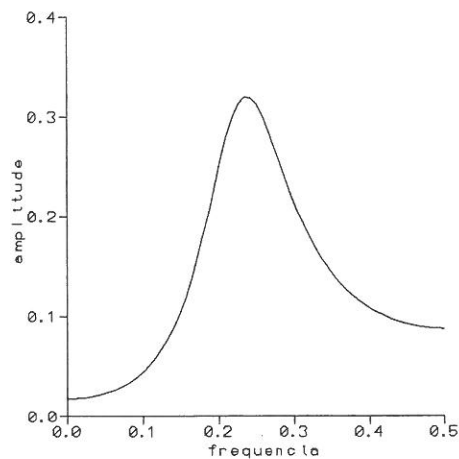


Fig. II-12. Espectro do processo  $X_t - 0.2 X_{t-1} + 0.4 X_{t-2} = \epsilon_t - 0.5 \epsilon_{t-1}$

### 3.7 Estimação do espectro

Seja uma sucessão cronológica com  $n$  termos. O facto de se trabalhar com sucessões finitas introduz alguns problemas na determinação do espectro. Por um lado, existe à partida, a garantia de verificação automática das condições de Dirichlet, mas por outro lado, esse facto impossibilita a obtenção dos verdadeiros espectros, levando à determinação de estimativas dos mesmos.

Assim um modo de estimar o espectro, resulta da substituição da autocovariância teórica  $\gamma_k$  pelas suas estimativas  $\hat{\gamma}_k$ , obtendo-se no caso de  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(\tau)| d\tau < \infty$ ,

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \hat{\gamma}_k(\omega) e^{-i\omega k}$$

Como  $\hat{\gamma}_k$  é um estimador assintoticamente centrado de  $\gamma_k$ , resulta que  $\hat{h}(\omega)$  também é assintoticamente centrado de  $h(\omega)$ . No entanto, este estimador não é consistente, tendo uma variância que não tende para zero quando  $n$  se aproxima de infinito. Adiante abordar-se-á o modo de resolução desta questão.

Quando o argumento é uma das frequências de Fourier,  $\omega_j = 2\pi j/n$ ,  $j = 1, \dots, [n/2]$ , pode estabelecer-se uma relação entre o estimador do espectro e outra quantidade designada por *periodograma*. Definida para o intervalo  $[-\pi, \pi]$ , tem a expressão,

$$I_n(\omega) = \frac{n}{2} [a^2(\omega) + b^2(\omega)]$$

com  $a(\omega) = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n X_t \cos(\omega t)$  e  $b(\omega) = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n X_t \sin(\omega t)$ , ou de outra forma,

$$I_n(\omega) = \frac{2}{n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\omega t} \right|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_n(\omega) &= \frac{2}{n} \left[ \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\omega t} \right] \left[ \sum_{t=1}^n X_t e^{i\omega t} \right] \\ &= \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n X_t X_s e^{-i\omega(s-t)}, \end{aligned}$$

e através da mudança de variável  $k = s-t$  tem-se

$$I_n(\omega_j) = 2 \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \hat{\gamma}(\omega) e^{-i\omega k}.$$

Por comparação com a expressão do estimador do espectro anteriormente definido vem

$$\hat{h}(\omega_j) = \frac{1}{4\pi} I_n(\omega_j).$$

A não resolução do problema da consistência dos estimadores conduz a técnicas como, por exemplo, o alisamento, quer no domínio do tempo, quer correspondentemente no domínio da frequência.

Considerando o estimador,

$$\hat{h}_\lambda(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \lambda_k \hat{\gamma}(\omega) e^{-i\omega k}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

diz-se que resultou do alisamento no domínio do tempo e chama-se janela retardada à função  $\lambda_k$ . O estimador  $\hat{h}(\omega)$  é um caso particular deste com  $\lambda_k = 1$ .

A função  $\lambda_k$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} |\lambda_k| &< 1 \\ \lambda_0 &= 1 \\ \lambda_k &= \lambda_{-k}, \quad |k| < n-1 \end{aligned}$$

O alisamento no domínio da frequência faz-se através da utilização de janelas espectrais e prova-se (Murteira *et al.*:1993,) que a janela espectral corresponde à transformada de Fourier da janela retardada.

Verifica-se também que o alisamento das autocovariâncias na expressão de  $\hat{h}_x(\omega)$  corresponde ao alisamento do periodograma  $I_n(\omega)$  já definido anteriormente.

### 3.8 Algumas janelas usadas na prática

Neste parágrafo apresentam-se algumas das janelas retardadas mais usuais e que servirão de base ao desenvolvimento prático deste trabalho.

Entre as várias janelas propostas escolheram-se de Alves (1985) e Welch (1967) as seguintes, coseno, potência e exponencial, para  $t = 0, \dots, n-1$ :

janela de Hanning (HN):  $\lambda_t = 0.5 [1 - \cos(2\pi t/n-1)]$

janela de Hamming (HM):  $\lambda_t = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi t/n-1)$

janela de Parzen (PA):  $\lambda_t = 1 - \left| \frac{t - (n-1)/2}{(n+1)/2} \right|$

janela de Welch (WE):  $\lambda_t = 1 - \left( \frac{t - (n-1)/2}{(n+1)/2} \right)^2$

janela de Gauss (GA):

$$\lambda_t = e^{-(n+1)t/2}$$

As duas primeiras janelas representadas correspondem à janela de Tukey,

$$\lambda_t = 1 - 2a + 2a[\cos(2\pi t/n - 1)],$$

em que, no primeiro caso  $a = 0.25$  e no segundo  $a = 0.23$ .

A figura II-13 permite comparar a forma das diferentes janelas e verificar o efeito da variação dos pesos, nomeadamente nos extremos, na janela de Tukey.

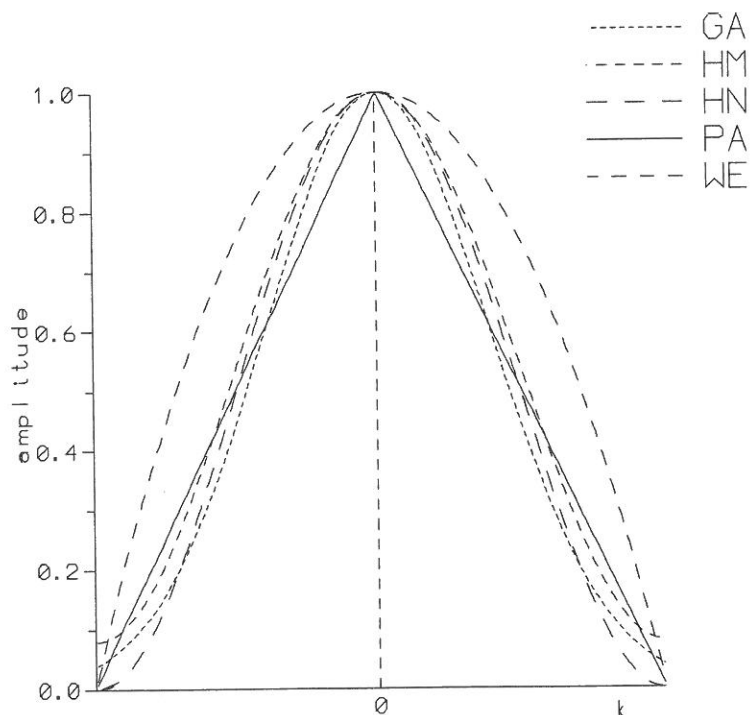


Fig. II-13. Funções janela habitualmente utilizadas na determinação das estimativas espectrais

A discussão sobre a escolha da janela a aplicar em cada caso será assunto a debater em termos práticos no próximo capítulo.

## 4 Aplicação prática a sucessões simuladas

### 4.1 Introdução

Pretende-se neste capítulo estudar o efeito causado nos espectros pela utilização de janelas. Geraram-se sucessões cronológicas às quais se aplicaram diferentes janelas e depois, analisaram-se e compararam-se os espectros resultantes.

O ponto de partida foi a definição dos processos ARMA subjacentes a cada uma das sucessões, processos esses descritos no capítulo I e, dos quais foram apresentados anteriormente alguns exemplos de espectros contínuos.

Procedeu-se em seguida à simulação das sucessões correspondentes a esses modelos, e depois à determinação dos seus espectros, utilizando o método proposto por Welch com aplicação das diversas janelas. Por fim, compararam-se os resultados obtidos quer por observação visual como por determinação de erros em relação aos espectros teóricos dos respectivos modelos. Foram também calculados os espectros das sucessões sem a utilização de qualquer janela, de forma a poder controlar os resultados.

### 4.2 Obtenção das sucessões

Como já se disse na introdução, para a aplicação prática da análise espectral utilizou-se a técnica da simulação para gerar um conjunto de sucessões cronológicas com 280 observações cada, correspondentes a modelos Box & Jenkins - autoregressivos, de médias móveis e mistos - até à 2ª ordem. Ao definir os modelos base especificaram-se os respectivos parâmetros e a variância da sucessão residual, que para os diferentes casos, foi sempre igual a 0.1.

Não houve necessidade de diferenciação, pois consideraram-se sucessões já estacionárias que são as do âmbito da teoria clássica da análise espectral.

O critério subjacente à escolha dos parâmetros dos diferentes modelos teve por base a garantia de verificação das condições de estacionaridade e de invertibilidade apresentadas

no capítulo I. Conforme Pankratz (1983), estas condições são de grande importância prática na identificação dos modelos de Box & Jenkins, sendo confirmadas na fase de estimação dos parâmetros. Os parâmetros previamente estabelecidos, são os que constam da tabela I.

Tabela I: *Identificação dos modelos e respectivos parâmetros*

AR(1)		AR(2)		MA(1)	MA(2)	
$\varphi_1$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\theta_1$	$\theta_1$	$\theta_2$	
0.3	0.3	0.4	0.3	0.3	0.4	
0.4	0.4	0.2	0.4	0.4	0.2	
0.5	0.5	0.3	0.5	0.5	0.3	
0.6	0.5	-0.4	0.6	0.5	-0.4	
0.7	0.3	-0.3	0.7	0.3	-0.3	
-0.3	-0.4	0.5	-0.3	-0.4	0.5	
-0.4	-0.5	0.3	-0.4	-0.5	0.3	
-0.5	-0.5	-0.2	-0.5	-0.5	-0.2	
-0.6	-0.3	-0.4	-0.6	-0.3	-0.4	
-0.7	-0.4	-0.4	-0.7	-0.4	-0.4	

ARMA(1,1)		ARMA(1,2)			ARMA(2,1)		
$\varphi_1$	$\theta_1$	$\varphi_1$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\theta_1$
0.5	0.4	0.3	0.5	0.4	0.5	0.4	0.3
0.5	0.5	0.4	0.3	0.6	0.3	0.2	0.4
0.4	0.6	0.5	-0.4	0.2	0.2	-0.4	0.5
-0.3	0.7	0.6	0.2	-0.5	-0.5	0.3	0.6
-0.5	0.5	0.7	-0.3	-0.6	-0.4	-0.3	0.7
0.6	-0.3	-0.3	0.5	0.3	0.7	0.2	-0.3
0.4	-0.6	-0.4	-0.5	0.3	-0.3	0.5	-0.4
-0.5	-0.5	-0.5	0.4	-0.4	0.6	-0.3	-0.5
-0.5	-0.7	-0.6	-0.5	-0.3	-0.4	-0.3	-0.6
-0.6	-0.4	-0.7	-0.4	-0.5	-0.3	-0.5	-0.7

### 4.3 Metodologia utilizada

Para determinação das estimativas espectrais das sucessões simuladas utilizou-se o método apresentado por Welch (1967) e adaptado por Press *et al.* (1989), que consiste nos seguintes passos:

- aplicação do algoritmo denominado "*Fast Fourier Transform*" (FFT) a secções da sucessão inicial;
- determinação dos periodogramas modificados parcelares;
- cálculo final da média desses periodogramas.

Esta técnica resulta num menor envolvimento computacional que outros métodos, pois a determinação das FFT's é referente a registos de menor dimensão em comparação com a sucessão total. Considerando uma sucessão de dimensão  $n$ , a decomposição numa soma de sinusoides para as frequências de Fourier, corresponde à resolução de um problema que requer aproximadamente  $n^2$  multiplicações complexas e adições, dizendo-se de complexidade computacional  $O(n^2)$ , enquanto que a utilização da FFT, pode reduzir esta complexidade segundo Press *et al.* (1989), para  $O(n \log_2 n)$ .

O algoritmo da FFT baseia-se em sucessões com a dimensão de uma potência de 2. Uma vez que só ocasionalmente as sucessões têm tal dimensão, acrescentam-se zeros até obter a potência de 2 mais próxima da dimensão original. Para uma dada frequência tal aumento não irá afectar os valores das transformadas de Fourier. Contudo passam-se a calcular transformadas para frequências  $f=j/m$  com  $m > n$ , e de acordo com Wei (1990) alguns autores sugerem que eventuais perturbações sejam atenuadas, por aplicação de janelas à sucessão, antes de ser aumentada com zeros.

Para a determinação das estimativas espectrais, seja a sucessão  $X_t$ ,  $t = 0, \dots, n - 1$  estacionária até à 2ª ordem, assumindo-se sem perda de generalidade, que  $E[X_t] = 0$ . Considerando existente o espectro  $h(f)$  para  $|f| < 1/2$ , divide-se a sucessão em blocos, eventualmente sobrepostos, de comprimento  $l$ , com desfasamento de  $d$  unidades. Sejam,

$$X_t^1 = X_t \quad t = 0, \dots, l-1,$$

$$X_t^2 = X_{t+d} \quad t = 0, \dots, l-1,$$

$$X_t^K = X_{t+(K-1)d} \quad t = 0, \dots, l-1.$$

Supõem-se existentes  $K$  blocos,  $X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^K$  que cobrem a sucessão original, ou seja,  $(K-1)d + l = n$ .

Para cada bloco, este método de estimação propõe o cálculo do periodograma modificado, isto é, seleccionando uma janela  $\lambda_t, t = 0, \dots, l-1$ , constitui-se a sucessão  $X_1^1 \lambda_t, \dots, X_1^K \lambda_t$  e determinam-se as transformadas de Fourier finitas,  $F_1(f), \dots, F_K(f)$  com

$$F_k(f) = \frac{1}{l} \sum_{t=0}^{l-1} X_1^k \lambda_t e^{-2\pi i f t} \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Os  $K$  periodogramas modificados são dados por

$$I_k(f) = \frac{l}{S} |F_k(f)|^2$$

onde as frequências são  $f = j/l, j = 0, \dots, l/2$  e  $S = \frac{1}{l} \sum_{t=0}^{l-1} \lambda_t^2$ .

A estimativa espectral é obtida como média destes periodogramas, isto é,

$$\hat{h}(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_k(f)$$

Este estimador, segundo Welch (1967), no caso de blocos não sobrepostos, i.e.  $d = l$ , é centrado e consistente, ou seja,

$$E[\hat{h}(f)] = h(f)$$

e, quando  $n$  for suficientemente grande,

$$\text{var}[\hat{h}(f)] = \frac{h^2(f)}{K} = \frac{h^2(f) l}{n} \rightarrow 0.$$

Além disso segue uma *distribuição* aproximada de um *qui-quadrado* com  $2K$  graus de liberdade.

#### 4.4 Análise espectral das sucessões simuladas

Para aplicação da metodologia apresentada, surge o problema da escolha do número de blocos a considerar nas sucessões. Constatou-se na bibliografia consultada que não é feita qualquer sugestão relativamente a este problema. Sabendo que as autocorrelações para uma sucessão de  $n$  valores são apenas determinadas para "lags" até  $n / 4$ , decidiu-se considerar blocos de dimensão  $l = n / 4$ . Ou seja, para as sucessões simuladas de 280 pontos tomaram-se blocos de 70 valores, não sobrepostos.

Para cada uma destas sub-sucessões determinou-se o periodograma modificado com a aplicação dos diferentes tipos de janelas, apresentados no capítulo anterior e por fim, calculou-se a estimativa espectral por média dos periodogramas.

Após representar graficamente cada um dos espectros com e sem a utilização de janelas, optou-se pela apresentação conjunta dos espectros num único gráfico, para facilitar a comparação. Com o intuito de avaliar a utilidade do emprego das janelas está presente em cada gráfico, o espectro simples (sem utilização de janela) para efeitos de comparação. Como os processos subjacentes a cada uma das sucessões são conhecidos, os espectros teóricos respectivos estão também representados, permitindo uma avaliação das discrepâncias entre os espectros.

Convém notar que apesar da graficação ser feita no intervalo de frequências  $[0, 1/2]$ , a primeira estimativa não tem qualquer significado, sendo de facto a 1ª estimativa significativa a correspondente à frequência fundamental igual a 0.0078125.

Para complementar a análise visual dos resultados comparativos, foram determinados e são apresentados no anexo E, os erros cumulativos entre os espectros empíricos ( $h_N$ ) e os espectros teóricos ( $h_T$ ), partindo da seguinte expressão,

$$erro = \sum_f [h_N(f) - h_T(f)]^2$$

A programação desenvolvida para a determinação dos erros, apresentada no anexo B, permite também, para maior facilidade de análise dos efeitos produzidos pelas janelas, calcular estes erros em intervalos de frequência.

Em virtude da quantidade de gráficos produzida, optou-se pela apresentação de apenas alguns dos resultados espectrais para cada um dos processos em estudo, estando os restantes espectros compilados no Anexo D, no final deste trabalho.

Ao considerar o caso da sucessão simulada do processo  $AR(1), X_t = 0.3 X_{t-1} + \varepsilon_t$ , obtém-se o gráfico apresentado na fig.III-1. Nesta figura, tal como nas seguintes, o espectro empírico, sem utilização de janelas, é representado a tracejado.

O quadro junto (extracto da lista do anexo E) permite avaliar as variações dos erros no cálculo dos espectros com e sem a utilização das funções janela.

espectro	erros
sem janela	0.1805
janela de Welch	0.1405
janela de Gauss	0.1338
janela de Hamming	0.1298
janela de Hanning	0.1307
janela de Parzen	0.1405

QUADRO I

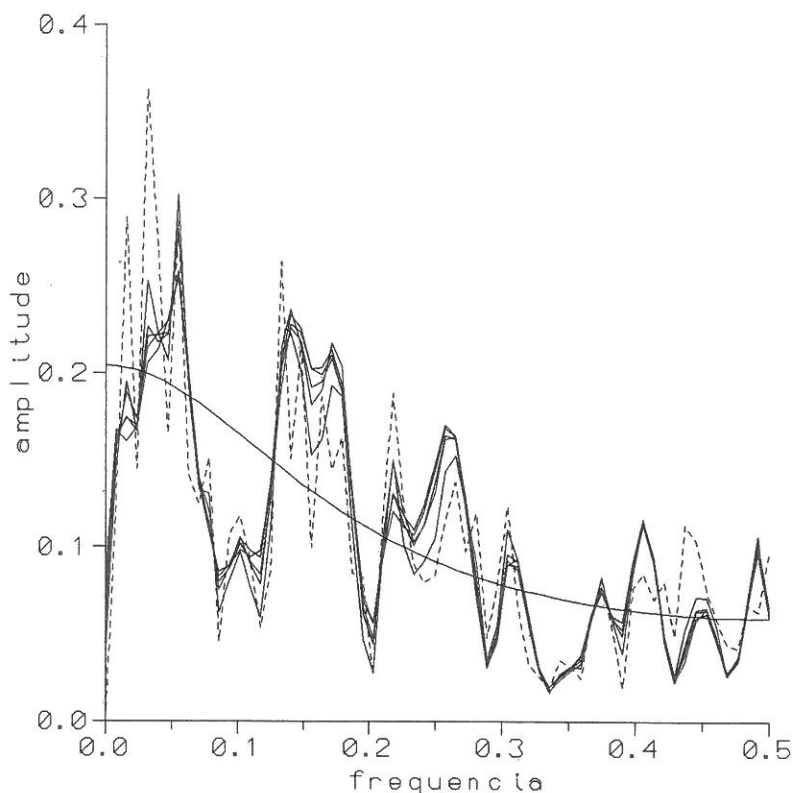


Fig. III-1. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = 0.3 X_{t-1} + \varepsilon_t$

A observação da fig.III-1 revela que: para este tipo de processos, em que o parâmetro é positivo, a maior contribuição para a variância da sucessão é dada pelas

componentes correspondentes às baixas frequências; a utilização de janelas permite estabilizar o espectro através do alisamento de um certo número de picos, eventualmente provocados pelo falseamento, como se verifica no caso do intervalo de frequências  $[0.1, 0.2[$ . Confirma-se esta análise visual, por determinação dos erros cumulativos para os diferentes intervalos de frequência, notando-se um incremento generalizado para as várias janelas, precisamente neste intervalo. A consulta do quadro I permite verificar que, a utilização de funções janela diminui o erro quadrático, como era de esperar, e com a aplicação da janela de Hamming origina-se o menor erro na comparação com o espectro teórico, enquanto que com a de Welch/Parzen se obtém o maior.

Analise-se o exemplo de uma sucessão simulada de um processo autoregressivo, mas de parâmetro negativo. Para a sucessão simulada do processo  $X_t = -0.7 X_{t-1} + \varepsilon_t$  tem-se a seguinte comparação:

espectro	erros
sem janela	2.4261
janela de Welch	2.0039
janela de Gauss	1.9696
janela de Hamming	1.9957
janela de Hanning	1.9568
janela de Parzen	1.9264

QUADRO II

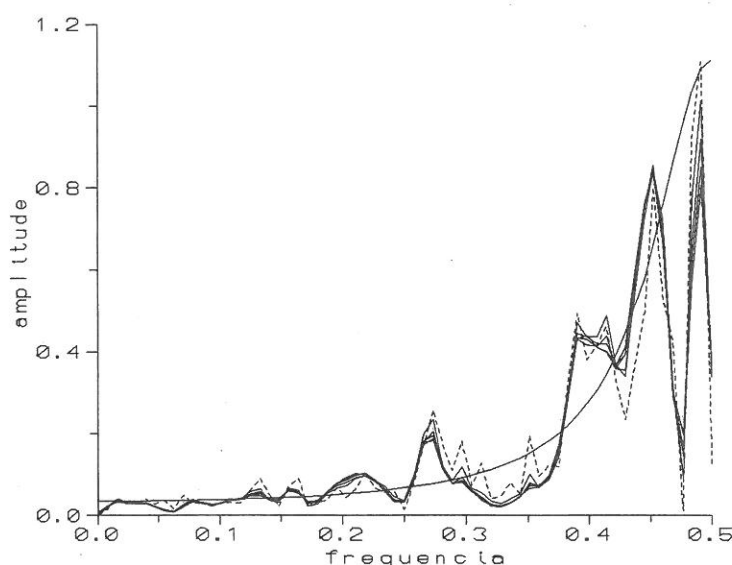


Fig. III-2. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = -0.7 X_{t-1} + \varepsilon_t$

Esta sucessão, contrariamente à anterior, tem maior contribuição para a variância dada pelas componentes correspondente às altas frequências. Verifica-se que a janela de Parzen produz o menor erro e o maior obtém-se com a de Welch. Feita a análise por intervalos de frequência, é no intervalo  $[0.3, 0.4[$  que se verifica um alisamento nítido provocado pela utilização das janelas, havendo um aumento do erro nesse intervalo. Em termos globais é no intervalo  $[0.4, 0.5]$  que o erro tem um incremento significativo devido às variações de espectro para as frequências 0.45, 0.48 e 0.49.

Para o processo médias móveis, a sucessão simulada de  $X_t = \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1}$  permite verificar que as janelas coseno, potência de Parzen e exponencial produzem sensivelmente o mesmo efeito, não se notando grandes variações nos espectros. É no intervalo  $[0.3, 0.4[$  que se verifica um maior erro, notando-se uma

espectro	erros
sem janela	0.2803
janela de Welch	0.2586
janela de Gauss	0.2581
janela de Hamming	0.2599
janela de Hanning	0.2550
janela de Parzen	0.2598

QUADRO III

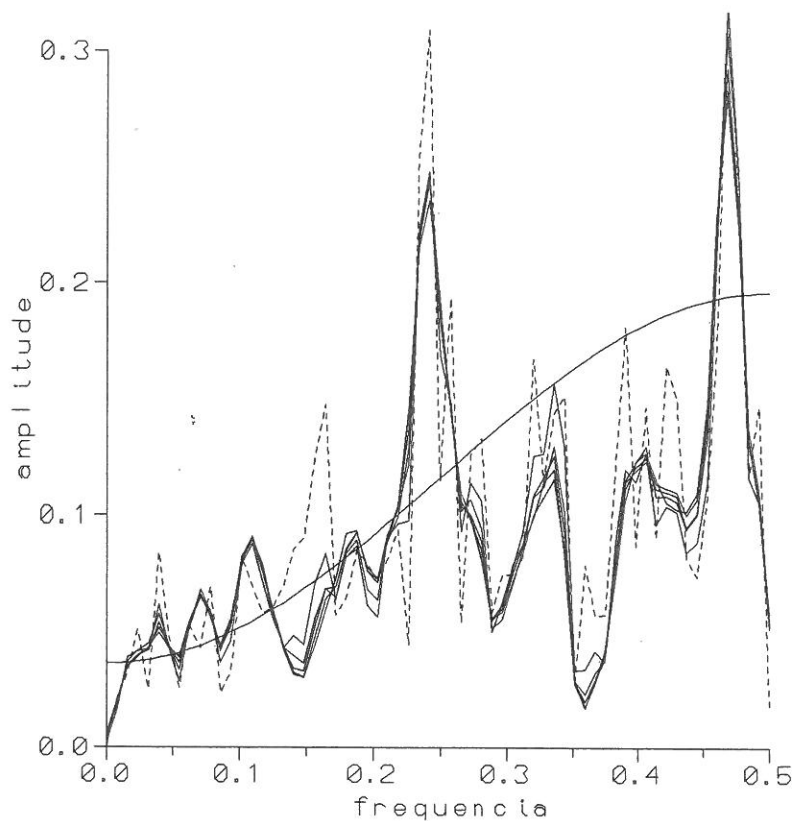


Fig. III-3. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1}$

subestimação do espectro em relação aos valores teóricos. A aplicação da janela de Welch, neste intervalo, origina melhores estimativas espectrais, no sentido de produzir em que produz um erro inferior, sendo no intervalo  $[0.4, 0.5]$  que conduz ao maior erro. Em termos globais, o erro é sensivelmente igual para todas as janelas, como se constata pela análise do quadro III. Nota-se, como era previsível, no entanto, um maior distanciamento em relação ao espectro teórico quando não se aplica qualquer janela.

Para a sucessão simulada do processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.6 \varepsilon_{t-1}$ , pela análise do quadro IV verifica-se que a aplicação de janelas diminui o erro em relação aos valores teóricos do espectro, mais acentuadamente nas janelas de GA, HN, HM e PA respectivamente. A análise da fig.III-4, por intervalos de frequência, permite identificar uma maior concentração de energia no intervalo  $[0, 0.1[$  confirmada pelo cálculo do erro nesse intervalo,

espectro	erros
sem janela	0.4852
janela de Welch	0.4541
janela de Gauss	0.3722
janela de Hamming	0.3793
janela de Hanning	0.3778
janela de Parzen	0.3925

QUADRO IV

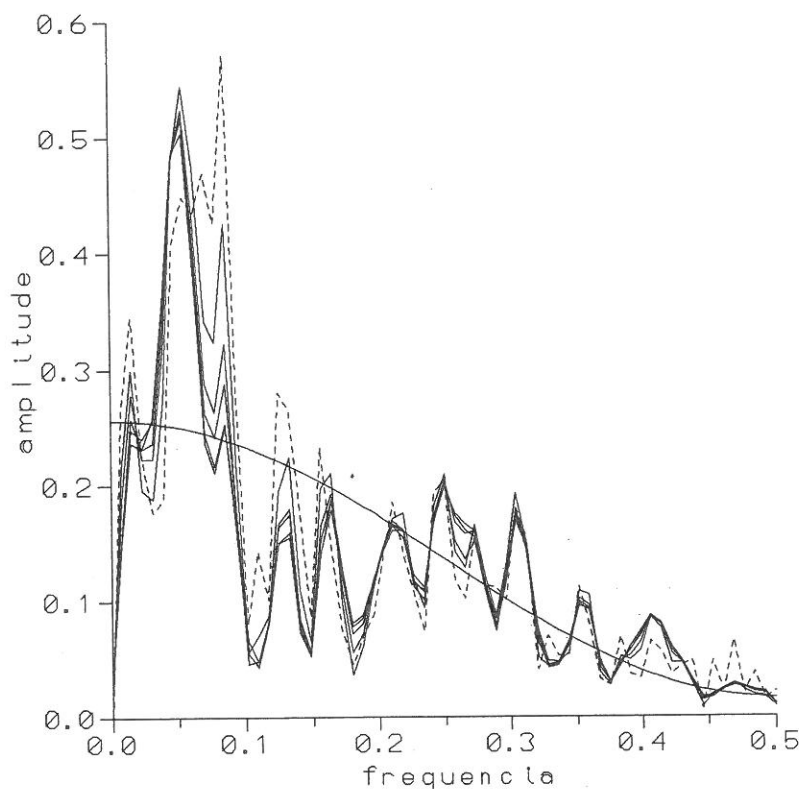


Fig. III-4. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.6 \varepsilon_{t-1}$

que é o de maior valor comparado com os dos outros intervalos. Ainda no domínio das baixas frequências, verifica-se a atenuação de alguns picos de energia que aparecem no espectro sem aplicação de janelas.

Considerem-se agora os processos de 2ª ordem.

Seja a sucessão simulada do processo autoregressivo  $X_t = 0.3 X_{t-1} - 0.3 X_{t-2} + \varepsilon_t$

Neste caso, é a janela de Gauss que origina melhores estimativas espectrais, visto o erro global em relação aos valores teóricos (quadro V), ser o inferior para GA. Verifica-se que o resultado espectral obtido da aplicação da janela de Welch se afasta ainda mais do teórico, do que sem a utilização de qualquer tipo de janela.

espectro	erros
sem janela	0.3464
janela de Welch	0.3584
janela de Gauss	0.2732
janela de Hamming	0.2980
janela de Hanning	0.2916
janela de Parzen	0.2793

QUADRO V

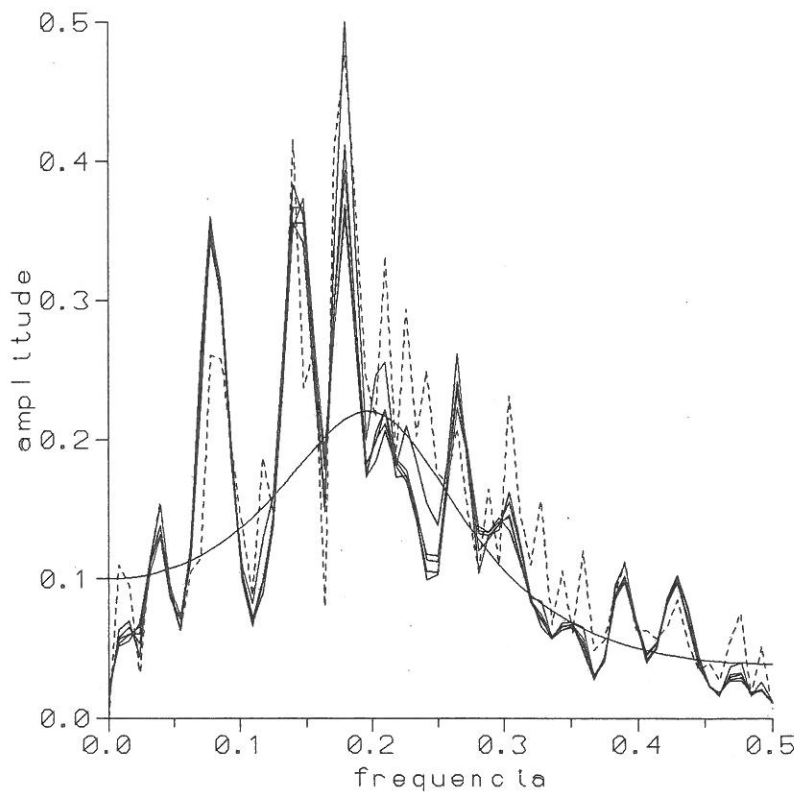


Fig. III-5. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = 0.3 X_{t-1} - 0.3 X_{t-2} + \varepsilon_t$

Verifica-se ainda que, para valores de frequência superiores a 0.2, os espectros com a aplicação de janelas se aproximam dos resultados teóricos produzindo assim erros bastante pequenos.

Para a sucessão simulada do processo  $X_t = -0.5 X_{t-1} - 0.2 X_{t-2} + \varepsilon_t$ , a figura III-6 permite verificar que as diferentes janelas, quando aplicadas à sucessão, produzem efeitos muito semelhantes, provocando um alisamento generalizado do espectro. Confirma-se, através da análise do quadro VI, que ao comparar estes valores espectrais com os teóricos, os erros são praticamente idênticos.

espectro	erros
sem janela	0.3206
janela de Welch	0.3028
janela de Gauss	0.3076
janela de Hamming	0.3064
janela de Hanning	0.3090
janela de Parzen	0.3017

QUADRO VI

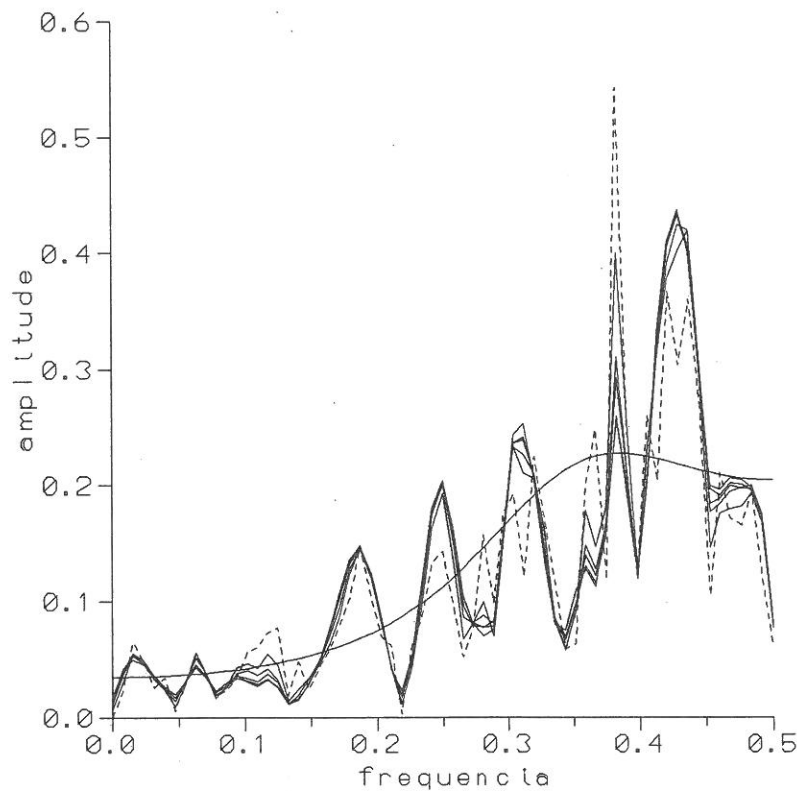


Fig. III-6. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = -0.5 X_{t-1} - 0.2 X_{t-2} + \varepsilon_t$

O que é interessante neste exemplo, é a eliminação nítida dos picos que surgem no espectro empírico sem a utilização de janelas. Veja-se um caso no intervalo  $[0.3, 0.35]$  e depois, dois casos no intervalo  $[0.4, 0.5]$ , o que leva a suspeitar que se tratariam de picos espúreos, provenientes de frequências mais elevadas e que na realidade seriam não existentes.

Considerando os processos médias móveis de 2ª ordem, seja a sucessão simulada do processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.5 \varepsilon_{t-1} - 0.3 \varepsilon_{t-2}$ .

Verifica-se (quadro VII) que a não utilização de janelas conduz a um erro inferior. De um modo global, a grande contribuição para estes valores é dada pelas componentes no intervalo  $[0, 0.1]$ , nomeadamente às frequências 0.016 e 0.047 a que correspondem os picos de energia, sobre-estimados em relação ao teórico.

espectro	erros
sem janela	0.4059
janela de Welch	0.4488
janela de Gauss	0.4318
janela de Hamming	0.4368
janela de Hanning	0.4322
janela de Parzen	0.4375

QUADRO VII

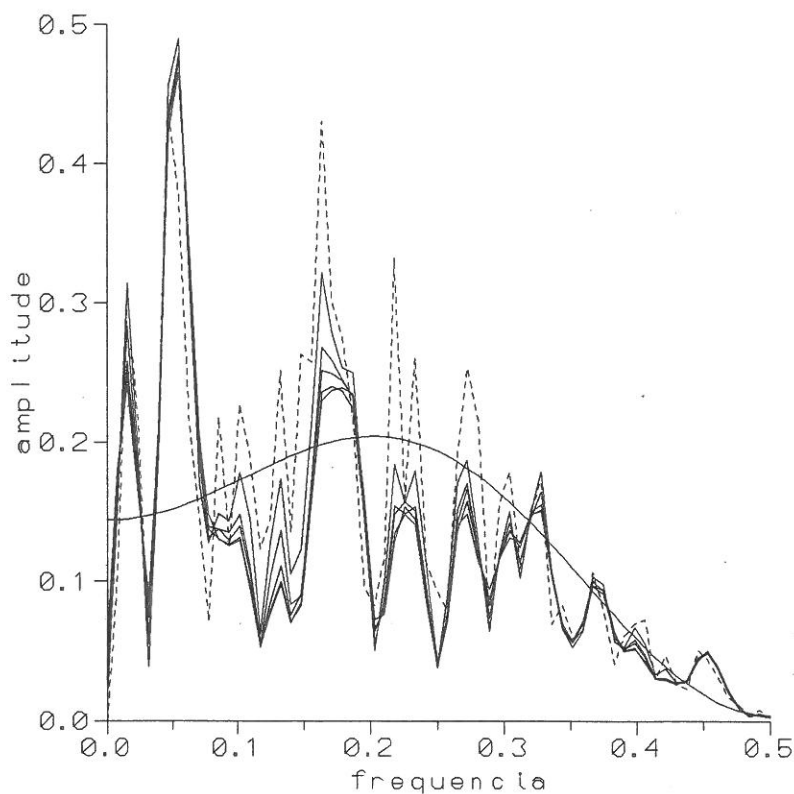


Fig. III-7. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.5 \varepsilon_{t-1} - 0.3 \varepsilon_{t-2}$

Globalmente é a janela de Gauss que conduz a melhores resultados, mas em termos de intervalos de frequência, em  $[0.1, 0.3[$  a figura III-7 mostra que a aplicação das janelas conduziu a uma aproximação dos espectros em relação ao teórico, verificando-se por cálculo de erros nesses domínios que a janela de Welch foi a que produziu melhores estimativas espectrais confirmadas pelo valor inferior do erro em comparação com os das outras janelas.

Seja a sucessão simulada do processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.3 \varepsilon_{t-1} + 0.4 \varepsilon_{t-2}$

Neste exemplo, ainda mais acentuadamente que no anterior, a utilização de janelas vem piorar o resultado das estimativas espectrais. Veja-se (fig.III-8) a diferença entre os espectros a tracejado e a cheio, confirmado pelos valores do erro produzido sem e com a aplicação de janelas (quadro VIII).

espectro	erros
sem janela	0.3302
janela de Welch	0.5272
janela de Gauss	0.9349
janela de Hamming	0.7820
janela de Hanning	0.8518
janela de Parzen	0.8672

QUADRO VIII

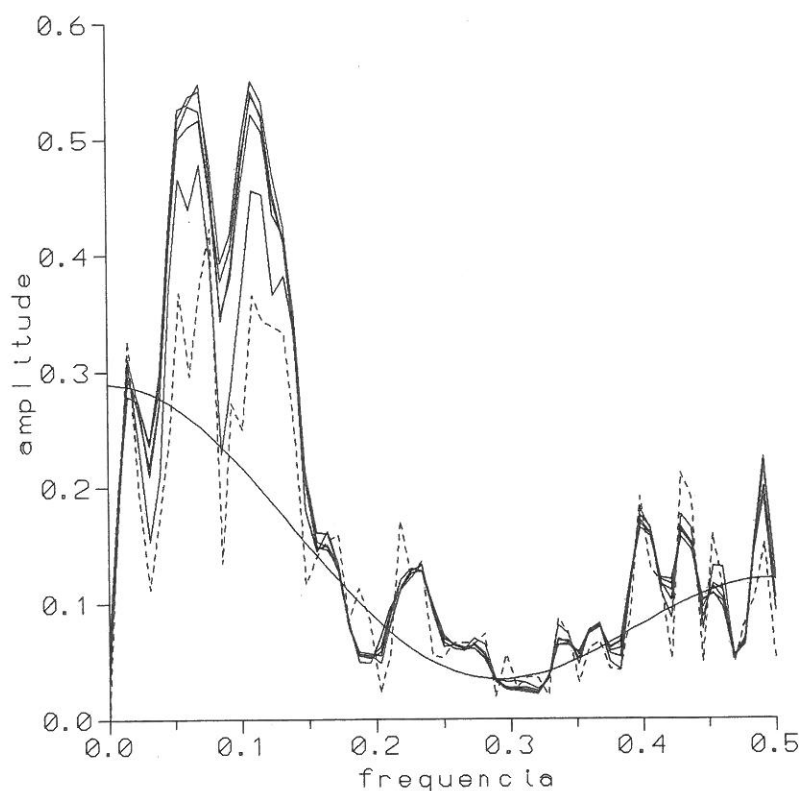


Fig. III-8. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.3 \varepsilon_{t-1} + 0.4 \varepsilon_{t-2}$

Há nas baixas frequências uma sobre-estimação dos valores espectrais, tendo-se no entanto para frequências superiores a 0.2, a janela de Hanning como originadora de um menor erro, apesar de na totalidade do domínio ser a janela de Welch que produz um erro inferior.

Para os processos mistos, analisam-se exemplos de sucessões simuladas de processos ARMA(1,1), ARMA(1,2) e por fim de ARMA(2,1).

No caso da sucessão simulada do processo  $X_t = -0.3 X_{t-1} + \epsilon_t - 0.7 \epsilon_{t-1}$  tanto globalmente, como em termos de intervalos de frequência, é a janela de Gauss que origina melhores resultados. Analisando a fig.III-9 verifica-se, como era de esperar, que as janelas provocaram o alisamento do espectro empírico, eliminando os picos.

espectro	erros
sem janela	2.1457
janela de Welch	2.0582
janela de Gauss	1.6301
janela de Hamming	1.7256
janela de Hanning	1.6599
janela de Parzen	1.7831

QUADRO IX

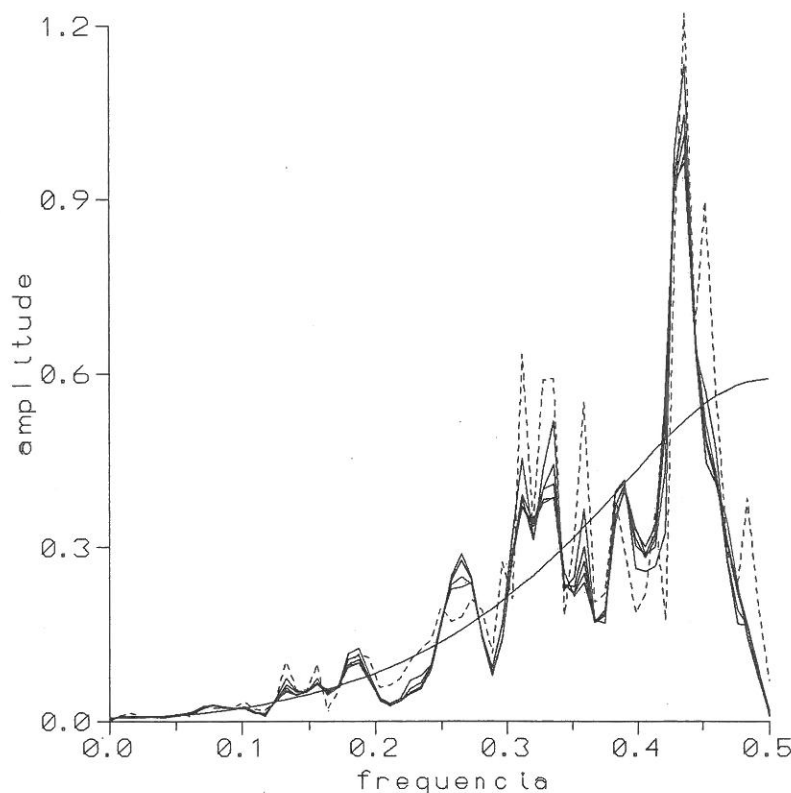


Fig. III-9. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = -0.3 X_{t-1} + \epsilon_t - 0.7 \epsilon_{t-1}$

No exemplo da sucessão simulada do processo  $X_t = -0.5 X_{t-1} + \varepsilon_t + 0.7 \varepsilon_{t-1}$  a análise da fig.III-10 mostra que as janelas produzem uma sobrestimação dos resultados espectrais até à frequência 0.1, havendo uma melhoria nos resultados obtidos nas restantes frequências. Esta análise visual é confirmada pela determinação dos erros em intervalos, resultando erros com ordens de grandeza superiores no intervalo  $[0, 0.1[$ .

espectro	erros
sem janela	0.1870
janela de Welch	0.1604
janela de Gauss	0.1938
janela de Hamming	0.1861
janela de Hanning	0.1932
janela de Parzen	0.1774

QUADRO X

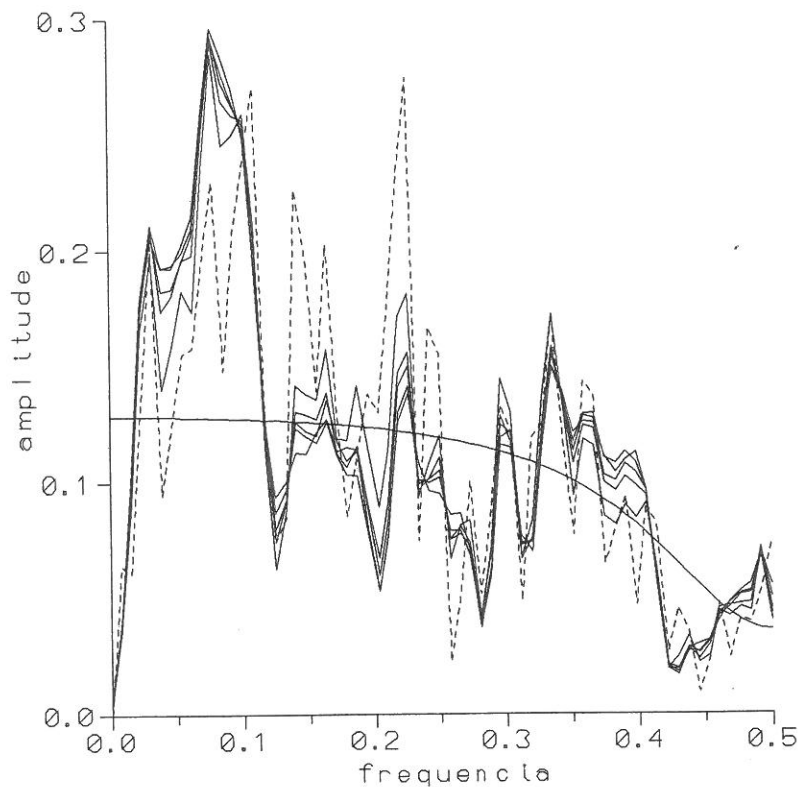


Fig. III-10. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = -0.5 X_{t-1} + \varepsilon_t + 0.7 \varepsilon_{t-1}$

Em termos globais e com confirmação dada pela consulta do quadro X, verifica-se ser a janela de Welch que origina um melhor ajustamento ao espectro teórico.

No caso dos modelos ARMA(1,2), para a sucessão simulada do processo

$$X_t = 0.6 X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.2 \varepsilon_{t-1} + 0.5 \varepsilon_{t-2}$$

a sobrestimação dos valores espectrais no intervalo  $[0, 0.1[$  ainda é mais notável que no caso anterior. Existe uma grande diferença entre os valores teóricos e empíricos neste intervalo. A análise dos erros em termos de intervalos de frequência vem confirmar esta observação, verificando-se que, sendo

espectro	erros
sem janela	4.2869
janela de Welch	5.0556
janela de Gauss	3.3507
janela de Hamming	3.8706
janela de Hanning	3.7206
janela de Parzen	3.7281

QUADRO XI

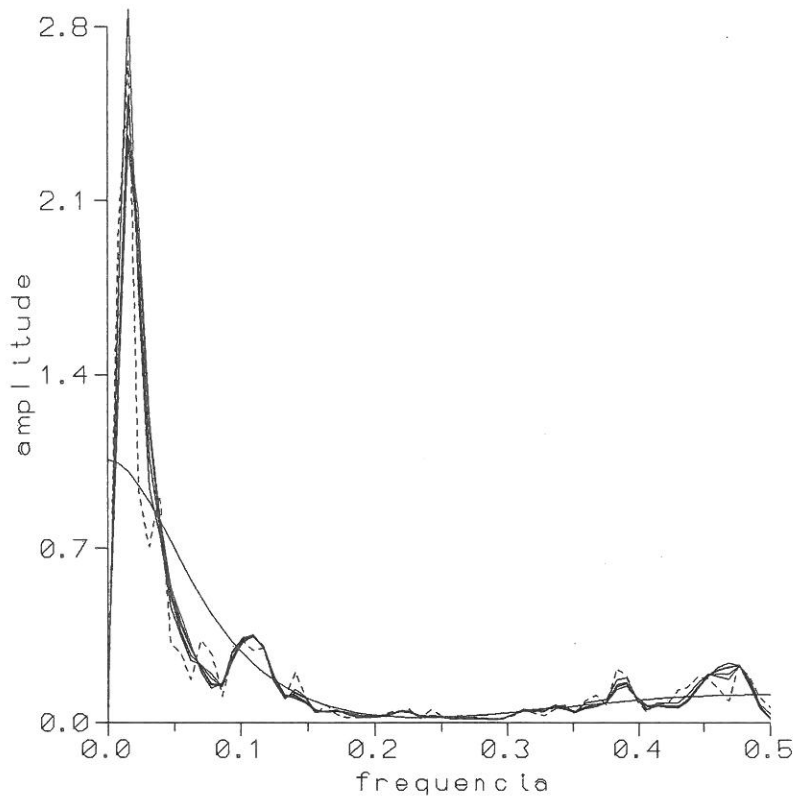


Fig. III-11. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = 0.6 X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.2 \varepsilon_{t-1} + 0.5 \varepsilon_{t-2}$

cumulativos os erros apresentados no quadro XI, só aproximadamente 0.1 corresponde ao domínio  $[0.1, 0.5]$  existindo uma concentração do valor total até à frequência 0.1.

Globalmente é a janela de Gauss que produz o menor erro em relação ao espectro teórico, conforme se pode confirmar no quadro junto.

No caso da sucessão simulada do processo  $X_t = -0.6 X_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5 \varepsilon_{t-1} + 0.3 \varepsilon_{t-2}$  constata-se ser a janela de Parzen a que conduz a um menor erro, embora todas proporcionem um alisamento do espectro empírico bem demarcado até à frequência 0.4. Verificando-se, através da fig.III-12 um incremento dos valores espectrais no intervalo de frequências [0.4, 0.5] é natural que lhe corresponda um aumento do erro nesse domínio. O que, de facto se constata com a análise dos erros por intervalos de frequência.

espectro	erros
sem janela	0.4134
janela de Welch	0.3460
janela de Gauss	0.3359
janela de Hamming	0.3414
janela de Hanning	0.3350
janela de Parzen	0.3299

QUADRO XII

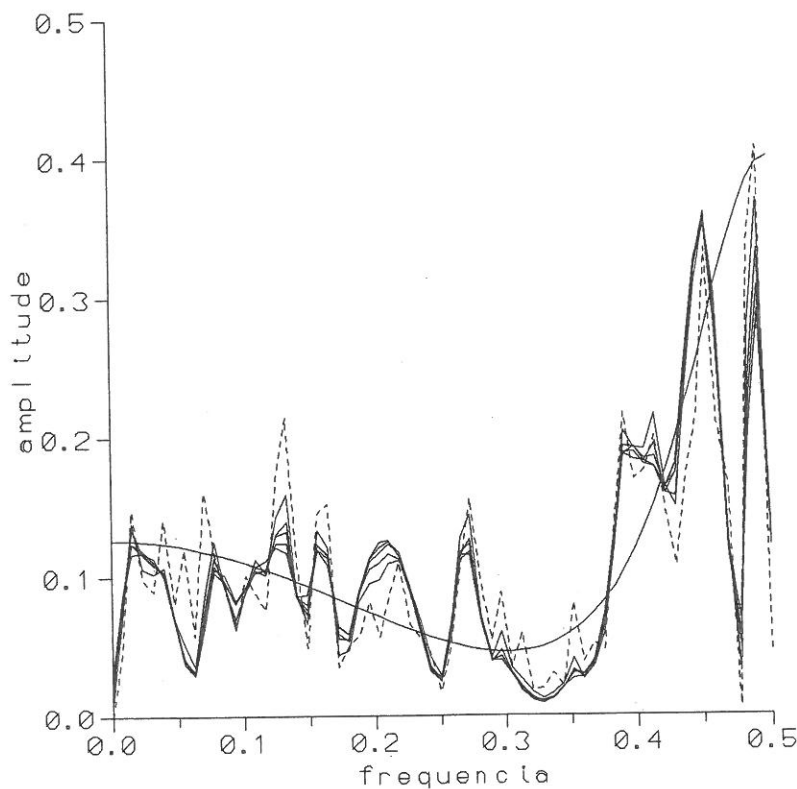


Fig. III-12. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = -0.6 X_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5 \varepsilon_{t-1} + 0.3 \varepsilon_{t-2}$

A sucessão simulada do processo  $X_t = 0.2 X_{t-1} - 0.4 X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5 \varepsilon_{t-1}$ , que já tinha sido analisada no cap.I, tem um comportamento espectral que apresenta um menor erro, quando não se aplica qualquer um destes tipos de janelas. Elas provocam um distanciamento em relação ao espectro teórico, nomeadamente no domínio de frequências  $[0.15, 0.25]$ , que origina um aumento dos erros nesse intervalo e por arrastamento, um incremento no total.

espectro	erros
sem janela	0.4123
janela de Welch	0.7164
janela de Gauss	0.9166
janela de Hamming	0.8599
janela de Hanning	0.9041
janela de Parzen	0.8756

QUADRO XIII

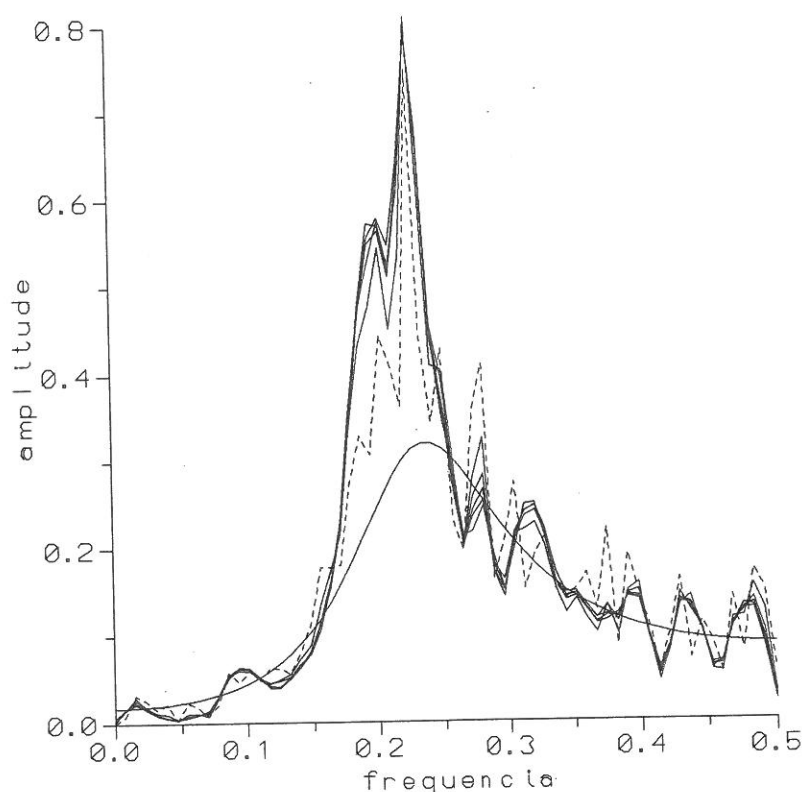


Fig. III-13. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = 0.2 X_{t-1} - 0.4 X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5 \varepsilon_{t-1}$

No restante domínio de frequências  $[0.25, 0.5]$  é nítido o alisamento do espectro efectuado pelas janelas, sendo a janela de Gauss a que conduz à melhor aproximação do espectro teórico, nesse intervalo, contrariamente ao que sucede para o domínio total.

A sucessão simulada do processo  $X_t = 0.6 X_{t-1} - 0.3 X_{t-2} + \varepsilon_t + 0.5 \varepsilon_{t-1}$  será a última a analisar. Contrariamente ao caso anterior, a utilização de janelas melhora em termos globais a aproximação ao espectro teórico, sendo a janela de Gauss a que produz um erro menor. Em termos de intervalos de frequência, só interessa analisar no intervalo  $[0, 0.3[$ , visto que no outro domínio as variações são praticamente nulas, chegando o erro a atingir valores nulos.

espectro	erros
sem janela	2.1799
janela de Welch	1.1112
janela de Gauss	.9702
janela de Hamming	.9991
janela de Hanning	1.0055
janela de Parzen	.9747

QUADRO XIV

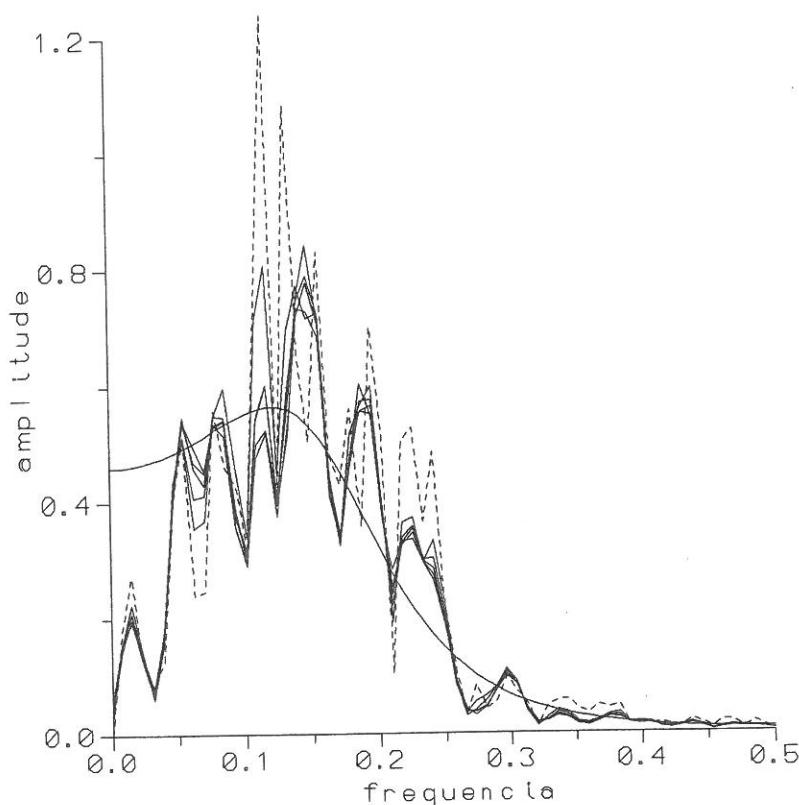


Fig. III-14. Espectros teórico e empíricos da sucessão simulada do processo  $X_t = 0.6 X_{t-1} - 0.3 X_{t-2} + \varepsilon_t + 0.5 \varepsilon_{t-1}$

Se bem que até à frequência 0.3 seja a janela de Gauss que conduz a "melhor" resultado, em  $[0, 0.1]$  a janela de Hanning origina um menor afastamento do espectro teórico.

#### 4.5 Comparação dos resultados espectrais

A aplicação das janelas às sucessões simuladas dos processos ARMA e a observação dos resultados, após o cálculo das estimativas espectrais, revela que não há situações ideais nem uma janela que conduza a melhores resultados em todas as situações, pelo contrário, existem casos em que a não aplicação de janela "é preferível" à sua utilização.

Ao pretender comparar o efeito do uso de janelas usou-se a observação visual da representação gráfica obtida e a determinação do erro cumulativo entre os espectros empíricos e teórico como única forma de comparação. Isto pareceu insuficiente e procedeu-se a uma normalização pela variância da soma dos valores absolutos das diferenças entre os espectros de cada processo. Sendo agora o erro calculado de uma outra forma foi possível verificar as observações já obtidas.

Sendo vários, e de vários níveis, os possíveis comentários aos resultados obtidos pelos métodos de comparação optou-se por apresentar as observações resultantes em relação a cada processo e às consequências da aplicação das janelas às sucessões simuladas.

##### Processos AR(1)

janela de Welch

conduz tantas vezes a bons como a maus resultados, não parecendo existir qualquer padrão de comportamento relacionado quer com o valor absoluto quer com o valor relativo dos parâmetros..

janela de Gauss

nunca conduz a bons resultados, sendo os piores casos quando o parâmetro é positivo e elevado, ou quando é negativo e de baixo valor.

janela de Hamming

aparece uma única vez associada ao menor parâmetro positivo conduzindo ao menor erro quadrático.No caso do erro normalizado pela variância e para o parâmetro negativo de maior valor absoluto produz o pior resultado.

janela de Hanning

considerando o cálculo do erro quadrático aparece algumas vezes associada ao menor valor do erro. Mas para o erro normalizado pela variância das respectivas sucessões em 5 dos 10 casos analisados conduz aos melhores resultados.

janela de Parzen

aparece uma única vez conduzindo ao menor erro para o caso do parâmetro negativo de maior valor.

Em 6 dos casos estudados o efeito das janelas é relevante em termos da aproximação aos respectivos espectros teóricos.

#### Processos MA(1)

janela de Welch

conduz a bons resultados para os parâmetros 0.3, -0.3 e 0.7 e ao normalizar o erro pela variância também apresenta um valor aceitável para o parâmetro 0.4. Nos outros casos, produz os piores resultados.

janela de Gauss

apresenta maus resultados quando o parâmetro é de baixo valor (0.3) quer positivo quer negativo, e também quando o parâmetro é elevado e positivo (0.7). Apenas num caso se evidencia como a melhor janela (-0.6). Ao normalizar o erro pela variância também produz bons resultados para o parâmetro 0.6.

janela de Hamming

não é significativo o seu efeito para este tipo de processos, nunca aparecendo como a melhor opção, figura apenas uma vez como a pior, mas com um valor de erro que não se distancia do das outras janelas.

janela de Hanning

aparece como a que produz, de uma forma global, melhores resultados, quer para parâmetros positivos, quer negativos. Quando o erro é normalizado pela variância é reduzida a gama de processos em que conduz a bons resultados, para os parâmetros 0.5, -0.4, -0.5 e -0.7.

janela de Parzen

aparecendo como a que produz piores resultados para os processos de parâmetro negativo ( -0.4 e -0.7), desaparece o seu efeito em comparação com outras janelas, ao ser normalizado o erro pela variância das respectivas sucessões.

Na generalidade dos processos MA(1) analisados constata-se que a utilização de janelas vem melhorar ou, pelo menos manter, a aproximação aos espectros teóricos.

#### Processos AR(2)

janela de Welch

verifica-se existir um maior número de casos em que produz piores resultados, nomeadamente quando o parâmetro de 1ª ordem tem baixo valor absoluto.

janela de Gauss

conduz ao menor erro nos dois casos em que o parâmetro de 1ª ordem é 0.3, mas ao fazer a normalização pela variância das sucessões produz um resultado que já não é o melhor.

janela de Hamming

não produz resultados a salientar para todos os processos analisados, aparecendo uma única vez, quando se normaliza o erro pela variância, com valores idênticos à janela de Hanning, para o caso dos dois parâmetros serem negativos e iguais.

janela de Hanning

aparece associada a pequenos valores do erro em dois casos: num os dois parâmetros são positivos, noutro são negativos. Ao normalizar o erro pela variância produz bons resultados noutro modelo em que os parâmetros são positivos.

janela de Parzen

conduz aos melhores valores em três casos dos dez analisados. No entanto, quando se normaliza o erro pela variância obtêm-se outro caso em que esta janela produz o menor erro em termos absolutos.

De um modo idêntico ao que sucedeu para os processos autoregressivos de 1ª ordem, em 7 dos exemplos estudados é expressivo o efeito da aplicação das janelas no alisamento dos espectros empíricos.

#### Processos MA(2)

Janela de Welch	verifica-se ser a janela que melhor se adapta a este tipo de processos pois conduz na maioria dos parâmetros (6 casos) aos menores valores do erro, quer determinando o erro quadrático, quer normalizando pela variância das respectivas sucessões.
janela de Gauss	em dois casos em que os parâmetros têm sinais contrários, origina o menor erro, nas outras ocasiões conduz a valores medianos de erro ou à pior opção.
janela de Hamming	nunca aparece com valores destacados, quer de menor quer de maior erro, produzindo sempre resultados entre esses limites.
janela de Hanning	aparece como conducente ao menor valor do erro em 2 casos quando os parâmetros são positivos ou negativos. Em 4 outros casos revelou-se a pior opção e ao normalizar o erro pela variância, ainda se obteve outro mau resultado.
janela de Parzen	não se apresenta importante na globalidade dos processos analisados, figurando apenas uma vez ao normalizar o erro pela variância, como conduzindo ao menor afastamento em relação ao espectro teórico.

Pela listagem dos erros quadráticos verifica-se, contrariamente ao que sucedeu para os processos médias móveis de 1ª ordem, que em 60% dos casos o efeito da utilização de janelas "é prejudicial" na aproximação ao espectro teórico. No entanto, ao normalizar o erro pela variância das respectivas sucessões observou-se que apenas em 4 casos se mantém esta relação.

janela de Welch	Em dois casos que os parâmetros têm o mesmo sinal, produz o menor erro. Mas ao normalizar o erro pela variância origina bons resultados em mais dois casos. No entanto, aparece associada a um número superior de maus resultados, nomeadamente ao determinar o erro quadrático são 5 os exemplos em que esta janela conduz a um maior afastamento do espectro teórico.
janela de Gauss	conduz aos melhores resultados em três casos, se se considerar o erro quadrático. Ao normalizar o erro pela variância, esta janela é preferível em mais dois casos.
janela de Hamming	apresenta sempre um valor de erro mediano, aparecendo em dois casos como melhor opção, resultado esse que coincidente com o de outra janela.
janela de Hanning	para o caso em que os dois parâmetros são positivos e iguais apresenta-se como a melhor opção, mas noutro exemplo em que os parâmetros também são positivos já conduz ao maior erro. Há ainda outros dois casos em que esta janela produz o menor valor de erro, com os 2 parâmetros negativos ou apenas com o autoregressivo negativo. Quando o erro é normalizado pela variância apenas figura uma vez como a melhor opção.
janela de Parzen	aparecendo apenas uma vez como a melhor escolha e noutros casos como conducente ao pior resultado, quando o erro é normalizado apenas produz um resultado superior aos outros.

De 8 dos processos analisados verifica-se que a aplicação de janelas conduz a uma maior aproximação do espectro teórico.

## Processos ARMA(1,2)

janela de Welch	aparecendo em três casos associada ao menor valor do erro, na maioria conduz aos piores resultados. No entanto ao normalizar o erro pela variância das sucessões, conduz à melhor opção em 5 casos.
janela de Gauss	em 3 dos exemplos analisados foi a que melhor se aproximou dos resultados teóricos do espectro, quer determinando o erro quadrático quer normalizando o erro, mas em dois dos casos também conduziu ao maior erro.
janela de Hamming	neste tipo de processos observou-se como geradora de efeitos medianos não sendo relevante a sua actuação em termos de aproximação ao espectro teórico. No entanto, ao normalizar o erro em 2 casos aparece como pior opção.
janela de Hanning	aparece ligada ao menor valor do erro quadrático em 2 casos dos estudados, ao normalizar o erro pela variância das respectivas sucessões esta situação altera-se não sendo tão expressiva a sua actuação.
janela de Parzen	de um modo semelhante à anterior, conduz em 2 exemplos ao menor erro e noutro ao maior, mas com a normalização a situação modifica-se e é reduzido o seu efeito em termos globais.

Na maior parte dos processos analisados constata-se que o efeito produzido pela aplicação de janelas às sucessões é positivo, melhorando a aproximação aos espectros teóricos respectivos.

janela de Welch	conduz na maioria dos casos ao menor dos erros na comparação com o espectro teórico, no entanto em alguns exemplos produziu os piores resultados. Ao normalizar o erro pela variância das sucessões é acentuado o número de resultados positivos ao aplicar esta janela.
janela de Gauss	tanto se observa associada ao menor erro (2 casos) como ao maior(3), mantendo-se esta relação ao normalizar o erro pela variância.
janela de Hamming	produz efeitos médios, não figurando como a melhor ou pior opção em qualquer dos processos estudados.
janela de Hanning	conduz em 3 dos casos analisados ao maior erro quadrático, mas em 2 outros ao menor resultado. Ao normalizar o erro pela variância aparece noutra modelo como pior escolha.
janela de Parzen	tem um efeito mediano aparecendo uma única vez associada à melhor aproximação aos valores teóricos. No entanto depois de normalizado o erro, conduz à pior opção num dos casos analisados.

Para este género de processos constata-se que a utilização destas janelas nem sempre conduziu aos melhores resultados em termos da aproximação ao espectro teórico. Ao determinar os erros entre os espectros empíricos e os teóricos, sem o uso das janelas, em 5 dos exemplos, o resultado é inferior aos outros valores obtidos com a aplicação das mesmas.



A identificação do modelo que melhor se ajusta à sucessão, passa pelo conhecimento das funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP) estimadas e pela sua comparação com as dos modelos teóricos.

No gráfico da função de autocorrelação (fig.IV-2) a altura da barra representa o coeficiente de correlação estimado e as linhas a tracejado correspondem aos limites do teste de significância de Bartlett com 95% de confiança. Por observação da figura, verifica-se existir um decaimento para zero, sendo para  $k = 1$ , a correlação significativamente diferente de zero, enquanto que para  $k > 1$  os valores da função já se encontram dentro da banda de significância, sendo por isso estatisticamente nulos.

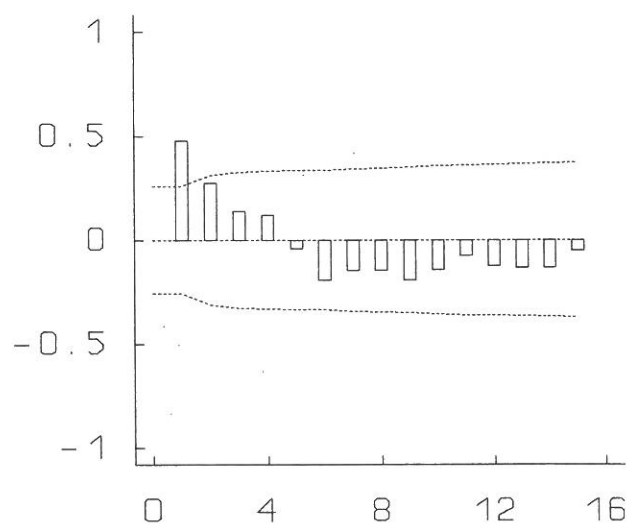


Fig. IV-2. Função de autocorrelação da sucessão dos dados de Ferrel

Quanto à função de autocorrelação parcial, na sua representação gráfica a altura da barra é proporcional ao valor do coeficiente, estando assinalados a tracejado os limites do teste de significância de Jenkins e Daniels a 95% de confiança. Verifica-se existir (fig.IV-3) um único valor estatisticamente não nulo para  $k = 1$ , sendo os outros valores estatisticamente não significativos, o que permite imediatamente identificar a ordem do processo.

De acordo com as características das FAC e FACP teóricas dos processos estacionários usuais, conhecidas da bibliografia, por exemplo de Pankratz (1983), a análise os gráficos anteriores conduzem à identificação do modelo AR(1), sendo

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_{t-1}$$

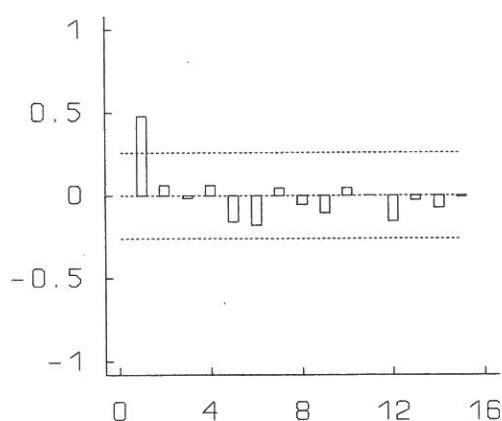


Fig. IV-3. Função de autocorrelação parcial da sucessão de dados da estação meteorológica de Ferrel

Posteriormente à identificação do modelo em que se intervém de uma forma activa, vem a fase da estimação dos parâmetros na qual a acção do analista é praticamente nula, pois todo o "software" dedicado ao estudo de sucessões cronológicas após a identificação do modelo faz a estimação, apresentando informação que permite testar do ajustamento do modelo à sucessão  $X_t$ .

=====  
 QUADRO I - ESTIMAÇÃO DO MODELO  
 =====

```

*****
          FACTOR      LAG      COEFICIENTE      T RÁCIO
*****
1 MÉDIA                .19645E+01      4.70
2 AUTOREGRESSIVO 1      1      .48609E+00      4.17
*****
  
```

O programa permite estimar simultaneamente a média do processo e o parâmetro. Verificando-se que a média estimada  $\hat{\mu} = 1.9645$  não é muito diferente da média aritmética da sucessão original  $\bar{x} = 2.0329$ .

A partir deste momento pode determinar-se o valor da constante estimada, fazendo  $\hat{c} = \hat{\mu} (1 - \hat{\phi}) = 1.0096$ .

Como se pode notar este modelo satisfaz a condição de estacionaridade, com efeito  $|\hat{\phi}| < 1$ . Relativamente à significância estatística dos parâmetros, testa-se da nulidade dos mesmos em função do rácio

$$t = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}(\hat{\alpha})};$$

sendo  $|t| \geq 1.96$  rejeita-se a hipótese de nulidade, ao nível aproximado de 5%, ou seja o parâmetro  $\alpha$  considera-se significativo. Neste caso, de acordo com os resultados do QUADRO I pode concluir-se que os parâmetros  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\mu}$  são significativos estatisticamente (diferentes de zero), ao nível de significância de 5%.

A matriz dos coeficientes de correlação entre os parâmetros, QUADRO II

=====

QUADRO II - MATRIZ DE CORRELAÇÃO

=====

	1	2
1	1.0000	
2	-.0375	1.0000

mostra que os parâmetros não estão significativamente correlacionados, o que evidencia uma estabilidade da estimação.

A avaliação da qualidade do ajustamento passa ainda pela análise dos resíduos  $\epsilon_t$ , cujos parâmetros mais significativos são fornecidos pelo "package":

MÉDIA DOS RESÍDUOS	: -.12752E-03
DESVIO-PADRÃO	: .16310E+01,

constatando-se que a média apresenta um valor bastante baixo.

A representação da FAC empírica dos resíduos (fig.IV-4) permite constatar a não correlação dos mesmos. Com efeito, nenhum dos valores da FAC excede os limites da banda de significância, podendo ser considerados estatisticamente nulos. A não correlação dos resíduos pode também confirmar-se através do teste de Ljung-Box, que se baseia no cálculo da estatística Q, em que  $n$  é o número de observações utilizadas:

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^K (n-k)^{-1} \rho_c^2(k).$$

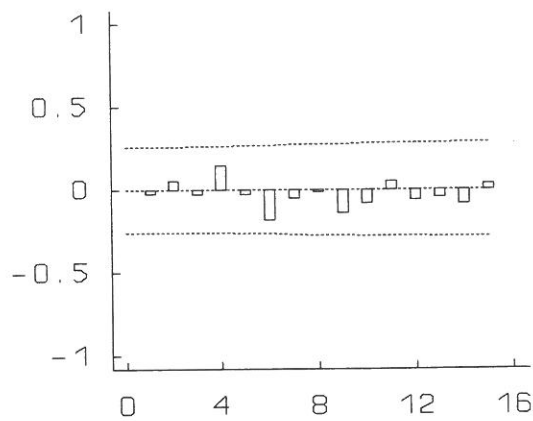


Fig. IV-4. Função autocorrelação dos resíduos

Este teste estabelece que, sob a hipótese da não correlação dos resíduos a estatística  $Q$  segue a distribuição de um qui-quadrado com  $(K - m)$  graus de liberdade em que  $m$  representa o número de parâmetros a estimar no modelo e  $K$  o número de autocorrelações. No presente caso tem-se,  $K = 15$ , donde como  $(Q = 6.95) < (\chi_{13}^2 = 22.4)$  aceita-se a hipótese das correlações serem nulas, ao nível de 5%.

Quanto à função autocorrelação parcial dos resíduos, verifica-se pela análise da fig.IV-5, que todos os valores se encontram entre os limites críticos definidos pelo teste de significância de Jenkins e Daniels ao nível de 5%. Pode-se assim concluir que os resíduos são um ruído branco.

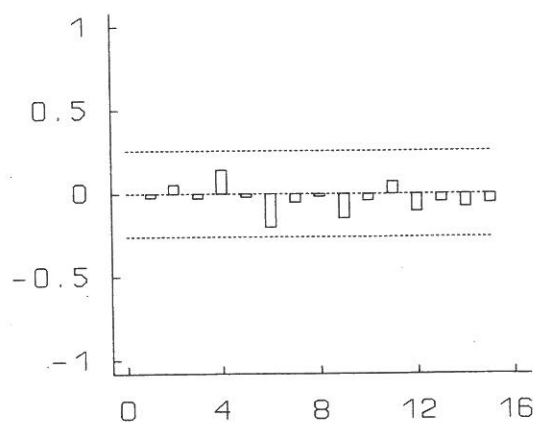


Fig. IV-5. Função autocorrelação parcial dos resíduos

A análise efectuada permite estabelecer o modelo

$$X_t = 1.0096 + 0.4861 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

com estatisticamente satisfatório para descrever a sucessão cronológica em estudo.

Para estudar o comportamento espectral desta sucessão foi aplicado o método de Welch, descrito no capítulo anterior, determinando-se a estimativa da densidade espectral como média dos periodogramas modificados.

Apresenta-se inicialmente o espectro simples (fig.IV-6), ou seja, sem aplicação de qualquer janela. Verifica-se que, o facto da dimensão da sucessão  $X_t$  ser relativamente pequena origina, também, um número bastante limitado de estimativas espectrais. O gráfico apresenta como primeira estimativa a correspondente à frequência fundamental.

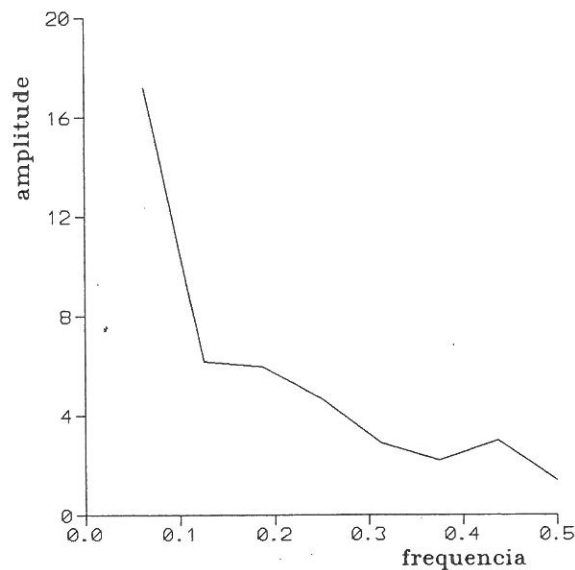


Fig. IV-6. Espectro da sucessão de dados da estação meteorológica

A comparação feita a partir da figura IV-7, do espectro empírico com o teórico correspondente ao modelo AR(1) ajustado à sucessão, permite concluir que há um

desfasamento nítido entre os seus valores, originando assim um erro quadrático muito elevado.

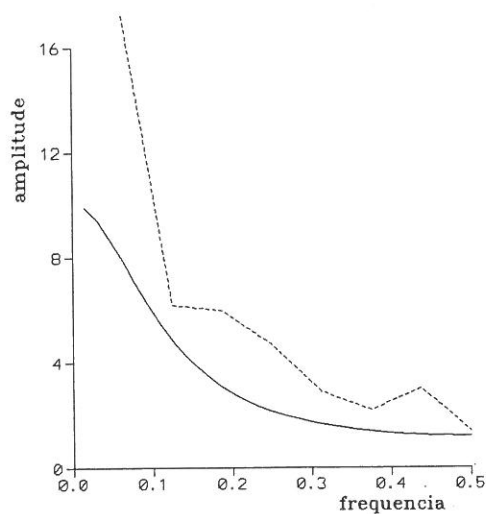


Fig. IV-7. Espectro teórico e empírico da sucessão de dados da estação meteorológica

Ao aplicar à sucessão original  $X_t$  as janelas apresentadas no capítulo 2, as estimativas espectrais resultantes das média dos periodogramas modificados não são muito diferentes do espectro simples como se pode ver no gráfico da figura IV-8.

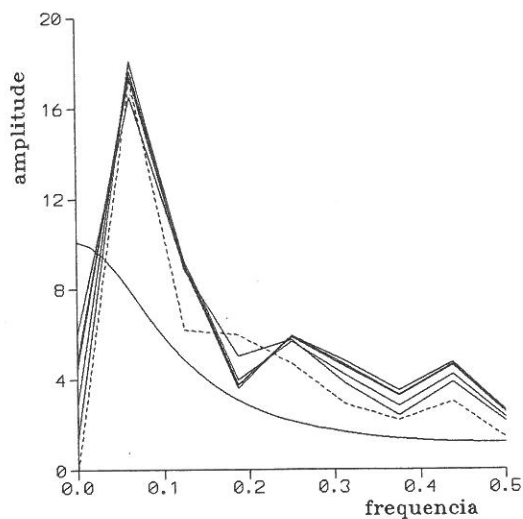


Fig. IV-8. Espectros teórico e empíricos da sucessão  $X_t$  usando diferentes janelas

Verifica-se que a determinação da aproximação ao espectro teórico origina um erro quadrático muito elevado quer com a utilização de janelas quer sem o seu uso (QUADRO III).

Por análise do QUADRO III constata-se que, a janela de Hanning conduz ao erro global inferior.

É interessante comparar este resultado com as conclusões resultantes da simulação de sucessões realizadas no capítulo anterior. Nessa altura tinha-se verificado que para o modelo AR(1) de parâmetro 0.5 (que é aproximadamente o modelo em estudo) a janela que melhores resultados produzia era precisamente a de Hanning.

Por outro lado, a janela que conduzia a piores resultados era a de Welch. Nesta aplicação real constata-se exactamente o mesmo, quer analisando o erro quadrático, quer normalizando o erro pela variância da sucessão em estudo como iremos ver adiante.

Se considerar o erro normalizado pela variância da sucessão, os valores apresentados são mais razoáveis e podem consultar-se no QUADRO IV. A análise deste quadro permite retirar conclusões análogas às do quadro anterior.

A janela de Hanning apresenta o mais pequeno valor de erro, mas em relação às outras janelas não se pode afirmar que as diferenças sejam grandes. Apesar de, na globalidade, as janelas provocarem uma aproximação ao espectro teórico, mais uma vez se conclui que não há uma escolha "óptima".

espectro	erro
sem janela	3077.501
janela de Welch	2381.666
janela de Gauss	1573.790
janela de Hamming	1693.800
janela de Hanning	1528.583
janela de Parzen	1763.607

QUADRO III

espectro	erro
sem janela	10.2841
janela de Welch	8.9653
janela de Gauss	8.2761
janela de Hamming	8.1727
janela de Hanning	7.8094
janela de Parzen	8.7361

QUADRO IV

## 6 Conclusões

Muitos autores afirmam que a qualidade dos estimadores espectrais depende mais do ponto de truncagem do que do tipo de janela escolhido.

Ao utilizar o método proposto por Welch não se pretendeu analisar esta questão mas sim, fixando o número de blocos no qual se divide cada sucessão, assegurar que este estudo se dedicava exclusivamente à comparação do efeito da aplicação de janelas e, portanto, só estava a tomar em consideração a sua forma.

Ao seleccionar os modelos de acordo com os quais foram simuladas as sucessões, optou-se por definir parâmetros de valor inferior a um permitindo assim uma homogeneidade entre os parâmetros utilizados, o que pareceu desejável.

A justificação para a utilização de sucessões com esta dimensão, deve-se à limitação existente no *software* comercial utilizado relativamente ao número de observações dos modelos simulados, no caso 300 valores.

O mais evidente aspecto a referir após realização das diversas operações que constituíram a parte operacional deste trabalho é que não existem conclusões a tirar quanto à existência da janela "ótima". Contudo, algumas observações merecem referência.

A análise comparativa entre os espectros teóricos e os empíricos para as diferentes janelas sugere as conclusões seguintes:

1. As janelas coseno escolhidas, Hanning e Hamming, embora muito semelhantes em forma e só diferindo nos pesos a aplicar, têm um comportamento distinto. O resultado da aplicação da janela de Hanning é sempre mais pronunciado do que a de Hamming, quer aquela produza o maior erro, quer produza o menor. Isto significa que a janela de Hamming produz erros mais medianos.
2. As janelas potência, Parzen e Welch, não tendo o mesmo tipo de relação que as anteriores, aparecem também associadas, mas nem sempre na mesma ordem em relação ao modelo teórico. A janela de Welch é mais preponderante como afectando a relação modelo empírico/modelo teórico surgindo em todos os casos como a que introduz maior ou menor erro.
3. A janela exponencial de Gauss tem um efeito marcante em todos os casos estando sempre presente, tal como a de Welch, quer com os melhores quer com os piores resultados.

4. A análise global da aplicação de janelas aos diferentes modelos, permite constatar da relação continuada existente entre a janela de Welch por um lado e as de Gauss e Hanning por outro. Verifica-se que "sempre" que a janela de Welch dá o maior afastamento em relação ao modelo teórico, é a janela de Gauss ou a de Hanning que provocam a maior aproximação, e vice-versa, o que sugere que o comportamento da janela potência é oposto ao comportamento das janelas de coseno e das janelas exponenciais.

É de notar que as conclusões retiradas para o caso da aplicação "real", a janela de Hanning é a que conduz a melhores resultados para o modelo ajustado à aplicação, vêm confirmar o que tinha sido constatado na simulação para o mesmo tipo de modelo.

Outro facto interessante, e cujo aparecimento não se previa, é o facto de em alguns casos os resultados obtidos com utilização de janelas serem piores. Na terminologia utilizada significa maior afastamento em relação ao modelo teórico, do que quando o cálculo espectral se faz sem utilizar qualquer das janelas. Uma causa possível poderá ser o dimensionamento das sucessões; se eventualmente fosse possível gerar sucessões com maior dimensão aumentar-se-ia a resolução espectral e conseqüentemente este efeito poderia diminuir, ou mesmo desaparecer.

Como se disse na introdução a descoberta da janela "óptima" não era o objectivo deste trabalho mas somente a comparação dos efeitos da utilização das mesmas. Os resultados obtidos estão dentro dos parâmetros que se buscavam mas mais do que respostas fizeram surgir perguntas, e o máximo que se oferece dizer é que quando Welch e Press sugerem que a utilização de janelas deveria ser uma escolha entre a janela de Welch e a de janela de Parzen não parecem ter razão, ou pelo menos a generalização de tal regra é questionável.

Não podemos esquecer que a problemática da análise espectral envolve a estimação de uma função completa e não de um só parâmetro, levando conseqüentemente a que existam diversos critérios que podem ser usados para avaliar a eficiência das várias estimativas espectrais. Usou-se um critério que produziu resultados que levantam a necessidade de maior investigação para alguns dos aspectos; ... qual a verdadeira influência da divisão em blocos? ... qual o melhor critério de comparação dos efeitos de janelas? ...

## 7 BIBLIOGRAFIA

- Almeida, S. . 1989. *Uma aplicação da técnica Box Jenkins*. (documento não publicado)
- Alves, M. . 1985. *Análise e Tratamento de Séries Oceanográficas*. (documento não publicado)
- Bâth, M. . 1974. *Spectral Analysis in Geophysics*. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company.
- Bendat, J. and Piersol, A. . 1986. *Random Data Analysis and Measurements Procedures* 2nd edition. Los Angeles: John Wiley & Sons.
- Bloomfield, P. . 1976. *Fourier Analysis of Time Series: An Introduction*. New York: John Wiley & Sons.
- Box, G. and Jenkins, G. . 1976. *Time Series Analysis Forecasting and Control* Revised edition. California: Holden-Day.
- Brockwell, P. and Davis, R. .1991. *Time Series: Theory and Methods* 2nd edition. New York: Springer-Verlag.
- Chatfield, C. . 1980. *The Analysis of Time Series: An Introduction* Second edition. London: Chapman and Hall.
- Dahlhaus, R. . 1984. On a Spectral Density Estimated Obtained by Averaging Periodograms. *J. Appl. Prob.* 22: 598-610.
- Diggle, P. and Fisher, N. . 1991. Nonparametric Comparison of Cumulative Periodograms. *Appl. Statistics* 40 N°3: 423-434.
- Gangopadhyay, A. Cornillon, P. and Jackson L. . 1989. Autoregressive Modeling for the Spectral Analysis of Oceanographic Data. *Journal of Geophysical Research* 94 n°C11: 16215-16226.
- Hamming Richard W. . 1977. *Digital Filters*. New Jersey: Prentice-Hall Inc .

- Hannan E., Rissanen J. . 1988. The Width of a Spectral Window. *Journal of Applied Probability* Vol 25A: 301-307.
- Jenkins G. & Watts D. . 1968. *Spectral Analysis and its applications*. San Francisco: Holden-Day.
- Lysne, D. and Tjøstheim D. . 1987. Loss of Spectral Peaks in Autoregressive Spectral Estimation. *Biometrika* 74, n°1: 200-206.
- Mosetti, F. . 1986. Filter devices for numerical series analysis: a review of the periodicities analysis. *Bollettino di Oceanologia Teorica et Applicata* Vol.IV, n°4: 227-285.
- Müller D. e Andrade I. . 1988. Comportamento dos critérios de avaliação de diagnóstico em sucessões cronológicas simuladas. *Cemapre* N° 71.
- Murteira B., Müller D. e Turkman F. .1993. *Análise de sucessões cronológicas*. Lisboa: McGraw-Hill Co.
- Orfanidis Sophocles . 1990. *Optimum Signal Processing an introduction*. Singapore: McGraw-Hill Co.
- Pankratz, A. . 1983. *Forecasting With Univariate Box-Jenkins Models - Concepts and cases*. New-York: John Wiley & Sons.
- Press W., Flannery B., Teukolsky S. and Vetterling W. . 1989. *Numerical Recipes The Art of Scientific Computing (FORTRAN vers.)*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Priestley M. . 1981. *Spectral Analysis and Time Series*. Vol.I. London: Academic Press Inc.
- Wei William . 1990. *Time Series Analysis univariate and multivariate methods*. California: Addison-Wesley.
- Welch P. . 1967. The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms. *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*. AU-15: 70-73. 9

8 ANEXOS

## ANEXO A

Cálculos das funções de transferência

Começa-se por relembrar algumas propriedades dos complexos, que serão utilizadas nos cálculos desenvolvidos adiante.

Seja  $z = a + ib$  um número complexo qualquer ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), o seu módulo determina-se da seguinte forma:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

donde

$$\begin{aligned} |z|^2 &= a^2 + b^2 \\ &= (a+ib)(a-ib) \\ &= z \cdot z^* \end{aligned}$$

em que  $z^*$  representa o complexo conjugado de  $z$ .

Na representação do complexo em forma trigonométrica e utilizando a relação de Euler,

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = |z| e^{i\theta}$$

o conjugado será

$$z^* = |z| e^{-i\theta}$$

Nos cálculos realizados para determinar as funções de transferência utilizam-se as seguintes expressões trigonométricas:

$$\cos \theta = \frac{e^{-i\theta} + e^{i\theta}}{2}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

A função de transferência considerada para o caso dos modelos de médias móveis, é  $\Gamma(\omega) = \Theta(e^{-i\omega})$ . Para determinar  $|\Theta(e^{-i\omega})|^2$ , de acordo com o estabelecido anteriormente será  $|\Theta(e^{-i\omega})|^2 = \Theta(e^{-i\omega}) \Theta(e^{i\omega})$ .

Aplicando ao modelo de ordem um, tem-se

$$\begin{aligned} \Theta(e^{-i\omega}) \Theta(e^{i\omega}) &= (1 - \theta_1 e^{-i\omega})(1 - \theta_1 e^{i\omega}) \\ &= 1 - \theta_1 (e^{-i\omega} + e^{i\omega}) + \theta_1^2 \\ &= 1 - 2\theta_1 \cos \omega + \theta_1^2. \end{aligned}$$

No caso do modelo de ordem dois obtém-se

$$\begin{aligned}
 \Theta(e^{-i\omega}) \Theta(e^{i\omega}) &= (1 - \theta_1 e^{-i\omega} - \theta_2 e^{-2i\omega})(1 - \theta_1 e^{i\omega} - \theta_2 e^{2i\omega}) \\
 &= 1 - \theta_1(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + \theta_1^2 - \theta_2(e^{2i\omega} + e^{-2i\omega}) + \theta_2^2 + \theta_1\theta_2(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) \\
 &= 1 - 2\theta_1(1 - \theta_2)\cos \omega + \theta_1^2 - 2\theta_2\cos 2\omega + \theta_2^2 \\
 &= 1 - 2\theta_1(1 - \theta_2)\cos \omega + \theta_1^2 - 4\theta_2\cos^2 \omega + 2\theta_2 + \theta_2^2 \\
 &= (1 + \theta_2)^2 - 2\theta_1(1 - \theta_2)\cos \omega + \theta_1^2 - 4\theta_2\cos^2 \omega .
 \end{aligned}$$

Para os modelos autoregressivos, de um modo semelhante, tem-se a função de transferência  $\Gamma(\omega) = \Phi(e^{-i\omega})$ , donde  $|\Phi(e^{-i\omega})|^2 = \Phi(e^{-i\omega})\Phi(e^{i\omega})$ .

Para o modelo de ordem um vem

$$\begin{aligned}
 \Phi(e^{-i\omega})\Phi(e^{i\omega}) &= (1 - \varphi_1 e^{-i\omega})(1 - \varphi_1 e^{i\omega}) \\
 &= 1 - 2\varphi_1 \cos \omega + \varphi_1^2 .
 \end{aligned}$$

No caso do modelo de ordem dois será

$$\begin{aligned}
 \Phi(e^{-i\omega})\Phi(e^{i\omega}) &= (1 - \varphi_1 e^{-i\omega} - \varphi_2 e^{-2i\omega})(1 - \varphi_1 e^{i\omega} - \varphi_2 e^{2i\omega}) \\
 &= 1 - 2\varphi_1(1 - \varphi_2)\cos \omega + \varphi_1^2 - 2\varphi_2\cos 2\omega + \varphi_2^2 \\
 &= (1 + \varphi_2)^2 - 2\varphi_1(1 - \varphi_2)\cos \omega + \varphi_1^2 - 4\varphi_2\cos^2 \omega .
 \end{aligned}$$

Para os modelos mistos, ARMA(p,q)

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

em que

$$\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p$$

e

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q .$$

A função transferência será  $\Gamma(\omega) = \frac{|\Theta(e^{-i\omega})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2}$ .

Assim, utilizando as determinações anteriores, para o modelo ARMA(1,1), ou seja, para  $p = q = 1$  tem-se

$$\frac{|\Theta(e^{-i\omega})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2} = \frac{\Theta(e^{-i\omega})\Theta(e^{i\omega})}{\Phi(e^{-i\omega})\Phi(e^{i\omega})} = \frac{(1 - \theta_1 e^{-i\omega})(1 - \theta_1 e^{i\omega})}{(1 - \varphi_1 e^{-i\omega})(1 - \varphi_1 e^{i\omega})}$$

$$\Gamma(\omega) = \frac{1 - 2\theta_1 \cos \omega + \theta_1^2}{1 - 2\varphi_1 \cos \omega + \varphi_1^2} ;$$

para os ARMA(1,2) vem

$$\frac{|\Theta(e^{-i\omega})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2} = \frac{(1 - \theta_1 e^{-i\omega} - \theta_2 e^{-2i\omega})(1 - \theta_1 e^{i\omega} - \theta_2 e^{2i\omega})}{(1 - \varphi_1 e^{-i\omega})(1 - \varphi_1 e^{i\omega})}$$

$$\Gamma(\omega) = \frac{(1 + \theta_2)^2 - 2\theta_1(1 - \theta_2)\cos \omega + \theta_1^2 - 4\theta_2 \cos^2 \omega}{1 - 2\varphi_1 \cos \omega + \varphi_1^2} ;$$

e finalmente, para os modelos ARMA(2,1) obtém-se

$$\frac{|\Theta(e^{-i\omega})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2} = \frac{(1 - \theta_1 e^{-i\omega})(1 - \theta_1 e^{i\omega})}{(1 - \varphi_1 e^{-i\omega} - \varphi_2 e^{-2i\omega})(1 - \varphi_1 e^{i\omega} - \varphi_2 e^{2i\omega})}$$

$$\Gamma(\omega) = \frac{1 - 2\theta_1 \cos \omega + \theta_1^2}{(1 + \varphi_2)^2 - 2\varphi_1(1 - \varphi_2)\cos \omega + \varphi_1^2 - 4\varphi_2 \cos^2 \omega} .$$

## **ANEXO B**

**Listagens dos programas utilizados**

```

ftn7x
$files 0, 3
*
  program erro          ! programa para determinacao do erro no
                        ! calculo de espectros, empiricos/teoricos,
                        ! partindo de uma lista de modelos ARMA
*
*  dados : espectro teorico ( espt )
*           espectro empirico (p)
*
*  resultados : o erro
*
  implicit none
  integer*2 i, j, k, cont
  real*4  freq(100), frinc
  real*8  erro, qdif
  real*8  espt(100), p(100)
  character*20 nome1, nome2, nome1, nomep
  logical fim
*
*
*
  fim = .false.
*
  write(1,*) 'Diga nome do ficheiro com lista de input'
  read(1,*) nome1
*
  open(10,file=nome1,status='old')
*
  write(1,*) ' diga o nome do ficheiro com os resultados'
  read(1,*) nome2
*
  open(20,file=nome2,status='new')
*
*
  cont = 1      ! contador dos espectros teoricos
*
  1  read(10,*) nome1      ! leitura nome ficheiro de esp. teoricos

```

```

*
    open(12,file=nomet,status='old')
*
    read(12,*)
*
        leitura de espectros teoricos
*
    j = 1
    do while (.not. fim)
        read(12,100,end=3) espt(j)
        j = j + 1
    enddo
*
3   cont = cont + 1
    close(12)
    write(20,*) nomet
*
    do 2 i = 1, 6
*
        frinc = 0.1                ! incremento na frequencia
        erro = 0.D0
        read(10,*) nomep          ! leitura nome do ficheiro
*
        abertura dos ficheiros de espectros empiricos
*
        open(13,file=nomep,status='old')
*
        write(1,*) nomep
        k = 1
*
            leitura dos espectros empiricos
        do while (.not. fim)
            read(13,200,end=4) freq(k), p(k)
            qdif = ( p(k) - espt(k) )** 2
*
            if (freq(k) .ge. frinc) then
                write(20,444) frinc, erro
                frinc = frinc + 0.1
            endif
*
            erro = erro + qdif                ! calculo do erro

```

```

        k = k + 1
    enddo
*
4    close(13)
*
        escrita no ficheiro OUTPUT
    write(20,300) nomep, erro
*
2    continue
*
        Ha 10 ficheiros de modelos diferentes
    if( cont .gt. 10 ) go to 5
    go to 1
*
5    close(10)
    close(20)
*
*    formatos
*
100  format(25x,f15.7)
200  format(f10.7,f15.7)
300  format(a20,' erro = ', f8.4)
444  format(1x,' ate a freq. ',f10.7,' o erro e ',f8.4)
*
    end

```

```

ftn7x
$files 0, 2
*
  program espteor      ! programa para calculo do espectro teorico
                      ! de modelos ARMA
*
*  dados :   a frequencia (fq)
*            o espectro empirico (p)
*            os parametros dos modelos ( a1,a2,b1,b2)
*            e a variancia da sucessao residual (varesid)
*
* resultados : o espectro teorico (esp)
*
  implicit none
  integer*2 i,n,tipo
  real*8 a1,a2,b1,b2, var, varesid
  real*8 pi, num, den, fq(300), p(300), esp(300)
  character*20 nome1,nome2
  logical fim
*
*
*
  fim = .false.
  varesid = 1.D-1
*
  pi = 4.D0 * DATAN(1.D0)
*
  write(1,*) 'Diga nome de ficheiro input '
  read(1,*) nome1
*
  write(1,*) ' diga o nome do ficheiro output'
  read(1,*) nome2
*
  open(10,file=nome1,status='old')
  open(20,file=nome2,status='new')
*
*

```

```

i = 1
do while(.not.fim)
  read(10,100,end=11) fq(i),p(i)
  i = i+1
enddo
*
11 n = i-1
write(1,*) 'leu o ficheiro de ',n,' valores'
close(10)
*
write(1,*) ' Considere os seguintes modelos: '
write(1,*) ' AR1 - tipo 1 '
write(1,*) ' AR2 - tipo 2 '
write(1,*) ' MA1 - tipo 3 '
write(1,*) ' MA2 - tipo 4 '
write(1,*) ' ARMA11 - tipo 5 '
write(1,*) ' ARMA12 - tipo 6 '
write(1,*) ' ARMA21 - tipo 7 '
write(1,*) 'qual o tipo de modelo que escolhe? '
read(1,'(I1)') tipo
*
if( tipo .eq. 1) then ! CASO AR(1)
  write(1,*) 'qual o valor de f1 ? '
  read(1,*) a1
  do i = 1, n
    den = (1.D0 - 2.D0*a1*DCOS( 2.D0*pi*fq(i) ) + a1**2)
    esp(i) = varesid / den
  enddo
  write(20,*) nome1,a1
*
else if( tipo .eq. 2) then ! CASO AR(2)
  write(1,*) ' qual o valor de f1 e f2 ? '
  read(1,*) a1,a2
  do i = 1, n
    den = (1.D0 + a2)**2 + a1**2 - 2.D0*a1*(1 - a2) *
#    DCOS(2.D0*pi*fq(i)) - 4.D0*a2*(DCOS(2.D0*pi*fq(i)))**2
    esp(i) = varesid / den
  enddo
  write(20,*) nome1,a1,a2

```

\*

```
else if( tipo .eq. 3) then          ! CASO MA(1)
  write(1,*) ' qual o valor de teta1 ? '
  read(1,*) b1
  do i = 1, n
    num = ( 1.D0 - 2.D0*b1*DCOS(2.D0*pi*fq(i)) + b1**2 )
    esp(i) = (num * varesid)
  enddo
  write(20,*) nome1, b1
```

\*

```
else if( tipo .eq. 4) then          ! CASO MA(2)
  write(1,*) ' qual o valor de teta1 e teta2 ? '
  read(1,*) b1,b2
  do i = 1, n
    num = (1.D0 + b2)**2 + b1**2 - 2.D0*b1*(1 - b2)*DCOS(2.D0*
$   pi*fq(i)) - 4.D0*b2*(DCOS(2.D0*pi*fq(i)))**2
    esp(i) = (num * varesid)
  enddo
  write(20,*) nome1, b1, b2
```

\*

```
else if( tipo .eq. 5) then          ! caso ARMA(1,1)
  write(1,*) ' qual o valor de fil e teta1 ? '
  read(1,*) a1,b1
  do i = 1, n
    num = ( 1.D0 - 2.D0*b1*DCOS(2.D0*pi*fq(i)) + b1**2)
    den = ( 1.D0 - 2.D0*a1*DCOS(2.D0*pi*fq(i)) + a1**2)
    esp(i) = (num * varesid) / den
  enddo
  write(20,*) nome1, a1, b1
```

\*

```
else if( tipo .eq. 6) then          ! caso ARMA(1;2)
  write(1,*) ' qual o valor de fil, teta1 e teta2 ? '
  read(1,*) a1,b1,b2
  do i = 1, n
    num = (1.D0 + b2)**2 - 2.D0*b1*(1.D0 - b2)*DCOS(2.D0*pi*
#   fq(i)) + b1**2 - 4.D0*b2*(DCOS(2.D0*pi*fq(i)))**2
    den = 1.D0 - 2.D0*a1*DCOS(2.D0*pi*fq(i)) + a1**2
    esp(i) = (num * varesid) / den
  enddo
```

```

write(20,*) nome1, a1, b1, b2
*
else if( tipo .eq. 7) then                ! caso ARMA(2,1)
write(1,*) ' qual o valor de fi1, fi2 e teta1 ? '
read(1,*) a1,a2,b1
do i = 1, n
num = 1.D0 - 2.D0*b1*DCOS(2.D0*pi*fq(i)) + b1**2
den = (1.D0 + a2)**2 + a1**2 - 2.D0*a1*(1.D0 - a2)*DCOS(2.
% D0*pi*fq(i)) - 4.D0*a2*(DCOS(2.D0*pi*fq(i)))**2
esp(i) = (num * varesid) / den
enddo
write(20,*) nome1, a1, a2, b1
endif
*
*
do i = 1, n
write(20,200) fq(i),p(i),esp(i)
enddo
*
close(20)
*
*   formatos
*
100 format(f10.7,f15.7)
200 format(f10.7,f15.7,f15.7)
*
end

```

## ANEXO C

**Médias e desvios-padrão das sucessões simuladas**

**Quadro 1.**

Apresentação das médias e desvios-padrão das sucessões simuladas dos modelos autoregressivos e de médias móveis de 1ª ordem.

AR(1)			
	0.3	.26261E-01	.31299
	0.4	.73632E-02	.32681
	0.5	-.38331E-01	.40698
	0.6	-.25960E-01	.39732
	0.7	.54147E-01	.44775
	-0.3	-.60054E-02	.33753
	-0.4	.14152E-01	.33340
	-0.5	-.15761E-02	.33327
	-0.6	.97076E-03	.41869
	-0.7	-.71479E-02	.39211
MA(1)			
	0.3	.13457E-01	.32005
	0.4	-.83814E-03	.30182
	0.5	-.25487E-02	.35660
	0.6	.70013E-02	.35773
	0.7	-.13150E-01	.37137
	-0.3	-.32489E-01	.32177
	-0.4	.16667E-01	.33661
	-0.5	-.77958E-03	.33883
	-0.6	-.69321E-02	.37152
	-0.7	.20117E-01	.38411

Quadro 2.

Apresentação das médias e desvios-padrão das sucessões simuladas dos modelos autoregressivos e de médias móveis de 2ª ordem.

AR(2)			
0.3	0.4	-.35956E-01	.38109
0.4	0.2	-.44328E-01	.36229
0.5	0.3	-.13099E-00	.54812
0.5	-0.4	.18972E-01	.35381
0.3	-0.3	.12755E-01	.36821
-0.4	0.5	.73123E-02	.59900
-0.5	0.3	.11258E-01	.47235
-0.5	-0.2	.10024E-01	.33260
-0.3	-0.4	.15409E-01	.34753
-0.4	-0.4	.72846E-02	.34117
MA(2)			
0.3	0.4	.30944E-02	.34495
0.4	0.2	.44231E-02	.35317
0.5	0.3	.92461E-03	.39207
0.5	-0.4	.13116E-02	.37891
0.3	-0.3	-.25609E-01	.34392
-0.4	0.5	-.13089E-01	.37808
-0.5	0.3	.37817E-03	.36383
-0.5	-0.2	.32631E-01	.33470
-0.3	-0.4	-.13813E-02	.36408
-0.4	-0.4	-.41519E-01	.34376

Quadro 3.

Apresentação das médias e desvios-padrão das sucessões simuladas dos modelos mistos até à 2ª ordem

ARMA(1,1)				
0.5	0.4		-.44760E-02	.33833
0.5	0.5		-.23351E-01	.33494
0.4	0.6		.17444E-01	.32929
-0.3	0.7		-.31924E-02	.44227
-0.5	0.5		.28353E-02	.45031
0.6	-0.3		.77244E-01	.50451
0.4	-0.6		.60599E-01	.43941
-0.5	-0.5		.14483E-01	.33449
-0.5	-0.7		-.14082E-01	.32813
-0.6	-0.4		.15793E-01	.30370
ARMA(1,2)				
0.3	0.5	0.4	.16109E-02	.33314
0.4	0.3	0.6	-.27698E-02	.36864
0.5	-0.4	0.2	.10805E-01	.45405
0.6	0.2	-0.5	.60987E-01	.45297
0.7	-0.3	-0.6	.11003E-00	.64616
-0.3	0.5	0.3	.42080E-02	.39699
-0.4	-0.5	0.3	-.29118E-05	.34002
-0.5	0.4	-0.4	-.29681E-02	.57358
-0.6	-0.5	-0.3	-.16012E-01	.31617
-0.7	-0.4	-0.5	.25600E-01	.47036
ARMA(2,1)				
0.5	0.4	0.3	-.13195E-00	.48756
0.3	0.2	0.4	.15482E-02	.30617
0.2	-0.4	0.5	.17520E-02	.38786
-0.5	0.3	0.6	.75135E-02	.76291
-0.4	-0.3	0.7	-.60969E-02	.48691
0.7	0.2	-0.3	.25832E-00	.66092
-0.3	0.5	-0.4	.29311E-01	.35146
0.6	-0.3	-0.5	-.31647E-01	.47639
-0.4	-0.3	-0.6	-.23506E-01	.33058
-0.3	-0.5	-0.7	-.74387E-02	.39700

## ANEXO D

Espectros teóricos e empíricos das sucessões simuladas por processo:

Autoregressivos de 1 <sup>a</sup> ordem	fig. 1 a 8
Médias móveis de 1 <sup>a</sup> ordem	fig. 9 a 16
Autoregressivos de 2 <sup>a</sup> ordem	fig. 17 a 24
Médias móveis de 2 <sup>a</sup> ordem	fig. 25 a 32
Mistos de 1 <sup>a</sup> ordem	fig. 33 a 40
Mistos até à 2 <sup>a</sup> ordem	fig. 41 a 56

# PROCESSOS AR(1)

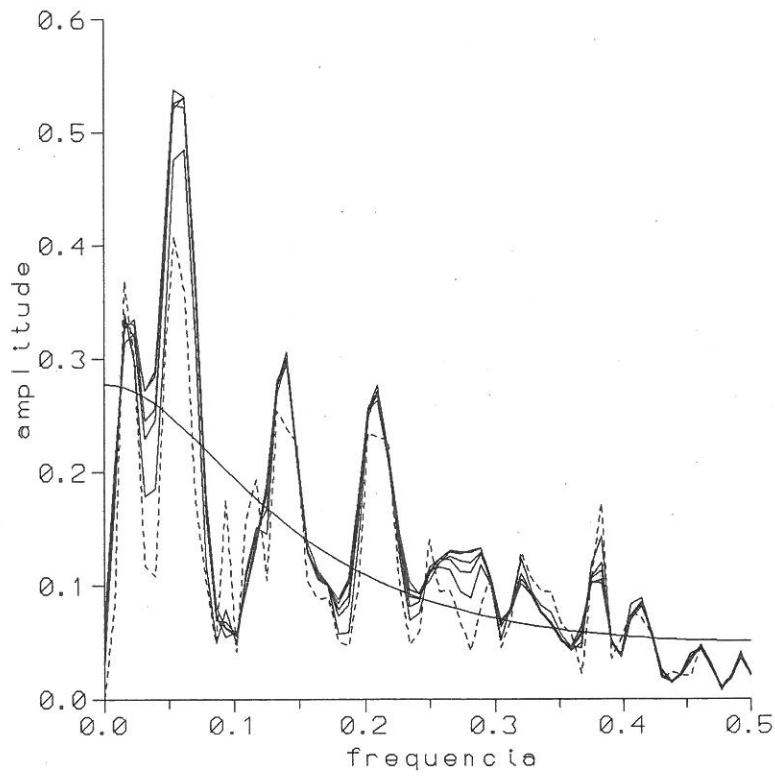


Fig. 1 Processo  $X_t = 0.4 X_{t-1} + \varepsilon_t$

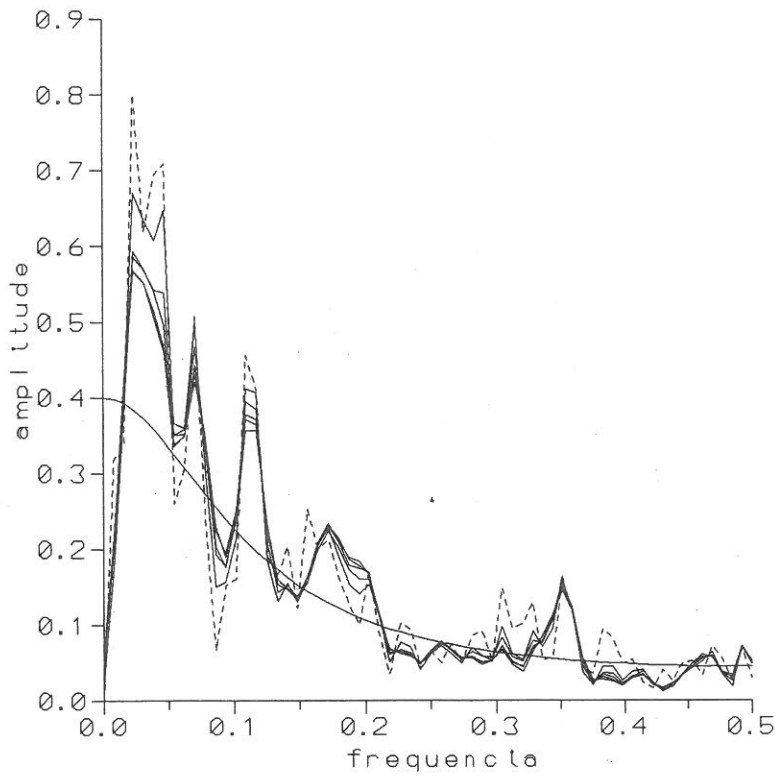


Fig. 2 Processo  $X_t = 0.5 X_{t-1} + \varepsilon_t$

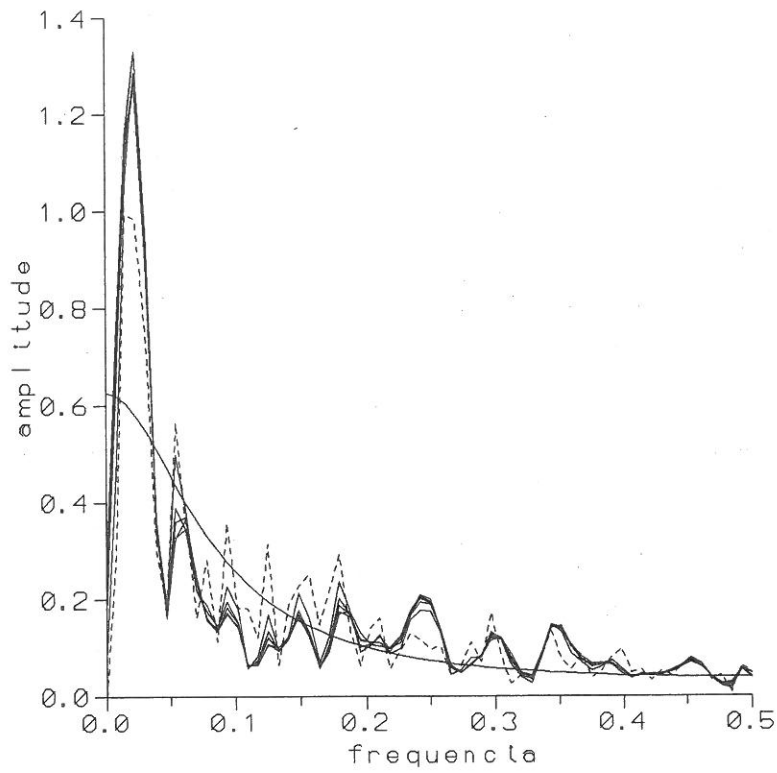


Fig. 3 Processo  $X_t = 0.6 X_{t-1} + \epsilon_t$

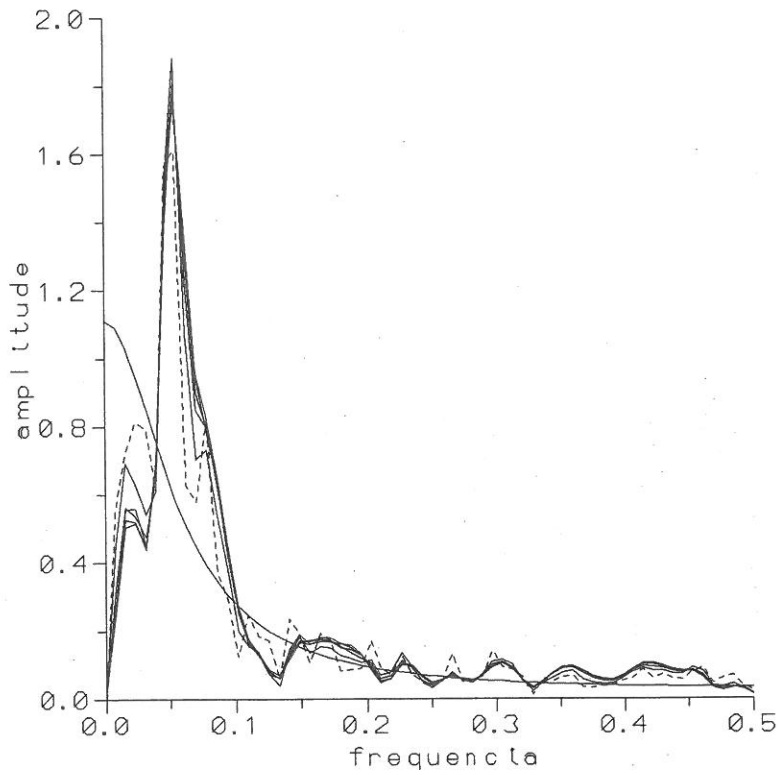


Fig. 4 Processo  $X_t = 0.7 X_{t-1} + \epsilon_t$

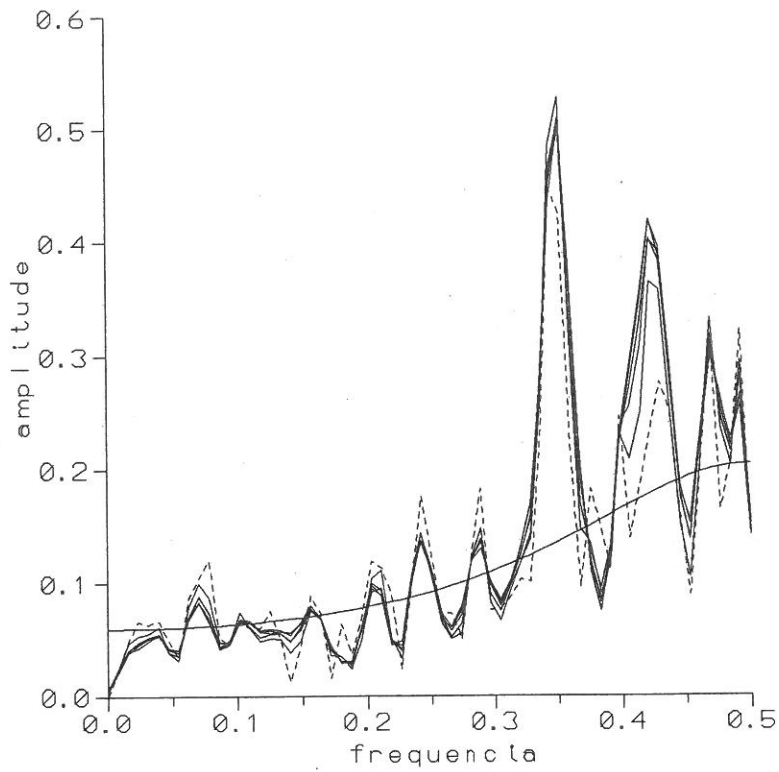


Fig. 5 Processo  $X_t = -0.3 X_{t-1} + \epsilon_t$

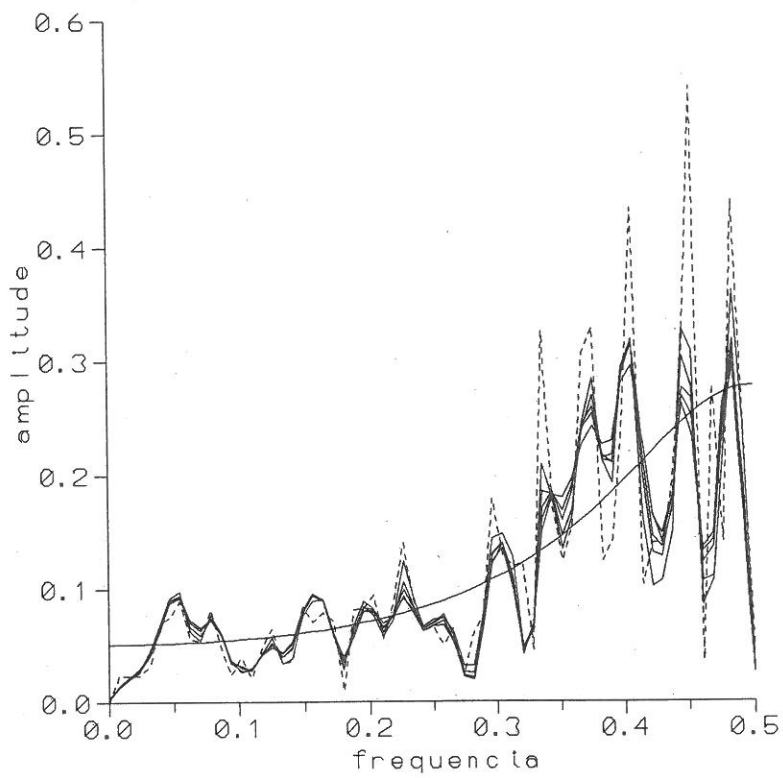


Fig. 6 Processo  $X_t = -0.4 X_{t-1} + \epsilon_t$

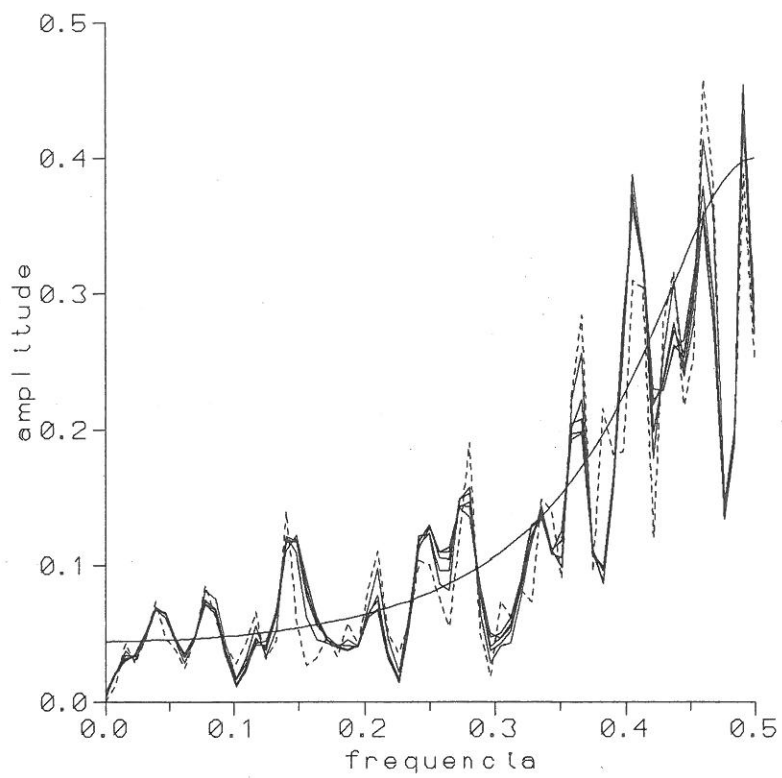


Fig. 7 Processo  $X_t = -0.5 X_{t-1} + \epsilon_t$

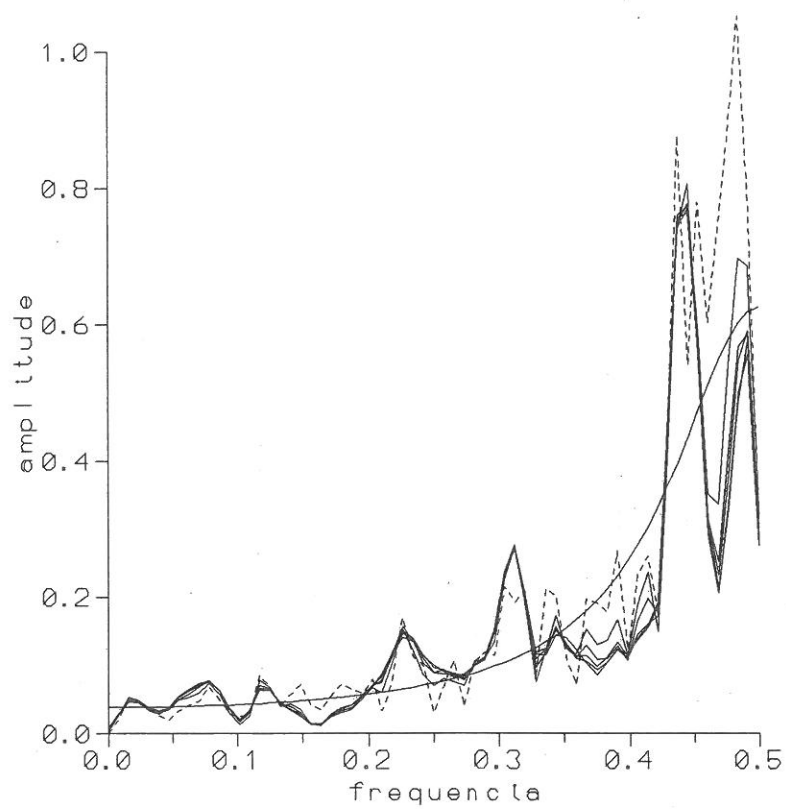


Fig. 8 Processo  $X_t = -0.6 X_{t-1} + \epsilon_t$

# PROCESSOS MA(1)

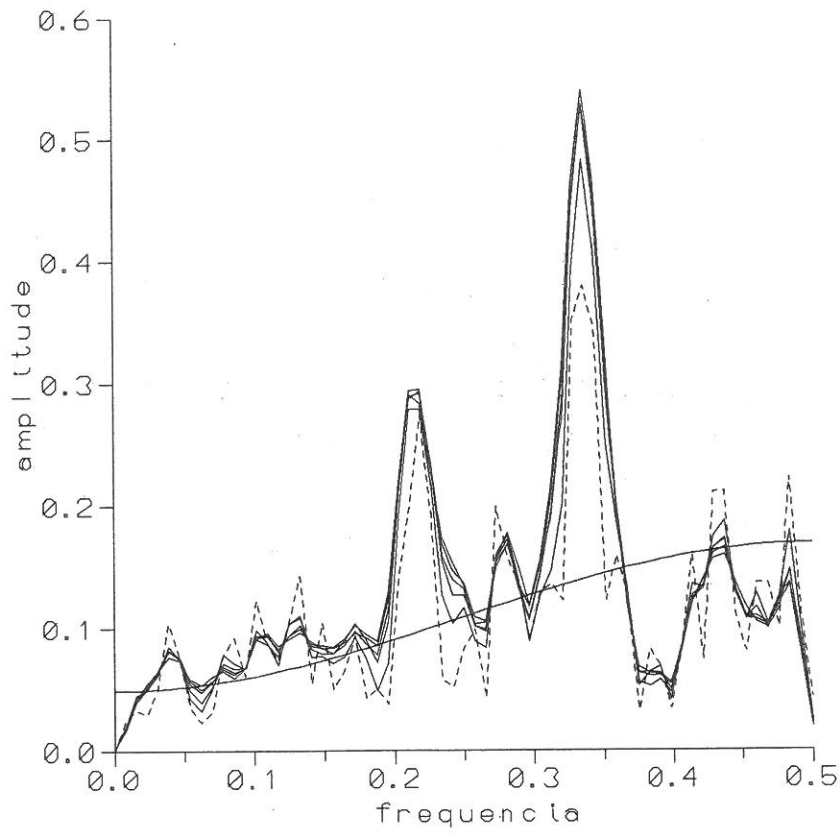


Fig. 9 Processo  $X_t = \varepsilon_t - 0.3 \varepsilon_{t-1}$

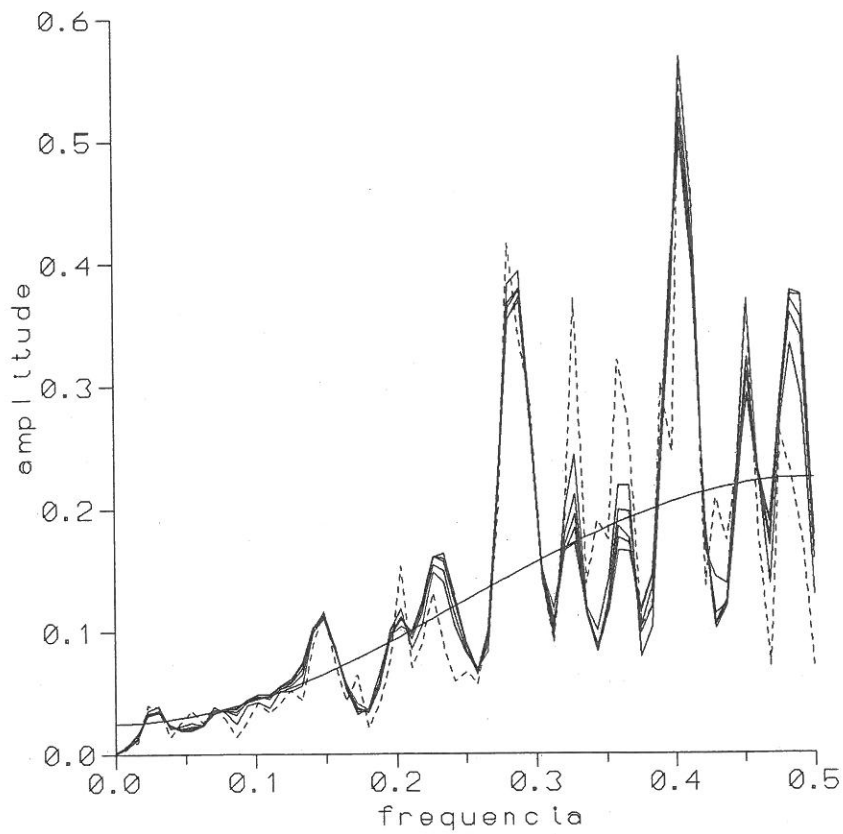


Fig. 10 Processo  $X_t = \varepsilon_t - 0.5 \varepsilon_{t-1}$

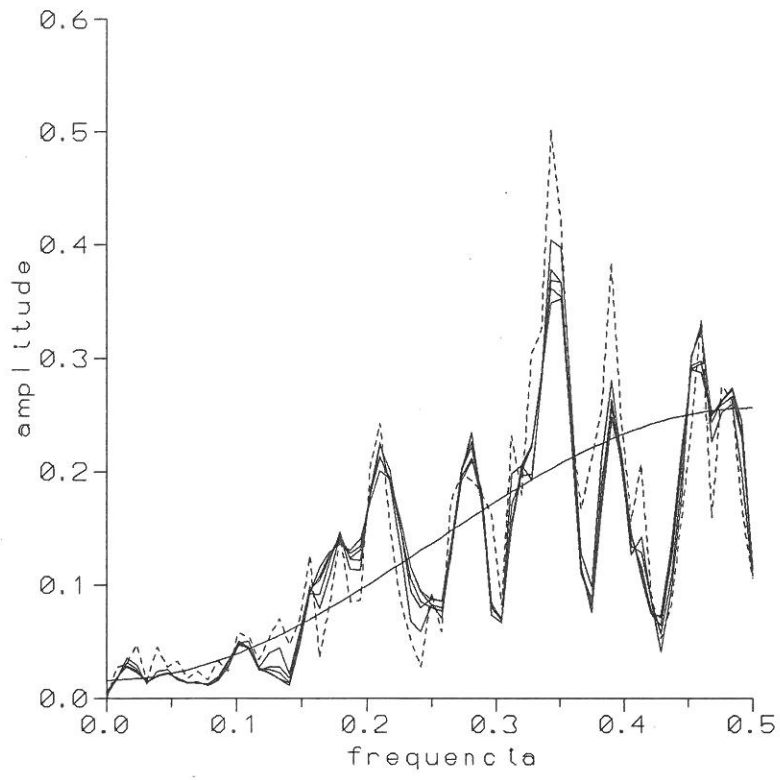


Fig. 11 Processo  $X_t = \epsilon_t - 0.6 \epsilon_{t-1}$

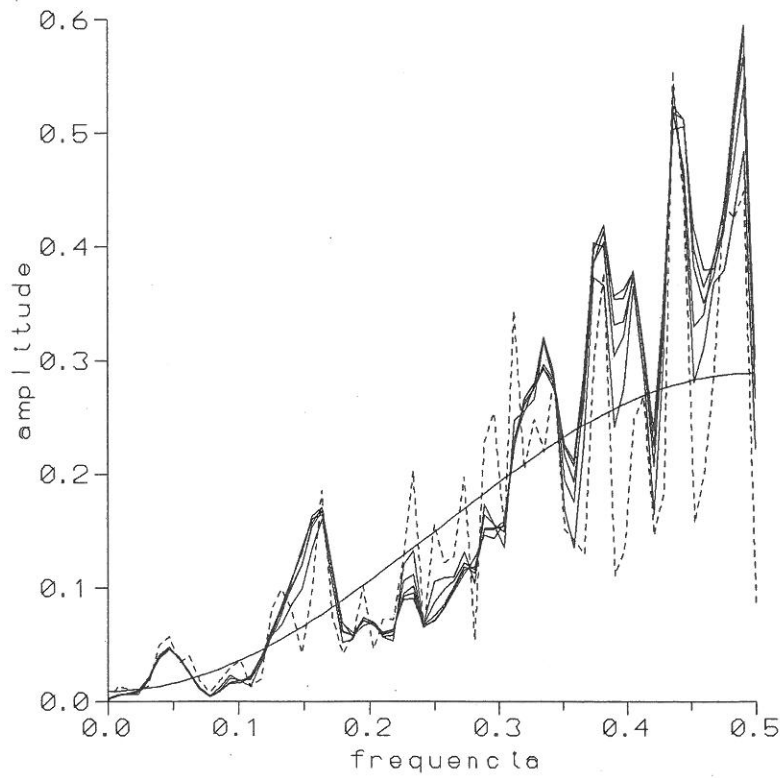


Fig. 12 Processo  $X_t = \epsilon_t - 0.7 \epsilon_{t-1}$

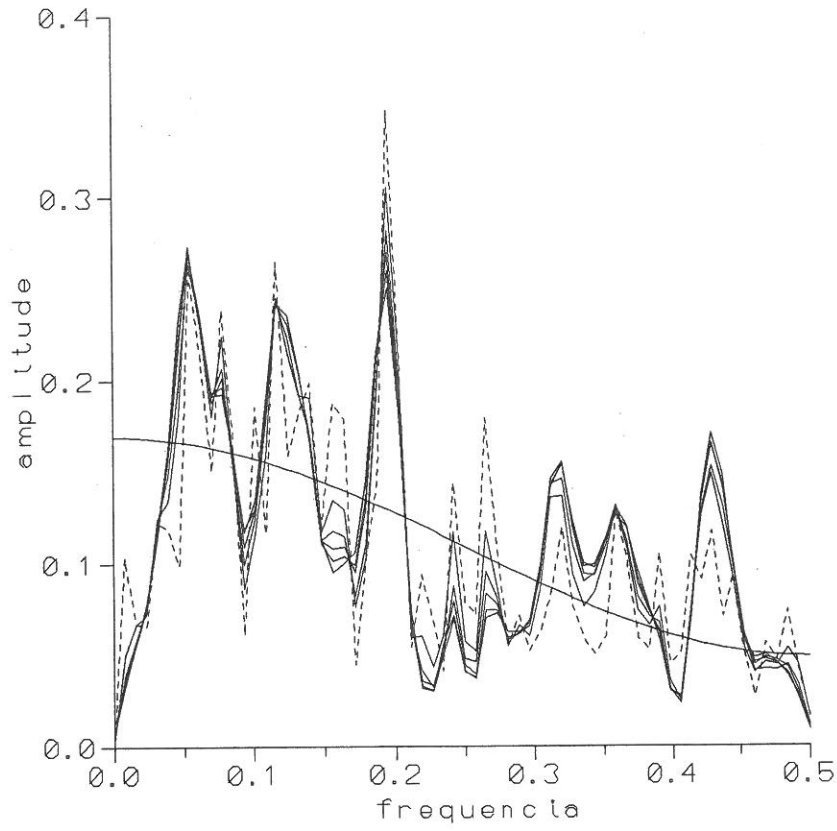


Fig. 13 Processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.3 \varepsilon_{t-1}$

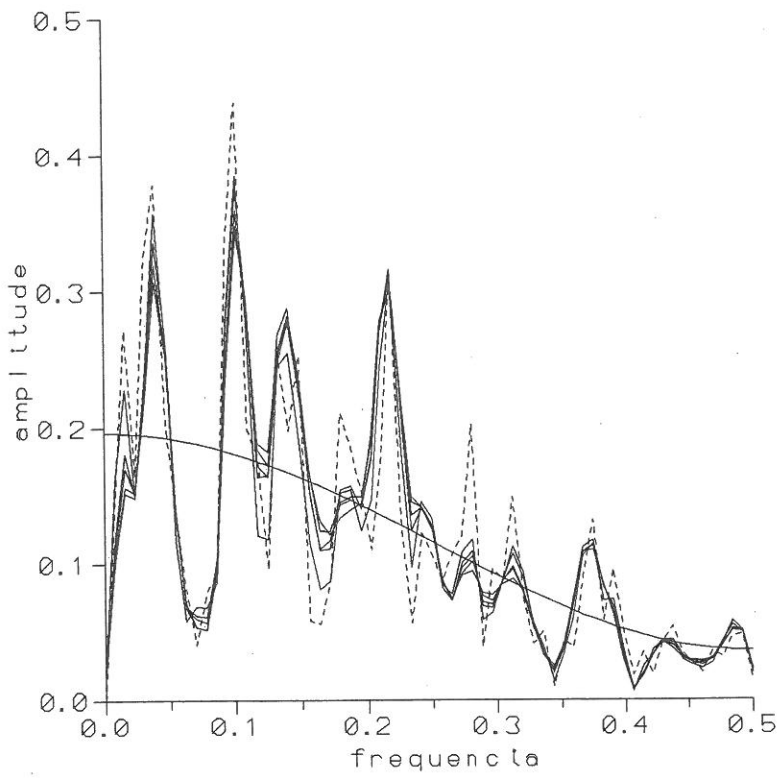


Fig. 14 Processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.4 \varepsilon_{t-1}$

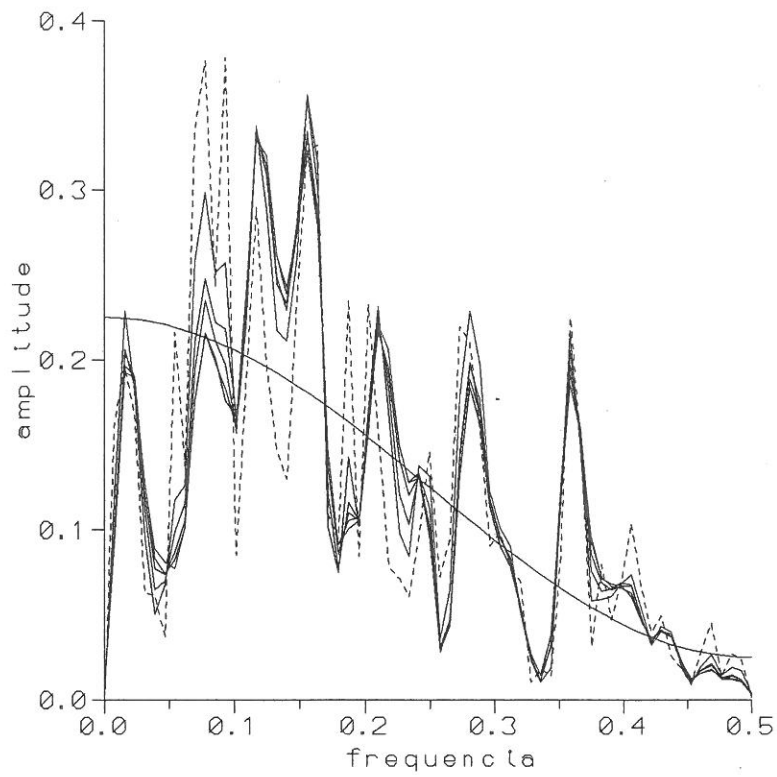


Fig. 15 Processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.5 \varepsilon_{t-1}$

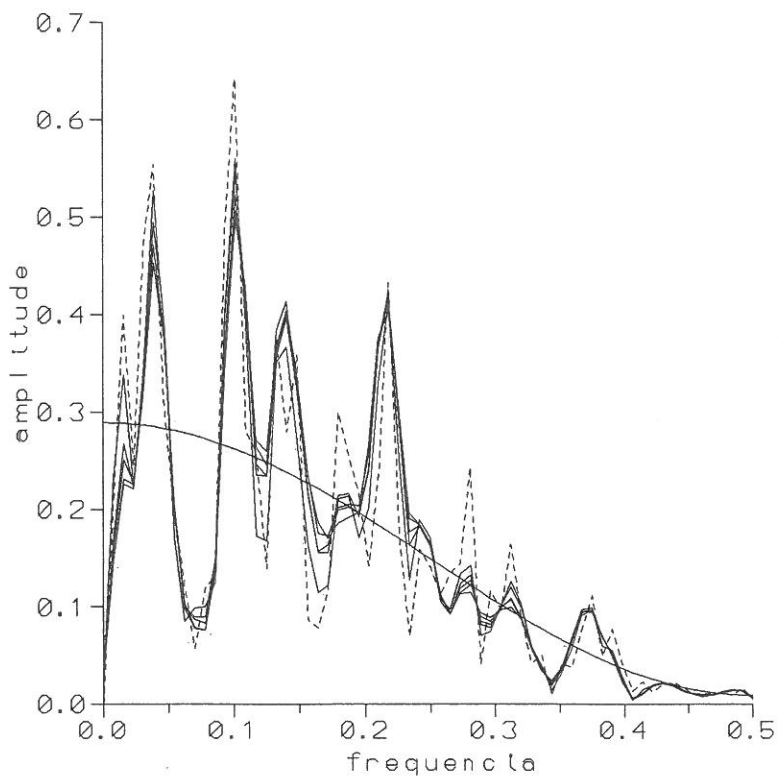


Fig. 16 Processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.7 \varepsilon_{t-1}$

# PROCESSOS AR(2)

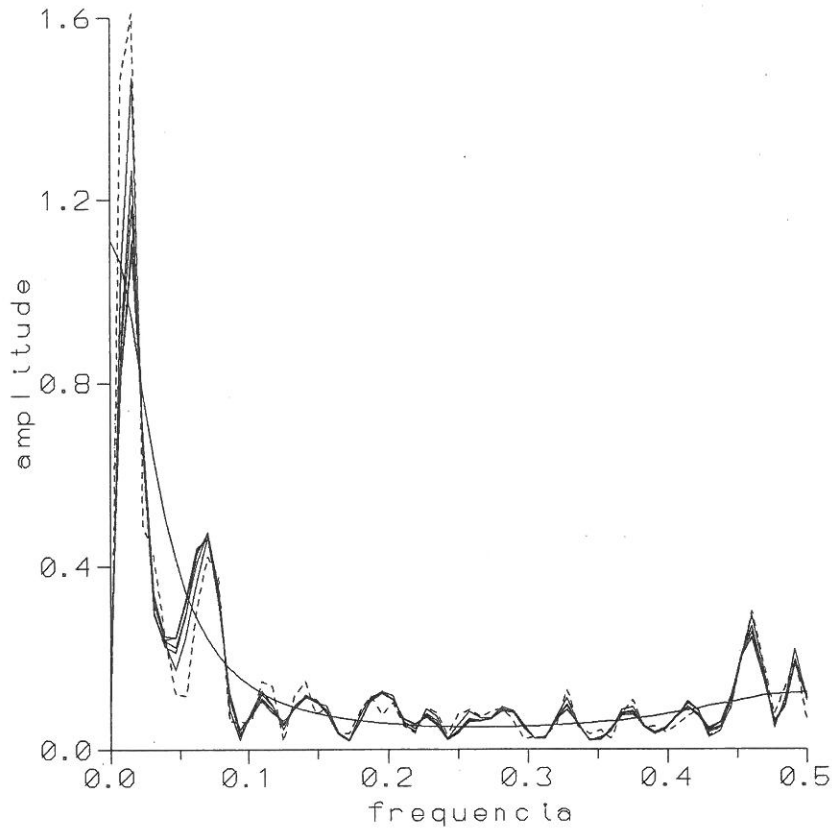


Fig. 17 Processo  $X_t = 0.3 X_{t-1} + 0.4 X_{t-2} + \varepsilon_t$

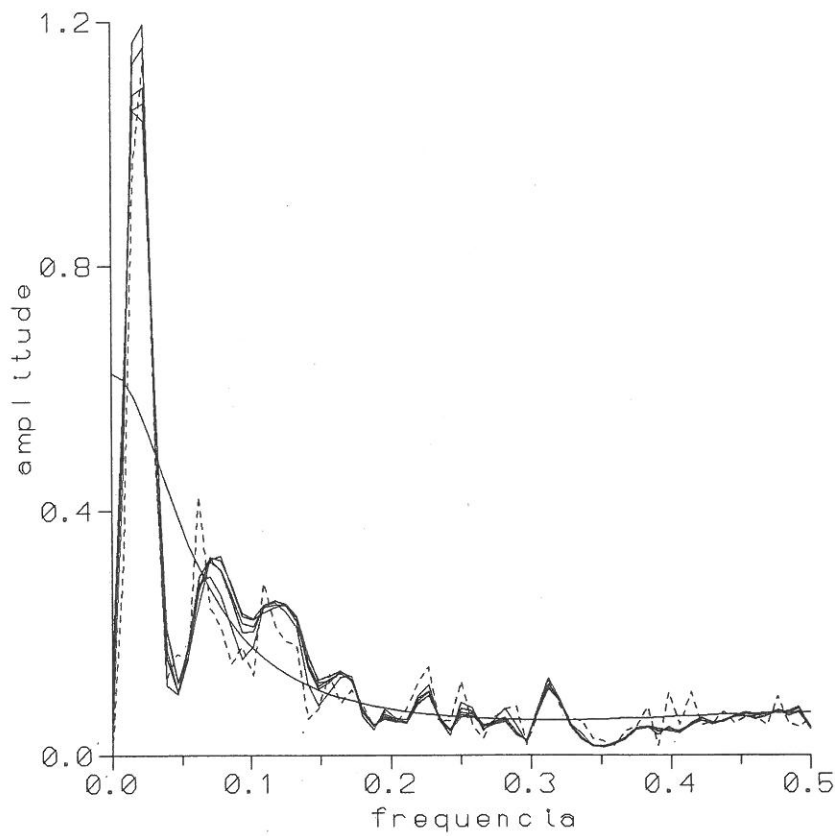


Fig. 18 Processo  $X_t = 0.4 X_{t-1} + 0.2 X_{t-2} + \varepsilon_t$

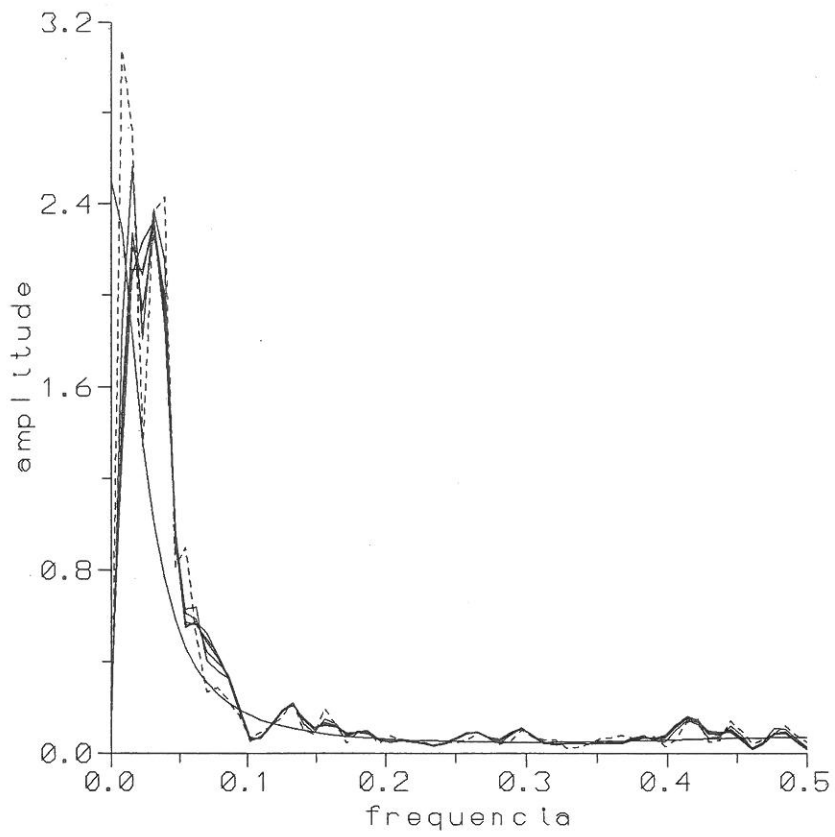


Fig. 19 Processo  $X_t = 0.5 X_{t-1} + 0.3 X_{t-2} + \epsilon_t$

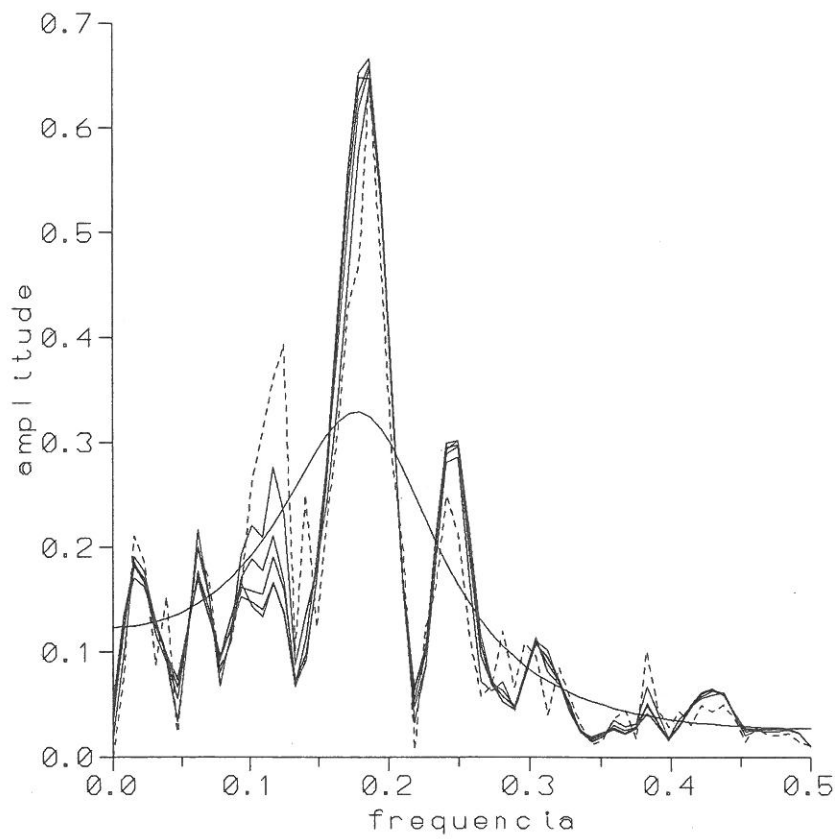


Fig. 20 Processo  $X_t = 0.5 X_{t-1} - 0.4 X_{t-2} + \epsilon_t$

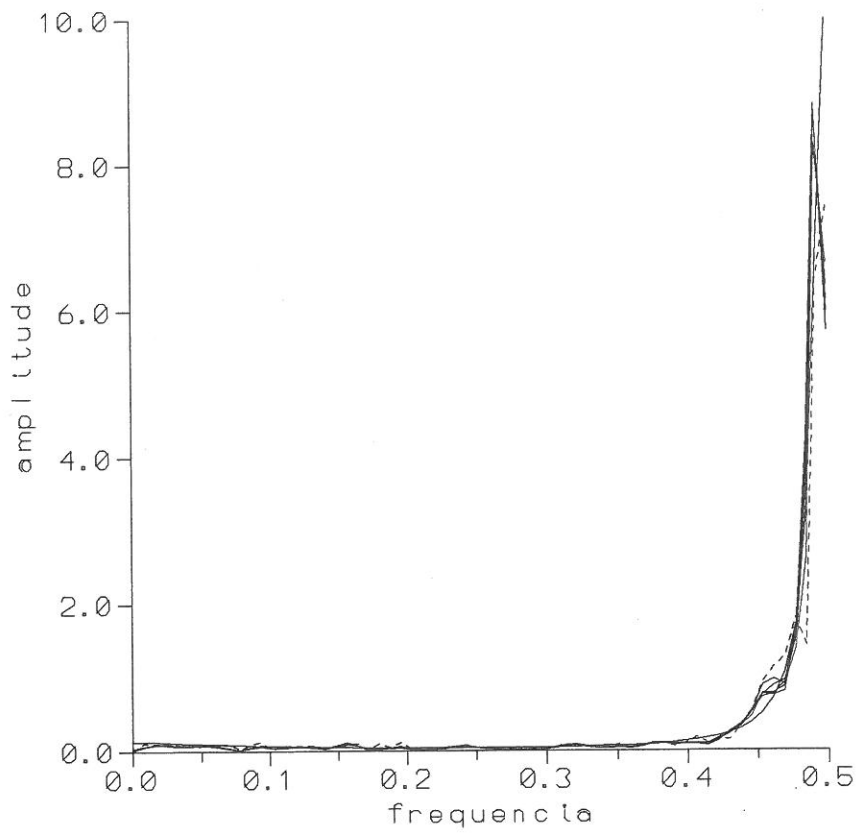


Fig. 21 Processo  $X_t = -0.4 X_{t-1} + 0.5 X_{t-2} + \epsilon_t$

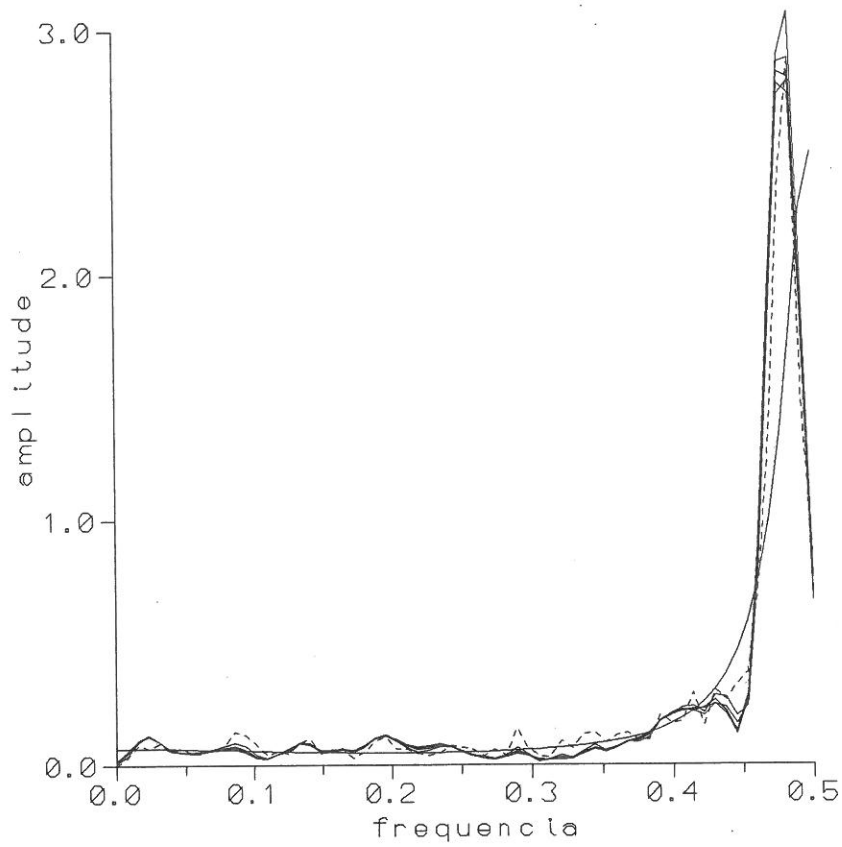


Fig. 22 Processo  $X_t = -0.5 X_{t-1} + 0.3 X_{t-2} + \epsilon_t$

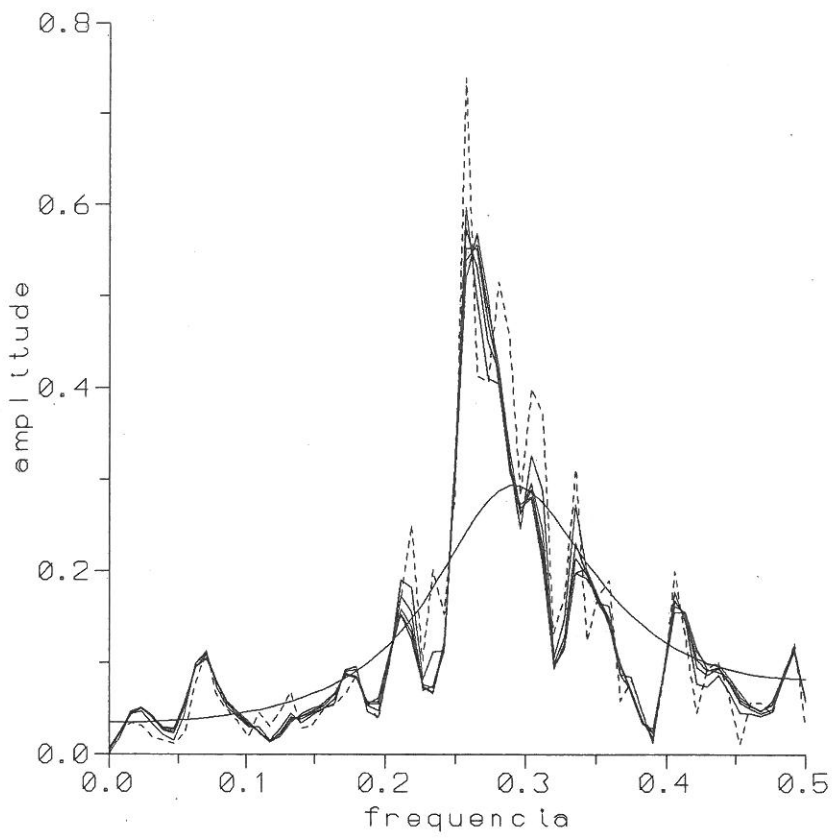


Fig. 23 Processo  $X_t = -0.3 X_{t-1} - 0.4 X_{t-2} + \epsilon_t$

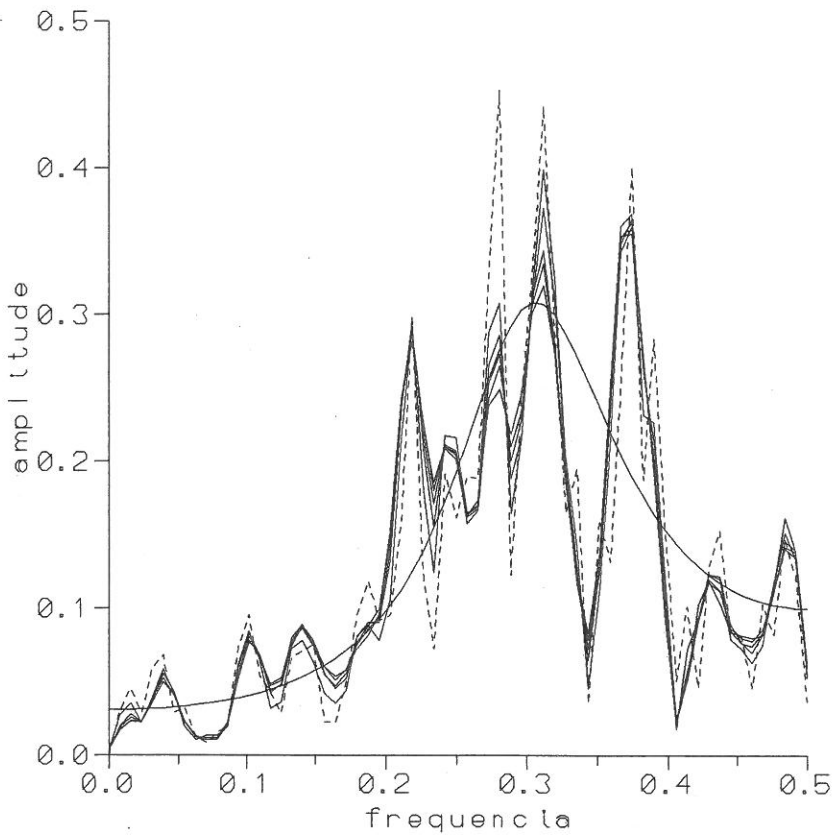


Fig. 24 Processo  $X_t = -0.4 X_{t-1} - 0.4 X_{t-2} + \epsilon_t$

PROCESSOS MA(2)

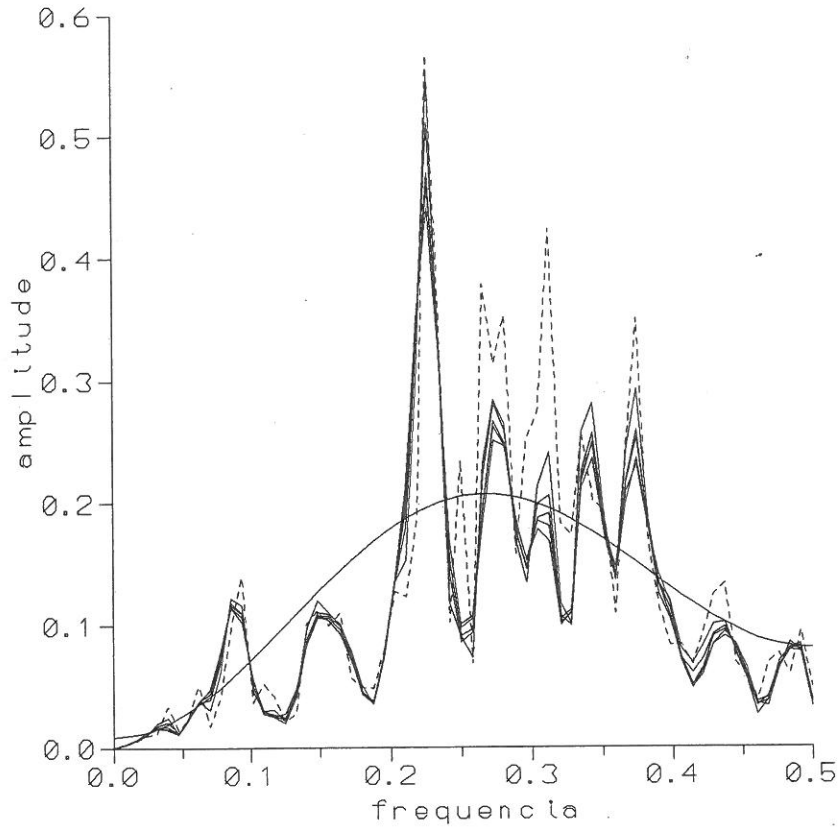


Fig. 25 Processo  $X_t = \varepsilon_t - 0.3 \varepsilon_{t-1} - 0.4 \varepsilon_{t-2}$

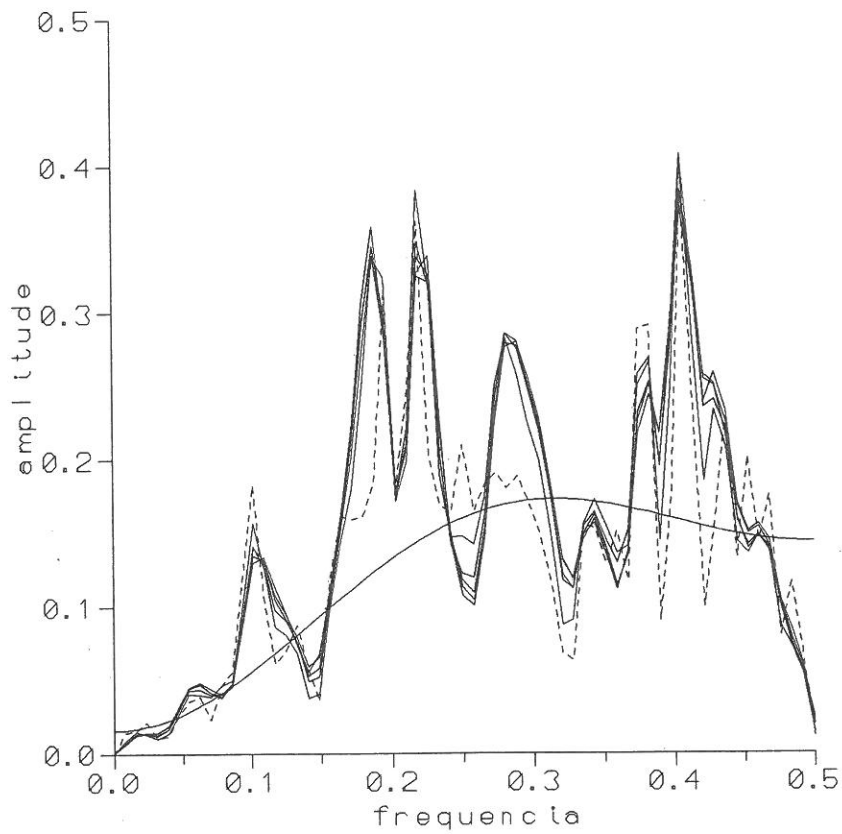


Fig. 26 Processo  $X_t = \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1} - 0.2 \varepsilon_{t-2}$

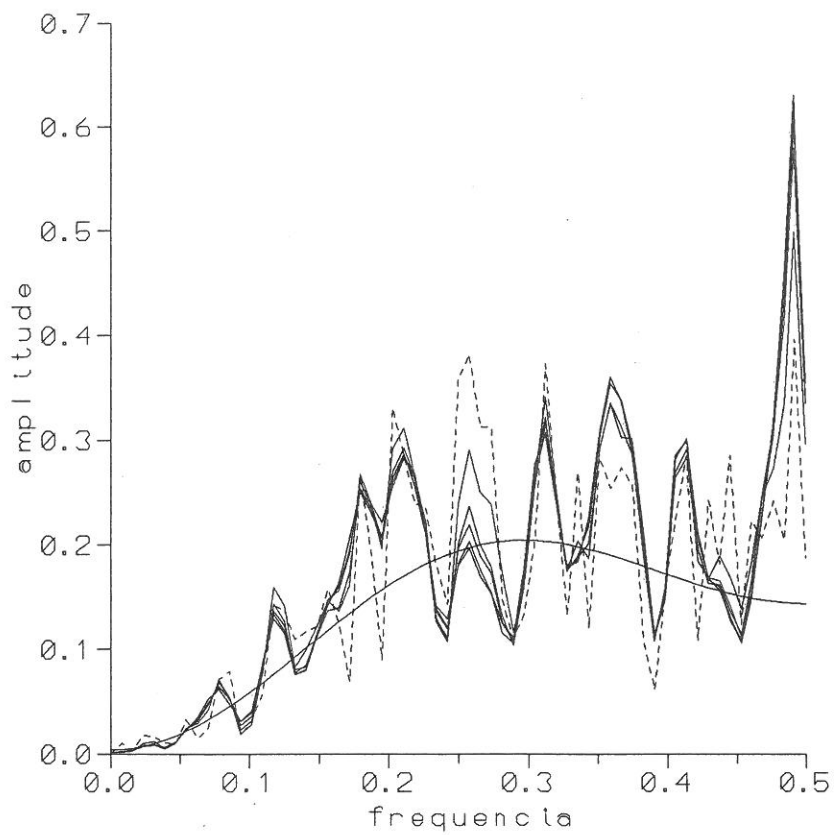


Fig. 27 Processo  $X_t = \varepsilon_t - 0.5 \varepsilon_{t-1} - 0.3 \varepsilon_{t-2}$

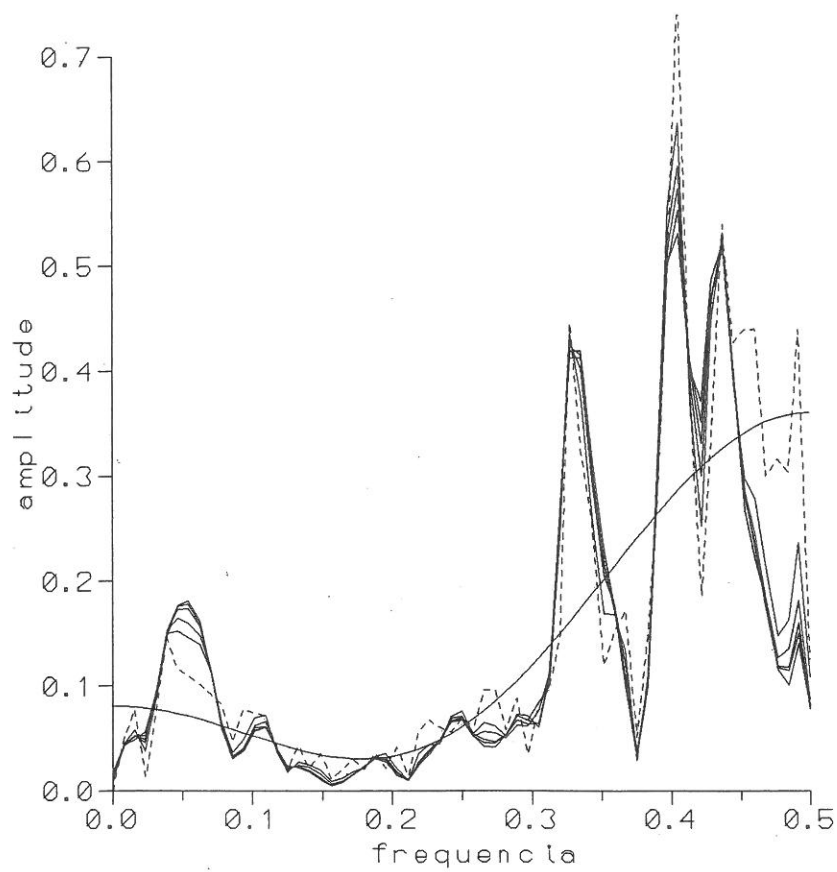


Fig. 28 Processo  $X_t = \varepsilon_t - 0.5 \varepsilon_{t-1} + 0.4 \varepsilon_{t-2}$

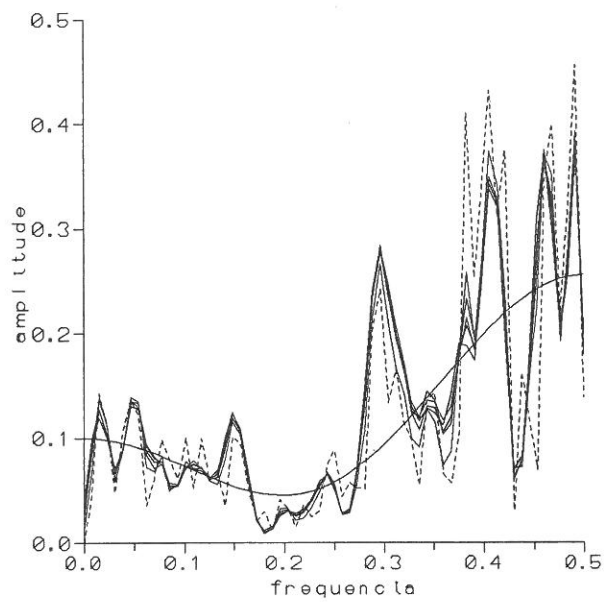


Fig. 29 Processo  $X_t = \varepsilon_t - 0.3 \varepsilon_{t-1} + 0.3 \varepsilon_{t-2}$

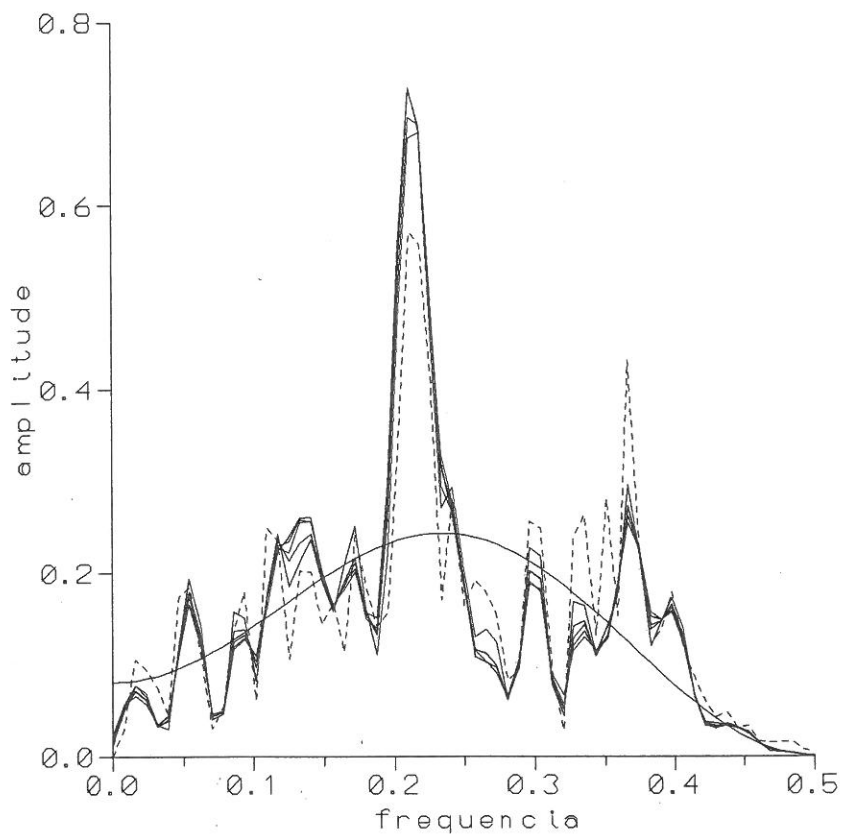


Fig. 30 Processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.4 \varepsilon_{t-1} - 0.5 \varepsilon_{t-2}$

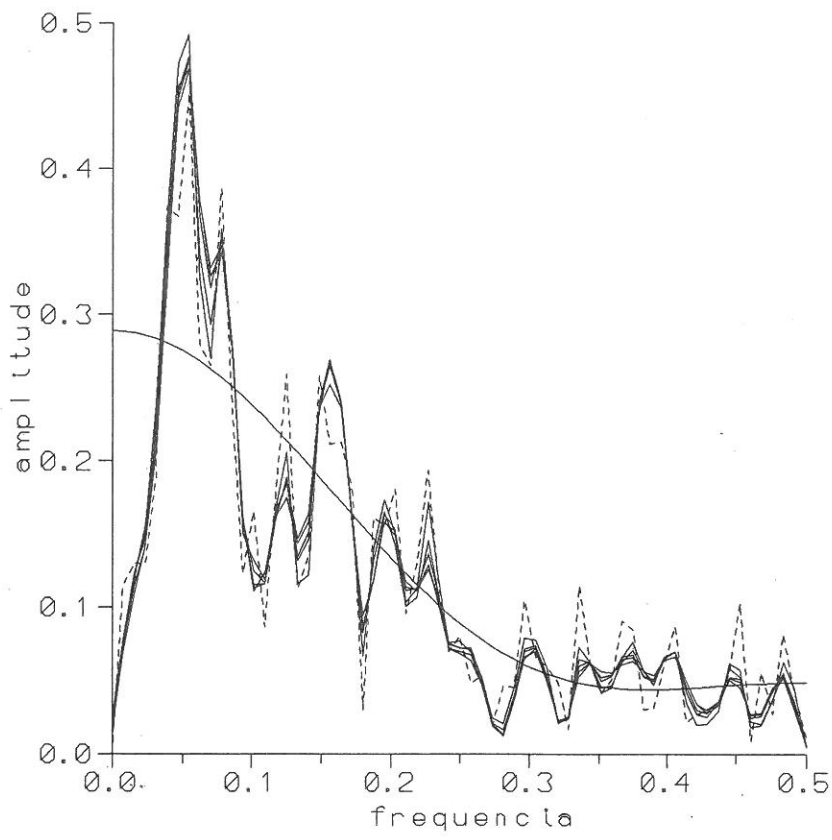


Fig. 31 Processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.5 \varepsilon_{t-1} + 0.2 \varepsilon_{t-2}$

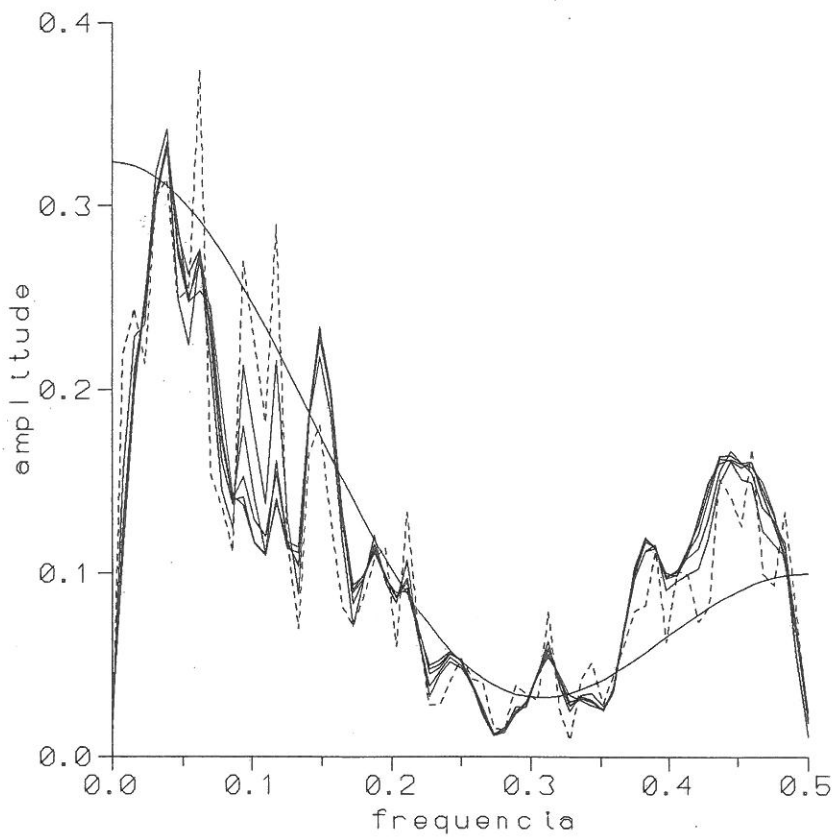


Fig. 32 Processo  $X_t = \varepsilon_t + 0.4 \varepsilon_{t-1} + 0.4 \varepsilon_{t-2}$

PROCESSOS ARMA(1,1)

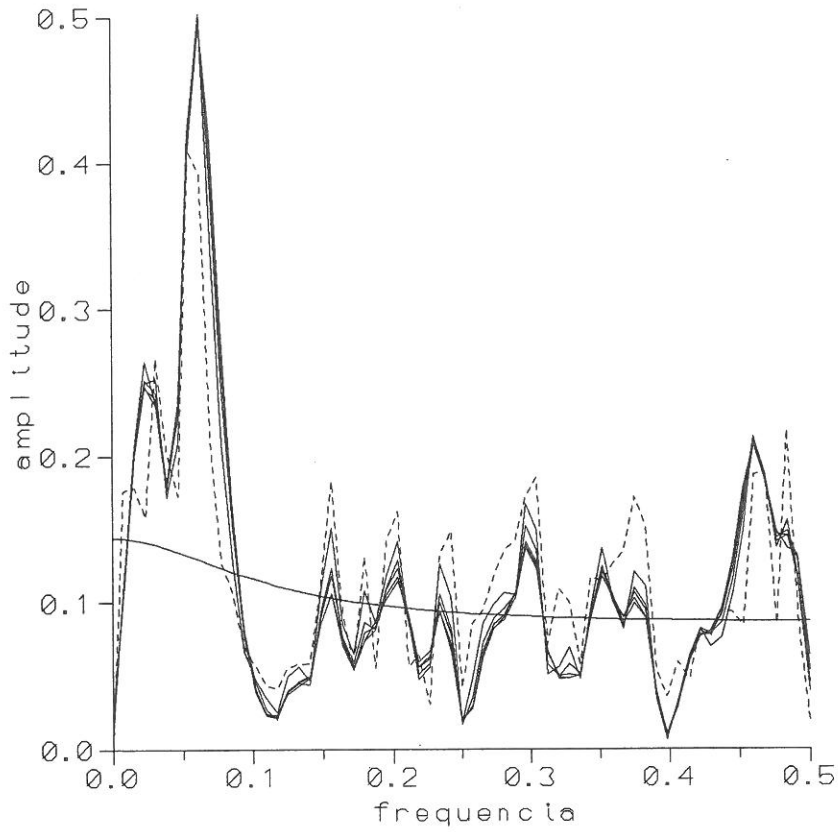


Fig. 33 Processo  $X_t = 0.5 X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1}$

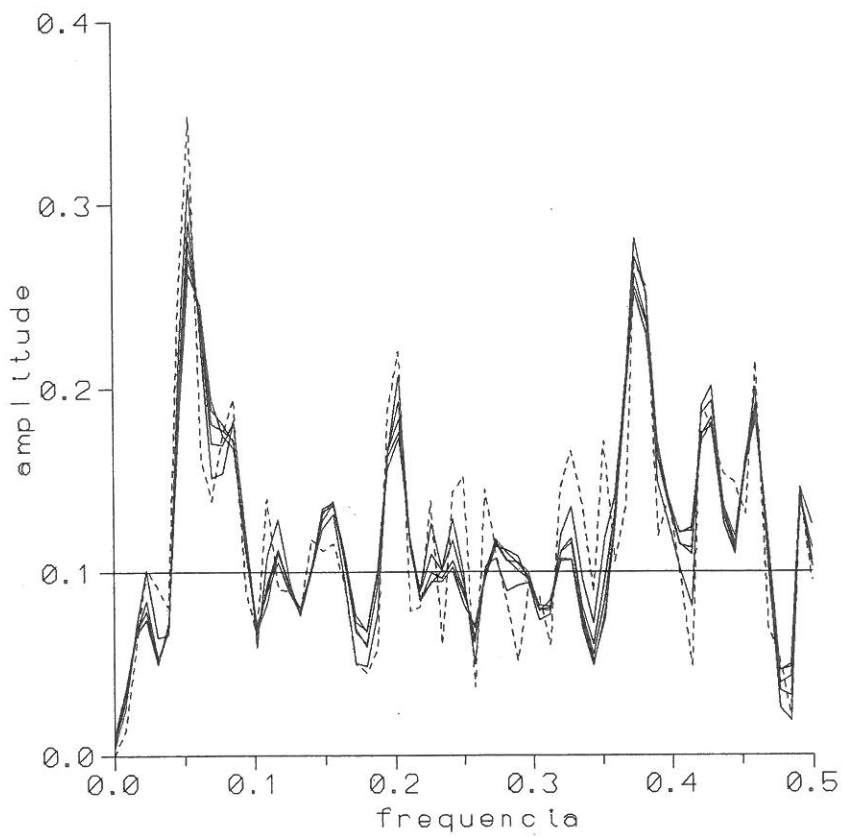


Fig. 34 Processo  $X_t = 0.5 X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5 \varepsilon_{t-1}$

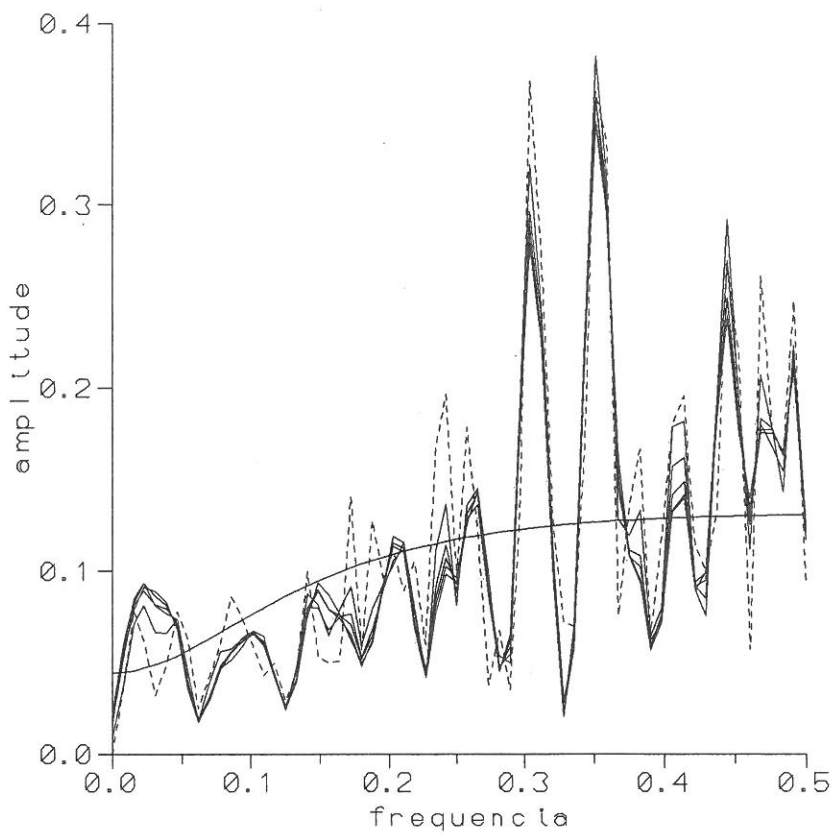


Fig. 35 Processo  $X_t = 0.4 X_{t-1} + \epsilon_t - 0.6 \epsilon_{t-1}$

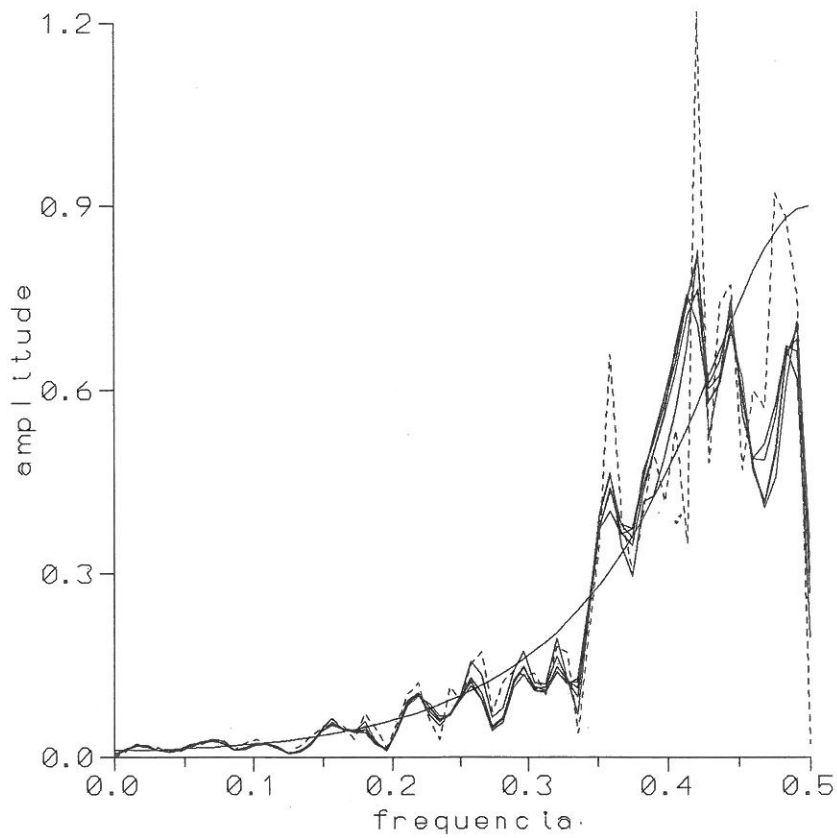


Fig. 36 Processo  $X_t = -0.5 X_{t-1} + \epsilon_t - 0.5 \epsilon_{t-1}$

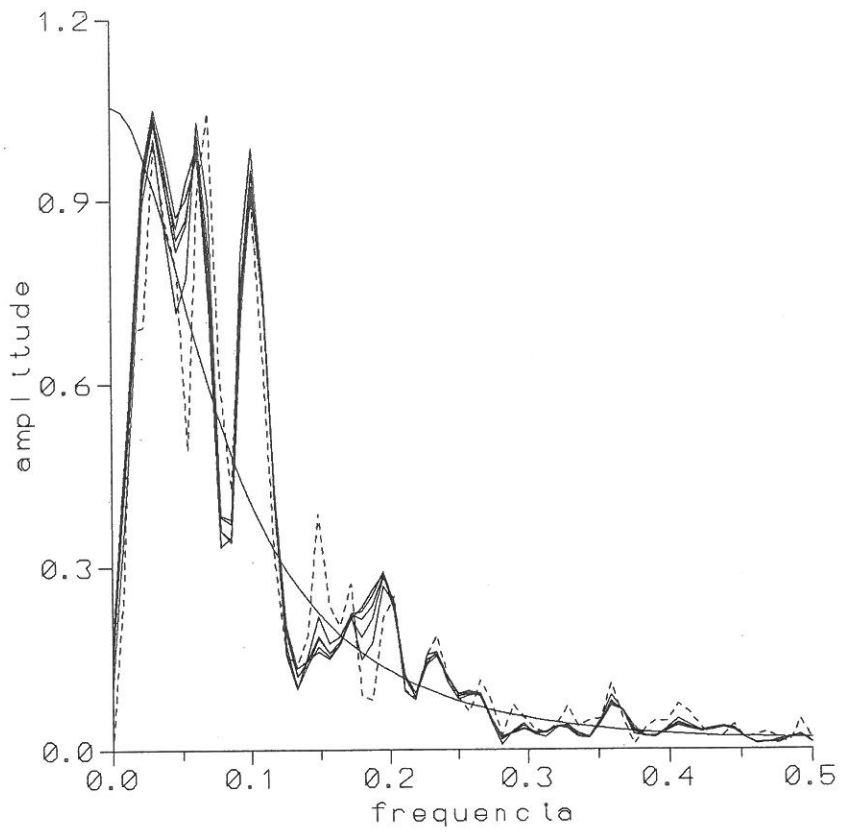


Fig. 37 Processo  $X_t = 0.6 X_{t-1} + \epsilon_t + 0.3 \epsilon_{t-1}$

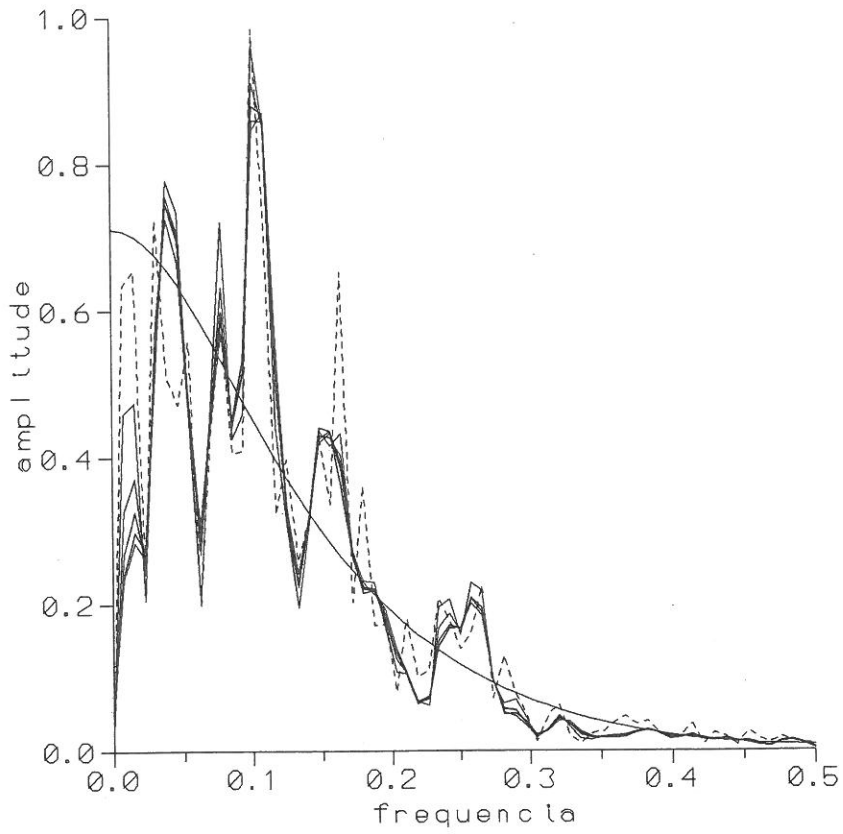


Fig. 38 Processo  $X_t = 0.4 X_{t-1} + \epsilon_t + 0.6 \epsilon_{t-1}$

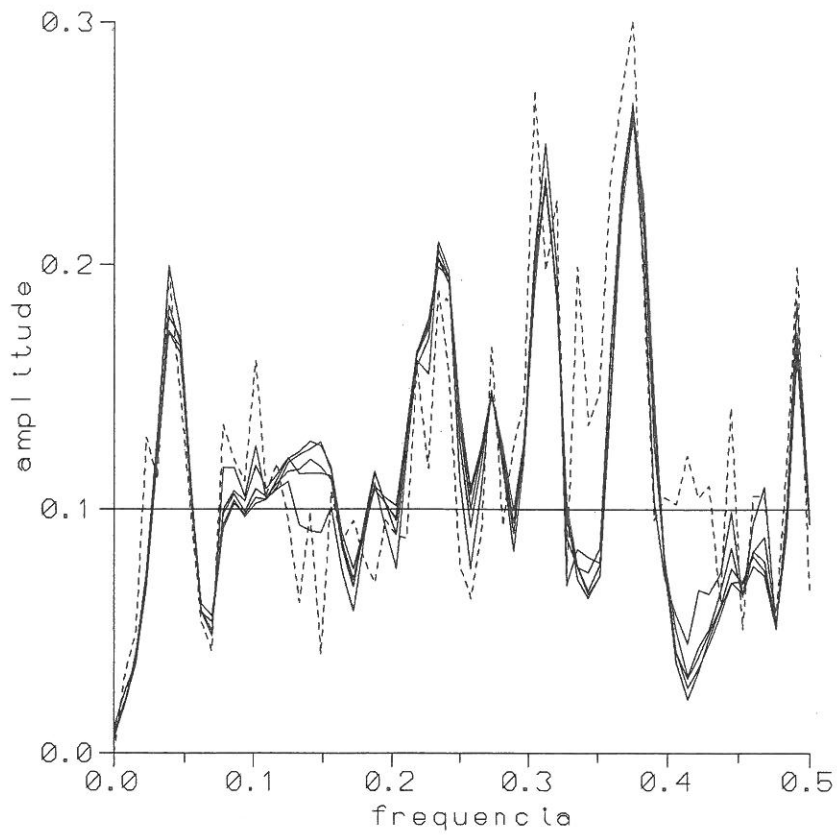


Fig. 39 Processo  $X_t = -0.5 X_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5 \varepsilon_{t-1}$

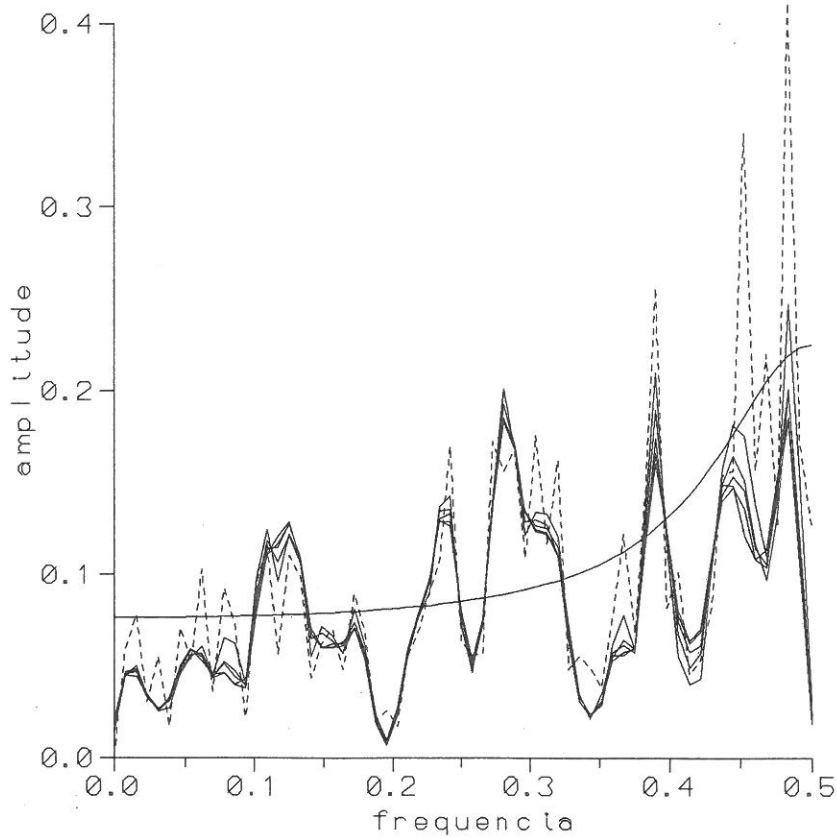


Fig. 40 Processo  $X_t = -0.6 X_{t-1} + \varepsilon_t + 0.4 \varepsilon_{t-1}$

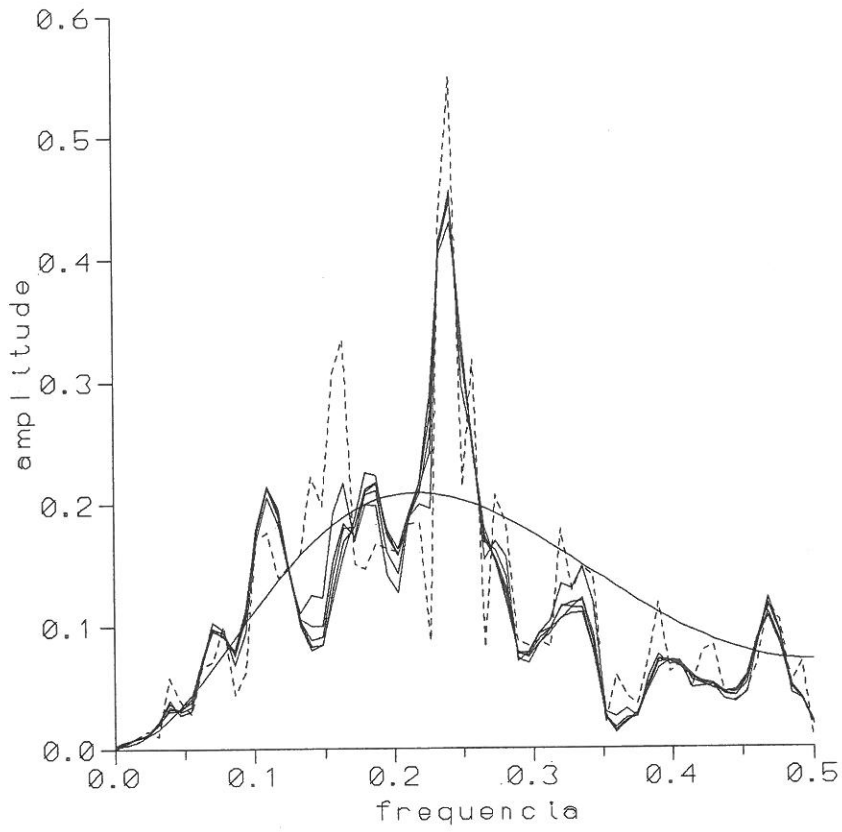


Fig. 41 Processo  $X_t = 0.3 X_{t-1} + \epsilon_t - 0.5 \epsilon_{t-1} - 0.4 \epsilon_{t-2}$

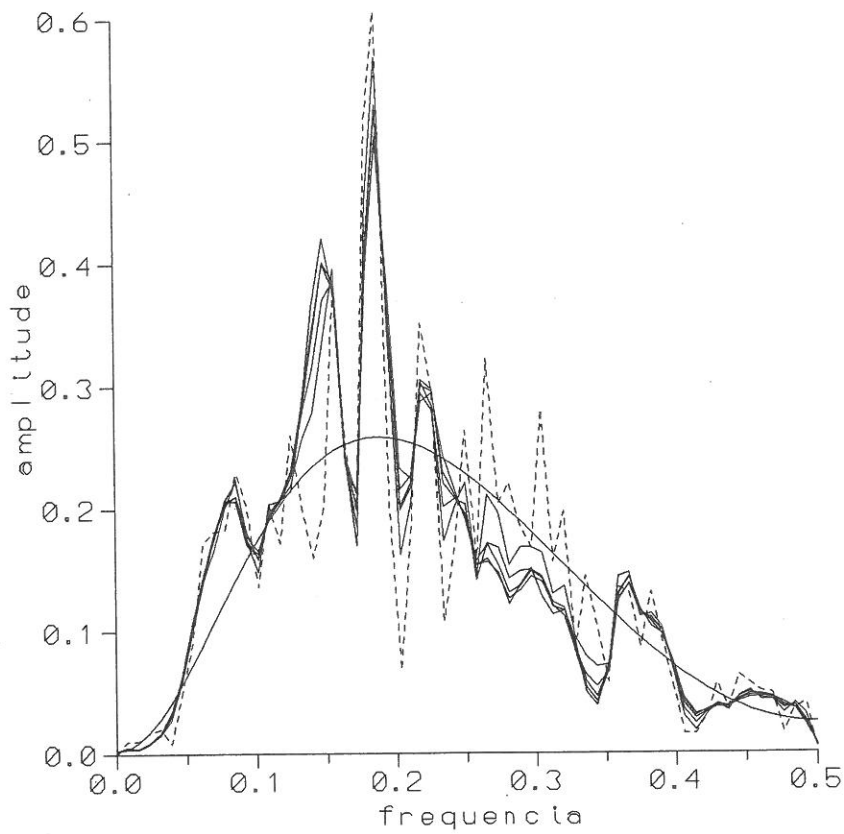


Fig. 42 Processo  $X_t = 0.4 X_{t-1} + \epsilon_t - 0.3 \epsilon_{t-1} - 0.6 \epsilon_{t-2}$

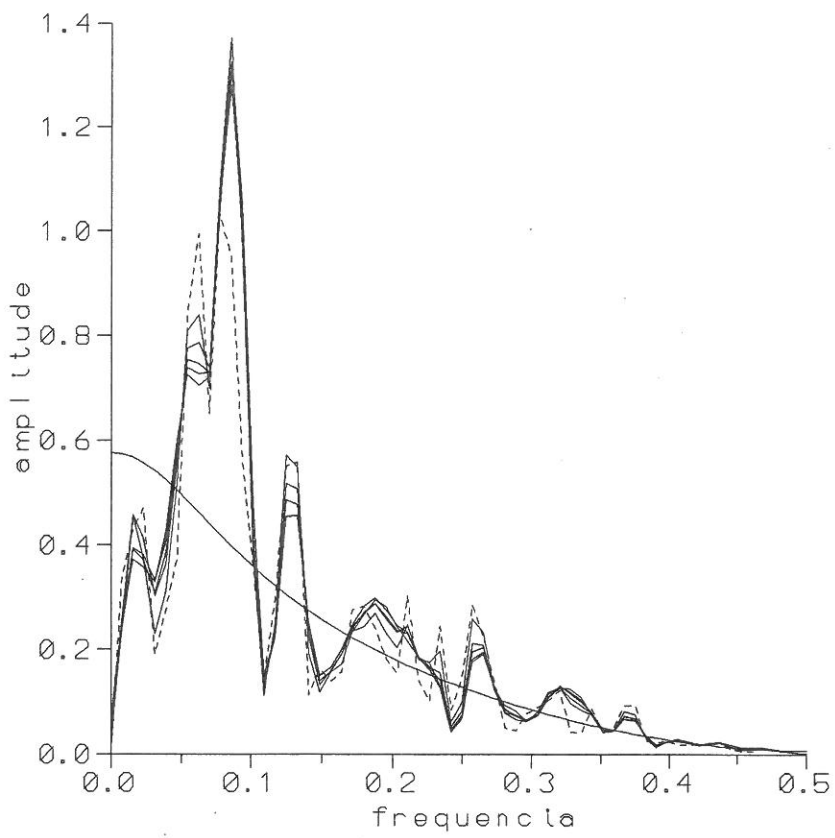


Fig. 43 Processo  $X_t = 0.5 X_{t-1} + \epsilon_t + 0.4 \epsilon_{t-1} - 0.2 \epsilon_{t-2}$

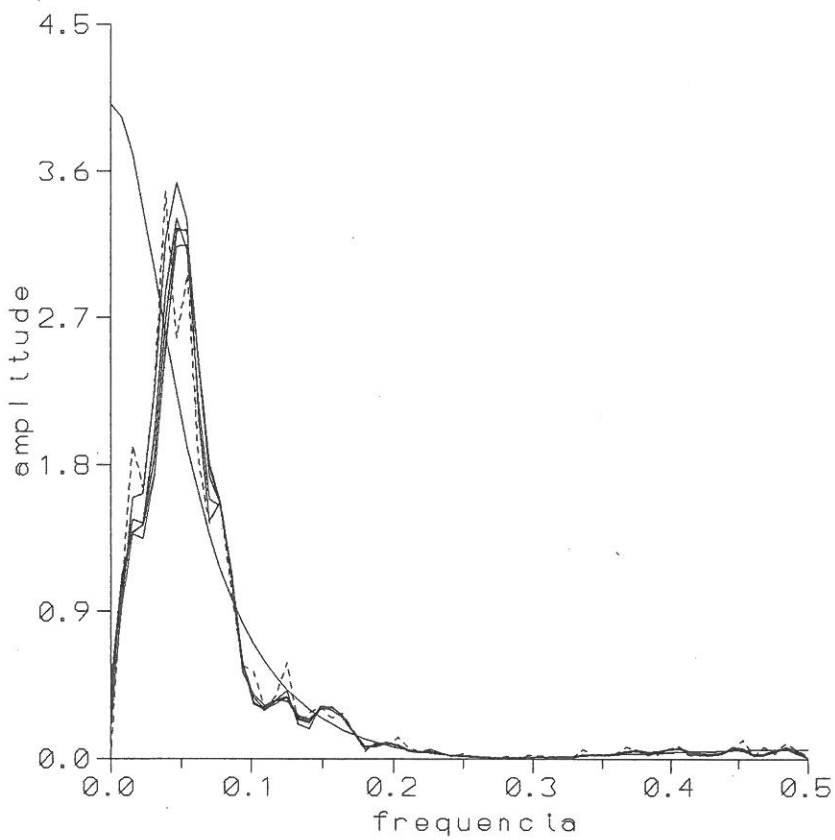


Fig. 44 Processo  $X_t = 0.7 X_{t-1} + \epsilon_t + 0.3 \epsilon_{t-1} + 0.6 \epsilon_{t-2}$

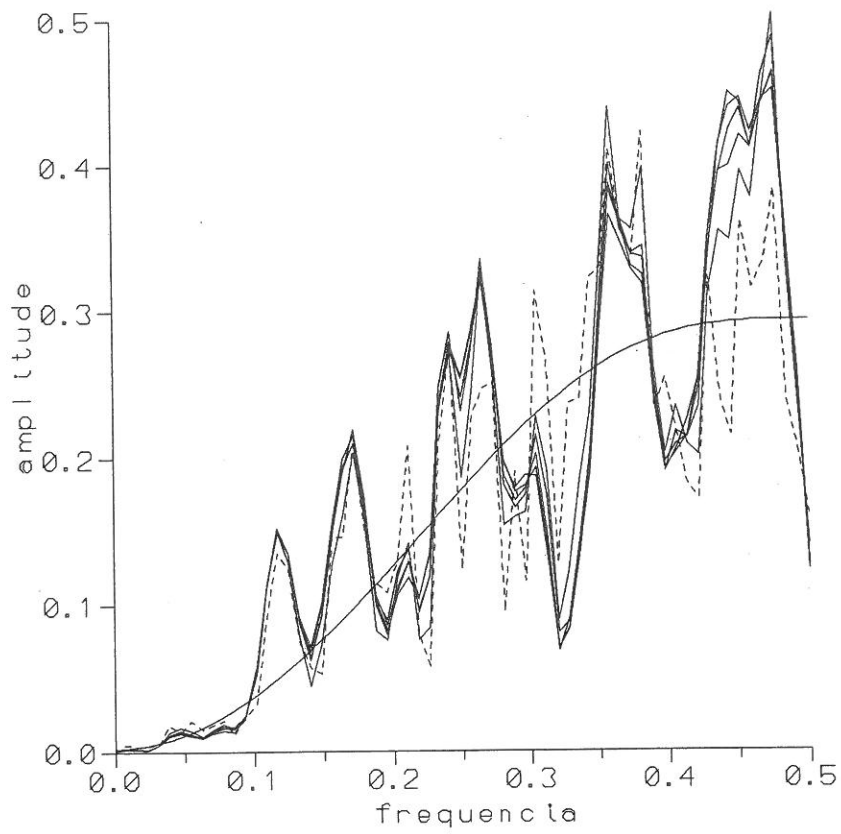


Fig. 45 Processo  $X_t = -0.3 X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5 \varepsilon_{t-1} - 0.3 \varepsilon_{t-2}$

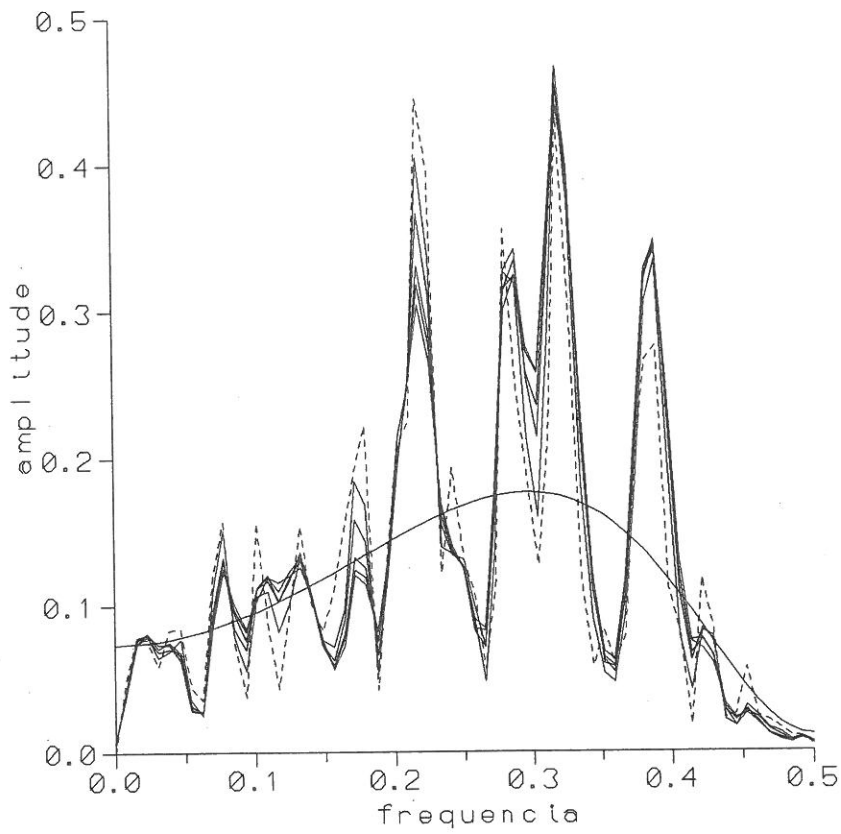


Fig. 46 Processo  $X_t = -0.4 X_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5 \varepsilon_{t-1} - 0.3 \varepsilon_{t-2}$

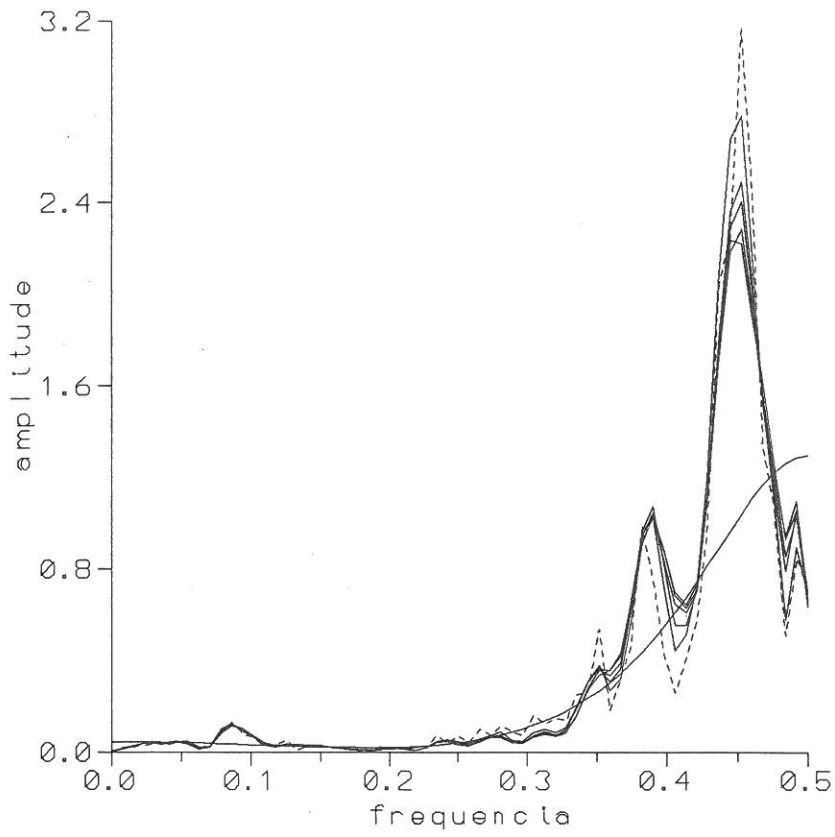


Fig. 47 Processo  $X_t = -0.5 X_{t-1} + \epsilon_t - 0.4 \epsilon_{t-1} + 0.4 \epsilon_{t-2}$

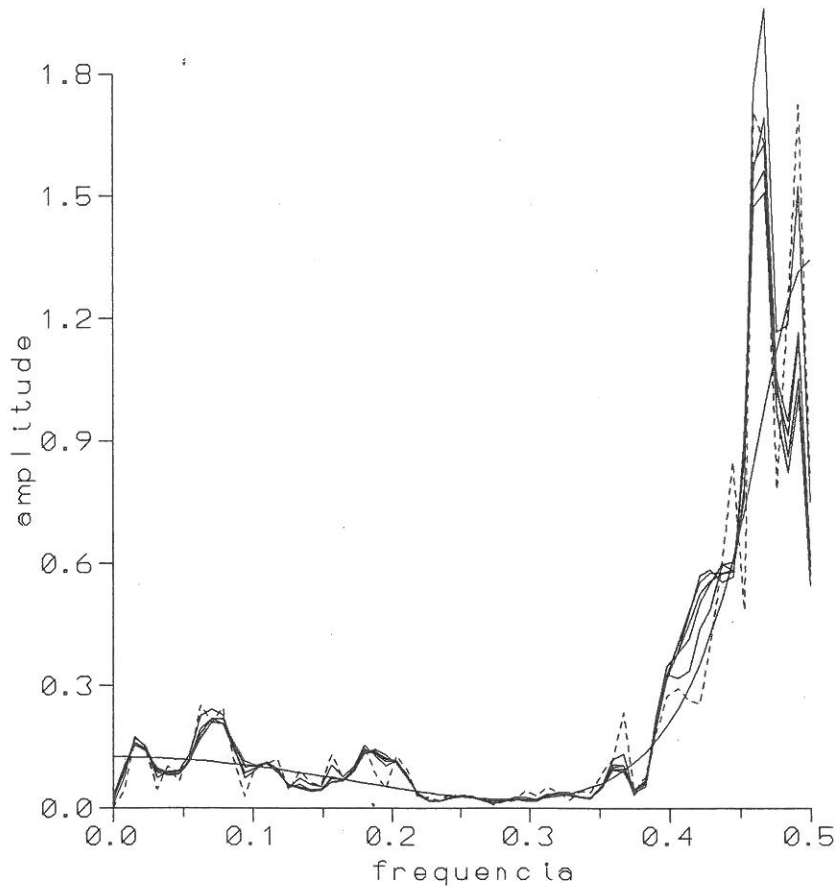


Fig. 48 Processo  $X_t = -0.7 X_{t-1} + \epsilon_t + 0.4 \epsilon_{t-1} + 0.5 \epsilon_{t-2}$

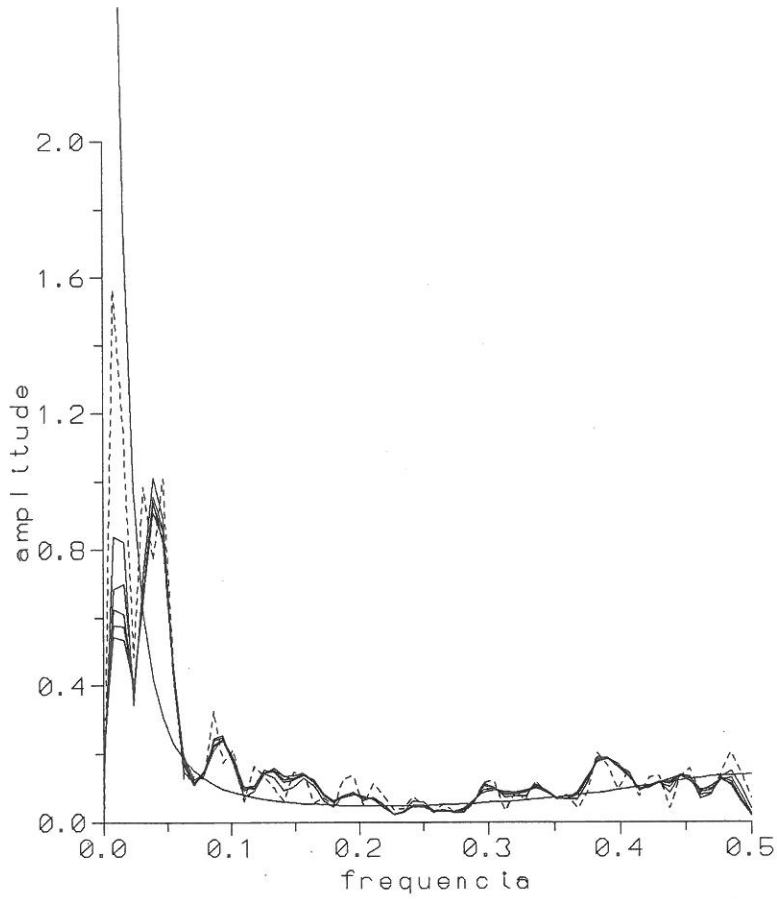


Fig. 49 Processo  $X_t = 0.5 X_{t-1} + 0.4 X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.3 \varepsilon_{t-1}$

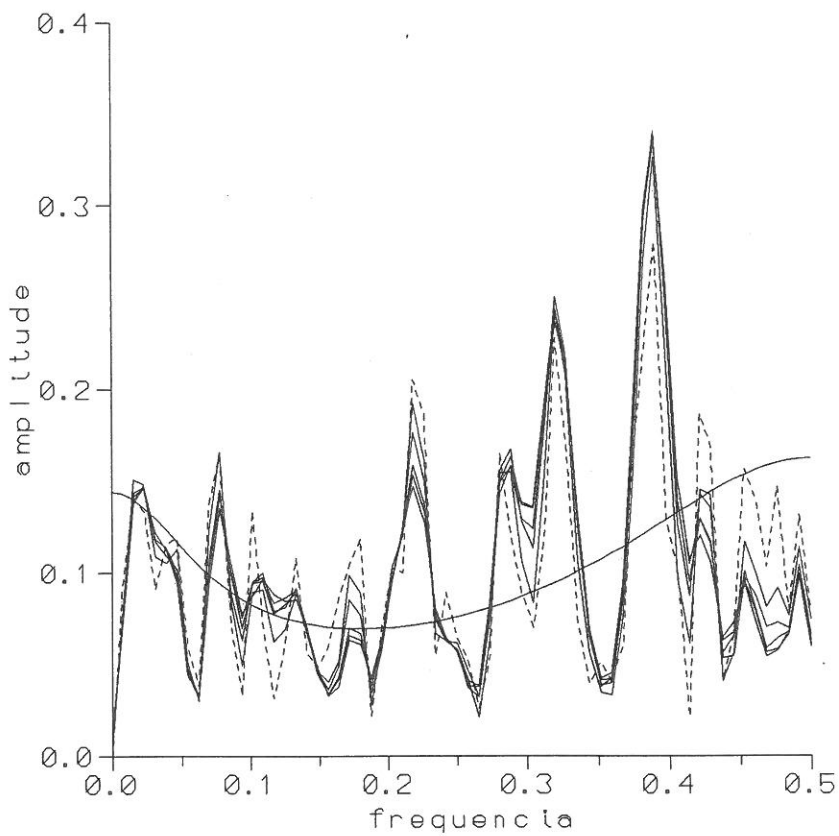


Fig. 50 Processo  $X_t = 0.3 X_{t-1} + 0.2 X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.4 \varepsilon_{t-1}$

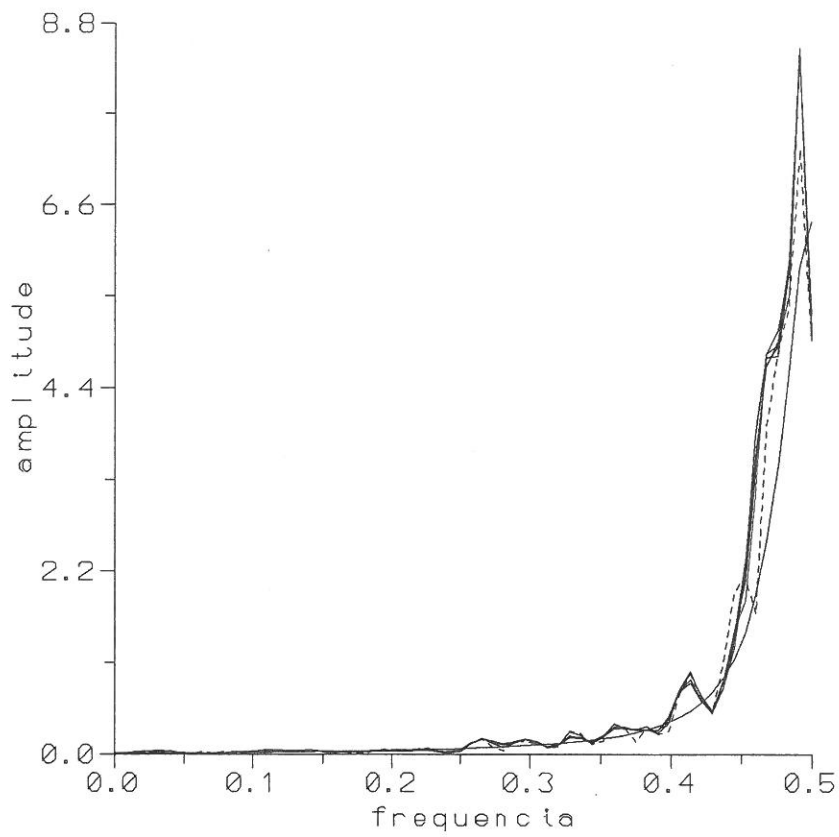


Fig. 51 Processo  $X_t = -0.5 X_{t-1} + 0.3 X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.6 \varepsilon_{t-1}$

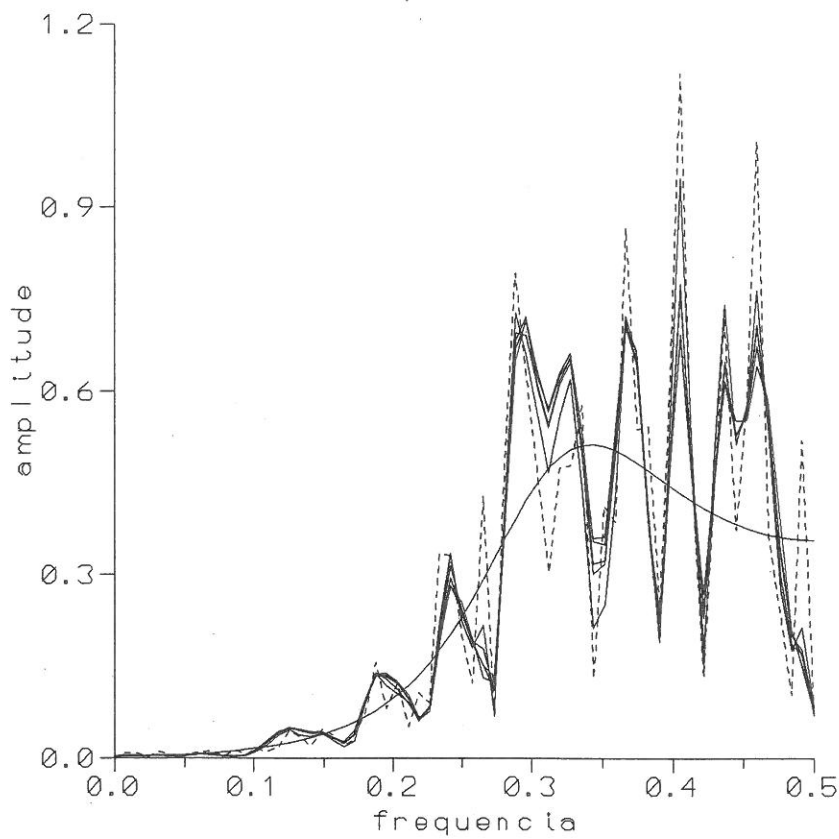


Fig. 52 Processo  $X_t = -0.4 X_{t-1} - 0.3 X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.7 \varepsilon_{t-1}$

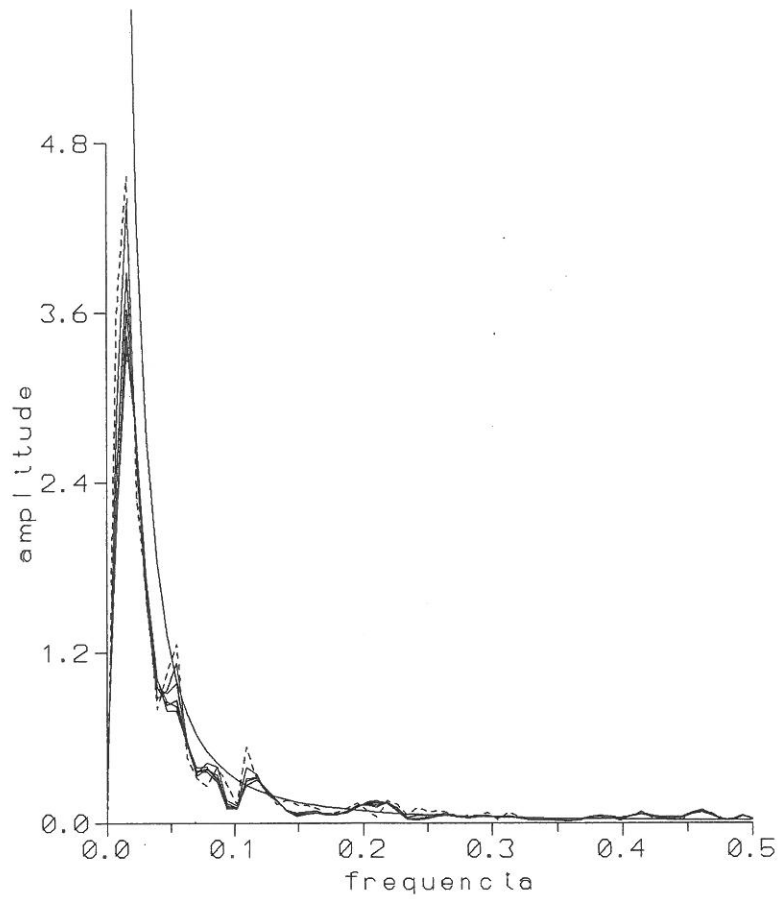


Fig. 53 Processo  $X_t = 0.7 X_{t-1} + 0.2 X_{t-2} + \varepsilon_t + 0.3 \varepsilon_{t-1}$

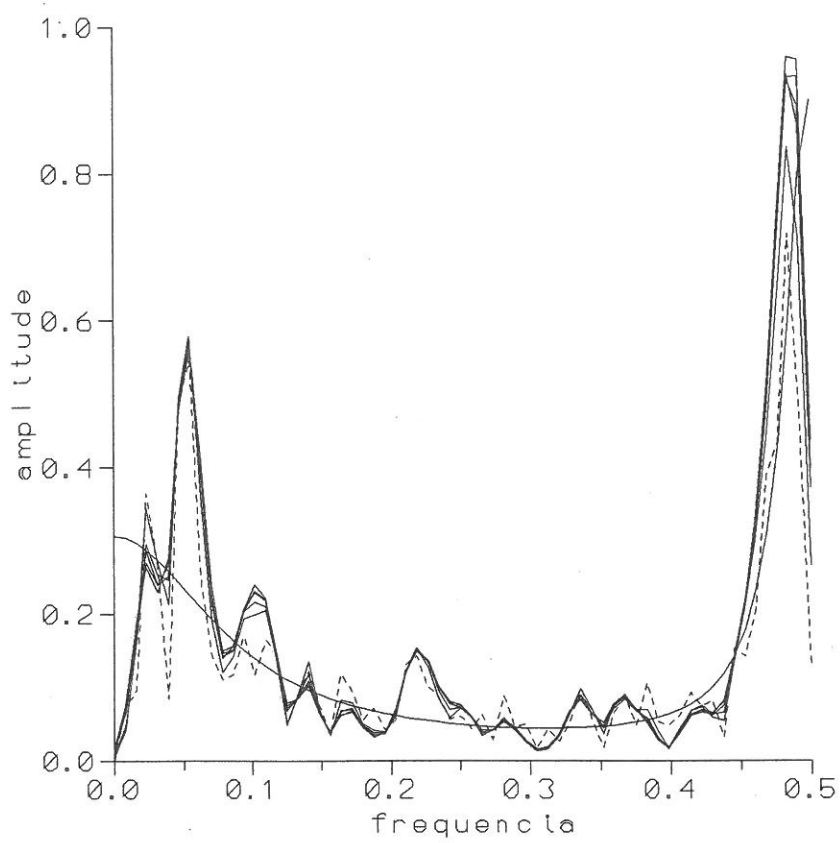


Fig. 54 Processo  $X_t = -0.3 X_{t-1} + 0.5 X_{t-2} + \varepsilon_t + 0.4 \varepsilon_{t-1}$

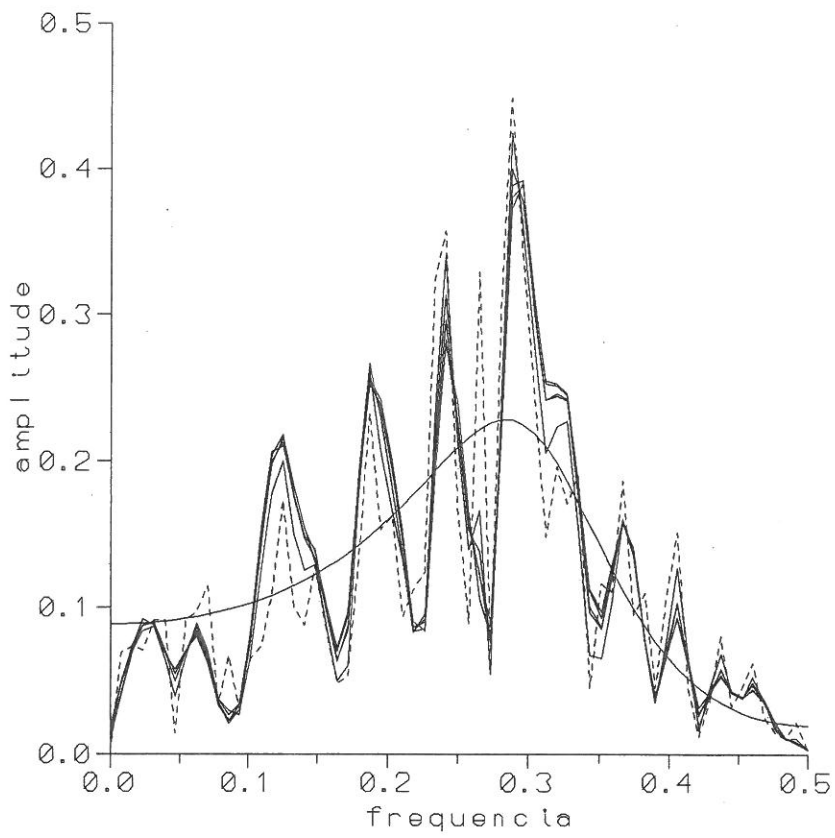


Fig. 55 Processo  $X_t = -0.4 X_{t-1} - 0.3 X_{t-2} + \varepsilon_t + 0.6 \varepsilon_{t-1}$

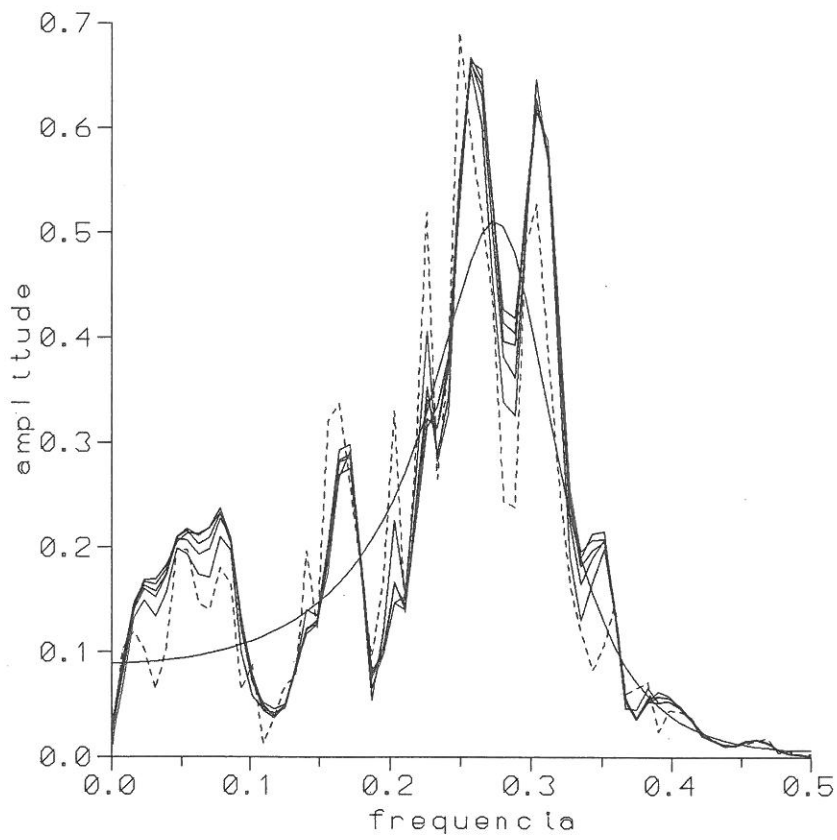


Fig. 56 Processo  $X_t = -0.3 X_{t-1} - 0.5 X_{t-2} + \varepsilon_t + 0.7 \varepsilon_{t-1}$

**ANEXO E**

**Listagem de erros**

Sucessões simuladas do processo AR(1)

Parâmetro 0.3

sem janela	erro = .1805
janela de Welch	erro = .1405
janela de Gauss	erro = .1338
janela de Hamming	erro = .1298
janela de Hanning	erro = .1307
janela de Parzen	erro = .1405

Parâmetro -0.3

sem janela	erro = .3237
janela de Welch	erro = .4881
janela de Gauss	erro = .5286
janela de Hamming	erro = .5129
janela de Hanning	erro = .5197
janela de Parzen	erro = .4971

Parâmetro 0.4

sem janela	erro = .3365
janela de Welch	erro = .3834
janela de Gauss	erro = .4406
janela de Hamming	erro = .4208
janela de Hanning	erro = .4237
janela de Parzen	erro = .4239

Parâmetro -0.4

sem janela	erro = .4487
janela de Welch	erro = .2699
janela de Gauss	erro = .2002
janela de Hamming	erro = .2105
janela de Hanning	erro = .1906
janela de Parzen	erro = .2339

Parâmetro 0.5

sem janela	erro = .7778
janela de Welch	erro = .5686
janela de Gauss	erro = .2991
janela de Hamming	erro = .3425
janela de Hanning	erro = .2840
janela de Parzen	erro = .3795

Parâmetro -0.5

sem janela	erro = .2651
janela de Welch	erro = .2438
janela de Gauss	erro = .2229
janela de Hamming	erro = .2231
janela de Hanning	erro = .2187
janela de Parzen	erro = .2431

Parâmetro 0.6

sem janela	erro = .8444
janela de Welch	erro = 1.2422
janela de Gauss	erro = 1.2858
janela de Hamming	erro = 1.2645
janela de Hanning	erro = 1.2514
janela de Parzen	erro = 1.3985

Parâmetro -0.6

sem janela	erro = .9300
janela de Welch	erro = .5865
janela de Gauss	erro = .8098
janela de Hamming	erro = .7543
janela de Hanning	erro = .8202
janela de Parzen	erro = .7021

Parâmetro 0.7

sem janela	erro = 2.6121
janela de Welch	erro = 3.8013
janela de Gauss	erro = 4.6442
janela de Hamming	erro = 4.4591
janela de Hanning	erro = 4.6083
janela de Parzen	erro = 4.3240

Parâmetro -0.7

sem janela	erro = 2.4261
janela de Welch	erro = 2.0039
janela de Gauss	erro = 1.9696
janela de Hamming	erro = 1.9957
janela de Hanning	erro = 1.9568
janela de Parzen	erro = 1.9264

Sucessões simuladas do processo MA (1)

Parâmetro 0.3

sem janela	erro = .3456
janela de Welch	erro = .4649
janela de Gauss	erro = .6654
janela de Hamming	erro = .6113
janela de Hanning	erro = .6386
janela de Parzen	erro = .6080

Parâmetro -0.3

sem janela	erro = .1978
janela de Welch	erro = .1882
janela de Gauss	erro = .2088
janela de Hamming	erro = .2049
janela de Hanning	erro = .2083
janela de Parzen	erro = .1946

Parâmetro 0.4

sem janela	erro = .2803
janela de Welch	erro = .2586
janela de Gauss	erro = .2581
janela de Hamming	erro = .2599
janela de Hanning	erro = .2550
janela de Parzen	erro = .2598

Parâmetro -0.4

sem janela	erro = .3379
janela de Welch	erro = .2595
janela de Gauss	erro = .2460
janela de Hamming	erro = .2469
janela de Hanning	erro = .2358
janela de Parzen	erro = .2649

Parâmetro 0.5

sem janela	erro = .5293
janela de Welch	erro = .4883
janela de Gauss	erro = .4064
janela de Hamming	erro = .4304
janela de Hanning	erro = .4038
janela de Parzen	erro = .4378

Parâmetro -0.5

sem janela	erro = .3714
janela de Welch	erro = .3184
janela de Gauss	erro = .2782
janela de Hamming	erro = .2812
janela de Hanning	erro = .2748
janela de Parzen	erro = .2956

Parâmetro 0.6

sem janela	erro = .4240
janela de Welch	erro = .3385
janela de Gauss	erro = .2853
janela de Hamming	erro = .2994
janela de Hanning	erro = .2850
janela de Parzen	erro = .3009

Parâmetro -0.6

sem janela	erro = .4852
janela de Welch	erro = .4541
janela de Gauss	erro = .3722
janela de Hamming	erro = .3793
janela de Hanning	erro = .3778
janela de Parzen	erro = .3925

Parâmetro 0.7

sem janela	erro = .4392
janela de Welch	erro = .3181
janela de Gauss	erro = .4940
janela de Hamming	erro = .4450
janela de Hanning	erro = .4665
janela de Parzen	erro = .3884

Parâmetro -0.7

sem janela	erro = .6744
janela de Welch	erro = .5117
janela de Gauss	erro = .4803
janela de Hamming	erro = .4831
janela de Hanning	erro = .4592
janela de Parzen	erro = .5184

Sucessões simuladas do processo AR (2)

Parâmetros 0.3 0.4

sem janela	erro = 1.1589
janela de Welch	erro = .7819
janela de Gauss	erro = .4624
janela de Hamming	erro = .5164
janela de Hanning	erro = .4625
janela de Parzen	erro = .5859

Parâmetros -0.4 0.5

sem janela	erro = 10.3765
janela de Welch	erro = 15.1222
janela de Gauss	erro = 22.0501
janela de Hamming	erro = 20.1884
janela de Hanning	erro = 24.7754
janela de Parzen	erro = 18.2522

Parâmetros 0.4 0.2

sem janela	erro = .8704
janela de Welch	erro = 1.0842
janela de Gauss	erro = .7531
janela de Hamming	erro = .8244
janela de Hanning	erro = .7207
janela de Parzen	erro = .9580

Parâmetros -0.5 0.3

sem janela	erro = 5.6738
janela de Welch	erro = 7.8358
janela de Gauss	erro = 7.4705
janela de Hamming	erro = 7.8046
janela de Hanning	erro = 7.7032
janela de Parzen	erro = 7.1243

Parâmetros 0.5 0.3

sem janela	erro = 6.4029
janela de Welch	erro = 5.0460
janela de Gauss	erro = 4.8856
janela de Hamming	erro = 4.9101
janela de Hanning	erro = 5.1177
janela de Parzen	erro = 4.5749

Parâmetros -0.5 -0.2

sem janela	erro = .3206
janela de Welch	erro = .3028
janela de Gauss	erro = .3076
janela de Hamming	erro = .3064
janela de Hanning	erro = .3090
janela de Parzen	erro = .3017

Parâmetros 0.5 -0.4

sem janela	erro = .4261
janela de Welch	erro = .4571
janela de Gauss	erro = .5812
janela de Hamming	erro = .5463
janela de Hanning	erro = .5596
janela de Parzen	erro = .5166

Parâmetros -0.3 -0.4

sem janela	erro = .5351
janela de Welch	erro = .3638
janela de Gauss	erro = .3945
janela de Hamming	erro = .3873
janela de Hanning	erro = .3845
janela de Parzen	erro = .3881

Parâmetros 0.3 -0.3

sem janela	erro = .3464
janela de Welch	erro = .3584
janela de Gauss	erro = .2732
janela de Hamming	erro = .2980
janela de Hanning	erro = .2916
janela de Parzen	erro = .2793

Parâmetros -0.4 -0.4

sem janela	erro = .3221
janela de Welch	erro = .2679
janela de Gauss	erro = .2526
janela de Hamming	erro = .2575
janela de Hanning	erro = .2496
janela de Parzen	erro = .2687

Sucessões simuladas do processo MA (2)

Parâmetros 0.3 0.4

sem janela	erro = .4776
janela de Welch	erro = .3671
janela de Gauss	erro = .2674
janela de Hamming	erro = .2850
janela de Hanning	erro = .2596
janela de Parzen	erro = .3242

Parâmetros -0.4 0.5

sem janela	erro = .5921
janela de Welch	erro = .7228
janela de Gauss	erro = .8398
janela de Hamming	erro = .8290
janela de Hanning	erro = .8404
janela de Parzen	erro = .7764

Parâmetros 0.4 0.2

sem janela	erro = .3064
janela de Welch	erro = .4226
janela de Gauss	erro = .4268
janela de Hamming	erro = .4244
janela de Hanning	erro = .4368
janela de Parzen	erro = .4355

Parâmetros -0.5 0.3

sem janela	erro = .4059
janela de Welch	erro = .4488
janela de Gauss	erro = .4318
janela de Hamming	erro = .4368
janela de Hanning	erro = .4322
janela de Parzen	erro = .4375

Parâmetros 0.5 0.3

sem janela	erro = .4179
janela de Welch	erro = .4578
janela de Gauss	erro = .6340
janela de Hamming	erro = .6030
janela de Hanning	erro = .6380
janela de Parzen	erro = .5348

Parâmetros -0.5 -0.2

sem janela	erro = .2754
janela de Welch	erro = .2953
janela de Gauss	erro = .2762
janela de Hamming	erro = .2786
janela de Hanning	erro = .2713
janela de Parzen	erro = .2793

Parâmetros 0.5 -0.4

sem janela	erro = .6449
janela de Welch	erro = .7063
janela de Gauss	erro = .7856
janela de Hamming	erro = .7904
janela de Hanning	erro = .7944
janela de Parzen	erro = .7553

Parâmetros -0.3 -0.4

sem janela	erro = .3302
janela de Welch	erro = .5272
janela de Gauss	erro = .9349
janela de Hamming	erro = .7820
janela de Hanning	erro = .8518
janela de Parzen	erro = .8672

Parâmetros 0.3 -0.3

sem janela	erro = .4423
janela de Welch	erro = .2754
janela de Gauss	erro = .2475
janela de Hamming	erro = .2569
janela de Hanning	erro = .2511
janela de Parzen	erro = .2569

Parâmetros -0.4 -0.4

sem janela	erro = .1858
janela de Welch	erro = .1857
janela de Gauss	erro = .2271
janela de Hamming	erro = .2135
janela de Hanning	erro = .2244
janela de Parzen	erro = .2067

Sucessões simuladas do processo ARMA (1,1)

Parâmetros 0.5 0.4

sem janela	erro = .3207
janela de Welch	erro = .4360
janela de Gauss	erro = .4793
janela de Hamming	erro = .4734
janela de Hanning	erro = .4830
janela de Parzen	erro = .4597

Parâmetros 0.6 -0.3

sem janela	erro = 1.7504
janela de Welch	erro = 1.7398
janela de Gauss	erro = 1.3573
janela de Hamming	erro = 1.4330
janela de Hanning	erro = 1.3954
janela de Parzen	erro = 1.5173

Parâmetros 0.5 0.5

sem janela	erro = .2823
janela de Welch	erro = .2480
janela de Gauss	erro = .1972
janela de Hamming	erro = .2062
janela de Hanning	erro = .1934
janela de Parzen	erro = .2266

Parâmetros 0.4 -0.6

sem janela	erro = 1.0881
janela de Welch	erro = 1.1969
janela de Gauss	erro = 1.1998
janela de Hamming	erro = 1.2110
janela de Hanning	erro = 1.2671
janela de Parzen	erro = 1.1576

Parâmetros 0.4 0.6

sem janela	erro = .3300
janela de Welch	erro = .2867
janela de Gauss	erro = .2259
janela de Hamming	erro = .2466
janela de Hanning	erro = .2276
janela de Parzen	erro = .2436

Parâmetros -0.5 -0.5

sem janela	erro = .2473
janela de Welch	erro = .1897
janela de Gauss	erro = .1927
janela de Hamming	erro = .1892
janela de Hanning	erro = .1896
janela de Parzen	erro = .1966

Parâmetros -0.3 0.7

sem janela	erro = 2.1457
janela de Welch	erro = 2.0582
janela de Gauss	erro = 1.6301
janela de Hamming	erro = 1.7256
janela de Hanning	erro = 1.6599
janela de Parzen	erro = 1.7831

Parâmetros -0.5 -0.7

sem janela	erro = .1870
janela de Welch	erro = .1604
janela de Gauss	erro = .1938
janela de Hamming	erro = .1861
janela de Hanning	erro = .1932
janela de Parzen	erro = .1774

Parâmetros -0.5 0.5

sem janela	erro = 1.6746
janela de Welch	erro = 1.1352
janela de Gauss	erro = 1.0740
janela de Hamming	erro = 1.0668
janela de Hanning	erro = 1.0508
janela de Parzen	erro = 1.0805

Parâmetros -0.6 -0.4

sem janela	erro = .2155
janela de Welch	erro = .1928
janela de Gauss	erro = .1916
janela de Hamming	erro = .1891
janela de Hanning	erro = .1891
janela de Parzen	erro = .1981

Sucessões simuladas do processo ARMA (1,2)

Parâmetros 0.3 0.5 0.4

sem janela	erro =	.3616
janela de Welch	erro =	.2540
janela de Gauss	erro =	.2875
janela de Hamming	erro =	.2796
janela de Hanning	erro =	.2798
janela de Parzen	erro =	.2709

Parâmetros -0.3 0.5 0.3

sem janela	erro =	.2729
janela de Welch	erro =	.3586
janela de Gauss	erro =	.4091
janela de Hamming	erro =	.3927
janela de Hanning	erro =	.4111
janela de Parzen	erro =	.4077

Parâmetros 0.4 0.3 0.6

sem janela	erro =	.3763
janela de Welch	erro =	.2540
janela de Gauss	erro =	.2328
janela de Hamming	erro =	.2475
janela de Hanning	erro =	.2412
janela de Parzen	erro =	.2308

Parâmetros -0.4 -0.5 0.3

sem janela	erro =	.4365
janela de Welch	erro =	.4614
janela de Gauss	erro =	.4508
janela de Hamming	erro =	.4397
janela de Hanning	erro =	.4248
janela de Parzen	erro =	.4718

Parâmetros 0.5 -0.4 0.2

sem janela	erro =	1.7834
janela de Welch	erro =	2.6650
janela de Gauss	erro =	2.2180
janela de Hamming	erro =	2.3772
janela de Hanning	erro =	2.3511
janela de Parzen	erro =	2.3984

Parâmetros -0.5 0.4 -0.4

sem janela	erro =	11.1914
janela de Welch	erro =	10.5674
janela de Gauss	erro =	6.0491
janela de Hamming	erro =	6.9529
janela de Hanning	erro =	6.0442
janela de Parzen	erro =	7.5528

Parâmetros 0.6 0.2 -0.5

sem janela	erro =	4.2869
janela de Welch	erro =	5.0556
janela de Gauss	erro =	3.3507
janela de Hamming	erro =	3.8706
janela de Hanning	erro =	3.7206
janela de Parzen	erro =	3.7281

Parâmetros -0.6 -0.5 -0.3

sem janela	erro =	.4134
janela de Welch	erro =	.3460
janela de Gauss	erro =	.3359
janela de Hamming	erro =	.3414
janela de Hanning	erro =	.3350
janela de Parzen	erro =	.3299

Parâmetros 0.7 -0.3 -0.6

sem janela	erro =	17.5942
janela de Welch	erro =	21.4462
janela de Gauss	erro =	22.8994
janela de Hamming	erro =	22.1716
janela de Hanning	erro =	22.7029
janela de Parzen	erro =	22.6304

Parâmetros -0.7 -0.4 -0.5

sem janela	erro =	1.9793
janela de Welch	erro =	2.3180
janela de Gauss	erro =	1.8105
janela de Hamming	erro =	1.8112
janela de Hanning	erro =	1.8193
janela de Parzen	erro =	1.8551

Sucessões simuladas do processo ARMA (2,1)

Parâmetros 0.5 0.4 0.3

sem janela	erro =	4.8681
janela de Welch	erro =	8.5430
janela de Gauss	erro =	10.2223
janela de Hamming	erro =	9.9505
janela de Hanning	erro =	10.5126
janela de Parzen	erro =	9.4522

Parâmetros 0.7 0.2 -0.3

sem janela	erro =	97.9136
janela de Welch	erro =	110.8357
janela de Gauss	erro =	131.4848
janela de Hamming	erro =	128.5585
janela de Hanning	erro =	133.3066
janela de Parzen	erro =	121.7535

Parâmetros 0.3 0.2 0.4

sem janela	erro =	.2083
janela de Welch	erro =	.2514
janela de Gauss	erro =	.2776
janela de Hamming	erro =	.2695
janela de Hanning	erro =	.2704
janela de Parzen	erro =	.2737

Parâmetros -0.3 0.5 -0.4

sem janela	erro =	1.0783
janela de Welch	erro =	.8989
janela de Gauss	erro =	.8630
janela de Hamming	erro =	.8490
janela de Hanning	erro =	.8218
janela de Parzen	erro =	.8913

Parâmetros 0.2 -0.4 0.5

sem janela	erro =	.4123
janela de Welch	erro =	.7164
janela de Gauss	erro =	.9166
janela de Hamming	erro =	.8599
janela de Hanning	erro =	.9041
janela de Parzen	erro =	.8756

Parâmetros 0.6 -0.3 -0.5

sem janela	erro =	2.1799
janela de Welch	erro =	1.1112
janela de Gauss	erro =	.9702
janela de Hamming	erro =	.9991
janela de Hanning	erro =	1.0055
janela de Parzen	erro =	.9747

Parâmetros -0.5 0.3 0.6

sem janela	erro =	9.9262
janela de Welch	erro =	18.2967
janela de Gauss	erro =	20.8489
janela de Hamming	erro =	20.3714
janela de Hanning	erro =	21.7674
janela de Parzen	erro =	20.7810

Parâmetros -0.4 -0.3 -0.6

sem janela	erro =	.2654
janela de Welch	erro =	.2378
janela de Gauss	erro =	.2128
janela de Hamming	erro =	.2217
janela de Hanning	erro =	.2169
janela de Parzen	erro =	.2248

Parâmetros -0.4 -0.3 0.7

sem janela	erro =	2.0997
janela de Welch	erro =	1.4937
janela de Gauss	erro =	.9898
janela de Hamming	erro =	1.1158
janela de Hanning	erro =	.9891
janela de Parzen	erro =	1.1548

Parâmetros -0.3 -0.5 -0.7

sem janela	erro =	.4743
janela de Welch	erro =	.4460
janela de Gauss	erro =	.4624
janela de Hamming	erro =	.4520
janela de Hanning	erro =	.4518
janela de Parzen	erro =	.4459