

**Universidade De Lisboa**



**A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES LINEAR E AFIM:  
UM ESTUDO COM ALUNOS DO 8.º ANO**

Nuno Miguel da Silva Loureiro

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Mestrado em Ensino da Matemática

2013



**Universidade De Lisboa**



**A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES LINEAR E AFIM:  
UM ESTUDO COM ALUNOS DO 8.º ANO**

Nuno Miguel da Silva Loureiro

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada  
Orientador: Professor Doutor Henrique Manuel Guimarães  
Coorientadora: Professora Doutora Helena Sezinando

Mestrado em Ensino da Matemática

2013



## Resumo

O objetivo deste trabalho é compreender o modo como lidam os alunos com a representação gráfica das funções linear e afim. Procurei compreender como procedem na construção de gráficos em diferentes contextos e as dificuldades que sentem na interpretação da representação gráfica e na passagem do tipo de representação gráfica para outro tipo de representação, e reciprocamente.

A proposta pedagógica foi desenvolvida com base na lecionação de treze tempos de 45 minutos cada, na unidade de ensino “Funções linear e afim”, numa turma do 8.º ano de escolaridade. As tarefas têm características predominantemente exploratórias e têm em comum o mesmo contexto de semi-realidade. No total foram realizadas cinco tarefas, uma das quais com recurso ao GeoGebra. O estudo enquadra-se no paradigma interpretativo, segue uma abordagem qualitativa e envolve a realização de três estudos de caso referentes a alunos com desempenhos académicos distintos. Os principais instrumentos utilizados na recolha de dados foram a observação das aulas, as produções realizadas pelos alunos e a entrevista.

Os resultados do estudo mostram ser importante propor tarefas formuladas em diferentes contextos, matemático e não matemático, no estudo das funções linear e afim. Revelam também algumas das dificuldades dos alunos na construção gráfica, por exemplo, a tendência para considerarem apenas valores positivos no trabalho com variáveis e trocarem a abcissa pela ordenada no trabalho com coordenadas de pontos, e dificuldades na compreensão da relação entre a variável independente e a variável dependente. As dificuldades decorrentes da realização de tarefas com características mais exploratórias, como o estudo do efeito da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  no gráfico da função, parecem ter sido atenuadas com a utilização do GeoGebra, e, apesar das dificuldades na compreensão da relação entre características gráficas e parâmetros da expressão analítica, a coordenação das várias representações foi importante para a compreensão do conceito de função. Na mudança de representação, as maiores dificuldades surgiram na mudança da representação gráfica para a representação algébrica e na mudança da representação gráfica para a representação tabular, no caso em que os pontos não estão assinalados.

**Palavras-chave:** Funções, Representações, Aprendizagem, Dificuldades, Álgebra.



## Abstract

This study aims to understand the process that students use to cope with the graphic representation of the linear and affine function. I sought to understand how they proceed in constructing graphics in different contexts and the difficulties they experience in interpreting the graphic representation, and in switching from this type of representation to another, and reciprocally.

The pedagogical approach was developed based upon thirteen classes of 45 minutes each, in the teaching unit of "The Linear and Affine Function", in an 8th grade class. The tasks have predominantly exploratory characteristics and possess in common the same semi-reality context. In total, five tasks were carried out, one of which using GeoGebra. The study fits into the interpretative paradigm, following a qualitative approach, and involves carrying out three case studies of students with different academic performances. The main tools used in gathering data were classroom observation, student-written productions and interview.

Study results show that it is important to propose tasks formulated in different contexts, mathematical and non-mathematical, in the study of the linear and affine function. The results also reveal some of the difficulties that students have in graphics construction, e.g., the tendency for considering only positive values while working with variables and to mistake the  $x$  coordinate with the  $y$  coordinate, while working with coordinates, and difficulties understanding the relation between the independent and dependent variables. The difficulties originated in performing tasks with more exploratory characteristics, such as studying the effect of variation of the  $a$  and  $b$  parameters in a function's graphic, seem to be attenuated using GeoGebra, and, in spite of the difficulties in understanding the relation between graphic characteristics and the parameters of the analytic expression, coordinating the various representations revealed itself important in understanding the concept of function. In the changing of the representation, the biggest difficulties arose in the changing of the graphic representation to the algebraic representation, and in the changing of the graphic representation to the tabular representation, in the case that the coordinates are not marked.

**Keywords:** Functions, Representations, Learning, Difficulties, Algebra.



## Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor Henrique Manuel Guimarães, pelo constante incentivo e exigência, pela disponibilidade e confiança manifestadas, e por tudo o que me ensinou.

À Professora Helena Sezinando pela orientação científica prestada neste trabalho.

À Professora Catarina Ferreira, pela paciência, conselhos, disponibilidade, pelas horas de reflexão e por partilhar a sua experiência ao longo deste ano.

À minha filha Mariana, à qual dedico este trabalho, pelas horas de diversão, brincadeira e companhia que não pude retribuir nestes últimos dois anos. Compensarei quando chegar a altura de lhe ensinar Matemática.

À Patricia, minha mulher, pela paciência e pelo apoio incondicional.

A todos os colegas de curso, por todos os momentos que passámos juntos.

Aos professores deste mestrado, que de alguma forma marcaram a minha vida e que tanto me ensinaram. Alguns foram verdadeiros exemplos. Obrigado!

Aos alunos envolvidos no estudo, pela disponibilidade, pela simpatia, pelo entusiasmo e pela colaboração que revelaram ao longo deste último ano.



## Índice

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. ENSINO E APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES .....	4
2.1. O conceito de função e a sua aprendizagem .....	4
2.1.1. O ensino das funções: orientações curriculares .....	5
2.1.2. Dificuldades dos alunos.....	7
2.2. Aprendizagem das funções em situações contextualizadas .....	11
2.3. A representação e o seu papel na aprendizagem das funções .....	12
2.3.1. O conceito de representação .....	12
2.3.2. Representações no ensino da Matemática .....	13
3. PROPOSTA PEDAGÓGICA.....	16
3.1. Caracterização da escola.....	16
3.2. Caracterização da turma.....	17
3.3. Planificação.....	19
3.3.1. Enquadramento no programa.....	19
3.3.2. Abordagem de ensino e formas de trabalho .....	22
3.3.3. Materiais e recursos.....	23
3.3.4. Estrutura das aulas .....	24
3.3.5. Tarefas .....	24
3.4. As aulas.....	30
3.5. Avaliação .....	38
3.6. Recolha de dados.....	38
3.6.1. Opções metodológicas gerais .....	39
3.6.2. Os participantes.....	40
3.6.3. Processo de recolha de dados .....	40
3.6.4. Análise de dados .....	42

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS .....	43
4.1. O caso do Raul .....	43
4.1.1. Construção de gráficos cartesianos .....	43
4.1.2. Dificuldades na interpretação gráfica.....	48
4.1.3. Mudança de representação.....	62
4.2. O caso do Paulo.....	70
4.2.1. Construção de gráficos cartesianos .....	70
4.2.2. Dificuldades na interpretação gráfica.....	73
4.2.3. Mudança de representação.....	85
4.3. O caso da Mariana .....	96
4.3.1. Construção de gráficos cartesianos .....	96
4.3.2. Dificuldades na interpretação gráfica.....	101
4.3.3. Mudança de representação.....	110
5. CONCLUSÃO.....	120
5.1. Síntese do estudo .....	120
5.2. Conclusões .....	121
5.2.1. Construção de gráficos cartesianos .....	121
5.2.2. Dificuldades na interpretação gráfica.....	124
5.2.3. Mudança de representação.....	128
5.3. Considerações finais .....	131
Referências Bibliográficas .....	135
Anexos .....	139

## Índice de anexos

Anexo 1 - Tarefas realizadas nas aulas .....	141
1.1. Tarefa: O preço das gomas (1. <sup>a</sup> e 2. <sup>a</sup> parte).....	141
1.2. Tarefa: Um embrulho especial .....	142
1.3. Tarefa: O fabrico de gomas.....	142
1.4. Tarefa: Exercícios de consolidação na aula* .....	143
1.5. Tarefa: Funções no GeoGebra*.....	144
Anexo 2 - Tarefas para trabalho de casa .....	145
2.1. Tarefa: Identificar e assinalar pares ordenados no plano* .....	145
2.2. Tarefa: Mais funções* .....	145
2.3. Tarefa: Exercícios de consolidação em casa* .....	147
Anexo 3 - Planos de aula.....	148
3.1. Primeira aula - 22/02 .....	148
3.2. Segunda aula - 26/02 .....	150
3.3. Terceira aula - 28/02.....	154
3.4. Quarta aula - 1/03 .....	158
3.5. Quinta aula - 5/03 .....	159
3.6. Sexta aula - 7/03 .....	161
3.7. Oitava aula - 12/03 .....	165
Anexo 4 - Ficha de avaliação .....	168
Anexo 5 - Entrevista .....	169
Anexo 6 - Pedido de autorização à Direção de Escola .....	171
Anexo 7 - Pedido de autorização aos Encarregados de Educação .....	172
Anexo 8 - Slides de apoio às aulas .....	173
8.1. Primeira aula - 22/02 .....	173
8.2. Segunda aula - 26/02 .....	175

8.3. Terceira aula - 28/02.....	176
8.4. Quarta aula - 1/03.....	178
8.5. Quinta aula - 5/03.....	180
8.6. Sexta aula - 7/03.....	182

## Índice de figuras

Figura 3.1 – Gráfico com as idades dos alunos .....	17
Figura 3.2 – Gráfico com as notas dos alunos no 1.º e 2.º período .....	18
Figura 3.3 – Enunciado da alínea 1.1.....	35
Figura 4.1 – Referencial do enunciado da questão 1 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.....	43
Figura 4.2 – Resposta à questão 1.1 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.....	44
Figura 4.3 – Resposta à questão 1.2 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.....	44
Figura 4.4 – Identificação de variáveis questão 3 da tarefa: mais funções....	44
Figura 4.5 – Resolução do exercício 4 da tarefa: exercícios consolidação....	45
Figura 4.6 – Resolução da questão 3 da ficha de avaliação.....	46
Figura 4.7 – Gráficos do enunciado da questão 2 da ficha de avaliação.....	48
Figura 4.8 – Resposta à questão 2 da ficha de avaliação.....	49
Figura 4.9 – Resolução da questão proposta na entrevista.....	50
Figura 4.10 – Resolução da alínea 1.4 da tarefa: um embrulho especial.....	50
Figura 4.11 – Resposta à alínea 1.6 da tarefa: um embrulho especial.....	51
Figura 4.12 – Enunciado da questão 1 da ficha de avaliação.....	52
Figura 4.13 – Resposta à questão 1 da ficha de avaliação.....	52
Figura 4.14 – Resposta à questão 1 da ficha de avaliação.....	53
Figura 4.15 – Resposta à alínea 1.2 da tarefa: o fabrico de gomas.....	54
Figura 4.16 – Resposta à alínea 1.2 da tarefa: o fabrico de gomas.....	55
Figura 4.17 – Resposta à questão 1 da tarefa: funções no GeoGebra.....	57
Figura 4.18 – Resposta à questão 2 da tarefa: funções no GeoGebra.....	58
Figura 4.19 – Resposta à questão 3 da tarefa: funções no GeoGebra.....	59
Figura 4.20 – Resposta à questão 4 da tarefa: funções no GeoGebra.....	60

Figura 4.21 – Resolução da alínea 1.1 da tarefa: O fabrico de gomas.....	62
Figura 4.22 – Gráfico do enunciado da alínea 2.2 da ficha de avaliação. ....	63
Figura 4.23 – Resolução da alínea 2.2 da ficha de avaliação.....	63
Figura 4.24 – Resolução da questão 4 da tarefa: exercícios consolidação. ...	64
Figura 4.25 – Enunciado da questão 3 da tarefa: mais funções. ....	65
Figura 4.26 – Resolução da questão 3 da tarefa: mais funções. ....	65
Figura 4.27 – Resolução da questão 3 da tarefa: mais funções. ....	66
Figura 4.28 – Resolução da questão 3 da tarefa: mais funções. ....	66
Figura 4.29 – Resolução da alínea 1.1 da tarefa: o preço das gomas. ....	67
Figura 4.30 – Resolução da alínea 1.6 da tarefa: o preço das gomas. ....	67
Figura 4.31 – Gráfico do enunciado da questão 4 da entrevista.....	68
Figura 4.32 – Resolução da alínea 4.6 da entrevista.....	68
Figura 4.33 – Resposta à alínea 4.6 da entrevista.....	69
Figura 4.34 – Referencial do enunciado da questão 1 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados. ....	70
Figura 4.35 – Resposta à questão 1.1 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados. ....	71
Figura 4.36 – Resposta à questão 1.2 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados. ....	71
Figura 4.37 – Resolução do exercício 4 da tarefa: exercícios consolidação..	72
Figura 4.38 – Resposta à questão 2 da ficha de avaliação. ....	74
Figura 4.39 – Resolução da questão extra proposta na entrevista. ....	76
Figura 4.40 – Resolução da alínea 1.4 da tarefa: um embrulho especial.....	77
Figura 4.41 – Resposta à alínea 1.6 da tarefa: um embrulho especial. ....	77
Figura 4.42 – Enunciado da questão 1 da ficha de avaliação.....	78
Figura 4.43 – Justificação da questão 1 da ficha de avaliação. ....	78
Figura 4.44 – Justificação da questão 1 da ficha de avaliação. ....	79
Figura 4.45 – Resposta à questão 1 da tarefa: funções no GeoGebra.....	81

Figura 4.46 – Resposta à questão 2 da tarefa: funções no GeoGebra.....	81
Figura 4.47 – Resposta à questão 3 da tarefa: funções no GeoGebra.....	82
Figura 4.48 – Resposta à questão 4 da tarefa: funções no GeoGebra.....	83
Figura 4.49 – Resolução da questão 3 da ficha de avaliação.....	85
Figura 4.50 – Gráfico do enunciado da alínea 2.2 da ficha de avaliação. ....	86
Figura 4.51 – Resolução da alínea 2.2 da ficha de avaliação.....	86
Figura 4.52 – Resolução da alínea 2.2 da ficha de avaliação.....	87
Figura 4.53 – Gráfico do enunciado da questão 4 da entrevista.....	88
Figura 4.54 – Resolução da alínea 4.6 da entrevista.....	89
Figura 4.55 – Enunciado da questão 3 da tarefa: mais funções. ....	89
Figura 4.56 – Resolução da questão 3 da tarefa: mais funções.....	90
Figura 4.57 – Enunciado da questão 2 da entrevista.....	90
Figura 4.58 – Resolução da questão 2 da entrevista.....	92
Figura 4.59 – Resposta à alínea 1.1 da tarefa: o preço das gomas. ....	93
Figura 4.60 – Resolução da alínea 1.6 da tarefa: o preço das gomas. ....	94
Figura 4.61 – Gráfico do enunciado da questão 4 da entrevista.....	94
Figura 4.62 – Resposta à alínea 4.6 da entrevista.....	95
Figura 4.63 – Referencial do enunciado da questão 1 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.....	96
Figura 4.64 – Resposta à questão 1.1 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.....	97
Figura 4.65 – Resposta à questão 1.2 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.....	97
Figura 4.66 – Resolução da alínea 1.6 da tarefa: o preço das gomas. ....	98
Figura 4.67 – Resolução do exercício 4 da tarefa: exercícios consolidação..	99
Figura 4.68 – Resolução da questão 5 da entrevista.....	100
Figura 4.69 – Resposta à questão 2 da ficha de avaliação.....	101
Figura 4.70 – Resposta à questão extra proposta na entrevista.....	102

Figura 4.71 – Enunciado da questão 1 da ficha de avaliação.....	102
Figura 4.72 – Justificação da questão 1 da ficha de avaliação. ....	103
Figura 4.73 – Justificação da questão 1 da ficha de avaliação. ....	103
Figura 4.74 – Resposta à questão 1 da tarefa: funções no GeoGebra.....	105
Figura 4.75 – Resposta à questão 2 da tarefa: funções no GeoGebra.....	106
Figura 4.76 – Resposta à questão 3 da tarefa: funções no GeoGebra.....	107
Figura 4.77 – Resposta à questão 4 da tarefa: funções no GeoGebra.....	108
Figura 4.78 – Resolução da questão 3 da ficha de avaliação. ....	110
Figura 4.79 – Gráfico do enunciado da alínea 2.2 da ficha de avaliação. ...	111
Figura 4.80 – Resolução da alínea 2.2 da ficha de avaliação.....	111
Figura 4.81 – Enunciado da questão 3 da tarefa: mais funções. ....	112
Figura 4.82 – Resolução da questão 3 da tarefa: mais funções. ....	113
Figura 4.83 – Enunciado da questão 2 da entrevista.....	113
Figura 4.84 – Resolução da questão 2 da entrevista. ....	115
Figura 4.85 – Continuação da resolução da questão 2 da entrevista. ....	115
Figura 4.86 – Resposta à alínea 1.1 da tarefa: o preço das gomas. ....	116
Figura 4.87 – Resolução da alínea 1.1 da tarefa: o preço das gomas. ....	117
Figura 4.88 – Resolução da alínea 1.6 da tarefa: o preço das gomas. ....	117
Figura 4.89 – Gráfico do enunciado da questão 4 da entrevista.....	118
Figura 4.90 – Resolução da alínea 4.6 da entrevista.....	119

# 1. INTRODUÇÃO

Enquanto futuro professor, questiono-me por vezes sobre a melhor forma de ensinar os meus alunos, de forma a promover atitudes positivas face à Matemática e levá-los a investir na disciplina. Nesse sentido, acredito que o professor pode desenvolver um conjunto de compreensões sobre a Matemática, com o objetivo de aperfeiçoar a sua prática profissional.

Recordo que nos meus tempos de aluno, um dos temas que mais despertou o meu interesse foi o das funções. Ao estabelecerem ligações entre a Matemática e a realidade, as funções permitem tratar situações práticas e o seu estudo constitui uma ferramenta importante na interpretação da realidade, revelando a utilidade da Matemática e contribuindo para a sua aprendizagem. As funções acompanham os alunos no seu percurso escolar, e surgem ao longo de todo o currículo, nomeadamente: (i) na Aritmética, como operações entre números, onde a um par ordenado corresponde um número bem determinado; (ii) na Geometria, relacionando conjuntos de pontos com as suas imagens através de transformações geométricas; (iii) no cálculo de Probabilidades, relacionando os acontecimentos com as respetivas probabilidades; e (iv) na Álgebra, como relações entre variáveis.

Apesar das funções estarem muitas vezes presentes, os alunos revelam erros habituais e dificuldades, por exemplo: (i) no trabalho com gráficos cartesianos; (ii) na leitura e na interpretação de gráficos; e (iii) na utilização das várias representações e na transição de uma representação para outra. Assim, é importante a realização de estudos nesta área, de modo a perceber-se a origem destas dificuldades e de que forma elas podem ser minimizadas ou mesmo evitadas.

Também as representações assumem um papel fundamental em Matemática, salientado em diversos documentos curriculares, como por exemplo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), que refere que “quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente” (p.75). Nesse sentido, o papel das representações no estudo das funções é de extrema importância.

Um dos aspetos centrais do meu papel enquanto professor assenta na preparação das aulas e na elaboração de tarefas que acredito serem fundamentais

para a aprendizagem dos alunos. Podendo ser conjugadas com um ensino predominantemente exploratório, as tarefas foram elaboradas com a preocupação de propor questões formuladas em contexto de semi-realidade (Skovsmose, 2000), complementadas com questões puramente matemáticas. Para além de procurarem desenvolver nos alunos uma compreensão Matemática das funções, pretendem levá-los a lidar com ideias matemáticas em diversas representações, desenvolver neles a capacidade de comunicar e interpretar as suas ideias e as dos outros, organizar e clarificar o seu pensamento matemático, e levá-los a utilizar autonomamente as várias representações e procedimentos na realização de atividades matemáticas.

Este estudo tem por base uma proposta pedagógica na unidade de ensino “Funções linear e afim”, enquadrada no tópico Funções, no tema da Álgebra. É desenvolvido numa turma de 8.º ano, ao longo de treze tempos de 45 minutos cada, que decorreram a meio do segundo período no ano letivo de 2012/2013. O seu principal objetivo é compreender de que forma os alunos do 8.º ano de escolaridade lidam com a representação gráfica das funções Linear e Afim. Para tal formulei as seguintes questões:

- Como procedem os alunos na construção de gráficos de funções lineares e afins em diferentes contextos?
- Quais as principais dificuldades com que os alunos se confrontam na interpretação da representação gráfica das funções?
- Quais as principais dificuldades com que os alunos se confrontam na passagem da representação gráfica para outro tipo de representação, e reciprocamente?

As motivações iniciais e a formulação dos objetivos que descrevi, suscitaram a necessidade de, no segundo capítulo deste trabalho, aprofundar os conhecimentos com base na revisão da literatura existente no domínio das funções e das representações. Esta revisão teve em conta três aspetos fundamentais: (i) o conceito de função e a sua aprendizagem; (ii) a aprendizagem das funções em situações contextualizadas; e (iii) a representação e o seu papel na aprendizagem das funções. No terceiro capítulo, o enquadramento sobre a elaboração da proposta pedagógica começa com uma caracterização da escola e da turma, e prossegue com aspetos ligados à planificação, com destaque para o enquadramento no programa, a

abordagem de ensino e formas de trabalho, os materiais e recursos e as tarefas propostas. De seguida é feita uma descrição das aulas lecionadas, são identificados instrumentos e procedimentos utilizados na avaliação das aprendizagens, e é descrito o processo de recolha de dados no que respeita às opções metodológicas tomadas, aos participantes no estudo e à recolha e análise de dados. No quarto capítulo apresento a análise dos dados que recolhi, e por fim, no quinto capítulo, apresento as conclusões do meu estudo.

## 2. ENSINO E APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES

No presente capítulo, depois de uma referência muito sucinta a alguns passos do desenvolvimento histórico do conceito de função, são identificadas orientações curriculares para o ensino das funções, algumas dificuldades relativas à aprendizagem e razões que poderão estar na origem dessas dificuldades. Seguidamente é explicada a importância do trabalho em contextos diversos na aprendizagem das funções e por fim é apresentado o papel das representações na aprendizagem, sustentado pelas perspectivas de vários autores.

### 2.1. O conceito de função e a sua aprendizagem

O conceito de função como é hoje apresentado data do final do século XIX e resultou de um longo e aprofundado desenvolvimento do pensamento matemático. Ainda que sem uma formalização abrangente e universalmente aceite, as noções ligadas ao conceito já eram utilizadas desde a antiguidade.

Na Idade Média, Nicolau de Oresme foi o primeiro matemático a utilizar um gráfico, representando num eixo a velocidade e no outro o tempo de deslocação. Apesar de ter designado as coordenadas por latitude e longitude, o seu sistema pode ser considerado precursor da representação gráfica de funções. O método analítico para definir funções surgiu mais tarde, com Fermat e Descartes, numa altura em que o pensamento funcional assumia especial destaque no trabalho desenvolvido pelos matemáticos. A palavra função terá sido introduzida por Leibniz, por volta de 1673, para designar quantidades cujas variações estão relacionadas por uma lei. Posteriormente, o matemático Leonhard Euler introduziu a notação  $f(x)$  para denotar a função  $f$  de  $x$  e refinou o conceito de função.

Hoje, a Matemática ensinada nas escolas é o resultado da evolução de conceitos desenvolvidos ao longo de séculos. Nos programas do Ensino Básico, tem vindo a ser adotada a definição de função que, na sua essência, é idêntica à apresentada por Dirichlet em 1837. Uma função  $f: A \rightarrow B$  consiste em dois conjuntos, o domínio  $A$ , o conjunto chegada  $B$  e uma regra que associa a cada elemento  $x$  de  $A$

(objeto) um só elemento  $y$  de  $B$  (imagem). Diz-se neste caso que a função está definida em  $A$  com valores em  $B$  (Teixeira et al., 1997, p. 13).

### **2.1.1. O ensino das funções: orientações curriculares**

Em Portugal, documentos curriculares recentes, como por exemplo a brochura “Álgebra no ensino básico” e o programa de Matemática do ensino básico, recomendam que o estudo das funções seja feito através da correspondência entre conjuntos e como relação entre variáveis. Smith (2003) identifica vantagens nestes dois modos de análise. Segundo este autor, uma função de duas variáveis pode ser estudada pela forma como um valor de uma variável (independente) faz variar o valor da outra variável (dependente), ou por outras palavras, pela análise dos correspondentes padrões de variação, ou ainda, pela análise da covariação entre as duas variáveis, por exemplo,  $x$  e  $y$ . O autor refere ainda que a abordagem relativa ao estudo da covariação é utilizada pelos alunos de forma mais intuitiva e pode ser a base para o estabelecimento de uma relação de correspondência entre cada valor de  $x$  e o respetivo valor de  $y$ , podendo depois a partir daí, chegar-se mais facilmente à expressão analítica da função.

Desde o início da escolaridade básica, espera-se que os alunos desenvolvam diversas competências, como estabelecer relações, fazer conjecturas e reconhecer sequências e padrões. As funções estão portanto presentes, desde cedo, no percurso dos alunos. No primeiro ciclo começam a ser trabalhadas, de forma informal e intuitiva, algumas noções e competências básicas necessárias para o estudo das funções.

No segundo ciclo a referência às funções continua a ser feita de forma indireta. Nesta fase os alunos começam a trabalhar a noção de proporcionalidade direta e o raciocínio proporcional, através da análise de situações diversificadas do quotidiano e utilização de analogias com o objetivo de construir o conceito de proporcionalidade. Apesar de não se recorrer necessariamente à representação de situações de proporcionalidade direta através de gráficos ou de expressões analíticas, os conceitos de correspondência e variável, bem como a noção de dependência entre

variáveis, de regra, ou de padrão, deverão ser abordados através da resolução de problemas.

No terceiro ciclo é feito um reforço das aprendizagens relacionadas com o conceito de proporcionalidade e dedica-se algum tempo ao estudo de situações representadas na forma verbal, tabular e gráfica. Numa fase inicial, os alunos começam por construir o conceito de função de proporcionalidade direta. Os conceitos e linguagem usados no estudo da unidade Funções Linear e Afim assentam na ideia intuitiva de correspondência trabalhada anteriormente. É durante este estudo que se estabelece e reforça a ligação entre o conceito de proporcionalidade e o conceito de função. Uma função chama-se afim quando existem constantes  $a$  e  $b$  (números reais), tais que  $y = ax + b$ , para todo o  $x$  real. No caso particular em que  $b = 0$ , a expressão reduz-se à forma  $y = ax$  e traduz uma relação de proporcionalidade direta, visto que o cociente de dois valores correspondentes  $y$  e  $x$ , é a constante  $a$ . Dizemos também que a expressão da forma  $y = ax$  é linear. Esta expressão pode ainda ser entendida como a equação reduzida das retas não verticais que passam pela origem do referencial e têm declive  $a$ . No caso em que  $a = 0$  obtém-se a função constante, cuja expressão analítica tem a forma  $y = b$  e o gráfico é uma reta horizontal.

A partir do 9.º ano, aprofunda-se o estudo das relações e funções e dá-se especial relevo à representação gráfica, através da introdução de novas situações como a de proporcionalidade inversa. Nesta fase, os alunos deverão construir e interpretar gráficos, tabelas e expressões, alternando uma representação com outra e recorrendo às novas tecnologias.

Relativamente à aprendizagem das funções no terceiro ciclo, Ponte et al. (2009) defendem que “os alunos devem saber o que é uma função, identificar correspondências que são ou não funções, reconhecer as diversas representações de uma função e identificar objetos e imagens” (p.116). Porém, acrescentam também “que a abordagem da noção de função neste ciclo não privilegia os aspetos estritamente matemáticos do conceito, mas sim o seu uso para modelar situações da realidade e para resolver problemas”.

Ao analisar os três ciclos de ensino, percebe-se que o tema das funções é tratado de forma coerente e progressiva, mas, ainda assim, de forma introdutória quando comparada com a abordagem realizada no ensino secundário. Um percurso realizado desta forma pode promover o gosto dos alunos pela disciplina, levá-los a

desenvolver um sentido crítico, e fazê-los interiorizar gradualmente que a matemática, mais do que um mero aglomerado de símbolos desprovidos de significado tem uma utilidade real.

De acordo com o programa de Matemática do Ensino Básico, “a função é estudada essencialmente como relação entre variáveis, embora também seja apresentada como correspondência unívoca entre elementos de dois conjuntos. Deve recorrer-se a várias representações (algébrica, gráfica e tabular) de uma função na interpretação e resolução de problemas e na modelação de situações (2007, p. 56).

O NCTM, nas normas para a álgebra desde o pré-escolar até ao 12.º ano, refere que “os alunos deverão ser capazes de compreender as relações entre tabelas, gráficos e símbolos e de avaliar as vantagens e as desvantagens de cada forma de representação, consoante os objetivos em causa. À medida que trabalham com representações múltiplas de funções (...) irão desenvolver um conhecimento mais compreensivo das funções.” (2007, p. 40).

Os benefícios de uma abordagem às funções com recurso à tecnologia são identificados por diversos autores. A utilização das representações gráficas das várias funções, facilmente realizável com um computador ou com uma calculadora gráfica, permite aos alunos estudar, por exemplo, a influência da variação dos parâmetros numa família de funções (Kieran, 2006). No NCTM, a tecnologia, e em particular a utilização computadores, surge como um dos princípios para o ensino da Matemática: “A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da Matemática” e “melhora a aprendizagem dos alunos” permitindo a sua concentração “nas decisões a tomar, na reflexão, no raciocínio e na resolução de problemas” (2007, p. 26).

### **2.1.2. Dificuldades dos alunos**

São diversas as dificuldades manifestadas pelos alunos ao trabalharem com funções. Por exemplo, no cálculo do objeto de uma imagem dada e vice-versa, Domingos (1994) refere “que os alunos creem que se a cada valor de  $x$  corresponde apenas um valor de  $y$ , então o contrário também deve ser verdade” (p. 34).

Outra dificuldade geralmente manifestada pelos alunos está relacionada com a identificação das variáveis envolvidas e com a própria compreensão do conceito de

variável. Na perspectiva de Domingos (1994), além de os alunos terem dificuldade em compreender o que é uma variável, também sentem dificuldades na identificação das variáveis envolvidas em determinada situação. Segundo Trigueros e Ursini (2008), a compreensão das variáveis numa relação funcional envolve as seguintes capacidades: (i) reconhecer a correspondência entre quantidades, independentemente do tipo de representação utilizada; (ii) determinar o valor da variável independente dado o valor da variável dependente; (iii) determinar o valor da variável dependente dado o valor da variável independente; (iv) reconhecer a variação conjunta das variáveis que intervêm numa relação, independentemente da sua representação; (v) determinar os intervalos de variação de uma das variáveis quando os da outra são conhecidos; e (vi) expressar uma relação funcional com base nos dados do problema, nas formas tabular, gráfica e simbólica.

A simbologia utilizada também pode criar obstáculos à compreensão do conceito de função. Muitas vezes os conhecimentos dos alunos para manipular e operar com símbolos, não é suficiente para a compreensão estrutural de uma função (Ponte et al., 2009).

Outra dificuldade identificada na aprendizagem do conceito de função está relacionada com a tentativa de memorização por parte dos alunos, sem que haja uma compreensão efetiva do conceito. Num estudo desenvolvido por Saraiva & Teixeira (2009), concluiu-se que, apesar da definição de função ter sido memorizada por um grupo de alunos, muitos acabaram por associar frases como “a um objeto corresponde uma e só uma imagem”, com representações que não eram funções.

Num estudo realizado por Elia et al. (2007), sobre os conhecimentos e dificuldades no trabalho com funções, por regra os alunos revelaram melhor desempenho em tarefas cujo trabalho envolvia o gráfico da função. O pior desempenho foi obtido em problemas onde se trabalhava a função a partir da expressão algébrica, nomeadamente, problemas em que se pedia aos alunos que mudassem da representação verbal para a representação algébrica, que reconhecessem uma função num conjunto dado de relações entre variáveis e que construíssem o gráfico a partir da expressão analítica. Neste estudo, os alunos também revelaram dificuldades na definição correta do conceito de função e na resolução de problemas que envolvessem a transição de uma representação para outra. A maioria dos alunos não foi bem-sucedida na resolução dos problemas propostos, o que, para os autores, sugere que a transição entre representações,

processo que requer uma compreensão global das variáveis, pode estar a ser trabalhada de forma inadequada no ensino.

Leinhardt et al. (1990) explicam que a construção do gráfico a partir da expressão analítica resume-se a uma série de passos diretos, que normalmente passam por identificar pares ordenados, representá-los no referencial cartesiano e traçar uma linha que passe pelos pontos assinalados. Por outro lado, a passagem do gráfico para a expressão analítica constitui uma tarefa mais complexa, devido à necessidade de detetar padrões.

Num estudo realizado por Matos (2008), foram analisadas duas situações contextualizadas, inspiradas em materiais publicados no âmbito do projeto *Mathematics in Context* e baseadas nos princípios subjacentes à Educação Matemática Realista (Freudenthal, 1991). As situações estudadas, relativas à compra de combustível, podiam ser modeladas por funções afins. Ao resolverem a tarefa, os alunos utilizaram de forma correta a relação entre variáveis, mas revelaram dificuldades na análise e descrição do modo como se processava essa variação. A construção e a interpretação de gráficos relativos às situações descritas também levantaram dificuldades a vários alunos. Na construção eles começaram por utilizar escalas incorretas, e na interpretação, quando lhes foi pedido que imaginassem uma situação que fosse coerente com a representação gráfica, revelaram dificuldades no aproveitamento que fizeram da informação contida nos gráficos e na formulação de “histórias” coerentes.

Num estudo desenvolvido por Ponte (1984), o autor identificou algumas estratégias e dificuldades dos alunos no campo da construção e interpretação de gráficos cartesianos e na análise das relações funcionais subjacentes a esses processos. Na construção e interpretação de gráficos, a maioria dos alunos conseguiu determinar as coordenadas de pontos em situações que envolvessem variáveis discretas, no entanto, em gráficos que envolvessem funções contínuas, os alunos foram pouco precisos, especialmente na estimação de valores da variável independente. Também foram sentidas dificuldades no trabalho com escalas, ao nível da construção e interpretação gráfica. Na construção de gráficos os alunos demonstraram: (i) indecisão no tipo de gráfico; (ii) inexistência de uma escala uniforme na representação de variáveis uniformes; e (iii) hesitação na escolha ou uma escolha inadequada da unidade. Na interpretação de gráficos os alunos demonstraram: (i) pouca atenção à unidade utilizada na construção da escala; (ii)

confusão na escolha das unidades; e (iii) escolha inadequada nas subdivisões da unidade de escala.

A análise realizada em torno da representação gráfica de situações em que existe variação revelou que a estratégia mais utilizada pelos alunos passa por marcar inicialmente alguns pontos no gráfico. Posteriormente, para a maioria, o passo seguinte é obter uma reta através da união desses pontos.

O autor analisou ainda as dificuldades dos alunos na identificação e na classificação de variáveis. Em contextos que lhe eram familiares, a globalidade dos alunos foi capaz de identificar corretamente as variáveis associadas ao problema. Relativamente à sua natureza, a maioria soube distinguir corretamente as variáveis contínuas das variáveis discretas. No caso específico das variáveis contínuas, alguns alunos foram capazes de justificar corretamente a linha que une os pontos do gráfico da função. Em contextos menos familiares, sentiram maiores dificuldades na identificação das variáveis e na compreensão da sua natureza.

Kaput (1999) considera que o raciocínio algébrico e as representações algébricas estão entre as ferramentas mais poderosas jamais desenvolvidas. Este autor acredita que a dificuldade em lidar com símbolos formais algébricos e em relacionar as várias representações constitui um obstáculo ao estudo das funções e defende a realização de tarefas que envolvam diversos sistemas de representações. Ponte (1992) considera que o ensino das funções deve articular de modo equilibrado os vários tipos de representação: (i) numérica; (ii) gráfica; e (iii) algébrica. O autor sugere que no início do estudo das funções é importante recorrer a exemplos em que exista uma expressão analítica ou uma regra simples em que se estabeleça uma correspondência entre conjuntos numéricos. Defende ainda que o estudo das propriedades das funções a partir dos seus gráficos pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa e o estudo analítico das funções deve surgir com base em atividades sistematicamente realizadas a partir da representação numérica e da representação gráfica.

## **2.2. Aprendizagem das funções em situações contextualizadas**

Trabalhar em contextos diversificados, pode ajudar a conferir um significado especial à Matemática que processos centrados na exposição e aplicação de conceitos previamente definidos não conseguem. Bardini, Pierce e Stacey (2004), sugerem que os alunos devem ser confrontados com problemas relacionados com a sua realidade, facto que pode facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos. Neste sentido, Carraher e Schliemann (2007) consideram que o tipo de situação apresentada é crucial para que os alunos aprendam Matemática. Estes autores acreditam que ao trabalhar com problemas e situações contextualizadas, são criados ambientes de ensino e aprendizagem onde os alunos têm a oportunidade de propor ideias, representarem os problemas e apresentarem soluções.

No que respeita ao papel do contexto nas tarefas matemáticas é possível entendê-lo como o universo conceptual associado a cada tarefa. Esse contexto pode remeter para um campo da vida quotidiana, do qual o aluno pode ter maior ou menor experiência pessoal, ou apenas para um universo matemático (Ponte & Quaresma, 2012). A corrente da “Educação Matemática Realística” dá uma especial atenção ao contexto das tarefas. Nesta perspetiva, as situações de realidade devem constituir pontos de partida no processo de aprendizagem. Para Freudenthal (1991), a realidade é o que é experienciado como real pelos alunos, ou seja, as situações a que atribuem significado, onde estão incluídas não só situações puramente matemáticas mas também situações em contexto real.

No programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), destacam-se as conexões relativamente a aspetos exteriores à Matemática e conseqüentemente aos contextos em que se situam as tarefas. Estas conexões são importantes para a aprendizagem dos diversos conceitos e representações, e do ponto de vista da capacidade de usar a Matemática na resolução de problemas. O programa apresenta a resolução de problemas como uma capacidade transversal e reforça que muitos destes problemas devem corresponder a situações da realidade. Nas indicações metodológicas referentes ao terceiro ciclo, o programa de Matemática refere que “neste ciclo de ensino, tratam-se problemas que correspondem a situações próximas da vida quotidiana, problemas associados a outras áreas disciplinares” (p. 62).

Os contextos desempenham um papel importante nos vários temas do programa, por exemplo, os contextos aparecem de forma natural no estudo das medidas de grandezas e das respetivas unidades de medida. Assim, o trabalho em situações contextualizadas com base na realidade, é fundamental para o desenvolvimento dos conceitos e das ideias matemáticas por parte dos alunos, bem como para o desenvolvimento da sua capacidade de usar a Matemática na resolução de problemas (Ponte & Quaresma, 2012).

## **2.3. A representação e o seu papel na aprendizagem das funções**

### **2.3.1. O conceito de representação**

Em Matemática, uma representação pode ser vista como uma configuração (de caracteres, imagens, objetos concretos...) que representa algo (Goldin, 2008). Representações de vários tipos do mesmo conceito favorecem a compreensão do conceito bem como da representação, e por isso assumem maior significado se forem vistas como parte de um sistema mais amplo, com significados e convenções estabelecidos e com uma estrutura que permita relacionar de forma significativa diferentes representações pertencentes ao mesmo sistema (Goldin & Shteingold, 2001).

Segundo (Goldin, 2008), é possível fazer-se uma distinção entre sistemas de representação externa e sistemas de representação interna. Os sistemas de representação externa referem-se a configurações observáveis, incluindo, as linguagens naturais normativas, os sistemas matemáticos gráficos, referentes a diagramas e de notação formal, os ambientes de aprendizagem estruturados, que podem incluir materiais manipuláveis concretos ou tecnologias, e as estruturas socioculturais, como as hierarquias políticas ou os sistemas educativos. Os sistemas de representação interna referem-se a configurações mentais dos indivíduos, incluindo a linguagem natural, a capacidade de construir imagens visuais e espaciais, as representações tácteis e cinestésicas, as heurísticas para a resolução de problemas, as conceções e o afeto.

Na perspectiva de Duval (2006), a comunicação em Matemática estabelece-se com base em representações. Ao contrário de outras áreas do conhecimento, os objetos matemáticos são abstratos e por isso não são imediatamente perceptíveis ou observáveis com o auxílio de instrumentos, tornando-se necessário recorrer a representações semióticas que possibilitem a sua aprendizagem. Na opinião deste autor, o problema da compreensão matemática está relacionado com um conflito cognitivo que surge do facto dos objetos matemáticos apenas serem acessíveis através de representações. Nesse sentido, é fundamental para o progresso da aprendizagem, que o aluno seja capaz de distinguir o objeto representado, da sua representação. No que respeita à transformação de representações, o mesmo autor defende que, para se compreenderem as dificuldades de aprendizagem torna-se necessário distinguir dois tipos de transformações: (i) o tratamento; e (ii) a conversão. Os tratamentos são transformações de representações dentro do mesmo registo, por exemplo, simplificação de expressões analíticas. As conversões são transformações entre diferentes registos, por exemplo, a passagem da expressão analítica de uma função para a sua representação gráfica. O autor acrescenta ainda que a complexidade cognitiva subjacente ao processo de pensamento Matemático reside no facto de existirem duas formas de transformação tão distintas.

Segundo o NCTM (2007), “o termo representação refere-se (...) à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma” (p. 75). O documento refere ainda que “quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente” (p.75).

### **2.3.2. Representações no ensino da Matemática**

As representações têm vindo a assumir destaque nas orientações curriculares para o ensino da Matemática. No NCTM, a norma específica dedicada à representação matemática considera como objetivos de aprendizagem, desde o pré-escolar até ao 12.º ano: (i) criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; (ii) selecionar, aplicar e traduzir representações

matemáticas para resolver problemas; e (iii) usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos (2007, p. 75). Segundo este documento, é preciso que os alunos sejam estimulados para a representação das suas ideias, mesmo que inicialmente o façam recorrendo a formas não convencionais, mas é importante que eles aprendam formas de representação convencionais de forma a facilitar a sua aprendizagem e a comunicação das suas ideias.

O programa de Matemática do Ensino Básico valoriza igualmente a representação. Neste documento é apresentado como objetivo geral do ensino da Matemática, os alunos serem capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações, devendo ser capazes de: (i) ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação; (ii) traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural; (iii) elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas; e (iv) usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais (2007, pp. 4-5). O documento refere-se ainda à importância das representações matemáticas na aprendizagem e à importância do trabalho com múltiplas representações.

Diversos autores defendem a utilização de múltiplas representações para o desenvolvimento de uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos. Por exemplo, Friedland e Tabach (2001) acreditam que o trabalho com várias representações permite eliminar as limitações de cada uma delas, tornando “o processo de aprendizagem da Álgebra mais significativo e efetivo” (p. 173). Estes autores distinguem quatro modos diferentes de representação, que consideram ser essenciais no ensino da Matemática e mais especificamente no ensino da Álgebra: (i) a representação verbal; (ii) a representação numérica; (iii) a representação gráfica; e (iv) a representação algébrica. Apresentam ainda as seguintes vantagens e desvantagens associadas a cada uma delas: (i) a representação verbal está normalmente associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos. Dá ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano. Tem a desvantagem de não ser uma representação universal, o que pode criar obstáculos a nível da comunicação matemática; (ii) a representação numérica é uma representação natural, utilizada no

início do estudo da Álgebra e que geralmente precede qualquer outro tipo de representação. É importante na compreensão inicial de um problema, mas pode por vezes constituir uma limitação por não ser generalizável; (iii) a representação gráfica proporciona uma imagem clara da função. É uma forma de representação intuitiva e apelativa devido ao seu carácter visual. Em contrapartida, é muito influenciada por fatores externos, como por exemplo escalas; e (iv) a representação algébrica é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos e muitas vezes é o único método de justificar e estabelecer generalizações. No entanto, esta representação que utiliza exclusivamente símbolos algébricos pode ocultar o significado matemático ou a natureza do objeto e dificultar a compreensão dos resultados.

Relativamente às tarefas, Friedlander e Tabach (2001) acreditam que a sua natureza pode influenciar muito a utilização das várias representações por parte dos alunos. Sugerem que para levá-los a utilizar as várias representações, as tarefas devem possuir algumas características, tais como: (i) situações problemáticas devem ser apresentadas através de diferentes representações de forma a encorajar a flexibilidade na escolha da representação; (ii) questões de natureza reflexiva podem ajudar os alunos a distanciarem-se do trabalho efetuado e a avaliarem as escolhas efetuadas; e (iii) questões de natureza investigativa podem ajudar os alunos a familiarizarem-se com uma determinada representação inicial, a estabelecer relações entre representações e finalmente a selecionar uma representação final e definitiva.

### **3. PROPOSTA PEDAGÓGICA**

Este capítulo é dedicado ao desenvolvimento das ideias fundamentais que sustentam a planificação da unidade de ensino que está na base deste estudo. Começo por realizar uma caracterização da escola e da turma, com destaque para determinadas características dos alunos como o género, a idade, o comportamento e o aproveitamento. De seguida é apresentada a planificação da unidade de ensino, começando pelo seu enquadramento no programa, explicitando depois a abordagem de ensino, as formas de trabalho, a estrutura das aulas, os materiais e os recursos utilizados e as tarefas que foram propostas. Inclui-se ainda uma descrição das aulas lecionadas, onde são apresentados os níveis de concretização dos objetivos traçados, e por fim são identificados os instrumentos e os procedimentos utilizados na avaliação das aprendizagens.

#### **3.1. Caracterização da escola**

A Escola Secundária com terceiro ciclo Braamcamp Freire está situada na rua Dr. Gama Barros, na freguesia da Pontinha, concelho de Odivelas, distrito de Lisboa. A freguesia da Pontinha localiza-se na fronteira do concelho de Odivelas com os municípios de Lisboa, Amadora e Sintra. Com uma área de 4,78 quilómetros quadrados e cerca de 23.233 habitantes, converteu-se numa localidade de forte concentração urbana. O povoamento de grande parte da freguesia começou a desenvolver-se em meados do século XX, com população proveniente do interior do país, nomeadamente das regiões da Beira Alta, Trás-os-Montes e Alentejo. Este crescimento urbano acentuou-se na década de 70, com população oriunda de Lisboa e dos PALOP, e mais recentemente, do Brasil, China e países do leste europeu.

Relativamente às infraestruturas, nos últimos anos a escola renovou e ampliou as instalações, de forma a dar resposta às necessidades que foram surgindo ao longo do tempo. Esta renovação realizou-se ao abrigo do projeto programa de requalificação, promovido pela empresa “Parque Escolar”.

A população escolar situou-se durante muito tempo no terceiro ciclo do Ensino Básico, contudo, nos últimos anos tem vindo a alterar-se progressivamente

esta tendência e regista-se atualmente uma maior incidência da população escolar no Ensino Secundário. Atualmente, a escola conta com cerca de 890 alunos, cujas idades variam entre os 11 e os 24 anos de idade, 117 professores, 5 assistentes técnicos e 21 assistentes operacionais.

Relativamente à distribuição dos alunos por ano de escolaridade, verifica-se um equilíbrio entre o número de alunos do básico (46%) e do secundário (54%). O 10.º ano do ensino regular é aquele que apresenta a maior percentagem de estudantes (20%), comparativamente com o 12.º ano do ensino regular (10,9%). No terceiro ciclo do ensino básico regular tem-se verificado uma distribuição homogénea dos alunos pelos três anos de escolaridade.

No que respeita à situação socioeconómica das famílias, as últimas estatísticas indicam que 70% dos alunos vive com os pais. Nos casos em que os Pais estão separados, são maioritariamente as mães a assumirem o enquadramento familiar dos filhos. Cerca de 66% dos Pais concluíram pelo menos o terceiro ciclo, estando os restantes classificados com níveis de habilitação académica superiores.

### 3.2. Caracterização da turma

O estudo envolve uma turma do 8.º ano, constituída inicialmente por 26 alunos, dos quais 11 são raparigas e 15 são rapazes. Ao longo do primeiro e do segundo período deixaram de fazer parte da turma cinco alunos, tendo a turma ficado reduzida a 9 raparigas e 12 rapazes no terceiro período.

Relativamente à idade dos alunos, no início do ano letivo estavam compreendidas entre os 12 e os 17 anos (ver figura 3.1).

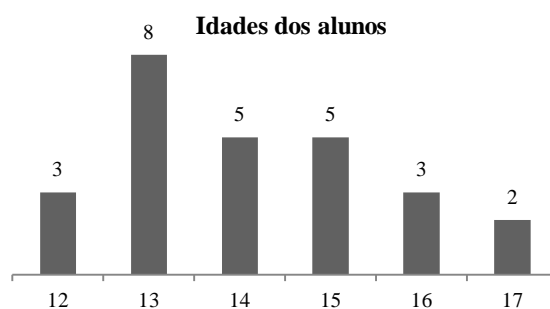


Figura 3.1 – Gráfico com as idades dos alunos

Adorada por uns, detestada por outros, a Matemática é talvez a disciplina que mais controvérsia gera junto dos alunos. Questionados sobre a disciplina preferida, cerca de dez alunos escolheram a Matemática, que curiosamente contou com o mesmo número de votos da Educação Física. Neste aspeto, as duas disciplinas destacaram-se das restantes. Quando questionados sobre as disciplinas onde sentiam maiores dificuldades, a Matemática foi treze vezes selecionada, voltando a destacar-se das restantes, desta vez por uma margem maior.

Na sua globalidade, a turma é constituída por alunos com muitas dificuldades em Matemática. No final do primeiro período a turma apresentava um aproveitamento considerado pouco satisfatório, tendo-se registando mais de 50% de níveis negativos. Apesar das dificuldades, a turma mostrou no segundo período um interesse crescente pela disciplina, o que permitiu recuperar alguns níveis negativos.

Importa referir que os alunos que deixaram a turma no decorrer do primeiro e do segundo período apresentavam níveis negativos na disciplina, no entanto, os dados relativos a estes alunos não se encontram refletidos no gráfico seguinte (ver figura 3.2), por não lhes ter sido atribuída nota no final do período.

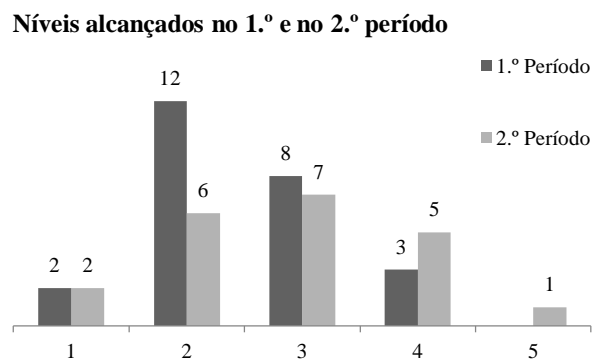


Figura 3.2 – Gráfico com as notas dos alunos no 1.º e 2.º período

De seguida identificam-se alguns fatores que poderão ter contribuído para o insucesso da disciplina nos dois primeiros períodos:

- O elevado número de novos alunos que integraram a turma no início do ano letivo. No total entraram onze alunos, dos quais seis são repetentes e cinco vieram de outras escolas;

- Lacunas graves ao nível dos conhecimentos prévios e pouco desenvolvimento das capacidades transversais. Este fato é mais notório nos alunos novos;
- Falta de métodos de estudo, pouca capacidade de concentração e faltas de material. Muitos alunos não têm o hábito de fazer os trabalhos de casa, e necessitam de um acompanhamento constante nas aulas de forma a cumprirem as tarefas propostas;
- Dificuldades na compreensão e na expressão da língua Portuguesa. Quatro alunos frequentam a disciplina de Português Língua não Materna e, para além destes, foram identificados outros dois com dificuldades que justificariam a sua frequência nessa disciplina.

O comportamento dos alunos no primeiro período foi satisfatório, à exceção de dois ou três casos em que foi necessário aplicar processos disciplinares. Esta tendência no comportamento manteve-se no segundo período, apesar de se ter registado uma ligeira melhoria pelo facto dos alunos com comportamento mais irregular terem deixado de fazer parte da turma.

### **3.3. Planificação**

#### **3.3.1. Enquadramento no programa**

A unidade didática que serve de base a meu estudo está inserida no subtópico Funções Linear e Afim, no tópico Funções e no tema Álgebra. No que respeita aos objetivos gerais de aprendizagem que constam do programa de Matemática, foram seleccionados os seguintes:

- Serem capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;
- Serem capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.

Relativamente aos objetivos específicos, contemplei os seguintes:

- Relacionar a função linear com a proporcionalidade direta;
- Representar graficamente e algebricamente as funções linear e afim;
- Relacionar as funções linear e afim;
- Estudar o efeito da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  na representação gráfica de funções definidas por  $y = ax + b$ , sendo  $a$  e  $b$  números reais.

O plano global de lecionação para esta unidade com a distribuição dos objetivos propostos e tarefas realizadas ao longo das aulas lecionadas pode ser consultado na página seguinte:

## Plano global da unidade

<b>Tópico:</b> Funções		
<b>Subtópico:</b> Funções linear e afim		
<b>Objetivos gerais de aprendizagem</b>		
<p>- Ser capaz de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;</p> <p>- Ser capaz de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.</p>		
Calendarização	Objetivos Específicos	Tarefas
<p>22/02 (45 minutos)</p> <p style="text-align: center;">e</p> <p>26/02 (90 minutos)</p>	<p>- Relembrar que situações de proporcionalidade direta podem ser modeladas por funções, ditas funções de proporcionalidade direta;</p> <p>- Estabelecer a relação entre a função de proporcionalidade direta e a função linear do tipo <math>y = ax</math>;</p> <p>- Representar algebricamente e graficamente funções lineares;</p> <p>- Relacionar a representação gráfica deste tipo de função e compreender o efeito da variação do parâmetro <math>a</math>.</p>	O preço das gomas.
<p>28/02 (90 minutos)</p> <p style="text-align: center;">e</p> <p>1/03 (45 minutos)</p>	<p>- Introduzir a função afim;</p> <p>- Estabelecer a relação entre a função linear e a função afim;</p> <p>- Representar algebricamente e graficamente as funções;</p>	Um embrulho especial.
<p>5/03 (90 minutos)</p>	<p>- Representar graficamente a função afim;</p> <p>- Relacionar a representação algébrica e gráfica de funções afins;</p> <p>- Compreender o efeito da variação dos parâmetros <math>a</math> e <math>b</math> na representação gráfica de funções do tipo <math>y = ax + b</math>.</p>	O fabrico de gomas.
<p>7/03 (90 minutos)</p>	<p>Resolução de exercícios práticos, retirados do manual, com o objetivo de consolidar conceitos adquiridos em aulas anteriores e aprofundar o contacto com a terminologia e simbologia associada ao tópico.</p>	Exercícios de consolidação (4 pág.118; 10 pág.121; 7 pág.131)
<p>8/03 (45 minutos)</p>	Ficha de avaliação.	
<p>12/03 (90 minutos)</p>	<p>- Compreender o efeito da variação dos parâmetros <math>a</math> e <math>b</math> na representação gráfica de funções do tipo <math>y = ax</math> e <math>y = ax + b</math>.</p>	Funções no GeoGebra. (Laboratório)

Em conformidade com a planificação anual da escola, a lecionação do tópico funções teve lugar no segundo período do ano letivo. Relativamente à minha intervenção, o período de lecionação, que tinha previsto uma duração de 13 tempos de 45 minutos cada, ocorreu entre 22 de Fevereiro e 12 Março. O plano delineado foi cumprido em termos de datas e aulas previstas, não se tendo registado qualquer contratempo que o tivesse impedido ou atrasado. A planificação teve em conta três aspetos principais: (i) as características dos alunos; (ii) as orientações do programa de Matemática; e (iii) as questões e objetivos do estudo.

### **3.3.2. Abordagem de ensino e formas de trabalho**

Os alunos precisam de oportunidades para raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva dessas tarefas (NCTM, 2007). Isso pode exigir do professor uma abordagem exploratória do ensino, centrada no trabalho dos alunos quando se envolvem na exploração matemática de tarefas (Ponte, 2005). Uma das características principais deste tipo de ensino, é que “o professor não procura explicar tudo mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem. A ênfase desloca-se da atividade ensino para a atividade mais complexa ensino-aprendizagem” (Ponte, 2005).

A abordagem de ensino que proponho tem um cunho predominantemente exploratório, com recurso a tarefas de base intuitiva e contexto real, incluindo questões abertas e com carácter problemático. Foi prevista a realização de alguns exercícios, com o objetivo de levar os alunos a consolidarem conceitos e adquirirem maior à-vontade com a terminologia e simbologia utilizada.

Os alunos estão organizados na sala dois a dois e o trabalho a pares tem sido habitual nesta turma. Pelo tipo de abordagem de ensino, pela natureza das tarefas e pelas características da unidade, acredito que o trabalho em grupo é uma boa forma de promover a comunicação, proporcionar momentos de cooperação e partilha de ideias e estratégias, permitindo assim uma exploração mais rica das tarefas propostas. Assim, na maioria das tarefas, optei pela formação de grupos com quatro a cinco

alunos, que se mantiveram ao longo da minha intervenção. Os alunos apenas trabalharam a pares no dia 7 de Março, na resolução de exercícios de consolidação na aula, e no dia 12 de Março, na realização da tarefa no GeoGebra.

### **3.3.3. Materiais e recursos**

Além dos materiais habitualmente utilizados pelos alunos, houve o cuidado de garantir que todos tivessem acesso a instrumentos de medição, de forma a poderem graduar adequadamente os eixos do referencial cartesiano durante o processo de representação gráfica. Além disto, pedi aos alunos que utilizassem cores diferentes na representação de gráficos no mesmo referencial, para que estes se pudessem distinguir e visualizar melhor.

Ao longo da minha intervenção foram utilizados slides de apoio (ver anexos), criados com base nas características e nas especificidades de cada aula. Estes slides continham, por exemplo, enunciados e resoluções de tarefas e definições retiradas do manual que interessassem ser lidas ou anotadas pelos alunos.

Relativamente a recursos tecnológicos e tendo em conta que vivemos numa sociedade em que a tecnologia assume um papel cada vez mais importante, e isso tem vindo a refletir-se na escola que “vem incorporando estas tecnologias tanto na sua atividade geral como nas áreas curriculares e, em particular, na disciplina de Matemática” Ribeiro e Ponte (2000), não quis deixar de considerar a sua utilização na lecionação desta unidade. O GeoGebra permite trabalhar com múltiplas representações e visualizar em simultâneo a representação gráfica e a representação algébrica de uma função, e observar o que acontece ao gráfico sempre que se altera um parâmetro na respetiva expressão analítica. A utilização deste programa na realização de atividades de investigação e exploração, pode criar um ambiente propício ao desenvolvimento da capacidade crítica e da comunicação matemática dos alunos, sendo por isso uma mais-valia para o processo de aprendizagem. Assim, decidi utilizar este programa na aula de dia 12 de Março, na realização da tarefa “funções no GeoGebra”.

### **3.3.4. Estrutura das aulas**

De acordo com a prática usual no ensino com recurso a tarefas de exploração, a estrutura das aulas contempla três ou quatro momentos distintos: (i) apresentação da tarefa; (ii) trabalho autónomo; (iii) discussão; e (iv) sistematização das aprendizagens (quando aplicável).

A apresentação da tarefa é o momento para clarificar eventuais dúvidas que possam surgir e apelar ao desafio, fazendo com que os alunos se apropriem da tarefa com entusiasmo e curiosidade. É também o momento de organização do trabalho pela turma, definição dos tempos, indicação dos recursos e dos modos de trabalho. Durante o trabalho autónomo, a função do professor passa sobretudo por monitorizar o trabalho dos alunos, promovendo a sua participação e envolvimento através do questionamento individual ou coletivo, do feedback e do desafio à refinação de argumentos e raciocínios, com o cuidado de não reduzir o nível de exigência cognitiva da tarefa. É também o momento de seleção e sequenciação das resoluções a serem apresentadas e discutidas coletivamente, sendo por isso importante garantir registos adequados. Na discussão é importante definir regras que regulem a interação entre alunos de forma a promover um ambiente propício e facilitador de aprendizagens, por exemplo, garantindo que todos os alunos se envolvem na discussão e que as suas intervenções se façam de forma equilibrada. A comparação e o confronto de várias resoluções através de uma comunicação matemática adequada deverão propiciar a clarificação das estratégias e dos raciocínios seguidos, e contribuir para a compreensão de conceitos, processos e procedimentos matemáticos. A sistematização das aprendizagens é uma altura de balanço, consolidação, estabelecimento de conexões e integração com conhecimentos prévios. Nesta fase o professor deverá acolher a diversidade de produções dos alunos e refleti-las de forma transversal e crítica.

### **3.3.5. Tarefas**

Nas tarefas que proponho, e atendendo às características da turma, optei por graus de desafio médio e de estrutura relativamente aberta. Assim, as tarefas oscilam

entre problemas e explorações, em contextos reais do cotidiano e puramente matemáticos, tendo havido a necessidade de realizar alguns exercícios (Ponte, 2005).

A maioria das tarefas foram criadas de raiz, permitiram percorrer gradualmente os objetivos da unidade de ensino e tiveram em comum o mesmo contexto de semi-realidade. Quando comecei a pensar na planificação da unidade, achei boa ideia associar o assunto matemático a algo que fizesse parte do cotidiano dos alunos e que para eles fosse agradável. Surgiram algumas opções que acabei por descartar, até que surgiu a ideia de trabalhar com gomas. Ao compramos gomas numa determinada loja, podemos supor que o preço a pagar varia em função do peso, assim, ficou definido que a variável independente seria o peso e a variável dependente o preço a pagar. Importa ainda referir que o peso é uma variável contínua, o que permite explorar pesos não inteiros. Neste cenário, considerei diferentes gomas, cada uma com um preço diferente. Foi assim que surgiram, pela primeira vez, as “amoras”, as “misturas de frutos” e as “coca-colas” na tarefa “o preço das gomas”.

Concluída a primeira tarefa, foi altura de começar a pensar na ponte entre a função linear e a função afim, e surgiu a ideia de introduzir um embrulho especial de oferta. Neste caso, se o cliente quiser fazer uma oferta, para além do preço a pagar pelas gomas terá de suportar um custo adicional relativo ao embrulho feito na loja. Este custo adicional permite introduzir de forma intuitiva o parâmetro  $b$  da função afim, cujo estudo teve início na tarefa “um embrulho especial”.

O último desafio em termos de criação de tarefas, surgiu da necessidade de se estudar os efeitos da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  da expressão analítica no gráfico da função. Era importante trabalhar no mesmo contexto, e encontrar variáveis que assumissem valores negativos, sem perder a coerência e a lógica em termos de realidade. Assim, surgiu a ideia de modelar testes laboratoriais utilizados no controlo do fabrico de gomas, dando origem à tarefa “o fabrico de gomas”.

### **Tarefa “O preço das gomas”**

Esta foi a primeira tarefa a ser apresentada aos alunos, e por isso era importante que captasse desde logo o seu interesse, por isso, decidi não fazer qualquer introdução à tarefa de forma a criar alguma expectativa e curiosidade. A tarefa inclui três funções lineares, que modelam o preço a pagar pelas “amoras”,

pelas “coca-colas” e pelas “misturas de frutos”, e foi pensada para um conjunto de três tempos de 45 minutos cada (anexo 1.1.).

Na aula de dia 22 de Fevereiro (45 minutos), estava planeado explorar a relação entre o peso e o preço a pagar pelas gomas, bem como a revisão de alguns conceitos estudados no ano anterior, como por exemplo, o conceito de função e o de proporcionalidade direta. Na alínea 1.1 é pedido aos alunos para preencherem uma tabela, onde se relacionam o preço a pagar e o peso. No caso dos pesos 11 e 13 hectogramas, era expectável que os alunos utilizassem estratégias diferenciadas, por exemplo: (i) fossem adicionando o custo de um hectograma a cada preço a pagar, obtendo assim o preço seguinte; (ii) multiplicassem o peso pelo preço a pagar por um hectograma; ou (iii) calculassem o preço a pagar através de uma regra de três simples. Na alínea 1.2 é proposta uma situação problemática, na qual os alunos têm de pensar em possibilidades, relativamente aos diferentes tipos de gomas que podem comprar com um determinado valor em dinheiro. É uma oportunidade para explorar a classificação de variáveis e mostrar que a variável peso, sendo contínua, pode assumir valores inteiros e não inteiros.

Na aula de dia 26 de Fevereiro (90 minutos), estava planeado rever o significado de constante de proporcionalidade e estabelecer a ponte entre a função de proporcionalidade direta e a função linear (alíneas 1.3 e 1.4). Na alínea 1.5 são pedidas as expressões analíticas das funções, e na alínea 1.6 a sua representação gráfica. Para determinar as coordenadas dos pontos, previu-se que os alunos pudessem utilizar, ou os valores da tabela construída na alínea 1.1, ou a expressão analítica, tendo ficado ao critério deles optar pelo que considerassem ser a melhor estratégia. Por fim, na alínea 1.7, é pedido aos alunos que expliquem o efeito que a variação do parâmetro  $a$  da expressão analítica provoca no gráfico das funções. Nesta alínea, esperava-se que os alunos compreendessem, por exemplo, que a variação do parâmetro  $a$  implica a variação no declive das retas.

Relativamente aos objetivos específicos do programa, esta tarefa permitiu tratar os seguintes:

- Relembrar que situações de proporcionalidade direta podem ser modeladas por funções, ditas funções de proporcionalidade direta;
- Estabelecer a relação entre a função de proporcionalidade direta e a função linear do tipo  $y = ax$ ;

- Representar algebricamente e graficamente funções lineares;
- Relacionar a representação gráfica deste tipo de função e compreender o efeito da variação do parâmetro  $a$ .

### **Tarefa “Um embrulho especial”**

Esta tarefa foi proposta na aula de 28 de Fevereiro (90 minutos), e tinha como objetivo estabelecer a ponte entre a função linear e a função afim, através da introdução de um custo fixo ao preço a pagar (anexo 1.2.). Este custo advém da possibilidade da loja poder fazer um embrulho especial de oferta, permitindo assim, de uma forma natural e intuitiva, introduzir o parâmetro  $b$  da expressão. Nesta tarefa, os alunos tomaram contacto com a representação tabular, gráfica e analítica da função afim, e analisaram a relação entre as funções linear e afim.

Na alínea 1.1 é pedido aos alunos para preencherem os campos da tabela relativos à função linear (preço a pagar sem embrulho) e à função afim (preço a pagar com embrulho). Esperava-se que compreendessem que um custo fixo adicional tem influência na expressão analítica, porque uma é do tipo  $f(x) = ax$  e a outra é do tipo  $f(x) = ax +$  ”qualquer coisa”. A alínea 1.2 tem como objetivo a formalização das expressões analíticas através da terminologia  $y = ax + b$  ou  $f(x) = ax + b$ . Na alínea 1.3 pede-se aos alunos para determinarem uma imagem dado um determinado objeto e para interpretarem a sua correspondência. É uma boa altura para rever o conceito de função e as noções de objeto e imagem. Na alínea 1.4 é pedida a representação gráfica das funções. À semelhança da tarefa anterior, previu-se que os alunos pudessem recorrer a valores da tabela determinada na alínea 1.1 ou à expressão analítica, para determinarem as coordenadas de pontos. Na alínea 1.5 esperava-se que os alunos compreendessem que uma função linear é uma reta que passa na origem do referencial, e que a função afim não passa na origem devido à existência do parâmetro  $b$ . Por último, na alínea 1.6, são pedidas as coordenadas dos pontos de interseção das retas com o eixo das ordenadas. Para isso, foi necessário que os alunos identificassem o ponto onde o gráfico da função interseta esse eixo e compreendessem que o ponto de interseção obtém-se quando a abcissa é zero.

Relativamente aos objetivos específicos do programa, esta tarefa permitiu tratar os seguintes:

- Introduzir a função afim;

- Estabelecer a relação entre as funções linear e afim;
- Representar algebricamente e graficamente as funções linear e afim;

### **Tarefa “O fabrico de gomas”**

Nesta tarefa, proposta na aula de dia 5 de Março, são apresentadas três funções afins com o objetivo de modelar testes laboratoriais para controlar a qualidade do processo de fabrico de gomas (anexo 1.3.). Com esta tarefa, esperava-se que os alunos representassem graficamente funções afins e analisassem a alteração provocada pela variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  da expressão analítica.

Na alínea 1.1 são fornecidos os gráficos de duas funções, e é pedida a representação gráfica de uma terceira função cuja expressão analítica é dada. Ao contrário das tarefas anteriores, nesta, os alunos não dispõem de uma tabela com os valores das variáveis, assim, é importante que eles compreendam que a função está definida para valores de  $x$  entre 0 e 60 (minutos). Na alínea 1.2 esperava-se que os alunos compreendessem, por exemplo, que os gráficos das funções são retas paralelas e que isso se deve ao fato do declive ser o mesmo. Na alínea 1.3 esperava-se que os alunos identificassem o parâmetro  $b$  em cada uma das funções, e compreendessem que o  $b$  é a ordenada na origem, ou seja, a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas. Na alínea 1.4 pedia-se aos alunos que identificassem a variável independente e a variável dependente, e na alínea 1.5 que calculassem e interpretassem o significado da expressão  $t(1)$ , em que  $t(x)$  representa a função que a cada minuto  $x$  faz corresponder uma única temperatura  $y$ .

Relativamente aos objetivos específicos do programa, esta tarefa permitiu tratar os seguintes:

- Representar graficamente a função afim;
- Relacionar a representação algébrica e a representação gráfica de funções afins;
- Compreender o efeito da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  na representação gráfica de funções do tipo  $y = ax + b$ .

### **Tarefa “Exercícios de consolidação”**

Esta tarefa foi proposta na aula de dia 7 de Março, a aula anterior à ficha de avaliação, dedicada à resolução de exercícios do manual com o objetivo de consolidar conceitos adquiridos em aulas anteriores e aprofundar o contacto com a terminologia e simbologia utilizadas (anexo 1.4.). A realização deste conjunto de exercícios, formulados num contexto puramente matemático, revelou-se fundamental por permitir complementar, a vários níveis, as tarefas até aqui realizadas.

### **Tarefa “Funções no GeoGebra”**

Esta tarefa é uma adaptação de uma investigação realizada no âmbito do projeto “Matemática para todos - Investigações na sala de aula”, e foi pensada para servir como uma extensão da tarefa “o fabrico de gomas”. O objetivo é que, no GeoGebra e em contexto puramente matemático, os alunos representassem diversas funções, lineares e afins, e realizassem uma pequena investigação sobre as alterações provocadas pela variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  (anexo 1.5.).

Nas questões 1 e 2 esperava-se que os alunos compreendessem que a variação do parâmetro  $a$  influencia o declive das retas. Um valor de  $a$  igual a zero significa que o declive é nulo. Esperava-se ainda que os alunos compreendessem a relação entre o sinal de  $a$  e a monotonia da função, e para isso podemos considerar três situações distintas: (i) se  $a > 0$  o declive é positivo e a função é crescente; (ii) se  $a = 0$  o declive é nulo e a função é constante; e (iii) se  $a < 0$  o declive é negativo e a função é decrescente. Na questão 3 esperava-se que os alunos compreendessem que sendo o parâmetro  $b$  a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas, à medida que o valor de  $b$  aumenta a ordenada na origem aumenta e vice-versa. Assim, podemos considerar três situações distintas: (i) se  $b > 0$  o gráfico da função corta o eixo das ordenadas acima da origem; (ii) se  $b = 0$  o gráfico da função corta o eixo das ordenadas na origem; e (iii) se  $b < 0$  o gráfico da função corta o eixo das ordenadas abaixo da origem. Na questão 4 esperava-se que os alunos compreendessem que a função constante tem declive nulo.

Relativamente aos objetivos específicos do programa, esta tarefa permitiu tratar o seguinte:

- Compreender o efeito da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  na representação gráfica de funções do tipo  $y = ax$  e  $y = ax + b$ .

### 3.4. As aulas

Foi com grande expectativa e entusiasmo que iniciei a lecionação desta unidade didática, tendo sempre a preocupação de não fugir muito às orientações curriculares e pedagógicas que a professora titular tinha vindo a imprimir desde o início do ano. Assim, o trabalho desenvolvido na sala de aula ao longo da minha intervenção não contrastou muito com o que os alunos estavam habituados.

#### **Primeira aula - 22 de Fevereiro (45 minutos)**

A aula teve início com a instalação dos gravadores que permitiram recolher dados para o estudo, e com a apresentação de uma nova planta da sala de aula que resultou numa reorganização dos grupos. Sendo esta primeira aula dedicada ao subtópico funções linear e afim, teve como principais objetivos rever grandezas diretamente proporcionais, o significado de proporcionalidade direta e de constante de proporcionalidade, e formas de representar situações de proporcionalidade com ênfase na representação tabelar.

No início da aula projetei o sumário no quadro, distribuí os enunciados da tarefa “o preço das gomas” e li-a em voz alta. Mais tarde, durante o processo de reflexão pós aula, percebi que talvez tivesse sido melhor pedir a um aluno para realizar esta leitura. Nesta fase, informei os alunos de que dispunham de aproximadamente 15 minutos para resolverem as alíneas 1.1 e 1.2 e aproveitei para explicar os seguintes procedimentos a utilizar na realização das tarefas: (i) os enunciados têm espaços reservados para as resoluções; (ii) os enunciados são recolhidos no final de cada aula e devolvidos na aula seguinte; (iii) a resolução deve ser feita a caneta e corrigida a lápis para que o professor possa distinguir o que foi feito pelo aluno e o que foi passado do quadro; e (iv) perante erros na resolução fazer apenas um traço por cima para que o professor compreenda melhor as dificuldades.

Os alunos trabalharam de forma empenhada na tarefa e conseguiram resolver a alínea 1.1 sem dificuldades, no entanto, muitos não conseguiram chegar à alínea 1.2 por falta de tempo. Penso que na segunda alínea, não foi boa uma ideia sugerir aos alunos que utilizassem uma tabela previamente formatada para organizar os

dados (tabela esta que projetei no quadro), porque alguns perderam demasiado tempo a tentar reproduzi-la na folha de papel.

Registaram-se algumas dificuldades que importa referir, como o caso de um aluno que na alínea 1.1 não estava a conseguir, por exemplo, determinar o dobro de 0,75€. Por limitações de tempo não me foi possível aprofundar a questão, mas reconheço que podia ter sido interessante explorar estratégias que permitissem resolver esta dúvida. Na alínea 1.2, e como esperava, alguns alunos sentiram dificuldades em encontrar um terceiro exemplo porque não reconheceram imediatamente uma variável contínua e limitaram-se a escolher valores inteiros para o peso.

Cheguei ao final da aula com a convicção de que tinha conseguido impor ritmo à aula. O discurso foi claro, e o fato de eu ter feito referência a coisas que deixei em suspenso para retomar mais tarde foi positivo. Relativamente ao contexto utilizado, o fato de se ter recorrido a uma situação relacionada com o quotidiano dos alunos, parece ter contribuído para aumentar o seu interesse na realização da tarefa.

### **Segunda aula - 26 de Fevereiro (90 minutos)**

Enquanto os alunos passavam o sumário questionei-os sobre o trabalho de casa. Infelizmente, e apesar da preocupação dos professores em alterar os hábitos de trabalho nesta turma, só dez alunos entregaram o trabalho de casa. De seguida distribuí os enunciados da tarefa “o preço das gomas”, e informei-os que iríamos resolver em conjunto partes das alíneas 1.3 (cálculo da constante de proporcionalidade), 1.5 (determinação da expressão analítica) e 1.6 (representação gráfica das funções).

Nas alíneas 1.3 e 1.4 comecei por questionar os alunos sobre a expressão  $\frac{\text{Preço a Pagar}}{\text{Peso}}$ . Previ que eles perguntassem, se bastaria calcular a constante para um determinado peso e preço a pagar, ou se seria necessário calcular para todos. Quando isto aconteceu foram convidados a testar diferentes casos, de forma a confirmar que o valor da constante se mantém igual. Esperava-se que os alunos compreendessem que, no contexto do problema, a constante de proporcionalidade representa o preço de um hectograma de amoras porque ao dividir o preço a pagar por um determinado número de hectogramas obtém-se o preço a pagar por um hectograma. Portanto, a

relação entre o preço a pagar e o peso é de proporcionalidade direta, se existir uma constante de proporcionalidade  $a$  determinada pelo quociente entre o preço a pagar e o peso.

Na alínea 1.5 pedia-se a expressão analítica da função  $f$ , que a cada peso de amoras  $x$  (hectogramas) faz corresponder um preço a pagar  $y$  (euros). Expliquei que através da tabela é possível ir construindo gradualmente a expressão analítica se compreendermos que  $1,5 = 1,5 \times 1$ ;  $3 = 1,5 \times 2$ ;  $4,5 = 1,5 \times 3$ ; ...;  $y = 1,5 \times X$ . Ao mesmo tempo que o fiz, introduzi a notação  $f(x) = 1,5x$ , porque considero importante que os alunos contactem com a terminologia desde o início do estudo das funções e que aos poucos comecem a utilizar um raciocínio indutivo. A minha preocupação na representação gráfica das funções foi que os alunos fossem capazes de determinar coordenadas de pontos, compreendendo que o poderiam fazer a partir da expressão analítica ou da tabela construída na alínea 1.1. Nesta alínea procurei que os alunos fizessem a representação gráfica o mais corretamente possível, e para isso fui formulando questões tais como: “vê lá se escolheste bem a unidade na graduação dos eixos”, ou “verifica se as coordenadas dos pontos estão bem determinadas”.

Na alínea 1.7 pedia-se aos alunos que retirassem conclusões sobre o efeito que a variação do parâmetro  $a$  da expressão analítica provoca no gráfico da função. Trata-se de uma pergunta mais aberta, pelo que senti necessidade de fornecer algumas pistas que ajudassem os alunos a progredir.

Depois de trinta minutos dedicados à realização da tarefa seguiu-se o momento de discussão que durou aproximadamente outros trinta minutos, e que não ficou concluído nesta aula. A discussão serviu para analisar e comparar as soluções e sintetizar as ideias mais importantes abordadas neste conjunto de aulas, como por exemplo: (i) uma função de proporcionalidade é uma função linear; (ii) dá-se o nome de função linear a toda a função cuja expressão analítica é do tipo  $y = ax$ ; (iii) o gráfico de uma função linear é uma reta que passa na origem do referencial cartesiano; e (iv) o parâmetro  $a$  é o declive da reta.

Na representação gráfica das funções deixei ao critério dos alunos a graduação dos eixos. Apesar de terem surgido escalas diferenciadas, alguns revelaram dificuldades na representação da função relativa às “coca-colas”, devido ao facto de determinados valores da variável dependente não resultarem inteiros.

Na situação de proporcionalidade, no caso das “amoras”, alguns alunos afirmaram que iam somando sempre 1,5€. Este raciocínio mostra que eles ainda estão demasiadamente “colados” ao pensamento aditivo, quando a ideia é que comecem a utilizar o pensamento multiplicativo.

Na representação gráfica apercebi-me que alguns alunos estão convencidos que as linhas a tracejado, feitas no referencial, fazem parte do gráfico da função. Assim, reforcei o facto de estas linhas servirem apenas como auxiliar à marcação de pontos no referencial cartesiano.

Na reflexão pós-aula surgiram aspetos interessantes que importa deixar referidos. Em determinado momento da aula, relativamente ao conceito de proporcionalidade, eu afirmei que “quando mais peso se compra mais se paga”. A afirmação está incorreta, porque é possível encontrar situações deste tipo que não são funções de proporcionalidade direta, por exemplo, a função exponencial. Outro dos aspetos que emergiu na reflexão pós-aula está relacionado com a forma como construí os referenciais cartesianos que incluí nos enunciados das tarefas propostas, onde optei por “desenhar” apenas o primeiro quadrante. Penso que poderia ter prolongado mais os eixos, permitindo assim que os alunos visualizassem os outros três quadrantes do referencial.

### **Terceira aula - 28 de Fevereiro (90 minutos)**

A primeira parte da aula foi dedicada à conclusão da tarefa “o preço das gomas”, iniciada na aula anterior. Na segunda parte da aula os alunos realizaram a tarefa “um embrulho especial”, que vem no encadeamento da tarefa anterior e tem como objetivo introduzir a função afim. Os alunos trabalharam de forma interessada até final da aula e nos casos em que não foi possível concluir a tarefa sugeri que a terminassem em casa.

### **Quarta aula - 1 de Março (45 minutos)**

Esta aula começou com a discussão da tarefa “um embrulho especial”, realizada na segunda metade da aula anterior. Na alínea 1.1 pedi a um aluno para ir ao quadro preencher a tabela no caso em que existe um embrulho de oferta (função afim). Na generalidade, os alunos compreenderam que o custo adicional relativo ao

embrulho de oferta influencia a expressão analítica da função, ou seja,  $f(x) = ax +$  "qualquer coisa". A tabela foi fundamental para se alcançar esta compreensão, por facilitar a visualização dos dois tipos de função em simultâneo (linear e afim). Na primeira linha surge o preço a pagar por  $x$  hectogramas de amoras e na segunda linha os alunos têm apenas que adicionar ao preço a pagar o preço do embrulho.

A alínea 1.2 foi uma boa oportunidade para rever notação, nomeadamente a utilização do  $y$  e do  $f(x)$ . Uma das alunas com mais dificuldades adotou a determinada altura a frase "expressão analítica", revelando uma evolução positiva no uso da terminologia.

Na alínea 1.3, a compreensão por parte dos alunos do significado de  $j$  (10) não foi imediata. Alguns revelaram dificuldades na identificação das variáveis do problema e na compreensão do conceito de função como correspondência entre o preço a pagar e o peso. Alguns não distinguiram imediatamente a diferença entre as funções  $i$  e  $j$ , em que  $i$  corresponde à situação em que não é feito o embrulho e  $j$  corresponde à situação em que é feito o embrulho. Durante a discussão desta alínea aproveitei para colocar algumas questões extra, como por exemplo, pedir aos alunos para determinarem  $x$  tal que  $f(x) = 16$ .

Nas alíneas 1.4 e 1.5 projetei a representação gráfica das funções feita por mim, e perguntei aos alunos quem tinha feito de forma diferente. Registei com curiosidade um comentário feito por um aluno ao afirmar "eu sabia que esta reta não passava na origem". Quando perguntei qual era a função linear, porque é que o gráfico da função tem início no ponto  $(0,0)$  e porque está limitado ao primeiro quadrante do referencial, um dos alunos respondeu imediatamente "porque não tem números negativos". Foi um momento interessante, porque permitiu reforçar que, apesar de a função estar definida apenas para valores positivos, existem funções definidas para outros valores cujos gráficos não se limitam ao primeiro quadrante. A maioria dos alunos compreendeu a diferença gráfica entre a função linear e a função afim, ou seja, uma é uma reta que passa na origem (linear) e a outra é uma reta que não passa na origem por causa do parâmetro  $b$  (ordenada na origem). Esta diferença também foi interpretada a partir da expressão analítica da função: (i) uma função linear do tipo  $y = ax$  passa pela origem do referencial; e (ii) uma função afim do tipo  $y = ax + b$  não passa pela origem do referencial.

Antes de terminar a aula propus um exemplo aos alunos com o objetivo de prepará-los para a tarefa de dia 5 de Março "o fabrico de gomas". Ao contrário das

tarefas anteriores, nesta não é fornecido aos alunos qualquer tabela, portanto, para representarem a função graficamente têm de determinar coordenadas de pontos através da expressão analítica.

### Quinta aula - 5 de Março (90 minutos)

Nesta aula foi proposto aos alunos a resolução da tarefa “o fabrico de gomas”. Por se tratar de uma tarefa exploratória, eu sabia que a gestão de determinados momentos da aula poderia criar-me dificuldades acrescidas. Apesar da minha preocupação na aula anterior em mostrar aos alunos como poderiam obter coordenadas através da expressão analítica, eles revelaram dificuldades e gastaram demasiado tempo na alínea 1.1. Este atraso acabou por condicionar o trabalho porque a maioria dos grupos não conseguiu chegar à última questão da tarefa. Perante a possibilidade de continuar a fase de trabalho autónomo ou iniciar a discussão da tarefa no tempo previsto, optei pela segunda opção. Acredito que neste caso, seria mais produtivo sintonizar os alunos na discussão, do que insistir num apoio individual e no prolongamento do trabalho autónomo.

A alínea 1.2 é dedicada ao estudo do parâmetro  $a$ , e, nesta alínea, procurei conhecer o significado que os alunos atribuem ao conceito de inclinação.

Outro aspeto que me apercebi durante o decorrer da aula está relacionado com o facto de, no enunciado da tarefa, surgir escrito o valor 1 no eixo das abcissas (ver figura 3.3). Quando questionei os alunos relativamente ao que há de comum nos gráficos das funções, um deles respondeu que “todos passam por 1”. Apesar de não ser a resposta que estava à espera, não posso ignorar que a minha opção de incluir o valor 1 no referencial fornecido no enunciado poderá ter influenciado os alunos nas suas respostas.

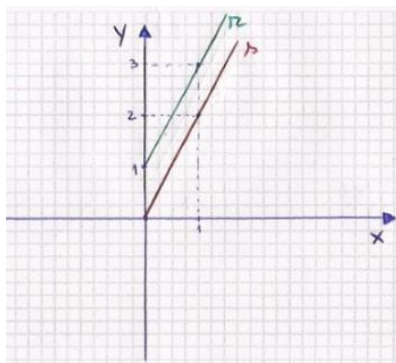


Figura 3.3 – Enunciado da alínea 1.1

Na reflexão pós-aula surgiram aspetos interessantes que interessa referir. Na alínea 1.2, ao perguntar o que há de comum nos gráficos das funções, pretendia-se que os alunos retirassem conclusões sobre o declive das retas. Perante a dificuldade em conseguir que lá chegassem, lembrei-me de complementar a pergunta com outro exemplo, em que considere expressões analíticas com diferentes valores de  $a$  e tracei um esboço das retas no referencial. Não o devia ter feito, porque introduziu ruído desnecessário na discussão.

Por se tratar de uma aula com características exploratórias, os registos escritos no quadro são fundamentais por serem uma síntese do trabalho realizado. Acredito que a organização e a seleção que fiz desses registos poderiam ter sido mais assertivas. Por exemplo, na discussão da alínea 1.2 procurei fazer uma espécie de brainstorming que resultou bem. Fui escrevendo com letras grandes algumas ideias que iam surgindo, como por exemplo a ideia de declive e de retas paralelas, mas não concluí com um registo no quadro devidamente completo e organizado.

### **Sexta aula - 7 de Março (90 minutos)**

Ao contrário das aulas anteriores, onde se realizaram tarefas formuladas em contexto real, nesta foi dado ênfase à resolução de exercícios em contexto matemático com o objetivo de consolidar conceitos abordados em aulas anteriores e aprofundar o contacto e a prática com a simbologia, terminologia e notação. Esta foi a última aula antes da ficha de avaliação, e por calhar a uma quinta-feira os alunos estavam irrequietos devido ao aproximar da hora de almoço. Dos três exercícios previstos do manual foram realizados dois.

Penso que ter dedicado uma única aula a preparar a ficha de avaliação foi insuficiente, tendo em conta as dificuldades destes alunos. Alguns ficaram demasiado “presos” às tarefas que realizaram, e isso revelou-se, por exemplo, quando na construção do referencial cartesiano consideravam apenas o primeiro quadrante, ou quando consideravam apenas valores positivos para a variável independente, possivelmente influenciados pelas variáveis utilizadas em tarefas anteriores.

### **Sétima aula - 8 de Março (45 minutos)**

Esta aula foi dedicada à resolução de uma ficha de avaliação sobre a unidade didática.

### **Oitava aula - 12 de Março (90 minutos)**

Nesta aula foi proposto aos alunos a resolução da tarefa “funções no GeoGebra”, com o objetivo de estudar graficamente a variação dos parâmetros  $a$  e  $b$ . Esta aula serviu como complemento à aula de dia 5 de Março, onde se iniciou o estudo da variação dos parâmetros da função com recurso a papel e lápis. Depois de distribuir os enunciados da tarefa, pedi aos alunos que à medida que fossem avançando registassem as suas conclusões, assim, enquanto um dos elementos do grupo estivesse a trabalhar no computador, o outro ia ajudando e registando por escrito as respostas na folha do enunciado. Tive a preocupação de projetar uma imagem do programa durante a aula, de forma a ir esclarecendo dúvidas relacionadas com a utilização do GeoGebra. Talvez por o programa ser bastante intuitivo não surgiram muitas questões.

Os alunos exploraram a tarefa durante 60 minutos, num tipo de aula que para eles é uma novidade. À medida que iam progredindo, as suas descobertas pareciam motivá-los e desafiá-los a continuar. A discussão começou vinte minutos antes do término da aula, e como eu tinha pedido à professora titular para lecionarmos a aula em conjunto fomos conjugando as intervenções de forma partilhada. Questionámos os alunos sobre as conclusões a que tinham chegado e filtrámos as ideias chave que iam surgindo. As conclusões finais foram escritas e projetadas no quadro, para que todos os alunos tivessem acesso a elas e as registassem.

Do ponto de vista das minhas aprendizagens, considero que esta aula foi importante por ter sido a primeira que planeei e conduzi em laboratório com recurso a computadores. Do ponto de vista das aprendizagens dos alunos, penso que a aula foi igualmente positiva. Já tinham feito o estudo da variação dos parâmetros com papel e lápis, mas terem-no feito em computador proporcionou-lhes uma perspetiva diferente dos conceitos envolvidos.

### **3.5. Avaliação**

A avaliação dos alunos na disciplina de Matemática respeitou os critérios de avaliação para o terceiro ciclo, definidos no início do ano letivo e aprovados pelo conselho pedagógico da escola. Estes critérios contemplam: (i) o domínio dos conhecimentos e capacidades com um peso de 80%, onde se incluem as fichas de avaliação (65%) e os trabalhos realizados, quer sejam individuais ou em grupo, e a participação, por exemplo, através de intervenções orais (15%); e (ii) o domínio das atitudes e valores, com um peso de 20%, onde se incluem parâmetros tais como a realização dos trabalhos de casa, a assiduidade, a pontualidade e o comportamento.

Relativamente aos instrumentos utilizados na avaliação da unidade de ensino recorri: (i) às produções realizadas pelos alunos; (ii) à observação de determinados momentos da aula, como por exemplo o trabalho autónomo e a discussão, que permitem ao professor avaliar o nível de concretização e o grau de envolvimento dos alunos nas tarefas; e (iii) à ficha de avaliação realizada no dia 8 de Março.

As questões da ficha de avaliação foram elaboradas com base em questões de manuais escolares e com base em ideias minhas. Além de procurar avaliar as aprendizagens, esta ficha procurou identificar estratégias e dificuldades dos alunos que serviram de complemento à informação recolhida para a elaboração do estudo.

### **3.6. Recolha de dados**

O objetivo do estudo e as questões formuladas influenciam fortemente a escolha da metodologia utilizada. Nesse sentido, e tendo em conta a natureza do estudo, apresentarei neste capítulo as opções metodológicas, os critérios de seleção dos participantes bem como a sua caracterização, os instrumentos utilizados na recolha de informação e os processos adotados na análise de dados.

### **3.6.1. Opções metodológicas gerais**

No estudo optei por um paradigma do tipo interpretativo e uma abordagem qualitativa, onde o investigador não interfere sobre a situação mas descreve-a tal como ocorreu, e onde o produto final se pretende sobretudo descritivo e interpretativo relativamente aos fenómenos construídos pelos intervenientes no estudo.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), este tipo de investigação é particularmente adequado quando as questões são “formuladas com o objetivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade e em contexto natural” (p. 16). Na perspetiva destes autores, é possível caracterizar as investigações qualitativas da seguinte forma: (i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, no nosso caso a sala de aula, e o investigador é o instrumento principal na recolha de dados; (ii) os dados recolhidos são de natureza qualitativa descritiva, por serem baseados, por exemplo, em transcrições de entrevistas, notas de campo e produções dos alunos; (iii) o investigador visa sobretudo o modo como os fenómenos ocorrem, isto é, são mais importantes os processos e menos os produtos; (iv) a análise dos dados é feita de forma indutiva, ou seja, as hipóteses vão sendo construídas à medida que a análise vai sendo realizada; e (v) é dada uma especial importância ao significado que os participantes atribuem às suas experiências.

Fernandes (1991) acredita que a investigação qualitativa é a melhor forma de obter informação relativamente a processos de ensino e aprendizagem. A observação detalhada e planeada da interação entre os participantes permite estudar processos cognitivos utilizados na resolução de situações problemáticas e assim identificar variáveis relevantes durante o estudo.

Segundo Ponte (2002), “é a natureza das questões formuladas que determina a natureza do objeto de estudo e dos dados a recolher” (p. 17). As questões formuladas neste estudo sugerem a necessidade de se compreender como ocorrem determinados fenómenos e de se encontrarem razões que os justifiquem. Assim, e tendo em conta que a unidade de ensino é concretizada numa turma onde todos os alunos são participantes, optei por selecionar um grupo de menor dimensão, que permitiu aprofundar melhor cada uma das questões do estudo.

### **3.6.2. Os participantes**

Neste estudo são realizados três estudos de caso, cada um constituído por um aluno. Nas aulas, o Raul, a Mariana e o Paulo estão inseridos em grupos de trabalho distintos e a sua seleção foi realizada de acordo com os seguintes critérios: (i) disponibilidade para participar no estudo e reunir com o professor fora das aulas; (ii) heterogeneidade no aproveitamento na disciplina de Matemática; (iii) bons níveis de assiduidade e pontualidade; (iv) facilidade em comunicar e justificar os raciocínios; e (v) heterogeneidade relativamente ao sexo.

### **3.6.3. Processo de recolha de dados**

A recolha de dados numa escola requer diversos preparativos. O primeiro é informar a Direção da escola relativamente à intenção de realizar o estudo, explicar o seu objetivo e solicitar autorização para o executar. O segundo é pedir autorização aos Encarregados de Educação dos alunos, explicando também as intenções e os objetivos do estudo. Numa fase seguinte, solicitei ao responsável pela informática que instalasse o GeoGebra, necessário para a aula de dia 12 de Março, e preparei os materiais e recursos necessários ao conjunto das aulas que ia lecionar.

No início do estudo informei os alunos sobre a nova planta da sala, sobre os grupos onde iriam ser recolhidos registos áudio e sobre os critérios utilizados na seleção dos grupos. De forma a não melindrar os outros alunos, expliquei-lhes que no terceiro período iria intensificar o trabalho junto deles e por isso acabariam todos por fazer parte do estudo.

O processo de recolha de dados começou logo de início, no dia 22 de Fevereiro, e terminou no dia 15 de Março, último dia de aulas do segundo período. As tarefas propostas e as fichas de trabalho de casa foram aplicadas entre 22 de Fevereiro e 12 de Março, com uma interrupção no dia 8 de Março para a realização da ficha de avaliação. As entrevistas ocorreram na última semana de aulas, entre 12 e 15 de Março.

Em qualquer investigação de carácter qualitativo, torna-se fundamental obter informação a partir de diversas fontes, permitindo assim abordar as questões de

várias perspetivas. Além disso, informações utilizadas em simultâneo têm a vantagem de se poderem complementar. Na perspetiva de Lessard, Goyette e Boutin (1990), existem três formas de recolha de dados: (i) o inquérito, que pode tomar duas formas distintas, a saber, a entrevista, se considerarmos a forma oral, e o questionário, se considerarmos a forma escrita; (ii) a observação das aulas; e (iii) a análise documental das produções realizadas pelos alunos. No presente estudo utilizei a observação das aulas, os produtos realizados pelos alunos e a entrevista.

### **Observação**

Com o objetivo de organizar a informação relevante relacionada com o estudo e proceder a eventuais reajustamentos na planificação, elaborei um documento onde recolhi informação sobre a dinâmica da aula, o funcionamento dos grupos de trabalho, as intervenções dos alunos, o seu envolvimento nas tarefas e ideias ou preocupações que foram sendo suscitadas ao longo das aulas. A elaboração destes registos foi uma tarefa difícil, porque o equilíbrio entre a observação e a participação revelou-se um trabalho complexo. Para colmatar esta dificuldade, procurei completar o mais possível estes registos no final de cada aula.

De forma a permitir o registo de situações não detetadas pela observação, tais como algumas interações e intervenções dos participantes, procedi à recolha de registos áudio na sala de aula. Sendo fisicamente impossível registar tudo, centrei-me apenas na gravação de três grupos de trabalho.

### **Análise documental**

No final de cada aula procedi à recolha de todas as produções que tivessem resultado da resolução de tarefas na sala de aula e de trabalhos de casa. Os documentos realizados com recurso a papel e lápis eram fotocopiados e entregues na aula seguinte de modo a não prejudicar o estudo dos alunos. Os documentos em suporte informático, resultantes da tarefa realizada no GeoGebra, foram transferidos para um dispositivo de armazenamento.

### **Entrevistas**

Este estudo envolveu a realização de um conjunto de entrevistas realizadas no final da unidade didática, com o objetivo de clarificar questões relacionadas com as tarefas realizadas nas aulas, e em alguns casos propor tarefas adicionais de forma a

complementar a informação recolhida. Procedi à seleção de dois alunos por grupo, de entre os grupos que estavam a ser gravados, o que resultou na realização de seis entrevistas gravadas com o objetivo de caracterizar com mais clareza e detalhe os raciocínios, as hesitações e as dificuldades dos alunos. Estas entrevistas individuais revelaram-se fundamentais, sobretudo pelo facto dos alunos terem trabalhado quase sempre em grupo nas aulas e nem sempre ter sido possível recolher determinados raciocínios de forma individual.

#### **3.6.4. Análise de dados**

À recolha de dados seguiu-se a fase da organização e seleção de registos, segundo a perspetiva de que “o processo de análise de dados é como um funil: as coisas estão abertas de início e vão-se tornando mais fechadas e específicas no extremo” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 50). Como a investigação é de natureza qualitativa, a análise foi realizada tendo em conta os aspetos teóricos revistos na literatura, o objetivo e as questões do estudo. A análise dos dados assume um carácter descritivo e interpretativo, e as interpretações que faço são baseadas na análise de vários documentos. O cruzamento desta informação foi um trabalho longo e complexo, mas permitiu apresentar a realidade por mim vivida de uma forma rica e objetiva.

Os dados analisados reportam-se a cinco tarefas realizadas na aula, três fichas de trabalho realizadas em casa, uma ficha de avaliação e seis entrevistas realizadas no final da unidade didática. Depois de organizar e filtrar a informação, procedi à categorização e posterior triangulação dos dados, de forma a facilitar a análise de padrões relevantes, reduzindo e agrupando a quantidade de informação disponível. Nesse processo considerei três categorias: (i) processos utilizados na representação gráfica das funções linear e afim, dadas na forma verbal, analítica e tabular, e formuladas em contexto matemático e não matemático; (ii) dificuldades sentidas pelos alunos na interpretação dos vários tipos de representação, com ênfase na representação gráfica; e (iii) estratégias utilizadas pelos alunos que evidenciem a dificuldade ou facilidade na transição da representação gráfica para outros tipos de representação, e reciprocamente.

## 4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

### 4.1. O caso do Raul

O Raul é um rapaz de 13 anos e a Matemática está entre as disciplinas que mais gosta. Considera-se bom aluno, teve sempre boas notas e nunca sentiu muitas dificuldades. Atento e empenhado nas aulas, é costume envolver-se ativamente nas tarefas propostas, tanto individuais como de grupo, e apresenta um raciocínio e uma comunicação acima da média. O Raul é visto pelos colegas como um aluno responsável, e é dele que esperam que venha a solução quando mais ninguém sabe responder. Nunca ficou retido, e este ano a Matemática obteve nível quatro no primeiro período e nível cinco no segundo período, resultado do seu esforço e empenho. Terminou o terceiro período com nível cinco.

#### 4.1.1. Construção de gráficos cartesianos

No início da unidade de ensino, selecionei um conjunto de exercícios com o objetivo de avaliar o nível de conhecimento dos alunos em aspetos relacionados com a representação gráfica. Assim, num dos exercícios propostos para trabalho de casa (anexo 2.1), os alunos tinham de descrever o modo como se podiam deslocar desde a origem até aos pontos representados, efetuando o menor número de deslocamentos. Para isso foi fornecido um referencial com alguns pontos assinalados:

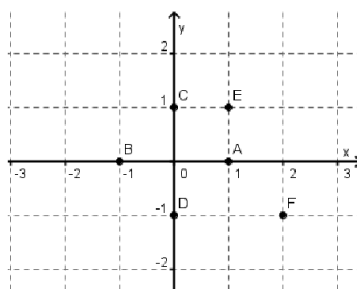
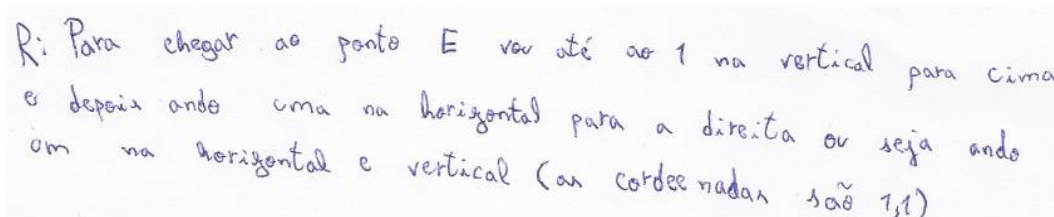


Figura 4.1 – Referencial do enunciado da questão 1 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.

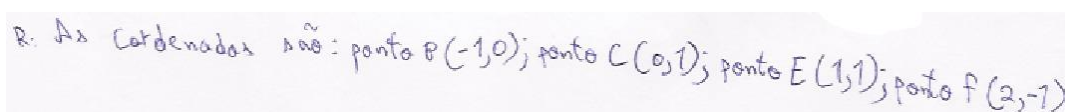
O Raul descreve corretamente o deslocamento pedido. No caso específico do ponto E, o aluno começa por descrever um deslocamento vertical de uma unidade ao longo do eixo das ordenadas no sentido positivo, e depois um deslocamento horizontal de uma unidade paralelo ao eixo das abcissas também no sentido positivo, como se pode observar na sua resposta:



R: Para chegar ao ponto E vai até ao 1 na vertical para cima e depois anda uma na horizontal para a direita ou seja anda um na horizontal e vertical (as coordenadas são 1,1)

Figura 4.2 – Resposta à questão 1.1 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.

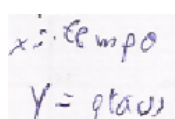
Na sequência da questão anterior, pedi ao Raul para escrever as coordenadas dos pontos assinalados no referencial. Vejo esta questão como uma oportunidade para analisar a notação e a terminologia utilizada pelos alunos, e perceber se sabem identificar coordenadas no referencial cartesiano. Na resposta (ver figura 4.3) o Raul identifica corretamente as coordenadas dos pontos assinalados e utiliza uma notação correta, como mostra a sua resposta:



R: As coordenadas são: ponto B (-1,0); ponto C (0,1); ponto E (1,1); ponto F (2,-1).

Figura 4.3 – Resposta à questão 1.2 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.

Na questão seguinte (anexo 2.2) pedia-se aos alunos para representarem graficamente uma função com base em relações de variáveis dadas no enunciado. O Raul começou por identificar as variáveis do problema, como se pode ver na figura:



x: tempo  
Y = gtaus

Figura 4.4 – Identificação de variáveis questão 3 da tarefa: mais funções.

Na entrevista falei com o Raul sobre a identificação destas variáveis:

Professor: Achei curioso, porque à variável y chamaste-lhe graus.

Raul: Era temperatura não era?

Professor: E lembras-te porque é que fizeste esta confusão?

Raul: Porque na altura foi a primeira coisa que me veio à cabeça, quando pensei em temperatura. Acho que foi uma distração.

Segundo a explicação do aluno, o erro terá sido provocado por uma falha de atenção e ocorre numa altura em que ele tenta interpretar e compreender a situação apresentada. Este tipo de erro, cometido com alguma frequência pelos alunos, pode ter implicações na identificação dos eixos coordenados durante o processo de construção gráfica.

Para além de procurar que os alunos utilizassem régua na construção de gráficos, outra das minhas preocupações relativamente às tarefas que propus nas aulas foi a de incluir espaços quadriculados na folha de enunciado, com o objetivo de melhorar o rigor do desenho e poupar tempo. No balanço que fiz sobre isto, fiquei com a convicção de que o papel quadriculado facilitou o trabalho dos alunos e teve um impacto positivo no tempo gasto na construção gráfica.

No exemplo seguinte, referente a uma tarefa realizada na aula (anexo 1.4), não foi fornecido qualquer espaço quadriculado para representar a função  $f(x) = 0,75x$ . A resolução do Raul (ver figura 4.5) deixa transparecer que o aluno não utilizou régua na construção do gráfico, porque as linhas dos eixos estão tortas e as distâncias entre os valores assinalados nos eixos não são uniformes:

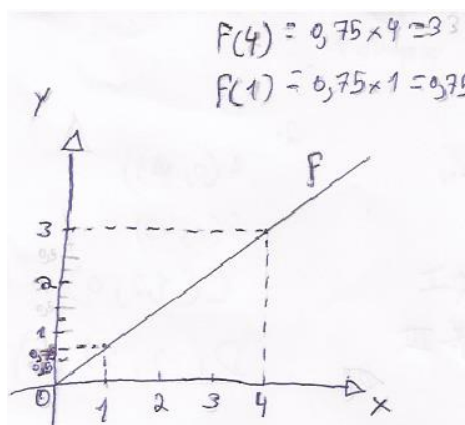


Figura 4.5 – Resolução do exercício 4 da tarefa: exercícios consolidação.

Ao observar os eixos coordenados do referencial apresentado na figura anterior, é possível verificar que os valores 0,5 e 0,75 aparecem “encavalitados” no eixo das ordenadas. O facto de o Raul ter utilizado uma folha branca e ter prescindido da régua na construção e na representação de valores nos eixos, afetou a qualidade do desenho. Na identificação dos eixos, o Raul seguiu o método convencional, ou seja, associou a variável dependente ao eixo vertical e a variável independente ao eixo horizontal. Esta forma de identificar os eixos cartesianos foi feita da mesma forma por todos os alunos.

Com o objetivo de complementar a análise anterior, considerei interessante incluir outro exemplo no qual é fornecido um espaço quadriculado para a construção do gráfico. Na representação gráfica da função  $i(x) = x + 1$ , pedida na ficha de avaliação (anexo 4), o rigor utilizado na construção dos eixos e na distância entre os valores revela um maior cuidado na construção gráfica, como se pode ver na figura:

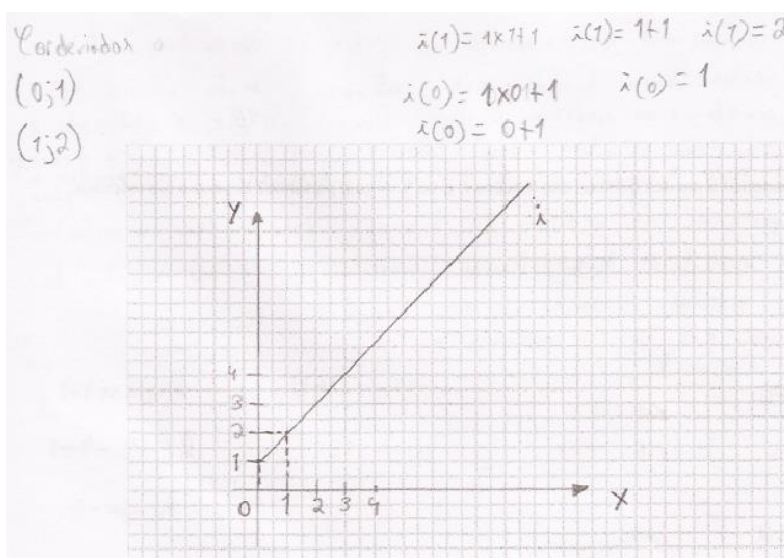


Figura 4.6 – Resolução da questão 3 da ficha de avaliação.

Questionado sobre a influência do papel quadriculado na construção, o Raul identificou de imediato uma vantagem relacionada com a graduação dos eixos:

Professor: O papel quadriculado ajudou-te na representação gráfica?

Raul: Sim, para fazermos à escala, para fazermos os valores de y e de x.

Nos dois exemplos anteriores, e apesar de estar a trabalhar num contexto puramente matemático, o Raul limita a representação gráfica das funções ao primeiro quadrante do referencial e não prolonga a reta para valores negativos da variável independente. Com o objetivo de tentar compreender porquê, abordei esta situação na entrevista:

Professor: A variável  $x$  pode tomar valores negativos?

Raul: Ainda não percebi.

Professor: Tento compreender porque não atribuíste valores negativos a  $x$ .

Raul: Normalmente a gente utiliza sempre valores positivos.

Professor: Isso terá a ver com o facto dos valores das variáveis com que trabalhamos nas primeiras tarefas terem sido positivos?

Raul: Talvez, mas não só. Porque também dá mais trabalho. A prolongar estas linhas e a fazer os valores negativos. E às vezes baralha um bocado. Quando fazemos o gráfico associamos [a variável] a valores positivos e nunca a valores negativos. Só se for pedido no enunciado.

Ao longo da unidade de ensino notei uma tendência por parte dos alunos para usarem apenas valores positivos para as variáveis que iam surgindo nas tarefas propostas. É um aspeto que tenho vindo a refletir desde o início do estudo e que poderá estar relacionado com vários motivos. O primeiro pode estar relacionado com o facto de o conjunto dos números naturais (inteiros positivos) ser o mais familiar aos alunos e de mais fácil utilização. O segundo motivo poderá ficar a dever-se ao modo como as tarefas iniciais foram formuladas e com a utilização que fiz das variáveis. O peso e o preço a pagar, por exemplo, são variáveis que admitem apenas valores positivos e que foram bastante utilizadas. Apesar de ter havido da minha parte uma preocupação em explicar aos alunos que existem variáveis que podem assumir valores negativos, e até dei exemplos de algumas, isso não parece ter alterado a tendência já referida. O terceiro motivo pode estar relacionado com o quotidiano, porque muitas das situações que fazem parte do nosso dia-a-dia sugerem-nos constantemente valores positivos, por exemplo, a idade, o tempo e o peso.

#### 4.1.2. Dificuldades na interpretação gráfica

##### Reconhecer e interpretar funções representadas graficamente

No exemplo seguinte, os gráficos representados traduzem uma correspondência entre o peso de limões em quilogramas (variável  $x$ ) e o preço a pagar em euros (variável  $y$ ). Se repararmos com atenção, os gráficos parecem iguais mas existem diferenças relativamente à escala utilizada, como se pode ver na figura:

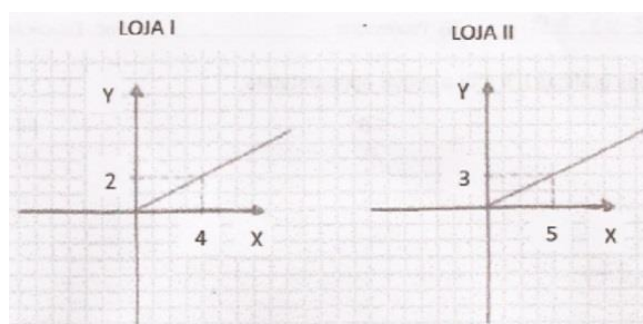


Figura 4.7 – Gráficos do enunciado da questão 2 da ficha de avaliação.

Na alínea 2.1 desta questão (anexo 4) é pedido aos alunos para identificarem a loja que vende o limão mais barato. O Raul tem noção que a função representada é de proporcionalidade direta, e utiliza uma estratégia de análise pontual na identificação das coordenadas (4;2) e (5;3) a partir do gráfico. Determina o quociente entre os valores da variável dependente e da variável independente (ver figura 4.8) e obtém o preço a pagar por um quilo de limão em cada uma das lojas. Veja-se como o aluno explica o seu raciocínio:

Professor: Portanto, observaste os gráficos e calculaste o valor da constante?

Raul: Sim. Como era linear não tinha uma adição ou uma subtração, por isso bastava dividir.

Repare-se agora na forma como o Raul determina a constante de proporcionalidade e justifica a sua resposta em cada um dos casos:

$$2:4 = 0,5 \rightarrow \text{Loja I}$$
$$3:5 = 0,6 \rightarrow \text{Loja II}$$

R: A loja que vende a limão na mais barato é a loja I porque eu descobri o preço por cada quilo de limão nas duas lojas, na loja I é 50 centímetros e na loja II é 60 centímetros e 50 centímetros é mais barato que 60 centímetros.

Figura 4.8 – Resposta à questão 2 da ficha de avaliação.

O aluno sabe que os gráficos dados representam funções lineares e recorre a um raciocínio proporcional quando divide o custo a pagar pelo respetivo peso. Revela uma compreensão da relação constante entre duas grandezas (invariância) e a noção de que estas grandezas variam em conjunto (covariância). Quando lhe perguntei o significado do quociente que calculou, respondeu imediatamente “é o preço por cada quilo de limão”.

Com o objetivo de averiguar de que forma obtém valores não assinalados no gráfico, pedi ao Raul para determinar o custo a pagar por 4 quilogramas de limões na loja II. O resultado alcançado foi interessante, na medida em que permitiu chamar a atenção para um raciocínio diferente como mostra o diálogo seguinte:

Professor: Qual é o preço de 4 quilos de limões na loja II?

Raul: Então, ia descobrir outra vez a função linear. Podia fazer a regra de três simples, mas eu não costumo fazer isso...

Professor: Então, qual é o resultado?

Raul: Eu não tenho aqui calculadora, mas era 4 a dividir por 0,6.

Professor: E o que é que significa o 0,6?

Raul: 0,6 vezes o preço vai dar o número de quilos, que é 4. Então se fizermos a operação ao contrário, 4 a dividir por 0,6, vai dar o preço.

De acordo com este raciocínio, o Raul determina corretamente a expressão analítica  $f(x) = 0,6x$  que a  $x$  quilos de limões faz corresponder o preço total a pagar. No entanto, ao substituir o valor 4 na expressão analítica, o aluno engana-se

porque associa esse valor à variável dependente em vez de o associar à variável independente, como se pode ver na figura:

$$F(x) = 0,6x$$

$$4 = 0,6x$$

$$\frac{4}{0,6} = x$$

Figura 4.9 – Resolução da questão proposta na entrevista.

A troca da variável independente pela variável dependente não resultou de dificuldades na interpretação da situação, mas de uma distração momentânea por parte do Raul, como mais tarde o próprio explicou na entrevista. O facto da abcissa 4 não estar assinalada no gráfico da loja II (ver figura 4.7), pode ter feito com que, devido à falta de apoio visual, o aluno tenha trocado a ordem das variáveis.

Numa das tarefas propostas no início da unidade de ensino pedia-se aos alunos que indicassem as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos com o eixo das ordenadas (anexo 1.2). Como estas funções já tinham sido representadas numa alínea anterior, bastava que o Raul efetuasse a leitura do gráfico (ver figura 4.10) e determinasse os pontos de intersecção com o eixo das ordenadas.

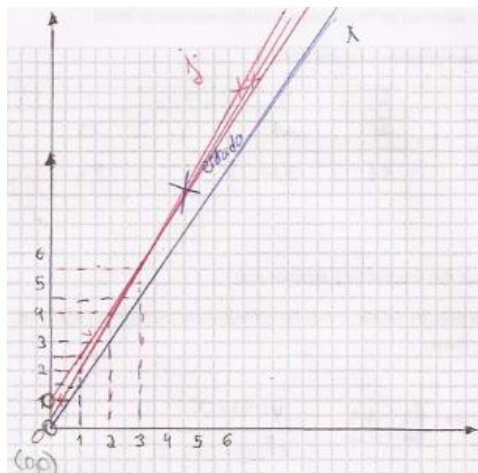
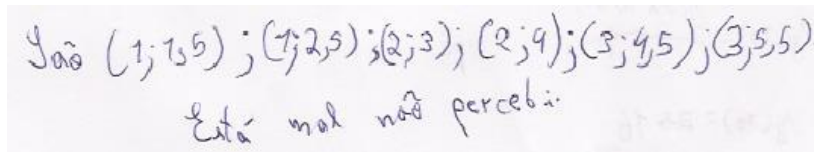


Figura 4.10 – Resolução da alínea 1.4 da tarefa: um embrulho especial.

O Raul apresentou a seguinte resposta:



Yão  $(1; 1,5); (1; 2,5); (2; 3); (2; 4); (3; 4,5); (3; 5,5)$ .  
Esta mal não percebi.

Figura 4.11 – Resposta à alínea 1.6 da tarefa: um embrulho especial.

Num primeiro momento o Raul não compreendeu imediatamente o que lhe estava a ser pedido e, como explicou na entrevista, pensou que a pergunta se referia às coordenadas dos pontos utilizados na construção dos gráficos, ou seja, os pontos  $(1;1,5)$ ,  $(2;3)$  e  $(3;4,5)$  relativos ao gráfico de  $i$  e os pontos  $(1;2,5)$ ,  $(2;4)$  e  $(3;5,5)$  relativos ao gráfico de  $j$ , como se pode ver no diálogo seguinte:

Professor: Explica lá como é que chegaste a esses valores.

Raul: Eu estava a pensar que era aqui na reta, nos valores da linha da função [refere-se às coordenadas dos pontos pertencentes à reta].

Professor: Estavas a pensar nos pontos onde as linhas auxiliares se intersectam?

Raul: Sim, mas agora é que vi. Se calhar é aqui, nas ordenadas.

O Raul interpretou corretamente o enunciado e com base no gráfico conseguiu identificar as coordenadas dos pontos de interseção das retas com o eixo das ordenadas. Acredito que o erro na resposta inicial do aluno, tenha sido motivado pela pouca familiaridade com a terminologia do enunciado. Este tipo de dificuldade foi sentido pela maioria dos alunos.

Numa outra questão (anexo 4), formulada num contexto puramente matemático, pedia-se aos alunos para estabelecerem uma correspondência entre os gráficos de três funções (uma linear e duas afins não lineares) e as respetivas expressões analíticas (ver figura 4.12). Pedia-se também uma justificação relativamente a cada uma das correspondências que fossem estabelecidas.

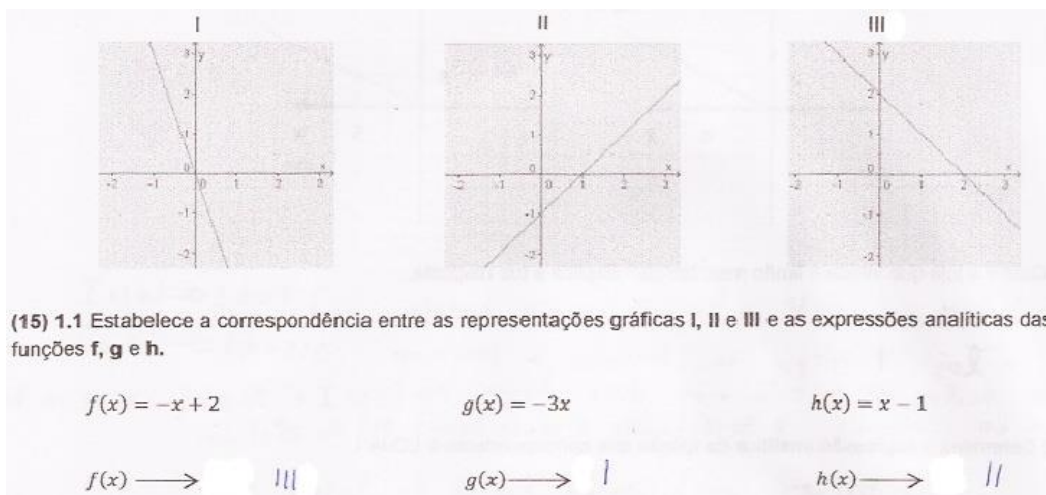


Figura 4.12 – Enunciado da questão 1 da ficha de avaliação.

Para justificar a correspondência entre o gráfico da função linear e a respetiva expressão analítica o Raul escreveu o seguinte:

R: Eu escolhi que a função g corresponde ao gráfico I porque g é uma função linear e as funções lineares são do tipo  $j(x) = ax$  e no gráfico dessa função a reta passa pelo ponto de origem.

Figura 4.13 – Resposta à questão 1 da ficha de avaliação.

Ao escrever “no gráfico dessa função [g] a reta passa pelo ponto de origem”, o Raul mostra compreender que o gráfico de uma função linear é uma reta que passa na origem do referencial. Por outro lado, o aluno sabe que a expressão geral das “funções lineares são do tipo  $j(x) = ax$ ” e é com base neste conhecimento que relaciona a representação gráfica e a representação algébrica no caso da função linear.

Para justificar a correspondência entre os gráficos das funções afins não lineares e as respetivas expressões analíticas o Raul escreveu o seguinte:

R: Eu escolhi que a função  $f$  corresponde ao gráfico III e a função  $g$  correspondia a II, estas duas funções são afins são do tipo  $j(x) = ax + b$ , e no gráfico destas funções o " $b$ " é a ordenada da abscissa " $0$ " então bastou ver em cada uma das funções qual era o valor de " $b$ " e ver qual o gráfico que à abscissa " $0$ " a ordenada correspondia a esse valor.

Figura 4.14 – Resposta à questão 1 da ficha de avaliação.

O Raul relaciona a representação gráfica e a representação algébrica de uma função afim não linear, comparando o valor da ordenada do ponto situado sobre o eixo vertical, com o valor do parâmetro  $b$  na expressão analítica. Segundo ele, “no gráfico destas funções [afins não lineares] o  $b$  é a ordenada da abscissa  $0$ ”. A isto acrescentou que “bastou ver em cada uma das [expressões analíticas das] funções qual era o valor de  $b$  e ver qual o gráfico que à abscissa  $0$ , a ordenada correspondia a esse valor”. Assim, no gráfico da função representada na imagem II, o aluno identificou as coordenadas  $(0;-1)$  e relacionou-as com o valor de  $-1$  na expressão  $h(x) = x - 1$ , e no gráfico da função representada na imagem III, o aluno identificou as coordenadas  $(0;2)$  e relacionou-as com o valor de  $2$  na expressão  $f(x) = -x + 2$ .

### A influência da variação dos parâmetros $a$ e $b$ no gráfico da função

Ao estudar-se o declive, pode acontecer que mais cedo ou mais tarde surja o termo inclinação. Assim, durante a entrevista que realizei, foi com curiosidade que procurei compreender a noção que o Raul tem deste conceito:

Professor: Quando é que para ti um objeto está inclinado?

Raul: Assim...Uma coisa entre a vertical e a horizontal.

Professor: Então imagina a torre de Pisa.

Raul: Sim.

Professor: Imagina agora que ela se inclinava um pouco mais. Em que sentido é que se movia?

Raul: Para baixo, acho eu.

Professor: Para ti, quanto mais inclinada está mais perto está do chão?

Raul: Sim.

Professor: Isso é interessante. E em Matemática?

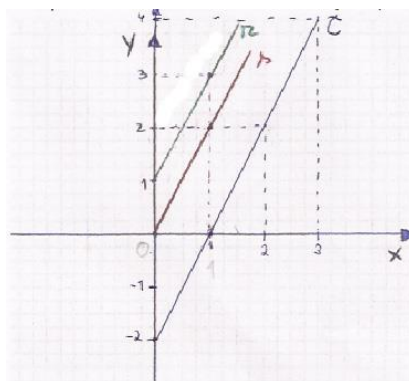
Raul: Está mais perto do y.

Professor: Sim. O declive vai aumentado à medida que a reta se aproxima do eixo das ordenadas.

Raul: Em Matemática é assim.

Para o aluno, se a torre de pisa estivesse mais inclinada estaria mais próxima do chão, ou seja, se no lugar do chão imaginarmos um eixo horizontal e no lugar da torre uma reta, quanto mais próxima a reta estiver desse eixo maior será a sua inclinação. No entanto, as afirmações finais do Raul mostram que ele compreende que em Matemática as coisas não funcionam da mesma forma.

Os próximos exemplos referem-se a uma tarefa realizada com papel e lápis sobre o estudo do efeito da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  da expressão analítica no gráfico da função. Na tarefa que marcou o arranque desse estudo (anexo 1.3), os alunos são confrontados com uma pergunta aberta, na qual se pede para descreverem o que observam de comum nos gráficos representados (ver figura 4.15). Na sua resposta, o Raul concluiu que as retas têm em comum o declive 2:



O que há de comum é o  $2a$  que é o declive.

Figura 4.15 – Resposta à alínea 1.2 da tarefa: o fabrico de gomas.

Com base no que escreveu, procurei na entrevista que o Raul acrescentasse algo mais sobre o que observou nos gráficos:

Professor: Só escreveste isto?

Raul: Ah, não é o 2 que é o declive. O 2 é a variável!

Professor: Não. Tu respondeste bem, o 2 é o declive. O  $x$  e o  $y$  é que são variáveis.

Raul: Ok.

Professor: Como é que concluíste que o 2 é o declive? Viste pela expressão analítica ou pelo gráfico?

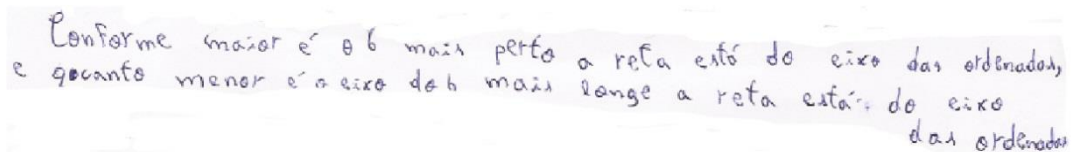
Raul: Pela expressão analítica.

Professor: O gráfico não te ajudou?

Raul: Não. Eu acho que é mais fácil deduzir pela expressão.

A última frase no diálogo anterior revela que o Raul prescinde da observação gráfica e centra-se sobretudo na expressão analítica por considerar ser mais fácil trabalhar com este tipo de representação. Do seu conhecimento, sabe que numa expressão do tipo  $y = ax + b$  o parâmetro  $a$  representa o declive da reta e com base nisto conclui que “o que há de comum é o 2, que é o declive”.

No exemplo seguinte, retirado da mesma tarefa (anexo 1.3), pedia-se aos alunos para descreverem o efeito provocado pela variação do parâmetro  $b$  no gráfico das funções. Esperava que nas suas respostas os alunos escrevessem, por exemplo, que o eixo das ordenadas é intersectado nos pontos  $(0;1)$ ,  $(0;0)$  e  $(0;-2)$  ou que à medida que o  $b$  varia a posição do gráfico em relação ao eixo das abcissas também varia. O Raul respondeu o seguinte:



Conforme maior é o  $b$  mais perto a reta está do eixo das ordenadas, e quando menor é o eixo de  $b$  mais longe a reta está do eixo das ordenadas

Figura 4.16 – Resposta à alínea 1.2 da tarefa: o fabrico de gomas.

Na entrevista procurei que o Raul explicasse melhor o seu raciocínio:

Professor: Como é que concluíste isso? Foi pelo gráfico?

Raul: Sim. A linear era esta, certo? [refere-se à função  $s(x) = 2x$ ]. Este aqui estava positivo e o valor de  $b$  era maior [refere-se à função  $r(x) = 2x + 1$ ]. E este estava negativo e o valor de  $b$  era menor [refere-se à função  $t(x) = 2x - 2$ ].

Professor: E então?

Raul: Esta está mais longe do eixo das ordenadas e mais perto do eixo das abcissas [refere-se à função  $r(x) = 2x + 1$ ]. Esta está mais próxima do eixo das ordenadas e mais longe do eixo das abcissas [refere-se à função  $t(x) = 2x - 2$ ].

Professor: Então agora imagina que tinhas um  $b$  igual a 20.

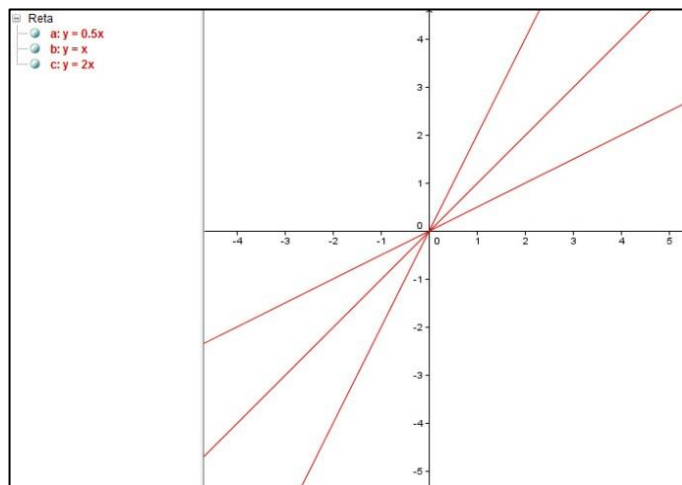
Raul: Ia estar ainda mais próxima do eixo das ordenadas e mais longe do eixo das abcissas.

Professor: Longe?

Raul: Em termos matemáticos, mais inclinada.

Ao reconhecer que a variação do parâmetro  $b$  influencia a posição das retas relativamente ao eixo das ordenadas (figura 4.16), o Raul está a confundir o parâmetro  $b$  com o declive. Esta ideia também surge no diálogo anterior, quando perante a possibilidade de  $b$  aumentar, o aluno responde incorretamente que a reta fica “mais inclinada”. Por outro lado, ao escrever que “a reta está mais perto do eixo das abcissas” quando o  $b$  é 1, e “mais longe do eixo das abcissas” quando o  $b$  é -2, o aluno parece compreender o efeito que a variação de  $b$  provoca na posição das retas relativamente ao eixo das abcissas.

O exemplo seguinte refere-se a uma tarefa (anexo 1.5) realizada em laboratório com recurso ao GeoGebra, e que serviu como complemento da tarefa realizada na aula com recurso a papel e lápis. Na primeira questão pedia-se a construção e a comparação de gráficos de funções do tipo  $y = ax$ , atribuindo diferentes valores positivos a  $a$  ( $a=0,5$ ,  $a=1$  e  $a=2$ ). A introdução da expressão analítica no GeoGebra resulta numa representação imediata do gráfico da função no ecrã do computador, o que faz com que os alunos disponham em simultâneo da representação gráfica e da representação algébrica da função. Após introduzir as expressões no GeoGebra, o Raul obteve o seguinte resultado no computador e deu a resposta que se apresenta a seguir (figura 4.17):

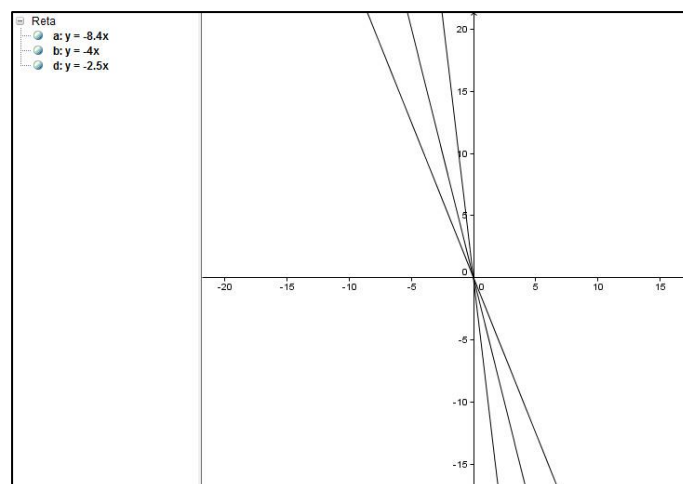


R: Quanto maior é a variável maior é o declive, são todas lineares, do tipo  $y = ax$  e passam todas pelo ponto O, que é o ponto médio do referencial (origem).

Figura 4.17 – Resposta à questão 1 da tarefa: funções no GeoGebra.

Relativamente aos gráficos representados no referencial (ver figura 4.17), o Raul conclui que “quanto maior é a variável maior é o declive”, ou seja, está a relacionar corretamente a variação do parâmetro  $a$  com a variação do declive. Ao escrever que as expressões “são todas lineares do tipo  $y = ax$  e passam todas pelo ponto O”, o aluno parece ter consolidado a ideia de que o gráfico de uma função linear é uma reta que passa na origem. Se repararmos, o Raul comete duas incorreções na terminologia utilizada. A primeira ocorre no momento em que escreve “variável” em vez de parâmetro, e a segunda quando escreve “ponto médio”, apesar de ter tido o cuidado de acrescentar a palavra “(origem)” como se pode ver no final da resposta anterior.

Na segunda questão pedia-se aos alunos que atribuíssem valores negativos a  $a$  numa função do tipo  $y = ax$ . Mesmo que eles não utilizassem os termos “crescente” ou “decrecente”, um dos objetivos desta pergunta era levá-los a compreender a relação entre o sinal de  $a$  e a monotonia da função. Após introduzir as expressões no GeoGebra, o Raul obteve o seguinte resultado no computador e deu a resposta que se apresenta a seguir (figura 4.18):



R: Quanto maior <sup>é a</sup> variável ~~menor o declive~~ e quanto menor <sup>variável</sup> ~~declive~~ maior declive, são todas lineares, do tipo  $y=ax$  e passam todas pelo ponto  $O$ , que é o ponto médio do referencial. Ambas têm uma ordenada ou abcissa negativo.

Figura 4.18 – Resposta à questão 2 da tarefa: funções no GeoGebra.

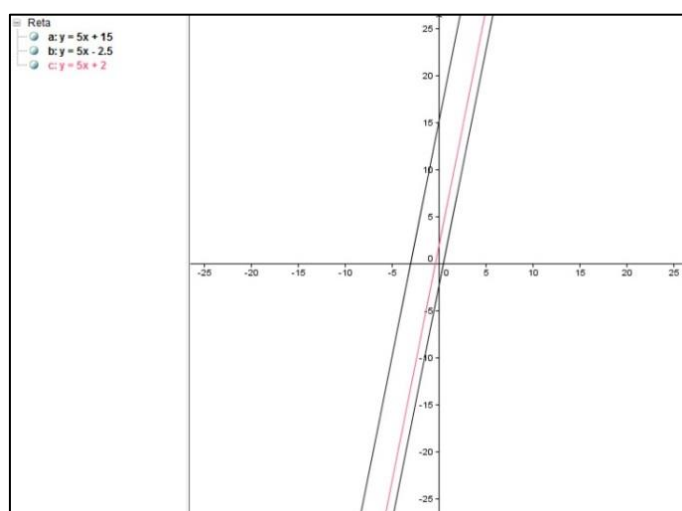
Ao interpretarmos esta resposta, pode criar-se alguma confusão porque o Raul considera que “quanto maior é a variável [refere-se ao parâmetro  $a$  da expressão analítica] menor o declive, e quanto menor a variável maior o declive” (ver figura 4.18). Importa referir que neste caso, o Raul não está a considerar o valor absoluto de  $a$ . Por exemplo, ao escrever “quanto menor a variável maior o declive”, o aluno tenta explicar que quanto mais negativo for o valor de  $a$ , mais o declive aumenta. Portanto, ele compreende que o aumento do valor absoluto de  $a$  na expressão analítica implica um aumento do declive das retas, devido à sua aproximação ao eixo das ordenadas.

Ao escrever que “ambas [as retas] têm uma ordenada ou abcissa negativa”, o aluno refere-se à posição do gráfico no referencial cartesiano, e parece compreender que os pontos situados no segundo quadrante têm ordenada positiva e abcissa negativa, e os pontos situados no quarto quadrante têm ordenada negativa e abcissa positiva. Na resposta do Raul nada consta relativamente à relação entre o sinal de  $a$  e a monotonia da função, mas a ideia de que a reta se situa no primeiro e terceiro quadrantes, no caso em que o valor de  $a$  é positivo, e no segundo e quarto quadrantes, no caso em que o valor de  $a$  é negativo, parece constituir um bom ponto de partida para o estudo da relação entre o valor de  $a$  e a monotonia da função. Assim, este aspeto foi abordado mais tarde durante a entrevista:

Professor: Lembra-te da relação que estabelecemos entre o sinal do parâmetro  $a$  e o crescimento ou decrescimento da função?

Raul: O  $a$  era negativo quando [a função] era decrescente e positivo quando [a função] era crescente.

Na terceira questão pedia-se a construção e comparação de gráficos de funções do tipo  $y = 2x + b$ , atribuindo diferentes valores a  $b$  ( $b=0$ ,  $b=1$  e  $b=2$ ). Na introdução das expressões analíticas no GeoGebra, o Raul não utiliza os valores indicados no enunciado. Em vez disso, atribui a  $a$  um valor de 5 e a  $b$  valores de -2,5, de 2 e de 15. Após introduzir as expressões no GeoGebra, o aluno obteve o seguinte resultado no computador e deu a resposta que se apresenta a seguir (figura 4.19):



R: São expressões afins do tipo  $y = ax + b$ , a reta não passa pelo ponto 0. Valor de  $b$  corresponde ao ponto de origem, o ponto  $b$  é a ordenada que corresponde à abscissa 0. São paralelas uma às outras.

Figura 4.19 – Resposta à questão 3 da tarefa: funções no GeoGebra.

Ao concluir relativamente às expressões analíticas que “são expressões afins do tipo  $y = ax + b$ ” e que “a reta não passa no ponto 0” (ver figura 4.19), o Raul reconhece o tipo de expressão analítica envolvida e relaciona-a com o facto de os gráficos não passarem na origem do referencial, faltando apenas acrescentar que isso só acontece porque existe um parâmetro  $b$  diferente de zero na expressão analítica. Relativamente à terminologia utilizada, o Raul comete novamente uma incorreção ao escrever o “valor de  $b$  corresponde ao ponto de origem”, no entanto, importa

salientar que logo de seguida ele acrescenta que “o ponto b é a ordenada que corresponde à abcissa 0”.

Na resposta que deu, o Raul refere que as retas são paralelas mas não faz qualquer referência ao declive. Assim, não existem evidências na resposta do aluno que permitam concluir que ele compreendeu de facto a relação entre o paralelismo das retas e o declive, o que no entanto ficou esclarecido na entrevista quando lhe perguntei porque é que os gráficos das funções são retas paralelas:

Professor: Porque dizes que os gráficos das funções são retas paralelas?

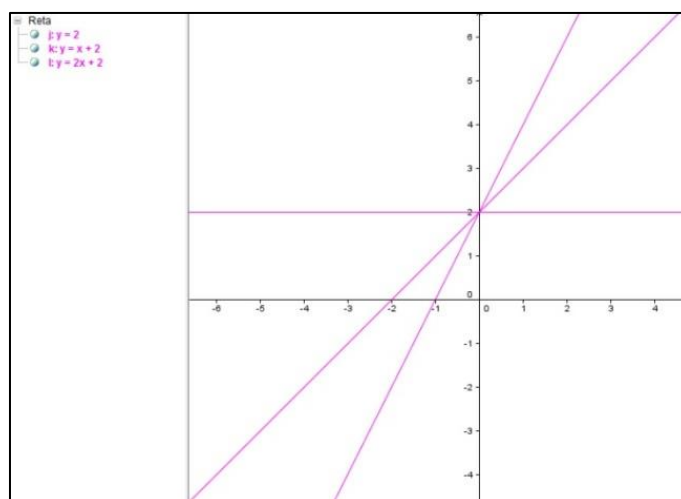
Raul: Porque o declive é o mesmo.

Professor: Mas tu olhaste para o gráfico ou para a expressão analítica?

Raul: Para a expressão. Mas se eu quiser também posso olhar para o gráfico.

Sempre que elas são paralelas o declive é igual.

Na quarta e última questão da tarefa pedia-se a construção e comparação de gráficos de funções do tipo  $y = ax + 2$ , atribuindo diferentes valores a  $a$  ( $a=0$ ,  $a=1$  e  $a=2$ ). Após introduzir as expressões no GeoGebra, o Raul obteve o seguinte resultado no computador e deu a resposta que se apresenta a seguir (figura 4.20):



O valor b sendo sempre igual, faz com que todas as expressões algébricas, independentemente do valor de a tem sempre a mesma origem, a abcissa 0 corresponde sempre à ordenada que tem o valor do ponto b. Não são paralelas. As retas passam todas pelas ordenadas com o valor de b em relação à abcissa 0.

Figura 4.20 – Resposta à questão 4 da tarefa: funções no GeoGebra.

Ao escrever as duas primeiras frases na resposta anterior (ver figura 4.20), o Raul procura explicar que um valor de  $b$  igual nas expressões analíticas implica que as retas se intersectam todas no mesmo ponto, independentemente do valor do declive. Por outro lado, frases como “à abcissa 0 corresponde sempre a ordenada que tem o valor do ponto  $b$ ” ou “as retas passam todas pelas ordenadas com o valor de  $b$ ”, mostram que na sua resposta o aluno recorre às ideias de ordenada na origem e de interseção no ponto  $(0;b)$ .

A função constante surge pela primeira vez nesta questão, e é por isso uma boa altura para explorar algumas das suas características, nomeadamente a monotonia e o declive, por isso, aproveitei a entrevista para abordar este assunto:

Professor: No referencial está uma função constante [ver figura 4.20].  
Consegues identifica-la?

Raul: Sim. É esta aqui [aponta para o gráfico da função  $y = 2$ ].

Professor: Porque é que dizes que é constante?

Raul: Porque o valor da ordenada independentemente da abcissa é sempre 2.

Professor: E qual é o declive da reta?

Raul: Há, já sei. É qualquer coisa vezes zero mais dois. É sempre vezes zero mais dois. O declive é zero.

O aluno consegue identificar o gráfico de uma função constante e conclui que ela é constante “porque o valor da ordenada, independentemente do valor da abcissa é sempre 2”. Questionado sobre o declive, o Raul responde “é qualquer coisa vezes zero mais dois” e conclui corretamente que no caso da função constante “o declive é zero” porque o valor de  $a$  na expressão analítica também é “zero”, como se pode ler na última frase do diálogo anterior.

Ao longo desta tarefa, o Raul revelou uma evolução positiva na compreensão dos conceitos envolvidos e na forma como utilizou a representação gráfica para ler e interpretar informação. As suas conclusões parecem resultar de um raciocínio cada vez mais elaborado, provavelmente potenciado pela utilização do GeoGebra, o que sugere que a utilização da tecnologia terá contribuído de forma positiva para o estudo destas matérias.

### 4.1.3. Mudança de representação

#### Da representação algébrica à representação gráfica

O exemplo seguinte é referente a uma questão (anexo 1.3) onde se pedia aos alunos para representarem graficamente a função  $t(x) = 2x - 2$ , que a cada minuto  $x$  faz corresponder uma única temperatura  $y$ . Na representação gráfica desta função o Raul utiliza processos numéricos para determinar coordenadas de pontos, ou seja, escolhe valores para a variável  $x$ , substitui esses valores na expressão analítica e determina os respetivos valores de  $y$ , como se pode ver na resolução que apresentou:

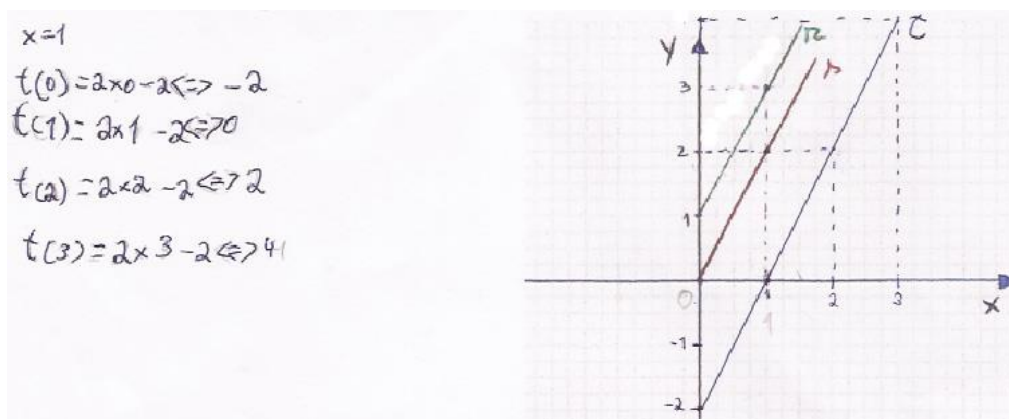


Figura 4.21 – Resolução da alínea 1.1 da tarefa: O fabrico de gomas.

Depois de atribuir valores à variável  $x$  e determinar os respetivos valores da variável  $y$ , o Raul obtém os pontos de coordenadas  $(0;-2)$ ,  $(1;0)$ ,  $(2;2)$  e  $(3;4)$ . De seguida, procede à marcação destes pontos no referencial cartesiano, traça as linhas auxiliares e representa o gráfico da função, como se pode ver na resolução anterior.

Ao determinar os valores das variáveis, o Raul comete uma incorreção na forma como utiliza o sinal de equivalente. Quando lhe perguntei porque é que se tinha enganado, o aluno explicou-me que ainda não tinha compreendido bem como é que se utiliza este sinal. Assim, o erro não resulta de dificuldades que envolvam conceitos importantes, mas sim de dificuldades relacionadas com a utilização da notação.

### Da representação gráfica à representação algébrica

Numa das questões propostas na ficha de avaliação (anexo 4) é pedido aos alunos para determinarem a expressão analítica de uma função representada graficamente (ver figura 4.22). Neste exercício, optei propositadamente por não identificar a função através de uma letra, por exemplo  $f$  ou  $g$ , tendo ficado ao critério dos alunos fazer essa identificação.

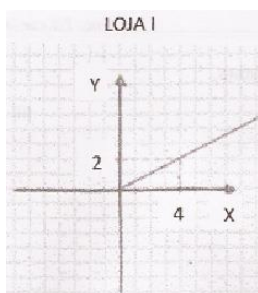


Figura 4.22 – Gráfico do enunciado da alínea 2.2 da ficha de avaliação.

Na mudança da representação gráfica para a representação algébrica, o Raul identificou as coordenadas do ponto assinalado no referencial e determinou a constante de proporcionalidade recorrendo à regra da invariância do quociente entre as variáveis dependente e independente, ou seja, determinou o quociente entre 2 e 4. No final, obteve a expressão analítica da função substituindo o valor da constante numa expressão do tipo  $y = ax$ , como se pode ver na resposta que apresentou:

Figura 4.23 – Resolução da alínea 2.2 da ficha de avaliação.

No exemplo seguinte, relativo a uma tarefa realizada na aula (anexo 1.4), é dado o gráfico de uma função linear e é pedido aos alunos para representarem a função algebricamente (ver figura 4.24). Curiosamente, neste exemplo o Raul utiliza uma estratégia diferente da anterior para determinar o parâmetro  $a$  da expressão. Em vez de utilizar a regra da invariância do quociente entre as variáveis dependente e independente, o aluno realiza uma análise pontual do gráfico e utiliza processos

algébricos para determinar a expressão analítica, como se pode ver na figura seguinte:

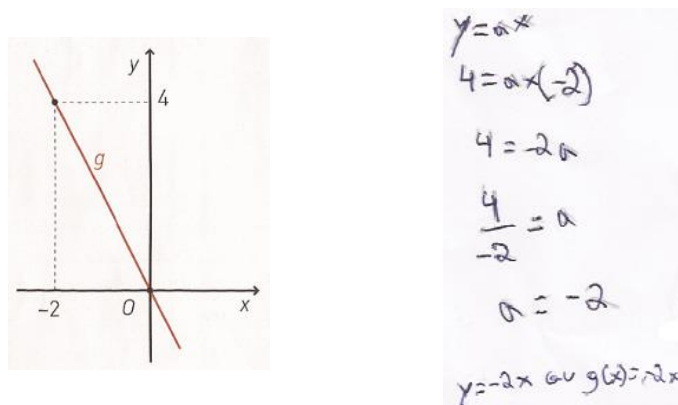


Figura 4.24 – Resolução da questão 4 da tarefa: exercícios consolidação.

O Raul sabe que a expressão analítica correspondente ao gráfico da função representada é do tipo  $y = ax$ , e para determinar o valor do parâmetro  $a$  identifica o ponto de coordenadas  $(-2;4)$  no referencial, substitui as variáveis  $x$  e  $y$  por  $-2$  e  $4$  respetivamente na expressão analítica e resolve a equação em ordem a  $a$ .

Curiosamente, ao escrever a expressão analítica de uma função o Raul utiliza sempre os dois tipos de notação  $f(x)$  e  $y$ , como se pode ver na resolução anterior onde ele escreve  $y = -2x$  e  $g(x) = -2x$  (ver figura 4.24). Esta forma de identificar uma função pode estar relacionada com o facto de numa das minhas aulas eu ter exemplificado cada um dos tipos de notação e ter explicado aos alunos que poderiam utilizar qualquer um deles.

### Da representação verbal à representação gráfica

O enunciado seguinte, retirado da tarefa “mais funções” (anexo 2.2), descreve uma situação formulada num contexto de semi-realidade relativa a uma experiência laboratorial, realizada com o objetivo de controlar a qualidade da produção no fabrico de gomas. É pedido aos alunos para representarem graficamente essa situação e para o fazerem é-lhes fornecida a seguinte informação:

Representa graficamente a função  $z$ , que relaciona o tempo  $x$  em minutos e a temperatura  $y$  em graus celsius de um novo ingrediente de gomas testado durante **60 minutos**. Relativamente ao teste sabe-se que:

- (i) A temperatura registada no início da experiência (minuto 0) é de **10** graus celsius.
- (ii) A temperatura registada no final da experiência (minuto 60) é de **30** graus celsius.

Figura 4.25 – Enunciado da questão 3 da tarefa: mais funções.

Para representar graficamente esta situação, eu esperava que os alunos identificassem no enunciado os pontos (0;10) e (60;30) e os representassem no referencial cartesiano. Curiosamente, o Raul optou pela representação algébrica como passo intermédio entre a representação verbal e a representação gráfica. Mais tarde, durante a entrevista, explicou que prefere trabalhar com a expressão analítica porque “dá para fazer mais coisas”.

Na sua resposta (ver figura 4.26), o aluno começa por identificar as variáveis do problema associando o tempo à variável independente e a temperatura à variável dependente, obtém as coordenadas dos pontos (0;10) e (60;30) a partir do enunciado, e como a situação pode ser modelada por uma função afim não linear começa por determinar o valor do parâmetro  $a$  da seguinte forma:

$x$  - tempo  
 $y$  - graus  
 $10 - 0 = 10$   
 $30 - 10 = 20$   
 $20 : 60 = \frac{1}{3}$

Figura 4.26 – Resolução da questão 3 da tarefa: mais funções.

Na entrevista procurei compreender melhor o raciocínio do Raul, e quando lhe pedi para explicar o que tinha feito ele respondeu que “o 10 era o  $b$ . O 30 fiz logo a operação inversa  $30-10=20$ . Depois dividi por 60 para achar o  $a$ . Basicamente é como se fosse uma equação, mas eu não pensei numa equação, pensei na operação inversa”. Apesar do aluno não ter resolvido a equação  $y = ax + b$  de um modo convencional, substituindo  $b$ ,  $x$  e  $y$  por 10, 30 e 60 respetivamente e determinando o valor de  $a$ , ele conseguiu determinar o parâmetro  $a$  como se pode ver na resolução

anterior (ver figura 4.26). Depois, o aluno obtém a expressão analítica da função substituindo os parâmetros  $a$  e  $b$  numa expressão do tipo  $y = ax + b$  da seguinte forma:

$$Z(x) = 0,3)x + 10$$

$$0,3) \cdot 120 = 40$$

$$60 \times 2 = 120$$

$$40 + 10 = 50$$

Figura 4.27 – Resolução da questão 3 da tarefa: mais funções.

No cálculo de valores das variáveis, ao atribuir o valor 120 (minutos) a  $x$  (ver figura 4.27), ignorando assim que a duração do teste é de 60 (minutos), o Raul ter-se-á abstraído do contexto da situação e passado a raciocinar num contexto puramente matemático. Esta distração teve repercussões na representação gráfica, porque o aluno prolongou a reta para valores de  $x$  superiores a 60, como se pode ver na figura:

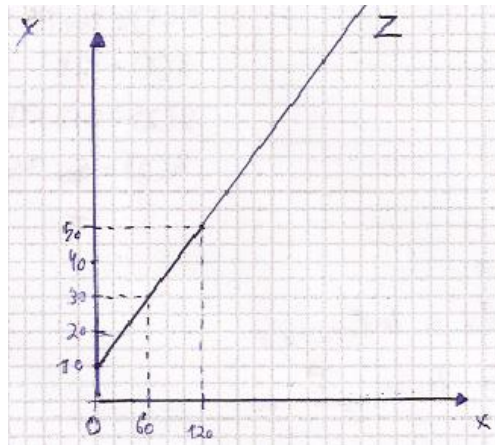


Figura 4.28 – Resolução da questão 3 da tarefa: mais funções.

## Da representação tabular à representação gráfica

No exemplo seguinte retirado da tarefa “o preço das gomas” (anexo 1.1) pede-se a representação gráfica de três funções lineares. As coordenadas dos pontos podem ser obtidas através de uma tabela preenchida na primeira alínea da tarefa, na qual constam alguns objetos e as respectivas imagens (ver figura 4.29). No cálculo das imagens, o Raul utiliza uma estratégia multiplicativa ao multiplicar cada peso pelo preço de um hectograma, obtendo dessa forma o novo preço a pagar, como se pode ver na seguinte tabela:

		Amorais										
Peso		1	2	3	4	5	...	11	...	13	...	x
Preço a Pagar		1,5	3	4,5	6	7,5	...	16,5	...	19,5	...	
		$1,5 \times 1$	$1,5 \times 2$	$1,5 \times 3$	$1,5 \times 4$	$1,5 \times 5$	...	$1,5 \times 11$	...	$1,5 \times 13$	...	$1,5 \times x$

Figura 4.29 – Resolução da alínea 1.1 da tarefa: o preço das gomas.

Para representar graficamente as funções, o Raul teve a iniciativa de procurar valores de pesos e respectivos preços na tabela e proceder à marcação dos pontos correspondentes no referencial cartesiano. Para representar uma reta são suficientes dois pontos, no entanto, o aluno identificou quatro pontos para cada função, assinalou-os no referencial cartesiano e traçou as respectivas retas, como se pode ver na resolução que apresentou:

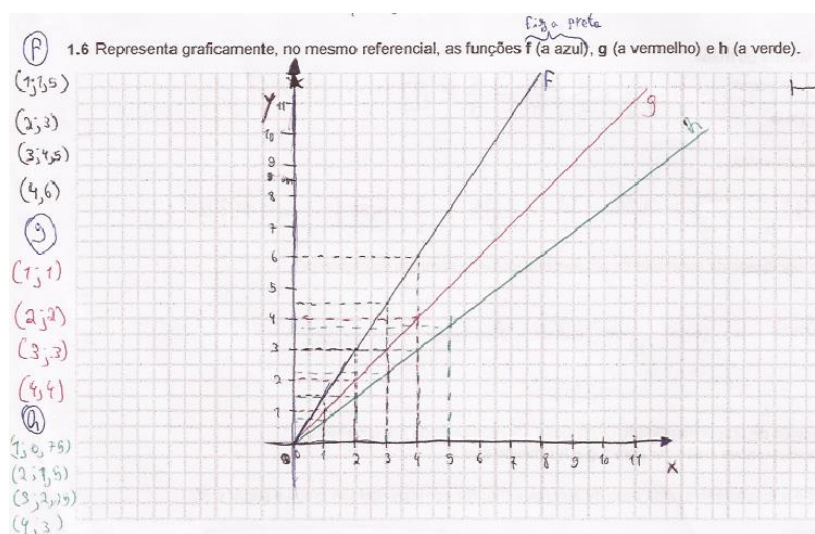


Figura 4.30 – Resolução da alínea 1.6 da tarefa: o preço das gomas.

### Da representação gráfica à representação tabular

Durante a entrevista analisei a estratégia utilizada pelos alunos na mudança da representação gráfica para a representação tabular, com base em informação obtida a partir do gráfico. No exemplo seguinte, relativo à quarta questão da tarefa proposta na entrevista (anexo 5), o gráfico fornecido (ver figura 4.31) traduz uma relação entre a distância percorrida por um táxi e o custo a pagar por um cliente. O preço da viagem inclui uma taxa fixa, o que sugere uma situação modelada por uma função afim não linear.

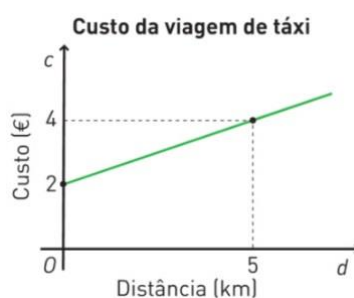


Figura 4.31 – Gráfico do enunciado da questão 4 da entrevista.

O objetivo é construir uma tabela onde se possam organizar valores das variáveis da função representada graficamente. O Raul começou por me perguntar quais são os valores de  $x$  que devem constar na tabela, ao que eu lhe respondi “podes fazer para zero, um, dois e cinco”. Em relação aos pontos de abcissa 0 e 5 não houve dúvidas porque eles surgem assinalados no gráfico, mas em relação aos pontos de abcissa 1 e 2 o Raul teve de encontrar uma estratégia que lhe permitisse obter as respetivas ordenadas. Assim, começou por determinar a expressão analítica da função representada e utilizou-a para determinar valores de variáveis, como mostra a figura seguinte:

$$\begin{array}{l} 4 - 2 = 2 \quad \frac{2}{5} = 0,4 \\ f(x) = 0,4x + 2 \\ y = 0,4x + 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} y = \text{Custo} \\ x = \text{Distância} \end{array} \quad \begin{array}{l} f(1) = 0,4 \cdot 1 + 2 \\ f(1) = 0,4 + 2 \\ f(1) = 2,4 \end{array} \quad \begin{array}{l} f(2) = 0,4 \cdot 2 + 2 \\ f(2) = 0,8 + 2 \\ f(2) = 2,8 \end{array}$$

Figura 4.32 – Resolução da alínea 4.6 da entrevista.

Depois, o Raul construiu uma tabela com duas colunas, a primeira relativa ao custo a pagar (euros) e a segunda relativa à distância percorrida (quilómetros), e preencheu-a com os valores das variáveis que tinha determinado:

Custo (€) y	Distância (km) x
2	0
2,4	1
2,8	2
4	5

Figura 4.33 – Resposta à alínea 4.6 da entrevista.

O Raul utiliza processos distintos para obter informação necessária à construção da tabela. Relativamente aos pontos assinalados no referencial, o aluno recorre à análise pontual para obter as coordenadas (0;2) e (5;4) a partir do gráfico. Relativamente aos pontos não assinalados no referencial, o aluno recorre à expressão analítica para obter as coordenadas (1;2,4) e (2;2,8). Resumindo, se os pontos estão assinalados no gráfico, o Raul passa diretamente da representação gráfica para a representação tabular, sem recorrer a outro tipo de representação, e se os pontos não estão assinalados no gráfico, o Raul utiliza a representação algébrica como passo intermédio na mudança da representação gráfica para a representação tabular.

## 4.2. O caso do Paulo

O Paulo é um rapaz de 14 anos, simpático e bem-disposto. Considera-se um aluno razoável a Matemática, apesar das notas nem sempre corresponderem às suas expectativas. Justifica-se, afirmando que por vezes está distraído na aula e a sua forma de estudar nem sempre é a melhor. O Paulo gosta de Matemática, nas aulas é empenhado e envolve-se ativamente nas tarefas, mas revela dificuldades recorrentes. Apesar de nunca ter ficado retido, obteve este ano a Matemática nível três no primeiro período e nível dois no segundo período. Continuou sempre a demonstrar interesse pela disciplina e esforçou-se, com sucesso, para superar as dificuldades e melhorar o aproveitamento. Terminou o terceiro período com nível três.

### 4.2.1. Construção de gráficos cartesianos

Num dos exercícios propostos para trabalho de casa (anexo 2.1), pedia-se aos alunos para descreverem, com base no referencial apresentado na figura seguinte, o deslocamento desde a origem até aos pontos representados, efetuando o menor número possível de deslocamentos.

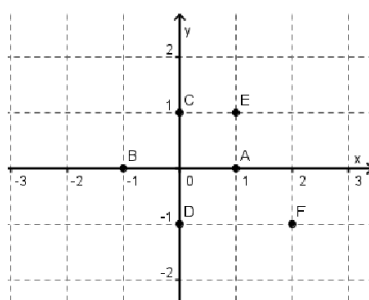


Figura 1

Figura 4.34 – Referencial do enunciado da questão 1 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.

A descrição feita pelo Paulo relativamente ao ponto E foi a seguinte:

$E=1 \text{ de } y \text{ e } 1 \text{ de } x$   
 $E=-7 \text{ de } y \text{ e } 2 \text{ de } x$

Figura 4.35 – Resposta à questão 1.1 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.

Ao escrever na resposta “E=1 de y e 1 de x” (ver figura 4.35), o Paulo procura explicar que a primeira deslocação é de uma unidade, e ocorre no sentido positivo ao longo do eixo vertical, e a segunda deslocação é de uma unidade, e ocorre no sentido positivo ao longo do eixo horizontal. O facto de o aluno escrever primeiro a ordenada, e isto repetiu-se ao longo do estudo, mostra que ao ler coordenadas a partir do referencial cartesiano, ele tem tendência a identificar primeiro a ordenada e só depois a abcissa.

Na sequência da questão anterior pedi ao Paulo para escrever as coordenadas dos pontos assinalados no referencial. Na sua resposta (ver figura 4.36) o aluno voltou a escrever primeiro a ordenada e só depois a abcissa, como se pode ver pela forma como escreveu as coordenadas do ponto E (ver figura 4.36). O Paulo também cometeu uma incorreção na notação, porque ao identificar as coordenadas deste ponto escreveu “E=1y, 1x” em vez de (1;1), como se pode ver na sua resposta:

$B=-1x$   $C=1y$   $D=-1y$   $E=1y, 1x$   $F=-1y, 2x$

Figura 4.36 – Resposta à questão 1.2 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.

Na entrevista confrontei o aluno com esta situação e tentei perceber porque é que ele não utilizou uma notação correta:

Professor: O que são as coordenadas de um ponto?

Paulo: São os pontos onde se vão intercetar.

Professor: A ordenada e a abcissa. Mas lé lá a tua resposta.

Paulo: Eu ainda não sei distinguir bem as coordenadas.

Professor: Mas já tinhas representado pontos no referencial?

Paulo: Só que eu não consigo distinguir bem as ordenadas das abcissas.

A última frase do Paulo no diálogo anterior deixa claro as suas dificuldades na distinção entre a abcissa e a ordenada de um ponto, quando realiza a leitura de coordenadas a partir do referencial cartesiano.

No exemplo seguinte, retirado de uma tarefa realizada na aula (anexo 1.4), pedia-se a representação gráfica da função  $f(x) = 0,75x$ . No processo de construção gráfica o Paulo procede à construção e gradação dos eixos cartesianos, utiliza a expressão analítica para determinar coordenadas de pontos, assinala esses pontos no referencial cartesiano e representa o gráfico da função, como mostra a sua resolução:

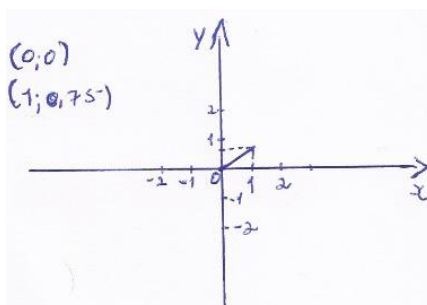


Figura 4.37 – Resolução do exercício 4 da tarefa: exercícios consolidação.

Na gradação dos eixos, o Paulo opta por utilizar apenas valores inteiros e mostra alguma hesitação no momento de assinalar a ordenada 0,75, o que revela uma compreensão pouco clara dos números racionais e da sua representação na reta. Importa referir que as incorreções relacionadas com a marcação de valores nos eixos resultam geralmente em representações incorretas ou pouco rigorosas.

Relativamente ao material de medição, o Paulo prescindiu da régua durante a gradação dos eixos, o que afetou a uniformidade das distâncias entre os valores nos eixos (ver figura 4.37). Na marcação do valor 0,75, apesar de o situar no intervalo entre 0,5 e 1, o aluno teve dúvidas quanto à sua localização no eixo, como se pode ver na nossa conversa:

Paulo: Não sei como é que faço a escala com este valor de 0,75. Não sei como é que marco.

Professor: Para já faz como achares melhor. Sentes dificuldades na representação de valores decimais?

Paulo: Como não tenho quadrículas é mais complicado.

O Paulo limitou a representação do gráfico da função ao primeiro quadrante do referencial e considerou apenas valores de  $x$  compreendidos entre 0 e 1 (ver figura 4.37). Quando o questionei sobre isto, explicou-me que como só determinou dois pontos, pensou que esses pontos fossem suficientes para traçar uma reta que os unisse. Acrescentou ainda que se tivesse determinado mais pontos, teria prolongado mais a reta, o que mostra que o Paulo parece representar o gráfico da função em função do número de pontos que determina. Na entrevista abordei esta situação:

Professor: Não prolongaste o gráfico porquê?

Paulo: Estou habituado a fazer sempre assim.

Professor: Mas isso estará relacionado com as tarefas com que trabalhamos?

Paulo: Habituei-me só a essas partes.

O facto de nas primeiras tarefas se ter trabalho sobretudo com valores de variáveis positivos e num contexto de semi-realidade, parece ter criado nos alunos a tendência para representarem o gráfico da função apenas no primeiro quadrante do referencial. Acredito que esta tendência pode ser ultrapassada através da realização de tarefas formuladas em diversos contextos, matemáticos e não matemáticos, de forma a desenvolver nos alunos o hábito de trabalharem também com valores negativos para as variáveis.

#### **4.2.2. Dificuldades na interpretação gráfica**

##### **Reconhecer e interpretar funções representadas graficamente**

No exemplo seguinte, retirado da ficha de avaliação (anexo 4), é pedido aos alunos para identificarem a loja que vende o limão mais barato. Os gráficos parecem iguais mas existem diferenças relativamente à escala utilizada em cada um deles. Na sua resposta, o Paulo começa por determinar a expressão analítica de cada uma das funções e conclui incorretamente que ambas as situações podem ser modeladas pela mesma expressão analítica (ver figura 4.38). O aluno constata efetivamente que os gráficos são “retas que passam na origem”, mas não consegue relacionar esses

gráficos com expressões do tipo  $f(x) = ax$ . Se observarmos a resposta seguinte, vemos que o Paulo considera uma expressão analítica do tipo  $f(x) = ax + b$ :

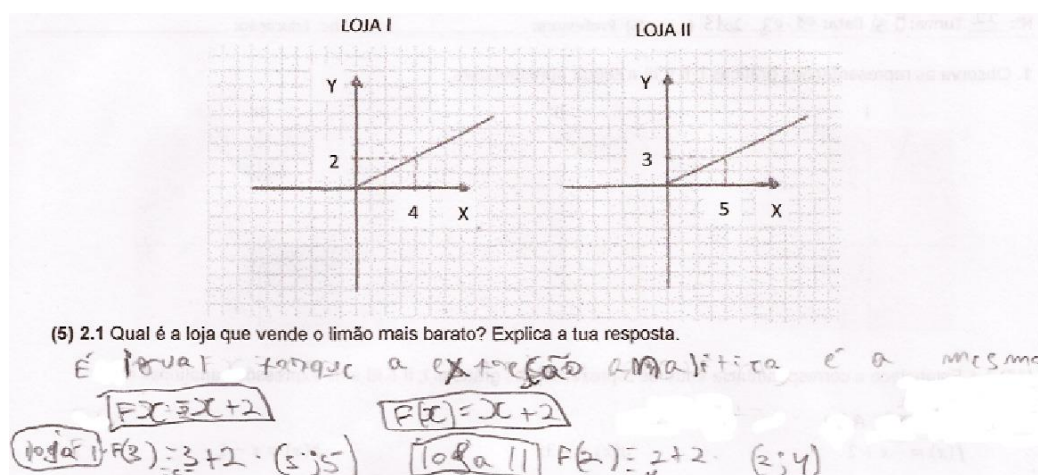


Figura 4.38 – Resposta à questão 2 da ficha de avaliação.

De forma a compreender alguns aspetos do raciocínio do Paulo, comecei por questioná-lo durante a entrevista relativamente às variáveis do problema, peso e preço a pagar. Ele foi capaz de associá-las respetivamente às letras  $x$  e  $y$ , mas mostrou-se confuso quando lhe perguntei qual era a variável dependente e a variável independente. Foi necessário levá-lo a imaginar uma situação do quotidiano, para ele conseguir distinguir as variáveis com compreensão, como se pode ver no diálogo:

Professor: Qual é a variável que representa o peso?

Paulo: O peso é o  $x$ .

Professor: É a variável que representa o preço a pagar?

Paulo: O  $y$ .

Professor: Qual é a variável dependente e a variável independente?

Paulo: É o  $x$  e o  $y$ .

Professor: O  $x$  é qual?

Paulo: A independente...dependente.

Professor: É a dependente ou a independente?

Paulo: Eu não sei muito bem isso.

Professor: Imagina que vais a uma loja para comprar limões. Pegas os limões antes de pagar, ou primeiro pagas e depois é que pesas?

Paulo: Primeiro peso.

Professor: E então? Neste caso tem mais lógica que seja o peso a depender do preço ou o preço a depender do peso?

Paulo: O preço a depender do peso.

Na escolha da loja que vende o limão mais barato, o Paulo começou por concluir, incorretamente, que na loja II o limão é mais barato porque relativamente à loja I “mete-se mais 1 euro mas ganha-se mais 1 quilo”:

Professor: O que há de diferente nos gráficos?

Paulo: Este é o ponto (5;3) [refere-se ao gráfico da loja II] e este é o ponto (4;2) [refere-se ao gráfico da loja I]. Da loja I para a loja II mete-se mais 1 euro mas ganha-se mais 1 quilo.

Professor: Tens certeza?

Paulo: Isto está mal, porque cada quilo não custa 1 euro.

Professor: Então já vimos que não pode ser. Mais ideias?

De seguida procurei que o Paulo interpretasse a escala e encontrasse uma forma de determinar a constante de proporcionalidade. Para determinar o preço a pagar por 1 quilo de limão, o aluno utilizou uma estratégia aditiva, ou seja, partindo do pressuposto que 4 quilos custam 2 euros, foi subtraindo sempre 1 quilo ao peso e 0,5 euros ao preço a pagar. Concluiu dessa forma que 1 quilo de limão custa 0,5 euros, como se pode ver no diálogo seguinte:

Professor: Porque é que não tentas calcular o preço de 1 quilo de limão em cada uma das lojas?

Paulo: Aqui custa 50 cêntimos por quilo [refere-se à loja I].

Professor: Como é que chegaste a esse valor?

Paulo: De 4 quilos, para chegar a 1 quilo tirei 3 e aqui de 2 fui tirando 0,5 e vi que 0,5 dava 1 quilo. Depois 1 euro já dava 2 quilos, depois 3 quilos era 1,5 euro e 4 quilos eram 2 euros.

Professor: E então?

Paulo: Então eu pus 2 a dividir por 4 e dava 0,50.

Professor: E na outra loja?

Paulo: 3 a dividir por 5 dá 0,6.

Professor: E o valor 0,6 significa o quê?

Paulo: O preço por cada quilo na loja II.

O resultado 0,5 (euros) obtido por uma estratégia aditiva, ajudou o Paulo a compreender que, relativamente à loja I, o quociente entre 2 (euros) e 4 (quilos) é 0,5 (euros). Dessa forma, para determinar o preço a pagar por cada quilo de limão na loja II o Paulo determinou o quociente entre 3 (euros) e 5 (quilos) e chegou ao resultado de 0,6 (euros). Importa no entanto referir que, apesar da estratégia utilizada, o aluno nunca associou esse quociente à constante de proporcionalidade.

Relativamente à determinação de valores não assinalados no gráfico, na entrevista pedi ao Paulo para determinar o custo a pagar por 4 quilos de limões na loja II. Na resolução deste problema o aluno recorreu novamente a uma estratégia aditiva para determinar a imagem da abcissa não assinalada no gráfico, ou seja, subtraiu 1 quilo a 5 quilos e 60 centimos a 3 euros, e concluiu dessa forma que 4 quilos custam 2,4 euros, como se pode ver na resolução apresentada:

5 kg — 3€      então o preço 1kg = 60 cent.  
5kg - 1kg = 4kg      3€ - 60 cent. = 2,40€  
4kg = 2,40€

Figura 4.39 – Resolução da questão extra proposta na entrevista.

Quando pedi ao Paulo para explicar este raciocínio, ele respondeu: “eu pensei, 5 quilos é 3 euros. Então o preço por cada quilo é 60 centimos. Tirei um quilo, ficou 4 quilos e depois de 3 euros tirei 60 centimos que é o preço por quilo. Fiquei com 2,40 euros.”

No exemplo seguinte, retirado da tarefa “um embrulho especial” (anexo 1.2) pediam-se os pontos de interseção dos gráficos de duas funções com o eixo das ordenadas. Esperava-se que os alunos fizessem a leitura do gráfico (ver figura 4.40) e identificassem as coordenadas dos pontos pedidos.

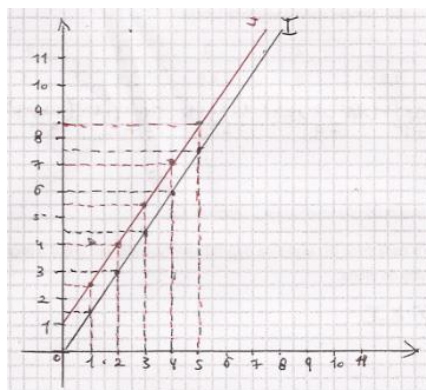


Figura 4.40 – Resolução da alínea 1.4 da tarefa: um embrulho especial.

Este exemplo ilustra bem as dificuldades dos alunos na compreensão de alguma da terminologia utilizada em questões deste tipo. Frases como “ordenada na origem” e “coordenadas dos pontos de interseção com o eixo” são exemplos da terminologia a que me refiro. Na resposta à pergunta “quais são os pontos de interseção dos gráficos com o eixo das ordenadas”, o Paulo escreveu o seguinte:

Figura 4.41 – Resposta à alínea 1.6 da tarefa: um embrulho especial.

Esta resposta mostra que o aluno fez uma interpretação incorreta do enunciado porque, segundo explicou mais tarde na entrevista, pensou que na pergunta se pediam as ordenadas dos pontos que pertencem ao gráfico. É possível que as dificuldades de interpretação possam estar relacionadas com a pouca familiaridade do Paulo com a terminologia utilizada no enunciado. Além disso, o aluno cometeu uma incorreção na notação porque utilizou apenas uma coordenada para representar um ponto, ao escrever, por exemplo, “ $I = (1, 5)$ ” (ver figura 4.41).

Neste exemplo, retirado da ficha de avaliação (anexo 4), pedia-se aos alunos para estabelecerem uma correspondência entre os gráficos de três funções, uma linear e duas afins não lineares e as respectivas expressões analíticas. Para isso disponibilizou-se o seguinte enunciado:

1. Observa as representações gráficas I, II e III a seguir apresentadas.

(15) 1.1 Estabelece a correspondência entre as representações gráficas I, II e III e as expressões analíticas das funções f, g e h.

$f(x) = -x + 2$                        $g(x) = -3x$                        $h(x) = x - 1$

$f(x) \rightarrow$  III                       $g(x) \rightarrow$  I                       $h(x) \rightarrow$  II

Explica as tuas opções.

Figura 4.42 – Enunciado da questão 1 da ficha de avaliação.

Para justificar a correspondência entre o gráfico da função linear e a expressão analítica o Paulo escreveu o seguinte:

$$g(0) = -3 \times 0$$

$$= 0$$

$$(0, 0)$$

Figura 4.43 – Justificação da questão 1 da ficha de avaliação.

Na relação entre o gráfico e a expressão analítica de uma função linear, o aluno utiliza uma estratégia de análise pontual com base na expressão analítica. Determina a ordenada cuja abcissa é zero e obtém o ponto de coordenadas (0;0). Por outro lado, o aluno sabe que o gráfico de uma função linear é uma reta que passa na origem e que a sua expressão analítica é do tipo  $y = ax$ . Com base nisto, conclui facilmente que a expressão analítica associada ao gráfico representado na imagem I só pode ser  $g(x) = -3x$ .

Para justificar a correspondência entre os gráficos das funções afins não lineares e as respectivas expressões analíticas o Paulo escreveu o seguinte:

Handwritten calculations for two functions:

For function  $f$ :

$$f(0) = 0 + 2 = 2$$

Point:  $(0, 2)$

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

Point:  $(1, 3)$

For function  $h$ :

$$h(0) = 0 - 1 = -1$$

Point:  $(0, -1)$

$$h(1) = 1 - 1 = 0$$

Point:  $(1, 0)$

Figura 4.44 – Justificação da questão 1 da ficha de avaliação.

Na entrevista procurei compreender melhor o raciocínio utilizado pelo Paulo e perguntei-lhe se não lhe tinha ocorrido a ideia de relacionar o gráfico e a expressão analítica da função com base na relação entre a posição das retas no referencial cartesiano e os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$  numa expressão do tipo  $y = ax + b$ :

Professor: Não te ocorreu olhar para os parâmetros nas expressões?

Paulo: Não.

Professor: Por exemplo, a função  $f$  é uma função afim. A expressão geral de uma função afim é de que tipo?

Paulo: É do tipo  $f(x) = ax + b$ .

Professor: E qual é o  $a$ ? [na função  $f(x) = -x + 2$ ].

Paulo: O  $a$  é  $-x$ .

Professor: Não é.

Paulo: É  $-1$ .

Professor: E não te lembras de ouvir falar nas aulas que o  $b$  é a ordenada do ponto onde o gráfico intersecta o eixo das ordenadas?

Paulo: Sim.

Professor: Então como é que podemos identificar o gráfico de uma função em que o  $b$  na expressão analítica é  $2$ ?

Paulo: É aqui [identifica um ponto no gráfico que não corresponde à ordenada na origem  $2$ ].

Na relação entre o gráfico e a expressão analítica de uma função afim não linear, e à semelhança do que já tinha acontecido no caso da função linear, o Paulo utiliza uma estratégia de análise pontual com base na expressão analítica. Atribui valores a  $x$ , substitui-os na expressão analítica, e com base no resultado obtido procede à identificação do gráfico.

O diálogo anterior também mostra a dificuldade do Paulo na identificação dos parâmetros de uma função afim não linear. Quando lhe pedi para identificar o parâmetro  $a$ , ele confundiu parâmetro com variável e responde que “o  $a$  é  $-x$ ”. O aluno também revelou dificuldade na compreensão da relação entre o valor do parâmetro  $b$  da expressão e a ordenada na origem observada a partir do gráfico. Quando lhe pedi para identificar o gráfico correspondente a uma expressão analítica em que o  $b$  é 2, ele assinalou um ponto no gráfico que não correspondia ao ponto  $(0;2)$ , como se pode ver no final do diálogo anterior.

### **A influência da variação dos parâmetros $a$ e $b$ no gráfico da função**

Tal como no estudo de caso anterior, também neste procurei conhecer a noção que o aluno tem de inclinação:

Professor: O que está a acontecer à torre? [refiro-me a uma imagem da torre de pisa].

Paulo: Tá tipo a cair.

Professor: Parece inclinada?

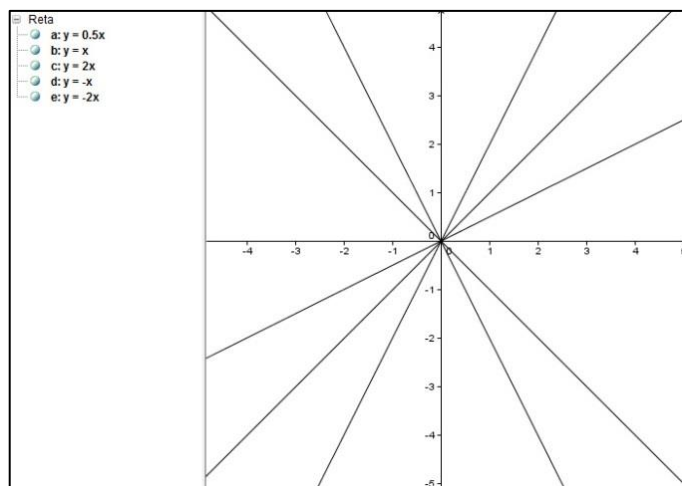
Paulo: Está.

Professor: Imaginando que ela se inclinava um pouco mais, em que sentido é que se movia?

[o aluno simula com a mão um movimento da torre em direção ao solo].

Na perspetiva do Paulo a inclinação da torre aumenta à medida que esta se aproxima do solo. No entanto, quando lhe perguntei se em matemática a inclinação também é vista desta forma, ele admitiu que não e acrescentou que a tarefa no GeoGebra o ajudou a compreender melhor o conceito matemático de inclinação.

O exemplo seguinte é referente à tarefa realizada no GeoGebra (anexo 1.5). Nas duas primeiras questões pedia-se a construção e a comparação de gráficos de funções do tipo  $y = ax$ , atribuindo diferentes valores ao parâmetro  $a$ . Assim, na primeira questão, os alunos tinham de substituir o  $a$  por valores positivos e na segunda questão por valores negativos. O Paulo explorou as duas questões no mesmo referencial, e após introduzir as expressões no GeoGebra obteve o seguinte resultado no computador e deu a resposta que se apresenta a seguir (figura 4.45):



Cada vez que aumentamos o  $A$  a reta vai ficando mais próxima de  $90^\circ$

Figura 4.45 – Resposta à questão 1 da tarefa: funções no GeoGebra.

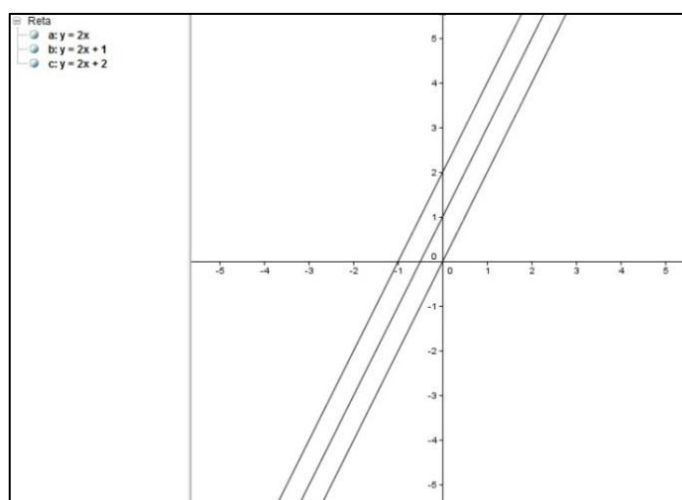
Na resposta relativa às retas com declive positivo (ver figura 4.45), o Paulo concluiu que “cada vez que aumenta o  $a$ , a reta vai ficando mais próxima de 90 graus”. Ao fazer referência à medida da amplitude de um ângulo, o aluno parece estar a pensar também no semieixo positivo das ordenadas, mostrando assim compreender o efeito que a variação de  $a$  provoca na inclinação da reta, ou seja, à medida que o valor de  $a$  aumenta, as retas vão-se aproximando do eixo das ordenadas.

Quando o  $A$  é negativo a reta também gira negativa  
 Quando o  $A$  é menos negativo as retas vão se aproximando mais do eixo do  $x$

Figura 4.46 – Resposta à questão 2 da tarefa: funções no GeoGebra.

Na resposta relativa às retas com declive negativo (ver figura 4.46), a conclusão do Paulo é feita com base em duas ideias distintas. Ao escrever “quando o  $a$  é negativo, a reta também fica negativa”, o aluno está a pensar na posição da reta no referencial cartesiano, ou seja, se a reta passa no segundo quadrante ele considera-a negativa, porque as abcissas são negativas (caso em que o  $a$  é negativo). Apesar deste raciocínio, o aluno não retirou conclusões sobre a relação entre o sinal de  $a$  e a monotonia da função. Por outro lado, ao escrever “quando o  $a$  é menos negativo as retas vão-se aproximando mais do eixo do  $x$ ”, o Paulo mostra compreender o efeito que a variação do valor de  $a$  provoca no declive da reta, ou seja, à medida que o valor de  $a$  se aproxima de zero o declive diminui.

Na terceira questão pedia-se a construção e comparação de gráficos de funções do tipo  $y = 2x + b$ , atribuindo diferentes valores a  $b$  ( $b=0$ ,  $b=1$  e  $b=2$ ). Após introduzir as expressões no GeoGebra, o Paulo obteve o seguinte resultado no computador e deu a resposta que se apresenta a seguir (figura 4.47):



A medida que o  $b$  aumenta 1 no eixo do  $y$  diminui  $\rightarrow 0,5$ .  
 As retas são paralelas porque tem o mesmo  $a$ .

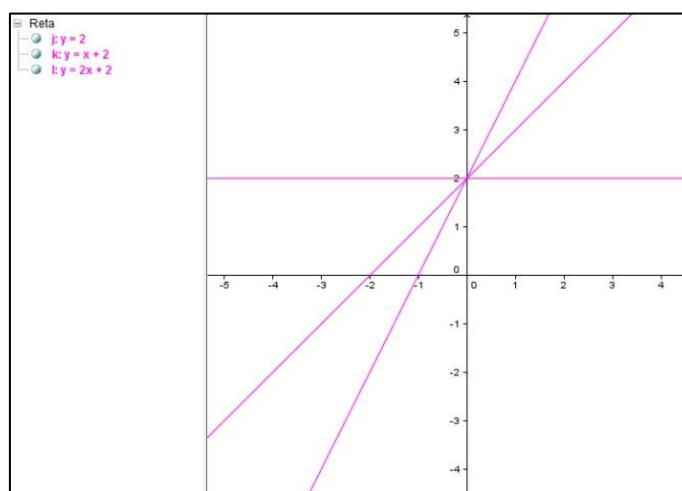
Figura 4.47 – Resposta à questão 3 da tarefa: funções no GeoGebra.

Na elaboração desta resposta (ver figura 4.47), o Paulo começou por identificar os pontos de intersecção das retas com os eixos coordenados, determinando assim os pontos (0;1) e (0;2) (ordenadas na origem) e os pontos (-0,5;0) e (-1;0) (abcissas na origem). Com base nestas coordenadas, ao concluir que “à medida que  $b$  aumenta 1 [nas ordenadas] e o  $x$  diminui 0,5 [nas abcissas]”, o

aluno parece estar a descrever um modelo dinâmico, em que um incremento no valor das ordenadas implica uma diminuição no valor das abcissas. Este raciocínio mostra que o aluno compreende o efeito provocado pela variação de  $b$  na posição das retas em relação ao eixo das ordenadas, mas também em relação ao eixo das abcissas.

Relativamente ao paralelismo das retas, o aluno concluiu corretamente que “as retas são paralelas porque têm o mesmo  $a$ ”, mostrando compreender a relação entre o valor de  $a$  e o paralelismo das retas no referencial cartesiano.

Na quarta e última questão da tarefa pedia-se a construção e comparação de gráficos de funções do tipo  $y = ax + 2$ , atribuindo diferentes valores a  $a$  ( $a=0$ ,  $a=1$  e  $a=2$ ). Após introduzir as expressões no GeoGebra, o Paulo obteve o seguinte resultado no computador e deu a resposta que se apresenta a seguir (figura 4.48):



As retas passam todas pelo ponto  $(0; 2)$ .  
Uma das retas é constante porque não tem declive.  
As retas não são paralelas, porque não têm o mesmo declive.  
À medida que o  $a$  aumenta vai girando mais próximo do eixo do  $y$ .

Figura 4.48 – Resposta à questão 4 da tarefa: funções no GeoGebra.

Durante esta resolução o Paulo chamou-me e pediu para eu ajudá-lo a confirmar o seu raciocínio:

Paulo: Todos os pontos passam pelo 2 [refere-se à ordenada na origem].

Professor: E porquê?

Paulo: Porque têm o mesmo  $b$ . E há uma reta que é constante [refere-se à função  $y = 2x$ ].

Professor: Nesse caso, qual é o valor de  $b$ ?

Paulo: É 2.

Professor: Qual é o declive da função constante?

Paulo: É 0.

Professor: As retas são paralelas?

Paulo: Não

Professor: Então qual é a relação com o declive?

Paulo: Para serem paralelas o declive tem de ser o mesmo.

Professor: Como é que concluis a partir das expressões analíticas que os gráficos não são paralelos?

Paulo: Não têm o mesmo  $a$ , não têm o mesmo declive.

O raciocínio do Paulo está correto. A partir do gráfico ele concluiu na sua resposta que “as retas passam todas pelo ponto  $(0;2)$ ” (ver figura 4.48), ou seja, interseccionam-se no ponto de coordenadas  $(0;2)$ . Se repararmos no diálogo anterior, percebemos que o aluno compreende que o facto das retas se interseccionarem neste ponto está relacionado com o facto do parâmetro  $b$  ter o mesmo valor nas expressões analíticas.

Ao longo da nossa conversa o aluno também identificou a função constante e estabeleceu a relação entre o seu gráfico e a expressão analítica  $y = 2$ , compreendendo que neste caso o valor do parâmetro  $a$  é zero. Com base nesta ideia o Paulo escreveu na resposta que “uma das retas é constante porque não tem declive” (ver figura 4.48).

Por fim, o aluno relacionou o paralelismo das retas com o declive, ao escrever que “as retas não são paralelas, porque não têm o mesmo declive” (ver figura 4.48) e acrescentou que “à medida que [o valor de]  $a$  aumenta [a reta] vai ficando mais próximo do eixo do  $y$ ”, referindo-se ao efeito que a variação de  $a$  provoca no gráfico da função.

### 4.2.3. Mudança de representação

#### Da representação algébrica à representação gráfica

No exemplo seguinte, retirado da ficha de avaliação (anexo 4), é pedido aos alunos para representarem graficamente a função  $i(x) = x + 1$ . Na construção do gráfico (ver figura 4.49), o Paulo começa por atribuir valores a  $x$  na expressão analítica, determina os respetivos valores de  $y$  e obtém os pontos de coordenadas  $(0;1)$ ,  $(1;2)$ ,  $(2;3)$  e  $(3;4)$ . Por fim, assinala os pontos no referencial cartesiano e representa o gráfico da função, obtendo o seguinte resultado:

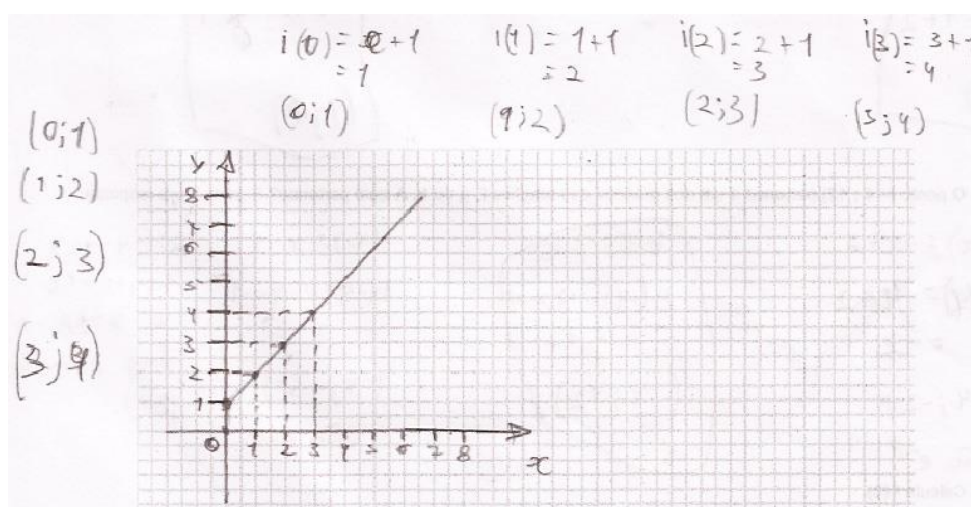


Figura 4.49 – Resolução da questão 3 da ficha de avaliação.

Na entrevista pedi ao Paulo que explicasse a estratégia utilizada na mudança de representação, e porque é que não atribuiu valores negativos à variável  $x$ :

Professor: Como é que fizeste para representar graficamente a função?

Paulo: Substituí o  $x$  por números.

Professor: Houve algum critério na escolha desses valores?

Paulo: Escolhi “ao calhas”. Substituí na função e encontrei os pontos.

Professor: Para traçares uma reta precisas de quantos pontos?

Paulo: Dois.

Professor: Mas determinaste quatro pontos. E porque é que não atribuíste valores negativos a  $x$ ?

Paulo: Não estou habituado a fazer para valores negativos.

Apesar do Paulo reconhecer que dois pontos são suficientes para representar uma reta, determinou quatro pontos e representou-os todos no referencial cartesiano. Quando lhe perguntei o motivo de ter determinado quatro pontos em vez de dois, não foi capaz de explicar a razão, e quando lhe perguntei porque é que não atribuiu valores negativos à variável  $x$ , o Paulo respondeu: “não estou habituado a fazer para valores negativos”, como se pode ver no final do diálogo anterior.

### Da representação gráfica à representação algébrica

Numa das questões propostas na ficha de avaliação (anexo 4), pedia-se aos alunos para determinarem a expressão analítica da função representada no referencial na figura seguinte:

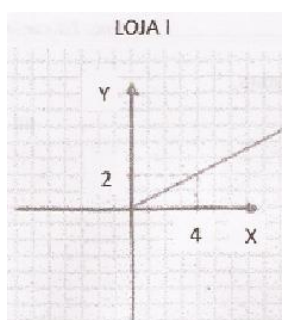


Figura 4.50 – Gráfico do enunciado da alínea 2.2 da ficha de avaliação.

Ao resolver esta questão o Paulo identifica o ponto assinalado no gráfico mas troca a abcissa pela ordenada e escreve incorretamente o ponto de coordenadas (2;4) (ver figura 4.51). Depois, substituiu o  $x$  pela abcissa 2 numa expressão do tipo  $f(x) = ax + b$  e concluiu, incorretamente, que a expressão analítica relativa ao gráfico da função representada é  $f(x) = x + 2$ , como se pode ver na sua resolução:

$$f(2) = 2 + 2 \cdot (2;4)$$

$$f(x) = x + 2$$

Figura 4.51 – Resolução da alínea 2.2 da ficha de avaliação.

O Paulo não se apercebeu que a expressão analítica determinada,  $f(x) = x + 2$ , nunca poderia corresponder ao gráfico da função representada no referencial (ver figura 4.50). Neste caso, a função é representada por uma reta que passa na origem, e por isso, a sua expressão analítica terá que ser do tipo  $f(x) = ax$  e nunca do tipo  $f(x) = ax + b$ , como foi considerado pelo aluno.

Na entrevista procurei que o Paulo corrigisse esta resposta e determinasse uma expressão correta:

Professor: Vê se consegues encontrar a expressão analítica da função.

Paulo: Acho que é  $f(x) = 2x$ .

Professor: Porquê?

Paulo: Porque se eu substituir o  $x$  por zero...

Professor: Testa um ponto do gráfico nessa expressão para ver se resulta.

Paulo: É substituir o  $x$  por 4.

Professor:  $f(4)$  corresponde a que valor? Pelo gráfico?

Paulo: 2. Não dá.

Professor: Qual é o tipo da expressão analítica que queres determinar?

Paulo:  $f(x) = ax$ .

Professor: O que é que precisas de determinar nessa expressão?

Paulo: O  $x$ .

Professor: Não é o  $x$ .

Paulo: O  $a$ .

Professor: Como é que determinas o  $a$ ?

A segunda tentativa do Paulo para determinar a expressão analítica da função representada no referencial (ver figura 4.50) resultou na seguinte resolução:

$f(x) = 2x$	$f(x) = ax$
$f(4)$	$y = ax$
	$x = 4$

Figura 4.52 – Resolução da alínea 2.2 da ficha de avaliação.

Durante a resolução da ficha de avaliação, o Paulo não foi capaz de estabelecer a relação entre o gráfico da função e uma expressão analítica do tipo  $y = ax$  (ver figura 4.51). Na segunda tentativa, realizada na entrevista, o aluno compreendeu que a expressão analítica relativa ao gráfico da função teria de ser do tipo  $y = ax$ , mas ao determinar a constante de proporcionalidade substituiu incorretamente  $a$  por 2, possivelmente sugestionado pelo facto do valor 2 surgir assinalado no referencial. Depois, utilizou uma estratégia do tipo tentativa-erro com o objetivo de testar se a expressão analítica determinada estava correta, no entanto, ao testar a abcissa 4 percebeu que se tinha enganado e desistiu de testar outros valores (ver figura 4.52).

Na seguinte questão (anexo 5) pedia-se aos alunos para determinarem a expressão analítica de uma função representada graficamente. O gráfico traduz uma relação entre a distância percorrida por um táxi e o custo a pagar pelo cliente, e o preço da viagem contempla uma taxa fixa, que sugere uma situação modelada por uma função afim não linear.



Figura 4.53 – Gráfico do enunciado da questão 4 da entrevista.

Este exemplo ilustra bem as dificuldades do Paulo na mudança da representação gráfica para a representação algébrica. Ao interpretar a situação, o aluno não compreende que a ordenada na origem é a taxa fixa e não relaciona o seu valor com o parâmetro  $b$  numa expressão do tipo  $y = ax + b$ . Assim, o aluno acaba por relacionar incorretamente a ordenada na origem 2 com o parâmetro  $a$ , numa expressão do tipo  $y = ax$ , e conclui incorretamente que a expressão analítica da função representada pelo gráfico é  $y = 2x$ , como se pode ver na resolução:

Handwritten work showing the substitution of  $x=0$  into  $y=2x$  to get  $y=0$ , and then testing the point  $(5;4)$  in the equation  $y=4x+2$ .

Figura 4.54 – Resolução da alínea 4.6 da entrevista.

Para testar o ponto de coordenadas  $(0;2)$  de forma a verificar se a expressão analítica determinada está correta, o Paulo substitui a abcissa 0 na expressão e apercebe-se que o resultado obtido não corresponde ao valor 2 (valor da ordenada), o que significa que a expressão analítica determinada está errada. Por minha sugestão, o aluno ainda chega a testar o ponto de coordenadas  $(5;4)$ , mas ao substituir os valores numa expressão do tipo  $y = ax + b$  troca a abcissa pela ordenada e não chega a qualquer conclusão.

### Da representação verbal à representação gráfica

O enunciado seguinte (anexo 2.2) descreve uma situação relativa a uma experiência laboratorial, realizada com o objetivo de controlar a qualidade da produção no fabrico de gomas. É pedido aos alunos para representarem graficamente essa situação e para o fazerem é-lhes fornecida a seguinte informação:

Representa graficamente a função **z**, que relaciona o tempo **x** em minutos e a temperatura **y** em graus celsius de um novo ingrediente de gomas testado durante **60 minutos**. Relativamente ao teste sabe-se que:

- (i) A temperatura registada no início da experiência (minuto 0) é de **10** graus celsius.
- (ii) A temperatura registada no final da experiência (minuto 60) é de **30** graus celsius.

Figura 4.55 – Enunciado da questão 3 da tarefa: mais funções.

Durante a entrevista o Paulo teve dificuldades na interpretação do enunciado. Quando lhe pedi para interpretar o ponto (i) (ver figura 4.55), respondeu que “cada minuto representa 10 graus celsius” e só depois de alguma insistência é que compreendeu o contexto da situação apresentada.

Na mudança da representação verbal para a representação gráfica, o aluno começou por construir os eixos coordenados, mas ao realizar a sua graduação questionou-se se poderia “ marcar [os valores nos eixos] de dez em dez”, acabando

por optar por esse valor. Depois, ao identificar os eixos, o Paulo associou corretamente a variável tempo ao eixo das abcissas e a variável temperatura ao eixo das ordenadas, determinou os pontos de coordenadas (0;10) e (60;30) a partir do enunciado e com base neles construiu o gráfico da função, como se pode ver na resolução que apresentou:

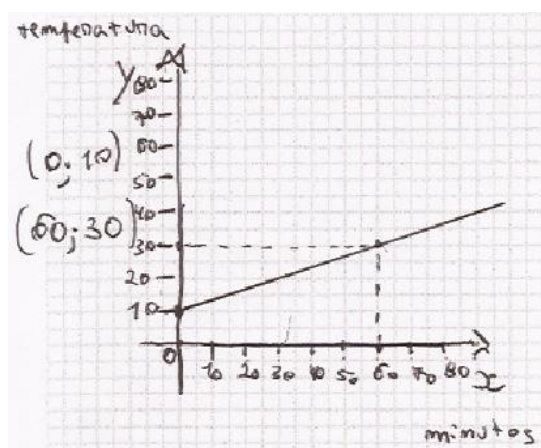


Figura 4.56 – Resolução da questão 3 da tarefa: mais funções.

Apesar da variável tempo estar definida para valores menores ou iguais a 60 minutos, o Paulo prolongou o gráfico da função para valores superiores. Não disponho de evidências que permitam explicar a opção do aluno, mas penso que, ou o aluno não leu o enunciado com atenção e não reparou na duração da experiência, ou após interpretar a situação abstraiu-se do contexto de semi-realidade e esqueceu-se que a experiência tinha uma duração limitada de 60 minutos.

Numa das questões exploradas durante a entrevista (anexo 5), foi pedido aos alunos para interpretarem e representaram graficamente uma situação relacionada com o custo suportado pelo cliente na deslocação de um técnico a casa. Esse custo é composto por uma taxa de deslocação e pelo preço da mão-de-obra, tal como se pode observar no seguinte quadro:

Taxa fixa de deslocação	Preço por hora de trabalho
15 €	10 €

Seja  $h$  a função que a  $x$  horas de trabalho na deslocação do técnico faz corresponder um preço a pagar  $y$  por cliente. Representa *graficamente* a função  $h$ .

Figura 4.57 – Enunciado da questão 2 da entrevista.

Apesar de compreender que a situação pode ser modelada por uma função afim não linear, o Paulo revela novamente dificuldades na interpretação do enunciado, como mostra o diálogo:

Professor: Compreendeste o enunciado?

Paulo: A taxa de deslocação é 15 euros e o preço por hora é 10 euros.

Professor: E que tipo de função está aqui em causa?

Paulo: Acho que vai ser afim. Porque daqui para aqui vai 5 [observa o quadro dado no enunciado e subtrai à taxa de deslocação o preço da hora de trabalho]. Se eu puser aqui 0 [refere-se ao eixo das abcissas], ali vai ter que ser 5 [refere-se ao eixo das ordenadas], porque a diferença é 5.

Relativamente à identificação das variáveis do problema e à estratégia para determinar pontos necessários à construção gráfica, conversámos o seguinte:

Professor: Qual é a variável  $x$ ?

Paulo: Horas de trabalho.

Professor: Onde é que representas o  $x$ ?

Paulo: Aqui [refere-se ao eixo horizontal].

Professor: E o  $y$ ?

Paulo: É o preço a pagar.

Professor: Vamos pensar nos pontos?

Paulo: Então, pode ser o ponto (15;10).

Professor: O  $x$  representa o quê?

Paulo: É a taxa fixa de deslocação.

Professor: Não.

Paulo: Horas de trabalho.

Professor: Então qual é o preço de 1 hora de trabalho?

Paulo: 10 Euros. Então se for 2 horas é o dobro, fica 20€. E a taxa de deslocação também tem de ser o dobro.

Professor: O técnico cobra duas vezes a taxa de deslocação?

Paulo: Então a taxa de deslocação vai ser sempre a mesma.

Depois de identificar as variáveis do problema, o Paulo utilizou a representação tabular como passo intermédio na mudança da representação verbal para a representação gráfica. Apesar da nossa conversa (diálogo anterior), na primeira versão que apresentou da tabela o aluno não incluiu a taxa de deslocação. Só depois de construir o gráfico, é que voltou novamente à tabela que tinha construído e acrescentou uma nova coluna com a taxa de deslocação, como se pode ver na figura seguinte:

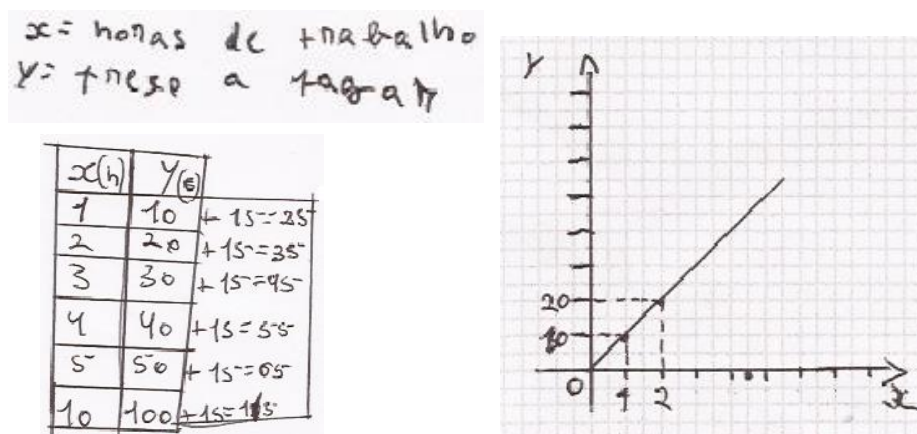


Figura 4.58 – Resolução da questão 2 da entrevista.

Para representar graficamente a função o Paulo traçou uma reta que passa na origem do referencial (ver figura 4.58). Quando o confrontei com esta situação, explicou que, como construiu primeiro a tabela sem a coluna relativa à taxa de deslocação, não se apercebeu desse facto, e não considerou a taxa de deslocação na construção do gráfico.

### Da representação tabular à representação gráfica

No exemplo seguinte retirado da tarefa “o preço das gomas” (anexo 1.1) pedia-se aos alunos para representarem graficamente três funções lineares. As coordenadas de pontos podem ser obtidas através de uma tabela preenchida na primeira alínea da tarefa (ver figura 4.59). Para determinar as imagens, o Paulo utiliza uma estratégia aditiva que consiste em adicionar a cada preço calculado o preço de um hectograma, obtendo assim o novo preço a pagar, como se pode ver na tabela:

Peso (hg)	1	2	3	4	5	...	11	...	13
Preço "Amoras" (€)	1,5	3	4,5	6	7,5	...	16,5	...	19,5
Preço "Mistura de frutos" (€)	1	2	3	4	5	...	11	...	13
Preço "Coca-colas" (€)	0,75	1,5	2,25	3	3,75	...	8,25	...	9,75

Figura 4.59 – Resposta à alínea 1.1 da tarefa: o preço das gomas.

A estratégia utilizada para determinar as imagens é explicada no diálogo seguinte:

Professor: Como é que chegaste aos preços a pagar para os diferentes pesos?

Paulo: Era sempre mais 1,5.

Professor: Então foste adicionando sempre 1,5?

Paulo: Cada hectograma era 1,5. Então se nós puséssemos mais 1 hectograma, tínhamos que pôr mais 1,5. Mas dá para fazer de outra maneira. Punha sempre o número do peso vezes 1,5.

Apesar de utilizar uma estratégia aditiva, o Paulo explicou que também consegue fazer de outra forma (através de uma estratégia multiplicativa). Este conhecimento é importante, porque permite determinar o preço a pagar para valores grandes da variável peso, por exemplo, para 100 hectogramas ou para 1000 hectogramas. Depois, ao construir o gráfico o Paulo relaciona os valores da tabela com coordenadas de pontos, tal como é explicado no diálogo:

Professor: Como é que construístes os gráficos?

Paulo: Ia tirando os pontos da tabela. Depois marquei todos [no referencial].

Professor: E não te lembraste de utilizar a expressão analítica?

Paulo: Pela tabela é mais fácil

No caso das “amoras” o Paulo identificou na tabela os preços de 1 e de 2 hectogramas, relacionou-os com coordenadas de pontos, assinalou essas coordenadas no referencial cartesiano e representou o gráfico da função. Depois repetiu o mesmo procedimento para os outros dois tipos de goma (“mistura de frutos” e “coca-colas”), e obteve a seguinte resolução:

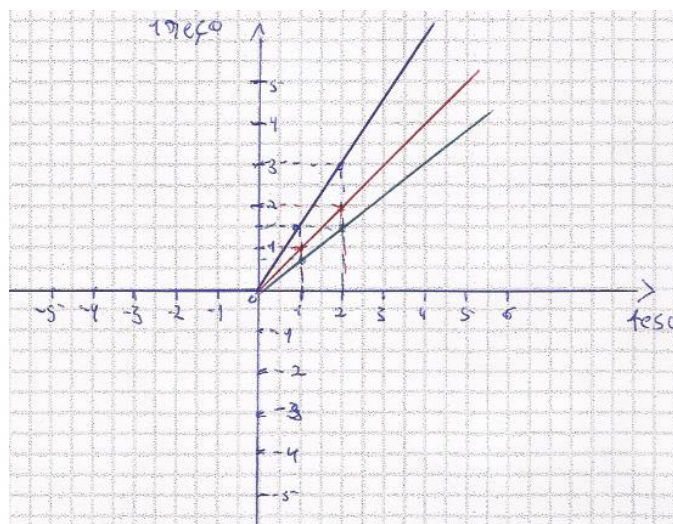


Figura 4.60 – Resolução da alínea 1.6 da tarefa: o preço das gomas.

### Da representação gráfica à representação tabular

No exemplo seguinte, referente a uma das questões propostas na entrevista (anexo 5), pedia-se aos alunos para construírem uma tabela onde organizassem os valores das variáveis relativas à situação representada pelo gráfico dado (ver figura 4.61). A função apresentada traduz uma relação entre a distância percorrida por um táxi e o custo a pagar por um cliente. O preço da viagem inclui uma taxa fixa, que sugere à partida uma situação modelada por uma função afim não linear.



Figura 4.61 – Gráfico do enunciado da questão 4 da entrevista.

O Paulo não utiliza a representação algébrica como passo intermédio na mudança da representação gráfica para a representação tabular, porque não consegue determinar a expressão analítica de uma função, o que lhe permitiria facilmente obter coordenadas de pontos não assinalados no gráfico. Assim, o aluno começa por

construir uma tabela onde inclui apenas os pontos assinalados no referencial dado, ou seja, os pontos de coordenadas (0;2) e (5;4) (ver figura 4.61). Para completar a tabela com pelo menos um ponto não assinalado, pedi ao aluno para determinar o custo a pagar por uma viagem de 10 quilómetros, como se pode ver no diálogo:

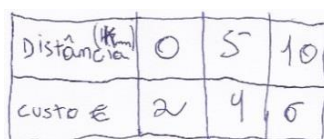
Professor: Consegues calcular o preço a pagar por 10 quilómetros?

Paulo: É 8. Não, é 6.

Professor: Não pode ser 8 porquê?

Paulo: Porque já estou a contar com a taxa fixa. Então, se fosse sem taxa fixa era 2, 2 vezes 2 dá 4. A taxa fixa mais 4 dá 6.

Depois da nossa conversa o Paulo construiu a seguinte tabela:



Distância (km)	0	5	10
custo €	2	4	6

Figura 4.62 – Resposta à alínea 4.6 da entrevista.

Para obter valores desconhecidos das variáveis, o Paulo começou por utilizar uma regra de três simples para determinar o custo a pagar por 10 quilómetros. Considerou que se o preço a pagar por 5 quilómetros é 4 euros, então o preço a pagar por 10 quilómetros é 8 euros, no entanto, percebeu que assim estava a duplicar a taxa cobrada ao cliente. Ao reformular a resposta, o Paulo considerou que sem taxa fixa, 5 quilómetros custam 2 euros e 10 quilómetros custam 4 euros. Só depois adicionou a taxa fixa, e concluiu corretamente que o preço a pagar por uma viagem de 10 quilómetros é 6 euros, como se pode ver na última coluna da tabela (ver figura 4.62).

### 4.3. O caso da Mariana

A Mariana é uma rapariga de 13 anos, e a Matemática é uma das disciplinas em que sente mais dificuldades, a par das Ciências Naturais e Físico-química. Distrai-se com facilidade e revela alguma insegurança nas intervenções que faz durante as aulas. Apesar de nunca ter ficado retida, obteve este ano a Matemática nível dois no primeiro período e nível três no segundo período, fruto de algum empenho da sua parte. No terceiro período a Mariana não conseguiu manter os índices de concentração e empenho verificados no período anterior, e por isso o seu aproveitamento voltou a baixar. Terminou o terceiro período com nível dois.

#### 4.3.1. Construção de gráficos cartesianos

Neste primeiro exemplo, retirado de um trabalho de casa (anexo 2.1), é pedido aos alunos para descreverem, com base no referencial apresentado na figura, o deslocamento desde a origem até aos pontos representados, efetuando o menor número possível de deslocamentos.

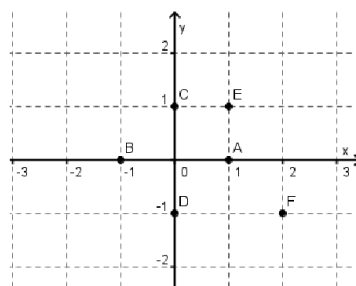
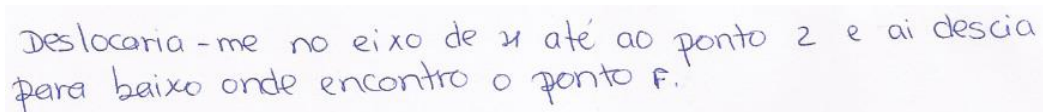


Figura 4.63 – Referencial do enunciado da questão 1 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.

A resposta apresentada pela aluna relativamente ao ponto F foi a seguinte:

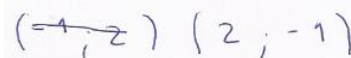


Deslocaria-me no eixo de  $x$  até ao ponto 2 e aí descia para baixo onde encontro o ponto F.

Figura 4.64 – Resposta à questão 1.1 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.

Na sua resposta, a Mariana descreve um movimento ao longo do eixo das abcissas, desde a origem até ao ponto de abcissa 2. Ao fazê-lo, utiliza uma notação incorreta, porque designa o valor 2 como sendo um ponto em vez de o designar como sendo uma abcissa. Por fim, ao descrever o deslocamento desde a origem até ao ponto F, a aluna não indica o número de unidades percorridas (ver figura 4.64).

Na sequência da questão anterior, pedi à Mariana para escrever as coordenadas dos pontos assinalados no referencial cartesiano (ver figura 4.63). Relativamente às coordenadas do ponto F a aluna escreveu o seguinte:



$(-1, 2)$   $(2, -1)$

Figura 4.65 – Resposta à questão 1.2 da tarefa: identificar e assinalar pares ordenados.

Observando a resposta anterior (ver figura 4.65), verificamos que a Mariana trocou a abcissa pela ordenada e começou por escrever o ponto  $(-1;2)$ . Perante esta incorreção, sugeri à aluna que seguisse a ordem das letras do abecedário, ou seja, que na leitura e na escrita de pontos considerasse primeiro o valor de  $x$  e só depois o valor de  $y$ , como se pode ver no diálogo seguinte:

Professor: Então quais são as coordenadas do ponto F?

Mariana: Então, é o -1 e o 2 [escreve o ponto  $(-1;2)$ ].

Ou primeiro é o 2 e depois é que é o -1?

Professor: Pensa lá melhor.

Mariana: Professor, não sei!

Professor: Então, podes seguir a ordem das letras do abecedário. Qual é a letra que aparece primeiro?

Mariana: O  $x$  [corrige e escreve o ponto  $(2;-1)$ ].

A figura seguinte mostra a resolução apresentada pela Mariana da alínea 1.6 da tarefa “o preço das gomas” (anexo 1.1), onde se pedia a representação gráfica de três funções lineares:

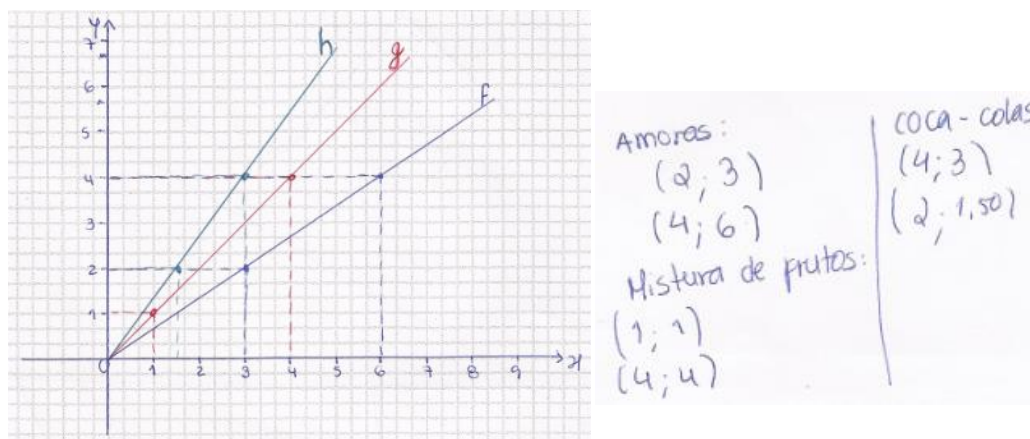


Figura 4.66 – Resolução da alínea 1.6 da tarefa: o preço das gomas.

Para representar graficamente as funções, a Mariana determinou para cada uma delas dois pontos, a partir de uma tabela preenchida na primeira alínea da tarefa, no entanto, ao assinalar as coordenadas dos pontos no referencial cartesiano, assinalou as abcissas no eixo das ordenadas e as ordenadas no eixo das abcissas (ver figura 4.66). Trata-se de um erro frequentemente cometido pela aluna, e que pode estar relacionado com falta de experiência na resolução deste tipo de questões.

No exemplo seguinte, retirado de uma tarefa realizada durante a aula (anexo 1.4), pedia-se a representação gráfica da função  $f(x) = 0,75x$ . Na construção do gráfico a Mariana utiliza meticulosamente a régua para representar valores nos eixos cartesianos. Como neste caso a constante de proporcionalidade é 0,75, a substituição de determinados valores de  $x$  na expressão analítica pode resultar em valores de  $y$  mais difíceis de representar por serem números decimais. Assim, sugeri à Mariana que determinasse primeiro as coordenadas, e depois escolhesse a unidade com base nos valores encontrados.

Depois de determinar os pontos de coordenadas  $(2;1,5)$  e  $(3;2,25)$ , e perante a necessidade de escolher a unidade de escala, a Mariana optou por trabalhar com o milímetro porque, como referiu, “é mais fácil porque os tracinhos já estão marcados

na régua”. Ao marcar valores nos eixos, a Mariana utilizou primeiro o centímetro e depois subdividiu-o em milímetros, como se pode ver na resolução:

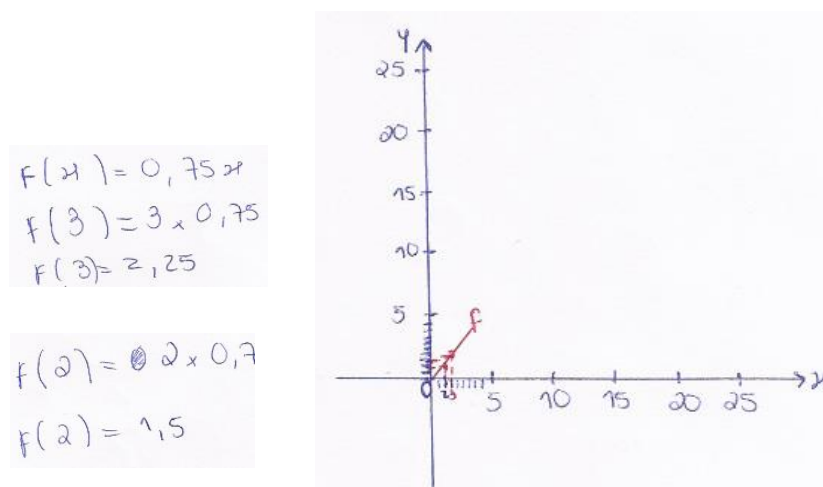


Figura 4.67 – Resolução do exercício 4 da tarefa: exercícios consolidação.

Ao representar as coordenadas dos pontos no referencial, a Mariana assinalou corretamente as abcissas, mas hesitou no momento de assinalar as ordenadas cujos valores eram decimais. Esta dificuldade surge expressa no diálogo seguinte:

Mariana: Como é que eu vou marcar aqui 1,5?

Professor: Estás a trabalhar com o milímetro não é?

Mariana: 1,5... Não dá professor!

Professor: Porquê?

Mariana: É aqui no meio, entre 1 e 2

Professor: Um ponto já está, agora vamos assinalar o outro.

Mariana: E agora como é que vou marcar o 2,25? Não fica bem!

Se observarmos a figura anterior (ver figura 4.67), verificamos que as coordenadas dos pontos não foram assinaladas de forma rigorosa, porque a unidade escolhida pela Mariana fez com que a distância entre os valores nos eixos fosse reduzida e dificultasse por isso a representação de determinados valores. Para além deste problema, também surgiram dificuldades na marcação de valores nos eixos, relacionadas com uma compreensão pouco clara, por parte da aluna, dos números racionais e da sua posição na reta.

Apesar de estar a trabalhar num contexto puramente matemático, a aluna limita a representação do gráfico ao primeiro quadrante do referencial. Quando lhe perguntei porque é que tinha considerado apenas valores positivos para a variável independente, a Mariana respondeu que “nós utilizamos mais esses [valores positivos] do que os negativos”. No fundo, esta resposta vem reforçar a ideia que já tinha surgido durante a análise dos dois casos anteriores, relacionada com a frequência com que os professores utilizam valores positivos para as variáveis, durante o trabalho que realizam com os alunos.

Numa das questões propostas na entrevista (anexo 5), pedia-se a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{x}{2} - 3$ . A Mariana representou graficamente a função da seguinte forma:

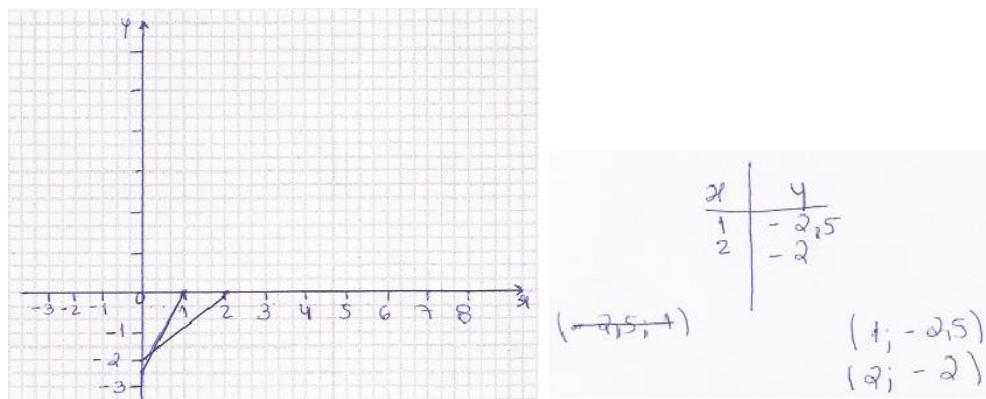


Figura 4.68 – Resolução da questão 5 da entrevista.

As dificuldades na determinação de coordenadas através da expressão analítica levaram a aluna a recorrer à máquina de calcular para determinar, por exemplo, o resultado de  $\frac{1}{2} - 3$ . Ao escrever o ponto de coordenadas (1;-2,5), Mariana enganou-se porque trocou a abcissa pela ordenada, no entanto, conseguiu detetar o erro e corrigi-lo atempadamente (ver figura 4.68). É curioso que, ao assinalar o ponto de coordenadas (1;-2,5), a Mariana assinala a abcissa 1 e a ordenada -2,5 e une as duas coordenadas por meio de uma reta. Depois segue o mesmo procedimento para assinalar o ponto de coordenadas (2;-2). Se repararmos na resolução apresentada (ver figura 4.68), verificamos que existem duas retas representadas no referencial. Mais tarde, durante a entrevista, a aluna afirmou que não se “estava a lembrar como é que se fazia”.

### 4.3.2. Dificuldades na interpretação gráfica

#### Reconhecer e interpretar funções representadas graficamente

No exemplo seguinte, retirado na ficha de avaliação (anexo 4), é pedido aos alunos para identificarem a loja que vende o limão mais barato. Na resposta que apresentou, a Mariana concluiu corretamente que a loja I vende o limão mais barato, mas ao explicar a sua escolha limitou-se a descrever o que observou nos gráficos e não apresentou uma justificação válida, como se pode ver na sua resposta:

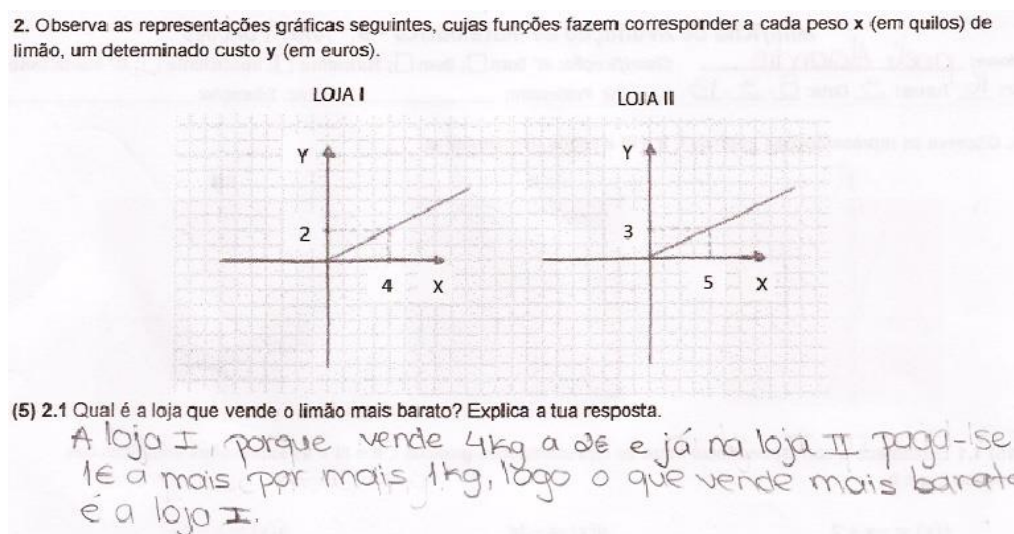


Figura 4.69 – Resposta à questão 2 da ficha de avaliação.

A Mariana podia ter justificado a sua resposta (a loja I vende o limão mais barato) se tivesse determinado, por exemplo, o valor da constante de proporcionalidade relativamente a cada uma das lojas, ou de outra forma, se tivesse utilizado uma regra de três simples. No entanto, nenhuma destas estratégias foi considerada pela aluna.

Relativamente ao cálculo de valores não assinalados no gráfico, durante a entrevista pedi à Mariana para calcular o custo a pagar por 4 quilos de limões na loja II (ver figura 4.69). Quando coloquei a questão, a Mariana olhou para a imagem II e sem efetuar cálculos respondeu imediatamente que 4 quilos de limões “seriam 2 euros, porque se 5 quilos são 3 euros, 4 quilos são 2 euros”. Na sequência desta resposta, pedi à Mariana para justificar o seu raciocínio por escrito:

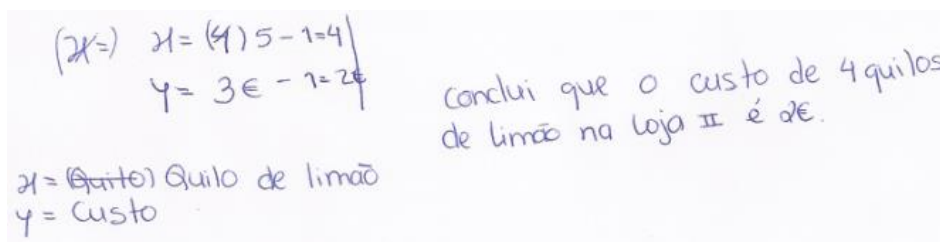


Figura 4.70 – Resposta à questão extra proposta na entrevista.

Seguindo o seu raciocínio, a Mariana considera que um quilo a menos no peso resulta em menos um euro no preço a pagar. Esta estratégia até poderia resultar, se a constante de proporcionalidade fosse 1, ou seja, se o preço a pagar por um quilo de limão fosse 1 euro. Intuitivamente, a aluna parece reconhecer uma situação de proporcionalidade direta, mas não atribui significado à constante de proporcionalidade e não consegue determiná-la. Por fim, expliquei à Mariana que pelos seus cálculos, se a cada quilo a menos retirássemos um euro, isso implicaria que a determinada altura 2 quilos de limões custassem 0 euros, o que no contexto da situação não faz qualquer sentido.

No exemplo retirado da ficha de avaliação (anexo 4) pedia-se aos alunos para estabelecerem uma correspondência entre os gráficos de três funções, uma linear e duas afins não lineares, e as respetivas expressões analíticas. O enunciado disponibilizado aos alunos foi o seguinte:

1. Observa as representações gráficas I, II e III a seguir apresentadas.

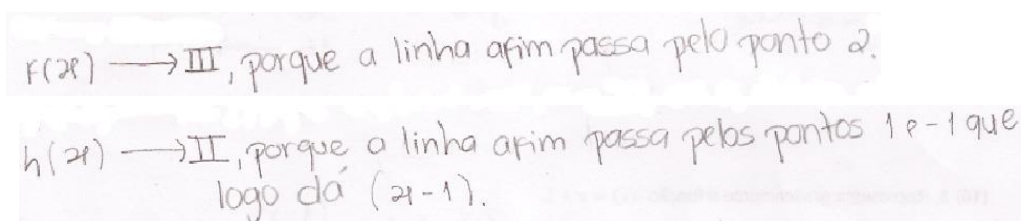
(15) 1.1 Estabelece a correspondência entre as representações gráficas I, II e III e as expressões analíticas das funções  $f$ ,  $g$  e  $h$ .

$f(x) = -x + 2$	$g(x) = -3x$	$h(x) = x - 1$
$f(x) \rightarrow$ III	$g(x) \rightarrow$ I	$h(x) \rightarrow$ II

Explica as tuas opções.

Figura 4.71 – Enunciado da questão 1 da ficha de avaliação.


No caso das funções afins não lineares, para justificar a correspondência entre a expressão analítica  $f(x) = -x + 2$  e o gráfico da imagem III, a Mariana escreveu “a linha afim passa pelo ponto 2”, e para justificar a correspondência entre a expressão analítica  $h(x) = x - 1$  e o gráfico da imagem II, a Mariana escreveu “a linha afim passa pelos pontos 1 e -1”, como mostra a sua resposta:



Handwritten text in two lines. The first line reads:  $f(x) \rightarrow \text{III}$ , porque a linha afim passa pelo ponto 2. The second line reads:  $h(x) \rightarrow \text{II}$ , porque a linha afim passa pelos pontos 1 e -1 que logo dá  $(x-1)$ .

Figura 4.72 – Justificação da questão 1 da ficha de avaliação.

No caso da função linear, para justificar a correspondência entre a expressão analítica  $g(x) = -3x$  e o gráfico da imagem I, a Mariana escreveu o seguinte:



Handwritten text:  $g(x) \rightarrow \text{I}$ , porque entre a II e a III foi a única que sobrou.

Figura 4.73 – Justificação da questão 1 da ficha de avaliação.

Na entrevista pedi à Mariana para explicar como é que estabeleceu a relação entre as expressões analíticas e os gráficos das funções:

Professor: Explica-me como é que relacionaste a expressão  $f(x) = -x + 2$  e o gráfico da imagem III.

Mariana: Olhei para a expressão analítica e vi que [no gráfico] na imagem III havia dois pontos por onde a linha passava [refere-se aos pontos (2;0) e (0;2) assinalados no referencial]. Depois na [função]  $g$  não estava a ver qual era o gráfico e passei para a [função]  $h$ .

Professor: E relativamente à função  $h$ ?

Mariana: Quando vi o ponto -1 [no gráfico da imagem II] reparei que era negativo, então escolhi [a expressão analítica da função  $h$ ].

Professor: O -1 não é um ponto. Um ponto tem sempre duas coordenadas.

Mariana: Então professor foi mesmo assim. Olhei para o [gráfico na imagem II] e vi que passa pelo ponto 1 e pelo ponto -1.

Professor: Pela coordenada 1 e pela coordenada -1. E relativamente à função linear  $g$ , como é que relacionaste a expressão analítica e o gráfico?

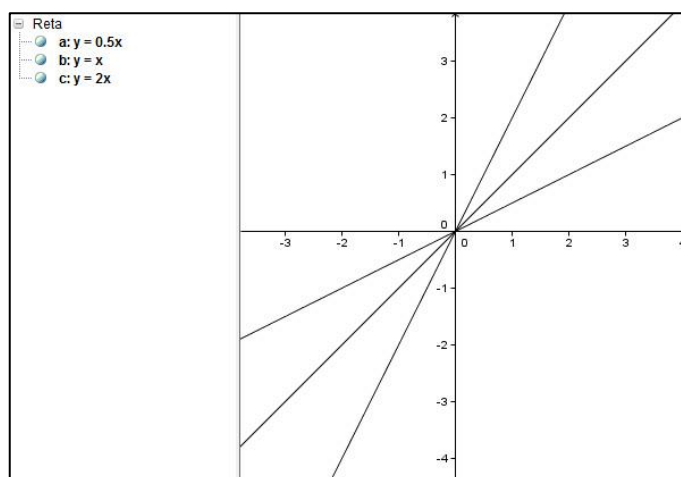
Mariana: Foi fácil porque foi a único que sobrou.

Pelas justificações escritas (ver figuras 4.72 e 4.73) e pelo diálogo anterior, percebe-se que a Mariana estabelece a relação entre a expressão analítica e o respetivo gráfico de forma intuitiva mas pouco rigorosa. A estratégia passa por identificar coordenadas assinaladas no gráfico, comparar essas coordenadas com parâmetros da expressão analítica e verificar se os valores das coordenadas e dos parâmetros coincidem. No caso da expressão analítica da função  $f$ , cujo  $b$  é 2, a Mariana escolhe o gráfico da imagem III porque é a única reta que passa no ponto de ordenada 2. No caso da expressão analítica da função  $h$ , cujo  $b$  é -1, a Mariana escolhe o gráfico da imagem II utilizando a mesma estratégia. No caso da expressão analítica da função  $g$ , a única função que é linear, a Mariana escolhe o gráfico da imagem I por exclusão de partes, como se pode ler no final do diálogo anterior.

A aluna parece ter noção que a relação entre o gráfico de uma função e a sua expressão analítica pode ser feita com base em pontos situados sobre os eixos do referencial e parâmetros da expressão analítica, mas não compreende muito bem como é que essa relação se estabelece. Neste caso, a estratégia utilizada pela aluna resultou porque as expressões analíticas têm parâmetros  $b$  diferentes, mas quando aplicada a casos em que as expressões têm o mesmo parâmetro  $b$ , esta estratégia pode revelar-se inadequada e pouco rigorosa.

### **A influência da variação dos parâmetros $a$ e $b$ no gráfico da função**

Este exemplo refere-se à tarefa realizada em laboratório no GeoGebra (anexo 1.5). Na primeira questão pedia-se a construção e a comparação de gráficos de funções do tipo  $y = ax$ , atribuindo diferentes valores positivos a  $a$  ( $a=0,5$ ,  $a=1$  e  $a=2$ ). Após introduzir as expressões no GeoGebra, a Mariana obteve o seguinte resultado no computador e deu a resposta que se apresenta a seguir (figura 4.74):



Quanto maior é o valor de  $a$  (maior) (mais) o declive fica mais perto do eixo de  $y$ .

Figura 4.74 – Resposta à questão 1 da tarefa: funções no GeoGebra.

Na resposta relativa às retas com declive positivo (ver figura 4.74), a Mariana concluiu que “quanto maior é o valor de  $a$ , o declive fica mais perto do eixo de  $y$ ”. Apesar da falta de rigor na terminologia, a ideia que a aluna quer transmitir ao escrever isto é que as retas se aproximam do eixo das ordenadas à medida que o valor de  $a$  aumenta. Este raciocínio mostra que a Mariana compreende o efeito que a variação de  $a$  nas expressões analíticas provoca na posição das retas no referencial.

Na entrevista procurei que a Mariana completasse esta resposta:

Professor: O que é que podes concluir mais sobre os gráficos?

Mariana: Não sei.

Professor: O que é que há de comum entre eles?

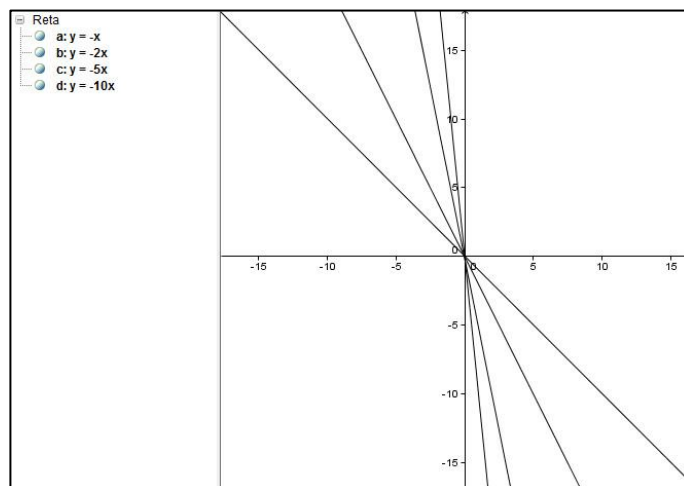
Mariana: É que são todas lineares.

Professor: Porquê?

Mariana: Porque passam no ponto de origem.

A partir do gráfico, a Mariana é capaz de relacionar retas que passam no “ponto de origem” com funções lineares, mas nos casos em que a representação gráfica não está disponível, a aluna nem sempre consegue identificar o tipo de função envolvida com base apenas da representação algébrica. Isto reforça a ideia de que a Mariana lida melhor com a representação gráfica de uma função, do que com a sua representação algébrica.

Na segunda questão pedia-se aos alunos que atribuíssem valores negativos a  $a$  na função do tipo  $y = ax$ . Após introduzir as expressões no GeoGebra, a Mariana obteve o seguinte resultado no computador e deu a resposta que se apresenta a seguir (figura 4.75):



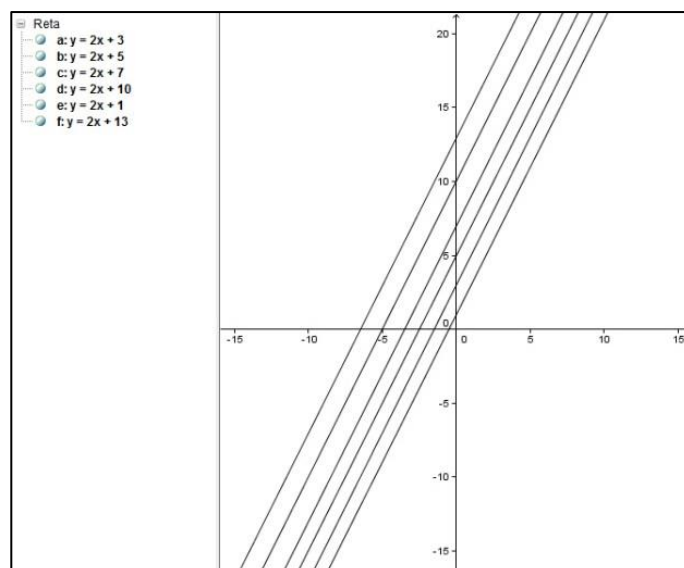
Em números negativos acontece o mesmo, quanto maior é o número maior é o declive.

As linhas do declive aproximam-se mais do eixo y.

Figura 4.75 – Resposta à questão 2 da tarefa: funções no GeoGebra.

Na resposta sobre as retas com declive negativo (ver figura 4.75), ao escrever “quanto maior é o número” a Mariana está a pensar no valor absoluto de  $a$ . Ela tem noção do efeito que a variação do valor de  $a$  provoca na posição da reta, no caso em que o sinal de  $a$  é negativo. Ao escrever “as linhas do declive aproximam-se mais do eixo do y”, a Mariana tenta explicar que à medida que o declive aumenta, as retas aproximam-se cada vez mais do eixo das ordenadas, apesar de utilizar incorretamente a expressão “linhas do declive” em vez de retas.

Na terceira questão pedia-se a construção e comparação de gráficos de funções do tipo  $y = 2x + b$ , atribuindo diferentes valores a  $b$  ( $b=0$ ,  $b=1$  e  $b=2$ ). A Mariana teve a iniciativa de testar mais valores para além dos que eram pedidos no enunciado, e depois de introduzir as expressões no GeoGebra obteve o seguinte resultado no computador e deu a resposta que se apresenta a seguir (figura 4.76):



Consoante o número de substituição do b os números mais elevados são os que estão mais longe do ponto de origem.

Figura 4.76 – Resposta à questão 3 da tarefa: funções no GeoGebra.

À medida que foi considerando valores de  $b$  cada vez maiores, a Mariana compreendeu que a ordenada na origem se foi afastando cada vez mais da origem do referencial cartesiano, como se pode ver na sua resposta (ver figura 4.76). Apesar de ir conseguindo transmitir as suas ideias por escrito, a aluna continua a utilizar uma terminologia pouco correta, de que é exemplo a frase “os números mais elevados”. Importa destacar que ao referir-se aos “números mais elevados”, a Mariana está a pensar nos valores da ordenada na origem.

Na entrevista procurei que a Mariana completasse a resposta anterior, o que me levou a abordar a questão do paralelismo das retas:

Professor: Relativamente à posição das retas, o que há de comum entre elas?

Mariana: São todas iguais.

Professor: Iguais?

Mariana: Paralelas. Porque não se tocam, não se cruzam.

Professor: Pela expressão analítica, és capaz de descobrir porquê?

Mariana: Então...

Professor: O que há de comum nas expressões analíticas das funções?

Mariana: O  $2x$ .

Professor: Que nome damos ao 2, que é o  $a$ ?

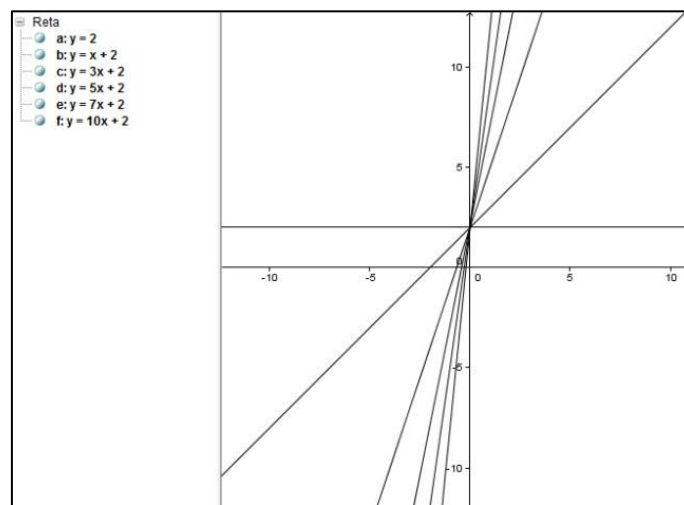
Mariana: Então, o professor já disse, é o  $a$ .

Professor: É o declive. E como os declives são iguais, as retas...?

[a aluna não responde]

Nesta altura a representação gráfica parece ser a única representação através da qual a Mariana consegue retirar conclusões sobre o efeito da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  no gráfico da função. Após alguma insistência, a aluna concluiu a partir do gráfico que as retas são paralelas, mas não relacionou o paralelismo com o facto do parâmetro  $a$  ser igual nas expressões analíticas.

Na quarta e última questão da tarefa pedia-se a construção e comparação de gráficos de funções do tipo  $y = ax + 2$ , atribuindo diferentes valores a  $a$  ( $a=0$ ,  $a=1$  e  $a=2$ ). Após introduzir as expressões no GeoGebra, a Mariana obteve o seguinte resultado no computador e deu a resposta que se apresenta a seguir (figura 4.77):



Concluimos que nenhuma passa ao ponto de origem e que ambas todas cruzam-se no ponto 2 do eixo y, e quanto mais elevado o  $a$  mais está aproximado do y.

Figura 4.77 – Resposta à questão 4 da tarefa: funções no GeoGebra.

Com base na observação do gráfico, a Mariana começou por concluir que “nenhuma [das retas] passa no ponto de origem (ver figura 4.77). Quando lhe pedi para justificar esta frase recorrendo à expressão analítica, respondeu apenas que “os

declives não são iguais” e não percebeu que a reta não passa na origem porque existe um parâmetro  $b$  diferente de zero na expressão analítica.

A segunda ideia refletida na conclusão da aluna está relacionada com o ponto de interseção das retas. Apesar de ter escrito incorretamente “ponto 2” em vez de ordenada 2, a Mariana identificou corretamente o ponto de coordenadas (0;2) como sendo o ponto em que as retas se intersectam. Quando lhe perguntei o que é que na expressão analítica explica o facto de as retas se intersectarem nesse ponto, a aluna respondeu “porque se repete o 2”. No entanto, quando lhe perguntei a que parâmetro corresponde esse valor 2 numa expressão do tipo  $y = ax + b$ , a aluna respondeu, incorretamente, “acho que é o  $a$ ”.

Na resposta anterior (ver figura 4.77) a Mariana não retira conclusões sobre o gráfico da função constante, por isso, procurei na entrevista que ela acrescentasse algo sobre isso. Quando lhe coloquei a questão, a aluna já tinha identificado o gráfico da função constante mas hesitou no momento de indicar o declive, como se pode ver no diálogo:

Professor: Que nome se dá a esta função [refiro-me à função constante]?

Mariana: Não me lembro.

Professor: Chama-se função constante. E qual é o seu declive?

Mariana: É sempre o mesmo.

Professor: Mas quando se trata de uma reta horizontal, qual é o declive?

Mariana: Não tem declive.

Professor: É mais correto dizer o declive é nulo.

A realização da tarefa no GeoGebra revelou algumas das fragilidades da Mariana, por exemplo, no trabalho com a expressão analítica de uma função. Nesta fase, o trabalho com a representação gráfica parece ser fundamental para se ultrapassarem algumas dificuldades, e deve servir como “ponte” para o estudo de outras representações, como a representação algébrica, contribuindo assim para uma melhor compreensão do conceito de função por parte da aluna.

### 4.3.3. Mudança de representação

#### Da representação algébrica à representação gráfica

No exemplo retirado da ficha de avaliação (anexo 4), é pedido aos alunos para representarem graficamente a função  $i(x) = x + 1$ . A Mariana apresentou a seguinte resolução:

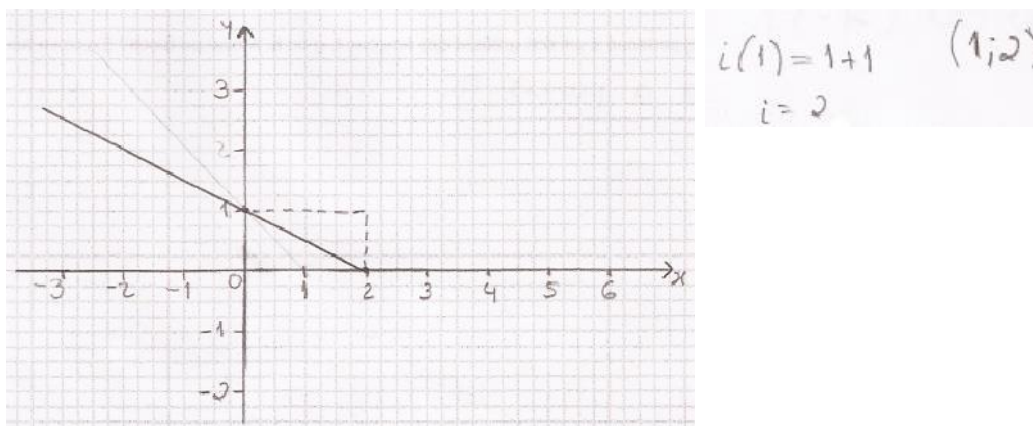


Figura 4.78 – Resolução da questão 3 da ficha de avaliação.

Durante a entrevista pedi à Mariana para explicar como é que construiu o gráfico da função

Professor: Como é que fizeste para representar graficamente a função?

Mariana: Então, escolhi o 1 e substituí na expressão.

Professor: E depois?

Mariana: Então, marquei o ponto.

Professor: Não assinalaste um ponto mas sim dois. Além disso trocaste a abcissa pela ordenada.

Na construção do gráfico, a Mariana começou por atribuir um único valor a  $x$  na expressão analítica, determinou o respetivo valor de  $y$  e obteve dessa forma um único ponto de coordenadas  $(1;2)$ . Depois, ao assinalar este ponto no referencial, a aluna assinalou incorretamente a abcissa 1 no eixo das ordenadas e a ordenada 2 no eixo das abcissas, ficando assim com dois pontos assinalados em vez de um (ver figura 4.78).

## Da representação gráfica à representação algébrica

Numa das questões propostas na ficha de avaliação (anexo 4) pedia-se aos alunos para determinarem a expressão analítica da função representada na figura:

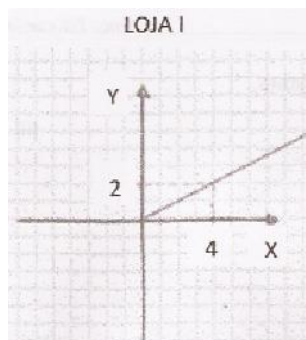


Figura 4.79 – Gráfico do enunciado da alínea 2.2 da ficha de avaliação.

Para determinar a expressão analítica desta função, a Mariana começou por relacionar o seu gráfico com uma expressão do tipo  $y = ax$ , mas acrescentou posteriormente à sua resposta a expressão  $y = 2 + ax$ , como se pode ver na resolução:

$y = ax$	$y = a(2)$	2€ → 4kg
$y = 2 + ax$	1	3€ → 5kg
	$y = 2$	1€ → 3kg

Figura 4.80 – Resolução da alínea 2.2 da ficha de avaliação.

Durante a entrevista, a Mariana confirmou as suas dificuldades na obtenção da expressão analítica e explicou que numa primeira tentativa para resolver a questão pensou na expressão geral de uma função linear. Depois, como não tinha a certeza se estava a fazer bem, decidiu acrescentar um parâmetro  $b$  à expressão que tinha considerado inicialmente, ficando dessa forma com a expressão  $y = 2 + ax$ . As dificuldades da Mariana na passagem da representação gráfica para a representação algébrica parecem dever-se, em primeiro lugar, ao facto de ela não conseguir associar uma expressão analítica adequada à situação apresentada, e em segundo lugar, ao facto de ela não conseguir determinar os parâmetros da expressão analítica.

### Da representação verbal à representação gráfica

No exemplo seguinte, retirado da tarefa “mais funções” (anexo 2.2), é pedido aos alunos para representarem graficamente uma experiência laboratorial realizada com o objetivo de controlar a qualidade da produção no fabrico de gomas. Para isso foi-lhes fornecida a seguinte informação:

Representa graficamente a função **z**, que relaciona o tempo **x** em minutos e a temperatura **y** em graus celsius de um novo ingrediente de gomas testado durante **60 minutos**. Relativamente ao teste sabe-se que:

- (i) A temperatura registada no início da experiência (minuto 0) é de **10** graus celsius.
- (ii) A temperatura registada no final da experiência (minuto 60) é de **30** graus celsius.

Figura 4.81 – Enunciado da questão 3 da tarefa: mais funções.

A Mariana foi capaz de interpretar corretamente o enunciado, como se pode ver no diálogo seguinte:

Professor: Então, o que é que percebeste do enunciado?

Mariana: Que a temperatura registada no início da experiência é de 10 graus celsius e no final, que é de 60 minutos, é de 30 graus celsius. Tenho de representar o tempo no x e a temperatura no y.

Professor: E quais são as coordenadas que vais utilizar?

Mariana: Zero, ponto e vírgula, dez [refere-se ao ponto de coordenadas (0;10)] e sessenta, ponto e vírgula, trinta [refere-se ao ponto de coordenadas (60;30)].

Professor: E relativamente à escala?

Mariana: Se eu trabalhar com 5 não dá. Vou trabalhar com 10.

Posteriormente surgiram dúvidas no momento de assinalar as coordenadas dos pontos no referencial cartesiano:

Mariana: Professor, como é que eu vou representar o ponto (0;10)?

Professor: A primeira coordenada é zero. Vais representá-la em que eixo?

Mariana: Do x.

Professor: E a segunda coordenada é...

Mariana: O 10...É aqui o ponto. É uma linha afim.

Na mudança da representação verbal para a representação gráfica, a Mariana começou por interpretar o enunciado da questão, identificou as variáveis tempo e temperatura associando-as aos respetivos eixos, determinou as coordenadas dos pontos (0;10) e (60;30) a partir da informação fornecida do enunciado, assinalou-os no referencial cartesiano e por fim construiu o gráfico da função, como se pode ver na resolução que apresentou:

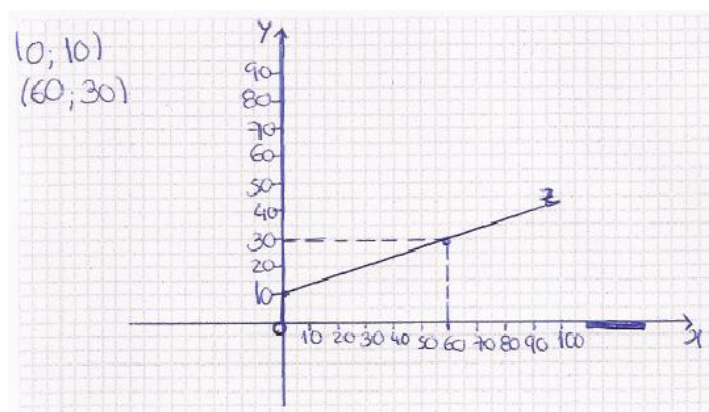


Figura 4.82 – Resolução da questão 3 da tarefa: mais funções.

Ao observarmos esta resolução (figura 4.82), verificamos que a Mariana representou corretamente o início da experiência (minuto 0), mas prolongou o gráfico da função para valores superiores a 60 (minutos). Não disponho de evidências que permitam encontrar uma explicação para isto, mas admito que depois de assinalar os pontos no referencial cartesiano, a aluna se tenha esquecido do intervalo de valores admitidos pela variável tempo e tenha procedido como se estivesse a trabalhar num contexto puramente matemático.

Numa das questões exploradas na entrevista (anexo 5), foi pedido aos alunos para interpretarem e representarem graficamente uma situação relacionada com o custo suportado pelo cliente na deslocação de um técnico a casa. O enunciado fornecido aos alunos foi o seguinte:

Taxa fixa de deslocação	Preço por hora de trabalho
15 €	10 €

Seja  $h$  a função que a  $x$  horas de trabalho na deslocação do técnico faz corresponder um preço a pagar  $y$  por cliente. Representa graficamente a função  $h$ .

Figura 4.83 – Enunciado da questão 2 da entrevista.

Numa primeira fase, a Mariana não conseguiu interpretar corretamente o enunciado dado, porque identificou os valores 15€ e 10€ fornecidos no quadro (ver figura 4.83) como sendo coordenadas de pontos. Repare-se no diálogo seguinte:

Mariana: Mas professor, eu só tenho aqui dois pontos [refere-se aos valores 15€ e 10€ dados no enunciado].

Professor: Não te dão pontos, tens tu de determiná-los.

Imagina que chamas um técnico a casa. Quanto é que ele cobra de taxa fixa?

Mariana: 15 Euros.

Professor: E mais o preço por hora, que é quanto?

Mariana: 10 Euros.

Professor: Então quais são as variáveis do problema?

Mariana: O  $x$ , que são as horas e o  $y$ , que é o preço a pagar por cliente.

Professor: Pensa numa estratégia para determinares valores das variáveis.

Imagina que o técnico vai a tua casa e fica lá 1 hora. Quanto tens de pagar?

Mariana: 10 Euros.

Professor: Só?

Mariana: Então, uma hora 10€, duas horas 20€, e assim sucessivamente.

Professor: E quanto é que o técnico cobra de deslocação?

Mariana: 15 Euros.

Professor: Então quanto é que custa uma hora de trabalho?

Mariana: 10 Euros mais a taxa de deslocação que dá 25 euros.

Depois da nossa conversa, a Mariana compreendeu o contexto da situação e percebeu como poderia determinar coordenadas de pontos a partir do enunciado, no entanto, se observarmos a sua resolução (ver figura 4.84), vemos que houve uma troca da abcissa pela ordenada na escrita do ponto (1;25). Depois de identificar o erro, a Mariana corrigiu-o e escreveu corretamente as restantes coordenadas. O passo seguinte foi construir uma tabela, onde incluiu os valores da variável dependente  $y$  (preço a pagar) na primeira coluna, e os valores da variável independente  $x$  (horas de trabalho) na segunda coluna, como se pode ver na resolução apresentada pela aluna:

$(25, t)$

$(1, 25)$   
 $(2, 35)$   
 $(3, 45)$   
 $(4, 55)$

$y = €$	$x = h$
25	1
35	2
45	3
55	4

Figura 4.84 – Resolução da questão 2 da entrevista.

Depois de construir a tabela, a Mariana representou graficamente a função da seguinte forma:

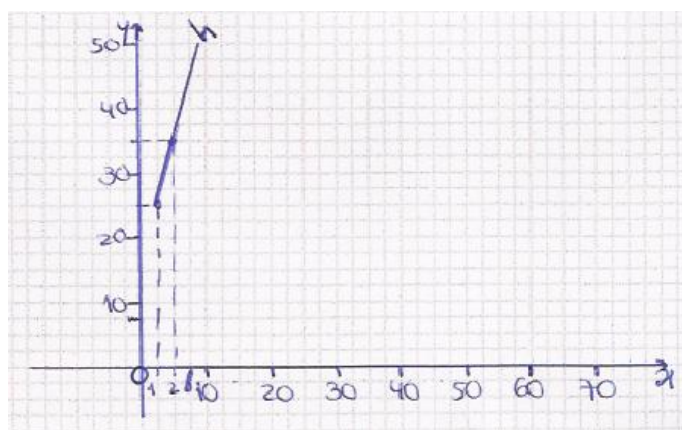


Figura 4.85 – Continuação da resolução da questão 2 da entrevista.

Apesar do objetivo nesta fase do estudo não ser analisar a construção gráfica, a resolução apresentada pela aluna (ver figura 4.85) merece que se façam alguns comentários. Em primeiro lugar, as distâncias entre os valores no eixo das abcissas não são uniformes, porque se cada quadrícula corresponde a 1 hora de trabalho, 10 horas de trabalho deveriam corresponder a 10 quadrículas. Em segundo lugar, o gráfico da função deveria passar no ponto de coordenadas  $(0;15)$ , que corresponde à situação em que o técnico se desloca a casa do cliente e cobra apenas uma taxa de deslocação. O facto de não ter prolongado o gráfico mostra que a Mariana não considerou esta hipótese.

Resumindo, no primeiro exemplo, relativo à experiência laboratorial (ver figura 4.81), a Mariana faz a passagem da representação verbal para a representação gráfica de uma forma direta, ou seja, identifica no enunciado valores para as

variáveis, relaciona-os com coordenadas de pontos e assinala-os no referencial cartesiano. No segundo exemplo, relativo à deslocação do técnico (ver figura 4.83), a aluna utiliza a representação tabular como passo intermédio na mudança da representação verbal para a representação gráfica. Esta diversidade de estratégias sugere que, a necessidade de utilizar uma representação auxiliar na mudança da representação verbal para a representação gráfica, pode estar relacionada com o nível de complexidade do problema, ou com a capacidade que o aluno tem para interpretar e organizar a informação dada no enunciado da questão.

### Da representação tabular à representação gráfica

O exemplo seguinte diz respeito a uma tarefa realizada na aula (anexo 1.1), onde se pedia a representação gráfica de três funções lineares. As coordenadas dos pontos podem ser obtidas através de uma tabela preenchida na primeira alínea da tarefa (ver figura 4.86). No cálculo das imagens, a Mariana privilegia uma estratégia aditiva que consiste em adicionar a cada preço calculado o preço de um hectograma, obtendo dessa forma o novo preço a pagar, como se pode ver na tabela:

Peso (hg)	1	2	3	4	5	...	11	...	13	20
Preço "Amoras" (€)	1,5	3	4,5	6	7,5	...	16,5	...	19,5	29,5
Preço "Mistura de frutos" (€)	1	2	3	4	5	...	11	...	13	20
Preço "Coca-colas" (€)	0,75	1,50	2,25	3	3,75	...	8,25	...	9,75	

Figura 4.86 – Resposta à alínea 1.1 da tarefa: o preço das gomas.

Quando perguntei à Mariana qual a estratégia que tinha utilizado no cálculo de valores no caso das “amoras”, respondeu que “como o preço das amoras é 1,5€ por cada hectograma, é só dobrar. O preço de 2 hg é 3€, depois 3€ é mais 1,5€, e assim sucessivamente”.

Os valores na última coluna da tabela (ver figura 4.86) dizem respeito ao preço a pagar por 20 hectogramas de gomas e foram determinados na sequência de um pedido meu durante a entrevista. No caso das “amoras”, a estratégia utilizada pela Mariana no cálculo do preço a pagar por 20 hectogramas (ver figura 4.87), parece indicar que a estratégia aditiva é a única estratégia utilizada pela aluna para resolver este tipo de questão. Curiosamente, quando lhe pedi para calcular o preço a

pagar por 1000 hectogramas, a aluna respondeu que “não podia” porque “são muitos raciocínios”, referindo-se ao número de cálculos que teria de efetuar.

13 = 19,5	17 = 25
14 = 21	18 = 26,5
15 = 22,5	19 = 28
16 = 24	20 = 29,5

Figura 4.87 – Resolução da alínea 1.1 da tarefa: o preço das gomas.

O passo seguinte foi ajudar a Mariana a relacionar os valores da tabela com coordenadas de pontos:

Professor: Como é que obténs coordenadas de pontos no caso das amoras?

Mariana: Tenho de tirar daqui pontos [refere-se aos valores da tabela].

Professor: E no caso das amoras?

Mariana: O 3 e o 6 [refere-se às imagens 3 e 6].

Professor: Não te esqueças que um ponto tem duas coordenadas.

Mariana: Então quais são os pontos que eu tiro?

Expliquei à Mariana ser possível relacionar valores de pesos com abcissas de pontos, e valores de preços a pagar com ordenadas de pontos. Depois da minha explicação, a aluna identificou na tabela dois pontos para cada uma das funções (amoras, mistura de frutos e coca-colas), assinalou-os no referencial cartesiano e traçou as retas correspondentes, como se pode ver na resolução que apresentou:

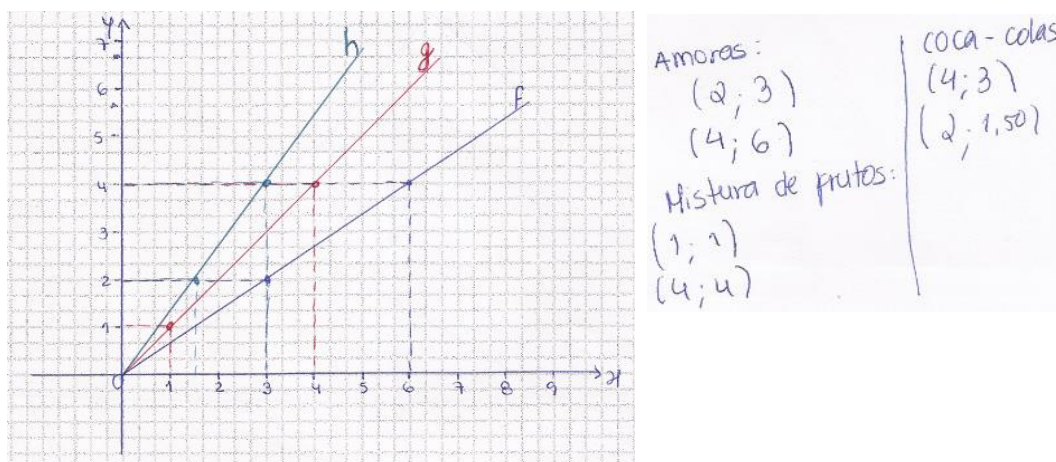


Figura 4.88 – Resolução da alínea 1.6 da tarefa: o preço das gomas.

### Da representação gráfica à representação tabular

No exemplo seguinte, proposto na entrevista (anexo 5), pedia-se aos alunos para construírem uma tabela onde organizassem os valores das variáveis relativas à situação representada pelo gráfico dado (ver figura 4.89). A função em causa traduz uma relação entre a distância percorrida por um táxi e o custo a pagar por cliente. O preço da viagem inclui ainda uma taxa fixa, sugerindo que se utilize uma função afim não linear para modelar a situação apresentada. O gráfico da função fornecido no enunciado foi o seguinte:



Figura 4.89 – Gráfico do enunciado da questão 4 da entrevista.

Na identificação de valores das variáveis a incluir na tabela pedida, a Mariana conseguiu determinar apenas os pontos assinalados no referencial dado no enunciado (ver figura 4.89). De forma a completar a tabela com valores de pontos não assinalados, pedi-lhe para determinar o custo a pagar por uma viagem de 10 quilómetros. Como a aluna não conseguiu determinar a expressão analítica da função representada, não utilizou a representação algébrica como passo intermédio na mudança de representação. Assim, a estratégia para obter pontos não assinalados consistiu em construir um novo gráfico, onde foram assinaladas as coordenadas que já estavam assinaladas no referencial dado no enunciado (ver figura 4.89) e novas coordenadas obtidas através de uma espécie de estratégia aditiva, como se pode ver na resolução apresentada:

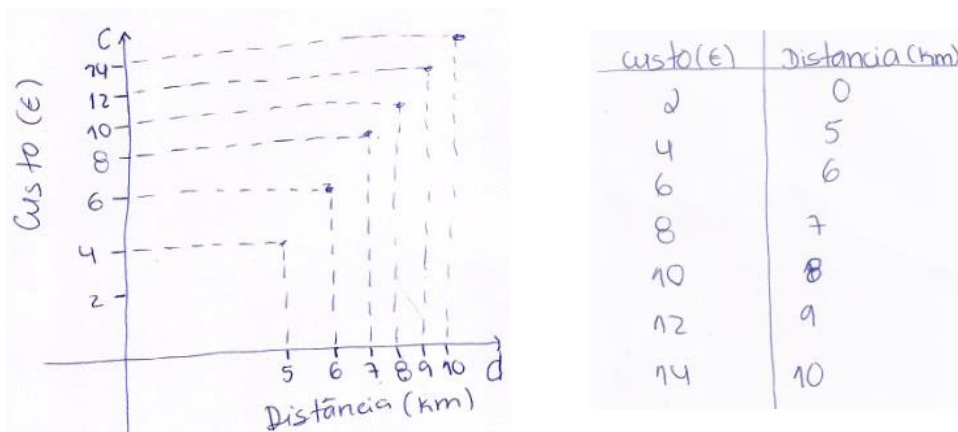


Figura 4.90 – Resolução da alínea 4.6 da entrevista.

Na construção do novo gráfico (ver figura 4.90) a Mariana começou por assinalar as coordenadas que surgiam assinaladas no referencial dado no enunciado. Posteriormente calculou a diferença entre os valores das ordenadas 2 e 4, que é 2, e com base neste resultado concluiu incorretamente que os valores das ordenadas são sempre múltiplos de dois. A partir daqui, a aluna determinou as ordenadas, 6, 8 e 10, assinalou-as no referencial e, sem qualquer justificação, assinalou as abcissas 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Depois traçou as linhas auxiliares, assinalou os pontos, e estabeleceu a correspondência entre as abcissas e as ordenadas, concluindo incorretamente que uma viagem com 10 quilómetros custa 14 euros. Por fim, a aluna relacionou as coordenadas dos pontos assinalados no novo gráfico com valores de variáveis, e construiu a tabela pedida com base nesses valores (ver figura 4.90).

## 5. CONCLUSÃO

Neste capítulo começo com uma breve síntese do estudo realizado, procuro a seguir responder às questões de investigação com base nos resultados obtidos e termino com uma reflexão pessoal sobre a experiência que realizei.

### 5.1. Síntese do estudo

Recordo que o presente estudo tem como principal objetivo compreender o modo como lidam os alunos com a representação gráfica das funções linear e afim. Procurei compreender como procedem na construção de gráficos em diferentes contextos e as dificuldades que sentem na interpretação da representação gráfica e na passagem do tipo de representação gráfica para outro tipo de representação, e reciprocamente. De forma a obter respostas que me permitissem retirar conclusões relativamente ao objetivo traçado, formulei o seguinte conjunto de questões:

- Como procedem os alunos na construção de gráficos de funções lineares e afins em diferentes contextos?
- Quais as principais dificuldades com que os alunos se confrontam na interpretação da representação gráfica das funções?
- Quais as principais dificuldades com que os alunos se confrontam na passagem da representação gráfica para outro tipo de representação, e reciprocamente?

O estudo foi desenvolvido com base na unidade de ensino “Funções linear e afim” enquadrada no tópico Funções, no tema Álgebra. A intervenção teve a duração de treze tempos letivos de 45 minutos cada e foi realizada numa turma do 8.º ano, num ambiente de ensino predominantemente exploratório onde propus um conjunto de tarefas formuladas em contextos de semi-realidade e puramente matemáticos.

O tipo de análise realizada enquadra-se no paradigma interpretativo, seguiu uma abordagem qualitativa e conduziu à elaboração de três estudos de caso, em que todos os alunos tinham desempenhos académicos distintos. Os principais instrumentos utilizados na recolha de dados foram a observação das aulas, as

produções escritas dos alunos e entrevistas realizadas no final da unidade com o objetivo de clarificar aspetos inerentes às tarefas realizadas nas aulas e recolher informação complementar.

## **5.2. Conclusões**

Neste ponto apresento as principais conclusões organizadas de acordo com as questões de estudo, começando primeiro por sintetizar algumas estratégias e dificuldades dos alunos na construção de gráficos de funções. Numa segunda fase foco-me nas estratégias e dificuldades dos alunos na interpretação gráfica, e por último analiso a mudança da representação gráfica para outros tipos de representações, e reciprocamente.

### **5.2.1. Construção de gráficos cartesianos**

No início da unidade, e devido ao número de construções gráficas que os alunos iriam realizar, decidi avaliar os seus conhecimentos neste assunto e decidir com base nisso se dedicava ou não tempo a fazer revisões sobre esta matéria. Na primeira aula pedi um trabalho de casa que me permitiu, entre outras coisas, obter informação sobre a forma como os alunos utilizam a terminologia e a notação. No caso do Raul, não surgiram dificuldades relacionadas especificamente com a construção de gráficos, no entanto, o estudo revelou da sua parte pequenas incorreções relacionados com a terminologia, como por exemplo na tarefa realizada no GeoGebra em que o aluno chamou variável a um parâmetro, e algum abuso de linguagem quando na mesma tarefa se referiu à origem do referencial como sendo o ponto médio. No caso deste aluno, os erros não parecem estar relacionados com falta de bases matemáticas e resultam geralmente de falhas de atenção momentâneas. Na utilização da terminologia e da notação, o Paulo e a Mariana revelaram dificuldades de outra natureza, que podem estar relacionadas com bases matemáticas menos sólidas. Por exemplo, ao escrever as coordenadas de um ponto, o Paulo escreve

$B = -1x$  em vez de escrever  $(-1;0)$  e, no caso da Mariana, uma abscissa ou uma ordenada são frequentemente designadas por pontos.

Relativamente a aspetos ligados com a construção gráfica, geralmente os alunos representam os eixos coordenados por duas linhas ortogonais e uma seta a indicar o sentido positivo dos valores do eixo, e seguem o método convencionado na identificação dos eixos coordenados e na representação das variáveis, ou seja, representam a variável  $x$  no eixo horizontal e a variável  $y$  no eixo vertical. Quando pedi aos alunos para identificarem a variável independente e a variável dependente e explicarem a relação entre ambas, apenas o Raul conseguiu fazê-lo com compreensão. Apesar do Paulo e da Mariana não revelarem dificuldades na associação das variáveis aos respetivos eixos, o facto de terem de explicar a relação entre a variável independente e a variável dependente, cria-lhes alguma hesitação e confusão, corroborando a ideia defendida por Ponte (1984) de que em determinados casos, apesar dos alunos apresentarem uma representação gráfica correta, o professor pedir-lhes para explicarem o significado e a relação entre variável independente e variável dependente pode confundir mais do que clarifica.

Os espaços quadriculados fornecidos no enunciado para a construção gráfica facilitaram o trabalho de graduação dos eixos e em alguns casos a quadrícula serviu mesmo como uma referência da unidade. No caso do Raul, o único problema detetado na graduação dos eixos ocorreu num exemplo em que ele prescindiu da régua na representação de valores decimais nos eixos. Assim, importa frisar que a não utilização de régua por parte dos alunos, teve como consequência uma degradação global da qualidade da representação gráfica. Nos casos do Paulo e da Mariana, as incorreções detetadas na representação de valores decimais nos eixos sugerem dificuldades de outra natureza, nomeadamente, uma compreensão pouco clara dos números racionais e da sua representação na reta real. Num dos exemplos resolvidos pela Mariana, a unidade escolhida (milímetro) criou-lhe dificuldades na graduação dos eixos e na representação de pontos, porque reduziu muito a distância entre os valores nos eixos e dificultou a representação de números decimais ou centesimais. Estes resultados vão ao encontro dos registados por Ponte (1984), em que os alunos sentiram dificuldades no trabalho com escalas e revelaram: (i) inexistência de uma escala uniforme na representação de variáveis uniformes; (ii) hesitação na escolha ou uma escolha inadequada da unidade; e (iii) pouca atenção na escolha da unidade utilizada na construção da escala.

De um modo geral, os alunos compreenderam a relação entre os valores de uma variável e as coordenadas de um ponto, mas nem todos revelaram o mesmo conhecimento ao assinalar coordenadas no referencial cartesiano. O caso do Paulo é curioso, porque apesar de ele identificar e assinalar corretamente coordenadas de pontos, ao fazê-lo revela a tendência para considerar primeiro a ordenada e depois a abcissa, o que mostra que os seus conhecimentos nesta área ainda não estão devidamente consolidados. No entanto, também importa referir que a frequência com que o Paulo comete este tipo de incorreção foi diminuindo ao longo do estudo. O caso da Mariana é mais complicado, porque mesmo depois de lhe ser indicado e explicado o erro, a aluna continuou a trocar a ordem das coordenadas e a representar as abcissas no eixo do y e as ordenadas no eixo do x. No seu caso, o erro parece resultar de falhas de atenção momentâneas, mas também de falta de bases relativamente a matérias relacionadas com a interpretação e representação gráfica. Outro erro cometido pela Mariana, e que curiosamente ocorre com mais frequência em contextos puramente matemáticos, tem a ver com o facto de ela considerar uma abcissa ou uma ordenada como sendo um ponto. Esta incorreção acaba por ter reflexos na representação gráfica, porque ao assinalar as coordenadas de um ponto no referencial cartesiano, a Mariana assinala a abcissa sobre o eixo das abcissas e a ordenada sobre o eixo das ordenadas, ficando dessa forma com dois pontos assinalados em vez de um, o que está incorreto.

Relativamente ao trabalho com variáveis, notei ao longo do estudo uma certa tendência dos alunos para considerarem apenas valores positivos para as variáveis. No referencial cartesiano não prolongaram os semieixos negativos e limitaram o gráfico da função ao primeiro quadrante. Um das razões que pode explicar isto é o facto de o conjunto dos números naturais (inteiros positivos) ser o mais familiar aos alunos e de mais fácil utilização, o que pode ter influência na escolha dos valores para a variável. A segunda razão pode estar relacionada com a forma como as tarefas inicialmente propostas foram formuladas e com a utilização que fiz das variáveis. O peso e o preço a pagar, por exemplo, são variáveis que admitem apenas valores positivos e que foram bastante utilizadas. Apesar de ter havido da minha parte uma preocupação em explicar aos alunos que existem variáveis que podem assumir valores negativos, e até dei exemplos de algumas, isso não parece ter alterado a tendência já referida. A terceira razão pode estar relacionada com o quotidiano,

porque muitas das situações que fazem parte do nosso dia-a-dia envolvem apenas números positivos, por exemplo, a idade, o tempo, a altura e o peso.

### **5.2.2. Dificuldades na interpretação gráfica**

#### **O caso da função linear**

Num dos exemplos em que surge representada graficamente uma função de proporcionalidade direta e é necessário determinar a constante de proporcionalidade a partir de pontos assinalados, o Raul identifica as coordenadas de um ponto no referencial e determina o quociente entre o valor da ordenada e o valor da abcissa, ou seja, o aluno reconhece graficamente uma situação de proporcionalidade direta e consegue determinar a constante de proporcionalidade e atribuir-lhe significado no contexto da situação. Assim, o aluno revela compreender a relação constante entre duas grandezas (invariância) e a noção de que estas grandezas podem variar em conjunto (covariância). O Paulo também consegue identificar pontos assinalados no referencial, mas em vez de determinar a constante de proporcionalidade através do quociente entre o valor da ordenada e o valor da abcissa, opta por determinar a expressão analítica da função representada graficamente. Ao fazê-lo, o aluno considera uma expressão do tipo  $y = ax + b$ , ou seja, não relaciona o gráfico de uma função de proporcionalidade direta com uma expressão do tipo  $y = ax$ . Além disso, também não consegue determinar o parâmetro  $a$  da expressão analítica. A Mariana também identifica pontos assinalados no referencial, intuitivamente parece reconhecer uma situação de proporcionalidade direta, mas não atribui significado à constante de proporcionalidade e não consegue determiná-la a partir de pontos assinalados no referencial cartesiano.

Nos casos em que se torna necessário determinar uma ordenada não assinalada no referencial conhecida a abcissa, o Raul opta por passar da representação gráfica para a representação algébrica e substituir o valor da abcissa na expressão analítica da função. Este é um dos vários exemplos em que o aluno recorre à expressão analítica e parece encará-la como uma “ferramenta” imprescindível, mesmo nos casos em que dispõe da representação gráfica. Contrariamente ao que acontece com o Raul, o Paulo e a Mariana sentem mais dificuldades no trabalho com

a representação algébrica. No caso destes dois alunos, o desafio para determinar uma ordenada não assinalada no referencial conhecida a abcissa, foi superado através de uma estratégia aditiva que não obedeceu a qualquer rigor matemático. Neste caso, os alunos foram subtraindo sucessivamente valores a  $x$  (abcissa conhecida) e a  $y$  respetivamente, até obter o valor de  $y$  pretendido.

Ao estabelecer a relação entre as características gráficas da função linear e a respetiva expressão analítica, o Raul sabe que o gráfico é uma reta que passa na origem do referencial cartesiano e que a sua expressão geral é do tipo  $y = ax$ . No caso do Paulo, a relação entre o gráfico de uma função linear e a respetiva expressão analítica é estabelecida com base numa estratégia de análise pontual, ou seja, o aluno substitui valores na expressão analítica, relaciona o resultado com coordenadas de pontos e seleciona o gráfico que contém esses pontos. No caso da Mariana, parece existir alguma noção, ainda que pouco clara, de que a relação entre o gráfico de uma função linear e a sua expressão analítica pode ser feita com base na relação entre coordenadas de pontos situados sobre os eixos do referencial e o parâmetro  $a$  da expressão analítica. O problema é que a aluna não compreende bem esta relação, e por isso utiliza uma estratégia do tipo tentativa erro, na qual identifica coordenadas assinaladas no referencial e verifica se alguma coincide com o parâmetro  $a$  na expressão. Na perspetiva de Monk (2003), a forma como os alunos olham para um gráfico é influenciada pelo conjunto de experiências e conhecimentos que têm quando o observam. Nesse sentido, o não reconhecimento por parte da Mariana, e às vezes por parte do Paulo, de algumas características gráficas essenciais, sugere ser necessário no futuro um estudo mais prolongado e uma maior experiência no trabalho com gráficos.

### **O caso da função afim não linear**

Na relação entre o gráfico de uma função afim não linear e a respetiva expressão analítica, o Raul considera como referência o ponto onde o gráfico intersecta o eixo das ordenadas e relaciona a sua ordenada com o valor do parâmetro  $b$  na expressão analítica. No caso em que as expressões analíticas têm o mesmo parâmetro  $b$ , o aluno estabelece a relação com base no parâmetro  $a$ , ou seja: (i) relaciona o sinal de  $a$  com a monotonia da função analisada a partir do gráfico; ou (ii) relaciona o valor absoluto de  $a$  com a inclinação da reta em relação ao eixo do  $x$ .

No caso do Paulo, a relação entre o gráfico de uma função afim não linear e a respectiva expressão analítica é feita com base numa estratégia de análise pontual, ou seja, o aluno atribui valores à variável  $x$  na expressão analítica, determina os respectivos valores de  $y$ , relaciona o resultado obtido com coordenadas de pontos e compara-os com pontos assinalados no gráfico. No caso da Mariana, esta relação é estabelecida com base numa estratégia do tipo tentativa erro, na qual a aluna identifica coordenadas assinaladas no referencial cartesiano e verifica se alguma delas coincide com algum dos parâmetros  $a$ ,  $b$  na expressão analítica. O problema coloca-se quando são dados dois gráficos em que a ordenada na origem é a mesma, e portanto as respectivas expressões analíticas têm o mesmo parâmetro  $b$ . Neste caso, a estratégia da Mariana revela-se ainda mais falível e menos rigorosa em termos matemáticos.

### **A influência da variação dos parâmetros $a$ e $b$ no gráfico da função**

O estudo do efeito da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  da expressão analítica no gráfico da função teve início com uma tarefa exploratória realizada na aula com recurso a papel e lápis. As conclusões dos alunos foram escassas, possivelmente pelo facto de realizarem o estudo em ambiente estático, no entanto, acredito que o investimento valeu a pena, porque proporcionou uma experiência de construção de gráficos à mão antes de fazer em computador. Esta tarefa foi complementada por uma segunda tarefa, realizada no GeoGebra, que permitiu aos alunos visualizarem em simultâneo a representação gráfica e a representação algébrica e testarem várias possibilidades em menos tempo e de forma mais intuitiva. Esta minha constatação vai ao encontro da perspectiva de Bardini, Pierce e Stacey (2004), segundo a qual o trabalho realizado com recurso à tecnologia permite resolver problemas graficamente, possibilitando ao aluno estudar um maior número de hipóteses usando diferentes representações.

No caso da função linear, o Raul identifica o valor do parâmetro  $a$  com o declive da reta e relaciona-o corretamente com a monotonia da função. De um ponto de vista estritamente gráfico, quando o aluno analisa o declive de uma reta e considera, por exemplo, que um aumento do seu valor implica uma aproximação da reta em direção ao eixo das ordenadas, está a utilizar como referência os eixos coordenados. No que respeita à monotonia da função, o Raul reconhece através do

gráfico quando é que a reta é crescente ou decrescente e relaciona esse comportamento com o sinal do parâmetro  $a$  na expressão analítica. O Paulo e a Mariana também compreendem que o aumento no valor do parâmetro  $a$  na expressão analítica tem como consequência uma aproximação da reta ao eixo das ordenadas, e que à medida que o valor de  $a$  diminui, a inclinação da reta em relação ao eixo das abcissas também diminui. Relativamente à monotonia, o Paulo e a Mariana não estabeleceram qualquer relação entre o sinal do parâmetro  $a$  na expressão analítica, e a monotonia da função observada a partir do gráfico.

No caso da função afim não linear importa distinguir dois casos. No primeiro caso, em que o valor do parâmetro  $a$  é fixo e o valor do parâmetro  $b$  varia, o Raul e o Paulo reconhecem o paralelismo das retas a partir do gráfico e relacionam essa característica com o facto do parâmetro  $a$  ser igual nas diferentes expressões analíticas. Os dois alunos identificam o parâmetro  $b$  como sendo a ordenada na origem, mas o Paulo foi um pouco mais longe e compreendeu, num dos exemplos dados, que um incremento no valor das ordenadas corresponde a uma diminuição no valor das abcissas. Este raciocínio não deixa de ser interessante, porque revela a compreensão de que a variação no valor do parâmetro  $b$  provoca um efeito na posição das retas em relação ao eixo das ordenadas, mas também em relação ao eixo das abcissas. A Mariana não reconhece o paralelismo das retas a partir do gráfico, mas identifica o parâmetro  $b$  como sendo a ordenada na origem e compreende que um aumento do seu valor implica o distanciamento da ordenada na origem em relação à origem do referencial cartesiano. No segundo caso, em que o valor do parâmetro  $a$  varia e o valor do parâmetro  $b$  é fixo, os três alunos relacionam o facto das retas se intersectarem no ponto  $(0;b)$  com o facto do parâmetro  $b$  ser igual nas expressões analíticas, mas só o Raul e o Paulo conseguem relacionar o paralelismo das retas com o valor do parâmetro  $a$  nas expressões analíticas. No caso da função constante, os três alunos identificam corretamente o gráfico da função, mas mais uma vez, só o Raul e o Paulo conseguem relacionar, a partir do gráfico, a ordenada na origem e o declive da reta, com os parâmetros na expressão analítica.

### 5.2.3. Mudança de representação

Segundo Duval (2006), cada representação de um conceito matemático transmite informações específicas, mas por si só, apenas proporciona uma “perspetiva” sobre o conceito de função. Assim, a compreensão do conceito, poderá ser tanto mais completa quanto mais se alcançar a coordenação entre várias representações. Na mesma linha de raciocínio, Ponte (1990) acrescenta que o ensino das funções deve atender à necessidade de articular as várias formas de representação. A escolha das tarefas que propus aos alunos teve em conta esta perspetiva, e o resultado da sua realização permitiu-me retirar as conclusões que a seguir apresento.

Na mudança da representação algébrica para a representação gráfica, o facto de os alunos utilizarem sobretudo processos numéricos para determinarem as coordenadas de pontos, demonstra a importância destes processos na compreensão inicial de um problema tal como é defendido por Friedlander e Tabach (2001). Neste caso, o Raul, o Paulo e a Mariana começam por atribuir valores a  $x$  na expressão analítica, determinam os respetivos valores de  $y$ , obtêm coordenadas de pontos, e com base nesses pontos constroem o gráfico da função. Este conjunto de procedimentos vai ao encontro dos resultados observados por Leinhardt et al. (1990), que indicam que a construção do gráfico a partir da expressão analítica resume-se a uma série de passos diretos, que normalmente passam por identificar pares ordenados, representá-los no referencial cartesiano e traçar uma linha que passe pelos pontos assinalados. Os resultados nesta fase do estudo coincidem também com os verificados no estudo de Guerreiro (2009), no qual nenhum aluno associou diretamente as expressões analíticas das funções aos respetivos gráficos, sem utilizar primeiro processos numéricos.

Na mudança da representação gráfica para a representação algébrica, no caso da função linear, o Raul utiliza duas estratégias diferentes. Na primeira, o aluno começa por identificar as coordenadas de um ponto assinalado no gráfico e determina a constante de proporcionalidade recorrendo à regra da invariância do quociente entre as ordenadas e as abcissas de pontos. Depois, obtém a expressão analítica da função substituindo o valor da constante calculada numa expressão do tipo  $y = ax$ . Na segunda estratégia, o aluno relaciona o gráfico de uma função linear com uma expressão analítica do tipo  $y = ax$ . Para determinar o valor do parâmetro

$a$ , identifica no gráfico um ponto assinalado, substitui as variáveis  $x$  e  $y$  na expressão analítica pelos valores das coordenadas desse ponto e resolve a equação em ordem a  $a$ , obtendo dessa forma o parâmetro. Por fim, obtém a expressão analítica da função substituindo o valor de  $a$  na expressão  $y = ax$ . No caso da função afim não linear, o Raul recorre à mesma estratégia utilizada no caso da função linear, mas para além de substituir as variáveis  $x$  e  $y$  na expressão analítica por valores de coordenadas, substitui o parâmetro  $b$  pela ordenada na origem, determinada a partir do gráfico. Depois, resolve a equação em ordem a  $a$ , obtém o valor do parâmetro e determina a expressão analítica da função. No caso do Paulo existe a noção, ainda que pouco clara, que a expressão analítica de uma função linear pode ser obtida substituindo as variáveis  $x$  e  $y$  por valores das coordenadas de um ponto assinalado no gráfico. Num dos exemplos analisados, o aluno utiliza este método mas troca a abcissa pela ordenada ao fazer a substituição. Além disso, na resolução considera a expressão analítica de uma função afim não linear, quando deveria considerar a expressão de uma função linear. No caso da Mariana, a aluna não consegue determinar a expressão analítica de uma função a partir do gráfico, porque não relaciona características gráficas com os parâmetros da expressão analítica.

Na mudança da representação verbal para a representação gráfica, o Raul utiliza a representação algébrica como passo intermédio porque, segundo afirma, a representação algébrica é uma “ferramenta que permite fazer quase tudo”. Numa situação modelada por uma função afim não linear, o aluno começa por identificar as variáveis do problema e por determinar as coordenadas de pontos de referência a partir do enunciado. Depois, relaciona as coordenadas com valores de variáveis, substitui-os numa expressão do tipo  $y = ax + b$ , determina o valor do parâmetro  $b$  a partir do gráfico e resolve a equação em ordem a  $a$ , determinando dessa forma o parâmetro  $a$ . Por fim, obtém a expressão analítica da função com vista à sua representação gráfica. É interessante constatar que, neste caso, a opção do Raul utilizar a representação algébrica como passo intermédio entre a representação verbal e a representação gráfica contraria o estudo de Elia et al. (2007), no qual se verificou que os piores resultados foram obtidos em problemas que requeriam a passagem da representação verbal para a representação algébrica. Na mesma situação, o Paulo e a Mariana mudam da representação verbal para a representação gráfica de uma forma direta, sem recorrer a outro tipo de representação. Estes alunos identificam valores de variáveis a partir do enunciado, relacionam esses valores com coordenadas de

pontos, e com base nesses pontos constroem o gráfico da função. Num outro exemplo, relativo a uma situação também modelada por uma função afim não linear, o Paulo e a Mariana recorrem à representação tabular como passo intermédio na mudança da representação verbal para a representação gráfica. O facto de os alunos recorrerem a uma tabela e não utilizarem a representação algébrica como passo intermédio, como fez o Raul num outro exemplo, deve-se sobretudo às suas dificuldades no trabalho com este tipo de representação. Este resultado encontra paralelo num dos resultados observados num estudo de Brown e Mehilos (2010), no qual alguns alunos continuaram a revelar preferência pela utilização de tabelas como suporte, enquanto não desenvolviam um melhor domínio no trabalho com a expressão analítica.

Na mudança da representação tabular para a representação gráfica, e depois de utilizar uma estratégia multiplicativa no cálculo de valores de  $f(x)$ , o Raul tem a iniciativa de procurar valores das variáveis na tabela e proceder à marcação dos pontos correspondentes no referencial cartesiano. O aluno sabe que para representar uma reta são suficientes dois pontos, mas acaba por assinalar vários pontos no referencial e é com base neles que constrói o gráfico da função. O Paulo e a Mariana utilizam uma estratégia aditiva no cálculo de valores de  $f(x)$ , no entanto, o Paulo reconhece um método alternativo para calcular estes valores, baseado numa estratégia multiplicativa. Depois, na construção do gráfico, o Paulo e a Mariana utilizam uma estratégia semelhante à do Raul, ou seja, identificam valores das variáveis na tabela e procedem à marcação das coordenadas correspondentes no referencial cartesiano. Neste processo, a Mariana revelou algumas dificuldades na determinação de pontos a partir da tabela, e assinalou incorretamente as coordenadas no referencial cartesiano.

Na mudança da representação gráfica para a representação tabular de uma função afim não linear, o Raul utiliza processos distintos na construção da tabela, consoante os pontos estejam ou não assinalados no gráfico. Se os pontos estão assinalados no gráfico, o aluno identifica as coordenadas desses pontos e passa diretamente da representação gráfica para a representação tabular. Se os pontos não estão assinalados no gráfico, o aluno utiliza mais uma vez a representação algébrica como passo intermédio na mudança de uma representação para outra. Nos casos do Paulo e da Mariana, se os pontos estão assinalados no gráfico, os alunos mudam diretamente da representação gráfica para a representação tabular. Se os pontos não

estão assinalados no gráfico, o Paulo e a Mariana utilizam estratégias diferentes na sua determinação. Neste caso, o Paulo utiliza uma regra de três simples para determinar valores para as variáveis, mas a estratégia revela-se ineficaz pelo facto de estar em causa uma função afim não linear. No caso da Mariana, a estratégia passa por obter valores de variáveis com base numa estratégia aditiva, mas além de não obedecer a qualquer rigor matemático, esta estratégia conduziu a resultados errados. Importa ainda referir que o Paulo e a Mariana não utilizam a representação algébrica como passo intermédio na mudança da representação gráfica para a representação tabular, a qual permitiria determinar facilmente coordenadas de pontos, porque não conseguem determinar a expressão analítica de uma função a partir do seu gráfico. Na perspetiva de Kaput (1999), os alunos sentem dificuldades no trabalho com símbolos algébricos e na coordenação entre várias representações, como acontece com o Paulo e a Mariana relativamente à mudança da representação gráfica para a representação algébrica, e reciprocamente. Uma forma de ultrapassar esta dificuldade passa, segundo o autor, por realizar tarefas que envolvam as várias representações.

### **5.3. Considerações finais**

A par do enorme desafio que foi esta experiência, destaco as aprendizagens que fui alcançando em todo o percurso e que são de inestimável importância, tanto em termos do meu futuro profissional como da minha realização pessoal. O trabalho desenvolvido na elaboração deste relatório permitiu-me não só aprofundar os conhecimentos relativos a assuntos matemáticos do meu interesse, mas também refletir sobre o seu ensino e sobre as dificuldades de aprendizagem mais frequentes. A revisão aprofundada da literatura sobre diversos temas relacionados com as funções, veio trazer uma nova visão sobre aspetos ligados, por exemplo, às estratégias de ensino e às dificuldades dos alunos.

Durante a minha intervenção, um dos maiores desafios com que me deparei foi conseguir conciliar o esforço de organização que a conceção e concretização de um trabalho desta natureza requer, com o papel do professor que é lecionar. Garantir a recolha e a organização de dados enquanto se ultimavam pormenores relativos à planificação letiva e à concretização das aulas, não foi tarefa fácil e requereu da

minha parte um esforço adicional, que valeu a pena. Por outro lado, as reflexões após as aulas foram extremamente importantes e decisivas no ajustamento das planificações das aulas seguintes. O plano delineado foi cumprido em termos de datas e aulas previstas, não se tendo registado qualquer contratempo que o tivesse impedido ou atrasado.

Durante a minha intervenção letiva senti o apoio dos professores que me acompanharam, mas também dos alunos que se mostraram sempre participativos e empenhados e que contribuíram com o seu entusiasmo para o sucesso do meu projeto. Da minha parte, procurei sempre manter a linha orientadora definida pela professora titular, e nunca atuei de forma a perturbar o habitual funcionamento das aulas ou a mudar o tipo de relacionamento entre aluno e professor a que os alunos estavam habituados. Assim, destaco o respeito com que os alunos sempre me trataram.

Comecei a pensar muito cedo na planificação das aulas, o que me permitiu reunir ideias interessantes e que mais tarde coloquei em prática. Um dos resultados dessa preparação foram as tarefas que propus, nas quais, e atendendo às características da turma, optei por graus de desafio médio e de estrutura relativamente aberta. A maioria dessas tarefas foram criadas de raiz, permitiram percorrer gradualmente os objetivos da unidade de ensino, e tiveram em comum o mesmo contexto de semi-realidade. Acredito que o cunho exploratório que caracterizou algumas delas terá ajudado os alunos, aos poucos, a construírem o seu próprio conhecimento.

A reflexão realizada ao longo deste estudo, permitiu identificar aspetos que influenciaram positivamente o meu desempenho enquanto professor e aspetos que procurarei melhorar no futuro. No decorrer das aulas fui registando algumas das minhas principais dificuldades, por exemplo, a gestão do tempo e do ritmo de aula, a organização do quadro e a tomada de decisões em momentos importantes, mas, de um modo geral, as reflexões pós aula ajudaram-me a evoluir na maioria dos aspetos identificados. Por outro lado, penso que o meu discurso foi em geral claro e articulado e, relativamente à linguagem que utilizei, procurei não ser demasiado formal, mas também não prescindi do rigor na comunicação. Sobre o meu papel nas aulas, procurei o mais possível através das minhas orientações, mediações e outras intervenções, que os alunos tivessem um papel importante na construção do seu próprio conhecimento. De um modo geral, os alunos mostraram-se interessados,

intervindo de forma natural sempre que eram convidados a validar ou responder a questões por mim colocadas. Sinto que a relação estabelecida com a turma foi boa, e que esta característica poderá trazer-me benefícios enquanto professor.

Apesar de ter exigido um enorme esforço da minha parte, o investimento neste projeto foi ganhando significado à medida que o fui realizando, e para isso, contribuiu um gosto e uma motivação pessoal sempre crescentes. As aprendizagens resultantes do trabalho de planificação e lecionação são indiscutíveis, mas foi a reflexão aquela que me permitiu evoluir mais. Assim, motivado pela necessidade de formação constante e por ter aprendido melhores formas de ensinar e aprender, faço um balanço final muito positivo do trabalho desenvolvido e encaro-o como mais um passo rumo a um exercício profissional consistente.



## Referências Bibliográficas

- Bardini, C., Pierce, R., & Stacey, K. (2004). *Teaching linear functions in context with graphic calculators: students' responses and the impact of the approach on their use of algebraic symbols*. *International Journal of Science and Mathematical Education*, 2(3), 353-376.
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). *Using tables to Bridge Arithmetic and Algebra*. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532-538.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). *Early algebra and algebraic reasoning*. In F. Lester (Ed.). *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age.
- Domingos, A. M. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. (Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.
- Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics*. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Elia, I. et al. (2007). *Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations*. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 533-556.
- Fernandes, D. (1991). *Notas sobre os paradigmas de investigação em educação*. *Noesis*, 18, 64-66.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures, Kluwer Academic Publishers
- Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). *Promoting multiple representations in algebra*. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.
- Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). *Systems of representations and the development of mathematical concepts*. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.
- Goldin, G. A. (2008). *Perspectives on representation in mathematics learning and problem solving*. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176-201). New York, NY: Routledge.
- Guerreiro, L. A. S. R. (2009). *O papel das representações algébricas na aprendizagem das funções*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

- Kaput, J. (1999). *Teaching and learning a new algebra*. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133-135). Mahwah: Erlbaum.
- Kieran, C. (2006). *Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning*. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 11-50). Rotterdam: Sense.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. (1990). *Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching*. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Lessard-Hérbert, M., Goyette, G., Boutin, G. (1990). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Matos, A. (2008). *Explorando relações funcionais no 8.º ano: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).
- Ministério da Educação – DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Monk, S. (2003). *Representation in school mathematics: Learning to graph and graphing to learn*. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 250-262). Reston, VA: NCTM.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática Escolar* (2ª ed.). (M. Melo, Trad.) Lisboa: APM. (Obra original em inglês, publicada em 2000).
- Ponte, J. P. (1984). *Functional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs*. (Doctoral dissertation, University of Georgia). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (1990). *O conceito de função no currículo de Matemática*. *Educação e Matemática*, 15, 3-9.
- Ponte, J. P. (1992). *The history of the concept of function and some educational implications*. *The Mathematics Educator*, 3(2), 3-8.
- Ponte, J. P. (2002). *Investigar a nossa própria prática*. In GTI (Org.) *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J.P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME – DGIDC.
- Ponte, J. P., & Quaresma, M., (2012). *O papel do contexto nas tarefas matemáticas*. *Interações*, 22, 196-216.

- Ribeiro, M. J. B., & Ponte, J. P. (2000). *A formação em novas tecnologias e as concepções e práticas dos professores de Matemática*. *Quadrante*, 9 (2), 3-26.
- Saraiva, M. J., & Teixeira, A. M. (2009). *Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks*. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, Supplemento n.º4 al n.º19, 74-83.
- Skovsmose, O. (2000). *Cenários para investigação*. *Bolema*, 14, 66-91. (pp. 1-10).
- Smith, E. (2003). *Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum*. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 136-150). Reston: NCTM.
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções*. Lisboa: ME/ Departamento do Ensino Secundário.
- Trigueros, M., & Ursini, S. (2008). *Structure sense and the use of variable*. *PME 32 and PME-NA XXX*, 337-344.



# **Anexos**



## Anexo 1 - Tarefas realizadas nas aulas

### 1.1. Tarefa: O preço das gomas (1.<sup>a</sup> e 2.<sup>a</sup> parte)

Data: 22/02 e 26/02

1. Um grupo de amigos decidiu passar numa loja de doces para comprar gomas de vários sabores. Ao consultarem os preços, verificaram que cada hectograma ( $1hg=100$  gramas) de gomas custa:

- $1,5 \text{ €}$  no caso das “Amoras”;
- $1 \text{ €}$  no caso da “Mistura de frutos”;
- $0.75 \text{ €}$  no caso das “Coca-colas”.

1.1 Ajuda-os a fazer as contas completando a seguinte tabela:

Peso (hg)	1	2	3	4	5	...	11	...	13
Preço a pagar “Amoras” (€)		3				...		...	
Preço a pagar “Mistura de frutos” (€)				4		...		...	
Preço a pagar “Coca-colas” (€)			2.25			...		...	

1.2 Um dos amigos tinha  $6 \text{ €}$  para gastar. Sabendo que gastou metade desse dinheiro em “Coca-colas”, dá 3 exemplos de pesos de outros tipos de gomas que poderiam ter sido comprados, de forma a não sobrar dinheiro.

1.3 Sabendo que a constante de proporcionalidade é o quociente entre o preço a pagar e o peso das gomas, determina o seu valor nos seguintes casos:

1.3.1 Amoras;

1.3.2 Mistura de frutos;

1.3.3 Coca-colas.

1.4 Qual é o significado da constante de proporcionalidade no contexto do problema?

1.5 Uma situação de proporcionalidade direta pode ser representada por uma função. Encontra expressões analíticas para  $f$ ,  $g$  e  $h$  sabendo:

1.5.1  $f$  é a função que a cada peso de amoras  $x$  (hg) faz corresponder um preço a pagar  $y$  (€);

1.5.2  $g$  é a função que a cada peso de mistura de frutos  $x$  (hg) faz corresponder um preço a pagar  $y$  (€);

1.5.3  $h$  é a função que a cada peso de coca-colas  $x$  (hg) faz corresponder um preço a pagar  $y$  (€).

1.6 Representa graficamente, no mesmo referencial, as funções  $f$  (a azul),  $g$  (a vermelho) e  $h$  (a verde).

1.7 Explica o efeito de  $a$  (constante de proporcionalidade) no gráfico da função.

## 1.2. Tarefa: Um embrulho especial

Data: 28/02

1. Como o aniversário do amigo estava próximo, o Raul pensou em comprar “Amoras” para oferecer. Nestes casos, a loja cobra um valor adicional de 1€ por cada embrulho especial de oferta.

1.1 Ajuda o Raul a fazer as contas completando a seguinte tabela:

Peso (hg)	1	2	3	4	5	...	$x$
Preço a pagar (€) (Sem Embrulho de Oferta)	1,5	3	4,5	6	7,5	...	$1,5 \times x$
Preço a pagar (€) (Com Embrulho de Oferta)						...	

1.2 Escreve as expressões analíticas das funções  $i$  e  $j$ , sabendo que:

- $i$  é a função que a cada peso de amoras  $x$  (hg) faz corresponder um preço a pagar  $y$  (€), quando não é feito um embrulho de oferta;
- $j$  é a função que a cada peso de amoras  $x$  (hg) faz corresponder um preço a pagar  $y$  (€), quando é feito um embrulho de oferta.

1.3 Calcula  $j(10)$  e explica o seu significado no contexto da situação.

1.4 Representa graficamente, no mesmo referencial, as funções  $i$  (a azul) e  $j$  (a vermelho).

1.5 A função  $i$  é linear? E a função  $j$ ? Explica a tua resposta.

1.6 Indica as coordenadas dos pontos de interseção de cada uma das retas com o eixo das ordenadas.

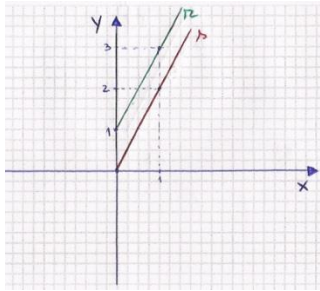
## 1.3. Tarefa: O fabrico de gomas

Data: 5/03

1. Devido à enorme procura, a fábrica decidiu produzir um novo tipo de gomas chamado “Rodelas de maçã”. Nos testes de controlo de qualidade ao produto, cada um dos ingredientes foi submetido a diferentes temperaturas (graus celsius) durante 60 minutos. Considera:

- $r(x) = 2x + 1$  a função que a cada minuto  $x$  faz corresponder uma única temperatura  $y$  (no teste ao aromatizante);
- $s(x) = 2x$  a função que a cada minuto  $x$  faz corresponder uma única temperatura  $y$  (no teste à goma);
- $t(x) = 2x - 2$  a função que a cada minuto  $x$  faz corresponder uma única temperatura  $y$  (no teste ao açúcar).

**1.1** No referencial encontram-se representadas as funções  $r$  e  $s$ . Representa no mesmo referencial a função  $t$  (azul).



**1.2** O que há de comum nos gráficos das funções  $r$ ,  $s$  e  $t$ ?

**1.3** Identifica o parâmetro  $b$  nas funções  $r$ ,  $s$  e  $t$  e descreve o efeito da sua variação nos gráficos dessas funções.

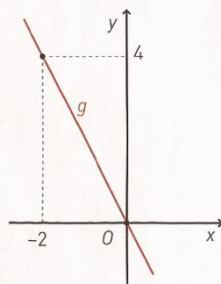
**1.4** Indica a variável independente e a variável dependente.

**1.5** Calcula  $t(1)$  e explica o seu significado no contexto da situação.

#### 1.4. Tarefa: Exercícios de consolidação na aula\*

Data: 7/03

**4.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções lineares,  $f(x) = 0,75x$  e estando a função  $g$  representada graficamente na figura.



**4.1** Representa a função  $g$  através de uma expressão algébrica.

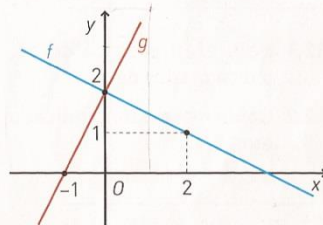
**4.2** Determina as coordenadas do ponto:

**4.2.1** do gráfico de  $f$  que tem abscissa 4;

**4.2.2** do gráfico de  $g$  que tem ordenada 2.

**4.3** Verifica se o ponto  $(-8, -6)$  pertence ao gráfico de  $f$ .

**10.** Na figura estão representadas duas funções afins,  $f$  e  $g$ .



**10.1** Determina uma expressão analítica da função  $f$ .

**10.2** Calcula:

**10.2.1**  $g(5)$

**10.2.2**  $g(-3)$

**10.3** Determina  $x$  de modo que  $f(x) = -2$ .

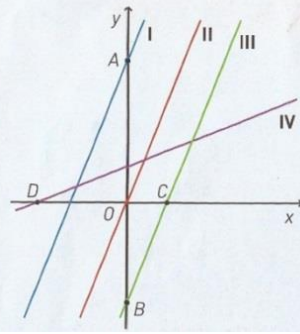
### Proposta 7

Na figura encontram-se as representações gráficas das funções correspondentes às expressões:

$$f(x) = 2,5x - 3 ; \quad g(x) = 2,5x ; \quad h(x) = 0,4x + 1 ; \quad i(x) = 2,5x + 4$$

Das quatro retas representadas, três são paralelas.

1. Estabelece a correspondência entre as expressões das funções e as respectivas representações gráficas.
2. Determina as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  assinalados na figura.



\*Esta tarefa é adaptada do manual Novo Espaço 8.ºano, volume 1, Porto Editora.

### 1.5. Tarefa: Funções no GeoGebra\*

Data: 12/03

Hoje vamos utilizar o GeoGebra para analisar o comportamento dos gráficos das funções linear e afim.

1. Visualiza os gráficos das funções definidas por expressões do tipo  $f(x) = ax$ , começando por atribuir a  $a$  diferentes valores positivos. Por exemplo,  $a=0,5$ ;  $a=1$ ;  $a=2$ ...

Compara os gráficos obtidos e regista as tuas conclusões.

2. Faz agora um estudo semelhante, atribuindo a  $a$  valores negativos.

O que podes concluir?

3. Nas alíneas anteriores estiveste a estudar funções definidas por expressões do tipo  $f(x) = ax$ .

Faz agora um estudo semelhante para funções definidas por expressões do tipo  $f(x) = 2x + b$ , tomando para  $b$  vários valores por ti escolhidos. Por exemplo,  $b=0$ ;  $b=1$ ;  $b=2$ ...

O que acontece?

4. Analisa o que acontece aos gráficos de funções definidas por expressões do tipo  $f(x) = ax + 2$ , se atribuíres diferentes valores a  $a$ . Por exemplo,  $a=0$ ;  $a=1$ ;  $a=2$ ...

Regista as tuas conclusões.

\*Esta tarefa é uma adaptação de uma investigação realizada no âmbito do projeto “Matemática para todos - Investigações na sala de aula”.

## Anexo 2 - Tarefas para trabalho de casa

### 2.1. Tarefa: Identificar e assinalar pares ordenados no plano\*

Data: 22/02

1. O seguinte referencial é constituído por dois eixos, perpendiculares entre si, que se cruzam num ponto - origem do referencial. Cada um desses eixos tem uma orientação indicada por uma seta e uma graduação, como podes observar na figura seguinte:

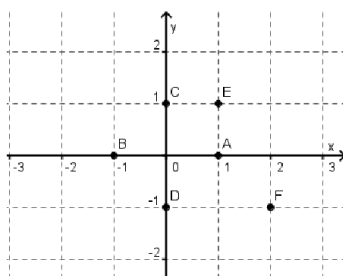


Figura 1

1.1 Imagina que te encontras na origem do referencial. Descreve como te deslocas para os pontos  $E$  e  $F$ , efetuando o número mínimo de deslocamentos na horizontal e/ou na vertical.

1.2 Escreve as coordenadas dos pontos  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ .

1.3 Observa as coordenadas dos pontos assinalados no referencial da figura e indica:

1.3.1. Todos os pontos que têm a mesma ordenada;

1.3.2. Todos os pontos que têm a mesma abcissa.

\*Esta tarefa é uma adaptação dos materiais de apoio: Ministério de Educação/DGIDC - Sequencias e Funções NPMEB.

### 2.2. Tarefa: Mais funções\*

Data: 1/03

1. Na tabela seguinte estão os preços praticados por dois técnicos de eletrodomésticos quando se deslocam a casa dos clientes.

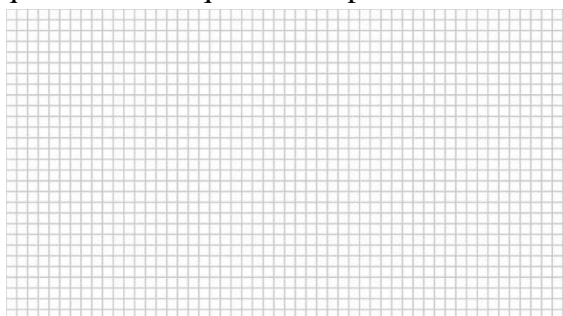
Técnico	Taxa Fixa	Preço por hora de trabalho
A	15 €	10 €
B	20 €	25 €

Sejam  $h$  e  $i$  as funções que a  $x$  horas de trabalho, numa deslocação, respetivamente dos técnicos A e B, fazem corresponder um preço a pagar  $y$  pelo cliente.

a) Representa analiticamente as funções  $h$  e  $i$ .

b) Representa graficamente as funções  $h$  e  $i$  no mesmo referencial.

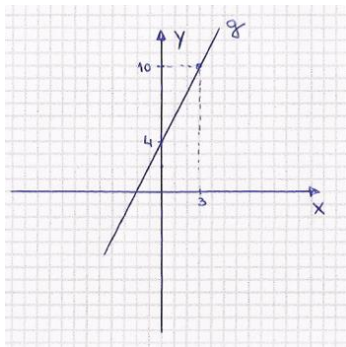
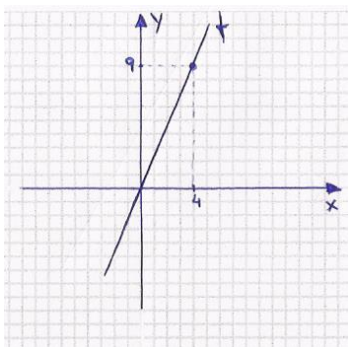
Nota: O eixo das abcissas pode ter uma graduação diferente do eixo das ordenadas. Por exemplo, podes considerar que num dos eixos um quadrado representa 1 hora e que no outro 1 quadrado representa 5€.



c) Calcula  $i(1,5)$ . Qual é o significado do valor encontrado?

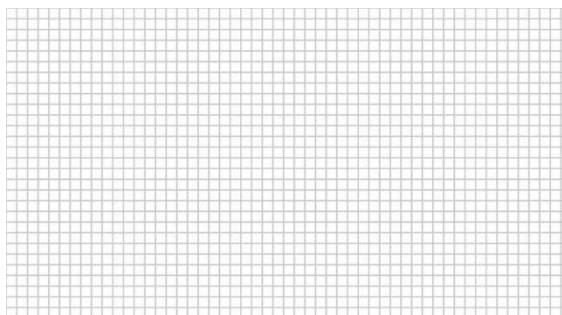
d) Por uma reparação o técnico recebeu 35€. Quanto tempo foi gasto na reparação?

2. Representa analiticamente as funções  $f$  e  $g$  representadas em baixo.



3. Representa graficamente a função  $z$ , que relaciona o tempo  $x$  em minutos e a temperatura  $y$  em graus celsius de um novo ingrediente de gomas testado durante 60 minutos. Relativamente ao teste sabe-se:

- A temperatura registada no início da experiência (minuto 0) é de 10 graus celsius.
- A temperatura registada no final da experiência (minuto 60) é de 30 graus celsius.



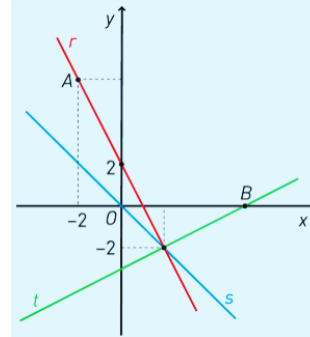
\*A questão 1 desta tarefa é uma adaptação do manual Novo Espaço 8.º ano, volume 1, Porto Editora.

### 2.3. Tarefa: Exercícios de consolidação em casa\*

Data: 5/03

1. Considera a função  $f(x) = \frac{x}{2} - 3$ .

No referencial encontram-se representadas três retas,  $r$ ,  $s$  e  $t$ , sendo uma delas uma representação gráfica da função  $f$ .



1.1 Calcula  $f(-2)$  e  $f(\frac{1}{3})$ .

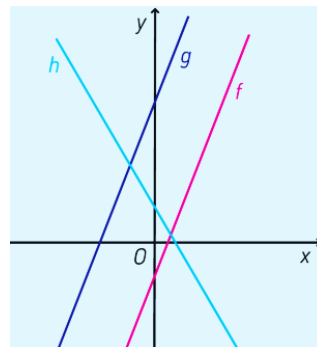
1.2 Indica, justificando, qual a reta que representa o gráfico de  $f$ .

1.3 Define, através de uma expressão analítica, a função que admite a reta  $s$  como gráfico.

1.4 Determina as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  assinalados na figura.

2. Os gráficos de três funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  são as retas representadas no referencial em baixo, sendo duas delas paralelas.

As funções são do tipo  $y = ax + b$ .



2.1 Em qual das três funções o valor de  $b$  é maior?

2.2 O que podes concluir quanto aos valores de  $a$  nas funções  $f$  e  $g$ ?

2.3 Qual é o sinal de  $a$  na função  $h$ ?

\*A tarefa é adaptada do manual Novo Espaço 8.ºano, volume 1, Porto Editora.

## Anexo 3 - Planos de aula

### 3.1. Primeira aula - 22/02

#### Aula N.º 86 - 45 minutos

##### Sumário

- Início do estudo das funções: resolução de uma ficha de trabalho.

##### Tema/ Tópico/ Subtópico

- Álgebra/ Funções/ Funções linear e afim.

##### Objetivos da aula

- Analisar situações de proporcionalidade direta;
- Rever o conceito de função como relação entre duas variáveis.

##### Recursos e materiais

- Ficha de trabalho;
- Máquina de calcular.

##### Metodologia de trabalho

- Trabalho em grupo/ turma.  
Grupos de 3 a 5 alunos previamente selecionados pelo professor.

##### Contextualização

Esta será a primeira aula dedicada ao subtópico funções linear e afim. Será proposto aos alunos as alíneas 1.1 e 1.2 da tarefa 1 - O preço das gomas.

Pretende-se com esta tarefa retomar o conceito de função como relação entre variáveis já trabalhado no 7.º ano. A análise de uma situação de proporcionalidade direta, em que o preço varia consoante o peso, servirá para “abrir caminho” ao estudo da função linear.

##### Desenvolvimento da aula

#### 1. Início da aula/ Apresentação da tarefa (10 minutos)

- Projetar o sumário no quadro.
- Questionar os alunos sobre dúvidas com o trabalho de casa. Se necessário realizar a correção.
- Distribuir os enunciados da tarefa:
- Informar os alunos que dispõem de 15 minutos para resolver as alíneas 1.1 e 1.2.
- Explicar que os enunciados têm espaços reservados para as resoluções e que esses enunciados serão recolhidos no final de cada aula e devolvidos na aula seguinte.
- Pedir aos alunos para resolverem a caneta e corrigirem a lápis e informar que dispõem de espaço no verso da folha para corrigir a representação gráfica.
- Projetar as alíneas 1.1 e 1.2 (slides 2 e 3) e clarificar o que se pretende com a tarefa.

#### 2. Trabalho autónomo (15 minutos)

- O trabalho é realizado em grupo.

- O professor circula pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos através do questionamento individual ou coletivo, do feedback e do desafio à refinação de argumentos e raciocínios, sem reduzir o nível de exigência cognitiva da tarefa. O professor faz a seleção e sequenciação das produções que ache conveniente apresentar e discutir.

Relativamente aos objetivos da tarefa, estratégias e dificuldades previstas:

- Na alínea 1.1 os alunos deverão preencher uma tabela onde a cada peso corresponde um preço. Nos “pesos” “11” e “13” é expectável que os alunos possam utilizar estratégias diferenciadas. Por exemplo: (i) irem adicionando o custo de um hectograma ao preço a pagar, obtendo assim o preço seguinte; (ii) multiplicarem o peso dado pelo preço do hectograma; (iii) calcularem o preço relativo ao peso através da regra de três simples.

- Na alínea 1.2 são pedidas várias possibilidades para os pesos de amoras e mistura de frutos que podem ser compradas com 3€. Como são pedidos 3 exemplos e não pode sobrar dinheiro, os alunos terão de considerar pelo menos um valor não inteiro.

### 3. Discussão (15 minutos)

- O quadro da alínea 1.1 é projetado (slide 4) já preenchido, exceto as duas últimas colunas relativas aos pesos 11 e 13 hectogramas. A resposta terá de ser dada e validada pela turma, mas escrita pelo professor no quadro.

- Na alínea 1.2 as respostas dos alunos vão sendo filtradas e escritas pelo professor. Utilizar as tabelas do slide 5 para escrever os exemplos pedidos. A solução é validada pela turma.

- O slide 6 tem como objetivo fazer uma breve síntese de algumas ideias que devem ser reforçadas. Surge a explicação de variável dependente e independente com o intuito de ajudar os alunos a identificarem na tabela qual é uma e qual é outra (geralmente a variável independente é a que aparece na primeira linha), mas deve reforçar-se que nem sempre é assim.

- Os slides 7 e 8 ajudam a relacionar a representação tabelar e a representação gráfica e são apresentados com dois objetivos. Fazer um diagnóstico sobre os conhecimentos e preparar o trabalho para casa.

### 4. Final da aula (5 minutos)

- Projetar o slide 9 (trabalho para casa) e entregar a tarefa para trabalho de casa: Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano. Tarefa adaptada do Ministério de Educação/DGIDC: DGIDC Sequencias e Funções NPMEB. Informar os alunos que deverão entregar a ficha na aula seguinte.

O trabalho de casa pretende desafiar os alunos a reverem procedimentos relativos à representação gráfica de coordenadas no referencial, preparando assim o caminho para a próxima aula.

### Avaliação dos alunos

- Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e formas de relacionamento);

- Produções que decorram da realização das tarefas realizadas na aula e em casa.

## Proposta de resolução da tarefa - Funções lineares (alíneas 1.1 e 1.2)

### 1.1

Peso (hg)	1	2	3	4	5	...	11	...	13
Preço “Amoras” (€)	1,5	3	4,5	6	7,5	...	16,5	...	19,5
Preço “Mistura de frutos” (€)	1	2	3	4	5	...	11	...	13
Preço “Coca-colas” (€)	0,75	1,5	2,25	3	3,75	...	8,25	...	9,75

### 1.2

	Exemplo 1		Exemplo 2		Exemplo 3	
	Peso (hg)	Preço (€)	Peso (hg)	Preço (€)	Peso (hg)	Preço (€)
"Amoras"	2	3	0	0	1	1,5
"Mistura frutos"	0	0	3	3	1,5	1,5

## **3.2. Segunda aula - 26/02**

### **Aula N.º 87/88 - 90 minutos**

#### Sumário

- Função linear;
- Representação analítica e gráfica da função linear.

#### Tema/ Tópico/ Subtópico

- Álgebra/ Funções/ Funções linear e afim.

#### Objetivos da aula

- Rever a função de proporcionalidade direta;
- Representar gráfica e algebricamente a função linear;
- Relacionar analítica e graficamente a função linear;
- Compreender o efeito da variação de  $a$  na representação gráfica de funções do tipo  $y = ax, a \neq 0$ .

#### Recursos e materiais

- Ficha de trabalho;
- Esferográficas de cor azul, verde e vermelha (para a representação gráfica).

#### Metodologia de trabalho

- Trabalho em grupo/ turma.

Grupos de 3 a 5 alunos previamente selecionados pelo professor.

#### Contextualização

Nesta aula será proposto aos alunos as alíneas 1.3 a 1.6 da tarefa 1 - O preço das gomas. Esta tarefa é a continuação da tarefa iniciada na aula anterior e tem como objetivo introduzir a função afim. Numa primeira fase o professor irá resolver no quadro, juntamente com os alunos, a constante de proporcionalidade, a expressão analítica e parte da representação gráfica no caso específico das amoras. Os alunos deverão depois prosseguir com a resolução da tarefa. No final da aula dar-se-á início

à discussão em grande grupo/ turma. Conforme decorram os trabalhos, é possível que a discussão da tarefa tenha que ser terminada na próxima aula por limitações de tempo.

### Desenvolvimento da aula

#### 1. Início da aula (5 minutos)

- Projetar o sumário no quadro.
- Recolher as fichas do trabalho de casa pedido na aula anterior e distribuir a 2.<sup>a</sup> parte dos enunciados da tarefa - O preço das gomas.
- Informar os alunos que o professor irá resolver com eles, em conjunto, as alíneas 1.3 (constante de proporcionalidade), 1.5 (expressão analítica) e uma parte da 1.6. Isto será feito apenas para um tipo de gomas, as amoras. O restante será feito pelos alunos durante a fase de trabalho autónomo.

#### 2. Explicação das alíneas 1.3, 1.5 e 1.6 pelo professor (20 minutos)

- De forma a garantir que os alunos prossigam a resolução da tarefa o mais autonomamente possível irá “construir-se” com eles o cálculo da constante de proporcionalidade, pedido na alínea 1.3, a expressão analítica da função, pedida na alínea 1.5 e apenas uma parte da representação gráfica, pedida na alínea 1.6, apenas no caso das amoras.
- Na alínea 1.3, projetar o slide 2 e questionar a turma relativamente ao desenvolvimento da expressão  $\frac{\text{Preço a Pagar}}{\text{Peso}}$ . É previsível que os alunos questionem se basta calcular a constante para um determinado peso/ preço a pagar ou se é necessário calcular para todos. Serão convidados a testar outros casos, de forma a confirmar que o valor da constante se mantém. Os alunos deverão ainda compreender que, no contexto do problema, a constante de proporcionalidade representa o preço de um hectograma de amoras, pois ao dividirmos o preço a pagar por um determinado número de hectogramas obtemos o preço a pagar por um hectograma. O slide 3 reforça que a relação entre preço a pagar e peso das gomas é de proporcionalidade direta, se existir uma constante de proporcionalidade  $a$  determinada pelo quociente entre preço a pagar e peso. Refere-se pela primeira vez a letra  $a$ , utilizada para designar a constante de proporcionalidade e fala-se pela primeira vez em função, como forma de traduzir uma situação de proporcionalidade direta.
- Na alínea 1.5 pede-se uma expressão analítica para a função  $f$ , que a cada peso de amoras  $x$  ( $hg$ ) faz corresponder um preço a pagar  $y$  (€). O slide 4 permite, através da tabela, levar os alunos a construir gradualmente a expressão analítica, compreendendo que  $1,5 = 1,5 \times 1$ ;  $3 = 1,5 \times 2$ ;  $4,5 = 1,5 \times 3$ ; ...;  $y = 1,5 \times X$ . No slide 5 é introduzida a notação  $f(x) = 1,5x$  e é explicado que  $f$  é a regra que associa a cada peso  $x$  um único preço a pagar  $y$ . É importante que os alunos trabalhem com ambas as notações de início.
- Na alínea 1.6 é pedida a representação gráfica das funções. Esta representação não será feita até ao fim, importando apenas garantir que os alunos saibam como determinar coordenadas de pontos, seja através da expressão analítica, seja através da tabela. No slide 6 é apresentada a expressão  $y = 1,5x$  e no slide 7 é apresentada a expressão  $f(x) = 1,5x$ . Os alunos deverão compreender que podem utilizar ambas as expressões para determinarem as coordenadas dos pontos e que essas coordenadas coincidem com as determinadas por meio da tabela.

### 3. Trabalho autónomo (30 minutos)

- O trabalho é realizado em grupo.
- O professor circula pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos através do questionamento individual ou coletivo, do feedback e do desafio à refinação de argumentos e raciocínios, sem reduzir o nível de exigência cognitiva da tarefa. O professor faz a seleção e sequenciação das produções que ache conveniente apresentar e discutir.

Relativamente aos objetivos da tarefa, estratégias e dificuldades previstas:

- Na alínea 1.3 os alunos deverão calcular a constante de proporcionalidade no caso da mistura de frutos e das coca-colas. Poderá sugerir-se que utilizem as letras  $a_1$  no caso das amoras,  $a_2$  no caso das misturas de frutos e  $a_3$  no caso das coca-colas, de forma a distinguir os três casos.
- Na alínea 1.5 os alunos deverão chegar às expressões analíticas das funções relativas à mistura de frutos e às coca-colas. Poderão seguir uma estratégia mais direta, escrevendo logo a expressão, ou poderão seguir os passos feitos pelo professor no caso das amoras.
- Na alínea 1.6, para determinar as coordenadas dos pontos, os alunos poderão utilizar os valores da tabela ou utilizar a expressão analítica, ficando ao critério deles optar pelo que considerem ser a melhor estratégia. Nesta alínea é importante reforçar o apoio aos alunos de forma a garantir que estão a conseguir fazer uma representação gráfica, mesmo que não esteja completamente correta. Poderão ser formuladas questões do tipo, escolheste bem a unidade na graduação dos eixos ou, verifica se as coordenadas estão bem determinadas. É importante garantir também que os alunos estão a utilizar as diferentes cores sugeridas no enunciado para representar as diferentes funções.
- Na alínea 1.7 os alunos deverão retirar conclusões, sobre o efeito do parâmetro  $a$ , no gráfico das funções. Trata-se de uma pergunta mais aberta e poderá haver a necessidade do professor fornecer algumas pistas que ajudem os alunos a progredir. Por exemplo, como é que explica a distância das retas em relação ao eixo das abcissas, ou das ordenadas.

### 4. Discussão (30 minutos)

- Conforme decorram os trabalhos, é possível que a discussão da tarefa tenha que ser terminada na próxima aula por limitações de tempo.
- Nas alíneas 1.3 e 1.4 o professor questiona a turma relativamente às constantes de proporcionalidade relativas à mistura de frutos e às coca-colas e relativamente ao seu significado no contexto do problema. Utilizar o slide 9 para escrever as respostas. Validar a solução com a turma.
- Na alínea 1.5 pedir a dois alunos que vão ao quadro escrever as expressões analíticas relativas às funções relacionadas com a mistura de frutos e as coca-colas. Utilizar o slide 10. Validar a solução com a turma. É possível que surjam dúvidas nesta fase ou que os alunos só utilizem uma das notações,  $y = ax$  ou  $f(x) = ax$ . Nestes casos questionar os alunos e complementar com a informação em falta.
- Na alínea 1.6 projetar um referencial cartesiano (slide 11) e pedir a um ou a três alunos diferentes que representem graficamente cada uma das funções no quadro (respeitando as cores sugeridas no enunciado da tarefa). Validar a solução com a turma. No final pode projetar-se o slide 12, com a representação gráfica feita pelo

professor, e comparar com a realizada pelo aluno retirando conclusões que se revelem importantes.

- Na alínea 1.7 é tratado pela primeira vez o declive da reta. Os alunos deverão compreender que à medida que o parâmetro  $a$  aumenta, o declive aumenta. Ou de forma mais informal, quanto maior for o valor de  $a$  mais a reta se aproxima do eixo das ordenadas. As respostas dos alunos vão sendo filtradas e escritas pelo professor no quadro. Utilizar o slide 13.

- No final da discussão projetar o slide 14 e sublinhar que:

- Uma função de proporcionalidade é uma função linear;
- Dá-se o nome de função linear a toda a função em que a expressão analítica é do tipo  $y = ax$ . O gráfico de uma função linear é uma reta que passa na origem do referencial cartesiano;
- Ao valor de  $a$  chama-se declive da reta.

### 5. Fim da aula (5 minutos)

- Projetar o slide 15 e informar os alunos sobre o trabalho para casa. Tarefa 2 do manual, página 116.

O trabalho de casa tem o objetivo de consolidar conhecimentos adquiridos nesta aula.

### Avaliação dos alunos

- Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e formas de relacionamento);

- Produções que decorram da realização das tarefas realizadas na aula e em casa.

### Proposta de resolução da tarefa 1 - Funções lineares (restantes alíneas)

#### 1.3

Amoras					
$\frac{\text{Preço a pagar}}{\text{Peso}} = a_1$	$\frac{1,5}{1} = 1,5$	$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{4,5}{3} = 1,5$	$\frac{16,5}{11} = 1,5$	$\frac{19,5}{13} = 1,5$

Mistura de frutos					
$\frac{\text{Preço a pagar}}{\text{Peso}} = a_2$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{2}{2} = 1$	$\frac{3}{3} = 1$	$\frac{11}{11} = 1$	$\frac{13}{13} = 1$

Coca-colas					
$\frac{\text{Preço a pagar}}{\text{Peso}} = a_3$	$\frac{0,75}{1} = 0,75$	$\frac{1,5}{2} = 0,75$	$\frac{2,25}{3} = 0,75$	$\frac{8,25}{11} = 0,75$	$\frac{9,75}{13} = 0,75$

#### 1.4

Amora: A constante  $a_1$  representa o preço a pagar por  $1hg$  de amoras.

Mistura de frutos: A constante  $a_2$  representa o preço a pagar por  $1hg$  de mistura.

Coca-colas: A constante  $a_3$  representa o preço a pagar por  $1hg$  de coca-colas.

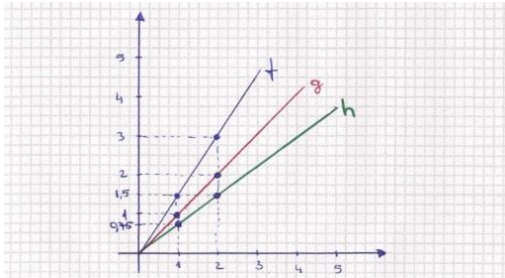
1.5

$f$  é a função que a cada peso de amoras  $x$  (hg) faz corresponder um preço a pagar  $y$ (€).  $f(x) = 1,5 \times x$ ;

$g$  é a função que a cada peso de mistura de frutos  $x$  (hg) faz corresponder um preço a pagar  $y$ (€).  $g(x) = 1 \times x$ ;

$h$  é a função que a cada peso de coca-colas  $x$  (hg) faz corresponder um preço a pagar  $y$ (€).  $h(x) = 0,75 \times x$ .

1.6



1.7

Quanto maior for o  $a$  maior é o declive do gráfico;

Quanto maior for o  $a$  mais próximo o gráfico está do eixo das ordenadas;

Declives diferentes implicam retas não paralelas;

Todas passam na origem.

### 3.3. Terceira aula - 28/02

Aula N.º 89/90 - 90 minutos

#### Sumário

- Função afim;
- Representação analítica e gráfica da função afim.

#### Tema/ Tópico/ Subtópico

- Álgebra/ Funções/ Funções linear e afim.

#### Objetivos da aula

- Fazer o estudo da função afim;
- Relacionar as funções linear e afim e compreender as suas diferenças;
- Representar gráfica e algebricamente a função afim.

#### Recursos e materiais

- Ficha de trabalho;
- Esferográficas de cor verde e vermelha.

#### Metodologia de trabalho

- Trabalho em grupo/ turma.  
Grupos de 3 a 5 alunos previamente selecionados pelo professor.

### Contextualização

Nesta aula será proposta a tarefa 2 - “Um embrulho especial”, que vem no encadeamento da tarefa anterior - “O preço das gomas” e que tem como objetivo introduzir a função afim. Partindo da função relativa às amoras, será adicionado ao preço a pagar um custo adicional relativo a um embrulho para oferta, permitindo assim introduzir o parâmetro  $b$  de forma natural e intuitiva. Na primeira parte da aula será feita a discussão da tarefa - “O preço das gomas” e na segunda parte os alunos começarão a resolver a tarefa - “Um embrulho especial”, onde será feita a representação analítica e gráfica das funções linear e afim, estudada a relação entre as representações gráfica e analítica das funções e estudado o parâmetro  $b$ .

### Desenvolvimento da aula

#### 1. Início da aula (5 minutos)

- Projetar o sumário no quadro.
- Questionar os alunos sobre dúvidas com o trabalho de casa. Caso se revele necessário, efetuar a correção.
- Distribuir os enunciados da tarefa - “O preço das gomas”, resolvida na última aula e informar os alunos que dispõem de 15 minutos para completar as alíneas 1.6 e 1.7 da tarefa. É importante dar mais alguns minutos aos alunos para acabarem esta tarefa.

#### 2. Trabalho autónomo - Tarefa “O preço das gomas” (15 minutos)

- Os alunos irão finalizar as alíneas 1.6 e 1.7 da tarefa iniciada na aula anterior - “O preço das gomas”.

#### 3. Discussão - Tarefa “O preço das gomas” (20 minutos)

- Nas alíneas 1.3 e 1.4 questionar a turma relativamente às constantes de proporcionalidade relativas à mistura de frutos e às coca-colas e relativamente ao seu significado no contexto do problema. Utilizar os slides 4 e 5 para escrever as respostas. Validar a solução com a turma.

No slide 5 reforçar que a relação entre variáveis só é de proporcionalidade direta quando existir uma constante  $a$ , diferente de zero, em que o quociente entre a variável independente e dependente é  $a$ .

- Na alínea 1.5 questionar a turma sobre as expressões analíticas relativas às funções relacionadas com a mistura de frutos e com as coca-colas. Utilizar os slides 6,7 e 8. Validar a solução com a turma. É possível que surjam dúvidas nesta fase ou que os alunos só utilizem uma das notações,  $y = ax$  ou  $f(x) = ax$ . Nestes casos questionar os alunos e complementar com a informação em falta.

No slide 6 reforçar o conceito de função como relação entre dois conjuntos e aproveitar para relembrar os alunos do significado de domínio, contradomínio, objeto e imagem.

- Na alínea 1.6 projetar a representação gráfica feita pelo professor (slide 10) e validar a solução com a turma. Os alunos que tiverem representações diferentes devem ser motivados a detetar e comentar o erro.
- Na alínea 1.7 surge pela primeira vez a ideia de declive. Os alunos deverão compreender que à medida que o parâmetro  $a$  aumenta o declive aumenta. Ou de forma mais informal, quanto maior for o valor de  $a$  mais a reta se aproxima do eixo

das ordenadas. As respostas dos alunos vão sendo filtradas e escritas pelo professor no quadro. Utilizar o slide 11.

#### 4. Síntese - Função linear (5 minutos)

- Projetar o slide 12 e pedir a um aluno para ler em voz alta e para todos registarem no caderno.

Dá-se o nome de **função linear** a toda a função em que a expressão analítica é do tipo  $y = ax$  e a sua representação gráfica é uma reta que passa pela origem do referencial.

#### 5. Trabalho autónomo - Tarefa “Um embrulho especial” (40 minutos)

- O trabalho é realizado em grupo.
- Distribuir os enunciados da tarefa - “Um embrulho especial”.
- O professor circula pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos através do questionamento individual ou coletivo, do feedback e do desafio à refinação de argumentos e raciocínios, sem reduzir o nível de exigência cognitiva da tarefa. O professor faz a seleção e sequenciação das produções que ache conveniente apresentar e discutir.

Relativamente aos objetivos da tarefa, estratégias e dificuldades previstas:

- Na alínea 1.1 os alunos deverão preencher parte da tabela com os preços relativos a cada peso, mais 1€ relativo ao custo do embrulho de oferta. Espera-se que compreendam que este custo adicional influencia a expressão analítica das funções, onde uma é do tipo  $f(x) = ax$  e a outra é tipo  $f(x) = ax + \text{“qualquer coisa”}$ .
- Na alínea 1.2 são pedidas as expressões analíticas das funções. Apesar de já terem sido escritas na tabela, espera-se que os alunos as reescrevam utilizando uma simbologia mais formal:  $i(x) = 1,5x$  e  $j(x) = 1,5x + 1$ .
- Na alínea 1.3 é importante que os alunos compreendam que neste caso a variável  $x$  (peso) tem o valor 10 e que a variável  $y$  (preço a pagar) tem o valor 16. A expressão dada pode ser interpretada como sendo o preço de 10 hectogramas de amoras comprados para oferta.
- Na alínea 1.4 é pedida a representação gráfica das funções. Para determinar as coordenadas dos pontos os alunos poderão recorrer aos valores da tabela ou então utilizar a expressão analítica, ficando ao critério deles optar pela estratégia que considerem mais adequada.
- Na alínea 1.5 os alunos deverão reconhecer que uma função linear (do tipo  $y = ax$ ) passa na origem e que uma função afim (do tipo  $y = ax + b$ ) não passa na origem.
- Na alínea 1.6 pedem-se as coordenadas dos pontos de interseção de cada uma das retas com o eixo das ordenadas. Torna-se necessário identificar o eixo das ordenadas e perceber em que ponto o gráfico da função interseca o eixo. É importante compreender que o ponto de interseção com o eixo dos  $y$  obtém-se quando  $x = 0$ . Isto pode ser determinado analiticamente ou graficamente.

#### 6. Final da aula (5 minutos)

- Projetar o slide 14 e informar os alunos sobre o trabalho para casa: Terminar a tarefa “Um embrulho especial” iniciada na aula.

## Avaliação dos alunos

- Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e formas de relacionamento);
- Produções que decorram da realização das tarefas realizadas na aula e em casa.

## Proposta de resolução da tarefa 2 - Um embrulho especial

1.1

Peso (hg)	1	2	3	4	5	...	$x$
Preço a pagar sem embrulho de oferta (€)	1,5	3	4,5	6	7,5	...	$1,5x$
Preço a pagar com embrulho de oferta (€)	$1,5+1$	$3+1$	$4,5+1$	$6+1$	$7,5+1$	...	$1,5x+1$

1.2

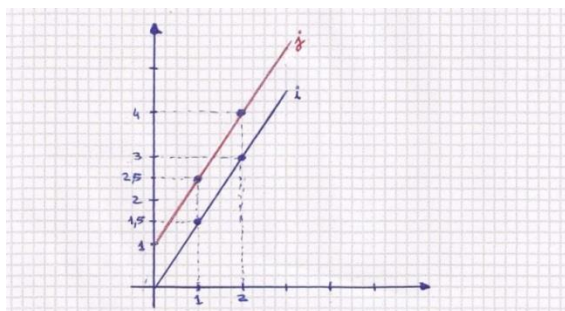
$$i(x) = 1,5x$$

$$j(x) = 1,5x + 1$$

1.3

$j(10) = 16$  Significa o preço a pagar por 10 hectogramas de amoras para oferta (com embrulho especial).

1.4



1.5

A função  $i$  é linear (do tipo  $y = ax$ ), porque é representada graficamente por uma reta que passa na origem do referencial cartesiano. A função  $j$  não é linear mas sim afim (do tipo  $y = ax + b$ ) e não passa na origem.

1.6

O gráfico de  $i$  interseca o eixo das ordenadas no ponto  $(0,0)$ .

O gráfico de  $j$  interseca o eixo das ordenadas no ponto  $(0,1)$ .

### 3.4. Quarta aula - 1/03

#### Aula N.º 91 - 45 minutos

##### Sumário

- Discussão da tarefa - “Um embrulho especial”

##### Tema/ Tópico/ Subtópico

- Álgebra/ Funções/ Funções linear e afim.

##### Objetivos da aula

- Fazer o estudo da função afim;
- Relacionar as funções linear e afim e compreender as suas diferenças;
- Representar gráfica e algebricamente a função afim.

##### Recursos e materiais

- Ficha de trabalho;
- Esferográficas de cor verde e vermelha.

##### Metodologia de trabalho

- Trabalho em grupo/ turma.  
Grupos de 3 a 5 alunos previamente selecionados pelo professor.

##### Contextualização

Nesta aula irá realizar-se a discussão da tarefa - “Um embrulho especial” resolvida na aula anterior.

##### Desenvolvimento da aula

###### 1. Início da aula (5 minutos)

- Projetar o sumário no quadro.
- Distribuir os enunciados da tarefa - “Um embrulho especial”.

###### 2. Discussão - Tarefa “Um embrulho especial” (30 minutos)

- Na alínea 1.1 projetar a tabela que está no slide 2 e pedir a um aluno que vá ao quadro preenchê-la, explicando o seu raciocínio. A solução é validada pela turma.
- Na alínea 1.2 o professor questiona a turma e escreve as expressões analíticas das funções no slide 3. A solução é validada pela turma.
- Na alínea 1.3 questionar os alunos sobre o significado de  $j(10)$  e pedir para calcular o seu valor. Utilizar o slide 4.
- Na alínea 1.4 projetar a representação gráfica feita pelo professor (slide 5) e validar a solução com a turma. Os alunos que tiverem representações diferentes devem ser motivados a detetar e comentar o erro.

Aproveitar para reforçar que os pontos podem ser obtidos através da tabela mas frisar que também podem ser obtidos através da expressão analítica. Utilizar o slide 6 para representar as mesmas funções no quadro, mas através da expressão analítica.

- Na alínea 1.5 questionar a turma. Filtrar e organizar as respostas no slide 7. Interessa escrever que:
  - Uma função linear (do tipo  $y = ax$ ) passa na origem;
  - Uma função afim (do tipo  $y = ax + b$ ) não passa na origem.

- Na alínea 1.6 pedir a um aluno para ir ao quadro identificar os pontos de intersecção com o eixo das ordenadas (slide 8). Se o aluno não for capaz de escrever as coordenadas pode tentar sinalizar os pontos de intersecção no gráfico. Questionar o aluno se é capaz de determinar os pontos de intersecção analiticamente. Caso não o consiga, o professor questiona a turma, valida e escreve a solução.

### 3. Síntese – Função afim (5 minutos)

- Projetar o slide 9 e pedir a um ou dois alunos para lerem em voz alta e para todos registarem no caderno.

Dá-se o nome de **função afim** a toda a função representada por uma expressão analítica do tipo  $y = ax + b$ , sendo a sua representação gráfica uma reta.

**Nota:** Repara que, se  $b = 0$ , tem-se uma função linear.

O gráfico de uma função afim  $f$  do tipo  $f(x) = ax + b$  interseca o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas  $(0, b)$ .

**Nota:** A  $b$  dá-se o nome de **ordenada na origem**.

### 4. Fim da aula (5 minutos)

- Projetar o slide 10 (trabalho para casa) e entregar a tarefa – “Mais funções” para trabalho de casa.

- Caso a discussão da tarefa - “Um embrulho especial” prevista para esta aula termine antes do tempo previsto, os alunos podem começar a fazer o trabalho de casa.

### Avaliação dos alunos

- Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e formas de relacionamento);
- Produções que decorram da realização das tarefas realizadas na aula e em casa.

## 3.5. Quinta aula - 5/03

### Aula N.º 92/93 - 90 minutos

#### Sumário

- Estudo dos parâmetros  $a$  e  $b$  em funções do tipo  $y = ax + b$ .

#### Tema/ Tópico/ Subtópico

- Álgebra/ Funções/ Funções linear e afim.

#### Objetivos da aula

- Relacionar funções do tipo  $y = ax + b$  e compreender o efeito da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  na sua representação gráfica.

### Recursos e materiais

- Ficha de trabalho individual;
- Esferográficas de cor verde e vermelha.

### Metodologia de trabalho

- Trabalho em grupo/ turma.  
Grupos de 3 a 5 alunos previamente selecionados pelo professor.

### Contextualização

Nesta aula será proposto aos alunos a resolução da tarefa 3 - “O fabrico de gomas”. Será feita a exploração gráfica de três funções afins com o mesmo parâmetro  $a$  e diferentes parâmetros  $b$ .

### Desenvolvimento da aula

#### 1. Início da aula (15 minutos)

- Projetar o sumário no quadro.
- Questionar os alunos sobre dúvidas com o trabalho de casa. Caso se revele necessário, efetuar a correção.
- Utilizar os slides 2 a 6 para reforçar a síntese feita na aula anterior.

#### 2. Trabalho autónomo - Tarefa “O fabrico de gomas” (40 minutos)

- O trabalho é realizado em grupo.
- Distribuir os enunciados da tarefa - “O fabrico das gomas”.
- O professor circula pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos através do questionamento individual ou coletivo, do feedback e do desafio à refinação de argumentos e raciocínios, sem reduzir o nível de exigência cognitiva da tarefa. O professor faz a seleção e sequenciação das produções que ache conveniente apresentar e discutir.

Relativamente aos objetivos da tarefa, estratégias e dificuldades previstas:

- Na alínea 1.1 são dados os gráficos de duas funções e pede-se a representação gráfica de uma terceira função cuja expressão analítica é dada. Ao contrário das tarefas anteriores, nesta os alunos não dispõem de qualquer tabela e terão de determinar as coordenadas dos pontos através da expressão analítica. É também importante que os alunos compreendam que a função faz sentido apenas para valores de  $x$  entre  $0$  e  $60$  (minutos) e que por essa razão os gráficos das funções admitem apenas valores de  $x$  positivos.
- Na alínea 1.2 espera-se que os alunos compreendam, por exemplo, que os gráficos das funções são retas paralelas. Isto deve-se ao fato das retas terem todas o mesmo declive, ou seja, terem todas o mesmo  $a$ .
- Na alínea 1.3 espera-se que os alunos identifiquem o parâmetro  $b$  em cada uma das funções e que compreendam que se trata da ordenada na origem, ou seja, da ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas.
- Na alínea 1.4 os alunos terão de identificar a variável independente  $x$  e a dependente  $y$ .
- Na alínea 1.5 espera-se que os alunos calculem e interpretem o significado de  $t(1)$ .

#### 3. Discussão - Tarefa “O fabrico de gomas” (30 minutos)

- Na alínea 1.1 projetar o referencial cartesiano, slide 8, e pedir a um aluno para ir ao quadro representar a função  $t$  explicando como é que determinou as coordenadas dos pontos. Os alunos que tiverem representações diferentes devem ser motivados a detetar e comentar o erro.

- Na alínea 1.2 projetar o slide 9 e questionar a turma. As respostas dos alunos vão sendo filtradas e escritas pelo professor no quadro. Podem ser escritas coisas do tipo: (i) as retas são paralelas; (ii) os declives das retas são iguais; (iii) o valor de  $a$  é igual nas três funções. Pode questionar-se o que aconteceria se considerássemos valores de  $a$ , menores ou maiores.

- Na alínea 1.3 projetar o slide 10 e questionar a turma. As respostas dos alunos vão sendo filtradas e escritas pelo professor no quadro. Podem ser escritas coisas do tipo: (i) o  $b$  é a ordenada na origem; (ii) O ponto  $(0;b)$  é determinado fazendo  $x=0$ ; (iii) o eixo das ordenadas é intersetado pelos gráficos das funções nos pontos  $(0;1)$ ,  $(0;0)$  e  $(0;-2)$ . Perante o sinal de  $b$  podemos considerar as seguintes situações:

- Se  $b > 0$ , o gráfico da função corta o eixo das ordenadas acima da origem;
- Se  $b = 0$ , o gráfico da função corta o eixo das ordenadas na origem;
- Se  $b < 0$ , o gráfico da função corta o eixo das ordenadas abaixo da origem.

- Na alínea 1.4 não se preveem dificuldades tendo em conta que nas aulas anteriores foi-se reforçando sempre que a variável independente é o  $x$  e representa-se sempre no eixo das abcissas, e que a variável dependente é o  $y$ , e representa-se sempre no eixo das ordenadas. Utilizar o slide 11.

- Na alínea 1.5 os alunos deverão compreender que  $t(1)$  significa a temperatura  $y$  do açúcar no minuto  $x = 1$ . Como  $t(x) = 2x - 2$  a temperatura no minuto  $1$  é de  $0$  graus celsius. Utilizar o slide 11. Esta alínea pode servir para reforçar o conceito de função, perguntando por exemplo se é possível termos  $t(1) = 0$  e  $t(1) = 1$ .

#### 4. Final da aula (5 minutos)

- Projetar o slide 12 e informar os alunos sobre o trabalho para casa: Tarefa - “Funções: exercícios de consolidação”.

#### Avaliação dos alunos

- Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e formas de relacionamento).

- Produções que decorram da realização das tarefas realizadas na aula e em casa.

### 3.6. Sexta aula - 7/03

#### Aula N.º 94/95 - 90 minutos

##### Sumário

- Exercícios de consolidação e revisão para o teste;
- Entrega dos testes de avaliação.

### Tema/ Tópico/ Subtópico

- Álgebra/ Funções/ Funções linear e afim.

### Conhecimentos prévios dos alunos

- Compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos e utilizar as suas várias notações;
- Analisar uma função a partir das suas representações.

### Objetivos da aula

- Consolidar conceitos adquiridos em aulas anteriores, através de resolução de exercícios em contexto puramente matemático.
- Aprofundar o contacto e a prática com terminologia e simbologia associada ao tópico.

### Recursos e materiais

- Folhas A4 brancas.

### Metodologia de trabalho

- Trabalho individual.

### Contextualização

Nas aulas anteriores foram realizadas tarefas, formuladas em contexto real, que permitiram introduzir de forma mais natural e intuitiva as funções linear e afim. Nesta aula será dado ênfase à resolução de exercícios práticos, retirados do manual, com o objetivo de consolidar conceitos adquiridos em aulas anteriores e aprofundar o contato e a prática com terminologia e simbologia utilizada nas funções.

### Desenvolvimento da aula

#### **1. Início da aula (5 minutos)**

- Projetar o sumário no quadro (slide 1).

#### **2. Trabalho autónomo (80 minutos)**

- O trabalho é realizado individualmente.

- Não estão previstos momentos formais de discussão. Durante o trabalho autónomo o professor apoiará os alunos nas resoluções. A resolução no quadro irá sendo realizada à medida que os alunos forem progredindo na resolução dos exercícios.

- Projetar o slide 2 com os exercícios propostos para a aula:

- Exercício 4 da página 118;
- Exercício 10 da página 121;
- Proposta 7 da página 131.

### Estratégias a adotar na resolução dos exercícios propostos (slides 3 a 8)

#### Exercício 4 página 118

No exercício 4 são dadas duas funções lineares, uma representada graficamente e outra representada analiticamente. Na alínea 4.1, relativamente a uma das funções, é pedida a expressão analítica a partir da representação gráfica. Na alínea 4.2,

relativamente às funções dadas, pede-se a coordenada de um ponto que tem por abcissa um determinado  $x$  e a coordenada de um ponto que tem por ordenada um determinado  $y$ . Na alínea 4.3 os alunos terão de verificar se um dado ponto pertence ou não ao gráfico de uma das funções.

#### 4.1

A função  $g$  representada graficamente é do tipo  $y = ax$ .

Por observação do gráfico é possível determinarmos o ponto  $(-2,4)$ .

Para encontrar o nosso  $a$  podemos substituir na expressão  $x$  por  $-2$  e  $y$  por  $4$ . Resolvendo a equação  $4 = -2a$ , temos  $a = -2$ . A expressão analítica de  $g$  é  $y = -2x$ . Pedir a representação gráfica da função  $f$ .

#### 4.2.1

Para determinar a ordenada do ponto cuja abcissa é  $4$  fazemos  $f(4) = 0,75 \times 4$ . Neste caso estamos a utilizar a expressão analítica de  $f$  para determinar as coordenadas do ponto, que é  $(4;3)$ . Por observação do gráfico de  $f$  também será possível determinar as coordenadas deste ponto.

#### 4.2.2

Para determinar a abcissa do ponto cuja ordenada é  $2$  fazemos  $2 = -2x$ . Neste caso estamos a utilizar a expressão analítica de  $g$  para determinar as coordenadas do ponto, que é  $(-1;2)$ . Por observação do gráfico de  $g$  também será possível determinar as coordenadas deste ponto.

#### 4.3

Para verificar se o ponto de coordenadas  $(-8;-6)$  pertence ao gráfico de  $f$  podemos substituir na expressão analítica o  $x$  por  $-8$  e verificar se  $y = -6$ . Se se verificar, o ponto pertence ao gráfico.

Como  $f(-8) = 0,75 \times (-8) = -6$ , o ponto  $(-8,-6)$  pertence ao gráfico de  $f$ .

### Exercício 10 página 121

Neste exercício são dadas duas funções afins representadas graficamente. Na alínea 10.1 pede-se as expressões analíticas das funções. Na alínea 10.2 pede-se para calcular a imagem de um dado objeto através da expressão analítica. Na alínea 10.3 pede-se para calcular o objeto de uma dada imagem através da expressão analítica.

#### 10.1

A função  $f$  representada graficamente é do tipo  $y = ax + b$ .

Sabemos que  $b$  é a ordenada na origem. Por observação do gráfico é possível determinarmos o ponto  $(0,b)$ , ou seja, o ponto  $(0;2)$ , ou seja, o ponto onde o gráfico intersesta o eixo das ordenadas. Logo  $b = 2$ .

Para encontrar o nosso  $a$  podemos substituir na expressão  $x$  por  $2$  e  $y$  por  $1$ . Resolvendo a equação  $1 = 2a + 2$ , temos  $a = -a \times \frac{1}{2}$ . A expressão analítica de  $f$  é  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ .

#### 10.2.1

Não é possível determinar  $g(5)$  graficamente portanto é necessário determinar a expressão analítica de  $g$ . Utilizando o raciocínio da alínea anterior, ficamos a saber que  $g(x) = 2x + 2$ . Para determinar  $g(5)$  fazemos  $g(5) = 2 \times 5 + 2 = 12$ .

10.2.2

$$g(-3) = -3 \times 2 + 2 = -4$$

10.3

Para determinar  $x$  de modo que  $f(x) = -2$ , fazemos  $\frac{1}{2}x + 2 = -2$ , onde  $x=8$ .

Estabelecer a relação entre:

$a < 0$ , declive negativo, função decrescente (caso da função  $f$ );

$a > 0$ , declive positivo, função crescente (caso da função  $g$ ).

### Proposta 7 página 131

Na proposta 7 são dadas quatro funções representadas graficamente e quatro expressões analíticas. No ponto 1 pede-se para fazer a correspondência entre os gráficos e as respectivas expressões analíticas. No ponto 2 pede-se o cálculo das coordenadas de quatro pontos, sendo necessário neste caso recorrer ao gráfico e às expressões para os determinar completamente.

1

Três das quatro retas são paralelas o que quer dizer que têm de ter todas o mesmo  $a$ . Para distinguir o  $b$  basta observar a ordenada na origem de cada uma delas. A reta *I* corresponde à função  $i$ , a reta *II* corresponde à função  $g$ , a reta *III* corresponde à função  $f$  e por exclusão de partes a reta *IV* corresponde à função  $h(x)$ .

2

$A(0;4)$ ,  $B(0;-3)$ ,  $C(1,2;0)$  e  $D(-2,5;0)$ .

### 3. Final da aula (5 minutos)

- Para trabalho de casa pedir aos alunos para reverem os exercícios onde tiveram maiores dificuldades e terminarem os exercícios propostos nesta aula e que não tenham sido terminados. Projetar o slide 9.

### Avaliação dos alunos

- Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e formas de relacionamento).

- Produções que decorram da realização das tarefas realizadas na aula e em casa.

### **3.7. Oitava aula - 12/03**

**Aula N.º 97/98 - 90 minutos**

#### Sumário

- Estudo das funções linear e afim no GeoGebra.

#### Tema/ Tópico/ Subtópico

- Álgebra/ Funções/ Funções linear e afim.

#### Conhecimentos prévios dos alunos

- Analisar uma função a partir da sua representação gráfica.

#### Objetivos da aula

- Compreender o efeito da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  na representação gráfica de funções do tipo  $y = ax$  e do tipo  $y = ax + b$ .

#### Recursos e materiais

- Ficha de trabalho individual;
- Computadores com a aplicação GeoGebra instalada.

#### Metodologia de trabalho

- Trabalho em grupo.  
Os grupos serão distribuídos pelo número de computadores disponíveis (dois a três alunos por computador).

#### Contextualização

Nesta aula dar-se-á continuidade ao trabalho realizado no dia 5 de Março, onde se iniciou o estudo da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  na função afim, com a tarefa - “O fabrico de gomas”. Esta nova tarefa, “Funções no GeoGebra”, tem por objetivo o estudo do gráfico da função afim através da utilização de novas tecnologias, nomeadamente da manipulação do *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

#### Desenvolvimento da aula

##### **1. Início da aula (10 minutos)**

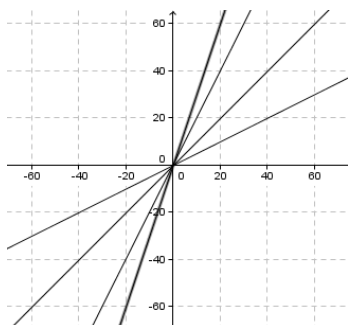
- Conduzir os alunos até ao laboratório e distribuir os grupos (de dois alunos cada) pelos vários computadores.
- Distribuir os enunciados da tarefa - “Funções no GeoGebra” e informar os alunos que à medida que forem avançando na tarefa terão de ir registando as suas conclusões nos espaços reservados para o efeito.
- Para facilitar eventuais esclarecimentos, haverá uma projeção da tarefa e/ou do GeoGebra.

##### **2. Trabalho autónomo/ Discussão - Tarefa “Funções no GeoGebra” (50 minutos)**

Relativamente aos objetivos da tarefa, estratégias e dificuldades previstas:

- Nas questões 1 e 2 espera-se que os alunos compreendam que a variação do parâmetro  $a$  tem influência nos declives das retas relativas às funções representadas.

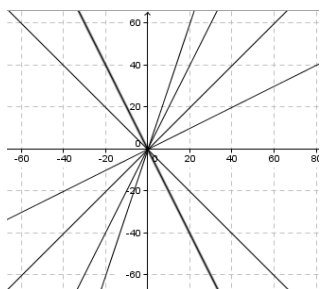
Quanto maior for o valor de  $a$  maior será o declive da reta. Quanto menor for o valor de  $a$  menor será o declive da reta. Um  $a$  igual a zero significa que o declive é nulo. Os alunos deverão obter gráficos de funções semelhantes aos da figura seguinte:



Espera-se ainda que os alunos compreendam que o sinal de  $a$  está relacionado com o crescimento e decrescimento da função. Perante o sinal de  $a$  podemos considerar três situações distintas:

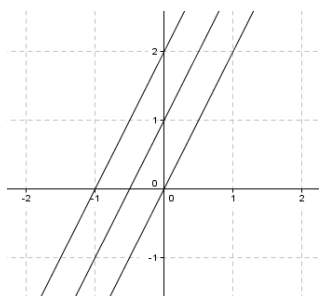
- Se  $a > 0$ , o declive é positivo e a função é crescente;
- Se  $a = 0$ , o declive é nulo e a função é constante;
- Se  $a < 0$ , o declive é negativo e a função é decrescente.

Na questão 2 os alunos deverão obter gráficos de funções semelhantes aos da figura seguinte:



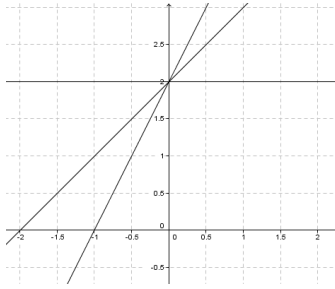
- Na questão 3 espera-se que os alunos compreendam que o parâmetro  $b$  é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas. À medida que  $b$  aumenta, o valor da ordenada na origem aumenta e vice-versa.

Os alunos deverão obter gráficos de funções semelhantes aos da figura seguinte:



- Na questão 4 os alunos deverão compreender que quando o declive é nulo, ou seja, o valor de  $a$  é zero, a função é constante. É o caso da função  $y = 2$ , obtida pela substituição de  $x$  por zero na expressão  $y = 2x + 2$ .

Os alunos deverão obter gráficos de funções semelhantes aos da figura seguinte:



### 3. Discussão da tarefa e conclusões finais (20 minutos)

- Em conjunto com os alunos o professor deve ir selecionando as sugestões e escrevendo no quadro as conclusões em cada alínea (ver ponto anterior).

### 4. Final da aula (10 minutos)

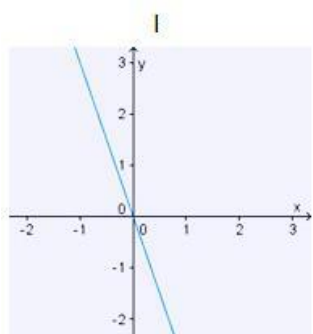
- Os alunos serão reconduzidos à sala de aula.

#### Avaliação dos alunos

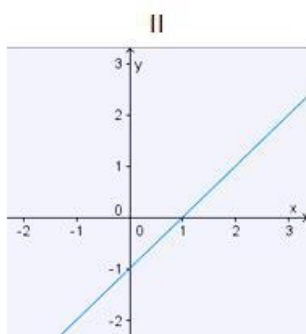
- Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e formas de relacionamento).
- Produções que decorram da realização das tarefas realizadas na aula e em casa.

## Anexo 4 - Ficha de avaliação

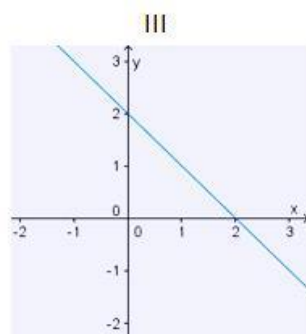
1. Observa as representações gráficas I, II e III a seguir apresentadas.



$$f(x) = -x + 2$$



$$g(x) = -3x$$



$$h(x) = x - 1$$

$$f(x) \longrightarrow$$

Explica as tuas opções.

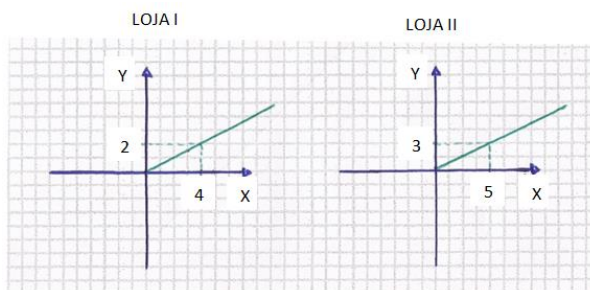
$$g(x) \longrightarrow$$

$$h(x) \longrightarrow$$

1.2 O ponto  $(-4; 12)$  pertence a um dos gráficos das funções  $f$ ,  $g$  ou  $h$ . A qual pertence? Explica a tua resposta. (5)

1.3 Calcula  $f(3)$ . (5)

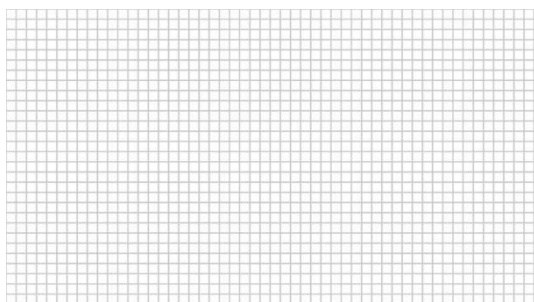
2. Observa as representações gráficas seguintes, cujas funções fazem corresponder a cada peso  $x$  (em quilos) de limão, um determinado custo  $y$  (em euros).



2.1 Qual é a loja que vende o limão mais barato? Explica a tua resposta. (5)

2.2 Determina a expressão analítica da função que corresponde à LOJA I. (10)

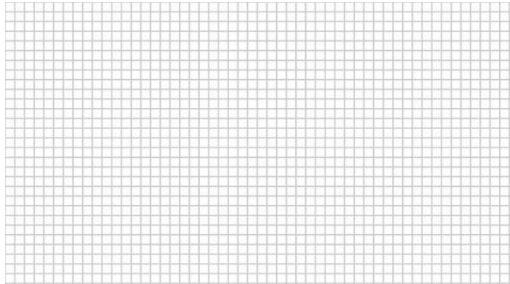
3. Representa graficamente a função  $i(x) = x + 1$ . (10)



## Anexo 5 - Entrevista

1. Representa graficamente a função afim  $z$ , que relaciona o tempo  $x$  em minutos e a temperatura  $y$  em graus celsius de um novo ingrediente de gomas testado durante 60 minutos. Relativamente ao teste sabe-se:

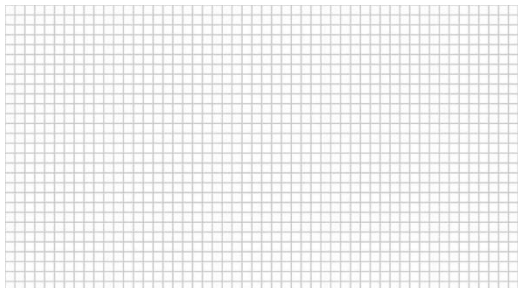
- A temperatura registada no início da experiência (minuto 0) é de 10 graus celsius.
- A temperatura registada no final da experiência (minuto 60) é de 30 graus celsius.



2. Na tabela seguinte está o preço praticado por um técnico de eletrodomésticos na deslocação à casa dos seus clientes.

Taxa fixa de deslocação	Preço por hora de trabalho
15 €	10 €

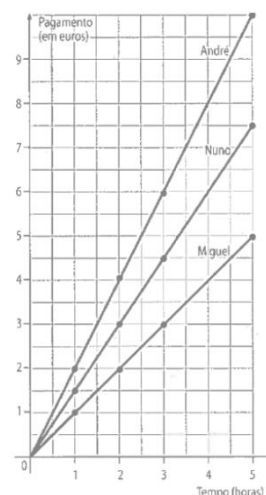
Seja  $h$  a função que a  $x$  horas de trabalho na deslocação do técnico faz corresponder um preço a pagar  $y$  por cliente. Representa graficamente a função  $h$ .



3. O André o Nuno e o Miguel trabalham em diferentes lojas de gomas, na distribuição de publicidade ao domicílio. No referencial em baixo encontram-se registadas as horas de trabalho e o respetivo pagamento.

3.1 Qual dos três rapazes recebeu mais dinheiro?  
Explica porquê.

3.2 Quanto ganha cada um deles numa hora de trabalho?

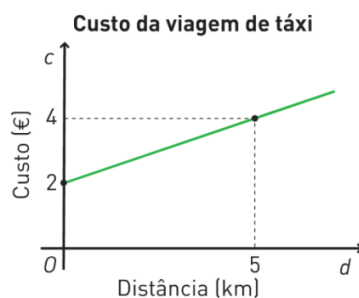


**3.3** Determina o número de horas que é preciso o Miguel trabalhar para ganhar 15€.

**3.4** Determina a expressão analítica da função que relaciona o tempo de trabalho (horas) e o valor a receber (euros), no caso do Miguel.

**3.5** Organiza numa tabela, o valor a receber pelo Miguel por cada hora de trabalho.

**4.** O Sr. Raul é taxista. Por cada serviço prestado, o cliente paga uma taxa fixa, acrescida de um valor por cada quilómetro percorrido. O gráfico da função que relaciona o custo a pagar pelo cliente e a distância percorrida faz parte da semirreta representada na figura ao lado.



**4.1** Indica o valor da taxa fixa.

**4.2** Determina o preço de cada quilómetro percorrido (sem considerar a taxa fixa).

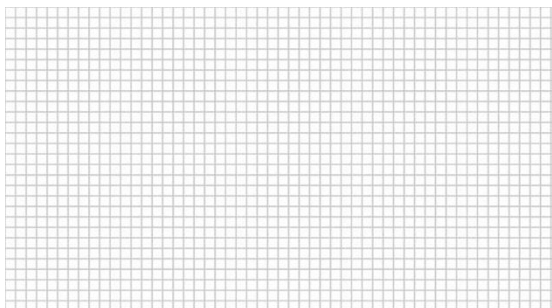
**4.3** Um cliente fez uma viagem de 12 quilómetros. Qual foi o valor a pagar ao taxista?

**4.4** Um cliente pagou 14€ por uma viagem. Qual foi a distância percorrida?

**4.5** Determina a expressão analítica da função que relaciona o custo da viagem com a distância percorrida.

**4.6** Organiza numa tabela os valores da distância percorrida e do respetivo custo representados pelo gráfico da função.

**5.** Representa graficamente a função  $f(x) = \frac{x}{2} - 3$ .



## **Anexo 6 - Pedido de autorização à Direção de Escola**

Exmo.(a) Senhor(a) Diretora

Pontinha, 17 de Janeiro de 2013

Nuno Miguel da Silva Loureiro, aluno do Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, da Universidade de Lisboa, vem por este meio solicitar autorização para proceder à recolha de registos áudio de alguns momentos relativos ao trabalho realizado na turma do 8.º ano, realizada no âmbito de uma investigação individual baseada na lecionação da unidade didática sobre Funções, e que culminará com o relatório de Mestrado intitulado “Representação gráfica das funções Linear e Afim: Um estudo com alunos do 8.º ano”. Este estudo visa investigar de que forma lidam os alunos com a representação gráfica das funções Linear e Afim.

Informo ainda que a informação obtida será apenas para uso académico e que em nenhum momento deste estudo serão reveladas as identidades dos alunos.

Fico à inteira disposição de V. Exa. para complementar toda a informação que julgue oportuna.

Agradecendo desde já a sua colaboração, subscrevo-me com os melhores cumprimentos,

Atenciosamente

O professor estagiário,

(Nuno Loureiro)

## **Anexo 7 - Pedido de autorização aos Encarregados de Educação**

Exmo.(a) Senhor(a) Encarregado (a) de Educação

Pontinha, 24 de Janeiro de 2013

No âmbito do curso de Mestrado em Ensino da Matemática, da Universidade de Lisboa, encontro-me a desenvolver um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento Algébrico com alunos do 8.º ano e que irá servir de base à realização do meu relatório final de estágio.

Com essa finalidade, necessito proceder à recolha de registos áudio de alguns momentos relativos ao trabalho realizado nas aulas, durante a lecionação da unidade didática sobre Funções. Para tal, solicito autorização para a participação do seu educando no trabalho, sendo que em nenhum momento deste estudo serão reveladas as identidades dos alunos. A informação obtida será apenas para uso académico.

Agradeço desde já a colaboração prestada por V.Ex<sup>a</sup>, solicitando o preenchimento do seguinte destacável que deverá ser entregue à professora de Matemática.

Atenciosamente

O professor estagiário,

(Nuno Loureiro)

## Anexo 8 - Slides de apoio às aulas

### 8.1. Primeira aula - 22/02

GOVERNO DE PORTUGAL  
ministério da educação e ciência

ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP DOVA BRAAMCAMP FREIRE  
41003

Aula n.º 86      22 de Fevereiro de 2013

1153

**Tarefa 1 – O preço das gomas**


1 Um grupo de amigos decidiu passar numa loja de doces para comprar gomas de vários sabores. Ao consultarem os preços, verificaram que cada hg (1 hectograma=100gramas) de gomas custa:

- 1,5 € no caso das "Amoras";
- 1€ no caso da "Mistura de frutos".
- 0,75€ no caso das "Coca-colas";

1.1 Ajuda-os a fazer as contas completando a seguinte tabela:

Peso (hg)	1	2	3	4	5	...	11	...	13
Preço "Amoras" (€)		3				...		...	
Preço "Mistura frutos" (€)				4		...		...	
Preço "Coca-colas" (€)			2,25			...		...	

- Resolve a tarefa a caneta. Se te enganares faz um traço por cima, não risques!
- Explica como pensaste.
- Faz a correção sempre a lápis.



GOVERNO DE PORTUGAL  
ministério da educação e ciência

ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP DOVA BRAAMCAMP FREIRE  
41003

Tarefa 1 – O preço das gomas

1153

1.2 Um dos amigos tinha 6€ para gastar. Sabendo que gastou metade desse dinheiro em "Coca-colas", dá 3 exemplos de pesos de outros tipos de gomas que poderiam ter sido comprados, de forma a não sobrar dinheiro.

	Exemplo 1		Exemplo 2		Exemplo 3	
	Peso (hg)	Preço (€)	Peso (hg)	Preço (€)	Peso (hg)	Preço (€)
"Amoras"						
"Mistura frutos"						

GOVERNO DE PORTUGAL  
ministério da educação e ciência

ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP DOVA BRAAMCAMP FREIRE  
41003

Tarefa 1 – O preço das gomas

1153

1.1 Ajuda-os a fazer as contas completando a seguinte tabela:

- 1,5 € no caso das "Amoras";
- 1€ no caso da "Mistura de frutos".
- 0,75€ no caso das "Coca-colas";

Peso (hg)	1	2	3	4	5	...	11	...	13
Preço "Amoras" (€)	1,5	3	4,5	6	7,5	...		...	
Preço "Mistura frutos" (€)	1	2	3	4	5	...		...	
Preço "Coca-colas" (€)	0,75	1,5	2,25	3	3,75	...		...	

GOVERNO DE PORTUGAL  
ministério da educação e ciência

ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP DOVA BRAAMCAMP FREIRE  
41003

Tarefa 1 – O preço das gomas

1153

1.2 Um dos amigos tinha 6€ para gastar. Sabendo que gastou metade desse dinheiro em "Coca-colas", dá 3 exemplos de pesos de outros tipos de gomas que poderiam ter sido comprados, de forma a não sobrar dinheiro.

	Exemplo 1		Exemplo 2		Exemplo 3		Exemplo 4		Exemplo 5	
	Peso (hg)	Preço (€)	Peso (hg)	Preço (€)	Peso (hg)	Preço (€)	Peso (hg)	Preço (€)	Peso (hg)	Preço (€)
"Amoras"	2	3 €	0	0						
"Mistura de frutos"	0	0	3	3 €						
Total gasto	3 €		3 €							

Peso (hg)	1	2	3	4	5	...	11	...	13
Preço "Amoras" (€)	1,5	3	4,5	6	7,5	...	18,5	...	19,5
Preço "Mistura frutos" (€)	1	2	3	4	5	...	11	...	13
Preço "Coca-colas" (€)	0,75	1,5	2,25	3	3,75	...	8,25	...	9,75

GOVERNO DE PORTUGAL  
ministério da educação e ciência

ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP DOVA BRAAMCAMP FREIRE  
41003

Tarefa 1 – O preço das gomas

1153

Existe uma relação entre as variáveis PESO e PREÇO:

**O preço das gomas varia em função do peso**

Peso (hg)	Variável independente
Preço "Amoras" (€)	Variável dependente

Estamos perante uma situação de proporcionalidade direta

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/3 ODEIRA BRAAMCAMP FREIRE 4710-010

### Tarefa 1 – O preço das gomas

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/3 ODEIRA BRAAMCAMP FREIRE 4710-010

### Tarefa 1 – O preço das gomas

X – Peso  
Y – Preço

(x ; y)  
(1 ; 1)  
(-2 ; 2)  
(-2,5 ; -2,5)  
(3 ; -3)

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/3 ODEIRA BRAAMCAMP FREIRE 4710-010

### TPC

- Tarefa: Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano.

Fonte: Tarefa adaptada do Ministério de Educação/DGDC:  
DGDC: 023 Sequencia Sequencias e Funções NPMEB 3c7 (1)

## 8.2. Segunda aula - 26/02


GOVERNO DE PORTUGAL  
ministério da educação e ciência  
ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP DO OCEANO BRANCO FREIXE 4810-001

Aula n.º 87 / 88      26 de Fevereiro de 2013

**Sumário**

- Função linear;
- Representação analítica e gráfica da função linear.

- Resolve a tarefa a caneta. Se te enganares faz um traço por cima, não risques!
- Explica como pensaste.
- Faz a correção sempre a lápis.



GOVERNO DE PORTUGAL  
ministério da educação e ciência  
ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP DO OCEANO BRANCO FREIXE 4810-001

**Tarefa 1 – O preço das gomas**

1.3 Sabendo que a constante de proporcionalidade é o quociente entre o preço a pagar e o peso das gomas, determina o seu valor no caso das:

1.3.1 Amoras:

Peso (hg)	1	2	3	4	5	...
Preço a pagar (€)	1,5	3	4,5	6	7,5	...

**Preço a pagar =**  
**Peso**

1.4 Qual é o significado da constante de proporcionalidade no contexto do problema?

GOVERNO DE PORTUGAL  
ministério da educação e ciência  
ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP DO OCEANO BRANCO FREIXE 4810-001

**Tarefa 1 – O preço das gomas**

Amoras						
Preço a pagar / Peso	$\frac{1,5}{1} = 1,5$	$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{4,5}{3} = 1,5$	$\frac{6}{4} = 1,5$	$\frac{7,5}{5} = 1,5$	$\frac{16,5}{11} = 1,5$

O preço a pagar é diretamente proporcional ao peso, se existir uma constante ( $\neq 0$ ):

**Preço a pagar = constante**      No caso das amoras: **a = 1,5**

Neste caso a relação entre as variáveis é de proporcionalidade direta.

Uma situação de proporcionalidade direta pode ser representada por uma função.

GOVERNO DE PORTUGAL  
ministério da educação e ciência  
ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP DO OCEANO BRANCO FREIXE 4810-001

**Tarefa 1 – O preço das gomas**

1.5 Encontra uma expressão analítica para f sabendo que:

1.5.1 f é a função que a cada peso de amoras x (hg) faz corresponder um preço a pagar y (€)

Amoras										
Peso (hg)	1	2	3	4	5	...	11	...	13	...
Preço a pagar (€)	1,5	3	4,5	6	7,5	...	16,5	...	19,5	...

1,5x1    1,5x2

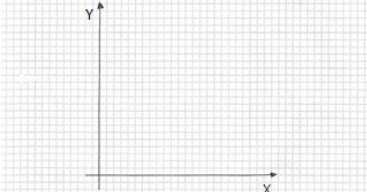
Teste: Preço a pagar por 13 hg?  
Preço a pagar por 13 hg?

GOVERNO DE PORTUGAL  
ministério da educação e ciência  
ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP DO OCEANO BRANCO FREIXE 4810-001

**Tarefa 1 – O preço das gomas**

1.6 Representa graficamente, no mesmo referencial, a função f (a azul)...

Amoras						
Peso (hg)	1	2	3	4	5	...
Preço a pagar (€)	1,5	3	4,5	6	7,5	...



$y = 1,5 \times x$   
 $f(x) = 1,5 \times x$

GOVERNO DE PORTUGAL  
ministério da educação e ciência  
ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP DO OCEANO BRANCO FREIXE 4810-001

**TPC**

• Tarefa 2 do manual, página 116

**Tarefa 2**

O João e a Rita foram de compras num dia, que estiveram de férias em Londres.

Nome das lojas onde estiveram, as compras feitas e o que pagaram em libras (£) ou em euros (€).

No dia houve uma grande promoção de conjuntos de CD de música.

1. Cada um dos dois amigos comprou um conjunto de CD de igual valor. A Rita pagou € 10 (10 libras) e a João pagou 12,00 € (libras).

As restantes compras estão indicadas na tabela.




Compras	Preço (em £)	Preço (em €)
Alimentos	10	12
Utensílios	8	10
Sapatos-casuais	12	15
Livros	10	12

2. Seja f a função que a cada x, preço em libras de um artigo, faz corresponder y, preço em euros.

2.1. Completa a igualdade:  $y = \dots \times x$ .

2.2. Neste contexto, indica o significado de  $f(10) = 12,5$ .

2.3. Considera as seguintes representações gráficas:

Qual das representações gráficas corresponde à função f? Para cada uma das outras opções indica uma razão para a rejeitar.

### 8.3. Terceira aula - 28/02


GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA FREIRE 48102

Aula n.º 89 / 90      28 de Fevereiro de 2013

**Sumário**

- Função afim;
- Representação analítica e gráfica da função afim.

- Resolve a tarefa à caneta. Se te enganares faz um traço por cima, não risques!
- Explica como pensaste.
- Faz a correção sempre a lápis.



GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA FREIRE 48102

Tarefa 1 – O preço das gomas

Acabar as alíneas 1.6 e 1.7

**“O preço das gomas”**

**15 minutos**

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA FREIRE 48102

Tarefa 1 – O preço das gomas

Discussão da tarefa

**“O preço das gomas”**

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA FREIRE 48102

Tarefa 1 – O preço das gomas

1.3 Constante de proporcionalidade.

Amoras:  $\frac{1,5}{1} = \frac{3}{2} = \frac{4,5}{3} = \frac{6}{4} = \frac{7,5}{5} = 1,5$        $a = 1,5$

Mistura de frutos:

Coca-Colas:

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA FREIRE 48102

Tarefa 1 – O preço das gomas

1.4 Qual é o significado da constante de proporcionalidade no contexto do problema?

Amoras  $a = 1,5$

Mistura de frutos  $a = 1$

Coca – colas  $a = 0,75$

O preço a pagar é diretamente proporcional ao peso se existir uma constante  $a$  diferente de zero tal que:

$$\frac{\text{Preço a pagar}}{\text{Peso}} = a$$

Ao número  $a$  chama-se constante de proporcionalidade.

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA FREIRE 48102

Tarefa 1 – O preço das gomas

1.5.1

		Amoras					
Peso (hg)		1	2	3	4	5	...
Preço a pagar (€)		1,5	3	4,5	6	7,5	...
		$1,5 \times 1$	$1,5 \times 2$	$1,5 \times 3$	$1,5 \times 4$	$1,5 \times 5$	$1,5 \times x$

$f(x) = 1,5 \times x$

$f$  é a função que a cada peso  $x$  (hg) faz corresponder um único preço a pagar  $y$  (€)

Peso

1

2

3

4

5

...

Preço a pagar

1,5

3

4,5

6

7,5

...

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCAAMP FREIRE 4150-010

### Tarefa 1 – O preço das gomas

1.5.2 g é a função que a cada peso de **mistura de frutos** x (hg) faz corresponder um preço a pagar y (€)

Mistura de frutos							
Peso (hg)	1	2	3	4	5	...	x
Preço a pagar (€)	1	2	3	4	5	...	y

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCAAMP FREIRE 4150-010

### Tarefa 1 – O preço das gomas

1.5.3 h é a função que a cada peso de **coca-colas** x (hg) faz corresponder um preço a pagar y (€)

Coca-colas							
Peso (hg)	1	2	3	4	5	...	x
Preço a pagar (€)	0.75	1.5	2.25	3	3.75	...	y

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCAAMP FREIRE 4150-010

### Tarefa 1 – O preço das gomas

1.6 Representa graficamente, no mesmo referencial, as funções f (a azul), g (a vermelho) e h (a verde).

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCAAMP FREIRE 4150-010

### Tarefa 1 – O preço das gomas

1.7 Explica o efeito do valor de a (constante de proporcionalidade) nos gráficos das funções.

$$f(x) = 1.5 \times x$$

$$g(x) = 1 \times x$$

$$h(x) = 0.75 \times x$$

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCAAMP FREIRE 4150-010

### Tarefa 1 – O preço das gomas

Página 117 do manual

Dá-se o nome de **função linear** a toda a função em que a expressão analítica é do tipo  $y = ax$  e a sua representação gráfica é uma reta que passa pela origem do referencial.

Ao valor de a chama-se declive da reta.

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCAAMP FREIRE 4150-010

### TPC

- Terminar em casa a tarefa: "Um embrulho especial".



GOVERNO DE PORTUGAL | Ministério da Educação | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP C/DR BRAAMCAMP FREIRE | 4º ano

### Tarefa 2 – Um embrulho especial

1.5 A função  $i$  é linear? E a função  $j$ ? Explica a tua resposta.

GOVERNO DE PORTUGAL | Ministério da Educação | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP C/DR BRAAMCAMP FREIRE | 4º ano

### Tarefa 2 – Um embrulho especial

1.6 Indica as coordenadas dos pontos de interseção de cada uma das retas com o eixo das ordenadas.

$i(x) = 1,5x$

$j(x) = 1,5x + 1$

GOVERNO DE PORTUGAL | Ministério da Educação | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP C/DR BRAAMCAMP FREIRE | 4º ano

### Tarefa 2 – Um embrulho especial

Dá-se o nome de **função afim** a toda a função representada por uma expressão analítica do tipo  $y = ax + b$ , sendo a sua representação gráfica uma reta.

**Nota:** Repara que, se  $b = 0$ , tem-se uma função linear.

O gráfico de uma função afim  $f$  do tipo  $f(x) = ax + b$  intersesta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas  $(0, b)$ .

**Nota:**  $a$  e  $b$  dá-se o nome de **ordenada na origem**.

TPC

Tarefa – "Mais Funções".

## 8.5. Quinta aula - 5/03


GOVERNO DE PORTUGAL | Ministério da Educação | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA CAMP FREIRE

Aula n.º 92 / 93      5 de Março de 2013

**Sumário**

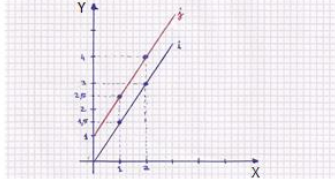
- Estudo dos parâmetros a e b em funções do tipo  $y=ax+b$ ;
- Entrega dos testes de avaliação.

- Resolve a tarefa a caneta. Se te enganares faz um traço por cima, não risques!
- Explica como pensaste.
- Faz a correção sempre a lápis.



GOVERNO DE PORTUGAL | Ministério da Educação | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA CAMP FREIRE

Tarefa 2 – Um embrulho especial

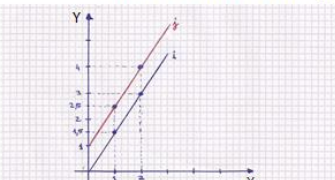


$i(x) = 1,5x$

$j(x) = 1,5x + 1$

GOVERNO DE PORTUGAL | Ministério da Educação | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA CAMP FREIRE

Tarefa 2 – Um embrulho especial



$i(x) = 1,5x$

$j(x) = 1,5x + 1$

Dá-se o nome de **função afim** a toda a função representada por uma expressão analítica do tipo  $y = ax + b$ , sendo a sua representação gráfica uma reta.

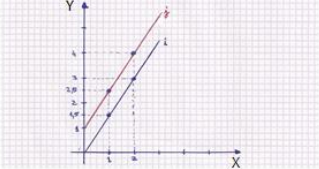
**Nota:** Repara que, se  $b = 0$ , tem-se uma função linear.

GOVERNO DE PORTUGAL | Ministério da Educação | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA CAMP FREIRE

Tarefa 2 – Um embrulho especial

1.6 indica as coordenadas dos pontos de interseção de cada uma das retas com o eixo das ordenadas.

$y = ax + b$   
 Será b a ordenada na origem?

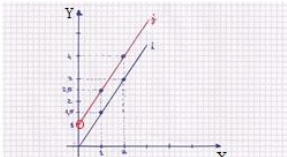


$i(x) = 1,5x$

$j(x) = 1,5x + 1$

GOVERNO DE PORTUGAL | Ministério da Educação | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA CAMP FREIRE

Tarefa 2 – Um embrulho especial



$j(x) = 1,5x + 1$

O gráfico de uma função afim  $f$  do tipo  $f(x) = ax + b$  intersesta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas  $(0, b)$ .

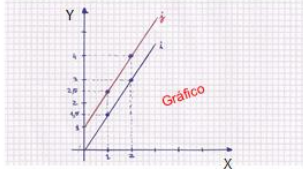
**Nota:** A  $b$  dá-se o nome de **ordenada na origem**.

GOVERNO DE PORTUGAL | Ministério da Educação | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA CAMP FREIRE

Diferentes representações da mesma função

**Tabela**

	Amoras						
Peso (kg)	1	2	3	4	5	...	x
Preço a pagar (€)	1,5	3	4,5	6	7,5	...	$1,5 \cdot x$
Sem Embrulho de Oferta							
Preço a pagar (€)							
Com Embrulho de Oferta	$1,5+1$	$3+1$	$4,5+1$	$6+1$	$7,5+1$	...	$1,5x+1$



**Gráfico**

$i(x) = 1,5x$   
 $j(x) = 1,5x + 1$

*Expressão analítica*

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP C/3º CICLO BRAAMCAMP FREIRE 49103

Tarefa 3 – O fabrico de gomas

**Tarefa**  
**“O fabrico de gomas”**

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP C/3º CICLO BRAAMCAMP FREIRE 49103

Tarefa 3 – O fabrico de gomas

1.1 Representa no mesmo referencial a função  $t$  (a azul).

$r(x)=2x+1$   
 $s(x)=2x$   
 $t(x)=2x-2$

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP C/3º CICLO BRAAMCAMP FREIRE 49103

Tarefa 3 – O fabrico de gomas

1.2 O que há de comum nos gráficos das funções  $r$ ,  $s$  e  $t$ ?

$r(x)=2x+1$   
 $s(x)=2x$   
 $t(x)=2x-2$

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP C/3º CICLO BRAAMCAMP FREIRE 49103

Tarefa 3 – O fabrico de gomas

1.3 Identifica o parâmetro  $b$  em cada uma das funções  $r$ ,  $s$  e  $t$  e descreve o seu efeito nos gráficos dessas funções.

$r(x)=2x+1$   
 $s(x)=2x$   
 $t(x)=2x-2$

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP C/3º CICLO BRAAMCAMP FREIRE 49103

Tarefa 3 – O fabrico de gomas

1.4 Indica a variável independente e a variável dependente.

1.5 Calcula  $t(1)$  e explica o seu significado no contexto da situação.

$t(x)=2x-2$

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação e ciência | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP C/3º CICLO BRAAMCAMP FREIRE 49103

TPC

**Tarefa – “Funções: Exercícios de consolidação”**

## 8.6. Sexta aula - 7/03

GOVERNO DE PORTUGAL  
Ministério da Educação

ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA CAMP FREDE 48103

Aula n.º 94 / 95      7 de Março de 2013

**Sumário**

- Exercícios de consolidação e revisão para o teste.
- Entrega dos testes de avaliação.

GOVERNO DE PORTUGAL  
Ministério da Educação

ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA CAMP FREDE 48103

Para resolver

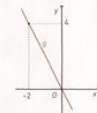
- Exercício 4 da página 118
- Exercício 10 da página 121
- Proposta 7 da página 131.

GOVERNO DE PORTUGAL  
Ministério da Educação

ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA CAMP FREDE 48103

Exercício 4 da página 118

4. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções lineares.  $f(x) = 0,75x + 2$  e estando a função  $g$  representada graficamente na figura.



4.1 Representa a função  $g$  através de uma expressão algébrica.

4.2 Determina as coordenadas do ponto:

4.2.1 do gráfico de  $f$  que tem abscissa 4;

4.2.2 do gráfico de  $g$  que tem ordenada 2;

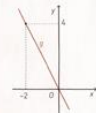
4.3 Verifica se o ponto  $(-8, -4)$  pertence ao gráfico de  $f$ .

GOVERNO DE PORTUGAL  
Ministério da Educação

ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA CAMP FREDE 48103

Exercício 4 da página 118

4. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções lineares.  $f(x) = 0,75x + 2$  e estando a função  $g$  representada graficamente na figura.



4.1 Representa a função  $g$  através de uma expressão algébrica.

4.2 Determina as coordenadas do ponto:

4.2.1 do gráfico de  $f$  que tem abscissa 4;

4.2.2 do gráfico de  $g$  que tem ordenada 2;

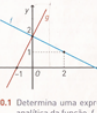
4.3 Verifica se o ponto  $(-8, -4)$  pertence ao gráfico de  $f$ .

GOVERNO DE PORTUGAL  
Ministério da Educação

ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA CAMP FREDE 48103

Exercício 10 da página 121

10. Na figura estão representadas duas funções afins,  $f$  e  $g$ .



10.1 Determina uma expressão analítica da função  $f$ .

10.2 Calcula:

10.2.1  $g(5)$

10.2.2  $g(-3)$

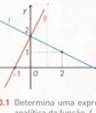
10.3 Determina  $x$  de modo que  $f(x) = -2$ .

GOVERNO DE PORTUGAL  
Ministério da Educação

ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OCEANO BRANCA CAMP FREDE 48103

Exercício 10 da página 121

10. Na figura estão representadas duas funções afins,  $f$  e  $g$ .



10.1 Determina uma expressão analítica da função  $f$ .

10.2 Calcula:

10.2.1  $g(5)$

10.2.2  $g(-3)$

10.3 Determina  $x$  de modo que  $f(x) = -2$ .

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OUV | BRAAMCAMP FREIRE | 4010-010

### Exercício 10 da página 121

$a < 0 \implies$  Declive negativo  $\implies$  Função decrescente  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

$a > 0 \implies$  Declive positivo  $\implies$  Função crescente  $g(x) = 2x + 2$

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OUV | BRAAMCAMP FREIRE | 4010-010

### Proposta 7 da página 131

**Proposta 7**

Na figura encontram-se as representações gráficas das funções correspondentes às expressões:

$f(x) = 2,5x - 3$  ;  $g(x) = 2,5x$  ;  $h(x) = 5,4x + 1$  ;  $i(x) = 2,5x + 4$

Das quatro retas representadas, três são paralelas.

1. Estabelece a correspondência entre as expressões das funções e as respetivas representações gráficas.
2. Determina as coordenadas dos pontos A, B, C e D assinalados na figura.

GOVERNO DE PORTUGAL | ministério da educação | ESCOLA SECUNDÁRIA C/FP OUV | BRAAMCAMP FREIRE | 4010-010

### TPC

- Rever os exercícios onde tiveram mais dificuldades.
- Terminar os exercícios propostos na aula de hoje.