

Universidade de Lisboa



**O desenvolvimento do pensamento crítico de alunos do 10.º ano no estudo da
função quadrática**

Maria Ataíde Ferreira

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino
Secundário

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Orientado pelo Professor Doutor Alessandro Ribeiro e coorientado pela

Professora Doutora Isabel Ferreirim

Professora cooperante: Ana Luísa Paiva

Lisboa

2022

Resumo

O presente estudo incide na minha intervenção com uma turma do 10º ano de escolaridade da Escola Secundária Padre António Vieira, situada em Lisboa. A intervenção contemplou seis aulas de 100 minutos e duas aulas de 50 minutos de duração, onde lecionei a subunidade didática *Função quadrática*. O objetivo deste trabalho foi explorar e compreender o desenvolvimento do pensamento crítico de alunos do 10.º ano no estudo da função quadrática, pretendendo dar resposta a três questões de investigação: “*Quais as características necessárias numa tarefa sobre funções quadráticas que promovam o pensamento crítico do aluno?*”, “*De que forma diferentes tarefas envolvendo funções quadráticas permitem o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno?*” e por último “*Que contribuições a discussão traz para o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno?*”. Foi desenvolvido um estudo exploratório de natureza qualitativa, cuja recolha de dados foi realizada através de observação participante, com um diário de bordo e registos áudio e vídeo; realização de entrevistas e recolha dos documentos escritos pelos alunos, neste caso, a resolução das tarefas propostas. Após ser realizada a análise de dados, concluiu-se que as tarefas que mais contribuem para o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos são as do tipo “problemas não-rotineiros”, a análise crítica da explicação matemática de um procedimento ou conceito e a análise crítica de estratégias de resolução de problemas. Para desenvolver esta competência deve optar-se por um ambiente de aprendizagem de carácter exploratório e priorizar o trabalho cooperativo entre os alunos. O questionamento realizado pela professora demonstrou-se proveitoso como estratégia de suporte. Por fim, importa destacar a fase da discussão, tanto entre dois grupos como entre toda a turma, que nos revelou favorecer particularmente a capacidade de pensar criticamente dos alunos.

Palavras-chave: educação; matemática; função quadrática; pensamento crítico; competência transversal.

Abstract

The present study relates to my intervention with a 10th grade class of students at Escola Secundária Padre Antonio Vieira, situated in Lisbon. The intervention consisted of six class sessions lasting 100 minutes and two class sessions lasting 50 minutes, wherein I lectured on a curriculum subunit in *quadratic functions*. The goal of this work was to explore and understand the development of critical thinking of 10th grade students in the study of quadratic functions, in order to attempt to answer the following three research questions: “*Which are the necessary characteristics in a task pertaining to quadratic functions that tend to promote critical thinking in a student?*”, “*How do different tasks involving quadratic functions enable the development of students’ critical thinking?*” and “*Which contributions do the discussions bring to the student’s critical thinking development?*”. An exploratory study of qualitative nature was developed, with the respective data collection having been done through participating observations, with an ongoing ledger diary, video and audio data, interviews, collection of documents written by students showcasing the resolution of the different proposed tasks. Once the data analysis had been completed, it was concluded that the tasks that contribute most to the development of critical thinking in students are those that are about “non-routine problems” in nature, about critical analysis of mathematical explanations of procedures or concepts, and about strategic analysis of problem solving. To develop this skill, an exploratory learning environment should be chosen as well as the prioritization of cooperative tasks among students. The questioning conducted by the teacher proved to be fruitful as a supporting strategy. Finally, it’s important to note the discussion stage, between groups of students as well as among the entire class of students, proved itself to particularly favor and support students’ critical thinking capabilities.

Keywords: education; mathematics; quadratic functions; critical thinking; skills

Agradeço

Aos meus pais, que sempre me têm tentado ensinar a pensar criticamente.

Ao Professor Doutor Alessandro Ribeiro, por me orientar verdadeiramente desde o primeiro dia de aulas até à entrega deste relatório, pela sua metódica organização, partilha de conhecimento e pelas suas palavras de força constantes.

À Professora Doutora Isabel Ferreirim, pelo seu rigor, pela sua infinita disponibilidade e valiosos conselhos, pela sua total dedicação durante este ano letivo. Pela sua exigência acompanhada, em igual medida, de encorajamento.

À Professora cooperante Ana Luísa Pais, por me ter recebido na escola fazendo-me sentir sua colega, pela sua extrema flexibilidade e disponibilidade, mesmo quando assoberbada de trabalho, pela autonomia que me concedeu enquanto, simultaneamente, me orientou, por ter partilhado comigo toda a sua experiência.

À minha colega de estágio Rita Nunes, pelo seu papel fundamental na recolha dos dados, pela ajuda nos momentos mais desafiantes, por toda a sua amizade.

A todos vós, pelo verdadeiro trabalho cooperativo realizado, que transformou este relatório num trabalho de equipa e não individual, tornando-o muito mais rico.

À Professora Doutora Hélia Oliveira, pelo exemplo como professora que me deu durante todo o ciclo de estudos, mostrando-me a forma como um dia espero conseguir dar aulas, pelas palavras de força constantes, pela extrema dedicação e atenção a este mestrado e cada um dos seus alunos.

Ao meu marido Rui, por me escutar, aconselhar e abraçar.

A ti Camila, pelo teu sorriso em cada manhã.

Índice

1. Introdução.....	1
1.1. Apresentação do estudo e problemática.....	1
1.2. Motivação para o estudo.....	2
2. Enquadramento curricular e didático.....	4
2.1. Pensamento crítico.....	4
2.2. Pensamento crítico e orientações curriculares.....	5
2.3. Pensamento crítico e matemática.....	6
2.4. A função quadrática.....	7
2.5. Opções didáticas-metodológicas de ensino.....	8
2.5.1. Ensino-aprendizagem exploratório.....	8
2.5.2. Ensino-aprendizagem dialógico.....	9
2.5.3. Resolução de problemas.....	9
2.5.4. Recurso às tecnologias digitais.....	10
3. A unidade (ou subunidade) didática.....	11
3.1. Caracterização da escola.....	11
3.2. Caracterização da turma.....	12
3.3. Ancoragem da subunidade didática no programa da disciplina.....	12
3.4. Estratégias de ensino.....	13
3.4.1. A aprendizagem cooperativa na promoção do pensamento crítico.....	14
3.4.2. Questionamento.....	14
3.4.3. Tipos de tarefas e estrutura da aula.....	15
3.5. Planificação.....	16
3.6. Avaliação.....	17
3.7. Dificuldades dos alunos.....	17
4. Métodos e procedimentos de recolha de dados.....	19
4.1. Opções metodológicas.....	19
4.2. Participantes.....	20
4.3. Questões éticas.....	22
4.4. Procedimentos e instrumentos de recolha de dados.....	22
4.5. A análise de dados.....	24
5. Análise de dados.....	28
5.1. Análise das aulas.....	28
5.2. Análise das entrevistas.....	84
6. Conclusões.....	95
7. Reflexão.....	104
7.1. A intervenção.....	104
7.2. As minhas aprendizagens.....	107
7.3. O ciclo de estudos.....	108
8. Referências.....	110
9. Anexos.....	114

Índice de Figuras

Figura 1 - Ações intencionais do professor na prática de ensino exploratório da matemática	28
Figura 2 – Resolução da alínea 1.1 d) pelo grupo da Bruna.....	31
Figura 3 – Resolução da alínea 1.1 g) pelo grupo da Bruna.....	32
Figura 4 – Resolução da alínea 1.1 c) pelo grupo da Bruna	35
Figura 5 – Resolução da alínea 3.2 pelo grupo da Bruna	36
Figura 6 – Resolução da alínea 2.2 pelo grupo do Rui	36
Figura 7 – Resolução da alínea 2.2 pelo grupo da Andreia	37
Figura 8 – Partilha de trabalhos entre 2 grupos	42
Figura 9 – Resolução da questão 4 do grupo I pelo grupo do Rui	46
Figura 10 – Resolução da questão 1b) do grupo I pelo grupo da Bruna	47
Figura 11 – Resolução da questão 3 do grupo I pelo grupo da Bruna	47
Figura 12 – Resolução da questão 3 do grupo II pelo grupo da Bruna	47
Figura 13 – Resolução da questão 1 pelo grupo do Rui	51
Figura 14 – Resolução da alínea 1.4 pelo grupo do Rui	52
Figura 15 – Resolução da alínea 1.4 pelo grupo da Bruna	52
Figura 16 - Resolução da questão 1 pelo grupo da Andreia	53
Figura 17 – Fotografia das anotações da Professora no quadro durante a discussão coletiva	55
Figura 18 – Fotografia das anotações da Professora no quadro durante a discussão coletiva	55
Figura 19 – Fotografia das anotações da Professora no quadro durante a discussão coletiva	56
Figura 20 – Resolução da questão 1 a) pelo grupo do Rui	59
Figura 21 – Final da resolução da questão 1 b) pelo grupo da Andreia	60
Figura 22 – Resolução da questão 1 c) e 1d) pelo grupo da Andreia	60
Figura 23 – Primeira fotografia do quadro	62
Figura 24 – Segunda fotografia do quadro	62
Figura 25 – Fotografia do quadro durante a discussão coletiva	65

Figura 26 – Resolução do problema pelo grupo da Bruna	70
Figura 27 – Resolução do problema pelo grupo da Bruna	72
Figura 28 – Resolução do problema pelo grupo da Andreia	72
Figura 29 – Análise da resolução da Sara e do Leonardo pelo grupo da Bruna	73
Figura 30 – Análise da resolução do Francisco pelo grupo da Bruna	73
Figura 31 – Análise da resolução do Carlos pelo grupo da Bruna	74
Figura 32 – Análise da resolução da Sara e do Leonardo pelo grupo da Andreia ...	74
Figura 33 – Análise da resolução da Matilde e do Carlos pelo grupo Andreia	75
Figura 34 – Resolução no quadro feita pela aluna Catarina	77
Figura 35 – Resolução do problema no quadro pela aluna Nicole	78
Figura 36 – Resolução do problema no quadro pela aluna Nicole.....	79
Figura 37 – Análise da resolução da Sara no quadro pela Bruna	80

Índice de Tabelas

Tabela 1 - Planificação das aulas lecionadas.....	17
Tabela 2 - Organização dos tipos de dados recolhidos em cada aula	25
Tabela 3 - Organização dos registos áudio recolhidos em cada aula por grupo	25
Tabela 4 - Ancoragem da subunidade didática no programa da disciplina	26
Tabela 5 - Estrutura da tarefa	26
Tabela 6 - Pensamento Crítico.....	27

Índice de Anexos

Anexo 1 – Pedido de autorização para recolha de dados.....	115
Anexo 2 – Pedido de autorização participantes.....	116
Anexo 3 – Diário de bordo.....	117
Anexo 4 – Plano de aula 1.....	118
Anexo 5 – Plano de aula 2.....	124
Anexo 6 – Plano de aula 3.....	128
Anexo 7 – Plano de aula 4.....	133
Anexo 8 – Plano de aula 5.....	138
Anexo 9 – Plano de aula 6.....	144
Anexo 10 - Plano de aula 7.....	150
Anexo 11 – Questão-aula.....	156
Anexo 12 – Guião da entrevista.....	159

1. Introdução

É uma característica da mente educada ser capaz de considerar um pensamento sem ter de o aceitar.
Aristóteles, *Ética a Nicómaco*

1.1. Apresentação do estudo e problemática

Este estudo tem por base uma proposta pedagógica da unidade de ensino inserida no tema *Funções*, subtema *Função Quadrática*. Foi desenvolvido numa turma de 10º ano da área de Ciências e Tecnologias, Escola Secundária Padre António Vieira, durante aproximadamente cinco aulas de 100 minutos e duas aulas de 50 minutos, no início do segundo semestre do ano letivo 2021/2022. O seu objetivo é explorar e compreender o desenvolvimento do pensamento crítico de alunos do 10.º ano no estudo da função quadrática.

Este estudo pretende responder a três questões de investigação:

-Quais as características necessárias numa tarefa sobre funções quadráticas que promovam o pensamento crítico do aluno?

Com esta questão pretendi analisar as diversas tarefas e a forma como devem ser preparadas ou selecionadas para promover o desenvolvimento desta competência transversal.

-De que forma diferentes tarefas envolvendo funções quadráticas permitem o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno?

Com esta questão pretendi aprofundar o modo de trabalho em sala de aula que estimula o pensamento crítico, ou seja, a forma como a tarefa deve ser aplicada em aula, e explorar métodos e estratégias de aprendizagem.

- Que contribuições a discussão traz para o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno?

Por último, esta questão pretendeu focar-se na discussão, tanto entre grupos como na discussão coletiva do grande grupo, onde se comparam e contrastam estratégias e resultados, como momento potenciador do desenvolvimento do pensamento crítico.

1.2. Motivação para o estudo

O conteúdo, nas nossas salas de aula, assume o papel principal e detém o maior peso em todo o processo de ensino-aprendizagem. Porém, o desenvolvimento de competências transversais é necessário e essencial na formação de um cidadão no século XXI. Possuirmos um conjunto de competências limitado ao conteúdo da matéria não é suficiente para sermos completos na vida em sociedade e no mundo de trabalho atual (Golinkoff & Pasek, 2018). Nas salas de aula devemos fomentar, entre outros, o potencial para colaborar, comunicar, confiar, criar e pensar criticamente. Memorizar factos não será o segredo para o sucesso num mundo em que os factos estão, literalmente, na ponta dos nossos dedos. Em minutos podemos descobrir a resposta para qualquer pergunta. Mas como ordenamos, priorizamos e utilizamos toda a informação que nos chega diariamente? Necessitamos de pensar criticamente.

A explicação da importância e necessidade crescentes do ensino do pensamento crítico reside sobretudo na constatação de que o pensamento crítico é uma pedra basilar na formação de indivíduos capazes de enfrentarem e lidarem com a alteração contínua dos cada vez mais complexos sistemas que caracterizam o mundo atual. [...] Face ao progresso atual, a grande maioria dos conhecimentos válidos hoje estarão obsoletos num curto intervalo de tempo. Além disso, dada a multiplicação galopante do conhecimento disponível no mundo, é difícil, se não impossível, prever qual a informação de que os indivíduos irão necessitar no futuro. (Tenreiro-Vieira & Vieira, 2001, p. 14)

Resolvi focar-me nesta competência transversal, em particular, porque acredito que a aula de matemática pode efetivamente encorajá-la, e porque sinto que é uma competência pouco desenvolvida na turma com quem estava em contacto. A leitura do livro *Becoming Brilliant: What Science tell us about raising successful children* despertou a minha atenção para o tempo ínfimo que muitas vezes dedicamos a trabalhar estas competências, enquanto professores. “O professor desempenha um papel decisivo no futuro do aluno se for capaz de, para além sua preparação técnica e profissional, contribuir para a sua formação integral enquanto ser humano e cidadão” (Mártires et al., 2019, p.11). Durante o ciclo de estudos, focámos bastante a didática da matemática e mencionámos como um determinado tipo de metodologia ou de estratégias desenvolvem paralelamente certas competências transversais, mas não nos focámos em cada competência específica, nem aprofundámos muito o modo de a desenvolver junto dos alunos. Por isso este estudo mais focado suscitou o meu interesse.

Outra motivação para este estudo foi o facto de refletir sobre as conversas que me rodeiam diariamente e reconhecer que existe uma enorme lacuna no pensamento crítico de muitos adultos. Considero que este deve ser promovido ao longo de toda a nossa vida, incluindo a adolescência, uma fase que se caracteriza tão fortemente pela conquista do pensamento abstrato, quando o jovem começa a refletir sobre as circunstâncias e não apenas sobre os factos, e analisa os problemas de maneira mais ampla. Este é um bom momento para criar desafios e oportunidades para que pensem. Ao contrário dos tempos de criança, a validade das regras impostas começa a ser questionada e discutida. Uma discussão em sala de aula com a turma que acompanhei, sobre a pandemia que vivemos, despertou a minha vontade de explorar um pouco mais e trabalhar este espírito crítico dos alunos.

2. Enquadramento curricular e didático

A elaboração da unidade de ensino exigiu um estudo inicial, tanto no que respeita às orientações curriculares como também aos aspetos da didática da matemática. Assim, este capítulo inicia-se com um enquadramento teórico sobre o pensamento crítico, a sua relação com as orientações curriculares e com a matemática. Posteriormente, segue-se um enquadramento relativo às opções didáticas-metodológicas tomadas.

2.1. Pensamento Crítico

Para refletirmos amplamente sobre um tópico como o pensamento crítico enquanto objetivo na educação matemática, importa primeiramente definir este termo. Uma das definições apresentadas para o pensamento crítico, proposta por Ennis (1985), associa-o a uma atividade prática reflexiva e ponderada, de facto “o pensamento crítico é uma forma de pensamento racional, reflexivo, focado no decidir aquilo em que acreditar ou fazer” (p. 45). Esta definição em muito se assemelha à apresentada pelos autores Mártires et al. (2019), que o veem como “(...) algo lento, deliberado e controlado, que envolve empenho e dedicação. Isto é, consiste em pensar de forma ponderada, explícita e intencional. É um processo refletido e autocorretivo (implica pensar sobre o próprio raciocínio)” (p. 22). Encontramos várias definições de pensamento crítico, mas todas parecem convergir nestes pontos.

Por seu lado, Bailin (2002) define pensamento crítico como sendo o ato de pensar com uma qualidade particular, ou seja, é a formulação de bons pensamentos através de critérios específicos ou padrões de adequação e precisão. Esta abordagem centra-se, tradicionalmente, na aplicação de regras formais da lógica, relacionando-se mais diretamente com a matemática.

Numa perspetiva mais pragmática, o pensamento crítico visa avaliar e julgar cuidadosamente afirmações, ideias e teorias relativas a possíveis explicações ou soluções apresentadas para uma situação, com a finalidade de alcançar um posicionamento competente e independente – em geral, orientado para a ação (Vincent-Lancrin et al., 2019).

Importa também refletir sobre o termo *crítico*, normalmente associado a uma conotação negativa. No entanto, quando se fala de pensamento, segundo Lopes e Silva

(2019), crítico distingue-o do pensamento acrítico, ou seja, “do pensamento que aceita conclusões sem qualquer avaliação do seu mérito” (p.1).

2.2. Pensamento crítico e orientações curriculares

O Perfil dos Alunos abrange todos os alunos que se encontram na escolaridade obrigatória, e aponta para uma educação escolar em que os alunos mobilizam valores e competências que lhes permitem intervir na vida dos indivíduos e das sociedades, tomar decisões livres e fundamentadas sobre questões naturais, sociais e éticas, e dispor de uma capacidade de participação cívica, ativa, consciente e responsável (Oliveira Martins et al., 2017). De acordo com a visão deste documento, e com uma relação direta com o trabalho que proponho, pretende-se que o jovem, à saída da escolaridade obrigatória, seja, entre outros, um cidadão:

- Munido de múltiplas literacias que lhe permitam analisar e questionar criticamente a realidade, avaliar e selecionar a informação, formular hipóteses e tomar decisões fundamentadas no seu dia a dia;
- Capaz de pensar crítica e autonomamente;
- Que valorize o respeito pela dignidade humana, pelo exercício da cidadania plena, pela solidariedade para com os outros, pela diversidade cultural e pelo debate democrático; (Oliveira Martins et al., 2017, p.15)

Na secção *valores* deste documento encontramos a curiosidade, reflexão e inovação, onde são referidos o desenvolvimento do pensamento reflexivo, crítico e criativo e a procura de novas soluções e aplicações.

Mais diretamente, na secção *áreas de competência* temos o pensamento crítico e criativo, onde se pretende desenvolver o propósito de:

- pensar de modo abrangente e em profundidade, de forma lógica, observando, analisando informação, experiências ou ideias, argumentando com recurso a critérios implícitos ou explícitos, com vista à tomada de posição fundamentada;
- convocar diferentes conhecimentos, de matriz científica e humanística, utilizando diferentes metodologias e ferramentas para pensarem criticamente;
- prever e avaliar o impacto das suas decisões;
- desenvolver novas ideias e soluções, de forma imaginativa e inovadora, como resultado da interação com outros ou da reflexão pessoal, aplicando-as a diferentes contextos e áreas de aprendizagem. (Oliveira Martins et al., 2017, p.24)

Neste enquadramento, assume importância a preocupação em torno do desenvolvimento de práticas docentes capazes de fomentar atividades que estejam

orientadas para o pensamento crítico: “Os alunos podem melhorar as suas competências de pensamento crítico quando os professores usam métodos ou estratégias de aprendizagem e materiais curriculares apropriados (Gadzella & Masten, 1998; Halpern, 1993; McMillan, 1987), estratégias de aprendizagem ativa (Kim, 2009) e valorizam as interações aluno-aluno e aluno-professor (Cooper, 1995; Howe & Warren, 1989).” (como citado em Mártires et al., 2019, p.23).

2.3. Pensamento crítico e matemática

A matemática contribui para o desenvolvimento de capacidades e competências essenciais (Ponte, 2002), entre as quais se encontram a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação. O pensamento crítico encontra-se relacionado com todas estas capacidades.

James Zant considera que os conceitos fundamentais do pensamento matemático são bons exemplos de pensamento crítico, pois aquele envolve termos indefinidos, definições, conjeturas e teoremas comprovados dedutivamente. Apesar de essas conjeturas muitas vezes estarem em conformidade com a experiência, nem sempre assim acontece. Em situações da vida nem sempre temos a liberdade de escolher ou alterar essas hipóteses e muitas vezes baseamos os nossos argumentos e decisões em suposições ou evidências que estão sujeitas a alterações. Neste sentido, frequentemente criamos hipóteses que esperamos que se adequem à realidade. Desta forma observamos que o pensamento matemático nos providencia ferramentas para outros pensamentos críticos.

Parece provável que a habilidade de pensar criticamente em situações da vida quotidiana pode ser melhorada dando atenção ao processo em contextos matemáticos, ao mesmo tempo que se aprende a lidar com situações da vida real através deste ponto de vista. Se uma pessoa é capaz de aplicar as habilidades envolvidas no pensamento crítico numa grande variedade de problemas que encontra no seu dia a dia, podemos dizer que tem a habilidade de pensar criticamente nessas áreas. É parte da educação causar essas mudanças nos conhecimentos, habilidades e atitudes dos estudantes (Zant, 1952, p. 250).

Porém, este paralelismo não acontece naturalmente, deve ser promovido e trabalhado pelos professores. O pensamento crítico é um processo consciente, envolve passos cuidadosos tais como encontrar uma definição, considerar cuidadosamente as hipóteses, um conhecimento do significado e procedimentos do pensamento indutivo,

a habilidade de fazer inferências lógicas, de reconhecer falácias no nosso trabalho e no dos outros, de reconhecer que a prova de um problema está completa (Zant, 1952).

Para trazermos este processo de pensamento até ao aluno, é necessário normalmente ilustrar com exemplos que variem, desde simples deduções baseadas em premissas conhecidas e aceites universalmente, até situações mais complexas em que as próprias premissas possam estar em causa.

A ponte que existe entre o pensamento crítico utilizado na matemática e na vida do estudante não é fácil de construir, pois torna-se menos estável e segura quando se introduzem variáveis como as emoções, acontecimentos políticos ou sociais da vida quotidiana. Porém, o professor de matemática pode ajudar nesta construção quando ensina o aluno a utilizar esta competência em diversas situações. Um exemplo prático: “Por exemplo, estudaram a diferença entre chegar a uma conclusão baseada em casos especiais e provar realmente um teorema” (Zant, 1952, p. 253). O debate sobre esta diferença pode ajudar os alunos a transporem-na para situações fora da sala de aula. Os alunos podem perceber que subjacentes a muitas das suas crenças estão suposições que devem ser analisadas. “Os que pensam claramente usam muitos dos métodos e competências fundamentais utilizadas na matemática” (Zant, 1952, p. 253).

2.4. Função quadrática

Segundo Markovits et al. (1986) existem essencialmente duas abordagens sobre o conceito de função. Na primeira, a função é vista como covariância, ou seja, uma relação funcional entre duas variáveis numéricas interrelacionadas. É observada a mudança numa variável provocada por mudanças na outra variável. Na segunda abordagem, a função é vista como uma correspondência unívoca entre dois conjuntos (conjunto de pares ordenados). É esta segunda abordagem a que define, na modernidade, a função como uma correspondência unívoca entre dois conjuntos, não necessariamente numéricos (Kleiner, 1989).

O estudo da função quadrática iniciou-se no séc. XIV com o aparecimento dos canhões. Com a tentativa de explicar a trajetória das suas bolas, por exemplo, para encontrar o alcance máximo de um tiro (Roque, 2012). Porém, foi apenas no século XVII que Galileu concluiu que a trajetória de um projétil que desliza sobre um plano é dada por uma parábola, quando os canhões se tornaram mais potentes e requeriam a elaboração de uma teoria da trajetória e do alcance mais precisa (Alves, 2018).

Uma função quadrática é uma função real de variável real f de \mathbb{R} em \mathbb{R} expressa na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b, c são números reais dados e $a \neq 0$. Esta função pode também ser representada na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Segundo Duval (2006), a transformação de uma destas representações na outra é um *tratamento*, enquanto a *conversão* consiste na mudança de registos, sem alterar os objetos com que se estão a trabalhar. Estas são assinaladas como dificuldades no estudo da função quadrática: o tratamento das representações algébricas e a conversão entre representações. Por exemplo, a conversão de uma representação gráfica para uma representação algébrica e vice-versa. Numa fase inicial do estudo das funções quadráticas, é necessário estabelecer conexões entre as representações algébricas e gráficas das funções quadráticas, bem como discutir todas as suas propriedades (Ponte, 2010).

2.5. Opções didáticas – metodologias de ensino

2.5.1. Ensino-aprendizagem exploratório

O documento *Aprendizagens Essenciais* faz referência à oportunidade que deve ser criada para que o aluno possa descobrir, raciocinar, provar e comunicar matemática, e que por isso o professor deve ter atenção à forma como ensina esta disciplina. Releva também a envolvimento dos alunos em discussões e atividades estimulantes (DGE, 2018). Esta orientação vai ao encontro das orientações referidas na rubrica da OCDE sobre a forma como o pensamento crítico se manifesta no processo de ensino-aprendizagem. Aqui, referem-se quatro grandes dimensões: questionamento, imaginação, ação e reflexão (Vincent-Lancrin et al., 2019). O Centro de Pesquisa e Inovação em Educação da OCDE realizou o projeto *Desenvolvimento e Avaliação da Criatividade e do Pensamento Crítico em Educação*, cujas diretrizes nos indicam características que as tarefas promotoras do pensamento crítico devem ter, entre elas:

(...)ser encorajadoras e de natureza deliberadamente aberta, estimulando os alunos a explorarem múltiplas soluções para problemas mapeados respeitando parâmetros e limitações que esclareçam os objetivos de aprendizagem e, ainda assim, continuar relativamente flexíveis para permitir que os alunos atuem com certo nível de protagonismo(..) criação de ambientes de aprendizagem em que os estudantes se sintam seguros para assumir riscos em relação a seu modo de pensar e se expressar, o que, por sua vez, pressupõe uma atitude positiva dos docentes no que diz respeito a erros e protagonismo de seus alunos. (...) Usar os erros para iniciar uma reflexão sobre as

oportunidades de aprender, ajudar os alunos a considerar os equívocos uma chance de melhoria, e não um fracasso (Vincent-Lancrin et al., 2019).

De acordo com estas indicações, a metodologia utilizada foi de ensino-aprendizagem exploratório, onde “(...) o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p. 13).” Esta aprendizagem, considerada ativa, onde o aluno tem um papel central, torna a disciplina mais atrativa e pode levar os alunos a pensar criticamente.

2.5.2. Ensino-aprendizagem dialógico

Foi utilizada também uma metodologia de ensino dialógico, que se baseia no poder da linguagem para cultivar o raciocínio dos estudantes e estimular a sua aprendizagem e entendimento. Este modelo é promotor de um diálogo entre alunos e entre alunos e docente, opondo-se ao método expositivo em que o professor é o principal, e muitas vezes exclusivo, orador. Esta metodologia incentiva os alunos a explicar, analisar, explorar, avaliar, argumentar e, não menos importante, ouvir, estimulando diretamente o pensamento crítico (Vincent-Lancrin et al., 2019). Ao encontro desta ideia vão dois dos princípios de Swan (2018) para a concepção de aulas a partir de tarefas: “Desenvolver a linguagem matemática através de atividades de comunicação que incentivem o diálogo (Ahmed 1987; Alexander, 2006; 2008; Mercer, 1995); Focar diretamente quaisquer obstáculos conceituais específicos ou processos (Bell, 1993; Wigley, 1994) e criar surpresa, tensão e conflito cognitivo que possam ser abordados através de discussão (Brousseau, 1997)” (p. 8).

2.5.3. Resolução de problemas

As Aprendizagens Essenciais para o 10.º ano de escolaridade referem-nos, como capacidade a desenvolver em todos os temas, e em especial no tema *Funções*, a utilização dos conhecimentos na resolução de problemas. É uma experiência de aprendizagem considerada essencial, e está fortemente conectada ao raciocínio e comunicação matemática. Utilizámos por isso uma abordagem que “articula o apelo explícito a capacidades de pensamento crítico no contexto da resolução de problemas” (Tenreiro-Vieira & Vieira, 2001, p.34), visto que possibilita ao aluno criar hipóteses ou conjecturas, assim como testá-las e investigá-las através do problema proposto (Oliveira, 2016).

2.5.4. Recurso às tecnologias digitais

O documento *Aprendizagens Essenciais* para o 10º ano de escolaridade realça a importância da utilização, de forma crítica e inteligente, da tecnologia. Um ensino virado para o futuro não pode ignorar o facto de que a (maioria da) geração nascida após o ano 2000, há 22 anos, nasceu já mergulhada em meios tecnológicos, e essa geração não tem conhecimento direto do que é uma realidade isenta destes modelos de interação e comunicação. A necessidade de a preparar para o futuro, para trabalhos que ainda não foram criados, para tecnologias que ainda não foram inventadas e resolver problemas que ainda não foram previstos (OCDE, 2018) justifica a pertinência da utilização deste recurso em sala de aula.

Os recursos tecnológicos, de que são exemplos os quadros interativos, “tablets”, computadores e aparelhos com aplicações informáticas, são importantes e podem ajudar os alunos a darem sentido à matemática, a raciocinarem e a comunicarem matematicamente. As tecnologias, através das inúmeras funcionalidades que proporcionam, ajudam os alunos a explorar a matemática, a tornar significativos conceitos e procedimentos e a envolver-se em raciocínios matemáticos (National Council of Teachers of Mathematics, 2017). Ferramentas eletrónicas, nomeadamente as designadas por Dick e Hollebrands (2001) enquanto tecnologias de ação matemática, são importantes auxílios, por exemplo, na demonstração visual de dados, introduzidos pelo utilizador, para os alunos, possibilitando que estes explorem ideias matemáticas e observem, façam e testem conjecturas sobre relações matemáticas (NCTM, 2017).

Neste contexto, incluímos nesta intervenção o computador, o *Geogebra*, um vídeo e a calculadora gráfica, que ajudaram os alunos a experimentar, investigar, sustentar/refutar conjecturas ou comunicar (DGE, 2018).

3. A unidade didática

A proposta seguidamente apresentada foi elaborada para sustentar o trabalho de projeto. Teve, deste modo, como principal objetivo explorar e compreender o desenvolvimento do pensamento crítico de alunos do 10.º ano em aulas exploratórias no estudo da função quadrática, na disciplina de matemática A, curso de Ciências e Tecnologias. Para além de seguir as orientações curriculares e didáticas descritas no capítulo anterior, as minhas próprias experiências pessoais e profissionais também contribuíram para o planeamento desta unidade.

3.1. Caracterização da escola

A Escola Secundária Padre António Vieira é essencialmente constituída por jovens adolescentes, entre os 12 e os 18 anos, e abrange vários níveis de ensino: do 7º ao 12º ano. Pertence ao agrupamento de Escolas de Alvalade, do qual fazem parte mais três escolas básicas. Nesta escola, cerca de 60% dos alunos não pretende prosseguir os estudos. Ou seja, ponderam apenas terminar o 12º ano, escolaridade obrigatória. Este último ano do ensino secundário tem-se mostrado o ano em que se regista uma taxa de transição/conclusão mais baixa, em comparação com o 10º e 11º anos. A escola tem refletido sobre esta temática, delineando estratégias para dar resposta a esta situação.

Em todo o agrupamento existem alunos provenientes de várias partes do mundo, registando-se cerca de 33 nacionalidades. Esta diversidade resulta por vezes em dificuldades acrescidas nas relações e nas aprendizagens, principalmente pela diferença nas orientações curriculares dos diversos países. A escola tem procurado colmatar esta barreira, trabalhando em parceria com várias instituições, em particular com a *Fundação Cidade de Lisboa*.

A escola é constituída por um bloco mais antigo e outro bloco recentemente construído, onde se encontram as salas de aula com características especiais, entre elas as salas de informática. Se estiverem disponíveis, podem ser requeridas pela professora de matemática para utilizações excecionais, pois não existe rede de Wi-Fi acessível aos alunos fora destas salas. No bloco mais antigo, onde ocorre a grande maioria das aulas, as salas têm uma disposição tradicional, com as carteiras individuais voltadas para o quadro. Todas as salas possuem também computador e projetor.

3.2. Caracterização da turma

A unidade foi aplicada numa turma de 10º ano do curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias. Era constituída por 24 alunos, dos quais metade são rapazes e metade raparigas. Quanto à sua precedência durante o terceiro ciclo, uma parte dos alunos vinha de escolas básicas pertencentes ao agrupamento, outra parte de escolas básicas públicas pertencentes a outros agrupamentos e, em menor quantidade, alguns alunos realizaram o terceiro ciclo num colégio privado que se encontrava relativamente perto da escola. Apenas dois alunos da turma apresentavam retenções em anos de escolaridade anteriores.

No final do primeiro semestre, a média das notas dos alunos da turma a matemática foi de 10 valores, sendo que 54% dos alunos tiveram classificação negativa. A turma apresentava algumas lacunas quanto aos conteúdos lecionados no 8º e 9º ano, devido, talvez, aos períodos sem aulas em decorrência da pandemia ou às aulas online, que não atingiram os objetivos esperados. Também apresentava alguma falta de disciplina e ritmo de trabalho em sala de aula ou estudo em casa.

3.3. Ancoragem da subunidade didática no programa da disciplina

As metas curriculares para o 10º ano de escolaridade homologadas em 2014 referem, como conteúdos do domínio *Funções Reais de Variável Real*, o estudo elementar da função quadrática, onde se insere o estudo dos extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas, e a resolução de problemas, na qual se inserem equações e inequações envolvendo as funções polinomiais, a composição da função módulo com funções afins e com funções quadráticas, a resolução de problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real e a resolução de problemas envolvendo as funções afins, quadráticas e a modelação de fenómenos reais.

Os objetivos que concretizam as aprendizagens relativas aos conteúdos *Generalidades acerca de funções reais de variável real e Função Quadrática*, apresentados no documento Aprendizagens Essenciais, e que incluímos neste trabalho, são:

- Reconhecer, representar e interpretar graficamente funções reais de variável real e funções definidas por expressões

analíticas e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação;

- Reconhecer e interpretar as propriedades geométricas dos gráficos de funções e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação;
- Reconhecer e interpretar os extremos, sentido das concavidades, raízes e a representação gráfica de funções quadráticas e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação;

Importa enquadrar também as aprendizagens que os alunos realizaram previamente, em anos letivos anteriores. Relativamente ao ensino básico, os alunos aqui visados regeram-se pelo programa de ensino básico homologado em 2013. O estudo das funções insere-se no domínio de conteúdo *Funções, Sequências e Sucessões*, e aparece pela primeira vez no 7º ano de escolaridade. Neste ano é feita uma introdução ao conceito de função e de algumas operações entre funções. Inicia-se o estudo da função de proporcionalidade direta, inversa e afim. Já no 8º ano aprofunda-se o estudo do gráfico de funções afins, onde aprendem por exemplo a determinar e interpretar o declive de uma reta, assim como a trabalhar com problemas que envolvam equações de retas. No 9º ano inicia-se o estudo da função quadrática da família ax^2 , com $a \neq 0$.

No 10º ano de escolaridade os alunos aprendem a transformação do gráfico de funções, os extremos relativos e absolutos, os intervalos de monotonia e a paridade, antes de iniciarem o estudo da função quadrática e da função módulo.

3.4. Estratégias de ensino

Segundo o livro *Educar para o pensamento crítico na sala de aula* (Lopes et al., 2019) a aprendizagem cooperativa, o questionamento, o uso eficiente de feedback e a planificação cuidada, entre outros, são estratégias ligadas a resultados plausíveis de pensamento crítico. Os autores consideram que nos podemos abstrair do conteúdo disciplinar ou enquadrar estas práticas numa disciplina, sendo neste caso o conteúdo específico o veículo para promover o pensamento crítico durante as atividades, que será a nossa opção.

3.4.1. A aprendizagem cooperativa na promoção do pensamento crítico

Uma estratégia para o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo é a aprendizagem cooperativa (Devi & Gustine, 2015). Num grupo cooperativo acontece o processo de negociação de significados, porque os alunos trabalham juntos na obtenção de novos conhecimentos e alcance de objetivos. Surgem conflitos sociocognitivos quando os membros do grupo são expostos à heterogeneidade de ideias, à medida que são confrontados com formas inovadoras ou diferentes de analisar problemas familiares (Davidson & Worsham, 1992). O professor deve incentivar a partilha e ajudar o aluno a analisar criticamente as diferentes ideias apresentadas, assim como debatê-las para chegar a um consenso, tanto no seu grupo de trabalho como com outros grupos.

3.4.2. O questionamento

Foram desenvolvidas, na sua maioria, aulas de cunho exploratório, divididas em três fases: Apresentação da tarefa, Trabalho autónomo dos alunos, Discussão e Síntese final (Stein et al., 2008). Pela experiência que tive nas primeiras intervenções com esta turma, fez-me mais sentido unir a discussão com a síntese final e ir realizando pequenas sínteses juntamente com os alunos durante a discussão coletiva. A discussão a nível de toda a turma é considerada a fase mais crucial (Swan, 2018). Também na promoção do pensamento crítico esta será a fase mais importante, pois os alunos são confrontados com diversas propostas de resolução, diversas soluções ou ideias dos seus colegas, eventualmente diferentes das suas. O questionamento foi uma estratégia de suporte na operacionalização da aula com este modelo, em todas as suas fases.

Segundo Downing e Gifford (1996), grande parte (75% a 90%) das questões formuladas pelos professores situam-se a nível da recordação e invocação de factos. São, normalmente, questões fechadas e de resposta curta, que não requerem um grande pensamento. As questões divergentes ocupam um espaço muito limitado dentro da sala de aula. Desta forma, as competências de pensamento crítico não são priorizadas. Além disso, a investigação neste campo revela que o professor oferece um curto período, em média um segundo, ao aluno para que responda (Tenreiro-Vieira & Vieira, 2003). De seguida dá a resposta ou pergunta a outro aluno. A investigação revela também que, se o professor esperar 3 ou mais segundos pela resposta, a confiança do aluno aumenta, assim como a incidência do seu pensamento especulativo (Smith & Barrow, 1996, p. 26). De acordo com Tenreiro-Vieira (2003) o aumento do tempo de

espera em conjugação com a formulação de questões que apelam ao uso de capacidades de pensamento crítico poderá resultar num questionamento promotor desta forma de pensar.

3.4.3. Tipo de tarefas e estrutura de aula

Malcolm Swan (2017) considera que uma das finalidades do ensino da matemática é a consciência crítica da qualidade do raciocínio matemático. Para concretizar este objetivo, propõe tarefas em sala de aula tais como analisar e criticar a explicação matemática de um procedimento ou conceito e analisar e criticar uma estratégia de resolução de problemas ou o modelo matemático de um fenómeno. Como exemplos de atividades em sala de aula que auxiliem no cumprimento desta finalidade sugere, por exemplo, a interpretação de uma explicação fornecida, que pode estar apresentada verbal ou graficamente, a comparação de explicações matemáticas alternativas, a interpretação e continuação de uma estratégia recebida, a identificação de pontos fortes ou fracos, entre outras.

Este autor sugere também a promoção da avaliação dos pares, usando tarefas que permitam aos alunos a permuta de papéis, a explicação e o apoio mútuos (Bell et al., 1993, como citado em Swan, 2017).

Também de acordo com uma orientação fornecida por Swan (2018) está a estrutura de uma aula de resolução de problemas, que divide em duas partes, e sugere a seguinte organização:

1. Numa primeira parte, seja em casa ou numa aula, o aluno tenta resolver o problema individualmente;
2. O professor analisa uma amostra das tentativas iniciais dos alunos e seleciona algumas questões para abordar. Pode escrever questões de retorno no trabalho de cada um ou preparar perguntas para serem consideradas pela turma;

Na aula seguinte, percorre as seguintes fases:

1. Introdução, onde volta a apresentar a tarefa, mas com perguntas formativas já preparadas. Dá também algum tempo para individualmente voltarem a pensar no problema;
2. Trabalho de grupo: comparação das estratégias de abordagem. Dentro do grupo os alunos discutem as suas estratégias individuais e tentam chegar a um

consenso quanto a uma solução conjunta. É o professor quem organiza os grupos, para que existam diversas ideias dentro de um grupo;

3. Discussão entre grupos: comparar as estratégias de abordagem. O professor pode pedir aos alunos para reverem as estratégias de outro grupo e justificarem as suas. Se não existirem diferenças significativas no trabalho dos grupos, pode passar diretamente para a fase seguinte;

4. Trabalho de grupo: criticar “exemplos do trabalho dos alunos”. O professor seleciona trabalhos com abordagens alternativas, que podem ou não ter sido feitas por alguns alunos da turma, e apresenta-as aos alunos, juntamente com algumas perguntas orientadoras. Segundo Swan esta fase é especialmente promotora do desenvolvimento da competência crítica.

5. Trabalho de grupo: aperfeiçoamento de soluções. Os alunos revêm o trabalho inicial e podem melhorar as suas resoluções, incorporando eventualmente o que aprenderam com os “exemplos do trabalho dos alunos”.

6. Discussão a nível de toda a turma: uma revisão da aprendizagem. O professor organiza discussão com o grande grupo, focando aspetos que sejam pertinentes, dependendo do problema.

3.5. Planificação

A unidade de ensino decorreu durante seis blocos de 100 minutos cada e dois blocos de cinquenta minutos cada. Teve início a 9 de Fevereiro de 2022, e prolongou-se por três semanas, até ao dia 2 de Março. A figura 3.1. apresenta uma planificação da distribuição das tarefas que integram a unidade de ensino. Os enunciados das tarefas encontram-se em anexo, inseridos nos planos de aula. O modo de trabalho foi sempre em grupos, constituídos por três alunos, com momentos de discussão, tanto nos pequenos grupos como com toda a turma.

Aula	Tempo(min)	Data	Tarefa
1	100	09/fev	Tarefa exploratória - Calculadora gráfica
2	50	10/fev	Dominó 1
3	100	10/fev	Dominó 2
4	100	15/fev	Completar o quadrado do binómio
5	100	16/fev	Raízes de função quadrática - <i>Geogebra</i>
6	100	22/fev	Problemas
7	100	23/fev	Problema estádio
8	50	02/mar	Questão-aula

Tabela 1 – Planificação das aulas lecionadas

3.6. Avaliação

A avaliação foi realizada através da observação do empenho e comportamento, do trabalho cooperativo e do pensamento crítico. Para observar o empenho e comportamento foram tidos em conta aspetos como pontualidade, autonomia e atenção, entre outros; para observar o trabalho cooperativo foram tidos em conta aspetos como o respeito pelo ritmo de trabalho dos colegas, o respeito por diferentes perspetivas e a partilha de ideias, materiais, entre outros. Por fim para avaliar as competências de pensamento crítico foram observados aspetos tais como a fundamentação das opiniões, a problematização das próprias ideias e a tomada de decisões, entre outros. As tabelas completas utilizadas para esta avaliação encontram-se em anexo, junto ao plano da primeira aula. Foi também realizada uma questão-aula escrita no final da subunidade didática (anexo 11), que teve em conta o tipo de trabalho realizado durante a subunidade. Para incentivar o trabalho cooperativo decidi aumentar a nota da questão-aula dos alunos de um grupo, com um valor extra, no caso de todos os alunos do grupo obterem uma nota positiva. Os grupos foram mantidos desde o início ao fim da subunidade letiva com o propósito de se sentirem responsáveis pela aprendizagem dos três elementos do grupo.

Importa referir a nota da questão-aula dos três alunos cujo trabalho autónomo será mais pormenorizadamente analisado: O Rui teve 2,4, a Bruna 12,8 e a Andreia 17,5 valores. Esta questão-aula teve um peso muito baixo na nota final do semestre, para que não fosse um motivo de preocupação para os alunos, mas principalmente para me orientar, juntamente com a professora cooperante, sobre a aquisição de conhecimento.

3.7. Dificuldades dos alunos

As possíveis dificuldades dos alunos identificadas são a interpretação de enunciados e a exibição de justificações completas e corretas, assim como a apresentação de diversos processos de resolução para a mesma questão (Oliveira, 2016). Através do questionamento orientado pretendi ajudar a ultrapassar essas dificuldades. Assinalo também a dificuldade desta turma em específico em relevar a atenção e participação durante a discussão coletiva, ao invés da simples validação das suas respostas. Através de tarefas que lhes despertavam interesse, assim como

explicando-lhes previamente a dinâmica da aula e a importância de cada uma das suas fases, tentei amenizar esta dificuldade.

Segundo Jorge (2016), quanto ao tema funções, especificamente função quadrática, uma das possíveis dificuldades dos alunos é a construção de gráficos e esboços, partindo de funções algébricas, e a conexão e conversão entre as diferentes representações, que tentei realizar em todas as tarefas e aulas sobre a temática, fazendo sempre a conversão entre a representação algébrica, gráfica e/ou tabelas, bem como discutir todas as suas propriedades. Outra dificuldade assinalada por este autor é a posição dos pontos no plano cartesiano ou a orientação da concavidade da parábola. Tentei ultrapassá-la através de aplicação de tarefas com um nível crescente de dificuldade.

Uma última dificuldade que assinalo foi a transformação de uma representação algébrica da função em outra: $ax^2 + bx + c$, $a(x - h)^2 + k$ e por fim $a(x - \alpha)(x - \beta)$. Esta dificuldade ocorreu uma vez que a maioria dos alunos não estudou, no 9º ano, a resolução de equações de 2º grau recorrendo ao quadrado do binómio. Neste ano letivo começaram por estudar funções e não geometria, uma unidade onde aprendem a fatorizar um polinómio de segundo grau recorrendo ao quadrado do binómio, quando aprendem a equação da circunferência, para encontrar o seu centro e raio. Para tentar ajudar a ultrapassar esta dificuldade fiz inicialmente uma revisão sobre casos notáveis.

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo apresento a metodologia utilizada e especifico as opções tomadas, que tiveram em conta o objetivo do trabalho e as questões de pesquisa. Justifico a escolha dos participantes e refiro as questões éticas que foram ponderadas, assim como os instrumentos de recolha de dados e o modo como foi feita a análise de dados, apresentada no capítulo que se segue.

4.1. Opções metodológicas

O paradigma adotado para esta investigação foi o interpretativo, pois a realidade não foi independente do observador, e neste caso investigador (Bogdan & Biklen, 1994). A interpretação da minha experiência tem um cariz subjetivo e inclui uma diversidade de visões, de vários autores. A dimensão da investigação é de pequena escala (apenas uma turma) e teve como objetivo compreender as ações, mais do que as causas. Esta investigação possui um interesse prático, uma vez que espero, futuramente, poder aplicar na minha prática profissional enquanto docente, assim como partilhar os resultados com os meus colegas que o poderão também fazer.

A pesquisa realizada foi qualitativa, pois pretendi estudar o contexto, interpretar os dados e colaborar com os alunos, ao invés de observar e medir numericamente a informação, utilizando procedimentos estatísticos na recolha e análise de dados (Creswell, 2010). Foquei-me mais no processo do que no resultado final. Foi inevitável transportar valores pessoais para o estudo uma vez que estive inserida no contexto de investigação, enquanto participante como observadora e professora.

Tal como refere Fonseca (2012), o processo da investigação-ação foi constituído por planificação (através de um plano de projeto e dos vários planos de aula), ação e observação, durante a intervenção com a turma e, por fim, avaliação dos resultados da ação através de reflexões e relatório sobre a prática. Foi uma investigação auto avaliativa, pois estive continuamente a perspetivar adaptações e melhores práticas, tanto de aula para aula como para aplicação no futuro.

4.2. Participantes

Os participantes foram todos os alunos da turma em causa e eu própria, enquanto professora e observadora. Na abordagem escolhida, qualitativa, pretende-se que exista uma relação de empatia, neutralidade e igualdade entre os participantes, e entre mim e os participantes, a qual foi progressivamente construída ao longo do primeiro semestre. Desta forma, a escolha dos participantes foi feita por uma questão de disponibilidade da professora cooperante e de continuidade do trabalho do primeiro para o segundo semestre do mesmo ano letivo. Apesar de observar todos os alunos da turma, analisei mais pormenorizadamente os registos referentes ao trabalho autónomo de três alunos e dos seus respetivos grupos: o Rui, a Bruna e a Andreia. Os critérios para a escolha destes alunos foram:

- A assiduidade, pois devido ao Covid, vários alunos da turma faltaram durante as semanas da subunidade didática lecionada, e estes três alunos estiveram sempre presentes;

- A quantidade e a qualidade dos dados recolhidos, incluindo resoluções escritas, registos áudio e vídeo;

- Grupos que continham alunos que foram entrevistados;

- A participação nas discussões coletivas;

- A heterogeneidade das notas que os alunos obtiveram na questão-aula final: Rui obteve 2 valores, Bruna 9 e Andreia 18.

Outros alunos da turma podem ser mencionados na análise dos dados, nomeadamente nos excertos de diálogos durante a resolução das tarefas. Para a análise da discussão coletiva foquei-me em toda a turma e não apenas nestes três alunos, uma vez que o objetivo era que os alunos conduzissem a conversação por si próprios, e por isso fez sentido observar e analisar as intervenções de toda a turma.

Faço de seguida uma breve descrição de cada um dos alunos que foram mais pormenorizadamente estudados no que refere ao trabalho autónomo, assim como os seus colegas de grupo de trabalho.

O **Rui** tem algumas dificuldades na disciplina de matemática, tendo nos testes do primeiro semestre notas muito fracas. É dos alunos mais participativos da turma,

interessado, responde frequentemente na aula. Porém, não parece ponderar as suas respostas, é bastante impulsivo. No seu grupo tem o Hugo, que não possui a grande parte dos conhecimentos prévios da disciplina, tendo ainda mais dificuldades do que o Rui. O Hugo não demonstra interesse na aula, traz vários exercícios resolvidos no caderno pela explicadora, que ele próprio não sabe resolver ou explicar como foram feitos. Tenta frequentemente dispersar a atenção do seu grupo com vídeos no telemóvel. O terceiro elemento do grupo é o Samuel, que é o aluno com mais facilidade na disciplina. Porém, é bastante desatento e perde-se por vezes em conversas paralelas sobre outros temas. Este aluno teve 12 valores no final do primeiro semestre.

A **Bruna** é uma aluna considerada média na disciplina de matemática. Terminou o primeiro semestre com 9 valores, apresentando algumas lacunas nos conhecimentos prévios do terceiro ciclo, tal como a grande maioria da turma. É muito participativa e motivada. Tem em comum com o Rui o facto de responder impulsivamente e não ponderar as suas respostas. No seu grupo encontra-se o Lucas que tem muitas dificuldades na disciplina. Porém, durante o trabalho autónomo mostra-se interessado e participativo. Insere-se neste grupo também a Madalena, que tem melhores notas na disciplina. Elabora frequentemente raciocínios matemáticos corretos, apesar de não participar voluntariamente nas discussões coletivas tanto quanto a Bruna.

Nos dois grupos de trabalho referidos anteriormente todos os alunos têm falta de método de estudo e de pesquisa. Não abrem o livro quando têm alguma dúvida e não praticam exercícios ou problemas em casa, mesmo quando sugeridos pela professora cooperante.

Por fim a **Andreia** é a aluna com mais facilidade na disciplina, tendo terminado o primeiro semestre com 18 valores, e é muito empenhada, tanto na aula como em casa. Não é tão participativa como a Bruna ou o Rodrigo, à exceção de quando é chamada diretamente. É ponderada nas suas respostas e realiza raciocínios matemáticos facilmente. No seu grupo tem a aluna Júlia, a aluna com mais dificuldades na turma. Tem falta de conhecimentos prévios, não consegue relacionar os temas que estudou anteriormente e está desatenta frequentemente. O terceiro elemento do grupo, o Sebastião, tem 13 valores a matemática. Tem facilidade na disciplina, mas é pouco

trabalhador. Este aluno testou positivo para a Covid durante a intervenção, pelo que esteve fora quase duas semanas, dificultando a realização das suas aprendizagens.

4.3. Questões éticas

Durante esta investigação tive sempre em consideração a carta de Ética do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, respeitando as suas orientações, entre elas o cuidado com a proteção dos participantes, o consentimento informado, que foi aplicado, e a confidencialidade e privacidade dos participantes. Para este efeito, assegurei que os alunos aderiam de forma voluntária ao projeto, dando-lhes a conhecer a natureza do estudo na primeira aula da subunidade didática lecionada. Solicitei também autorização à Direção da escola para a realização desta investigação (Anexo 1) e, ainda, aos encarregados de educação para a participação dos seus educandos como intervenientes no estudo (Anexo 2). Por fim pretendo publicar e divulgar os resultados da investigação e por esse motivo utilizo nomes fictícios de alunos durante a análise de dados.

4.4. Procedimentos e instrumentos de recolha de dados

Tendo em conta o objetivo e as questões da minha investigação, os métodos de recolha de dados foram a observação, uma entrevista, e a recolha documental. A observação foi importante, pois permitiu-me recolher informações que seriam impossíveis de serem recolhidas de outra forma, além de me permitir ver coisas de que os observados não se apercebem. Teve incidência sobre os comportamentos e experiência dos alunos durante a intervenção. A minha colega de estágio, assim como a professora cooperante, foram observadoras participantes, visto que conheciam o grupo e são conhecidas por este. Deste modo os alunos não estranharam a presença de alguém desconhecido dentro da sala de aula, e puderam trabalhar como se não estivessem a ser observados, devido ao contacto diário que mantinham com as professoras.

Como instrumentos de recolha de dados, durante as aulas, a professora cooperante realizou notas de campo através de um diário de bordo disponibilizado por mim (anexo 3), que visou a reação dos alunos às tarefas propostas, as suas dificuldades, as questões colocadas por mim e as respostas obtidas, o registo do tempo, as intervenções dos alunos na discussão coletiva, entre outros. Após cada aula terminei este diário de bordo, incluindo uma parte mais descritiva, com reconstrução de alguns

diálogos ou relatos de acontecimentos específicos e uma parte mais reflexiva que incluiu, por exemplo, a minha perceção sobre o decorrer do trabalho e as alterações que podiam ser feitas.

Outro instrumento utilizado como registo de observação foi o áudio, durante o trabalho autónomo dos alunos. Este instrumento tem a grande vantagem de permitir a reconstituição dos diálogos, que foi uma mais-valia para responder às minhas questões de investigação, visto que a comunicação está bastante relacionada com o pensamento crítico. Porém, apenas tive ao dispor dois gravadores, pelo que tive de ir circulando com os mesmos pelos grupos durante o trabalho autónomo. O registo vídeo foi utilizado durante a discussão coletiva, visto que permite registar as várias interações a ocorrer em aula simultaneamente. Em adição foram também efetuados registos fotográficos do quadro, quando pertinente.

Realizei também uma entrevista individual, aos três alunos referidos, no final da intervenção. Pretendi com a mesma perceber a opinião dos alunos sobre as tarefas propostas, o modo de trabalho em sala de aula, a sua perceção sobre o pensamento crítico, a cooperação e as tecnologias utilizadas. A entrevista foi semiestruturada, pois defini previamente os tópicos e as questões, de modo a irem ao encontro ao que pretendia investigar, havendo um maior controlo sobre a informação recolhida. Por outro lado, a entrevista fluiu conforme o discurso do entrevistado, aproximando-se da conversação, pelo objetivo da própria investigação que se relaciona com o pensamento crítico. Existiu flexibilidade na sequência das questões e na reformulação das próprias questões quando apropriado. Por último, recolhi os documentos escritos pelos alunos, neste caso, a resolução das tarefas propostas, para poder analisar e complementar os outros registos realizados.

Para me auxiliar na organização dos dados recolhidos e na seleção dos alunos que analisei mais pormenorizadamente, realizei as tabelas que se seguem. Na tabela 1 as células a verde simbolizam os instrumentos que foram utilizados nessa aula e as células sem cor os instrumentos que não foram utilizados. Na tabela 2 as células a verde representam os registos áudio que foram recolhidos nos diversos grupos e as

células sem cor os grupos cujos registos áudio não foram recolhidos.

Aula	Tempo(min)	Data	Tarefa	Dados			
1	100	09/fev	Tarefa exploratória - Calculadora gráfica	Gravações áudio	Vídeo	Resoluções dos alunos	Diário de bordo
2	50	10/fev	Dominó 1	Gravações áudio	Vídeo	Resoluções dos alunos	Diário de bordo
3	100	10/fev	Dominó 2	Gravações áudio	Vídeo	Resoluções dos alunos	Diário de bordo
4	100	15/fev	Completar o quadrado	Gravações áudio	Vídeo	Resoluções dos alunos	Diário de bordo
5	100	16/fev	Raízes de função quadrática - Geogebra	Gravações áudio	Vídeo	Resoluções dos alunos	Diário de bordo
6	100	22/fev	Problemas	Gravações áudio	Vídeo	Resoluções dos alunos	Diário de bordo
7	100	23/fev	Problema estádio	Gravações áudio	Vídeo	Resoluções dos alunos	Diário de bordo
8	50	02/mar	Questão-aula	Gravações áudio	Vídeo	Resoluções dos alunos	Diário de bordo

Tabela 2 – Organização dos tipos de dados recolhidos em cada aula

Áudio								
Aula 1	Grupos							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Aula 2	Grupos							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Aula 3	Grupos							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Aula 5	Grupos							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Aula 6	Grupos							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Aula 7	Grupos							
	1	2	3	4	5	6	7	8

Tabela 3 – Organização dos registos áudio recolhidos em cada aula por grupo

A análise destas tabelas permitiu-me perceber a quantidade e qualidade de dados que possuía e utilizar este critério na seleção dos grupos a analisar.

4.5. A análise de dados

A análise de dados incidiu sobre os instrumentos previamente descritos e pretendeu dar resposta às questões de investigação. Visto que a dimensão da investigação é de pequena escala, com apenas uma turma, este trabalho não pretende tirar conclusões que sejam generalizáveis a uma população mais ampla.

Os documentos produzidos pelos alunos, os registos áudio e vídeo e as entrevistas foram analisados na sua totalidade. Considerando que juntos constituem uma grande fonte de dados, transcrevi apenas alguns excertos. O critério com que os selecionei foi a existência ou ausência de evidências de mobilização do pensamento crítico ou de aprendizagem dos conteúdos matemáticos pretendidos.

A análise de dados é constituída por duas partes: uma primeira parte realizada aula a aula, e uma segunda parte onde são analisadas as entrevistas. A estrutura da análise, para cada aula, divide-se em cinco partes: caracterização da tarefa e da aula; trabalho autónomo de três grupos de alunos; discussão coletiva; dificuldades generalizadas dos alunos e uma pequena síntese. Durante a caracterização da tarefa e da aula verifico os objetivos quanto ao conteúdo programático e quanto ao objetivo educativo da aula, e revejo as alterações ao plano de aula realizado previamente. Para me auxiliar nesta análise realizei três tabelas, que adaptei de diversos autores: uma para ancoragem da subunidade didática no programa da disciplina, outra para refletir sobre a estrutura da tarefa (Swan, 2017) e, por fim, uma sobre as capacidades de pensamento crítico, baseada em Ennis (1993) e Tenreiro-Vieira(2013).

De seguida apresentam-se as referidas tabelas:

Tabela 4: Ancoragem da subunidade didática no programa da disciplina

Aprendizagens Essenciais	
Domínio: Funções	
Conteúdos:	
Generalidades acerca de funções reais de variável real	Funções quadráticas, módulo e funções definidas por ramos
Objetivos: <ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer, representar e interpretar graficamente funções reais de variável real e funções definidas por expressões analíticas e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação; • Reconhecer e interpretar as propriedades geométricas dos gráficos de funções e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação; • Reconhecer e interpretar os extremos, sentido das concavidades, raízes e a representação gráfica de funções quadráticas e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação; 	

Tabela 5: Estrutura da tarefa:

Adaptada de Swan (2017)

Objetivo educativo da aula/Finalidade do ensino da matemática			
O1	O2	O3	O4
Desenvolver o conhecimento factual e a fluência processual	Desenvolvimento da compreensão conceptual	Competência estratégica	Competência crítica
Tipos de tarefa (questão 1)			
Prática de procedimentos e notação	Observar, classificar e definir estruturas e objetos matemáticos	Resolver um problema não rotineiro pela criação e desenvolvimento de uma cadeia de raciocínio	Analisar e criticar a explicação matemática de um procedimento ou conceito
	Representar e traduzir entre conceitos matemáticos e as suas representações.	Formular e interpretar um modelo matemático de uma situação que pode ser adaptada e usada numa variedade de situações.	Analisar e criticar uma estratégia de resolução de problemas ou o modelo matemático de um fenómeno.
	Justificar e/ou demonstrar conjecturas, conexões e procedimentos matemáticos.		
	Identificar e analisar a estrutura dentro de situações.		

Tabela 6: Pensamento Crítico

Inspirado em Ennis (1993) e Tenreiro-Vieira e Vieira (2013)

Capacidades de Pensamento Crítico (Ennis, 1993)	Itens de análise (Tenreiro-Vieira e Vieira, 2013)
Foco da questão	<ul style="list-style-type: none"> • Formular, de forma clara e precisa, a questão ou problema a resolver; • Interpretar informação apresentada de diferentes formas; • Resumir; • Fazer e responder a questões de clarificação e desafio; por exemplo: Porquê? Qual é a questão principal? O que seria ou não um exemplo? O que se quer dizer com "...”?
Análise de argumentos	<ul style="list-style-type: none"> • Argumentar e contra-argumentar; • Procurar diferentes pontos de vista e identificar as suas potencialidades e limitações; • Avaliar imparcialmente todos os pontos de vista; • Identificar e lidar com irrelevâncias. • Procurar semelhanças e diferenças;
Inferência	<ul style="list-style-type: none"> • Investigar: Procurar evidências e contra evidências

	<ul style="list-style-type: none"> • Fazer e avaliar induções (Generalizar, formular e explicar hipóteses) • Fazer e avaliar deduções (Lógica de classes; lógica condicional; dupla negação; condições necessárias e suficientes, outras palavras e frases como: só, se e só se, ou, etc)
Estratégias e táticas	<ul style="list-style-type: none"> • Selecionar a(s) estratégia(s) a utilizar; • Decidir sobre uma ação: Selecionar critérios para avaliar possíveis soluções; Formular estratégias alternativas; Decidir, por tentativas, o que fazer; Verificar cuidadosamente a implementação.
Revisão e decisão, tendo em conta a situação no seu todo	<ul style="list-style-type: none"> • Refletir criticamente sobre a tarefa e respetiva solução; • Avaliar o processo de pensamento (por exemplo: quanto bem foi um problema resolvido, quanto boa é uma decisão) • Manifestar abertura para a possibilidade de existência de outras soluções/estratégias de resolução. • Criar, pelo menos, uma alternativa à solução dada, recorrendo a conhecimentos matemáticos, caso a mesma esteja errada; • Fazer juízos de valor (tendo em consideração, por exemplo, consequências de ações propostas, soluções alternativas);

Além disso, para analisar a discussão coletiva das diferentes aulas utilizei parte do quadro sobre as ações intencionais do professor na prática de ensino exploratório da matemática (Oliveira et al., 2013), que se separa em duas colunas: uma sobre a promoção da aprendizagem matemática e, a outra, sobre a gestão da turma e o funcionamento da aula. Apresento a parte do quadro utilizada na Figura 1:

DISCUSSÃO DA TAREFA	<p><i>Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> — Pedir explicações claras das resoluções — Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas — Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas <p><i>Regular as interações entre os alunos na discussão:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> — Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas — Incentivar análise, confronto e comparação entre resoluções — Identificar e colocar à discussão erros matemáticos das resoluções 	<p><i>Criar ambiente propício à apresentação e discussão:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> — Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos — Providenciar a reorganização dos lugares/ espaço para a discussão — Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados <p><i>Gerir relações entre os alunos:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> — Definir a ordem das apresentações — Cuidar de justificar as razões da não apresentação de algumas resoluções — Promover e gerir as participações dos alunos na discussão
----------------------------	---	---

Figura 1 – Adaptado de Quadro de Oliveira et al. (2013) - Ações intencionais do professor na prática de ensino exploratório da matemática

No capítulo que se segue apresentam-se, analisam-se e interpretam-se os dados recolhidos, conforme os critérios previamente apresentados, de forma a poder responder às questões de investigação deste trabalho.

5. Análise de dados

5.1. Análise das aulas

Aula 1: Tarefa *Função Quadrática*

Caracterização da tarefa e da aula

A tarefa 1 tinha como objetivo, em termos de conteúdo matemático, que os alunos identificassem e analisassem as diferentes características de uma função quadrática, entre elas o domínio, contradomínio, eixo de simetria, zeros, intervalos de monotonia, sentido da concavidade e vértice, partindo da comparação entre funções x^2 com funções da família ax^2 , $(x - h)^2$ e $ax^2 + k$, $a \neq 0$. Os alunos tinham estudado, no 9º ano de escolaridade, as funções da família ax^2 e, no 10º ano, antes desta subunidade didática, as transformações de funções. Por este motivo, pretendia-se que utilizassem conhecimentos prévios para realizarem suas aprendizagens.

Outro objetivo que se pretendeu atingir com esta tarefa foi que os alunos tivessem um primeiro contacto com a calculadora gráfica, percebendo como esboçar um gráfico e encontrar as coordenadas de um determinado ponto. Para tal, utilizei um emulador da calculadora utilizada pela maior parte dos alunos, partilhando o ecrã e ajudando-os a seguir os vários passos. Circulei pelos grupos para auxiliar os alunos que tinham modelos de calculadoras gráficas diferentes. Os alunos mostraram-se muito atentos e curiosos com a calculadora gráfica, pois foi o primeiro dia que tiveram contacto com a mesma. Manifestaram facilidade no seu manuseamento e bastante autonomia a descobrir algumas das suas funções. Isso se pode observar no excerto de diálogo seguinte, que ocorreu durante a discussão coletiva:

Professora: Como encontraste os zeros, Rui?

Rui: São os pontos onde corta ali no eixo do x .

Professora: E calculaste analiticamente ou usaste a calculadora?

Rui: Fiz na calculadora.

Professora: Todos conseguem encontrar os zeros com a calculadora?

Madalena: Mas não basta olhar?

Professora: Por vezes basta olhar, mas se não for um número inteiro e fácil de observar, a calculadora pode dar-nos o valor exato, que nos pode ser útil. Tentem todos e certifiquem-se que conseguem todos encontrar os zeros com a calculadora gráfica.

Rui: É bué fácil.

Fundamentado em Swan (2017), reconheço que o maior objetivo desta tarefa é o desenvolvimento da compreensão conceptual. A tarefa pedia que representassem e traduzissem entre conceitos matemáticos e as suas representações, estudando o que variava entre elas. Os alunos elaboraram e testaram também as suas conjeturas, utilizando diversos valores para as variáveis em causa nas questões 1.2, 2.2 e 3.2, como exemplos que apoiassem ou refutassem a sua conjetura, e pretendia-se que conseguissem generalizar, sistematizando o comportamento da função quadrática quando apresentada da forma $y = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$.

De acordo com o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, “as competências na área de Pensamento crítico requerem observar, identificar (e interpretar), **analisar** (...)” (Martins et al., 2017, p.24). A competência “analisar” é necessária à ocorrência de pensamento crítico, e de acordo com Lopes e Silva (2019), alguns dos verbos de ação a usar para formular descritores de desempenho para esta competência são inferir e relacionar. O enunciado desta tarefa apresenta em todas as questões “Como se relaciona (...)?” e também requiere uma generalização. Desta forma podemos considerar que a principal competência desenvolvida nesta tarefa é a análise.

Alterações ao plano de aula:

A maior alteração ao plano de aula foi a introdução do primeiro momento de discussão coletiva a seguir à realização da questão 1, para que todos os alunos recordassem os conceitos de parábola, concavidade, vértice, eixo de simetria e raízes, antes de continuarem para as questões 2 e 3. No plano de aula estava prevista apenas uma discussão coletiva no final. Esta alteração aconteceu devido ao facto de apenas três alunos visualizarem em casa o vídeo da plataforma Khan Academy “*Introdução às Parábolas*” que lhes foi pedido como trabalho pré-aula. Os três alunos que visualizaram o vídeo conseguiram explicar nos respetivos grupos os conceitos aos colegas, e nos restantes grupos, alguns alunos recordavam-se das aprendizagens do 9º ano. Após a realização da questão 1, através de questionamento, fui guiando os alunos para a definição destes conceitos.

Apresento de seguida a análise do trabalho autónomo dos três grupos de alunos durante esta aula, assim como da discussão coletiva. Ao longo desta análise busco verificar se os objetivos quanto às suas aprendizagens sobre a função quadrática foram

alcançados, assim como o objetivo de desenvolver a compreensão conceptual, e a presença de evidências de mobilização do pensamento crítico.

Trabalho autónomo

Durante o trabalho autónomo, o **grupo do Rui** não apresenta dificuldades na resolução da tarefa, com exceção da generalização (referido nas dificuldades dos alunos). Porém, o grupo mostra-se muito disperso e desatento, conversando sobre outros temas:

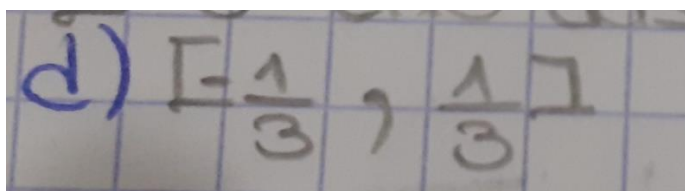
Rui: O eixo de simetria está aqui. Aqui é no 1, aqui é no 0 e aqui é no -2. Então y_1 é o verde, y_2 a vermelha e y_3 a azul.

Samuel: Intervalos de monotonia... Não me apetece nada fazer isto!

A falta de motivação que observamos neste grupo de trabalho é um obstáculo ao desenvolvimento do pensamento crítico (Lopes & Silva, 2019) e à realização de novas aprendizagens. Por sua vez, o grupo de trabalho da **Bruna** apresenta dificuldades durante o trabalho autónomo, ao resolver a primeira questão, uma vez que não tem os conceitos prévios necessários. Não visualizaram o vídeo em casa e não se recordam do que estudaram no 9º ano:

Bruna: O sentido da concavidade nestas duas é positivo e nestas duas é negativo (*confundindo o positivo com voltada para cima e o negativo com voltada para baixo*).

O grupo apresenta também dificuldade em assinalar os zeros da função – dão como resposta o valor do parâmetro a e não sabem identificar o sinal de parêntesis reto como correspondendo a um intervalo. Dão a seguinte resposta (Figura 2):



The image shows a close-up of a student's handwritten work on a grid background. The student has written 'd)' followed by the interval $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ enclosed in square brackets. The numbers are written in blue ink.

Figura 2 - Resolução da alínea 1.1 d) pelo grupo da Bruna

O grupo apresenta dificuldade em identificar o vértice das parábolas – dão como resposta novamente o valor do parâmetro a (Figura 3).

Handwritten mathematical solutions for a problem involving parabolas. The solutions are: $y_1 = [0, 0]$, $y_3 = [0, 0]$, $y_2 = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, and $y_4 = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

Figura 3– Resolução da alínea 1.1 g) pelo grupo da Bruna

O grupo demonstra ainda, dificuldade na questão 1.2, a qual requeria a generalização do efeito do parâmetro a , como podemos verificar no trecho abaixo:

Madalena: Quando o a pertence aos reais exceto o zero, a parábola é maior (*Não consegue utilizar linguagem matemática com precisão*).

Nestes registos conseguimos observar a falta de conhecimentos prévios do grupo de trabalho. Segundo Lopes e Silva (2019), o conhecimento das informações relevantes que são necessárias para fazer reflexões ponderadas é um dos requisitos dos alunos necessários ao pensamento crítico. Verificamos que a falta deste conhecimento não permite que os alunos realizem as aprendizagens pretendidas e reflitam sobre elas.

Depois da primeira discussão coletiva, o grupo de alunos entende os conceitos de eixo de simetria e de concavidade e resolvem sem dificuldade as questões 2 e 3:

Bruna: O eixo de simetria é o quê?

Lucas: Agora não podemos errar isso do eixo de simetria ser o eixo das abcissas.

Madalena: Agora é $x = 1$ porque dobra no 1.

Bruna: E a concavidade é positiva.

Lucas: Não, diz-se voltada para cima.

Os alunos procuram semelhanças e diferenças com a questão realizada anteriormente, relacionando os conceitos de eixo de simetria e concavidade com o que foi sintetizado na primeira discussão coletiva, mostrando que tomam consciência das ideias prévias.

Por outro lado, a aluna **Andreia** revela entender os conceitos e apresenta preocupação com a aprendizagem e ritmo do seu grupo, assim como com a gestão de

tempo. As resoluções escritas mostram-nos que não apresenta dificuldades na resolução das questões:

Andreia: O zero é igual para todas (as funções) porque elas estão todas com um zero no ponto (0,0).

Júlia: A monotonia na função 1 e 2 é crescente?

Andreia: Ela é estritamente decrescente de menos infinito a 0 e estritamente crescente de 0 a mais infinito. Na 3 e 4 é ao contrário, pois o a é negativo.

Andreia: Já passaram 45 minutos e ainda não terminámos a primeira pergunta! O que é que acham aqui na 1.2?

[Seguidamente explica aos dois colegas o efeito do parâmetro a , utilizando as transformações de funções que estudaram previamente, demonstrando entender as ligações lógicas entre os temas que estudou].

Por fim a Andreia pergunta: Vocês estão mesmo a perceber isto?

Observamos que a aluna revela um verdadeiro espírito cooperativo, demonstrando atenção e cuidado pelas aprendizagens dos colegas, uma vez que têm mais dificuldades do que ela na disciplina de matemática. É humilde e tolerante, atitude favorável ao desenvolvimento do pensamento crítico (Lopes & Silva, 2019).

Discussão coletiva

Na análise do registo vídeo observo que, inicialmente, os alunos apenas participam na discussão se os chamar individualmente. Parecem demonstrar falta de autoconfiança no seu raciocínio. Ao longo da discussão os alunos foram perdendo o receio que mostravam em participar e falar, quando não têm a validação das suas respostas. Acredito que este crescente à-vontade se deveu ao facto de tentar escutar cuidadosamente as ideias de cada aluno e manter-me orientada para o questionamento, em vez de desafiar e argumentar com os alunos, nesta primeira aula em que se mostraram mais tímidos e menos participativos (Arends, 1999). Para auxiliar esta primeira discussão coletiva, desenho no quadro as diferentes parábolas quando estamos a discutir uma determinada questão, de modo a ajudar os alunos na visualização gráfica. Já no final da aula, numa questão de generalização, observamos a seguinte discussão:

Professora: Como se relaciona o gráfico da função ax^2 com o da função $ax^2 + k$? Como é que o parâmetro k influencia o gráfico? *(Com esta questão pretendo que os alunos comuniquem oralmente as inferências que realizaram durante o trabalho autónomo.)*

Rui: Eu pus que quanto maior for o valor de k , mais para cima irá deslocar-se a função, mais para cima.

Professora: Concordam? (*Tento perceber se todos os alunos chegaram à mesma conclusão, e incentivar a sua participação, sem validar a resposta.*)

Bruna: Tu não sabes se ela vai-se deslocar para cima ou para baixo, só sabes que é uma translação vertical.

Rui: Claro que sabes. Por exemplo -8 está bué em baixo, quando é 1 está para cima. Se puseres -10 ainda vai ficar mais para baixo do que -8.

Bruna: Mas aqui no exercício não te dão números certos.

Maria: A Bruna está a dizer que não sabes qual é a constante. Só sabes que se o k for positivo vai para cima, se for negativo vai para baixo.

Depois os alunos começam a falar todos ao mesmo tempo, apresentando lacunas nas competências de comunicação, tais como apresentar ideias de forma clara, responder aos outros de forma apropriada, fazer boas questões e, principalmente, ouvir os outros (Arends, 1999).

Professora (*No final tento focar os alunos no momento de sistematização coletiva*): Temos então uma translação vertical associada a que vetor?

Alunos: $(0, k)$.

De acordo com a Tabela 6 utilizada para a análise de dados, os alunos evidenciam nesta tarefa mobilizar capacidades de pensamento crítico relativas a foco da questão, quando percebem, de forma clara e precisa, a questão a resolver; análise de argumentos, ao argumentar e contra-argumentar, procurar semelhanças e diferenças e capacidade de realizar inferência, quando investigam, procurando evidências e contra evidências e, por fim, quando conseguem generalizar.

Dificuldades dos alunos:

Nesta aula os alunos revelaram algumas dificuldades quanto aos conceitos de eixo de simetria, intervalos de monotonia e sentido da translação horizontal. Quanto aos processos de raciocínio matemático, os alunos demonstram alguma dificuldade em generalizar. Seguem-se excertos de respostas que exemplificam estas dificuldades.

- **Conceito de “eixo de simetria”** – os alunos confundem com eixo de reflexão. Uma vez que desenham no mesmo gráfico todas as parábolas da questão 1 (Figura 4) confundem o eixo de simetria com o eixo de reflexão, como se existisse uma função e a mesma função refletida, provavelmente porque estudaram anteriormente as transformações de funções. Deste modo o grupo da Bruna responde que o eixo de simetria é o eixo das abcissas:

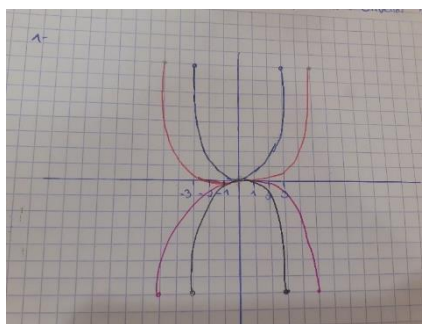


Figura 4- Resolução da alínea 1.1c) pelo grupo da Bruna

Depois da primeira discussão coletiva, o grupo de trabalho demonstra entender o conceito: “O eixo de simetria é sempre zero. O eixo de simetria só mudava se a função se deslocasse horizontalmente.” Constatamos que o grupo atingiu o principal objetivo educativo da aula, segundo Swan (2018): o desenvolvimento da compreensão conceptual.

- **Intervalos de monotonia:** Os alunos parecem não entender o conceito de monotonia da função. Um grupo responde que as funções cuja concavidade é voltada para cima são sempre crescentes, e as funções cuja concavidade é voltada para baixo são sempre decrescentes. Um outro grupo diz que, na função $y = 2x^2 + 1$, a monotonia se altera no valor 1:

Madalena: Stôra ali na monotonia dissemos que ela é decrescente de menos infinito até 1, e depois do 1 crescente. *(A aluna fala em voz baixa, demonstrando pouca autoconfiança).*

Professora: Mais alto, acho que não estão a ouvir lá atrás. *(Pretendo chamar a atenção de todos os alunos para que ouçam atentamente a colega).*

Professora: Porque é que este grupo se está a referir ao valor 1?

Samuel: Porque estão a confundir o eixo do x com o do y .

De acordo com Ponte et al. (2020), durante a discussão coletiva o professor deve valorizar contribuições incorretas e promover uma discussão que as desconstrua ou clarifique. Desta forma, pretendi que os alunos escutassem atentamente a colega e solicitei a explicação do “porquê” para que tentassem interpretar a ideia que lhes estava a ser apresentada.

- Generalização:** Alguns grupos não conseguem responder por escrito às questões 1.2, 2.2 e 3.2. Têm dificuldade em utilizar os termos apropriados relativos a transformações de funções, como translação ou dilatação. Conseguem fazê-lo oralmente durante a discussão coletiva, com a ajuda do questionamento realizado por mim. O professor deve colocar vários tipos de questão, neste caso, de recolha de informação, para que os alunos se lembrem de definições (NCTM, 2017). Na questão 3.2 (Como se relaciona o gráfico da função ax^2 com o da função $ax^2 + k$?) o grupo da Bruna percebe que ocorreu uma translação vertical, mas troca o seu sentido e utiliza h em vez de k (Figura 5). Na questão 2.2 (Como se relaciona o gráfico da função $y = (x - h)^2, h \neq 0$ com o de $y = x^2$?), o grupo do Rui consegue perceber como é que o parâmetro h influencia o gráfico da função, mas tem dificuldade na comunicação escrita matemática, como observamos (Figura 6). A aluna Andreia demonstra bastante facilidade na resolução de toda a tarefa. Porém, nas questões de generalização, escreve que o vértice se desloca, e não todo o gráfico da função, e troca o sentido do deslocamento em função do valor de h (Figura 7). A aluna não participa na discussão coletiva.

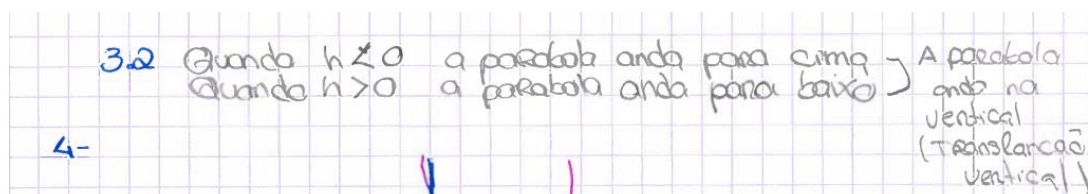


Figura 5 – Resolução da alínea 3.2 pelo grupo da Bruna

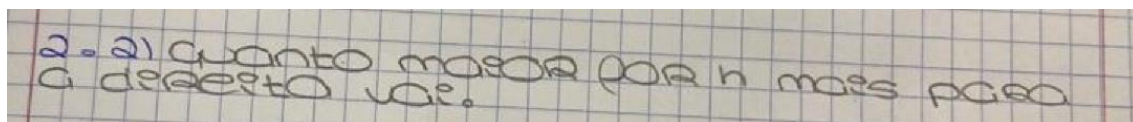


Figura 6 – Resolução da alínea 2.2 pelo grupo do Rui

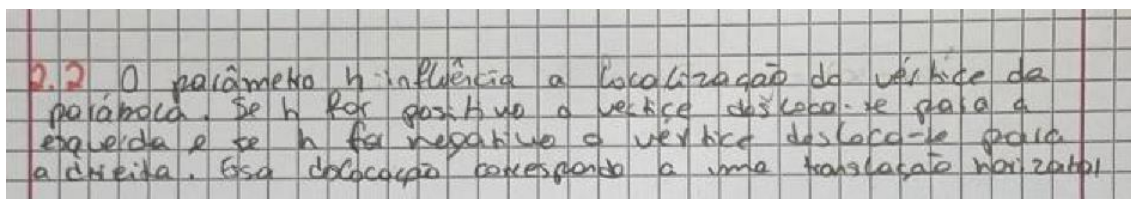


Figura 7 – Resolução da alínea 2.2 pelo grupo da Andreia

Durante a discussão coletiva sobre a questão 4, que pretendia generalizar o efeito dos parâmetros a , h e k em $y = a(x - h)^2 + k$, os alunos conseguem fazê-lo com a ajuda do questionamento, como podemos observar no seguinte excerto:

Professora: Júlia qual será o eixo de simetria? (*Tento chamar a atenção da aluna Júlia, que pertence ao grupo da Andreia, mas tem muitas dificuldades e não participa voluntariamente na discussão coletiva*).

Julia: h ?

Professora: O que é que é h ?

Rui: $x = h$

Professora: E a monotonia? Onde é a função decrescente?

(Alunos respondem todos ao mesmo tempo, respostas diferentes. Tal como referido na análise da discussão coletiva, apresentam lacunas nas competências de comunicação, não sabendo escutar atentamente os colegas e não aguardando pela sua vez de falar, oportunamente. Por este motivo chamo uma aluna em específico para tentar que todos os alunos façam silêncio e escutem a colega).

Professora: Não se assustem com as letras. Se em vez de um h estivesse um 3, o que me dizias, Jéssica? (*Pretendo que os alunos pensem num exemplo numérico e depois consigam generalizar com linguagem algébrica*)

Jéssica: É decrescente de menos infinito até 3.

Professora: Exato. Então se em vez de 3 estiver um h , que pode ser qualquer número?

Jéssica: É decrescente de menos infinito até h .

De acordo com Rodrigues et al. (2014), as discussões matemáticas podem dar um acentuado auxílio à aprendizagem "ao potenciarem o desenvolvimento da simbolização e da generalização, através da negociação de significados algébricos e de formas de representação adequadas para as ideias algébricas".

• Sentido da translação horizontal

Alguns alunos trocam o sentido da translação horizontal, o que é um erro comum no estudo das transformações de funções devido à relação que criam com a adição ou subtração de números na reta real.

Durante a discussão coletiva também se observa esta dificuldade:

Bruna: Quando o h é maior que zero a parábola anda para a esquerda.”
(Referindo-se à questão 2.2, que requer a generalização da influência do parâmetro h em $(x - h)^2$).

Professora: Todos concordam?

Tiago: Não. É ao contrário.

Bruna: Este é aquele exemplo em que o sinal é mentiroso. Quando tem mais anda para a esquerda.

Rui: Não, não. Olha lá: no $x - 1$ andou para a direita. Ou seja, se estivesse no 2 ainda estava mais para lá. *(O aluno apresenta dificuldades nas capacidades de pensamento crítico, pois na realidade não está a contradizer a colega. Não parece analisar atentamente os seus argumentos. Entretanto os alunos começam a falar todos ao mesmo tempo, o que ocorre várias vezes durante a discussão coletiva desta primeira aula).*

Professora: Um de cada vez por favor. Vamos ouvir a Maria.

Maria: Nos gráficos eu substituí o h na calculadora por vários valores. Quando era negativo andou para a esquerda. *(A aluna demonstra capacidade de pensamento crítico ao realizar inferências, pois procurou evidências para realizar a sua indução. Também selecionou a sua estratégia, utilizando a calculadora para a auxiliar na exemplificação).*

Catarina: “O que eu reparei foi que no $y_3 = (x + 2)^2$ o gráfico andou para a esquerda.

Professora: Então no caso que a Catarina referiu o h era negativo... Pois ficamos com $(x - (-2))^2$ *(escrevo no quadro)*.

Por fim os alunos conseguem generalizar corretamente, com a minha ajuda.

Síntese:

A tarefa proposta nesta aula permitiu aos alunos usufruírem dos recursos tecnológicos, neste caso a calculadora gráfica, poupando tempo que de outra forma seria usado a desenhar manualmente cada um dos gráficos das funções. Este tempo permitiu uma concentração na compreensão do significado de conceitos, na escolha de estratégias e principalmente na discussão e análise crítica (Ponte, 1990).

Analisando os itens que nos remetem para as capacidades de pensamento crítico (tabela 6) e confrontando com o modo de trabalho em sala de aula, no formato de aula em três fases (Stein et al., 2008), podemos observar que, durante a introdução da tarefa, os alunos focaram a questão, quando entenderam de forma clara e precisa a questão ou problema a resolver. Já durante o trabalho autónomo, os alunos investigaram, procuraram semelhanças e diferenças, fizeram e avaliaram induções. Por fim, durante a discussão coletiva argumentaram e contra-argumentaram, reviram e decidiram, tendo em conta a tarefa no seu todo.

Neste aula, a discussão coletiva, onde se realizou também uma sistematização com a ajuda dos alunos, foi a grande ajuda para que os objetivos referentes ao conteúdo programático fossem alcançados, assim como as competências transversais que se pretendiam desenvolver. Porém, durante esta fase da primeira aula é notável a falta de capacidades de comunicação dos alunos tais como apresentar ideias de forma clara, responder aos outros de forma apropriada, fazer boas questões e, principalmente, ouvir os outros (Arends, 1999).

Tentei, por este motivo, criar primeiramente um ambiente propício à discussão, como sugerido por Oliveira et al. (2013), promovendo uma atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados. Só desta forma podemos ter uma discussão coletiva que contribua para promoção da aprendizagem matemática.

Análise Aula 2 e 3: Tarefa *Dominó* (Discussão foi feita apenas no final das duas aulas)

Caracterização da tarefa e da aula

Numa primeira fase da tarefa “Dominó” era pedido que os alunos emparelhassem as peças do dominó, sem completar as linhas em falta. Só depois do dominó estar formado era pedido aos alunos que completassem as partes das equações que estavam em falta, sem necessitar de manipulações algébricas. Desta forma, a tarefa tinha como objetivo, em termos de conteúdo matemático, que os alunos percebessem a relação entre as diferentes formas algébricas de uma função e as propriedades particulares do seu gráfico. Mais especificamente: a forma fatorizada identifica as raízes do gráfico; a forma que contém o quadrado do binómio identifica o vértice e a forma canónica permite identificar rapidamente a interseção do gráfico com o eixo das ordenadas.

De acordo com as Aprendizagens Essenciais, esta tarefa pretendia atingir o objetivo de que os alunos reconhecessem e interpretassem: graficamente funções quadráticas, funções definidas por expressões analíticas e as propriedades geométricas dos seus gráficos. De acordo com Swan (2018), um objetivo educativo da aula era o desenvolvimento da compreensão conceptual, uma vez que os alunos interpretavam e traduziam entre conceitos matemáticos e as suas representações. O objetivo educativo “competência estratégica” também foi trabalhado uma vez que os alunos resolviam um

problema não rotineiro, planejando a sua abordagem e refletindo sobre a sua solução. Antes da discussão coletiva, era requerido que um aluno de cada grupo se deslocasse a outro grupo para comparar as respostas do seu grupo com outro, avaliando e aperfeiçoando o raciocínio de outros, e desta forma outro objetivo desta tarefa era a competência crítica.

Alterações ao plano de aula:

Nesta aula houve vários alunos a faltar devido ao Covid, o que fez com que vários grupos ficassem reduzidos a pares. Este facto não prejudicou o trabalho, pois fez com que obrigatoriamente os dois alunos interagissem. Nos grupos de três alunos, por vezes um aluno fica de parte e não interage com o grupo, como observado durante a intervenção.

Por outro lado, a professora cooperante tenta fazer videochamada com alguns alunos que estão em quarentena e existem algumas dificuldades técnicas, o que atrasa um pouco o ritmo da aula. A introdução da tarefa demorou mais um pouco do que o previsto pois alguns alunos nunca tinham jogado dominó, sendo necessário explicar como funciona o jogo e porque senti ser importante prolongar esta fase da aula para que todos ficassem esclarecidos sobre as características dos gráficos das funções quadráticas, antes de iniciarem o trabalho autónomo. Por este motivo não foi possível realizar a ficha de consolidação que estava prevista para o final da aula e, também, não foi realizada a extensão da tarefa, pois nenhum grupo terminou antes do tempo previsto.

Apresento de seguida a análise do trabalho autónomo dos três grupos de trabalho durante esta aula, assim como da discussão coletiva. Ao longo desta análise tento verificar se os objetivos quanto às suas aprendizagens sobre a função quadrática foram alcançados, assim como o objetivo educativo da aula e a presença ou ausência de evidências de mobilização do pensamento crítico.

Trabalho autônomo

Ao realizar esta tarefa, os alunos mostraram-se bastante empenhados e entusiasmados durante o trabalho autônomo. O grupo do **Rui** não demonstrou dificuldades na realização da tarefa. Porém, o seu colega Samuel, que tem mais facilidade na disciplina, diz: “Vocês são bué lentos.”, não respeitando o ritmo de trabalho dos colegas. Quando terminam o trabalho em grupo, a **Bruna** levanta-se para ir discutir os resultados do seu grupo com o grupo da Maria, como eu sugeri. De acordo com Swan (2017), esta é uma fase importante numa aula de resolução de problemas, onde comparam as estratégias de abordagem. Um aluno de cada grupo dirige-se a outro grupo para comparar e debater ideias. Peço aos alunos para, no caso de haver diferenças nos resultados, tentarem perceber o porquê. Os resultados destes dois grupos não são exatamente iguais:

Maria: O x é negativo logo a concavidade é voltada para? *(a aluna parece estar a pensar no parâmetro a mas fala em x)*

Bruna: Baixo. Mas este aqui não pode ficar com este.

Maria: Por quê?

Bruna: Porque os zeros são -4 e 4 *(referindo-se à parábola representada na peça de dominó E)*. Olha aqui este. Se tem mais um vai para cima. *(indicando a ordenada do vértice da função $y = (x - 4)^2 + 1$)*

Maria: Ah pois é. Nós juntámos a peça I e A porque isto ía dar -35 aqui em baixo. *(manifestando que o valor de $c = -35$ na função $y = x^2 + 2x - 35$ lhe permite identificar rapidamente a interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas)*.

Podemos observar que o objetivo de relacionar as características gráficas da função com as respetivas expressões algébricas foi atingido, apesar de não utilizarem uma linguagem matemática adequada. As alunas fazem e respondem a questões de clarificação e refletem em conjunto sobre os erros cometidos, demonstrando um verdadeiro trabalho cooperativo. Podemos observar um verdadeiro trabalho cooperativo durante esta aula, tanto dentro dos grupos seja na pequena discussão entre dois grupos, onde interagem bastante, como se pode observar na imagem seguinte:

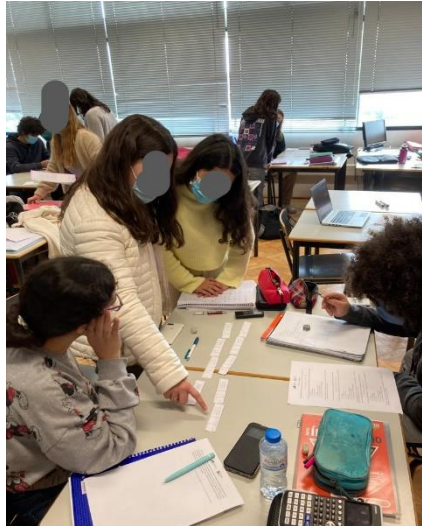


Figura 8- Partilha de trabalhos entre dois grupos

A aluna **Andreia** manifesta curiosidade ao longo de toda a aula, mesmo quando a aplicação do conhecimento não é imediatamente evidente. A curiosidade é, segundo Lopes e Silva (2019), uma componente motivacional do pensamento crítico, determinando a inclinação do aluno para usar as competências que possui.

Andreia: -35 é onde intersepta o eixo do y . É esta! E esta é com esta porque diz que não tem raízes.

Júlia: Esta é com esta?

Andreia: Não, porque tem duas raízes: 4 e -4. É esta. Há uma função que só tem uma raíz, que é o 4. (*refere-se às peças E e J*)

Andreia: Calma. O vértice é (4,1) e como tem menos fica voltada para baixo. (*refere-se às peças C e D*).

Júlia: Ok. Conseguimos.

A aluna demonstra neste diálogo atingir o objetivo de relacionar as diferentes formas algébricas com as características do gráfico: a forma fatorizada identifica as raízes do gráfico; a forma que contém o quadrado do binómio identifica o vértice e a forma canónica identifica a interseção do gráfico com o eixo das ordenadas. Durante o trabalho autónomo a Júlia, do grupo da Andreia, chama várias vezes por mim: “Stôra, pode ver se está certo? Posso parar a gravação?” demonstrando preocupação com a validação do resultado e com o facto de estar a ser gravada.

Discussão coletiva

A discussão inicia-se quando um aluno diz em voz alta:

Lucas: Professora devia ter dito qual era a peça com que tínhamos de começar para que tivéssemos todos igual.

O aluno demonstra necessidade na validação da resposta e de saber a resposta certa, que considera única. A colega responde-lhe:

Maria: Sabem que isto é suposto ser um dominó, pode-se andar para os dois lados! É como um círculo, podes começar em qualquer lado.

Aqui observamos que começa a existir conversação entre os alunos, começam a ouvir-se e dar contributos com sentido uns aos outros, melhorando o nível de discurso na sala de aula (Huffer-Ackles et al., 2004, como citado em NCTM, 2017).

[Sobre a peça D, em que aparece $y = -(x - 4)^2 + 1$].

Nicole: Com o menos quatro anda para a direita.

Afonso: Isto são os pontos do eixo do x e não o vértice. O aluno confunde esta forma algébrica com a forma fatorizada em que é possível identificar as raízes.

Andreia: Com esta forma vêes o vértice, achas o h e o k e aqui o h é 4.

Afonso: Ah o vértice muda de sinal? *(Os alunos começam a conseguir questionar-se mutuamente).*

Andreia: Sim, porque a base da função é $x - h$, referindo-se à forma algébrica $y = a(x - h)^2 + k$.

Catarina: Então fica a sequência A, H, E.

Professora: Por quê? *(Neste momento tento encorajar a aluna a explicar a sua ideia e raciocínio a toda a turma).*

Catarina: Porque no gráfico da A vemos os pontos 3 e 5 e no papel da H mostra o 3 e o 5” *(referindo-se às raízes)*

Professora: Chamam-se as raízes da função, não é? *(Tentando clarificar os conceitos)*

Rui: Sim. Mas stôra, eu vi de outra maneira.

Samuel: Podes ver de várias maneiras.

Rui levanta-se e dirige-se ao quadro, falando apenas para mim: “No papelzinho da H está $y = x^2$ certo? Logo a concavidade vai ser para cima. E aqui está $-x^2$ então a concavidade vai estar para baixo.”

Professora: Podes explicar aos colegas? *(Encorajo a partilha da ideia do aluno e peço-lhe para se dirigir a toda a turma. Rui repete em voz alta para os colegas.)*

Professora: Muito bem, há várias formas de pensar, como podem ver.

Os alunos demonstram nesta discussão, uma evolução em relação à primeira aula quanto à capacidade de se exprimirem e debaterem ideias sem ter tanto medo de errar. Porém, não são eles a oferecer-se para mostrar o seu pensamento, explicando o

seu raciocínio, apresentando ainda necessidade de serem questionados por mim (Hufferd-Ackles et al., 2004, como citado em NCTM, 2017).

Sinto também uma evolução na minha capacidade de responder através de questionamento, não dando a resposta, mas fazendo uma pergunta que põe os alunos a pensar ou explicar o seu raciocínio (Oliveira et al., 2013). Tento levá-los a argumentar as suas posições. Há desta forma um ambiente de comunicação na sala de aula mais capaz de favorecer a participação e reflexão por parte dos alunos, comparativamente à primeira aula.

Dificuldades dos alunos

Na realização desta tarefa não há dificuldades generalizadas a apontar, à exceção da utilização de linguagem matemática apropriada. Na introdução da tarefa foi utilizado bastante tempo da aula e foi, sempre através de questionamento, feita uma síntese em que os próprios alunos concluíram e sintetizaram qual das três formas algébricas da função permitia encontrar cada uma das três características do seu gráfico. Por este motivo os grupos não apresentam dificuldades na realização do domínio.

Síntese

De acordo com a tabela 6 utilizada para analisar as capacidades de pensamento crítico, durante a introdução desta tarefa os alunos utilizaram a capacidade de pensamento crítico *foco da questão*, definindo a questão ou problema a resolver. Interpretaram informação apresentada de diferentes formas, usando e relacionando representações matemáticas tanto durante a introdução da tarefa como durante o trabalho autónomo. Nesta fase da aula, o trabalho autónomo, os alunos procuraram semelhanças e diferenças entre as diversas peças do domínio, de acordo com os conceitos que tinham lembrado na aula anterior: vértice, concavidade, raízes. Mostram-se capazes de identificar e lidar com irrelevâncias, por exemplo, o caso de as peças não estarem totalmente preenchidas com as suas expressões algébricas, que não interferia no que lhes tinha sido pedido. A tarefa permitiu também que os alunos que os alunos investigassem, procurando evidências e contra evidências e realizando

deduções. Por fim, decidiam sobre uma ação, selecionando a estratégia a utilizar (uns pensam no valor do parâmetro a , outros observam o número de raízes, o valor de c , etc.) e verificando cuidadosamente a sua implementação, tendo em conta o domínio no seu todo.

Como observámos, durante a discussão coletiva os alunos demonstram capacidades de pensamento crítico relativas a *análise de argumentos*, procuram diferentes pontos de vista identificando as suas potencialidades e limitações e procuram semelhanças e diferenças entre os argumentos utilizados para a ordenação das peças de uma certa forma. Revelam também a capacidade de realizar *inferência*, quando formulam e explicam hipóteses e fazem deduções.

Aula 4: Tarefa *Quadrado do Binómio*

Caracterização da tarefa e da aula

A tarefa tinha como objetivo, em termos de conteúdo, que os alunos conseguissem reescrever expressões da forma $ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$, e sempre $a \neq 0$, como expressões equivalentes na forma $a(x - h)^2 + k$, com a, h e $k \in \mathbb{R}$ completando o quadrado do binómio.

De acordo com o documento *Aprendizagens Essenciais 10º ano* espera-se que o aluno seja capaz de “Reconhecer e interpretar os extremos, sentido das concavidades, raízes e a representação gráfica de funções quadráticas e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação”. Esta manipulação ajudará a reconhecer o extremo da função quadrática, o seu vértice. De acordo com as *Aprendizagens Essenciais* para o 8º ano de escolaridade, espera-se que o aluno tenha oportunidade de “reconhecer e utilizar casos notáveis da multiplicação de binómios”. Porém, a grande maioria da turma não se recordava de ter estudado os casos notáveis ou de os aplicar em qualquer exercício ou problema. Por este motivo a maior alteração ao plano de aula previamente realizado, foi ter demorado bastante mais tempo na introdução da tarefa, pois realizei alguns exemplos no quadro com a ajuda dos alunos, antes de partirmos para o trabalho autónomo. De acordo com Swan (2017), o objetivo educativo da aula era desenvolver a fluência processual, praticando procedimentos.

De seguida apresento a análise do trabalho autónomo dos três grupos de alunos durante esta aula, através das suas resoluções escritas, o único registo que foi possível nesta aula, por motivos técnicos. Não podemos considerar que existiu uma discussão coletiva, pois devido à escassez de diversidade de respostas e estratégias possíveis para a resolução da tarefa, o que aconteceu foi apenas uma correção da tarefa.

Ao longo desta análise tento verificar se os objetivos quanto às suas aprendizagens sobre a função quadrática foram alcançados, assim como o objetivo educativo da aula. A presença de evidências de mobilização do pensamento crítico não é aqui considerada, uma vez que não era um objetivo da aula em questão.

Trabalho autónomo

O aluno **Rui** aplica, sem dificuldade, os casos notáveis na questão 1 dos dois grupos. Na questão 3 do grupo I era esperado que os alunos vissem primeiro a resolução feita por mim no quadro. Realizei o cálculo auxiliar ao lado, identificando $2ab$, b e b^2 e só depois manipulando a expressão algébrica. Provavelmente por este motivo, o grupo do Rui e o da Bruna repete o mesmo procedimento (Figuras 9 e 11). Não é possível concluir, por meio das resoluções escritas, se os alunos estabeleceram primeiramente a base matemática conceptual. Também não é possível perceber se os alunos identificaram o a como sendo x .

Handwritten mathematical work on grid paper showing two parts of a problem. Part 1: a) $2b=8$, $b=4$, $b^2=16$, $(x^2+8x+16)-16+5$, $(x+4)^2-11$. Part 2: b) $2b=9$, $b=9/2$, $b^2=81/4$, $(x^2-3x+9/4)-9/4+1$, $(x-3/2)^2-5/4$.

Figura 9 – Resolução da questão 4 do grupo I pelo grupo do Rui

O grupo da **Bruna** não parece ter entendido completamente a base matemática do procedimento. Como observamos na questão 1 do grupo I (Figura 10) parece que multiplicam o binómio por ele próprio, somando ab com ab , e não aplicam diretamente o caso notável. Na questão 3 do grupo I, em que era pedido que observassem o exemplo dado por mim no quadro e copiassem a resolução, colocam

um quadrado no x dentro do parênteses, não identificando corretamente o a (Figura 11). Na figura 12 observamos que o grupo volta a colocar o quadrado duas vezes noutra questão, mas depois apaga-o.

$$(x + 6)^2 = x^2 + 6x + 6x + 36$$

$$x^2 + 12x + 36$$

Figura 10 – Resolução da questão 1b) grupo I pelo grupo da Bruna

Observa agora com atenção, o exemplo dado pela professora, no quadro, com o objetivo de completar o quadrado do binómio $x^2 - 4x + 3$ Como sempre, para ter de extrair n

(Copia a resolução para o teu caderno) $= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3$

$$= (x - 2)^2 - 1$$

$2ab - 4$
 $b - 2$
 $b^2 - 4$

Figura 11 – Resolução da questão 3 do grupo I pelo grupo da Bruna

a) $2(x^2 + \frac{8}{2}x) + 4$

$$2(x^2 + \frac{8}{2}x + 4(-4)) + 4$$

$$2(x^2 + 2)^2 - 8 + 4$$

$$2(x^2 + 2)^2 - 4$$

$2ab - \frac{8}{2} = 4$ $b - 2$
 $b^2 - 4$

Figura 12 – Resolução da questão 3 do grupo II pelo grupo da Bruna

Por sua vez, a aluna **Andreia** recorda-se bem dos casos notáveis estudados no terceiro ciclo. Resolve todas as questões sem qualquer dificuldade como observamos nos seus registos escritos.

Nesta aula não realizámos uma discussão coletiva, como dito anteriormente, mas apenas uma apresentação e correção dos resultados com o auxílio do quadro, devido à escassez de diversidade de possíveis estratégias e resultados.

Dificuldades generalizadas

- Aplicar a propriedade distributiva;
- Colocar um algarismo em evidência;
- Identificar o valor do b do binómio e proceder às manipulações necessárias para obter a forma do vértice;

- Trabalhar autonomamente.

As dificuldades foram sendo ultrapassadas durante o trabalho autónomo com a ajuda do questionamento realizado pelas professoras nos diversos grupos. Importa referir que, como as dificuldades foram muitas, foi necessária a ajuda da minha colega de estágio, assim como da professora cooperante, durante o trabalho autónomo para que os alunos conseguissem esclarecer as suas dúvidas e prosseguir com o trabalho.

Síntese

Esta aula insere-se na minha intervenção apesar de não visar desenvolver o pensamento crítico diretamente. Porém, tinha como objetivo desenvolver a fluência processual, necessária para que, posteriormente, restasse tempo para os aspetos mais problemáticos das tarefas, para que pudessem analisar, refletir, argumentar e tomar decisões, nesses momentos sim, desenvolvendo a capacidade de pensar criticamente.

Desta forma pretendia-se que nas aulas seguintes fossem capazes de realizar rapidamente a manipulação das expressões e identificar o vértice de uma parábola, sem esforço de raciocínio. “A civilização avança a partir da ampliação do número de operações que podemos realizar sem pensarmos sobre elas” (Whitehead, 1911, p. 61, como citado em Swan, 2017).

Apesar do objetivo educativo da aula ser a fluência processual, o NCTM (2017) recomenda que esta seja obtida a partir da compreensão conceptual. O facto de os alunos não possuírem os conhecimentos prévios sobre casos notáveis fez com que estes tivessem de ser aprendidos, ou recordados, restando pouco tempo para que explorassem e refletissem sobre a manipulação da expressão algébrica que se pretendia, relacionando-a com os casos notáveis previamente estudados.

Assim, considero que apressei um pouco a chegada à fluência pretendida, uma abordagem ineficaz. Apesar de nesta aula os alunos conseguirem realizar a tarefa, pois tinham exemplos previamente resolvidos por mim e replicavam apenas o procedimento, nas aulas seguintes observei que os alunos não foram capazes de a realizar autónoma e rapidamente, na sua maioria. Os alunos deveriam primeiro ser capazes de explicar a base matemática deste procedimento, antes de lhes ser apresentados vários exercícios repetitivos. Infelizmente o tempo não é suficiente para recuperar os atrasos nas aprendizagens dos dois anos anteriores, em que o ensino

aconteceu à distância, enquanto se tenta simultaneamente que as aprendizagens do presente ano não sejam comprometidas. Um equilíbrio difícil de obter pelo professor, tendo que diariamente decidir o que priorizar.

Aula 5: Tarefa Raízes de uma função quadrática

Caracterização da tarefa e da aula

Esta tarefa tinha como principal objetivo que os alunos conseguissem relacionar o sinal do binómio discriminante de uma equação de segundo grau com o número de raízes de uma função quadrática. Os alunos tinham estudado, no 8º ano de escolaridade, a resolução de equações de segundo grau incompletas e, no 9º ano, a resolução de equações de segundo grau completas, através da fórmula resolvente. Na aula que a precedeu, tínhamos revisto os casos notáveis também estudados no 8º ano e a manipulação de expressões algébricas para obterem a forma que permite ver o vértice do gráfico da função rapidamente. Partindo destes conhecimentos, pretendia-se que realizassem as respetivas manipulações e resolvessem equações de segundo grau.

Posteriormente pretendia-se que colocassem os diferentes coeficientes no *Geogebra* e observassem a representação gráfica das funções. Com a ajuda da tabela disponibilizada, solicitava-se que apontassem o número de zeros de cada função e o valor do binómio discriminante da equação de segundo grau correspondente. Por último, tencionava-se que os alunos observassem a tabela e fossem capazes de generalizar esta relação.

Importa referir que no 9º ano de escolaridade alguns professores já exploram a relação entre o sinal do binómio discriminante e o número de soluções da equação de segundo grau. Porém, como apenas no 10º ano é estudada a função quadrática mais aprofundadamente, considerei pertinente explorar esta relação entre encontrar as soluções de uma equação de segundo grau e encontrar os zeros de uma função quadrática. Também considerei importante que os alunos resolvessem, primeiramente, as equações analiticamente para que, ao tentar aplicar a fórmula resolvente, se

deparassem com uma raiz real de um número negativo, ou zero, e fossem logo tirando as suas conclusões quanto às soluções da equação e respetivos zeros da função. Só depois pedia para abrirem o applet do *geogebra* e analisarem as suas respostas.

De acordo com Swan (2017), o grande objetivo educativo desta aula era o desenvolvimento da compreensão conceptual. Os alunos observavam e manipulavam objetos matemáticos, representavam e traduziam entre conceitos matemáticos e as suas representações, identificavam exemplos que apoiassem a sua conjectura (com o auxílio da tabela disponibilizada) e justificavam. Por fim esta compreensão conceptual deveria sustentar o conhecimento e a fluência processual, na última questão em que se perguntava o número de soluções de cada equação, sem a resolver.

De acordo com o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, “Os alunos observam, analisam e discutem ideias, processos ou produtos centrando-se em evidências” (Martins et al., 2017, p.24). Analisando o enunciado desta tarefa, o que se tencionava era que os alunos analisassem, identificando, relacionando e inferindo, competência necessária à ocorrência de pensamento crítico, segundo Lopes e Silva (2019).

Alterações ao plano de aula

A maior alteração ao plano de aula foi a forma de gerir os tempos dos diversos momentos da aula. O tempo estimado para a resolução das alíneas 1.1 e 1.2 não foi, de todo, suficiente. Os alunos manifestaram muitas dificuldades na resolução das equações, na manipulação das expressões algébricas para determinar a forma do vértice e a forma canónica. A generalidade dos melhores alunos dedicam muito tempo a explicar os procedimentos aos alunos do grupo com mais dificuldades. Também o tempo previsto para ligar os computadores e aceder ao *Applet* não foi suficiente – os computadores demoram muito a ligar e conectar-se à internet, o que faz com que os alunos dispersem um pouco e não comecem a trabalhar rapidamente. Por este motivo restou-lhes menos tempo para observarem atentamente as representações gráficas da função.

Trabalho autónomo

Importa referir que, talvez por ser realizada numa sala de informática, em vez da sala de aula habitual, os alunos se encontram mais dispersos e desatentos nesta aula. A sala é maior e é-me difícil gerir a turma. Talvez por este motivo, a maioria dos alunos apagam os registos áudio dos gravadores, comprometendo a quantidade e qualidade dos dados nesta aula. Simultaneamente, os alunos mostram desagrado quando tiramos fotografia das suas resoluções: “Mas eu não sei se está certo!”. Apesar de lhes ter explicado previamente o objetivo destes registos parecem sentir que estão constantemente a ser avaliados. Na aula seguinte converso novamente sobre estes aspetos e não voltam a repetir-se.

Analisando a resolução escrita do grupo do **Rui**, observamos que o grupo não consegue pôr a função na forma do vértice, ou não chegam a tentar. A coluna respetiva à forma algébrica do vértice encontra-se vazia e a coluna do vértice parece ter sido preenchida apenas com a ajuda do Geogebra, por exemplo considerando a função $j(x)$ em que o valor da ordenada do vértice é escrito em forma de dízima tal como no *Applet* (Figura 13).

Função	Forma canónica $ax^2 + bx + c$	Forma $a(x-h)^2 + k$	Vértice	Esboço do gráfico com marcação do vértice e dos seus zeros/raízes	Zeros da função	Número de zeros da função	Valor do binómio discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$	Sinal do binómio discriminante
$f(x)$	$x^2 - 4x + c$		(2,5)		0	/	-20	-
$g(x)$	$2x^2 + 4x + 0$		(-1, -2)		-2, 0	2	16	+
$h(x)$	$x^2 + 2x + 1$		(-1, 0)		-1	1	0	0
$i(x)$	$-x^2 + 4x - 4$		(2, 0)		-2	1	0	0
$j(x)$	$2x^2 + x + 3$		(0,25 2,87)		0	/	-23	-
$k(x)$	$-x - 2x + 3$		(-1, 4)		-3, 1	2	16	+

Figura 13 - Resolução da questão 1 pelo grupo do Rui

Na figura 13 observamos que, quando a função não tem zeros, o grupo responde “0” e em vez de dizer que o número de zeros é 0, coloca um traço, trocando as duas colunas. O grupo consegue facilmente chegar à forma canónica, mas não resolve analiticamente as equações. Apesar de não parecer ter alcançado o objetivo de consolidar conhecimentos sobre resolução de equações de segundo grau, lecionadas no 8º e 9º ano de escolaridade, e realizar manipulações algébricas para obter duas formas algébricas para a mesma função quadrática, o grupo consegue analisar a tabela

e generalizar a relação entre o sinal do binómio discriminante e o número de zeros da função (Figura 14). Porém, o grupo não justifica adequadamente, apenas escrevendo a generalização.

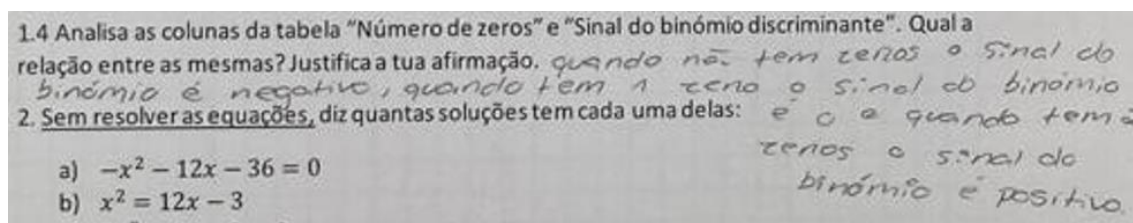


Figura 14 – Resolução da alínea 1.4 pelo grupo do Rui

Durante a exploração com o *Geogebra* podemos escutar o grupo da **Bruna** num registo áudio:

Bruna: Ah! Isto muda se eu mudar ali, agora é que entendi! [referindo-se a mudar o valor dos coeficientes através dos sliders]

Madalena: Ah, ok, isto já diz aqui o resultado [do binómio discriminante], é 16.

Bruna: Espera, mas não apagues. Então é 16.

Madalena: Agora é 2, 1, 3 [valor dos coeficientes]. Aqui o binómio é negativo.

O grupo compara resultados obtidos algebricamente com resultados obtidos através do *Geogebra*, e começa a tirar partido do *Applet* para experimentar e investigar, posteriormente sustentando a sua conjectura. Conseguem por fim, autonomamente, generalizar a relação entre o sinal do binómio discriminante e o número de soluções de uma equação de 2º grau (Figura 15). O grupo escreve “quando a função tem um zero o sinal discriminante não existe”, depois de apagar “não há sinal”, referindo-se às situações em que o valor do binómio discriminante é zero e, portanto, nem negativo nem positivo.

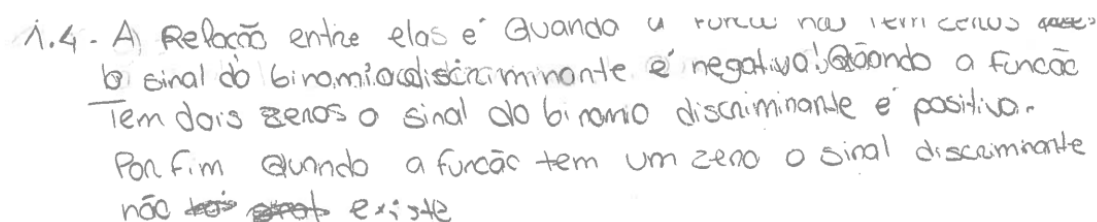


Figura 15 – Resolução da alínea 1.4 pelo grupo da Bruna.

A aluna **Andreia** realiza a tarefa sem dificuldade, como se pode observar na sua resolução escrita (Figura 16). A aluna não apresenta lacunas nos conhecimentos matemáticos lecionados no terceiro ciclo, resolvendo facilmente equações de segundo

grau completas e incompletas, e realizando manipulações para obter duas formas algébricas para a mesma função.

Função	Forma canónica $ax^2 + bx + c$	Forma $a(x-h)^2 + k$	Vértice	Esboço do gráfico com marcação do vértice e dos seus zeros/raízes	Zeros da função	Número de zeros da função	Valor do binómio discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$	Sinal do binómio discriminante
$f(x)$	$2x^2 - 4x + 9$	$(2x-2)^2 + 5$	(2, 5)		não tem	0	-20	-
$g(x)$	$2x^2 + 4x$	$2(x+1)^2 - 2$	(-1, -2)		-2, 0	2	16	+
$h(x)$	$2x^2 + 2x + 1$	$(x+1)^2$	(-1, 0)		-1	1	0	+ 0
$i(x)$	$-2x^2 + 4x - 4$	$-(2x-2)^2$	(2, 0)		-2	1	0	+ 0
$j(x)$	$2x^2 + x + 3$	$2(x^2 + \frac{1}{2}x) + \frac{23}{8}$ $2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{23}{8}$	(-0,25, 2,875)		não tem	0	-23	-
$k(x)$	$-2x^2 - 2x + 3$	$-(x+1)^2 + 4$	(-1, 4)		-3, 1	2	16	+

Figura 16 – Resolução da questão 1 pelo grupo da Andreia

Discussão coletiva

Nesta aula, devido às dificuldades generalizadas que existiram na questão 1.2, no que refere a conseguir realizar manipulações algébricas para passar da forma canónica para a forma do vértice, resolvi separar a discussão coletiva em duas grandes partes. Na primeira parte, pretendia atingir o objetivo de sistematizar o seguinte: perceber a semelhança entre encontrar as soluções de uma equação de segundo grau e encontrar os zeros de uma função quadrática; conseguir conjecturar, generalizar e justificar a relação entre o sinal do binómio discriminante e o número de soluções de uma equação de 2º grau. Apresento de seguida, excertos desta primeira parte da discussão coletiva:

Professora: Vamos fechar o computador e voltar-se para a frente [alunos continuam dispersos e a olhar para o computador]. Têm de se virar para mim se faz favor (*tento chamar a sua atenção*). Se igualarmos esta expressão a zero, como posso resolver a equação resultante?

Pedro: Com a fórmula resolvente! [aqui um aluno pouco interessado participa pela primeira vez, voluntariamente, na discussão coletiva] (...) [Começo a resolver a primeira equação através da fórmula resolvente, no quadro]

Professora: Quanto dava dentro da raiz?

Joana: Nada.

Professora: Porquê?

Rui: Porque não há raízes negativas [Recordo que a expressão dentro da raiz se designa binómio discriminante].

Professora: Então se dentro da raiz está um número negativo eu não consigo resolver a equação, ela não tem soluções. Isso, graficamente, quer dizer o quê?

Afonso: Não há zeros.

Professora: Ou seja, o gráfico da função não intersecta o eixo das abcissas. E o vértice da função ainda não sabemos. Podemos descobrir através da manipulação que aprendemos na aula passada... E, entretanto, sabemos que a concavidade é voltada para onde?

Joana: Para baixo.

Rui: Não, para cima porque é positivo [o aluno refere-se ao facto do coeficiente do termo de segundo grau ser positivo, mas não se expressa corretamente]. (...) [Desenho no quadro uma parábola com concavidade voltada para cima que não intersecta o eixo das abcissas].

Professora: Então se o binómio discriminante for negativo, quantos zeros tem a minha função?

Vários alunos: Zero. Não tem zeros [A discussão prossegue sobre as seguintes equações e funções da tarefa e os alunos generalizam facilmente a relação entre o sinal do binómio discriminante e o número de raízes da função quadrática].

Depois da sistematização dos conteúdos previamente referidos, parti para uma segunda parte da discussão coletiva, onde pretendi atingir os objetivos: realizar manipulações algébricas para obter duas formas algébricas para a mesma função quadrática; relacionar as diferentes formas algébricas de uma função e, por fim, relacionar as representações algébricas da função com respetivas características do seu gráfico. Os objetivos parecem ser alcançados, conforme se verifica nos seguintes diálogos:

Professora: Vamos agora tentar completar a 2ª e 3ª coluna da tabela. Como consigo, por exemplo na função $f(x)$, passar da forma canónica para a forma do vértice?

Rui: O a é 1.

Andreia: Dividir por 2 o valor do meio.

Professora: Exato. Porque sei que o termo do meio é o dobro do meu b .

Rui: Então o h é -2.

Maria: Não, é o simétrico porque dentro do parêntesis tens $x - h$.

Rui: Ok então o vértice é (2,5).

Professora: E a concavidade é voltada para?

Vários alunos: Cima.

Professora: Ok vou tentar desenhar a parábola, como fizeram ontem no *geogebra*. Mas para isso preciso de pelo menos de mais um ponto por onde ela passe. Porque a parábola pode ser mais assim ou assim, desenhando no quadro (Figura 17)

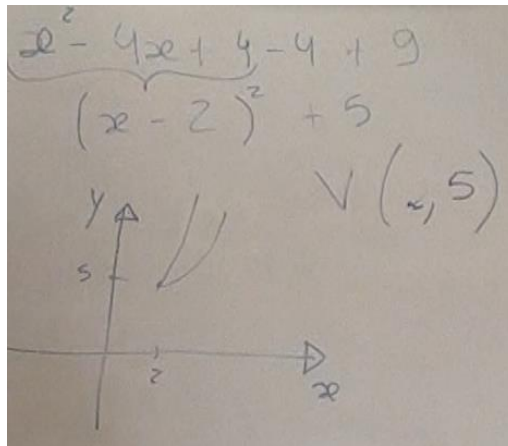


Figura 17 - Fotografia das anotações da professora no quadro durante a discussão coletiva

Rui: O ponto vai ser 9 [referindo-se ao coeficiente c da forma canónica].

Professora: E o 9 é o ponto onde ela interseja o quê?

Maria: O eixo dos x.

Afonso: O eixo dos y

Professora: Então dos x ou dos y?

(alunos não respondem)

Professora: Vamos então calcular $f(0)$, vai dar-nos 9. Portanto é o ponto em que o gráfico interseja o eixo dos...?

Alunos: y. (...)

[Desenho no quadro o esboço da função, Figura18]

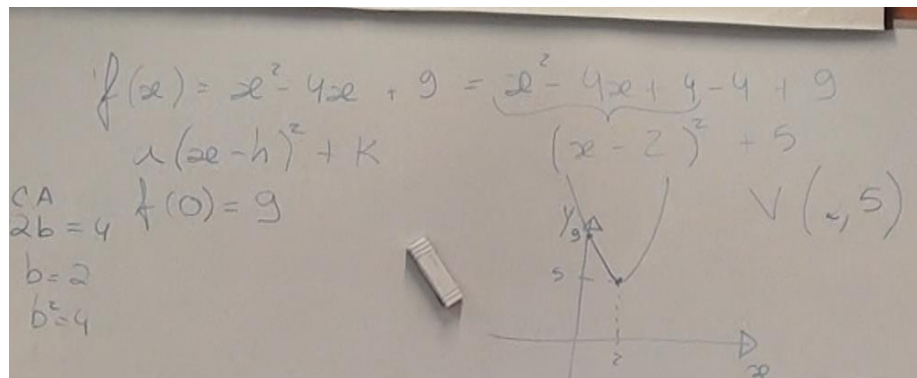


Figura 18 - Fotografia das anotações da professora no quadro durante a discussão coletiva

Professora [apontando para o quadro]: Consigo aqui ver quantos zeros tem a função, não é? Quantos tem?

Vários alunos simultaneamente: Zero.

Professora: Então qual o sinal do binómio discriminante?

Vários alunos simultaneamente: Negativo.

Dificuldades generalizadas

Os alunos manifestam dificuldades em encontrar a forma algébrica das funções que permite identificar o vértice. Teve de ser realizado em grupo durante a discussão coletiva, com o auxílio do quadro e do questionamento (Figura 19).

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x - 4 = \\ &= -(x^2 - 4x) - 4 = \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4 = \\ &= -(x-2)^2 + 4 - 4 = \\ &= -(x-2)^2 \quad V(2,0) \end{aligned}$$

$\Delta = 0$

$(a-b)^2$
c A
 $2b=4$
 $b=2$
 $b^2=4$

Figura 19 -Fotografia das anotações da professora no quadro durante a discussão coletiva

Também apresentam dificuldades na resolução da questão 2 (encontrar o nº de soluções da equação sem a resolver) utilizando os resultados que obtiveram na pergunta anterior – sinal do binómio discriminante. Primeiramente os alunos começaram a resolver as equações. Tiveram de ser orientados por mim: “então, segundo a conclusão a que chegaram aqui em cima, como podem resolver a questão de baixo?”.

Por fim, sublinho a dificuldade em justificar adequadamente – todos os alunos chegam à relação, na questão 1.4 (Analisa as colunas da tabela “Número de zeros” e “Sinal do binómio discriminante”. Qual a relação entre as mesmas? Justifica a tua afirmação.) mas não justificam adequadamente.

Síntese

O facto da grande maioria da turma não possuir os conhecimentos sobre a resolução de equações de segundo grau, lecionadas no 3º ciclo, e sobre a manipulação de expressões algébricas de forma a encontrar o quadrado do binómio, fez com que demorassem muito mais tempo nesta primeira fase da tarefa, restando pouco tempo para a discussão coletiva. À exceção da capacidade de realizar inferência, com a

investigação, procurando evidências e por fim generalizando, a tarefa não tinha outras características suficientemente promotoras de pensamento crítico.

Um aspeto pertinente que poderia ter sido discutido se o tempo permitisse era, por exemplo, que as funções apresentadas na tarefa não são suficientes para mostrar que uma generalização é verdadeira para um número infinito de casos – os alunos deviam mencionar que o facto de o binómio se situar dentro de uma raiz, e não existirem raízes reais de números negativos, faz com que a equação não tenha soluções e, portanto, a função estudada não tenha zeros. Outro aspeto que poderia ter sido discutido seria o sinal do número zero: porque se considera que não é negativo nem positivo, recordando a definição de número positivo ou negativo.

Aula 6: Tarefa *Problemas 1*

Caracterização da tarefa e da aula

De acordo com o documento *Aprendizagens Essenciais* a tarefa tinha como objetivos, reconhecer, representar e interpretar graficamente uma função definida por uma expressão analítica, assim como reconhecer e interpretar os extremos, sentido das concavidades e raízes de funções quadráticas e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação. Nas aulas anteriores tínhamos visto como realizar manipulações para obter duas formas algébricas para a mesma função quadrática, pelo que se pretendia que os alunos as efetuassem. Outro objetivo da tarefa era comparar resultados obtidos algebricamente com resultados obtidos através da calculadora gráfica.

De acordo com Swan (2017), os objetivos desta tarefa são: o desenvolvimento da fluência processual, por exemplo ao realizar manipulações algébricas para obter a forma do vértice; o desenvolvimento da compreensão conceptual, quando representam e traduzem entre conceitos e as suas representações e quando justificam conexões e procedimentos matemáticos; a competência estratégica, quando resolvem problemas não rotineiros e quando formulam e interpretam um modelo matemático (segundo problema); e, por fim, a competência crítica, quando analisam e criticam a estratégia de resolução de problemas ou o modelo matemático de um fenómeno.

Importa referir porque intitulo esta tarefa de “Problemas 1”. Neste caso, considero que estou a propor problemas, pois o aluno não dispõe ainda de um procedimento ou algoritmo para o resolver (Kantowski, 1981, como citado em Abrantes, 1989). As perguntas são bem definidas e fechadas, mas a estratégia não é definida à partida. O desafio é elevado comparado com o exercício. O NCTM define problema como “uma situação na qual, para o indivíduo ou grupo a que se refere, uma ou mais estratégias têm ainda que ser desenvolvidas” (como citado em Abrantes, 1989). Neste caso os alunos ainda não tinham resolvido nenhuma tarefa semelhante nem interpretado e utilizado as características da função quadrática em contextos de modelação.

Decido propor este tipo de problema primeiramente e apenas na aula seguinte propor um problema que assim se pode definir segundo as características de George Polya.

Alterações ao plano de aula:

Apesar do enunciado solicitar que, primeiramente, os alunos resolvessem analiticamente o problema, e só depois com o auxílio da calculadora gráfica, e também ter sido referido durante a introdução da tarefa, alguns alunos utilizam a calculadora gráfica assim que iniciam o trabalho autónomo.

A maior alteração ao plano de aula foi a gestão do tempo dos momentos da aula: os alunos demoram-se muito mais do que o previsto para o primeiro problema, pelo que não resta tempo para pensarem autonomamente no segundo. Desta forma, resolvo partir para a discussão coletiva e, depois de abordarmos o primeiro problema, modelámos o segundo (uma novidade para os alunos), e tornámo-lo num problema matemático. Os alunos chegaram à expressão da função quadrática, com a ajuda do questionamento realizado por mim, apesar de não restar tempo para resolver ou discutir o problema.

Apresento de seguida a análise do trabalho autónomo dos três grupos de alunos durante esta aula, assim como da discussão coletiva. Ao longo desta análise procuro verificar se os objetivos quanto às suas aprendizagens sobre a função quadrática foram alcançados, assim como a presença ou ausência de evidências de mobilização de pensamento crítico.

Trabalho autónomo

Os alunos demonstram alguma dificuldade em iniciar a tarefa. Como reparo que é uma dificuldade generalizada digo para toda a turma, tal como previsto no plano de aula:

Professora: Eu acho que o que pode ajudar a todos é pensarem como poderá ser o gráfico desta função e desenharem-no.

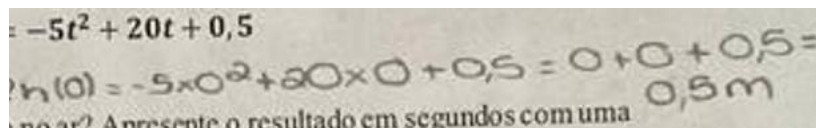
Jéssica: Na minha cabeça vai ser assim [desenhando no ar uma parábola com concavidade voltada para cima].

Professora: Mas imagina-te lá a mandar uma bola ao ar.

Rui: Tens de mandar para cima. Se vai para o ar, depois tem de descer.

Jéssica: Então é ao contrário, assim seria uma bola de ténis.

De seguida, os grupos desenharam, quase todos, uma parábola com concavidade voltada para baixo e avançaram na tarefa. O grupo do **Rui não tem dificuldade em perceber que $t = 0$** equivale ao momento em que é lançada a bola, e que para calcular a altura respetiva basta calcular $h(0)$. (Figura 20)



The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. At the top, the equation $-5t^2 + 20t + 0,5$ is written. Below it, the calculation for $h(0)$ is shown: $h(0) = -5 \times 0^2 + 20 \times 0 + 0,5 = 0 + 0 + 0,5 = 0,5 \text{ m}$. The result $0,5 \text{ m}$ is written below the equals sign. At the bottom of the work, there is a question in Portuguese: "no ar? Apresente o resultado em segundos com uma".

Figura 20– Resolução da questão 1a) pelo grupo do Rui

Na questão 1a), o grupo da **Bruna** começa a encontrar a interseção do gráfico com o eixo das abcissas, em vez da interseção com o eixo das ordenadas. Apresentam também algumas dificuldades ao resolver a equação com a fórmula resolvente, assim como em reconhecer e interpretar as raízes e a representação gráfica da função quadrática:

Bruna: Temos o 400 aqui. Mas tens de fazer uma conta de subtração.

Madalena: Não, não tens. É $b - 4ac$ e o 4 é negativo e se nesta conta toda deu positivo então não tens de fazer nada. Mas eu nem sei se é para fazer fórmula resolvente. Eu ainda não percebi qual o x e qual o y . Quando tens o gráfico o h é o quê, x ou y ?

Bruna: o h é o y e o t é que é o x . Vou ver na calculadora.

Lucas: Não vai dar número certo [refere-se à raiz quadrada de 410, que corresponde a um número irracional].

[Entretanto chamam a minha colega de estágio, que os questiona até que a Madalena percebe que $h(0)$ corresponde à altura em que a bola é lançada]

Professora: Se percebeste então explica lá aos colegas.

Madalena: Isto é o tempo, quando a bola é lançada está nos 0 segundos, então é substituir o t por 0.

Bruna: Ah! Então é 0,5! A matemática às vezes são cenas mesmo simples e a pessoa complica quando parece fácil.

O grupo de trabalho da **Andreia** não apresenta qualquer dificuldade na resolução da tarefa: na alínea 1a), encontram a interseção do gráfico com o eixo das ordenadas, na alínea 1b), encontram a interseção do gráfico com o eixo das abcissas e respondem à pergunta. Contabilizam corretamente o tempo, apenas a partir do momento $t = 0$, tal como se pode observar na sua resposta (Figura 21). Porém, na resolução da equação não utiliza o símbolo de “aproximadamente” nem o escreve na resposta em linguagem natural (Figura 21).

$$\Rightarrow t = \frac{-0,2}{-10} \quad \vee \quad t = \frac{-40,2}{-10} \quad (\Rightarrow) \quad \text{A bola}$$

$$\Rightarrow t = -0,02 \quad \vee \quad t = 4,02 \quad \text{manteve-se no}$$

$$\text{ar durante } 4,02 \text{ s}$$

Figura 21– Final da resolução da questão 1b) pelo grupo da Andreia

Não apresenta qualquer dificuldade na resolução do resto da questão 1, tal como se pode observar na figura 22:

$$c) \quad h(t) = -5t^2 + 20t + 0,5$$

$$-5t^2 + 20t + 0,5 = -5(t^2 + 4t) + 0,5 =$$

$$= -5(t^2 + 4t + 4 - 4) + 0,5$$

$$= -5(t+2)^2 + 20 + 0,5 =$$

$$= -5(t+2)^2 + 20,5 \quad \vee (2; 20,5)$$

A altura máxima atingida pela bola é 20,5m

$$d) \quad t = 3$$

$$h(3) = -45 + 60 + 0,5 = 15,5 \text{ m}$$

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 0,5$$

$$h(3) = -5 \times 3^2 + 20 \times 3 + 0,5 = 15,5 \text{ m}$$

três segundos depois do lançamento a bola encontra-se a uma altura de 15,5 m

Figura 22. Resolução da questão 1c) e 1d) pelo grupo da Andreia

Como se pode observar na questão 1c), o grupo realiza manipulações algébricas para obter duas formas algébricas para a mesma função quadrática, de forma a encontrar facilmente o vértice, cuja ordenada identifica como sendo o máximo da função, e responde em linguagem natural corretamente. O grupo demonstra atingir o objetivo de reconhecer e interpretar os extremos, sentido das concavidades e raízes da função quadrática e usá-los na resolução de problemas (Aprendizagens Essenciais 10º ano, ME). Na questão 1d), o grupo identifica facilmente a altura da bola, três segundos após o lançamento, como $h(3)$. Podemos concluir que o grupo reconhece e interpreta graficamente uma função definida pela sua expressão analítica e usa-a na resolução de problemas (Aprendizagens Essenciais 10º ano, ME). Apesar de não a representar graficamente no papel, fizeram-no através da calculadora gráfica.

Discussão coletiva

Termino o trabalho autónomo perguntando se todos os alunos já conseguem representar o gráfico da função na calculadora. Alguns alunos ainda têm dificuldade e eu circulo pelos grupos para tentar auxiliar. Os grupos também interagem entre eles: “Como ficou na tua? Como fizeste?” e ajudam-se mutuamente.

Tento iniciar a discussão coletiva:

Professora: O gráfico era parecido com o que vocês esperavam ou não?
[Os alunos não me respondem, continuam a conversar dentro do grupo de trabalho. Tento novamente].

Professora: Vamos partir para a discussão coletiva, já sabem que é bastante importante. Portanto falamos um de cada vez.

(...)

[Um aluno inicia, sem o chamar diretamente].

(...)

Lucas: Como no início o tempo é 0 substituímos o t por 0 e fazemos os cálculos, dá 0,5.

Professora: Fizeram todos da mesma forma?

Alunos: Sim.

Professora: E a altura é 0,5 quê?

Alunos: Metros.

Professora: Pois, porque 0,5 pode ser muitas coisas.

Professora: E quanto tempo se manteve a bola no ar? Ela mantém-se no ar até chegar onde?

Rui: Ao chão

Professora: E no chão qual é a altura da bola?

Rui: Zero.

[Entretanto vou desenhando o gráfico da função no quadro, questionando os alunos, figura 23]

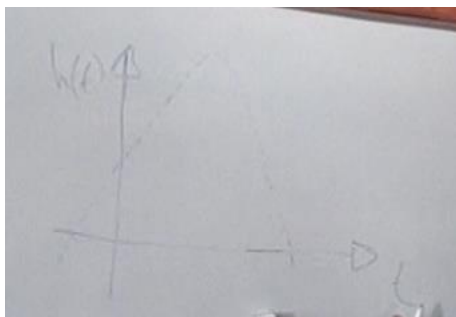


Figura 23 - Primeira fotografia do quadro

Professora: Então vamos lá ver antes de avançarmos, qual será o domínio desta função?

Jéssica: Menos zero.

[Colegas riem]

Professora: Estou a falar de tempo em? [Tentando focar os alunos]

Alunos: Segundos

Samuel: O domínio é de 0 a mais infinito [fala baixo].

Professora: Podes dizer mais alto?

Samuel: O domínio é de 0 a mais infinito porque não existe tempo negativo.

Professora: E alturas negativas?

Alunos: Não existem.

Professora: Pois, só se estivéssemos a falar por exemplo de um mergulho no mar, por exemplo. Então não faz sentido neste caso considerar a função aqui [apontando para os restantes quadrantes, para além do 1º]. Isto é muito importante, porque se não fizerem esta primeira análise, a calculadora não nos serve de muito [Apaga a parte negativa dos eixos das abcissas e das ordenadas, fig 24].

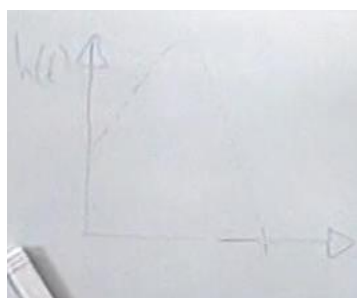


Figura 24 - Segunda fotografia do quadro

Professora: Então o 0,5m a que o Lucas se referia era a interseção do gráfico da função com que eixo?

Alunos: Ordenadas.

[Quando vou assinalar o ponto em questão no gráfico o Rui diz]:

Rui: É um pouco mais para baixo.

Professora: Pois, não está muito bem representado. Por isso é que a calculadora nos pode ajudar [Utilizo aqui o emulador da calculadora, partilhando com os alunos. Vou à janela de visualização e preencho com a ajuda do questionamento realizado aos alunos, o x mínimo e máximo, a escala, etc.].

Seguidamente, observando o gráfico, vamos identificando as características da função, raízes e extremos, sempre incentivando o questionamento para clarificação de ideias (Oliveira et al., 2013). Os alunos vão fazendo na sua calculadora e comparando com os resultados obtidos algebricamente. O Rui demonstra dificuldades em identificar as variáveis em causa, a dependente e a independente, assim como relacionar a ordenada do vértice com o máximo da função. Não parece ter atingido o objetivo de desenvolver a compreensão conceptual: realiza a manipulação algébrica, mas não parece entender que aquela forma lhe dá o vértice e não cria conexões entre as diferentes representações das funções:

Professora: O máximo desta função vai corresponder a que ponto?

Afonso: Ao seu vértice.

Rui: Nós a fazer aquela coisa para chegar a esta forma... (do vértice), não entendo.

[Todos a falar ao mesmo tempo].

Professora: Joana ajuda lá o Rui, repete lá a tua dúvida.

Rui: Eu consegui fazer aquela forma e achar o h e o k , mas agora com estes dois valores como sei a altura máxima? [referindo-se à forma $y = a(x - h)^2 + k$] (...)

[Ninguém responde].

Professora: Ninguém consegue ajudar o Rodrigo?

Por fim, os alunos demonstram alguma melhoria no nível de discurso em sala de aula (Hufferd-Ackles et al., 2004, como citado em NCTM, 2017), quando perguntam e respondem uns aos outros, sem a minha intervenção. Incentivei previamente a Joana a esclarecer a dúvida do Rui – promovendo a interação entre alunos - mas quem acaba por esclarecer é a Rute.

Rute: Se tu reparares a altura máxima da função é o vértice. Então quando tu fazes isso estás a descobrir o vértice, como vimos nas aulas anteriores. Então o vértice vai ser (2; 20,5).

Rui: E usamos esses dois valores?

Samuel: Não, o máximo é 20,5.

(...)

[Assinalo no gráfico, desenhado no quadro, o ponto máximo, e escrevo as suas coordenadas].

Seguidamente, passamos para a discussão da questão 2. Tal como referido anteriormente, o tempo não foi suficiente para que os alunos trabalhassem

autonomamente nesta questão, pelo que foi apenas considerada durante a discussão coletiva, onde pretendi essencialmente modelar o problema, uma novidade para os alunos. Utilizei sempre o questionamento:

Professora: Eu tenho um fio com 36cm [desenhando no quadro um segmento de reta]. E quero encontrar o quê?

Bruna: O ponto onde quero cortar

Tiago: Não tem de se cortar ao meio?

Professora: O Tiago está a dizer que tem de ser cortado ao meio. Porquê?

Tiago: Para as duas partes serem iguais

Professora: E porque é que eu quero que as partes sejam iguais?

Tiago: Porque num quadrado os lados são iguais.

O aluno demonstra dificuldade na capacidade de *foco da questão*, ao não interpretar corretamente o enunciado. Confunde o facto dos lados de um quadrado serem iguais com os lados dos dois quadrados serem iguais.

Professora: Mas no enunciado não está a dizer que os quadrados têm de ser iguais...

Nicole: Mas se cortarmos 4cm conseguimos fazer um quadrado.

Professora: Com quantos cm de lado?

Rui: 4

Bruna: Não, cada lado fica com 1cm.

Professora: E se eu cortar 4cm, quanto sobra de fio?

Alunos: 32

Professora: E 5cm?

Alunos: 31

[Tento dar exemplos numéricos para tentar que depois generalizem com x].

Professora: Então, como posso resolver, sem ser por tentativas?

Rute: É mais difícil dividir ao meio, não?

[Volto a ler o enunciado e a referir que a soma das áreas dos dois tem de ser mínima].

Rute: Ah, então não temos a certeza de que com 4cm vai ser mínima.

Bruna: Ah, isto é aquilo que o Afonso no outro dia falou, que podíamos fazer por tentativas ou não... mas não passei para o caderno.

Professora: Afonso explica lá, como podemos fazer sem ser por tentativas. Em vez de um número, em vez de experimentar com o 4, 5 etc. posso fazer com uma...

Afonso: Variável.

Professora: Qual é que podemos utilizar?

Alunos: x

Joana: E o que resta é o total menos x . Ou seja, é $36 - x$.

Rui: Então, mas x pode ser qualquer valor.

Professora: Exato. E é isso que eu quero descobrir [ainda tenho alguma dificuldade em não responder ao aluno. Ou seja, em incentivar mais que os alunos perguntem e respondam uns aos outros, sem que eu tenha de intervir].

Rui: Mas x vai ter de estar entre 0 e 36.

[Escrevo no quadro $0 \leq x \leq 36$]

Andreia: Mas x não pode ser 0 nem 36.

Professora: Exato, obrigada. [Reescrevo no quadro $0 < x < 36$, figura 25].
Então esta parte do fio com x cm, quanto vai dar cada lado o quadrado?

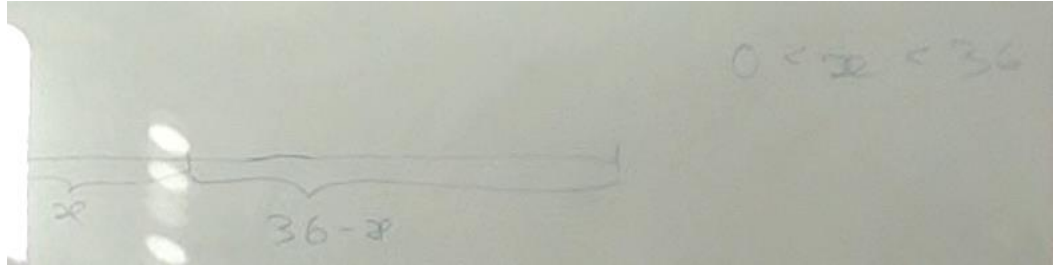


Figura 25 – Fotografia do quadro durante a discussão coletiva

Neste momento os alunos não respondem e eu espero apenas 4 segundos até voltar a falar, como observei no registo de vídeo. Segundo Arends (1999), se o professor puder abrandar o ritmo, este comportamento influenciará a forma como os alunos respondem. É de relevar que, segundo um estudo realizado por este autor, quando o tempo de espera é prolongado, os alunos fornecem mais informações de suporte às inferências que fazem e colocam também mais questões. A extensão das respostas dos alunos aumenta, o número de respostas não solicitadas, mas apropriadas, também aumenta. Esta tendência para impor um ritmo demasiado rápido prende-se com o meu receio, sem fundamento, de que o silêncio seja uma ameaça ao ritmo e ímpeto da aula.

Professora: Então vocês disseram que se tivesse 4 cm, cada lado era?

Alunos: Um cm.

Professora: Então se for x quanto é cada lado do quadrado?

Afonso: Um quarto de x .

Professora: Isso. Não tenham medo das letras, é igual à forma de pensar com um número. Então a área deste primeiro quadrado quanto seria, Madalena?

Madalena: $\frac{x^2}{16}$

Professora: E quanto é o lado deste segundo quadrado, Isaac? [o aluno está desatento e tento que se foque, mas não responde]

Nicole: $(9 - \frac{x}{4})$

[Entretanto toca para sair e os alunos começam a fazer ruído, apresso ainda mais o final].

Professora: Então a área deste quadrado é?

Bruna: $(9 - \frac{x}{4})$ vezes $(9 - \frac{x}{4})$.

Professora: E agora quero que a soma das áreas seja mínima. Então para a soma é só fazer o quê?

Nicole: Somar esses dois.

Professora: E depois encontrar o quê dessa função?

Bruna: O seu mínimo.

Professora: Exato. Podem fazê-lo algebricamente ou através da calculadora gráfica.

[Escrevo a função no quadro e termina a aula].

Apesar de serem guiados pelo questionamento, os alunos cumprem o objetivo educativo de desenvolver a competência estratégica, quando formulam e interpretam o modelo matemático de uma situação (Swan, 2017).

Dificuldades generalizadas dos alunos:

No problema 1 os alunos demonstram alguma dificuldade em trabalhar com uma raiz quadrada que não dá um número inteiro. Alguns alunos pensam mesmo que não pode existir uma raiz de um número que não seja quadrado perfeito:

Lucas: Aqui esta conta dá 410, raiz de 410 não existe, está mal.

Os alunos têm dificuldade em pensar num número aproximado. Este facto levou-me a pensar que poderia ter escolhido outra função, cujas raízes não fossem números irracionais, para que o foco da tarefa não se perdesse. Por outro lado, entendo que ajudou os alunos a desmistificarem esta ideia de que não existem raízes não exatas.

Os alunos continuam a ter dificuldade em criar conexões entre representações, neste caso em relacionar a representação algébrica com a representação gráfica. Para ajudar a ultrapassar esta dificuldade, sugeri aos alunos que fizessem um esboço do gráfico que poderia representar o problema em questão, e que assinalassem os pontos relevantes em cada alínea. Consta-se também, que alguns alunos ainda não dominam a prática de manipulações algébricas para encontrar a forma do vértice, dificuldade que se mantém ao longo das aulas e que vai sendo trabalhada em todas elas. Apesar de ser referida a sua importância, os alunos continuam a não praticar em casa esta manipulação.

No segundo problema a maior dificuldade dos alunos foi pensar na possibilidade de utilizar uma letra como variável e resolver o problema utilizando esta variável.

Por fim, como observamos durante a discussão coletiva, os alunos ainda manifestam dificuldades em exprimir oralmente as suas ideias matemáticas, com rigor, recorrendo ao vocabulário próprio da matemática (Aprendizagens Essenciais 10º ano, ME).

Apesar de haver uma melhoria nas capacidades transversais utilizadas, comparativamente com a primeira aula lecionada, assinalo ainda alguma dificuldade na capacidade de autonomia e perseverança na resolução de um problema, interesse no discurso dos colegas e constante necessidade de validação: “Isto está certo, stôra?”.

Síntese:

De acordo com a Tabela 6, que nos fala de pensamento crítico, observamos que na introdução da tarefa os alunos utilizaram a capacidade *foco da questão*. Durante o trabalho autónomo, utilizam as capacidades *análise de argumentos* e *estratégias e táticas*. Por fim, na discussão coletiva os alunos utilizam também a capacidade de *análise de argumentos* e de *revisão e decisão*. Os alunos conseguiram, na sua maioria, resolver um problema da vida real socorrendo-se da matemática. No caso do primeiro problema, através da função dada e, no segundo problema, através de um contexto de modelação.

Durante a discussão coletiva tenho o cuidado de nunca falar em certo ou errado, mas sim, se faz sentido. Ao analisar a discussão coletiva desta aula, concluo que devo focar-me em aumentar o tempo de espera, abrandando o ritmo das discussões. Segundo Arends (2008), esta alteração no meu comportamento poderá promover um maior questionamento por parte dos alunos, uma conversação mais fluida, especulação e argumentação de ideias. Ao aumentar o tempo de espera, o número de questões de indagação e indutoras de pensamento aumenta significativamente (Arends, 2008), podendo impulsionar o desenvolvimento das capacidades de pensamento crítico.

Aula 7: Tarefa Problema Estádio de Futebol - Análise crítica de resoluções

Caracterização da tarefa e da aula

Antes de iniciar a análise dos dados referentes a esta aula, importa recordar alguns detalhes: na aula anterior dei o enunciado do problema aos alunos e pedi que pensassem sobre ele em casa. Fi-lo com base numa orientação dada por Swan (2018), para estruturar uma aula de resolução de problemas, em que primeiramente o aluno tenta resolver o problema individualmente, para que surjam diferentes resoluções dentro do grupo de trabalho. Também o fiz por uma questão de tempo, para que na

aula restasse mais tempo para os momentos seguintes. Na aula introduzi a tarefa e dei algum tempo para que os grupos trabalhassem autonomamente. Só depois destas atividades distribui outra folha com “Resoluções de Alunos”, fictícias, para analisarem e eventualmente melhorarem as suas próprias resoluções. Por fim, realizámos a discussão coletiva. Ao contrário das orientações dadas por Swan (2018), saltei a fase de “Discussão entre dois grupos”, por uma questão de gestão de tempo.

O grande objetivo desta tarefa era resolver um problema da vida real identificando um modelo matemático que permitisse a sua resolução. De acordo com o documento *Aprendizagens Essenciais*, a tarefa tinha como objetivo reconhecer e interpretar os extremos, sentido da concavidade e a representação gráfica da função quadrática e usá-los na resolução do problema e em contexto de modelação. Outro objetivo da tarefa era tirar partido da tecnologia (neste caso, da calculadora gráfica) para experimentar e investigar.

De acordo com Swan (2017), os objetivos desta tarefa são o desenvolvimento da competência estratégica, quando resolvem um problema não rotineiro e quando formulam e interpretam um modelo matemático de uma situação, e da competência crítica, quando analisam e criticam a estratégia de resolução de problemas ou o modelo matemático de um fenómeno. De acordo com o autor, para atingir o objetivo de desenvolver a competência crítica, espera-se que os alunos trabalhem sobre produtos matemáticos elaborados por outros, que foi o caso desta tarefa, quando analisaram e criticaram estratégias de resolução do problema, identificando pontos fortes e fracos, e eventualmente adotaram e deram continuidade a uma delas.

Esta tarefa foi desenvolvida tendo por base o modelo de Polya (1985) para a resolução de problemas, em conjunto com a abordagem sugerida por Tenreiro-Vieira e Vieira (2001), que articula o apelo explícito a capacidades de pensamento crítico na resolução de problemas na aula de matemática.

Não foi realizada qualquer alteração ao plano desta aula. Devido à característica da tarefa, importa analisar desta vez a introdução da mesma, onde, segundo Polya (1985), se dá a compreensão do problema.

Introdução da tarefa

Durante esta fase da aula, pedi que um aluno lesse em voz alta o problema, e seguidamente questionei-os sobre o entendimento do mesmo, dando-lhes a palavra. A

turma estava calma e parecia envolvida e atenta. Nesta fase da aula os alunos trabalham a capacidade *foco da questão*, ao resumir o problema e ao fazer e responder a questões de clarificação como “Qual é a questão principal?”, tal como se observa no diálogo seguinte:

Professora: Alguém consegue traduzir o problema por palavras suas?

Rui: O bilhete era 25 euros e eles ao venderem por esse preço só conseguiam vender 20.000 bilhetes, quando a capacidade do estádio era 30.000. Então se eles diminuíssem o preço em 1 euro dos bilhetes o nº de bilhetes vendidos aumentava em 1500 [demonstra capacidade de resumir]. E depois tem a pergunta.

Lucas: Temos de diminuir o preço até chegar aos 10.000 para ocupar o espaço todo.

Professora: Faz-vos sentido?

Bruna: Sim.

Professora: Mas qual é o objetivo do problema?

Rui: Máximo rendimento.

Professora: Então mais importante do que termos a capacidade toda, é termos o máximo rendimento possível.

Rute: Então ao termos a capacidade toda não vamos ter o máximo rendimento? [a aluna coloca questões de clarificação]

Rui: Não, porque faz diferença se venderes a 1 euro cada bilhete ou a 100 euros cada bilhete.

Lucas: Se fizerem o preço a 100 euros e ocuparem 15.000 provavelmente vão ganhar mais do que se fizerem a 25 euros e ocuparem menos.

Rui: Mas o objetivo é que eles ocupem o estádio todo e obtenham o máximo rendimento possível [aluno demonstra dificuldade na capacidade *foco da questão*].

Professora: Mas aqui diz que o objetivo é terem o máximo rendimento.

Catarina: Sim, mas não vão poder ter gente a mais no estádio.

Ricardo: Isso não podem. Eu acho que se descermos o preço é mais rentável [importa referir que é a primeira vez que este aluno participa na aula, tem muitas dificuldades na disciplina].

Lucas: Descermos, mas não tanto.

Professora: Ok, então queremos o preço ótimo, não é?

Seguidamente explico como serão as diversas fases da aula e os alunos iniciam o trabalho em grupo. Peço-lhes que naquela aula trabalhassem o mais autonomamente possível.

Apresento de seguida a análise do trabalho autónomo dos três grupos de alunos durante a aula, assim como durante a discussão coletiva. Ao longo desta análise procuro evidências das suas capacidade de resolução do problema, assim como, a presença ou ausência de evidências de mobilização de pensamento crítico. Debruço-me primeiramente sobre as resoluções dos três grupos de trabalho, e numa segunda parte sobre a análise que fazem das “Resoluções de alunos”, fictícias.

Trabalho autónomo

A turma mostra-se entusiasmada na resolução do problema. Os grupos começam a resolver o problema por tentativas, à exceção do grupo da Andreia e do grupo do Afonso. O grupo do **Rui** está empenhado, apesar de ter alguma dificuldade no cálculo do rendimento total. Ficam presos no preço do bilhete e na capacidade do estádio, e não multiplicam os dois para obter o rendimento. Dois alunos do grupo interagem, mas o aluno com mais dificuldade não participa. Chamam-me para os ajudar. Entretanto, o Rui também pondera realizar uma regra de três simples:

Rui: Se com 19 euros eles vendiam 29.000 lugares, então com x eles venderiam? Não, com 25 euros eles vendiam 20.000 então com 19 venderiam x . Agora faz-se a regra de 3 simples. Vamos chamar a professora.

Rui: Stôra nós já chegamos a uma conclusão. Se o bilhete é 25 euros e eles dizem que por cada euro que baixássemos aumentaria 1500 bilhetes e nós fizemos 1500, 3000, 4500, 6000, 7500, 9000. Se fizéssemos mais 1500 já ia ficar mais do que a lotação então nós pegámos no 29.000, que é $1500 \cdot 6$ que dá 9000 [Dificuldade na comunicação matemática oral]. Se ao 26 tirarmos 6 vai dar 19 euros. E agora ficamos presos aqui.

Professora: Acho que estão no bom caminho.

Samuel: Mas isto é o máximo de capacidade.

Professora: Não se esqueçam do objetivo.

[Afasto-me]

Rui: Samuel, pensa comigo. Os bilhetes têm de ser vendidos a 19 euros.

Samuel: Com o estádio com 29.000 pessoas vai dar 551.000

Rui: Multiplicaste 29.000 por 19 euros, certo? Já dá mais do que há pouco.

Samuel: Sim. Mas temos de tentar a capacidade máxima [novamente dificuldade na capacidade foco da questão].

Rui: Stôra, conseguimos [começa a tentar explicar-me].

Professora: Então escrevam isso [os alunos têm dificuldade na comunicação matemática escrita].

O grupo da **Bruna** faz primeiramente uma regra de três simples para calcular o rendimento obtido quando o preço do bilhete são 25 euros (Figura 26).

Handwritten work showing a rule of three calculation:

$$\begin{array}{l} 20000 - x \\ 1 - 25 \\ \hline 500\ 000 - \end{array}$$

Figura 26 - Resolução do problema pelo grupo da Bruna

Conseguimos, num diálogo, escutar o grupo a argumentar e contra-argumentar para conseguirem focar a questão, selecionar a estratégia a aplicar e investigar:

Bruna: Se, por exemplo, o bilhete fosse 24, íamos ter 21.500 e queremos até aos 30.000, não é?

Lucas: Não necessariamente.

Madalena: Queremos é ter mais dinheiro. Mas o que isto tem a ver com função?

Lucas: Isto não parece ter muito a ver com a função. Tenho uma ideia: fazemos 25×20.000 e, depois, descemos o preço 1 ou 2 euros para ver se dá mais lucro.

Bruna: Agora faz com 20 euros.

Lucas: 20? Assim já estás a baixar bué. As pessoas aumentam 1500, faz aí 24×215000 . Temos de ir diminuindo [o valor do bilhete] até ver quando é que começamos a perder.

[vão experimentando com o preço do bilhete a baixar]

Lucas: Já está a começar a descer o lucro, já não aumenta tão rápido [confunde a variação com taxa de variação].

Madalena: Tem de haver outra maneira sem ser por tentativas.

Lucas: Vamos deixar assim e ver o que os nossos colegas dizem [o aluno demonstra ter consideração pelas ideias dos colegas da turma, o que é um sinal de melhoria do nível do discurso na sala de aula, segundo Huffer-Ackles et al. (2004), como citado em NCTM (2017)].

Importa referir que o aluno Lucas tem dificuldades na disciplina, mas mostra-se muito participativo e interessado na resolução da tarefa, dando contribuições positivas ao seu grupo. A aluna Madalena fala de função, provavelmente porque é o conteúdo que estávamos a estudar, e a resolução de problemas do livro tem, por sistema, apenas uma estratégia de resolução possível. Demonstra possuir a capacidade de *Revisão e decisão*, quando diz “Tem de haver outra maneira sem ser por tentativas”, avaliando o processo de pensamento, manifestando abertura para a possibilidade de existência de outra estratégia de resolução. Porém, o grupo não explora essa possibilidade (Figura 27). Segundo Lopes e Silva (2019), os bons tomadores de decisão são flexíveis, pois quando tomam decisões estão abertos a novas maneiras ou alternativas de ação que podem funcionar melhor no final.

bilhete diminuísse. Para que o clube obtenha o máximo rendimento na venda dos bilhetes qual deverá ser o custo do bilhete, em número inteiro de euros? Qual é, em euros, o rendimento?

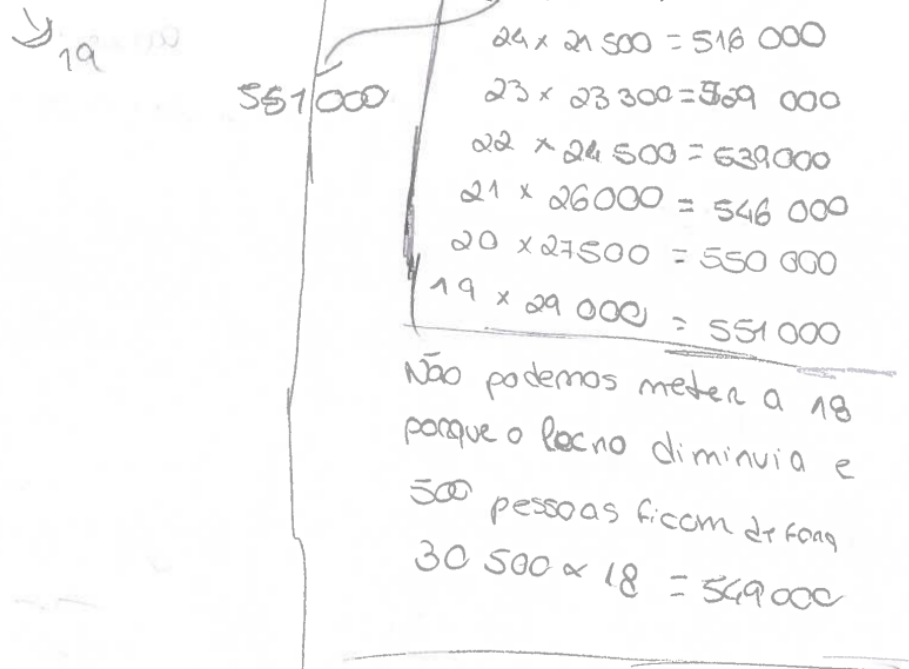


Figura 27 - Resolução do problema pelo grupo da Bruna

Observamos que o grupo demonstra capacidade de *foco da questão* pois percebe, de forma clara, o problema a resolver, procurando o máximo rendimento. Também escrevem “Não podemos meter (o preço) a 18 porque o lucro diminuía e 500 pessoas ficam de fora.”, manifestando que têm em conta a restrição do problema.

O grupo da **Andreia** considera uma função afim, que lhe dá o número de bilhetes vendidos em função da quantidade de euros que retira aos 25 euros iniciais do preço de bilhete (Figura 28). Porém, não tem em conta o rendimento, não responde à questão colocada.

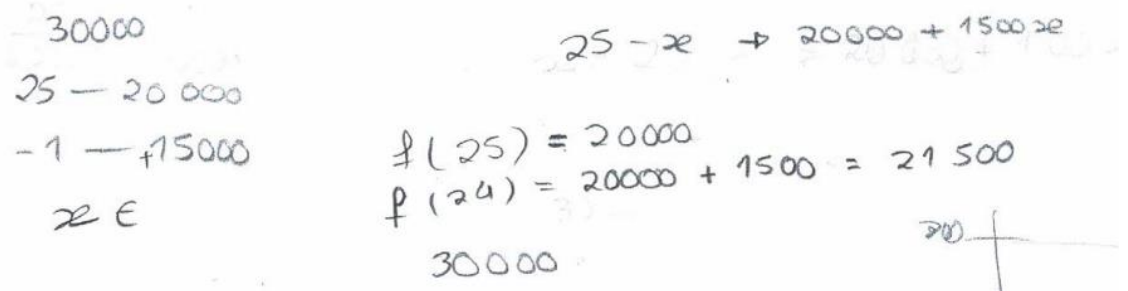


Figura 28 – Resolução do problema pelo grupo da Andreia

Trabalho autónomo – Análise de resoluções de alunos, fictícias

O grupo do **Rui** tem bastante dificuldade na comunicação matemática escrita: conseguimos escutar diálogos que demonstram raciocínios matemáticos realizados corretamente, mas não escrevem no papel as suas resoluções ou justificações.

Rui: O Francisco fez bem, fez o mesmo que nós.

Professora: Então escrevam isso. O que pensam escrevam.

[Afasto-me. Os alunos não escrevem].

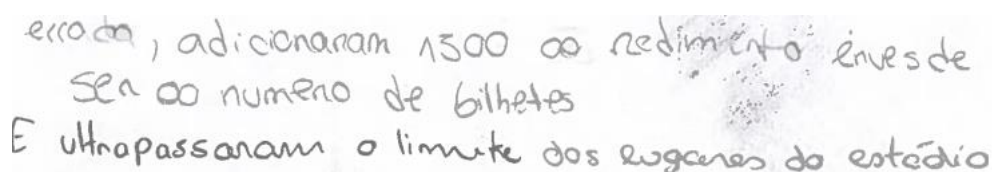
Rui: A Sara está mal, porque ela diz que são 18 euros. Mas na tabela dela com 18 euros a lotação vai ser de 28.361. Ela devia estar a aumentar com uma constante e não com um valor à-toa. O Leonardo, com 17 euros, ultrapassa a lotação do estádio [os alunos não identificam o erro da Sara: que está a aumentar o rendimento em 1500 em vez da lotação do estádio, não respeitando o enunciado, mas identificam que o Leonardo não respeita a restrição do problema].

Hugo: O Leonardo está totalmente correto. A Matilde deve estar parcialmente correta [o aluno está preocupado com dar uma resposta, seja ela qual for, sem perceber o porquê da mesma. Os colegas do grupo ignoram a sua intervenção].

Samuel: O Carlos quer encontrar o máximo, por isso é o vértice.

[Depois os alunos dispersam com conversas sobre outros temas, não tentando perceber as resoluções da Matilde e do Carlos].

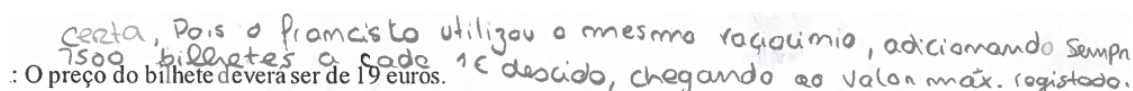
O grupo da **Bruna** analisa cada uma das resoluções. Sobre a resolução da Sara e do Leonardo, identificam que os alunos não respeitam o enunciado (Figura 29).



errada, adicionaram 1500 ao rendimento em vez de ser o numero de bilhetes
E ultrapassaram o limite dos lugares do estádio

Figura 29 – Análise da resolução da Sara e do Leonardo pelo grupo da Bruna

Sobre a resolução do Francisco, pensam corretamente, apesar de não darem a resposta completa, referindo o valor máximo, mas não o valor máximo de rendimento, e não pensam nas limitações de resolver o problema por tentativas, e no facto de que experimentar com um número limitado de valores não serve como demonstração (Figura 30).



certa, pois o Francisco utilizou o mesmo raciocinio, adicionando sempre 1500 bilhetes a cada 1€ descido, chegando ao valor máx. registado.
: O preço do bilhete deverá ser de 19 euros.

Figura 30 – Análise da resolução do Francisco pelo grupo da Bruna

O grupo de trabalho não relaciona a resolução da Matilde e do Carlos: Sobre a Matilde escrevem apenas “parcialmente correta” e, sobre o Carlos, dizem que está errado. Como observam o valor 500000 na função, identificam que o valor do bilhete será 25 euros e consideram o x como sendo o valor do bilhete, ao invés do valor retirado ao mesmo. Tentam então substituir o x por 25 para saberem quanto lhes dá o rendimento, que acaba por lhes dar zero (Figura 31).

Carlos

Quero encontrar o máximo da função $-1500x^2 + 17500x + 500000 \rightarrow$ rendimento do bilhete 25€

errado

$$\begin{aligned}
 & -1500 \times 25 + 17500 \times 25 + 500\,000 \\
 & - 93\,750 + 437\,500 + 500\,000 \\
 & = -600\,000 + 500\,000 \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Figura 31– Análise da resolução do Carlos pelo grupo da Bruna

Como observamos, o grupo demonstra dificuldade em investigar e procurar semelhanças e diferenças nas resoluções da Matilde e do Carlos, o que os poderia ter ajudado a compreender a estratégia alternativa de resolução.

O grupo da **Andreia** identifica facilmente que a Sara e o Leonardo não interpretam corretamente o enunciado (Figura 32)

512.000 euros

Incorretas porque o aumento foi feito no rendimento e n no número de bilhetes vendidos o que altera os resultados

Francisco

Figura 32 - Análise da resolução da Sara e do Leonardo pelo grupo da Andreia

Sobre a Matilde e o Carlos, podemos observar na figura 33, que o grupo entende o raciocínio da Matilde, e ainda coloca em evidência o facto do preço do bilhete não ser limitado. Neste caso a Matilde deveria ter mencionado o domínio de x e não o fez. O grupo aplica a propriedade distributiva e chega à função escrita pelo Carlos. Por fim, tentam realizar manipulações algébricas para encontrar a forma do

vértice, mas não colocam o -1500 corretamente em evidência, e não terminam a resolução.

Matilde

25 - 20.000

24 - 20.000 + 1500

23 - 20.000 + 1500 + 1500

22 - 20.000 + 1500 + 1500 + 1500

...

25 - x = 20.000 + 1500 * x

Rendimento = (25 - x)(20.000 + 1500x) = 500.000 + 375.000x - 20.000x - 1500x² + 175.000x - 500.000

Carlos

Quero encontrar o máximo da função $-1500x^2 + 175000x + 500000$

$-1500(x^2 + \frac{116667}{1}x) + 500 =$

-1 -D +1500
parcialmente certa
não limita o preço do
bilhete

Figura 33- Análise da resolução da Matilde e do Carlos pelo grupo da Andreia

Sobre a resolução da Matilde e do Carlos, podemos escutar a Andreia, praticamente num monólogo:

Andreia: Ela pensa como eu tinha pensado ao início! $25 * x$, $20.000 + 1500x$. Eu só não tinha chegado era que o rendimento era multiplicar os dois. Deixa ver se dá. Eu não chegava a isto nunca... Mas isto faz sentido. E o Carlos pensa como a Matilde, mas não faz esta parte inicial.

Sebastião: Está no bom caminho, mas não totalmente certa.

Andreia: A dela está totalmente correta, mas não diz o domínio de x , e não apresentou o valor final.

Andreia: Já repararam que pensámos de forma diferente? Tu [Sebastião] pensaste como o Francisco e eu como a Matilde. Eu vou é resolver isto pela calculadora.

Sebastião: Podemos parar as gravações? [O aluno continua a demonstrar preocupação com o facto de estar a ser gravado, e talvez por isso não participe tanto].

Tal como sugere Swan (2018), a aluna compara explicações matemáticas alternativas, avalia e aperfeiçoa o raciocínio de outros e interpreta, adota e dá continuidade a uma estratégia recebida, oportunidades para desenvolver a consciência crítica, segundo o autor.

Por fim, a aluna Andreia tenta explicar o raciocínio da Matilde aos seus colegas, que não estavam a entender. A Júlia continua sem entender e a Andreia tenta explicar-lhe de outra forma. A aluna volta a apresentar um forte espírito colaborativo,

atitude favorável ao desenvolvimento do pensamento crítico, segundo Lopes e Silva (2019).

Discussão coletiva

A fase da discussão coletiva nesta aula foi um exemplo de nível 2 e 3 do discurso na sala de aula, segundo Huffer-Ackles et al. (2004), como citado em NCTM (2017). Segundo os autores, neste nível de discurso avançado, os alunos conduzem a conversação por si próprios, e o professor apenas orienta, esperando que os alunos clarifiquem o pensamento uns dos outros. Apesar de, por vezes, eu ainda necessitar de colocar questões para favorecer a comunicação entre os alunos, muitas vezes essa conversação foi despoletada por eles próprios. Neste caso, “os alunos colocam questões e ouvem respostas” e “ouvem ativamente para poderem dar contributos com sentido” (NCTM, 2017, p.32). Os alunos ajudaram a moldar o raciocínio matemático dos outros, de forma colaborativa, e aceitaram o mesmo apoio dos colegas, como podemos observar nos diversos excertos da discussão coletiva que aqui apresento. Deilhes a responsabilidade de explicar os seus raciocínios, e por vezes pedi que refizessem a fala uns dos outros, por palavras próprias.

Idealmente iria aqui transcrever a discussão na sua totalidade, para que o leitor pudesse observar claramente como a aula foi centrada no discurso, mas, por uma questão de espaço não o farei, apresentando apenas alguns excertos que clarifiquem este progresso, meu e dos alunos.

Resolvo iniciar a discussão coletiva pedindo a um grupo que explique aos colegas como resolveu o problema. Selecionei este grupo, pois tinha uma resolução incorreta e, segundo Stein et al. (2008), o professor pode começar com uma estratégia comum baseada num equívoco que vários alunos tiveram, para que a turma possa esclarecer o mal-entendido e trabalhar noutra maneira de lidar com o problema. Ainda segundo as mesmas autoras, o professor pode selecionar alunos com conceitos errados comuns para partilhar, de modo que todos possam examiná-los e entender o porquê do erro. Além disso, quando o professor apresenta primeiramente uma solução completamente correta, é pouco provável que um aluno que contém um erro na sua resolução esteja depois disposto a partilhá-lo. A aluna dirige-se ao quadro e cria

representações para descrever o seu pensamento matemático, para que os outros possam segui-lo (Figura 34) explicando:

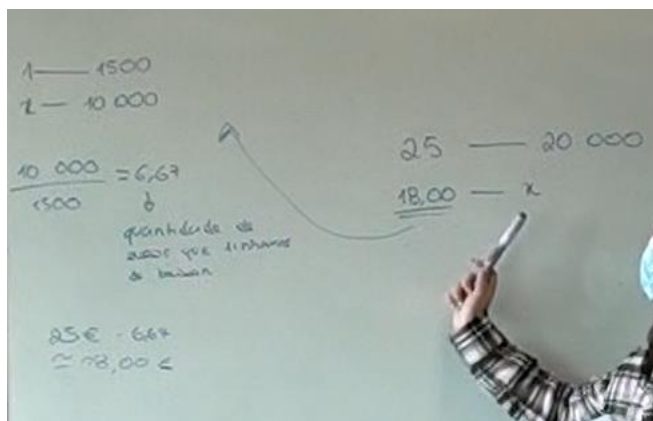


Figura 34— Resolução no quadro feita pela aluna Catarina

Catarina: Então, o que eu pensei em primeiro lugar foi: Com 25 euros nós íamos vender 20.000, então com 18 euros íamos vender x . 18, porquê? Se baixássemos 1 euro, íamos vender mais 1500 bilhetes, então faltava-nos 10.000 para a capacidade atingir os 30.000. Deu 6,67 que era a quantidade de euros que tínhamos de baixar. Então fiz $25 - 6,67$ que dava 18 euros. E agora faço $\frac{18 \cdot 20.000}{25}$.

Professora: E com esse x , estavas a tentar encontrar o quê?

Catarina: Quantos lugares vendia a este preço. E por isso é que eu percebi que estava errado.

Bruna: Isso é a lotação.

Catarina: O x dava 14.000, por isso eu ia vender no total 34.000, já passava da capacidade do estádio.

Professora: Repara naquela regra de três simples: um está para 15.000 e x está para 10.000.

Catarina: Pois, isso é se quiséssemos a lotação toda, e não o rendimento máximo. Depois fiz por tentativas.

[A aluna senta-se].

Andreia: Mas por tentativas íamos demorar séculos [a aluna identifica as limitações de resolver um problema por tentativas, pois pode ocupar muito tempo].

Professora: Mas o vosso grupo, Afonso, resolveu por tentativas. Porquê? [tento promover a participação dos alunos na discussão, como sugere Oliveira et al., 2013].

Afonso: Porque x é um número inteiro de euros.

Professora: Ou seja? [tento que o aluno justifique].

Afonso: Então, bastava ir diminuindo um a um.

Professora: Então tínhamos poucas opções e por isso podíamos fazer por tentativas, certo? Se tivéssemos muitas opções íamos demorar muito tempo e era uma desvantagem, como disse a Andreia.

Como observamos, durante a discussão coletiva tentei sempre explorar o pensamento dos alunos e colocar em evidência as várias estratégias usadas.

Acompanhei as explicações e tentei que os alunos contrastassem estratégias, como sugerido por Huffer-Ackles et al. (2004), como citado em NCTM (2017). Tentei também começar a discutir a diferença e eficácia das resoluções apresentadas.

Rui: Mas era 19, certo?

Professora: Todos chegaram ao 19?

Nicole: Eu fiz primeiro aquilo [aponta para o quadro] para ver quais eram os números mais aproximados e depois fiz só entre o 18 e o 19.

Professora: Mas também querias o estádio cheio?

Neste momento, ao perguntar “mas querias o estádio cheio?”, tento utilizar o questionamento para esclarecimento de ideias e para que os próprios alunos identificassem o seu erro (Oliveira et al., 2013). Porém, a aluna Nicole não responde. O colega Tiago intervém, sem que o tenha de chamar, começando a explicar:

Tiago: Se 1500 era para 1 euro, eu fui somando 1500 até dar um número perto de 10.000, e dava 6 vezes e depois subtraí 6 ao 25 e deu 19.

Nicole: Mas, por exemplo, aqui na resolução do Francisco, se os 18×500 valessem menos do que... ai, não sei explicar.

Professora: Sabes sim, explica lá com calma.

Aqui tento promover a qualidade da apresentação da aluna, como sugerido por Oliveira et al. (2013), pedindo explicações claras da sua resolução.

Nicole: Eles concluíram que se diminuísse um euro por bilhete ia aumentar a venda de 1500, mas se não vendêssemos esses 500, poderia valer a pena vender a 18.

Professora: Queres tentar explicar no quadro? [tento que a aluna crie representações matemáticas que a ajudem a descrever o seu pensamento]

The image shows a whiteboard with handwritten mathematical work. At the top, there are two columns representing different ticket prices: 18€ and 19€. Under 18€, there is a calculation for revenue: $N^{\circ}B$ is 30,500 and Rev is 549,000. Under 19€, $N^{\circ}B$ is 29,000 and Rev is 551,000. Below these calculations, there are several lines of arithmetic: $25 - 18 = 7$, $7 \times 1500 = 10500$, and 20500 .

Figura 35 - Resolução do problema no quadro pela Nicole

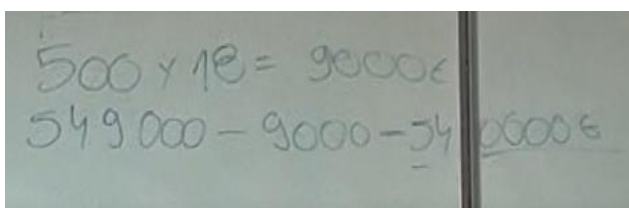
Nicole: [fazendo um círculo à volta do 500, do número 30.500] Eles não conseguiriam vender estes 500 bilhetes porque o estádio só tem 30.000 lugares.

Professora: O 25 – 18 vai-nos dar o quê? [enquanto a aluna escreve no quadro vou tentando que explique aos colegas o seu raciocínio]

Nicole: O número de euros a tirar. E ia aumentar 10500 pessoas, dava 30500.

Entretanto a aluna escreve no quadro: $500 * 1500 = 750000$ e um colega diz: “Não pode, está algum número errado.” (...) Desta forma os alunos começam a sugerir correções no trabalho dos colegas (NCTM, 2017).

Nicole: Ah! Esqueçam, são os 500 bilhetes a 18 euros e dá 9000 euros. Escreve:



The image shows a whiteboard with handwritten calculations. The first line is $500 \times 18 = 9000€$. The second line is $549000 - 9000 = 540000€$. There is a vertical line on the right side of the board, possibly indicating a margin or a column.

Figura 36 -Resolução do problema no quadro pela Nicole

Nicole: Prova que, mesmo tirando aqueles 500 bilhetes, ganha mais se vender 29000 a 19 euros.

Rui: Mesmo que ocupássemos a lotação toda não íamos fazer tanto dinheiro do que se ocupássemos menos lotação, mas o preço do bilhete fosse um euro mais alto, 19 euros.

Bruna: Não percebi.

Rui: Ao tirarmos os 500 ficamos com a lotação máxima, mas se tiveram com atenção, íamos fazer só 540.000 euros, e se vendermos a 19 vamos fazer 551.000 euros, ou seja, mais dinheiro.

Como observamos, a conversação dos alunos é despoletada por eles próprios. Defendem e justificam as suas respostas sem o meu envolvimento. Como referido, a aluna Bruna diz “Não percebi”, tentando que o colega a ajude. Observamos um nível avançado de discurso em sala de aula, de acordo com Huffer-Ackles et al. (2004), como citado em NCTM (2017).

Professora: Então qual era a resposta ao problema?

Rui: O rendimento em euros é 551.000 euros

Afonso: E cada bilhete a 19 euros.

[Entretanto começamos a falar sobre as resoluções (fictícias) dos alunos]

Lucas: Em vez de adicionarem 1500 aos lugares eles adicionam 1500 ao rendimento [referindo-se à Sara e ao Leonardo].

Bruna: Eles vão lá e dizem: “Não tenho dinheiro para uma cadeira, quero só metade”.

Rui: Mas o raciocínio da Sara não está completamente errado.

André: Mas a tabela está toda mal feita!

Andreia: Ele está a dizer que está parcialmente certa porque ela ainda chegou à conclusão que tinha de ser abaixo dos 30.000.

Rui: Exato.

Como podemos constatar, os alunos continuam a conversação por eles próprios, respondendo apenas a uma pergunta que coloquei, mas continuando a expor as suas ideias autonomamente e a escutar as dos colegas. A Andreia tenta inclusive explicar a ideia do Rui, justificando o porquê da Sara não estar totalmente errada. Os alunos ouvem ativamente e dão contributos com sentido.

Professora: Apesar de não ter respeitado o enunciado, ainda decidiu que precisava de escolher o 18 e não o 17 porque se não ultrapassava a capacidade do estádio. Temos de ler muito bem o enunciado e ter em conta as restrições, e o Leonardo nem teve. E como é que eles chegaram a esses valores decimais? [tento que os alunos interpretem a resolução que lhes foi dada, conforme sugerido por Swan (2018)].

Bruna: Por exemplo eu fiz o rendimento a dividir pelo preço de cada bilhete e dava esse valor [referindo-se, corretamente, ao número de bilhetes vendido].

Professora: E porque é que dividiste? [tento que explique o seu raciocínio]

Bruna: [dirige-se ao quadro e escreve, conforme a figura 37] Porque isto é o valor total do dinheiro que eles arrecadaram com os bilhetes, portanto para saber quantos bilhetes vendi tenho de dividir pelo preço do bilhete. Por exemplo se eu fizer 20 euros e o meu bilhete custar 5 euros, vai dar quantos bilhetes vendidos?

Madalena: Dá 4.

Bruna: A minha lógica é essa.

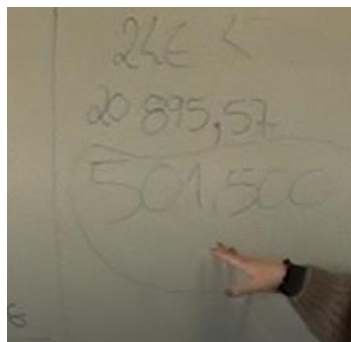


Figura 37 - Análise da resolução da Sara no quadro pela Bruna

Importa referir que a aluna se dirige ao quadro sem eu pedir e explica o seu raciocínio dirigindo-se aos colegas e não a mim. A aluna acredita que pode ajudar os colegas, começando a demonstrar um verdadeiro espírito colaborativo. Quando

perguntei “Porque dividiste?” tentei pedir justificações e clarificação de ideias, como sugerido por Oliveira et al. (2013).

Professora: Sobre o Francisco vocês disseram todos que ele fez bem, e quase todos os grupos fizeram dessa forma. E a Matilde?

Jéssica: Pensou bem. Se substituís o x por 6 dá tudo certo.

Professora: Porquê?

André: Porque já sabíamos do Francisco.

Professora: Mas qual é o problema de fazermos da forma do Francisco? Neste caso tudo bem, porque, como o Afonso estava a dizer, o x é um número inteiro entre 18 e 25, então podíamos fazer por tentativa. Mas a Andreia estava a dizer que se eu tiver mais dados, mais possibilidades de valores, não me compensa. Então o que vocês concluíram sobre a resolução da Matilde, Isaac? [tentando incentivar a participação do aluno na discussão]

Apesar de completar uma explicação tento mais uma vez, através do questionamento, que os alunos analisem, confrontem e comparem estratégias de resolução (Oliveira et al., 2013).

Isaac: Ela foi à procura da expressão que lhe desse o rendimento. Multiplica o preço de cada bilhete com... [silêncio]

Professora: Pois, ela não legendou, se não sabiam logo do que estava a falar. Estão a ver a importância de escrevermos tudo direitinho?

Neste momento tento chamar a atenção para a importância da comunicação matemática escrita.

Bruna: Multiplica o preço do bilhete com o número de bilhetes vendidos.

Professora: Isso. E vocês disseram que ela estava a pensar bem. Mas depois, André, o que lhe faltava fazer? Vocês depois foram usar o raciocínio do Francisco para terminar, substituindo o x por 6.

Procuro sempre pôr em evidência o pensamento dos alunos da turma, tentando passar-lhes a mensagem de que as suas ideias são importantes.

Rui: Ela fez alguma coisa algébrica.

Bruna: O Francisco fez só uma tabela e ela fez por tentativas, mas com mais raciocínio [associa a representação algébrica a um melhor raciocínio].

Professora: Ela no fundo pensou da mesma forma, mas depois tentou encontrar uma regularidade, e encontrar uma função. Porque será uma função, Andreia?

Andreia: É o rendimento em função do preço do bilhete. O meu problema depois era definir o domínio para não exceder a capacidade.

Jéssica: Como?

Andreia: Definir o domínio para não desrespeitar a restrição.

Professora: E o Carlos?

Isaac: Fez a propriedade distributiva e obteve essa função.

Professora: E qual era o objetivo?

Madalena: Encontrar o máximo do rendimento.

[Desenho no quadro a representação gráfica da função, e assinalo o seu vértice, escrevendo o valor da sua abcissa arredondado às centésimas].

Professora: Mas Afonso, o vosso grupo tinha-me perguntado se havia alguma forma de colocar na calculadora o x inteiro. Porquê?

Afonso: Porque não posso tirar 5,51 ao bilhete.

Professora: Na calculadora estamos a representar uma função de variável real então precisávamos de tomar atenção às limitações da tecnologia e fazer uma análise crítica para decidir qual a solução ótima.

Como observamos, durante a discussão coletiva tentei sempre explorar o pensamento dos alunos e colocar em evidência as várias estratégias usadas. Ainda senti necessidade de colocar várias questões, muitas delas incluindo o “porquê”, pois os alunos por vezes têm dificuldade em justificar as suas respostas. Por outro lado, observamos que muitas vezes os alunos já conduzem a conversação por si próprios e ouvem atentamente, dando contributos com sentido (Huffer-Ackles et al, 2004, como citado em NCTM, 2017). Tentei discutir a diferença e eficácia matemáticas das resoluções apresentadas e incentivar a análise, confronto e comparação entre elas (Oliveira et al., 2013).

Importa referir que, tal como mencionado no enquadramento didático deste trabalho, o ensino dialógico, que promove o diálogo entre alunos e entre alunos e professor, incentiva os alunos a explicar, analisar, explorar, avaliar, argumentar e, não menos importante, ouvir, estimulando diretamente o pensamento crítico (Vincent-Lancrin et al., 2019). Por esse motivo a análise desta aula se foca tão fortemente no diálogo ocorrido.

Dificuldades generalizadas dos alunos:

Como observámos na análise do trabalho autónomo dos três grupos de trabalho, focar a questão foi uma grande dificuldade dos alunos. Os alunos demoraram a perceber qual a questão principal, ou seja, falavam muitas vezes da capacidade total do estádio, esquecendo que o objetivo era o máximo rendimento. Outra dificuldade dos alunos foi reconhecer a limitação advinda da resolução de um problema através de tentativas.

Neste caso, isso ocorreu porque a quantidade de valores possíveis para x era reduzida, o que levou a maioria dos alunos a não considerar outra estratégia. Nenhum grupo menciona o facto do Carlos não apresentar o seu raciocínio, demonstrando dificuldade em valorizar as justificações.

Observamos também dificuldade na comunicação matemática escrita – os alunos, na sua maioria, conseguem expressar-se oralmente, mas nos seus registos escritos não dão respostas completas nem apresentam as suas justificações. Por fim, assinalamos a tendência inicial dos alunos para resolver tudo através de uma regra de três simples, sem muitas vezes observarem se as grandezas são ou não proporcionais e se, conseqüentemente, podem aplicar esta regra no contexto em questão.

Síntese:

Segundo Lopes e Silva (2019), tomar decisões é uma competência essencial do pensamento crítico, também mencionada no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Segundo os autores, no final duma aula promotora desta capacidade, os alunos devem ser capazes de determinar, optar, escolher e decidir, o que, de facto, se pretendia com esta tarefa. Isso era potencializado uma vez que, quando o aluno determina o custo do bilhete, seleciona a estratégia a utilizar e analisa as resoluções que lhe são apresentadas, optando por uma delas, fundamentadamente.

Como observámos, durante esta aula os alunos demonstram capacidades de pensamento crítico relativas a: *foco da questão*, quando formulam de forma clara a questão a resolver e fazem e respondem a questões de clarificação; *análise de argumentos*, quando procuram diferentes pontos de vista e identificam as suas potencialidades e limitações, avaliando-os, e quando procuram semelhanças e diferenças entre eles; *inferência*, quando investigam, procurando evidências e contra evidências, e quando fazem e avaliam induções e deduções; *estratégias e táticas*, quando selecionam a estratégia a utilizar e decidem sobre uma ação, formulando estratégias alternativas e verificando a sua implementação e por fim *revisão e decisão*, quando refletem criticamente sobre a tarefa e a solução, avaliam o processo de pensamento, observando quão bem foi um problema resolvido e quão boa é uma decisão e quando manifestam abertura para a possibilidade de existência de outras estratégias de resolução.

Por fim importa referir que, na última aula desta intervenção, os momentos da aula previamente planeados ocorreram, pela primeira vez, nos tempos previstos, o que manifesta um progresso da minha parte na gestão, tão difícil e importante, dos tempos da aula.

5.2. Análise das Entrevistas

No final da minha intervenção com a turma, realizei uma entrevista semiestruturada aos três alunos cujo trabalho autónomo foi analisado mais pormenorizadamente. Assim, são fontes de análise as entrevistas realizadas ao Rui, Beatriz e Andreia. Para realizar o seu guião orientador, tive em consideração as minhas questões de investigação, a saber: a primeira sobre a natureza das tarefas, a segunda sobre o modo de trabalho em sala de aula e a última sobre o papel das discussões coletivas no desenvolvimento do pensamento crítico. Pretendi explorar a opinião dos alunos sobre a sua experiência durante a intervenção, para me auxiliar a responder às ditas questões e, ainda, para perceber qual a sua perspetiva sobre a metodologia e estratégias adotadas. As entrevistas foram semiestruturadas e, por isso, nem sempre as perguntas foram feitas pela mesma ordem. Os dados foram recolhidos por meio de gravação áudio e foram analisadas na sua totalidade, primeiramente aluno a aluno e por fim uma síntese final com a comparação das respostas dos alunos, contendo os principais pontos de concordância ou discordância entre eles.

Aluno Rui

O que entendes por pensamento crítico?

É o nosso pensamento. Nós temos o direito de ter um pensamento e ninguém tem o direito de o criticar.

Consideras ter desenvolvido o teu pensamento crítico? De que forma?

Sim, porque nós, na maioria das vezes, tínhamos opiniões diferentes e tínhamos de perceber o que os nossos colegas estavam a pensar para nos adaptar e ficarmos a perceber a resposta certa.

Quais as tarefas que mais gostaste de realizar? Porquê? O que sentes que aprendeste com essa tarefa?

A completar o quadrado, porque foi a mais fácil. Também gostei da do dominó, porque é mais interessante do que termos uma folha com a matéria toda escrita pelo professor.

Quais as tarefas que menos te interessaram? Porquê?

Não houve nenhuma, porque estas aulas são mais interessantes do que as teóricas, a 'stôra' só escreve no quadro e fazemos exercícios. Aqui estamos em grupo e desenvolvemos o pensamento crítico, e as tarefas eram fáceis.

Consideras que trabalhar em grupo foi vantajoso? Ou preferias trabalhar sozinho?

Sim, com o pensamento de nós, os três, conseguimos chegar à resposta. Se eu fizesse sozinho não chegava tão rápido, nem todos somos bons no mesmo. A nossa inteligência toda junta é melhor.

Preferias ter escolhido o teu grupo? Preferias estar sempre a trocar de grupo todas as aulas ou manter? Porquê?

Falo bem com todos da turma por isso era indiferente. Mas claro que há colegas que são mais faladores, íamos demorar mais tempo. Outros têm um raciocínio mais rápido, então ia ser mais rápido.

Gostaste das aulas dedicadas à resolução de problemas? E teres de analisar as resoluções(fictícias) de alunos a esses mesmos problemas?

Foi muito giro porque normalmente dão-nos o problema e fazemos à nossa maneira, não vemos como outras pessoas fizeram. Aqui, tivemos o pensamento de quatro pessoas, uns chegaram à resposta certa, outros não, mas foi giro ver como eles pensaram.

Consideras que foi uma mais-valia quando tiveste de te levantar para ir discutir com outro grupo as suas estratégias e resultados? Ou preferes saber apenas uma forma de chegar ao resultado certo?

Nós, ao falar com os colegas, vamos perceber várias formas de resolver a mesma coisa, porque nem toda a gente pensa da mesma forma. Na tarefa do dominó, chegámos todos à mesma resposta, mas cada um pensou à sua maneira.

Se pudesses escolher a forma de trabalhar na aula, qual seria a tua forma ideal? (Tipo de tarefa, modo de trabalho em pares, grupo, sozinho...) Porquê?

Da mesma forma aqui na função quadrática. Mas, talvez em vez de grupos tão grandes, faria em pares. Mas noutras matérias mais complicadas, punha todos individual, porque estamos com mais atenção, há sempre conversas que não têm a ver com a aula nos trabalhos de grupo.

Quando consideras que aprendeste mais sobre o conteúdo funções quadráticas? Na discussão coletiva, durante o trabalho autónomo ou a estudar em casa sozinho?

Com certeza foi na escola. Aprendi tanto no grupo, como na discussão. Nós, individualmente, tínhamos formas diferentes de responder, mas depois, dentro do grupo, adaptávamos e víamos qual era a mais fácil ou rápida. Mas depois comparar com outros grupos faz com que alteremos a nossa forma de responder à pergunta. Na maioria das vezes, quando discutíamos é que ficávamos a perceber algumas coisas,

por exemplo, aquilo do h e do k [refere-se à generalização realizada na primeira aula] eu descobri quando estávamos a discutir e não no meu grupo.

Quando consideras que desenvolveste mais o teu pensamento crítico: durante o trabalho autónomo, nas discussões coletivas ou quando estudaste em casa sozinho?

Hmm... no grupo, porque nós trabalhámos tanto tempo juntos que acabámos por perceber a maneira como as pessoas do grupo pensam e adaptamo-nos, e trabalhamos juntos para chegar a uma resposta. E, a falar no grupo, há outras formas de chegar à mesma coisa.

Tecnologia: calculadora gráfica e Geogebra foram uma mais-valia, ou dificultaram o trabalho? Porquê?

A calculadora ajuda muito. Por exemplo, a desenhar funções, em vez de termos de ser nós.

Ao analisar as respostas do Rui, percebe-se que o aluno demonstra não entender o conceito de pensamento crítico, uma vez que parece associar a palavra “crítico” a uma conotação negativa, quando diz que “ninguém tem o direito de criticar o nosso pensamento”. Durante a entrevista, Rui refere-se várias vezes à “a resposta certa” e ao “mais rápido”, demonstrando que se preocupa em responder certo e o mais rápido possível. Por outro lado, refere “(...) mas cada um pensou à sua maneira”, valorizando diversas estratégias de resolução. O aluno reconhece vantagem no trabalho cooperativo, apesar de considerar que o trabalho em grupo o dispersa várias vezes do tema da aula. Considera também que aprendeu mais sobre o tema durante as discussões coletivas, mas desenvolveu mais o seu pensamento crítico no trabalho autónomo realizado em grupo. Sobre a tecnologia constata que é uma ajuda, mas apenas porque lhe poupa trabalho.

Aluna Bruna

O que entendes por pensamento crítico? A tua ideia sobre este conceito alterou-se após esta subunidade didática?

Eu acho que é quando várias pessoas têm ideias diferentes e cada um defende a sua perspetiva. Não se alterou, já tinha a mesma ideia.

Consideras ter desenvolvido o teu pensamento crítico? De que forma?

Sim, acho que sim. Consegui respeitar mais a opinião dos outros.

Quais as tarefas que mais gostaste de realizar? Porquê?

Gostei muito daquela que era o problema do estádio, que tínhamos de saber o lucro e o preço do bilhete. Porque houve várias formas de resolver.

O que sentes que aprendeste com essa tarefa?

Acho que aprendi a trabalhar mais em grupo e não tão individual, porque eu gosto de trabalhar individualmente.

Quais as tarefas que menos te interessaram? Porquê?

Gostei de todas.

Consideras que trabalhar em grupo foi vantajoso? Ou preferias trabalhar sozinho?

Eu acho que trabalhar em grupo foi bom.

Preferias ter escolhido o teu grupo?

Eu acho que a 'stôra' ter escolhido os grupos foi uma mais-valia, porque se fosse eu a escolher, tinha ficado com os meus amigos e tinha sido mais brincadeira, assim houve mais trabalho.

Preferias estar sempre a trocar de grupo todas as aulas ou manter? Porquê?

Manter, porque se tivermos a sempre a trocar é sempre "Ah eu trabalho desta forma, tu trabalhas desta..."

O que achaste das aulas exploratórias que realizámos, em que tu e o teu grupo trabalharam autonomamente?

Foi giro, porque trabalhamos mais autonomamente uns com os outros, e não tanto com a ajuda das professoras. Tínhamos de nos desenrascar sozinhos.

Quais as diferenças, na tua opinião, para as aulas "típicas" de matemática?

Eu acho que os alunos aprenderam mais porque foram aulas mais divertidas e captaram mais a atenção dos alunos. Nas típicas é despejar matéria e fazer exercícios.

Gostaste das aulas dedicadas à resolução de problemas? E teres de analisar as resoluções (fictícias) de alunos a esses mesmos problemas?

Gostei, porque vi a forma como os meus colegas tinham resolvido o mesmo problema e aprendi outras formas de chegar a conclusões.

Consideras que foi uma mais-valia quando tiveste de te levantar para ir discutir com outro grupo as suas estratégias e resultados?

Sim, tal e qual como aprendi com os outros, eles também podem ter aprendido comigo.

Ou preferes saber apenas uma forma de chegar ao resultado certo?

Não, várias formas 'é' sempre bom. Se me esqueço de uma tenho a outra, consigo sempre chegar ao resultado final.

Se pudesses escolher a forma de trabalhar na aula, qual seria a tua forma ideal? (Tipo de tarefa, modo de trabalho em pares, grupo, sozinho...) Porquê?

Acho que por vezes a pares e outras vezes sozinho, porque também devemos ter autonomia para conseguir fazer sozinho. Nos testes não temos o amigo para estar a ajudar, somos nós que temos de desenrascar sozinho. Em termos de trabalhos foram bons estes, mas as aulas normais também são boas porque a professora explica a matéria e nós fazemos exercícios.

Portanto deve haver um "mix"?

Exato, entre as aulas típicas de matemática, e estas aulas que tivemos consigo.

Quando consideras que aprendeste mais sobre o conteúdo funções quadráticas? Na discussão coletiva, durante o trabalho autónomo ou a estudar em casa sozinho?

Eu acho que foi na discussão coletiva, porque era quando a 'stôra' via e corrigia o que tínhamos feito na aula. Então, era aí que via onde tinha errado, mas também estudei em casa para conseguir aprender.

Quando consideras que desenvolveste mais o teu pensamento crítico: durante o trabalho autónomo, nas discussões coletivas ou quando estudaste em casa sozinho?

Nas discussões coletivas. Havia o debate de várias formas de pensar.

Tecnologia: calculadora gráfica e Geogebra foram uma mais-valia, ou dificultaram o trabalho? Porquê?

A calculadora gráfica foi uma mais-valia, mesmo no início quando não sabia muito bem mexer nela. Eu acho que para conseguirmos ver as funções é uma mais-valia. Já o Geogebra também foi bom, mas foi só uma ou duas aulas na sala dos computadores.

Ao analisar as respostas da Bruna, percebe-se que a aluna associa o pensar criticamente à diversidade de ideias e a defendê-las. Valorizou a tarefa que tinha várias

estratégias de resolução e “*outras formas de chegar a conclusões*”, e ainda reconhece a utilidade de saber várias formas de chegar ao mesmo resultado. Quanto ao trabalho cooperativo, considera que aprendeu a trabalhar em grupo. Diz “*tal e qual como aprendi com os outros eles também podem ter aprendido comigo*”, manifestando acreditar que pode ser uma ajuda e que aceita o mesmo tipo de apoio dos colegas, ao aprender matemática. A aluna tem preferência pelo trabalho a pares, apesar de salientar que também deve ser capaz de fazer sozinha, demonstrando preocupação com os testes de avaliação. Refere-se às aulas expositivas como “*aulas normais*” e sobre a discussão coletiva diz que a professora “*corrigiu*” o trabalho realizado autonomamente. Considera que aprendeu mais sobre funções quadráticas, mas considera que foi na fase da discussão coletiva que desenvolveu mais o seu pensamento crítico. Importa realçar a utilização da palavra *debate*, quando se refere à discussão coletiva. Sobre a tecnologia, diz que “*conseguirmos ver as funções é uma mais-valia*”, evidenciando a importância da representação visual.

Aluna Andreia

O que entendes por pensamento crítico?

É quando nós pensamos nalguma coisa e temos a avaliação de conseguirmos saber se estamos a pensar bem ou mal, se há alguma coisa que não está a correr bem, se temos alguma falha no raciocínio.

A tua ideia sobre este conceito alterou-se após esta subunidade didática?

Eu acho que já fazia isto, mas inconscientemente. Agora, com isto comecei a ter mais a noção de tentar encontrar onde estava qualquer coisa a falhar, porque é que estava a dar aquele resultado, qual seria a melhor maneira de chegar aquela solução sendo que havia várias possibilidades de resolver o mesmo problema.

Quais as tarefas que mais gostaste de realizar? Porquê?

[a aluna demora algum tempo a responder] *Eu acho que, talvez, as dos problemas, porque foram as que me fizeram pensar mais a fundo sobre as coisas, as outras eram mais diretas.*

Quais as tarefas que menos te interessaram? Porquê?

Talvez a primeira [exploratória sobre a função quadrática, com o auxílio da calculadora gráfica], porque estávamos a aprender a trabalhar com a calculadora e também como funcionava a função quadrática, mas achei que, apesar das perguntas serem diferentes, as bases eram parecidas, era mais repetitiva.

Consideras que trabalhar em grupo foi vantajoso? Ou preferias trabalhar sozinho?

Eu gosto de trabalhar em grupo, e também gosto quando percebo alguma coisa tentar ajudar a pessoa a perceber porque eu gosto mesmo de coisas lógicas. Trabalhar em grupo é uma mais-valia, porque acabamos por ver como as outras pessoas pensam nos problemas e a maneira como nós resolveríamos, e a diferença com a outra e perceber como seria a resolução de outro ponto de vista.

Preferias ter escolhido o teu grupo? Tendo a noção que tinhas mais facilidade do que os colegas, se ficasses com pessoas que também tinham mais facilidade era mais vantajoso, ou não?

Eu não me importo de ficar em grupos diferentes, porque tenho de ganhar experiência nisso e adaptar às diferentes circunstâncias, e se escolhesse o grupo, ia sempre escolher as mesmas pessoas, não teria uma divergência tão grande. Agora, na questão das pessoas estarem mais ou menos à-vontade... quando estão menos à vontade é bom para pensarmos numa maneira de simplificar, tentar que as outras pessoas percebam. Quando é mais complicado acabamos por muitas vezes nos enrolar e fica tudo complicado, mas ao mesmo tempo acabamos por saber outras resoluções mais parecidas com as nossas. Os dois têm lados positivos.

Preferias estar sempre a trocar de grupo todas as aulas ou manter? Porquê?

Manter sempre o mesmo grupo, porque assim já estaria mais habituada à maneira de pensar das pessoas e como relacionar... Por exemplo, na primeira tarefa estava mais desconfortável. A primeira aula foi assim mais quebra-gelo, se acontecesse todas as aulas acabaria por não dar o mesmo proveito do que já estar habituada.

O que achaste das aulas exploratórias que realizámos, em que tu e o teu grupo trabalharam autonomamente? Quais as diferenças, na tua opinião, para as aulas “típicas” de matemática?

Eu acho que estas aulas requerem mais do nosso pensamento. Tivemos de ser nós a descobrir como é que as coisas funcionariam. Ok, que já podíamos ter alguma base dada pelas professoras, mas acabamos por ser nós a tentar relacionar e acaba por entrar mais facilmente e perceber como funciona a lógica. Sim, é vantajoso. Mas continuo a gostar das aulas normais.

Se pudesses escolher a forma de trabalhar na aula, se fosses tu a professora, qual seria a tua forma ideal? (Tipo de tarefa, modo de trabalho em pares, grupo, sozinho...) Porquê?

Eu acho que misturaria. As matérias que achasse mais difíceis, daria eu e depois punha-os a trabalhar em grupo. As partes mais fáceis de perceberem, ou que até perceberiam melhor se fossem eles a explicar uns aos outros, na outra maneira de trabalharmos em grupo.

Gostaste das aulas dedicadas à resolução de problemas? E teres de analisar as resoluções (fictícias) de alunos a esses mesmos problemas?

Nunca tinha feito, mas gostei de tentar perceber como estavam a pensar, tentar perceber quais eram as falhas que estavam a acontecer, o que estava por responder, onde estaria o erro.

Consideras que foi uma mais-valia quando tiveste de te levantar para ir discutir com outro grupo as suas estratégias e resultados? Ou preferes saber apenas uma forma de chegar ao resultado certo?

Eu gostei de fazer essa comparação, porque é uma mais-valia ver as diferentes maneiras. Se tivermos só nós, estamos fechados à nossa mentalidade. Até podemos estar os três a pensar de forma diferentes, mas poderia haver ainda mais maneiras de pensar.

Quando consideras que aprendeste mais sobre o conteúdo funções quadráticas? Na discussão coletiva, durante o trabalho autónomo ou a estudar em casa sozinho?

Foi um bocadinho de cada parte. Na discussão coletiva estava a tentar perceber como as outras pessoas estavam a pensar, se estava eu a pensar bem ou a pessoa com alguma falha e comparar. Quando estávamos a pensar em grupo, nós aprendíamos porque eu tentava perceber e depois explicar à Joana porque ela estava perdida nalgumas coisas, por exemplo nos casos notáveis.

Quando consideras que desenvolveste mais o teu pensamento crítico: durante o trabalho autónomo, nas discussões coletivas ou quando estudaste em casa sozinho?

Na discussão coletiva, porque estava a tentar perceber como é que estava a acontecer, como tinham resolvido as outras pessoas. Ali [no grupo], era mais fechado.

Tecnologia: calculadora gráfica e Geogebra foram uma mais-valia, ou dificultaram o trabalho? Porquê?

Facilita muitas vezes, só mesmo para visualizar. Podemos ter uma ideia, mas na calculadora gráfica temos mesmo a função e é mais fácil de perceber como está a funcionar. Por exemplo, no problema da bola, estávamos a por um sinal errado, algebricamente, e estava a alterar o resultado todo. Quando fomos ver à calculadora é que vimos a falha, antes estava a dar duas soluções acima de zero e eu estava assim: “Mas a bola vai ao chão e volta?”, na calculadora deu para perceber.

As análises das respostas de Andreia levam-nos a perceber que a aluna parece associar o pensamento crítico, essencialmente, à capacidade de *revisão e decisão*, referindo-se à avaliação do processo de pensamento. Fala em defender as suas ideias (capacidade de argumentação) e respeito pela opinião dos outros. Considera que já

pensava criticamente, mas que, depois da subunidade didática, começou a fazê-lo conscientemente. Também parece associar, em grande parte, o pensamento crítico à capacidade de *estratégias e táticas*, quando refere: “*Ver como as outras pessoas pensam nos problemas e a maneira como nós resolveríamos, e a diferença com a outra, e perceber como seria a resolução de outro ponto de vista.*” e “*(...) estava a tentar perceber como é que estava a acontecer, como tinham resolvido as outras pessoas*”. Sobre o trabalho cooperativo, Andreia refere um ponto interessante: “*quando (os colegas) estão menos à vontade é bom para pensarmos numa maneira de simplificar, tentar que as outras pessoas percebam*”. A aluna preferiu manter o mesmo grupo durante toda a subunidade didática, em vez de trocar de grupo em todas as aulas, pela familiaridade que criou e por se habituar à forma do outro trabalhar. Sobre as aulas exploratórias, Andreia considera que requerem mais do seu pensamento e que percebe mais facilmente “*como funciona a lógica*”, apesar de se referir a outras aulas como “*aulas normais*”. A aluna acredita que aprendeu sobre o conteúdo funções quadráticas, tanto no trabalho autónomo como na discussão coletiva, mas que desenvolveu mais o seu pensamento crítico durante a discussão coletiva. Quanto à tecnologia, reconhece a sua utilidade na facilidade de representar graficamente a função, e em comparar resultados algébricos com resultados obtidos através da calculadora.

Síntese

Apesar do Rui demonstrar não entender o conceito de pensamento crítico, na sua primeira resposta, diz, posteriormente, que “*tinha de perceber o que os colegas estavam a pensar*”, manifestando abertura para a possibilidade de existência de outras ideias ou estratégias, capacidade associada ao pensamento crítico. Já a Bruna refere-se a “*ideias diferentes*”, assim como ao facto de ter passado a respeitar mais a opinião dos outros. Desta forma, os dois alunos realçam a capacidade de procurar diferentes pontos de vista. Porém, a Bruna fala também em “*defender a sua perspetiva*”, relacionando corretamente a capacidade de argumentação com o pensamento crítico. Por outro lado, a Andreia faz uma grande associação entre o pensamento crítico e a avaliação do processo de pensamento, assim como a fazer juízos de valor. Menciona a procura pelas suas “*falhas*” e “*porque é que estava a dar aquele resultado, qual seria a melhor maneira de chegar aquela solução sendo que havia várias possibilidades de resolver o mesmo problema*”, destacando uma reflexão crítica sobre a solução obtida

e a capacidade de selecionar a melhor estratégia de resolução. Todas as capacidades destacadas pelos alunos, mesmo quando mencionadas através de palavras diferentes, vão ao encontro das capacidades associadas ao pensamento crítico referidas por Tenreiro e Tenreiro-Vieira (2013).

Quanto às tarefas propostas, os alunos divergem suas opiniões. O Rui faz uma associação entre as tarefas que mais gosta e o seu nível de dificuldade. Refere, por duas vezes, que gostou das tarefas por serem fáceis, contrariamente à Andreia, que gostou mais dos problemas porque “*lhe fizeram pensar mais a fundo sobre as coisas*”. A aluna menciona ainda que gostou menos das tarefas “*mais diretas e repetitivas*”. Por sua vez, a Bruna gostou mais da tarefa em que “*havia várias formas de resolver*”, manifestando o seu agrado por uma tarefa que possibilita diferentes estratégias de resolução. Quando questionados sobre as tarefas de resolução de problemas e análise de resoluções fictícias, os alunos convergem nas suas opiniões. Todos eles dizem que gostaram de ver outras formas de resolver o problema, diferentes da sua, e de tentar perceber “*como eles pensaram*”, referindo-se tanto aos colegas da própria turma, como às resoluções fictícias de outros alunos. Estas respostas estão de acordo com as indicações de Swan (2017) para a conceção de tarefas que promovam a competência crítica, neste caso a análise e crítica de estratégias de resolução de problemas, com as atividades respetivas de interpretar e ampliar uma explicação fornecida (apresentada verbalmente, no caso dos colegas da turma e, algebricamente, no caso das resoluções fictícias apresentadas), comparação de estratégias alternativas e avaliação e aperfeiçoamento do raciocínio de outros. A aluna Andreia refere inclusive que gostou de “*tentar perceber quais eram as falhas que estavam a acontecer, o que estava por responder, onde estaria o erro*”.

Como referido no enquadramento didático deste trabalho, a metodologia utilizada foi de ensino-aprendizagem exploratório. Assim, também foi feita uma questão aos alunos para perceber a sua opinião sobre estas aulas e a sua comparação com as aulas “*tradicionais*”, mais conhecidas por eles, como ensino expositivo. Os termos que o Rui e a Bruna utilizam para se referir às aulas de ensino expositivo são, respetivamente, “*teóricas*” e “*típicas*”. A Andreia refere-se a aulas “*normais*”, demonstrando que são estas as aulas com que mais frequentemente têm contacto. Porém, os três alunos reconhecem valor nas aulas exploratórias. A Andreia diz que “*acaba por entrar mais facilmente e perceber como funciona a lógica*”, pois as aulas requerem mais do seu pensamento e tem de ser ela própria a descobrir e tentar

relacionar. Esta ideia apoia a visão de Ponte (2005), que refere que uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento deve ser deixada para os alunos realizarem. Tanto o Rui como a Bruna referem que nas aulas expositivas o professor dá matéria e fazem-se exercícios. A Bruna utiliza a expressão “*despejar matéria*”, parecendo dissociar o ensino dos conteúdos da sua aprendizagem, e reconhece valor na autonomia que desenvolveu nas aulas exploratórias, com a ajuda dos colegas, em que não tinham tanto a ajuda da professora e tinham de “*se desenrascar sozinhos*”. A aluna também valoriza o trabalho cooperativo, salientando que aprendeu a trabalhar melhor em grupo. Neste ponto, os três alunos concordam que o trabalho em grupo foi vantajoso, apesar do Rui relacionar esta vantagem com a rapidez com que o grupo chega à resposta, em oposição ao trabalho individual, enquanto a Andreia relaciona com a diversidade de formas de pensar nos problemas e de estratégias para os resolver. A aluna parece, desta forma, reiterar a ideia de Lopes e Silva (2019), sobre a possibilidade de os grupos cooperativos permitirem partilhar ideias divergentes e discutir ideias entre eles.

Relativamente às tecnologias digitais, a ideia dos alunos parece ir ao encontro do que o NCTM (2017) menciona, como importantes auxílios, por exemplo, na demonstração visual de dados introduzidos pelo utilizador. Nas suas respostas os alunos reconhecem a utilidade da calculadora gráfica exatamente na facilidade de representação gráfica das funções.

Por fim os alunos foram questionados sobre os diversos momentos da aula e em qual deles tinham aprendido mais sobre funções quadráticas e desenvolvido mais o seu pensamento crítico: se durante o trabalho autónomo em grupo, a discussão coletiva ou o estudo individual em casa. Tanto o Rui como a Andreia concordam que aprenderam sobre funções quadráticas tanto no grupo de trabalho, como durante a discussão coletiva, enquanto a Bruna, considera ter aprendido mais durante a discussão coletiva por ser a altura em que percebia os seus erros. Quanto à fase onde desenvolveram mais o seu pensamento crítico, o Rui crê ter sido durante o trabalho autónomo, enquanto as alunas referem a fase das discussões coletivas. Desta forma, vão ao encontro da ideia de Cooper (1995, citado em Lopes e Silva, 2019), que considera tanto a interação que ocorre no grupo de trabalho como na discussão coletiva, como facilitadora do desenvolvimento do pensamento crítico e criativo.

6. Conclusões

Neste capítulo pretendo apresentar as respostas às três questões de investigação do meu trabalho, baseando-me nos resultados discutidos no capítulo de análise de dados, assim como apontando conexões com a bibliografia consultada. Importa, para este fim, lembrar o objetivo e as questões de investigação deste trabalho, a saber:

Objetivo: *Explorar e compreender o desenvolvimento do pensamento crítico de alunos do 10.º ano no estudo da função quadrática.*

Questões de investigação:

1. *Quais as características necessárias numa tarefa sobre funções quadráticas que promovam o pensamento crítico do aluno?*
2. *De que forma diferentes tarefas envolvendo funções quadráticas permitem o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno?*
3. *Que contribuições a discussão traz para o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno?*

Início com a **Questão 1** - *Quais as características necessárias numa tarefa sobre funções quadráticas que promovam o pensamento crítico do aluno?*

Com esta questão, pretendia analisar a natureza das tarefas e a forma como estas devem/podem ser preparadas ou selecionadas de modo a promover o desenvolvimento desta competência transversal. De acordo com Lopes e Silva (2019), o verbo *relacionar* utiliza-se para promover a competência de *análise*, necessária à ocorrência de pensamento crítico. Nas tarefas matemáticas propostas nesta intervenção, frequentemente o aluno teve de relacionar: as diferentes representações de funções, os conhecimentos prévios que possuía, as suas respostas com as dos colegas, entre outros. Ainda de acordo com estes autores, para que os alunos se tornem bons analisadores, devem realizar tarefas que lhes permitam: comparar, fazer e avaliar inferências, identificar problemas e soluções, o que foi requerido aos alunos ao longo das tarefas propostas.

De acordo com a análise de dados realizada no nosso estudo, pudemos observar que as últimas duas tarefas propostas, nas duas últimas aulas, foram as que promoveram uma mobilização de um maior número de capacidades associadas ao pensamento crítico. As tarefas em causa foram problemas não rotineiros. Os alunos nunca tinham tido contacto com problemas semelhantes e não possuíam, previamente, uma estratégia para os resolver. Os alunos foram levados a analisar e criticar a explicação matemática de um procedimento ou conceito, e a analisar e criticar estratégias de resolução do problema, tanto durante o trabalho autónomo, como durante as discussões coletivas.

Este resultado vai ao encontro do estudo de Swan (2017), no qual o autor aponta a importância da conceção de tarefas que desenvolvam a consciência crítica. Para atingir este objetivo, o autor propõe atividades em sala de aula como avaliar e aperfeiçoar os procedimentos matemáticos e o raciocínio de outros, analisar e criticar uma estratégia de resolução de problemas, interpretar, adotar e dar continuidade a uma estratégia recebida, comparar estratégias alternativas, identificar pontos fortes ou fracos e os domínios de aplicação e aperfeiçoar uma estratégia recebida.

No nosso estudo, os alunos realizaram todas estas atividades durante a última aula, especialmente com a tarefa que lhes foi proposta, na qual tinham que analisar resoluções fictícias de alunos. Apesar de Swan (2017) fazer uma separação entre tarefas promotoras da competência estratégica e da consciência crítica, tanto Ennis (1993) como Tenreiro e Tenreiro-Viera (2013), consideram que *estratégias e táticas* são competências de pensamento crítico, quando os alunos selecionam estratégias a utilizar, formulam estratégias alternativas e verificam cuidadosamente a sua implementação. De acordo com estes autores, as tarefas exploratórias propostas aos alunos e os problemas não rotineiros são promotores desta capacidade, e pudemos confirmá-lo na análise de dados recolhidos nas diversas aulas.

Porém, apenas na análise de resoluções fictícias de alunos observámos os alunos a mobilizar as cinco capacidades mencionadas por Ennis (1993), e descritas na tabela 6 do capítulo referente à metodologia: *foco da questão, análise de argumentos, inferência, estratégias e táticas e revisão e decisão*, tendo em conta a situação no seu todo. Salientamos ainda que as tarefas “*Quadrado do binómio*” e “*Raízes de uma função quadrática*” foram as que mobilizaram menos capacidades de pensamento crítico, uma vez que visavam desenvolver a fluência processual e a compreensão conceptual.

Concluimos desta forma, que uma tarefa promotora do pensamento crítico dos alunos deve ser um problema não rotineiro, a análise crítica da explicação matemática de um procedimento ou conceito ou a análise crítica de estratégias de resolução de problemas. Apesar das outras tarefas propostas não serem promotoras do desenvolvimento do pensamento crítico apenas pela sua natureza, como nos refere Mártires et al. (2019), os alunos podem melhorar esta competência se os professores utilizarem métodos ou estratégias de aprendizagem apropriados, como veremos na resposta às próximas questões.

No que refere às conclusões relacionadas com a **Questão 2** - *De que forma diferentes tarefas envolvendo funções quadráticas permitem o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno?* apresentamos de seguida a nossa síntese.

Com esta questão pretendia aprofundar o modo de trabalho em sala de aula que estimula o pensamento crítico, ou seja, a forma como as tarefas deveriam/poderiam ser aplicadas em aula.

De acordo com a análise realizada, observámos que a criação de um ambiente de aprendizagem em que os estudantes se sentissem seguros para assumir riscos em relação ao seu modo de pensar e expressar foi fundamental no sentido de possibilitar o desenvolvimento do pensamento crítico (Vincent-Lancrin et al., 2019). Para conseguir criar este ambiente tentei manter uma atitude positiva relativamente aos erros dos alunos, por exemplo, usando-os como oportunidades de aprendizagem, tal como sugerido por estes autores no seu projeto *Desenvolvimento e Avaliação da Criatividade e do Pensamento Crítico em Educação*.

Observámos que, nas aulas em que se utilizou o recurso às tecnologias digitais, os alunos puderam investigar e sustentar ou refutar conjeturas, como indicado pela DGE (2018), mobilizando capacidades de pensamento crítico. Este recurso também facilitou, tal como mencionado pelos alunos nas entrevistas realizadas, a visualização dos gráficos das funções, o que fez com que os alunos poupassem algum tempo que pôde ser, posteriormente, utilizado na análise crítica das estratégias ou resultados. Por este motivo, esta opção didática deve ser priorizada, quando apropriado.

O trabalho cooperativo mostrou-se especialmente promotor de pensamento crítico. Tal como mencionado pela aluna Andreia durante a entrevista realizada: *“Trabalhar em grupo é uma mais-valia porque acabamos por ver como as outras*

peçoas pensam nos problemas e a maneira como nós resolveríamos, a diferença com a outra e perceber como seria a resolução de outro ponto de vista.” Estes resultados vão ao encontro do estudo de Devi e Gustine (2015), que privilegia a aprendizagem cooperativa como estratégia para o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo, tal como ocorreu no nosso estudo. Também Arends (2008) enfatiza a importância da interação social em todos os aspetos da aprendizagem humana: “É através desta interação que os alunos aprendem a pensar e a resolver problemas” (Arends, 2008, p. 415). Desta forma, todas as tarefas propostas nesta intervenção foram realizadas em grupos de três alunos, e os grupos foram mantidos para que se criasse um espírito verdadeiramente colaborativo, em que todos foram responsáveis pela aprendizagem dos outros elementos do grupo.

Quanto à estrutura da aula, a grande maioria foi constituída por três partes: introdução da tarefa, trabalho autónomo e discussão coletiva (Stein et al., 2008). Observámos que a introdução da tarefa foi especialmente importante para desenvolver a competência *foco da questão*, permitindo aos alunos formular de maneira clara a questão a resolver, interpretar informação apresentada de diferentes formas, resumir e fazer e responder a questões de clarificação. Já durante o trabalho autónomo e discussão coletiva, os alunos desenvolveram as restantes capacidades: *análise de argumentos, inferência, estratégias e táticas e revisão e decisão*, como observámos na análise dos dados recolhidos nas aulas.

Devo ainda salientar dois outros momentos que introduzi em algumas aulas: resolução do problema individualmente pelo aluno, antes da aula, para que surgissem diferentes estratégias de resolução dentro do grupo de trabalho, e discussão entre dois grupos, antes da discussão coletiva com toda a turma. Este último momento referido foi particularmente benéfico pois, como ouvimos nos registos áudio, permitiu que os alunos argumentassem e contra-argumentassem sem estar a ser ouvidos por toda a aula, e por mim, professora. Assim, parece-nos que por esse motivo se sentiram mais à vontade para comparar as estratégias de abordagem, rever as estratégias de outro grupo e justificar as suas, sem sentirem estar a ser avaliados. Apesar de não ter sido possível introduzir estes dois momentos em todas as aulas, devido ao tempo, pudemos observar que fomentam a mobilização de capacidades de pensamento crítico. Este resultado vai ao encontro das orientações de Swan (2018) para estruturar uma aula de resolução de problemas.

Concluindo, pudemos observar que uma aula que tenha como objetivo desenvolver o pensamento crítico deve priorizar o trabalho cooperativo, o recurso às tecnologias digitais, quando apropriado, e deve ser uma aula exploratória em que “(...) o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p. 13).”

Por último, focamo-nos na **Questão 3** - *Que contribuições a discussão traz para o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno?*

Através desta questão pretendia focar-me na discussão coletiva e no seu papel para desenvolver o pensamento crítico, na qual se procuram comparar e contrastar estratégias e resultados, como momento potenciador do desenvolvimento desta forma de pensamento.

De acordo com os dados analisados, observámos que esta fase da aula se destacou na mobilização de capacidades de pensamento crítico. Durante a discussão coletiva o discurso é a principal ferramenta utilizada e, tal como referido no enquadramento didático deste trabalho, a metodologia de ensino dialógico, que se baseia no poder do diálogo entre alunos e entre alunos e professor, incentiva os alunos a explicar, analisar, explorar, avaliar, argumentar e, não menos importante, ouvir, estimulando diretamente o pensamento crítico (Vincent-Lancrin et al., 2019).

Observámos na análise de todas as aulas, à exceção da aula “*Quadrado do binómio*”, em que não houve discussão coletiva, que nesta fase da aula os alunos mobilizam as capacidades de *análise de argumentos*, procurando diferentes pontos de vista e identificando as suas potencialidades e limitações, *inferência*, investigando, realizando induções e deduções e *revisão e decisão*, quando refletem criticamente sobre a tarefa e respetiva solução e avaliam o processo de pensamento.

Ao analisar as entrevistas realizadas, as alunas Bruna e Andreia consideram que foi nesta fase da aula onde melhor desenvolveram o seu pensamento crítico: a Bruna responde que “*Havia o debate de várias formas de pensar.*” Quando se refere a *debate*, remete-nos para a capacidade de argumentar e contra-argumentar e de procurar diferentes pontos de vista, identificando potencialidades e limitações. Já a Andreia responde: “*Na discussão coletiva estava a tentar perceber como as outras pessoas estavam a pensar, se estava eu a pensar bem ou a pessoa com alguma falha e comparar. Estava a tentar perceber como é que estava a acontecer, como tinham*

resolvido as outras pessoas. Ali (no grupo) era mais fechado.”, referindo-se não só à capacidade de *estratégias e táticas*, mas também à avaliação do processo de pensamento.

Importa também referir a importância das práticas promotoras de discussões coletivas proveitosas. Como pudemos observar nas análises das aulas, as respectivas discussões foram sendo mais bem-sucedidas conforme o decorrer das aulas. Este resultado é suportado pelas ideias das autoras Stein et al., (2008), que nos dizem que os professores inexperientes necessitam de um conjunto de práticas para se prepararem como facilitadores de discussões profícuas, pois as improvisações podem resultar em discussões pouco atraentes. O contacto com a turma e a experiência que fui adquirindo, aos poucos, foi fundamental na melhoria da prática de conduzir discussões coletivas. De acordo com as autoras, o professor deve antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e conectar. Para antecipar, destaca-se o planeamento, onde ponderei as formas possíveis de interpretar matematicamente a tarefa e as possíveis estratégias de resolução dos alunos, e as relações entre essas estratégias ou interpretações com outros conceitos matemáticos ou representações. Antes das aulas pedi, inclusivamente, a outros colegas da minha turma de mestrado para que resolvessem algumas tarefas, para que surgissem diversas estratégias de resolução que eu podia eventualmente não estar a considerar.

A segunda fase, da monitorização, observei as respostas dos alunos durante o trabalho autónomo, circulando pelos grupos, e tentei ouvir as suas ideias matemáticas, tentando sempre não dar respostas que diminuíssem o nível cognitivo da tarefa (Stein et al., 2008). Fui anotando as diferentes estratégias e colocando questões quando necessário.

Na fase de selecionar, por vezes, chamei inicialmente um grupo ou aluno específico para apresentar o seu trabalho. Porém, na grande maioria das vezes pedia que um voluntário iniciasse a discussão. Desta forma os próprios alunos decidiam se era ou não oportuno partilhar a sua estratégia ou resolução, aprenderam a escutar atentamente o colega e colocar-lhe dúvidas, ou a mim, e sentiram-se cada vez mais confortáveis para participar sem serem necessariamente chamados por mim. Mesmo sem sequenciar em todas as aulas as apresentações, anotei sempre as diferentes resoluções de cada grupo para garantir que, se existisse uma resolução diferente das apresentadas e que fosse pertinente, por algum motivo, apresentar, eu pedir ao grupo que o fizesse.

No entanto, inicialmente, deixava que fossem os próprios alunos a querer participar. Esta foi uma forma de “manter a discussão ativa e permitir aos alunos que fizessem contribuições espontâneas que considerassem relevantes” (Lampert, 2001, p. 174, como citado em Stein et al., 2008). Esta decisão foi ponderada e teve em conta os objetivos da intervenção, deixar os alunos desenvolver as capacidades de comunicação de que necessitam, respeito pelas ideias dos colegas, atenção e análise crítica. Eles próprios, ao longo das aulas, foram aprendendo a esperar pela sua vez de falar, quando oportuno. Foram aprendendo a interagir proficuamente durante a discussão coletiva, escutando, colocando dúvidas, respondendo aos colegas, tudo capacidades essenciais de um bom pensador crítico.

Nas aulas em que fui eu a sequenciar as apresentações dos alunos, tentei que fossem primeiro apresentados os trabalhos que continham algum erro comum, para primeiro conseguirmos desconstruí-lo. Depois pedia que apresentasse um grupo que tivesse escolhido a estratégia que a maioria dos alunos havia escolhido, para que o início da discussão fosse acessível à maior quantidade de alunos possível, como sugerido por Stein et al. (2008). Por fim apresentava as estratégias mais peculiares ou complexas.

Por fim, na fase de conectar, considero que a minha ajuda foi crucial, pois a grande maioria dos alunos não o fazia facilmente. Os alunos não observavam conexões entre as suas ideias matemáticas, estratégias ou representações. Para este fim, muitas vezes o auxílio do quadro foi essencial para permitir aos alunos observar as semelhanças ou diferenças entre as diversas resoluções, tanto com representações feitas por mim como pelos próprios alunos. Desta forma concluíamos a discussão e sistematizávamos a aula, sempre com o auxílio do questionamento.

De acordo com Arends (2008), a fase posterior às discussões é igualmente crucial. Por um lado, o autor sugere que nesta fase o professor tome notas, mental e formalmente, o que tentei sempre fazer com a ajuda do diário de bordo, ajudando-me a planificar as aulas seguintes. Por outro lado, o autor sugere que a discussão seja analisada e avaliada pelos alunos, onde o professor obtém informação sobre o que pensaram da discussão e do seu papel. Para tal, o professor pode colocar questões como: “Como acham que correu a nossa discussão hoje? Demos a oportunidade a todos de participar? Ouvimos as ideias uns dos outros? O que poderemos fazer diferente da próxima vez?”. Infelizmente o tempo não me permitiu fazer esta reflexão diária com os alunos, o que poderia ter ajudado a melhorar a discussão nas aulas

seguintes e a promover ainda mais o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos.

Porém, pudemos observar que o nível de discurso em sala de aula melhorou gradualmente ao longo das aulas. Se, inicialmente, apenas eu colocava questões, ao longo das aulas os próprios alunos formulavam questões sobre o que estava a ser partilhado por outros alunos. Segundo Golinkoff e Pasek (2018), quando se desencorajam as perguntas e se expõe apenas os factos, os alunos tendem a acreditar que tudo o que os adultos dizem deve ser verdade. Pensar criticamente significa ser cético, não só relativamente aquilo que pensamos, mas também aquilo que os outros pensam. Importa assim salientar que o questionamento foi a maior estratégia de suporte na operacionalização das aulas, principalmente durante a discussão coletiva.

Tal como observado na análise das aulas, tentei sempre incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas, como sugerido por Oliveira et al. (2013). Também tentei promover, durante as discussões coletivas, uma atitude de respeito e interesse genuíno pelas diferentes ideias ou questões apresentadas, como sugerido por Oliveira et al. (2013), uma vez que, se as suas questões forem levadas a sério, os alunos sentem-se seguros para questionar e ir para além da informação que têm à sua frente, começando a pensar e perguntar dentro da sala de aula, mas levando esta atitude crítica para a sua vida.

Síntese

Ao explorar o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos, neste caso, no estudo da função quadrática, pudemos compreender que a resolução de problemas não-rotineiros, e a análise crítica de explicações matemáticas ou de estratégias de resolução de problemas, foram tarefas especialmente promotoras desta capacidade transversal. Apesar de outras tarefas não terem fomentado, por si só, o pensamento crítico, os métodos ou estratégias de ensino utilizados por mim ajudaram os alunos a melhorar esta competência (Mártires et al., 2019), tal como o trabalho cooperativo e o recurso às tecnologias digitais, que se mostraram particularmente proveitosos na aquisição da capacidade de pensar criticamente. Desta forma, quaisquer uma das tarefas exploratórias utilizadas no nosso estudo, proposta numa aula de três fases (Stein et al., 2008), acabou por promover a mobilização de capacidades de pensamento crítico. Nestas aulas, tentámos que os próprios alunos descobrissem e construíssem o seu conhecimento (Ponte, 2005), raciocinando, provando e comunicando matemática

(Aprendizagens Essenciais 10ºano, ME). Concluimos, ao analisar os dados, que a fase da discussão coletiva merece especial ênfase enquanto momento potenciador do desenvolvimento crítico, e que a continuidade da realização de discussões fez com que os alunos melhorassem visivelmente o seu nível de discurso em sala de aula, as suas capacidades de comunicação e argumentação, a sua autoconfiança nos próprios processos de raciocínio, a capacidade de análise e de tomada de decisão.

Segundo Shim e Walczak (2012, como citado em Lopes e Silva (2019)), apesar de reconhecerem o pensamento crítico como uma competência importante, muitos professores têm dificuldade em abordá-lo, enquanto ensinam o conteúdo das disciplinas que lecionam. À primeira vista, a matemática pode ser vista como uma disciplina que ensina uma ciência exata, não dando azo a discussões ou reflexões. Nesta intervenção, no entanto, observámos que, por meio da conceção de tarefas apropriadas e de determinadas estratégias de ensino e aprendizagem, foi possível integrar diversas competências de pensamento crítico no conteúdo da disciplina.

7. Reflexão

Neste capítulo procuro fazer uma reflexão sobre a intervenção, os seus fatores de sucesso e o que poderia ter corrido melhor, sobre as minhas aprendizagens e, por fim, sobre o ciclo de estudos. Segundo Rodgers (2002), o pensamento reflexivo é essencial tanto para a aprendizagem dos alunos como dos professores. Tal como nos diz Kegan (1994), “(...) ser capaz de pensar reflexivamente é uma demonstração ativa de uma mente que se consegue separar das suas próprias opiniões, valores, regras e definições para conseguir evitar ser completamente identificada com elas.” (como citado em Rodgers, 2002, p.863). Assim sendo, não é uma tarefa fácil conseguirmos fazer esta separação, mas devemos manter uma mente aberta e inquisitiva para, pelo menos, tentar. Devemos refletir para aprender.

7.1. A intervenção

Primeiramente importa mencionar que esta intervenção foi um verdadeiro trabalho cooperativo, não foi exclusivamente realizada por mim. Desde o primeiro dia de aulas até à data de entrega deste relatório, passando pelo planeamento, a operacionalização e a reflexão das aulas, tanto os meus orientadores, como a professora cooperante e a minha colega de estágio desempenharam um papel fundamental, ao meu lado e dos alunos. Por este motivo utilizei várias vezes o plural na escrita deste documento.

É crucial refletir sobre os motivos de sucesso desta intervenção, e o que poderia ter corrido melhor. Para mim, um dos motivos para o seu sucesso foi a pequena conversa, de cerca de trinta minutos, que tive com os alunos, antes da primeira aula. Falámos sobre a definição de pensamento crítico e a sua importância, assim como de outras competências transversais tal como a cooperação. Os alunos, adolescentes, participaram e envolveram-se nesta conversa e discutimos a importância de pensar criticamente na atualidade, com a imensa informação que nos chega constantemente. Falei sobre as lacunas de pensamento crítico e, ao expressar a minha opinião sobre o tema, estava a tentar comunicar aos alunos que o professor se vê a si próprio como parte da comunidade de aprendizagem, interessada em partilhar ideias e descobrir conhecimentos (Arends, 2008). Nesta pequena conversa, também mostrei aos alunos as tabelas utilizadas para a sua avaliação durante as aulas, que mencionavam aspetos

como *respeitar diferentes perspectivas* ou *respeitar o ritmo de trabalho dos colegas*, o que os fez valorizar estes diferentes pontos e contribuir para que as aulas corressem da melhor forma.

Pude verificar que os alunos realmente escutam quando falamos com eles: tive, entretanto, outra breve conversa sobre a importância da discussão coletiva, sobre o facto de poderem participar à vontade e, a meio da intervenção, sobre a importância dos dados recolhidos para o meu trabalho investigativo. Todas estas conversas, fora do contexto dos planos de aula, surtiram efeito. Por exemplo, sobre a discussão coletiva, percebi que muitas vezes os alunos são reticentes a participar na aula, não por não se saberem expressar, mas porque estão constantemente a sentir que estão a ser avaliados: no padrão de discurso “tradicional”, o professor questiona para escutar e avaliar (Mehan, 1979, como citado em NCTM, 2017) o que leva o aluno a sentir-se retraído. Quando conversámos e sentiram verdadeiramente que a resposta considerada certa ou errada não era o importante em termos avaliativos, começaram a participar muito mais.

O maior fator de sucesso, a meu ver, foi a evolução dos níveis de discurso na sala de aula (Huffer-Ackles et al., 2004, como citado em NCTM, 2017). Os alunos e eu própria progredimos: no final da intervenção, os alunos conduziam a conversação por si próprios, clarificavam o pensamento de outros, colocavam questões e ouviam respostas, apesar do meu questionamento orientar, por vezes, o discurso. A continuidade das aulas que terminavam com uma discussão coletiva contribuiu para este êxito, porque os alunos começaram a acreditar que, de forma colaborativa, podiam aprender uns com os outros. Viram-se como autores de ideias, explicando e defendendo as suas abordagens (NCTM, 2017). O tipo de questões que coloquei também contribuiu para esta melhoria, pois tentei explorar o pensamento dos alunos e encorajar a reflexão e a justificação (NCTM, 2017).

Um aspeto sobre o qual importa igualmente refletir foi a criação dos grupos de trabalho, que, mesmo com a ajuda da professora cooperante, demorou bastante tempo para se consolidar. Os grupos de trabalho foram constituídos de maneira a incluir um aluno com mais dificuldades, outro aluno com mais facilidade na disciplina de matemática, e um aluno intermédio. Esta heterogeneidade foi positiva, principalmente para os alunos com mais dificuldades, pois eram incentivados e motivados pelos alunos com melhor aproveitamento. Porém, durante o trabalho autónomo conseguimos perceber que os melhores alunos utilizam uma grande parte do tempo para explicar aos

alunos com mais dificuldade. Esta heterogeneidade não parece promover o desenvolvimento do pensamento crítico durante o trabalho autónomo. Por outro lado, se os grupos fossem constituídos apenas por alunos com o mesmo nível de desempenho na disciplina, provavelmente os grupos dos melhores alunos poderiam apresentar diversas estratégias de resolução ou diversas ideias que enriqueceriam as suas discussões e promoviam o pensamento crítico, enquanto os grupos de alunos com mais dificuldades não conseguiriam realizar as tarefas autonomamente. Não parece haver uma solução ótima para este problema, com todas as variáveis que caracterizam o comportamento humano. Considero que, se trabalhasse com a turma durante um ano letivo completo, iria alternar periodicamente os grupos, para que as diferentes interações acontecessem: entre alunos homogéneos e entre alunos heterogéneos, tanto nos seus conhecimentos matemáticos como na sua motivação e capacidade de cooperar ou de pensar criticamente.

Outro ponto que merece a minha atenção é o facto de, ao analisar os dados, perceber que a última aula foi a que mobilizou mais capacidades de pensamento crítico, de acordo com Swan (2018). Apesar do objetivo deste trabalho ser estudar o desenvolvimento desta competência transversal, os alunos necessitam de conhecimentos prévios para depois poderem fazer reflexões ponderadas, e a grande parte do tempo foi utilizado a adquirir estes conhecimentos. Porém, tentei que em todas as aulas fosse possível conciliar a aquisição de conhecimentos com o desenvolvimento da competência crítica, principalmente durante a discussão coletiva.

Um aspeto que poderia ter corrido melhor foi a gestão dos tempos de aulas. Foram raras as vezes que os consegui cumprir, deixando por vezes, menos tempo para a discussão coletiva do que o desejável. Devido à minha inexperiência em sala de aula, neste contexto, estipulava quase sempre um tempo insuficiente para o trabalho autónomo dos alunos. O facto de estarem a trabalhar em grupo, algo a que não estão muito acostumados, e se perderem por vezes em conversas paralelas, também não ajudou a que o tempo de trabalho autónomo fosse proveitoso na sua totalidade. Porém, senti que ao longo das aulas fui melhorando este aspeto e aprendendo a gerir melhor o tempo, sendo que, na última aula, já o consegui fazer exatamente como planeado.

Por último, saliento também a constante necessidade de validação das respostas dos alunos, por parte da professora, no início da intervenção: “Isto está certo?”. Esta atitude é certamente um obstáculo ao desenvolvimento do pensamento crítico. Como não respondia a esta questão diretamente, os alunos foram percebendo que tinham eles

próprios de avaliar o seu raciocínio e resultado, e ao longo da intervenção, este aspeto foi melhorando consideravelmente.

7.2. As minhas aprendizagens

Apesar deste trabalho incidir sobre as aprendizagens dos alunos, também contribuiu em grande medida para a minha própria aprendizagem enquanto futura professora. Quanto ao planeamento de aulas, já o tinha feito previamente, mas apenas em contexto isolado. Neste caso, foram aulas seguidas e foi uma novidade para mim ponderar os acontecimentos da aula anterior para alterar a minha planificação das aulas seguintes. Como mencionado anteriormente, sinto que me iniciei na aprendizagem de condução de discussões coletivas proveitosas, e melhorei bastante a gestão dos tempos de aula.

Este trabalho também me permitiu familiarizar com o contexto escolar. Na minha experiência prévia, enquanto explicadora, tenho sempre contacto com grupos pequenos, o que permite muito facilmente personalizar o ensino a cada aluno. Por outro lado, enquanto formadora de adultos, o conteúdo programático é relativamente curto e, por esse motivo, também consigo personalizar as minhas estratégias para cada aluno. Desta forma, os meus contextos profissionais foram sempre com alunos, de alguma forma, privilegiados. No caso desta intervenção, numa escola pública secundária, onde a turma é grande e o currículo extenso, deparei-me com a dificuldade de tentar cumprir as metas curriculares estabelecidas, enquanto chego a cada um dos alunos e ainda promovo as competências transversais desejadas. Idealmente, o tempo seria o elemento variável e os conhecimentos/competências adquiridos o elemento fixo. Infelizmente, o tempo é o elemento fixo e os conhecimentos/competências que cada aluno adquire são variáveis. É um dilema com que os professores têm de se debater e refletir e, a meu ver, um exame nacional final igual para todos é um obstáculo a um ensino e aprendizagem eficazes, assim como à inclusão que verdadeiramente desejamos. Futuramente, tenho curiosidade em estudar o acesso ao ensino superior de diversos países, considerando alternativas e percebendo os seus pontos fortes e fracos.

Por outro lado, a interação com a turma fez-me acreditar que é realmente possível trabalhar as capacidades transversais dentro da aula de matemática, e verificar que elas se desenvolvem num relativo curto espaço de tempo, não sendo uma utopia que se restringe à teoria dos documentos curriculares orientadores.

Por fim, este relatório permitiu iniciar-me no trabalho investigativo, uma novidade no meu percurso académico, e ficar com uma ideia de como se processa a investigação em educação, com as diversas fases de revisão de literatura, recolha e análise de dados, escolha de metodologias, entre outros.

7.3. O ciclo de estudos

Ao longo dos últimos dois anos, o mestrado permitiu-me alterar completamente a visão sobre o ensino da matemática. Confesso que via a matemática como algo restrito a algumas pessoas, que têm apetência, e agora considero que pode e deve ser para todos, conforme as adaptações adequadas que o professor pode fazer. Pela primeira vez no meu percurso de ensino superior, dirigia-me a uma aula, enquanto estudante, com vontade e saía com satisfação e várias questões que me faziam refletir no período pós-aula.

Quando iniciei este ciclo de estudos, a minha expectativa era aprender sobre psicologia educacional. Ao dar explicações, sentia que a mesma frase dita a dois alunos diferentes tinha um impacto totalmente diferente, e quis perceber melhor este tipo de fenómenos. Senti que queria explorar os mecanismos de aprendizagem e aprender, por exemplo, como comunicar ou dar feedback eficazmente. Apesar de termos apenas uma disciplina dedicada à psicologia educacional, o mestrado teve uma forte componente de didática da matemática, o que me surpreendeu pela positiva, adaptando os diversos pontos que eu tinha interesse em aprender à própria disciplina.

Por fim, relembro a primeira vez que me foi pedido para escrever uma reflexão. Foi um momento de apreensão, uma vez que nunca o tinha feito no meu percurso enquanto estudante de matemática. Atualmente considero essencial e sinto que, se deixo passar algum tempo desde a aula ou do acontecimento até o escrever, consigo realizar algumas leituras, refletir sobre aspetos que inicialmente não ponderei, e criar conexões entre eles, tal como aconteceu com a escrita deste relatório. Segundo Rodgers (2002): “pensar reflexivamente é talvez a peça inicial que nos faz humanos e que nos faz aprendizes” (p.864, tradução nossa). Ao refletir, o professor é levado a considerar as interações entre os alunos e as suas aprendizagens, de si próprios e da sua prática, o conteúdo e o contexto em que ensinam, beneficiando os próprios alunos. Para além disso, a autora considera que, se os professores aprenderem a pensar, irão mais facilmente ensinar os alunos a fazer o mesmo, encorajando-os a confrontar

reflexivamente o mundo que os rodeia. Desta forma, podemos fomentar uma predisposição para analisar e questionar, ajudando a formar bons pensadores críticos.

8. Referências

- Alves, D. (2018). *As aplicações da Função Quadrática no dia a dia, uma experiência com alunos de 10º ano numa turma de Ciências e Tecnologias* [Master thesis, Universidade do Minho]. Repositório da Universidade do Minho. http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/58347/1/Relat%C3%B3rio%20de%20Est%C3%A1gio_D%C3%A9bora%20Filipa%20Lopes%20Alves.pdf
- Arends, R. (2008). *Aprender a Ensinar (7th ed.)*. McGraw-Hill.
- Bailin, S. (2002). Critical thinking and science education. *Science & Education*, 11, 361–375.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto editora.
- Creswell, W. (2010). *Projeto de pesquisa: Métodos qualitativo, quantitativo e misto* (3rd ed.). Artmed.
- Davidson, N., & Worsham, T. (1992). *Enhancing thinking through cooperative learning*. Teachers College Press.
- Devi, P., Musthafa, B., & Gustine, G. (2016). Using cooperative learning in teaching critical thinking in reading. *English Review: Journal of English Education*, 4(1), 1-14.
- Dick, P., & Hollebrands, K. (2011). *Focus in High School Mathematics: Technology to Support Reasoning and Sense Making*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Downing, E. & Gifford, V. (1996). An investigation of preservice teachers' science process skills and questioning strategies used during a demonstration science discovery lesson. *Journal of Elementary Science Education*, 8(1), 64-75.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61, 103-131.
- Ennis, R. H. (1985). A logical basis for measuring critical thinking skills. *Educational Leadership*, 43(2), 44-48.
- Fonseca, K. (2012). Investigação-Ação: Uma metodologia para prática e reflexão docente. *Revista Onis Ciência*, 1(2), 16-31.
- Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(2), 81-116.

- Golinkoff, R. & Pasek, K., (2018). *Becoming Brilliant: What Science Tells us About Raising Successful Children*. Cultura Editora.
- Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The college Mathematics Journal*. 20(4), 282-300.
- Lopes, J., & Silva, H. (2019), *Pensamento Crítico e Criativo*. Pactor.
- Lopes, J., Silva, H., Dominguez, C., Nascimento, M., Mártires, A., Rainho, C., Morais, E., Morais, F., Cruz, G., Monteiro, M., Carvalho, M., Catarina, P., Vasco, P., Carreira, R., Morais, T. & Branco, Z. (2019). *Educar para o pensamento crítico na sala de aula*. Pactor.
- Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions Today and Yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 18–28. <http://www.jstor.org/stable/40247808>
- Ministério da Educação (2013). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: DGIDC-ME
- Ministério da Educação (2014). Programa e Metas Curriculares – Matemática A. Lisboa: DGIDC-ME
- Ministério da Educação (2017). Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Lisboa: DGE.
- Ministério da Educação (2018). Aprendizagens Essenciais - Ensino Básico. Lisboa: DGE.
- Ministério da Educação (2018). Aprendizagens Essenciais - Ensino Secundário. Lisboa: DGE.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2017). *Princípios para a Ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. APM.
- Oliveira, H., Menezes, L. & Canavarro, A. P., (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 29-53. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22895>
- Oliveira, I., (2016). *Pensamento Crítico e literacia matemática: um estudo de caso numa turma do 8º ano de escolaridade* [Master thesis, Universidade de Aveiro]. Repositório Institucional da Universidade de Aveiro. <https://ria.ua.pt/bitstream/10773/21433/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o.pdf>
- Organization for economic Co-operation and development (2018). The future of education and skills: Education 2030. OECD Publishing.
- Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, 15, 3-9.

- Ponte, J. P. (2002, Novembro 28). *O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?* [Seminário]. O Ensino da Matemática: Situação e perspectivas, Lisboa. <https://www.cnedu.pt/content/antigo/files/pub/EnsinoMatematica/5-Conferencia.pdf>
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2010). Conexões no Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, 110, 3-6.
- Rodgers, C. (2002). Defining Reflection: Another Look at John Dewey and Reflective Thinking. *Teachers College Record*, 104(4), 842-866.
- Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J.P. (2014). Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra. In *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 65-78). Braga: APM.
- Smith, C. & Barrow, L. (1996) Questions categories used by elementary science teachers during moving and still frames of videodisc instruction. Comunicação apresentada no Annual Meeting of The National Science Association for Research in Science Teaching, St. Louis, MO
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.
- Swan, M. (2017). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática*, 144-145, 67-72.
- Swan, M. (2018). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática*, 146, 8-14.
- Tenreiro-Vieira, C., & Vieira, R. M. (2001). *Promover o pensamento crítico dos alunos: Propostas concretas para a sala de aula*. Porto Editora.
- Tenreiro-Vieira, C., & Vieira, R.M. (2001). Resolução de problemas e pensamento crítico: Em torno das possibilidades de articulação. *Educação e Matemática*, 62, 32-27.
- Tenreiro-Vieira, C., & Vieira, R.M. (2003). A formação inicial de professores e a Didática das Ciências como contexto de utilização do questionamento orientado para a promoção de capacidades de pensamento crítico. *Revista Portuguesa de Educação*, 16(1), 231-252.

- Tenreiro-Vieira, C., & Vieira, R.M. (2013). Literacia e pensamento crítico: um referencial para a educação em ciências e em matemática. *Revista Brasileira de Educação*, 18(52), 163-242.
- Vincent-Lancrin, S., González-Sancho, C., Bouckaert, M., Luca, f., Fernández-Barrera, M., Jacotin, Joaquin, G., & Vidal, Q. (2019). *Desenvolvimento da Criatividade e do Pensamento Crítico dos Estudantes*. Fundação Santillana.
- Zant, H., (1952). Critical Thinking as an Aim in Mathematics Courses for General Education. *The Mathematics Teacher*, 45(4), 249-256.

9. Anexos

Anexo 1 – Pedido de autorização para recolha de dados



Exmo. Senhor Diretor do Agrupamento de Escolas de Alvalade

No âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, encontramos-nos, no presente ano letivo 2021/2022, a realizar a prática de ensino supervisionada, na disciplina de Matemática, nas turmas CSE e CT3 10ºAno, sob a supervisão da Profª Ana Luísa Paiva, Professora Titular de Matemáticas destas turmas, na Vossa instituição. Com vista à elaboração do relatório final da prática de ensino supervisionada que incidirá sobre as aulas lecionadas, vimos solicitar a Vossa autorização para a realização de uma recolha de dados durante as aulas lecionadas, através de registos escritos, áudio/vídeo de alguns momentos das aulas e, eventualmente, da realização de entrevistas breves aos alunos de carácter informativo sobre os trabalhos produzidos em aula.

Todo o nosso trabalho será supervisionado pela Profª Ana Luísa Paiva e todos os direitos e interesses dos alunos serão salvaguardados e respeitados. A fim de preservar a integridade dos alunos e, assegurando a melhor ética profissional, a identidade destes será preservada e a informação recolhida será utilizada apenas no âmbito do nosso trabalho académico.

Agradecemos desde já a Vossa colaboração e todas as oportunidades formativas que, como estudantes e futuras professoras, nos estão a ser proporcionadas na Vossa instituição.

Juntamos em anexo os pedidos de autorização a entregar aos encarregados de educação dos alunos das turmas onde o nosso trabalho vai incidir.

Lisboa, 22 de Outubro de 2021

Atenciosamente,

As professoras estagiárias

Maria Ataíde Ferreira

Rita Nunes

Anexo 2 – Pedido de autorização participantes



Exmo. Senhor Diretor do Agrupamento de Escolas de Alvalade

No âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, encontramos-nos, no presente ano letivo 2021/2022, a realizar a prática de ensino supervisionada, na disciplina de Matemática, nas turmas CSE e CT3 10ºAno, sob a supervisão da Profª Ana Luísa Paiva, Professora Titular de Matemáticas destas turmas, na Vossa instituição. Com vista à elaboração do relatório final da prática de ensino supervisionada que incidirá sobre as aulas lecionadas, vimos solicitar a Vossa autorização para a realização de uma recolha de dados durante as aulas lecionadas, através de registos escritos, áudio/vídeo de alguns momentos das aulas e, eventualmente, da realização de entrevistas breves aos alunos de carácter informativo sobre os trabalhos produzidos em aula.

Todo o nosso trabalho será supervisionado pela Profª Ana Luísa Paiva e todos os direitos e interesses dos alunos serão salvaguardados e respeitados. A fim de preservar a integridade dos alunos e, assegurando a melhor ética profissional, a identidade destes será preservada e a informação recolhida será utilizada apenas no âmbito do nosso trabalho académico.

Agradecemos desde já a Vossa colaboração e todas as oportunidades formativas que, como estudantes e futuras professoras, nos estão a ser proporcionadas na Vossa instituição.

Juntamos em anexo os pedidos de autorização a entregar aos encarregados de educação dos alunos das turmas onde o nosso trabalho vai incidir.

Lisboa, 22 de Outubro de 2021

Atenciosamente,

As professoras estagiárias

Maria Ataíde Ferreira

Rita Nunes

Anexo 3 – Diário de bordo



Diário de bordo **O desenvolvimento do pensamento crítico de alunos do 10.º ano na aula de matemática no estudo da função quadrática**

Data da aula:

Tema:

Tempo:

Durante a aula – a preencher pela Prof. Orientadora Cooperante

Instruções dadas para a realização da tarefa:

Reação dos alunos às tarefas propostas:

Dificuldades e comentários dos alunos:

Atitudes do professor/Questões colocadas/Respostas obtidas:

Atitudes dos alunos no desenvolvimento da tarefa:

Estratégias utilizadas:

Discussão coletiva/Intervenções dos alunos/Gestão do professor:

Outros aspetos a destacar:

Após a aula – a preencher por mim

Aspetos bem conseguidos:

Aspetos que podem ser melhorados (nas tarefas, na prática do professor):

Reflexões sobre a investigação:

Observações:

Anexo 4 – Plano de aula 1



Mestrado em Ensino de Matemática – Prática Profissional IV

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro – Prof. Dra. Isabel Ferreirim

Professora Cooperante Prof. Ana Luísa Paiva

Plano de aula

Nome: Maria Ataíde Ferreira

Público-alvo: 10º ano CT3 Escola Secundária Padre António Vieira

Duração da aula: 100 minutos

Título da Aula: Tarefa exploratória sobre a Função quadrática

1. Tarefa

1. Com a ajuda da calculadora gráfica, representa graficamente as seguintes funções:

$$y_1 = x^2; y_2 = \frac{1}{3}x^2; y_3 = -x^2; y_4 = -\frac{1}{3}x^2$$

1.1 Analisa os gráficos e regista as tuas conclusões. Indica nomeadamente, para cada função:

- O domínio;
- O contradomínio;
- O eixo de simetria;
- Os zeros;
- Os intervalos de monotonia;
- O sentido da concavidade;
- As coordenadas do vértice da parábola.

1.2 Como se relaciona o gráfico da função $y = ax^2$, $a \neq 0$ com o de $y = x^2$? Como é que o parâmetro a influencia o gráfico da função?

2. Com a ajuda da calculadora gráfica, representa graficamente as seguintes funções:

$$y_1 = x^2; y_2 = (x - 1)^2; y_3 = (x + 2)^2$$

2.1 Analisa os gráficos e regista as tuas conclusões. Indica nomeadamente, para cada função:

- h) O domínio;
- i) O contradomínio;
- j) O eixo de simetria;
- k) Os zeros;
- l) Os intervalos de monotonia;
- m) O sentido da concavidade;
- n) As coordenadas do vértice da parábola.

2.2 Como se relaciona o gráfico da função $y = (x - h)^2$, $h \neq 0$ com o de $y = x^2$? Como é que o parâmetro h influencia o gráfico da função?

3. Com a ajuda da calculadora gráfica, representa graficamente as seguintes funções:

$$y_1 = 2x^2; y_2 = 2x^2 + 1; y_3 = 2x^2 - 8$$

3.1 Analisa os gráficos e regista as tuas conclusões. Indica nomeadamente, para cada função:

- a) O domínio;
- b) O contradomínio;
- c) O eixo de simetria;
- d) Os zeros;
- e) Os intervalos de monotonia;
- f) O sentido da concavidade;
- g) As coordenadas do vértice da parábola.

3.2 Como se relaciona o gráfico da função ax^2 com o da função $ax^2 + k$? Considera a e $k \neq 0$? Como é que o parâmetro k influencia o gráfico?

4. Com base nas investigações realizadas anteriormente estuda e sistematiza o comportamento da função quadrática quando apresentada da forma $y = a(x - h)^2 + k$, e identifica o efeito dos parâmetros a , h e k ? Indica o domínio e contradomínio, o eixo de simetria, as coordenadas do vértice, a existência e o número de zeros, o sentido da concavidade. Realiza um pequeno relatório com as conclusões a que chegaste.

Tarefa adaptada de Mota, I., 2017, *Aprendizagem das Funções no 10.º ano: Uma abordagem através do Ensino Exploratório*

2. Objetivos:

- Perceber como utilizar a calculadora gráfica para esboçar um gráfico;
- Comparar funções da família x^2 com funções da família ax^2 , $(x - h)^2$ e $ax^2 + k$, identificando as transformações que ocorrem;
- Identificar e analisar as diferentes características de uma função quadrática, entre elas o domínio, contradomínio, eixo de simetria, zeros, intervalos de monotonia, sentido da concavidade e vértice;

- Identificar a influência dos parâmetros a , h e k no comportamento da função quadrática quando apresentada na forma $y = a(x - h)^2 + k$;
- Desenvolver raciocínio matemático conjecturando, justificando e generalizando.

Competências transversais:

- Interpretar um problema e ser perseverante e autônomo a resolvê-lo;
- Trabalhar cooperativamente;
- Observar e expressar regularidades em raciocínios repetidos;
- Construir argumentos válidos e desenvolver um pensamento crítico em relação aos argumentos dos colegas.

3. Momentos da aula

Momentos da aula	Tempo 100 min
Apresentação do plano de trabalho da subunidade didática	15 min
Introdução da tarefa	5 min
Trabalho autônomo	30 min
Discussão coletiva e síntese.	50 min

Antes da aula é aconselhado aos alunos que visualizem o vídeo da plataforma Khan Academy “*Introdução às Parábolas*”, cujo link é compartilhado através do Teams. Neste vídeo é brevemente explicado o conceito de parábola, concavidade, vértice, eixo de simetria e raízes.

1º) 15min. Apresentação do plano de trabalho da subunidade didática; Apresentação dos critérios de avaliação e do modo de funcionamento das aulas lecionadas pela professora estagiária;

2º) 5min. Introdução da tarefa: Referir alguns detalhes importantes do enunciado e explicar a dinâmica da aula.

3º) 30min. Trabalho autônomo em grupos de três alunos.

Possíveis dificuldades dos alunos:

- Dificuldade em operar com a calculadora gráfica para esboçar o gráfico.
Ação da Professora: se for uma dificuldade generalizada, utiliza o emulador para partilhar o ecrã da calculadora e ajudar os alunos, passo a passo, a escreverem as funções e ajustarem a janela, zoom etc; Se for uma dificuldade de apenas alguns alunos, explicar no próprio grupo de trabalho como se opera com a calculadora gráfica;

- Não recordar os conceitos de domínio, contradomínio, eixo de simetria, zeros, intervalos de monotonia, sentido da concavidade e vértice;

Possíveis perguntas por parte da professora: O domínio identificávamos no eixo das abcissas ou das ordenadas? E o contradomínio? O vértice será o máximo ou mínimo desta função? Como sei as suas coordenadas? Os zeros são a interseção do gráfico com que eixo? No eixo das abcissas qual o valor da ordenada?

O que mencionava o vídeo que visualizaram sobre as possibilidades de concavidade? O que era um eixo de simetria?

- Nas alíneas 1.2, 2.2 ou 3.2 alunos podem ter dificuldade em interpretar as letras como variáveis.

Ação da Professora: recorrer aos exemplos numéricos da alínea anterior e explicar que as letras podem tomar qualquer valor, funcionando assim como variáveis. Se ainda assim alunos não compreenderem, pede-lhes que por agora tirem as suas conclusões utilizando diferentes números.

Possível extensão da tarefa

Para os alunos com mais facilidade, e que terminem mais rápido, orientar o seu trabalho da questão 4 para a realização de um pequeno quadro semelhante ao seguinte:

$y = a(x - h)^2 + k$	
Efeito do parâmetro a	
Efeito do parâmetro h	
Efeito do parâmetro k	
Domínio	
Contradomínio	
Vértice	
Eixo de simetria	
Concavidade	
Intervalos de monotonia	
Zeros	

3º) 50min. Discussão coletiva e síntese. Realizada a partir de informações advindas do trabalho autónomo, utilizando sempre o questionamento como ferramenta. Apresentar o pequeno relatório de alguns grupos, previamente selecionados, realizado na pergunta 4, onde se sintetiza os conhecimentos da aula. A professora

tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e fará a gestão da interação entre os alunos, tentando que debatam entre si os resultados e estratégias, ao invés de apenas responderem às perguntas da professora, para estimular o desenvolvimento da capacidade de argumentação e pensamento crítico.

4. Recursos materiais:

Cadernos;
 Canetas;
 Calculadora gráfica;
 Emulador da calculadora gráfica com projetor;
 Quadro.

5. Avaliação

A avaliação será realizada através da observação do empenho e comportamento (cooperação durante o trabalho autónomo, participação nas atividades e intervenções orais), com o auxílio dos seguintes quadros, preenchidos pela professora com pontos de 1(Fraco/Não se verifica) a 5(Muito forte)

Empenho e comportamento:

Nome do Aluno	...				
Pontualidade					
Assiduidade					
Cumprimento das regras (respeito pelos outros)					
Responsabilidade(material, organização)					
Empenho na realização das tarefas					
Autonomia					
Atenção/concentração					
Intervenções orais					

Trabalho cooperativo

Nome do Aluno	...		
Escutar com atenção os colegas			

Falar com um tom apropriado (não gritar)			
Respeitar o ritmo de trabalho dos colegas			
Encorajar os colegas a manifestarem as suas ideias			
Respeitar diferentes perspectivas			
Ser persistente na execução das tarefas			
Partilhar ideias, materiais, etc			
Gerir adequadamente o tempo			

Pensamento crítico

Nome do Aluno	...	
Comparar diferentes ideias/perspectivas		
Questionar/problematizar as ideias dos colegas		
Fundamentar as opiniões		
Tomar consciência das ideias prévias		
Questionar/problematizar as próprias ideias		
Tomar decisões		

Anexo 5 – Plano de aula 2



Mestrado em Ensino de Matemática – Prática Profissional IV

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro – Prof. Dra. Isabel Ferreira

Orientadora Cooperante Prof. Ana Luísa Paiva

Plano de aula

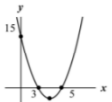
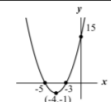
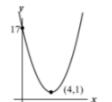
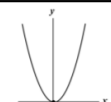
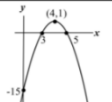
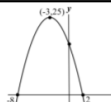
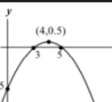
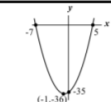
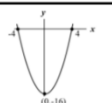
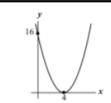
Nome: Maria Ataíde Ferreira

Público-alvo: 10º ano CT3 Escola Secundária Padre António Vieira

Duração da aula: 50 minutos

Título da Aula: Representar funções quadráticas graficamente

1.Tarefa

<p>A</p> $y = x^2 + 2x - 35$ $y = \dots\dots\dots$ $y = \dots\dots\dots$		<p>F</p> $y = x^2 \dots\dots\dots$ $y = (x - 4)(x + 4)$ $y = \dots\dots\dots$	
<p>B</p> $y = x^2 + 8x \dots\dots\dots$ $y = \dots\dots\dots$ $y = (x + 4)^2 - 1$		<p>G</p> $y = x^2 - 8x \dots\dots\dots$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Sem raízes</div> $y = \dots\dots\dots$	
<p>C</p> $y = x^2 - 8x \dots\dots\dots$ $y = (x - 4)(x - 4)$ $y = \dots\dots\dots$		<p>H</p> $y = x^2 - 8x + 15$ $y = (x - 3)(x - 5)$ $y = (x - 4)^2 - 1$	
<p>D</p> $y = -x^2 + 8x \dots\dots\dots$ $y = \dots\dots\dots$ $y = -(x - 4)^2 + 1$		<p>I</p> $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x \dots\dots\dots$ $y = -\frac{(x - 3)(x - 5)}{2}$ $y = \dots\dots\dots$	
<p>E</p> $y = -x^2 - 6x + 16$ $y = -(x + 8)(x - 2)$ $y = -(x + 3)^2 + 25$		<p>J</p> $y = x^2$ $y = \dots\dots\dots$ $y = \dots\dots\dots$	

Emparelham os dominós, sem completar as linhas em falta.

Tarefa adaptada de Mapshell.com

2.Objetivos:

- Perceber a relação entre as diferentes formas algébricas de uma função e propriedades particulares do seu gráfico. Mais especificamente:
 - A forma fatorizada identifica as raízes do gráfico
 - A forma que contém o quadrado do binómio identifica o vértice
 - A forma canónica identifica a interseção do gráfico com o eixo Oy
- Analisar funções usando diferentes representações.

Competências transversais:

- Interpretar um problema e ser perseverante e autónomo a resolvê-lo;
- Trabalhar cooperativamente;
- Observar e expressar regularidades em raciocínios repetidos;
- Construir argumentos válidos e criticar o seu raciocínio e o dos outros.

3.Momentos da aula

Momentos da aula	Tempo
Introdução interativa com toda a turma, sobre as características da função quadrática.	10 min
Introdução da tarefa	10 min
Trabalho autónomo em grupos	20 min
Discussão entre dois grupos	10 min

1º 10min.Introdução interativa com toda a turma, sobre as características da função quadrática:

- Nos vossos cadernos desenhem o eixo do x e do y e esbocem o gráfico de duas parábolas que sejam bastante diferentes uma da outra.
- O que torna os teus gráficos diferentes?
- Quais as características comuns dos teus gráficos?
- Quantos vértices tem o teu gráfico?
- São máximos ou mínimos?
- A função quadrática pode ter mais do que um vértice?
- Quantas raízes tem cada um dos teus gráficos?
- Onde estão as raízes da tua curva?
- Alguém tem um gráfico com um número diferente de raízes?
- Quantas raízes pode uma função quadrática ter?
- Alguém desenhou dois gráficos cuja interseção com o eixo Oy não é a mesma?
- Todas as curvas quadráticas interseitam o eixo Oy ?

- Uma quadrática pode interseccionar mais do que uma vez o eixo Oy ?

2º 10min. Introdução da tarefa a realizar - *Dominó*

Prof. Distribui três peças do dominó a cada grupo e pergunta como as ordenariam. Pedir a alunos para explicarem pelas suas próprias palavras. Encorajar alunos a explicar o porquê das suas escolhas.

Possíveis perguntas:

- Qual a forma da expressão que torna mais fácil descobrir as coordenadas das raízes, do vértice, e da interseção com o eixo Oy ?
- As três formas são equivalentes? Como podemos saber?
- Quais são as coordenadas do mínimo da parábola na carta A? Que equação usaram?
- Quais são as coordenadas do ponto de interseção com o eixo Oy da parábola na carta H?

3º 20min. Trabalho autónomo em grupos

Observar como os alunos iniciam e abordam a tarefa, onde ficam “presos” e como respondem.

Questionar, quando tiverem dificuldades:

- Qual a forma da expressão que torna mais fácil descobrir as coordenadas das raízes, do vértice, e da interseção com o eixo Oy ?
- Quantas raízes tem esta função? Como sabes? Como está demonstrado no gráfico?
- Esta função será representada como um monte ou um vale? Como sabes?

Possíveis dificuldades:

1. Dificuldade em começar

Ação da professora: Tens duas informações. Qual é a forma da equação que podes relacionar com esta informação?

2. Suposições incorretas sobre o que cada expressão revela sobre as propriedades da parábola.

Ação da professora: O que diz a expressão com o quadrado do binómio sobre o gráfico? Porquê?

3. Método pouco eficiente: por exemplo, para cada função, o aluno tenta descobrir coordenadas de vários pontos substituindo o valor de x .

Ação da professora: Consegues pensar num método mais simples? Pensa no que a informação de cada equação te diz sobre o gráfico, e na informação que cada gráfico te dá sobre a sua equação.

Extensões da tarefa:

Consegues pensar em mais coordenadas destes gráficos? Explica a tua resposta.

4º 10min. Partilhar o trabalho.

Um aluno de cada grupo dirige-se a outro grupo para comparar e debater ideias.

1. Professor: Se vais ficar na tua secretária, prepara-te para explicar o raciocínio do teu grupo. Se vais visitar outro grupo:

- Escreve as vossas combinações num papel

- Vai a outro grupo e verifica que combinações são diferentes das tuas

- Se houver diferenças, pede para que te expliquem porquê. Se não concordares, explica o teu modo de pensar.

- Quando regressares, discute com o teu grupo sobre as alterações que devem ou não realizar.

A **discussão coletiva** será feita após a segunda aula realizada com a mesma tarefa, após o intervalo.

4. Recursos materiais:

Cadernos;

Canetas;

Cada grupo necessita de um dominó completo;

Quadro;

Projektor e PowerPoint de apoio.

5. Avaliação

A avaliação será realizada através da observação do empenho e comportamento (cooperação durante o trabalho autónomo, participação nas atividades e intervenções orais..), com o auxílio dos quadros partilhados na primeira aula.

Anexo 6 – Plano de aula 3



Mestrado em Ensino de Matemática – Prática Profissional IV

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro – Prof. Dra. Isabel Ferreira

Orientadora Cooperante Prof. Ana Luísa Paiva

Plano de aula

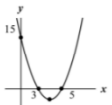
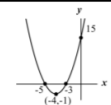
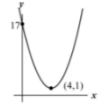
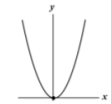
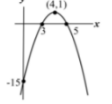
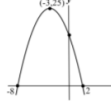
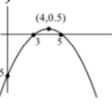
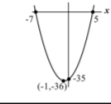
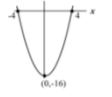
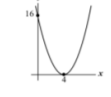
Nome: Maria Ataíde Ferreira

Público-alvo: 10º ano CT3 Escola Secundária Padre António Vieira

Duração da aula: 100 minutos

Título da Aula: Diferentes expressões algébricas de funções quadráticas.

1. Tarefa

<p>A</p> $y = x^2 + 2x - 35$ $y = \dots\dots\dots$ $y = \dots\dots\dots$		<p>F</p> $y = x^2 \dots\dots\dots$ $y = (x - 4)(x + 4)$ $y = \dots\dots\dots$	
<p>B</p> $y = x^2 + 8x \dots\dots\dots$ $y = \dots\dots\dots$ $y = (x + 4)^2 - 1$		<p>G</p> $y = x^2 - 8x \dots\dots\dots$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Sem raízes</div> $y = \dots\dots\dots$	
<p>C</p> $y = x^2 - 8x \dots\dots\dots$ $y = (x - 4)(x - 4)$ $y = \dots\dots\dots$		<p>H</p> $y = x^2 - 8x + 15$ $y = (x - 3)(x - 5)$ $y = (x - 4)^2 - 1$	
<p>D</p> $y = -x^2 + 8x \dots\dots\dots$ $y = \dots\dots\dots$ $y = -(x - 4)^2 + 1$		<p>I</p> $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x \dots\dots\dots$ $y = -\frac{(x - 3)(x - 5)}{2}$ $y = \dots\dots\dots$	
<p>E</p> $y = -x^2 - 6x + 16$ $y = -(x + 8)(x - 2)$ $y = -(x + 3)^2 + 25$		<p>J</p> $y = x^2$ $y = \dots\dots\dots$ $y = \dots\dots\dots$	

Utiliza a informação nos gráficos para preencher as partes das equações que estão a faltar. (Não deves precisar de manipulações algébricas)

Eventual extensão da tarefa, se houver tempo e alunos com muita facilidade: realizarem o seu próprio dominó (com menos peças) na parte de trás das peças dadas.

2. Objetivos:

- Perceber a relação entre as diferentes formas algébricas de uma função e propriedades particulares do seu gráfico, mais especificamente:
 - A forma fatorizada identifica as raízes do gráfico
 - A forma que contém o quadrado do binómio identifica o vértice
 - A forma canónica identifica a interseção do gráfico com o eixo Oy
- Analisar funções usando diferentes representações.

Competências transversais:

- Interpretar um problema e ser perseverante e autónomo a resolvê-lo;
- Trabalhar cooperativamente;
- Observar e expressar regularidades em raciocínios repetidos;
- Construir argumentos válidos e criticar o seu raciocínio e o dos outros, durante o trabalho autónomo em grupo e durante a discussão coletiva.

3. Momentos da aula

Momentos da aula	Tempo
Trabalho autónomo em grupos	100 min
Discussão entre dois grupos	20 min
Discussão coletiva	25 min
Ficha de trabalho	15 min
Correção da ficha	15 min

1º) 20min. Trabalho autónomo em grupos

Possíveis perguntas da professora, se os alunos tiverem dificuldades a relacionar uma característica do gráfico de uma função com a representação algébrica.

- Esta equação está na forma canónica, mas o último número está a faltar. Olhando para o gráfico, qual o valor de y quando x é zero? Como usamos esta informação para completar a equação?
- Precisas de adicionar a forma fatorizada da equação. Olhando para o gráfico, qual é o valor de x quando o y é zero? Como usas isto para completar a equação?

2º) 25min. Partilhar trabalho com discussão entre dois grupos: Um aluno de cada grupo dirige-se a outro grupo para comparar e debater ideias.

3º) 25min. Discussão coletiva: Foco nas relações entre diferentes representações de funções quadráticas.

Possíveis questões a colocar:

- Onde colocaste o cartão? Como decidiste?
- Quais são as equações em falta para o gráfico? Como as encontraste?
- Alguém usou um método diferente?
- Explica pelas tuas próprias palavras.
- Quantas coordenadas precisamos para encontrar a equação da parábola? Mostra-me.
- Alguém discorda?
- Das diferentes formas da equação da parábola, qual a que preferes? Porquê?
- O que aprenderam sobre as características das parábolas e as suas equações?

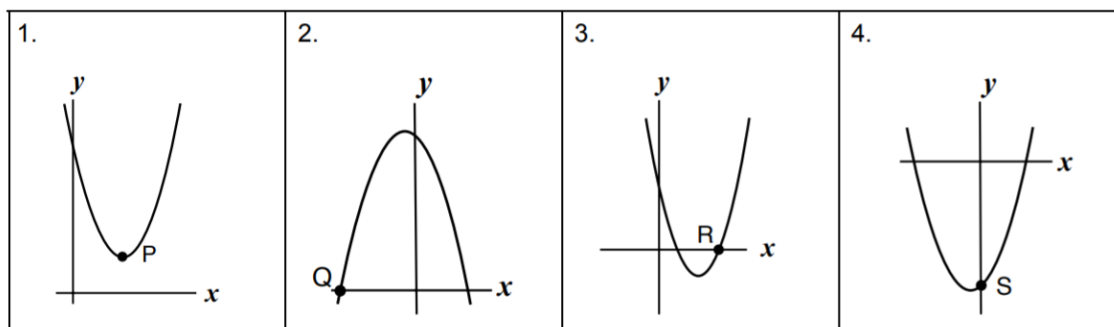
No caso de algum grupo já ter realizado a extensão da tarefa (o seu próprio domínio reduzido) pedir para partilharem com a turma como o fizeram.

5º) 15min. Por fim alunos realizam ficha de trabalho em grupo, para consolidar e exercitar:

Ficha de trabalho

1. Aqui estão 4 equações que representam funções quadráticas e 4 esboços dos gráficos dessas funções

A. $y = x^2 - 6x + 8$	B. $y = (x - 6)(x + 8)$	C. $y = (x - 6)^2 + 8$	D. $y = -(x + 8)(x - 6)$
-----------------------	-------------------------	------------------------	--------------------------



a) Relaciona cada equação (representada por uma letra) com o seu gráfico e explica a tua decisão:

A equação A é representada pelo gráfico ___
porque_____

A equação B é representada pelo gráfico ___
porque_____

A equação C é representada pelo gráfico ___
porque_____

A equação D é representada pelo gráfico ___
porque_____

b) Escreve as coordenadas dos pontos P(,) Q(,) R(,) S(,)

2. O gráfico de uma função quadrática interseca o eixo Oy no ponto de ordenada 0,5 e o seu mínimo é o ponto de coordenadas (3,-4)

a) Escreve a equação da sua curva.

b) Escreve as coordenadas da(s) raíze(s) dessa função quadrática.

6º) 15min. Correção da ficha de trabalho pelos próprios alunos, através de uma discussão de resultados e estratégias.

4. Recursos materiais:

Cadernos;

Canetas;

Cada grupo necessita de um dominó completo;

Quadro;

Projektor e PowerPoint de apoio.

5. Avaliação

A avaliação será realizada através da observação do empenho e comportamento (cooperação durante o trabalho autónomo, participação nas atividades e intervenções orais), com o auxílio dos quadros apresentados na primeira aula.

Anexo 7 – Plano de aula 4



Mestrado em Ensino de Matemática – Prática Profissional IV

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro – Prof. Dra. Isabel Ferreirim

Orientadora Cooperante Prof. Ana Luísa Paiva

Plano de aula

Nome: Maria Ataíde Ferreira

Público-alvo: 10º ano CT3 Escola Secundária Padre António Vieira

Duração da aula: 100 minutos

Título da Aula: Tarefa “Quadrado do binómio”

1. Tarefa

Completar o quadrado

Grupo I

Relembra os seguintes casos notáveis:

Quadrado de um binómio

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

1- Desenvolve os seguintes quadrados de binómios, na variável x e apresenta-os na sua forma reduzida:

a) $(x - 5)^2 =$

b) $(x + 6)^2 =$

c) $\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 =$

2- Completa as seguintes igualdades:

a) $x^2 + 4x + \square = (x + \square)^2$
 \square \square

b) $x^2 + x + \quad = (x + \quad)^2$

c) $x^2 - 3x + \square = (x + \square)^2$

- 3- Observa agora com atenção, o exemplo dado pela professora, no quadro, com o objetivo de completar o quadrado do binómio $x^2 - 4x + 3$
(Copia a resolução para o teu caderno)

- 4- Escreve cada uma das seguintes expressões na forma $a(x - d)^2 + e$,
com $a, d, e \in \mathbb{R}$:

a) $x^2 + 8x + 5 =$

b) $x^2 - 3x + 1 =$

Grupo II

- 1- Desenvolve os seguintes quadrados de binómios, na variável x e apresenta-os na sua forma reduzida:

a) $(2x - 3)^2 =$

b) $(3x + 4)^2 =$

- 2- Observa agora com atenção, o exemplo dado pela professora, no quadro, com o objetivo de completar o quadrado do binómio $3x^2 + 2x + 7$.

(Copia a resolução para o teu caderno)

- 3- Escreve cada uma das seguintes expressões na forma $a(x - d)^2 + e$,
com $a, d, e \in \mathbb{R}$:

a) $2x^2 + 8x + 4 =$

$$b) -2x^2 + 10x + \frac{2}{3} =$$

2. Objetivos:

- Recordar os casos notáveis.
- Relembrar e saber reescrever expressões quadráticas da forma $ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$, e sempre $a \neq 0$, para expressões equivalentes na forma $a(x - h)^2 + k$, com a, h e $k \in \mathbb{R}$ completando o quadrado, que serão muito úteis para identificar as coordenadas do vértice da parábola, na função quadrática.
- Realizar com eficiência e rapidez a técnica referida no ponto anterior.
- Compreensão e prática utilizando este processo ao elaborar exercícios de aplicação.

Competências transversais:

- Trabalhar cooperativamente;
- Observar e expressar regularidades em raciocínios repetidos;

3. Momentos da aula

Momentos da aula	Tempo 100 min
Introdução da tarefa: Referir alguns detalhes importantes do enunciado e explicar a dinâmica da aula.	10 min
Trabalho autónomo: questão 1 e 2 do grupo I	10 min
Resolução no quadro pela professora da questão 3 do Grupo I.	5 min
Trabalho autónomo: questão 4 do grupo I	5 min
Apresentação e correção dos resultados	20 min
Trabalho autónomo: questão 1 do grupo II	10 min
Resolução no quadro pela professora da questão 2 do Grupo II.	10 min
Trabalho autónomo: questão 3 do Grupo II	10 min
Apresentação e correção dos resultados	20 min

1º 10min. Entrega das folhas, com a tarefa, a cada grupo e apresentação da mesma pela professora. Referir alguns detalhes importantes do enunciado e explicar a dinâmica da aula. Professora anota os casos notáveis estudados no 8º ano no quadro, com a ajuda dos alunos.

2º 10min. Autonomamente, os alunos resolvem questão 1 e 2 do grupo I.

Possíveis dificuldades dos alunos:

- Não se recordarem do desenvolvimento do quadrado da soma e da diferença de binómios.

- Não conseguir identificar pelo segundo termo, que é $2ab$, como será o terceiro termo.
- Dificuldade com números fracionários.

Ação da professora:

Sugerir ao aluno que releia a informação colocada no início da folha, que relembra o quadrado da soma e da diferença de binômios. A professora circula pela sala e apoia eventuais dificuldades, utilizando maioritariamente o questionamento. Recomendar fazer os cálculos com calma e como cálculo auxiliar quando aparecem números fracionários.

3º 5min. Resolução no quadro pela professora da questão 3 do Grupo I. Perguntar se os alunos têm dúvidas e salientar a importância do termo $2ab$.

4º 5min. Continuação do trabalho autónomo: alunos resolvem questão 4 do grupo I.

Possíveis dificuldades dos alunos:

- Não conseguir entender a importância do segundo termo para a identificação do terceiro termo.

Ação da professora:

Relembrar o exemplo escrito no quadro e aconselhar a elaboração dos cálculos auxiliares na folha.

5º 20min. Apresentação e correção dos resultados, realizada a partir de informações advindas do trabalho autónomo do Grupo I.

6º 10min. Trabalho autónomo (elaboração do Grupo II, questão 1).

7º 10min. Resolução no quadro pela professora da questão 2 do Grupo II. Perguntar se os alunos têm dúvidas e salientar a importância do termo $2ab$, assim como a diferença do a comparativamente ao grupo I.

8º 10min. Continuação do trabalho autónomo (elaboração da questão 3 do Grupo II).

Repetem-se as possíveis dificuldades e ações da professora relativamente ao grupo I.

9º 20min. Apresentação e correção dos resultados, realizada a partir de informações advindas do trabalho autónomo do Grupo II. A professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e fará a gestão da interação entre os alunos.

4. Recursos materiais:

Tarefas impressas em papel – uma por cada aluno;

Cadernos;
Canetas;
Lápis e borracha;
Quadro.

5. Avaliação

A avaliação será realizada através da observação do empenho e comportamento (cooperação durante o trabalho autónomo, participação nas atividades e intervenções orais), com o auxílio dos quadros apresentados no plano da primeira aula.

Anexo 8 – Plano de aula 5



Mestrado em Ensino de Matemática – Prática Profissional IV

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro – Prof. Dra. Isabel Ferreirim

Orientadora Cooperante Prof. Ana Luísa Paiva

Plano de aula

Nome: Maria Ataíde Ferreira

Público-alvo: 10º ano CT3 Escola Secundária Padre António Vieira

Duração da aula: 100 minutos

Título da Aula: “Raízes de uma função quadrática”

1. Tarefa

1. Considera as seguintes funções:

$$f(x) = (x - 2)^2 + 5$$

$$g(x) = x(2x + 4)$$

$$h(x) = (x + 1)^2$$

$$i(x) = x(-x + 4) - 4$$

$$j(x) = 2x^2 + x + 3$$

$$k(x) = -(x + 1)^2 + 4$$

1.1. No teu caderno, determina os valores de x para os quais cada uma das funções é igual a zero.

Nota: Recorda a fórmula resolvente $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

1.2 Preenche as colunas “Forma canónica”, “Forma $a(x - h)^2 + k$ ” e “Vértice” da seguinte tabela:

Função	Forma canónica $ax^2 + bx + c$	Forma $a(x - h)^2 + k$	Vértice	Esboço do gráfico com marcação do vértice e dos seus zeros/raízes	Zeros da função	Número de zeros da função	Valor do binómio discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$	Sinal do binómio discriminante
$f(x)$								
$g(x)$								
$h(x)$								
$i(x)$								
$j(x)$								
$k(x)$								

1.3 Com a ajuda do applet do *Geogebra*, altera os parâmetros a , b e c e preenche as colunas restantes da tabela. Aproveita para analisar as tuas respostas às questões 1.1 e 1.2.

Applet utilizado: <https://www.geogebra.org/m/z2m7yzym>

1.4 Analisa as colunas da tabela “Número de zeros” e “Sinal do binómio discriminante”. Qual a relação entre as mesmas? Justifica a tua afirmação.

2. Sem resolver as equações, diz quantas soluções tem cada uma delas:

- a) $-x^2 - 12x - 36 = 0$
- b) $x^2 = 12x - 3$
- c) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

2. Objetivos:

- Consolidar conhecimentos sobre resolução de equações de segundo grau, leccionadas no 8º e 9º ano de escolaridade;
- Relacionar as diferentes formas algébricas de uma função;
- Relacionar as representações algébricas da função com respetivas características do seu gráfico;
- Perceber a semelhança entre encontrar as soluções de uma equação de segundo grau e encontrar os zeros de uma função quadrática;
- Realizar manipulações algébricas para obter duas formas algébricas para a mesma função quadrática;
- Conseguir conjecturar, generalizar e justificar a relação entre o sinal do binómio discriminante e o número de soluções de uma equação de 2º grau;
- Comparar resultados obtidos algebricamente com resultados obtidos através do *Geogebra*.

Competências transversais:

- Interpretar um problema e ser perseverante e autônomo a resolvê-lo;
- Observar e expressar regularidades em raciocínios repetidos;
- Construir argumentos válidos e desenvolver um pensamento crítico em relação aos argumentos dos colegas, tanto durante o trabalho autônomo em grupo como durante a discussão coletiva com a turma;
- Desenvolver novas ideias e soluções, de forma inovadora, como resultado da interação com outros ou da reflexão pessoal;
- Trabalhar em equipa e usar diferentes meios para comunicar presencialmente;
- Interagir com tolerância, empatia e responsabilidade e argumentar, negociar e aceitar diferentes pontos de vista, desenvolvendo novas formas de olhar e de estar.
- Tirar partido da utilização da tecnologia (neste caso, do *Geogebra*) para experimentar, investigar, sustentar ou refutar conjecturas.

3.Momentos da aula

Momentos da aula	Tempo 100 min
Introdução da tarefa: Referir alguns detalhes importantes do enunciado e explicar a dinâmica da aula.	5 min
Trabalho autônomo em grupos de três alunos: Resolver questão 1.1 e 1.2.	20 min
Resolução dos exercícios 1.1 e 1.2, utilizando sempre o questionamento como ferramenta.	25 min
Ligar os computadores e aceder ao applet disponibilizado.	5 min
Trabalho autônomo em grupos de três alunos: Resolver questão 1.3, 1.4 e 2.	20 min
Discussão coletiva e síntese.	25 min

1º) 5min. Introdução da tarefa: Referir alguns detalhes importantes do enunciado e explicar a dinâmica da aula.

2º) 20min. Trabalho autônomo em grupos de três alunos: Resolver questão 1.1 e 1.2.

Possíveis dificuldades dos alunos na pergunta 1.1:

- Perceber que encontrar os zeros da função equivale a encontrar as soluções da equação de segundo grau.

Ação da professora: “Encontrar os zeros da função equivale a encontrar os pontos onde o gráfico intersecta que eixo? E nesse eixo qual o valor da ordenada? Então teremos de igualar $f(x)$ a quanto?”

- Recordar os casos notáveis.

Ação da professora: “Recorda os casos notáveis que lembrámos na aula passada, utilizando a ficha de trabalho que foi realizada”. Se for uma dificuldade transversal a

vários grupos, escrever no quadro novamente os casos notáveis, com a ajuda dos alunos.

- Perceber que $x(2x + 4)$ é o mesmo que $x \times (2x + 4)$.

Ação da professora: “Em matemática, quando não temos nenhum operador visível, qual é a operação que está a ser realizada?”

- Aplicar a propriedade distributiva.

Ação da professora: “Como distribuimos este x pela expressão que está dentro de parêntesis?”

- Recordar que necessitam da forma canónica para poder aplicar a fórmula resolvente.

Ação da professora: “Como aplicamos a fórmula resolvente que está na nota? Qual o valor do a , b e c se tivermos a expressão nesta forma?”

- Identificar que o a , b ou c são 0 no caso de a equação ser incompleta.

Ação da professora: “Qual o valor de $a/b/c$? Qual o valor que toma esta letra que faz desaparecer esta parte da equação?”

Possíveis dificuldades dos alunos na pergunta 1.2:

- Não conseguir realizar manipulações algébricas para passar da forma canónica para a forma do vértice.

Ação da professora: Recorda o que vimos na aula passada. Utiliza a ficha de trabalho para observares alguns exemplos e recordares como encontramos o quadrado do binómio. “Se $2b=4$, qual o valor de b^2 que necessitamos de adicionar? E se adicionamos como podemos compensar, para que a expressão se mantenha inalterada?”

- Não recordar que a expressão $a(x - h)^2 + k$ permite identificar o vértice.

Ação da professora: “Que transformações foram aplicadas à função x^2 para se obter esta nova função?”

Possível extensão da tarefa

Para os alunos com mais facilidade e que terminem mais rápido, dar-lhes mais algumas funções para estudarem, pedir para explicar o seu raciocínio por outras palavras ou justificar melhor as suas respostas.

3º) 20min. Correção dos exercícios 1.1 e 1.2, utilizando sempre o questionamento como ferramenta. Estes exercícios “(...) servem para o aluno pôr em prática os

conhecimentos já anteriormente adquiridos. Servem essencialmente um propósito de consolidação de conhecimentos.” (Ponte, 2005)

4º) 5min. Ligar os computadores e aceder ao applet disponibilizado.

5º) 25min. Trabalho autónomo em grupos de três alunos: Resolver questão 1.3, 1.4 e 2.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 1.3:

- Não relacionar aquilo que observam gráficamente no applet do Geogebra com os cálculos que realizaram previamente.

Ação da professora: Chama a atenção para que os alunos comparem estes resultados.

- Não perceber o que é o binómio discriminante, e que se situa dentro da raiz da fórmula resolvente.

Ação da professora: “Olha para a fórmula resolvente e para a expressão dentro da raiz. Agora compara com o Δ aqui apresentado na tabela.”

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 1.4:

- Entender que com “Sinal do binómio discriminante” se pretende que digam apenas se é positivo, negativo ou zero.

Ação da professora: Recordar o que é o sinal de uma expressão.

- Não encontrar uma relação entre “Sinal do binómio discriminante” e “Número de zeros”.

Ação da professora: “Observa as duas colunas e tenta encontrar as regularidades existentes entre as mesmas.” “Será que isto se pode aplicar a qualquer equação de segundo grau? Porquê? Justifica por escrito.”

Possíveis dificuldades dos alunos na pergunta 2:

- Resolver a equação ao invés de achar o número de soluções através do sinal do binómio discriminante.

Ação da professora: “Volta a lêr o enunciado e toma atenção ao sublinhado. O que concluíste na alínea anterior, que podes utilizar nesta?”

6º) 25min. Discussão coletiva e síntese. Discussão realizada a partir de informações advindas do trabalho autónomo, utilizando sempre o questionamento como ferramenta. Pretende generalizar-se: “Se o binómio discriminante for positivo, a equação tem 2 soluções, o que corresponde aos dois zeros que observámos no gráfico da função. Se o binómio discriminante for zero, a equação tem 1 solução, o que corresponde ao único zero que observámos no gráfico da função. Se o binómio

discriminante for negativo, a equação não tem soluções reais, o que podemos observar no gráfico da respetiva função, pois não intersesta o eixo das abcissas.”

4. Recursos materiais:

Cadernos;
Canetas;
Uma ficha de trabalho impressa por cada grupo;
Computadores;
Applet *Geogebra*;
Quadro.

5. Avaliação

A avaliação será realizada através da observação do empenho e comportamento (cooperação durante o trabalho autónomo, participação nas atividades e intervenções orais..), com o auxílio dos quadros partilhados na primeira aula.

6. Referências

Ponte, J., (2005). *Gestão curricular em Matemática*. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Anexo 9 – Plano de aula 6



Mestrado em Ensino de Matemática – Prática Profissional IV

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro – Prof. Dra. Isabel Ferreirim

Orientadora Cooperante Prof. Ana Luísa Paiva

Plano de aula

Nome: Maria Ataíde Ferreira

Público-alvo: 10º ano CT3 Escola Secundária Padre António Vieira

Duração da aula: 100 minutos

Título da Aula: “Problemas 1”

1. Tarefa

1. Lançamento de bola

Uma bola é lançada verticalmente ao ar, com uma velocidade inicial de 20m/s. A altura $h(t)$ da bola, em metros, no tempo t , em segundos, desde que é lançada, é dada aproximadamente por:

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 0,5$$

- De que altura foi lançada a bola?
- Quanto tempo a bola se manteve no ar? Apresente o resultado em segundos com uma casa decimal.
- Qual é a altura máxima atingida pela bola?
- Três segundos após o lançamento, qual é a altura que se encontra a bola?

Resolve o problema algebricamente, justificando as tuas resoluções e raciocínio. De seguida resolve com o auxílio da calculadora gráfica e compara com os resultados obtidos. Anota as diferenças, no caso de existirem.

Problema adaptado de livro Máximo, 10ºano, Porto Editora

2. Área mínima

Um fio de 36cm de comprimento vai ser dividido em duas partes, cada uma delas serve para construir um quadrado. Determina em que ponto deve ser cortado o fio de modo que a soma das áreas dos quadrados seja mínima.

Utiliza a calculadora gráfica e explica todas as opções tomadas no decorrer da resolução.

2. Objetivos:

- Reconhecer, representar e interpretar graficamente uma função definida por uma expressão analítica e usá-la na resolução de problemas e em contextos de modelação (Aprendizagens Essenciais 10º ano, ME).
- Reconhecer e interpretar as propriedades geométricas dos gráficos de funções e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação (Aprendizagens Essenciais 10º ano, ME).
- Reconhecer e interpretar os extremos, sentido das concavidades, raízes e a representação gráfica de funções quadráticas e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação (Aprendizagens Essenciais 10º ano, ME).
- Realizar manipulações algébricas para obter duas formas algébricas para a mesma função quadrática.
- Comparar resultados obtidos algebricamente com resultados obtidos através da calculadora gráfica.

Competências transversais:

- Interpretar um problema e ser perseverante e autónomo a resolvê-lo.
- Construir argumentos válidos e desenvolver um pensamento crítico em relação aos argumentos dos colegas, tanto durante o trabalho autónomo em grupo como durante a discussão coletiva com a turma.
- Desenvolver novas ideias e soluções, de forma inovadora, como resultado da interação com outros ou da reflexão pessoal.
- Trabalhar em equipa e usar diferentes meios para comunicar presencialmente.
- Interagir com tolerância, empatia e responsabilidade e argumentar, negociar e aceitar diferentes pontos de vista, desenvolvendo novas formas de olhar e de estar.
- Tirar partido da utilização da tecnologia (neste caso, da calculadora gráfica) para experimentar, investigar, sustentar ou refutar conjecturas.

3. Momentos da aula

Momentos da aula	Tempo 100 min
Entrada dos alunos na sala e organização das carteiras para trabalharem em grupos de três.	5 min
Introdução da tarefa: Referir alguns detalhes importantes do enunciado e explicar a dinâmica da aula.	5 min
Trabalho autónomo individual.	15 min
Trabalho autónomo em grupo.	25 min
Discussão entre dois grupos – um aluno de cada grupo dirige-se a outro grupo.	10 min
Discussão coletiva.	40 min

1º) 5min. Entrada dos alunos na sala e organização das carteiras para trabalharem em grupos de três

2º) 20min. Introdução da tarefa: Referir alguns detalhes importantes do enunciado tal como a importância de justificar e apresentar todo o raciocínio, e de resolver algebricamente e graficamente (com o auxílio da calculadora gráfica). Explicar a dinâmica da aula e os seus diversos momentos.

3º) 15min. Trabalho autónomo individual. O objetivo de trabalharem primeiramente sozinhos é que surjam diferentes estratégias dentro do próprio grupo, e as possam discutir.

4º) 25min. Trabalho autónomo em grupo: comparação das estratégias de abordagem. Dentro do grupo os alunos discutem as suas estratégias individuais e tentam chegar a um consenso quanto a uma solução conjunta.

Possíveis dificuldades dos alunos no problema 1:

- Perceber o conceito de função (conteúdo de 7º ano escolaridade).

Ação da professora: “Quais as variáveis em causa neste problema? Será que há uma relação entre elas? Qual? Qual a variável dependente e independente?”

- Reconhecer e interpretar uma função definida por uma expressão analítica.

Ação da professora: “Imagina-te a lançar uma bola ao ar e esboça aqui o trajeto que pode acontecer. Este desenho assemelha-se a que função? Neste caso, em vez do x que temos utilizado, qual será a variável independente?”

- Perceber que $t = 0$ equivale ao momento em que é lançada a bola.

Ação da professora: “Assim que lanças a bola, quanto tempo passou? Como podemos então encontrar essa altura, se temos aqui o h em função de t ?”

- Perceber que a bola se mantém no ar até ao instante em que cai no chão, ou seja, em que a sua altura será zero.

Ação da professora: “Quando a bola cai no chão, qual a sua altura? Então quanto será $h(t)$?”

- Relacionar o máximo com o vértice da parábola.

Ação da professora: “Esta função é afim ou quadrática? Que tipo de gráfico terás? Com a concavidade para cima ou para baixo? Faz um pequeno esboço. O máximo equivale a que ponto? Como o podemos encontrar, partindo da forma canónica?”

- Conseguir realizar manipulações algébricas para passar da forma canónica para a forma do vértice.

Ação da professora: Recorda o que vimos nas aulas passada. Utiliza a ficha de trabalho para observares alguns exemplos e recordares como encontramos o quadrado do binómio. “Se $2b=4$, qual o valor de b^2 que necessitamos de adicionar? E se adicionamos como podemos compensar, para que a expressão se mantenha inalterada?”

- Recordar que a expressão $a(x - h)^2 + k$ permite identificar o vértice.

Ação da professora: “Que transformações foram aplicadas à função x^2 para se obter esta nova função?”

- Operar com a calculadora gráfica para esboçar o gráfico da função e encontrar os seus zeros e o seu máximo.

Ação da professora: Se for uma dificuldade generalizada, utiliza o emulador para partilhar o ecrã da calculadora e ajudar os alunos, passo a passo, a escreverem as funções e ajustarem a janela, zoom etc; se for uma dificuldade de apenas alguns alunos, explicar no próprio grupo de trabalho como se opera com a calculadora gráfica.

- Identificar o domínio e contradomínio da função e respetiva janela de visualização na calculadora gráfica.

Ação da professora: “Entre que valores faz sentido falar em tempo? E em altura, neste caso? E para esses intervalos qual poderá ser uma boa escala para colocar na calculadora?”

Possível extensão da tarefa

Para os alunos com mais facilidade e que terminem mais rápido, propor-lhes que pensem numa função que poderia representar a relação entre a altura a que se encontra um *skate* do chão em função da sua distância à parede de onde partiu, quando está numa rampa própria para a prática de *skate*.

Possíveis dificuldades dos alunos no problema 2:

- Iniciar o trabalho e elaborar uma estratégia.

Ação da professora: “Desenha aqui um fio e imagina que o cortas. Agora imagina que realmente fazes um quadrado com os 2 pedaços que tens, desenha-os. Quanto será cada lado?”

- Utilizar uma incógnita.

Ação da professora: Como poderemos resolver este problema de forma a conseguir analisar todos os possíveis locais onde vou cortar o fio? Se quero analisar todos os valores, não me basta dar alguns valores numéricos, pois não?”

- Perceber que se cortar x centímetros do fio irão restar $36 - x$

Ação da professora: “Se cortarmos o fio a 10cm do seu início, quanto resta? E se cortarmos a 20? E se cortarmos a x ?”

- Perceber que cada lado de um quadrado terá $\frac{x}{4}$ cm e do outro $(36 - x)/4$ cm

Ação da professora: “O fio tem este comprimento que encontraste, e vai formar um quadrado. Quantos lados tem um quadrado? E são todos iguais? Então qual será o comprimento de cada lado?” Se ainda assim o aluno não perceber, dar exemplos numéricos e depois levá-lo a generalizar para x .

- Realizar manipulações algébricas para encontrar a forma canónica ou a forma $a(x - h)^2 + k$

Ação da professora: “Recorda os casos notáveis. Escreve o caso notável aqui em rascunho. Qual o teu a e b neste caso?”

- Relacionar o mínimo da função com o vértice da parábola.

Ação da professora: “Esta função é afim ou quadrática? Terá a concavidade para cima ou para baixo? Faz um pequeno esboço. O mínimo equivale a que ponto? Como o podemos encontrar?”

- Dar como resposta o valor mínimo da função e não o minimizante.

Ação da professora: “Volta a lêr o enunciado e toma atenção ao que nos pedem para encontrar.”

5º) 10min. Discussão entre dois grupos: comparar as estratégias de abordagem e resultados. A professora pede para um elemento de cada grupo se dirigir a outro e rever as estratégias de outro grupo, assim como justificar as suas. Se não existirem diferenças significativas no trabalho dos grupos, passa diretamente para a fase seguinte.

6º) 40min. Discussão coletiva: Discussão realizada a partir de informações advindas do trabalho autónomo, utilizando sempre o questionamento como ferramenta.

Tentar desenvolver o pensamento crítico dos alunos tanto na comparação de estratégias utilizada como na análise dos resultados obtidos.

4. Recursos materiais:

Cadernos;
Canetas;
Uma ficha de trabalho impressa por cada grupo;
Calculadora gráfica;
Quadro.

5. Avaliação

A avaliação será realizada através da observação do empenho e comportamento (cooperação durante o trabalho autónomo, participação nas atividades e intervenções orais..), com o auxílio dos quadros partilhados na primeira aula.

6. Referências

Ministério da Educação (2018). Aprendizagens Essenciais. Matemática. Lisboa: ME, DGE.

Anexo 10 – Plano de aula 7



Mestrado em Ensino de Matemática – Prática Profissional IV

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro – Prof. Dra. Isabel Ferreirim

Orientadora Cooperante Prof. Ana Luísa Paiva

Plano de aula

Nome: Maria Ataíde Ferreira

Público-alvo: 10º ano CT3 Escola Secundária Padre António Vieira

Duração da aula: 100 minutos

Título da Aula: “Problema Estádio de Futebol”

1. Tarefa

1. Um estádio tem uma capacidade de 30 000 lugares. Com o preço de 25 euros por bilhete, o número de bilhetes vendidos por jogo é de 20 000. O departamento de marketing do clube concluiu que o número de bilhetes vendidos aumentava em 1500 por cada euro que o custo do bilhete diminuísse. Para que o clube obtenha o máximo rendimento na venda dos bilhetes qual deverá ser o custo do bilhete, em número inteiro de euros? Qual é, em euros, o rendimento?
2. Analisa as resoluções apresentadas em seguida e explica o raciocínio de cada aluno. Diz se cada uma está totalmente certa, parcialmente certa ou incorreta, justificando.
3. Se tivesses de optar por uma delas, qual escolherias e porquê?

A Sara e o Leonardo fizeram a seguinte tabela:

Preço	25 euros	24 euros	23 euros	22 euros	...	18 euros	17 euros
Nº Bilhetes	20.000	20.895,57	21.895,83	22.931,82		28.361,11	30.117,65
Rendimento	500.000	501.500	503.000	504.500		510.500	512.000

A **Sara** respondeu: O preço do bilhete deverá ser de 18 euros e o rendimento será de 510.500 euros.

O **Leonardo** respondeu: O preço do bilhete deverá ser de 17 euros e o rendimento será de 512.000 euros

Francisco

Preço em euros	25	24	23	22	21	20	19	18	17	...
Nº bilhetes	20.000	21.500	23.000	24.500	26.000	27.500	29.000	30.500	32.000	...
Rendimento	500.000	516.000	529.000	539.000	546.000	550.000	551.000	549.000	544.000	...

R: O preço do bilhete deverá ser de 19 euros.

Matilde

25 - 20.000

24 - 20.000 + 1500

23 - 20.000 + 1500 + 1500

22 - 20.000 + 1500 + 1500 + 1500

...

25 - x 20.000 + 1500* x

Rendimento = $(25 - x)(20.000 + 1500x)$

Carlos

Quero encontrar o máximo da função $-1500x^2 + 17500x + 500000$

2.Objetivos:

- Resolver problema da vida real identificando modelo matemático que permita a sua resolução.
- Reconhecer e interpretar as propriedades geométricas dos gráficos de funções e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação (Aprendizagens Essenciais 10º ano, ME).
- Reconhecer e interpretar os extremos, sentido da concavidade e a representação gráfica de funções quadráticas e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação (Aprendizagens Essenciais 10º ano, ME).
- Realizar manipulações algébricas para obter duas formas algébricas para a mesma função quadrática.
- Comparar resultados obtidos algebricamente com resultados obtidos através da calculadora gráfica.

Competências transversais:

- Fazer relação entre o conhecimento adquirido e o conhecimento necessário para resolver um problema da realidade.
- Interpretar um problema e ser perseverante e autônomo a resolvê-lo.
- Construir argumentos válidos e desenvolver um pensamento crítico em relação aos argumentos dos colegas, tanto durante o trabalho autônomo em grupo como durante a discussão coletiva com a turma.
- Desenvolver novas ideias e soluções, de forma inovadora, como resultado da interação com outros ou da reflexão pessoal.
- Trabalhar em equipa e usar diferentes meios para comunicar presencialmente.
- Interagir com tolerância, empatia e responsabilidade e argumentar, negociar e aceitar diferentes pontos de vista, desenvolvendo novas formas de olhar e de estar.
- Tirar partido da utilização da tecnologia (neste caso, da calculadora gráfica) para experimentar e investigar.

3. Momentos da aula

Em casa alunos tentam resolver individualmente o problema, antes da aula, por uma questão de tempo e para que surjam resoluções distintas dentro do próprio grupo de trabalho.

Momentos da aula	Tempo 100 min
Entrada dos alunos na sala e organização das carteiras para trabalharem em grupos de três.	5 min
Introdução da tarefa: Referir alguns detalhes importantes do enunciado e explicar a dinâmica da aula.	5 min
Trabalho autónomo em grupo.	20 min
Análise de “Resoluções de Alunos”.	25 min
Discussão coletiva.	45 min

1º) 5min. Entrada dos alunos na sala e organização das carteiras para trabalharem em grupos de três.

2º) 5min. Introdução da tarefa: Referir alguns detalhes importantes do enunciado tal como a importância de justificar e apresentar todo o raciocínio. Explicar a dinâmica da aula e os seus diversos momentos.

3º) 20min. Trabalho autónomo em grupo. Dentro do grupo os alunos discutem as suas estratégias individuais e tentam chegar a um consenso quanto a uma estratégia conjunta.

O processo de modelação pode ser representado pelo seguinte esquema:

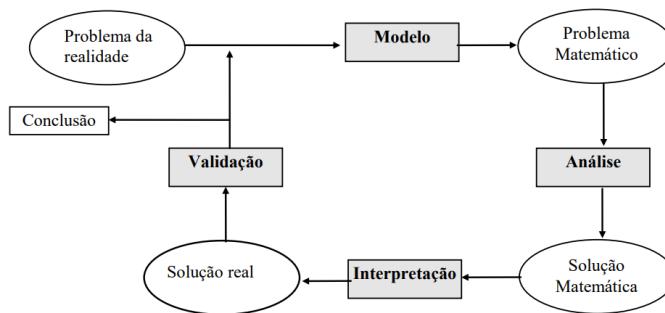


Imagem retirada de Bruchura do Ministério da Educação, Funções, 10º ano

Num primeiro momento, pretende-se que os alunos definam o problema da realidade, mantendo as suas características. Devem decidir quais as variáveis relevantes (quantidade de euros que se retiram do valor do bilhete e rendimento) e procurar relações entre elas. Seguidamente resolvem o problema matemático e interpretam a solução a que chegaram. No processo de validação comparam a solução a que chegaram com a realidade. Se não for compatível com a realidade, voltam ao início, reformulando o modelo.

Se os alunos apresentarem dificuldades nestas etapas, as ações da professora podem ser:

- O que se quer dizer com “o número de bilhetes vendidos aumentava em 1500 por cada euro que o custo do bilhete diminuísse?”
- Qual é a questão principal a que deves responder?
- Quais os dados apresentados no problema?
- Há dados irrelevantes?
- Porquê?
- Resume por palavras tuas o problema.
- Se em vez de 25 euros o bilhete for vendido a 24 euros, qual o rendimento? E a 23 euros?
- Constrói então uma tabela onde representes esses dados.
- Tenta encontrar um padrão ou regularidade entre os dados.
- Agora, como podemos encontrar uma solução para o problema?
- Revê o enunciado e verifica se a solução a que chegaste é a correta.

Questões elaboradas com base no Modelo de Resolução de Problemas de Polya(1957/1985)

Possível extensão da tarefa

Para os alunos com mais facilidade e que terminem mais rápido, propor-lhes que pensem numa estratégia alternativa para a resolução do problema.

4º) 25min. Análise de “Resoluções de Alunos”. Pretende-se que os alunos critiquem cada uma das resoluções previamente selecionadas pela professora, com diferentes abordagens. Analisam, criticam e comparam diversas resoluções, concluindo se estão ou não corretas, completas, eventuais pontos fortes e fracos, e selecionem uma resolução, justificando. Este problema permite diversas estratégias de resolução e possibilita representar a função através de uma tabela, algébrica e graficamente. Os alunos revêm o seu trabalho inicial e podem melhorar as suas resoluções, incorporando eventualmente o que aprenderam com a análise crítica que realizaram.

5º) 45min. Discussão coletiva: Discussão realizada a partir de informações advindas do trabalho autónomo, utilizando sempre o questionamento como ferramenta. Tentar desenvolver o pensamento crítico dos alunos tanto na comparação de estratégias utilizada como na análise dos resultados obtidos.

Aspetos a chamar a atenção durante a discussão coletiva, no caso de os alunos não o fazerem:

- Limitações advindas da resolução de um problema através de uma tabela, quando o volume de dados é maior do que neste caso, pois requiere muito tempo e espaço (Resolução do Francisco);
- Prestar atenção para as restrições dadas no enunciado, quando chegamos à solução que consideramos ótima (Resolução do Leonardo);
- Consequências de não fazer uma leitura atenta do enunciado ou ter dificuldades na sua interpretação (Resolução da Sara e do Leonardo).
- O facto de a incógnita ser um número inteiro no contexto do problema, e no caso de utilizarmos a estratégia de resolução através da função quadrática a incógnita ser um número real, reforçando a necessidade de pensar criticamente (Resoluções da Matilde e do Carlos). Referir as limitações da

tecnologia (Calculadora gráfica vai-nos dar como máximo da função um número real não inteiro).

4. Recursos materiais:

Cadernos;

Canetas;

Duas fichas de trabalho impressas por cada grupo (uma apenas com o enunciado do problema, outra entregue mais tarde com resoluções para serem analisadas);

Calculadora gráfica;

Quadro.

5. Avaliação

A avaliação será realizada através da observação do empenho e comportamento (cooperação durante o trabalho autónomo, participação nas atividades e intervenções orais...), com o auxílio dos quadros partilhados na primeira aula.

6. Referências

Ministério da Educação (2018). Aprendizagens Essenciais. Matemática. Lisboa: ME, DGE.

Ministério da Educação, Programa de desenvolvimento educativo para Portugal, Brochura Ensino Secundário, 10º ano, Funções.

https://mat.absolutamente.net/joomla/images/recursos/documentos_curriculares/arquivo/brochura_sec_func10.pdf

Tenreiro-Vieira, C., Vieira, R.M. Resolução de problemas e pensamento crítico. Educação e Matemática, 62, 32-27.

Anexo 11 – Questão-aula



10º ano – Matemática A – Questão Aula

Nome: _____ Turma: _____ Classif.: _____

1- Relativamente a cada uma das funções quadráticas, determina as coordenadas do vértice da parábola que a representa graficamente.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

b) $g(x) = 4x^2 - 8x + 4$

2- De uma função quadrática g , de domínio \mathbb{R} , sabe-se que:

- A reta de equação $x = -2$ é o eixo de simetria do gráfico da função;
- O contradomínio de g é $] - \infty, 6]$
- 1 é um zero da função g .

Apenas uma das expressões seguintes pode definir a função g . Rodeia essa expressão e justifica a tua escolha.

(A) $g(x) = -\frac{3}{8}(x + 3)^2 + 6$

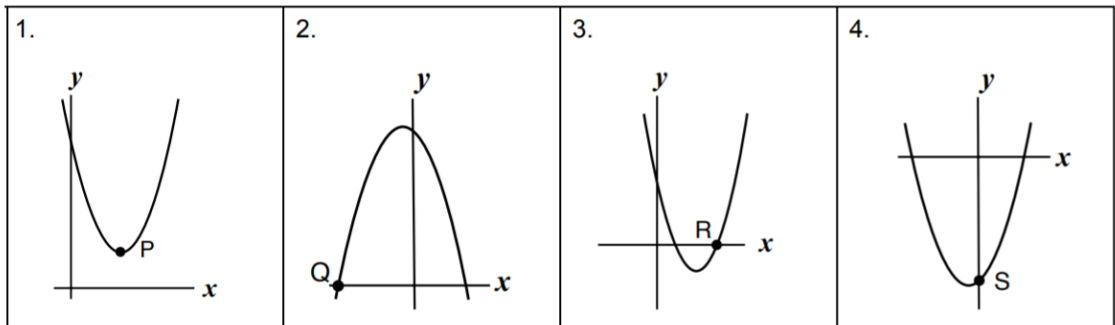
(C) $g(x) = \frac{2}{3}(x + 2)^2 + 6$

$$(B) g(x) = -\frac{1}{8}(x+2)^2 + 6$$

$$(D) g(x) = -\frac{2}{3}(x+2)^2 + 6$$

3- Aqui estão 4 equações que representam funções quadráticas e 4 esboços dos gráficos dessas funções.

A. $y = x^2 - 6x + 8$	B. $y = (x-6)(x+8)$	C. $y = (x-6)^2 + 8$	D. $y = -(x+8)(x-6)$
-----------------------	---------------------	----------------------	----------------------



a) Relaciona cada equação (representada por uma letra) com o seu gráfico e explica a tua decisão

A equação A é representada pelo gráfico ___

porque _____

A equação B é representada pelo gráfico ___

porque _____

A equação C é representada pelo gráfico ___

porque _____

A equação D é representada pelo gráfico ___

porque _____

b) Escreve as coordenadas dos pontos:

- P (,);
- Q (,);
- R (,);
- S (,).

4- Do cimo de uma ravina, um homem disparou um foguete de iluminação. Seja h a altura, em metros, a que o foguete se encontra da planície onde aterrou e t o tempo, em segundos, medido desde o momento em que o foguete foi disparado. Supõe que, durante o movimento, a altura, h , é dada em função do tempo, t , por:

$$h(t) = 25 + 20t - 5t^2.$$

a) Qual é a altura da ravina (considera desprezável a altura do homem)?

b) Ao fim de quanto tempo é que o foguete caiu na planície?

c) Qual foi a altura máxima atingida pelo foguete?

Cotações

1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	Total
25	25	13	32	40	20	20	25	200

Anexo 12 – Guião da Entrevista

Entrevista

No âmbito da Introdução à Prática Profissional do mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário do Instituto de Educação, gostaria de recolher algumas informações relativas à subunidade didática “Funções quadráticas”. Deste modo, peço que respondas, com sinceridade, às questões que se seguem. A entrevista será anónima.

Duração: cerca de 20 min
Registo: gravação áudio

O que entendes por pensamento crítico? A tua ideia sobre este conceito alterou-se após esta subunidade didática?

Consideras ter desenvolvido o teu pensamento crítico? De que forma?

Quais as tarefas que mais gostaste de realizar? Porquê? O que sentes que aprendeste com essa tarefa?

Quais as tarefas que menos te interessaram? Porquê?

Consideras que trabalhar em grupo foi vantajoso? Ou preferias trabalhar sozinho?

Preferias ter escolhido o teu grupo? Preferias estar sempre a trocar de grupo todas as aulas ou manter? Porquê?

O que achaste das aulas exploratórias que realizámos, em que tu e o teu grupo trabalharam autonomamente? Quais as diferenças, na tua opinião, para as aulas “típicas” de matemática?

Gostaste das aulas dedicadas à resolução de problemas? E teres de analisar as resoluções (fictícias) de alunos a esses mesmos problemas?

Consideras que foi uma mais-valia quando tiveste de te levantar para ir discutir com outro grupo as suas estratégias e resultados? Ou preferes saber apenas uma forma de chegar ao resultado certo?

Se pudesses escolher a forma de trabalhar na aula, qual seria a tua forma ideal? (Tipo de tarefa, modo de trabalho em pares, grupo, sozinho...) Porquê?

Quando consideras que aprendeste mais sobre o conteúdo *funções quadráticas*? Na discussão coletiva, durante o trabalho autónomo ou a estudar em casa sozinho?

Quando consideras que desenvolveste mais o teu pensamento crítico: durante o trabalho autónomo, nas discussões coletivas ou quando estudaste em casa sozinho?

Tecnologia: calculadora gráfica e Geogebra foram uma mais-valia, ou dificultaram o trabalho? Porquê?