UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICAS NA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES

Liliana Alexandra Silvério Raposo Guerreiro

Mestrado em Educação

Área de especialização em Didáctica da Matemática

2009

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICAS NA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES

Liliana Alexandra Silvério Raposo Guerreiro

Dissertação orientada pelo Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação

Área de especialização em Didáctica da Matemática

2009

Resumo

Este estudo pretende identificar o conhecimento e a capacidade dos alunos de resolverem problemas relativamente às funções afim e de proporcionalidade inversa, em diferentes representações, em particular a algébrica. A utilização de representações verbais, numéricas, gráficas e algébricas é fundamental para a aprendizagem das funções, pois permite obter uma visão global deste conceito. Quando articuladas, estas representações constituem instrumentos poderosos de resolução de problemas. Contudo, é na articulação entre as várias representações das funções que existem mais dificuldades, sobretudo quando está envolvida a representação algébrica.

O estudo usa uma metodologia de natureza qualitativa, baseada em estudos de caso. Os participantes são os alunos de uma turma de 10.º ano de Matemática A, do Curso de Ciências e Tecnologias. Os instrumentos de recolha de dados são um teste escrito e entrevistas. As questões propostas referem-se às funções constantes do programa de 3.º ciclo, sendo a recolha de dados realizada antes de serem estudadas funções no ensino secundário.

Os resultados mostram que os alunos utilizam estratégias envolvendo representações verbais e numéricas, como a invariância do produto e a inversão do raciocínio. No entanto, têm dificuldades na utilização das operações de multiplicação e divisão e no trabalho com contextos que não lhes são familiares. Perante informação dada graficamente, recorrem, nos problemas contextualizados, à análise gráfica global e, nos problemas puramente matemáticos, à análise gráfica pontual, sendo esta a principal diferença encontrada entre os dois tipos de problemas. A passagem entre as representações algébricas e as representações gráficas e verbais tem associadas muitas dificuldades. Assim, embora os alunos desenvolvam estratégias como a correspondência entre variáveis ou o reconhecimento da invariância do produto, revelam dificuldades ao nível da escrita e interpretação de expressões. Além disso, não conseguem associar directamente as expressões algébricas das funções aos respectivos gráficos, utilizando as representações numéricas como passo intermédio.

Palavras-chave: Representações, Funções, Resolução de problemas, Representação algébrica.

Abstract

This study aims to identify the students' knowledge and ability in solving problems with linear, direct proportion and inverse proportion functions, in different representations, specially the algebraic representation. Using verbal, numerical, graphical and algebraic representations is essential in learning functions, because they allow us to obtain a global vision of the concept. Since representations are used in articulation, they are powerful tools in problem solving. However, the major setback is this articulation, especially when the algebraic representation is being used.

This study follows a qualitative methodology, based on case studies. The participants are 10th grade students, attending the General High School Degree of Science and Technology. The instruments of data collection are a written test and interviews. The questions proposed to the students about functions are at elementary level and data collection happened before functions are studied in high school.

The results show that the students use strategies involving verbal and numerical representations, as product invariance and reasoning inversion. However, they have difficulties in using multiplication and division operations, as well as in working with unfamiliar contexts. With graphical information the students make a global analysis in context problems. Instead, they make a prompt analysis in purely mathematical problems. This is the major difference between these two types of problems. Other difficulties lie on the transition between algebraic representations and graphical and verbal representations. Although students can develop strategies such as variable correspondence or recognising product invariance, they manifest difficulties in the interpretation and writing the expressions. Besides, students cannot relate directly the algebraic expression of the function to its graph, so they use numerical representations as an intermediate step.

Key words: Representations, Functions, Problem solving, Algebraic representation.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor João Pedro da Ponte, pelo constante incentivo e exigência, pela disponibilidade e confiança manifestadas, e por tudo o que me ensinou.

Aos meus colegas do ano curricular do Mestrado, pelos bons momentos que partilhámos.

À Escola onde desenvolvi este trabalho, por me ter permitido a sua realização.

Aos meus colegas e amigos Ana, António e Adelaide, pelo apoio e compreensão dos momentos em que não pude participar nos nossos projectos.

À minha colega e amiga Alexandra, pela colaboração e disponibilidade.

Aos alunos que participaram neste estudo, pela simpatia com que me receberam, e sobretudo pela sua colaboração e disponibilidade.

Aos meus amigos, por compreenderem as minhas ausências. Em especial, à Marta e à Kiki, pela companhia que me fizeram.

Aos meus pais, por estarem sempre presentes e me apoiarem incondicionalmente.

Ao meu irmão, pelas suas palavras de confiança e pelo seu companheirismo.

Ao Nuno, pelo incentivo e apoio, e especialmente pela forma paciente como me acompanhou durante a realização deste trabalho.

Índice

Capítulo 1

Introdução

1.1. Importância do conceito de função

O conceito de função é um dos mais importantes em Matemática. A sua importância deve-se ao facto das funções permitirem estabelecer conexões entre áreas da Matemática tradicionalmente distintas. Essa importância relaciona-se também com o papel que as funções desempenharam, ao longo da história da ciência, no estudo de fenómenos naturais. Além disso, nos nossos dias, o domínio de aplicação das funções tem vindo a alargar-se, tendo-se tornando um instrumento fundamental das ciências sociais e humanas, da engenharia e da tecnologia para descrever os fenómenos mais diversos e fazer previsões. Assim, as funções surgem frequentemente no nosso quotidiano, através de tabelas, gráficos ou expressões.

A forte presença das funções na vida de todos os dias justifica a necessidade de serem estudadas durante a escolaridade obrigatória, pois constituem uma ferramenta importante para a interpretação da realidade. O estudo das funções, ao contribuir para o desenvolvimento do sentido crítico e da capacidade de resolução de problemas, em contextos diversos, permite colocar a Matemática ao serviço dos indivíduos e da sociedade. Ou seja, o estudo das funções contribui para o desenvolvimento da literacia matemática, caracterizada pela capacidade de identificar, compreender e envolver-se em Matemática, especificamente na resolução de problemas da vida real, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo (ME, 2002; 2004).

Na Matemática escolar, o estudo das funções tem vindo também a assumir uma importância cada vez maior. Diversos autores, ao reflectirem sobre o currículo e a aprendizagem da Álgebra, têm valorizado o conceito de função, sugerindo que este constitui uma forma de abordar os símbolos e a linguagem algébrica significativa para os alunos. Por exemplo, Chazan e Yerushalmy (2003) propõem que as funções sejam colocadas no centro da aprendizagem da Álgebra. Estes autores sugerem uma abordagem caracterizada por tarefas complexas, que permitam relacionar os gráficos e as expressões algébricas das funções. Também Carraher e Schliemann (2007) destacam o estudo das funções como um dos conceitos reveladores do carácter algébrico presente em muitas actividades e tópicos matemáticos. Pelo seu lado, Kaput (2000) afirma que "as ideias de correspondência e variação de quantidades que estão na base do conceito de função são extremamente poderosas porque são transversais e unificam experiências matemáticas de natureza diversificada" (p. 14). Assim, este autor propõe uma abordagem da Álgebra através do estudo das funções, relações e covariância. Argumenta que estes conceitos constituem instrumentos fundamentais para *algebrizar* a Matemática escolar, transformando a Álgebra num instrumento poderoso para a compreensão da realidade. É também com base no papel desempenhado pelas funções na modelação de situações reais que Smith (2003) justifica a importância deste conceito na Matemática escolar.

1.2. Importância das representações

Ao indicarem a importância do estudo das funções, vários autores referem a articulação das suas várias representações – numérica, algébrica, tabular, gráfica e verbal (ver, por exemplo, Carraher & Schliemann, 2007; Ponte, 1992). Hitt (1998) estabelece uma relação estreita entre as funções e as suas representações. Considera que o trabalho com as funções não só evidencia as várias representações, mas refere que a própria compreensão do conceito de função "implica articular de forma coerente, durante a resolução de problemas, as diferentes representações que lhe estão associadas" (p. 123).

A minha experiência como professora sugere igualmente que a compreensão dos conceitos por parte dos alunos tenderá a ser maior quando se trabalha com várias representações. Uma dada representação salienta apenas um aspecto do objecto em estudo, ao passo que o trabalho com várias representações fornece uma visão global desse objecto. Devido à reduzida estruturação das situações reais, o desenvolvimento de uma visão global dos conceitos é importante, pois determina a capacidade de articular os diversos conhecimentos. A importância das representações justifica-se também pelo facto destas permitirem aos alunos organizar as suas ideias, bem como comunicar. Uma vez que a comunicação assenta em representações convencionais, o manuseamento dessas representações – verbais, numéricas, gráficas e algébricas – é muito importante para a aprendizagem.

As representações surgem nos *Princípios e normas* como elementos essenciais na aprendizagem da Matemática, merecedoras de reflexão por parte dos professores e educadores matemáticos. O NCTM (2000) considera que as representações não devem ser vistas como finalidades em si próprias, mas sim como elementos essenciais na compreensão e comunicação de ideias matemáticas. Nesse sentido, indica a necessidade de se incentivar as representações pessoais dos alunos, pelo papel que desempenham na compreensão e na resolução de problemas. Considera igualmente importante a aprendizagem das representações convencionais, por constituírem uma ferramenta indispensável na compreensão e comunicação de ideias matemáticas. Refere, ainda, que os alunos, à medida que vão avançando na escolaridade, devem ser capazes de reflectir sobre o uso que fazem das representações, identificando pontos fortes e fracos de cada uma delas.

O *Programa de Matemática de 2007* (ME, 2007) dedica um espaço às representações, preconizando orientações semelhantes às do NCTM. Da análise comparativa do novo programa com o anterior, ressaltam os seguintes aspectos: (i) no novo programa as representações desempenham um papel importante na aprendizagem em todos os níveis de ensino, ideia que não se encontrava explícita no programa anterior; (ii) embora o programa anterior já referisse a utilização de diferentes representações, o programa de 2007 acrescenta a capacidade de passar de uma forma de representação para outra e escolher a representação mais adequada perante uma situação concreta; (iii) enquanto o actual programa indica a criação de representações pessoais, em todos os ciclos, no programa de 1991 o incentivo às representações pessoais apenas se encontrava no 1.º ciclo; e (iv) a importância das representações para a comunicação é evidenciada no novo programa, aspecto que não estava presente no programa anterior.

No actual programa de Matemática, a capacidade de lidar com ideias matemáticas em diversas representações encontra-se sistematizada nos seguintes tópicos:

- Ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação;
- Traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
- Elaborar e usar representações para registar, interpretar e reflectir sobre situações matemáticas e não matemáticas;
- Usar representações para modelar, interpretar e reflectir sobre situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais. (ME, 2007, p. 5).

1.3. Orientações curriculares para as funções e as representações

Nos *Princípios e normas*, bem como nos documentos curriculares portugueses, evidencia-se a associação entre o estudo das funções e o recurso a diferentes representações. Assim, o NCTM (2000) atribui um papel de destaque às diferentes representações das funções, no 3.º ciclo do ensino básico. O trabalho proposto envolve tabelas, gráficos e equações, mas também a análise das relações existentes entre essas representações. Pretende-se assim que os alunos consigam mover-se entre representações e, consequentemente, desenvolvam um conhecimento mais compreensivo das funções e aumentem a capacidade de resolução de problemas algébricos.

Em Portugal, no *Currículo Nacional*, a competência matemática a desenvolver no domínio da Álgebra e Funções, ao longo de todos os ciclos, inclui "a aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos" (ME, 2001, p. 66). Para o 3.º ciclo, o *Currículo Nacional* explicita o recurso a diferentes representações, ao nomear os aspectos específicos que devem ser desenvolvidos para as funções:

- A compreensão do conceito de função e das facetas que pode apresentar, como correspondência entre conjuntos e como relação entre variáveis;

- A aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;
- A sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade directa e inversa. (ME, 2001, p. 67)

Enquanto tópico específico dos programas de Matemática do 3.º ciclo, o estudo das funções inclui as funções afim, de proporcionalidade inversa e quadráticas simples (ME, 1991; ME, 2007). As funções constituem, neste ciclo, um elemento fundamental do percurso de desenvolvimento do pensamento algébrico, devendo ser exploradas, nas suas várias representações, como ferramentas de resolução de problemas e de modelação de situações diversas (p. 56).

Os documentos curriculares indicados salientam a importância de se utilizar as várias representações das funções na interpretação e resolução de problemas. Diversos autores, como referi acima, destacam a importância das funções. Também eu considero que a abordagem das funções no 3.º ciclo constitui um momento determinante para a compreensão da realidade e para a resolução de problemas do dia-a-dia.

No entanto, os alunos demonstram dificuldades face à aprendizagem das funções. Uma das dificuldades prende-se com o facto de os alunos se desligarem do contexto dos problemas, procurando operações que lhes permitam obter respostas. Outra dificuldade é a interpretação dos gráficos de funções, no que diz respeito à obtenção de dados qualitativos. Contudo, a maior dificuldade que tenho verificado diz respeito ao processo de generalização dos valores numéricos e utilização de variáveis para a obtenção da expressão algébrica. Ainda relativamente à expressão algébrica, é também frequente a dificuldade no reconhecimento de equivalência entre expressões. Nestas situações, os alunos raramente recorrem a representações gráficas, tabulares ou verbais para resolver os problemas propostos.

O PISA, estudo internacional sobre os conhecimentos e as competências dos alunos de 15 anos, avaliou o desempenho em literacia matemática. Nos anos de 2000 e 2003, os resultados dos alunos portugueses foram inferiores aos obtidos, em média, no espaço da OCDE. O estudo de 2000 verificou que o desempenho dos alunos portugueses se afasta de forma acentuada dos resultados dos outros países nas questões que apresentam uma maior complexidade ou cuja resolução pode ser favorecida pela utilização de representações simbólicas. Por exemplo, num problema sobre um gráfico que relaciona a velocidade de um carro de corrida com a distância percorrida, os resultados dos alunos portugueses foram semelhantes aos dos outros jovens, à excepção de uma questão mais complexa, em que mais de metade dos alunos portugueses faz uma identificação do desenho do gráfico com o traçado do circuito. Num outro problema, relativo a uma plantação de macieiras e coníferas, apresentado através de um esquema, há uma percentagem elevada de alunos que não responde e uma percentagem pequena de respostas correctas. Uma vez que a resolução destas questões beneficiaria da utilização de representações simbólicas, este resultado indica que a maioria dos jovens portugueses não consegue lidar com representações simbólicas simples. No estudo de 2003, cerca de 30% dos alunos respondem apenas a questões que envolvem contextos familiares e em que está toda a informação relevante para a sua resolução. Além disso, apenas conseguem desenvolver procedimentos de rotina a partir de instruções em situações explícitas. Em particular, nos casos em que é necessário analisar um gráfico para produzir argumentação, a percentagem de omissões de resposta e de respostas correctas é muito baixa. Assim, os resultados deste estudo sugerem a necessidade de reforço de competências básicas na resolução de exercícios simples que requerem a utilização de algoritmos. No entanto, enfatizam a necessidade dos alunos utilizarem, mais frequentemente, processos cognitivos de nível mais elevado, mobilizando as suas aprendizagens em situações problemáticas mais próximas da vida real.

A diferença entre as indicações curriculares e os resultados dos alunos com quem tenho trabalhado, reflectidas também no estudo PISA, são preocupantes e sugerem uma reflexão profunda sobre a aprendizagem das funções no 3.º ciclo.

1.4. Objectivo do estudo

Esta investigação centra-se nas funções definidas para o 3.º ciclo do ensino básico. Da mesma forma, as representações são também as que, no final do 3.º ciclo, os alunos devem conhecer e utilizar. A incidência na representação algébrica justifica-se pelo facto de ser neste ciclo que a linguagem algébrica se institucionaliza, tornando-se uma ferramenta muito poderosa para exprimir ideias matemáticas.

Proponho-me, assim, investigar os conhecimentos que, no final do 3.º ciclo, os alunos são capazes de mobilizar, na resolução de problemas que envolvem funções, bem como as dificuldades que sentem. Espero assim poder conhecer melhor em que medida os alunos estão preparados para iniciar o seu trabalho com funções no ensino secundário e detectar os aspectos mais problemáticos. Este conhecimento poderá ser tido em conta pelos professores que iniciam a abordagem às funções no ensino secundário, bem como pelos professores do 3.º ciclo, no trabalho com este tema.

Assim, o objectivo deste estudo é identificar o conhecimento e a capacidade dos alunos de resolverem problemas relativamente às funções afim e de proporcionalidade inversa, em situações envolvendo diferentes representações, em particular a representação algébrica.

Especificamente, procurarei responder às seguintes questões:

1. Quais as estratégias de pensamento e as dificuldades dos alunos ao resolverem problemas que envolvem estas funções em várias representações, nomeadamente as representações algébricas?
2. De que forma relacionam as representações algébricas com as representações verbais, numéricas e gráficas?
3. Que diferenças existem entre o uso das diferentes representações em problemas contextualizados e em problemas puramente matemáticos?

Capítulo 2

Representações na Matemática Escolar

Este capítulo apresenta as perspectivas teóricas de diversos autores sobre representações matemáticas, com destaque para Gerard Goldin e Raymond Duval, e passa em revista um conjunto de investigações empíricas sobre a influência das tarefas e as dificuldades e concepções dos alunos.

2.1. Perspectivas teóricas sobre as representações

A abordagem de Goldin

Na abordagem de Goldin (2003), desempenham um papel importantes as noções de sistema de representação e de representação interna e externa, com base nas quais o autor propõe uma teoria sobre os estádios de desenvolvimento das representações.

Representações e sistemas de representação

Goldin (2003) define representação como uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objectos que podem, de alguma forma, substituir alguma coisa. O termo "representar" pode ser interpretado de diversas formas: corresponde a, denota, codifica, evoca, significa, refere-se a, sugere, simboliza, entre outros. Assim, perante uma situação concreta, é necessário explicitar quais as entidades envolvidas e de que forma uma entidade substitui outra. Além disso, encara a relação entre as entidades envolvidas como bidireccional: "Em Matemática, por exemplo, podemos considerar que um gráfico cartesiano representa uma equação algébrica (ao desenharmos o seu conjunto-solução), ou podemos considerar que a equação representa o gráfico (ao escreveremos a relação que as coordenadas dos pontos satisfazem)" (Goldin, 2008, p. 179).

Todas as representações estão incluídas em sistemas de representação, estruturados internamente por convenções (Goldin, 2008; Goldin & Shteingold, 2001) e constituídos por caracteres primitivos, configurações e estruturas (Goldin, 2003, 2008). Os caracteres primitivos são o suporte do sistema de representação, podendo constituir ou não um conjunto bem definido. Por exemplo, as letras do alfabeto ou os numerais de um só dígito constituem conjuntos bem definidos, enquanto os objectos do dia-a-dia constituem um conjunto cuja definição é ambígua. Estes exemplos mostram que os caracteres de um sistema de representação podem ser entidades concretas, entidades matemáticas abstractas, ou ainda entidades físicas (tais como massas e velocidades). As regras de associação dos caracteres constituem as configurações de um sistema de representação. Por exemplo, através da associação de letras obtemos palavras e através da associação de numerais de um só dígito obtemos numerais com múltiplos dígitos.

Geralmente, os sistemas de representação têm estruturas complexas, que permitem, dentro do mesmo sistema, passar de uma configuração para outra. Por exemplo, tomando como conjunto de caracteres primitivos as letras do alfabeto, os números e as operações aritméticas, podemos associá-los para obter equações. Com base nas regras de manipulação algébrica e de cálculo, e sem sair do sistema, é possível obter equações equivalentes. Para atribuir significado aos caracteres e configurações de um sistema, podemos recorrer apenas às estruturas do sistema, obtendo uma noção estrutural ou sintáctica de significado, ou podemos recorrer a significados "fora" do sistema, obtendo assim uma noção semântica.

Representações externas e internas

Para Goldin (2003, 2008), os sistemas de representação interna incluem, entre outros, a linguagem natural, a capacidade de construir imagens visuais e espaciais, as representações tácteis e cinestésicas, as heurísticas para a resolução de problemas, as concepções e o afecto. As representações externas incluem as linguagens naturais normativas, os sistemas matemáticos gráficos, referentes a diagramas e de notação formal, os ambientes de aprendizagem estruturados, que podem incluir materiais manipuláveis concretos ou tecnologias, e as estruturas sócio-culturais, como as hierarquias políticas ou os sistemas educativos.

Todos os sistemas de representação externa são estruturados por convenções. Dizemos que algo está "correcto" quando é feito em conformidade com as normas estabelecidas dentro do sistema. Apesar dos sistemas de representação se basearem em convenções, a ambiguidade é inevitável e, segundo Goldin (2003), confere "poder" a muitos sistemas de representação, como por exemplo a linguagem natural. A ambiguidade é resolvida através do contexto, ou seja, requer que se recorra a configurações exteriores ao sistema em causa.

Goldin (2003) afirma que, para que a aprendizagem se torne significativa, é necessário desenvolver uma variedade de representações internas apropriadas, com relações entre si. Considerando que as representações internas são estruturas complexas e dinâmicas, classifica-as nos seguintes grupos (Goldin, 1998): (i) sistemas verbais/sintácticos; (ii) sistemas imagéticos; (iii) sistemas de notação formal; (iv) um sistema de planeamento, monitorização e controlo executivo; e (v) um sistema afectivo.

Sistemas verbais/sintácticos. Relacionam-se com a capacidade dos indivíduos processarem a linguagem natural. Incluem, entre outros, os significados atribuídos às palavras e as associações estabelecidas entre palavras, como sinónimos e antónimos. Os sistemas verbais/sintácticos têm configurações correspondentes noutros sistemas, e são ao mesmo tempo referenciais para eles próprios.

Sistemas imagéticos. Estes sistemas incorporam todas as configurações internas não verbais ao nível dos objectos e das suas propriedades, relações e transformações. Incluem os sistemas de representação visual/espacial, auditivo/rítmico e táctil/cinestésico. O termo "imagético" tem um sentido amplo e aproxima-se do termo "imaginação".

Sistemas de notação formal. As representações externas formais da Matemática têm associadas representações internas, que se prendem com a construção e manipulação da notação formal. A necessidade dos sistemas de notação formal na resolução de problemas matemáticos não é por vezes muito evidente em contextos de resolução de problemas menos formais.

Planeamento, monitorização e controlo executivo. Este sistema conduz o processo de resolução de problemas, incluindo estratégias de pensamento e heurísticas.

A capacidade metacognitiva inclui-se neste sistema. Particularmente, esta capacidade relaciona-se com a competência para modificar os outros sistemas.

Sistema afectivo. Estão incluídas neste sistema as crenças e atitudes "estáveis" face à Matemática – afecto *global* – e também os "estados de espírito" que os indivíduos experimentam durante a resolução de problemas – afecto *local*. Estes últimos incluem a curiosidade, a confusão, a frustração, a ansiedade, o medo, a satisfação, e têm uma relação estreita com as heurísticas para a resolução de problemas.

Goldin (2008) chama a atenção para o carácter bidireccional da relação entre representações internas e externas. Assim, não só as representações externas "representam" as internas, como o contrário também acontece. Por exemplo, quando um aluno, para expressar uma ideia, desenha um gráfico, está a utilizar uma representação externa para substituir uma representação interna. Quando, perante um gráfico, um aluno visualiza a informação que este descreve, é a representação interna que está a substituir a externa. Para este autor, embora a criação das representações externas se deva à necessidade dos indivíduos comunicarem, são as representações internas que determinam a utilidade das externas, de acordo com a interacção e compreensão que os indivíduos têm dessas representações externas.

Goldin e Shteingold (2001) destacam a importância da interacção entre os dois tipos de representações na aprendizagem. Afirmam que o pensamento matemático implica compreensão das relações entre as várias representações do "mesmo" conceito, bem como as semelhanças e diferenças estruturais entre sistemas de representação. Para isso, os alunos precisam de desenvolver representações internas adequadas para interagirem com vários sistemas, o que pressupõe, por sua vez, a aquisição de significados apropriados, a utilização de operações mentais apropriadas em interacção com sistemas externos estruturados, e a capacidade de resolver as ambiguidades que surgirem. Sugerem ainda que as dificuldades demonstradas por alguns alunos resultam do facto dos sistemas internos estarem desenvolvidos apenas parcialmente, criando obstáculos cognitivos a longo prazo, bem como obstáculos afectivos associados.

Estádios de desenvolvimento das representações e implicações para o ensino

A aprendizagem, de acordo com Goldin (1998), é um processo de construção, em que as novas estruturas cognitivas se desenvolvem a partir de sistemas préexistentes. Baseado nesta ideia, Goldin (2003, 2008) propõe um modelo com três estádios: (i) inventivo/semiótico; (ii) desenvolvimento estrutural; e (iii) autónomo.

Durante o estádio inventivo/semiótico são aprendidos novos caracteres e criadas novas configurações, tendo como referência sistemas de representação previamente estabelecidos. Assim, o sistema já anteriormente estabelecido funciona como um *domínio semântico* para os novos caracteres. Durante o período de desenvolvimento estrutural, é construída a estrutura do novo sistema de representação, isto é, constroem-se configurações de caracteres e estabelecem-se regras sintácticas, ainda tendo como referência a estrutura do sistema pré-existente. Por fim, no estádio autónomo, o novo sistema separa-se do anterior e os caracteres e configurações adquirem significados próprios.

Goldin (2003) preconiza um ensino da Matemática que proporcione a construção de sistemas de representação internos "poderosos". Para que isso aconteça, propõe que se enfatizem estratégias de resolução de problemas, de visualização e reconhecimento de padrões. Acrescenta que o desenvolvimento das representações internas deve ser articulado com a aprendizagem das representações externas formais, e que é essa articulação que permite aumentar a compreensão das representações externas.

A utilização de contextos familiares dos alunos é outra das propostas deste autor (Goldin, 2008). Como os alunos possuem representações internas dos contextos que conhecem, estas representações podem servir de suporte à construção de representações matemáticas "contextualizadas". Torna-se depois necessário a "abstracção" relativamente aos significados iniciais, altura em que o contexto pode tornar-se um obstáculo cognitivo. Para atingir o estádio autónomo torna-se necessário, na fase seguinte, algum desenvolvimento estrutural do novo sistema. De forma progressiva, as novas representações separar-se-ão dos contextos iniciais em que foram trabalhadas.

A abordagem de Duval

Na abordagem de Duval evidencia-se a importância das representações semióticas no processo de aquisição do conhecimento matemático. Outro aspecto fundamental é que a noção de representação semiótica pressupõe a existência de sistemas semióticos diferentes e uma operação cognitiva de conversão das representações: "Nenhuma actividade matemática pode ser levada a cabo sem usar um sistema de representação semiótico, porque o processo matemático envolve sempre *a substituição de uma representação semiótica por outra*" (Duval, 2006, p. 107, itálico no original).

O conceito de representação

A noção geral de representação, de acordo com Duval (2006), engloba as crenças e concepções individuais, bem como os símbolos e regras de associação utilizados nas produções externas. As representações semióticas são sistemas particulares de símbolos, como a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, que constituem um conjunto de ferramentas utilizadas para produzir conhecimento e comunicar: "O papel desempenhado pelos símbolos, ou mais exactamente pelos sistemas semióticos de representação, não se resume à designação dos objectos matemáticos ou à comunicação, mas consiste também no trabalho com os objectos matemáticos" (Duval, 2006, p.107).

Duval (2004a) afirma que a variedade de significados para o termo "representação" se reduz à utilização de três pares de opostos: linguagem/imagem, subjectivo/objectivo e mental/material. A oposição linguagem/imagem relaciona-se com os problemas que podem surgir na passagem de uma imagem a uma frase e vice-versa. A oposição objectivo/subjectivo refere-se às formas de conhecimento *ciência* e *opinião*, isto é, ao conhecimento que resulta de uma explicação construída e validada dentro de um sistema específico e ao conhecimento adquirido independentemente da sua validação, constituindo uma crença. Por último, a oposição mental/material interpreta-se como a oposição entre os conceitos propriamente ditos e os meios exteriores de comunicação através dos quais temos acesso a esses conceitos.

Deste modo, a noção de representação pressupõe sempre a existência de uma coisa que substitui outra (Duval, 2004a, 2004b, 2006), o que acarreta problemas de articulação. Para o autor, é neste aspecto que reside o principal problema das representações: "Assim, os problemas relacionados com as representações não têm tanto a ver com conseguir reconhecê-las (…). Os problemas que surgem são a sua heterogeneidade e a passagem de uma forma de representação para outra" (Duval, 2004a, p. 35).

Elementos estruturais de uma representação

Segundo Duval (2004), para qualquer representação é necessário considerar dois tipos de relações. A primeira é estabelecida entre o conteúdo da representação e o objecto representado, podendo o conteúdo da representação assemelhar-se ou não ao objecto representado. Esta relação permite que duas representações diferentes de um mesmo objecto possam ter conteúdos diferentes.

Duval (2004) distingue, entre as representações e os objectos representados, três tipos de relações cognitivas. Numa relação de *vinculação de duplo sentido*, o sujeito já tinha visto o objecto antes de o conhecer através de representações. Neste caso, a compreensão da representação faz-se a partir de uma experiência memorizada ou registada através de instrumentos. Ao invés, numa relação de *vinculação em sentido único*, o objecto é descoberto pelo sujeito através de representações. Finalmente, numa relação de *vinculação não orientada marcada por uma barra dupla,* o sujeito não tem acesso ao objecto para além das representações, sendo esta a relação cognitiva presente na aquisição do conhecimento matemático.

A segunda relação a ter em conta estabelece-se entre a representação e o sistema através do qual a representação é produzida. Para Duval (2004a, 2004b), uma representação só pode ser compreendida no contexto do sistema de representação a que pertence. Um sistema de representação semiótico – *registo* – é constituído por regras, mais ou menos explícitas, que permitem combinar os vários componentes entre si, de forma que a associação formada tenha também um sentido. Assim, o trabalho com as representações semióticas deve respeitar as regras do sistema utilizado, não só por razões de comunicação, mas também por só assim ser possível recorrer aos meios de tratamento específicos oferecidos por esse sistema.

O pressuposto de que o conteúdo da representação é determinado pelo sistema que permite produzi-la, leva a que diferentes representações do mesmo objecto não tenham o mesmo conteúdo. Isto implica que não apresentem as mesmas características do objecto e que nenhuma consiga representá-lo completamente: “Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objecto representado” (Duval, 2004a, p. 38). Por exemplo, se considerarmos a escrita de uma equação a partir do enunciado de um problema, o conteúdo da representação obtida apenas substitui parcialmente o conteúdo da representação inicial (Duval, 2004b).

Transformações de uma representação: Tratamento e conversão

Duval (2004, 2006) defende que, para compreender as dificuldades de aprendizagem em Matemática, é essencial distinguir dois tipos de transformações entre representações. A complexidade cognitiva subjacente ao processo de pensamento em Matemática reside precisamente no facto de existirem duas formas de transformação bastante diferentes, o tratamento e a conversão.

O tratamento (Duval, 2004a, 2004b, 2006) é interno a um sistema de representação, consistindo em transformar uma representação numa outra representação pertencente ao mesmo registo. Assim, este tipo de transformação depende das possibilidades de funcionamento do próprio sistema. São exemplos de tratamentos as reformulações verbais de uma frase ou os cálculos dentro do sistema de numeração decimal.

A conversão (Duval, 2004a, 2004b, 2006) transforma uma representação pertencente a um registo numa representação pertencente a outro registo. Numa conversão, embora seja conservado o objecto, há alterações ao nível das propriedades que são explicitadas. De acordo com o autor, embora os professores privilegiem a aprendizagem das regras respeitantes aos tratamentos, é a conversão entre representações "que constitui a actividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos" (Duval, 2004b, p. 49).

Uma das características das conversões é a orientação, ou seja, a existência de sistemas de representação de partida e de chegada. No entanto, a complexidade das conversões deve-se à existência ou inexistência de congruência, que está relacionada com a "espontaneidade" da conversão entre sistemas. Numa situação de convergência existe correspondência termo a termo entre as unidades significativas de cada uma das representações. Neste caso, a conversão inversa permite voltar a encontrar a expressão inicial do registo de partida, tal como acontece no exemplo seguinte:

"o conjunto de pontos cuja ordenada é maior do que a abcissa"

$$y > x$$

Contudo, muitas vezes é necessário reorganizar a expressão inicial de forma a obter a expressão correspondente no registo de chegada. A ausência de correspondência "directa" – incongruência – pode observar-se no exemplo seguinte:

"o conjunto de pontos cuja abcissa e ordenada têm o mesmo sinal"

$$xy > 0$$

Neste caso, a conversão inversa não permite encontrar a expressão inicial, pois xy > 0 poderia expressar-se espontaneamente como "o produto da abcissa e da ordenada é maior que 0" (Duval, 2004b, p. 50).

A conversão requer que se perceba a diferença entre o conteúdo da representação e o objecto representado. Tomando como exemplo a adição de números racionais, acontece frequentemente que os alunos consigam adicionar através de uma ou mesmo de ambas as representações numéricas (numeral decimal e fracção), mas que não consigam fazer um cálculo se necessitarem de fazer uma conversão entre as duas formas de representação (Duval, 2004b).

A incapacidade de mudança de registo tem como consequência, além da confusão entre o objecto representado e o conteúdo da representação, que os alunos considerem as duas representações de um objecto como sendo dois objectos matemáticos distintos (Duval, 2004a). Consequentemente, o autor considera que é necessário utilizar mais do que um registo de representação. Portanto, do ponto de vista cognitivo, a actividade matemática envolve a mobilização simultânea de pelo menos dois registos de representação Duval (2004a, 2004b).

Principais sistemas de representação utilizados em Matemática

Duval (2004a) classifica os sistemas de representação em plurifuncionais e monofuncionais. Os primeiros são utilizados em todos os domínios da vida cultural e social, e os seus tratamentos não são efectuados através de algoritmos. Pelo contrário, os registos monofuncionais têm carácter "formal", e os seus tratamentos são principalmente algoritmos. Além desta classificação, distingue ainda sistemas discursivos – que utilizam uma língua natural, permitindo descrever e fazer inferências

– e não discursivos – que permitem visualizar o que não nos é fornecido de maneira “visível”.

Como exemplo de registos plurifuncionais discursivos temos a língua natural, as associações verbais conceptuais e a argumentação baseada em observações ou crenças. As figuras geométricas e a construção com instrumentos são exemplos de registos plurifuncionais não discursivos. Dos registos monofuncionais discursivos fazem parte, entre outros, os sistemas de escrita numérica, algébrica e simbólica, enquanto os gráficos cartesianos estão incluídos nos registos monofuncionais não discursivos.

Em Matemática, os alunos aprendem a trabalhar com sistemas monofuncionais, e utilizam os sistemas plurifuncionais de forma espontânea. Duval (2004a) alerta para o papel da linguagem na aprendizagem da Matemática, dizendo que “as actividades de conversão que implicam um discurso em língua natural são particularmente importantes, não só pela importância dos enunciados dos problemas, mas também pela importância dos intercâmbios orais” (p. 53). Segundo o autor, os professores de Matemática privilegiam com muita frequência os sistemas monofuncionais em relação aos sistemas plurifuncionais, possivelmente pelo facto dos sistemas monofuncionais permitirem desenvolver algoritmos.

Outras perspectivas sobre as representações

Na literatura da educação matemática, a discussão em torno das representações centra-se sobretudo em dois aspectos: o papel que desempenham na aprendizagem e a importância da utilização de várias representações do mesmo objecto.

O papel das representações

Ao analisarem o papel desempenhado pelas representações, os autores centram-se em aspectos diferentes. Por exemplo, a influência das representações no pensamento dos indivíduos é realçada por Eisner (1997), que considera que as produções humanas se devem não só às aquisições mentais individuais, mas também às formas de representação disponíveis na cultura onde os indivíduos estão inseridos. Assim, para que os alunos sejam capazes de produzir conhecimento, é necessário que a escola lhes dê acesso às várias formas de representação. O autor organiza a relação entre as representações e o pensamento em torno de cinco ideias fundamentais: (i) as representações que utilizamos para pensar limitam o nosso pensamento; (ii) cada representação, sendo mediada por "materiais" específicos, impõe as suas próprias exigências e limitações, conduzindo ao desenvolvimento de ferramentas cognitivas diferentes; (iii) a escolha da representação influencia não só o que se consegue representar, mas também aquilo a que se consegue aceder; (iv) a associação de representações aumenta a acessibilidade à informação e consequentemente à compreensão e aprendizagem; e (v) uma forma de representação pode ser utilizada de maneiras diferentes, cada uma delas apelando a formas de pensamento diferentes.

Outro autor que valoriza o papel das representações no pensamento é Tripathy (2008), que as vê como instrumentos de resolução de problemas, destacando as representações visuais. Defende que as representações visuais podem servir de ponte entre os materiais concretos utilizados para a apreensão dos conceitos e as formas verbais ou simbólicas utilizadas mais tarde. Para isso, indica algumas estratégias que os professores podem utilizar para levar os alunos a utilizarem as representações visuais, como por exemplo incluir problemas que obriguem a pensar visualmente e colocar questões que permitam raciocinar através da utilização de diferentes representações.

A importância da visualização na aprendizagem é também defendida por Arcavi (1999), que enumera as seguintes vantagens: (i) ilustra resultados que são sobretudo simbólicos; (ii) contribui para a resolução de conflitos entre as soluções simbólicas e as ideias intuitivas; e (iii) desencadeia o recurso a conceitos básicos, facilmente manuseáveis a nível simbólico. Refere ainda que a visualização não exclui a verbalização ou a linguagem algébrica, mas complementa-as.

Monk (2003) destaca o papel da visualização associado aos gráficos. Na sua perspectiva, é a visualização que torna os gráficos instrumentos poderosos no que diz respeito à atribuição de significado. Ao mesmo tempo, a visualização é fonte de dificuldades, pois os alunos tendem a cingir-se à informação visual dada pelo gráfico, mais intuitiva, esquecendo a informação quantitativa. A forma como os alunos "vêem" um gráfico é, de acordo com o autor, influenciada pelo conjunto de conhecimentos e experiências que têm no momento em que o observam. Sugere ainda que seja dada aos alunos oportunidade de participarem em discussões acerca da utilização dos gráficos, criando uma "comunidade matemática" na sala de aula, cujas práticas estejam de acordo com as da comunidade matemática em geral.

O aspecto comunicativo das representações é destacado por Seeger (1998), para quem as representações reflectem a nossa actividade sobre os objectos, sendo a sua função orientar o trabalho com o objecto em causa. Com base nesta ideia, o autor defende que as representações permitem várias explorações do mesmo objecto, o que, por seu turno, conduz a mudanças na dinâmica das aulas, nomeadamente a existência de mais momentos de argumentação e discussão colectivas.

Também Greeno (1997) valoriza este aspecto, considerando que aprender a representar implica aprender a participar nas práticas de comunicação e raciocínio em que as representações são utilizadas. Assim sendo, as representações não devem ser ensinadas como fins em si próprias, mas sim como ferramentas para compreender e comunicar, construídas e adaptadas às necessidades do momento. Defende a necessidade dos alunos reconhecerem a importância das representações convencionais (tabelas, gráficos, equações) na partilha de ideias matemáticas. Além de ferramentas de comunicação, considera que as várias representações devem ser vistas como instrumentos de compreensão e resolução de problemas, que permitem a organização do trabalho e a condução das ideias.

Greeno (1997) dá uma especial atenção à resolução de problemas, indicando que nesta actividade tendem a surgir formas de representação não convencionais, construídas com o propósito de aumentar a compreensão da situação em causa. As representações idiossincráticas construídas pelos alunos visam sobretudo a percepção de padrões e a realização de inferências e permitem corrigir erros resultantes da utilização das representações convencionais. É pois fundamental que, na sala de aula, a atenção não se centre exclusivamente nas formas convencionais, mas que os alunos sejam incentivados a desenvolver formas próprias de representação. Seguindo uma abordagem em que construam representações de forma flexível e participem em discussões com o propósito de estabelecer convenções de interpretação das representações utilizadas, os alunos conseguirão perceber que as representações matemáticas se adaptam a casos particulares.

Múltiplas representações

Os autores são unânimes em defender a utilização de múltiplas representações para a compreensão de um conceito matemático. Por exemplo, Triphathy (2008) afirma que através de diferentes representações do mesmo conceito se evidenciam diferentes aspectos da sua estrutura, aumentando a sua compreensão e permitindo desenvolver capacidades cognitivas diferentes: "Uma representação matemática frequentemente salienta apenas um aspecto de um conceito matemático. Limitarmo-nos a uma representação matemática é abordar o conceito de olhos vendados" (Tripathy, 2008, p. 438).

Friedlander e Tabach (2001) acrescentam que o trabalho com várias representações permite eliminar as desvantagens de cada uma delas, tornando "o processo de aprendizagem da Álgebra significativo e efectivo" (p. 173). Apresentam, para cada tipo de representação, algumas vantagens: (i) a representação verbal, que normalmente se utiliza na colocação do problema e na interpretação dos resultados, evidencia a conexão entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, e entre a Matemática e situações do quotidiano; (ii) a representação numérica, familiar aos alunos quando iniciam o estudo da Álgebra, é muito importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares; (iii) a representação gráfica é intuitiva e apelativa, devido ao seu carácter visual; e (iv) a representação algébrica é concisa, geral e efectiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, sendo muitas vezes a única forma de justificar afirmações gerais. A par das vantagens, os autores apresentam desvantagens para cada tipo de representação: (i) a representação verbal não é universal e, ao depender do estilo pessoal, pode tornar-se um obstáculo na comunicação matemática; (ii) a representação numérica não permite generalizações, limitando a compreensão dos problemas; (iii) a representação gráfica além de poder não fornecer a precisão necessária à resolução de um problema, é muito influenciada por factores externos (tais como a escala), e apresenta frequentemente apenas uma parte do domínio do problema; e (iv) a utilização exclusiva de símbolos algébricos pode ocultar o sentido matemático ou a natureza dos objectos representados, causando dificuldades na interpretação dos resultados.

Segundo Friedlander e Tabach (2001), a promoção do trabalho com as várias representações deve iniciar-se desde que se começa o estudo da Álgebra. Estes autores consideram que a natureza das tarefas propostas influencia muito a utilização que os alunos fazem das várias representações. Para que as tarefas levem os alunos a recorrer às várias representações, sugerem que estas possuam as seguintes características: (i) as situações problemáticas devem ser apresentadas através de diferentes representações, para que encorajem a flexibilidade na escolha da representação e para que legitimizem o seu uso; (ii) devem ser colocadas questões de natureza investigativa, para que os alunos se familiarizem com a representação inicial, estabeleçam relações entre representações e escolham aquela que os conduzirá à solução; e (iii) as questões de natureza reflexiva são igualmente importantes, pois ajudam os alunos a distanciarem-se do trabalho efectuado e a avaliarem as escolhas efectuadas.

2.2. Estudos empíricos sobre representações e funções

Influência das tarefas no desempenho dos alunos

A relação entre a natureza das tarefas propostas nas aulas e a utilização das várias representações pelos alunos tem sido estudada por diversos autores. O recurso a problemas contextualizados parece ser uma das formas de promover a utilização, com significado, das várias representações. Assim, Coulombe e Berenson (2001) apresentam uma experiência em que utilizaram problemas contextualizados com alunos que estavam a iniciar o estudo da Álgebra, enquanto tópico matemático específico. Os autores pretendiam obter informações sobre a capacidade dos alunos interpretarem gráficos, tabelas e representações verbais de funções definidas por ramos. Um dos problemas pedia para gerar dados numéricos acerca da perda de peso de uma pessoa, com base na interpretação de um gráfico qualitativo. Num outro problema, os alunos deviam, a partir de uma descrição verbal e tabular sobre mistura de chá e açúcar para fazer *ice tea*, descrever e comparar taxas de variação relativas à doçura da bebida. Finalmente, no último problema, era pedido que construíssem um gráfico para representar o crescimento de poupanças ao longo do tempo, a partir da descrição verbal de uma situação.

A análise das resoluções destes problemas permitiu concluir que a capacidade de interpretação de funções lineares varia de acordo com a natureza dos padrões de covariância, tendo sido mais fácil para os alunos a interpretação de situações em que as duas variáveis crescem em simultâneo. Este estudo sugere que a descrição de relações entre duas variáveis, em contextos reais, em diferentes representações, é importante para o desenvolvimento de conceitos associados ao estudo das funções lineares.

Uma outra experiência de aprendizagem em que as funções lineares foram estudadas através de um conjunto de problemas contextualizados é descrita por Bardini, Pierce e Stacey (2004). Esta experiência foi realizada com alunos do 3.º ciclo, com 13 anos. Os alunos responderam a um teste escrito antes e depois de uma experiência formal de ensino. Na fase final, foram também entrevistados. Durante a experiência de ensino, a ênfase foi dada à representação gráfica. Os resultados do teste inicial evidenciaram as dificuldades dos alunos na utilização da representação algébrica. Em contrapartida, eram capazes de explicar verbalmente uma resolução numérica. A análise do teste final e das entrevistas, ambos realizados após a experiência de ensino, revelaram evolução na utilização das representações algébricas e gráficas. Especificamente, a análise do teste final e das entrevistas evidenciou capacidade de interpretação das variáveis, sendo explícita a relação entre o contexto apresentado e as variáveis utilizadas durante a resolução dos problemas.

Uma experiência de ensino semelhante foi realizada por Pierce (2005) noutras duas turmas, desta vez com alunos de 15 anos, com um avanço de dois anos na escolaridade, relativamente aos alunos do estudo anterior. À semelhança do estudo anterior, foram aplicados dois testes, um antes e outro depois da experiência. O autor concluiu que a utilização, no ensino de funções lineares de problemas com contextos reais familiares aos alunos, é "um passo vital para a compreensão da Álgebra" (p. 85). A influência positiva que a utilização de problemas contextualizados teve na compreensão do significado dos símbolos por parte dos alunos foi evidente na escolha das letras a usar nas expressões algébricas (por exemplo, *h* para horas, *t* para tempo) e na interpretação correcta dos parâmetros das expressões algébricas das funções.

No que diz respeito às tarefas propostas nas aulas, Friedlander e Tabach (2001) consideram que a utilização de várias representações pelos alunos depende do tipo de questões que as tarefas contêm. Para ilustrarem esta ideia, descrevem uma experiência com alunos em início da aprendizagem da Álgebra. Na tarefa proposta, estavam representadas numa tabela e num gráfico as poupanças de duas crianças ao longo de um ano. Anteriormente, os alunos tinham trabalhado, durante uma semana, com uma tarefa relativa ao mesmo contexto. As questões colocadas pretendiam que os alunos relacionassem as duas poupanças, por exemplo, encontrando a semana em que estas eram iguais, ou determinando a diferença máxima entre os valores das duas poupanças.

O resultado que se destacou nesta experiência foi o predomínio das representações verbais e numéricas. Os autores consideram que algumas questões incentivavam, de forma natural, a utilização destas representações. Consideram que o incentivo dado pelas questões, juntamente com o facto de os alunos estarem na fase inicial da aprendizagem da Álgebra, pode justificar a preferência pelas representações verbais e numéricas. Todavia, para cada uma das questões, houve alunos que recorreram a outra representação, e até a várias representações. Efectivamente, apenas cinco pares de alunos usaram sempre representações numéricas, tendo os restantes recorrido a três ou quatro tipos de representação na resolução das questões. Face a estes resultados, os autores concluíram que os alunos foram bastante flexíveis na utilização das representações.

Dificuldades e concepções

As dificuldades e as concepções dos alunos acerca das funções têm sido também alvo de estudo. A articulação entre representações parece ser uma das maiores dificuldades sentida pelos alunos. Esta dificuldade reflecte-se na resolução de problemas, em que é necessária uma compreensão global das ideias matemáticas.

Os conhecimentos e dificuldades dos alunos sobre funções foram estudados por Elia et al. (2007). As autoras investigaram as definições de função dadas pelos alunos, a capacidade destes reconhecerem diversas representações de funções, e a capacidade de resolverem problemas envolvendo a passagem de uma forma de representação para outra. Além de analisarem cada uma destas dimensões, pretendiam estabelecer relações entre elas. Os participantes do estudo foram 179 alunos do ensino secundário, com 16 anos, aos quais foi administrado um teste escrito. Do teste fazia parte uma questão sobre o conceito de função, questões que incluíam o reconhecimento de funções entre várias representações de relações matemáticas (gráficos, diagramas com setas e expressões), e problemas que requeriam a manipulação flexível das várias representações.

Globalmente, os alunos tiveram melhor desempenho nas tarefas que envolviam o reconhecimento de gráficos de funções. Os piores resultados foram obtidos nos problemas que envolviam o trabalho com funções a partir de expressões algébricas, designadamente problemas que requeriam a passagem da representação verbal para a representação algébrica, o reconhecimento de uma função, num conjunto de relações entre variáveis, e a obtenção do gráfico a partir da expressão algébrica.

Da análise mais detalhada dos resultados ressalta que os alunos revelaram dificuldades em definir adequadamente o conceito de função e em resolver problemas envolvendo a transição entre representações. A maioria dos alunos, incluindo os que apresentaram uma definição correcta de função, não foi bem sucedida na resolução dos problemas. Para os autores, este resultado sugere que a transição entre representações, processo que requer uma compreensão global das variáveis, não é trabalhado adequadamente na abordagem tradicional das funções. Pelo contrário, este estudo sugere que existe uma 'compartimentação', isto é, cada representação é trabalhada isoladamente, sem serem estabelecidas conexões com as outras representações.

Os alunos que definiram função, correctamente ou não, foram capazes de reconhecer representações gráficas de funções. Pelo contrário, os alunos que não responderam a esta pergunta (definição de função), demonstraram ser capazes de reconhecer algebricamente uma função linear. Estes resultados sugerem que os alunos associam directamente a definição de função e a sua representação gráfica, e que também associam, ainda que parcialmente, a definição de função e a sua representação algébrica.

Estudos realizados com professores e com futuros professores de Matemática, mostraram que estes também sentem dificuldades na articulação de determinadas representações. Por exemplo, Hitt (1998) identificou erros e dificuldades de professores de Matemática, relacionados com o conceito de função. Trinta professores de Matemática, que estavam a iniciar um curso de pós-graduação em Educação Matemática, responderam a vários testes, sendo apresentados neste estudo apenas os resultados das tarefas em que houve mais dificuldades. Um destes questionários apresentava curvas, representando ou não gráficos de funções. O autor verificou que "a existência de uma expressão algébrica associada a uma curva leva-os [os professores] a abandonar a sua definição de função" (p. 127). Por exemplo, perante expressões algébricas de cónicas, os professores deixaram de recorrer à definição de regra de correspondência, ou a linhas verticais no gráfico – mesmo que o tivessem feito em questões anteriores, quando lhes era dada apenas a representação gráfica. Igualmente, nas questões relacionadas com a comparação de funções, os professores demonstraram uma preferência pelas funções contínuas definidas exclusivamente por uma fórmula. Por exemplo, quando lhes foi solicitado que encontrassem duas funções de variável real que verificassem uma determinada propriedade, muitos deram como resposta a mesma função, escrita de forma diferente. Outro conjunto de questões dizia respeito à articulação entre representações gráficas e contextos reais. Perante gráficos em que a variável independente representava a altura do líquido à medida que se enchia um recipiente e a variável dependente representava a área da superfície do líquido ou o seu volume, pedia-se aos professores para desenharem um recipiente que se adequasse à situação. O processo inverso também lhes era solicitado, isto é, dado o recipiente com líquido, deveria desenhar-se um gráfico em que a variável independente representasse a altura do líquido e a variável dependente a área da superfície. Os erros cometidos foram agrupados pelo autor em dois grupos: (i) a forma do gráfico determinou o tipo de recipiente desenhado, e (ii) a variável independente não foi analisada no seu contexto, nem analítica, nem graficamente.

Vinner e Dreyfus (1989) analisaram as definições e as imagens do conceito de função de alunos universitários e de jovens professores. Os alunos universitários frequentavam vários cursos e, embora tivessem estudado funções durante o ensino secundário, ainda não tinham abordado este tema no ensino superior. Os professores de Matemática não tinham frequentado o curso de Matemática, encontrando-se a fazer a profissionalização em serviço no momento do estudo. Foi administrado um questionário a todos os participantes, os quais foram agrupados de acordo com as disciplinas de Matemática frequentadas. Os autores observaram uma diferença significativa entre os vários grupos, relativamente à definição de função. A definição de função como correspondência era mais frequente à medida que o nível de Matemática do curso aumentava, mas surgiram outras definições em todos os grupos: função como regra, operação, fórmula, representação gráfica e relação de dependência. Os autores verificaram também que, à medida que o nível de Matemática aumentava, existia uma evolução nas justificações relacionadas com a identificação de gráficos de funções. Os argumentos dos alunos incluíam aspectos como descontinuidade, existência de um ponto "excepcional", separação do domínio em dois subdomínios, e existência de uma única imagem para cada elemento do domínio. Estes argumentos serviam quer para justificar que se tratava de uma função, quer para rejeitar a relação apresentada. Muitos participantes revelaram um comportamento irregular ao abordarem as funções, por exemplo definindo função como correspondência, mas não utilizando essa definição nas tarefas de identificação e construção de funções. Este comportamento foi menos frequente entre os alunos que frequentavam cursos com um nível de Matemática elevado.

Outra autora, Even (1998) realizou um estudo com 162 estudantes, futuros professores de Matemática. Na primeira fase, administrou um teste a todos os participantes, e na segunda fase realizou entrevistas. O teste incluía problemas matemáticos não convencionais, envolvendo diferentes conhecimentos sobre funções. Os estudantes deveriam também analisar alguns erros e concepções frequentes, relativamente às funções. Um dos problemas do teste referia-se ao número de soluções de uma equação do 2.º grau, sabendo que, quando a incógnita era substituída por 1, o valor obtido era positivo, e no caso em que a incógnita era substituída por 6, o valor obtido era negativo. Apenas os alunos que consideraram a função correspondente à equação responderam correctamente à questão. Contudo, a maioria dos alunos não recorreu a outra representação, e não conseguiu responder à questão. Com base nestes resultados, a autora concluiu que a representação algébrica dominava o pensamento de muitos alunos.

Neste estudo, foram também analisadas duas abordagens diferentes para as funções. A maioria dos alunos utilizou uma abordagem 'pontual' das funções. Assim, apesar de identificar e marcar correctamente pontos, a maioria não conseguiu imaginar o comportamento das funções num intervalo. Em contrapartida, os alunos que fizeram uma análise 'global' das alterações do gráfico das funções revelaram uma maior compreensão da relação entre as representações gráficas e algébricas. A autora verificou ainda que o conhecimento dos alunos sobre as diferentes representações de funções está fortemente relacionado com o conhecimento que têm sobre o contexto dos problemas e com conhecimentos matemáticos anteriores. Apresenta um exemplo em que as dificuldades sentidas com funções trigonométricas impediram os alunos de responder correctamente a questões gerais sobre funções, como a continuidade.

Num estudo realizado por Ponte (1984), foram descritas algumas estratégias e dificuldades dos alunos relacionadas com a construção e interpretação de gráficos cartesianos, e com as relações funcionais subjacentes a esses processos. O estudo pretendia ainda comprar o desempenho de diferentes grupos de alunos (alunos do ensino secundário e alunos do curso de formação de professores) relativamente aos aspectos referidos. Foram utilizados, como instrumentos de recolha de dados, um teste sobre leitura e interpretação de gráficos, administrado a 262 alunos, e um conjunto de tarefas envolvendo a construção e interpretação de gráficos. Este último conjunto de tarefas foi utilizado durante as entrevistas realizadas a 26 alunos, 18 alunos do ensino secundário e 8 futuros professores de Matemática.

Relativamente à construção e interpretação de gráficos cartesianos, a maioria dos alunos conseguiu determinar as coordenadas de pontos, nas situações que envolviam variáveis discretas. Nos gráficos de funções contínuas, os alunos foram pouco precisos, nomeadamente ao estimarem os valores da variável independente. De uma forma geral, demonstraram não sentir necessidade de fazer leituras precisas da informação gráfica, nem de tratar com rigor essa informação. Houve também algumas dificuldades ao nível das escalas, quer na interpretação, quer na construção de gráficos. Em relação à interpretação gráfica, o autor indica as seguintes dificuldades: (i) pouca atenção dada à unidade utilizada na construção da escala; (ii) confusão nas unidades; e (iii) escolha inapropriada das subdivisões da unidade da escala. Relativamente à construção de gráficos, as dificuldades foram: (i) indecisão no tipo de gráfico; (ii) inexistência de uma escala uniforme para representar variáveis uniformes; e (iii) hesitação na escolha ou escolha inapropriada da unidade.

Quando questionados sobre as variáveis representadas num problema, a maioria dos alunos foi capaz de identificar as variáveis, com ou sem ajuda do investigador. Um número considerável de alunos pareceu perceber a natureza (discreta ou contínua) das variáveis envolvidas, tendo alguns deles sido capazes de justificar a união dos pontos em contextos familiares. Em situações menos familiares, nem sempre conseguiram identificar correctamente as variáveis, nem ter percepção da sua natureza. Embora muitos alunos parecessem ter uma ideia intuitiva acerca das variáveis dependente e independente, quando lhes foi pedido que as indicassem mostraram-se confusos. Além disso, alguns deles desconheciam a forma convencional de associar as variáveis aos eixos: “A incapacidade de lidarem de uma forma mais consciente com as noções de variável independente e dependente constitui uma falha no raciocínio funcional que pode dificultar o reconhecimento e exploração das relações entre variáveis” (p. 110).

Ponte (1984) analisou também a forma como os alunos representam graficamente situações em que existe variação. A estratégia mais utilizada consistiu em marcar inicialmente alguns pontos. Para maioria, o passo seguinte é a união desses pontos, com vista à obtenção de uma recta. A dependência desta estratégia foi notória nas situações em que lhes eram pedidos gráficos a partir de informação qualitativa, pois os alunos não sabiam como abordar a situação. A variação linear pareceu ser, para muitos alunos, a principal forma de variação, uma vez que utilizaram frequentemente rectas para representar situações não lineares: "A linearidade pareceu ser, para alguns alunos, não só uma estrutura conceptual geométrica, mas também um padrão global de raciocínio" (p. 116). O autor indica ainda que muitos alunos parecem ter alguma noção intuitiva da taxa de variação, à qual recorrem na resolução de situações simples. Para compararem taxas de variação, alguns alunos usaram uma estratégia geométrica, observando e comparando as diferentes inclinações das rectas. Outros usaram estratégias numéricas, comparando as coordenadas dos pontos. Assim, o autor conclui que a capacidade de lidar com situações complexas está pouco desenvolvida nos alunos, não tendo a maioria conseguido, entre outras coisas, distinguir situações de variação linear e não linear.

Mevarech e Kramarsky (1997) investigaram as concepções de 92 alunos do 8.º ano relacionadas com a construção de gráficos, antes e depois de serem sujeitos ao ensino formal deste tópico. Os instrumentos de recolha de dados utilizados neste estudo foram dois testes, um aplicado antes e outro depois da experiência formal de ensino. A partir dos resultados obtidos, estes investigadores classificaram as concepções 'alternativas' dos alunos relativas à construção de gráficos em três categorias: (i) construção de um gráfico completo como um único ponto; (ii) construção de um conjunto de gráficos, cada um representativo de um dos factores relevantes apresentados pelos dados; e (iii) conservação da forma de função crescente sob qualquer condição. Verificaram também que, para um grande número de alunos, estas concepções permaneceram. Este resultado sugere, de acordo com os autores, que o trabalho nas aulas enfatiza um tipo de representação e um tipo de função. Na origem das concepções 'alternativas' dos alunos, identificaram ainda outros factores: (i) dificuldade no processamento de informação; (ii) aplicação de ideias de outras situações, inadequadas à situação actual; (iii) fraca compreensão da noção de covariância; (iv) confusão entre processo e produto, com valorização da resposta e não dos procedimentos; e (v) pouca compreensão ou utilização da língua.

O estudo de funções, no seu caso geral, fez parte de uma experiência de ensino envolvendo relações funcionais, realizada por Matos (2008). A abordagem das funções iniciou-se com a análise de duas situações contextualizadas, referentes à compra de combustível, que podiam ser modeladas por duas funções afins. Aqui, os alunos usaram correctamente a relação entre as variáveis, mas sentiram algumas dificuldades quando foi necessário analisar e descrever o modo como se dava a variação entre as variáveis.

Segundo a autora, o trabalho anterior com sequências numéricas fez com que a maior parte dos alunos não tenha sentido dificuldades na generalização. Assim, quando foi necessário recorrer a uma linguagem mais formal, os alunos utilizaram a simbologia que tinham usado nas sequências numéricas. Nesta experiência de ensino, o estudo de funções envolveu ainda a construção e interpretação de gráficos. A elaboração dos gráficos, relativamente às situações descritas, colocou muitas dificuldades a vários alunos, que começaram por construir escalas incorrectas. Relativamente à interpretação, era-lhes pedido que imaginassem uma situação que pudesse ser representada pelos gráficos apresentados. Nesta tarefa, os alunos revelaram alguma dificuldade em construir histórias coerentes com todos os gráficos e em aproveitar a informação neles contida.

Este estudo centrou-se em dois alunos que revelaram, na entrevista inicial, dificuldades na compreensão da linguagem algébrica. Na segunda entrevista, a tarefa proposta continha um conjunto de questões respeitantes a duas funções que relacionavam o tempo com as distâncias percorridas por dois amigos durante uma corrida, em que um deles partia primeiro. A situação era acompanhada por um gráfico, sem muitos pormenores. Os alunos deviam começar por indicar qual dos dois participantes venceu a corrida e depois preencher uma tabela com imagens ou objectos. Por fim, eram-lhes dadas as expressões algébricas que definiam cada uma das funções, e pretendia-se que determinassem o instante em que os dois amigos se cruzavam e as distâncias percorridas até esse instante. Embora os dois alunos tenham resolvido a tarefa correctamente, o seu desempenho foi bastante diferente. Um deles não mostrou quaisquer hesitações, quer no caso em que existia proporcionalidade directa, quer no caso em que esta não existia. O facto de compreender o modo como se relacionavam as variáveis permitiu-lhe utilizar correctamente diversas estratégias (uso da covariação, uso da correspondência, e uso de relações aritméticas entre valores de uma mesma variável). A outra aluna, embora tenha recorrido também a várias estratégias, aplicou algumas delas indevidamente. Evidenciou, por exemplo, dificuldades na inversão do raciocínio, na situação em que não existia proporcionalidade directa. A investigadora concluiu que o desempenho dos dois alunos evoluiu ao longo do estudo, revelando aspectos comuns – diversificação das estratégias utilizadas e maior facilidade em efectuar generalizações e representá-las simbolicamente. Assim, considera que ambos os alunos atingiram a compreensão da relação de correspondência entre as variáveis.

MacGregor e Stacey (1997) abordam as dificuldades dos alunos no uso da notação algébrica, e também a origem das suas concepções. Os resultados que apresentam referem-se a cerca de 2000 alunos com idades compreendidas entre 11 e 15 anos, pertencentes a 24 escolas australianas, com alguns conhecimentos de Álgebra. Para isso, aplicaram um teste escrito a todos os alunos, tendo entrevistado 14. Além da analisarem os resultados do teste, as autoras analisaram a evolução de diversos alunos de 11 e 12 anos, incidindo na forma como estes interpretavam as letras antes e depois de serem sujeitos ao ensino formal da Álgebra. A análise incidiu ainda no progresso de 156 alunos em três momentos distintos, nos últimos anos do ensino da Álgebra, tendo em vista perceber como varia a interpretação das letras e de expressões algébricas simples.

Embora os alunos do último ano tenham tido um desempenho melhor do que os do primeiro ano no teste, as diferenças ficaram aquém do esperado. Assim, mesmo nos itens mais simples, em que se pretendia a escrita de expressões com um símbolo e uma operação, como $h+10$, o sucesso nunca ultrapassou os 75%. As autoras verificaram a interferência de factores externos à Álgebra nas respostas dos alunos mais velhos, como a existência de aprendizagens novas não consolidadas ou a ideia de que deviam utilizar conhecimentos de níveis mais avançados. Os resultados respeitantes ao conjunto de alunos que foi acompanhado antes e depois do ensino formal da Álgebra mostram que estes são capazes de atribuir significado às letras de forma intuitiva. Após o estudo da unidade de ensino, a maioria dos alunos interpretou correctamente as letras nas questões propostas, o que revela compreensão do seu significado. No entanto, surgem outras interpretações das letras, antes e depois do estudo da unidade de ensino, como por exemplo letra como valor numérico ou letra como palavra abreviada. Relativamente à evolução dos alunos durante o estudo da Álgebra, registaram-se dificuldades na utilização de letras numa das turmas. As autoras justificam esta dificuldade com a utilização, nas aulas, de letras como abreviatura de palavras. Esta informação foi dada na discussão dos resultados com os professores, que serviu também para justificar o nível de desempenho da turma na coordenação de duas operações. O seu desempenho foi bastante superior ao das outras turmas, o que se relaciona com o facto de terem sido explorados exemplos nas aulas, em linguagem simbólica e em linguagem natural. Os alunos praticaram a escrita de expressões deste tipo, colocando ou retirando parênteses, e analisando o seu significado em cada caso.

As autoras concluíram que é necessário ter em conta vários factores para compreender a forma como os alunos interpretam as letras e escrevem expressões algébricas. Alguns destes factores prendem-se com as estratégias e recursos utilizados pelos professores, enquanto outros são desenvolvidos pelos próprios alunos, e portanto não podem justificar-se os erros e dificuldades dos alunos apenas com o seu nível de desenvolvimento cognitivo.

2.3. Síntese

A noção de representação de Goldin e Duval pressupõe que existe uma coisa que substitui outra. Os dois autores partilham também a ideia de que o conteúdo das representações é determinado pelas regras do sistema de representação onde são produzidas. Embora ambos incluam representações internas e externas, na sua definição de representação, é Goldin que explora essa distinção, a partir da qual desenvolve a sua perspectiva. Enquanto isso, Duval centra-se nas representações semióticas, sistemas particulares de símbolos utilizados para produzir conhecimento e comunicar.

Goldin preconiza o desenvolvimento das representações internas como motor da aprendizagem, atribuindo as dificuldades dos alunos ao fraco desenvolvimento destas representações. Além disso, salienta a articulação das representações internas e externas, dizendo que a interacção permite a compreensão das representações externas formais, essenciais para a comunicação de ideias matemáticas. Para o desenvolvimento das representações internas e da articulação entre as representações internas e externas, propõe actividades de resolução de problemas, vizualização e reconhecimento de padrões, bem como a utilização de contextos familiares dos alunos.

Ao estudar as representações semióticas, Duval foca o aspecto da interacção referido por Goldin. No entanto, não aborda este aspecto em termos de representações internas e externas, centrando-se apenas nas representações semióticas. Afirma que os principais problemas que lhes estão associados dizem respeito à passagem entre representações. Enquanto as transformações dentro do mesmo sistema não trazem problemas graves, as transformações entre sistemas de representação têm associadas muitas dificuldades, pois requerem que se distinga o conteúdo da representação e o objecto representado. Como consequência da confusão entre representação e objecto representado, os alunos tendem a considerar duas representações do mesmo objecto como sendo dois objectos matemáticos distintos. Para minimizar esta confusão, Duval propõe a utilização de vários registos de representação do mesmo objecto.

A utilização de várias representações é uma das ideias que vários outros autores mais valorizam. Para justificarem a sua posição, referem que esta é a única forma de se ter acesso a um objecto na sua totalidade. Acrescentam que as diferentes representações de um objecto evidenciam diferentes aspectos da estrutura, e por isso o trabalho com várias representações permite eliminar as desvantagens de cada uma delas, conferindo significado à aprendizagem. Outra ideia fundamental prende-se com o papel das representações na resolução de problemas e na comunicação. São vários os autores que defendem que as representações devem ser vistas como instrumentos de resolução de problemas, pela influência que têm nos objectos a que conseguimos aceder e que conseguimos representar. Além de permitirem a organização do trabalho e a condução das ideias, as representações têm uma forte componente comunicativa, pois tornam possível a partilha de ideias matemáticas.

Relativamente à influência das tarefas no desempenho dos alunos, os estudos apresentados evidenciam a importância dos problemas contextualizados e familiares dos alunos no estudo das funções. Nestes estudos, o recurso a problemas com estas características fez com que houvesse evolução ao nível da utilização das representações algébrica e gráficas. A principal dificuldade dos alunos prende-se com a utilização das representações algébricas das funções. Embora sejam capazes de reconhecer as variáveis, a interpretação e a escrita através da linguagem simbólica traz-lhes dificuldades. Além disso, os alunos obtêm resultados muito baixos nas questões em que lhes é requerida a passagem de outra representação para a algébrica, o que evidencia muitas dificuldades na articulação entre representações. Foram também identificadas dificuldades e concepções erróneas nos alunos relacionadas com a construção e interpretação de gráficos, nomeadamente no trabalho com escalas e na fixação em procurar obter sempre uma recta. Esta dificuldade relaciona-se com a concepção que muitos alunos têm de que a variação linear é a principal forma de variação, o que os leva a procurar sempre ‘formas’ lineares e crescentes.

Capítulo 3

Metodologia

Este capítulo descreve as principais opções metodológicas do presente estudo, cujo objectivo é identificar os conhecimentos e as dificuldades dos alunos na resolução de problemas envolvendo funções. Descreve igualmente os participantes, os instrumentos de recolha de dados e o processo de análise de dados utilizado.

3.1. Opções metodológicas e fases do estudo

Opções metodológicas gerais. O paradigma interpretativo centra-se no significado atribuído pelas pessoas às suas acções, cabendo ao investigador a elucidação e explicitação desse significado (Erickson, 1986). Este estudo enquadra-se no paradigma interpretativo tendo em atenção que, perante um problema proposto, a acção de um aluno é determinada pelo "conjunto de significados que ele elabora com base em todo o seu património conceptual e sistemas de concepções, relativos aos vários elementos da situação" (Guimarães, 2003, p. 20). Nesta perspectiva, a investigação que proponho não se limita aos comportamentos observáveis, valorizando também as interpretações que os alunos fazem das situações com que se confrontam.

Atendendo ao objectivo e às questões do estudo, optei por uma metodologia qualitativa, pois pretendo fazer uma análise descritiva dos dados, integrando os dados obtidos através do teste escrito e das entrevistas. Além disso, a identificação de estratégias e dificuldades dos alunos requer que a análise se centre nos processos de pensamento e não nos resultados. Por fim, todo o processo de análise procura estabelecer relações entre os dados, com o objectivo de formular hipóteses sobre a problemática em estudo. As características deste trabalho acima descritas coadunam-se assim com algumas características da investigação qualitativa apresentadas por Bogdan e Biklen (1994): (i) é descritiva; (ii) o investigador interessa-se sobretudo pelos processos, relegando para segundo plano os resultados ou produtos; e (iii) a análise de dados é feita indutivamente, não se pretendendo confirmar hipóteses prévias.

Este estudo envolve a realização de estudos de caso de alunos, o que se prende com o facto desta modalidade de investigação se adequar ao estudo de entidades bem definidas (Merriam, 1988) – alunos de uma turma, com as suas estratégias e dificuldades próprias – com o propósito de aumentar o conhecimento neste domínio. Assim, esta investigação procura resposta para as questões propostas, tendo por base uma descrição detalhada das estratégias e dificuldades dos alunos. Além disso, este estudo pretende ter também uma componente analítica, procurando estabelecer relações com a teoria, ilustrando-a ou interrogando-a (Ponte, 1994).

Fases do estudo. A primeira acção no terreno realizada a propósito deste estudo foi feita no final do ano lectivo de 2007/2008, aquando da distribuição de serviço na escola onde me encontrava a leccionar e onde continuei no ano lectivo de 2008/2009. Nessa altura, falei com uma das professoras que iria, no ano lectivo seguinte, leccionar uma das turmas de 10.º ano de escolaridade. A professora disponibilizou-se de imediato para me ajudar no contacto com os alunos, e para que eu pudesse administrar um teste numa aula de Matemática no 1.º período do ano lectivo.

No ano lectivo de 2008/2009, antes de iniciar a recolha de dados, pedi autorização para o efeito à Comissão Administrativa Provisória da escola e aos encarregados de educação. O pedido de autorização aos encarregados de educação foi feito por escrito, e entregue aos alunos. Quando lhes entregou o pedido de autorização, a professora de Matemática da turma deu algumas informações aos alunos sobre o estudo, nomeadamente o seu objectivo e os principais momentos de recolha de dados. Os alunos dispuseram-se imediatamente a participar, mostrando-se curiosos quanto ao teste escrito a fazer.

Atendendo a que, no 10.º ano, uma das unidades temáticas diz respeito às funções, e que o presente estudo se centra nos conhecimentos adquiridos ao longo do 3.º ciclo, era imperativo que a recolha de dados ocorresse no início do 10.º ano, antes de serem estudadas funções no ensino secundário. Como o estudo das funções estava previsto para o início do 2.º período, planeei administrar o teste à turma na primeira semana de Novembro e realizar as entrevistas até ao final do 1.º período. Após a primeira análise dos testes, foram realizadas duas entrevistas a quatro alunos, entre a penúltima semana de Novembro e a primeira de Dezembro. Estas entrevistas pretendiam, para além de clarificar aspectos que surgiram durante a análise dos testes, identificar e descrever as estratégias e dificuldades dos alunos durante a resolução de problemas. Entretanto, a professora da turma informou-me que o estudo das funções seria iniciado apenas no final de Janeiro e, por isso, decidi realizar as segundas entrevistas durante o mês de Janeiro. A calendarização das várias fases do estudo é apresentada no Anexo 1.

3.2. Participantes

Os participantes deste estudo são os alunos de uma turma de 10.º ano do Curso de Ciências e Tecnologias, cujo currículo engloba a disciplina de Matemática A. Destes, foram escolhidos quatro alunos para a elaboração de estudos de caso. A informação sobre a turma foi obtida através de conversas com os alunos, a professora de Matemática e a directora de turma, tendo registado algumas notas. Além disso, consultei, através da directora de turma, as fichas de identificação dos alunos. No caso dos alunos objecto de estudos de caso, tive oportunidade de conversar com ela sobre vários aspectos.

A escola. A turma pertence a uma escola da cidade de Lisboa, sede de agrupamento de escolas, englobando escolas de todos os ciclos de ensino e do ensino pré-escolar. Na escola sede, existem turmas do ensino básico (2.º e 3.º ciclos do ensino regular e Cursos de Educação e Formação) e turmas do ensino secundário (Cursos Científico-Humanísticos, Cursos Tecnológicos e Cursos Profissionais). A maioria dos alunos provém de bairros desfavorecidos económica e culturalmente, onde predomina uma população com baixo nível de instrução e onde está bem vincada uma cultura popular urbana, que é transportada para a escola. A par destes, a escola recebe alunos provenientes de famílias detentoras de níveis mais elevados do ponto de vista económico e social. Recentemente, tem-se verificado um aumento no número de alunos provenientes de famílias imigrantes, das mais diversas origens. Grande parte da população escolar tem baixas expectativas face à escola, existindo elevadas taxas de insucesso e abandono escolar. A opção pelo percurso profissional em detrimento do prosseguimento de estudos é outra característica desta população.

A turma. A turma é constituída por 22 alunos, com idades compreendidas entre 14 e 18 anos, sendo 12 rapazes e 10 raparigas. A maioria da turma frequentou o 9.º ano no ano lectivo anterior, havendo apenas 3 alunos a repetir o 10.º ano de escolaridade. Entre os 19 alunos que frequentam o 10.º ano pela primeira vez, 5 tiveram uma ou duas retenções durante o ensino básico. Além disso, 6 dos alunos que concluíram o 9.º ano no ano lectivo anterior obtiveram classificação inferior a 3 na disciplina de Matemática.

A directora de turma e a professora de Matemática consideram que os alunos são pouco empenhados e organizados. A falta de hábitos de estudo reflecte-se, por exemplo, no incumprimento dos trabalhos de casa. Nas aulas de Matemática, os alunos são participativos, revelando algumas dificuldades ao nível da comunicação matemática, nomeadamente na explicação do seu raciocínio. Relativamente ao comportamento, são alunos conversadores e que se distraem com facilidade. O aproveitamento da turma é positivo, mas os níveis obtidos são baixos.

Todos os alunos gostariam de prosseguir estudos, considerando que é a forma de garantirem o acesso à profissão que desejam, na maioria dos casos nas áreas da Informática e da Saúde. Existe entre estes alunos uma grande dispersão em relação à disciplina favorita, não havendo uma disciplina que se destaque. Matemática é a disciplina preferida de quatro alunos e todos a consideram importante no contexto escolar e profissional.

Os alunos objecto de estudo de caso. Foram escolhidos quatro alunos para estudos de caso. Uma vez que esta investigação pretende descrever os conhecimentos e dificuldades dos alunos, centrando-se nos processos e não nos resultados, pareceu-me um número de casos adequado aos objectivos definidos e à abordagem escolhida. Além disso, esta escolha foi ajustada ao tempo de que dispunha para realizar este estudo.

Os critérios que defini para a escolha dos alunos que foram objecto de estudo de caso foram (i) terem concluído o 9.º ano no ano lectivo anterior e (ii) terem tido, no teste escrito, um bom desempenho a nível gráfico ou algébrico, revelando algumas dificuldades no outro domínio. O primeiro critério foi usado para garantir que os conhecimentos dos alunos se referiam ao 3.º ciclo, o segundo critério permitia que os dados obtidos fossem diversificados e que contemplassem os dois domínios referidos. Através da análise dos testes, verifiquei que surgiam frequentemente elementos relativos às outras representações, pelo que o critério referido, centrado nas representações algébrica e gráfica, não impediria a análise das restantes. Assim, Sofia e

Cristina foram seleccionadas por terem tido um bom desempenho ao nível gráfico, pois escolheram correctamente a maioria dos gráficos e utilizaram a informação gráfica para responder a outras perguntas. No entanto, evidenciarem dificuldade na escrita ou interpretação de expressões algébricas. Em contrapartida, Ana e Manuel tiveram um bom desempenho nas perguntas que envolviam representações algébricas. Manuel apenas escreveu mal uma das expressões pedidas, parecendo tratar-se de um engano. Perante informação dada graficamente, Ana e Manuel manifestaram dificuldades na escolha de gráficos, não fazendo escolhas acertadas em algumas situações.

3.3. Recolha de dados

A recolha de dados deste estudo foi realizada através de dois instrumentos, teste escrito e entrevistas, tendo em conta que em investigação qualitativa, é frequente utilizar entrevistas em conjunto com outras técnicas de recolha de dados (Bogdan & Biklen, 1994), cruzando informação proveniente das várias fontes.

Teste escrito. O teste escrito concebido para este estudo procurava identificar estratégias e dificuldades dos alunos. Pretendia ainda verificar se os alunos eram capazes de articular as várias representações das funções, nomeadamente se eram capazes de articular a representação algébrica com as outras representações.

O teste (Anexo 2) é constituído por cinco grupos de questões, com uma média de quatro questões por grupo. Algumas das questões do teste foram adaptadas de itens do PISA e de exames nacionais do 9.º ano. Outras questões foram baseadas em tarefas de manuais do 8.º e 9.º anos de escolaridade, e uma delas foi retirada do projecto do GAVE "1000 Itens". O processo de construção do teste incluiu um momento de recolha de itens, a partir das fontes citadas. Depois de seleccionados, os itens foram alvo de várias alterações, até constituírem um conjunto diversificado e abrangente. Para este processo de aperfeiçoamento do teste, contribuíram o meu orientador e a professora da turma. O processo de construção do teste foi apoiado pela construção de uma matriz (Anexo 3), que proporciona uma visão global das capacidades visadas, facilitando a identificação de repetições ou ausências de assuntos.

Assim, as questões propostas relacionam diferentes representações, havendo variação ao nível da representação em que é apresentado o problema. Além disso, para perceber de que forma os alunos articulam as várias representações, a ordem pela qual estas são solicitadas também varia.

A representação algébrica está presente em todas as questões, sendo pedida a sua escrita em três das questões, a partir do gráfico ou do cálculo e análise de valores numéricos. A interpretação da expressão algébrica também é solicitada, na análise contextualizada de um problema. Foi enfatizada também a representação gráfica, presente em quatro das questões colocadas. As questões colocadas, relativas à representação gráfica, incidem na sua interpretação em contextos reais, na associação entre o gráfico e situações de proporcionalidade directa ou inversa, e na associação entre o gráfico e a expressão algébrica correspondente.

Atendendo a que uma das questões do estudo se refere às diferenças eventualmente existentes entre o uso das representações em problemas contextualizados e em problemas puramente matemáticos, três dos grupos de questões apresentam problemas contextualizados, e os outros dois referem-se a problemas puramente matemáticos. Além disso, as várias questões abrangem os tipos de funções que são estudadas no 3.º ciclo – funções de proporcionalidade directa, proporcionalidade inversa e afim. A utilização destes tipos de funções tinha como objectivo diversificar as estratégias dos alunos e, ao mesmo tempo, identificar as dificuldades, procurando eventual associação entre o tipo de função e as estratégias ou dificuldades observadas. O Anexo 3 sintetiza os objectivos, o tipo de representação, o tipo de situação e as representações utilizadas em cada uma das questões.

Entrevistas. As entrevistas visavam obter descrições das estratégias e das dificuldades dos alunos durante a resolução de problemas com funções. A obtenção destas descrições "na linguagem do próprio sujeito", pretendia "desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo" (Bogdan e Biklen, 1994, p. 134). Tendo por base a análise dos testes, seleccionei previamente os aspectos a aprofundar na primeira entrevista e, a partir da análise da primeira entrevista, preparei novas tarefas para serem respondidas durante a segunda. Além das definidas previamente, surgiram novas questões durante o decorrer das entrevistas. Assim, relativamente ao grau de estruturação, são entrevista semi-estruturadas, pois estavam previstas alterações na sequência prevista ou questões não planeadas motivadas pelas intervenções dos entrevistados (Guimarães, 2003). Este grau de estruturação das entrevistas, além de permitir aos entrevistados a abordagem aspectos relevantes para si, permitiu que todos os tópicos previstos fossem abordados (Bell, 1997) e facilitou a comparação entre os entrevistados (Bogdan e Biklen, 1994).

Todas as entrevistas foram realizadas na escola, em dias e horas combinados com os alunos. Tiveram uma duração média de 60 minutos, foram gravadas em áudio e transcritas na íntegra. Relativamente à natureza, trata-se de entrevistas clínicas, pois procuravam obter informações sobre "os significados que os alunos encontram em problemas matemáticos" (Long & Ben-Hur, 1991, p. 157). Especificamente, as entrevistas visavam identificar estratégias e dificuldades dos alunos durante a resolução de problemas que envolvam funções e descrever o modo como estas estratégias são aplicadas.

Hunting (1997) salienta a importância da escolha da tarefa e respectivo protocolo, afirmando que "os dados obtidos dependerão da qualidade e incidência da tarefa" (p. 148). Enfatiza também as questões a colocar, que devem verificar as seguintes condições: (i) ser suficiente abertas, dando liberdade aos alunos para optarem por uma forma de resposta; (ii) maximizar as oportunidades de discussão ou diálogo, para que os processos de pensamento possam revelar-se; e (iii) permitir ao aluno e investigador que reflictam sobre os seus próprios processos de pensamento (p. 153).

Neste estudo, para cada entrevista, foi elaborado um guião (Anexos 4 a 11). Nas primeiras entrevistas, o guião tinha por base as tarefas do teste escrito, e centrava-se no esclarecimento ou justificação das estratégias utilizadas e nas dificuldades encontradas. Para as segundas entrevistas, comecei por escolher um conjunto de tarefas abrangendo as várias representações das funções, e escolhi, para cada aluno, algumas dessas questões, conforme a análise feita à primeira entrevista. Nessa primeira análise, procurei definir as principais características de cada aluno, no que diz respeito a estratégias privilegiadas, principais dificuldades e concepções. Desta forma, os quatro guiões tinham tarefas comuns, acontecendo, porém, que a abordagem da tarefa fosse diferente perante os alunos (por exemplo, pedindo a escrita da expressão ou a escolha da expressão entre um conjunto de opções).

3.4. Análise de dados

A análise de dados incidiu sobre os testes e as transcrições das entrevistas. Procedi à sua análise de forma indutiva, partindo dos dados recolhidos e procurando relacioná-los. Uma vez que estava perante dados obtidos através de instrumentos diferentes, foi necessário confrontá-los, para tornar coerente a sua interpretação, através de um processo de "triangulação" (Erickson, 1986).

Durante grande parte da investigação, a recolha e a análise de dados desenvolveram-se simultaneamente. O processo de análise foi iniciado após a realização do teste escrito, visando a preparação da primeira entrevista. A interacção entre a recolha e a análise de dados continuou na fase seguinte, pois a segunda entrevista foi preparada com base na análise da primeira. Estas análises iniciais, quer do teste, quer da primeira entrevista, permitiram identificar características relevantes dos alunos no que diz respeito às suas estratégias e dificuldades. Posteriormente, quando a recolha de dados terminou, o teste e as entrevistas foram sujeitos a uma segunda análise, mais aprofundada.

O processo cíclico em que se desenvolveu a recolha e a análise permitiu-me procurar evidência para as inferências que fui, entretanto, formulando. Segundo Erickson (1986), a formulação empírica de inferências e a revisão repetida do conjunto de dados, com o objectivo de tornar evidentes as inferências estabelecidas, são tarefas básicas da análise de dados.

O processo analítico foi orientado pelo quadro teórico e pelo objectivo e questões do estudo, a partir dos quais estabeleci as seguintes dimensões, para a elaboração dos estudos de caso: (i) estratégias e dificuldades; (ii) relação entre representações; e (iii) diferenças entre problemas contextualizados e problemas puramente matemáticos. Senti necessidade de distinguir algumas subdimensões de análise dentro da dimensão respeitante às estratégias e dificuldades, para facilitar a abordagem das várias representações, diminuindo o risco de repetição ou esquecimento: (i) interpretação e utilização de informação verbal e de informação dada em tabelas; (ii) interpretação e utilização de gráficos; (iii) interpretação e utilização de expressões; e (iv) escrita de expressões. Em cada uma destas subdimensões, analisei as estratégias e dificuldades dos alunos, salientando os elementos mais relevantes para o caso de cada um. Para a segunda dimensão, envolvendo a relação entre a representação algébrica e as outras representações, centrei-me na representação algébrica e analisei a passagem entre esta e as representações verbal, numérica e gráfica. Por fim, a terceira dimensão levou-me a procurar diferenças entre os problemas contextualizados e os problemas puramente matemáticos. Centrando-me no conteúdo das dimensões anteriores, procurei verificar se havia diferenças nos dois tipos de problemas, complementando-o com os dados recolhidos. A análise das entrevistas e dos testes escritos, na procura de elementos que se enquadrassem nas dimensões estabelecidas, levou a que identificasse unidades básicas de análise (Erickson, 1986), isto é, partes das entrevistas ou dos testes que evidenciam as interpretações realizadas.

Capítulo 4

Sofia

Sofia tem 15 anos e é simpática, faladora e expressiva. Considera-se boa aluna, mas acha que seria capaz de fazer melhor, pois só estuda quando tem testes ou trabalhos para apresentar. No 3.º ciclo, obteve nível 4 a Matemática no 7.º ano e nível 3 no 8.º e 9.º ano. Nas aulas, é participativa mas muito irrequieta, reconhecendo que o seu comportamento prejudica o seu aproveitamento. Considera a escola importante para o seu futuro, por permitir a aquisição de alguma cultura e a definição de objectivos de vida. Embora as suas disciplinas favoritas sejam Português e Educação Física, gosta de Matemática e considera-a útil na resolução de situações do dia-a-dia. Acrescenta que, para se perceber e acompanhar as aulas de Matemática, é necessário empenho, que passa pelo trabalho diário.

4.1. Estratégias e dificuldades

Interpretação e utilização de informação verbal e de informação dada em tabelas

Sofia mostra-se capaz de resolver questões de proporcionalidade inversa a partir de informação dada verbalmente e através de uma tabela. Centrando-se na informação disponível, verifica que o produto dos valores das duas variáveis é invariante, reconhecendo, desta forma, uma situação de proporcionalidade inversa – usando assim uma estratégia de reconhecimento da invariância do produto. O exemplo seguinte mostra como observa que o produto é invariante num problema que relaciona, através de uma tabela, o número de pessoas transportadas num autocarro e o preço pago por cada uma:

2.1. O preço total do autocarro é fixo ou varia com o número de pessoas? Justifica a resposta.

O preço total do autocarro é fixo, pois estamos perante a propoccionalidade inversa em que o produto é o mesmo 240 €.

A partir do reconhecimento da invariância do produto, e sempre que precisa de determinar um valor para uma das variáveis, Sofia inverte o raciocínio, recorrendo à operação divisão – usa então a estratégia de inversão do raciocínio. O exemplo seguinte mostra como determina, através desta estratégia, o número de pessoas que são transportadas no autocarro, sabendo que cada uma paga 5€ e que o preço total é 240€:

> Investigadora: Mas antes tu não tinhas a expressão, e também resolveste. Pensaste o quê?
>
> Sofia: Pensei… Porque 240 é o número fixo, se dividir por 5 euros vai-me dar o número de pessoas.

Sofia usa a informação verbal também para decidir sobre a viabilidade de uma estratégia, como mostra o exemplo seguinte, ainda relativo ao mesmo problema. A aluna reflecte sobre a utilização da regra de três simples para calcular valores e, apesar de se sentir segura quanto ao seu domínio e de gostar de utilizar esta regra, o conhecimento do contexto permite-lhe perceber que não a pode utilizar:

> Sofia: Não, por isso é que eu não fiz. Não me lembrava… Não, é porque aqui não é… É sempre a mesma coisa, o preço é fixo, é por isso que não dá para fazer pela regra de três simples.

No problema anterior, Sofia utiliza naturalmente a informação verbal dada. No entanto, num problema envolvendo taxas de câmbio de duas moedas, não se mostra tão à-vontade, o que pode relacionar-se com a sua falta de familiaridade com a situação. Diz que não sabe responder às perguntas quando a correspondência entre as duas moedas é fornecida oralmente, em vez de ser graficamente:

> Investigadora: Então estás a dizer que, se não estivesse o gráfico e dissesse só assim: “A cada SGD corresponde 4,2 ZAR”… Se dissesse só isso…
>
> Sofia: Não conseguia.

Noutra situação, é apresentada uma tabela que relaciona larguras e comprimentos de rectângulos com área de 18cm^2. A aluna completa-a, utilizando as estratégias do reconhecimento da invariância do produto e da inversão do raciocínio:

	Rectângulo A	Rectângulo B	Rectângulo C
Comprimento (cm)	4	36	9
Largura (cm)	4,5	0,5	2

No entanto, mostra dificuldade em interpretar os valores da tabela como coordenadas de pontos de um gráfico. Assim, aquando da escolha do gráfico representativo da situação, não tem a iniciativa de procurar os valores da tabela.

Sofia usa a informação verbal, dada através de pequenos textos, para escolher um gráfico numa situação contextualizada. A partir da informação dada verbalmente, faz a análise gráfica global, determinando as características a esperar, como a monotonia e as coordenadas dos pontos dos extremos do intervalo – usando uma estratégia de análise gráfica global. Num problema sobre a desvalorização do valor de um computador, começa por organizar oralmente as informações fornecidas no enunciado e as que obtém durante a resolução das perguntas anteriores. Essa informação permite-lhe seleccionar rapidamente o gráfico que relaciona o valor do computador e o número de anos decorridos após a sua compra:

Sofia: Então, isto é… Ora, os anos aumentam, o valor desce.
Investigadora: Então estás a excluir à partida algum?
Sofia: Este?
Investigadora: O (D)? Porquê?
Sofia: Porque o preço aumenta, à medida que o tempo cresce.
[Continua a observar os gráficos]
Sofia: É este. Porque eu já sei que ele atinge o valor 200 aos 7 anos.

Interpretação e utilização de gráficos

Perante problemas de proporcionalidade inversa, Sofia abstrai-se rapidamente do respectivo contexto, apoiando os seus raciocínios apenas na associação que faz entre estas funções e a respectiva representação gráfica – estratégia de reconhecimento da hipérbole como gráfico de proporcionalidade inversa. Esta estratégia é evidente na situação a seguir indicada, que relaciona comprimentos e larguras de rectângulos com uma área fixa:

Sofia: (…) Tinha que ser uma hipérbole.

Investigadora: Por que é que escolheste este? Por ser uma hipérbole? Foi isso?

Sofia: Pois. Mas porquê?

Investigadora: Mas porquê? Pensa lá na situação.

(...)

Sofia: Então aqui… Na inversa são as hipérboles!

Mesmo após ser incentivada a pensar na situação, imaginando o que aconteceria à largura de um rectângulo se o seu comprimento variasse, não consegue justificar a associação entre a 'imagem' do gráfico e o problema apresentado.

Já numa situação representada por uma função afim, em que o saldo de uma festa é calculado em função do número de bilhetes vendidos e há uma despesa inicial de 500 €, Sofia recorre à análise gráfica global. Assim, centra-se no instante inicial e exclui os gráficos que não correspondem à situação descrita:

Sofia: Começa positivo [gráfico (A)], e aqui também [gráfico (B)]… Aquele começa negativo [gráfico (D)].

Investigadora: Então qual é o que corresponde à situação?

Sofia: Supostamente será este [gráfico (D)]!

Investigadora: Será? Ou é o único que pode ser?

Sofia: É o único! Porque eles ao princípio vendem bilhetes, mas o saldo deles continua negativo, porque eles já gastaram 500.

Num problema puramente matemático, para escolher o gráfico da função $y = 2x + 1$, a aluna procura uma correspondência entre as coordenadas dos pontos do gráfico e os valores obtidos através da expressão – usando portanto uma estratégia de análise gráfica pontual:

Sofia: Como é que eu podia decidir?

Investigadora: Sim.

Sofia: Utilizando os valores que estavam assinalados, eu fazia.

Investigadora: Quais valores? Dá-me um exemplo.

Sofia: Então, se o *y* fosse 2. Se o *y* fosse 2… Mas podia fazer aqui [Constrói e resolve a equação $2 = 2x + 1$].

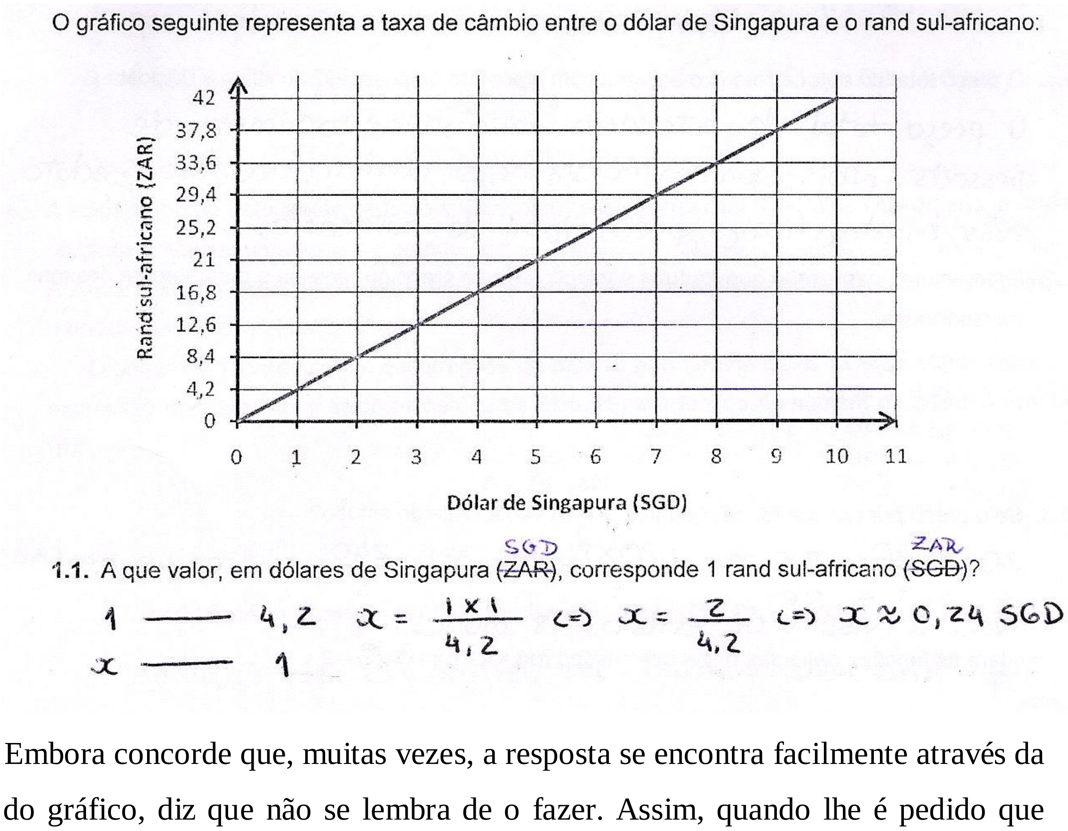
Investigadora: Podias utilizar a expressão para obter o valor?

Sofia: Sim, escolhia um número que aparecesse aqui [no gráfico] e… Por acaso o 7 não aparece.

Investigadora: Estás à procura do 7 no eixo dos *xx* ou no eixo dos *yy*?

Sofia: Nos *yy*, mas posso procurar nos *xx*, tanto faz.

Para determinar um objecto, dado o gráfico de uma função de proporcionalidade directa, recorre à regra de três simples. A utilização desta estratégia mostra que é capaz de retirar do gráfico a informação necessária para calcular valores desconhecidos:



Embora concorde que, muitas vezes, a resposta se encontra facilmente através da leitura do gráfico, diz que não se lembra de o fazer. Assim, quando lhe é pedido que determine o valor de uma imagem ou objecto, uma das estratégias que mais utiliza é a regra de três simples, que vê como algo muito prático e útil e que funciona quase sempre. Além disso, considera que, ao contrário da observação do gráfico, esta regra constitui uma justificação aceite pelos professores. Demonstra assim que tem dificuldade em reconhecer a observação do gráfico como uma estratégia em si mesma.

O exemplo seguinte, que se refere à determinação da imagem de um ponto, mostra a forma como lida com a regra de três simples e com a observação do gráfico:

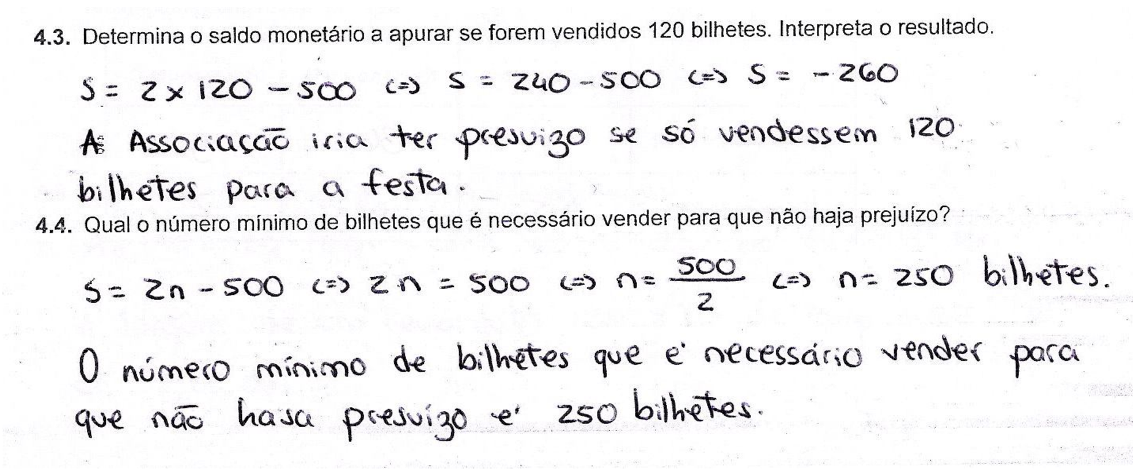
> Sofia: Mas… A regra de três simples já está. Eu sinto-me muito à vontade a fazer a regra de três simples. Sempre que posso fazer eu faço.
>
> (...)
>
> Investigadora: Então e se fosse… Se fosse por exemplo 10 dólares de Singapura, também ias fazer a regra?
>
> Sofia: Sim. Não está no gráfico.
>
> Investigadora: Não está? De certeza?
>
> Sofia: Não. Se calhar… [Identifica o valor] Depende da atenção, depende.
>
> (...)
>
> Sofia: Mas se não estivesse com atenção, fazia a regra…
>
> Investigadora: Fazias a regra para ficares mais descansada?
>
> Sofia: De qualquer das maneiras, acho que… Como a gente tem que justificar porque é que escolhe certos dados, então eu ia fazer com a regra.

Interpretação e utilização de expressões

A utilização da expressão é a estratégia que Sofia privilegia para o cálculo de valores desconhecidos, vendo-a como uma ferramenta muito útil para valores de ordem de grandeza elevada. Considera, também, que o recurso à expressão é uma forma de obter a resposta e apresentar uma justificação ao mesmo tempo, sem exigências no que diz respeito à criatividade, tal como mostra o exemplo seguinte, respeitante à desvalorização de um computador:

> Sofia: Eu já sei, mas vou aplicar a expressão. Tem que se justificar como é que se faz, então tenho que aplicar a expressão.
>
> Investigadora: Tens que aplicar a expressão para justificar? Então e se dissesses "1400 – 200 – 200 porque é daqui a 2 anos"? Achas que não é justificação?
>
> Sofia: Sim, mas dá muito trabalho... Dá muito trabalho não… Mas eu tenho… As expressões são feitas para facilitar a vida, não é isso? Então quando se sabe a expressão eu acho que é mais fácil fazer por ela.

Assim, nas situações em que é dada uma expressão, a aluna utiliza-a para calcular os valores de que precisa, construindo e resolvendo uma equação (determinando um objecto) ou substituindo o valor da variável independente (determinando uma imagem). As resoluções seguintes dizem respeito à utilização desta estratégia na resolução de um problema em que o saldo de uma festa é calculado em função do número de bilhetes vendidos através da expressão $S = 2n - 500$:



4.3. Determina o saldo monetário a apurar se forem vendidos 120 bilhetes. Interpreta o resultado.

$S = 2 \times 120 - 500 \Leftrightarrow S = 240 - 500 \Leftrightarrow S = -260$

A Associacão iria ter presuizo se só vendessem 120 bilhetes para a festa.

4.4. Qual o número mínimo de bilhetes que é necessário vender para que não haja prejuízo?

$S = 2n - 500 \Leftrightarrow 2n = 500 \Leftrightarrow n = \frac{500}{2} \Leftrightarrow n = 250$ bilhetes.

O número mínimo de bilhetes que é necessário vender para que não hasa presuizo é 250 bilhetes.

Sofia é capaz de interpretar a expressão $S = 2n - 500$ com base na informação fornecida sobre o contexto – estratégia de utilização da informação do contexto. Globalmente, parece perceber a forma como a expressão funciona e a sua aplicabilidade, mas tem alguma dificuldade em explicar cada uma das suas partes, nomeadamente a diferença entre 2*n*, 2 e *n*.

Investigadora: Qual é a parte que representa o número de bilhetes que eles vendem?

Sofia: 2*n*.

Investigadora: Quantos bilhetes…

Sofia: O *n* é o quantos bilhetes eles vendem.

Investigadora: O *n* ou o 2*n*?

Sofia: 2*n* é o preço dos bilhetes, 2 vezes *n*. Era o número de bilhetes que eles venderiam.

Sofia revela alguma dificuldade na compreensão e utilização da notação $f(x) =$. Utiliza a expressão $f(x) = 2x$ para calcular objectos e imagens, mas mostra-se confusa quanto à sua utilização e significado:

Investigadora: Quais são as coordenadas deste ponto?

Sofia: $x = 0$ e $y = 0$ também!

Investigadora: E na expressão, é isso que se obtém?

Sofia: Não, tem 2. $y = 2$. Não é? Tem $x = 2$.

Escrita de expressões

No problema de proporcionalidade directa, apresentado graficamente, referente à taxa de câmbio entre duas moedas, Sofia estabelece relações numéricas a partir da leitura do gráfico. Para isso, utiliza uma estratégia de correspondência entre os valores inteiros da variável independente e os valores da variável dependente – estratégia de correspondência entre variáveis. Constrói uma lista com alguns valores do gráfico, em que explicita a operação que os relaciona e o valor da constante de proporcionalidade:

$1 = 4{,}2 \times 1 \Leftrightarrow 1\ \text{SGD} = 4{,}2\ \text{ZAR}.$

$2 = 4{,}2 \times 2 \Leftrightarrow 2\ \text{SGD} = 8{,}4\ \text{ZAR}.$

$3 = 4{,}2 \times 3 \Leftrightarrow 3\ \text{SGD} = 12{,}6\ \text{ZAR}.$

No entanto, tem muita dificuldade em escrever uma expressão que traduza a relação estabelecida. Reconhece a necessidade de utilizar letras para representar a variação simultânea de valores numéricos, mas diz que não sabe exprimir essa variação, acabando por escrever a expressão $n = 4{,}2n$.

Sofia: Eu quando escrevia eu sabia, só que… Como não encontrei outra maneira de escrever, eu fiz… Ao fazer estas contas eu sabia que estava a dar certo, eu sabia que o modo de indicar não é o mais correcto, só que…

Investigadora: Sabias que estava a dar certo por causa do quê?

Sofia: Do gráfico. Se não, provavelmente não teria feito.

Nos problemas de proporcionalidade inversa apresentados no teste, Sofia não escreve expressões algébricas, mas revela uma boa compreensão das situações. Tanto no teste escrito como na entrevista, no caso em que se apresenta numa tabela a relação entre o preço de aluguer de um autocarro e o número de pessoas transportadas, reconhece a invariância do produto:

Investigadora: Como é que o preço se relaciona com o número de pessoas? Até disseste aqui que ele é fixo.

Sofia: Sim, é fixo. Porque este vezes aquele dá 240. Dá sempre 240.

Porém, não é capaz de obter a expressão a partir daí, o que indica não conhecer a forma da expressão geral de uma função de proporcionalidade inversa. Questionada sobre as variáveis do problema, identifica-as correctamente, mas quando é incentivada a utilizar letras para substituir os valores numéricos, mostra-se desconfortável e insegura, com dificuldade em reconhecer como correcta a expressão que obtém, $n \times x = 240$:

Sofia: É isto?

Investigadora: Então isso não é uma expressão?

Sofia: É…Só que… Dá para ter duas incógnitas?

Investigadora: Isto [expressão de proporcionalidade directa] não tem duas incógnitas?

Sofia: Tem. Mas… Então, depois como é que eu escrevo?

Investigadora: Então e aqui não tens duas incógnitas?

Sofia: Ah, pois tem. Ah! Meto o valor que quiser.

A dificuldade que sente em aceitar como correcta a expressão construída parece estar relacionada, por um lado, com a distinção entre a expressão propriamente dita e sua utilização para encontrar valores. Esta confusão é evidente na linguagem que utiliza – chama incógnitas às variáveis – e na preocupação constante em substituir ou encontrar valores. Por outro lado, esta dificuldade parece prender-se com o facto das duas variáveis aparecerem no mesmo lado da igualdade, como evidencia um outro problema de proporcionalidade inversa, em que se relacionavam comprimentos e larguras de rectângulos com uma área fixa. Neste caso, a aluna reconhece a invariância do produto e propõe, durante a entrevista, que a expressão seja "*l* vezes *c* igual a 18", mas imediatamente a rejeita por ter "duas incógnitas".

4.2. Relação entre representações

Sofia não relaciona as expressões algébricas de funções de proporcionalidade directa e inversa com os respectivos gráficos. Assim, perante um gráfico de proporcionalidade directa que representa a taxa de câmbio entre duas moedas, não chega à respectiva expressão. Da mesma forma, apesar de associar as hipérboles às funções de proporcionalidade inversa, não consegue obter directamente a sua expressão.

Reconhece que a expressão de uma função afim fornece informação sobre o gráfico, mas esse conhecimento não parece estar consolidado. Numa expressão do tipo $y = ax + b$, reconhece *b* como o valor "onde o gráfico corta o eixo dos *yy*", mas no caso da função de proporcionalidade directa, em que *b* é zero, tem dúvidas nessa associação:

> Sofia: Então, porque corta o eixo dos *yy* no -2.
>
> Investigadora: Qual delas?
>
> Sofia: A *g*.
>
> Investigadora: Corta o eixo dos *yy* no -2. E onde é que isso se vê na expressão?
>
> Sofia: $g(x) = x - 2$.
>
> Investigadora: $x - 2$ quer dizer que corta o eixo dos *yy* no -2. E esta, $f(x) = x$, quer dizer que corta onde?
>
> Sofia: Passa na origem. Eu não sei muito bem… Eu pus porque era a outra.

Revela também dificuldade na interpretação gráfica do valor *b* quando se trocam os termos na expressão. A sua reacção, aquando da interpretação da expressão $y = 1400 - 200n$, mostra que o significado que atribui a *b* depende da posição em que este valor aparece:

> Sofia: Pois... Eu aqui nem sei onde é que isto corta, era suposto cortar…
>
> Investigadora: Se eu escrever a expressão geral... [Escreve $y = ax + b$]
>
> Sofia. Sei que é no *b*.
>
> Investigadora: E esta expressão não é deste tipo?
>
> [Observa as duas expressões]
>
> Sofia: Ah! Corta no 1400.

Solicito a Sofia que transforme a expressão $y = 1400 - 200n$ numa expressão equivalente com os termos pela ordem contrária, ou seja, com o aspecto da expressão geral $y = ax + b$. Esta tarefa revela-se difícil para a aluna, que obtém a expressão (incorrecta) $y = 200n + 1400$. Contudo, interpreta correctamente a expressão que obtém, através da utilização da informação do contexto, e conclui que não é equivalente à expressão inicial, o que evidencia, mais uma vez, a sua capacidade interpretativa:

Investigadora: O que é que acontecia aqui, com o valor do computador, nesta expressão [$y = 200n + 1400$]?

Sofia: Aumentava.

Relativamente ao declive, a aluna apenas tem uma noção intuitiva, não sendo capaz de identificar o seu valor na expressão ou calculá-lo a partir do gráfico. Compara declives de funções apenas com base na 'imagem' global dos gráficos, não conseguindo transportar essa comparação para as respectivas expressões algébricas. O exemplo seguinte mostra como lida com o declive de quatro funções apresentadas graficamente, não fazendo qualquer associação com as expressões algébricas:

Investigadora: Mas algumas daí têm declives diferentes, ou não?

[Silêncio]

Investigadora: Ou têm todas o mesmo declive?

Sofia: Eu acho que não…

[Observa os gráficos]

Sofia: Eu acho que aquela não tem [indica $y = x$].

Investigadora: Porquê?

Sofia: Está mais deitada do que aquelas [as funções $y = 2x$, $y = 2x + 1$ e $y = 2x - 1$].

Devido à sua dificuldade na passagem entre as representações gráfica e algébrica, muitas vezes, Sofia usa como passo intermédio a representação numérica, concretamente comparando as coordenadas dos pontos do gráfico e os valores obtidos através da expressão. O recurso à representação numérica é evidente numa situação em que lhe pedi que fizesse o esboço de um gráfico, num problema de proporcionalidade inversa. Não conseguindo obter um esboço apenas com base na expressão algébrica, a aluna opta por marcar alguns pontos. Ao marcar os pontos, procura que o aumento dos valores das abcissas corresponda a um aumento dos valores das ordenadas:

Sofia: Aqui pode ser 3, aqui… Acho que isto depois tanto faz.

[Marca os valores das abcissas]

Sofia: Ai, credo! [Tenta marcar as ordenadas correspondentes às abcissas de forma crescente]

Investigadora: Então, o 6 está acima do 8? [no eixo dos *yy*]

Sofia: Tão, mas não pode! Ai!... Este gráfico é estranho! Vai dar um gráfico estranho…

(...)

Investigadora: Que dificuldade estavas a sentir aí?

Sofia: Eu estava a fazer 30… Estava a fazer tudo a direito… Como estes estão a aumentar [valores das abcissas], aqui [valores das ordenadas] aumentava também…

Os exemplos de escrita de expressões descritos em pontos anteriores evidenciam as capacidades de Sofia ao nível do reconhecimento da invariância do produto (no caso das funções de proporcionalidade inversa) ou do estabelecimento de correspondência entre duas variáveis (no caso das funções afim e de proporcionalidade directa). No entanto, a aluna não consegue obter a expressão algébrica, ou seja, não consegue fazer a mudança da representação numérica para a algébrica. No sentido contrário, não revela dificuldade, ou seja, consegue fazer a mudança da representação algébrica para a representação numérica. Aliás, utilizar a expressão para calcular objectos ou imagens é justamente a estratégia que privilegia.

A aluna é também capaz de analisar o trabalho com as expressões do ponto de vista numérico, fazendo a passagem, mais uma vez, entre as representações algébrica e numérica, como mostra o exemplo seguinte, que relaciona o saldo de uma festa com o número de bilhetes vendidos. Inicialmente, revela-se hesitante, mas acaba por verificar que, em algumas situações, pode obter o valor pretendido utilizando operações:

Sofia: O saldo era 500. Eles têm que fazer 500 euros para não terem prejuízo.

Investigadora: Então quanto é que eles têm que vender?

Sofia: 250 bilhetes.

Investigadora: E era preciso fazer isto [resolução da equação]?

Sofia: Não, podia ser logo 500 a dividir por 2… Podia chegar logo aqui [indica $x = \frac{500}{2}$].

Investigadora: Sim. Mas tu, para responder a estas perguntas, pensaste mais na expressão ou pensaste mais nesta situação?

Sofia: Na expressão. Como foi dada, resolvi tudo com ela. Eu consigo resolver expressões, não sei é chegar até elas.

A informação dada verbalmente, por vezes associada a tabelas, permite-lhe estabelecer relações numéricas No entanto, tem dificuldade em escrever expressões algébricas, e por isso, não efectua a passagem da representação verbal para a algébrica. Por exemplo, num problema envolvendo uma função afim, apresentado através de um texto e relativo à desvalorização monetária de um computador, consegue identificar as variáveis e a importância do preço inicial para a construção da expressão. Contudo, falta-lhe uma estratégia para organizar a informação e construir, a partir daí, uma expressão:

Investigadora: A expressão tem que relacionar o valor do computador com o número de anos que passam.

Sofia: Sim, tem de incluir estes 200 euros.

[Silêncio]

Sofia: Quero saber o preço.

Investigadora: Podes começar por aí, podemos começar pelo que queremos saber. Isso depende do quê?

Sofia: Depende do *n* [número de anos]…

Investigadora: Hum hum.

Sofia: Depende do *n* e … [Tenta manipular os símbolos]

Investigadora: Sofia, se calhar não consegues fazer a expressão logo à primeira… Pensa em situações mais próximas, para tentar perceber o que é que está a acontecer.

Sofia: 1400 menos… Tem que ser menos?! [Continua a tentar manipular os símbolos]

Investigadora: Imagina que comprámos o computador agora. Daqui a um ano, quanto é que vale?

Sofia: Daqui a 1 ano vai valer menos 200.

Investigadora: Então, organiza-te.

Sofia: 1400 menos 200?!

Geralmente, a aluna consegue passar da representação algébrica para a verbal, pois, através da utilização da informação do contexto, dá sentido aos números e variáveis envolvidos nas expressões. Por exemplo, atribui significado ao valor constante na expressão $n \times c = 3$, que relaciona a distância entre duas cabinas e o número total de cabinas em utilização no teleférico do Parque das Nações. Assim que faço a leitura da expressão, responde de imediato, o que sugere que consegue concentrar-se na situação a partir da informação dada e estabelecer relações com a expressão apresentada:

Investigadora: Pensa na situação Sofia, não olhes só para a fórmula.

[Silêncio]

Investigadora: Multiplicando o número de cabines que estão no circuito pela distância entre cada uma delas…

Sofia: Dá o total disto!! Não é? [Aponta para o circuito]

4.3. Diferenças entre problemas contextualizados e problemas puramente matemáticos

Sofia utiliza as representações verbais com naturalidade, excepto em situações que não lhe são familiares, não existindo diferenças na forma como o faz em problemas contextualizados e em problemas puramente matemáticos. Geralmente, nos dois tipos de problemas, as representações verbais surgem associadas às representações numéricas – por exemplo através de estratégias como o reconhecimento da invariância do produto e da inversão do raciocínio, utilizadas para o cálculo de valores.

A excepção verifica-se no trabalho com os gráficos, em que a aluna usa as representações verbais em problemas contextualizados. O exemplo seguinte mostra como escolhe o gráfico que representa o percurso feito por uma cabina do teleférico do Parque das Nações, com base na representação verbal:

Investigadora: O é que aqui não pode ser, no (B)?

Sofia: Porque, aqui [gráfico (B)], primeiro diminui e depois aumenta. Não é assim, aqui [enunciado] primeiro aumenta e depois diminui.

Investigadora: E o (C)?

Sofia: Por que é que não é o (C)? Porque aqui a distância é constante. Significa que ele esteve parado. E aqui [no enunciado] diz “sem efectuar paragens durante este percurso”.

Sofia privilegia a estratégia da utilização de expressões quando precisa de determinar objectos ou imagens, tanto em situações contextualizadas como em situações puramente matemáticas. Porém, tem dificuldade nas situações puramente matemáticas apresentadas através da notação *f(x)=*.

No que concerne à escrita de expressões, existem algumas diferenças em problemas contextualizados e em problemas puramente matemáticos. Embora não consiga obter expressões em nenhum dos casos, geralmente consegue estabelecer relações numéricas, através de estratégias como a invariância do produto (nos problemas de proporcionalidade inversa) ou a correspondência (nos problemas de proporcionalidade directa). No entanto, num dos problemas puramente matemáticos, não reconhece a invariância do produto. Após ser incentivada a escolher pontos do gráfico e a organizar os valores das suas coordenadas, procura estabelecer uma relação de covariação das duas variáveis, aditiva para os valores de *x* e multiplicativa para os valores de *y*:

Sofia: Eu estou a ver aqui pelos valores que não há…

Investigadora: Mas estás a ver em que valores? Entre os vários valores de *x*?

Sofia: Sim.

Investigadora: Ou estás a ver do x para o *y*?

Sofia: Do *x* para o *y*? Eu não faço isso… Tem que ser deste aqui [abcissa 1] para este aqui em baixo [abcissa 2]. Enquanto o *x* aumenta 1, o *y* passa para metade [ordenadas 40 e 20, respectivamente].

Investigadora: Hum hum.

Sofia: Só que aqui já não é igual. Quer dizer, aqui passou para metade [ordenadas 20 e 10], só que aqui já aumentou 2 [abcissas 2 e 4, respectivamente].

As dificuldades que o exemplo anterior apresenta fazem com que seja necessário distinguir, nos problemas puramente matemáticos, os casos em que Sofia tem conhecimentos anteriores e aqueles em que não tem. A existência de conhecimentos anteriores faz com que consiga responder a várias perguntas, como mostra a sua reacção ao problema que relaciona dimensões de rectângulos com área de $18cm^2$:

Sofia: Procuro logo o resultado! Tento conciliar com as coisas que eu sei. Eu sei que a área do rectângulo é comprimento vezes largura…

Relativamente às representações gráficas, Sofia desenvolve trabalhos diferentes perante os dois tipos de problemas. Nos problemas contextualizados, recorre à análise gráfica global, em funções afim e de proporcionalidade directa. No entanto, abstrai-se facilmente do contexto dos problemas perante funções de proporcionalidade inversa, utilizando como estratégia o reconhecimento da hipérbole como gráfico de proporcionalidade inversa. Também em situações puramente matemáticas, recorre a esta estratégia, sendo esta a semelhança entre os dois tipos de problemas. Nestes problemas, apesar de ser capaz de atribuir significado a um dos parâmetros da expressão de uma função afim, privilegia a análise gráfica pontual.

4.4. Síntese

Perante informação dada verbalmente e em tabelas em situações que lhe são familiares, para calcular valores e para analisar gráficos, Sofia utiliza estratégias como o reconhecimento da invariância do produto e a inversão do raciocínio. Porém, para calcular valores, privilegia a estratégia da utilização da expressão (através da construção e resolução de uma equação ou da substituição do valor da variável independente), considerando que é uma forma de obter a resposta e apresentar uma justificação ao mesmo tempo.

Para interpretar uma expressão, a aluna utiliza a informação do contexto, revelando, porém, dificuldade em explicar cada uma das partes que a constituem. Sente dificuldade quando a expressão envolve a notação $f(x)=$ e confunde a expressão propriamente dita com a sua utilização para calcular valores. Não consegue escrever expressões, embora nalguns casos seja capaz de estabelecer relações numéricas entre variáveis (através do reconhecimento da invariância do produto ou de correspondência entre variáveis).

Perante informação dada graficamente numa situação contextualizada, Sofia recorre à análise global para escolher um gráfico, mas quando se trata de um problema puramente matemático opta pela análise gráfica pontual. Nos dois tipos de problemas, utiliza o reconhecimento da hipérbole como gráfico de proporcionalidade inversa. Não relaciona as expressões algébricas das funções com os respectivos gráficos. Sabe que os parâmetros da expressão de uma função afim têm um significado em termos gráficos, mas esse conhecimento não está consolidado e, por isso, efectua a passagem entre as representações gráfica e algébrica através de representações numéricas e verbais.

Capítulo 5

Ana

Ana tem 15 anos, é simpática, reservada e muito disponível. Vê-se como uma aluna razoável, mas considera-se preguiçosa, pois apenas estuda antes dos testes e ao fim-de-semana, e habitualmente não faz os trabalhos de casa. Relaciona-se bem com os colegas e professores e gosta de estar na escola, que considera importante, por ser uma preparação para o futuro. As suas disciplinas favoritas são Português e Educação Física, mas também gosta de Matemática, que vê como uma disciplina útil para o dia-a-dia. No 3.º ciclo, obteve sempre nível 3 a Matemática.

5.1. Estratégias e dificuldades

Interpretação e utilização de informação verbal e de informação dada em tabelas

Ana interpreta correctamente as situações que lhe são apresentadas verbalmente e através de tabelas, como mostra o exemplo seguinte, que relaciona o número de pessoas transportadas num autocarro e o preço pago por cada uma:

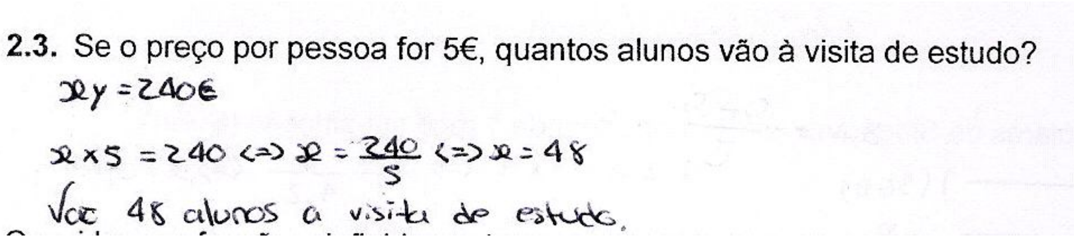
N.º de pessoas transportadas	Preço por pessoa (€)
30	8
40	6
50	4,8
60	4

2.1. O preço total do autocarro é fixo ou varia com o número de pessoas? Justifica a resposta.

Preço é fixo.

30x8 = 40x6 = 50x4,8 = 60x4 = 240€

A aluna reconhece que o produto das duas variáveis é invariante, mas não utiliza essa informação para calcular valores, preferindo recorrer à expressão que construiu, $xy = 240$. Assim, para determinar o número de pessoas que são transportadas, se cada uma pagar 5 €, decide construir e resolver uma equação:


2.3. Se o preço por pessoa for 5€, quantos alunos vão à visita de estudo?

$xy = 240€$

$x \times 5 = 240 \Leftrightarrow x = \frac{240}{5} \Leftrightarrow x = 48$

Vão 48 alunos à visita de estudo.

Quando confrontada com uma resolução diferente, em que a estratégia utilizada é a inversão do raciocínio, tem dificuldade em aceitá-la como correcta:

Ana: A mim dá-me mais jeito fazer assim, já estou habituada.

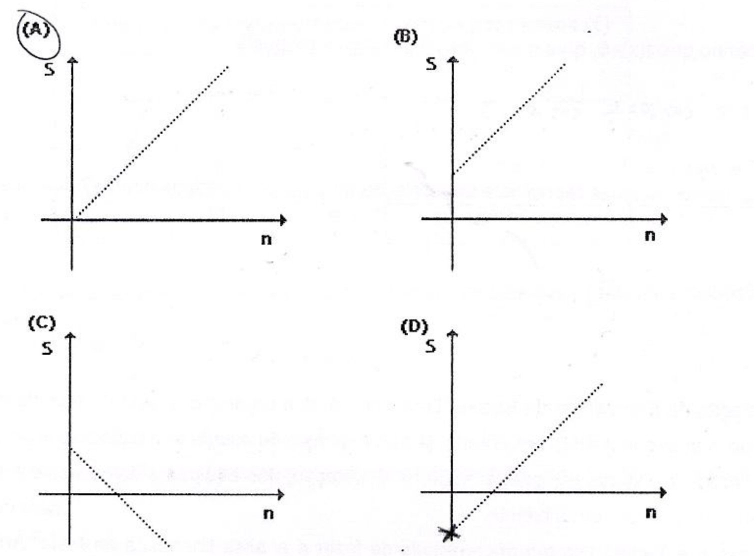
Investigadora: Mas esta operação $[240 \div 5]$… Se um aluno respondesse assim, tinha sentido ou não?

Ana: Só assim?

Investigadora: Sim.

Ana: Para mim dá-me mais jeito fazer assim, com a expressão.

Os erros que, por vezes, Ana comete, não parecem resultar de dificuldades de interpretação da informação, mas sim do facto de não ter presente toda a informação dada. Esta dificuldade é notória na escolha do gráfico que relaciona o saldo monetário e o número de bilhetes vendidos numa festa, em que existe uma despesa inicial de 500 € e cada bilhete custa 2 €. Escolhe o gráfico (A), apresentado a seguir:



Quando questionada, interpreta correctamente a situação, o que demonstra que a escolha não foi ponderada com base em toda a informação disponível:

Ana: Para eles terem mais dinheiro, têm que vender mais bilhetes.

Investigadora: Sim, mas se eles não venderem bilhetes, o saldo deles fica zero?

Ana: Não, fica negativo, porque eles já tiveram que gastar alguma coisa para preparar a festa.

(…)

Investigadora: O que é que este gráfico [(A)] te diz?

Ana: Eles não gastaram dinheiro para fazer a festa. Mesmo que não vendessem nada, ficavam sempre com o mesmo valor.

Este exemplo mostra que a aluna, além de ser capaz de utilizar a informação dada verbalmente para interpretar um gráfico, é ainda capaz de imaginar uma situação que poderia ser representada pelo gráfico (A), que escolheu inicialmente.

Interpretação e utilização de gráficos

Para fazer a escolha de um gráfico que represente uma situação, Ana, geralmente, recorre à análise gráfica pontual. Isso evidencia-se no exemplo seguinte, relativo ao gráfico que relaciona o comprimento e a largura de rectângulos com $18cm^2$ de área:

Investigadora: O que é que estás à procura?

Ana: Então, estou… Vejo o comprimento, vejo a largura, e faço para ver se dá 18.

Ana não associa o gráfico de proporcionalidade inversa à sua expressão geral, como mostra o exemplo seguinte, em que, perante o gráfico da função $xy = 40$, procura a expressão que relaciona as variáveis *x* e *y*:

Investigadora: Não associas este tipo de curva a um tipo de expressão?

Ana: Não.

Também no caso das funções $y = ax + b$, não é capaz de escolher um gráfico com base nos parâmetros da expressão, apesar de saber que isso é possível:

> Ana: Eu lembro-me da stôra explicar que na expressão havia uma que indicava o declive e outra que cortava o eixo dos *yy*. E eu não consigo saber qual é que corta o eixo. Então, depois baralho-me, e depois é ainda mais complicado saber qual é que corresponde.

Em situações contextualizadas, quando tem que escolher um gráfico, Ana precipita-se, parecendo convencida que não consegue lidar com a situação. No entanto, quando é incentivada a pensar no contexto, consegue retirar daí informações importantes. A situação seguinte exemplifica a utilização da informação do contexto, em que consegue escolher o gráfico que traduz a variação da altura da água num recipiente em forma de pirâmide, com o tempo que decorre desde o início do seu enchimento:

> Ana: O (A) e o (C) eu excluo já, porque diz que está totalmente vazio. Não tem altura nem tem tempo, está vazio, começa no zero.
>
> Investigadora: Então tens o (B) e o (D).
>
> Ana: Eu acho que o (B) é se fosse um quadrado, um cubo, neste caso, porque é tudo constante. Ele aqui vai alargando e vai crescendo.
>
> Investigadora: E neste caso, à medida que o tempo passa, a altura da água vai aumentando mais rapidamente ou mais devagar?
>
> Ana: Mais devagar, tem mais para encher.

Interpretação e utilização de expressões

Ana demonstra muita confiança no trabalho com as expressões, considerando que esta é a maneira mais rápida para determinar valores. Assim, quer as expressões sejam dadas, quer seja a própria a construí-las, utiliza-as para calcular os valores pedidos, construindo e resolvendo uma equação (determinando um objecto) ou substituindo o valor da variável independente (determinando uma imagem). As resoluções seguintes dizem respeito à utilização desta estratégia na resolução de um problema sobre a desvalorização do valor de um computador, dada pela expressão $v = 1400 - 200n$:

4.2. Determina, em euros, a desvalorização do computador (diminuição do seu seu valor monetário) dois anos após a sua compra. $v = 1400 - 200 \times 2 \Leftrightarrow v = 1400 - 400 \Leftrightarrow v = 1000$

4.3. Quantos anos são necessários para que o computador perca todo o valor monetário?

$0 = 1400 - 200n \Leftrightarrow 200n = 1400 \Leftrightarrow n = \frac{1400}{200} \Leftrightarrow n = 7$

O seu discurso sugere que resolve as questões referentes ao cálculo de objectos ou imagens de forma 'mecanizada', independentemente dos números envolvidos:

> Ana: Faço logo pela expressão. Tenho a expressão, é mais fácil ir por aí.
>
> (…)
>
> Investigadora: Sempre? Com qualquer número?
>
> Ana: Sim.

Ana é capaz de escolher uma expressão através da substituição das coordenadas dos pontos do gráfico – estratégia de análise pontual da expressão. O exemplo seguinte mostra a utilização desta estratégia num problema em que, dado o gráfico, era pedido que escolhesse uma expressão:

> Ana: Estou a substituir o y e o x [das expressões] pelos números.
>
> Investigadora: Por pontos do gráfico?
>
> Ana: Sim.

Revela dificuldades na interpretação e utilização da notação *f(x)=*. Confunde a imagem e o objecto, acabando num caso por, ao invés de fazer uma substituição para calcular uma imagem, encontrar um novo valor para o objecto:

3.2. Determina g(2).

$g(x) = x - 2 \qquad 2 = x - 2 \Leftrightarrow x = 2 + 2 \Leftrightarrow x = 4$

Questionei-a sobre a resolução anterior, comparando-a com o cálculo de um objecto resolvido pela aluna da mesma forma:

3.3. Sabendo que f(x)=6, qual o valor de x? Justifica a resposta.

$f(x) = 2x$

$6 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3$.

R: x é igual a 3

Ana reforça a ideia de que não consegue atribuir significado a esta notação:

Ana: Repara na diferença entre esta e esta. Aqui diz $f(x) = 6$. Mas aqui não diz que o $g(x) =2$, pois não?

Investigadora: Não.

Ana: Mas tu pensaste da mesma maneira, não foi?

Investigadora: Pois foi. Porque eu não percebo o que é que isto quer dizer, para que é que serve… E depois… E depois…

Pelo contrário, a aluna não revela dificuldade com a notação *y*=, determinando facilmente objectos e imagens a partir de expressões, tal como mostra o preenchimento da tabela seguinte, referente a uma situação puramente matemática, definida pela expressão $y = 2x + 1$:

3.1. Completa a tabela abaixo:

x	*y = 2x + 1*
0	$y = 1$
1	$y = 3$
-0,5	$y = 2(-0,5)+1$ $y = 0$
$\frac{1}{2}$	$y = 2 \times \frac{1}{2} + 1$ $y = 2$ [illegible] 6
3	7

$7 = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x = 7 - 1 \Leftrightarrow x = 3$

Ana demonstra ser capaz de interpretar globalmente uma expressão. Porém, tem dúvidas quando as questões incidem no significado de algumas partes, como mostra o exemplo seguinte, referente ao saldo de uma festa obtido através da expressão $S = 2n - 500$:

Ana: A Associação cobra 2 euros por bilhete. Depois para verem o lucro que tiveram, tiram o dinheiro que gastaram.

Investigadora: Tiram a quê?

Ana: Ao número de bilhetes vendidos.

Investigadora: Ao número de bilhetes vendidos?

Ana: Ao valor dos bilhetes que venderam. Eles cobraram 2 euros por bilhete.

Investigadora: Então o que é este $2n$?

Ana: É o valor dos bilhetes vendidos.

Investigadora: De cada bilhete?

Ana: Não, do total.

Escrita de expressões

A aluna mostra-se confiante na escrita de expressões. A sua estratégia baseia-se na procura de uma constante que lhe permita relacionar as duas variáveis. Perante o gráfico de uma função de proporcionalidade directa, relativo à taxa de câmbio entre o dólar de Singapura e o rand sul-africano, começa por se fixar no ponto de abcissa 1 – estratégia de identificação da unidade – e, a partir daí, analisa as coordenadas dos outros pontos, estabelecendo uma correspondência entre as variáveis. Reconhece a operação que permite relacioná-las, juntamente com o valor da constante de proporcionalidade:

Investigadora: Mas tu usaste o gráfico para fazer isto?

Ana: Usei. Aqui no 4,2… Fui à procura da relação.

Investigadora: Foste à procura como?

Ana: Comecei aqui [indica o valor 1 no eixo das abcissas]. Fui vendo os… A relação que havia entre estes [indica os dois eixos]. Depois vi que era isto. Se a gente multiplicar a base [o valor 4,2]…

Neste exemplo, o gráfico facilitou a escrita da expressão $4{,}2 \times SGD = ZAR$, mas Ana afirma que utilizaria a mesma estratégia se o problema lhe fosse apresentado verbalmente:

Investigadora: Se dissesse assim: “ A cada dólar de Singapura corresponde 4,2 rands sul-africanos”.

Ana: Também conseguia.

(…)

Ana: Então… Se 1 correspondia a 4,2, a partir daí fazia isso… Porque foi o que eu fiz com o gráfico. É o que o gráfico representa. É como se a gente tivesse a explicar o gráfico por palavras nossas, era isso!

No entanto, perante um problema apresentado verbalmente, revela algumas dificuldades na escrita da expressão. Para obter uma expressão que traduza a relação entre duas unidades de comprimento, polegadas e centímetros, começa por identificar a unidade, mas, a seguir, parece abstrair-se do significado da própria expressão:

Investigadora: Esse 1 vezes 2,54 dá-te?

Ana: Dá-me o comprimento.

Investigadora: Hum hum. Em que unidade?

Ana: Em centímetros.

Investigadora: Sim.

Ana: Não pode ficar assim [$1 \times 2{,}54$]?

Investigadora: Isso é uma expressão, Ana?

Ana: Não. Falta um igual a qualquer coisa.

Investigadora: Falta só o igual?

Ana: Falta uma incógnita.

[Escreve $n \times 2{,}54 =$]

Investigadora: O que é que é o *n*?

Ana: É o número de polegadas.

Investigadora: O número de polegadas vezes 2,54 dá-te o quê? Vai ser igual… Puseste ali um igual.

Ana: Sim, vai ser igual aos… Aos… Vai ser igual aos centímetros.

[Escreve $n \times 2{,}54 = x$]

A dificuldade de Ana face à constituição da expressão parece dever-se ao facto de não partir de uma representação que lhe forneça, por observação, outros casos particulares. Enquanto no problema da taxa de câmbio, tinha o gráfico para analisar as coordenadas de outros pontos, neste problema teria que ser a aluna a obtê-las.

Utiliza a estratégia de procurar uma constante não só em situações de proporcionalidade directa, mas também em situações de proporcionalidade inversa. Não parece ter preocupação em distinguir estes dois tipos de relações. Ao contrário, encara-as como semelhantes devido à existência de uma constante, tal como demonstra o exemplo seguinte, relativo ao problema do transporte de pessoas num autocarro:

> Investigadora: Quero que me expliques como chegaste à expressão.
>
> Ana: Foi a partir daqui [problema sobre a taxa de câmbio entre duas moedas]. Eu descobri que o valor entre o número de pessoas transportadas e o preço por pessoa era constante, e a partir daí…

Neste caso, a procura de uma constante leva-a ao reconhecimento da invariância do produto. Geralmente, esta ideia, de existência de uma constante, permite-lhe obter as expressões. Além de não as identificar como sendo proporcionalidade directa ou inversa, não distingue as expressões gerais destes dois tipos de função:

> Ana: Eu… Eu sei que há expressões… E eu confundo as expressões. Depois, aí, as contas já saem todas trocadas porque eu baralho as expressões.

5.2. Relação entre representações

Ana efectua com facilidade a passagem entre as representações algébrica e numérica, privilegiando a estratégia da utilização da expressão para calcular valores. A confiança nas expressões faz com que sinta necessidade de as construir para determinar valores, ainda que compreenda a situação apresentada e que os números e operações envolvidos sejam simples. Assim, em situações em que poderia passar directamente da representação verbal para a numérica, utiliza a representação algébrica como passo intermédio. Por exemplo, no problema sobre rectângulos com área de $18cm^2$, apresentado através de um pequeno texto e de uma tabela, recorre à expressão para calcular o comprimento de um rectângulo com largura de 3,5cm:

> Investigadora: Como é que nós descobrimos este comprimento?
>
> Ana: Usando… Usando a área do rectângulo. $18cm^2$ é igual a 3,5 vezes *x*. Vamos descobrir o *x* [Escreve a equação e resolve-a].

$$A = C \times L$$

$$18 = l \times 3{,}5 \Leftrightarrow l = \frac{10}{3{,}5}$$

Como mostram os exemplos anteriormente apresentados, Ana revela dificuldade na interpretação e utilização da notação *f(x)=*. Nestes casos, a passagem entre as representações algébrica e numérica, nem sempre é bem conseguida, como mostra o exemplo seguinte, referente à utilização da expressão $f(x) = 2x$:

Investigadora: Estás a fazer para que ponto?

Ana: Para este.

Investigadora: E esse será?

Ana: É o 2.

Investigadora: O *x* igual a 2, não é?

Ana: Dá 4! Não pode, não pode ser…

Investigadora: O *x* dá 4?!

Ana: Não, *f* é igual a 4.

A aluna tem alguma dificuldade na passagem da representação algébrica para a verbal. Confunde interpretação da expressão com aplicação, como mostra o exemplo seguinte, relativo à taxa de conversão entre duas moedas, $4{,}2 \times SGD = ZAR$:

Investigadora: (…) Imagina que a expressão era dada e dizia “Explica o significado desta expressão”. O que é que tu dirias desta expressão?

Ana: Que… [silêncio]

Investigadora: O que é que ela representa?

Ana: Representa a taxa. [silêncio] Sim, a taxa… [hesita]

Investigadora: Diz, diz…

Ana: Representa a relação entre o dólar de Singapura e o rand sul-africano.

Investigadora: Então diz-nos…

Ana: A partir do dólar de Singapura, se multiplicarmos por 4,2 dá-nos o rand sul-africano. Se a gente tiver o rand, dividimos por 4,2 e dá-nos o dólar.

Este exemplo mostra que Ana confunde o significado da expressão com a sua utilização para calcular valores, pois centra-se nas operações necessárias para determinar uma imagem ou objecto.

A dificuldade que sente na passagem entre a representação algébrica e verbal evidencia-se também na interpretação da expressão $n \times c = 3$, que relaciona a distância entre duas cabinas e o número total de cabinas em utilização no teleférico do Parque das Nações. Neste caso, a aluna não consegue pensar 'dentro' do contexto da situação, agindo como se a expressão tivesse um significado em si própria. Quando lhe sugiro, para interpretar a expressão, que pense num exemplo, não sabe o que fazer:

Investigadora: Então e se tu pensares num caso concreto, és capaz?

Ana: Num caso concreto, como assim?

Investigadora: Num número de cabines concreto.

[Silêncio]

Investigadora: Sim, porque aí está uma expressão, não é?! Tu podes pensar nisso como um caso específico, ou não?

Ana: Mas eu não sei o que isto quer dizer, isto é que me está a fazer confusão!

Proponho-lhe então que imagine que 10 cabines. Mas, embora seja capaz de determinar a distância entre elas, não consegue concentrar-se no contexto, limitando-se a resolver mentalmente a equação e continuando a não perceber o significado do número 3 na expressão:

Investigadora: Então imagina que são 10 cabines.

Ana: Sim.

Investigadora: Qual é a distância entre elas?

Ana: 3/10.

Investigadora: Por que é que dizes isso?

Ana: Então… Porque o c passa pelo outro membro, fica a dividir.

Investigadora: Estás a resolver a equação?

Ana: Sim.

Ana mostra-se confiante na passagem das representações numéricas e verbais para a representação algébrica, usando a estratégia de procura de uma constante em situações de proporcionalidade directa e inversa. Nas situações de proporcionalidade inversa, utiliza o reconhecimento da invariância do produto; nas situações de proporcionalidade directa começa por identificar a unidade, estabelecendo em seguida uma relação de correspondência entre as variáveis.

Quando a representação verbal não é acompanhada de outra representação, como a gráfica ou numérica, revela dificuldade na passagem para a representação algébrica. Pelo contrário, quando a representação verbal é acompanhada de outra representação, não revela dificuldades, como mostra o exemplo seguinte, relativo a um problema de proporcionalidade inversa, puramente matemático:

> Investigadora: Se eu pedisse para escrever a expressão, o que é que farias?
>
> Ana: Não sei… Não, talvez fosse ver os pontos, a ver se havia alguma relação entre...
>
> Investigadora: Então experimenta lá, a ver se há.
>
> Ana: O 4 vezes 10 dá 40; o 2 vezes 20 dá 40 e o 1 vezes 4 dá 40.
>
> Investigadora: Então?
>
> Ana: É o x vezes y igual a 40.

A partir do gráfico, Ana reconhece a invariância do produto das variáveis x e y e passa para a representação algébrica. Este exemplo mostra, tal como outros descritos em pontos anteriores, que, para passar da representação gráfica para a algébrica, usa a representação numérica como passo intermédio.

A aluna não associa a imagem do gráfico à respectiva expressão, mostrando ter, em alguns casos, concepções erróneas acerca da 'imagem' do gráfico, tal como mostra o exemplo seguinte, relativo à expressão $xy = 240$:

> Investigadora: Podias esboçar um gráfico que traduzisse esta relação.
>
> Ana: Um gráfico que tivesse a ver com a expressão?
>
> Investigadora: Um gráfico que traduzisse esta relação, o número de pessoas transportadas e o preço por pessoa. Que tipo de gráfico seria?
>
> Ana: Seria parecido ao outro, ao da página anterior [função de proporcionalidade directa].

Assim, para associar uma expressão a um gráfico, Ana usa a representação numérica como passo intermédio, tal como mostra o exemplo seguinte, relativo à função $y = 2x + 1$:

Ana: Agora tenho as coordenadas, vou à procura.

(…)

Investigadora: Que pontos é que utilizaste?

Ana: O 0 fica no 1; quando é 1 fica no 3.

5.3. Diferenças entre problemas contextualizados e problemas puramente matemáticos

Ana interpreta correctamente as situações apresentadas verbalmente ou através de tabelas, quer se tratem de problemas puramente matemáticos ou de problemas contextualizados, mas não tem iniciativa para utilizar essa informação através de estratégias numéricas (como o reconhecimento da invariância do produto e a inversão do raciocínio) no cálculo de valores, optando por utilizar a expressão algébrica. Contudo, na escolha de gráficos, atribui importância às representações verbais e numéricas.

Quer em situações contextualizadas, quer em situações puramente matemáticas, Ana privilegia a utilização da expressão para determinar objectos ou imagens, apenas revelando dificuldade nas situações puramente matemáticas apresentadas através da notação *f(x)=*. Além disso, nos dois tipos de problemas, não associa as expressões algébricas das várias funções às respectivas representações gráficas.

Relativamente à escrita de expressões, utiliza a mesma estratégia em situações contextualizadas ou puramente matemáticas. Assim, procura uma constante, tal como mostra o exemplo seguinte, relativo à obtenção da expressão $18cm^2 = c \times l$:

Investigadora: Estavas à procura de uma relação entre larguras e entre comprimentos.

Ana: 18 é a constante.

No que diz respeito às representações gráficas, a aluna segue estratégias diferentes nos dois tipos de problemas. Nos problemas puramente matemáticos, recorre à análise gráfica pontual, utilizando a expressão para determinar as coordenadas de alguns pontos. Já em problemas contextualizados, ainda que demonstre alguma insegurança, utiliza a informação do contexto. Neste caso, comete alguns erros, por não considerar toda a informação disponível.

Por vezes, escolhe um gráfico com base em informação do contexto obtida através da aplicação da expressão. É o que mostra o exemplo seguinte, relativo à desvalorização do valor de um computador. Ana escolhe imediatamente o gráfico em que a perda total do valor do computador se dá ao fim de 7 anos, informação que tinha descoberto na pergunta anterior, através da resolução de uma equação:

Ana: Então, passado 7 anos, o valor é 0.
Investigadora: Deu-te jeito ali aquilo? A descoberta daquele 7?
Ana: Sim.

5.4. Síntese

Sempre que precisa de calcular valores, Ana prefere recorrer à expressão em vez de usar a informação dada verbalmente ou em tabelas. Considera que a expressão é a maneira mais rápida para obter valores e tem alguma dificuldade em aceitar como correcta uma resolução que envolva outra estratégia. Mostra, no entanto, dificuldade com a notação *f(x)=*, confundindo imagem e objecto.

No que diz respeito à interpretação de expressões, a aluna abstrai-se facilmente do contexto e tem dificuldade em interpretar cada uma das partes de uma expressão. Uma vez que não associa directamente as representações algébrica e gráfica, utiliza como passo intermédio a representação numérica para escolher uma expressão, usando a análise pontual. Da mesma forma, para escolher um gráfico numa situação puramente matemática, recorre à análise pontual. Em problemas contextualizados, recorre às representações verbais e usa a estratégia de análise gráfica global, ainda que o faça com insegurança e dificuldade.

A sua estratégia para obter uma expressão consiste na procura de uma constante que lhe permita relacionar as duas variáveis. Embora Ana não distinga claramente situações de proporcionalidade directa e inversa, procura a constante de forma diferente nos dois casos: nas situações de proporcionalidade directa, identifica a unidade e estabelece uma correspondência entre as variáveis; nas situações de proporcionalidade inversa, utiliza o reconhecimento da invariância do produto. Tem dificuldade nos casos em que o problema lhe é apresentado apenas verbalmente.

Capítulo 6

Manuel

Manuel, de 16 anos, é um aluno simpático, tímido e distraído. Considera que estuda pouco e não se esforça por cumprir os trabalhos de casa. Considera a escola importante, por permitir o acesso à vida profissional. Gosta de Matemática, mas a sua disciplina favorita é Inglês. No 3.º ciclo, obteve sempre nível 3 a Matemática, que vê como uma disciplina fácil, desde que o professor explique bem e se estude com regularidade.

6.1. Estratégias e dificuldades

Interpretação e utilização de informação verbal e de informação dada em tabelas

Manuel utiliza a informação dada verbalmente ou em tabelas para resolver algumas das questões propostas. Por exemplo, num problema relativo ao saldo de uma festa em que foram gastos 500€ e cada bilhete custava 2€, utiliza a informação do contexto e a inversão do raciocínio para descobrir o número mínimo de bilhetes que é necessário vender para que não haja prejuízo:

> Manuel: Acho que fiz mentalmente porque, se o preço custava 2 euros, então era 2 vezes…
>
> Investigadora: Sim.
>
> Manuel: 2 a dividir por 500.
>
> Investigadora: 500 a dividir por 2?
>
> Manuel: Sim, sim!

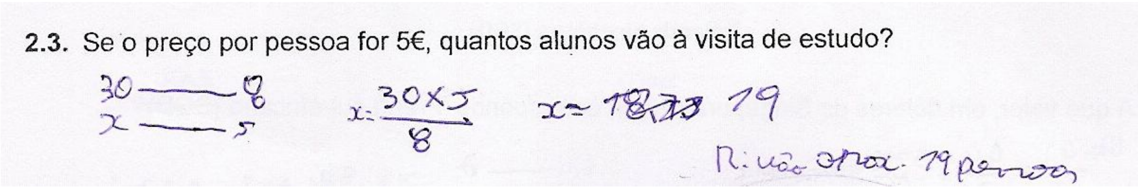
Investigadora: Mas este 500 pensaste por causa de…

Manuel: Então, porque era o prejuízo.

Investigadora: Que tinhas que…?

Manuel: Que… Pronto, para que não haja prejuízo. Então tinha, pelo menos, que chegar a zero. O número mínimo de bilhetes, então, tinha que ser 250.

Também detecta erros de raciocínio a partir da informação dada verbalmente ou em tabelas. Por exemplo, num problema de proporcionalidade inversa sobre o aluguer de um autocarro que custa 240€, utiliza a regra de três simples:



Ao comparar o resultado obtido com os valores da tabela (referentes a número de pessoas e respectivo preço por pessoa), apercebe-se do erro cometido:

Manuel: Essa é que está mal.

Investigadora: Como e que sabes que está mal?

Manuel: Porque entre estes e estes [números de pessoas da tabela] estão… Tem que estar aqui…

Investigadora: Entre as 30 e as 40 pessoas, tem que estar…

Manuel: Não, não tem que estar! Só que não pode ter 19 pessoas a pagarem 5€, só! Porque aqui, se está aqui 50 e só pagam 4€...

Investigadora: Tinha que te dar mais ou menos pessoas?

Manuel: Um número maior que 19 e menor que 50. Porque quanto mais é o número de pessoas, menor é o preço.

Reflectindo novamente sobre esta questão, consegue responder, utilizando o reconhecimento da invariância do produto e a inversão do raciocínio. Porém, confunde as operações multiplicação e divisão, cujo sentido parece não ter bem consolidado:

Manuel: Então, se o preço do autocarro é fixo… É 240 euros que… Por exemplo, se uma pessoa for, é 240 que paga, ela.

Investigadora: Sim, mas aqui o que sabemos é quanto uma pessoa paga.

(...)

Manuel: Faria… [Silêncio] Então, se… 240 a multiplicar… Ou 240 a dividir por 5. Acho que me ia dar o número de pessoas. Era assim? Era?

Interpretação e utilização de gráficos

Manuel sabe que através dos gráficos é possível, muitas vezes, obter respostas, mas reconhece que, habitualmente, não se lembra de os utilizar. Por exemplo, num problema sobre a taxa de câmbio entre duas moedas pedi-lhe para indicar um valor presente no gráfico. No entanto, utiliza a regra de três simples para responder. Quando lhe chamo a atenção, mostra-se capaz de encontrar o valor no gráfico, o que demonstra que a sua opção pela regra tem a ver com os seus hábitos de resolução deste tipo de problemas:

Investigadora: E olha lá para o gráfico.

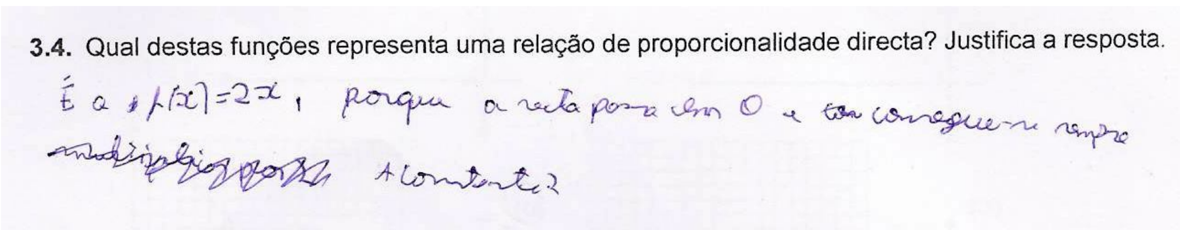
[Silêncio]

Manuel: Está aqui. Vai dar 10. Então… Está certo. Mas pronto…

Investigadora: Tu costumas olhar para o gráfico ou não, para responder a estas coisas?

Manuel: Eu não costumo muito olhar para o gráfico, por acaso…

Reconhece o gráfico de uma função de proporcionalidade directa através do ponto de coordenadas (0,0). O exemplo seguinte mostra a utilização desta estratégia relativamente às funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = x - 2$:


3.4. Qual destas funções representa uma relação de proporcionalidade directa? Justifica a resposta.

É a $f(x)=2x$, porque a recta passa em O e tem consequentemente sempre ~~[illegible]~~ + constante?

Perante outras funções, utiliza outras estratégias. Por exemplo, para escolher o gráfico relativo à expressão $y = x + 1$, recorre à análise gráfica pontual:

Manuel: Eu acho que vejo uma correspondência… Por exemplo, aqui o 3 e o 1.

Investigadora: Estás a ver pontos?

Manuel: Sim. 0,5 mais 1 dá 2.

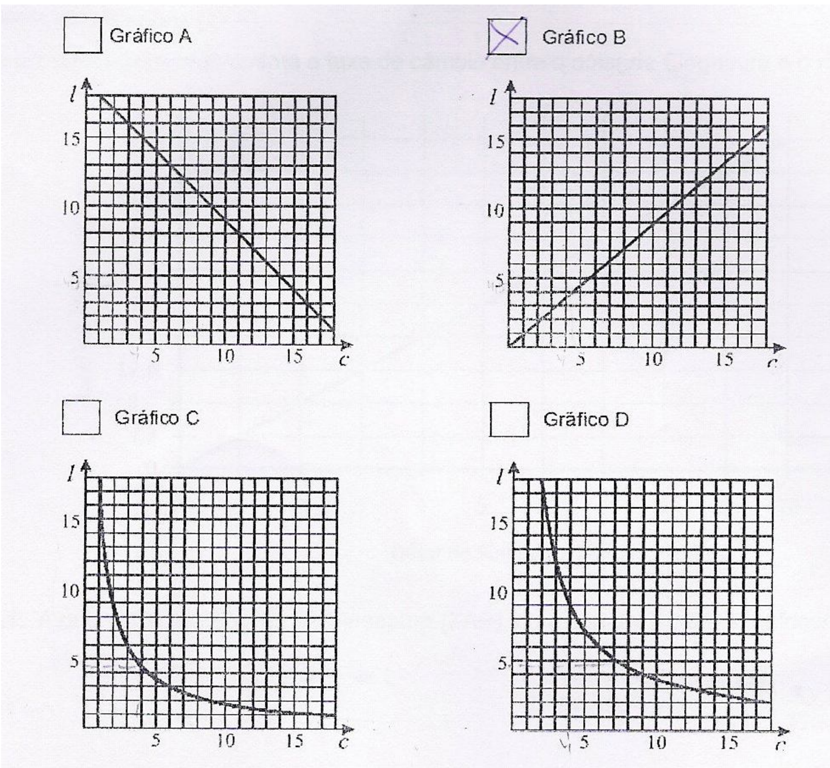
Investigadora: 0,5 mais 1 ou 2 vezes 0,5…?

Manuel: Sim, 2 vezes 0,5. É o que é o 2. É onde eu acho mais…E também aqui no -1… (-1,-1)… -1 vezes 2 mais 1 fica -1 à mesma. Acho que é aquele onde eu vejo mais semelhanças no que eu fiz agora.

Apesar de ter uma estratégia de resolução, Manuel mostra-se pouco confiante na escolha do gráfico, referindo-se-lhe como se fosse a ‘melhor hipótese’, por ser aquela em que encontrou ‘mais correspondências’ entre os valores da tabela (que preencheu anteriormente) e as coordenadas dos pontos.

Manuel: Então... Foi nesta que eu encontrei mais correspondências.

A sua dificuldade na escolha de um gráfico é evidente no problema que relaciona comprimentos e larguras de rectângulos com áreas de 18cm^2, em que escolhe o gráfico de uma função linear:



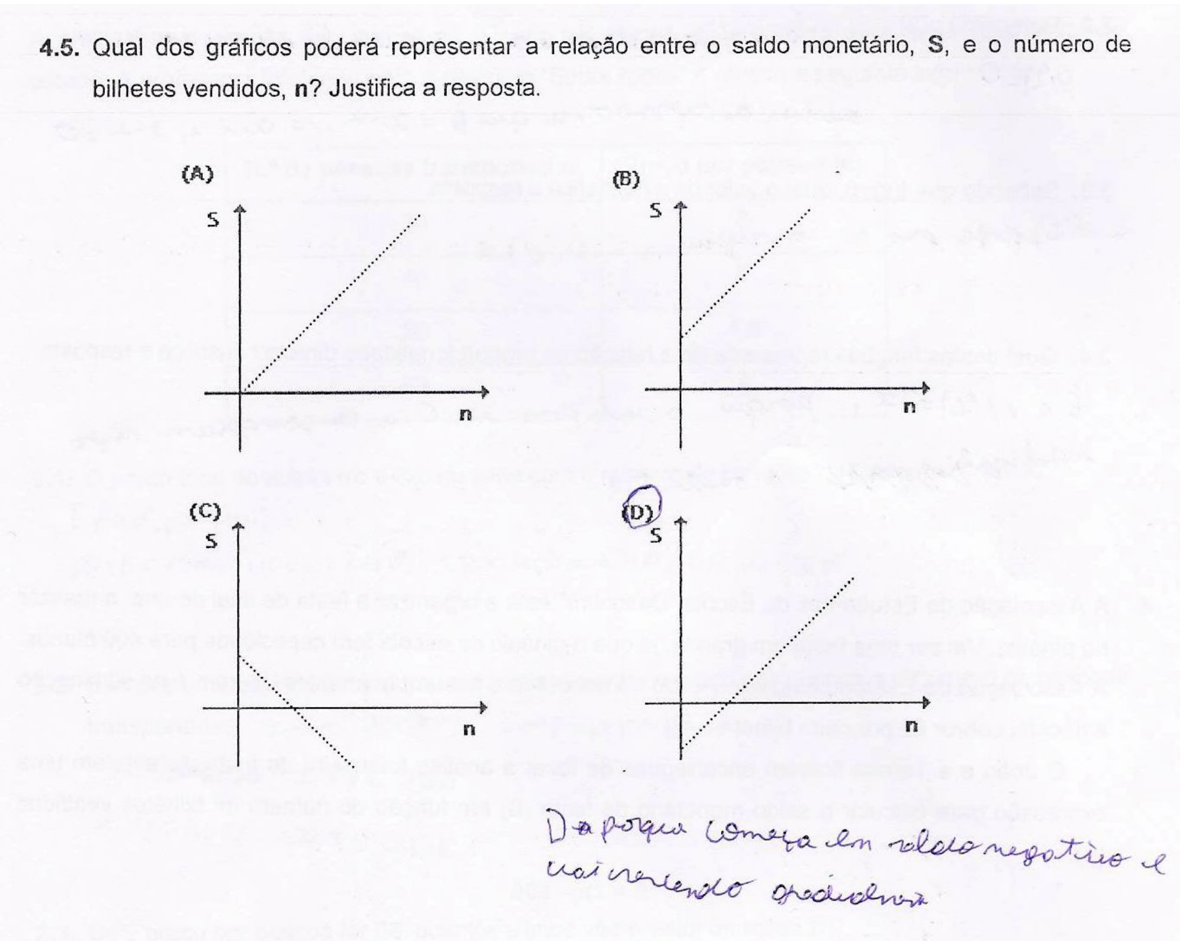
Quando o incentivo a pensar na situação, parece perceber que o gráfico da função que procura é decrescente e que, por isso, a sua escolha não está correcta:

> Manuel: Aqui para estes [gráficos (C) e (D)], quanto maior a largura, menor é o comprimento.

No entanto, não consegue formular uma estratégia para escolher o gráfico. Sugiro-lhe então que utilize a informação que tem na tabela que preencheu, mas encontra aí um novo obstáculo, o facto das escalas dos gráficos não terem todos os números que correspondem às coordenadas dos pontos da tabela que preencheu:

> Investigadora: Podes usar isto [tabela], para escolher o gráfico…
>
> Manuel: Acho que não, porque não tem os valores…

Em situações contextualizadas, Manuel faz a escolha de um gráfico através da análise gráfica global, tal como mostra o exemplo seguinte, relativo ao problema sobre o saldo de uma festa:



Interpretação e utilização de expressões

O aluno revela, por vezes, alguma dificuldade na utilização de expressões algébricas. Após ter construído a expressão $\frac{ZAR}{SGD} = 4{,}2$, não sabe como aplicá-la para calcular valores, recorrendo à regra de três simples:

Investigadora: Tem que se fazer a regra de 3 simples?

Manuel: Sim.

Investigadora Mas, assim, qual é a utilidade da expressão?

Manuel: Porque é a relação entre o valor.

A sua dificuldade parece ter a ver, em parte, com a operação envolvida, pois, após ser incentivado a transformar a expressão numa outra expressão equivalente, $ZAR = 4{,}2 \times SGD$, Manuel reconhece a sua utilidade:

Investigadora: Tu com esta [o quociente]… Se eu te disser "Tenho 3000 ZAR"...

Manuel: Não, não chego lá assim facilmente.

Investigadora: Mas com isto [produto]?

Manuel: Com isto posso logo dizer.

Porém, a sua dificuldade não se resume à operação da expressão, permanecendo na resolução da equação $42 = 4{,}2 \times SGD$:

Manuel: 42, então fazíamos… A raiz quadrada não pode ser...

Investigadora: Põe lá aqui [incentivo-o a escrever]. 42 igual…

Manuel: A SGD vezes 4,2. Então…

Investigadora: Como é que descobres a quantidade de SGD?

Manuel: Então o número tem que ser a dividir.

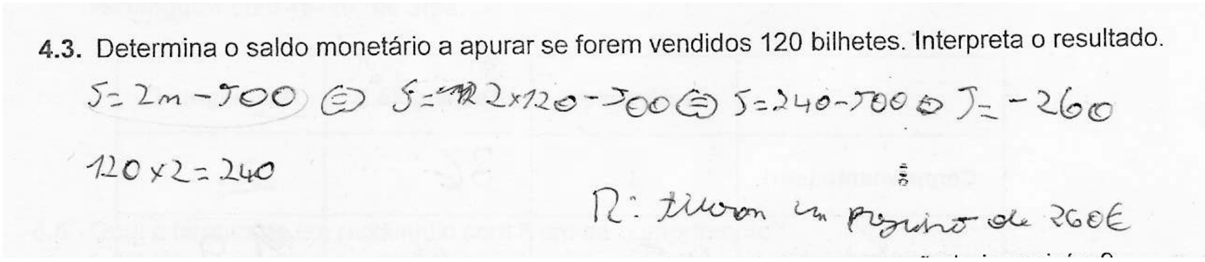
Investigadora: O quê a dividir?

Manuel: O 42. Temos *x* igual a… Ah! Não...!

Neste exemplo, Manuel mostra ter dúvidas na operação a efectuar para calcular um objecto. Além disso, a presença da incógnita no 2.º membro da equação parece contribuir para a sua confusão:

> Manuel: Mudar este número… Então ficava 42 vezes… 42 a dividir… Já não me lembro. Só sei que, se este [4,2] mudar para este [1.º membro], fica a dividir. Mas nunca vi…

Não hesita na utilização da expressão quando precisa de calcular uma imagem, tal como mostra o exemplo seguinte, relativo ao problema sobre o saldo de uma festa:



4.3. Determina o saldo monetário a apurar se forem vendidos 120 bilhetes. Interpreta o resultado.

$S = 2n - 500 \Leftrightarrow S = 2 \times 120 - 500 \Leftrightarrow S = 240 - 500 \Leftrightarrow S = -260$

$120 \times 2 = 240$

R: tiveram um prejuízo de 260€

Manuel mostra-se confuso na utilização e interpretação da notação *g(x)*=, como evidencia o exemplo seguinte, referente à expressão da função $g(x) = x - 2$:

> Investigadora: Tu quando olhas para este tipo de expressão, como é que a interpretas? O que é que isto quer dizer, *g(x)* =?
>
> Manuel: O ponto *g*, em *x*, é igual a $x - 2$.

O aluno mostra-se capaz de interpretar uma expressão globalmente, utilizando a informação do contexto. O exemplo seguinte mostra a utilização desta estratégia na interpretação da expressão $S(n) = 2n - 500$, relativa ao problema da festa:

> Manuel: Porque gastou 500 € na decoração. Então, pronto, vamos dizer que tem saldo negativo.
>
> Investigadora: Sim. Sim, sim.
>
> Manuel: Então ganha 2 euros por cada bilhete vendido. Então, por exemplo, se vender um bilhete, só tem 498 de saldo negativo.

Porém, tem dificuldade em interpretar cada parte da expressão:

Manuel: O $2n$ é o… Vão cobrar 2 euros por cada bilhete.

Investigadora: Hum hum.

Manuel: O número de bilhetes é 2.

Investigadora: É o número ou é o preço?

Manuel: Por isso o $2n$ é o dinheiro… Por bilhete, só.

Escrita de expressões

Numa situação contextualizada em que se apresenta um gráfico de uma função de proporcionalidade directa, Manuel baseia-se nas coordenadas dos pontos do gráfico para obter a expressão. Utiliza a estratégia de reconhecimento da invariância do quociente e, substituindo os números por variáveis, obtém a expressão $\frac{ZAR}{SGD} = 4{,}2$, referente à relação entre o valor do dólar de Singapura (SGD) e o rand sul-africano (RAND):

Investigadora: (…) Representaste a expressão assim. Como é que a construíste?

Manuel: No gráfico... Então, se… Porque... A partir daqui, também [indica os quocientes]…

Investigadora: A partir dos quocientes?

Manuel: Sim, porque 4,2 é o rand sul-africano. A dividir pelo dólar de Singapura dá 4,2. O 6,4... O 8,4 a dividir pelo 2, a dividir pelo dólar de Singapura, dá 4,2, e assim foi… E então podemos fazer… Este a dividir por este dá sempre 4,2.

Consegue também obter a expressão numa situação de proporcionalidade inversa. Para relacionar o número de pessoas transportadas num autocarro e o preço que cada uma paga, escreve $x + y = 240$. Quando questionado, corrige a expressão anterior, utilizando a estratégia de reconhecimento da invariância do produto:

Manuel: Porque… Eu não sei por que é que fiz “mais”… Eu não sei porquê… [Observa a tabela]

Investigadora: Estás a ver nos números da tabela?

Manuel: É que… São 30 pessoas, o preço por pessoa é 8. São 30 vezes 8. Não sei porquê, devo-me ter enganado.

Investigadora: Então o que é que estás a pensar que seria?

Manuel: É na mesma x vezes y igual a 240. Só que aqui… Não sei porquê. Não fazia sentido. Se calhar distraí-me.

Numa situação puramente matemática, Manuel obtém a expressão $x \times y = 40$ a partir do reconhecimento da invariância do produto. No entanto, tem dificuldade em aceitar o seu raciocínio como correcto:

Manuel: Não, é que provavelmente não é nada que…

Investigadora: Diz.

Manuel: 4 vezes 2 dá 40.

Investigadora: Hum hum.

Manuel: E 2 vezes 20 também dá 40.

Investigadora: Por que é que dizes que isso não é nada?

Manuel: Não, não sei…

Já num outro problema puramente matemático, em que se relacionam larguras e comprimentos de rectângulos com uma área fixa, recorre à fórmula conhecida para o cálculo da área do rectângulo:

Investigadora: E esta, como é que tu fizeste esta expressão?

Manuel: Então, isto foi a área [Lê a expressão que escreveu]. A largura vezes comprimento, não, comprimento vezes largura é igual a $18cm^2$.

6.2. Relação entre representações

Manuel não consegue relacionar, de forma directa, as representações algébricas e gráficas de funções. Questionado sobre o significado, em termos gráficos, dos parâmetros de uma função afim, mostra-se confuso:

Investigadora: (…) Eu pergunto-te se, olhando só directamente para a expressão, se encontras, se identificas aqui maneiras de a associar ao gráfico…

Manuel: O y é… Ah, nestes, nestes gráficos… Nestes gráficos, só sei que o y é o que está para cima…

Investigadora: Hum hum.

Manuel: O x está para o lado… Então isso significa que y é igual a $2x$… Agora, mais 1 é que não sei muito bem.

Um outro exemplo é o problema em que o aluno reconhece o gráfico de uma função de proporcionalidade através do ponto de coordenadas (0,0), mas não o associa à sua expressão, $f(x) = 2x$.

Embora não consiga relacionar as expressões e os gráficos directamente, Manuel encontra estratégias para o fazer. Por exemplo, consegue associar as expressões $f(x) = 2x$ e $g(x) = x - 2$ aos respectivos gráficos através de duas estratégias. Na primeira, utiliza as representações numéricas como passo intermédio. Faz a análise pontual das expressões, considerando o ponto (2,0):

Manuel: Acho que é a $x - 2$. Porque, se o y é igual a zero… É o x menos… Por exemplo, aqui… Menos os dois para dar o zero no y.

A outra estratégia prende-se com a noção de declive. O aluno percebe que, por cada deslocamento de uma unidade no eixo das abcissas, há um deslocamento de duas unidades no eixo das ordenadas:

Manuel: Ele está sempre… Assim constante, a fazer $2x$, só que não consigo explicar isso aí… Aqui mais $2x$, para aqui, mais $2x$…

Investigadora: O que queres dizer com “mais $2x$”?

Manuel: Pronto, aqui [eixo das abcissas] é 1, 2, 3, 4… Aqui [eixo das ordenadas] tenho 2 quadradinhos de cada vez.

Num outro problema, relacionando duas unidades de comprimento através de um gráfico – polegadas representadas no eixo das abcissas e centímetros representados no eixo das ordenadas – Manuel não consegue associar directamente as representações algébrica e gráfica, recorrendo às representações numéricas. Assim, identifica no gráfico a unidade (1; 2,54), e procura a expressão que lhe corresponde:

Manuel: Eu acho que é a (A) [$p = 2{,}54c$]. Uma polegada é 2,54 cm. É esta.

Investigadora: Viste isso… Baseaste-te em quê?

Manuel: Nisso… 2,54 é uma polegada. Então podemos usar esse sempre.

Procura o valor 2,54 junto à incógnita que representa os centímetros, como se não existisse uma operação na expressão e as variáveis não servissem para representar os números mas sim as palavras "polegada" e "centímetro". Quando lhe peço para verificar a sua escolha, utiliza a estratégia de correspondência entre as variáveis:

Investigadora: Como é que podes verificar? Parece-te que é esse, mas como é que podes ter a certeza?

Manuel: 2,54 dá… Dá uma polegada.

Investigadora: Sim.

Manuel: E depois vamos ali ao 2.

Investigadora: 2 quê?

Manuel: Duas polegadas. E intersecta aqui no 5,8, que é o dobro.

Investigadora: O dobro de 2,54.

Manuel: E vai-se aqui ao 3, e é 7,52, que é 2,54 vezes 3.

Apesar de estabelecer correctamente a correspondência, ao passar para a linguagem simbólica, Manuel troca as variáveis.

Os exemplos de escrita de expressões anteriormente apresentados evidenciam as capacidades do aluno ao nível da passagem da representação numérica para a representação algébrica, através de estratégias como o reconhecimento da invariância do quociente (no caso de funções de proporcionalidade directa) ou o reconhecimento da invariância do produto (no caso de funções de proporcionalidade inversa). Relativamente à transição da representação algébrica para a representação numérica, a utilização da expressão é uma das estratégias que utiliza para calcular valores, embora tenha, por vezes, alguma dificuldade no cálculo de objectos.

Manuel é capaz de desenvolver algum trabalho relativamente à passagem da representação verbal para a algébrica. Tem alguma dificuldade, que parece resultar da forma precipitada como procura escrever a expressão, como mostra o exemplo seguinte, relativo a um problema sobre a desvalorização de um computador:

Manuel: É valor igual a *n* vezes 200.

Investigadora: Não te esqueças que se está a pedir o valor à medida que os anos vão passando. Vê lá o que estás a dizer… Que o valor é igual a *n* vezes 200, não é?

Manuel: Não! Ah!

Investigadora: Estavas a dizer isso…

Manuel: Não, agora quer dizer… [silêncio] V é igual a V menos... Entre parênteses… [Pensa alto] Ah… Não. [Escreve $V = V - (n \times 200)$]

Investigadora: Estás a dizer que o valor é o valor menos o *n* vezes 200. Esse *n* vezes 200, o que é que significa para ti?

Manuel: Que é os anos vezes os 200 euros que desvaloriza em cada ano.

Investigadora: Hum hum. Então, se for 1 ano são 200, se forem 2 anos… Pronto … E a outra parte?

Manuel: A outra parte fica… O original…

Investigadora: E quanto é que é o original?

Manuel: 1400. Ah! Posso pôr logo! [Escreve $V = 1400 - (n \times 200)$]

Revela também alguma dificuldade na passagem entre a representação algébrica e verbal, nem sempre conseguindo interpretar correctamente as expressões. Os exemplos apresentados anteriormente mostram que, ainda que consiga fazer uma interpretação global, tem dificuldade em explicar cada uma das suas partes. O exemplo seguinte, referente à expressão $n \times c = 3$, que relaciona a distância entre duas cabinas e o número total de cabinas em utilização no teleférico do Parque das Nações, evidencia essa dificuldade:

Investigadora: Já me disseste que a distância entre as cabines varia com o número de cabines.

Manuel: Sim.

Investigadora: E o que é que se mantém, o que é que é sempre igual?

Manuel: Sempre igual… Acho que não há… Não há nada sempre igual.

Ainda que consiga, com base na informação do contexto, atribuir significado às variáveis, não consegue perceber o significado do número 3. Quando lhe proponho que imagine que 10 cabines, determina a distância entre elas através da resolução de uma equação, não conseguindo concentrar-se no contexto:

Investigadora: Vamos pensar num caso concreto. Se forem 10 cabines.

Manuel: Se forem 10 cabines…

Investigadora: Qual vai ser a distância entre elas?

Manuel: Então n vezes 10 igual a 3.

Investigadora: Estás a resolver a equação mentalmente?

Manuel: Sim. Teria de ser… 0,3.

6.3. Diferenças entre problemas contextualizados e problemas puramente matemáticos

Em problemas contextualizados, Manuel utiliza as representações verbais para resolver algumas das questões propostas, associando-as às representações numéricas, tal como mostram os exemplos descritos em secções anteriores. Também em problemas puramente matemáticos utiliza as representações verbais e numéricas, como mostra o problema sobre rectângulos com área de $18cm^2$.

> Manuel: Se souber o comprimento… Imaginemos que era 10, e tinha aqui 18. Então, tinha que pôr… Era a dividir, 18 a dividir por 10, que dava 0,8.

	Rectângulo A	Rectângulo B	Rectângulo C
Comprimento (cm)	4	36	2
Largura (cm)	4,5	0,5	9

Os exemplos descritos em secções anteriores, no que diz respeito às representações gráficas, mostram que Manuel tem desempenhos diferentes nos problemas em situações contextualizadas e em situações matemáticas. Em situações contextualizadas recorre à análise gráfica global, como mostra o exemplo seguinte, relativo ao circuito efectuado por uma cabina do teleférico do Parque das Nações. Neste caso, consegue retirar informações importantes do contexto para fazer a sua escolha:

Manuel: O (C) e o (D) não podem ser.

Investigadora: Porquê?

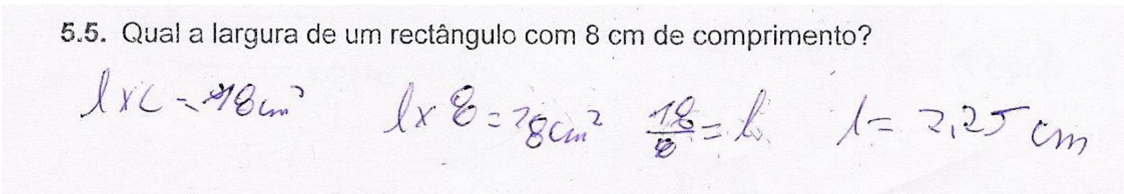
Manuel: Parece que… Ficou, parou…

Investigadora: Hum hum.

Manuel: Durante algum tempo, e depois continuou outra vez. E aqui disse “sem efectuar paragens”.

Em situações puramente matemáticas, revela pouca confiança no trabalho com representações gráficas. Apesar de ser capaz de efectuar a análise gráfica pontual, não recorre sempre a esta estratégia, sendo que, muitas vezes, nem sequer tem uma estratégia para iniciar o trabalho.

No que concerne às representações algébricas, os exemplos descritos anteriormente mostram como utiliza a expressão para calcular valores em problemas contextualizados. Também em problemas puramente matemáticos esta é uma das estratégias a que recorre quando precisa de calcular valores, como mostra o exemplo seguinte, referente ao problema dos rectângulos:


5.5. Qual a largura de um rectângulo com 8 cm de comprimento?

$l \times C = 18 cm^2$ $l \times 8 = 18 cm^2$ $\frac{18}{8} = l$ $l = 2,25$ cm

Nos problemas em situações contextualizadas e nos problemas puramente matemáticos, Manuel utiliza as mesmas estratégias para obter uma expressão – reconhecimento da invariância do produto ou do quociente, consoante se trate de uma situação de proporcionalidade inversa ou directa. Contudo, num problema puramente matemático utiliza a fórmula de cálculo da área de um rectângulo. A outra diferença entre os dois tipos de problemas reside na dificuldade do aluno em aceitar o seu raciocínio como correcto nos problemas puramente matemáticos.

6.4. Síntese

Perante informação dada verbalmente e em tabelas, Manuel utiliza o reconhecimento da invariância do produto, a inversão do raciocínio e a informação do contexto para calcular valores, revelando alguma dificuldade nas operações de multiplicação e divisão. Esta dificuldade surge também em algumas situações em que recorre à expressão algébrica para calcular valores, não sabendo aplicar a expressão quando a operação envolvida é uma divisão, ou hesitando na operação a efectuar quando precisa de calcular um objecto. Usa várias estratégias para calcular valores de modo a fazer face a estas dificuldades.

A sua dificuldade no trabalho com expressões algébricas é também evidente na utilização da notação *f(x)=* e na interpretação de expressões. Manuel mostra-se capaz de interpretar uma expressão globalmente, através da utilização da informação do contexto, mas revela dificuldade na interpretação de cada uma das suas partes. Mostra, no entanto, capacidade na escrita de expressões, pois consegue escrevê-las a partir do reconhecimento da invariância do quociente ou do produto, em situações de proporcionalidade directa ou inversa. Em contrapartida, mostra dificuldade em aceitar o seu raciocínio como correcto num problema puramente matemático.

Manuel não relaciona as expressões algébricas e os gráficos das funções. Desta forma, apesar de reconhecer o gráfico de uma função de proporcionalidade directa através do ponto de coordenadas (0,0), não consegue obter directamente a sua expressão algébrica. Perante informação dada graficamente, recorre a estratégias diferentes, consoante se trate de problemas contextualizados ou puramente matemáticos. Em problemas contextualizados recorre à análise global, e em problemas puramente matemáticos utiliza a análise gráfica pontual. Nestes últimos mostra-se pouco confiante, e em algumas situações não consegue formular uma estratégia para iniciar a resolução do problema.

Capítulo 7

Cristina

Cristina, de 15 anos, é divertida, simpática e prestável. Vê-se como uma aluna razoável, mas não gosta muito de estudar, o que só faz antes dos testes. Considera a escola fundamental para o seu futuro e afirma que a Matemática é necessária nas mais diversas situações. Gosta desta disciplina, mas a sua favorita é Biologia e Geologia. No 7.º e 8.º ano obteve nível 4 a Matemática, e no 9.º ano obteve nível 3.

7.1. Estratégias e dificuldades

Interpretação e utilização de informação verbal e de informação dada em tabelas

A partir da informação sobre uma função dada verbalmente, Cristina utiliza o reconhecimento da invariância do produto e a inversão do raciocínio para calcular valores. O exemplo seguinte mostra a utilização destas estratégias num problema que relaciona comprimentos e larguras de rectângulos com área de $18cm^2$:

	Rectângulo A	Rectângulo B	Rectângulo C
Comprimento (cm)	4	36	6
Largura (cm)	4,5	0,5	3

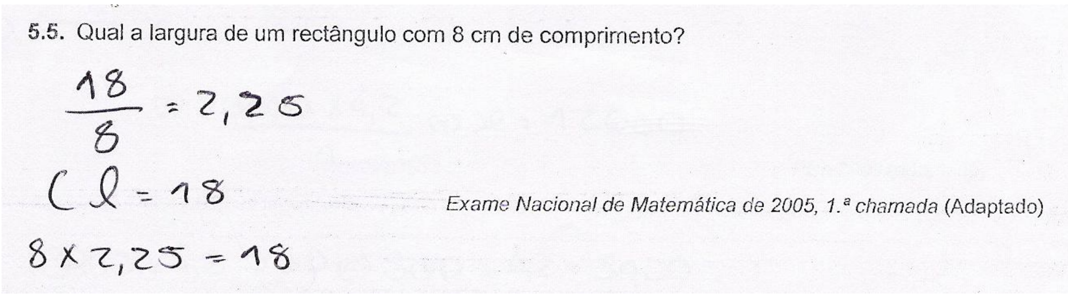
Cristina: Isto tinha que dar 18… Pela proporcionalidade…

(…)

Investigadora: Mas como é que tu descobriste este 4,5?

Cristina: Fiz 18… Devo ter feito 18 a dividir por 4.

No mesmo problema, após calcular um valor através da inversão do raciocínio, a aluna utiliza a expressão algébrica para confirmar o valor obtido, substituindo-o na expressão. Isto sugere que tem uma maior confiança no uso da expressão do que nas outras estratégias de cálculo:



Num problema puramente matemático, Cristina baseia-se na informação verbal para elaborar uma estratégia para escolher uma expressão. Começa por indicar as coordenadas de alguns pontos, mas não é capaz de formular uma estratégia para continuar o trabalho até fazer a leitura da expressão. No entanto, após a leitura da expressão, consegue fazer a sua análise pontual:

Investigadora: (…) Ao tirares as coordenadas, não vês aqui como é que podes utilizar a expressão para um ponto?

[Silêncio]

Investigadora: Por exemplo, a primeira, o que é que aí diz? Como é que lês isso?

Cristina: Então… que o produto do *x* e do *y* tem que ser 20.

[Observa as expressões e as coordenadas dos pontos]

Cristina: Só que não dá!

Investigadora: Estás a ver com o quê? Como é que estás a ver que não dá?

Cristina: Com os pontos.

Investigadora: Por exemplo?

Cristina: Por exemplo… 40… 1 vezes 40 [O gráfico contém o ponto (1,20)].

Cristina utiliza a informação dada em tabelas para resolver as questões propostas. Por exemplo, num problema que relaciona o número de pessoas transportadas num autocarro e o preço que cada uma paga, pondera, com base na informação da tabela, o resultado que poderia obter se cada pessoa pagasse 5€:

Cristina: Nós temos aqui a tabela. Não fazia sentido, por 240 euros, dar 12 pessoas.

Investigadora: Porque cada uma pagava…

Cristina: 5.

Investigadora: Não fazia sentido porquê?

Cristina: Então é assim…Quantas mais pessoas forem, menos pagam.

(…)

Cristina: Se vão 60 pessoas e pagam 4, ou 6 para 40, o 5… O 5 devia…

Investigadora: Estar entre… É isso que estás a pensar?

Cristina: O 50 e o 40!

Interpretação e utilização de gráficos

Em problemas puramente matemáticos, quando precisa de escolher um gráfico, Cristina faz uma análise gráfica pontual. O exemplo seguinte, referente ao problema dos rectângulos com área de 18cm^2, mostra como usa esta estratégia em conjunto com o reconhecimento da hipérbole como gráfico de proporcionalidade inversa:

Cristina: Eu acho que tinha que ser com esta [indica uma das hipérboles]. Isto tem nome…

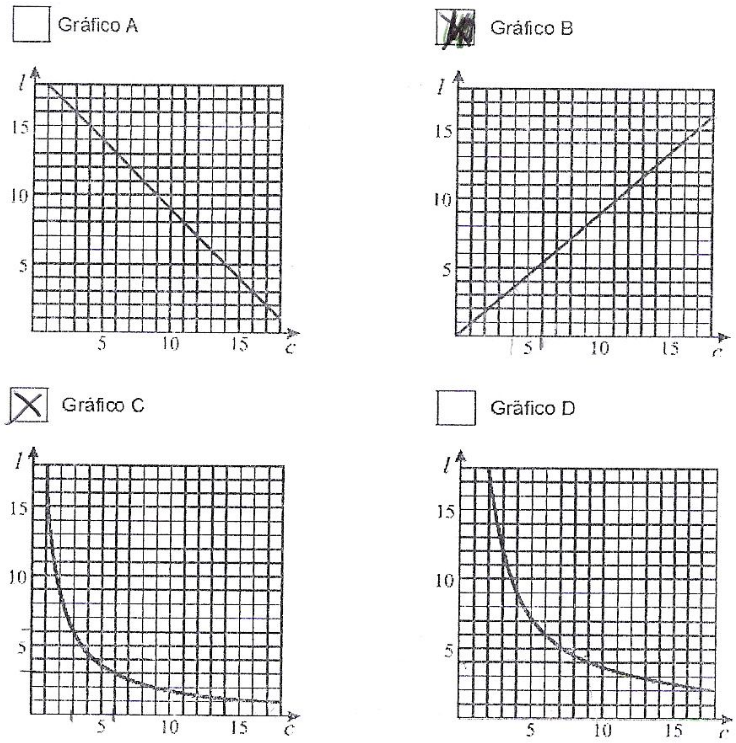
Investigadora: Com essa forma, é isso?

Cristina: Acho que sim.

Investigadora: Mas também havia aqui este [a outra hipérbole].

Cristina: Pois. E depois foi essa coisa dos pontos, se correspondia ou não.

No entanto, a aluna não tem consolidada a associação entre esta função e a respectiva representação gráfica, como evidencia a sua resposta no teste escrito, em que começa por assinalar o gráfico de uma função crescente:



Apenas exclui o gráfico (B) quando encontra pontos em que não se verifica a invariância do produto:

Cristina: Só que depois nos outros já não era constante, o resultado. Porque depois vínhamos aqui ao 6 e já não ia dar 3.

Investigadora: Foi só pelos pontos?

Cristina: Sim.

Investigadora: Mas se os pontos dessem certo, tu dirias que este gráfico podia servir para esta situação?

[Silêncio]

Para escolher um gráfico numa situação contextualizada, Cristina faz uma análise gráfica global. Baseia-se na informação dada sobre o contexto, comparando-a com características gráficas que se destacam. Por exemplo, num problema sobre um percurso com uma parte a andar e outra a correr, interpreta correctamente o gráfico que relaciona o tempo e a distância percorrida:

Cristina: Para mim é: aqui ela corre.

Investigadora: No princípio corre. Porquê?

Cristina: Porque a recta está assim inclinada.

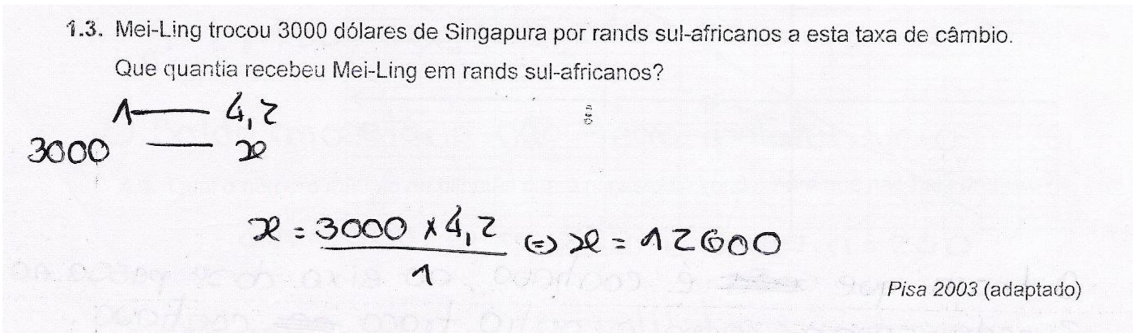
Investigadora: Está inclinada? A outra também está inclinada, não é?

Cristina: Mas não está tanto.

Investigadora: Então tu entendes aqui…

Cristina: Ela aqui demorou mais tempo.

Cristina utiliza a informação dada graficamente para calcular valores da função. É o caso do problema sobre a taxa de câmbio de duas moedas, em que constrói a regra de três simples a partir das coordenadas de um ponto do gráfico:


1.3. Mei-Ling trocou 3000 dólares de Singapura por rands sul-africanos a esta taxa de câmbio.
Que quantia recebeu Mei-Ling em rands sul-africanos?

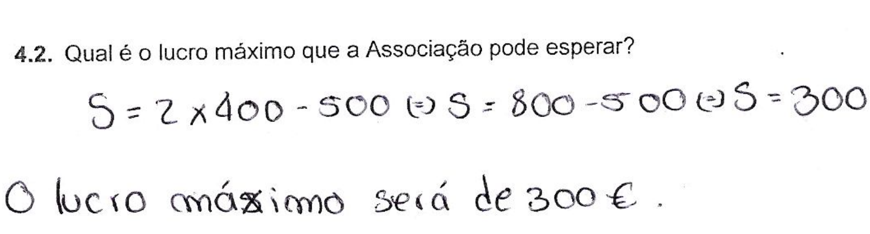
1 — 4,2
3000 — x

$x = \frac{3000 \times 4{,}2}{1} \Leftrightarrow x = 12600$

Pisa 2003 (adaptado)

Interpretação e utilização de expressões

Cristina privilegia a utilização da expressão para determinar objectos e imagens. Por exemplo, num problema relativo ao saldo monetário de uma festa, utiliza a expressão $S = 2n - 500$ para determinar o lucro máximo, atingido quando se vendem 400 bilhetes:


4.2. Qual é o lucro máximo que a Associação pode esperar?

$S = 2 \times 400 - 500 \Leftrightarrow S = 800 - 500 \Leftrightarrow S = 300$

O lucro máximo será de 300 €.

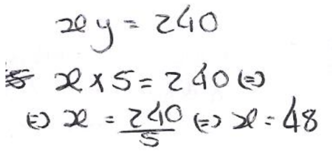
Por vezes, utiliza a expressão em conjunto com a informação verbal. Assim, para determinar o número mínimo de bilhetes que é necessário vender para que não haja prejuízo, considera a equação $2n = 500$:

Cristina: O resultado aqui no produto deste [2*n*] vai dar este [500], para que não haja prejuízo.

Investigadora: Por isso é que igualaste isto?

Cristina: Pois. Por exemplo, se eu puser aqui [na expressão inicial] 250, 2 vezes 250 igual a 500. Vai dar zero.

Mesmo quando compreende a operação envolvida e trabalha com valores de pequena ordem de grandeza, prefere recorrer à expressão, como mostra o exemplo seguinte, relativo ao número de pessoas transportadas num autocarro, sabendo que cada uma paga 5€ e que o preço total é 240€:



Cristina: Para mim, é mais fácil fazer pela expressão.

(…)

Cristina: Porque podia fazer logo 240 a dividir por 5.

Investigadora: Sim.

Cristina: Mas eu gosto de fazer pela expressão. Tenho mais confiança que vá dar certo, mesmo que a expressão seja feita por mim.

Revela dificuldade na interpretação e utilização da expressão $\frac{ZAR}{SGD} = 4{,}2$, que traduz a relação entre o rand sul-africano (SGD) e o dólar de Singapura (SGD). A sua dificuldade parece relacionar-se com a operação envolvida, pois perante a expressão $ZAR = 4{,}2 \times SGD$ afirma que seria capaz de a utilizar, reconhecendo que é equivalente à anterior:

Investigadora: E assim [expressão $ZAR = 4{,}2 \times SGD$]?

Cristina: Assim já!

Investigadora: E qual a diferença entre este e este [$\frac{ZAR}{SGD} = 4{,}2$ e $ZAR = 4{,}2 \times SGD$]?

Cristina: Este [produto] é este [quociente], só que no passo a seguir.

A dificuldade que Cristina sente na interpretação de expressões é evidente noutras situações. Por exemplo, não compreende o significado do número 3 na expressão $n \times c = 3$, que relaciona a distância entre duas cabinas e o número total de cabinas em utilização no teleférico do Parque das Nações. Mesmo quando lhe sugiro que imagine a situação, pensando num número concreto de cabines, não consegue descobrir a distância entre elas, continuando a não atribuir significado ao número 3.

Investigadora: Então vamos imaginar duas cabines. A que distância ficam?

Cristina: Não sei.

A aluna sente dificuldade com a notação *f(x)=*, não sendo capaz de utilizar as expressões $f(x) = 2x$ e $g(x) = x - 2$ para determinar objectos ou imagens:

Professora: E depois não sabias pegar nisto [calcular *g*(2)]?

Cristina: Não, não entendo nada disto.

Professora: Nem sabes como é que isto se lê? Como é que lerias isto?

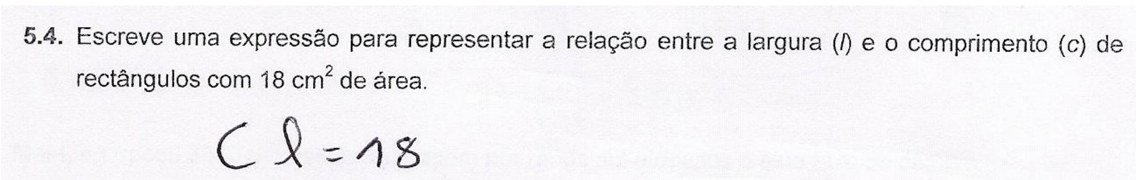
Cristina: Não sei.

Professora: *g* de 2 não te diria nada?

Cristina: Não.

Escrita de expressões

Cristina consegue obter expressões em problemas de proporcionalidade inversa, utilizando o reconhecimento da invariância do produto, como mostra o exemplo seguinte, referente ao problema dos rectângulos com área de 18cm^2:


5.4. Escreve uma expressão para representar a relação entre a largura (*l*) e o comprimento (*c*) de rectângulos com 18 cm^2 de área.

$c\,l = 18$

Cristina: Primeiro fiz esta [preenchimento da tabela]. Fiz estes todos a multiplicar como está aqui, e deram todos 18.

Em situações representadas por funções de proporcionalidade directa ou afins, revela dificuldade na escrita de expressões, apesar de conseguir estabelecer algumas relações numéricas. Por exemplo, num problema de proporcionalidade directa referente à taxa de câmbio entre duas moedas, utiliza a estratégia de reconhecimento da invariância do quociente:

> Cristina: Não é sempre o dobro, é… Vai dar sempre a mesma coisa… Só que depois transformar isso…
>
> Investigadora: Mas como é que é isso de "dá sempre a mesma coisa"? Dá lá um exemplo.
>
> Cristina: Então, 4,2 a dividir por 1 vai dar 4,2; 8,4 a dividir por 2 vai dar 4,2.
>
> Investigadora: E a partir daí?
>
> Cristina: A partir daí já não consigo fazer a expressão.

No entanto, não consegue obter a expressão a partir daí, o que indicia não conhecer a forma da expressão geral de uma função de proporcionalidade directa. Questionada sobre as variáveis do problema, identifica-as correctamente, mas não tem iniciativa de utilizar letras para substituir os valores numéricos.

A dificuldade que sente perante a função de proporcionalidade directa e a função afim é notória numa outra situação, relativa ao ordenado de um vendedor de telemóveis que recebe uma quantia fixa de 500€, mais 34,5€ por cada telemóvel vendido. Cristina identifica rapidamente as constantes e reconhece a existência de um número variável de telemóveis. Contudo, precisa de incentivo para substituir os números por uma variável e pensar na variável dependente:

> Cristina: Então, 500 mais 34,5… Mas tem que ter uma letra.
>
> Investigadora: Para dar o quê, essa letra? Para fazer o quê?
>
> Cristina: Então, 2 telemóveis…
>
> Investigadora: Sim.
>
> Cristina: Faço assim… [Escreve $500 + 34{,}5 \times 2$]
>
> Investigadora: Sim, sim.
>
> Cristina: Mas tem que… Tem que ser uma letra…
>
> Investigadora: 500 mais 34,5 vezes 2. Isso é se vender 2. E se vender 3?
>
> Cristina: Muda o 2.

(…)

Investigadora: Então, tu própria estás a dizer o que é que varia, estás a fazer a substituição dos números.

Cristina: *a* seria… O número dos telemóveis! [Escreve $500 + 34{,}5 \times a$]

Investigadora: Isso tudo [expressão anterior] vai dar o quê?

Cristina: Pois, vai dar outra… Também não sabemos qual é.

7.2. Relação entre representações

Cristina não consegue relacionar as representações algébricas e gráficas das várias funções. Assim, quando as funções são dadas graficamente, tem dificuldade em escrever ou escolher uma expressão, como mostra o exemplo seguinte, referente a um problema de proporcionalidade inversa:

Cristina: Mas é que, por exemplo, se eu tiver assim uma expressão, não sei o que fazer com as letras.

Investigadora: Não sabes para esta pergunta?

Cristina: Não, mesmo em geral. Se me derem o gráfico e fizerem isto, eu não sei... Eu não sei…

Neste exemplo, a aluna tem a ideia de utilizar as representações numéricas como passo intermédio, mas falta-lhe uma estratégia para continuar o raciocínio a partir dos pontos do gráfico:

Cristina: Estou a olhar para estes pontinhos.

Investigadora: Para aqueles que estão aí assinalados?

Cristina: Hum hum.

(…)

Cristina: Agora aplicar isto aqui [expressões]…

Quando é dada uma expressão algébrica, também não consegue associá-la directamente ao seu gráfico. Esta dificuldade, a par da incompreensão da notação *f(x)=*, leva-a a formular estratégias, partindo de concepções erróneas. Por exemplo, perante a função $f(x) = 2x$, associa $2x$ ao ponto de abcissa 2 e, por isso, escolhe o gráfico que intersecta o eixo das abcissas em $x = 2$:

Investigadora: Tu estás certa que esta era $f(x) = 2x$?

Cristina: Sim.

Investigadora: Porquê?

Cristina: Porque passa aqui no 2 [ponto de intersecção do gráfico com o eixo das abcissas]. É por isso que está positivo aqui no *x* dois.

A dificuldade que sente em associar a expressão algébrica de uma função ao seu gráfico evidencia-se num outro problema, em que Cristina tem de escolher o gráfico associado à expressão $y = 2x + 1$. Faz um raciocínio semelhante ao anterior, mas, não existindo aqui um gráfico que intersecte o eixo das abcissas em $x = 2$, sugere tratar-se do único gráfico em que o ponto de abcissa 2 é visível na imagem:

Cristina: Pois, eu pensava que, por ter aqui o 2, tinha que estar relacionado com isto do *x*. Então fui procurar o 2.

A aluna consegue obter expressões de proporcionalidade inversa a partir de representações numéricas e verbais, utilizando o reconhecimento da invariância do produto. Revela dificuldade em fazer esta passagem no caso das funções afim e de proporcionalidade directa, como evidenciam os exemplos descritos em secções anteriores. Perante a função afim, tem dificuldade em organizar a informação. No caso da função de proporcionalidade directa, determina a constante de proporcionalidade a partir do reconhecimento da invariância do quociente, mas não consegue obter a expressão algébrica:

Investigadora: O que é que caracteriza uma situação de proporcionalidade directa?

Cristina: Eu acho que é a divisão que é constante.

Investigadora: A divisão do quê?

Cristina: Dos números do *x* e do *y*.

(…)

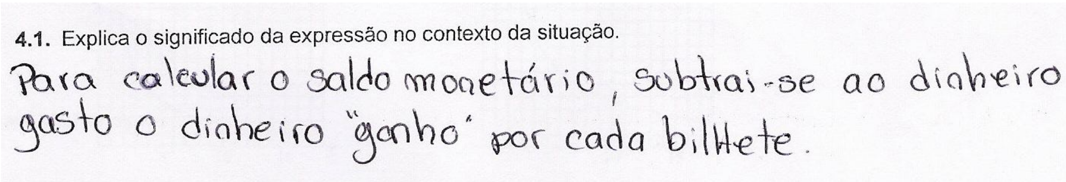
Investigadora: E depois como é que fica a expressão?

[Silêncio]

Investigadora: Basta ter essa constante para fazer uma expressão de proporcionalidade directa?

[Silêncio]

Cristina revela alguma dificuldade na passagem da representação algébrica para a verbal, nem sempre conseguindo atribuir significado às expressões. Outras vezes, a sua interpretação não corresponde exactamente à expressão que é dada, como mostra a sua resposta no problema sobre o saldo de uma festa, calculado através da expressão $S = 2n - 500$. Quando se explica, a aluna inverte a despesa e o lucro:



4.1. Explica o significado da expressão no contexto da situação.

Para calcular o saldo monetário, subtrai-se ao dinheiro gasto o dinheiro "ganho" por cada billhete.

Cristina: Gastaram 500. Para depois verem a situação do saldo…

Investigadora: Sim.

Cristina: Tinham que subtrair ao dinheiro gasto o dinheiro que tinham gasto na festa para saberem em que situação é que estava o saldo.

Investigadora: E quanto é o dinheiro que eles ganharam na festa? Que parte da expressão é que é isso?

Cristina: É 2n.

Este exemplo evidencia a dificuldade da aluna em exprimir-se verbalmente, apesar de identificar correctamente na expressão a despesa e o lucro. Além disso, é capaz de utilizar a expressão para calcular objectos e imagens, passando da representação algébrica para a numérica.

7.3. Diferenças entre problemas contextualizados e problemas puramente matemáticos

Cristina utiliza as representações verbais e numéricas para responder a algumas questões, tanto em problemas contextualizados como em problemas puramente matemáticos.

Em relação às representações gráficas, a aluna tem desempenhos diferentes em problemas contextualizados e em problemas puramente matemáticos. Nestes últimos, recorre à análise gráfica pontual, como mostra o exemplo seguinte, relativo à expressão $y = 2x + 1$:

Cristina: Então… 2 vezes 1, 2; mais 1, 3. Este aqui também não dá. Tinha que dar 3.

Investigadora: O 1 tinha que corresponder a 3. E a quanto é que corresponde, no gráfico?

Cristina: Ao 2.

Em problemas contextualizados, Cristina faz uma análise gráfica global, como mostra o exemplo seguinte, referente ao gráfico que traduz a variação da altura da água, num recipiente em forma de pirâmide, com o tempo que decorre desde o início do seu enchimento. Centrando-se no instante inicial, usa a informação do contexto para excluir imediatamente dois gráficos. Para escolher entre os restantes, considera a restante informação, nomeadamente o efeito que a forma do recipiente provoca na variação da altura da água:

Cristina: Estes [gráficos (A) e (C)] não dão porque não começa no zero.

Investigadora: Não começa no zero o quê? A altura ou o tempo?

Cristina: A altura.

(…)

Cristina: Não, vai ser mais lento a subir.

Investigadora: Porque…

Cristina: Porque vai alargando.

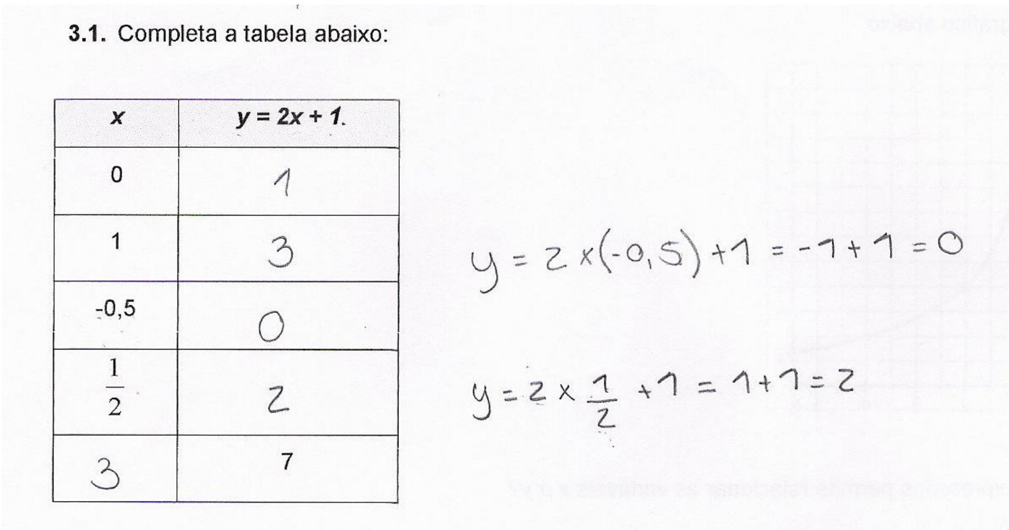
Investigadora: Então se vai ser mais lento a subir, isso traduz-se em qual destes gráficos?

Cristina: Neste [gráfico (D)]. Porque este vai subindo lentamente na altura e tem mais tempo.

Investigadora: E no princípio, também vai subindo lentamente?

Cristina: No princípio sobe… Sobe mais rápido.

A aluna privilegia o uso da expressão para determinar objectos ou imagens, em problemas contextualizados e em problemas puramente matemáticos. O exemplo seguinte mostra a utilização da expressão num problema puramente matemático:



3.1. Completa a tabela abaixo:

x	$y = 2x + 1$.
0	1
1	3
-0,5	0
$\frac{1}{2}$	2
3	7

$y = 2 \times (-0{,}5) + 1 = -1 + 1 = 0$

$y = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$

Contudo, é capaz de utilizar outras estratégias, como mostra o cálculo do objecto "3" na tabela anterior:

Investigadora: Como, resolveste a equação?

Cristina: Não.

Investigadora: Fizeste mentalmente?

Cristina: Pois.

Investigadora: Pensando o quê?

Cristina: Então… 2 vezes 3 dá 6.

Investigadora: Hum hum.

Cristina: Mais 1 dá 7.

Investigadora: Mas estiveste a pensar ao contrário. Tinhas o 7…

Cristina: Pois, tive que descobrir qual é que dava…

Investigadora: Começando por onde?

(…)

Cristina: Não, tive que ver… Mais 1, está aqui mais 1… Então tinha que ser -1.

Quanto à escrita de expressões, existe uma diferença entre problemas contextualizados e problemas puramente matemáticos nas funções de proporcionalidade inversa. Nos problemas contextualizados, Cristina obtém sempre expressões utilizando o reconhecimento da invariância do produto. Contudo, num problema puramente matemático apresentado graficamente, embora reconheça a invariância do produto, não utiliza essa estratégia para escolher uma expressão, procedendo à análise pontual das expressões dadas.

7.4. Síntese

Perante informação dada verbalmente e em tabelas, Cristina utiliza o reconhecimento da invariância do produto e a inversão do raciocínio para calcular valores. Embora seja capaz de utilizar outras estratégias para calcular objectos e imagens, privilegia a utilização da expressão. No entanto, tem dificuldade em interpretar e utilizar expressões quando a operação envolvida é a divisão, ou quando estas são dadas através da notação $f(x)=$. Além disso, em problemas contextualizados, nem sempre consegue atribuir significado aos números e variáveis que surgem na expressão, ou faz interpretações que não correspondem à expressão dada.

Cristina consegue escrever expressões de proporcionalidade inversa através do reconhecimento da invariância do produto, à excepção de um problema puramente matemático apresentado graficamente. Nas funções afim e de proporcionalidade directa, estabelece algumas relações numéricas, mas não consegue escrever as expressões. Em todas as funções, sente especial dificuldade quando os problemas são apresentados graficamente, pois, apesar de saber que pode utilizar as representações numéricas como passo intermédio, não consegue desenvolver uma estratégia para obter a expressão.

Perante informação dada graficamente numa situação contextualizada, Cristina recorre à análise gráfica global para escolher um gráfico. O seu desempenho é diferente em problemas puramente matemáticos, em que utiliza a análise gráfica pontual para fazer a sua escolha. Procura elaborar estratégias para associar as expressões algébricas e os gráficos das funções, mas não o consegue devido às suas concepções erróneas relativas à relação entre estas duas representações.

Capítulo 8

Conclusão

Neste capítulo apresento uma síntese do presente estudo e as suas principais conclusões, organizadas segundo as questões de investigação definidas. Em seguida, identifico alguns contributos deste trabalho para os professores de Matemática, bem como diversas limitações. Termino com uma reflexão pessoal sobre as aprendizagens que este estudo me proporcionou.

8.1. Síntese do estudo

As funções são utilizadas por diversas áreas do saber para descrever fenómenos e fazer previsões, surgindo frequentemente no nosso dia-a-dia através de várias representações. O programa de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico, onde as funções constituem um tópico específico, atribui grande importância à utilização das representações verbais, numéricas, gráficas e algébricas das funções. As dificuldades que os alunos demonstram sugerem a necessidade de uma reflexão profunda sobre a aprendizagem neste tópico, com especial atenção aos seus aspectos mais problemáticos. Assim, através deste estudo, pretendo identificar o conhecimento e as capacidades dos alunos de resolverem problemas envolvendo funções afim e de proporcionalidade inversa, em diferentes representações, em particular a representação algébrica.

O quadro teórico desta investigação aborda as representações matemáticas na Matemática escolar, encontrando-se organizado em dois tópicos: (i) perspectivas teóricas sobre as representações; e (ii) estudos empíricos sobre representações e funções. Relativamente às primeiras, descrevo as perspectivas teóricas de diversos autores, destacando Gerard Goldin e Raymond Duval. No que concerne aos estudos empíricos, apresento resultados sobre a influência das tarefas no desempenho dos alunos e sobre as suas dificuldades e concepções.

Este estudo enquadra-se no paradigma interpretativo, seguindo uma metodologia qualitativa e envolvendo a realização de estudos de caso. Os participantes deste estudo são os alunos de uma turma de 10.º ano de Matemática A que, na sua maior parte, frequentou o 9.º ano no ano lectivo anterior. Destes, são escolhidos quatro alunos para a realização de estudos de caso – Sofia, Ana, Manuel e Cristina. Os instrumentos de recolha de dados são um teste escrito e entrevistas. O teste escrito procura identificar estratégias e dificuldades dos alunos e as entrevistas visam obter descrições pormenorizadas dessas estratégias e dificuldades. Os alunos escolhidos para a elaboração de estudos de caso manifestam, no teste escrito, um bom desempenho ao nível algébrico ou gráfico e dificuldades no outro domínio.

8.2. Conclusões do estudo

Apresento aqui as principais conclusões do estudo, organizadas de acordo com as questões de investigação. Começo por sintetizar as estratégias e dificuldades dos alunos, segundo as subdimensões de análise que defini para a elaboração dos estudos de caso: (i) interpretação e utilização de informação verbal e dada em tabelas; (ii) interpretação e utilização de gráficos; (iii) interpretação e utilização de expressões; e (iv) escrita de expressões. A seguir, analiso a relação estabelecida entre a representação algébrica e as representações verbal, numérica e gráfica. Por fim, apresento as principais diferenças existentes entre o trabalho com problemas contextualizados e o trabalho com problemas puramente matemáticos. Para cada uma das três dimensões do estudo, estabeleço eventuais ligações entre os resultados deste trabalho e de estudos de outros autores.

Estratégias e dificuldades

Interpretação e utilização de informação verbal e dada em tabelas. Perante informação dada verbalmente e em tabelas, Sofia, Manuel e Cristina utilizam o reconhecimento da invariância do produto e a inversão do raciocínio para calcular valores. A utilização destas estratégias, envolvendo representações numéricas, está de acordo com os resultados de uma experiência realizada por Friedlander e Tabach (2001) em que se destacou o predomínio das representações verbais e numéricas.

Na utilização destas estratégias, os quatro alunos sentem dificuldades de natureza distinta. Enquanto Sofia apenas as utiliza em situações que lhe são familiares, Manuel revela dificuldade nas operações de multiplicação e divisão. As dificuldades de Sofia e Manuel evidenciam a influência, no seu desempenho, do conhecimento sobre o contexto dos problemas e de conhecimentos matemáticos anteriores (Even, 1998). Por sua vez, Cristina, apesar de utilizar correctamente o reconhecimento da invariância do produto e a inversão do raciocínio, parece ter mais confiança na expressão algébrica, o que a leva a privilegiar a sua utilização. Ana, ao contrário dos restantes colegas, e sempre que precisa de calcular valores, limita-se à utilização da expressão, tendo mesmo dificuldade em aceitar como correcta uma resolução que envolva uma estratégia diferente. Esta dificuldade da aluna enquadra-se na desvantagem da representação algébrica descrita por Friedlander e Tabach (2001), segundo a qual a utilização exclusiva da linguagem algébrica pode ocultar o sentido dos objectos representados.

Interpretação e utilização de gráficos. Perante informação dada graficamente, Sofia utiliza o reconhecimento da hipérbole como gráfico de proporcionalidade inversa, e Manuel reconhece graficamente uma função de proporcionalidade directa através do ponto de coordenadas (0,0). Ana não reconhece qualquer característica dos gráficos destas funções e Cristina não tem consolidado o reconhecimento da hipérbole como gráfico de proporcionalidade inversa. A forma como os alunos "vêem" um gráfico é influenciada pelo conjunto de experiências e conhecimentos que têm quando o observam (Monk, 2003). A ausência de reconhecimento de características gráficas essenciais, por parte dos alunos, sugere ter havido no 3.º ciclo um trabalho insuficiente com gráficos . A confirmá-lo estão também as afirmações de Manuel e Sofia de que não se lembram de utilizar os gráficos para obter respostas.

Perante informação dada graficamente, todos os alunos usam estratégias semelhantes. Nos problemas contextualizados, recorrem à análise gráfica global, utilizando a informação do contexto, o que vai ao encontro da perspectiva de Goldin (2003), que refere que as representações internas de contextos conhecidos podem servir de suporte à construção de outras representações. Contudo, em algumas situações, a maioria dos alunos revela dificuldade na utilização desta estratégia. Enquanto Sofia se abstrai facilmente do contexto, Ana acredita não ser capaz de lidar com a situação e, por isso, precipita-se nas suas escolhas. Tal como Ana, Manuel revela pouca confiança nos problemas contextualizados. Cristina é a única aluna que lida com confiança com a informação gráfica em problemas contextualizados, comparando a informação do contexto com características gráficas que se destacam. A falta de confiança revelada por alguns alunos sugere a necessidade de desenvolvimento de representações internas, que permitem, posteriormente, aumentar a compreensão das representações externas formais (Goldin, 2003).

Nos problemas puramente matemáticos, os quatro alunos utilizam uma análise gráfica pontual, tal como a maioria dos alunos do estudo realizado por Even (1998), procurando uma correspondência entre as coordenadas dos pontos do gráfico e os valores obtidos através da expressão ou dados verbalmente ou através de tabelas. Manuel mostra-se pouco confiante nestes problemas, não conseguindo, por vezes, formular uma estratégia para iniciar a resolução do problema.

Interpretação e utilização de expressões. Os quatro alunos utilizam a expressão para calcular valores, sendo a estratégia privilegiada por Ana, Sofia e Cristina, o que está em consonância com os resultados do estudo de Even (1998), segundo a qual a representação algébrica predomina no pensamento de muitos alunos. No entanto, tanto Cristina tal como Manuel têm dificuldade em utilizar expressões quando a operação envolvida é a divisão. Manuel usa várias estratégias para calcular valores de modo a fazer face a estas dificuldades, agindo do mesmo modo que os alunos do estudo realizado por Friedlander e Tabach (2001). Os quatro alunos sentem dificuldade na interpretação e utilização de expressões quando estas incluem a notação $f(x)=$.

No que diz respeito à interpretação de expressões, Sofia e Manuel destacam-se pela capacidade de utilizarem a informação do contexto para fazer uma interpretação global. Pelo contrário, Ana e Cristina abstraem-se facilmente do contexto da situação, nem sempre conseguindo atribuir significado aos números e variáveis. Além disso, os quatro alunos revelam dificuldade em explicar cada uma das partes de uma expressão.

Escrita de expressões. Entre os quatro alunos, Sofia é a única que não consegue escrever expressões. No entanto, é capaz de estabelecer relações numéricas entre variáveis, utilizando a estratégia de correspondência, no caso das funções de proporcionalidade directa, e o reconhecimento da invariância do produto, no caso das funções de proporcionalidade inversa. O seu desempenho está de acordo com os resultados apresentados por Bardini, Pierce e Stacey (2004), que evidenciam as dificuldades dos alunos na utilização da representação algébrica e a sua capacidade de explicar verbalmente uma resolução numérica no início do estudo. Ana consegue escrever expressões, apenas revelando dificuldade quando o problema lhe é apresentado verbalmente. A sua estratégia consiste na procura de uma constante que lhe permita relacionar as duas variáveis. Nas funções de proporcionalidade inversa, Manuel e Cristina recorrem ao reconhecimento da invariância do produto. Em situações de proporcionalidade directa, os dois alunos reconhecem a invariância dos quocientes, mas é apenas Manuel quem consegue obter expressões. Além disso, em todas as funções, Cristina sente especial dificuldade quando os problemas são apresentados graficamente, não conseguindo formular uma estratégia para obter a expressão. As dificuldades sentidas pelos alunos na escrita de expressões, perante os diversos tipos de função, estão de acordo com os resultados de Elia et al. (2007) e de Matos (2008), em que os alunos sentiram dificuldades na descrição da relação entre variáveis.

Relação entre representações

No que diz respeito à relação entre as representações gráfica e algébrica, nenhum dos alunos associa directamente as expressões algébricas das funções aos respectivos gráficos e, por isso, utilizam as representações numéricas como passo intermédio, através da análise pontual do gráfico ou da expressão. Este resultado mostra, por um lado, a importância da representação numérica na compreensão inicial de um problema, tal como referem Friedlander e Tabach (2001). Por outro lado, mostra que os alunos reconhecem a possibilidade de mudança de registo de representação, sendo, no entanto, incapazes de a concretizar, o que poderá ter como consequência a consideração das representações algébricas e gráficas das funções como dois objectos matemáticos distintos (Duval, 2004a) ou o surgimento de concepções erróneas sobre a associação entre as representações algébricas e gráficas, como acontece com Cristina.

Ana, Cristina e Manuel são capazes de passar da representação numérica para a algébrica. Além disso, tanto estes alunos como Sofia revelam capacidade de passar da representação algébrica para a numérica, uma vez que todos utilizam a expressão algébrica para calcular valores.

Relativamente à passagem entre as representações verbal e algébrica, a interpretação de cada uma das partes de uma expressão constitui uma dificuldade comum a todos. Além disso, existem também dificuldades específicas. As dificuldades na passagem entre estas representações estão de acordo com o desempenho dos alunos do estudo de Elia et al. (2007), em que alguns dos piores resultados foram obtidos nos problemas que requeriam a passagem da representação verbal para a algébrica. Assim, Sofia não consegue passar da representação verbal para a algébrica, não escrevendo expressões algébricas a partir de informação dada verbalmente. Cristina não consegue atribuir significado a algumas expressões ou faz interpretações que não correspondem às expressões dadas e Ana, apesar de conseguir escrever expressões, tem dúvidas no caso em que a representação verbal não é acompanhada de outra forma de representação. Estas dificuldades sugerem a necessidade de se aumentar o papel atribuído à linguagem na aprendizagem das funções, não só pela importância dos enunciados, mas também pela importância dos intercâmbios orais (Duval, 2004a).

Os resultados relativos à relação entre as representações algébricas e as representações verbais, numéricas e gráficas sugerem, tal como o estudo de Elia et al. (2007), que o processo de transição entre representações não é trabalhado adequadamente no estudo das funções, dando origem ao fenómenos da 'compartimentação'.

Diferenças entre problemas contextualizados e problemas puramente matemáticos

A principal diferença encontrada entre problemas contextualizados e problemas puramente matemáticos encontra-se na interpretação e utilização de gráficos. Nos dois tipos de problemas, perante informação dada graficamente, os quatro alunos têm desempenhos semelhantes. Em problemas contextualizados, recorrem à análise gráfica global, utilizando a informação do contexto. Pelo contrário, em problemas puramente matemáticos, fazem uma análise pontual, tal como a maioria dos alunos do estudo realizado por Even (1998), que não conseguem imaginar o comportamento das funções num intervalo. Não obstante, existem diferenças entre os alunos relativamente à utilização destas estratégias, sendo de destacar a dificuldade que Ana demonstra na utilização da informação do contexto e a insegurança de Manuel quando recorre à análise gráfica pontual. As dificuldades com as representações gráficas revelam reduzida experiência na leitura da informação gráfica e ao tratamento rigoroso dessa informação, tal como concluiu Ponte (1984).

Além disso, na escrita de expressões, existem algumas diferenças entre a capacidade dos alunos nos problemas contextualizados e nos problemas puramente matemáticos. A dificuldade de Sofia na escrita de expressões acentua-se nos problemas puramente matemáticos, onde não reconhece a invariância do produto. Esta dificuldade é comum a Cristina, embora esta aluna revele alguma capacidade a este nível. Por outro lado, num problema puramente matemático, perante a invariância do produto, Manuel mostra dificuldade em aceitar como correcto o seu raciocínio. Assim, os resultados sugerem que, embora os alunos sintam dificuldade nos problemas contextualizados e nos problemas puramente matemáticos, o seu desempenho é melhor em problemas com contextos reais. Por conseguinte, é evidente a importância da utilização de problemas com contextos reais para o desenvolvimento de conceitos associados às funções lineares (Coulombe & Berenson, 2001; Pierce, 2005). É igualmente evidente a necessidade de se melhorar o desempenho dos alunos em problemas puramente matemáticos, por exemplo apresentando os problemas através de diferentes representações (Friedlander & Tabach, 2001) e estabelecendo, durante a sua resolução, conexões entre as várias representações, de forma a aumentar a compreensão dos conceitos (Triphathy, 2008).

8.3. Recomendações do estudo

Embora os seus resultados não sejam generalizáveis, esta investigação contribui para o aumento do conhecimento sobre a aprendizagem das funções por parte dos alunos, sendo, por isso, relevante para os professores de Matemática. O estudo sugere a necessidade de uma abordagem das funções, no 3.º ciclo e no ensino secundário, que envolva a utilização das representações verbais, numéricas, algébricas e gráficas e, sobretudo, que enfatize a relação entre elas, de forma a evitar a ‘compartimentação’ que parece existir, especialmente entre a representação algébrica e as representações gráfica e verbal.

A tendência de utilização exclusiva da linguagem algébrica manifestada por alguns alunos sugere que se valorizem as outras representações, adequando-as aos tipos de questões propostas. Assim, esta investigação salienta a necessidade de se dar à representação verbal um papel mais importante do que aquele que tem usualmente, reconhecendo-a como forma de representação válida, ainda que com limitações, tal como qualquer outra representação.

Relativamente à representação gráfica, o estudo sugere que se trabalhe nas aulas a análise gráfica global em problemas puramente matemáticos, pois os resultados indicam que este tipo de análise se confina aos problemas contextualizados. Não obstante, é também importante a utilização de problemas contextualizados no estudo de funções, uma vez que estes podem levar ao aumento da confiança dos alunos durante a resolução de problemas, fazendo com que desenvolvam representações internas que podem servir de suporte à construção de representações convencionais. Para isso, é importante que existam, nas aulas, momentos de discussão, em que os alunos apresentem as suas estratégias, seguido de momentos de sistematização dos conceitos.

Ao mesmo tempo, as dificuldades dos alunos na interpretação e utilização das representações algébricas sugerem a necessidade de se alterar o trabalho desenvolvido com estas representações, possivelmente diversificando a natureza das tarefas e estabelecendo conexões com as outras representações.

8.4. Reflexão final

A maior dificuldade que senti durante a realização deste estudo está relacionada com o facto de não ter conhecimento dos alunos, o que dificultou a sua selecção na altura das entrevistas, bem como a preparação das próprias entrevistas. Devo referir também a dificuldade sentida durante a revisão da literatura, devido à existência de poucos estudos empíricos que incidam nas várias representações de funções. Por fim, saliento a complexidade do processo de análise de dados, nomeadamente a definição das dimensões a analisar e a inclusão dos resultados nessas dimensões, uma vez que, dada a complexidade do tema, todas as dimensões estão interligadas, tornando-se difícil limitar-me à 'perspectiva' pretendida em cada momento.

Apesar disso, penso que este estudo contribuiu para a aprendizagem dos alunos que nele participaram. A realização do teste escrito deu-lhes oportunidade de reverem alguns conceitos trabalhos no 3.º ciclo, num ambiente em que se sentiam à-vontade – a sala de aula – e sem estarem sujeitos a avaliação. Parece-me que o facto de não estarem sujeitos a avaliação contribuiu positivamente para a recolha de dados, ao permitir que se sentissem mais descontraídos e sem receio de falhar. Para os alunos entrevistados, fico com a ideia de que esta foi uma experiência muito enriquecedora. Muitas vezes, "pensar alto" levou-os a detectar erros de raciocínio e a reflectir sobre a adequabilidade das suas estratégias. A minha experiência diz-me que, frequentemente, os alunos não tentam responder a perguntas que lhes parecem, à primeira vista, demasiado complicadas, ou que envolvem conceitos em que sentem dificuldade. Nas entrevistas, pelo contrário, os alunos envolveram-se nos problemas, procurando uma estratégia para responder às perguntas, ou esforçando-se por explicar a sua dificuldade. Creio que esses foram momentos importantes de aprendizagem, que terão contribuído para aumentar a sua motivação face a um tema iria ser desenvolvido a seguir, durante o ensino secundário.

Penso que este estudo é relevante para os professores de Matemática. Em primeiro lugar, os resultados apresentados, respeitantes às representações das funções, pertencem a uma área pouco explorada até ao momento no nosso país. A descrição das estratégias e dificuldades dos alunos que este estudo proporciona poderá ser tida em conta pelos professores no momento da planificação deste tema, ajudando a definir os aspectos que devem ser enfatizados. Além disso, penso que o conhecimento sobre a aprendizagem das funções merece ser aprofundado, existindo muitos outros trabalhos a realizar no domínio das representações de funções. Pelas suas características metodológicas, este trabalho apenas mostra parcialmente a forma como os alunos mobilizam, no ensino secundário, o conhecimento adquirido no 3.º ciclo. Para um conhecimento mais profundo desta questão seria necessário realizar uma investigação em que se acompanhasse o seu trabalho durante o estudo das funções no 10.º ano. Parece-me igualmente importante procurar eventuais relações entre a utilização das diferentes representações e a natureza das tarefas propostas, ou analisar a possível influência do papel do professor na forma como utilizam e relacionam as várias representações.

Pessoalmente, a realização deste trabalho constituiu um momento de aprendizagem. Enquanto investigadora, tive oportunidade de procurar resposta para as questões que formulei e experimentar as dificuldades inerentes ao processo de investigação. Enquanto professora, a realização deste estudo influenciou positivamente o meu desempenho, por me ter permitido ter uma noção mais profunda e real das estratégias e dificuldades dos alunos no trabalho com as diferentes representações das funções. Além disso, aumentou a minha atenção, de imediato, para o desempenho dos meus alunos em níveis e unidades temáticas diferentes, fazendo com que identificasse aspectos que de outra forma me poderiam passar despercebidos. De uma maneira geral, fez-me reforçar a ideia de que o ensino é dinâmico, reflexivo e, sobretudo, que deve ser orientado pela actividade dos alunos.

Referências

Arcavi, A. (1999). The role of the visual representations in the learning of Mathematics. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (21st, Cuernavaca, Morelos, Mexico, October 23-26, 1999)* (pp. 55-79). Columbus, OH: ERIC/CSMEE Publications.

Bardini, C., Pierce, R. U., & Stacey, K. (2004). Teaching linear functions in context with graphics calculators: Students' responses and the impact of the approach on their use of algebraic symbols. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2,* 353-376.

Bell, J. (1997). *Como realizar um projecto de investigação.* Lisboa: Gradiva.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). New York, NY: Macmillan.

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 123-135). Reston, VA: NCTM.

Coulombe, W. N., & Berenson, S. B. (2001). Representations of patterns and functions: Tools for learning. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 166-172). Reston, VA: NCTM.

Duval, R. (2004a). *Los problemas fundamentals en el aprendizage de las Matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004b). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizages intelectuales.* Santigo de Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Eisner, E. W. (1997). Cognition and representation: A way to pursue the American dream? *Phi Delta Kappan, 78(5),* 348-353.

Elia, I. et al. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5,* 533-556.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 17(1)*, 105-121.

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *17 (2)*, 137-165.

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston, VA: NCTM.

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematics learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176-201). New York, NY: Routledge.

Greeno, J. & Hall, R. (1997). Practicing representations: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, *78,* 361-367.

Guimarães, H. M. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: um estudo com matemáticos e professores de Matemática* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*, 123-134.

Hunting, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behaviour, 16(2)*, 145-165.

Kaput , J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Retirado em 21 de Julho de 2008 de http://www.eric.ed.gov.

Long, M., & Ben-Hur, M. (1991). Informing learning through the clinical interview. *Arithmetic Teacher, 38(6),* 157-167.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Student's understanding of algebraic notation: 11-

15. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 1-19.

Matos, A. (2008). *Explorando relações funcionais no 8.º ano: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. S. Francisco, CA: Jossey Bass.

Mevarech, Z., & Kramarsky, B. (1997). From verbal description to graphic representations: Stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, 229-263.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática – Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem – 3.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: DGEBS.

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: DEB.

Ministério da Educação (2002). *PISA 2000 – Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses.* Lisboa: GAVE.

Ministério da Educação (2004). *Resultados do estudo internacional PISA 2003.* Lisboa: GAVE.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Monk, S. (2003). Representation in school mathematics: Learning to graph and graphing to learn. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 250-262). Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Pierce (2005). Linear functions and a triple influence of teaching on the development of students' algebraic expectation. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (*vol. 4*, pp. 81-88). Melbourne: PME.

Ponte, J. P. (1984). *Functional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs* (Doctoral dissertation, University of Georgia). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*, 1-16.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3(1),* 3-18.

Seeger, F. (1998). Representations in the mathematics classroom: Reflections and constructions. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 308-343). Cambridge: Cambridge University Press.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13(8),* 438-445.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(4),* 356-366.

Anexos

Anexo 1

Calendarização do estudo

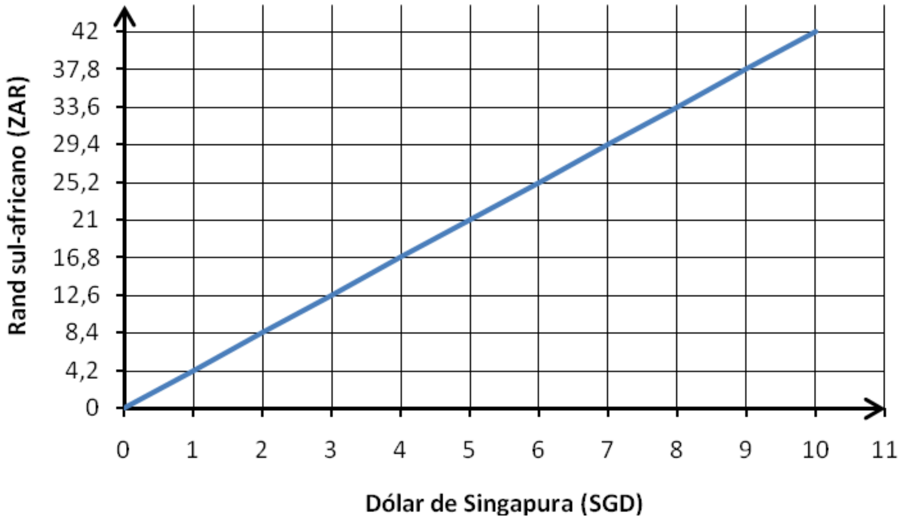
Mês	Tarefas
Fevereiro a Julho de 2008	- Elaboração do projecto de tese; - Leituras sobre representações e metodologia de investigação;
Setembro e Outubro de 2008	- Escrita do capítulo "Introdução"; - Leituras sobre representações e metodologia de investigação; - Escrita do capítulo "Representações na Matemática Escolar"; - Construção do teste escrito; - Realização dos procedimentos necessários à recolha de dados;
Novembro e Dezembro de 2008	- Escrita do capítulo "Metodologia"; - Recolha de dados (teste e 1.ª entrevista); - Transcrição das entrevistas; - Análise de dados (teste e 1.ª entrevista);
Janeiro e Fevereiro de 2009	- Recolha de dados (2.ª entrevista); - Transcrição das entrevistas; - Leituras sobre representações; - Escrita do capítulo "Representações na Matemática Escolar" (continuação);
Março a Maio de 2009	- Análise de dados (continuação); - Elaboração do 1.º estudo de caso; - Leituras sobre representações; - Conclusão do capítulo "Representações na Matemática Escolar";
Junho e Julho de 2009	- Leituras sobre metodologia de investigação; - Escrita do capítulo "Metodologia" (continuação); - Organização dos Anexos; - Elaboração dos 2.º, 3.º e 4.º estudos de caso;
Agosto e Setembro de 2009	- Conclusão dos estudos de caso; - Conclusão do capítulo "Metodologia" - Escrita do capítulo "Conclusão"; - Organização e revisão da dissertação.

Anexo 2

Teste escrito

1. Mei-Ling, de Singapura, foi durante três 3 meses para a África do Sul, integrada num programa de intercâmbio de estudantes. Para isso, Mei-Ling precisou de trocar dólares de Singapura (SGD) por rands sul-africanos (ZAR).

O gráfico seguinte representa a taxa de câmbio entre o dólar de Singapura e o rand sul-africano:



1.1. A que valor, em dólares de Singapura (ZAR), corresponde 1 rand sul-africano (SGD)?

1.2. Escreve uma expressão que traduza a relação entre o valor do dólar de Singapura (SGD) e o rand sul-africano (ZAR).

1.3. Mei-Ling trocou 3000 dólares de Singapura por rands sul-africanos a esta taxa de câmbio. Que quantia recebeu Mei-Ling em rands sul-africanos?

Pisa 2003 (adaptado)

2. A professora de Inglês das turmas do 9.º ano vai alugar um autocarro para fazer uma visita de estudo. A professora telefonou para a empresa "Sobre rodas" e obteve a seguinte informação:

N.º de pessoas	**Preço por pessoa (€)**
30	8
40	6
50	4,8
60	4

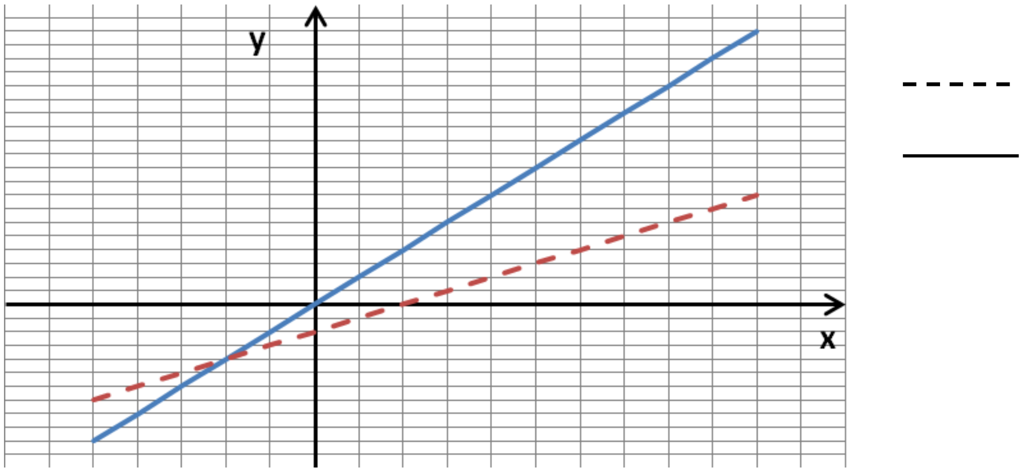
2.1. O preço total do autocarro é fixo ou varia com o número de pessoas? Justifica a resposta.

2.2. Escreve uma expressão que traduza a relação entre o preço por pessoa e o número de pessoas transportadas.

2.3. Se o preço por pessoa for 5€, quantos alunos vão à visita de estudo?

3. Considera as funções definidas pelas expressões **f(x) = 2x** e **g(x) = x – 2**.

3.1. Associa cada uma das funções anteriores a um dos gráficos abaixo. Justifica a resposta.



3.2. Determina g(2).

3.3. Sabendo que f(x)=6, qual o valor de x? Justifica a resposta.

3.4. Qual destas funções representa uma relação de proporcionalidade directa? Justifica a resposta.

4. A Associação de Estudantes da Escola "Descobrir" está a organizar a festa de final de ano, a realizar no ginásio. Vai ser uma festa em grande, já que o ginásio da escola tem capacidade para 400 alunos. A Associação de Estudantes gastou €500 na decoração, nos equipamentos de som e na iluminação e decidiu cobrar €2 por cada bilhete.

O João e a Teresa ficaram encarregues de fazer a análise financeira da festa. Arranjaram uma expressão para calcular o saldo monetário da festa (**S**) em função do número de bilhetes vendidos (**n**):

$$\mathbf{S = 2n - 500}$$

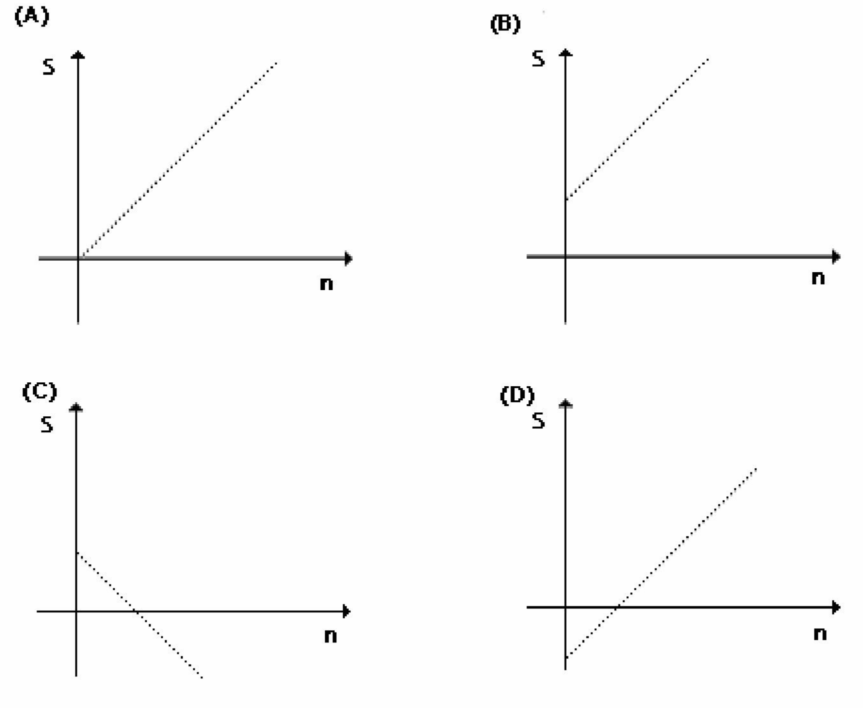
4.1. Explica o significado da expressão no contexto da situação.

4.2. Qual é o lucro máximo que a Associação pode esperar?

4.3. Determina o saldo monetário a apurar se forem vendidos 120 bilhetes. Interpreta o resultado.

4.4. Qual o número mínimo de bilhetes que é necessário vender para que não haja prejuízo?

4.5. Qual dos gráficos poderá representar a relação entre o saldo monetário, **S**, e o número de bilhetes vendidos, **n**? Justifica a resposta.



Projecto 1000 Itens

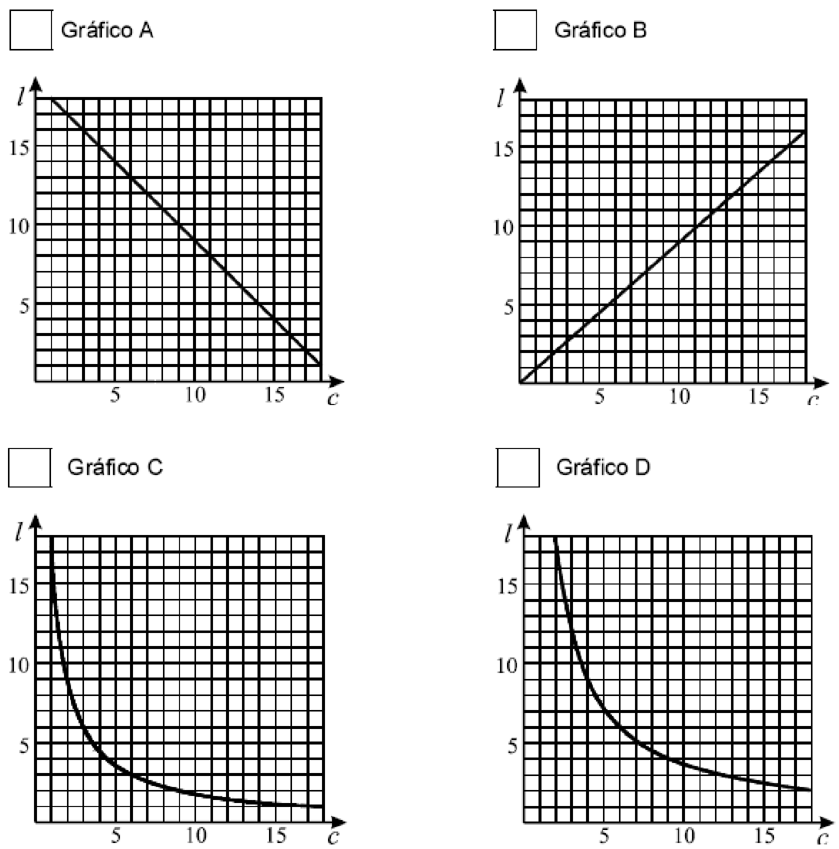
5. Existem vários rectângulos, de dimensões diferentes, com $18 cm^2$ de área.

5.1. Completa a tabela que se segue, indicando, em cm, o comprimento e a largura de três rectângulos diferentes (A, B e C), com $18 cm^2$ de área.

	Rectângulo A	Rectângulo B	Rectângulo C
Comprimento (cm)	4		
Largura (cm)		0,5	

5.2. O comprimento e a largura dos rectângulos são inversamente proporcionais? Justifica a resposta.

5.3. Qual dos gráficos seguintes pode representar a relação entre a largura (l) e o comprimento (c) de rectângulos com 18cm^2 de área? Justifica a resposta.



5.4. Escreve uma expressão para representar a relação entre a largura (l) e o comprimento (c) de rectângulos com 18cm^2 de área.

5.5. Qual a largura de um rectângulo com 8cm de comprimento?

Exame Nacional de Matemática de 2005, 1.ª chamada (Adaptado)

Anexo 3

Caracterização das questões do teste

Questão	Objectivos	Tipo de função	Tipo de situação	Representações
1.1.	- Interpretação gráfica	Proporcionalidade directa	Contextualizada	Gráfica Algébrica Numérica
1.2.	- Escrita da expressão			
1.3.	- Cálculo de valores numéricos			
2.1.	-Interpretação da situação	Proporcionalidade inversa	Contextualizada	Verbal Numérica Algébrica
2.2.	- Escrita da expressão			
2.3.	- Cálculo de valores numéricos			
3.1.	- Interpretação de gráficos	Proporcionalidade directa Função afim	Puramente matemática	Algébrica Gráfica Numérica
3.2.	- Cálculo de valores numéricos			
3.3.	- Cálculo de valores numéricos			
3.4.	- Reconhecimento de proporcionalidade directa			
4.1.	- Interpretação da expressão	Função afim	Contextualizada	Verbal Algébrica Numérica Gráfica
4.2.	- Interpretação da situação - Cálculo de valores numéricos			
4.3.	- Cálculo e interpretação de valores numéricos			
4.4.	- Cálculo e interpretação de valores numéricos			
4.5.	- Interpretação de gráficos			
5.1.	- Cálculo de valores numéricos	Proporcionalidade inversa	Puramente matemática	Numérica Gráfica Algébrica
5.2.	- Reconhecimento de proporcionalidade inversa			
5.3.	- Interpretação de gráficos			
5.4.	- Escrita da expressão			
5.5.	- Cálculo de valores numéricos			

Anexo 4

Guião da 1.ª entrevista – Sofia

1. Recorda a pergunta 1, sobre a taxa de câmbio entre o dólar de Singapura e o rand sul-africano.

a. Na pergunta 1.2., era pedida uma expressão que traduzisse a relação entre o valor do dólar de Singapura (SGD) e o rand sul-africano (ZAR). Explica-me como obtiveste esta expressão.

- Achas que deves usar a mesma letra para representar variáveis diferentes?

- Como obtiveste esta informação [o que escreveu]? Como obtiveste estes valores?

b. Explica-me porque usaste na pergunta 1.3. a regra de 3 simples para determinar a quantia de rands sul-africanos.

- Poderias usar a expressão para determinar a quantia de rands sul-africanos? Como?

- Se te fosse dito que Mei-Ling trocou 10 dólares de Singapura (SGD) por rands sul-africanos (ZAR), também utilizarias a regra de 3 simples?

c. Ainda dentro deste problema, imagina que tinhas a seguinte pergunta:

"Quando Mei-Ling regressou a Singapura, três meses depois, tinha ainda 3900 ZAR. Trocou-os por dólares de Singapura, utilizando a mesma taxa de câmbio. Quantos dólares de Singapura (SGD) recebeu Mei-Ling?"

- Por que utilizaste essa estratégia?

2. Recorda a pergunta 2, sobre o aluguer de um autocarro para uma visita de estudo.

a. A pergunta 2.2. pedia uma expressão que relacionasse o preço por pessoa e o número de pessoas transportadas. Que dificuldade sentes nesta pergunta?

b. Na pergunta 2.3, imagina que o preço por pessoa era de 10€. Nesse caso, quantos alunos iriam à visita de estudo?

- Se soubermos que cada aluno pagou 7€, conseguimos descobrir quantos foram à visita?

- Repara nas operações que fazemos. Será que consegues generalizar?

c. Esboça um gráfico que represente a relação entre o número de pessoas transportadas e o preço por pessoa.

- No gráfico, marca os pontos representados na tabela.

3. Na pergunta 3 estavam representados dois gráficos e davam-se as expressões algébricas.

a. Justifica a associação que fizeste entre as expressões e os gráficos.

b. Como interpretas as expressões? Porque dizes que $g(x)$ corta o eixo dos *yy* no -2? Como se vê isso?

c. Consegues encontrar outra forma de determinar $g(2)$, sem utilizar a expressão algébrica?

d. Determinaste correctamente o valor que corresponde a 6, na função *f*. Consegues indicar-me outra forma de determinar o valor de *x*, sabendo que $f(x)=6$?

e. Explica-me o que pensaste para justificar a situação de proporcionalidade directa.

4. Na pergunta 4, falava-se da festa organizada pela AE, em que o João e a Teresa arranjaram uma expressão para calcular o saldo em função do número de bilhetes vendidos.

a. O que significa "Calcular o saldo em função do número de bilhetes vendidos?"

b. Explica a tua resposta à pergunta 4.1.

c. Na pergunta 4.4., construíste uma equação e resolveste-a. Será que essa era a maneira mais rápida de determinar o número de bilhetes?

d. Explica-me porque escolheste o gráfico (A).

- Afirmas que o saldo lucro pode ser negativo, mas o gráfico que escolheste não corresponde a essa situação.

5. A pergunta 5 relaciona o comprimento e a largura de rectângulos.

a. De que forma completaste a tabela?

b. Justifica a escolha do gráfico (C).

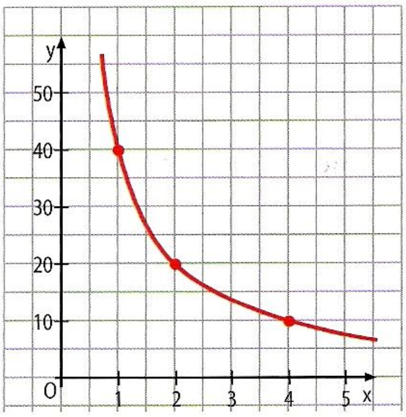
c. Na pergunta 5.4., se o rectângulo tivesse de comprimento 10cm, qual seria a sua largura?

- Se conhecêssemos a sua largura, como determinaríamos o seu comprimento? Será que este procedimento pode ser generalizado?

Anexo 5

Guião da 2.ª entrevista – Sofia

1. Observa o gráfico seguinte:



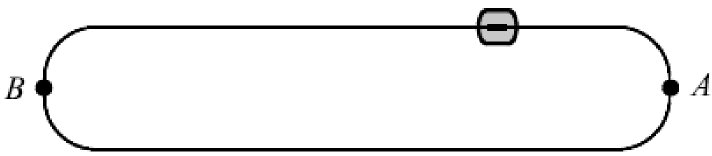
1.1. Escreve uma expressão que relacione as variáveis *x* e *y*.

- Escolhe alguns pontos do gráfico e escreve as suas coordenadas.

1.2. Indica a ordenada do ponto de abcissa 2.

1.3. Determina o valor de *y* quando *x*=1.

2. A figura seguinte representa o circuito (visto de cima) efectuado por uma cabina do teleférico do Parque das Nações.



Uma cabina parte do ponto A, passa por B e regressa ao ponto A, sem efectuar paragens durante este percurso.

2.1. Sendo:

t o tempo que decorre desde o instante em que a cabina parte do ponto A;

d a distância dessa cabina ao ponto A.

Assinala o gráfico que representa a relação entre *t* e *d*.

Gráfico A

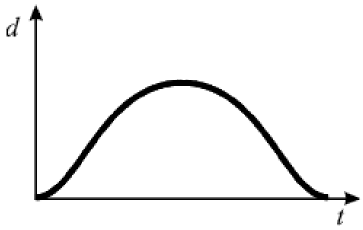


Gráfico B

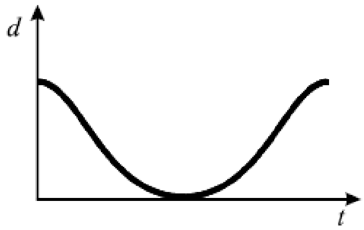


Gráfico C

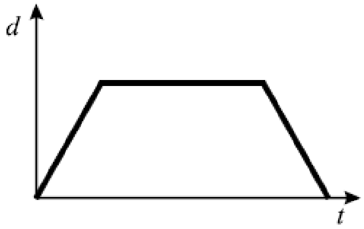
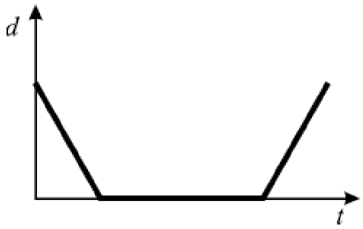


Gráfico D



- Inicialmente, a que distância do ponto A se encontra a cabina?

- À medida que o tempo passa, a distância aumenta ou diminui? E depois, existe alguma alteração em termos de distâncias? A partir de que momento?

2.2. No teleférico do Parque das Nações, o número de cabinas utilizadas não é sempre o mesmo, mas duas cabinas consecutivas estão sempre igualmente espaçadas.

O ajuste da distância entre as cabinas feito automaticamente, de acordo com a seguinte fórmula:

$n \times c = 3$, em que:

n representa a distância, em quilómetros, entre duas cabinas consecutivas;

c é o número total de cabinas em utilização.

Explica o significado da constante 3 na fórmula $n \times c = 3$.

- Imagina o circuito com um número concreto de cabinas.

3. O valor monetário de um computador diminui à medida que o tempo passa. O valor monetário de um computador da marca XPTO é, no momento da sua compra, de 1400€ e, em cada ano que passa, o computador sofre uma desvalorização de 200€.

3.1. Escreve uma expressão que relacione o valor (v) do computador da marca XPTO com o número de anos (n) decorridos após a sua compra.

- Explica-me a situação.

- Analisa a variação do valor do computador, à medida que os anos passam.

- Qual é o valor do computador após um ano? E após dois anos?

3.2. Determina, em euros, a desvalorização do computador (diminuição do seu valor monetário) dois anos após a sua compra.

- Analisa a desvalorização do computador, ano após ano.

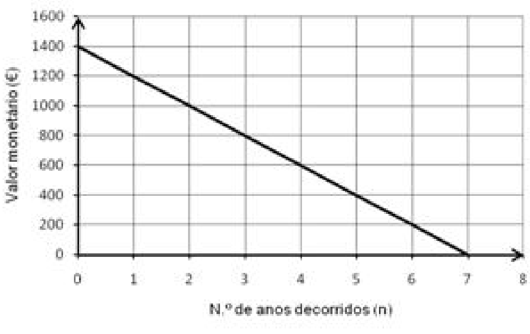
- És capaz de utilizar a expressão?

3.3. Quantos anos são necessários para que o computador perca todo o valor monetário?

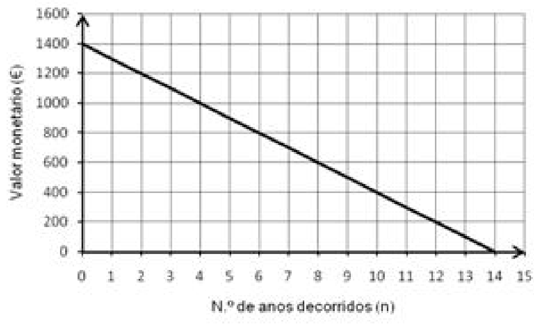
- Analisa a desvalorização do computador, ano após ano.

3.4. Qual dos gráficos representa a relação entre o valor do computador da marca XPTO e o número de anos decorridos após a sua compra?

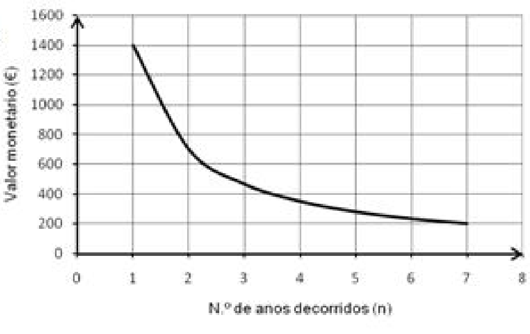
A



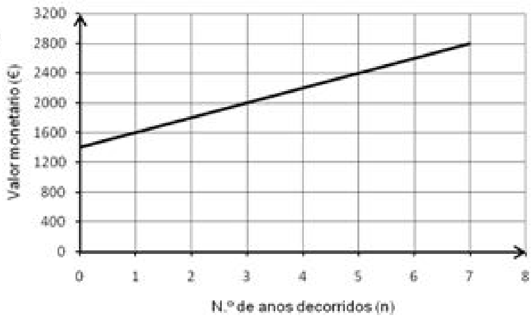
B



C



D



- Conheces valores que te ajudem na escolha do gráfico?

- Achas que é uma função crescente ou decrescente?

- Há algum gráfico que excluas imediatamente?

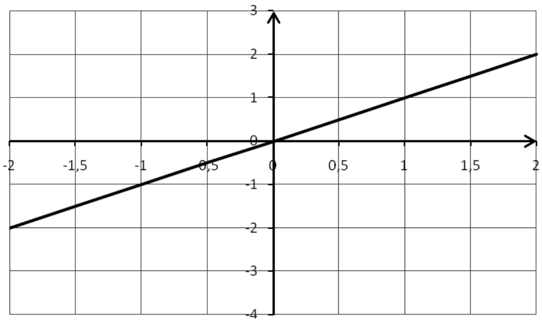
4. Considera a função definida pela expressão $y = 2x + 1$.

4.1. Completa a tabela seguinte:

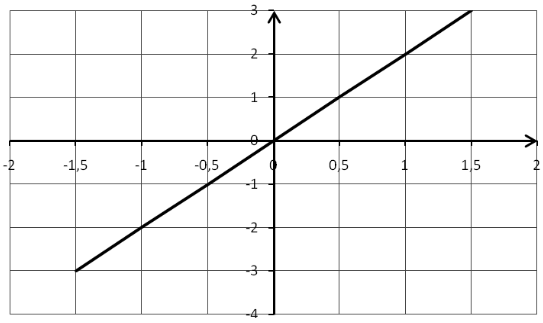
x	***y = 2x + 1***
0	
1	
-0,5	
$\frac{1}{2}$	
	7

4.2. Qual dos gráficos seguintes representa a função $y = 2x + 1$?

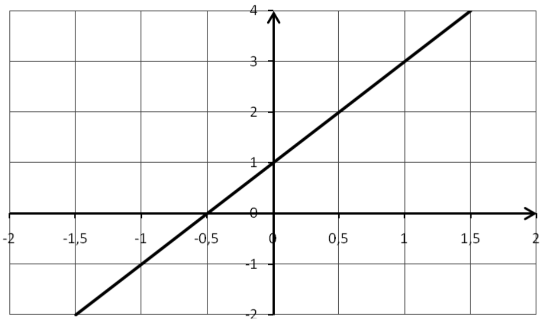
A



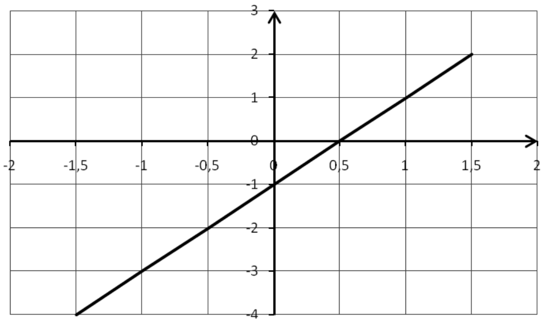
B



C

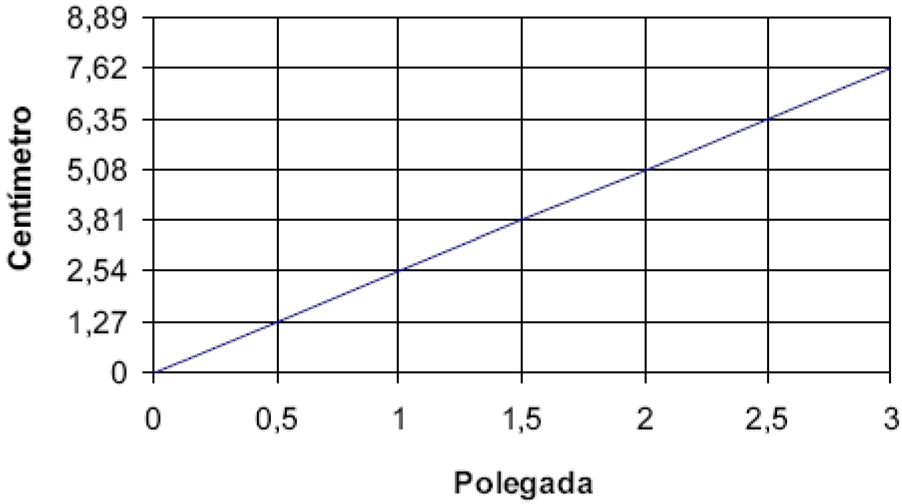


D



- Se tivesses que construir o gráfico a partir da expressão, como farias?

5. Por vezes, o comprimento da diagonal do ecrã de um televisor é indicado em polegadas. No gráfico que se segue, podes ver a relação aproximada existente entre esta unidade de comprimento e o centímetro.



5.1. Marca no gráfico os pontos correspondentes a 2,54cm (Ponto A) e 1,25 polegadas (ponto B), com o maior rigor possível.

5.2. Observa o gráfico e escreve uma expressão que traduza a relação entre o comprimento em polegadas (*p*) e o comprimento em centímetros (*c*).

- Uma polegada corresponde a quantos centímetros? E duas polegadas?

- Se a aluna não conseguir obter a expressão:

5.2.1. Qual das seguintes expressões traduz a relação entre o comprimento em polegadas (*p*) e o comprimento em centímetros (*c*)?

A) $p = 2,54\, c$

B) $c = \dfrac{2,54}{p}$

C) $c = 2,\, 54\, p$

D) $c = \dfrac{p}{2,54}$

- Para começar, escolhe alguns pontos do gráfico e escreve as suas coordenadas.

Anexo 6

Guião da 1.ª entrevista – Ana

1. Recorda a pergunta 1, sobre a taxa de câmbio entre o dólar de Singapura e o rand sul-africano.

a. Na pergunta 1.2., era pedida uma expressão que traduzisse a relação entre o valor do dólar de Singapura (SGD) e o rand sul-africano (ZAR). Explica-me como obtiveste esta expressão.

- Como interpretas esta expressão? Se tivesses que a explicar a alguém, como o farias?

b. Explica-me porque usaste na pergunta 1.3. a expressão algébrica para determinar a quantia de rands sul-africanos.

- Se te fosse dito que Mei-Ling trocou 10 dólares de Singapura (SGD) por rands sul-africanos (ZAR), também utilizarias a expressão?

c. Ainda dentro deste problema, imagina que tinhas a seguinte pergunta:

"Quando Mei-Ling regressou a Singapura, três meses depois, tinha ainda 3900 ZAR. Trocou-os por dólares de Singapura, utilizando a mesma taxa de câmbio. Quantos dólares de Singapura (SGD) recebeu Mei-Ling?"

- Por que utilizaste essa estratégia?

2. Recorda a pergunta 2, sobre o aluguer de um autocarro para uma visita de estudo.

a. Na pergunta 2.2. era pedida uma expressão que relacionasse o preço por pessoa e o número de pessoas transportadas. Escreveste $xy=240$. Como obtiveste esta expressão?

b. Na pergunta 2.3., para determinar o número de alunos que vão à visita, se o preço por pessoa for 5 €, utilizaste a expressão. Porquê?

- Era necessário construir e resolver uma equação?

c. Esboça um gráfico que represente a relação entre o número de pessoas transportadas e o preço por pessoa.

- No gráfico, marca os pontos representados na tabela.

3. Nesta pergunta estavam representados dois gráficos e davam-se as expressões algébricas.

a. Justifica a associação que fizeste entre as expressões e os gráficos.

b. Como interpretas estas expressões?

c. O que significa $g(2)$?

- Consegues indicar outra forma de determinar $g(2)$, sem utilizar a expressão algébrica?

d. Determinaste correctamente o valor que corresponde a 6, na função *f*. Consegues indicar outra forma de determinar o valor de *x*, sabendo que $f(x)=6$?

e. O que é uma relação de proporcionalidade directa? Consegues identificá-la graficamente? E através de uma expressão?

4. Na pergunta 4, falava-se da festa organizada pela AE, em que o João e a Teresa arranjaram uma expressão para calcular o saldo em função do número de bilhetes vendidos.

a. O que significa "Calcular o saldo em função do número de bilhetes vendidos?"

b. Ao explicares o significado da expressão, escreveste "2 bilhetes vendidos…" O que querias dizer?

c. Na pergunta 4.4., construíste uma equação e resolveste-a. Será que essa era a maneira mais rápida de determinar o número de bilhetes que era necessário vender para que não houvesse prejuízo?

d. Explica-me porque escolheste o gráfico (A).

- Se a AE não vender bilhetes, o que acontece?

5. A pergunta 5 relaciona o comprimento e a largura de rectângulos.

a. Deixaste por preencher um dos comprimentos, e puseste aqui uma largura de -3,5. É possível este valor? De que forma poderias completar a tabela?

b. Em que situação duas grandezas são inversamente proporcionais?

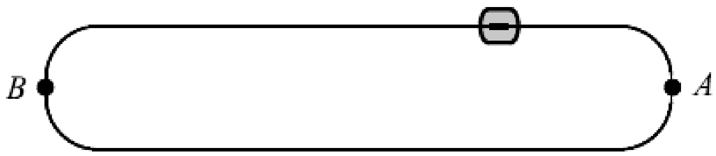
c. Justifica a escolha do gráfico (C).

d. Explica como pensaste para obter a expressão que relaciona a largura com o comprimento de rectângulos com $18cm^2$ de área.

Anexo 7

Guião da 2.ª entrevista – Ana

1. A figura seguinte representa o circuito (visto de cima) efectuado por uma cabina do teleférico do Parque das Nações.



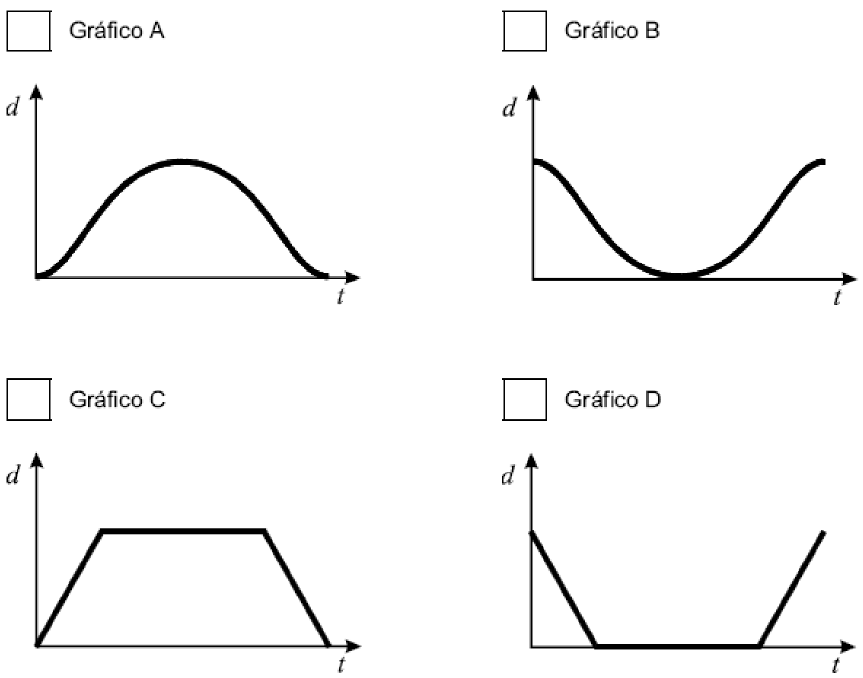
Uma cabina parte do ponto A, passa por B e regressa ao ponto A, sem efectuar paragens durante este percurso.

1.1. Sendo:

t o tempo que decorre desde o instante em que a cabina parte do ponto A;

d a distância dessa cabina ao ponto A.

Assinala o gráfico que representa a relação entre *t* e *d*.



- Inicialmente, a que distância do ponto A se encontra a cabina?

- À medida que o tempo passa, a distância aumenta ou diminui? E depois, existe alguma alteração em termos de distâncias? A partir de que momento?

1.2. No teleférico do Parque das Nações, o número de cabinas utilizadas não é sempre o mesmo, mas duas cabinas consecutivas estão sempre igualmente espaçadas.

O ajuste da distância entre as cabinas feito automaticamente, de acordo com a seguinte fórmula:

$n \times c = 3$, em que:

n representa a distância, em quilómetros, entre duas cabinas consecutivas;

c é o número total de cabinas em utilização.

Explica o significado da constante 3 na fórmula $n \times c = 3$.

- Imagina o circuito com um número concreto de cabinas.

2. Por vezes, o comprimento da diagonal do ecrã de um televisor é indicado em polegadas.

2.1. Sabendo que 1 polegada corresponde a 2,54cm, escreve uma expressão que traduza a relação entre o comprimento em polegadas (p) e o comprimento em centímetros (c).

- Uma polegada corresponde a quantos centímetros? E duas polegadas? E três polegadas?

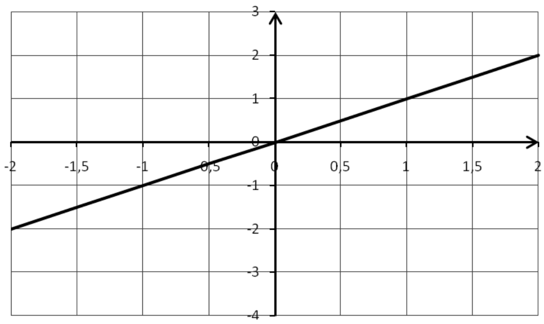
3. Considera a função definida pela expressão $y = 2x + 1$.

3.1. Completa a tabela seguinte:

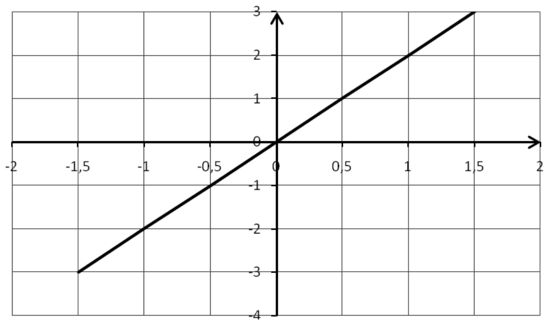
x	$y = 2x + 1$
0	
1	
-0,5	
$\frac{1}{2}$	
	7

3.2. Qual dos gráficos seguintes representa a função $y = 2x + 1$?

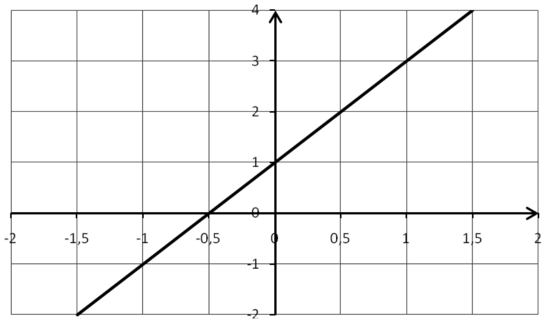
A



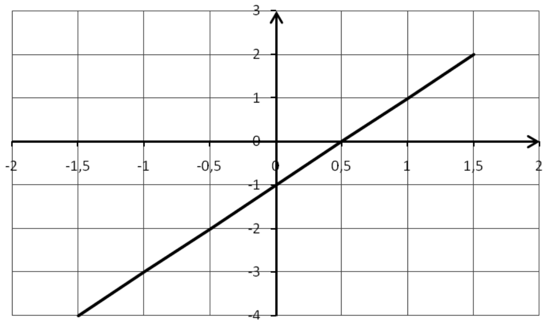
B



C



D



- Se tivesses que construir o gráfico a partir da expressão, como farias?

3.3. Escreve uma expressão algébrica para cada um dos outros gráficos.

4. O valor monetário de um computador diminui à medida que o tempo passa. A expressão seguinte relaciona o valor (v) do computador da marca XPTO com o número de anos (n) decorridos após a sua compra:

$$v = 1400 - 200n$$

4.1. Explica o significado da expressão no contexto do problema.

- Analisa a variação do valor do computador, à medida que os anos passam.

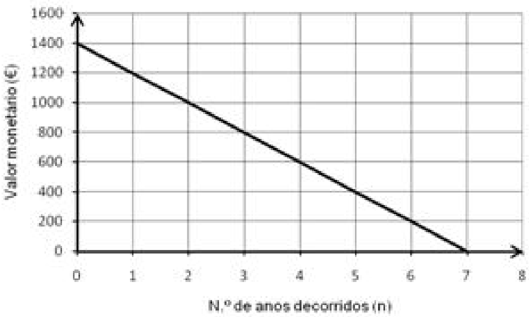
- Qual é o valor do computador após um ano? E após dois anos?

4.2. Determina, em euros, a desvalorização do computador (diminuição do seu seu valor monetário) dois anos após a sua compra.

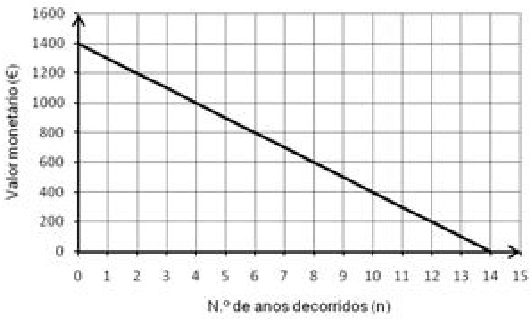
4.3. Quantos anos são necessários para que o computador perca todo o valor monetário?

4.4. Qual dos gráficos representa a relação entre o valor do computador da marca XPTO e o número de anos decorridos após a sua compra?

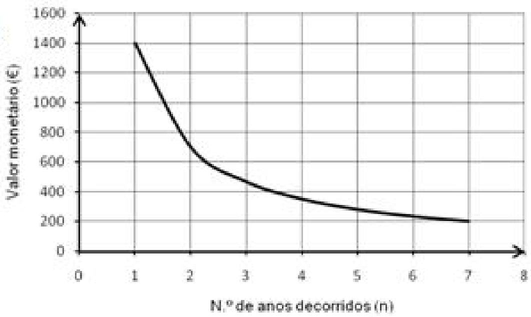
A



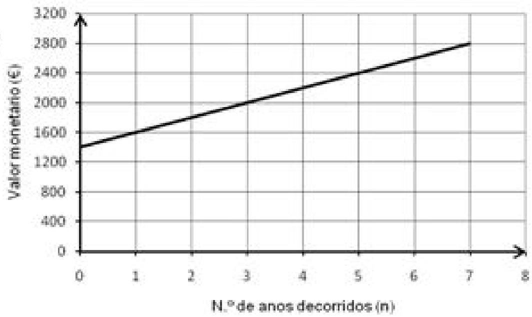
B



C



D

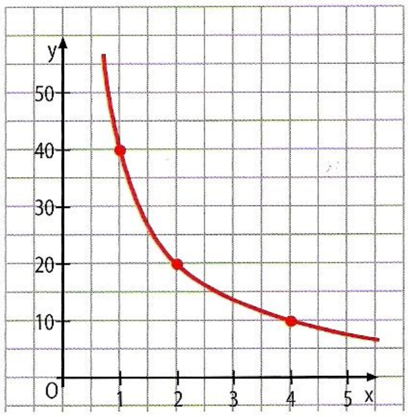


- Conheces valores que te ajudem na escolha do gráfico?

- Achas que é uma função crescente ou decrescente?

- Há algum gráfico que excluas imediatamente?

5. Observa o gráfico seguinte:



5.1. Qual das expressões permite relacionar as variáveis x e y?

A) $xy = 20$

B) $y = \dfrac{20}{x}$

C) $y = \dfrac{40}{x}$

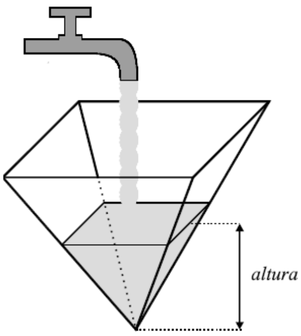
D) $y = 40x$

- Para começar, escolhe alguns pontos do gráfico e escreve as suas coordenadas.

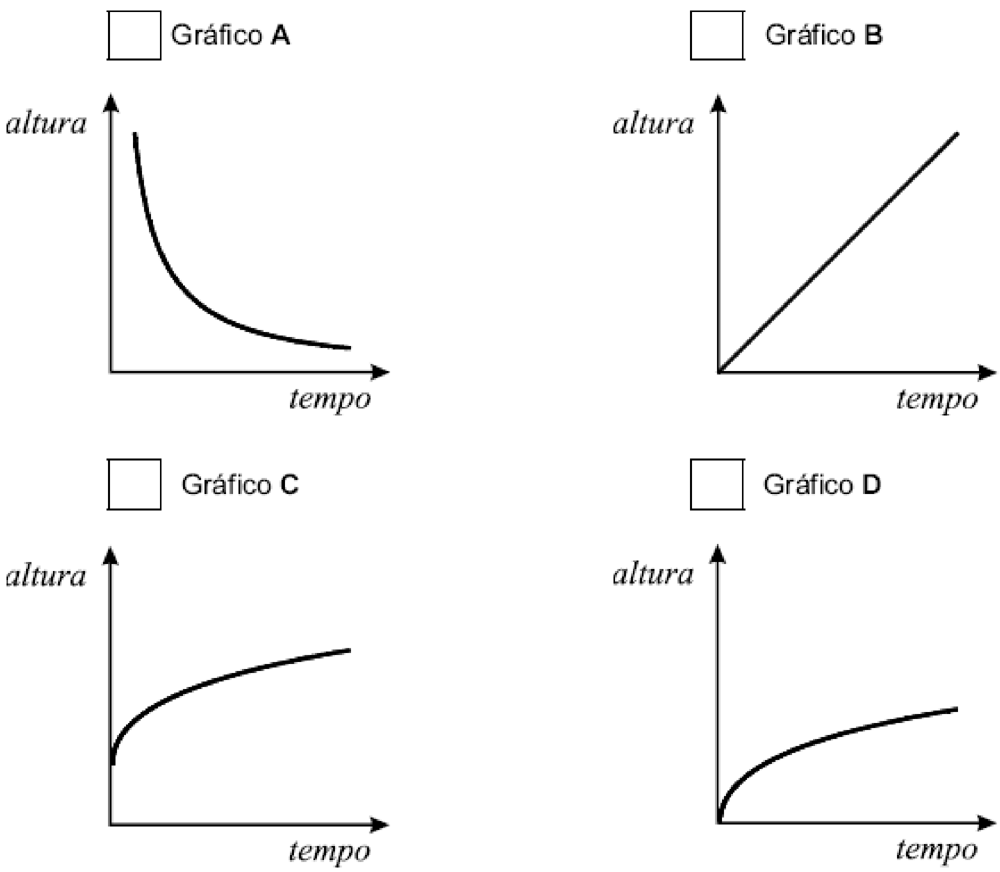
5.2. Indica a ordenada do ponto de abcissa 2.

5.3. Determina o valor de y para x=1.

6. Imagina que um recipiente com a forma da pirâmide, inicialmente vazio, se vai encher com água. A quantidade de água que sai da torneira, por unidade de tempo, até o recipiente ficar cheio, é constante.



6.1. Qual dos seguintes gráficos poderá traduzir a variação da altura da água, no recipiente, com o tempo que decorre desde o início do seu enchimento?



- O que acontece à altura da água no recipiente, à medida que o tempo passa?

- A altura da água aumenta sempre da mesma forma?

Anexo 8

Guião da 1.ª entrevista – Manuel

1. Recorda a pergunta 1, sobre a taxa de câmbio entre o dólar de Singapura e o rand sul-africano.

a. Na pergunta 1.1., fizeste vários quocientes. Porquê?

b. Na pergunta 1.2., era pedida uma expressão que traduzisse a relação entre as duas moedas. Explica-me a expressão que construíste.

- Como interpretas esta expressão? Se tivesses que a explicar a alguém, como o farias?

c. Na pergunta 1.3., apesar de já teres uma expressão, voltaste a usar a regra de 3 simples. Porquê?

d. Ainda dentro deste problema, imagina que tinhas a seguinte pergunta:

"Quando Mei-Ling regressou a Singapura, três meses depois, tinha ainda 3900 ZAR. Trocou-os por dólares de Singapura, utilizando a mesma taxa de câmbio. Quantos dólares de Singapura (SGD) recebeu Mei-Ling?"

- Por que utilizaste essa estratégia?

e. Se a pergunta anterior fosse referente a 42 ZAR, por exemplo, era necessário utilizar a regra de três simples ou a expressão?

2. Recorda a pergunta 2, sobre o aluguer de um autocarro para uma visita de estudo.

a. A pergunta 2.2. pedia uma expressão que relacionasse o n.º de pessoas transportadas com o preço por pessoa. Escreveste $x + y = 240$. Como obtiveste esta expressão?

b. Na pergunta 2.3., em que era pedido o número de pessoas que ia à visita, se cada uma pagasse 5€, fizeste uma regra de três simples, e obtiveste o resultado "19 pessoas". Por que utilizaste esta estratégia?

- Nesta situação, faz sentido usar uma regra de três simples? Porquê?

c. Esboça um gráfico que represente a relação entre o número de pessoas transportadas e o preço por pessoa.

3. Nesta questão, estavam representados dois gráficos e eram dadas as expressões algébricas.

a. Justifica a associação que fizeste entre as expressões e as funções.

b. Como interpretas as expressões?

c. O que significa $g(2)$? O que observas no gráfico? Por que recorreste à expressão?

d. Na pergunta 3.3., dizes que não se consegue descobrir o valor de x tal que $f(x)=6$. Que dificuldade sentes?

e. O que caracteriza uma função de proporcionalidade directa? Que constante é esta a que te referes?

4. Na pergunta 4, falava-se da festa organizada pela AE, em que o João e a Teresa arranjaram uma expressão para calcular o saldo em função do número de bilhetes vendidos.

a. Explica a interpretação da expressão que escreveste "Cada vez que vende um bilhete, a AE fica com menos 2 euros de prejuízo".

b. Na pergunta 4.4., por que não utilizaste a expressão para determinar o número de bilhetes que era necessário vender para que não houvesse prejuízo.

5. A pergunta 5 relaciona o comprimento e a largura de rectângulos.

a. Afirmaste que o comprimento e a largura são inversamente proporcionais, porque podemos trocar os valores do comprimento e largura e dá o mesmo. Gostava de perceber o que pensaste.

- O que caracteriza uma situação de proporcionalidade inversa?

b. Justifica a escolha do gráfico (B).

- Existe relação entre a informação do gráfico e da tabela? As duas informações estão de acordo?

c. Como obtiveste esta expressão? Como a interpretas?

d. Pensaste na expressão anterior para resolver a pergunta 5.5.?

Anexo 9

Guião da 2.ª entrevista – Manuel

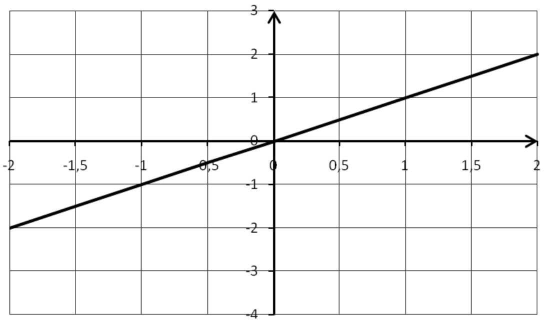
1. Considera a função definida pela expressão $y = 2x + 1$.

1.1. Completa a tabela seguinte:

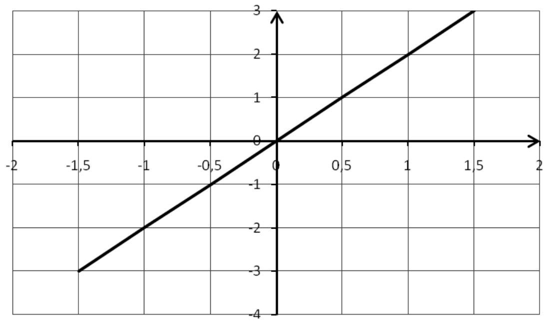
x	***y = 2x + 1***
0	
1	
-0,5	
$\frac{1}{2}$	
	7

1.2. Qual dos gráficos seguintes representa a função $y = 2x + 1$?

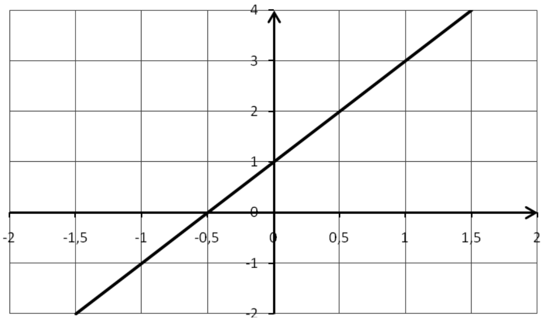
A



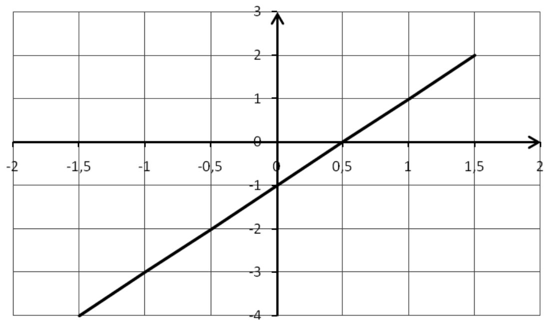
B



C

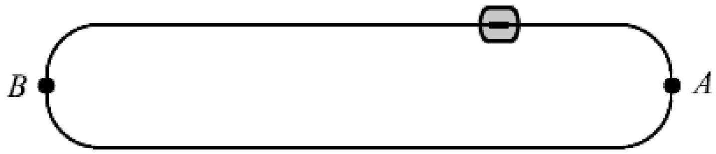


D



- Se tivesses que construir o gráfico a partir da expressão, como farias?

2. A figura seguinte representa o circuito (visto de cima) efectuado por uma cabina do teleférico do Parque das Nações.



Uma cabina parte do ponto A, passa por B e regressa ao ponto A, sem efectuar paragens durante este percurso.

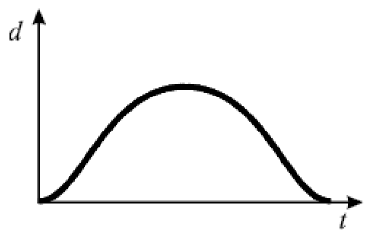
2.1. Sendo:

t o tempo que decorre desde o instante em que a cabina parte do ponto A;

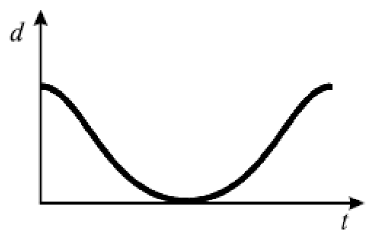
d a distância dessa cabina ao ponto A.

Assinala o gráfico que representa a relação entre *t* e *d*.

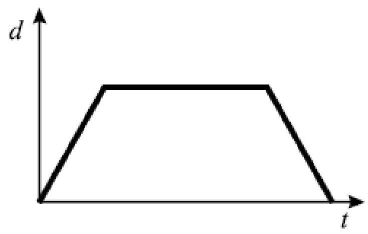
☐ Gráfico A



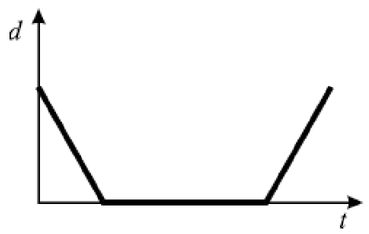
☐ Gráfico B



☐ Gráfico C



☐ Gráfico D



- Inicialmente, a que distância do ponto A se encontra a cabina?

- À medida que o tempo passa, a distância aumenta ou diminui? E depois, existe alguma alteração em termos de distâncias? A partir de que momento?

2.2. No teleférico do Parque das Nações, o número de cabinas utilizadas não é sempre o mesmo, mas duas cabinas consecutivas estão sempre igualmente espaçadas.

O ajuste da distância entre as cabinas feito automaticamente, de acordo com a seguinte fórmula:

$n \times c = 3$, em que:

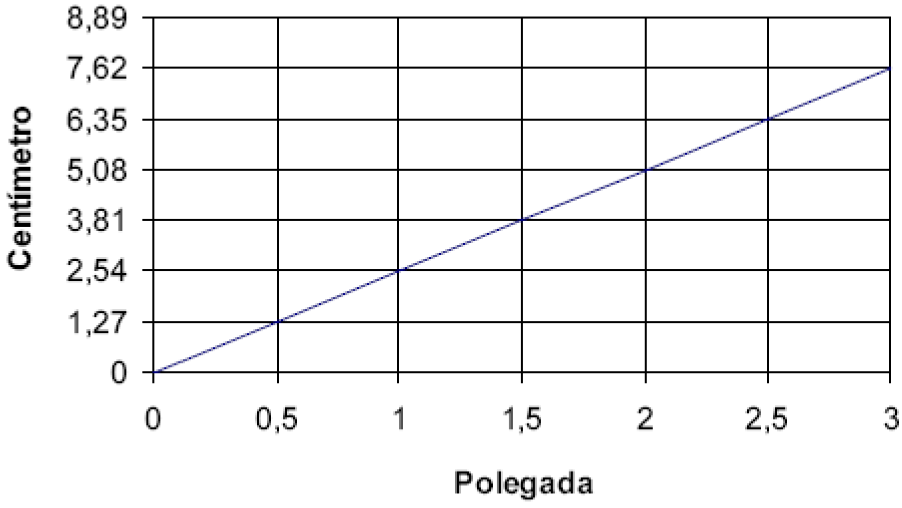
n representa a distância, em quilómetros, entre duas cabinas consecutivas;

c é o número total de cabinas em utilização.

Explica o significado da constante 3 na fórmula $n \times c = 3$.

- Imagina o circuito com um número concreto de cabinas.

3. Por vezes, o comprimento da diagonal do ecrã de um televisor é indicado em polegadas. No gráfico que se segue, podes ver a relação aproximada existente entre esta unidade de comprimento e o centímetro.



3.1. Marca no gráfico os pontos correspondentes a 2,54cm (Ponto A) e 1,25 polegadas (ponto B), com o maior rigor possível.

3.2. Qual das seguintes expressões traduz a relação entre o comprimento em polegadas (p) e o comprimento em centímetros (c)?

A) $p = 2{,}54\ c$

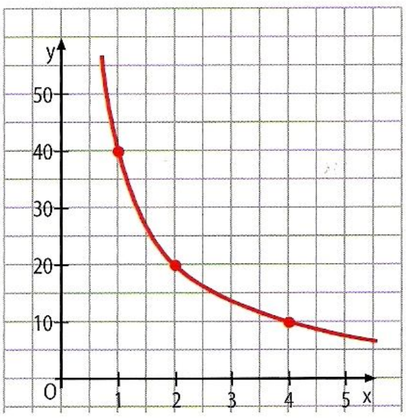
B) $c = \dfrac{2{,}54}{p}$

C) $c = 2{,}\ 54\ p$

D) $c = \dfrac{p}{2{,}54}$

- Uma polegada corresponde a quantos centímetros? E duas polegadas? E três polegadas?

4. Observa o gráfico seguinte:



4.1. Escreve uma expressão que relacione as variáveis x e y.

- Para começar, escolhe alguns pontos do gráfico e escreve as suas coordenadas.

- Se não conseguir escrever a expressão:

4.1.1. Qual das expressões permite relacionar as variáveis x e y?

A) $xy = 20$

B) $y = \dfrac{20}{x}$

C) $y = \dfrac{40}{x}$

D) $y = 40x$

4.2. Indica a ordenada do ponto de abcissa 2.

4.3. Determina o valor de y para x=1.

5. O valor monetário de um computador diminui à medida que o tempo passa. O valor monetário de um computador da marca XPTO é, no momento da sua compra, de 1400 € e, em cada ano que passa, o computador sofre uma desvalorização de 200 €.

5.1. Escreve uma expressão que relacione o valor (v) do computador da marca XPTO com o número de anos (n) decorridos após a sua compra.

- Explica-me a situação.

- Analisa a variação do valor do computador, à medida que os anos passam.

- Qual é o valor do computador após um ano? E após dois anos?

5.2. Determina, em euros, a desvalorização do computador (diminuição do seu valor monetário) dois anos após a sua compra.

- Analisa a desvalorização do computador, ano após ano.

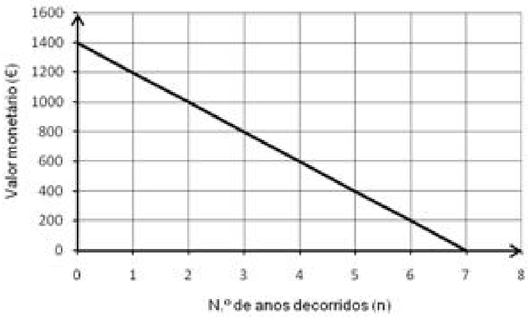
- És capaz de utilizar a expressão?

5.3. Quantos anos são necessários para que o computador perca todo o valor monetário?

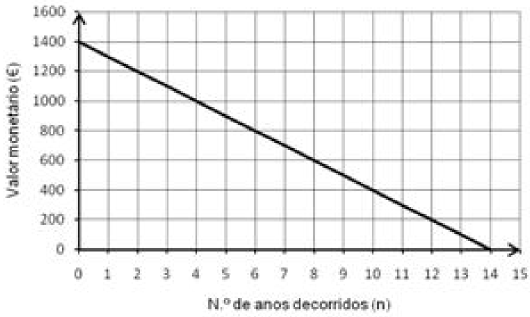
- Analisa a desvalorização do computador, ano após ano.

5.4. Qual dos gráficos representa a relação entre o valor do computador da marca XPTO e o número de anos decorridos após a sua compra?

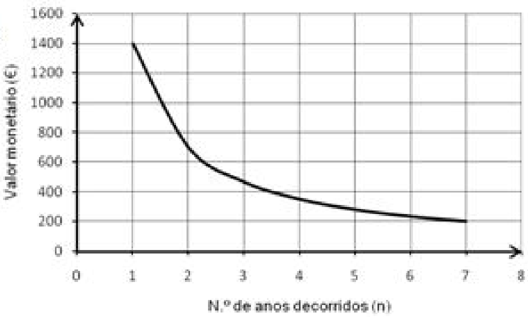
A



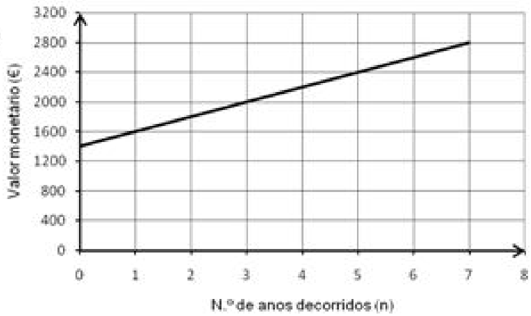
B



C



D



- Conheces valores que te ajudem na escolha do gráfico?

- Achas que é uma função crescente ou decrescente?

- Há algum gráfico que excluas imediatamente?

Anexo 10

Guião da 1.ª entrevista – Cristina

1. Recorda a pergunta 1, sobre a taxa de câmbio entre o dólar de Singapura e o rand sul-africano.

a. Na pergunta 1.2., era pedida uma expressão que traduzisse a relação entre o valor do dólar de Singapura (SGD) e o rand sul-africano (ZAR). Que dificuldades sentiste?

- Observando o gráfico, consegues retirar alguma informação útil sobre a relação entre os rand sul-africanos (ZAR) e os dólares de Singapura (SGD)?

- Se fizeres os cálculos para alguns valores de dólares de Singapura (SGD), consegues observar alguma regularidade?

- Como interpretas esta expressão? Se tivesses que a explicar a alguém, como o farias?

- Esta é uma situação de proporcionalidade directa? Existe algum "modelo" para as expressões, neste caso?

b. Como resolverias a pergunta 1.3., se dissesse que Mei-Ling trocou 10 dólares de Singapura (SGD) por rands sul-africanos (ZAR)?

c. Ainda dentro deste problema, imagina que tinhas a seguinte pergunta:

"Quando Mei-Ling regressou a Singapura, três meses depois, tinha ainda 3900 ZAR. Trocou-os por dólares de Singapura, utilizando a mesma taxa de câmbio. Quantos dólares de Singapura (SGD) recebeu Mei-Ling?"

- Por que utilizaste essa estratégia?

2. Recorda a pergunta 2, sobre o aluguer de um autocarro para uma visita de estudo.

a. Na pergunta 2.2. era pedida uma expressão que relacionasse o preço por pessoa e o número de pessoas transportadas. Escreveste $xy=240$. Como obtiveste esta expressão?

b. Na pergunta 2.3., para determinar o número de alunos que vão à visita, se o preço por pessoa for 5€, utilizaste a expressão. Porquê?

- Era necessário construir e resolver uma equação?

c. Esboça um gráfico que represente a relação entre o número de pessoas transportadas e o preço por pessoa.

- No gráfico, marca os pontos representados na tabela.

3. Nesta pergunta estavam representados dois gráficos e davam-se as expressões algébricas.

a. Justifica a associação que fizeste entre as expressões e os gráficos. Explica o que quiseste dizer com "o traço se cruza com o outro traço".

b. Como interpretas estas expressões?

c. O que significa $g(2)$?

- Consegues indicar outra forma de determinar $g(2)$, sem utilizar a expressão algébrica?

- Consegues encontrar uma forma de determinar $g(2)$, sem utilizar a expressão algébrica?

d. O que significa $f(x)=6$? Como podemos descobrir x?

e. O que é uma relação de proporcionalidade directa? Consegues identificá-la graficamente? E através de uma expressão?

4. Na pergunta 4, falava-se da festa organizada pela AE, em que o João e a Teresa arranjaram uma expressão para calcular o saldo em função do número de bilhetes vendidos.

a. O que significa "Calcular o saldo em função do número de bilhetes vendidos?"

b. Ao explicares o significado da expressão, disseste que "para calcular o saldo, subtrai-se ao dinheiro gasto o dinheiro 'ganho' por cada bilhete". Explica o que querias dizer?

c. Na pergunta 4.4., construíste uma equação e resolveste-a. Será que essa era a maneira mais rápida de determinar o número de bilhetes?

5. Esta pergunta relaciona o comprimento e a largura de rectângulos.

a. Justifica a escolha do gráfico (C).

- Por que assinalaste inicialmente o gráfico (B)?

- Há aqui gráficos que possas eliminar à partida?

b. Explica como pensaste para obter a expressão que relaciona a largura com o comprimento de rectângulos com $18 cm^2$ de área.

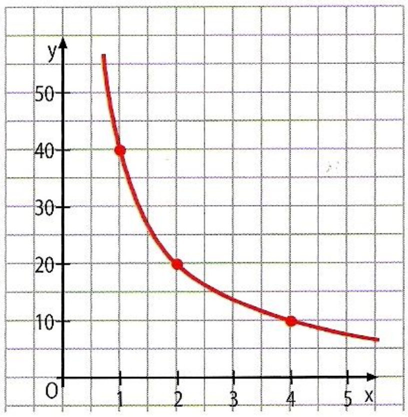
- Pensaste que se tratava de uma situação de proporcionalidade inversa? Pensaste na expressão geral de uma função de proporcionalidade inversa?

c. Na pergunta 5.5., começaste por fazer um quociente, e depois confirmaste com a expressão. Justifica as tuas opções.

Anexo 11

Guião da 2.ª entrevista – Cristina

1. Observa o gráfico seguinte:



1.1. Qual das expressões permite relacionar as variáveis x e y?

A) $xy = 20$

B) $y = \frac{20}{x}$

C) $y = \frac{40}{x}$

D) $y = 40x$

- Para começar, escolhe alguns pontos do gráfico e escreve as suas coordenadas.

1.2. Indica a ordenada do ponto de abcissa 2.

1.3. Determina o valor de y para x=1.

2. O pai da Luísa é vendedor de telemóveis. Como saiu um novo modelo, a empresa para a qual trabalha propôs que fosse vender esse modelo. Mensalmente, o pai da Luísa recebe uma quantia fixa de 500€ e, por cada telemóvel vendido, recebe 34,5€.

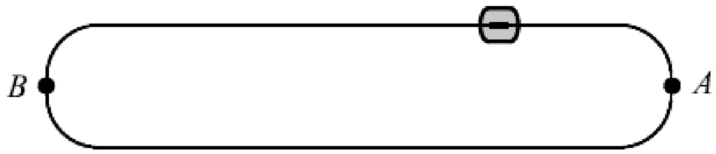
2.1. Escreve uma expressão que permita calcular o vencimento do pai da Luísa, em função do número de telemóveis vendidos.

- Que valores influenciem o ordenado do pai da Luísa?

- Quanto recebe se vender um computador? E se vender dois computadores?

2.2. Qual é o número mínimo de telemóveis que o pai da Luísa tem de vender para que o seu vencimento seja superior a 1200 euros?

3. A figura seguinte representa o circuito (visto de cima) efectuado por uma cabina do teleférico do Parque das Nações.



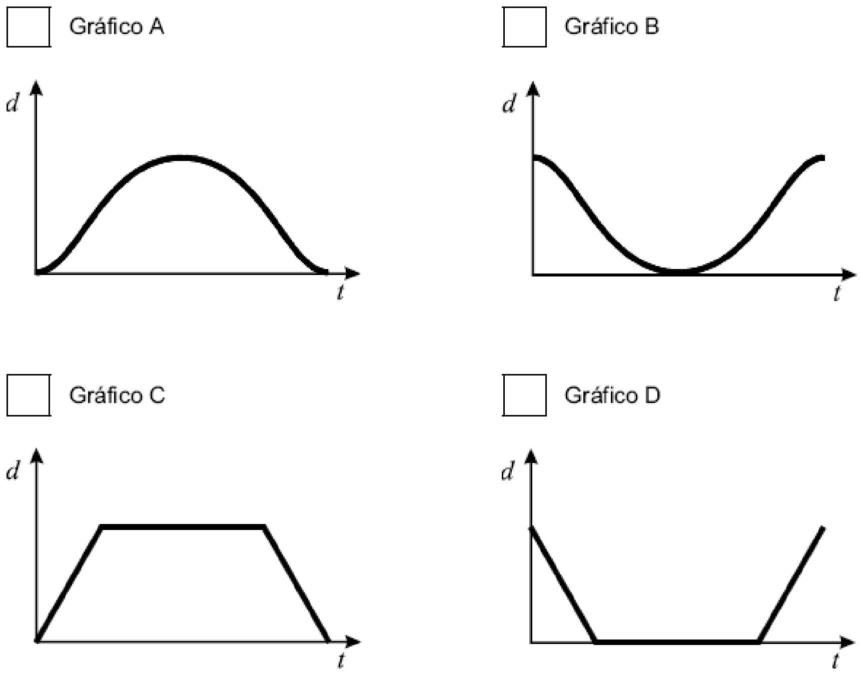
Uma cabina parte do ponto A, passa por B e regressa ao ponto A, sem efectuar paragens durante este percurso.

3.1. Sendo:

t o tempo que decorre desde o instante em que a cabina parte do ponto A;

d a distância dessa cabina ao ponto A.

Assinala o gráfico que representa a relação entre *t* e *d*.



- Inicialmente, a que distância do ponto A se encontra a cabina?

- À medida que o tempo passa, a distância aumenta ou diminui? E depois, existe alguma alteração em termos de distâncias? A partir de que momento?

3.2. No teleférico do Parque das Nações, o número de cabinas utilizadas não é sempre o mesmo, mas duas cabinas consecutivas estão sempre igualmente espaçadas.

O ajuste da distância entre as cabinas feito automaticamente, de acordo com a seguinte fórmula:

$n \times c = 3$, em que:

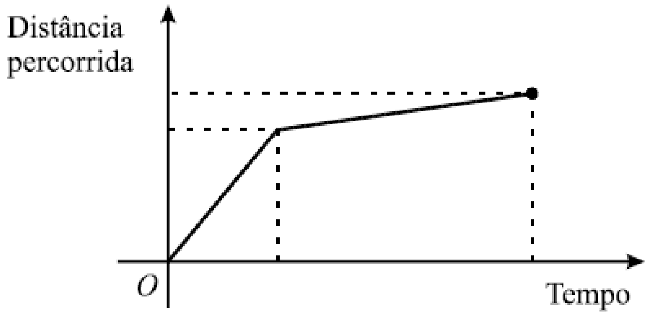
n representa a distância, em quilómetros, entre duas cabinas consecutivas;

c é o número total de cabinas em utilização.

Explica o significado da constante 3 na fórmula $n \times c = 3$.

- Imagina o circuito com um número concreto de cabinas.

4. Hoje de manhã, a Ana saiu de casa e dirigiu-se para a escola. Fez uma parte desse percurso a andar e a outra parte a correr. O gráfico que se segue mostra a distância percorrida pela Ana, em função do tempo que decorreu desde o instante em que ela saiu de casa até ao instante em que chegou à escola.



4.1. De acordo com o gráfico, apenas uma está correcta. Qual?

A) A Ana percorreu metade da distância a andar e a outra metade a correr.

B) A Ana percorreu maior distância a andar do que a correr.

C) A Ana passou mais tempo a correr do que a andar.

D) A Ana iniciou o percurso a correr e terminou-o a andar.

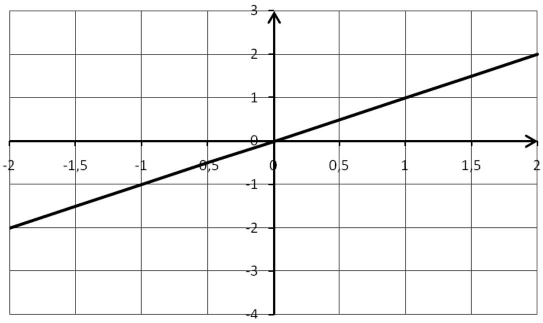
5. Considera a função definida pela expressão $y = 2x + 1$.

5.1. Completa a tabela seguinte:

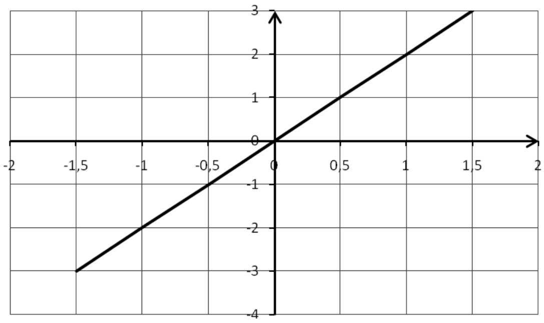
x	***y = 2x + 1***
0	
1	
-0,5	
$\frac{1}{2}$	
	7

5.2. Qual dos gráficos seguintes representa a função $y = 2x + 1$?

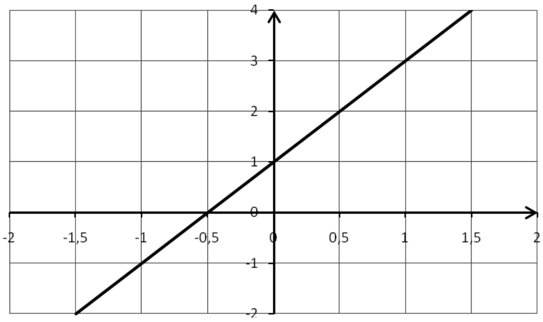
A



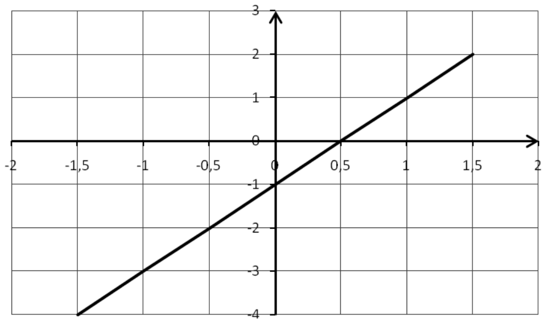
B



C

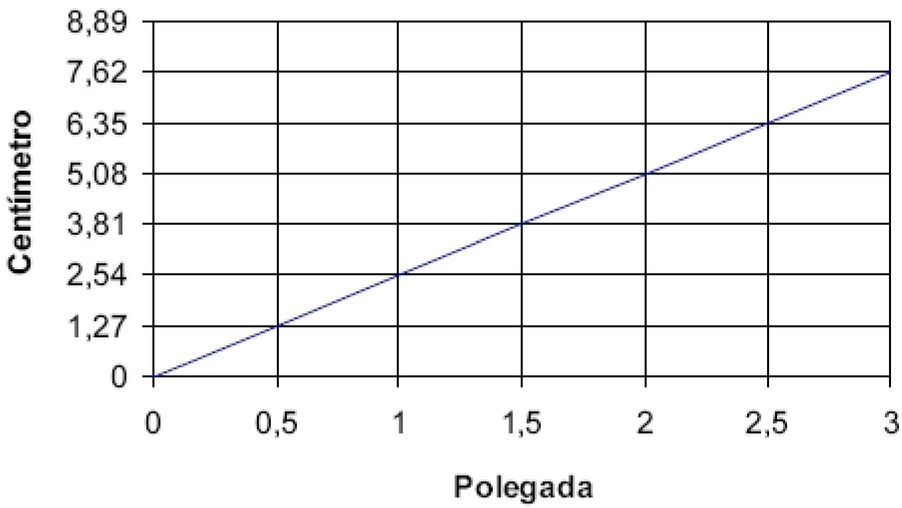


D



- Se tivesses que construir o gráfico, a partir da expressão, como farias?

6. Por vezes, o comprimento da diagonal do ecrã de um televisor é indicado em polegadas. No gráfico que se segue, podes ver a relação aproximada existente entre esta unidade de comprimento e o centímetro.



6.1. Marca no gráfico os pontos correspondentes a 2,54cm (Ponto A) e 1,25 polegadas (ponto B), com o maior rigor possível.

6.2. Qual das seguintes expressões traduz a relação entre o comprimento em polegadas (p) e o comprimento em centímetros (c)?

A) $p = 2{,}54\, c$

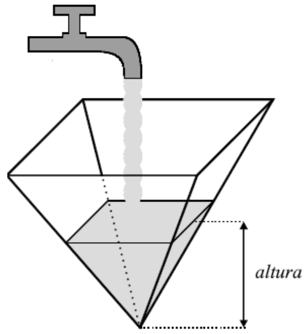
B) $c = \dfrac{2{,}54}{p}$

C) $c = 2{,}54\, p$

D) $c = \dfrac{p}{2{,}54}$

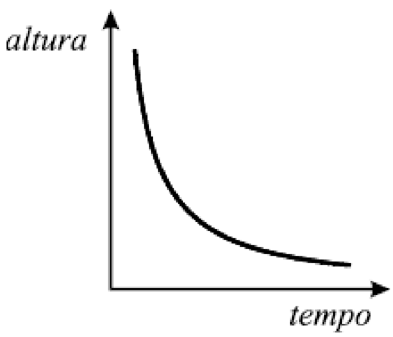
- Para começar, escolhe alguns pontos do gráfico e escreve as suas coordenadas.

7. Imagina que um recipiente com a forma da pirâmide, inicialmente vazio, se vai encher com água. A quantidade de água que sai da torneira, por unidade de tempo, até o recipiente ficar cheio, é constante.

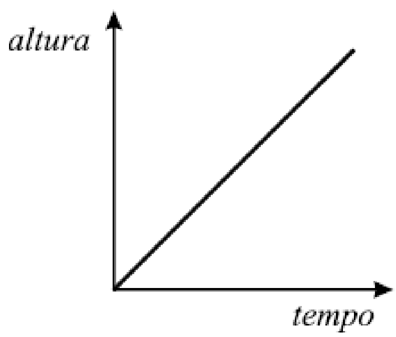


7.1. Qual dos seguintes gráficos poderá traduzir a variação da altura da água, no recipiente, com o tempo que decorre desde o início do seu enchimento?

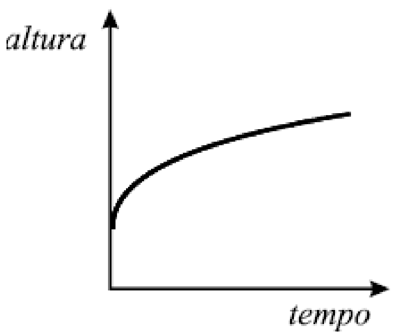
☐ Gráfico **A**



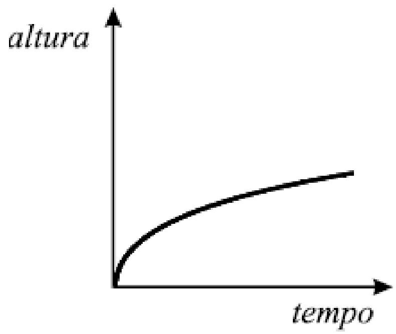
☐ Gráfico **B**



☐ Gráfico **C**



☐ Gráfico **D**



- O que acontece à altura da água no recipiente, à medida que o tempo passa?

- A altura da água aumenta sempre da mesma forma?