

Instituto Superior de Economia e Gestão
Universidade Técnica de Lisboa

I. S. E. G.
Biblioteca
Ec. S.
339-G. 42919

HD #105.4 555
1993

**Os riscos de rendimento de reforma :
a utilidade dos Fundos de Pensões na sua gestão**

Carlos Manuel Pereira da Silva
Resumo da lição de Agregação

Lisboa, Outubro 1993

Sumário

1. Apresentação do tema e objectivos da lição

2. Enquadramento da problemática das reformas

2.1 O rendimento disponível das famílias

2.2 A contribuição da Segurança Social para o rendimento disponível

2.3 A riqueza financeira das famílias

2.4 A riqueza potencial da Segurança Social ligada às reformas por velhice

2.4 O financiamento da Economia

2.5 A função poupança

3. A função utilidade do consumo intertemporal

3.1 Incerteza de vida, pensões e poupança individual

3.2 O efeito da Segurança Social

3.3 O efeito das pensões privadas

4. O papel dos fundos de pensões

4.1 Os factores de perturbação do sistema público de reformas

4.2 Os riscos que afectam o rendimento de reforma

4.3 Objectivos da integração dos planos de pensões na óptica das empresas

4.4 Como funciona a integração?

4.5 Efeito dos planos de pensões sobre a rentabilidade da empresa

5. A gestão de Fundos de Pensões

5.1 Os tipos de Fundos de Pensões

5.2 O Balanço e a Conta de Exploração de um Fundo de Pensões

5.3 Imunização em Seguros de Vida e Fundos de Pensões

5.4 Imunização de uma obrigação pela duração

5.5 Imunização da carteira com modelos estocásticos da taxa de juro

5.6 Conclusão

1. Apresentação do tema e objectivos da lição

Parafrazeando John Kenneth Galbraith (1978) é hoje evidente que o mundo em geral e a economia em particular se encontram na Era da Incerteza. Tudo o que se tinha por adquirido na filosofia, na economia, na sociedade, nas relações entre as nações e na política, revelou-se efêmero, incerto e arriscado. Os acontecimentos que desde há alguns anos têm abalado a história e o mundo confirmam a justeza das apreciações de Galbraith e obrigam a uma séria revisão dos conceitos estabelecidos.

O objectivo da nossa aula é o de apresentar aos alunos do Mestrado em Actuariado e Gestão de Riscos Financeiros uma visão integrada da problemática da reforma, que comporta uma análise dos riscos que podem afectar os rendimentos de reforma e a sua cobertura através de Planos de Pensões de empresas, e um estudo da utilidade dos Fundos de Pensões na mutualização dos riscos de solvência, através de técnicas de imunização dos riscos activos e passivos.

No que diz respeito às decisões de consumo e poupança, os indivíduos agem cada vez mais em função de critérios de curto prazo, porque menos incertos em resultados.

A taxa de poupança, base da acumulação de capital nas décadas de 50 e 60, diminuiu acentuadamente nos principais países industrializados, embora o aumento da esperança de vida nos escalões etários mais avançados pudesse configurar um comportamento mais favorável à poupança.

O desemprego, para além dos seus aspectos anti-sociais, lança na dependência do Estado trabalhadores válidos, cada vez mais novos e por tempo cada vez mais longo. Os efeitos negativos sobre os gastos sociais são duplos: aumento das transferências do Estado para as famílias e diminuição das receitas.

As pensões de reforma, apesar do seu baixo nível de aquisição, tendem a pesar cada vez mais no rendimento disponível das famílias e a influenciarem negativamente a respectiva capacidade de poupança.

A Segurança Social, um dos pilares da política de redistribuição de rendimentos do Estado Providência está a ser posta em causa, devido às incertezas sobre a evolução demográfica e o emprego. Por todo o lado se levantam dúvidas sobre a possibilidade de o Estado continuar, através da cobertura do défice das receitas por via orçamental, a assegurar um rendimento certo àqueles que, após uma vida de trabalho e aforro obrigatório¹, não têm outro rendimento para além do que lhes é proporcionado pelo sistema público de reformas.

Como em todas as decisões de optimização, existe um equilíbrio entre rendimentos e custos marginais inerentes à reforma complementar que deixa o indivíduo num estado de indiferença. A questão central, é saber qual o papel das empresas e dos cidadãos individualmente na procura de um óptimo de Pareto que satisfaça minimamente os intervenientes no processo de renovação do sistema de reformas (Estado, Empresas e Indivíduos).

O recurso aos Planos e Fundos de Pensões, como instrumentos respectivamente de preparação e de fundeamento de benefícios de reforma concedidos pelas empresas, são uma das respostas possíveis para se ultrapassarem as dificuldades inerentes à crise actual do sistema público de reformas.

Quando os indivíduos passam à situação de reforma, desejam garantir a manutenção do seu nível de vida, através da obtenção de um rendimento de substituição do último salário enquanto activos. Como forma de fundeamento de responsabilidades por pensões complementares de reforma, pode dizer-se que a utilidade dos Fundos de Pensões tem a ver com a garantia desse rendimento de substituição para os beneficiários activos das empresas que patrocinam Planos de Pensões. Para além disso, e no caso de existir a integração de benefícios concedidos pelas empresas, com os benefícios do sistema de reformas de base da Segurança Social, os planos de pensões constituem um seguro contra riscos de rendimento de reforma, uma vez que as eventuais reduções da pensão de base são compensadas por acréscimo idêntico de pensão complementar.

Existem dois tipos de riscos específicos² que podem afectar a solvência dos Fundos de Pensões:

- riscos financeiros (rendimento e capital).
- riscos de mortalidade (ou de sobrevivência).

¹ A contribuição para a Segurança Social pode ser considerada uma forma de poupança obrigatória

² Por oposição ao risco sistemático da economia que afecta todos os agentes.

Os primeiros afectam essencialmente o activo do Fundo de Pensões e os segundos incidem, no passivo do fundo, sobre o valor actuarial das responsabilidades por pensões garantidas.

- No que diz respeito aos riscos financeiros existem técnicas de gestão financeira que permitem efectuar o *matching* das responsabilidades dos fundos graças à realização de aplicações financeiras de cobertura nas quais a taxa de rendimento deve ser idêntica à taxa actuarial utilizada na avaliação de responsabilidades. Uma das técnicas é a da dedicação da carteira de activos à carteira de responsabilidades, que é um método de caseamento perfeito entre fluxos de recebimentos e de pagamentos. No entanto a sua rigidez torna o método bastante inflexível.
A outra é a da imunização de activos e passivos. O objectivo da imunização é o de garantir que o valor dos activos de cobertura nunca será inferior, em qualquer momento, ao valor das responsabilidades actualizadas, o que equivale a dizer que a situação líquida do Fundo nunca será negativa.
- Quanto aos riscos de mortalidade, o seu tratamento e gestão dependem da adequação das tábuas de mortalidade legais utilizadas à realidade do grupo seguro, normalmente fechado. É uma variável exógena, fora do controlo do gestor do fundo e as perdas técnicas daí decorrentes constituem perdas excepcionais a serem amortizadas durante o período de vida activa dos trabalhadores.

Após esta introdução ao tema, a aula vai ser organizada da seguinte maneira: o ponto 2 apresenta o enquadramento macroeconómico que condiciona a poupança das famílias numa óptica de ciclo de vida, ou seja, considera-se que o comportamento dos indivíduos neste domínio tem como objectivo maximizar a esperança da utilidade do consumo intertemporal em todo o horizonte de vida, integrando como fonte de financiamento do consumo futuro os rendimentos provenientes quer da poupança acumulada quer da riqueza actuarial da Segurança Social.

Este tema é retomado no ponto 3 mas aqui a nível microeconómico através da função de utilidade do consumo/poupança, a partir dos trabalhos de Ando e Modigliani (1963); tenta-se aí averiguar nomeadamente o efeito das variáveis de rendimento em ciclo de vida, pensões da Segurança Social³ e das pensões complementares de planos de pensões, sobre a poupança dos indivíduos.

³ Conceito introduzido por Feldstein.(1974)

Existindo riscos de redução de benefícios de reforma, os planos de pensões adquirem o estatuto de um seguro contra esses riscos. Esta ideia é analisada no ponto 4 com a integração desses planos na cobertura de riscos de reforma estabelecendo-se a ponte com o problema do valor de mercado da empresa. Recorre-se à teoria das opções e aos trabalhos de Merton e outros (1987) e de Sharpe (1976) para perceber a lógica da integração dos planos de Pensões na óptica da empresa.

A gestão de Fundos de Pensões no que diz respeito à garantia das responsabilidades assumidas pela empresa que institui um plano de pensões e os aspectos da imunização são objecto do ponto 5. São aqui estudados o modelo determinístico de imunização de Redington (1952) e a versão estocástica de Boyle (1978).

Como forma de ajudar o estudante na compreensão de alguns dos instrumentos da análise, incluímos em capítulo anexo, noções fundamentais sobre algumas das matérias teóricas de base, necessárias à compreensão do problema tratado nesta aula.

2. Enquadramento da problemática das reformas

2.1 O rendimento disponível das famílias

Ao abordar-se o tema do rendimento de reforma, proveniente ou de poupança acumulada, ou de um instituição pagadora, tratamos necessariamente de uma componente do rendimento disponível das famílias, em crescimento, como se pode constatar no Quadro 2.1.

QUADRO 2.1 - RENDIMENTO DISPONÍVEL DAS FAMÍLIAS

	Preços Correntes			Milhões de Contos			
	1980	1982	1984	1986	1988	1990	1991
Salários	549.2	815.7	1097.3	1630.5	2199.4	3107.8	3709.3
Índice (Base 100=1980)	100	148.53	199.80	296.89	400.47	565.88	675.40
Rend. Empresas e Propriedades	450.5	670.5	1208.4	1716.3	2067.6	2829.8	3255.2
Índice (Base 100=1980)	100.00	148.83	268.24	380.98	458.96	628.15	722.57
Transferências Internas	136.8	244.7	386.5	547.7	874.03	1219.6	1480.9
Índice (Base 100=1980)	100	178.87	282.53	400.37	638.91	891.52	1,082.53
Prestações de reforma	38.2	64.6	96.4	157.9	225.2	331.9	420
Índice (Base 100=1980)	100	169.03	252.3	413.4	589.5	868.8	1099.5
Transferências Externas	53.7	215	320.3	395.6	520.6	638.3	660.3
Índice (Base 100=1980)	100.00	400.37	596.46	736.69	969.46	1,188.64	1,229.61
Rendimento Pessoal	1190.2	1945.9	3012.5	4290.1	5661.6	7795.5	9105.7
Índice (Base 100=1980)	100.00	163.49	253.11	360.45	475.68	654.97	765.06
Impostos directos	60.6	108.5	160.4	249	324	532.2	691.9
Índice (Base 100=1980)	100.00	179.04	264.69	410.89	534.65	878.22	1,141.75
Contribuições sociais	28.8	53.9	102.81	115.4	220.08	306	364.8
Índice (Base 100=1980)	100.00	187.15	356.98	400.69	764.17	1,062.50	1,266.67
Rendimento Disponível	1100.8	1783.5	2749.3	3925.7	5117.6	6957.3	8049
Índice (Base 100=1980)	100.00	162.02	249.75	356.62	464.90	632.02	731.20

Fonte: Banco de Portugal - Relatórios do Conselho de Administração 1980/91.

O crescimento dos salários é inferior ao crescimento do rendimento da propriedade e das empresas e ao das transferências internas, incluindo-se nestas últimas as pensões de reforma

2.2 A contribuição da Segurança Social para o rendimento disponível

Principais constatações:

- Aumento importante na década de 80
- O montante das prestações aproxima-se do valor de 4% do PIB

QUADRO 2.2 - EVOLUÇÃO DA CONTA DE REFORMA POR VELHICE

	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
											*	**
Receitas/Milhões de Contos												
Proveitos Correntes	116.4	142.8	169	199.3	247.9	379.0	443.3	542.9	620.1	754.4	943.7	1098
donde Contribuições	114.3	140.1	166	195.8	241.9	368.2	427.2	520.8	601.0	725.4	807.0	910
donde Outros proveitos	2.1	1.7	3	3.5	6.0	10.8	16.1	22.1	19.1	29.0	136.7	188
Transferências	8.01	10.72	17.55	45.87	30.1	32.7	40.27	53.58	78.49	65.53	78.2	n.d.
Despesas/Milhões de Contos												
Prestações de reforma	51.82	64.57	79.46	96.37	118.9	157.9	191.3	225.2	256.9	331.9	420	420
Prestações Invalidez	24.51	31.67	39.04	47.86	56.63	68.47	82.83	100.1	113.58	131.5	154	n.d.
Total	76.33	96.24	118.5	144.2	175.6	226.4	274.1	325.3	370.48	463.4	574	n.d.
Contrib. /Proveitos (%)	98.2	98.2	98.2	98.2	97.6	97.1	96.4	95.9	96.9	96.2	90.0	n.d.
Prest. Velhice e Inval. /Proveitos (%)	65.6	67.4	70.1	72.4	70.8	59.7	61.8	59.9	59.7	61.4	60.8	n.d.
Transf. /Contribui. (%)	7.0	7.6	10.6	23.4	12.4	8.9	9.4	10.3	13.06	9.0	9.2	n.d.
Prest. Reforma/Cont. (%)	45.3	46.1	47.9	49.2	49.2	42.9	44.8	43.2	42.7	45.8	49.5	46.2
Prest. Invalidez/Cont (%)	21.4	22.6	23.5	24.4	23.4	18.6	19.4	19.2	18.9	18.1	18.2	n.d.
Total Prest. / Cont.(%)	66.7	68.7	71.4	73.6	72.6	61.5	64.2	62.4	61.6	63.9	67.7	n.d.
Contrib./PIB (%)	7.6	7.6	7.2	7.0	6.9	8.3	8.3	8.7	8.4	8.5	8.1	8.4
Reformas /PIB (%)	3.4	3.5	3.4	2.4	3.4	3.6	3.7	3.8	3.6	3.9	4.0	3.9

Fonte: Relatórios do Banco de Portugal, I.N.E. e Contas da segurança Social

* Relatório do Gafeep 1992

- Quais foram, neste período, as principais características do comportamento das famílias no domínio da poupança ? A queda da taxa de poupança na década de 80, tendência mais acentuada após 1986.
- Que causas estarão por detrás deste fenómeno?
Apesar do crescimento sensível do rendimento disponível no período de 1980 a 1991, a aceleração do consumo privado parece ser, a partir de 1988, a causa próxima da quebra na taxa de poupança das famílias (Quadro 2.3).

QUADRO 2.3 - A TAXA DE POUPANÇA DOS PARTICULARES

U: Milhões de Contos

	1980	1982	1984	1986	1988	1990	1991
Rendimento Disponível	1100.8	1783.5	2749.3	3925.7	5117.6	6957.3	8049
Índice (Base 100=1980)	100.00	162.02	249.75	356.62	464.90	632.02	731.20
Consumo Privado	817.2	1270.0	1979.0	2868.9	3969.4	5489.9	6434.6
Índice (Base 100=1980)	100	155	242	351	486	672	787
POUPANÇA	283.6	513.5	770.34	1056.8	1148.2	1467.4	1614.4
Índice (Base 100=1980)	100	181	272	373	405	517	569
Tx. Poupança (% RD)	25.76%	28.79%	28.02%	26.92%	22.44%	21.09%	20.06%

2.3 A riqueza financeira das famílias

No mesmo período as famílias aumentam os seus activos não monetários, principalmente os ligados aos seguros de vida.

- aumento dos outros activos
- aumento das provisões matemáticas do ramo vida

QUADRO 2.4 - RIQUEZA FINANCEIRA DAS FAMÍLIAS E SUAS COMPONENTES

U: Milhões de Contos

ANOS	Moeda Fiduciária	Depósitos à Ordem	Depósitos a Prazo	Outros Activos	Total Riqueza Financeira	Prov. Mat. Vida	Prov. Mat. A. T.	Total Riqueza
1980	145.1	170.4	542.6	125.5	983.6	18.0	7.97	1,009.6
1981	166.3	185.1	747.6	127.1	1226.1	21.3	9.91	1,257.3
1982	180.4	211.1	966.5	134.3	1492.3	25.9	12.87	1,531.1
1983	191.1	231.2	1,184.8	154.0	1761.1	31.4	16.29	1,808.8
1984	215.5	269.7	1,541.8	175.7	2202.7	37.6	19.74	2,260.0
1985	262.2	370.0	1,896.0	303.5	2831.7	38.6	18.81	2,889.1
1986	334.1	523.5	2,115.9	574.4	3547.9	45.9	22.14	3,615.9
1987	388.0	601.5	2,402.5	977.2	4369.2	60.1	26.47	4,455.8
1988	435.3	687.4	2,704.4	1,334.7	5161.8	85.5	31.89	5,279.2
1989	500.2	803.9	3,240.0	1,731.7	6275.8	124.0	38.97	6,438.8
1990	537.2	910.3	3,803.1	2,402.3	7652.9	180.7	48.13	7,881.7
1991	588.1	1,224.0	4,306.1	n.d.	n.d.	261.2	58.43	n.d.

Fontes:

(1) Até 1980, as séries da riqueza são os valores publicados no Documento de Trabalho Nº8, " Estimativas Anuais de Riqueza Financeira das Famílias", Banco de Portugal, 1985

(2) A partir de 1981, inclusivé, os valores da riqueza foram estimados através da variação de activos, da Conta de operações financeiras para a economia portuguesa. Relatórios do Banco de Portugal.

(3) Estatísticas do ISP

Notas:

(1) Os Outros Activos incluem riqueza aplicada em Títulos da Dívida Pública, Obrigações, Títulos de Participação, Acções, e outras aplicações financeiras.

(2) As provisões matemáticas dos seguros de vida incluem até 1976, por impossibilidade de separação as reservas matemáticas dos acidentes de trabalho.

2.4 A riqueza potencial da Segurança Social ligada às reformas por velhice

As responsabilidades com reformados, ou seja as responsabilidades correspondentes a pensões que estão já em curso, calculadas em ciclo de vida (VAPR), apresentam uma evolução crescente desde a década de 80 que tenderá a agravar-se no futuro⁴.

QUADRO 2.5 - EVOLUÇÃO DA RIQUEZA DA SEGURANÇA SOCIAL

U: Milhões de contos

	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1992
Prest. Reforma /VAPR(%)	12.91	12.63	12.38	12.95	12.50	12.51	12.02	11.96	11.90	11.78	12.00
VAPR	475	604	757	878	1,121	1,486	1,877	2,221	2,546	3,320	3,987
VBARA	1,281	1,680	1,851	2,006	2,279	2,958	3,313	5,372	4,853	5,739	7,747
Total =VABR	1,756	2,284	2,608	2,884	3,400	4,444	5,190	7,593	7,399	9,059	11,734
VAPR/RD (%)	33.06	33.40	34.32	31.94	33.53	37.85	41.83	43.40	42.78	47.72	43.45
VBARA/RD(%)	89.24	93.06	83.88	72.95	68.17	75.36	73.82	104.97	81.53	82.49	84.41
VABR/RD (%)	122.30	126.50	118.20	104.89	101.70	113.21	115.65	148.37	124.31	130.21	127.86

Legenda:

VAPR - Valor actual das pensões de reforma

VBARA - Valor actual dos benefícios adquiridos pelos activos

VABR - Valor actual dos benefícios de reforma= VAPR + VBARA

Se considerarmos também os direitos adquiridos pelos activos (VBARA) constata-se que o total da dívida da Segurança Social, para efeitos de reforma (VABR), em percentagem do Rendimento Disponível (RD) oscila entre 122.30% em 1981 e 127.86% em 1992.

A avaliação em termos de riqueza potencial, só nos dá uma medida dos direitos dos activos e reformados em ciclo de vida, e não constitui um valor mercantil negociável em qualquer mercado.

Não temos porém dúvidas que muito do crédito futuro a conceder pelos bancos às famílias, passará pela análise da curva de rendimentos do agregado familiar em ciclo de vida. Nesta medida, a riqueza potencial da Segurança Social serve de garante ao reembolso de dívidas de longo prazo.

⁴ Ver "A Reforma, a poupança e a Integração dos fundos de Pensões: o caso Português"(1993)

2.5 O financiamento da economia

A capacidade de financiamento da economia é obtida após a dedução do investimento bruto realizado pelos agentes económicos.

QUADRO 2.6 - CONTA DE CAPITAL

Unidade: 10⁹ Escudos

1986	\$10	\$80	\$40	\$50
Empregos				
Transf. Capital	101,6	11	14,6	0,1
FBCF	469,4	335,4	29,2	4,7
Aq.Liq.T.Act.Inc.	1,7	(7.7)	3,1	0,01
Cap.(Nec.) Financ.	(293.2)	693,2	7,5	(3.3)
Recursos				
Poupanca Bruta	138,6	1020,9	54,3	1,5
Transf. Capital	140,8	14,0	0,2	0
1987	\$10	\$80	\$40	\$50
Empregos				
Transf. Capital	22,2	13,8	21,8	0,2
FBCF	779,8	419,4	44	4,4
Aq.Liq.T.Act.Inc.	1,7	(13.2)	8,2	0,1
Cap.(Nec.) Financ.	(394.1)	741,1	44,6	(4.1)
Recursos				
Poupanca Bruta	287,8	1141,8	117,7	0,6
Transf. Capital	121,9	19,2	0,9	0
1988	\$10	\$80	\$40	\$50
Empregos				
Transf. Capital	11,7	12,8	41,4	0
FBCF	981,9	521,7	52,7	3,8
Aq.Liq.T.Act.Inc.	2,2	(9.3)	4,0	0,1
Cap.(Nec.) Financ.	(554.3)	638,5	45,2	(3.6)
Recursos				
Poupanca Bruta	327,2	116,5	136,7	(4.7)
Transf. Capital	114,1	47,1	6,6	5,0

Fonte: I.N.E.

Como não há uma ligação directa entre as necessidades e os excedentes de capitais é necessário fazer intervir a conta de operações financeiras, cujo saldo ajustado corresponde às necessidades de financiamento da economia.

Os intermediários financeiros são os agentes vocacionadas para a gestão das capacidades e necessidades de financiamento.

2.6 A função poupança

Existem duas teses fundamentais para se compreender o impacto macroeconómico dos sistemas de reforma:

- a tese da depressão Feldstein (1974, 1980)
- a tese do incentivo- Cagan(1965)

O modelo explicativo da poupança de Munnell(1982) permite-nos avaliar simultâneamente o papel da reforma pública na poupança privada e o efeito de substituição entre pensões públicas e privadas.

A poupança privada (**PPR**) é igual à soma da poupança pessoal (**PPE**) com os lucros das empresas não distribuídos (**RE**). Tem-se então:

$$\mathbf{PPR} = \mathbf{PPE} + \mathbf{RE}$$

Admitindo, de acordo com Ando e Modigliani (1963), que a poupança pessoal é influenciada pelos rendimentos do ciclo de vida⁵, então a poupança privada no período t , \mathbf{PPR}_t , é dada por:

$$\mathbf{PPR}_t = b_0 + b_1 Yd_t + b_2 Yd_{t-1} + b_3 Ru + b_4 W_{t-1} + b_5 SSW_t + (1+b_6) RE_t$$

com:

Yd_t = Rendimento disponível no período t

Ru = Taxa de desemprego

W_t = Valor da riqueza financeira, per capita, no período t

SSW_t = Valor actual da riqueza proveniente das pensões da Segurança Social, no período t ⁶

RE_t = Lucros retidos no período t

Este modelo permite, segundo Feldstein (1974), responder a três ordens de preocupações:

- De quanto é que os empregados cobertos pelo sistema reduzem as suas poupanças correntes (não destinadas à reforma), por cada escudo de valor actual de benefício de reforma ?
- Qual a fracção dos benefícios antecipados de reforma que é normalmente fundada pelas empresas ?

⁵ Ando e Modigliani (1963)

⁶ Calculada de forma aproximada, de acordo com Feldstein (1974)].

- Até que ponto os detentores do capital aumentam as suas poupanças correntes para compensarem as responsabilidades com Planos de Pensões não fundeadas das suas empresas ?

A introdução, no modelo anterior, de uma variável representativa das contribuições para Fundos de Pensões (FP_t) e de uma variável para outras formas de riqueza (SO), permite a Feldestein obter uma outra versão do modelo de Poupança Privada:

$$PPR = b_0 + b_1 Yd_t + b_2 Yd_{t-1} + b_3 Ru + b_4 W_{t-1} + b_5 SSW_t + (1+b_6) RE_t + b_7 SO_t + b_8 FP_t$$

SO =Outras formas de poupança (Seguros de Vida).

FP_t = Reservas de Fundos de Pensões

O modelo foi estimado⁷ a preços de 1960, pelo que a influência das variáveis está expurgada do efeito da inflação.

QUADRO 2.7 - FUNÇÃO POUPANÇA - MODELO *PER CAPITA* A PREÇOS CONSTANTES
VARIÁVEL DEPENDENTE: TAXA DE POUPANÇA PRIVADA

1ª Versão	Yd_t	Yd_{t-1}	Ru	W_{t-1}	SSW	RE	$D1$	FP	Const.	R^2	DW
Coefficientes	0.386	-0.092	-0.723	-0.132	0.09	0.302	-0.012	-18.604	0.124	0.7999	1.49
Desvio Padrão	0.093	0.142	0.217	0.062	0.049	0.248	0.02	5.469	0.032		
	**		**	**				**	**		

⁷ As regressões, pelo método dos mínimos quadrados vulgares, foram obtidas usando o programa Ystat com correcção automática da autocorrelação. Copyright de Ming Telecomputing (1991).

3. A função utilidade do consumo intertemporal

A função de consumo intertemporal considera que a riqueza potencial proveniente da Segurança Social a título de pensões vitalícias faz parte do rendimento permanente dos indivíduos.

Desta forma, o modelo de consumo obedece às asserções da teoria do ciclo de vida enunciadas por Ando e Modigliani (1963), quando estes afirmam que "*o ponto de partida da Teoria do Ciclo de Vida é a hipótese de as decisões de consumo e investimento das famílias em cada momento reflectirem, de forma aproximada, uma tentativa consciente de atingirem a distribuição preferida de consumo em todo o ciclo de vida, sujeita à restrição imposta pelos recursos obtidos pelas famílias no horizonte de vida*".

3.1 Incerteza de vida, pensões e poupança individual

A incerteza acerca da duração da vida, pode obrigar um indivíduo a poupar mais do que aquilo que seria desejável, a fim de fazer face à possibilidade de viver acima da idade esperada máxima.

Hubbard (1987) apresenta um modelo cujos principais pressupostos são:

- não existência de heranças.
- a idade de reforma Q é exógena (fixada pelo Governo).
- o indivíduo vive de certeza Q períodos de tempo.

A probabilidade de um indivíduo morrer no intervalo $[0,t]$ é p_t para qualquer t . Esta probabilidade é nula no intervalo $[0,Q]$.

Os indivíduos têm uma esperança de vida de D anos, com $D' > D$, idade máxima a que o indivíduo pode aspirar viver.

Os indivíduos recebem um salário bruto w_t em cada período t que cresce por hipótese à taxa g . A taxa de impostos sobre os salários é q .

O modelo da escolha intertemporal do consumidor é dado pela maximização da função aleatória de utilidade do consumo:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^D (1-p_t) U(C_t) (1+\delta)^{-t}$$

sujeita à restrição orçamental, função do salário inicial:

$$\text{s. a.} \sum_{t=0}^D C_t (1+r)^{-t} = K_0 + (1-\theta) w_0 \sum_{t=0}^Q \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^t$$

com

C_t = consumo no período t

r = taxa de juro real

K_0 = recursos iniciais provenientes de herança acidental

d = a taxa de desconto (subjectiva) constante ou coeficiente de impaciência.

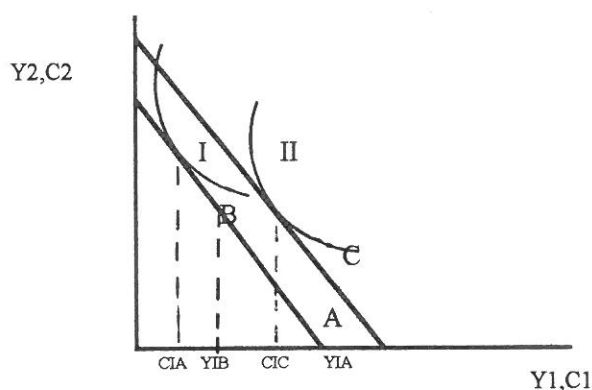
3.2. O efeito da segurança social

Segundo Feldstein (1976), a Segurança Social exerce uma dupla e contraditória influência nas Poupanças Individuais e por isso mesmo no consumo corrente. De facto:

- reduz a poupança pessoal, uma vez que substitui os activos das famílias reduzindo igualmente as heranças acidentais.
- aumenta as poupanças pessoais uma vez que alonga o período de reforma durante o qual se detêm os activos acumulados.

O efeito líquido das duas direcções depende da força relativa destas duas forças.

Na figura seguinte, ilustra-se este duplo efeito



Fonte: Feldestein (1976)

No eixo das abcissas mede-se o rendimento e o consumo antes dos 65 anos (Y_1 e C_1). No eixo das ordenadas mede-se o rendimento e o consumo após a idade de reforma (Y_2 e C_2).

A restrição orçamental vem agora

$$\sum_{t=0}^D C_t (1+r)^{-t} = K_0 + (1-\theta - t_s) \sum_{t=0}^Q W_0 \frac{(1+g)^t}{(1+r)^t} + \sum_{t=Q+1}^D S_t (1+r)^{-t} \quad 1)$$

Seja:

t_s = taxa de contribuição para a Segurança Social incidente sobre os salários brutos. É a partir das contribuições resultantes que é feito o fundeamento da Segurança Social.

S_t = benefícios por reforma da Segurança Social, pagáveis em cada período t , desde a data da reforma até à morte do indivíduo.

Se S for definido como uma taxa de substituição do salário final e for um benefício actuarialmente justo, isto é, $S = R w_Q$, onde R é a taxa de substituição de rendimentos. Então S satisfaz a condição:

$$S \sum_{t=Q+1}^D (1-p_t) (1+r)^{-t} = t_s \sum_{t=0}^Q W_0 \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^t$$

Substituindo em 1)

$$\sum_{t=0}^{D'} C_t (1+r)^{-t} = K_0 + (1-\theta + t_s(\omega-1)) \sum_{t=0}^Q W_0 \frac{(1+g)^t}{(1+r)^t} \quad 2)$$

onde w resulta do quociente entre taxas de desconto em situação de certeza e de incerteza e é igual a:

$$\omega = \frac{\sum_{t=Q+1}^{D'} (1+r)^{-t}}{\sum_{t=Q+1}^{D'} (1-p_t)(1+r)^{-t}}$$

Como $w > 1$ o sistema gera um aumento dos rendimentos do ciclo de vida.

3.3 O efeito das pensões privadas

No caso de nem todos os indivíduos terem acesso idêntico a um sistema de pensões de reforma, providenciadas pela Segurança Social, e exista um tecto salarial para efeito de impostos então a participação efectiva é maior para rendimentos baixos do que para altos.

A restrição orçamental 2) vem

$$\sum_{t=0}^D C_t (1+r)^{-t} = K_0 + \sum_{t=0}^Q (1-\theta + \bar{t}_s (\omega - 1)) w_0 \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^t$$

onde

$$\bar{t}_s = t_s \left(\frac{\bar{w}}{w_0} \right)$$

É esta restrição que está na base da criação dos Planos de Pensões privados que garantem um complemento de pensão tal que, adicionado à pensão da Segurança Social permite que o beneficiário obtenha, se estiver vivo à idade da reforma, um rendimento de substituição pré-fixado no plano.

Devido ao facto de os titulares de altos rendimentos (aqueles em que $w_0 > \bar{w}$) serem obrigados a participar na Segurança Social a um nível inferior ao que desejariam⁸, existe um excesso de procura de anuidades públicas (racionamento de anuidades) que pode ser compensado por anuidades privadas. Desta forma, o racionamento das pensões da Segurança Social pode vir a ser resolvido através de anuidades concedidas pelas empresas que instituem Planos de Pensões.

A selecção adversa e a possibilidade de existência de uma multiplicidade de seguros tornam improvável a venda de tais anuidades em termos individuais através de Companhias de Seguros Privadas.

Os Fundos de Pensões empresariais podem suprir esta carência uma vez que neste caso (capitalização colectiva) não se põe o problema da anti-selecção inerente aos seguros facultativos.

Suponha-se que existe contribuição dos trabalhadores para determinado Fundo de Pensões.

⁸ Em Portugal, à semelhança do que se passa nos outros países, vai concerteza existir um tecto de limite de pensão.

Seja

P = A pensão de reforma, justa, na idade de reforma (determinado pelo produto da taxa de substituição pelo salário final)

t_p = A redução de salário correspondente ao benefício de reforma.

No contexto deste modelo, o trabalhador gere somente $(1-q)*t_p$ da redução de salário, onde:

θ - é a taxa marginal de imposto sobre o rendimento

$\hat{\theta}$ - é a taxa marginal de imposição sobre os benefícios $\theta > \hat{\theta}$ Introduce-se uma taxa b que mede o grau de justiça actuarial dos benefícios.

Os benefícios recebidos são iguais a βP onde P é solução da equação:

$$P \sum_{t=Q+1}^D (1 - p_t)(1+r)^{-t} = t_p \sum_{t=0}^Q w_0 \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^t$$

Quando $\beta=1$ os benefícios são actuarialmente justos. Quando $\beta < 1$ os benefícios são injustos.

A restrição orçamental pode agora reescrever-se como:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^D C_t (1+r)^{-t} &= \\ &= K_0 + (1 - \theta - \bar{t}_s(\omega - 1) + t_p((1 - \theta)\beta\omega - (1 - \theta - \bar{t}_s))) \sum_{t=0}^Q w_0 \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^t \end{aligned}$$

permanecendo $\omega > 1$.

Enquanto b for próximo da unidade e a taxa de imposto sobre o rendimento das pensões privadas for inferior à taxa de imposição do rendimento do período activo, os planos de pensões não afectam a Poupança Privada. De facto, eles constituem uma forma de aplicação da poupança e substituem, isso sim, outras formas de poupança, nomeadamente seguros de vida que garantem rendas vitalícias e investimentos imobiliários.

O tratamento fiscal das contribuições para Fundos de Pensões reforça o papel das anuidades privadas como mecanismo de atenuação do racionamento das anuidades públicas e pode mesmo gerar um aumento nos recursos de ciclo de vida se $(1 - \theta)\beta\omega > (1 - \theta - \bar{t}_s)$.

Segundo Hurd (1990) um indivíduo sem um motivo de herança pode inclusivamente aumentar a sua utilidade esperada em ciclo de vida, adquirindo anuidades privadas, para além das providenciadas pelos sistemas públicos e privados de reforma.

4. A integração dos Fundos de Pensões na cobertura dos riscos de reforma

4.1 Os factores de perturbação do sistema público de reformas

Se considerarmos na avaliação dos custos das pensões de reforma, não só o valor das pensões que actualmente estão a ser pagas, mas também os custos futuros com pensões em curso e os direitos já adquiridos pelos actuais activos, podemos admitir que existe hoje um problema de financiamento no sistema público de reformas. Com efeito, Pereira da Silva e outros (1993) concluíram que no ano 2020, a relação entre o valor dos benefícios actuariais e o PIB será de 204% contra 127.9% em 1992.

O agravamento do défice do sistema de reformas é pois inevitável, uma vez que a insuficiência de recursos face às despesas tende a agravar-se. A situação actual deve-se à extensão dos benefícios a camadas mais vastas da população, à introdução de novos tipos de benefícios⁹, à fraca renovação da população activa em relação ao crescimento do número de inactivos e, por último ao aumento da esperança média de vida que influencia o custo dos benefícios já em curso, sem a contrapartida proporcional das receitas de cobertura financiadas com base nos activos.

Os fundos de pensões podem constituir uma alternativa de minimização de perdas expectáveis em caso de introdução de um tecto salarial com vista à redução da pensão do sistema público.

4.2 Os riscos que afectam o rendimento de reforma

Para Bodie(1990), os sistemas de reforma empresarial têm como objectivo proteger o trabalhador de um risco de insegurança económica na situação de reforma e constituem um 2º nível de cobertura dos riscos de rendimento da reforma.

De uma forma genérica, pode dizer-se que qualquer trabalhador com aversão ao risco pretende cobrir-se contra as seguintes fontes de risco de rendimento de reforma:

- Inadequação da taxa de substituição do rendimento, a qual torna impossível a manutenção do nível de vida que o reformado usufruía, enquanto no período activo.

⁹ Como sejam a assistência à família, o desemprego (que tende a ser estrutural) e o subsídio de doença.

- Cortes nos benefícios da Segurança Social antes que o trabalhador atinja a idade de reforma, sem capacidade de actualização de benefícios a partir dessa idade.
- Longevidade na situação de reforma, que faz com que o trabalhador sobreviva ao período previsto para cálculo da provisão do rendimento da reforma, sem acesso a um mercado eficiente de rendas vitalícias imediatas.
- Risco de investimento, devido ao tipo de activos onde foi investida a provisão para o rendimento de reforma.
- Risco de inflação, que põe em causa o poder de compra da poupança no momento da reforma.

4.3 Objectivos da integração dos planos de pensões na óptica das empresas

Segundo Merton e outros(1987), os propósitos da integração dos Planos de Pensões, na óptica das empresas são os de:

- Assegurar uma adequação do rendimento da reforma para todos os empregados cobertos;
- Assegurar a equidade do rendimento, definido como igualdade do rendimento de substituição para todos os empregados, independentemente do nível de salário à idade da reforma.

A empresa patrocina um Plano de Pensões, contributivo ou não, para provisionar um complemento de rendimentos de reforma. Ela actua como uma seguradora que garante através de planos integrados com a Segurança Social a satisfação das condições anteriores.

Um plano integrado constitui assim uma opção de venda da empresa a favor os seus empregados, uma vez que permite a estes últimos venderem o benefício da Segurança Social (S_t), se este for inferior ao benefício total garantido pela empresa (F). O prémio pago pelos trabalhadores traduz-se na aceitação de uma taxa de progressão salarial inferior à que vigoraria se não existisse plano de pensões.

A empresa aceita assim uma responsabilidade contingente sobre a sua situação líquida, que se destina a cobrir os riscos de incumprimento da Segurança Social.

Do ponto de vista fiscal, as contribuições das empresas para os planos de pensões privados são uma despesa dedutível à matéria colectável e não são considerados rendimentos do trabalhador até que os benefícios sejam liquidados. Após o início do seu pagamento, os impostos a pagar pelos indivíduos sobre estas pensões serão possivelmente inferiores aos correspondentes impostos sobre os salários, uma vez que os rendimentos na reforma serão igualmente inferiores aos do período activo.

A existência de um Plano de Pensões que faça a integração dos benefícios concedidos pelos Planos de Pensões Privados com os do sistema público de reformas permite aos trabalhadores alisarem o seu consumo de ciclo de vida. Com efeito a necessidade de constituição de poupanças desajustadas, devido a fenómenos de racionamento de rendas vitalícias imediatas por parte das Seguradoras e à instituição de plafonds na pensão da segurança social, é atenuada pela existência de um complemento de reforma vitalício.

4.4 Como funciona a integração?

Os planos de pensões complementares destinam-se a garantir aos trabalhadores abrangidos uma pensão de reforma total, que constitui aproximadamente a mesma percentagem (por exemplo 80% da média do último salário) do rendimento da pré-reforma independentemente da posição do indivíduo na escala de remunerações. Esta pensão é constituída pela soma do benefício de reforma da Segurança Social¹⁰, com a parte garantida pela Empresa.

Designa-se por plano de pensões, o esquema em que se definem os benefícios de reforma ou outros garantidos, bem como as condições necessárias à constituição do direito ao seu recebimento.

Com base nas contribuições para financiar o tipo de garantias estabelecidas, os planos de pensões podem ser classificados como de **contribuição definida**, se o montante das contribuições para o fundo é fixo, sendo as prestações uma função resultante da capitalização destas; ou de **benefício definido**, se é previamente determinado o montante das prestações a garantir aos beneficiários.

Em Portugal a maioria dos planos, principalmente no que diz respeito à componente reforma por velhice, são de benefício definido.

¹⁰ Quase sempre função de uma média salarial.

Nos planos de contribuição definida, as contribuições são habitualmente calculadas como uma fracção pré determinada dos rendimentos¹¹, ainda que tal fracção não seja forçosamente constante durante toda a carreira do trabalhador.

Cada trabalhador possui normalmente uma conta na qual a empresa e o próprio (no caso dos planos contributivos) efectuem contribuições regulares.

O montante da pensão a receber na data da reforma, dependerá da valorização e rendimento dos activos em que as contribuições forem investidas, bem como do nível de despesas de gestão do fundo.

O risco de performance do fundo de pensões para o qual as contribuições são realizadas, é suportado pelos beneficiários uma vez que não existe garantia do montante a receber.

Nos planos de benefício definido a promessa da empresa é feita através do benefício que ela concorda em pagar aos participantes no Plano no momento da reforma. O montante da pensão a receber pode ser fixo ou calculado de acordo com uma percentagem do salário.

O custo normal do plano de pensões, é função da taxa de juro de mercado, da mortalidade do grupo beneficiário e da inflação, e é avaliado tendo em conta um certo número de hipóteses actuariais e financeiras: a pensão a que o trabalhador tem direito é determinada através de uma fórmula que tem em conta o número de anos que o trabalhador esteve ao serviço da empresa, e na maior parte dos casos, os salários e os rendimentos auferidos durante todo o período de actividade.

O risco de performance do fundo de pensões para o qual as contribuições são realizadas é suportado pela empresa, salvo na parte em que o beneficiário contribui, suportando o risco correspondente.

Muitas fórmulas de planos de benefício definido consideram o benefício da Segurança Social a que o trabalhador tem direito. Neste caso diz-se que os planos são **integrados** e o valor da pensão complementar depende do valor final da pensão do sistema oficial.

As contribuições para estes planos são geralmente baseadas num objectivo de benefício alvo e podem ser repartidas entre a empresa e o trabalhador.

¹¹ Quase sempre expressas em percentagem da folha de salários

4.5 Efeito dos planos de pensões sobre a rentabilidade das empresas

4.5.1. Direitos adquiridos, *funding* e finanças da empresa

Os direitos de propriedade inerentes aos planos de pensões são usualmente definidos como provisões para direitos adquiridos (*vesting*) e transferibilidade (*portability*) do contrato de pensão. Ambos os aspectos chocam directamente com a dimensão da obrigação incurrida pela empresa.

Se o trabalhador abandonar o posto de trabalho, antes de os benefícios se tornarem definitivos, os fundos creditados na sua conta, quer resultantes de custeio normal quer devidos por serviços passados se existirem, permanecem no plano. O *turnover* de empregados sem benefícios adquiridos gera ganhos que podem ser creditados a outros trabalhadores sem necessidade de contribuições adicionais.

A transferibilidade de direitos significa que um trabalhador com direitos adquiridos pode mudar os seus benefícios de pensão adquiridos (normalmente direitos de antiguidade) de um plano de pensões, para outro de outra empresa. Os trabalhadores que mudam de emprego com direitos adquiridos mas não transferíveis devem começar no novo emprego sem nenhum direito relativamente a um eventual plano de pensões existente na nova empresa. Uma vez que os benefícios aumentam geralmente com a antiguidade no serviço, uma pensão obtida ao longo de toda a vida activa pode ter um valor superior ao de várias pensões de curto prazo.

4.5.2 O efeito dos direitos adquiridos sobre o valor da empresa

Quando uma empresa institui um plano de pensões, ela emite efectivamente uma dívida amortizável através do fundeamento sobre activos imediatos resultantes de salários diferidos.

Como qualquer outra responsabilidade, a parte não amortizada das responsabilidades rende juros aos beneficiários.

Se não existir fundeamento (total ou parcial) das responsabilidades e se a empresa não transferir para um intermediário financeiro o pagamento dos benefícios, a situação líquida da empresa aparece influenciada pela diferença correspondente à componente não fundeada e respectivos juros.

Segundo Oldfield(1976) a equação que relaciona o valor da empresa com as responsabilidades não fundeadas dos planos de pensões, obtida a partir dos trabalhos de Miller e Modigliani(1966), é a seguinte:

$$S = \frac{\bar{X}(1-t)}{\rho_e} - \frac{R(1-t)}{r} - \frac{PSD}{\rho_p} - UFVo + k\bar{X}(1-t) \frac{\rho^* - \rho_e}{c(1-c)} T$$

com:

S= Valor de mercado da acção

\bar{X} = Cash flow normalizado liquido de depreciação

t= Taxa de imposição fiscal da empresa

ρ_e = Taxa de actualização do capital

R= Pagamentos aos detentores de dívida da firma

r= Taxa de desconto da dívida

PSD= Dividendo das acções preferenciais

ρ_p = Taxa de desconto das acções preferenciais

UFVo=Responsabilidades não fundeadas de obrigações de planos de pensões

k= Proporção de \bar{X} que pode ser investido em projectos extraordinários

r^* = Rendimento proporcionado por projectos de investimento extraordinários ($\rho^* > \rho_e$)

c= Custo médio do capital

T= Número de anos de rendimento dos projectos extraordinários

A partir desta equação, o autor fez a estimação econométrica dos coeficientes das variáveis explicativas e constatou que o coeficiente das responsabilidades não fundeadas era sistematicamente negativo, o que significa que a empresa utiliza estas responsabilidades como forma alternativa de financiamento das suas necessidades financeiras. As obrigações não fundeadas são na sua essência um dividendo de capital não negociável emitido pela empresa junto do Fundo de Pensões.

4.5.3.O balanço aumentado da empresa

O efeito das obrigações para com um plano de pensões, no valor das acções das empresas que os patrocinam, é de interesse intrínseco para quem se preocupa com a eficiência dos Mercados de Capitais e com a natureza das decisões financeiras das empresas.

Duas das questões chave a que se deve responder quando se fala da rentabilidade das empresas que instituíram Planos de Pensões a favor dos seus trabalhadores são:

- Como é que nas contas da empresa é registada essa responsabilidade: como *Book Reserve* no Balanço, ou como contribuição para um Fundo de Pensões na Conta de Exploração?
- Se as responsabilidades dos Planos não estão fundeadas, como é que o preço das acções da empresa reflecte as responsabilidades assumidas com o Plano de Pensões?

Se se utiliza o método do *Book Reserve*, a responsabilidade da empresa é evidenciada no passivo, embora não exista um conjunto de activos de contrapartida. Em caso de falência da empresa, os trabalhadores a quem o plano de pensões era destinado podem não concretizar o exercício do seu direito, devido à ligação entre as responsabilidades e o método da sua evidênciação.

Se se utiliza um método de custeio através de um Fundo de Pensões, e se as responsabilidades forem bem avaliadas, então o activo líquido da empresa corresponde ao seu valor intrínseco. O custo normal do plano é evidenciado anualmente na conta de exploração da empresa.

Se construirmos um Balanço económico da empresa (Balanço aumentado pelo efeito financeiro do Plano de Pensões) vemos que as responsabilidades com pensões são equivalentes a empréstimos obrigacionistas.

Vejamos como se apresenta o balanço da empresa. De início, a empresa compromete-se a pagar aos seus empregados um montante certo de benefícios acumulados L , no final do ano.

Para fazer face a essas responsabilidades é criado um fundo de pensões com uma carteira de activos financeiros de valor A_0 . No final do ano, o fundo valerá $A_1 = (1+r) A_0$, com r taxa de rendimento incerta.

Se no final do ano se tiver $A_1 > L$, as responsabilidades são totalmente cobertas, e uma parte do excedente $(A_1 - L)$ é apropriado pela empresa.

Se houver uma diferença para menos, isto é, $L - A_1 > 0$, os empregados recebem L e a empresa exerceu uma opção de venda dos activos A_1 ao preço de exercício L .

Os balanços da Empresa e do Fundo de Pensões, a preços de mercado são os seguintes:

EMPRESA			
<u>Activo</u>		<u>Passivo</u>	
Activos convencionais	Ae	Divida convencional	D
Proporção do valor liquido do fundo de pensões	aS	Garantia das responsabilidades do plano	G
		Situação Líquida da empresa	SLD

FUNDO DE PENSÕES			
<u>Activo</u>		<u>Passivo</u>	
Investimentos do Fundo	A ₁	Responsabilidades acumuladas	L
Garantia das responsabilidades do plano	G	Situação líquida do fundo	S

A garantia das responsabilidades L é com efeito uma opção de venda dos investimentos do fundo de pensões ao preço de exercício L ¹².

¹² Bodie, (1990)

5. A gestão de Fundos de Pensões

5.1 Os tipos de Fundos de Pensões

Os fundos de pensões são patrimónios autónomos, distintos dos das empresas, que têm a responsabilidade da realização de um ou mais planos de pensões por eles financiados. O fundo de pensões é alimentado com as contribuições necessárias à manutenção de um dado nível de financiamento, calculadas actuarialmente, de acordo com o plano de benefícios em vigor.

Quanto ao tipo de fundos, de acordo com o Decreto Lei¹³ que os regulamenta, podem ser abertos ou fechados.

- O fundo fechado é caracterizado por ter apenas um associado ou, no caso de existirem vários associados, pela existência de um vínculo empresarial, associativo, profissional ou social e pela necessidade do consentimento dos sócios para a adesão de novos associados. A iniciativa da sua constituição pode pertencer a uma empresa ou grupo de empresas, a associações, designadamente de âmbito socio-profissional, ou ser resultado de um acordo entre associações patronais e sindicais.
- O fundo aberto, concretizado sob a forma de unidades de participação num Fundo de Investimento, é todo o que não obriga a existência de qualquer vínculo entre os diferentes aderentes do fundo, estando a sua adesão apenas dependente de normas definidas pela sociedade gestora.

¹³ Decreto Lei nº 415 /91 de 25 de Outubro

5.2 O Balanço e a Conta de Exploração de um Fundo de Pensões

5.2.1 A avaliação das responsabilidades

No balanço de um Fundo de Pensões existem dois tipos de responsabilidades. A primeira diz respeito às pensões de reforma em curso e os serviços passados de empregados no activo. A segunda concerne a responsabilidades para serviços futuros dos actuais activos. A soma das duas componentes é a medida do valor presente de todas as responsabilidades do plano. Estas responsabilidades são avaliadas actuarialmente tendo em conta cenários demográficos, económicos e financeiros.

Para fazer face a estes compromissos, o Fundo dispõe de dois tipos de activos. Em primeiro lugar os activos de cobertura das contribuições passadas, em segundo lugar o valor das contribuições regulares que se destinam a financiar os benefícios por serviços futuros.

Tem-se então o seguinte balanço:

<u>Activo</u>	<u>Passivo</u>
Valor dos activos financeiros	Valor presente dos benefícios por serviços passados
Valor do custo periódico do ano	Valor presente dos custos para serviços futuros
<u>Defice ou excedente</u>	<u>Responsabilidade total</u>
Activo Total	

Vê-se que o défice ou o excedente depende:

- da evolução do valor dos activos de cobertura
- da avaliação das responsabilidades por serviços futuros

Em última análise, o mercado de capitais e o mercado de trabalho fazem com que o montante das contribuições regulares possa aumentar ou diminuir, consoante os rendimentos obtidos e a situação do emprego na economia.

Através do recurso a técnicas matemáticas¹⁴ é possível determinar de forma muito exacta o montante das responsabilidades de um plano de pensões.

¹⁴ Recomenda-se a leitura de Winklevoss, (1977)]

O papel do actuário de um Fundo de Pensões é o de avaliar em qualquer momento o montante das responsabilidades actuais para as diferentes garantias, o nível de contribuição desejável para o fundeamento do plano de pensões¹⁵ e ajuizar sobre o valor da carteira de activos financeiros destinado à cobertura de responsabilidades por serviços passados.

Nos Estado Unidos o FASB¹⁶ impõe um certo número de regras no que diz respeito à avaliação das responsabilidades sejam as relativas a benefícios adquiridos (ABO)¹⁷ sejam as respeitantes a benefícios projectados(PBO)¹⁸.

5.2.1.1. Responsabilidades para benefícios adquiridos

Esta medida representa o valor presente de todos os benefícios acrescidos previstos no plano em caso de reforma, invalidez, morte ou outro tipo de terminação, na condição de não se considerarem quaisquer aumentos de salários ou prestações da Segurança Social nem outras hipóteses de modificação dos benefícios. O valor presente deve ser calculado utilizando uma taxa de desconto¹⁹ que deve reflectir as taxas segundo as quais os benefícios do plano serão efectivamente liquidados.

Na estimação destas taxas, aconselha-se ao actuário a utilização de toda a informação contida nas taxas implícitas nos preços correntes das rendas vitalícias de seguros, que poderiam ser usadas na cobertura das responsabilidades.

Quando não existe um aumento definitivo do benefício para cada ano de serviço do participante, o benefício total deve, em primeiro lugar, ser estimado supondo que o empregado permanecerá ao serviço da empresa até à idade de reforma. O ABO é então calculado a partir da fórmula seguinte:

$$ABO = PVFB \times \frac{m}{n}, (m < n)$$

com:

$$PVFB_x = B_r \times r -_x p_x \times v \times r -x \times a_r$$

PVFB= Valor presente dos benefícios futuros totais

B_r = Benefício de pensão à idade de reforma

x =idade actual

r =idade de reforma

m =tempo de serviço até à idade do cálculo

¹⁵ Na base de hipóteses realistas de taxa de inflação, taxa de juro e mortalidade

¹⁶ FASB-terminologia para Federal Accounting Standard Board

¹⁷ Na terminologia anglo saxónica: Accumulated Benefit Obligation (ABO)

¹⁸ Na terminologia anglo saxónica: Projected Benefit Obligation (PBO)

¹⁹ Discount rate

n = Tempo de serviço total

a_r = renda vitalícia à idade de reforma

$v = (1+i)^{-1}$

5.2.1.2 Responsabilidades para benefícios a adquirir (PBO)

Esta responsabilidade potencial **PBO** contrariamente ao que sucedia para o **ABO** assume que o **PVFB** é calculado considerando os aumentos salariais, as prestações da Segurança Social e outros elementos de modificação dos benefícios.

Assim no cálculo do $PBO = PVFB \times \frac{m}{n}$ o valor do PVFB deve ser calculado com um benefício à idade de reforma B_r projectado com base no salário final.

5.2.2. O custo periódico líquido²⁰

O custo periódico líquido do plano é a soma das seguintes componentes:

- + Custo do serviço normal
- + Custo do juro técnico
- - Rendimentos dos activos financeiros do Plano
- + / - Amortização de responsabilidades ou activos financeiros de transição
- + Amortização de qualquer custo de serviços anteriores
- + / - Amortização de quaisquer perdas ou ganhos não reconhecidos

Analisemos cada uma das componentes do custo periódico

a) Custo do serviço

Trata-se do custo normal do Plano obtido a partir da amortização do PVFB segundo um método actuarial adequado. No caso do método agregado tem-se:

(Responsabilidades Totais - Activos Financeiros do Fundo)/soma das anuidades temporárias (baseada no salário ou não)

b) O custo do juro técnico

Este custo resulta da aplicação da taxa de actualização ao PBO no início do exercício

²⁰ Net Periodic Cost na terminologia do FASB. Utilizamos a normas exigidas no FASB 88

c) Rendimento dos activos financeiros

Trata-se de um lucro quando são calculados aplicando a taxa de rendimento ao valor de mercado do fundo

d) Obrigação ou activo de transição

Esta componente resulta da adopção de novas normas de cálculo das responsabilidades

- Calcula-se o PBO à data de adopção das normas standard
- Calcula-se o valor dos activos a preços de mercado

Se o PBO é superior ao valor dos activos trata-se de uma obrigação, se ele for inferior trata-se de um activo. A diferença é então amortizada durante o período de serviço médio de todos os empregados da empresa.

e) O custo do serviço anterior

Este custo pode resultar ou de modificações introduzidas no Plano, da introdução de um novo plano ou de aumentos de responsabilidades para com reformados devido ao aumento das pensões em curso. Este custo é calculado fazendo a diferença entre o PBO com o plano antigo e o PBO com o novo plano.

f) Ganhos e perdas não reconhecidos

Estes ganhos e perdas resultam de diferenças no PBO devidas à não verificação das hipóteses de base ou a uma experiência diferente da que havia sido assumida. Eles podem ser amortizados durante um período que é a média da carreira futura de todos os participantes no Plano.

O tipo de carteira é pré-definido, pelo que estas sociedades são confrontadas com um problema de constituição e gestão de carteiras com restrições legais, contabilísticas e de solvência.

5.3 Imunização em Seguros de Vida e Fundos de Pensões

5.3.1 A influência das hipóteses actuariais

Um Fundo de Pensões está sujeito a riscos que afectam simultaneamente o activo e o passivo do balanço.

No lado passivo trata-se da probabilidade de o montante das pensões efectivamente pagas(ex-post) diferir que se esperava pagar(ex-ante) com base nas hipóteses actuariais. Estas hipóteses dizem respeito ao *turnover* de pessoal, à taxa de mortalidade e à escala de salários, cujos valores verificados podem afastar-se das previsões iniciais.

No lado activo, os riscos estão ligados à probabilidade de as aplicações financeiras disponíveis para liquidação dos benefícios de pensões, à medida que estes são exigíveis(ex-post) divergirem dos montantes que se esperava ter disponíveis (ex-ante). As hipóteses iniciais acerca da taxa de rendimento a ser obtida pelos investimentos do fundo podem afastar-se da taxa de rendimento efectiva, pelo que o custo normal do plano pode ser afectado pelo desvio da capitalização das reservas.

Os riscos activos e passivos não são totalmente independentes quando a causa dos mesmos são as variações da taxa de juro. Com efeito quer a taxa de rendimento dos activos, quer a de actualização das responsabilidades dependem do mesmo risco sistemático ligado ao comportamento do mercado financeiro e às diferentes taxas de juro aí oferecidas. Este último risco é o que está subjacente às técnicas de imunização Activo/Passivo que será objecto de tratamento especial.

5.3.2 Efeitos das variações da taxa de juro sobre activos e passivos

A ideia de imunizar um fundo, uma instituição financeira, ou um título contra variações da taxa de juro encontra os seus fundamentos nos trabalhos pioneiros de Macauley (1938) sobre duração e Samuelson (1945). Redington (1952) aplicou este conceito aos Seguros de Vida através de um modelo determinístico e mais recentemente, Fisher e Weil (1971), Bierwag e outros (1983), desenvolvem as implicações da estocasticidade das variações de taxa de juro sobre o modelo de Redington.

Segundo Keintz e Stickney (1980), um Fundo de Pensões está imunizado por um determinado período "se o valor dos seus activos líquidos (ou seja, activos menos responsabilidades) no fim do período independentemente das variações das taxas de juro é pelo menos tão importante como o que seria se a taxa de juro de mercado tivesse permanecido constante".

5.3.3 O modelo determinístico de imunização de Redington

5.3.3.1 Definições

O problema geral da imunização do balanço de uma Companhia de Seguros ou de um Fundo de Pensões, prende-se não só com a sintonia em valor, referido ao momento inicial, dos passivos técnicos e dos activos financeiros de cobertura, mas também com a duração dos fluxos financeiros (de entrada e saída) em cada momento.

Segundo Redington, as ideias chave para uma política de *matching* de activos e responsabilidades são a duração e a dispersão.

Define-se **duração** de um activo, DA , como o seu prazo médio até à maturidade, ou seja o número médio de anos ponderado pelo peso dos fluxos, até que todos estes ocorram.

Para uma obrigação de maturidade T temos :

$$DA = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{t C_t}{(1+y_{tm})^t} + \frac{TF}{(1+y_{tm})^T}}{\sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+y_{tm})^t} + \frac{F}{(1+y_{tm})^T}}$$

com :

y_{tm} = Taxa de rentabilidade interna do título

C_t = Valor do cupão no período t

F = Valor do reembolso do título

A **dispersão** do valor do título, IA , é dada por

$$IA = \frac{1}{VA} \sum_{t=1}^T \frac{A_t \times (t-DA)^2}{(1+y_{tm})^t}$$

com

A_t = Fluxo total no período t

$$VA = \sum_{t=1}^T \frac{A_t}{(1+y_{tm})^t} + \frac{F}{(1+y_{tm})^T}$$

e VA = Valor actual do título

Da mesma forma, a duração, DL, ou prazo médio até à maturidade de um seguro de vida²¹, de prazo T e capital F é dada por:

$$DL = \frac{\sum_{t=1}^T t \times x q_t \frac{F}{(1+y_{tm})^t}}{\sum_{t=1}^T x q_t \frac{1}{(1+y_{tm})^t}}$$

A dispersão, IL, é dada pela expressão:

$$IL = \frac{1}{VL} \sum_{t=1}^T \frac{L_t \times (t - DL)^2}{(1+y_{tm})^t}$$

com

$VL = A_{x:\overline{n}|}$ e L_t = Fluxo total no período t

²¹ Utilizamos aqui o exemplo do Seguro Temporário.

5.3.3.2 As condições de imunização de Redington

Suponhamos, por conveniência de raciocínio, que uma Companhia de Seguros só explora Rendas Vitalícias Imediatas Temporárias de termos postecipados e que para fazer face às suas responsabilidades investe em obrigações consolidadas de cupão nominal e duração idêntica a cada termo da renda.

A responsabilidade do segurador é dada por:

$$VL = \sum_{t=1}^n \frac{I_{x+t}}{I_x} \times V^t$$

e a cobertura dessa responsabilidade é dada por:

$$VA = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

- Diz-se que a responsabilidade do segurador está perfeitamente financiada se $VA > VL$. Isto significa que o valor dos activos é suficiente para fazer face aos pagamentos periódicos de todos os compromissos da Companhia.
- No caso de se verificar $VA < VL$, o valor do fundo seria insuficiente para o segurador poder honrar os seus compromissos, devendo nesse caso depositar o seu balanço.
- A situação de *matching* perfeito verificar-se-ia quando $VA = VL$.

Admitamos agora que o segurador não tomava em consideração o efeito a mortalidade.

Então o valor actual (à taxa de juro r) dos fluxos de saída ao longo do tempo é:

$$VL = \sum_{t=1}^n L_t \times (1+r)^{-t}$$

e o valor actual dos fluxos de entrada é:

$$VA = \sum_{t=1}^n A_t \times (1+r)^{-t}$$

com:

r = Taxa de juro

L_t = Refluxos financeiros no fim da anuidade t

A_t = Influxos financeiros no fim da anuidade t

Na situação de *matching* perfeito de Redington temos:

$$N = VA - VL = 0$$

A primeira condição de Redington enuncia-se assim: "A duração dos fluxos das responsabilidades deve ser igual à duração das receitas dos activos de cobertura".

Com efeito exige-se que:

$$\frac{dN}{dr} = \sum_{t=1}^n t \times (L_t - A_t) \times (1+r)^{-t-1} = 0$$

Ora,

$$DA = \frac{\sum_{t=1}^n t \times A_t \times (1+r)^{-t}}{VA}$$

e

$$DL = \frac{\sum_{t=1}^n t \times L_t \times (1+r)^{-t}}{VL}$$

então

$$\frac{dN}{dr} = (1+r)^{-1} \times (DL \times VL - DA \times VA)$$

e vê-se que

$$\frac{dN}{dr} = 0$$

só quando $DA = DL$ (por definição $VA = VL$).

A segunda condição de Redington implica que "o valor dos fluxos das receitas deve ser mais disperso em torno da respectiva duração do que o valor dos fluxos dos pagamentos".

Esta condição exige que:

$$\frac{d^2 N}{dr^2} \geq 0$$

No ponto em que a primeira condição é satisfeita ($VA \times DA = VL \times DL$) prova-se²² que:

$$\frac{d^2 N}{dr^2} = (1+r)^{-2} (DA \times VA - DL \times VL - IL + IA + DL^2 - DA^2)$$

é maior ou igual a zero quando $IA > IL$ com:

$$IA = \frac{1}{VA} \times \sum_{t=1}^n \frac{A_t \times (t - DA)^{-2}}{(1+r)^t}$$

e

$$IL = \frac{1}{VL} \times \sum_{t=1}^n \frac{L_t \times (t - DL)^{-2}}{(1+r)^t}$$

em que IA e IL são a dispersão dos activos e das responsabilidades, respectivamente.

²² Cf. Bierwag (1987).

5.4 Imunização de uma obrigação pela duração

Na prática, desprezando a mortalidade, o passivo das Seguradoras pode ser considerado estável, devido à existência de uma taxa de juro técnica obrigatória²³.

Então o problema resumir-se-ia a imunizar os activos de cobertura²⁴ através da sua duração.

Suponhamos então que o valor das responsabilidades do segurador a 10 anos é de 1000 e que para fazer face a essa responsabilidade o segurador adquire uma obrigação de 1000 à taxa de juro de 9%. O cupão é pago semestralmente e reinvestido em cada período.

Os riscos assumidos pela Companhia em caso de variação da taxa de juro são:

- Menos valias
- Expectativa de reinvestimento a uma taxa inferior à do título

A maneira de eliminar esses dois riscos, que variam em sentido inverso, é a Companhia deter o título por um período idêntico ao da sua duração, conforme vemos no Quadro 5.1.

Da sua análise, pode verificar-se que os efeitos preço e reinvestimento do cupão variam em sentido inverso :

- se as taxas baixam, por exemplo para 5% ou 7% logo no início e se mantêm constantes, o valor dos títulos aumenta, originando uma mais valia, mas os cupões são reinvestidos a taxas inferiores.
- se as taxas de juro sobem em relação aos 9% iniciais e se mantêm constantes, o valor dos títulos baixa, resultando uma menos valia, conforme se verifica para a taxa de reinvestimento de 11 % . Em contrapartida, os cupões são reinvestidos a taxas superiores;

Assim, se a taxa de juro decrescer, por exemplo, para 5% logo no 1º ano e se mantivesse constante nesse valor, o rendimento total seria apenas de 1141; inversamente, se a taxa de juro aumentasse, por exemplo, para 11% e se mantivesse constante durante os 10 anos, o rendimento total seria de 1547, o que seria superior ao objectivo.

²³ 4% para seguros de capitais, e 6% para seguros de rendas vitalícias imediatas.

²⁴ Admitindo que todo o activo é constituído por obrigações.

Portanto, investindo por um prazo de dez anos não se garante que no final do prazo as responsabilidades pudessem ser satisfeitas dado que o reinvestimento de cada cupão pode ser feito a uma taxa diferente de 9%.

Designa-se por imunização a operação que permite neutralizar o risco de variação das taxas de juro.

A imunização garante que o rendimento de uma carteira durante uma certa duração não varia, qualquer que seja a evolução das taxas de juro.

O efeito preço e o efeito reinvestimento do cupão compensam-se perfeitamente se se detiver a obrigação por um período igual à sua duração (6.79 anos).

Neste caso, qualquer que seja a taxa de reinvestimento, o valor do título (RT) é 611 e a taxa de juro efectiva são os 9%, garantidos inicialmente e a carteira encontra-se imunizada, desde que os títulos sejam detidos por um período igual à sua duração.

Mais geralmente, a imunização assegura um rendimento certo num horizonte de n períodos, seja comprando títulos de cupão unico por um prazo de n anos, seja comprando títulos de prazo superior mas, tais que, os efeitos preço e reinvestimento do cupão se compensem.

Quadro 5.1-Rendimento total de uma obrigação de valor nominal 1000, taxa de juro de 9%, maturidade de 10 anos

Taxa de Reinvestimento

Período de detenção	5%			7%			9%			11%		
	R	Mv	TJe	R	Mv	TJe	R	Mv	TJe	R	Mv	TJe
1	90	287	37	90	132	22	90	0	92	90	-112	2
3	270	234	15	270	109	12	270	0	302	270	-95	40
5	450	175	11	450	83	10	450	0	554	450	-75	129
6.75	611	100	9	611	56	9	611	0	816	611	-56	261
9	810	39	8.5	810	19	8.6	810	0	1197	810	-18	502
10	900	0	8.2	900	0	8.5	900	0	1395	900	0	647

Legenda:

R - Rendimento do Cupão

Mv- Mais (menos) Valias

RC - Reinvestimento do Cupão

RT - Rendimento Total

TJe - Taxa de Juro Efectiva

5.5 Imunização da carteira com modelos estocásticos da taxa de juro

5.5.1 A determinação do preço de uma obrigação de cupão zero

O principal problema metodológico dos modelos determinísticos da estrutura a prazo é a hipótese de estabilidade das taxas de juro para os diferentes prazos.

Graças aos trabalhos de Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1977), a estrutura a prazo passou a considerar que a própria taxa de juro é uma variável estocástica dependente do tempo.

Boyle (1978) reanализou os resultados do modelo de Redington à luz das conclusões destes modelos.

Brennan e Schwarz (1982) entre outros analisaram as diferenças entre os resultados de *pricing* de obrigações obtido com modelos estocásticos da taxa de juro e modelos determinísticos e Sharp (1989) fez uma aplicação ao *matching* em seguros com base nestes desenvolvimentos.

Os principais pressupostos destes modelos são os seguintes²⁵:

- A taxa de juro r segue um processo contínuo de Markov.
- O preço no momento t de uma obrigação de cupão zero e prazo s depende do segmento $\{ r(T), t < T < s \}$ em que o processo da taxa de juro $r(T)$ depende do tempo T .
- Os mercados são eficientes e os agentes têm aversão ao risco.

Aceita-se que as variações da taxa de juro dr seguem um processo aleatório de Wiener, no qual a componente aleatória das variações, dz , o chamado "ruído branco" tem média nula e desvio padrão proporcional à raiz quadrada do acréscimo do tempo²⁶.

Temos assim:

$$dr = \beta(r, t) dt + \eta(r, t) dz \quad 1)$$

²⁵ Ver Anexo A2

²⁶ Ver Delbarade (1990)

com dz processo de Wiener e

$$E(dz) = 0 \quad 2)$$

$$\text{e } \sigma(dz) = \sqrt{dt} \quad 3)$$

em que a função $B(r,t)$, a parte determinística, é a velocidade instantânea da variação e $(\eta(r,t))^2$ é a variância instantânea.

Com efeito, se a componente aleatória fosse nula, tínhamos:

$$\frac{dr}{dt} = \beta(r,t) \quad 4)$$

ou seja,

$$r = r_0 + \beta(r,t)t \quad 5)$$

O preço da obrigação, $P(t,s)$, é função do tempo, do prazo até à maturidade e da taxa de juro. Uma vez que a taxa de juro é uma variável estocástica podemos diferenciar P recorrendo ao Lema de Ito:

$$P(t,s) = P(t,s,r(T)) \quad 6)$$

7)

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} \times dr + \frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \times (dr)^2 + \frac{\partial P}{\partial t} \times dt$$

Substituindo dr pela expressão 1) obtemos

8)

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \beta \times \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \times \eta^2 \times \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) \times dt + \eta \times \frac{\partial P}{\partial r} \times dz$$

ou

$$dP = P\mu dt + P\sigma dz \quad 9)$$

com

$$\mu = \frac{1}{P} \times \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \beta \times \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \times \eta^2 \times \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right)$$

$$e \sigma = \frac{1}{P} \times \eta \times \frac{\partial P}{\partial r}$$

A equação 8) é válida para todos os prazos e maturidades. A equação 9) descreve a taxa instantânea de rendimento de uma obrigação de cupão zero, com média μ e variância s^2 .

Segundo Giacotto (1986) é possível construir uma carteira de cobertura contra o risco de preço vendendo ao preço P_1 uma obrigação de maturidade s_1 e comprando ao preço P_2 uma outra de maturidade s_2 .

O valor da carteira e o respectivo preço no tempo serão respectivamente P e $P_2 - P_1$.

Com base na equação 9) a dinâmica do preço será:

$$dP = (\mu_2 \times P_2 - \mu_1 \times P_1) dt + (\sigma_2 \times P_2 - \sigma_1 \times P_1) dz \quad 10)$$

onde

$$\mu_i = \mu(t, S_i, r(t)) \text{ e } \sigma_i = \sigma(t, S_i, r(t)), \text{ para } i=1,2.$$

Se os montantes investidos nas duas obrigações forem tais que

$$P_1 = P \times \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \text{ e } P_2 = P \times \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

então a componente estocástica da equação 10) desaparece e a carteira P não tem risco.

O rendimento instantâneo da carteira P é igual à taxa de juro instantânea à vista :

11)

$$\frac{dP}{P} = \frac{\mu_2 \sigma_1 - \mu_1 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = r(t)$$

Fazendo uma reorganização dos termos da equação 11) obtemos o preço de mercado do risco da obrigação:

12)

$$Q(t, s, r) = \frac{\mu_1 - r(t)}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r(t)}{\sigma_2}$$

Em particular se

$$\frac{\mu_1 - r(t)}{\sigma_1} = 0$$

a taxa de rendimento de todas as obrigações é a mesma.

A equação do preço da obrigação pode então ser obtida a partir da solução da equação seguinte:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \beta \times \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \times \eta^2 \times \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad 13)$$

Vasicek propõe como solução da equação anterior:

$$P(r, s, t) = \exp(F(\alpha, T)(D - r) - TD - \frac{\eta^2}{4\alpha}(F(\alpha, t))^2) \quad 14)$$

com

$$T = s - t \quad 14.1)$$

$$F(\alpha, T) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha T}) \quad 14.2)$$

$$D = \gamma - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\alpha^2} \quad 14.3)$$

e a dinâmica da taxa de juro é dada por :

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \rho dz \quad 15)$$

com **a**, **g**, **r** constantes positivas.

Cox, Ingersoll e Ross propõem uma solução que evita a existência de uma taxa de juro negativa :

$$P(r, t, s) = A(T) e^{-rB_t} \quad 16)$$

onde :

$$A(T) = \left(\frac{2\lambda e^{(k-\lambda)\frac{T}{2}}}{(\lambda+k)(1-e^{-\lambda T}) + 2\lambda e^{-\lambda T}} \right)^{\frac{2k\mu}{\sigma^2}} \quad 16.1$$

e

$$B(T) = \frac{2(1-e^{-\lambda T})}{(\lambda+k)(1-e^{-\lambda T}) + 2\lambda e^{-\lambda T}} \quad 16.2$$

e $\lambda^2 = k^2 + 2\sigma^2$ 16.3

e a dinâmica da taxa de juro é dada por $dr = k(\mu - r)dt + \sqrt{\sigma^2} r dz$ com k, u e s constantes positivas.

5.5.2 O *matching* de activos e responsabilidades

As responsabilidades líquidas de uma Companhia de Seguros podem ser representadas por:

$$L_T(0 \leq T \leq \infty)$$

e os rendimentos da Carteira de Obrigações por:

$$A_T(0 \leq T \leq \infty)$$

Temos que o valor actual dos activos e das responsabilidades é respectivamente

$$VA = \int_0^{\infty} A_T e^{-\delta t} dT \quad 17)$$

em que a constante d é a taxa de juro instantânea.

$$VL = \int_0^{\infty} L_T e^{-\delta t} dT \quad 18)$$

No caso de uma obrigação de cupão zero, de maturidade T e valor $P(r, T)$, existe *matching* quando $A_T = L_T$ para qualquer T e então

$$\int_0^{\infty} P(r, T) A_T dT = \int_0^{\infty} P(r, T) L_T dT$$

Como a responsabilidade pode ser considerada como a venda de uma obrigação de rendimento negativo, então de acordo com o modelo de Giacotto a carteira P estará imunizada quando a componente estocástica se anula.

$$\eta \left(\frac{\partial V_A}{\partial r} - \frac{\partial V_L}{\partial r} \right) dz = 0$$

19)

Ora isso é possível desde que

$$\frac{\partial V_A}{\partial r} = \frac{\partial V_L}{\partial r}$$

a primeira condição de Redington seja verificada.

Esta igualdade só garante a imunização para a taxa de juro e estrutura a prazo correntes. A posição de imunização tem de ser ajustada continuamente para contemplar mudanças nos parâmetros do modelo.

Para obtermos $\frac{\partial V_L}{\partial r}$ a partir da equação 14) ou 16) precisamos de conhecer $\frac{\partial P}{\partial r}$ para todas as maturidades da taxa de juro.

O termo médio (ou duração) dos activos é dado por :

$$\left(\frac{\frac{\partial V_A}{\partial r}}{\frac{\partial V_A}{\partial r}} \right)$$

e a imunização verifica-se quando a duração dos activos é igual à duração das responsabilidades.

5.5.3 Exemplo de aplicação

Para ilustrar numericamente algumas das diferenças entre os modelos de estrutura a prazo das taxas de juro, foi elaborado o Quadro 5.2, onde se apresentam os preços de de obrigações de maturidades 5,10 e 15 anos, considerando três modelos para o preço, no pressuposto de que o valor nominal de cada obrigação é 100.

QUADRO 5.2 - Preço das obrigações e termos médios de desconto de obrigações segundo vários modelos de estrutura a prazo

(i) Modelo Determinístico (Flat Yield Curve)

	5%		6%		7%		8%		9%	
Maturidade	Preço	Termo médio	Preço	Termo médio	Preço	Termo médio	Preço	Termo médio	Preço	Termo médio
5	77.88	5	74.08	5	70.47	5	67.03	5	63.76	5
10	60.65	10	54.88	10	49.66	10	44.93	10	40.66	10
15	47.24	15	40.66	15	34.99	15	30.12	15	25.92	15
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

(ii) Modelo de Vasicek

	5%		6%		7%		8%		9%	
Maturidade	Preço	Termo médio	Preço	Termo médio	Preço	Termo médio	Preço	Termo médio	Preço	Termo médio
5	76.46	3.93	73.51	3.93	70.67	3.93	67.95	3.93	65.33	3.93
10	57.31	6.32	53.8	6.32	50.5	6.32	47.41	6.32	44.5	6.32
15	42.64	7.77	39.45	7.77	36.5	7.77	33.77	7.77	31.25	7.77
∞	∞	10	∞	10	∞	10	∞	10	∞	10

Nota:

$$\rho_2 = 0.0002; \gamma = 0.07; \alpha = 0.1; D = 0.06$$

(iii) Modelo de Cox, Ingersoll e Ross

	5%		6%		7%		8%		9%	
Maturidade	Preço	Termo médio	Preço	Termo médio	Preço	Termo médio	Preço	Termo médio	Preço	Termo médio
5	76.4	3.9	73.48	3.9	70.67	3.9	67.97	3.9	65.37	3.9
10	57.07	6.14	53.67	6.14	50.47	6.14	47.46	6.14	44.64	6.14
15	42.21	7.39	39.2	7.39	36.41	7.39	33.81	7.39	31.4	7.39
∞	0	8.87	0	8.87	0	8.87	0	8.87	0	8.87

Nota: $s^2=0.002857$; $u=0.07$; $k=0.1$

QUADRO 5.3 - Montantes de Obrigações de 5 e 15 anos para imunizar um prêmio único de um capital diferido (sem mortalidade).

O valor nominal de capital diferido é de 100.

r	Modelo (i)		Modelo (ii)		Modelo (iii)	
	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2
5	38.94	64.2	28.3	83.66	26.72	86.84
6	37.04	67.49	27.63	84.88	26.12	87.93
7	35.23	70.95	26.98	86.12	25.54	89.04
8	33.52	74.59	26.34	87.38	24.98	90.16
9	31.88	78.42	25.72	88.65	24.42	91.3

O modelo determinístico é dado por:

$$P(r, T) = e^{-rT}$$

e os dois aleatórios são dados pelas fórmulas 14 e 16, correspondentes aos modelos de Vasicek e Cox, Ingersoll e Ross.

É também calculada a duração dos cupões, usando as fórmulas seguintes quando $T \rightarrow \infty$: no modelo determinístico, a duração é igual à maturidade; no modelo de Vasicek é dada pela

expressão $\frac{1}{\alpha}$ enquanto no modelo de Cox, Ingersoll e Ross é dada por $\frac{2}{\sqrt{k^2 + 2\alpha^2} + k}$

Os parâmetros para estes dois últimos modelos foram escolhidos de forma a fornecer um melhor ajustamento entre estes dois modelos. Para tal a taxa de juro foi colocada a 7%. A velocidade de ajustamento é a mesma em ambos os casos, $a = k = 0.1$ e quando $r = 0.07$, as variâncias infinitesimais são iguais $\sigma^2 \times 0.07 = 0.0002 = \rho^2$

Note-se que os preços dados pelos modelos (ii) e (iii) são muito semelhantes: para taxas de juro abaixo da média a longo prazo, 7%, os modelos dão preços para as obrigações mais baixos que os fornecidos pelo modelo (i). Para taxas de juro mais elevadas, o inverso é verdadeiro.

Como exemplo de obtenção de uma estratégia de imunização, consideremos um capital diferido (ignorando a mortalidade), de valor 100, comprado a prémio único e de maturidade 10 anos.

As responsabilidades da seguradora são garantidas, investindo parte do prémio numa obrigação de cupão zero e prazo 5 anos, e o restante numa obrigação do mesmo tipo por 15 anos.

Para obter imunização, as partes de prémio a serem investidas nas duas obrigações são dadas pela solução do par de equações simultâneas, sabendo-se que as obrigações prometem 1 e 2 unidades na maturidade:

$$\lambda_1 \times P(r,5) + \lambda_2 \times P(r,15) = 100 \times P(r,10)$$

$$\lambda_1 \times \frac{\partial P(r,5)}{\partial r} + \lambda_2 \times \frac{\partial P(r,15)}{\partial r} P(r,15) = 100 \times \frac{\partial P(r,10)}{\partial r}$$

A solução deste sistema é dada²⁷ pelas equações 27 e 28, 31 e 32, 34 e 35 do Anexo A-6, consoante o modelo, tendo considerado os seguintes valores:

$$T_1 = 5; T_2 = 10; T_3 = 15 \text{ e } V = 100.$$

Como se pode verificar da análise do Quadro 5.3, as estratégias de imunização são diferentes no modelo determinístico e nos modelos estocásticos. Nestes últimos, requiere-se um maior investimento em obrigações a longo prazo, correspondendo a valores superiores de 11 enquanto no primeiro modelo se investe mais em obrigações de médio prazo, correspondendo a um menor peso atribuído aos títulos de 5 anos.

²⁷ Cf. Anexo A1

5.6 Conclusão

A consideração de um modelo aleatório para explicar as variações da taxa de juro torna o modelo de imunização de Redington mais aderente à realidade actual do mercado financeiro, caracterizado por uma extrema volatilidade. No entanto, esta complexidade adicional não invalida, quanto a nós, os resultados obtidos por intermédio do modelo determinístico, porque não põe em causa os seus fundamentos. A sua contribuição principal é a de alertar os responsáveis da gestão das carteiras activas e passivas dos investidores institucionais que a não consideração da aleatoriedade das taxas de juro pode enviesar a influência do curto prazo na composição dos activos destinados ao *matching*.


Referências Bibliográficas

- ANDO, A.**
MODIGLIANI, F. (1963) The Life Cycle Hypothesis of Saving: Aggregate Implications and Tests, *The American Economic Review*, 53 March
- ARCANJO, M.,**
GARCIA, T.
MACHADO, L.,
MATOS, P.,
MOURA, C., PEREIRA
DA SILVA, C. (1993) *A Reforma, a Poupança e a integração dos Fundos de Pensões*, CIEF/Association de Geneve.
- BIERWAG, O. (1987)** *Duration Analysis*, Balinger Punlisingh Company
- BIERWAG, O.,**
KAUFMAN, G.,
TOEVS, A. (1983) Immunization Strategies Funding Multiple Liabilities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 18
- BODIE, Z. (1990)** Pensions as Retirement Income Insurance, *Journal of Economic Literature*, Vol. XXVIII. (March 1990).
- BOYLE, B. (1978)** Immunization Strategies Funding Multiple Liabilities, *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 105
- BRENNAN, M. e**
SCHWARZ, E. (1982) An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. XVII- 3, Sep.
- CAGAN, P. (1965)** *The Effect of Pension Plans on Aggregate Saving: Evidence from a Sample Survey*, Columbia Univ. Press, New York
- COX, J. INGERSOLL, J.**
E ROSS, S. (1977) A theory of the term structure of interest rates and the valuation of the interest dependent claims, *Western Finance Association Meetings*, California, June
- DELBARADE, J.M.**
(1990) *Mathématiques des marchés financiers*, Eska , Paris.
- FELDSTEIN, M. (1974)** Social Security Induced Retirement and Aggregate Capital Accumulation, *Journal of Political Economy*, Vol. 82
- FELDSTEIN, M., (1980)** The Effect of Social Security Saving, *The Geneva Papers on Risk and Insurance*

- FISHER,L. E WEIL, R. (1971)** Coping with the risk of interest rate fluctuations: returns to bond holders from naive and optimal strategies. *Journal of Business*, Vol. 44
- GALBRAITH, J. (1978)** *Le Temps des Incertitudes*, Galimard, Paris
- GARCIA,T.
MACHADO,L.,
MATOS,P.,
MOURA,C., PEREIRA
DA SILVA,C. (1992)** *Sistemas alternativos de Poupança e Reforma*, CIEF/Association de Geneve.
- GIACOTTO, C.(1986)** Stochastic modelling of interest rates - actuarial versus equilibrium approach, *Journal of Risk and Insurance*, Vol. LIII, n°3
- HUBBARD, G. (1987)** Uncertain Lifetimes, Pensions and Individual Saving, in *Issues in Pension Economics*, Ed. Bodie, Shoven. Wise NBER
- HURD,M. (1990)** Research on the elderly: economic status, retirement and consumption and saving. *Journal of Economic Literature*". Vol. XXVIII
- KEINTZ,J. e
STICKNEY,P. (1980)** Immunization of pension Funds and sensitivity to actuarial assumptions, *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 48(2), June
- MACAULEY, F. (1938)** Some theoretical problems suggested by the movements of interest rate, bond yields and stock prices in the USA since 1886, *NBER*
- MERTON, BODIE,Z.,
MARCUS (1987)** Pension Plan Integration as Insurance against Social Security Risk, *Issues in Pension Economics*, NBER
- MILLER, M.,
MODIGLIANI,F. (1966)** Some Estimates of the Cost of Capital to the Electric Utility Industry. *American Economic Review*
- MUNNEL, A. (1982)** *The Economics of Private Pensions*. Brookings Studies in Social Economics
- OLDFIELD,G.(1976)** Financial Aspects of the Private Pension System *Journal of Money Credit and Banking*.

- REDINGTON, F. (1952)** Review of the principle of life office valuations, *Journal of the Institute of Actuaries*, n°78
- SAMUELSON, P. (1945)** The effect of interest rate increasing of the banking system, *American Economic Review*, 35, n°1, March
- SHARP, K. (1989)** Mortgage rate insurance pricing under an interest rate diffusion with drift, *Journal of Risk and Insurance*, Vol. LV, n°1
- SHARPE, W. (1976)** Corporate Pension Funding, *Journal of Financial Economics*, 3, 1976.
- VASICEK, O. (1987)** An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, n° 5, Nov.
- WINKLEWOSS (1977)** *Pension Mathematics*, Irwin.

Anexo



A estratégia de imunização para a responsabilidade do pagamento de um capital de valor V com um prazo T_2 , e supondo que se investiam λ_1 no activo 1 de maturidade T_1 e λ_2 no activo 2, de maturidade T_3 , com $T_1 < T_2 < T_3$, considerando uma dada taxa de juro $r(T)$, um modelo específico para o preço de uma obrigação é obtido da resolução do sistema de equações:

$$\lambda_1 * P(r, T_1) + \lambda_2 * P(r, T_3) = V * P(r, T_2) \quad 1)$$

$$\lambda_1 * \frac{\partial P(r, T_1)}{\partial r} + \lambda_2 * \frac{\partial P(r, T_3)}{\partial r} = V * \frac{\partial P(r, T_2)}{\partial r} \quad 2)$$

Consideremos que $P(r, T)$ é um modelo geral da forma:

$$P(r, T) = A(T) \exp(-rB(T) + C(T)) \quad 3)$$

Tem-se então:

$$\frac{\partial P(r, T)}{\partial r} = -B(T) * A(T) \exp(-rB(T) + C(T)) \quad 4)$$

ou seja:

$$\frac{\partial P(r, T)}{\partial r} = -B(T) P(r, T) \quad 5)$$

então, substituindo no sistema de equações 1) e 2) obtém-se:

$$\lambda_1 * P(r, T_1) + \lambda_2 * P(r, T_3) = V * P(r, T_2) \quad 6)$$

$$-\lambda_1 * B(T_1) * P(r, T_1) - \lambda_2 * B(T_3) * P(r, T_3) = -V * B(T_2) * P(r, T_2) \quad 7)$$

multiplicando 6) por $B(T_1)$ e somando as duas equações vem :

$$\lambda_1 * P(r, T_1) + \lambda_2 * P(r, T_3) = V * P(r, T_2) \quad 8)$$

$$\lambda_2 * (B(T_1) - B(T_3)) * P(r, T_3) = V * (B(T_1) - B(T_2)) * P(r, T_2) \quad 9)$$

Sejam

$$k_1 = B(T_1) - B(T_3) \quad 10)$$

$$k_2 = B(T_1) - B(T_2) \quad 11)$$

então, as equações 10) e 11) reescrevem-se como:

$$\lambda_1 * P(r, T_1) + \lambda_2 * P(r, T_3) = V * P(r, T_2) \quad (12)$$

$$\lambda_2 * k_1 * P(r, T_3) = V * k_2 * P(r, T_2) \quad (13)$$

e então tem-se

$$\lambda_1 * P(r, T_1) + \lambda_2 * P(r, T_3) = V * P(r, T_2) \quad (14)$$

$$\lambda_2 = \frac{V * k_2 * P(r, T_2)}{k_1 * P(r, T_3)} \quad (15)$$

substituindo o valor de 2 em 14 vem:

$$\lambda_1 * P(r, T_1) + \frac{V * k_2 * P(r, T_2)}{k_1} = V * P(r, T_2) \quad (16)$$

$$\lambda_2 = \frac{V * k_2 * P(r, T_2)}{k_1 * P(r, T_3)} \quad (17)$$

$$\lambda_1 * P(r, T_1) = - \frac{V * k_2 * P(r, T_2)}{k_1} + V * P(r, T_2) \quad (18)$$

$$\lambda_2 = \frac{V * k_2 * P(r, T_2)}{k_1 * P(r, T_3)} \quad (19)$$

$$\lambda_1 = \frac{V * P(r, T_2) * (1 - \frac{k_2}{k_1})}{P(r, T_1)} \quad (20)$$

$$\lambda_2 = \frac{V * k_2 * P(r, T_2)}{k_1 * P(r, T_3)} \quad (21)$$

e finalmente tem-se:

$$\lambda_1 = \frac{V * (k_1 - k_2) * P(r, T_2)}{k_1 * P(r, T_1)} \quad (22)$$

$$\lambda_2 = \frac{V * k_2 * P(r, T_2)}{k_1 * P(r, T_3)} \quad (23)$$

se $k_1 = B(T_1) - B(T_3)$ e $k_2 = B(T_1) - B(T_2)$ então $k_1 - k_2 = B(T_2) - B(T_3)$ e substituindo nas equações anteriores obtém-se:

$$\lambda_1 = \frac{V * (B(T_2) - B(T_3)) * P(r, T_2)}{(B(T_1) - B(T_3)) * P(r, T_1)} \quad (24)$$

$$\lambda_2 = \frac{V * (B(T_1) - B(T_2)) * P(r, T_2)}{(B(T_1) - B(T_3)) * P(r, T_3)} \quad (25)$$

Concretizemos agora para os diferentes modelos.

Para o Modelo Determinístico, em que o preço de uma obrigação é dado por:

$$P(r, T) = \exp(-r, T) \quad (26)$$

sendo, $A(T)=1$, $B(T)=1$ e $C(T)=0$. Logo

$$\lambda_1 = \frac{V * (T_2 - T_3) * \exp(-r(T_2 - T_1))}{(T_1 - T_3)} \quad (27)$$

$$\lambda_2 = \frac{V * (T_1 - T_2) * \exp(-r(T_2 - T_3))}{(T_1 - T_3)} \quad (28)$$

No Modelo de Vasicek, o preço de uma obrigação é dado pela fórmula

$$P(t, s, r) = \exp \left[-r + F(\alpha, T) + F(\alpha, T) + D - T + D - \frac{\rho^2}{4\alpha} * F(\alpha, T)^2 \right] \quad 29)$$

sendo T , $F(\alpha, T)$ e D dados pelas fórmulas 14.1, 14.2 e 14.3, respectivamente.

Neste caso tem-se $A(T)=1$, $B(T)=F(\alpha, T)$ e

$$C(T) = F(\alpha, T) * D - T + D - \frac{\rho^2}{4\alpha} * F(\alpha, T)^2 \quad 30)$$

sendo as expressões para o peso a atribuir a cada um dos activos da carteira dadas por:

$$\lambda_1 = V * \frac{F(\alpha, T_2) - F(\alpha, T_3)}{F(\alpha, T_1) - F(\alpha, T_3)} * \exp -r [F(\alpha, T_2) - F(\alpha, T_1)] + C(T_2) - C(T_1) \quad 31)$$

e

$$\lambda_2 = V * \frac{F(\alpha, T_2) - F(\alpha, T_1)}{F(\alpha, T_1) - F(\alpha, T_3)} * \exp -r [F(\alpha, T_2) - F(\alpha, T_3)] + C(T_2) - C(T_3) \quad 32)$$

No caso do Modelo de Cox, Ingersoll e Ross, o preço de uma obrigação é dado por:

$$P(r, s, t) = A(T) \exp(-rB(T)) \quad 33)$$

sendo as expressões de $A(T)$ e $B(T)$ dadas pelas fórmulas 16.1, 16.2 e $C(T)=0$. Assim, obtemos para a resolução do sistema os seguintes pesos:

$$\lambda_1 = V * \frac{B(T_2) - B(T_3)}{B(T_1) - B(T_3)} * \exp -r [B(T_2) - B(T_1)] \quad 34)$$

e

$$\lambda_2 = V * \frac{B(T_1) - B(T_2)}{B(T_1) - B(T_3)} * \exp -r [B(T_2) - B(T_3)] \quad 35)$$