

UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
MATEMÁTICA



## **Equações Algébricas: alguns episódios históricos**

Aminda Manuela Queimado Pereira

**Mestrado em Matemática para Professores**

Dissertação orientada por:  
Jorge Nuno Silva

2017

## **Agradecimentos**

Ao concluir este trabalho de tese de mestrado, gostaria de deixar expresso o meu sincero agradecimento a todos aqueles que me ajudaram e me incentivaram, de alguma forma, ao longo deste trabalho. Assim começaria por agradecer aos meus pais o carinho e o apoio que me deram ao longo dos anos, contribuindo para a minha formação profissional.

Ao meu marido, Joaquim, que me incentivou a realizar esta tese de mestrado e que soube compreender a minha dedicação à realização da mesma.

Ao meu filho, Pedro, pelos abraços e sorrisos que me fortaleceram nesta caminhada.

À minha maravilhosa irmã, Carla, ao meu cunhado, Alcides, e ao meu amado sobrinho, Tiago, pois sem vocês a minha vida não seria completa.

Agradeço ainda, a todos os meus amigos que diretamente ou indiretamente estiveram do meu lado nesta caminhada, pois muitas vezes um simples sorriso me fortalecia a seguir em busca do meu sonho.

Ao Professor Jorge Nuno Silva pela disponibilidade, incentivo, apoio, sugestões, colaboração crítica e pela orientação científica prestada na elaboração da presente tese.

À Professora Isabel Ferreirim pela sua simpatia e sugestões dadas ao longo da elaboração da presente tese.

A Deus por ter me dado coragem e sabedoria e não me ter deixado desistir.

## Resumo

As equações e os seus métodos de resolução são essenciais em todas as áreas e todos os níveis de escolaridade. Historicamente, resolver equações sempre foi de grande importância para os matemáticos e, essas equações, apareciam quase sempre como consequência da resolução de problemas. Este trabalho consiste em estudar, analisar e explicitar, na medida do possível, os momentos mais relevantes na história das equações algébricas. Esta abordagem incidirá numa área temporal de vários séculos, do Egito ao Renascimento Europeu.

Pouco a pouco foi-se definindo o conceito de equação e a Álgebra começa a ser entendida como o estudo da resolução de equações. Em 1842, Nesselmann considerou que podem ser reconhecidos três estágios no desenvolvimento histórico da Álgebra. Primeiro, temos o primitivo ou retórico, em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos, como foi o caso dos egípcios e dos babilónios. A seguir, vem um estágio intermediário, sincopado, na qual se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente. A *Aritmética* de Diofanto deve ser colocada nesta categoria. A partir do século XVI entrou-se numa nova etapa, a da álgebra simbólica. Nesta época, dão-se grandes progressos na resolução de equações, as quais se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que, aparentemente, nada tem a ver com os entes que representam. Scipione del Ferro é o primeiro a resolver a equação geral do 3.º grau. No entanto, não publica os seus resultados, e a mesma descoberta é feita por Tartaglia e publicada por Cardano, na sua *Ars Magna*. Por fim, a equação geral do 4.º grau é resolvida por Ferrari.

**Palavras-chave:** História da Matemática; Equações algébricas; Álgebra; Resolução de problemas; Problemas Históricos

## **Abstract**

Equations and their methods of resolution are essential in all areas and at all levels of schooling. Historically solving equations has always been of great importance to mathematicians, and these equations almost always appeared as a consequence of problem solving. This work consists of studying, analyzing and explaining, as far as possible, the most relevant moments in the history of algebraic equations. This approach will focus on a time span of several centuries, from Egypt to the European Renaissance.

Little by little the concept of equation was defined and Algebra begins to be understood as the study of the resolution of equations. In 1842, Nesselmann considered that three stages can be recognized in the historical development of Algebra. First, we have the primitive or rhetorical, in which the arguments for solving a problem are written in pure prose, without abbreviations or specific symbols, as was the case of the Egyptians and the Babylonians. Next comes an intermediate stage, syncopated, in which abbreviations are adopted for some of the quantities and operations that are repeated more frequently. Diophantine *Arithmetic* should be placed in this category. From the sixteenth century entered a new stage, that of symbolic algebra. At this time, great progress has been made in solving equations, which are expressed in a kind of mathematical shorthand composed of symbols that apparently have nothing to do with the entities they represent. Scipione del Ferro is the first to solve the general equation of the third degree. However, it does not publish its results, and the same finding is made by Tartaglia and published by Cardano in his *Ars Magna*. Finally, the general equation of the fourth degree is solved by Ferrari.

**Keywords:** History of Mathematics; Algebraic equations; Algebra; Problem solving; Historical Problems

## Índice

|  |    |
|--|----|
| Agradecimentos.....  | i  |
| Resumo.....  | ii |
| Índice de Figuras .....  | v  |
| Índice de Tabelas.....   | vi |
| Introdução.....  | 1  |
| 1. Egito e Mesopotâmia.....  | 3  |
| 1.1. As Obras Matemáticas dos Antigos Egípcios .....                     | 4  |
| 1.2. As Placas Matemáticas da Mesopotâmia .....                          | 14 |
| 2. A Matemática na Grécia Antiga.....                                    | 26 |
| 2.1. Euclides e os Elementos .....                                       | 27 |
| 2.2. A Aritmética de Diofanto .....                                      | 34 |
| 2.3. A Antologia Grega .....   | 41 |
| 3. Pensamento Algébrico na China Antiga e Medieval.....                  | 43 |
| 3.1. Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática.....                      | 43 |
| 3.2. A Matemática na China Medieval.....                                 | 56 |
| 4. Pensamento Algébrico na Índia Medieval.....                           | 59 |
| 4.1. Equações Lineares.....  | 60 |
| 4.2. Equações Quadráticas.....   | 61 |
| 4.3. Equações Indeterminadas .....                                       | 64 |
| 5. Pensamento Algébrico no Islão Medieval.....                           | 68 |
| 5.1. O tratado de Álgebra de al-Khwarizmi .....                          | 68 |
| 5.2. Omar Khayyam e a solução de Equações Cúbicas.....                   | 72 |
| 6. A Matemática no Ocidente Europeu nos séculos XII a XVI.....           | 73 |
| 6.1. O Liber Abbaci de Leonardo de Pisa .....                            | 73 |
| 6.2. A disputa entre Cardano e Tartaglia pelas equações do 3.º grau..... | 76 |
| Conclusões .....   | 81 |
| Referências Bibliográficas .....   | 84 |

## Índice de Figuras

|  |    |
|--|----|
| Figura 1.1 – Poste encostado a uma parede.   | 10 |
| Figura 1.2 – Procedimento geométrico para resolver a equação $x^2 + x = c$ .   | 18 |
| Figura 1.3 – Procedimento geométrico para resolver a equação $x^2 - bx = c$ .  | 19 |
| Figura 1.4 – Interpretação geométrica do problema 23 da placa BM13901.   | 20 |
| Figura 1.5 – Procedimento geométrico para resolver o sistema $x + y = b, xy = c$ .   | 22 |
| Figura 1.6 – Procedimento geométrico para resolver o sistema $x - y = b$ e $x^2 + y^2 = c$ .   | 23 |
| Figura 2.1 – Elementos, Proposição II – 1: $l(a + b + c) = la + lb + lc$ .   | 28 |
| Figura 2.2 – Elementos, Proposição II – 4: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ .   | 28 |
| Figura 2.3 – Versão geométrica da fórmula para a diferença de dois quadrados (de segmentos de reta): Elementos, Proposição II – 5.   | 29 |
| Figura 2.4 – Resolução geométrica da equação quadrática $bx - x^2 = c$ : Elementos, Proposição II – 5.   | 30 |
| Figura 2.5 – Resolução geométrica da equação quadrática $bx + x^2 = c$ : Elementos, Proposição II – 6.   | 30 |
| Figura 2.6 – Elementos, Proposição II – 11.  | 31 |
| Figura 2.7 – Elementos, Proposição VI – 28.  | 32 |
| Figura 2.8 – Elementos, Proposição VI – 29.  | 33 |
| Figura 3.1 – Algoritmo chinês da raiz quadrada.  | 42 |
| Figura 3.2 – Triângulo retângulo em C.   | 49 |
| Figura 3.3 – Problema 4 do capítulo 9 dos <i>Nove Capítulos da Arte Matemática</i> .   | 49 |
| Figura 3.4 – Problema 6 do capítulo 9 dos <i>Nove Capítulos da Arte Matemática</i> .   | 50 |
| Figura 3.5 – Problema 7 do capítulo 9 dos <i>Nove Capítulos da Arte Matemática</i> .   | 50 |
| Figura 3.6 – Problema 8 do capítulo 9 dos <i>Nove Capítulos da Arte Matemática</i> .   | 51 |
| Figura 3.7 – Problema 11 do capítulo 9 dos <i>Nove Capítulos da Arte Matemática</i> .  | 51 |
| Figura 3.8 – Ilustração do problema O "bambu partido" problema: (a) como ilustrado no Xiang Jie Jiu Zhang Suan Fa Zuan Lei (Needham 1959, página 28), e (b) a tradução moderna | 52 |
| Figura 3.9 – Problema 20 do capítulo 9 dos <i>Nove Capítulos da Arte Matemática</i> . Extraído de Katz, 2014, p. 91  | 53 |
| Figura 4.1 – Problema do bambu partido no <i>Lilavati</i> .  | 59 |
| Figura 4.2 – Problema da cobra e do pavão.   | 60 |
| Figura 4.3 – Problema do lótus.  | 61 |
| Figura 4.4 – Problema dos macacos  | 61 |
| Figura 5.1 – Justificação geométrica da al-Khwarizmi, da solução de $x^2 + 10x = 39$ .   | 67 |
| Figura 5.2 – Justificação geométrica da al-Khwarizmi, da solução de $x^2 + 10x = 39$ .   | 67 |
| Figura 5.3 – Justificação geométrica de al-Khwarizmi para a resolução de $x^2 + c = bx$ .  | 68 |
| Figura 6.1 – Problema 13 do capítulo XIII do <i>Liber Abbaci</i> .   | 71 |
| Figura 6.2 – Diagrama do problema 13 do Capítulo XIII do <i>Liber Abbaci</i> .   | 71 |

## Índice de Tabelas

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1.1 – Problema 7 do papiro de Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43.  | 10 |
| Tabela 1.2 – Problema 24 do papiro de Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43. Transcrito de Melville, 2004, p. 154. | 11 |
| Tabela 1.3 – Problema 27 do papiro de Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43. Transcrito de Melville, 2004, p. 158. | 12 |
| Tabela 1.4 – Problema 30 do papiro de Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43. Transcrito de Melville, 2004, p. 159. | 13 |
| Tabela 1.5 – Interpretação algébrica do problema da placa YBC 4663.   | 21 |
| Tabela 1.6 – Interpretação algébrica do problema da placa YBC 6967.   | 23 |
| Tabela 1.7 – Problema 9 da placa BM 85196   | 24 |
| Tabela 1.8 – Interpretação algébrica do problema 1 do texto AO8862  | 25 |
| Tabela 6.1 – Problema 5 da quinta parte do Capítulo XII do Liber Abbaci.                                    | 72 |

## Introdução

As equações e os seus métodos de resolução são essenciais em todas as áreas e todos os níveis de escolaridade. Historicamente, resolver equações sempre foi de grande importância para os matemáticos e, essas equações, apareciam quase sempre como consequência da resolução de problemas. Este trabalho consiste em estudar, analisar e explicitar, na medida do possível, os momentos mais relevantes na história das equações algébricas e está dividido em seis capítulos. Esta abordagem incidirá numa área temporal de vários séculos, do Egito ao Renascimento Europeu.

No primeiro capítulo estudamos a matemática no Egito e na Mesopotâmia. O estudo da matemática no antigo Egito será feito a partir da informação contida nos papiros que resistiram ao desgaste do tempo e chegaram aos nossos dias. Depois duma breve referência aos papiros mais importantes abordaremos a resolução de alguns problemas que aparecem nesses papiros e que assumem já um marcado cunho algébrico. Para resolver esses problemas os escribas egípcios utilizaram um método que, a partir dos fins do século XV, ficou conhecido por método da falsa posição. Há, porém, outros problemas de determinação de uma quantidade, mas que são resolvidos por métodos correspondentes aos atuais. Estudaremos ainda a matemática de uma das mais antigas civilizações de que temos conhecimento e que se desenvolveu na Mesopotâmia. Há uma maior abundância de documentos relativos à matemática desta civilização, pois em vez de papiros utilizavam placas de argila. Nas placas de conteúdo matemático encontradas estão resolvidas equações do 1.º grau, do 2.º grau e algumas equações do 3.º grau e sistemas de equações do 1.º, do 2.º, do 3.º grau e até de graus mais elevados.

No segundo capítulo estudamos a matemática na Grécia antiga. Praticamente não existem fontes primárias sobre a antiga matemática grega, ao contrário do que aconteceu com a matemática egípcia e babilónica, que nos legaram os seus papiros e placas de argila e, por isso, somos obrigados a confiar em relatos escritos várias centenas de anos após os documentos originais. O texto matemático mais importante da época grega são os *Elementos* de Euclides. Estes constituem uma obra notável, um monumento à superior capacidade de compilação, organização e sistematização do conhecimento matemático e do modo como é construído na perspectiva do pensamento helénico.

O livro II dos *Elementos* é o menor dos treze livros que compõem o tratado de Euclides. A leitura e análise deste livro permite uma interpretação algébrica da geometria grega, não sendo, no entanto, a legitimidade dessa interpretação uma opinião unânime entre historiadores de matemática. Os historiadores que defendem a existência de um raciocínio de tipo algébrico, referem que os gregos queriam transmitir resultados de álgebra, mas como não dispunham de uma simbologia adequada às representações algébricas, serviam-se da geometria para exprimir esses resultados algébricos. A geometria era, portanto, a linguagem da álgebra. Outros historiadores consideram que até Diofanto não há pensamento algébrico na matemática grega, sendo que a origem das proposições do livro II se encontra em problemas de índole geométrica e não algébrica.

É importante ainda referir que Diofanto foi considerado por alguns historiadores o fundador da Álgebra pois desenvolveu diversos métodos para a resolução de equações e sistemas de equações num estilo de linguagem conhecido como sincopado. Deste modo, os enunciados dos problemas, que tinham começado por ser expressos em linguagem natural, passam a incluir pequenas abreviações. O termo “Álgebra” só surge alguns séculos mais tarde, num trabalho de al-Khwarizmi, para designar a operação de “transposição de termos”, essencial na resolução de uma equação.

No terceiro capítulo estudamos o pensamento algébrico na China antiga e medieval. Um dos textos matemáticos mais antigos do mundo é o *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*. Esta obra é impressionante pela variedade de tópicos que cobre e pelo nível de sofisticação alcançado pelos matemáticos chineses no início da era cristã. Como na matemática do Egito, muitos problemas da matemática chinesa eram resolvidos pelo método da falsa posição. Além deste, os chineses também

utilizaram a regra da dupla falsa posição, particularmente popular durante o período em que a falta de uma notação simbólica adequada tornava difícil a solução de equações lineares simples. Esta regra foi trazida para a Europa pelos árabes e é encontrada nas obras do matemático islâmico do século IX al-Khwarizmi sob o nome de *hisab al-khataayn*. Além disso, conseguiam resolver sistemas pelo “método de eliminação Gaussiano”, tendo resolvido sistemas de equações, tanto determinados como indeterminados.

No quarto capítulo estudamos o pensamento algébrico na Índia medieval. Os matemáticos indianos foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra. Um dos principais assuntos matemáticos que prendeu a atenção dos indianos foi a análise indeterminada. A sua destreza de cálculo e a clareza das regras estabelecidas para a resolução de equações indeterminadas são notáveis. No entanto, ao contrário do que acontecia com os gregos, não se preocupavam com a prova e a sua geometria não revelou grandes avanços. Por outro lado, “é em geral aceite que os algebristas indianos estavam adiantados relativamente a Diofanto na facilidade de manipulação algébrica e que desenvolveram uma álgebra sincopada, onde problemas e soluções eram escritos em estilo quase simbólico” (Estrada et al., 2000, p.397).

No quinto capítulo estudamos o pensamento algébrico no Islão medieval. Os matemáticos islâmicos não só nos transmitiram técnicas de resolução de equações, na tradição das antigas escolas de escribas da Mesopotâmia, mas foram também inovadores. Por um lado, estenderam à Álgebra o conceito de demonstração apreendido dos gregos. Por outro lado, “as equações foram pela primeira vez estudadas como entes matemáticos próprios, e não como resultantes da resolução de problemas” (Estrada et al., 2000, p. 415).

No sexto capítulo estudamos a matemática no Ocidente Europeu nos séculos XII a XVI. Neste capítulo referimos o papel de Leonardo de Pisa na divulgação e propagação dos conhecimentos matemáticos, anteriores ao período que estamos a considerar. O nosso estudo será centrado na resolução de equações, dando especial relevo à contribuição dos algebristas italianos. No século XVI, com François Viète, dá-se uma transformação fundamental, entrando-se numa nova etapa, a da álgebra simbólica. Nesta época, dão-se grandes progressos na resolução de equações. Scipione del Ferro é o primeiro a resolver a equação geral do 3.º grau. No entanto, não publica os seus resultados, e a mesma descoberta é feita por Tartaglia e publicada por Cardano, na sua *Ars Magna*. Por fim, a equação geral do 4.º grau é resolvida por Ferrari. O sucesso destes matemáticos italianos do Renascimento marca um momento importante na História da Matemática, pois é a primeira vez que a ciência moderna ultrapassa os êxitos da Antiguidade.

## 1. Egito e Mesopotâmia

Os mais antigos registos matemáticos conhecidos remontam às civilizações do Egito e da Mesopotâmia. Os papiros egípcios e a coleção de placas da Babilónia constituem um importante legado civilizacional revelador dos primórdios da matemática (Providência, 2000). Nestas civilizações a matemática “era sempre domínio de sacerdotes especialmente treinados e de escribas, funcionários do governo cuja função consistia no desenvolvimento e na utilização da matemática para benefício do governo, em áreas como a cobrança de impostos, a medição, a construção, o comércio, a calendarização e práticas rituais” (Katz, 2010, p. 3). Embora as origens de muitos conceitos matemáticos provenham da sua utilidade nestes contextos, os matemáticos exercitaram a sua curiosidade, estendendo as suas ideias muito para além dos limites da necessidade prática. Os seus métodos foram transmitidos apenas a alguns privilegiados, através de uma tradição oral. Por isso, os seus registos escritos são escassos e raramente fornecem pormenores (Katz, 2010).

Alguns dos problemas presentes nos papiros da civilização egípcia reduzem-se a equações do 1.º grau. Esses problemas consistiam em exercícios numéricos envolvendo uma quantidade desconhecida e, por isso, representam uma aproximação à álgebra mais recente. No entanto, nem todos os problemas que aparecem nos papiros egípcios se traduzem sob a forma de equações do 1.º grau. Nos papiros de Kahun e de Berlim aparecem alguns problemas que se reduzem a equações quadráticas simples ou, mais especificamente, a um sistema de duas equações a duas incógnitas, em que uma das equações é linear e a outra é quadrática.

Na resolução de equações lineares os egípcios utilizavam um método que foi denominado, a partir dos fins do século XV, por método da falsa posição. Este método consiste em assumir, de início, uma solução falsa que, depois, é corrigida para obter a solução correta. De facto, para encontrar a solução do problema basta multiplicar o valor inicialmente atribuído à incógnita pelo quociente entre o termo independente da equação que traduz o problema e o número que se obteve ao substituir a incógnita pelo valor inicialmente suposto. Este método foi também “utilizado pelos matemáticos chineses e hindus, na Idade Média, no Renascimento e ainda posteriormente. É de assinalar que também figura nas Aritméticas (Práticas) portuguesas do século XVI” (Estrada et al., 2000, p. 39).

Enquanto que na álgebra egípcia não se ia muito além da resolução de equações do 1.º grau, nos textos-problemas da civilização mesopotâmica são resolvidas equações do 1.º grau, equações do 2.º grau, resolvidas de forma sistemática, algumas do 3.º grau e sistemas de equações do 1.º, 2.º, 3.º e até de graus mais elevados. No entanto, “a maior mestria dos escribas babilónicos na resolução de equações revela-se nas equações quadráticas. Podemos dizer que os escribas da Antiga Babilónia resolviam qualquer equação do 2.º grau completa, por processos que correspondem à aplicação da nossa fórmula resolvente” (Estrada et al., 2000, p. 80).

## 1.1. As Obras Matemáticas dos Antigos Egípcios

Grande parte do nosso conhecimento da matemática do antigo Egito não é proveniente dos hieróglifos dos templos, mas de um certo número de papiros egípcios que de algum modo resistiram ao desgaste do tempo e chegaram aos nossos dias. O Papiro Matemático de Rhind e o Papiro Matemático de Moscovo são considerados as principais fontes para o estudo da matemática egípcia antiga (Katz, 2010). No entanto, há mais três documentos da matemática egípcia com alguma importância: o Papiro de Kahun, o Papiro de Berlim e o Rolo de Couro.

O Papiro Matemático de Rhind é o papiro mais extenso contendo compilações de problemas matemáticos e as suas soluções, tem aproximadamente 18 pés de comprimento e 13 polegadas de altura e é património do Museu Britânico (Katz, 2010). Sabe-se que este rolo de papiro foi descoberto em meados do século XIX, nas ruínas de uma pequena construção próxima ao templo mortuário de Ramsés II, na antiga cidade de Tebas, atualmente Luxor - Egito (Robins e Shute, 1987). Foi adquirido em 1858 pelo egiptólogo e antiquário escocês Alexander Henry Rhind (1833-1863), por isso é conhecido como Papiro de Rhind, ou, menos frequentemente, chamado Papiro de Ahmés, cuja denominação pode ser encarada como uma homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 a. C., a partir de um original com cerca de 200 anos. Este papiro está escrito em hierático, da direita para a esquerda, em tintas preta e vermelha (Boyer, 1991).

Porém, quando o papiro chegou ao Museu Britânico não estava completo pois faltava-lhe a parte central. Cerca de quatro anos depois de Rhind ter adquirido o seu papiro, o egiptólogo americano Edwin Smith comprou no Egito o que pensou ser um papiro médico. A aquisição de Smith foi doada à Sociedade Histórica de Nova York em 1932, foi nessa altura que os especialistas descobriram sob uma camada fraudulenta a parte que faltava do Papiro de Rhind. A Sociedade, então, doou o rolo de pergaminho ao Museu Britânico, completando-se assim todo o trabalho de Ahmés (Eves, 2004).

A divulgação oficial do Papiro de Rhind ocorreu somente em 1898, aquando da publicação de um *fac-símile* completo do então conhecido Papiro de Rhind. No entanto, outros estudos já haviam sido feitos e inclusive sido expostos no meio intelectual da época, dentre eles, destaca-se a obra *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum)*, do egiptólogo alemão A. A. Eisenlohr, publicada em 1877. Os problemas deste papiro foram numerados de 1 a 87 pelo editor alemão A. A. Eisenlohr; no original não há qualquer numeração. Eisenlohr atribuiu os números 85, 86 e 87 a certos fragmentos que não fazem parte do trabalho matemático do papiro, mas que são de algum interesse, embora estejam incompletos e mais ou menos ininteligíveis. Como eles não podem, em nenhum sentido, ser chamados de problemas, Chace usa a palavra "Número" quando se refere a eles, tal como, Eisenlohr, na continuação da numeração dos problemas (Chace, 1927).

O Papiro de Rhind é uma coleção de problemas práticos de natureza aritmética, algébrica e geométrica com soluções, sem que haja vestígio de demonstrações ou formalismos só registados, muito tempo depois, pelos gregos, a partir de Tales.

No que diz respeito ao sistema de numeração, os egípcios utilizavam um sistema de numeração de base 10, do tipo repetitivo, análogo ao dos romanos. No sistema de numeração utilizado, expresso em hieróglifos, a adição era extremamente simples de efetuar. No entanto, o método egípcio da multiplicação é bastante diferente do nosso. Os egípcios usavam duas operações para multiplicar: duplicar e adicionar. A divisão egípcia pode ser descrita como uma multiplicação na ordem inversa - onde o divisor é duplicado repetidamente até o dividendo ser obtido. Este processo tem a vantagem pedagógica de não parecer uma nova operação. Se o resto da divisão não fosse zero, as frações eram introduzidas. Há uma diferença notável entre as frações egípcias e as que usamos atualmente. O nosso sistema admite qualquer número no numerador, enquanto que os egípcios usavam apenas frações unitárias ou "partes" (frações com numerador 1), com a única exceção de  $\frac{2}{3}$  talvez porque estas frações

são as mais “naturais”. No entanto, em determinados problemas aparecem frações que resultam de divisões que não são exatas, sendo, por isso, necessário lidar com frações diferentes das unitárias. Foi nesta área que os egípcios desenvolveram as técnicas matemáticas mais intrincadas para representar qualquer fração em termos de frações unitárias. Na realidade, os egípcios não colocavam a questão nestes termos, nos problemas onde se usasse uma fração não unitária eles simplesmente escreveriam uma soma de frações unitárias (Katz, 2010).

A maioria das fontes matemáticas dos tempos antigos ocupava-se da resolução de problemas, aos quais são aplicadas várias técnicas matemáticas. O estudo destes problemas começa com vários métodos para resolver equações lineares. Antigamente, não era usado o simbolismo para as operações ou incógnitas que usamos atualmente, embora já houvesse algum simbolismo na matemática egípcia. De facto, Gillings considera que o Papiro de Rhind contém os começos da utilização de símbolos. Os egípcios usaram a palavra *heap* (variavelmente transliterado como *aha* e *hau*) para a quantidade desconhecida. Além “do símbolo especial para a incógnita, há um sinal especial para a adição, que consiste em duas flechas ou duas pernas que avançam, e um sinal especial para a subtração, consistindo em duas pernas que recuam, ou ainda duas flechas. O sinal de igualdade é  $\prime/\prime$ ” (Vasconcellos, 2009, p. 69). Apesar destes indícios de simbologia, os escribas resolviam os problemas usando apenas técnicas verbais (Katz, 2010).

No Papiro de Rhind os problemas numerados de 24 a 29 são denominados por “aha” ou problemas de quantidade, porque quase todos começam com a palavra “aha” e usam esta palavra para denotar o resultado dos seus cálculos (Chace, 1927). Os problemas 24 a 29, 35 a 38, 40 e 76 envolvem equações do 1.º grau com uma incógnita, e são resolvidos pelo processo conhecido como método da falsa posição, isto é, “um valor específico, provavelmente falso, é assumido para aha, e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporções chega-se à resposta correta” (Boyer, 1991, p. 12). No final o escriba confere a sua resposta, o que representa um passo significativo no desenvolvimento da matemática uma vez que a verificação é um exemplo simples de prova.

Em cada um dos problemas 24 a 27 pretende-se somar à incógnita uma fração dela mesma e assume-se como resposta o denominador da fração. Estes problemas podem ser traduzidos, em notação atual, pela equação  $x + \frac{1}{m}x = a$ , onde  $m$  e  $a$  são conhecidos e  $x$  é desconhecido. Consideremos o enunciado e a respetiva resolução do **problema 26 do Papiro de Rhind**: “Uma quantidade e a sua quarta parte adicionadas perfazem 15. Qual é a quantidade?” (Chace, 1927, p. 68).

Assume 4.

|       |    |
|-------|----|
| \ 1   | 4  |
| \ 1/4 | 1  |
| Total | 5. |

Tantas quantas vezes 5 tem que ser multiplicado para se obter 15, assim como 4 tem que ser multiplicado o mesmo número de vezes para se obter o número pretendido.

|         |     |
|---------|-----|
| \ 1     | 5   |
| \ 2     | 10  |
| Total 3 | 15. |

Agora multiplica 3 por 4.

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
|       | 1   | 3   |
|       | 2   | 6   |
|       | \ 4 | 12  |
| Total | 4   | 12. |

|       |                |     |
|-------|----------------|-----|
| Prova | A quantidade é | 12  |
|       | 1/4            | 3   |
|       | Total          | 15. |

A barra \ é para indicar os números que são somados enquanto que a barra / indica uma fração. O escriba assume que a quantidade é 4, ou seja, que 4 é a solução da equação. Se substituirmos este valor no primeiro membro da equação obtém-se 5, em vez do número pretendido 15.

$$x = 4 \Rightarrow 4 + \frac{1}{4} \times 4 = 5 \neq 15$$

Logo,  $x = 4$  não é a verdadeira solução da equação. O escriba escolheu o número 4 para falsa solução de modo a simplificar os cálculos, eliminando assim a fração existente na equação. O escriba deve ter-se apercebido que devia multiplicar 5 por 3 para obter o número 15. Depois multiplica igualmente por 3 o valor assumido, obtendo assim a solução correta,  $3 \times 4 = 12$ . Veja-se uma possível justificação para esse processo que, de facto, conduz à solução da equação:

$$4 + \frac{1}{4} \times 4 = 5 \Rightarrow 3 \times \left(4 + \frac{1}{4} \times 4\right) = 3 \times 5 \Leftrightarrow 3 \times 4 + \frac{1}{4} \times 3 \times 4 = 15.$$

Neste problema como em muitos outros o escriba procede à verificação do resultado, o que corresponde a substituir  $x$  por 12 na equação e verificar que se obtém a identidade numérica,

$$12 + \frac{1}{4} \times 12 = 15.$$

O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa a quantidade desconhecida, traduz-se pela equação:

$$x + \frac{1}{4}x = 15.$$

A solução da equação é 12.

Os problemas 28 e 29 também envolvem equações do 1.º grau com uma incógnita. Para Robins e Shute estes problemas são considerados “problemas de diversão”, enquanto que, para Chace são problemas *aha* ou problemas das “quantidades desconhecidas”. Gillings, por sua vez, sugeriu que os problemas 28 e 29 poderiam ser problemas do tipo “Pense num número”, em que alguém executa um cálculo sobre um número escolhido por si sem o conhecimento do escriba. Apresenta então o resultado, sobre o qual o escriba faz o seu próprio cálculo e é capaz de chegar ao número original.

Estes problemas têm causado uma certa curiosidade aos historiadores do Papiro de Rhind sobre a intenção do escriba Ahmés ao copiar tal papiro. Há quem defenda que é um documento com intenções pedagógicas, um simples caderno de aluno ou um guia das matemáticas do antigo Egito, pois é o melhor texto de Matemática da época, indicando a direção e as tendências do ensino da matemática no Egito. Uma vez que o papiro egípcio é composto por problemas e pelas suas resoluções, alguns dos quais elementares, supõe-se que eram utilizados no ensino dos escribas. A Matemática era recordada e ensinada através de problemas que eram dados como exemplos para serem imitados. Muitos dos problemas pareciam ter as suas origens na prática dos escribas, contudo, alguns pareciam destinados a dar aos jovens escribas uma oportunidade para mostrarem as suas proezas nos cálculos mais difíceis e complicados, como no caso dos problemas 28 e 29. Consideremos o enunciado do **problema 28 do Papiro de Rhind**:

“Se a uma quantidade adicionarmos  $\frac{2}{3}$  dela e subtrairmos  $\frac{1}{3}$  da sua soma perfaz 10. Qual é a quantidade?” (Chace, 1927, p. 69).

A resolução deste problema e o enunciado do problema seguinte estão em falta. Uma das justificações apresentadas por Peet, na sua versão do Papiro de Rhind, sugere que o escriba olhou para a resolução do problema seguinte e, acidentalmente, a copiou, omitindo os cálculos envolvidos neste problema e o enunciado do problema seguinte (Chace, 1927).

O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa a quantidade desconhecida, traduz-se pela equação:

$$\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10.$$

A solução da equação é 9.

Os problemas 30 a 34 são problemas semelhantes aos anteriores, não são difíceis, mas aritmeticamente desafiadores. Ao darmos uma olhadela nas soluções dos problemas 30 a 34 depressa nos apercebemos de que esses problemas não poderiam ter aplicações práticas. Eles foram feitos para ilustrar um método para a solução de equações simples deste tipo, e embora o fizessem, a simplicidade do método foi mascarada pela complexidade das frações unitárias que surgem no processo e pelas operações inesperadas às quais o escriba foi forçado a recorrer. Em nenhum lugar, de facto, em todo o papiro há mais habilidade mostrada em lidar com longas expressões fracionárias, como na resolução destes problemas. Consideremos o enunciado e a respetiva resolução do **problema 34 do Papiro de Rhind**:

“Uma quantidade, a sua metade e a sua quarta parte adicionadas perfazem 10. Qual é a quantidade?” (Chace, 1927, p. 76).

Multiplique  $1 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$  de modo a obter 10 (ou divida 10 por  $1 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$ ).

|                      |           |
|----------------------|-----------|
| \ 1                  | 1 1/2 1/4 |
| 2                    | 3 1/2     |
| \ 4                  | 7         |
| \ 1/7                | 1/4       |
| 1/4 1/28             | 1/2       |
| \ 1/2 1/14           | 1.        |
| Total 5 1/2 1/7 1/14 | 10.       |

O total é a quantidade requerida  $5 \frac{1}{2} \frac{1}{7} \frac{1}{14}$ .

Encontre  $1 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$  de  $5 \frac{1}{2} \frac{1}{7} \frac{1}{14}$ . O escriba apresentou de seguida a prova:

|                 |  |
|-----------------|--|
| \ 1             | 5 1/2 1/7 1/14                           |
| \ 1/2           | 2 1/2 1/4 1/14 1/28                      |
| \ 1/4           | 1 1/4 1/8 1/28 1/56.                     |
| Total 1 1/2 1/4 | 9 (1/2 1/8) 1/7 1/14 1/14 1/28 1/28 1/56 |

A barra \ é para indicar os números que são somados enquanto que a barra / indica uma fração. Neste caso, o escriba foi instruído para resolver esta equação como nós o faríamos, isto é, dividir 10 por  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ . Para o fazer, o escriba duplicou sucessivamente  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$  até obter 10, concluindo que a resposta é  $5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$ . A resolução apresentada pelo escriba, excetuando o facto de não ter aplicado

a redução ao mesmo denominador, é bastante atual. Os antigos egípcios tinham uma predileção pelas frações unitárias, o que lhes permitiu grande destreza e facilidade no seu manuseamento.

O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa a quantidade desconhecida, traduz-se pela equação:

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 10.$$

Resolvendo a equação, vem que:

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 10 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}.$$

A solução da equação apresentada pelo escriba, depois de efetuar a divisão acima, é  $5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$  (ou em notação moderna  $5\frac{5}{7}$ ).

O Papiro de Akhmin foi descoberto pela Missão arqueológica francesa ao Cairo na necrópole da antiga Panopolis, e encontra-se no Museu de Gizé. Supõe-se que o documento foi compilado ou escrito por um cristão do século VIII, e refere-se ao ensino prático da Aritmética entre os gregos, sendo mesmo este papiro o mais antigo documento escrito conhecido sobre esse ensino. No papiro de Akhmin, escrito inteiramente de acordo com os princípios da numeração do Papiro de Rhind, e que se pode considerar como representando a ciência egípcia duma época muito anterior, se encontram cinquenta problemas com as respetivas soluções, sem que se indique, como sucede no Papiro de Rhind, quais os processos para as obter (Vasconcellos, 2009).

Os problemas número 13 e 17 extraídos do papiro Akhmin têm um conteúdo semelhante ao problema número 28 do papiro de Rhind. Consideremos o enunciado e a respetiva resolução do **problema número 13 do Papiro de Akhmin** que foi transcrito da tradução de Baillet:

“De um tesouro alguém tira uma parte equivalente a  $\frac{1}{13}$  moedas, do que restou alguém retirou mais  $\frac{1}{17}$ , restando no tesouro 150 moedas. Qual era o valor total do tesouro?

Do mesmo modo  $13 \times 17 = 221$ ;  $\frac{1}{13} 221 = 17$ ;  $221 - 17 = 204$ ;  $\frac{1}{17} 204 = 12$ ;  $204 - 12 = 192$ .

Do mesmo modo  $221 \times 150 = 33150$  e  $\frac{1}{192} 33150$ .

O resultado é  $172 \frac{1}{2} \frac{1}{8} \frac{1}{48} \frac{1}{96}$ ” (Baillet, 1892, p. 70).

O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa o número de moedas, traduz-se pela equação:

$$\left(x - \frac{1}{13}x\right) - \frac{1}{17}\left(x - \frac{1}{13}x\right) = 150.$$

O valor total do tesouro era  $172 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{96}$  moedas.

O Papiro de Berlim é outro documento egípcio que permite conhecer a matemática desenvolvida pelos egípcios. Foi adquirido por A. H. Rhind em 1850, na mesma altura que o Papiro de Rhind, mas encontrava-se em muito mau estado e só foi analisado e restaurado cerca de 50 anos mais tarde. Ainda assim, o Papiro de Berlim encontra-se parcialmente estragado. Data aproximadamente de 1800 a.C. e encontra-se no museu Staatliche de Berlim.

Os egípcios não resolviam apenas equações lineares, pois no Papiro de Berlim aparece, pela primeira vez, uma equação do 2.º grau. O problema que se segue, retirado do Papiro de Berlim, é um desses casos onde uma equação do 2.º grau foi resolvida pelo método da falsa posição. Consideremos o enunciado do **Fragmento mais longo do Papiro de Berlim**:

“É-te dito ... a área de um quadrado de 100 [cúbitos quadrados] é igual à de dois quadrados mais pequenos. O lado de um dos quadrados é  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$  o lado do outro. Diz-me quais são os lados dos dois quadrados desconhecidos” (Clagett, 1999, pp. 250-251).

Gillings apresentou a seguinte interpretação da resolução do problema:

“Tome sempre o quadrado de lado 1. Então o lado do outro é  $1/2 + 1/4$ . Multiplica-o por  $1/2 + 1/4$ . A área do quadrado pequeno dá  $1/2 + 1/16$ . A soma da área dos dois quadrados pequenos é  $1 + 1/2 + 1/16$ . Calcule a raiz quadrada de  $1 + 1/2 + 1/16$ . É  $1 + 1/4$ . Calcule a raiz quadrada de 100 cúbitos. É 10. Divide 10 por  $1 + 1/4$ . Dá 8, o lado de um quadrado. Calcule  $1/2 + 1/4$  de 8. Dá 6, o lado do outro quadrado” (Gillings, 1972, p. 161).

No papiro não é apresentado pelo escriba os cálculos do quadrado de  $1/2 + 1/4$ , nem o cálculo das raízes quadradas de  $1 + 1/2 + 1/16$  e 100. Se estes não foram feitos mentalmente foram sem dúvida lidos ou verificados a partir de uma tabela de quadrados. Tal tabela teria sido muito fácil de construir, e muito provavelmente foi elaborada pelos escribas. Além disso, não foram apresentados os cálculos para mostrar que  $1/2 + 1/4$  de 8 dá 6. Por isso, podemos concluir que o escriba estava mais preocupado em mostrar como o seu método da falsa posição foi aplicado à solução de equações, do que ensinar a multiplicação de frações e os quadrados e raízes quadradas de frações simples (Gillings, 1972).

O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  e  $y$  representam as medidas dos quadrados mais pequenos, pode traduzir-se pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)y \end{cases}$$

Assume que  $y = 1$  e  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ , então  $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \neq 100$ , o que significa que as falsas soluções consideradas não resolvem a equação pretendida. Seja  $k$  a razão entre o valor correto do comprimento dos lados dos quadrados pequenos e o valor assumido, isto é, seja  $k$  o fator de correção das falsas soluções consideradas. Então, as verdadeiras soluções da equação são:  $y = k \times 1$  e  $x = k \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$ . Donde se conclui que:

$$x^2 + y^2 = k^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 + k^2 = k^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right).$$

Mas, como se pretende que  $x^2 + y^2 = 100$  (área do quadrado maior), tem-se que:

$$k^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right) = 100, \text{ ou seja, que } k \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 10.$$

Donde,  $k = \frac{10}{1 + \frac{1}{4}} = 8$ .

Conclui-se então, finalmente, que o valor do lado do quadrado maior é  $y = 8 \times 1 = 8$  e que o valor do lado do quadrado menor é  $x = 8 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 6$ . Note-se que os lados dos quadrados menores são 8 e 6 cúbitos. Uma vez que o lado do quadrado grande é 10 cúbitos, os valores dos lados correspondem a um múltiplo do terno pitagórico (3, 4, 5). Este problema exemplifica a resolução de uma equação do 2.º grau pelo método da falsa posição que, muitos séculos depois, também foi utilizado por Diofanto de Alexandria.

O chamado Papiro Matemático do Cairo foi desenterrado em 1938 e investigado em 1962. O papiro data, provavelmente, de 300 a.C., está escrito em demótico e contém 40 problemas de matemática, distribuídos por 20 colunas e na sua parte de trás está o código legal de *Hermopolis*. Os problemas deste papiro foram numerados de 1 a 40 por Parker, iremos seguir esta numeração por uma questão de conveniência. Nos problemas a seguir denotamos por  $D_i$  o  $i$ -ésimo dado do problema e por  $R_j$  o resultado do passo  $j$ . Esta técnica tem a vantagem de se concentrar nas etapas do procedimento, em vez de determinar uma equação. Esse formalismo representa como o algoritmo prossegue, ao invés de apresentar uma prova de como ele funciona (Melville, 2004).

No Papiro do Cairo os problemas 7 a 18 são problemas algébricos, que estão relacionados com medidas de panos de velas de navios, que envolvem uma equação do 2.º grau. Consideremos o enunciado e a respetiva resolução do **problema 7 do Papiro do Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43**:

«Se te é dito: “Faz uma vela de pano para o barco,” e se te é dito: “Dá 1000 cúbitos de pano para uma vela, a altura da vela estando [na razão] de 1 para 1 1/2 da largura,” eis como deves fazer. Encontra a sua metade, quando a razão é 1 para 1 1/2: o resultado é 1500. Faz com que se reduza à sua raiz quadrada: 38 2/3 1/20. Tu dirás: “A altura da vela é 3[8] 2/3 1/20”. Tomarás para isso 2/3 – uma vez que acontece que é [para 1 1/2] que 1 faz [uma razão]: o resultado é 25 2/3 1/10 1/90. Isso é a largura» (Katz et al., 2007, p.48).

O problema calcula a largura e a altura de uma vela retangular dado a área,  $D_1 = 1000$ , e a razão entre a largura e a altura,  $D_2 = 1\frac{1}{2}$ . Na tabela 1.1 podemos seguir os passos efetuados pelo escriba e as instruções simbólicas referentes a cada passo.

Tabela 1.1 – Problema 7 do Papiro do Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43.

|                | <b>Cálculos</b>  | <b>Instruções simbólicas</b>     |
|----------------|--|----------------------------------|
| <b>Passo 1</b> | $1\frac{1}{2} \times 1000 = 1500$  | $R_1 = D_2 \times D_1$           |
| <b>Passo 2</b> | $\sqrt{1500} = 38\frac{2}{3}\frac{1}{20}$  | $R_2 = \sqrt{R_1}$               |
| <b>Passo 3</b> | $\frac{2}{3} \times 38\frac{2}{3}\frac{1}{20} = 25\frac{2}{3}\frac{1}{10}\frac{1}{90}$ | $R_3 = \frac{1}{D_2} \times R_2$ |

A altura da vela é  $38\frac{2}{3}\frac{1}{20}$  e a sua largura é  $25\frac{2}{3}\frac{1}{10}\frac{1}{90}$ . Para compreender melhor estas instruções, convém olharmos para a resolução feita em notação moderna. Se designarmos a altura por  $x$  e a largura por  $y$ , a informação dada pode ser expressa da seguinte forma:

$$x \times y = 1000 \text{ e } x \div y = \frac{3}{2} \text{ ou } y = \frac{2}{3}x.$$

Donde,  $x^2 \times \frac{2}{3} = 1000$ . Logo,  $x = \sqrt{1500}$ . Como  $y = \frac{2}{3}x$ , temos que,  $y = \frac{2}{3}\sqrt{1500}$ .

Alguns dos problemas deste papiro revelam uma forte influência de textos babilónicos que é notório nos problemas 24 a 31. Os problemas 24 a 31 lidam exclusivamente com o teorema de Pitágoras e mostram que os egípcios dessa época não só sabiam que o triângulo 3, 4, 5 é retângulo, mas que também acontecia o mesmo para os triângulos 5, 12, 13 e 20, 21, 29.

Consideremos um poste de comprimento  $d$  encostado a uma parede. Se a extremidade superior deslizou uma certa distância  $p$ , então a extremidade inferior do poste está a uma distância  $s$  da parede. Os lados  $s$ ,  $h$  e  $d$  onde  $h = d - p$  formam um triângulo retângulo (Fig. 1.1).

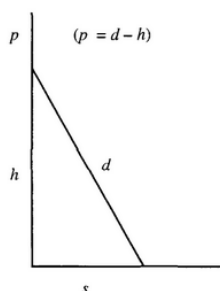


Figura 1.1 – Poste encostado a uma parede.

Dos parâmetros  $s, h$  e  $d$  dois são conhecidos e pretende-se determinar o parâmetro em falta. Podemos considerar três casos. No primeiro caso,  $s$  e  $d$  são dados e aplicando o teorema de Pitágoras,  $d^2 = h^2 + s^2$ . Donde,  $h^2 = d^2 - s^2$ . Como  $s, h$  e  $d$  são medidas, temos que  $h = \sqrt{d^2 - s^2}$ . Donde,  $p = d - \sqrt{d^2 - s^2}$ .

No segundo caso,  $d$  e  $p$  são dados e aplicando o teorema de Pitágoras,  $d^2 = h^2 + s^2$ . Como  $h = d - p$  vem  $d^2 = (d - p)^2 + s^2$ . Donde,  $s^2 = d^2 - (d - p)^2$ . Como  $s, h$  e  $d$  são medidas, temos que  $s = \sqrt{d^2 - (d - p)^2}$ .

No terceiro caso  $p$  e  $s$  são dados e aplicando o teorema de Pitágoras,  $d^2 = h^2 + s^2$ . Como  $h = d - p$  vem  $d^2 = (d - p)^2 + s^2$ . Donde,  $d^2 = d^2 - 2dp + p^2 + s^2$ . Assim,  $2dp = p^2 + s^2$ . Finalmente obtemos  $d = \frac{p^2 + s^2}{2p}$ .

Consideremos o **problema 24 do Papiro do Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43**:

“Um poste tem de comprimento 10 cúbitos quando ereto. A extremidade inferior do poste está a uma distância de 6 cúbitos da parede. Determina quanto deslizou a extremidade superior” (Melville, 2004, p. 155).

Consideremos  $D_1 = 10$  o comprimento do poste e  $D_2 = 6$  a distância da extremidade inferior do poste à parede. Na tabela 1.2 podemos seguir os passos efetuados pelo escriba e as instruções simbólicas referentes a cada passo.

Tabela 1.2 – Problema 24 do Papiro do Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43. Transcrito de Melville, 2004, p. 154.

| Cálculos       |                      | Instruções simbólicas |
|----------------|----------------------|-----------------------|
| <b>Passo 1</b> | $10 \times 10 = 100$ | $R_1 = D_1^2$         |
| <b>Passo 2</b> | $6 \times 6 = 36$    | $R_2 = D_2^2$         |
| <b>Passo 3</b> | $100 - 36 = 64$      | $R_3 = R_1 - R_2$     |
| <b>Passo 4</b> | $\sqrt{64} = 8$      | $R_4 = \sqrt{R_3}$    |
| <b>Passo 5</b> | $10 - 8 = 2$         | $R_5 = D_1 - R_4$     |

O escriba utilizando os dados presentes no enunciado do problema apresenta uma sequência ordenada de etapas aritméticas simples que permitem chegar à solução do problema. A etapa final requer a recuperação dos dados iniciais. A estrutura formal do algoritmo é muito semelhante ao dos problemas mesopotâmicos. A solução do problema é 2 cúbitos.

Considerando  $h$ , a altura que o poste alcança na parede, pretendemos determinar  $p$ , a distância que deslizou a extremidade superior. Em linguagem simbólica atual, aplicando o teorema de Pitágoras, temos que  $10^2 = h^2 + 6^2$ . Donde,  $h^2 = 64$ . Como  $h$  é uma medida positiva,  $h = \sqrt{64} = 8$ . Assim,  $p = 10 - 8 = 2$ .

O problema 25 é semelhante ao anterior, mas com valores diferentes. Desta vez o triplo escolhido não foi 6-8-10, mas  $10 - 10\frac{1}{2} - 14\frac{1}{2}$ . Presumivelmente, este foi escolhido de modo que no primeiro caso o maior número do triplo fosse 10 e no outro o menor fosse 10, ligando assim os dois conjuntos de parâmetros pelo número 10. O problema 26 usa o mesmo triplo 6-8-10 que o problema 24, mas o papel do 6 e do 8 estão agora invertidos.

Consideremos o **problema 27 do Papiro do Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43**:

“Um poste tem de comprimento 10 cúbitos quando ereto, a distância que o extremo superior deslizou é de 2 cúbitos. Determina a distância da extremidade inferior do poste à parede” (Melville, 2004, p. 157).

O problema 27 é o inverso do problema 24. O triplo relevante é novamente 6-8-10 e o comprimento do poste é dado. No entanto, desta vez, a distância que deslizou a extremidade superior é dada e pretende-se determinar a distância da extremidade inferior do poste à parede. Na tabela 1.3 podemos seguir os passos efetuados pelo escriba e as instruções simbólicas referentes a cada passo.

Tabela 1.3 – Problema 27 do Papiro do Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43. Transcrito de Melville, 2004, p. 158.

| Cálculos       |                      | Instruções simbólicas |
|----------------|----------------------|-----------------------|
| <b>Passo 1</b> | $10 \times 10 = 100$ | $R_1 = D_1^2$         |
| <b>Passo 2</b> | $10 - 2 = 8$         | $R_2 = D_1 - D_2$     |
| <b>Passo 3</b> | $8 \times 8 = 64$    | $R_3 = R_2^2$         |
| <b>Passo 4</b> | $100 - 64 = 36$      | $R_4 = R_1 - R_3$     |
| <b>Passo 5</b> | $\sqrt{36} = 6$      | $R_5 = \sqrt{R_4}$    |

Pretendemos determinar  $s$ , a distância da extremidade inferior do poste à parede. Começamos por determinar  $h$ , a distância que o poste alcança:  $h = 10 - 2 = 8$ . Em linguagem simbólica atual, aplicando o teorema de Pitágoras, temos que  $10^2 = 8^2 + s^2$ . Donde,  $s^2 = 36$ . Como  $s$  é uma medida positiva,  $s = \sqrt{36} = 6$ .

O problema 28 é semelhante ao problema 27, mas usando o segundo conjunto de dados, de modo que é o inverso do problema 25. A estrutura do algoritmo é precisamente a do problema 27. O problema 29 é semelhante ao problema 27, mas usando o terceiro conjunto de dados, ou seja, os dados 6-8-10 do problema 26, onde a distância da extremidade inferior do poste à parede é de 8 cúbitos. O comprimento do poste é de 10 cúbitos e a distância que deslizou a extremidade superior é de 4 cúbitos. Apesar de pequenas diferenças na redação (por exemplo, este problema não diz o que não será indicado), a solução segue exatamente os mesmos passos que nos problemas 28 e 27.

Os problemas 30 e 31, estão ambos muito danificados. A reconstrução dos problemas depende da comparação assumida entre os dois problemas e das exigências do problema. Apesar da restauração extensa pode-se ter confiança razoável nos algoritmos utilizados. Estes dois problemas pedem o comprimento do poste, quando a distância que a extremidade superior deslizou e a distância da extremidade inferior do poste à parede são conhecidas. Consideremos o **problema 30 do Papiro do Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43**:

“Num poste a distância da extremidade inferior do poste à parede é de 6 cúbitos e a sua altura não será indicada. Se a extremidade superior deslizou 2 cúbitos, qual seria a sua altura?” (Melville, 2004, p. 158).

Consideremos  $D_1 = 6$  a distância da extremidade inferior do poste à parede e  $D_2 = 2$  a distância que a extremidade superior deslizou. Na tabela 1.4 podemos seguir os passos efetuados pelo escriba e as instruções simbólicas referentes a cada passo.

Tabela 1.4 – Problema 30 do Papiro do Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43. Transcrito de Melville, 2004, p. 159.

| Cálculos       |                   | Instruções simbólicas |
|----------------|-------------------|-----------------------|
| <b>Passo 1</b> | $6 \times 6 = 36$ | $R_1 = D_1^2$         |
| <b>Passo 2</b> | $2 \times 2 = 4$  | $R_2 = D_2^2$         |
| <b>Passo 3</b> | $36 + 4 = 40$     | $R_3 = R_1 + R_2$     |
| <b>Passo 4</b> | $2 + 2 = 4$       | $R_4 = D_2 + D_2$     |
| <b>Passo 5</b> | $40 \div 4 = 10$  | $R_5 = R_3 \div R_4$  |

O algoritmo agora usado é diferente dos anteriores. Consideremos  $d$  a altura do poste que pretendemos determinar. Em linguagem simbólica atual, aplicando o teorema de Pitágoras, temos que  $(d - 2)^2 + 6^2 = d^2$ . Donde,  $d = \frac{40}{4} = 10$ . O comprimento do poste é de 10 cúbitos.

O problema 31 apresenta a mesma situação que o anterior, mas usando o segundo conjunto de dados  $10 - 10\frac{1}{2} - 14\frac{1}{2}$ . O nono problema esperado, usando o terceiro conjunto de dados, não aparece no papiro. Em vez disso, o próximo problema é determinar o diâmetro de um círculo dado a sua área.

Nos problemas 34 e 35 são dados a área e a diagonal de um pedaço de terra retangular, e pretende-se determinar os dois lados do retângulo. Consideremos o **problema 34 do Papiro do Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43**:

“Um retângulo de área 60 cúbitos quadrados, tem diagonal de 13 cúbitos. Determine os lados do retângulo” (Eves, 2004, p. 87).

Denotando os lados, a diagonal e a área do retângulo por  $x, y, d$  e  $A$ , temos que:

$$x^2 + y^2 = d^2 \text{ e } xy = A.$$

Donde,

$$x^2 + 2xy + y^2 = d^2 + 2A \text{ e } x^2 - 2xy + y^2 = d^2 - 2A,$$

ou

$$(x + y)^2 = d^2 + 2A, (x - y)^2 = d^2 - 2A.$$

No problema 34,  $d^2 + 2A$  e  $d^2 - 2A$  são quadrados perfeitos, e pode-se encontrar prontamente valores para  $x + y, x - y$ .

Consideremos o **problema 35 do Papiro do Cairo JE 89127- 30, 89137 – 43**:

“Um retângulo de área 60 cúbitos quadrados, tem diagonal de 15 cúbitos. Determine os lados do retângulo” (Eves, 2004, p. 87).

No problema 35,  $d^2 + 2A$  e  $d^2 - 2A$  não são quadrados perfeitos e o escriba usa a fórmula de aproximação  $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$  obtendo:

$$\sqrt{345} = \sqrt{18^2 + 21} \approx 18 + \frac{21}{36} = 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \text{ e } \sqrt{105} = \sqrt{10^2 + 5} \approx 10 + \frac{5}{20} = 10 + \frac{1}{4}.$$

Dados os escassos documentos existentes sobre a matemática egípcia, coloca-se com frequência a questão da existência de elementos científicos na matemática desta civilização. As opiniões não são consensuais uma vez que, normalmente, não é dada a justificação dos métodos usados na resolução dos problemas, sendo apenas apresentada a solução. Por outro lado, não sabemos se conhecemos tal Matemática no seu todo, já que os documentos que possuímos são escassos. Há historiadores que a consideram bastante rudimentar e primitiva, sem quaisquer elementos científicos; outros, contudo, exprimem opiniões mais favoráveis à existência de uma matemática mais científica e sofisticada.

Talvez uma avaliação mais criteriosa da situação tenha sido feita por J. R. Newman, quando escreveu que uma avaliação sólida da matemática egípcia depende de uma compreensão mais ampla e profunda da cultura humana do que os egiptólogos ou historiadores da ciência costumam reconhecer. É verdade que os egípcios não mostraram exatamente como estabeleceram as suas regras ou fórmulas, nem como chegaram aos seus métodos em relação a valores específicos da variável. Mas quase sempre provaram que a solução numérica para o problema em questão era correta para o valor ou valores específicos que eles escolheram. Para eles, isso constituiu tanto método como prova (Gillings, 1972).

## 1.2. As Placas Matemáticas da Mesopotâmia

Uma outra civilização que se desenvolveu no mesmo período que a civilização egípcia foi a mesopotâmica, também chamada babilônica. Há uma maior abundância de documentos relativos à matemática desta civilização. Em vez de papiros utilizavam placas. Essas placas, tábuas de barro mole, eram gravadas, enquanto húmidas, com um estilete, em forma de cunha (daí o nome de escrita cuneiforme), e depois secas ao sol ou cozidas num forno. Desta forma, eram mais resistentes ao tempo e, conseqüentemente, mais duradouras (Estrada et al., 2000).

Desde essa altura muitas placas foram descobertas, traduzidas e comentadas. Muitas destas placas encontram-se, atualmente, em diversos museus de todo o mundo e a sua designação depende da coleção a que pertencem. Geralmente, são referenciadas por uma sigla, que indica o local onde estão arquivadas e o respetivo número de série.

As placas com conteúdo matemático começaram a ser decifradas e analisadas nos anos 20 pelo historiador Otto Neugebauer, seguido de Thureau-Dangin, entre outros. Dos trabalhos publicados prevalece a ideia de que a matemática da Mesopotâmia apresenta um conteúdo e uma conceptualização que, atualmente, designamos por aritmético-algébrica. Em 1938, Solomon Gandz, num notável artigo, interpreta os procedimentos dos escribas da antiga Babilónia como algébricos. Nos anos 70, os historiadores Marvin A. Powell e Jöran Friberg reexaminaram os textos da matemática da Mesopotâmia com maior rigor na tradução e interpretação dos conteúdos. Nos anos 80, os historiadores Jens Hoyrup e Eleanor Robson procuraram na sua tradução e interpretação dos textos integrá-los no contexto cultural em que foram escritos. Destes vários estudos resultou numa nova interpretação nos procedimentos utilizados na “Álgebra” da antiga Babilónia (Estrada et al., 2000).

Segundo Neugebauer, as placas de conteúdo matemático referem-se sobretudo a três grandes períodos. O período antigo (c. 1900 - 1600 a.C.), a que chamaremos de Antiga Babilónia, o Neo-Assírio (c. 700 a.C.) e o Neo-Babilónico e Selêucida (c. 600 a.C. até à era cristã).

Os textos matemáticos da antiga Babilónia podem ser catalogados em textos-tabelas e textos-problemas. Existem muitas tabelas diferentes, como tabelas de recíprocos, de cubos, de multiplicação, de raízes quadradas, de raízes cúbicas, tabelas de conversão de unidades de comprimento, peso, superfície, volume, etc. Distintos dos textos que continham tabelas são os textos que lidam com problemas algébricos e geométricos. Embora nenhum deles apresente as regras gerais, a coerência com que os problemas foram tratados sugere que os babilónios (ao contrário dos egípcios) tinham algum tipo de abordagem teórica da Matemática. Os problemas, muitas vezes, parecem ser exercícios intelectuais, em vez de tratados sobre levantamentos topográficos ou contabilidade, e evidenciam um interesse abstrato em relações numéricas. A álgebra que era praticada pelos babilónios caracterizava-se pela aparente falta de fórmulas, as técnicas empregues para a solução de equações do primeiro e segundo grau eram basicamente discursivas.

No que diz respeito ao sistema de numeração, os mesopotâmicos usavam um sistema de numeração posicional de base 60. No entanto, esta civilização utilizava apenas dois símbolos, o que os obrigava a usar um sistema repetitivo, para representar os elementos componentes de cada ordem no número. Este sistema apresentava alguns inconvenientes pois não tinha símbolo para o zero. Se houvesse no número alguma posição que não possuísse valor, poderia ser deixado um espaço em branco para o representar, mas esse espaço vazio nunca aparecia no fim da representação de um número. Mais tarde, em vez do espaço em branco, aparece um símbolo do tipo ▲ mas que nunca é usado no fim da representação do número (Estrada et al., 2000).

Outra ambiguidade do sistema sexagesimal posicional babilónico resulta da falta de virgula sexagesimal e, portanto, da indicação do valor absoluto do número. O mesmo símbolo pode representar uma unidade, ou 60 unidades (a base) ou uma potência da base, de expoente positivo ou negativo. Desta

forma  $\llcorner$  podia representar 20 ou  $20 \times 60 = 1200$  ou  $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$  ou  $\frac{20}{60^2} = \frac{1}{180}$ . Este sistema sexagesimal é usado tanto na escrita de números inteiros como na de números fracionários. O historiador Otto Neugebauer introduziu uma convenção que consiste em separar a parte inteira da parte fracionária por ponto e vírgula e separar as unidades das diferentes ordens decimais por vírgulas. Vejamos alguns exemplos escritos na base 60 segundo esta convenção:

$$2,35,42 = 2 \times 60^2 + 35 \times 60 + 42 \text{ e } 3,21;11,27 = 3 \times 60 + 21 + \frac{11}{60} + \frac{27}{60^2}.$$

Encontramos algumas equações lineares simples nos textos babilónicos, e nenhum apresenta um algoritmo para obtenção da solução. Para resolver equações lineares da forma  $ax = b$  cuja solução é  $x = \left(\frac{1}{a}\right)b$ , os escribas babilónicos, possivelmente, usaram uma tabela de recíprocos para determinar  $\frac{1}{a}$  e uma tabela de multiplicação para calcular  $\left(\frac{1}{a}\right) \times b$ . Se  $\frac{1}{a}$  não fosse uma fração sexagesimal regular, teriam usado uma aproximação adequada. Um exemplo de um texto matemático, encontrado durante as escavações em Tell Harmal em 1949 e pertencente ao antigo período da Babilónia, ilustra esta abordagem. O enunciado do problema e a sua solução basearam-se na tradução de Taha Baqir (1951): “Se adicionar aos dois terços dos meus dois terços cem unidades de cevada, obtemos a quantidade original. Qual é a quantidade original?” (Joseph, 2011, p. 153).

A resolução apresentada em Joseph é a seguinte: primeiro multiplica dois terços por dois terços: resultado  $0;26,40$  (isto é,  $\frac{4}{9}$ ). Depois subtrai  $0;26,40$  de 1: resultado  $0;33,20$  (isto é,  $\frac{5}{9}$ ). Toma o recíproco de  $0;33,20$ : resultado  $1;48$  (isto é,  $1 + \frac{4}{5}$ ). Multiplica  $1;48$  por  $1,40$  (isto é, 100): resultado  $3,00$  (isto é, 180).  $3,0$  unidades de cevada é a quantidade original. Este procedimento é idêntico ao que usaríamos atualmente para resolver a equação:

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right)x + 100 = x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)x + 100 = x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)x = 100 \Leftrightarrow x = 180.$$

Na placa YBC 4652 que pertence à coleção babilónica da Universidade de Yale (*Yale Babylonian Collection*), nos E.U.A., aparecem vários problemas, todos semelhantes, cujo objetivo é descobrir o peso “original” de uma pedra, dando origem a equações do 1.º grau. Esta placa contém 22 exemplos, mas apenas 11 estão parcialmente preservados; desses, 6 conseguiram ser completamente restaurados. Todos os problemas desta placa, pelo menos todos os que se conseguem interpretar, começam da mesma forma “encontrei uma pedra, [mas] não a pesei”. Podemos encontrar problemas semelhantes, que podem ser resolvidos através de equações do 1.º grau, em textos matemáticos egípcios sensivelmente da mesma época.

As unidades de peso são ma-na (“mina”), gin (“siclo”) é še (“grão”). Um ma-na corresponde a 60 gin e um gin equivale a 180 še. Um ma-na corresponde a cerca de 500 gramas. Consideremos o enunciado do **problema 7 da placa YBC 4652**:

“Encontrei uma pedra, mas não a pesei; (depois) adicionei um sétimo e um onze avos [do total], e pesei: 1 ma-na. Qual era o peso original da pedra?” (Neugebauer e Sachs, 1986, p. 101).

O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa a quantidade desconhecida, traduz-se pela equação:

$$\left(x + \frac{x}{7}\right) + \frac{1}{11}\left(x + \frac{x}{7}\right) = 1,0.$$

A solução é  $x = \frac{2}{3} ma - na + 8 gin + 22\frac{1}{2} še = 48;7,30 gin$ .

De facto,  $\frac{x}{7} = 6;52,30$   $x + \frac{x}{7} = 55$   $\frac{1}{11}\left(x + \frac{x}{7}\right) = 5$ .

O escriba limita-se a dar a resposta, que, neste caso, é  $48; 7,30 \text{ gin}$ . Talvez os procedimentos para encontrar a solução destes problemas se encontrem em placas que ainda não foram descobertas. Por outro lado, as soluções de sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas são mais pormenorizadas. Um dos métodos utilizados, “partindo de um palpite conveniente e depois ajustando-o, mostra que os babilônios também compreendiam a linearidade” (Katz, 2010, p.22). Todos os problemas encontrados na placa VAT 8389, que pertence ao Museu de Berlim e que remonta à primeira dinastia babilônica (c. 1900 a.C.), são exemplos deste tipo de problemas. Esta placa contém apenas quatro problemas todos resolvidos pelo método da falsa posição e dizem respeito à produção de cereal em dois campos. Consideremos o **problema 1 da Placa VAT 8389**:

“De dois campos, um produz  $\frac{2}{3}$  sila por sar, o segundo produz  $\frac{1}{2}$  sila por sar. A produção do primeiro campo era mais 500 sila do que o segundo campo; as áreas dos dois campos ocupavam juntas 1800 sar. Que área tem cada campo?” (Katz, 2010, p. 22)

As medidas de capacidade e área são sila e sar, respetivamente. Um sila corresponde a  $1 \text{ dm}^3$  e um sar corresponde a  $36 \text{ m}^2$ . Este problema pode traduzir-se por um sistema de duas equações onde  $x$  e  $y$  representam as áreas desconhecidas:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \\ x + y = 1800 \end{cases}$$

Atualmente começamos por resolver a segunda equação em ordem a  $x$  e substituímos o resultado na primeira equação. Da segunda equação obtemos  $x = 1800 - y$  e introduzimos esse valor na primeira, que assim se transforma numa equação de uma só incógnita  $\frac{2}{3}(1800 - y) - \frac{1}{2}y = 500$ . Que, após ser resolvida nos dá o valor de  $y$ . Com esse valor introduzido na segunda equação o valor de  $x$  deduz-se de imediato.

O escriba babilónico supôs inicialmente que  $x$  e  $y$  eram ambos iguais a 900. Calculou  $\frac{2}{3} \times 900 - \frac{1}{2} \times 900 = 150$ . A diferença entre o valor pretendido, 500, e o valor obtido, 150, é 350. Para ajustar as respostas, o escriba, compreendeu que cada crescimento unitário de  $x$  e conseqüente decréscimo de  $y$ , conduz a um crescimento da “função”  $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y$  de  $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$ . Para saber quantas unidades deve somar a  $x$  (e subtrair a  $y$ ) basta então resolver a equação  $\frac{7}{6}s = 350$ , o que é um problema mais simples do que o proposto. A resposta é  $s = 300$ . Assim, a solução correta para o problema é  $x = 900 + 300 = 1200, y = 900 - 300 = 600$  (Katz, 2010).

É na resolução de equações quadráticas que os escribas babilónicos revelaram a sua maior destreza. Existem dezenas de placas que indicam que os babilônios de 2000 a.C. resolviam qualquer equação do segundo grau completa, por processos que correspondem à aplicação da atual fórmula resolvente, embora não existisse o conceito de zero, nem de número negativo. Na verdade, os escribas da antiga Babilónia desenvolveram uma notável habilidade algébrica, introduzindo determinadas operações algébricas, como transpor termos de uma equação e multiplicar ambos os membros de uma equação por quantidades iguais. No entanto, uma vez que apenas eram considerados coeficientes positivos, as equações quadráticas completas dividiam-se em três tipos:

$$x^2 + bx = c, x^2 = bx + c, x^2 + c = bx.$$

Na resolução de equações do segundo grau os babilônios utilizaram técnicas de manipulação de áreas muito eficientes e que se traduzem muitas vezes na fórmula resolvente que usamos nos dias de hoje. Esta tradição esteve na base de trabalhos matemáticos mais dedutivos, nomeadamente, na Grécia, a chamada álgebra geométrica. Deve-se, no entanto, ter em conta que a “fórmula resolvente” não tinha o mesmo significado para os escribas babilónicos que tem para nós. Os escribas apresentavam diferentes

procedimentos para resolver as equações quadráticas do tipo  $x^2 + bx = c$  e  $x^2 - bx = c$ , porque os dois problemas eram diferentes, tinham diferentes significados geométricos. No entanto, para um matemático moderno, estes problemas são iguais, porque pode tomar-se o coeficiente de  $x$  como positivo ou negativo. A fórmula quadrática moderna origina nestes dois casos uma solução positiva e uma solução negativa para cada equação. Para os babilónios a solução negativa não tem significado geométrico e era completamente ignorada (Katz, 2010).

As equações quadráticas do tipo  $x^2 + c = bx$  têm duas soluções positivas e também eram ignoradas pelos babilónios. Estas equações não apareciam nas placas apesar de ocorrerem problemas que colocaríamos naquela forma. De facto, os escribas não consideravam que uma equação simples pudesse ter dois valores diferentes para a mesma incógnita. Por isso, uma das estratégias utilizadas para prevenir esta situação era reescrever o problema na forma  $x + y = b$ ,  $xy = c$  de modo a que as duas soluções correspondessem a duas incógnitas diferentes. O único caso em que a equação  $x^2 + c = bx$  é tratada é o caso onde  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$ , pois tem apenas uma solução.

Existem inúmeras placas com problemas quadráticos, esses problemas são algebricamente muito trabalhosos. Alguns deles estão escritos de forma abstrata, mas apareciam outros com casos concretos. Parece que os problemas contidos nas placas não tinham como principal objetivo chegar à resposta, mas aprender vários métodos de redução de problemas complicados a problemas mais simples. Estes problemas eram muitas vezes artificiais, claramente inventados. Muitos incluem somas de áreas com comprimentos, que não tem qualquer significado físico. Especula-se que as placas com conteúdos matemáticos, e as de equações quadráticas em particular, serviam para treinar as mentes de futuros líderes do país. Havia poucas situações reais que exigissem a resolução de equações quadráticas, o mais importante para os alunos era o desenvolvimento de capacidades na resolução de problemas em geral, capacidades que podiam ser usadas para lidar com os problemas do dia a dia que precisam de ser resolvidos pelo líder de uma nação. Estas capacidades exigiam não só seguir procedimentos sólidos – algoritmos – mas também saber como e quando modificar os métodos e reduzir problemas mais complicados a outros já resolvidos. Ao longo dos últimos 4000 anos os professores têm ensinado aos seus alunos que se estuda matemática para “treinar a mente” (Katz, 2010).

Na Placa BM 13901, que pertence ao Museu Britânico (British Museum), encontram-se 21 problemas que dão origem a equações do 2.º grau ou a sistemas de equações em que uma das equações é do 2.º grau, e outros três problemas que estão ilegíveis. O objetivo dos problemas é descobrir o lado de um quadrado. Consideremos o **problema 1 da placa BM 13901** que se traduz numa equação do tipo  $x^2 + bx = c$  com  $b = 1$ . O problema foi transcrito da tradução de Thureau-Dangin: “Adicionei a superfície e o lado do meu quadrado e obtive 0;45. Qual é o lado?” (Estrada et al., 2000 apud Thureau-Dangin, 1938, p. 1)

Os escribas babilónicos apresentaram a solução deste problema, onde os detalhes são descritos por instruções verbais, da seguinte forma:

“Tu porás 1, a unidade.

Tu fracionarás em 2 e obterás 0;30.

Tu cruzarás 0;30 e obterás 0;15 juntarás 0;15 a 0;45 e obterás 1.

[1] é o quadrado de 1.

Tu subtrairás 0;30, que tu quadraste de 1 e obterás 0;30 que é o lado do quadrado.” (Estrada et al., 2000 apud Thureau-Dangin, 1938, p. 1)

A solução apresentada pelo escriba está correta, mas o que está explícito são os cálculos indispensáveis para chegar ao resultado; não há um único comentário sobre o processo adotado. Tendo em consideração a tradução realizada por Thureau-Dangin o problema proposto pode ser traduzido

algebricamente por  $x^2 + x = 0;45$ , em que  $x$  representa o lado do quadrado. Como o número 0;45 não desempenha nenhum papel relevante, vamos usar uma letra,  $c$ , para podermos mais facilmente generalizar o método. Temos então de resolver a equação  $x^2 + x = c$ . O método para resolver esta equação corresponde, do ponto de vista algébrico, a “completar um quadrado”, isto é, a resolver uma equação do 2.º grau sem aplicação da fórmula resolvente, transformando o 1.º membro da equação num quadrado. Atualmente, o desenvolvimento do quadrado da soma de duas quantidades aparece nos manuais escolares com o nome de casos notáveis da multiplicação e costuma escrever-se:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Em linguagem simbólica atual o que o escriba escreveu corresponde a  $x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ .  
 Onde,  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ . Aplica-se então a raiz quadrada a ambos os membros e obtemos  $x + \frac{1}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ . O procedimento babilónico é essencialmente equivalente à aplicação da fórmula  $x = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}$ .

O historiador Jens Høyrup após uma análise filológica integrada no contexto da antiga Babilónia, concluiu que a equação corresponde à adição de duas áreas: a área de um quadrado de lado desconhecido  $x$  e a área de um retângulo de lados  $x$  e 1. As instruções do escriba correspondem a operações concretas na “geometria do recorta e cola”, que se podem traduzir do seguinte modo: cortar ao meio o retângulo que se adicionou ao quadrado; deslocar uma das partes para formar um gnómon (figura que acrescentada a um quadrado permite obter outro quadrado); completar o quadrado geométrico pela adição de outro quadrado; determinar o lado do quadrado maior e finalmente, o lado do quadrado desconhecido (Estrada et al., 2000).

Assim, de acordo com a interpretação de Jeans Høyrup, a equação  $x^2 + x = c$  seria resolvida geometricamente da seguinte forma (Fig. 1.2):

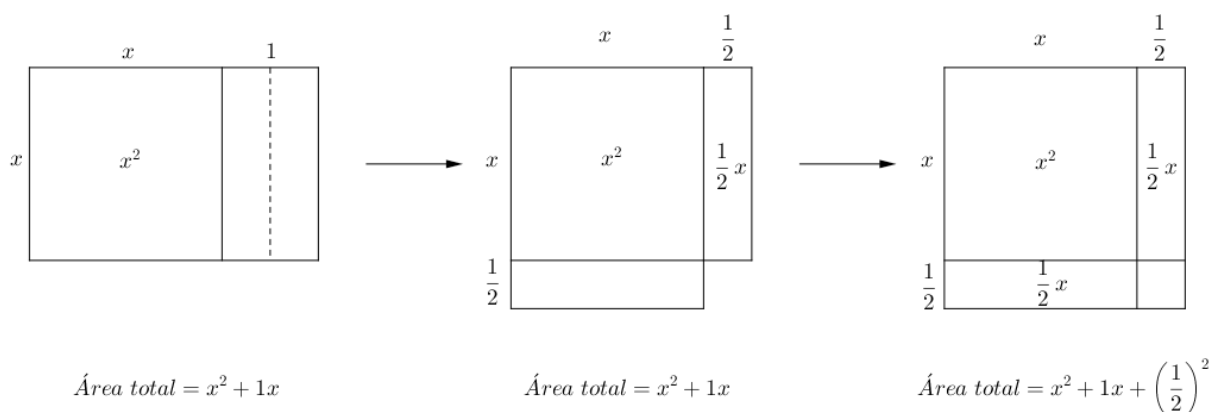


Figura 1.2 – Procedimento geométrico para resolver a equação  $x^2 + x = c$ .

Como  $x^2 + x = c$ , a área do quadrado de lado  $x + \frac{1}{2}$  é  $c + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ , logo  $x + \frac{1}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ , portanto, o lado do quadrado procurado é  $x = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}$ .

Consideremos o **problema 2 da placa BM 13901** que se traduz numa equação do tipo  $x^2 = bx + c$  (ou  $x^2 - bx = c$ ) com  $b = 1$ . O problema e a respetiva solução traduzem-se por: “Da superfície do meu quadrado tirei o lado: 14,30.



O problema número 23 da placa BM 13901 é um problema do tipo do problema 1 da mesma placa e podia ter sido resolvido de uma forma análoga. No entanto, este problema foi colocado quase no fim da placa, entre os problemas mais difíceis. Talvez a dificuldade estivesse na maneira de o resolver, podendo pensar-se que pertenceria a um conjunto de problemas curiosos ou difíceis que os agrimensores poriam uns aos outros, como desafios. Consideremos o **problema 23 da placa BM 13901**. O problema e a respetiva resolução traduzem-se por:

“Numa superfície os quatro lados e a superfície eu adicionei: 0;41,40.

4, os 4 lados tu escreves; o recíproco de 4 é 0;15.

Multiplicas 0;15 por 0;41,40: 0;10,25 tu escreves.

1, a projeção tu juntas: 1;10,25.

1;5 é a raiz quadrada de 1;10,25.

1, a projeção que tu juntaste, tu tiras: 0;5 duas vezes tu repetes: 0;10 nindan é o lado” (Estrada et al., 2000, p. 83).

A unidade de comprimento é o nindan que pode traduzir-se por “vara”. Uma vara corresponde a 12 côvados ou cúbitos e 1 côvado corresponde a 50 cm. A unidade de área é o sar tal que  $sar_{\text{área}} = (nindan)^2$ . O problema proposto pode ser traduzido algebricamente por  $x^2 + 4x = 0;41,40$ , em que  $x$  representa o lado do quadrado desconhecido (possivelmente o lado dum campo, segundo Jens Høyrup). A multiplicação pelo recíproco de 4, sugere uma divisão por 4 em ambos os membros da equação anterior. Donde, obtemos  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1x = 0;10,25$ . Ao adicionarmos 1 a ambos os membros da igualdade obteve-se a equação  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1x + 1 = 1;10,25$ . A raiz quadrada de 1;10,25 é 1;5 (possivelmente tirado de uma tabela de quadrados). Tem-se que,  $\frac{x}{2} + 1 = 1;5$ . Donde,  $\frac{x}{2} = 0;5$  e  $x = 2 \times 0;5 = 0;10$ .

Para Jens Høyrup há termos no texto que ficariam sem significado numa tradução puramente algébrica. Como é o caso da palavra “projeção” que corresponderia a uma “largura projetante” igual a 1. De facto, ao quadrado inicial seriam adicionados 4 retângulos de lados  $x$  e 1 (Fig. 1.4). A divisão por 4 corresponderia a uma divisão efetiva da figura assim obtida em 4 partes iguais, cada uma das quais é um gnómon. O gnómon seria completado pelo quadrado de lado 1, formando assim o quadrado de lado  $\frac{x}{2} + 1$ , e do lado desse quadrado obter-se-ia o valor de  $x$  (Estrada et al., 2000).

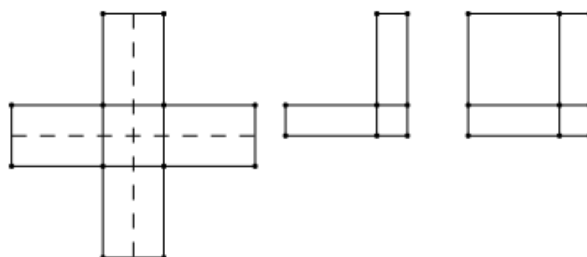


Figura 1.4 – Interpretação geométrica do problema 23 da placa BM13901.

Note que nos problemas anteriores o coeficiente do termo  $x^2$  é 1. O problema número 7 da placa BM 13901 traduz-se por uma equação do tipo  $ax^2 + bx = c$ . O escriba babilónico não reduz o coeficiente do termo em  $x^2$  à unidade contrariamente à prática estabelecida pelo matemático árabe Al-Khwarizmi. O escriba multiplica ambos os membros da equação pelo coeficiente de  $x^2$ , tal como Diofanto de Alexandria irá proceder mais tarde.

Em termos atuais, supondo que  $a \neq 0$  e considerando apenas o valor positivo da raiz quadrada, o escriba seguiu o seguinte percurso:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx = c &\Leftrightarrow a^2x^2 + abx = ac \Leftrightarrow a^2x^2 + abx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow ax + \frac{b}{2} = \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \Leftrightarrow ax = \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a} \end{aligned}$$

O **problema 7 da Placa BM 13901** pode ser traduzido pela equação  $11x^2 + 7x = 6\frac{1}{4}$ . O escriba multiplica ambos os membros por 11 para transformar esta equação numa equação quadrática em  $11x$ , nomeadamente,  $(11x)^2 + 7(11x) = 68\frac{3}{4}$ . Depois resolve,  $11x = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 68\frac{3}{4}} - \frac{7}{2} = \sqrt{81} - \frac{7}{2} = 9 - \frac{7}{2} = 5\frac{1}{2}$ . Para encontrar o valor de  $x$ , o escriba multiplica pelo recíproco de 11, mas, neste caso, o recíproco de 11 “não pode ser resolvido”. No entanto, como o problema era provavelmente concebido para dar uma resposta simples, é fácil ver que o lado desconhecido  $x$  é  $\frac{1}{2}$  (Katz e Parshall, 2014).

Os problemas traduzidos pela equação  $x^2 + c = bx$  eram colocados em termos geométricos (procura de um retângulo), o que evitava considerar problemas com mais do que uma solução. A forma standard  $x + y = b$  e  $xy = c$  de alguns destes problemas babilónicos sugere que, originalmente, os babilónicos desejavam tratar a relação entre a área e o perímetro de um retângulo. Nos tempos antigos acreditavam que a área de um campo dependia unicamente do seu perímetro. Os escribas babilónicos, para demonstrarem que retângulos com o mesmo perímetro poderiam ter áreas muito diferentes, construíram tabelas de áreas  $c$  para um dado perímetro  $2b$ , usando diferentes valores para o comprimento  $x$  e para a largura  $y$ . Um estudo das tabelas relacionando os comprimentos variáveis  $x = \frac{b}{2} + z$  e larguras  $y = \frac{b}{2} - z$  com áreas  $c = \left(\frac{b}{2} + z\right)\left(\frac{b}{2} - z\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - z^2$ , permitiu aos escribas constatarem que  $z = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ . Donde,  $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$  e  $y = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$  é a solução para o sistema dado. É o algoritmo descrito por estas fórmulas modernas que os escribas babilónicos usavam para solucionar este problema. No entanto, os babilónicos não dispunham de uma fórmula. Apresentavam cada problema com números atribuídos ao comprimento, à largura e à área, e os cálculos numéricos específicos são indicados, podendo ser interpretados de acordo com a fórmula acima (Katz, 2010).

Considere-se o **problema da placa YBC 4663** (placa pertencente à coleção babilónica da Universidade de Yale nos E.U.A.) em que se pretendia determinar as dimensões de um retângulo, em que a soma do comprimento e da largura é  $6;30$  e a área é  $7;30$ .

Representando por  $x$  e  $y$  as dimensões de um retângulo, podemos traduzir este problema pelo sistema  $\begin{cases} x + y = 6;30 \\ xy = 7;30 \end{cases}$ . Tendo em conta as instruções dadas pelo escriba, a respetiva interpretação algébrica permite resolver qualquer equação do tipo  $x^2 + c = bx$ , e pode ser sintetizada na tabela 1.5.

É interessante notar que a identidade  $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ , em que os babilónicos se basearam, apareceu, posteriormente, como a Proposição 5 do Livro II dos *Elementos* de Euclides. Desta identidade temos que  $\frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy}$  e  $\frac{x+y}{2} = \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy}$ .

Tabela 1.5 – Interpretação algébrica do problema da placa YBC 4663.

| Instruções do escriba   | Interpretação  |
|---|--|
| Divide 6;30 em 2 e o resultado é 3;15                           | $\frac{x+y}{2} = \frac{6;30}{2} = 3;15$                  |
| Multiplica 3;15 por 3;15: o resultado é 10;33,45                | $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 10;33,45$                |
| Subtrai 7;30 de 10;33,45 e o resultado é 3;3,45                 | $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 3;3,45$             |
| 3;3,45 é o quadrado de 1;45                                     | $\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = 1;45$        |
| Junta 3;15 a 1;45: o resultado é 5, o comprimento do retângulo  | $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 3;15 + 1;45 = 5$    |
| Retira 1;45 de 3;15: o resultado é 1;30, a largura do retângulo | $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 3;15 - 1;45 = 1;30$ |

Em termos de geometria intuitiva, Jens Høyrup, propõe a seguinte interpretação para a resolução do sistema  $\begin{cases} x+y = b \\ xy = c \end{cases}$  (Fig. 1.5): tomemos um retângulo de lados desconhecidos  $x$  e  $y$  em que o semiperímetro é  $b$  e a área é  $c$ . Consideremos  $M$  o ponto médio do segmento de comprimento  $x+y$ , o retângulo de lados  $x$  e  $y$  corresponde ao retângulo de lados  $y$  e  $\frac{x+y}{2}$  e ao retângulo de lados  $y$  e  $\frac{x-y}{2}$ ; desloca-se uma das partes do retângulo (o retângulo de lados  $y$  e  $\frac{x-y}{2}$ ) para formar um gnómon; e a este gnómon é acrescentado um quadrado de lado  $\frac{x-y}{2}$ , formando um quadrado de lado  $\frac{b}{2}$ .

Como  $\frac{x+y}{2} = \frac{b}{2}$ ,  $c + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$  temos que  $\frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ . Assim,  $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$  e  $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ , são as duas soluções da equação  $x^2 + c = bx$ .

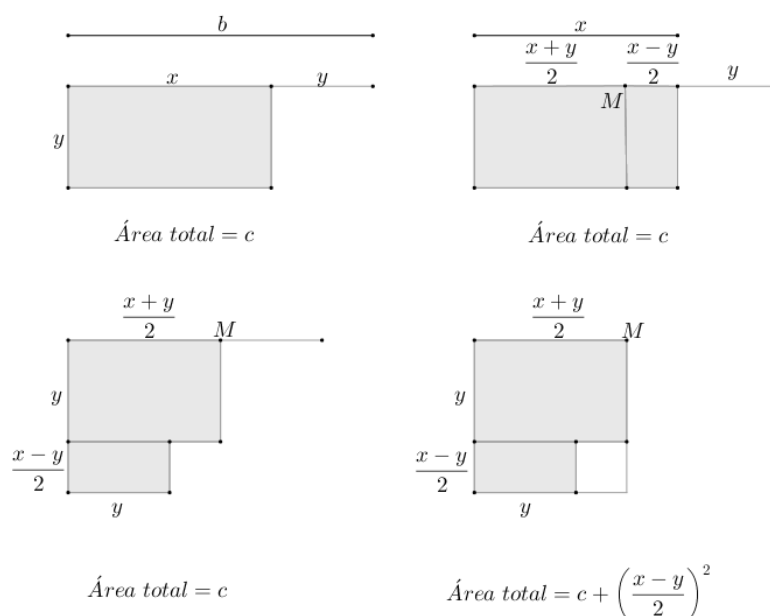


Figura 1.5 – Procedimento geométrico para resolver o sistema  $x + y = b, xy = c$ .

Considere-se o **problema da placa YBC 6967** (placa pertencente à coleção babilônica da Universidade de Yale nos E.U.A.):

“Um número (igibum) excede o seu recíproco (igum) em 7; quais são os números?” (Estrada et al., 2000, p. 86).

Representando por  $x$  e  $y$  os números pedidos, podemos traduzir este problema pelo sistema  $\begin{cases} xy = 1 \\ x = y + 7 \end{cases}$ , que é equivalente a  $\begin{cases} xy = 1 \\ x - y = 7 \end{cases}$ . Tendo em conta as instruções dadas pelo escriba, a respetiva interpretação algébrica permite resolver qualquer equação do tipo  $x^2 + c = bx$ , e pode ser sintetizada na tabela 1.6.

Tabela 1.6 – Interpretação algébrica do problema da placa YBC 6967.

| Instruções do escriba   | Interpretação  |
|---|--|
| Divide 7, o que o número excede o recíproco, em 2 e o resultado é 3;30.                 | $\frac{x - y}{2} = \frac{7}{2} = 3; 30$                      |
| Multiplica 3;30 por 3;30: o resultado é 12;15.  | $\left(\frac{x - y}{2}\right)^2 = 12; 15$                    |
| A 12;15 o resultado obtido junta 1,0, o produto e o resultado é 1,12;15.                | $\left(\frac{x - y}{2}\right)^2 + xy = 1,12; 15$             |
| Qual é a raiz quadrada de 1,12;15? É 8;30.  | $\sqrt{\left(\frac{x - y}{2}\right)^2 + xy} = 8; 30$         |
| Subtrai 3;30 de 8;30: o resultado é 5.  | $y = \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} = 8; 30 - 3; 30 = 5$  |
| Junta 3;30 a 8;30: o resultado é 12. 12 é um dos números (igibum) e 5 é o outro (igum). | $x = \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} = 8; 30 + 3; 30 = 12$ |

O problema aqui tratado pertence a uma classe bem conhecida de equações quadráticas caracterizada pelos termos igum e igibum. Estes termos referem-se a um par de números que estão na relação uns com os outros de um número e o seu recíproco, para ser entendido no sentido mais geral como os números cujo produto é uma potência de 60.

Consideremos o **problema número 9 da placa BM 13901**, que se traduz em notação simbólica atual por:

$$x^2 + y^2 = \frac{13}{36} \text{ e } x - y = \frac{1}{6}.$$

A solução para este sistema, que generalizamos no sistema  $x - y = b$  e  $x^2 + y^2 = c$ , foi encontrada por um procedimento descrito pela fórmula atual  $x = \sqrt{\frac{c}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}$  e  $y = \sqrt{\frac{c}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$ .

A figura 1.6 mostra que  $x^2 + y^2 = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ . Donde,  $c = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)^2$  e, por conseguinte,  $\frac{x+y}{2} = \sqrt{\frac{c}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ . Como  $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ , temos que,  $x = \sqrt{\frac{c}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}$ . Como  $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$ , temos que,  $y = \sqrt{\frac{c}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$ .

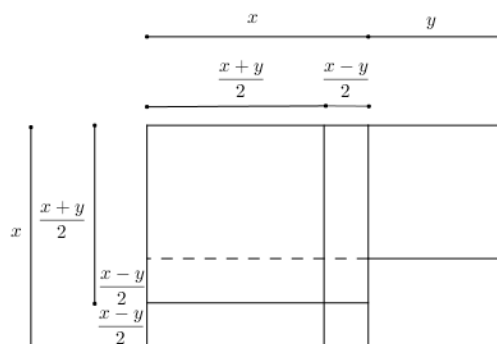


Figura 1.6 – Procedimento geométrico para resolver o sistema  $x - y = b$  e  $x^2 + y^2 = c$ .

Apenas um exemplo do problema dos postes sobreviveu na matemática da Babilônia antiga, esse problema, problema número 9, aparece na placa BM 85196, uma grande placa ( $19 \times 12,3$  cm) contendo 18 problemas sobre vários assuntos. Algumas partes do problema estão em falta ou estão danificados, incluindo, infelizmente, uma parte da primeira linha, mas a estrutura do problema pode ser restaurada com segurança. O **problema número 9 da Placa BM 85196** diz o seguinte:

“Um poste tem de comprimento  $0;30$  quando ereto. A extremidade superior deslizou  $0;6$ . Determina a distância da extremidade inferior do poste à parede” (Van Der Waerden, 1975, p. 76).

Consideremos  $D_1 = 0;30$  o comprimento do poste e  $D_2 = 0;6$  a distância que a extremidade superior do poste deslizou. Na tabela 1.7 podemos seguir os passos efetuados pelo escriba e as instruções simbólicas referentes a cada passo. A solução é  $0;18$ .

Tabela 1.7 - Problema 9 da placa BM 85196

|                | <b>Cálculos</b>             | <b>Instruções simbólicas</b> |
|----------------|-----------------------------|------------------------------|
| <b>Passo 1</b> | $0;30 \times 0;30 = 0;15$   | $R_1 = D_1^2$                |
| <b>Passo 2</b> | $0;30 - 0;6 = 0;24$         | $R_2 = D_1 - D_2$            |
| <b>Passo 3</b> | $0;24 \times 0;24 = 0;9,36$ | $R_3 = R_2^2$                |
| <b>Passo 4</b> | $0;15 - 0;9,36 = 0;5,24$    | $R_4 = R_1 - R_3$            |
| <b>Passo 5</b> | $\sqrt{0;5,24} = 0;18$      | $R_5 = \sqrt{R_4}$           |

Considerando  $D_1 = d$  o comprimento do poste e  $D_2 = p$  a distância que a extremidade superior deslizou, pretendemos determinar  $s$  a distância da extremidade inferior do poste à parede. Utilizando a

notação simbólica atual,  $s = \sqrt{D_1^2 - (D_1 - D_2)^2}$ , isto é,  $s = \sqrt{d^2 - (d - p)^2}$ . Donde,

$$s = \sqrt{0;30^2 - (0;30 - 0;6)^2} = 0;18.$$

O texto AO 8862 pertencente ao Museu do Louvre foi escrito num prisma quadrado de argila. Para Thureau-Dangin e Neugebauer este é um dos mais antigos textos conhecidos. No total, o texto contém 7 problemas. Os quatro primeiros problemas tratam de campos retangulares e dos seus lados. Consideremos o **problema 1 do texto AO 8862**, de Senkerel, Babilônia antiga:

“Multipliquei o comprimento e a largura e obtive a área. Então adicionei à área o excesso do comprimento sobre a largura:  $3,3$  (o resultado é  $183$ ). Além disso, adicionei o comprimento e a largura:  $27$ . Determina o comprimento, a largura e a área” (Van Der Waerden, 1975, p. 63.).

Representando por  $x$  e  $y$  os números pedidos, podemos traduzir este problema pelo sistema:

$$\begin{cases} xy + x - y = 3,3 \\ x + y = 27 \end{cases}$$

Para simplificar o problema o autor introduziu uma nova variável  $y'$ , para o lugar da largura atual  $y$ :  $y' = y + 2$ , isto é,  $y = y' - 2$ . Esta mudança simplificou o problema pois as equações em  $x$  e  $y'$  são:

$$xy' = 3,3 + 27 = 3,30 \text{ e } x + y' = 27 + 2 = 29.$$

Esta mudança de variável está indicada na tabela 1.8 nas duas primeiras linhas:

$$\begin{aligned} 3,3 + 27 &= 3,30, \\ 2 + 27 &= 29. \end{aligned}$$

De seguida resolve o sistema simplificado. As instruções dadas pelo escriba e a respetiva interpretação algébrica pode ser sintetizada na tabela 1.8.

Tabela 1.8 – Interpretação algébrica do problema 1 do texto AO8862

| Instruções do escriba                              | Interpretação  |
|--|--|
| Soma 3,3 a 27 e o resultado é 3,30.                | $(xy + (x - y)) + (x + y) = xy + 2x = x(y + 2) = 3,3 + 27 = 3,30$                                    |
| Soma 2 a 27 e o resultado é 29.                    | $2 + (x + y) = x + (y + 2) = 2 + 27 = 29$  |
| Divide 29 em 2 e o resultado é 14;30.              | $\frac{x + (y + 2)}{2} = \frac{29}{2} = 14;30$   |
| Multiplica 14;30 por 14;30: o resultado é 3,30;15. | $\left(\frac{x + (y + 2)}{2}\right)^2 = 14;30^2 = 3,30;15$   |
| Subtraia 3,30;15 de 3,30: o resultado é 0;15.      | $\left(\frac{x + (y + 2)}{2}\right)^2 - x(y + 2) = 3,30;15 - 3,30 = 0;15$                            |
| A raiz quadrada de 0;15 é 0;30.                    | $\sqrt{\left(\frac{x + (y + 2)}{2}\right)^2 - x(y + 2)} = \sqrt{0;15} = 0;30$                        |
| Soma 14;30 a 0;30 e o comprimento é 15.            | $\frac{x + (y + 2)}{2} + \sqrt{\left(\frac{x + (y + 2)}{2}\right)^2 - x(y + 2)} = 14;30 + 0;30 = 15$ |
| Subtrai 14;30 de 0;30 e a largura é 14.            | $\frac{x + (y + 2)}{2} - \sqrt{\left(\frac{x + (y + 2)}{2}\right)^2 - x(y + 2)} = 14;30 - 0;30 = 14$ |

Subtraímos 2 de 14 e obtemos 12 a largura atual. Multiplico o comprimento 15 pela largura 12 e a área é 3,0.

Através dos vários exemplos dados é possível confirmar a habilidade algébrica dos babilónicos, permitindo-lhes resolver toda e qualquer equação quadrática. “A redução babilónica de uma equação quadrática da forma  $ax^2 + bx = c$  à forma normal  $y^2 + by = ac$  pela substituição  $y = ax$  mostra o grau extraordinário de flexibilidade da álgebra mesopotâmica. Essa facilidade, junto com a ideia de valor posicional, explica em grande parte a superioridade dos babilónios em matemática.” (Boyer, 1991, p. 24). Os escribas da antiga Babilónia resolviam estes problemas, utilizando aquilo que atualmente designamos por artifícios de cálculos engenhosos, isto é, mudança de variável (Estrada, 2000b).

Os escribas da antiga Babilónia não só resolviam equações quadráticas, utilizando o método de substituição numa fórmula geral ou o método de completar quadrados, como também resolviam certas equações e sistema do 3.º grau, desde que por eliminação fosse possível obter uma equação do tipo  $x^3 + x^2 = a$ . A solução seria obtida a partir de uma tabela de somas de cubos com quadrados, ou, por interpolação, no caso do número representado por  $a$  não se encontrar na tabela (Estrada et al., 2000).

No Egito não há registo de resolução de uma equação cúbica, mas entre os babilónios há muitos exemplos. Os **problemas 22 e 23 da Placa BM 85200** traduzem-se numa equação cúbica. No **problema 22** a equação  $12x^3 = 1;30$  é resolvida usando uma tabela, para mostrar que a raiz cúbica de  $\frac{1}{12} \times 1;30 = 0;7,30$  é  $0;30$  (Van Der Waerden, 1975). O **problema 23** da mesma placa é mais interessante. Na linguagem simbólica atual, este problema é redutível a um sistema que em notação decimal se pode escrever:

$$\begin{cases} xyz + xy = 70 \\ y = 40x \\ z = 12x \end{cases} .$$

Eliminando  $y$  e  $z$ , obtém-se a equação  $(40 \times 12)x^3 + 40x^2 = 70$ . Multiplicando ambos os lados por  $12^2$  o escriba obtém a equação  $12^3x^3 + 12^2x^2 = 252$ , que se pode ainda escrever na forma,  $(12x)^3 + (12x)^2 = 252$ . Donde,  $(12x)^2(12x + 1) = 252$ . Utilizando uma tabela o escriba apresenta como resultado  $12x = 6$ . Estas tabelas dão-nos as “raízes” de qualquer número  $n$  da forma  $n^2(n + 1)$ . Daqui o escriba deduz os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$ . É fácil verificar que esses valores são:

$$x = \frac{1}{2}, y = 20, z = 6.$$

As realizações dos babilónios no domínio da álgebra são admiráveis, mas os motivos que impulsionaram essa obra não são fáceis de entender. Durante décadas ouvimos os historiadores dizerem que a Matemática se iniciou na Grécia antiga e que outras culturas anteriores em torno do Mediterrâneo, os egípcios e os povos da Mesopotâmia, possuíam uma Matemática essencialmente prática, virada para a resolução de problemas do dia a dia. No entanto, em que situações da vida real, na antiga Babilónia, levava a problemas envolvendo a soma de um número e o seu recíproco, ou a diferença entre uma área e um comprimento? “Se o motivo era utilitário então o culto do imediatismo era menos forte que hoje, pois conexões diretas entre o objetivo e a prática na matemática babilónica não são nada aparentes” (Boyer, 1991, p.25).

## 2. A Matemática na Grécia Antiga

Para alguns historiadores o começo da atividade matemática grega situa-se na Jónia. Esta região da Ásia Menor “teve contactos comerciais com o Egito e com a Mesopotâmia pelo menos desde o século VIII a.C., mas não está provado que, por virtude desses contactos, a matemática grega tenha evoluído a partir das matemáticas orientais. Na opinião de alguns historiadores, a aritmética e a geometria gregas são o natural prosseguimento dos saberes congéneres egípcios e mesopotâmicos. Para outros, pelo contrário, a matemática grega é uma manifestação cultural de profunda originalidade com motivações, objetivos e métodos novos” (Estrada et al., 2000, p.226).

No estudo da matemática grega podem considerar-se dois grandes períodos, que correspondem a realidades políticas e geográficas distintas e que exigem diferentes metodologias de investigação histórica. O primeiro período abrange os séculos VI, V e IV a.C. e costuma ser designado por período pré-euclideano, pois culmina com a atividade de Euclides e com a publicação do seu tratado *Elementos*. O segundo estende-se desde o século III a. C. até ao século IV d.C. e costuma ser designado por período alexandrino.

### 2.1. Euclides e os *Elementos*

O texto matemático mais importante da época grega são os *Elementos* de Euclides, escrito há cerca de 2300 anos. São raros os livros que tenham sido tão editados, traduzidos e comentados como os *Elementos* de Euclides. Pouco se sabe da vida de Euclides, o que existe escrito de Euclides data de uns 750 anos após ele ter vivido, no comentário de Proclo (410-485):

“Não muito tempo depois destes homens [Hermitimo de Cólofon e Filipe de Mêndis, alunos de Platão] veio Euclides, que trouxe os Elementos, sistematizando muitos dos teoremas de Eudoxo, aperfeiçoando muitos de Teeteto, e colocando em forma irrefutavelmente demonstrável proposições que tinham sido estabelecidas descuidadamente pelos seus antecessores. Viveu no tempo de Ptolomeu I; pois Arquimedes, que viveu depois do tempo do primeiro Ptolomeu, menciona Euclides. Também se relata que Ptolomeu perguntou uma vez a Euclides se não havia um caminho mais curto para a geometria do que através dos Elementos, e Euclides respondeu que não havia nenhum caminho Real para a geometria. Foi, portanto, posterior ao grupo de Platão, mas anterior a Eratóstenes e Arquimedes” (Katz, 2010, p. 76).

Presume-se que Euclides ensinou e escreveu no Museu e Biblioteca de Alexandria. Este complexo foi fundado por volta de 300 a.C. por Ptolomeu I Sóter e era o local onde os estudiosos se reuniam e discutiam ideias filosóficas e literárias. O Museu e a Biblioteca de Alexandria tornaram-se no ponto central dos mais altos desenvolvimentos dos estudiosos gregos tanto nas humanidades como nas ciências. Esta Biblioteca abrigou o maior património cultural e científico de toda a Antiguidade. Ela não só continha um imenso acervo de papiros e livros, como também incentivava o espírito investigativo de cientistas e literatos, transmitindo à Humanidade uma herança cultural incalculável. Ao que tudo indica, a Biblioteca chegou a conter mais de 500 000 volumes em todos os campos do conhecimento.

O manuscrito original da obra de Euclides não chegou aos nossos dias, o mesmo acontecendo com a generalidade dos textos gregos deste período (anterior ao séc. III a.C.). Foram, no entanto, feitas regularmente cópias da obra desde o tempo de Euclides. Vários editores fizeram emendas, acrescentaram comentários, ou incluíram novos lemas.

Esta obra não é a única atribuída a Euclides, mas a sua fama está, sem margem para dúvidas, associada a ela, a qual durante séculos foi a base do ensino da geometria em muitas línguas. Como refere Vasconcellos:

“Mas a sua reputação [de Euclides] é devida principalmente aos seus *Elementos* que, durante vinte séculos, constituíram a base do ensino da geometria, e foram traduzidos e comentados em todas as línguas conhecidas, merecendo de Antigos e Modernos admiração e respeito, pela sua notável forma de construção lógica, em que o autor, partindo dum reduzido número de simples proposições, quase evidentes, chega gradualmente, por demonstrações sempre rigorosas e métodos muitas vezes elegantes e fáceis – mesmos para principiantes – a fazer uma exposição sistemática das principais verdades da geometria elementar (com exclusão das secções cónicas) e da teoria dos números” (Vasconcellos, 2009, p. 215).

Os *Elementos* de Euclides são uma obra em treze livros. A escrita na antiga Grécia era feita à mão e em pergaminho donde os Livros correspondem, sensivelmente, aos nossos atuais capítulos. Podemos considerar os *Elementos* um compêndio, que foi organizado por Euclides a partir de muitas obras existentes. Constituído por duas definições e catorze proposições, o segundo livro dos *Elementos* é o menor dos treze livros que compõem o tratado de Euclides. A generalidade dos historiadores atribui à escola pitagórica os resultados expostos neste segundo livro, parecendo ser o seu conteúdo, de um modo geral, mais antigo do que o do Livro I. A leitura e análise deste livro permitem uma interpretação algébrica da geometria grega, não sendo, no entanto, a legitimidade dessa interpretação uma opinião unânime entre historiadores de matemática. Ainda hoje se questiona sobre a existência ou não de um raciocínio de tipo algébrico na matemática grega.

Do final do século XIX até à década de 70 do século XX vigorou a teoria de que o Livro II era um livro de álgebra. “De facto, são as proposições do Livro II, juntamente com as proposições 43-45 do Livro I e as proposições 27-30 do Livro VI, que formam o conteúdo do que é chamado “álgebra geométrica”, a representação de conceitos algébricos através de figuras geométricas” (Katz, 2010, p. 88). Os historiadores que defendem esta opinião, referem que os gregos queriam transmitir resultados de álgebra, mas como não dispunham de uma simbologia adequada às representações algébricas, serviam-se da geometria para exprimir esses resultados algébricos. A geometria era, portanto, a linguagem da álgebra. Outros historiadores consideram que até Diofanto não há pensamento algébrico na matemática grega, sendo que a origem das proposições do Livro II se encontra em problemas de índole geométrica e não algébrica. Para estes historiadores só os árabes na Idade Média, “teriam constatado que as técnicas da geometria das áreas podiam ser utilizadas também para representar situações ocorrentes em problemas algébricos e para descobrir e demonstrar procedimentos resolutivos de equações” (Estrada et al., 2000, p. 276).

Tendo em consideração a opinião de muitos dos historiadores da matemática que sugerem uma interpretação aritmético-algébrica da geometria grega, podemos considerar que as primeiras dez proposições do Livro II podem ser facilmente interpretadas na moderna notação algébrica. É claro que, ao fazê-lo, o sabor geométrico das proposições se perde. No entanto, reafirmá-los algebricamente pode ajudar a compreendê-los. As equações são todas equações quadráticas, já que a geometria é geometria plana. Consideremos a primeira definição do Livro II:

“Diz-se de qualquer retângulo que é contido pelas duas linhas retas que formam o ângulo reto.” (Katz, 2010, p. 86).

Segundo Katz esta definição ilustra a utilização geométrica de Euclides. De facto, o enunciado não quer dizer que a área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura. Euclides nunca multiplica dois comprimentos porque não tem nenhuma forma de definir um tal processo para comprimentos arbitrários. No entanto, multiplica comprimentos por números (inteiros positivos). Surge então a questão se devemos interpretar o “retângulo” de Euclides como significando um “produto” (Katz, 2010). Como exemplo da utilização desta definição temos:

### Proposição II – 1

“Se houver duas linhas retas, e uma delas for cortada em qualquer número de segmentos, o retângulo contido pelas duas retas é igual à soma dos retângulos contidos pela linha reta não cortada e cada um dos segmentos.” (Katz, 2010, p. 89).

Algebricamente esta proposição diz simplesmente que dado um comprimento  $l$  e largura  $w$  cortada em vários segmentos, digamos  $w = a + b + c$ , a área de um retângulo determinada por essas linhas é igual à soma das áreas dos retângulos determinados pelo comprimento e os segmentos da largura. Por outras palavras,  $l(a + b + c) = la + lb + lc$  (Fig. 2.1).

Este teorema enuncia a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição. Este resultado é usado na prova do teorema de Pitágoras. No Livro I, este resultado era óbvio, por isso, segundo Katz, se só agora Euclides se sentiu na obrigação de o provar talvez signifique que o Livro II se destinasse a apresentar a tradução de vários resultados algébricos.

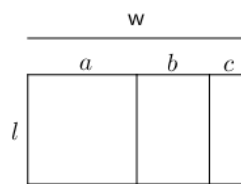


Figura 2.1 – Elementos, Proposição II – 1:  $l(a + b + c) = la + lb + lc$ .

Generalizando, dado um comprimento  $l$  e largura  $w$  cortada em vários segmentos, digamos  $w = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ , a área de um retângulo determinada por essas linhas é igual à soma das áreas dos retângulos determinados pelo comprimento e os segmentos da largura. Por outras palavras,  $l(w_1 + w_2 + \dots + w_n) = lw_1 + lw_2 + \dots + lw_n$ .

Na quarta proposição do Livro II, relaciona-se a decomposição do lado de um quadrado em dois segmentos de reta com a correspondente decomposição do quadrado em dois quadrados e um par de retângulos iguais.

### Proposição II – 4

“Se uma linha reta é cortada ao acaso, o quadrado no seu todo é igual aos quadrados nos segmentos e o dobro do retângulo contido pelos segmentos” (Katz, 2010, p. 89).

Esta proposição admite uma interpretação algébrica, podendo ser entendida como a expressão para o quadrado de uma soma,  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$  (Fig. 2.2), a base para o algoritmo da raiz quadrada (Katz, 2010).

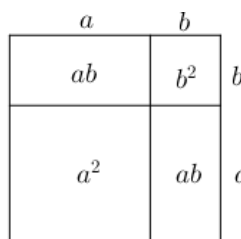


Figura 2.2 – Elementos, Proposição II – 4:  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ .

As demonstrações das quatro primeiras proposições do segundo livro são de extensão variável, conforme o pormenor com que Euclides prova certas propriedades das figuras, mas de resto limitam-se à manipulação das áreas, decompondo e rearranjando as figuras consideradas. Trata-se duma sistematização da geometria das áreas pitagóricas. As proposições II-5 e II-6 dos Elementos podem ser interpretadas como exprimindo a relação algébrica conhecida por diferença de dois quadrados. No entanto, estas duas proposições abordam a questão das quadraturas, no presente caso a quadratura de retângulos.

### Proposição II – 5

“Se uma linha reta for cortada em segmentos iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais do todo juntamente com o quadrado na linha reta entre os pontos de secção é igual ao quadrado na metade” (Katz, 2010, p. 90).

Sejam AB um segmento de reta, C o seu ponto médio e D um ponto do mesmo segmento de reta, mas distinto de C. Usando a linguagem de Euclides, C corta AB em segmentos iguais enquanto que D corta AB em segmentos desiguais, então, em notação simbólica atual,  $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$ . Euclides procede então à construção do quadrado [CEFB], sobre CB, e considera a decomposição na diagonal representada na figura 2.3.

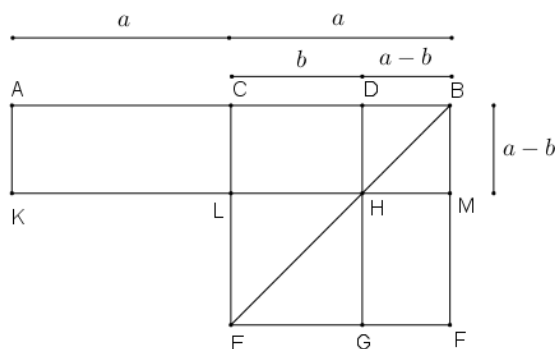


Figura 2.3 – Versão geométrica da fórmula para a diferença de dois quadrados (de segmentos de reta): Elementos, Proposição II – 5.

O retângulo [AKHD] pode decompor-se nos retângulos [AKLC] e [CLHD], os retângulos [AKLC] e [CLMB] têm a mesma área (porque C é o ponto médio do segmento AB), bem como os retângulos [CLHD] e [HGFM] (porque são retângulos complementares na decomposição na diagonal). Portanto, o retângulo [AKHD] e o gnómon [CLHGFB] têm a mesma área. Assim, o retângulo [AKHD] (de lado AD e DH) e o quadrado [LEGH] (de lado CD), tomados conjuntamente, têm a mesma área que o quadrado [CEFB] (de lado CB). Ora, DH é igual a DB, pela decomposição da diagonal. Na interpretação algébrica, se se designar AC por  $a$  e CD por  $b$ , a proposição é traduzida por  $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2$ , ou seja,  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

A proposição II – 6 é complementar da proposição II – 5.

### Proposição II – 6

“Se uma linha reta for bisetada e lhe for adicionada uma linha reta, o retângulo contido pelo todo com a linha reta adicionada e a linha reta adicionada juntamente com o quadrado na metade é igual ao quadrado na linha reta constituído pela metade e a linha reta adicionada” (Katz, 2010, p. 90).

As proposições 5 e 6 podem ser interpretadas como justificações geométricas das resoluções algébricas típicas de uma equação quadrática (Katz, 2010).

Considerando AB igual a  $b$ , BC igual a  $\frac{b}{2}$  e DB igual a  $x$  a **proposição II – 5** traduz-se por  $(b - x)x + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ . A equação quadrática  $bx - x^2 = c$  [ou  $(b - x)x = c$ ] pode ser resolvida escrevendo  $\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ , e obtendo então  $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$  (Fig. 2.4). Alternativamente, designando AD por  $y$  e DB por  $x$ , a equação  $bx - x^2 = c$  pode ser traduzida para o sistema babilónico, atrás mencionado, por  $x + y = b$  e  $xy = c$  (Katz, 2010).

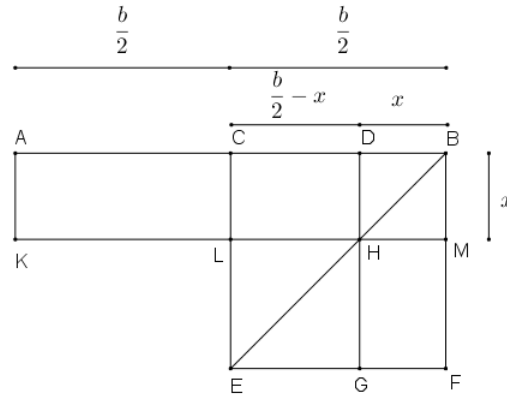


Figura 2.4 – Resolução geométrica da equação quadrática  $bx - x^2 = c$ : Elementos, Proposição II – 5.

Considerando AB igual a  $b$ , BC igual a  $\frac{b}{2}$  e DB igual a  $x$  a **proposição II – 6** traduz-se por  $(b + x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2$ . A equação quadrática  $bx + x^2 = c$  [ou  $(b + x)x = c$ ] pode ser resolvida escrevendo  $\left(\frac{b}{2} + x\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ , e obtendo então  $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$  (Fig. 2.5). Alternativamente, designando AD por  $y$  e DB por  $x$ , a equação  $bx + x^2 = c$  pode ser traduzida para o sistema babilónico, atrás mencionado, por  $y - x = b$  e  $yx = c$  (Katz, 2010).

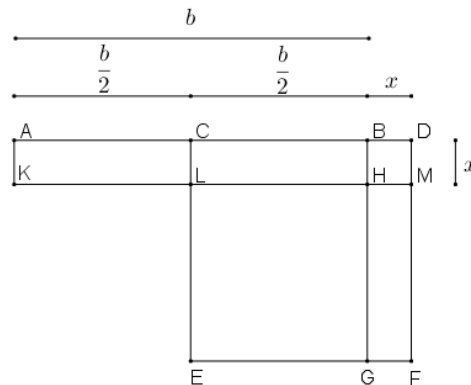


Figura 2.5 – Resolução geométrica da equação quadrática  $bx + x^2 = c$ : Elementos, Proposição II – 6

### Proposição II – 9

“Se uma linha reta é cortada em segmentos iguais e desiguais, os quadrados nos segmentos desiguais do todo são o dobro da soma do quadrado na metade e o quadrado na linha reta entre os pontos da secção” (Katz, 2010, p. 91).

A tradução algébrica desta proposição é  $x^2 + y^2 = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ . O resultado foi usado pelos Babilónios para resolver o sistema  $x - y = b$ ,  $x^2 + y^2 = c$ .

De entre as restantes proposições do livro II dos *Elementos* há a destacar a proposição 11. Esta já não se trata de uma igualdade entre expressões quadráticas, mas da resolução de uma equação quadrática concreta, cuja solução conduz à conhecida divina proporção (que atualmente se designa por número de ouro). No entanto, a resolução apresentada não pode ser generalizada às outras equações do 2.º grau. A apresentação da resolução geral (embora geométrica) das equações do 2.º grau, foi dada apenas no livro VI da mesma obra.

### Proposição II – 11

“Cortar uma linha reta de forma a que o retângulo contido pelo todo e um dos segmentos seja igual ao quadrado do segmento remanescente” (Katz, 2010, p. 91).

O objetivo desta proposição é encontrar um ponto H no segmento de modo que o retângulo contido por AB e HB seja igual ao quadrado sobre AH (Fig. 2.6). Este é um problema algébrico, em termos da definição dada anteriormente, uma vez que pede para encontrar uma quantidade desconhecida dada a sua relação com certas quantidades conhecidas.

Para traduzir este problema em notação moderna, seja  $a$  a linha AB e seja  $x$  AH. Então  $HB = a - x$ , e o problema equivale a resolver a equação  $a(a - x) = x^2$  ou  $x^2 + ax = a^2$ . A solução

babilónica é  $x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$ .

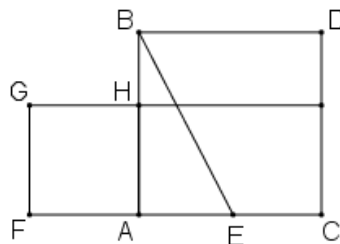


Figura 2.6 – Elementos, Proposição II – 11.

A prova de Euclides resume-se precisamente a esta fórmula. Para obter a raiz quadrada da soma de dois quadrados, o método consiste em usar a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados sejam as raízes dadas, neste caso,  $a$  e  $\frac{a}{2}$ . Assim, Euclides desenha o quadrado em AB e, em seguida, bissecta AC em E. Segue-se que EB é a hipotenusa desejada. Para subtrair  $\frac{a}{2}$  deste comprimento, desenhou EF igual a EB e subtraiu-lhe AE para obter AF; sendo este o valor procurado  $x$ . Como quer o comprimento marcado em AB, simplesmente escolheu H para que  $AH = AF$ . Para provar que essa escolha de H está correta, Euclides apelou então à Proposição II-6 que fornece a justificação necessária. Euclides resolveu o que chamaríamos de equação quadrática, embora em termos geométricos, da mesma maneira que os babilónios (Katz, 2010).

No Livro VI, Euclides expandiu a noção de "aplicação de áreas" para aplicações que são "deficientes" ou "excedentes". Nas duas proposições seguintes, Euclides resolveu dois tipos de equações quadráticas geometricamente. Supõe-se que os pitagóricos tenham formulado estes mesmos problemas, mas em que o defeito ou o excesso fosse um quadrado. De facto, as proposições 28 e 29 do livro VI são uma generalização desta situação.

### Proposição VI – 28

“A uma determinada linha reta aplicar um paralelogramo igual a uma determinada figura retilínea e deficiente por um paralelogramo semelhante a um determinado; assim, a figura retilínea determinada

não deve ser maior do que o paralelogramo descrito na metade da linha reta e semelhante ao defeito” (Katz, 2010, p. 93).

Euclides propõe que se construa um paralelogramo de determinada área cuja base seja menor do que o segmento de linha dado AB. O paralelogramo sobre o defeito, o segmento de reta SB, deve ser semelhante ao dado. Para a discussão da álgebra geométrica, é mais simples presumir que o paralelogramo determinado é um quadrado. Então o paralelogramo construído tem que ser um retângulo. A proposição e a sua prova serão traduzidas para álgebra de acordo com esta presunção (Katz, 2010).

Designa-se AB por  $b$ , e a área da figura retilínea determinada por  $c$ . O problema reduz-se a encontrar um ponto S em AB, de forma que  $x = BS$  satisfaça  $x(b - x) = c$  (Fig.2.7), isto é, é necessário resolver a equação quadrática  $bx - x^2 = c$ . Euclides começa por determinar o ponto médio E de AB e construir o quadrado em BE, cuja área é  $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ . S é escolhido de modo que ES é o lado de um quadrado cuja área é  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ . É por isso que é enunciada na proposição a condição de que  $c$  não pode ser maior do que  $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ . Esta escolha para ES implica que  $x = BS = BE - ES = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ . Euclides prova que a sua escolha está correta mostrando que o retângulo desejado é igual ao gnómon XWV e que o gnómon por sua vez é igual à área dada  $c$ . Algebricamente, isso resume-se a mostrar que

$$x(b - x) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c\right] = c.$$

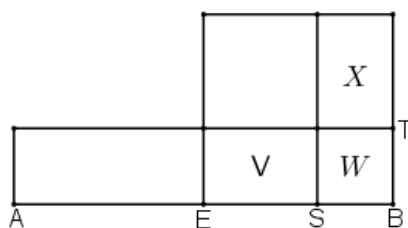


Figura 2.7 – Elementos, Proposição VI – 28.

### Proposição VI – 29

“A uma determinada linha reta aplicar um paralelogramo igual a uma determinada figura retilínea e excedendo por um paralelogramo semelhante a um determinado” (Katz, 2010, p. 93).

O paralelogramo construído de determinada área tem uma base maior do que o segmento de linha dado AB, enquanto o paralelogramo no excesso, o segmento BS, deve ser semelhante a um determinado. Para simplificar a discussão da álgebra geométrica, é mais simples presumir que o paralelogramo determinado é um quadrado. Então o paralelogramo construído tem que ser um retângulo. A proposição e a sua prova serão traduzidas para álgebra de acordo com esta presunção (Katz, 2010). Designa-se AB por  $b$ , e a área da figura retilínea determinada por  $c$ . O problema reduz-se a encontrar um ponto S em AB prolongado, de forma que  $x = BS$  satisfaça  $x(b + x) = c$  (Fig. 2.8), isto é, é necessário resolver a equação quadrática  $bx + x^2 = c$ .

Euclides começa por determinar o ponto médio E de AB e construir o quadrado em BE, cuja área é  $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ . S é escolhido de modo que ES é o lado de um quadrado cuja área é  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$ . Então,  $x = BS = ES - BE = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ . Euclides prova que a sua escolha está correta mostrando que o

retângulo desejado é igual ao gnómon  $XWV$  e que o gnómon por sua vez é igual à área dada  $c$ . Algebricamente, isso resume-se a mostrar que

$$x(b + x) = \left[ \left( \frac{b}{2} \right)^2 + c \right] - \left( \frac{b}{2} \right)^2 = c.$$

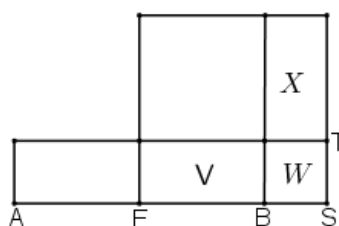


Figura 2.8 – Elementos, Proposição VI – 29.

Não há evidência direta de qualquer transmissão da matemática babilônica para a Grécia durante ou antes do século IV a.C. Embora os gregos dessa época usassem o que consideramos serem procedimentos algébricos, o seu pensamento matemático era tão geométrico que todos esses procedimentos eram automaticamente expressos desse modo. Os gregos até 300 a.C. não tinham notação algébrica e, portanto, a única forma de poderem manipular expressões que representavam magnitudes era apresentando-as em termos geométricos. De facto, os matemáticos gregos tornaram-se muito proficientes em manipular entidades geométricas. Além disso, não havia maneira de os gregos poderem exprimir, sem ser geometricamente, soluções irracionais de equações quadráticas (Katz, 2010).

## 2.2. A Aritmética de Diofanto

É com Papo que o interesse pela Geometria desaparece, sendo no campo ainda não desbravado da teoria dos números que temos de procurar novos progressos para a ciência e “citar um grande matemático, estrela de primeira grandeza que na história da *Aritmética* representa papel semelhante ao de Euclides na Geometria e ao de Ptolemeu na Astronomia” (Vasconcellos, 2009, p. 355). É Diofanto de Alexandria, de cuja vida, do mesmo modo que sucede com quase todos os sábios de que temos tratado, nada se conhece, ignorando-se mesmo a data em que floresceu, sendo apenas possível, pela leitura dos seus escritos, marcar certos limites, que o fazem colocar como contemporâneo de Papo e pertencendo à 2.<sup>a</sup> metade do século III da era vulgar. Da figura de Diofanto sabe-se que viveu em Alexandria e de acordo com o epigrama 126 do Livro XIV da *Antologia Grega*, sabemos que terá morrido com 84 anos.

“Nesta tumba jaz Diofanto ... [e] conta cientificamente o tempo da sua vida. Deus presenteou-o com a graça de ser de um rapaz a sexta parte da sua vida, e adicionando uma duodécima parte a isto, cobriu-se-lhe a face de penugem. Concedeu-lhe a graça do casamento depois de uma sétima parte, e cinco anos depois do casamento deu-lhe um filho.

Oh! Pobre criança tardia; ao atingir metade do tempo de vida de seu pai, a má Fortuna levou-o. Depois de consolar a sua dor com a ciência dos números durante quatro anos, terminou a sua vida.” (Katz, 2010, p. 209).

O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa o número de anos que viveu Diofanto, traduz-se pela equação:

$$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4.$$

Resolvendo a equação conclui-se que Diofanto viveu 84 anos.

Conhecem-se de Diofanto uma *Aritmética* e um fragmento *sobre os números poligonais*, sendo-lhe ainda atribuído por alguns autores um tratado sobre a *Música* e um cálculo *fracionário*, além de uma *tábua astronómica*. Além disso, Diofanto cita na *Aritmética* certas proposições auxiliares, a que chama *porismas*, fez isso supor que ele escrevera ainda um livro especial intitulado *Porismas*. No entanto, Tannery, entre outros, contesta tal facto, fazendo notar que, no tempo de Diofanto, o vocábulo *porisma* tem o significado de *corolário* (Vasconcellos, 2009).

É através da sua obra mais importante, a *Aritmética*, que a sua influência alcançou os tempos modernos. A *Aritmética* está dividida em treze livros e só seis sobreviveram na Grécia. Foram descobertos recentemente outros quatro livros numa versão árabe. O estilo dos livros árabes é diferente do dos gregos, pois cada passo da resolução de um problema é explicado pormenorizadamente (Katz, 2010). Não se inserindo na corrente dominante da ciência grega, “a obra de Diofanto pode ter sofrido a influência de práticas matemáticas ancestrais, em particular da aritmética egípcia e da álgebra mesopotâmica” (Estrada et al., 2000, p. 336).

As cerca de 260 proposições da parte conhecida da *Aritmética* correspondem a exercícios, para a resolução dos quais Diofanto utiliza uma variedade de procedimentos e artifícios. Em todas as proposições da *Aritmética*, tanto os dados como as soluções procuradas são números racionais positivos. Uma característica da *Aritmética* de Diofanto que a distingue da generalidade dos tratados gregos de matemática provém do estilo das demonstrações. Diofanto apresenta casos particulares concretos que escolhe de modo a não deixarem dúvidas quanto à validade geral do argumento.

A *Aritmética* é dirigida a Denis ou Dionísio, a quem afirma que vai ensinar doutrina nova, que, sob uma forma nova por ele moldada, com o fim de tornar de fácil apreensão a matéria respetiva, vai tentar expor cientificamente o método a empregar para a solução dos problemas de aritmética; começando o argumento pelo estudo da natureza e das propriedades dos números, “pois que sobre isto se apoia todo o resto” (Vasconcellos, 2009, p. 358).

Em 1842, Nesselmann considerou que podem ser reconhecidos três estágios no desenvolvimento histórico da álgebra. Primeiro, temos o **primitivo ou retórico**, em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos, como foi o caso dos egípcios e dos babilónios. Os egípcios e os babilónios escreveram equações e resoluções em palavras. A seguir, vem um **estágio intermediário, sincopado**, na qual se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente. A *Aritmética* de Diofanto deve ser colocada nesta categoria (Boyer, 1991). Diofanto introduziu abreviaturas simbólicas para os vários termos envolvidos nas equações. O sistema notacional de Diofanto não foi adotado pela generalidade dos matemáticos e não influenciou sistemas posteriormente desenvolvidos. No entanto, essa simbologia proporcionou-lhe uma manipulação das relações algébricas muito mais fácil do que a permitida pela expressão retórica. A álgebra retórica, porém, continuou de maneira bastante generalizada no resto do mundo, exceto na Índia, por muitas centenas de anos. Na Europa Ocidental, especificamente, a maior parte da álgebra permaneceu retórica até ao século XV. O último estágio é o **estágio simbólico ou final**, em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada tem a ver com os entes que representam. E embora a aparição da álgebra simbólica se desse na Europa Ocidental no século XVI, somente pela metade do século XVII esse estilo acabou-se impondo. É curioso salientar que passa despercebido que o simbolismo usado nos nossos textos de álgebra elementar ainda não tem 400 anos.

Antes de versarmos os problemas da *Aritmética* é importante referir o avanço de Diofanto na resolução de equações e a sua introdução do simbolismo:

“Cada um destes números, a que demos nomes abreviados, é reconhecido como um elemento na ciência aritmética; o quadrado [da incógnita] chama-se *dynamis* e o seu símbolo é  $\Delta$  com índice Y, isto é  $\Delta^Y$ ; o cubo chama-se *kubus* e representa-se por K com o índice Y, ou seja,  $K^Y$ ; o quadrado multiplicado por

si mesmo chama-se *dynamo-dynamis* e o seu símbolo é composto por dois deltas com o índice Y, isto é,  $\Delta^Y\Delta$ ; o quadrado multiplicado pelo cubo formado pela mesma raiz chama-se *dynamo-kubus* e o seu símbolo é  $\Delta K$  com o índice Y, ou seja  $\Delta K^Y$ ; o cubo multiplicado por si mesmo chama-se *kubo-kubus* e o seu símbolo consiste em dois *Kappas* com índice Y,  $K^Y K$ . O número que não tiver nenhuma destas características, mas for somente uma quantidade desconhecida de unidades, chama-se *arithmos*, e representa-se por  $\zeta(x)$ . Há um outro símbolo para representar a parte invariável dos números, a unidade, que é M com o índice O, isto é  $\overset{\circ}{M}$ ” (Katz, 2010 apud Thomas, 1957, pp. 519–523).

Todos os símbolos de Diofanto são abreviaturas,  $\zeta$  é uma contração das primeiras duas letras de αριθμος (arithmos ou número) enquanto que  $\overset{\circ}{M}$  significa μοναξ (monas ou unidade). Seguem-se as definições dos recíprocos, cujos nomes são derivados dos próprios nomes das espécies correspondentes. Por exemplo,  $\Delta^Y\chi = \frac{1}{x^2}$  ou  $\gamma^x = \frac{1}{3}$ . O símbolo  $\blacktriangleleft$ , vindo de uma abreviatura para λειψις (leipsis ou querendo ou negação) é usado para “menos” e os termos negativos estão sempre juntos por isso bastava escrever uma vez  $\blacktriangleleft$  (Katz, 2010).

A *Aritmética* apresenta uma série de problemas aritméticos, cuja resolução conduz a simples equações do 1.º grau; a sistemas determinados de equações lineares a 2, 3, 4 ou 6 incógnitas, a sistemas determinados redutíveis ao 1.º e 2.º grau e ainda a equações e sistemas indeterminados do 1.º grau, do 2.º grau, do 3.º grau, do 4.º grau. Temos ainda problemas de construção de triângulos retângulos em números racionais positivos.

Diofanto segue as regras de transformação e de redução indicadas nas definições, que resolve a equação simples do primeiro grau. A questão de formular regras aplicáveis, à equação geral do 1.º grau só aparece na Geometria de Descartes. Só por essa altura aparece o conceito nítido e definitivo dessa equação geral, enunciando as regras de transformação ligadas à possibilidade de tratar livremente em todos os cálculos os números racionais e os números irracionais, os números positivos e negativos.

Quanto aos sistemas determinados do 1.º grau, a notação utilizada permite-lhe usar apenas uma incógnita de cada vez, reduzindo a questão à determinação de uma só incógnita, exprimindo todas as outras por meio desta e efetuando em seguida as eliminações que, à falta de instrumento próprio, tinha de fazer mentalmente. Diofanto desenvolveu um engenho e uma habilidade que assombam, pela escolha, da incógnita principal, e pelos artifícios de que se serve para chegar a equações que sabe resolver o mais simples possível pelas eliminações.

Diofanto utiliza processos idênticos para os problemas dependentes de equações de graus superior e no tratamento dos problemas indeterminados, cuja diferença principal dos problemas determinados o célebre aritmético, não atinge, pois “julga lícito tornar determinado um problema que o não seja, dando arbitrariamente um certo valor a uma incógnita ou a qualquer das suas funções” (Vasconcellos, 2009 apud G. Loria, 1914, p. 861). Com a utilização do método de substituição, ou com a introdução de incógnitas auxiliares, convenientemente escolhidas, encontra as soluções numéricas procuradas, e no final apresenta a verificação dos resultados.

A *Aritmética* não contém a regra para resolver qualquer equação do 2.º grau. Muitas das equações são resolvidas dando uma solução, mesmo quando as raízes são ambas positivas; quando as duas raízes são ambas negativas ou irracionais a equação é rejeitada e considerada impossível.

Na *Aritmética* podemos ver o génio inventivo e a variedade de expedientes que Diofanto utiliza, sendo, porém, necessário, para uma melhor apreciação dos processos seguidos, dar alguns exemplos de problemas, como se segue:

### Problema I-1

“Dividir um dado número em dois tendo uma dada diferença” (Heath, 1910, p. 131).

Diofanto apresenta a solução para o caso em que o número dado é 100 e a diferença é 40. Supondo  $x$  o menor dos dois números,  $x + 40$  representa o número maior. Donde,  $2x + 40 = 100$ , e os números pretendidos são 30 e 70. Na análise moderna, as soluções do problema resultam da resolução de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas da forma:

$$x + y = 100 \text{ e } y - x = 40.$$

Este problema é determinado, uma vez especificado os números “dados”, no entanto, o método de Diofanto funciona para qualquer par. Se  $a$  é um número dado e  $b < a$  então as soluções do problema resultam da resolução de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas da forma:

$$x + y = a \text{ e } y - x = b.$$

Donde,  $x + (x + b) = a$ . Assim os números requeridos serão  $x = \frac{a-b}{2}$  e  $y = \frac{a+b}{2}$ .

### Problema I-2

“Dividir um número em duas partes que tenham entre si uma razão dada” (Heath, 1910, p. 131).

Diofanto apresenta a solução para o caso em que o número dado é 60 e a razão é 3. Supondo  $x$  o menor dos dois números,  $3x$  representa o número maior. Donde,  $4x = 60$ , e os números pretendidos são 15 e 45. Na análise moderna, as soluções do problema resultam da resolução de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas da forma:

$$x + y = a, \quad \frac{x}{y} = m.$$

Donde,  $my + y = a$ . Assim os números requeridos serão  $y = \frac{a}{m+1}$  e  $x = \frac{am}{m+1}$ .

### Problema I-17

“Determinar quatro números tais que somados três a três produzam quatro números dados; mas o dobro de cada um dos quatro números deve ser menor que a soma dos outros três” (Heath, 1910, p. 135).

Seja a soma de três dos quatro números 20, 22, 24 e 27 respectivamente. Seja  $x$  a soma dos quatro números procurados. Então os números são  $x - 20, x - 22, x - 24, x - 27$ . Logo,  $4x - 93 = x$  e  $x = 31$ . Os números pretendidos são 9, 7, 4, 11.

As soluções do problema obtêm-se, neste caso, pela resolução do sistema de quatro equações lineares a quatro incógnitas, que atualmente exprimimos como segue:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ y + z + u = b \\ x + z + u = c \\ x + y + u = d \end{cases}$$

Donde resultam os valores das incógnitas, dados por

$$x = \frac{a + c + d - 2b}{3}, \quad y = \frac{a + b + d - 2c}{3}, \quad z = \frac{a + b + c - 2d}{3}, \quad u = \frac{b + c + d - 2a}{3}$$

que mostram que se devem dar as condições:

$$a + c + d > 2b, \quad a + b + d > 2c, \quad a + b + c > 2d, \quad b + c + d > 2a,$$

para a possibilidade do problema. Diofanto conhecia estas condições que as deve ter calculado mentalmente e estabelecido sobre uns dados quaisquer, representando-as verbalmente, como resulta do enunciado do problema (Vasconcelos, 2009).

Os problemas 27 a 30 do Livro I da *Aritmética* de Diofanto são os primeiros que se reduzem a equações do 2.º grau completas. Na apresentação da sua resolução, Diofanto utiliza um artifício que permite transformá-las em equações do 2.º grau incompletas, cuja resolução é imediata. Tal artifício consiste (independentemente do número de equações, do grau dessas equações e do número de

incógnitas envolvidas no problema) em designar uma certa quantidade desconhecida (uma nova incógnita por excelência) por aritmo. De seguida, as várias incógnitas do problema são escritas em função dessa nova incógnita e, ou são feitas substituições de entre as várias equações ou, como no caso das equações indeterminadas, são tomados casos particulares, de modo a reduzir tudo a uma só equação, com uma só incógnita (o aritmo) nunca com grau superior ao segundo. Note-se que a escolha do aritmo não era arbitrária. Ao invés, era feita de forma a que, no final, se obtivesse uma equação nas condições acima referidas. Após calcular o valor do aritmo era fácil determinar as várias soluções do problema.

### Problema I-27

“Determinar dois números cuja soma e produto sejam dois números dados. É condição necessária que o quadrado de metade da soma dos dois números exceda, dum quadrado, o seu produto” (Heath, 1910, p. 140).

Diofanto apresenta a solução para o caso em que a soma é 20 e o produto é 96. Supondo  $2x$  a diferença dos dois números, o maior será  $10 + x$  e o menor  $10 - x$ ; o produto será  $100 - x^2 = 96$ . Onde,  $x = 2$  e os números pretendidos são 12 e 8.

Do estudo deste problema, resulta que a análise de Diofanto, na notação atual, é a seguinte:

$$x + y = b, \quad xy = c, \quad x - y = 2z,$$

tomando  $z$  para incógnita auxiliar; temos que

$$x = \frac{b}{2} + z, \quad y = \frac{b}{2} - z.$$

Donde,

$$xy = \frac{b^2}{4} - z^2 = c.$$

Assim,  $z = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ . Então,  $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ ,  $y = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ .

Note que a condição necessária dada por Diofanto “que o quadrado de metade da soma dos dois números exceda, dum quadrado, o seu produto” é suficiente para que se possa calcular a raiz quadrada, ou seja, que a solução seja racional. Assim sendo,  $xy = \left(\frac{b}{2} + z\right)\left(\frac{b}{2} - z\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - z^2$ . Mas  $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - z^2$  é equivalente a  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = z^2$ .

### Problema I-28

“Determinar dois números tais que a sua soma e a soma dos seus quadrados são números dados. É condição necessária que o dobro da soma dos quadrados exceda o quadrado da soma por um número quadrado” (Heath, 1910, p. 140).

Diofanto apresenta a solução para o caso em que a soma é 20 e a soma dos quadrados é 208. Supondo  $2x$  a diferença dos dois números, o maior será  $10 + x$  e o menor  $10 - x$ . Então,  $200 + 2x^2 = 208$ . Onde,  $x = 2$  e os números pretendidos são 12 e 8.

Do estudo deste problema, resulta que a análise de Diofanto, na notação atual, é a seguinte:

$$x + y = b, \quad x^2 + y^2 = c,$$

tomando  $z$  para incógnita auxiliar; temos que

$$x = \frac{b}{2} + z, \quad y = \frac{b}{2} - z.$$

Donde,

$$\left(\frac{b}{2} + z\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - z\right)^2 = c.$$

Assim,  $z = \frac{\sqrt{2c-b^2}}{2}$ . Então,  $x = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{2c-b^2}}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{2c-b^2}}{2}$ .

Este problema é da forma  $x + y = b$ ,  $x^2 + y^2 = c$ , um tipo resolvido pelos babilônios. A solução de Diofanto é estritamente algébrica, ao invés da solução quase geométrica babilônica.

Note que a condição necessária dada por Diofanto “o dobro da soma dos quadrados exceda o quadrado da soma por um número quadrado” é suficiente para que a solução seja racional. Assim sendo,  $x^2 + y^2 = c$ . Mas  $c = \frac{b^2}{2} + 2z^2$  é equivalente a  $2c = b^2 + (2z)^2$ .

Curiosamente “as respostas aos problemas 27, 28, 29 e 30 são 12 e 8, recordando-nos a prática babilônica usual de ter as mesmas respostas para uma série de problemas relacionados entre si” (Katz, 2010).

### Problema II-8

“Dividir um dado número quadrado em dois quadrados” (Heath, 1910, p. 144).

Seja 16 o quadrado dado,  $x^2$  um dos quadrados que procuramos, o outro será  $16 - x^2$ , que deve ser um número quadrado. Tomo um quadrado da forma  $(mx - 4)^2$ , sendo  $m$  um inteiro e 4 a raiz de 16; por exemplo, seja o lado  $2x - 4$ , cujo quadrado  $4x^2 - 16x + 16$  será igual a  $16 - x^2$ . Então  $5x^2 = 16x$ , e  $x = \frac{16}{5}$ . Um número será  $\frac{256}{25}$ , o outro  $\frac{144}{25}$ , e a sua soma é  $\frac{400}{25}$  ou 16, e cada um é um quadrado.

Este problema traduz-se em linguagem atual por uma equação em duas incógnitas,  $x^2 + y^2 = 16$ . Além disso, ilustra o método mais comum de Diofanto e que aparece em muitos problemas do Livro II. “Trata-se de um problema cujas soluções se obtêm pela resolução duma equação da forma  $x^2 + y^2 = a^2$ , que Diofanto resolve, exprimindo os lados dos dois quadrados em função racional duma constante arbitrária  $m$  e duma variável independente  $x$ , escolhida de modo a satisfazer por força do problema a uma equação linear” (Vasconcellos, 2009, p. 367).

Assim,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2, \\ x^2 + (mx - a)^2 &= a^2, \\ x^2 + m^2x^2 - 2amx + a^2 &= a^2, \\ m^2x - 2am &= -x, \end{aligned}$$

Donde,  $x = \frac{2m}{1+m^2}a$  e  $y = \frac{m^2-1}{m^2+1}a$ .

No século XVII, o matemático francês Pierre de Fermat escreveu a seguinte nota, na margem do seu exemplar do tratado de Diofanto, junto à proposição Aritmética II, 8:

“Em contrapartida, é impossível decompor um cubo em dois cubos, ou um biquadrado em dois biquadrados, ou mais geralmente, uma potência qualquer, excetuando a do quadrado, em duas potências com o mesmo expoente. Descobri uma demonstração verdadeiramente maravilhosa da coisa; mas a margem é demasiado pequena para a conter” (Estrada et al., 2000, p.337).

Por outras palavras, o teorema de Fermat refere que a equação  $x^n + y^n = z^n$  não pode ser resolvida em números racionais para nenhuma potência expressa por um número  $n > 2$ . Este enunciado ficou conhecido como Grande Teorema de Fermat. Este teorema foi considerado um verdadeiro desafio para os matemáticos, tendo sido provado por Andrew Wiles, em 1994.

No livro IV, Diofanto inicia o uso da técnica da falsa posição egípcia.

**Problema IV- 8**

“Adicionar o mesmo número a um cubo e ao seu lado e fazer a primeira soma o cubo da segunda” (Heath, 1910, p. 170).

Para resolver o problema indeterminado  $x^3 + y = (x + y)^3$ , Diofanto começa por supor que  $x = 2y$ . Onde,

$$\begin{aligned}(2y)^3 + y &= (2y + y)^3 \\ 8y^3 + y &= (3y)^3 \\ 8y^3 + y &= 27y^3 \\ y &= 19y^3 \\ 19y^2 &= 1.\end{aligned}$$

Como 19 não é um quadrado, Diofanto precisa de encontrar um quadrado para substituir 19. Revendo os seus passos verifica que 19 é  $3^3 - 2^3 + 3$  vem do valor suposto  $x = 2y$  aumentando o coeficiente de 1. Logo, precisa de determinar dois números consecutivos  $z, z + 1$  tais que os seus cubos difiram por um quadrado. Então,  $(z + 1)^3 - z^3 = 3z^2 + 3z + 1$  deve ser um quadrado. Diofanto toma  $3z^2 + 3z + 1 = (1 - 2z)^2$ . Onde,  $z^2 - 7z = 0$ . Assim,  $z = 7$  e  $z + 1 = 8$ .

Voltando ao inicio do problema faz  $x = 7y$ . Então,  $(7y)^3 + y = (7y + y)^3$ . Onde,  $y = \frac{1}{13}$ . Para determinarmos o valor de  $x$  substituímos agora  $y$  por  $\frac{1}{13}$  em  $x^3 + y = (x + y)^3$  e obtemos:

$$x^3 + \frac{1}{13} = \left(x + \frac{1}{13}\right)^3.$$

Onde,  $507x^2 + 39x - 168 = 0$ . O cubo desejado tem então  $\frac{7}{13}$  de lado. É importante salientar que, na determinação de um quadrado, a sua escolha de  $m = 2$  em  $1 - mz$  é a única escolha que conduz a uma solução inteira positiva para  $z$ .

A obra de Diofanto foi o único trabalho algébrico que sobreviveu da Grécia Antiga, tendo sido comentada na antiguidade tardia e estudada por autores islâmicos. Muitos dos seus problemas foram retomados por Rafael Bombelli que os publicou na sua Álgebra de 1572. A edição inicial grega impressa por Bachet e publicada em 1621 foi cuidadosamente estudada por Pierre Fermat. Este trabalho de álgebra foi efetivamente um tratado na análise de problemas. A solução de cada problema começou com a suposição de que a resposta  $x$  foi encontrada. Como consequência o valor numérico  $x$  pode ser determinado resolvendo uma simples equação. A prova de que a resposta satisfaz as condições desejadas, nunca foi dada por Diofanto, pois se reduzia a um cálculo aritmético. Neste sentido, o trabalho de Diofanto contrasta com o trabalho puramente sintético de Euclides (Katz, 2010).

### 2.3. A Antologia Grega

Uma das melhores fontes de problemas algébricos gregos antigos é a coleção conhecida como *Palatina* ou *Antologia Grega*. Trata-se de uma coleção de problemas numéricos, em forma de epigrama, reunida por volta de 500 d.C. pelo gramático Metrodoro. Embora alguns dos problemas possam ser da lavra do autor, acredita-se que muitos deles são consideravelmente mais antigos. Os problemas, aparentemente planeados para recreação mental, são mencionados por Platão e lembram alguns dos problemas do Papiro de Rhind.

Desconhece-se como seria resolvido estes problemas, pensando os críticos mais eminentes que se resolveriam com raciocínios algébricos expressos em palavras, sem o uso de símbolos, como procediam Ahmés e os antigos gregos que precederam Diofanto, e muitos dos posteriores. Embora seja fácil resolver esses problemas com o nosso moderno simbolismo algébrico, deve-se admitir que uma resolução retórica requereria uma atenção mental mais elevada (Vasconcellos, 2009).

De forma geral os epigramas podem ser agrupados segundo o tipo de contexto do próprio problema: problemas envolvendo torneiras; problemas sobre heranças; problemas de partilha de nozes e maçãs; problemas sobre etapas da vida; problemas envolvendo pesos; problemas envolvendo questões sobre tempo e espaço e problemas envolvendo número de pessoas ou animais.

Os primeiros epigramas que iniciam o Livro XIV são do filósofo Sócrates (469 – 399 a.C.). Sendo que o primeiro de todos invoca a figura de Pitágoras de Samos (582 – 496 a.C.), num diálogo fictício entre Polícrates, um tirano da cidade de Samos, e Pitágoras, fundador da escola pitagórica no século V a.C. Consideremos o **problema 1 da Antologia Grega**:

“Bem-aventurado Pitágoras, Ó filho das Musas de Hélicon, diz-me: o desporto da ciência, quantos, na tua casa, de boa vontade se lhe entregam? Eu te direi Polícrates: metade interessa-se pela bela matemática; um quarto aplica-se no estudo da natureza imortal; um sétimo no desígnio do silêncio total e do discurso eterno dos seus corações; mais três mulheres, sendo Teano a que se sobressai. Este é o número de interpretes das Musas que reuni à minha volta” (Paton, 1918, p. 27).

O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa o valor procurado, traduz-se pela equação:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x.$$

Donde,  $x = 28$ . Mais especificamente e segundo o epigrama temos: 14 matemáticos, pois o problema cita que a metade das pessoas está interessada pela beleza matemática; 7 físicos, mencionados como sendo um quarto dos que estão inclinados à natureza imortal; 4 pensadores, ou seja, um sétimo dedicado às eternas vozes da alma e as 3 mulheres, em que Teano, uma delas, referida no texto, foi a primeira mulher relacionada com a ciência.

O problema 11 da *Antologia Grega* é do filósofo Sócrates. Este problema trata de um testamento de um pai aos seus dois filhos, um legítimo e outro ilegítimo. Consideremos o **problema 11 da Antologia Grega**:

“Desejo que os meus dois filhos recebam as mil estáteres que possuo, mas que a quinta parte da herança do legítimo exceda em dez a quarta parte do que cabe ao ilegítimo” (Paton, 1918, p. 33).

O Estáter é uma moeda antiga usada em diversas regiões da Grécia. Eram feitas de ouro ou prata. O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa a herança do filho legítimo e  $y$  representa a herança do filho ilegítimo, traduz-se pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{1}{5}x = \frac{1}{4}y + 10 \end{cases}$$

A solução é  $x = 577\frac{7}{9}$  e  $y = 422\frac{2}{9}$ . O filho legítimo iria receber  $577\frac{7}{9}$  estáteres e o filho ilegítimo  $422\frac{2}{9}$  estáteres.

Na *Antologia Grega* os problemas 48 e 144 traduzem-se numa equação linear indeterminada. Consideremos o **problema 48 da Antologia Grega**:

“As três Graças carregavam cestos de maçãs, cada com a mesma quantidade. As nove Musas encontraram-nas e pediram-lhes maçãs, elas deram o mesmo número a cada uma; e, desta forma, as três graças e as nove musas ficaram com a mesma quantidade de maçãs. Diz-me quantas é que elas deram e como é que todas ficaram com o mesmo número” (Paton, 1918, pp. 49-50).

As três Graças tinham três cestos com quatro maçãs cada um, isto é, 12 maçãs no total, e cada uma deu três maçãs às Musas. Assim cada Musa e cada Graça fica com uma maçã. Qualquer múltiplo de doze é solução do problema.

O problema 49 da *Antologia Grega* envolve quatro equações em quatro incógnitas. Consideremos o **problema 49 da Antologia Grega**:

“Faça-me uma coroa que pese sessenta minas, misturando ouro, bronze, estanho e ferro. O ouro e o bronze juntos pesam dois terços do total da coroa, o ouro e o estanho juntos pesam três quartos do total, e o ouro e o ferro pesam três quintos. Diga-me quanto ouro, bronze, estanho e ferro foram usados para fazer toda a coroa pesar sessenta minas” (Paton, 1918, p. 51).

Uma mina equivalia a 100 dracmas e um dracma tinha de 4 a 6 gramas. Sejam  $x$  o peso do ouro,  $y$  o peso do bronze,  $z$  o peso do estanho e  $w$  o peso do ferro. Pelo enunciado do problema,

$$x + y + z + w = 60, x + y = 40, x + z = 45, x + w = 36$$

somando as três últimas equações obtemos,  $x + y + x + z + x + w = 40 + 45 + 36$ , isto é,  $2x + (x + y + z + w) = 121$ . Da primeira equação sabemos que  $x + y + z + w = 60$  então  $2x + 60 = 121$ . Donde,  $x = \frac{61}{2} = 30\frac{1}{2}$ . O peso do ouro é  $30\frac{1}{2}$  minas, o peso do bronze é  $9\frac{1}{2}$  minas, o peso do estanho é  $14\frac{1}{2}$  minas e o peso do ferro é  $5\frac{1}{2}$  minas.

O problema 116 é um problema de partilha de nozes. Consideremos o **problema 116 da Antologia Grega**:

“Mãe, por que me persegues com pancada por causa das nozes? Lindas raparigas dividiram-nas entre si. Para Melissa foram dois sétimos, e Tita tomou um duodécimo. As brincalhonas Astíoque e Filina ficaram com um sexto e um terço. Tétis pegou em vinte, e Tisbe em doze, e Glauce, sorrindo docemente, levou onze na sua mão. Esta foi a única que sobrou para mim. Quantas nozes havia originalmente?” (Paton, 1918, p. 85).

O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa o número de nozes que a menina tinha inicialmente, traduz-se pela equação:

$$\frac{2}{7}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x + 20 + 12 + 11 + 1 = x$$

A menina tinha inicialmente 336 nozes ( $96 + 28 + 56 + 112 + 12 + 11 + 1$ ).

### 3. Pensamento Algébrico na China Antiga e Medieval

Muitas lendas datam a civilização chinesa de há 5000 anos atrás. As escavações de Anyang, perto do Rio Amarelo, datadas de cerca de 1600 a.C. constituem uma prova sólida desta civilização (Katz, 2010).

Ao contrário da matemática egípcia e babilónica, na matemática chinesa existe uma grande diversidade de fontes. Das obras que resistiram à erosão do tempo e ao furor do homem, e que constituem cerca de 10% de todas as que terão existido, uma delas, possivelmente a mais antiga de todas, intitulada *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, apresenta um método para resolver sistemas de equações lineares semelhante ao conhecido hoje como “método de Gauss” e é uma das poucas obras que apresenta justificações para os processos matemáticos aplicados. Nesta obra há problemas que, embora estejam associados ao contexto da vida real, são recheados com dados tão inadequados à situação que os afastam de qualquer intencionalidade prática, enquanto que outros, aparentemente lúdicos, põem questões no âmbito da teoria dos números. Alguns dos problemas apresentados estão hoje catalogados como “recreações matemáticas” e têm despertado a curiosidade de diversos matemáticos ao longo dos tempos (Estrada et al., 2000).

Esta obra influenciou toda a matemática chinesa, tendo sido utilizada como manual de ensino. O livro é de autoria desconhecida, como era comum na antiga China. Pensa-se que as cópias originais foram destruídas na famosa queima dos livros. No entanto, ChangTshang terá procedido à reconstrução de uma obra com o mesmo nome a partir dos fragmentos escapados à fogueira de livros mandada atear pelo imperador Qin, no final do século III antes da era cristã. Esta obra mereceu diversos comentários, sendo de destacar os que foram elaborados por Liu Hui e de Yang Hui, nos séculos III e XIII respetivamente, o primeiro dos quais nos permite conhecê-la nos dias de hoje. A primeira versão inglesa desta obra foi elaborada pelo matemático Alexander Wylie, no século XIX (Estrada et al., 2000).

O texto, tal como chegou até nós, é um comentário feito por Liu Hui (c. 250 d.C.), oficial do reino de Wei (220-265). Liu Hui foi chamado a reexaminar a literatura científica clássica e coube-lhe rever os *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*. O trabalho realizado sobre esta obra permitiu que Liu Hui ficasse conhecido como um dos maiores matemáticos da China e um dos primeiros matemáticos não gregos a desenvolver e a usar métodos de provas para os seus resultados. A influência de Liu Hui e do seu comentário à obra os *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática* é equivalente à de Euclides e da sua obra *Elementos* no mundo ocidental, pelo que é designado como o Euclides chinês. Liu Hui não só recopiou esta obra como a expandiu e reforçou o seu conteúdo, nuns casos acrescentando explicações e provas matemáticas, noutros melhorando a exatidão e alargando o âmbito dos resultados matemáticos nela contidos (Swetz, 1979).

#### 3.1. Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática

A obra *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática* apresenta um conjunto de conhecimentos de matemática necessários para responder satisfatoriamente às práticas do dia a dia, em todos os setores de atividade. É composta por 246 problemas, todos resolvidos e agrupados em nove capítulos distintos.

O capítulo 3 apresenta 20 problemas que podem ser resolvidos pela regra da falsa posição ou pela regra de três simples. Consideremos o enunciado do **problema 4 do capítulo 3** que ilustra a regra da falsa posição:

“Um tecelão melhora a sua produção, duplicando diariamente o produto do seu trabalho. Em 5 dias fez 5 chi de tecido. Que quantidade de tecido produziu em cada dia?” (Joseph, 2011, p. 218).

Para o autor chinês, se o produto final fosse 1 então o tecelão, no primeiro dia, teria produzido apenas  $\frac{1}{31}$  desse produto. Mas se o resultado final é 5, então no primeiro dia ele produziu  $\frac{5}{31}$  do total, no segundo  $\frac{10}{31}$ , no terceiro  $\frac{20}{31}$ , no quarto  $\frac{40}{31}$  e no quinto  $\frac{80}{31}$  e no total produziu  $\frac{155}{31}$ , que é igual a 5 chi.

As unidades de medida são zhang, chi e cun. Um zhang corresponde a 10 chi, um chi corresponde a 10 cun e um chi é equivalente a 23 cm. O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa a quantidade de tecido produzido no primeiro dia, traduz-se pela equação:

$$x + 2x + 4x + 8x + 16x = 5.$$

Donde,  $x = \frac{5}{31}$  chi ou  $\frac{50}{31}$  cun. No primeiro dia ele tece  $\frac{50}{31}$ ; no segundo dia  $\frac{100}{31}$ ; no terceiro dia  $\frac{200}{31}$ ; no quarto dia  $\frac{400}{31}$ ; e no quinto dia  $\frac{800}{31}$  [Isso totaliza  $\frac{1550}{31} = 50$  cun ou 5chi].

O capítulo 4 contém vinte e quatro problemas sobre medição de terras. Os problemas 12 a 18 envolvem a regra da extração de raízes quadradas e os problemas 19 a 24 envolvem a regra da extração de raízes cúbicas.

No problema 12 do capítulo 4 temos um exemplo de um problema em que temos de aplicar o algoritmo da raiz quadrada. Este é baseado na fórmula algébrica  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ . Na Enciclopédia do reinado de Yung Lo, compilada no século XV, encontra-se a reprodução do comentário escrito por Yang Hui sobre o assunto. Deste comentário, tal como do de Liu Hui, ressalta a convicção de que o método da extração das raízes quadradas se apoiava em modelos geométricos (Joseph, 2011). Consideremos o **problema 12 do capítulo 4**:

“Há um campo quadrado com área igual a 55225 bu [quadrados]. Qual é a medida do lado do campo?”

Para medir campos, introduzem uma outra unidade de comprimento, o bu. Um bu corresponde a 6 chi. A solução apresentada é 235 bu. Em notação atual, se tomarmos como  $x$  a medida do lado do campo, temos que:  $x^2 = 55225$ . Donde,  $x = \sqrt{55225} = 235$  bu. Para calcular a  $\sqrt{55225}$  temos que encontrar dígitos  $a, b, c$  de forma a que a resposta se possa escrever como  $100a + 10b + c$  (os chineses usavam um sistema decimal). Primeiro, encontre o maior dígito  $a$  tal que  $(100a)^2 < 55225$ . Neste caso,  $a = 2$ . A diferença entre o quadrado grande e o quadrado em  $100a$  é o gnómon grande na figura 3.1. Se o gnómon estreito exterior for ignorado, é evidente que  $b$  deve satisfazer  $55225 - 40000 > 2(100a)(10b)$ , isto é,  $15225 > 4000b$ . Donde,  $b < 4$ . Para verificar que  $b = 3$  está correto, isto é, que, com o quadrado  $10b$  incluído, a área do maior gnómon é ainda menor que 15225, é necessário verificar que  $2(100a)(10b) + (10b)^2 < 15225$ . Uma vez que este facto é verdadeiro repetimos o procedimento para encontrar  $c$ :

$$55252 - 40000 - 30 \times (2 \times 200 + 30) > 2 \times 230c,$$

isto é,  $2325 > 460c$ . Donde,  $c < 6$ . Facilmente verificamos que  $c = 5$ . A  $\sqrt{55252}$  é 235 (Katz, 2010).

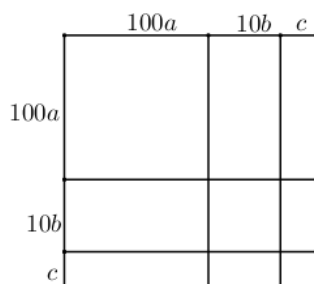


Figura 3.1 – Algoritmo chinês da raiz quadrada.

Este método apresenta uma série de respostas, neste caso, 200, 230, 235, cada uma delas uma melhor aproximação que a anterior do resultado verdadeiro. O processo utilizado pelos matemáticos chineses para determinar a raiz quadrada de um número é semelhante ao “algoritmo da raiz quadrada” que já foi utilizado e ensinado nas aulas de Matemática em Portugal.

No capítulo 7 intitulado “Excessos e deficiências” aparecem problemas resolvidos pela regra da dupla falsa posição, particularmente popular durante o período em que a falta de uma notação simbólica adequada tornava difícil a solução de equações lineares simples. Esta regra foi trazida para a Europa pelos árabes e é encontrada nas obras do matemático islâmico do século IX al-Khwarizmi sob o nome de *hisab al-khataayn*. Se este método era de origem chinesa ou não, é difícil dizer com a evidência existente. No entanto, o que sabemos é que o método foi introduzido pela primeira vez no JiuZhang e foi comentado e refinado por comentaristas desde Liu Hui (século III) a Yang Hui (século XIII).

Utilizando a notação atual, com a regra da dupla falsa posição, pretendemos determinar uma quantidade desconhecida  $x$  numa equação linear da forma  $ax + b = 0$  de solução  $x = -\frac{b}{a}$ . Sejam  $x_1$  e  $x_2$  dois palpites para o valor de  $x$ , e sejam  $b_1$  o excesso determinado pelo palpite  $x_1$  e  $b_2$  o defeito determinado pelo palpite  $x_2$  então  $ax_1 + b = b_1$  e  $ax_2 + b = b_2$ . Donde,  $a(x_1 - x_2) = b_1 - b_2$ . Multiplicando a equação  $ax_1 + b = b_1$  por  $x_2$  e a equação  $ax_2 + b = b_2$  por  $x_1$ ; subtraindo ordenadamente membro a membro as duas equações resultantes obtemos

$$b(x_2 - x_1) = b_1x_2 - b_2x_1.$$

Dividindo ordenadamente membro a membro as igualdades

$$a(x_1 - x_2) = b_1 - b_2 \text{ e } b(x_2 - x_1) = b_1x_2 - b_2x_1,$$

obtem-se

$$x = -\frac{b}{a} = \frac{b_1x_2 - b_2x_1}{b_1 - b_2}.$$

Consideremos o enunciado e a respetiva resolução do **problema 9 do capítulo 7** que foi transcrito da tradução de Joseph:

“Um tubo com 10 *dou* de capacidade, contém uma certa quantidade de arroz descascado. Juntou-se arroz não descascado até encher o tubo. Quando o grão foi descascado, o tubo ficou, no total, com 7 *dou* de arroz. Qual a quantidade de arroz existente inicialmente no tubo? Considere que 1 *dou* é igual a 10 *sheng* dos quais 6 são de arroz escolhido” (Joseph, 2011, p. 237).

As unidades de capacidade são hu, dou e sheng. Um dou corresponde a 10 sheng, um hu corresponde a 100 sheng. Um dou corresponde a 10 L. A solução sugerida refere que se inicialmente houvesse 2 dou de arroz no tubo, então verificava-se uma escassez de 2 sheng; mas se houvesse 3 dou, então verificava-se um excesso de 2 sheng. Multiplique em cruz 2 dou pelo excesso 2 sheng e depois 3 dou pela escassez de 2 sheng; somando os dois produtos dá 10 dou; divida este número (isto é, 10) pela soma do excesso com a diferença (isto é, 4) e obtém a resposta: 2 dou e 5 sheng.

Consideremos  $x$  a quantidade de arroz que o tubo tinha inicialmente, então a quantidade de grão acrescentado será  $10 - x$ . Se inicialmente houvesse 2 dou de arroz, isto é, se  $x = 2$ , o grão ocuparia 8 dou, dos quais 6 décimos seriam de arroz, ou seja, a quantidade de arroz entrado seria 4,8 dou e este valor somado ao valor supostamente existente, 2 dou, fazia 6,8 e não 7 dou; o que significa que faltava 2 sheng para a quantidade de arroz que sabemos que existe no final. Se houvesse 3 dou de arroz, isto é, se  $x = 3$ , o grão ocuparia 7 dou, dos quais 6 décimos seriam de arroz, ou seja, a quantidade de arroz entrado seria 4,2 dou e este valor somado ao valor supostamente existente, 3 dou, fazia 7,2 e não 7 dou; excedendo, portanto em 2 sheng a quantidade final de arroz (Estrada et al., 2000).

Aplicando a regra da dupla falsa posição ao problema posto, usando uma equação do tipo  $ax + b = 0$  e os palpites 2 dou e 3 dou, os dois sheng, usados como defeito e como excesso, serão os valores de  $b_1$  e  $b_2$ , um deles acompanhado de sinal menos para estabelecer a diferença de significado entre eles. Basta então resolver o sistema:

$$2a + b = -2 \text{ e } 3a + b = 2.$$

Eliminando  $b$  e  $a$ , respetivamente, temos que,

$$a(2 - 3) = -2 - 2; \quad b(3 - 2) = -2 \times 3 - 2 \times 2.$$

Dividindo membro a membro estas igualdades, vem

$$x = -\frac{b}{a} = \frac{-2 \times 3 - 2 \times 2}{-2 - 2} = \frac{-10}{-4} = 2\frac{1}{2} \text{ dou.}$$

Em termos atuais esta resolução parece desnecessária visto que este problema se resolve facilmente através da equação do 1.º grau a uma incógnita:

$$x + 0,6(10 - x) = 7,$$

em que  $x$  representa a quantidade de arroz que o tubo tinha inicialmente.

O primeiro matemático europeu a descrever o método da dupla falsa posição foi Fibonacci, matemático italiano do século XIII. Fibonacci chamou-lhe método do *elchataym*, o que revela a influência árabe, e que tem como significado dupla falsa posição.

Os chineses estavam muito interessados na resolução de sistemas de equações lineares e para tal usaram dois algoritmos básicos. O primeiro algoritmo usado designa-se por **método por excesso e por defeito** e o segundo algoritmo designa-se por **método de eliminação “Gaussiano”**.

Encontramos no capítulo 7 vários exemplos em que aplicamos o primeiro algoritmo para resolver problemas que traduzimos em sistemas de equações com duas incógnitas. A metodologia utilizada, tal como a dos babilónios, começa com um palpite de soluções possíveis e termina ajustando a suposição de forma a obter a solução correta o que mostra que os chineses compreendiam o conceito de relação linear (Katz, 2010). Consideremos o enunciado e a respetiva resolução do **problema 17 do capítulo 7**: “O preço de 1 acre de terra fértil é de 300 moedas de ouro; o preço de 7 acres de terra infértil é de 500. Alguém comprou um total de 100 acres; o preço foi de 10 000. Que quantidade de terra fértil e infértil foi comprada?” (Katz, 2010, p. 23).

O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa a quantidade de terra fértil e  $y$  representa a quantidade de terra infértil, pode traduzir-se pelo sistema de equações:

$$x + y = 100, \quad 300x + \frac{500}{7}y = 10000.$$

Se escrevermos a primeira equação em ordem a  $y$  e a substituímos na segunda equação, obtemos uma equação linear em  $x$ . A regra chinesa para a resolução deste problema é a seguinte: suponha que existem 20 acres de terra fértil e 80 de terra infértil. Então o excesso é  $1714\frac{2}{7}$ . Consideremos agora que existem 10 acres de terra fértil e 90 de terra infértil, o defeito é  $571\frac{3}{7}$ . O procedimento para obtermos a solução, tal como foi explicado pelo autor chinês, é multiplicar 20 por  $571\frac{3}{7}$  e 10 por  $1714\frac{2}{7}$ , adicionar os produtos e, finalmente, dividir esta soma pela de  $1714\frac{2}{7}$  com  $571\frac{3}{7}$ . A quantidade de terra fértil é  $12\frac{1}{2}$  acres e a quantidade de terra infértil é  $87\frac{1}{2}$  acres.

No entanto, o autor chinês não explica como chegou a este algoritmo para resolver o problema. O algoritmo utilizado aparece inicialmente no mundo islâmico e depois na Europa Ocidental cerca de 1000 anos mais tarde (Katz, 2010). O algoritmo indicado pelo autor chinês, corresponde à aplicação da regra da dupla falsa posição e pode ser expresso pela fórmula:

$$x = \frac{b_1x_2 + b_2x_1}{b_1 + b_2},$$

onde  $b_1$  é o excesso determinado pelo palpite  $x_1$  e  $b_2$  é o defeito determinado pelo palpite  $x_2$ . A diferença entre os sinais desta relação e os sinais da relação apresentada acima, advém do facto de, neste caso,  $b_2$  representar uma deficiência.

Uma conjectura de como este algoritmo foi descoberto começa por reparar que a alteração do valor correto, mas desconhecido  $x$  para o valor suposto 20 implica uma mudança no valor da “função”  $300x + \frac{500}{7}y$  de  $1714\frac{2}{7}$ , no entanto, uma mudança de 10 para  $x$  implica uma alteração no valor da função de  $571\frac{3}{7}$  (Katz, 2010). Uma vez que a linearidade implica que as razões de cada par de alterações são iguais, obtemos a proporção  $\frac{20-x}{1714\frac{2}{7}} = \frac{x-10}{571\frac{3}{7}}$ , ou, no caso geral,  $\frac{x_1-x}{b_1} = \frac{x-x_2}{b_2}$ . Donde surge a solução de  $x$ .

Os 20 problemas deste capítulo são resolvidos por uma ou outra modificação deste algoritmo de “excesso e defeito”, uma vez que, dois palpites diferentes podem originar um excesso. Em todo o caso, o autor deu uma explicação do cálculo apropriado que, na nossa fórmula, corresponde a uma mudança nos sinais (Katz, 2010).

O capítulo 8 contém 18 problemas que se reduzem à resolução de sistemas de equações lineares por meio de tabelas e processos que relembram as resoluções matriciais. Os problemas envolvem até seis equações em seis incógnitas e a única diferença com o método moderno é que os coeficientes são colocados em colunas em vez de linhas. A matriz é então reduzida à forma triangular, usando operações de coluna elementares como é feito hoje no método de eliminação gaussiana, e a resposta interpretada para o problema original. Uma característica notável deste método é que é tão fácil de usar com números negativos como positivos. A melhor maneira de explicá-lo é por meio de exemplos e começamos com o **problema 1 do capítulo 8**, transcrito da tradução de Katz:

“Existem três classes de cereais, das quais três molhos da primeira classe, dois da segunda e um da terceira perfazem 39 medidas. Dois da primeira, três da segunda e um da terceira perfazem 34 medidas. E um da primeira, dois da segunda e três da terceira perfazem 26 medidas. Quantas medidas de cereais estão contidas num molho de cada classe?” (Katz, 2010, p.25).

O problema pode ser traduzido em termos atuais pelo sistema:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

Para resolver este sistema o procedimento efetuado consiste em dispor os 3, 2 e 1 molhos das três classes e as 39 medidas dos seus cereais à direita. Os 2, 3 e 1 molhos das três classes e as 34 medidas dos seus cereais ao meio. Os 1, 2 e 3 molhos das três classes e as 26 medidas dos seus cereais à esquerda. Essa disposição é apresentada no diagrama:

|    |    |    |
|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  |
| 2  | 3  | 2  |
| 3  | 1  | 1  |
| 26 | 34 | 39 |

“Com a primeira classe na coluna da direita multiplicar a coluna do meio e suprimi-la diretamente”, isto é, multiplicar a coluna do meio por 3 e depois subtrair um múltiplo da coluna da direita (neste caso, 2) de modo que o primeiro número na coluna do meio seja 0. A mesma operação é, então, feita em relação à coluna da esquerda. Os resultados são apresentados como:

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 0  | 3  | 0  | 0  | 3  |
| 2  | 5  | 2  | 4  | 5  | 2  |
| 3  | 1  | 1  | 8  | 1  | 1  |
| 26 | 24 | 39 | 39 | 24 | 39 |

De seguida, com o resto da segunda classe na coluna do meio, suprimimo-la diretamente, isto é, multiplicar a coluna da esquerda por 5 e depois subtrair um múltiplo da coluna do meio (neste caso, 4) de modo que o segundo número na coluna da esquerda seja 0. O resultado é apresentado como:

|    |    |    |
|----|----|----|
| 0  | 0  | 3  |
| 0  | 5  | 2  |
| 36 | 1  | 1  |
| 99 | 24 | 39 |

Este diagrama é equivalente ao sistema triangular:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 5y + z &= 24 \\ 36z &= 99 \end{aligned}$$

O sistema é então resolvido pelo que é conhecido hoje como “substituição para trás”, começando com  $z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$ . No entanto, não existe uma explicação da forma como este algoritmo funciona ou como foi obtido. Podemos apenas supor que os chineses descobriram que, subtraindo múltiplos de equações a outras equações, se obtém um novo sistema com as mesmas soluções que o original (Katz, 2010).

No problema 3 do capítulo 8, as manipulações matriciais originaram uma quantidade negativa numa das posições. No entanto, este problema mostra que este facto não era uma limitação. Consideremos então o **problema 3 do capítulo 8**, transcrito de Katz:

“A produção de 2 molhos do melhor cereal, 3 molhos de cereal normal e 4 molhos do pior cereal não são suficientes para fazer uma medida inteira. Se adicionarmos ao cereal bom 1 molho do normal, ao normal 1 molho do pior e ao pior 1 molho do melhor, então cada produção é exatamente uma medida. Quantas medidas tem um molho de cada um dos três tipos de cereal?” (Katz, 2010, p.53).

Consideremos  $x$  o número de medidas de um molho do cereal bom,  $y$  o número de medidas de um molho de cereal normal e  $z$  o número de medidas de um molho de cereal do pior. Dado  $2x + y + 0z = 1$ ,  $3y + z = 1$  e  $x + 4z = 1$ . A informação contida no problema é organizada no diagrama que se assemelha a uma matriz:

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 |
| 0 | 3 | 1 |
| 4 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

A coluna da direita contém os coeficientes e a constante da primeira equação  $2x + y + 0z = 1$ , e de forma similar para as outras colunas. A coluna da esquerda é multiplicada por 2 e subtraída à coluna da direita, a coluna da esquerda é substituída pela nova coluna. O resultado é apresentado como:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

A coluna da esquerda é multiplicada por 3, e a coluna do meio é adicionada ao resultado:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 25 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{array}$$

A substituição é agora necessária para obter a solução completa do problema. Assim, um molho de cereal do pior rende  $\frac{4}{25}$ . Como 3 molhos de cereal normal rendem  $1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$  então 1 molho de cereal normal produz  $\frac{7}{25}$ . Como 1 molho de cereal normal produz  $\frac{7}{25}$  então 2 molhos de cereal bom rendem  $1 - \frac{7}{25} = \frac{18}{25}$  ou 1 molho de cereal bom rende  $\frac{9}{25}$ .

De facto, o autor forneceu as regras para a adição e subtração com quantidades negativas e positivas: "Para a subtração – com os mesmos sinais tirar um do outro; com sinais diferentes adicionar um ao outro; positivo retirado de nada dá negativo, negativo retirado de nada dá positivo. Para a adição – com diferentes sinais subtrair um do outro; com os mesmos sinais adicionar um ao outro; positivo e nada dá positivo; negativo e nada dá negativo" (Katz, 2010, p.26).

Consideremos agora o **problema 8 do capítulo 8**, transcrito da tradução de Katz:

"Foram vendidos 2 bois e 5 carneiros para comprar 13 porcos. Sobraram 1000 moedas. Venderam 3 bois e 3 porcos para comprar 9 carneiros. Eles têm exatamente a quantia exata. Venderam 6 carneiros e 8 porcos e compraram 5 bois. Faltam-lhes 600 moedas. Qual é o preço de um boi, de um carneiro e de um porco, respetivamente? " (Katz e Parshall, 2014, p. 87).

O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa o preço de um boi,  $y$  o preço de um carneiro e  $z$  o preço de um porco, pode traduzir-se pelo sistema de equações:

$$\begin{array}{l} 2x + 5y - 13z = 1000, \\ 3x - 9y + 3z = 0, \\ -5x + 6y + 8z = -600. \end{array}$$

A informação contida no problema é organizada no diagrama que se assemelha a uma matriz:

$$\begin{array}{ccc} -5 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & 5 \\ 8 & 3 & -13 \\ -600 & 0 & 1000 \end{array}$$

Como na eliminação de Gauss, a ideia é multiplicar as colunas por números apropriados e então somar ou subtrair tais colunas multiplicadas para chegar a um sistema "triangular" que fosse então fácil de resolver. Neste problema, começamos por multiplicar a coluna do meio por 2 e subtrair 3 vezes a coluna da direita para obter,

$$\begin{array}{ccc} -5 & 0 & 2 \\ 6 & -33 & 5 \\ 8 & 45 & -13 \\ -600 & -3000 & 1000 \end{array}$$

De seguida, multiplicando a coluna da esquerda por 2 e adicionando 5 vezes a coluna da direita obtemos,

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 37 & -33 & 5 \\ -49 & 45 & -13 \\ 3800 & -3000 & 1000 \end{array}$$

Finalmente, multiplicando a coluna da esquerda por 33 e adicionando 37 vezes a coluna do meio obtemos,

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -33 & 5 \\ 48 & 45 & -13 \\ 14400 & -3000 & 1000 \end{array}$$

A nova coluna da esquerda traduz-se na equação  $48z = 14400$ , donde  $z = 300$ . De seguida, usando a equação da nova coluna do meio obtemos  $-33y + 45 \times 300 = -3000$ , donde  $y = 500$ . Finalmente, substituindo os valores de  $y$  e  $z$  na nova coluna à direita obtemos  $2x + 5 \times 500 - 13 \times 300 = 1000$ , donde  $x = 1200$ . Assim o preço de um porco é 300 moedas, o preço de um carneiro é 500 moedas e o preço de um boi é 1200 moedas. Embora, como de costume, o autor não explicasse o raciocínio por trás do seu algoritmo, Liu Hui justificou no seu comentário: "Se a razão numa coluna é subtraída da de outra, isso não afeta as proporções das remanescentes". Por outras palavras, Liu invocou essencialmente o "axioma" que refere que quando os iguais são subtraídos de iguais, permanecem iguais. O mesmo é obviamente verdadeiro para a adição.

Consideremos agora o **problema 13 do capítulo 8** como exemplo de dificuldade diferente, que se traduz num sistema de cinco equações a seis incógnitas, portanto um sistema de solução indeterminada. Neste problema pretende-se determinar o comprimento de cinco cordas, cada uma delas pertencente a uma família e a profundidade de um poço comum a essas cinco famílias.

Suponhamos que cinco famílias compartilham um poço. Duas das cordas de A estão aquém da profundidade do poço por 1 das cordas de B; 3 das cordas de B estão aquém da profundidade do poço por 1 das cordas de C; 4 das cordas de C estão aquém da profundidade do poço por 1 das cordas de D; 5 das cordas de D estão aquém da profundidade do poço por 1 das cordas de E; 6 das cordas de E estão aquém da profundidade do poço por 1 das cordas de A. Qual é a profundidade do poço e o comprimento de cada corda? (Martzloff, 2006, p. 257)

Representando o comprimento das cordas das famílias por A, B, C, D, E e a profundidade do poço por W, o sistema de equações que traduz o problema é:

$$2A + B = W, \quad 3B + C = W, \quad 4C + D = W, \quad 5D + E = W, \quad 6E + A = W$$

e a solução geral do problema é

$$W = 721k, \quad A = 265k, \quad B = 191k, \quad C = 148k, \quad D = 129k, \quad E = 76k.$$

O comprimento do poço é 7 zhang 2 chi 1 cun, o comprimento da corda da família A é 2 zhang 6 chi 5 cun, o comprimento da corda da família B é 1 zhang 9 chi 1 cun, o comprimento da corda da

família C é 1 zhang 4 chi 8 cun, o comprimento da corda da família D é 1 zhang 2 chi 9 cun e o comprimento da corda da família E é 7 chi 6 cun.

O capítulo 9 intitulado “Triângulos retângulos” (Kou ku) apresenta 24 problemas sobre as propriedades dos triângulos retângulos que exigem conhecimento e aplicação do teorema de Pitágoras, identificado como o teorema de *Kou Ku* ou teorema dos «ângulos retos». Os problemas apresentados nem sempre incidem sobre a aplicação direta do teorema de Pitágoras, também referenciado como a regra Gou gu. Na figura 3.2 temos um triângulo retângulo em C, em que  $a$  é designado por *gou* (cateto menor),  $b$  é designado por *gu* (cateto maior) e  $c$  é designado por *xian* (hipotenusa). Dois dos valores entre  $a, b, c, a + b, b + c, a + c, b - a, c - a, c - b$  são dados, sendo solicitado que sejam encontrados os valores desconhecidos  $a, b$  ou  $c$ .

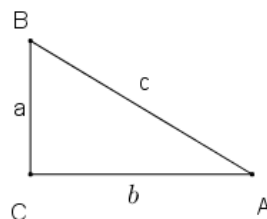


Figura 3.2 – Triângulo retângulo em C.

Consideremos o **problema 4 do capítulo 9**:

“É dado um tronco circular de 2 chi e 5 cun de diâmetro. Deve ser transformado numa prancha retangular de espessura igual a 7 cun. Qual é a largura da prancha?” (Shen, 1999, p. 466).

No problema 4 são dados  $a$  e  $c$  e pretendemos encontrar  $b$ . Sabendo que 1 chi é igual a 10 cun temos que  $c = 25$  cun e  $a = 7$  cun. Pelo teorema de Pitágoras (Fig. 3.3), vem que  $b^2 = 25^2 - 7^2$ . Onde,  $b^2 = 576$  e assim,  $b = 24$  cun = 2 chi 4 cun. A largura da prancha é 2 chi 4 cun.

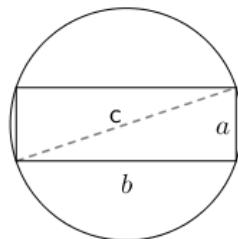


Figura 3.3 – Problema 4 do capítulo 9 dos *Nove Capítulos da Arte Matemática*.

Consideremos o **problema 6 do capítulo 9**:

“Dado um bambu no centro de uma lagoa de 1 zhang quadrado, sabemos que 1 chi do seu comprimento está acima da água. Quando o bambu é curvado para a margem, alcança-a com a sua extremidade. Qual é a profundidade da lagoa e qual é o comprimento do bambu?” (Shen, 1999, pp. 468-469).

No problema 6 são dados  $a$  e  $c - b$  e pretendemos encontrar  $b$  e  $c$ . Consideremos  $a$  metade do lado da lagoa,  $b$  a profundidade da lagoa e  $c$  o comprimento do bambu, como ilustra a figura 3.4. Pelo teorema Gou gu  $c^2 = a^2 + b^2$  ou  $a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$ .

Donde,

$$\begin{aligned} a^2 - (c - b)^2 &= (c - b)(c + b) - (c - b)^2, \\ a^2 - (c - b)^2 &= (c - b)(c + b - c + b), \\ a^2 - (c - b)^2 &= (c - b)2b, \end{aligned}$$

$$b = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)}$$

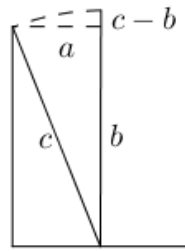


Figura 3.4 – Problema 6 do capítulo 9 dos *Nove Capítulos da Arte Matemática*.

A profundidade da lagoa é dada por  $b = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)}$  e o comprimento do bambu é dado por  $c = b + (c - b)$ . Donde,  $b = \frac{5^2 - 1^2}{2 \times 1} = \frac{25 - 1}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ chi}$  e  $c = 12 + 1 = 13 \text{ chi}$ . Atualmente, podemos resolver o problema usando o teorema de Pitágoras. Se tomarmos  $a = 5 \text{ chi}$  e  $c - b = 1 \text{ chi}$ , temos que  $c^2 = 5^2 + (c - 1)^2$ . Donde,  $c = \frac{26}{2} = 13$ . Não é claro, no entanto, se o autor chinês encontrou a solução algebricamente como a que foi acima exposta ou pelo método geométrico, mas é certo que o autor era fluente no uso do teorema de Pitágoras.

Consideremos o **problema 7 do capítulo 9**:

“Há uma corda pendurada do cimo de uma árvore com 3 *chi* dela estendida no chão. Quando está firmemente esticada, ela atinge um ponto 8 *chi* da base da árvore. Quanto mede a corda?” (Joseph, 2011, p. 253).

No problema 7 é dado  $b$  e  $c - a$  e pretendemos determinar  $c$ . Com a notação moderna podemos tentar reconstruir a via algébrica subjacente à solução referida em cima. Seja,  $c$  o comprimento da corda,  $d = c - a$  o comprimento da corda no solo e  $b$  a distância da ponta da corda estendida à base da árvore. A relação  $c^2 = (c - d)^2 + b^2$  pode ser deduzida da figura 3.5. Então,  $0 = -2cd + d^2 + b^2$ . Donde, a expressão para resolver este problema é  $c = \frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{d} + d \right)$ .

O comprimento da corda é  $\frac{1}{2} \left( \frac{64}{3} + 3 \right) = \frac{73}{6} = 12 \frac{1}{6} \text{ chi}$ . Esta é uma solução interessante, mostrando um grau considerável de sofisticação.

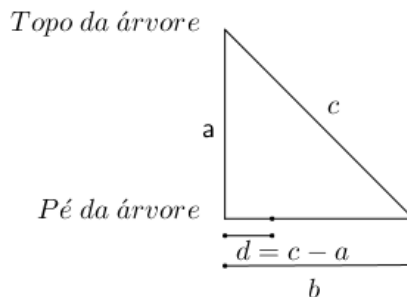


Figura 3.5 – Problema 7 do capítulo 9 dos *Nove Capítulos da Arte Matemática*.

Consideremos o **problema 8 do capítulo 9**:

“A altura de uma parede é 10 *chi*. Um poste de madeira (árvore) está encostado à parede de modo que a sua extremidade superior coincide com o topo da parede. Se a parte inferior do poste se afastar um *chi* da parede, o poste cairá no chão. Qual é o comprimento do poste?” (Joseph, 2011, p. 254-255).

O comprimento do poste de madeira é  $c = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{d} + d \right) = 50 \frac{1}{2} \text{ chi}$ , onde  $a = 10 \text{ chi}$  e  $d = 1 \text{ chi}$ . Atualmente podemos resolver o problema usando o teorema de Pitágoras. A partir da figura 3.6 temos que  $10^2 + b^2 = c^2$ . Donde,  $10^2 + (c - 1)^2 = c^2$ . Assim,  $c = \frac{101}{2} = 50 \frac{1}{2} \text{ chi}$ .

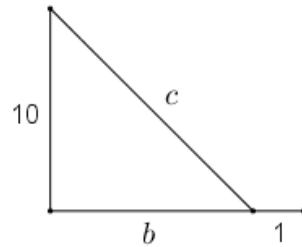


Figura 3.6 – Problema 8 do capítulo 9 dos *Nove Capítulos da Arte Matemática*.

Consideremos agora o **problema 11 do capítulo 9**:

“A altura de uma porta é 6 chi 8 cun maior do que a sua largura. A diagonal é 10 chi. Quais são as dimensões da porta? [1 chi = 10 cun.]” (Joseph, 2011, p. 255).

Neste problema é dado  $b - a$  e  $c$  e pretendemos determinar  $a$  e  $b$ . Do quadrado de 10 chi, subtrair o dobro do quadrado de metade da diferença dada (6 chi 8 cun). Reduzir para metade este resultado e encontrar a sua raiz quadrada. A Largura da porta é igual à diferença desta raiz e metade de 6 chi 8 cun. A altura da porta é igual à soma da raiz e metade da 6 chi 8 cun. Portanto, a largura é 2 chi 8 cun e a altura é 9 chi 6 cun.

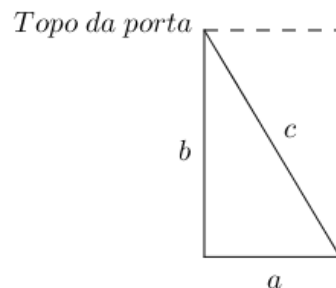


Figura 3.7 – Problema 11 do capítulo 9 dos *Nove Capítulos da Arte Matemática*.

A base algébrica desta solução é derivada da equação  $(a + b)^2 = 2c^2 - (b - a)^2$ , onde  $a$  é a largura da porta,  $b$  a altura da porta, e  $c$  a diagonal (Fig. 3.7). Visto que,

$$(a + b)^2 + (b - a)^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2c^2.$$

Temos que,  $a + b = \sqrt{2c^2 - (b - a)^2}$ .

$$\text{Assim, } \frac{a+b}{2} = \frac{\sqrt{2c^2 - (b-a)^2}}{2} = \sqrt{\frac{2c^2}{4} - \frac{(b-a)^2}{4}} = \sqrt{\frac{c^2}{2} - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}.$$

$$\text{A largura da porta é } a = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}} - \frac{b-a}{2}.$$

$$\text{A altura da porta é } b = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}} + \frac{b-a}{2}.$$

Sabendo que um chi corresponde a 10 cun, a partir dos valores numéricos dados no problema é facilmente estabelecido que  $b - a = 6 \text{ chi } 8 \text{ cun} = 68 \text{ cun}$  e  $c = 10 \text{ chi} = 100 \text{ cun}$ . Substituindo esses valores nas expressões acima obtemos que:

$$\text{a largura da porta é } a = \sqrt{\frac{100^2 - 2\left(\frac{68}{2}\right)^2}{2}} - \frac{68}{2} = 62 - 34 = 28 \text{ cun} = 2 \text{ chi } 8 \text{ cun},$$

$$\text{a altura da porta é } b = \sqrt{\frac{100^2 - 2\left(\frac{68}{2}\right)^2}{2}} + \frac{68}{2} = 62 + 34 = 96 \text{ cun} = 9 \text{ chi } 6 \text{ cun}.$$

O problema, na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa a largura da porta e  $y$  representa a altura da porta, traduz-se pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y - x = 68 \\ x^2 + y^2 = 100^2 \end{cases}$$

Donde,

$$x^2 + (x + 68)^2 = 10000$$

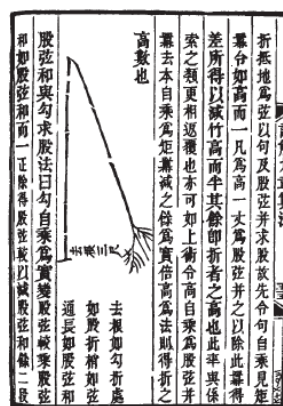
$$x^2 + 68x - 2688 = 0.$$

A largura é 2 chi e 8 cun e a altura da porta é 9 chi e 6 cun.

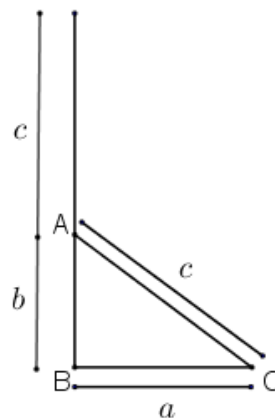
Consideremos agora o **problema 13 do capítulo 9**:

“Um bambu de 10 *chi* de altura está quebrado tocando o solo a 3 *chi* do seu pé. A que altura quebrou?” (Estrada et al., 2000, p. 142).

Este é um problema famoso na história da Matemática. A Figura 3.8 (a) mostra o problema ilustrado em Xiang Jie Jiu Zhang Suan Zuan Lei de Yang Hui (1261). Este problema continuou a aparecer em obras de matemáticos indianos, de Mahavira no século IX, a Bhaskaracharya no século XII e, finalmente, em obras europeias, provavelmente traçando uma migração para o oeste da matemática chinesa através da Índia e do mundo islâmico. Neste problema é dado  $a$  e  $b + c$  e pretendemos determinar  $b$ . É de referir que uma adaptação deste problema saiu na Prova de Aferição de Matemática, do 3.º Ciclo, em 2002.



(a)



(b)

Figura 3.8 – Ilustração do problema o "bambu partido" problema: (a) como ilustrado no Xiang Jie Jiu Zhang Suan Fa Zuan Lei (Needham, 1959, página 28), e (b) a tradução moderna.

Tome o quadrado da distância do pé do bambu até ao ponto em que o seu topo toca o chão e divida essa quantidade pelo comprimento do bambu. Subtraia do resultado o comprimento do bambu, e

reduzimos pela metade a diferença resultante. Assim, obtemos a altura a que o bambu se partiu. Estas instruções podem ser expressas em notação moderna, com referência à figura 3.8 (b), como se segue. Seja  $b$  a distância do pé do bambu ao ponto em que ele partiu,  $c$  a distância do ponto em que o bambu se partiu até ao extremo superior e  $a$  a distância do pé do bambu até ao ponto em que a extremidade do bambu toca o solo. Consideremos  $d = b + c$  então  $c = d - b$ , donde, pelo teorema de Pitágoras, temos que,  $a^2 + b^2 = (d - b)^2$ . Donde,  $b = \frac{d^2 - a^2}{2d} = \frac{1}{2} \left( d - \frac{a^2}{d} \right) = \frac{1}{2} \left( b + c - \frac{a^2}{b+c} \right)$ . A partir dos valores numéricos dados no problema sabemos que  $b + c = 10 \text{ chi}$  e  $a = 3 \text{ chi}$ . Substituindo esses valores na expressão acima obtemos  $b = \frac{1}{2} \left( 10 - \frac{3^2}{10} \right) = \frac{91}{20} \text{ chi} = 4 \frac{11}{20} \text{ chi}$ .

Consideremos o **problema 20 do capítulo 9**:

“Dada uma cidade quadrada de lado desconhecido, com portões instalados no centro de cada lado, 20 bu a partir do portão norte há uma árvore, que fica visível quando se anda 14 bu a partir do portão sul e 1775 bu na direção oeste. Quais são as dimensões da cidade?” (Katz e Parshall, 2014, p. 91).

O autor chinês toma a distância até ao portão norte e multiplica-a pela distância na direção oeste [20 × 1775 = 35 500]. Considere o dobro do produto como o shi [71000] e a soma da distância entre os portões norte e sul como o coeficiente linear [20 + 14 = 34]. Por outras palavras, o problema resultou na equação quadrática  $x^2 + 34x = 71000$ , onde  $x$  é o lado desconhecido da cidade quadrada, 71000 é o termo constante [shi], e 34 o coeficiente linear (congfa). Extrai a raiz para obter o lado da cidade. A resposta foi simplesmente dada como 250 bu. No entanto, não é apresentado os passos para resolver esta equação. Os chineses conheciam um método para resolver uma equação quadrática, mas que não estava explicitamente escrito neste momento. Supõe-se que o método utilizado para resolver esta equação quadrática seja semelhante ao algoritmo que utilizavam para determinar a raiz quadrada. Este algoritmo tem origem geométrica e consiste num procedimento recursivo, onde cada etapa dá uma melhor aproximação para a resposta correta.

Uma estratégia para resolver o problema é começar por desenhar uma figura que traduza o problema (Fig. 3.9). Utilizando a notação atual e tendo por base a figura abaixo apresentada, vejamos como chegar à equação que traduz este problema. Os triângulos [ABC] e [ADE] são semelhantes, logo  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$ . Donde,  $\frac{20}{x} = \frac{34+x}{1775}$ . Resolvendo, obtemos  $20 \times 1775 = \frac{x}{2} \times (34 + x)$ . Donde,

$$x^2 + 34x - 71000 = 0.$$

O resultado é 250 bu.

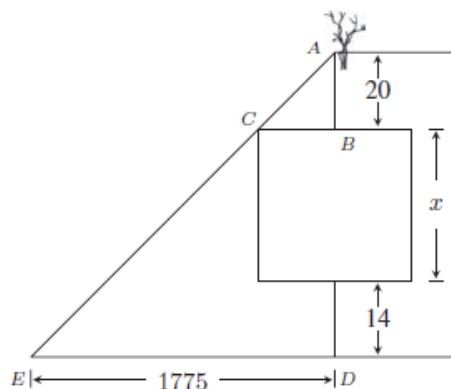


Figura 3.9 – Problema 20 do capítulo 9 dos *Nove Capítulos da Arte Matemática*. Extraído de Katz, 2014, p. 91.

### 3.2. A Matemática na China Medieval

Problemas de calendários levaram os chineses a outra questão matemática, a da resolução de sistemas de equações lineares indeterminados. No Zhang Quijian suanjing (Manual de Matemática de Zhang Quijian) escrito por volta de 475 aparece, pela primeira vez, um dos mais famosos problemas em equações indeterminadas - **o problema das “cem aves”**. Este problema é famoso porque se encontra em textos matemáticos da Índia, no mundo Islâmico e na Europa, apesar de disfarçado. O problema original de Zhang é o seguinte:

“Um galo vale 5 moedas, uma galinha 3 moedas e 3 pintos 1 moeda. Com 100 moedas compramos 100 destas aves. Quantos galos, galinhas e pintos se compraram?” (Katz, 2010, p. 246).

Consideremos que, em notação atual,  $x$  representa o número de galos,  $y$  representa o número de galinhas e  $z$  representa o número de pintos. Este problema pode ser traduzido por um sistema de duas equações com três incógnitas:

$$\begin{aligned}5x + 3y + \frac{1}{3}z &= 100 \\x + y + z &= 100.\end{aligned}$$

Zhang apresenta três soluções do problema: 4 galos, 18 galinhas e 78 pintos; 8 galos, 11 galinhas e 81 pintos; 12 galos, 4 galinhas e 84 pintos. No entanto, apenas dá algumas dicas sobre o método utilizado, nomeadamente, “aumente-se de cada vez o número de galos de 4, diminua-se de cada vez o número de galinhas de 7, e aumente-se de cada vez o número de pintos de 3”. Notamos facilmente que alterando os valores desta forma, preserva-se tanto o custo como o número total de aves. É possível resolver este problema por uma modificação do método de “eliminação de Gauss”, conhecida do Jiuzhang suanshu e obter-se a solução geral:  $x = -100 + 4t$ ,  $y = 200 - 7t$ ,  $z = 3t$ , da qual se deriva a descrição de Zhang. As suas respostas são as únicas em que os três valores são positivos. Não sabemos, no entanto, se Zhang usou este método ou algum outro. Nos séculos seguintes alguns autores chineses comentaram o problema das “cem aves”, mas nenhum conseguiu apresentar uma explicação do método ou uma forma de o generalizar a outros problemas (Katz, 2010).

O século XIII é considerado como o ponto mais alto no desenvolvimento da Matemática tradicional chinesa. Um dos matemáticos mais importante desta época foi **Qin Jiushao** (c. 1202–1261), que publicou, em 1247, um método geral para resolver sistemas de congruências lineares no seu famoso *Shushu jiuzhang (Tratado de Matemática em Nove Secções)*. Além disso, esta obra contém muitos problemas de resolução de equações polinomiais.

Os métodos que aparecem nesta obra podem ser considerados uma generalização dos métodos de resolução de equações quadráticas puras ( $x^2 = a$ ) pormenorizadas no velho *Jiuzhang suanshu*. As equações cúbicas aparecem no princípio do século sétimo na obra de Wang Xiaotong. No entanto, não é apresentado nenhum método de resolução a não ser uma enigmática referência a uma solução segundo a regra da extração da raiz cúbica. Em meados do século XI, Jian Xian, numa obra que se perdeu, generalizou os procedimentos para encontrar as raízes quadrada e cúbica do método de Juzhang suanshu, para raízes mais elevadas, usando uma matriz de números conhecida atualmente com o nome de triângulo de Pascal. Além disso, também alargou e melhorou o método para o adaptar à resolução de equações polinomiais de qualquer grau.

Os métodos de Jia Xian foram discutidos na obra de Yang Hui em 1261. O primeiro relato pormenorizado do método de Jia para resolver equações aparece no *Shushu jiuzhang* de Qin Jiushao. Um dos exemplos apresentados na obra que ilustra este método é a equação

$$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0,$$

que resulta do cálculo da área de um campo angulado. Para resolvermos esta equação começamos por determinar o número de dígitos decimais da resposta e adivinhar qual o primeiro. Neste caso, por

experiência ou por tentativa e erro, facilmente verificamos que a resposta deveria ser um número de três dígitos começando com um 8. A abordagem de Qin é fazer  $x = 800 + y$ , substituir este valor na equação e derivar uma nova equação em  $y$  cuja solução seja um número com dois dígitos. Em seguida, podemos adivinhar o primeiro dígito de  $y$  e repetir o processo. Os chineses podiam repetir este algoritmo tantas vezes quanto as que considerassem necessárias para alcançar o nível de rigor previamente estabelecido. É importante referir que os chineses não usaram as técnicas da álgebra moderna, de substituírem  $x = 800 + y$  na equação original, como em 1819 foi efetuado por William Horner no seu método. O problema era exposto numa mesa de cálculo com cada fila destinada a uma potência particular da incógnita. Por razões de espaço, os coeficientes serão escritos horizontalmente. Assim, para este problema, a configuração de partida é

$$-1 \quad 0 \quad 763200 \quad 0 \quad -40642560000.$$

Dado que a aproximação inicial da raiz era 800, Qin apresentou o que agora é chamado de divisão repetida (sintética) do polinómio original por  $x - 800$  ( $= y$ ). A descrição de Qin do processo da mesa de cálculo diz que números se devem multiplicar e somar (ou subtrair) para dar o arranjo da terceira linha. Por exemplo, o -1 é multiplicado por 800 e o resultado adicionado ao 0. O resultado (-800) é, então, multiplicado por 800, e o produto subtraído dos 763200. É importante referir que Qin só tem números na mesa de cálculo. Podemos combinar os seus diagramas (um para cada etapa) num único diagrama simples.

|     |    |       |          |            |              |
|-----|----|-------|----------|------------|--------------|
| 800 | -1 | 0     | 763200   | 0          | -40642560000 |
|     |    | -800  | -640000  | 98560000   | 78848000000  |
| 800 | -1 | -800  | 123200   | 98560000   | 38205440000  |
|     |    | -800  | -1280000 | -925440000 |              |
| 800 | -1 | -1600 | -1156800 | -826880000 |              |
|     |    | -800  | 1920000  |            |              |
| 800 | -1 | -2400 | -3076800 |            |              |
|     |    | -800  |          |            |              |
|     | -1 | -3200 |          |            |              |
|     | -1 |       |          |            |              |
| 40  | -1 | -3200 | -3076800 | -826880000 | 38205440000  |
|     |    | -40   | -129600  | -128256000 | -38205440000 |
|     | -1 | -3240 | -3206400 | -955136000 | 0            |

A terceira linha a contar do fundo contém os coeficientes da equação de Qin para  $y$ , conjuntamente com o seu palpite, 4, como primeiro dígito da resposta com dois dígitos (isto resulta de dividir 38205440000 por 826880000). A equação para  $y$  é exatamente divisível por  $y - 40$ . A solução da equação  $-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$  é  $x = 840$ .

Em linguagem simbólica atual temos que:

$$\begin{aligned}
 0 &= -x^4 + 763200x^2 - 40642560000, \\
 0 &= (x - 800)(-x^3 - 800x^2 + 123200x + 98560000) + 38205440000, \\
 0 &= y((x - 800)(-x^2 - 1600x - 1156800) - 826880000) + 38205440000, \\
 0 &= y\{y((x - 800)(-x - 2400) - 3076800) - 826880000\} + 38205440000, \\
 0 &= y\{y\{y(-y - 3200) - 3076800\} - 826880000\} + 38205440000.
 \end{aligned}$$

Donde,  $-y^4 - 3200y^3 - 3076800y^2 - 826880000y + 38205440000 = 0$ .

Este algoritmo foi redescoberto na Europa mais de cinco séculos depois de Qin, merece alguns comentários adicionais. Primeiro, os textos apenas indicam brevemente como se achavam os supostos dígitos da raiz. Segundo, não há menção nos textos de múltiplas raízes. A equação de Qin, acima, de quarto grau, tem uma outra raiz positiva, 240, bem como duas raízes negativas. No entanto, o problema geométrico de onde se derivou a equação tinha apenas uma solução, 840, e Qin não lidava com as equações em abstrato. Terceiro, as operações com números negativos foram realizadas tão facilmente quanto as que apresentavam números positivos. Por outro lado, as raízes negativas não aparecem, porque os problemas a partir dos quais as equações surgem apresentam soluções positivas. Quarto, como sabiam lidar com números negativos, os chineses representavam geralmente as equações numa forma equivalente a  $f(x) = 0$ . Isto representa uma diferença básica de abordagem em comparação com o antigo método babilónico ou o islâmico medieval. Finalmente, parece que o método chinês de resolver equações quadráticas é completamente diferente do dos babilónios. Os últimos desenvolveram uma fórmula que só poderia ser aplicada a tais equações. Os chineses desenvolveram um algoritmo numérico que generalizaram para equações de qualquer grau (Katz, 2010).

#### 4. Pensamento Algébrico na Índia Medieval

Pouco se sabe sobre o desenvolvimento da matemática na antiga civilização oriental indiana, em virtude da falta de registos históricos autênticos. Esta civilização remonta ao terceiro milénio antes de cristo, como testemunham descobertas arqueológicas feitas na antiga cidade Mohenjo-daro, localizada a nordeste da cidade de Karachi no Paquistão (Eves, 2004).

Os primeiros registos de matemática na Índia encontram-se em vários *Sulbasutras*, escritos provavelmente entre 800 a.C. e 500 a.C. e que se transmitiram oralmente durante muito tempo. A palavra *Sulbasutra* deriva das palavras *sulba-sutra* que significa “regras da corda”. Eram escritos religiosos de interesse da história da matemática, pelo facto de abarcarem regras geométricas para construção de altares, o que revela que eles tinham conhecimento dos ternos pitagóricos.

Só a partir dos finais do século V da nossa era é que começaram a surgir matemáticos indianos cujos nomes ficaram na história do desenvolvimento da matemática. Entre eles destacam-se, no período medieval, o de Aryabhata I, Brahmagupta e Bhaskara II.

Aryabhata I foi o primeiro matemático indiano a incluir numa obra uma secção de matemática. A sua obra intitulada *Aryabhatiya* foi escrita em 499 d. C., em sânscrito, na forma de verso e é constituída por cento e vinte e três estrofes. Para os historiadores matemáticos trata-se de um trabalho astronómico muito completo baseado na trigonometria grega. Os trabalhos indianos, desta época, em especial os de índole científica, eram muito sucintos, apresentavam um pequeno número de resultados e eram expostos de forma tão compacta que se tornavam de difícil compreensão. *Aryabhatiya* era um livro pequeno, no qual estavam descritas as regras de cálculo necessárias em astronomia e no qual foram introduzidos alguns conceitos matemáticos (Estrada et al., 2000).

Brahmagupta foi o mais eminente matemático indiano do século VII e viveu e trabalhou no centro astronómico de Ujjain, no interior da Índia. Em 628 d. C. escreveu *Brahmasphutasiddhanta* (que significa sistema astronómico revisto de acordo com Brahma) um trabalho de astronomia em 21 capítulos, dos quais o 12.º e o 18.º se ocupam de matemática. Está escrito em verso sânscrito e contém descrições mais completas dos métodos utilizados, do que o trabalho de *Aryabhatiya*. Entre as contribuições matemáticas mais importantes de Brahmagupta destaca-se a determinação das soluções inteiras de sistemas de equações lineares do tipo  $ax + by = c$ , com  $a, b, c$  inteiros e o estudo de equações do tipo  $y^2 = ax^2 + 1$ , onde  $a$  é inteiro (Estrada et al., 2000).

Bhaskara II (1114-1185), conhecido como o sábio, floresceu cinco séculos depois de Brahmagupta. Matemático, professor e astrónomo, preencheu lacunas deixada pelos seus antecessores. A sua obra astronómica, *Siddhanta Siromani*, foi escrita em 1150, está organizada em quatro partes: o *Lilavati*, também referido como *Lilivati*, sobre aritmética; *Bijaganita*, dedicado à álgebra; *Goladhyaya* sobre a esfera, ou seja, o globo celeste e *Grahaganita* sobre o movimento planetário.

O *Lilavati* contém 278 versos e o seu título apresenta uma história curiosa. Conta a lenda que Bhaskara II tinha feito uma previsão astrológica do dia e da hora em que a sua filha se casaria. Quando, no dia indicado, a jovem esperava ansiosamente a hora do casamento debruçada sobre um relógio de água, uma pérola rolou-lhe do cabelo impedindo que a água se deslocasse. Sem que alguém tivesse reparado nesse facto, a hora do casamento passou e a filha ficou solteira para sempre. Para a consolar, o pai escreveu o *Lilavati*, livro que tem o seu nome, dizendo o seguinte: “escreverei um livro com o teu nome, que permanecerá através dos tempos; porque um bom nome é uma segunda vida e um alicerce para a existência eterna” (Smith, 1958, p. 277).

O conteúdo desta obra é bastante diversificado. Inclui operações com números irracionais, equações lineares e quadráticas (determinadas e indeterminadas), progressões aritméticas e geométricas, ternos pitagóricos e vários problemas curiosos.

#### 4.1. Equações Lineares

Os indianos resolviam muito dos problemas aritméticos pelo **método da falsa posição**. Para ilustrar este método consideremos a estrofe 53:

“Um certo número é multiplicado por 5, e  $\frac{1}{3}$  do seu produto é subtraído do resultado. Este é dividido por 10 e é adicionado metade, um terço e um quarto do número original. Se o resultado é 68, determina o número original” (Bhaskaracarya, 2001, p. 55).

Suponhamos que o número original é 3. Então,  $3 \times 5 = 15$ ,  $15 - 15 \times \frac{1}{3} = 10$ ,  $10 \div 10 = 1$  e  $1 + 3 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{12+18+12+9}{12} = \frac{51}{12} = \frac{17}{4}$ . Visto que o resultado final é 68, o número desconhecido é  $\frac{68 \times 3}{\frac{17}{4}} = \frac{68}{17} \times \frac{12}{1} = 48$ .

Seja  $x$  o número que pretendemos determinar. Então,

$$5x \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x = 68.$$

Donde, o número que pretendemos determinar é 68.

Consideremos agora a estrofe 56:

“Durante os jogos amorosos de um casal o colar do pescoço da esposa partiu-se. Um terço das pérolas caíram no chão, um quinto foram para debaixo da cama. A esposa apanhou um sexto e o seu amado um décimo. Seis pérolas ficaram no fio original. Descubra o número de pérolas no colar” (Bhaskaracarya, 2001, p. 58).

O problema na linguagem simbólica atual, em que  $x$  representa o número de pérolas do colar, traduz-se pela seguinte equação:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x + 6 = x$$

Donde, o número de pérolas é 30.

Suponhamos que o número total de pérolas é 1. O número final é 6.

As pérolas restantes são  $1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}\right) = 1 - \left(\frac{20+12+10+6}{60}\right) = 1 - \frac{48}{60} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ .

O número total de pérolas é  $\frac{6 \times 1}{\frac{1}{5}} = 30$ .

Mahavira matemático indiano do século IX na sua obra mais importante *Ganita-Sâra-Sangraha* (*Compêndio do Cálculo Essencial*) apresenta num extenso enunciado um problema semelhante a este que revela um grande cariz sexual, o que era comum em muitos problemas propostos pelos indianos. A partir destes exemplos podemos ver que os problemas amorosos não eram tabus.

Este problema ilustra a prática de revestir problemas aritméticos de traços poéticos. Isso ocorria porque os textos escolares eram escritos em versos e porque os problemas eram frequentemente usados para entretenimento social.

## 4.2. Equações Quadráticas

Os matemáticos indianos do período medieval resolviam também equações quadráticas. Brahmagupta apresenta uma fórmula para resolver as equações quadráticas idêntica à que usamos hoje:

“Tome-se o número absoluto no membro oposto àquele onde o quadrado e a incógnita estão. Ao número absoluto, multiplicado por quatro vezes o [coeficiente do] quadrado, adicionar o quadrado [do coeficiente] da incógnita; a raiz quadrada do mesmo, menos [o coeficiente da] incógnita, sendo dividido por duas vezes o [coeficiente do] quadrado é o [valor da] incógnita” (Katz, 2010, p. 282).

Brahmagupta apresenta como exemplo a solução da equação  $x^2 - 10x = -9$ .

“Agora, ao número absoluto [-9] multiplicado por quatro vezes o [coeficiente do] quadrado [-36] e adicionado ao quadrado [100] do [coeficiente da] incógnita, (sendo 64), extraíndo a raiz quadrada, [8] diminuído do [coeficiente] da incógnita [-10], o resto 18, dividido por duas vezes o [coeficiente do] quadrado [2], dá o valor da incógnita, 9” (Katz, 2010, p. 283).

As suas palavras podem ser traduzidas pela equação  $x = \frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$ . É, no entanto, de referir que a equação dada tem uma segunda solução positiva que corresponde a tomar-se o simétrico da raiz quadrada menos o coeficiente da incógnita  $x$ .

A técnica de Bhaskara II para resolver equações quadráticas consiste em completar o quadrado. Adiciona um número adequado a ambos os membros de  $ax^2 + bx = c$  de forma a que o primeiro membro fique um quadrado perfeito  $(rx - s)^2 = d$ . De seguida resolve a equação  $rx - s = \sqrt{d}$  em  $x$ . Se  $\sqrt{d} < s$  então existe dois valores para  $x$ , nomeadamente,  $\frac{s+\sqrt{d}}{r}$  e  $\frac{s-\sqrt{d}}{r}$ .

Para ilustrar este método consideremos a estrofe 74:

“Ó sábio, encontra o número quadrado  $x^2$  tal que  $x^2 + 9x = 1240$ ” (Bhaskaracarya, 2001, p. 73).

Temos que resolver a equação  $x^2 + 9x = 1240$ . Então,

$$\begin{aligned}x^2 + 9x + \frac{81}{4} &= 1240 + \frac{81}{4} = \frac{5041}{4}, \\ \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(\frac{71}{2}\right)^2, \\ x &= \frac{71}{2} - \frac{9}{2} = 31.\end{aligned}$$

Assim,  $x^2 = 961$ .

Como exemplo de uma equação que tem duas raízes positivas, Bhaskara II propõe o seguinte problema:

“A oitava parte de um bando de macacos, ao quadrado estava saltando num vale e divertindo-se. Doze dos restantes macacos viam-se na colina divertindo-se uns com os outros. Quantos macacos, no total, ali estavam” (Katz, 2010, p.283).

Este problema é traduzido pela seguinte equação  $\left(\frac{1}{8}x\right)^2 + 12 = x$ . Bhaskara II multiplica ambos os membros por 64 e obtém a equação  $x^2 - 64x = -768$ . Adicionando  $32^2$  a cada membro, obtém  $x^2 - 64x + 1024 = 256$ . Tomando a raiz quadrada obtém  $x - 32 = 16$ . Como  $32 > \sqrt{256}$  conclui que se obtém um valor duplo para a incógnita, 48 e 16.

Consideremos agora um outro exemplo:

“A quinta parte do bando menos três, ao quadrado, foi para uma cave e um macaco estava à vista empoleirado num ramo. Diga quantos eram?” (Katz, 2010, p.283).

Este problema é traduzido pela seguinte equação:  $\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 = x$ . Donde,  $x^2 - 55x = -250$  e cujas soluções são 50 e 5. No entanto, a solução  $x = 5$  não deve ser considerada pois não se pode subtrair três macacos de um quinto de cinco.

No caso das equações quadráticas com uma raiz positiva e outra negativa Bhaskara aceita apenas a positiva. Além disso não apresenta exemplos de equações quadráticas com duas raízes negativas ou mesmo nenhuma raízes reais, nem dá exemplos de equações quadráticas tendo raízes irracionais. Em todos os exemplos apresentados a raiz quadrada é um número racional (Katz, 2010).

Na Índia o teorema de Pitágoras já é conhecido desde o tempo dos *Sulvasūtrakāras* (3000-800 a.C.). O problema do bambu partido que aparece pela primeira vez na obra *Nove Capítulos de Arte Matemática* é um problema que envolve o teorema de Pitágoras. Muito provavelmente, Bhaskara II baseou-se nesse problema ao propor o problema que se encontra na estrofe 156:

“Um bambu de 32 C (cubitos) de altura, foi quebrado pelo vento forte. A ponta do bambu toca o chão a 16 C do pé do bambu. Então, Ó matemático, diz-me a altura da ponta onde o bambu foi quebrado” (Bhaskaracarya, 2001, p. 120).

Em notação atual, suponhamos que um bambu está partido em A e a parte AC toca no chão em C (Fig. 4.1).

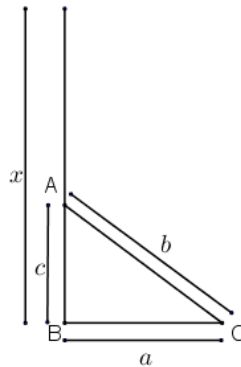


Figura 4.1 - Problema do bambu partido no *Lilavati*.

Dado o comprimento  $x$  do bambu e a distância  $BC = a$ , encontre  $b$  e  $c$  tal que

$$c = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a^2}{x}\right), b = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a^2}{x}\right).$$

Sabemos que  $b + c = x$  e  $c^2 + a^2 = b^2$ . Então,

$$c^2 = b^2 - a^2 = (x - c)^2 - a^2 = x^2 - 2cx + c^2 - a^2.$$

Donde,  $2cx = x^2 - a^2$ . Assim,  $c = \frac{x^2 - a^2}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a^2}{x}\right)$ .

Como  $b + c = x$  e  $c = \frac{x^2 - a^2}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a^2}{x}\right)$  temos que,  $b = x - c = x - \frac{x^2 - a^2}{2x} = \frac{x^2 + a^2}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a^2}{x}\right)$ .

Como  $x = 32$  e  $a = 16$  temos que  $c = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a^2}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(32 - \frac{16^2}{32}\right) = \frac{1}{2}(32 - 8) = 12$ .

Os problemas eram enunciados de forma divertida revelando um interesse pelo aspeto lúdico da Matemática. Os manuais escolares eram escritos em verso e os problemas eram usados, frequentemente,

de forma recreativa, para diversão social. Vejamos mais alguns exemplos ilustrativos do conhecido atualmente por teorema de Pitágoras. Consideremos a estrofe 158:

“Havia um buraco de uma cobra no pé de um poste, no topo estava sentado um pavão doméstico. O poste tinha 9 C (cúbitos) de altura. O pavão viu uma cobra rastejando para o poste a uma distância de 27 C do poste. O pavão alcançou a cobra à mesma velocidade que a cobra rastejava e apanhou-a a uma certa distância do poste. Encontre a distância depressa” (Bhaskaracarya, 2001, p. 121).

Junto ao pé de um poste existe um buraco de uma cobra. Um pavão salta do topo do poste e alcança a cobra. Encontra a distância da cobra ao poste. Em notação atual, dados  $AB = x$  e  $AC = y$ , pretendemos determinar  $AD = r$  e  $BC = DC = s$  (Fig. 4.2). Temos que  $r = \frac{1}{2}\left(y - \frac{x^2}{y}\right)$  e  $s = y - r$ .

Como  $r^2 = s^2 - x^2 = (y - r)^2 - x^2$ . Temos que,  $r^2 = y^2 - 2yr + r^2 - x^2$ . Donde,  $r = \frac{1}{2}\left(y - \frac{x^2}{y}\right)$ .

Como  $y = 27$  e  $x = 9$  temos que  $r = \frac{1}{2}\left(y - \frac{x^2}{y}\right) = \frac{1}{2}\left(27 - \frac{9^2}{27}\right) = \frac{1}{2}(27 - 3) = 12 C$ .

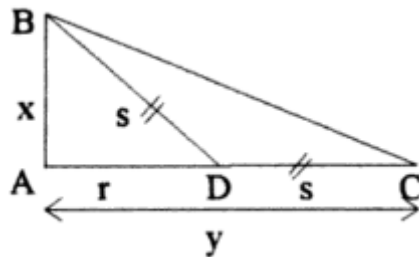


Figura 4.2 - Problema da cobra e do pavão.

Consideremos a estrofe 159:

“Num lago existiam um grande número de gansos rosados e grou. Um lótus cuja altura acima da superfície da água é de 1 *vīta* ( $\frac{1}{2} C$ , *cubito*), e a sua ponta dobrada pelo vento, afunda numa distância de 2 C. Ó matemático! Diz-me depressa a profundidade da água” (Bhaskaracarya, 2001, p. 122).

Bhaskara II apresenta uma fórmula para encontrar a altura de um lótus e a profundidade de um lago. Consideremos que a altura da flor de lótus é  $AC = AD = x$  e que, quando a flor de lótus se inclina por ação do vento, o seu topo toca a água em D, com  $BD = r$ , e que  $BC = y$  (Fig. 4.3). A profundidade da água é  $AB = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{y} - y\right)$  e a altura do lótus é  $AC = x = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{y} + y\right)$ .

A distância entre B, o ponto onde o caule do lótus encontra a superfície da água, e D, a ponta que toca o nível da água, é chamada de base. A altura do lótus acima da superfície é  $AD - AB = \text{hipotenusa} - \text{altura}$ , a altura é a profundidade da água. Temos que  $(x - y)^2 + r^2 = x^2$ . Donde,  $x^2 - 2xy + y^2 + r^2 = x^2$ .

Assim,

$$AC = x = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{y} + y\right) \text{ e } AB = x - y = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{y} - y\right).$$

Como  $y = \frac{1}{2}$  e  $r = 2$  temos que a profundidade da água é  $\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{y} - y\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4} C$  e o

comprimento do caule do lótus é  $\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{y} + y\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4} C$ .

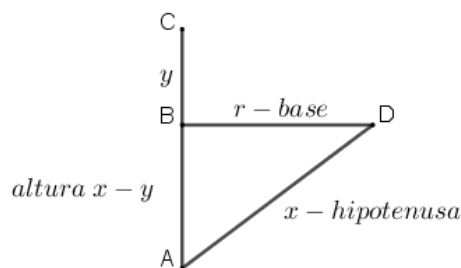


Figura 4.3 - Problema do lótus.

Consideremos a estrofe 163:

“Havia uma palmeira com 100 C (cúbitos) de altura e havia um poço a uma distância de 200 C da árvore. Dois macacos estavam no topo da árvore. Um deles desceu a árvore e caminhou até ao poço. O outro saltou e depois balançou para o poço ao longo da hipotenusa. Se ambos cobrirem igual distância, encontra o comprimento do salto do segundo macaco” (Bhaskaracarya, 2001, p. 123-124).

Em notação atual, um macaco salta de M para A e depois de A para B. Um outro salta de um ponto M numa palmeira AM para D e depois para um poço B. Pretendemos encontrar MD (Fig. 4.4).

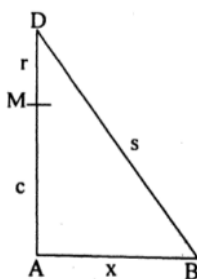


Figura 4.4 - Problema dos macacos

Um macaco desloca-se  $MD + DB = r + s$  e o outro  $MA + AB = c + x$ . Como ambos se deslocam a mesma distância  $r + s = c + x$ . Além disso,  $s^2 = x^2 + (c + r)^2$ . Donde,

$$s^2 = x^2 + c^2 + 2cr + r^2 \quad \text{e} \quad r^2 + 2rs + s^2 = c^2 + 2cx + x^2.$$

Logo,  $r^2 + 2rs + x^2 + c^2 + 2cr + r^2 = c^2 + 2cx + x^2$ . Assim,  $2cx - 2cr = 2r^2 + 2rs$ . Como  $r + s = c + x$  temos que,  $2cx - 2cr = 2r^2 + 2r(c + x - r)$ . Donde,

$$2cx - 2cr = 2r^2 + 2rc + 2rx - 2r^2.$$

Daqui, vem que,  $2cx = 4cr + 2rx$ . A altura do salto é  $r = \frac{cx}{2c+x}$ .

Como  $c = 100 C$  e  $x = 200 C$  o salto do segundo macaco é de  $\frac{100 \times 200}{2 \times 100 + 200} = 50 C$ .

### 4.3. Equações Indeterminadas

Os matemáticos indianos trabalhavam facilmente com equações com várias variáveis. O conhecido problema das 100 aves, que apareceu, pela primeira vez, na China, no *Manual Aritmético de Zhang Quijian* (c. 475), também aparece nos trabalhos de Mahavira e Bhaskara. A versão apresentada por Mahavira é a seguinte:

“São vendidas 5 pombas por 3 moedas, 7 cegonhas por 5, 9 cisnes por 7, e 3 pavões por 9 moedas. Disse-se a alguém para comprar, para divertimento do filho do rei, a estes preços, 100 aves por 100 moedas e disso foi encarregado. Quanto é que deu por cada uma delas?” (Katz, 2010, p. 284)

Mahavira apresentou uma regra muito complicada para encontrar a solução do problema. Bhaskara apresentou o mesmo problema mostrando que tinha múltiplas soluções. Fez as suas incógnitas, que designaremos por  $x, y, z$  e  $w$ , igual ao número de “conjuntos” de pombas, de cegonhas, de cisnes e de pavões, respetivamente. Dos preços e número de aves derivou duas equações:

$$3x + 5y + 7z + 9w = 100$$

$$5x + 7y + 9z + 3w = 100$$

Resolveu cada equação em ordem a  $x$  e igualou as duas expressões obtendo a equação  $y = 50 - 2z - 9w$ . Tomando arbitrariamente  $w = 4$ , reduziu a equação à forma canónica indeterminada  $y + 2z = 14$  para a qual a solução é  $z = t, y = 14 - 2t$ , com  $t$  arbitrário. Daqui, obteve que  $x = t - 2$  e fazendo  $t = 3$ , calculou que  $x = 1, y = 8, z = 3$  e  $w = 4$ . Donde, o número de pombos é 5, de cegonhas 56, de cisnes 27 e de pavões 12, sendo os seus preços, 3, 40, 21 e 36, respetivamente. Bhaskara notou que outras escolhas para  $t$  davam valores diferentes para a solução. Assim, conforme refere Bhaskara, “através de suposições, poderá ser obtida uma multidão de respostas”.

O maior contributo de Aryabhata e Brahmagupta foi no estudo de equações indeterminadas, o assunto favorito de Diofanto. Embora eles tivessem repetido muitos dos problemas de Diofanto, a abordagem foi diferente. Enquanto que Diofanto procurou resolver equações em números racionais, os matemáticos indianos admitiram como soluções apenas números inteiros positivos. Mas, ao contrário de Diofanto, que se limitou a procurar apenas uma solução racional para uma equação indeterminada, os indianos esforçaram-se para encontrar todas as possíveis soluções inteiras.

Tomemos a equação  $\frac{ax+b}{c} = y$  onde  $a, b, c$  são inteiros. Se  $x$  e  $y$  são também inteiros, então para determinar  $y$  temos de escolher os valores de  $x$  que tornam  $ax + b$  um múltiplo de  $c$ . Este método de resolver equações diofantinas era conhecido pelos indianos como o método do pulverizador (Kuttaka), porque os coeficientes das incógnitas iam sendo sucessivamente diminuídos até um deles se tornar unitário.

Aryabhata foi o primeiro matemático indiano a fornecer um método para determinar a solução geral, em números inteiros positivos, da equação indeterminada do primeiro grau  $ax + b = cy$ . A ideia base do método proposto por Aryabhata consistia em transformar, sucessivamente, a equação inicial numa mais simples, com coeficientes menores, para que fosse mais fácil encontrar uma solução particular. Este processo era feito recorrendo ao algoritmo de Euclides. Embora Aryabhata tivesse encontrado um método para encontrar as soluções da equação linear  $ax + b = cy$ , Brahmagupta foi o primeiro a dar, explicitamente, a solução geral desta equação. A título de exemplo, consideremos um problema do trabalho de Brahmagupta em que  $N \equiv 10 \pmod{137}$  e  $N \equiv 0 \pmod{60}$ . Este problema pode ser escrito sob a forma da equação  $137x + 10 = 60y$ .

“O divisor que dá lugar ao maior resto é dividido pelo que dá origem ao menor; o resíduo é dividido reciprocamente e os quocientes são diversamente colocados um sob o outro” (Katz, 2010, p. 272).

No exemplo dado começa-se por dividir 137 por 60 e continua-se dividindo os resíduos, isto é, aplica-se o algoritmo de Euclides até obter o resto final diferente de zero:

$$137 = 2 \times 60 + 17$$

$$60 = 3 \times 17 + 9$$

$$17 = 1 \times 9 + 8$$

$$9 = 1 \times 8 + 1$$

A sequência dos quocientes é 0, 2, 3, 1, 1 um número ímpar. Brahmagupta lista 0 para o primeiro quociente, considerando a primeira divisão como  $60 = 0 \times 137 + 60$ , apesar da indicação de quais deverão ser o dividendo e o divisor.

“O resíduo [final] é multiplicado por um número arbitrário tal que o produto, depois de adicionado a ele (ou subtraído dele) a diferença dos restos, é exatamente divisível. Esse multiplicador deve ser registado [debaixo] e o quociente no fim” (Katz, 2010, p. 273).

No nosso exemplo, o resíduo final é 1. Multiplica-se o resíduo final por um número qualquer  $v$  tal que  $1 \times v \pm 10$  é divisível pelo último divisor, neste caso 8. Usa-se o sinal + quando há número par de quocientes e o sinal – quando há um número ímpar de quocientes. No nosso exemplo, temos um número ímpar de quocientes, por isso, a última equação fica  $1v - 10 = 8w$ . Escolhe-se  $v = 18$  e  $w = 1$ . Ficamos, então, com a seguinte coluna de números:

0  
2  
3  
1  
1  
18  
1

“O penúltimo termo é multiplicado pelo que está imediatamente acima e o produto somado ao último termo. [O processo continua-se até ao topo da coluna]. O número no topo é o [agrante]” (Katz, 2010, p. 273).

Multiplique-se 18 por 1 e adicione-se 1 para obter 19. Em seguida, substitua o termo imediatamente "acima", ou seja, 1, por 19, e retire o último termo. Continue assim até que fiquem apenas dois termos.

|    |    |    |     |     |     |
|----|----|----|-----|-----|-----|
| 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 130 |
| 2  | 2  | 2  | 2   | 297 | 297 |
| 3  | 3  | 3  | 130 | 130 |     |
| 1  | 1  | 37 | 37  |     |     |
| 1  | 19 | 19 |     |     |     |
| 18 | 18 |    |     |     |     |
| 1  |    |    |     |     |     |

O agrante é 130. Então,  $x = 130$  e  $y = 297$  é uma solução da equação original. No entanto, pretendemos determinar o valor de  $N$  mais pequeno que resolve o problema original:

“[O agrante] é dividido pelo divisor que dá o menor resto; e o resíduo, multiplicado pelo divisor que origina o maior resto e, acrescentando ao maior resto, é o resto do produto dos divisores” (Katz, 2010, p. 273).

No nosso exemplo, divide-se 130 por 60 e obtêm-se um resto igual a 10. Depois multiplica-se 10 por 137 e adiciona-se o produto a 10, obtêm-se 1380 que é o valor de  $N$  módulo do produto de 137 e 60, isto é,  $N \equiv 1380 \pmod{8220}$ . Brahmagupta, obtém  $y$  dividindo 1380 por 60 e calcula um novo valor para  $x$ . A menor solução da equação  $137x + 10 = 60y$  é  $y = 23$  e  $x = 10$ .

É apresentada a seguir uma explicação moderna do procedimento efetuado por Brahmagupta, na equação  $137x + 10 = 60y$ , começando com substituições passo a passo de acordo com os quocientes sucessivos que aparecem no algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{ll}
 137x + 10 = 60y & 60 = 0 \times 137 + 60 \\
 137x + 10 = (0 \times 137 + 60)y & \\
 137(x - 0y) + 10 = 60y & z = x - 0y \\
 137z + 10 = 60y & \\
 60y - 10 = 137z & 137 = 2 \times 60 + 17 \\
 60y - 10 = (2 \times 60 + 17)z & \\
 60(y - 2z) - 10 = 17z & t = y - 2z \\
 60t - 10 = 17z & \\
 17z + 10 = 60t & 60 = 3 \times 17 + 9 \\
 17z + 10 = (3 \times 17 + 9)t & \\
 17(z - 3t) + 10 = 9t & u = z - 3t \\
 17u + 10 = 9t & \\
 9t - 10 = 17u & 17 = 1 \times 9 + 8 \\
 9t - 10 = (1 \times 9 + 8)u & \\
 9(t - 1u) - 10 = 8u & v = t - 1u \\
 9v - 10 = 8u & \\
 8u + 10 = 9v & 9 = 1 \times 8 + 1 \\
 8u + 10 = (1 \times 8 + 1)v & \\
 8(u - 1v) + 10 = 1v & w = u - 1v \\
 8w + 10 = 1v & \\
 1v - 10 = 8w &
 \end{array}$$

Brahmagupta resolve a última equação por inspeção, donde,  $v = 18$  e  $w = 1$ . As variáveis restantes são encontradas por substituição tal como foi descrito no algoritmo utilizado por Brahmagupta:

$$\begin{aligned}
 u &= 1v + w = 1 \times 18 + 1 = 19, \\
 t &= 1u + v = 1 \times 19 + 18 = 37, \\
 z &= 3t + u = 3 \times 37 + 19 = 130, \\
 y &= 2z + t = 2 \times 130 + 37 = 297, \\
 x &= 0y + z = 0 \times 297 + 130 = 130.
 \end{aligned}$$

Às vezes, no entanto, os matemáticos não estavam interessados em determinar  $N$ , mas sim na resolução de uma única equação linear em duas incógnitas. Bhaskara II, por exemplo, incorporou vários desses problemas no seu *Bīja-ganita*.

Os algebristas indianos estavam adiantados em relação a Diofanto na facilidade de manipulação algébrica, tendo desenvolvido uma álgebra sincopada, onde os problemas e as respectivas soluções eram escritos em estilo quase simbólico. De facto, a álgebra retórica persistiu de forma geral no resto do mundo até ao século XV, com exceção da Índia. No século V Aryabhata I sugeriu o uso de letras para representar as incógnitas de uma equação. Brahmagupta, um século mais tarde, usou abreviaturas para indicar cada uma das várias incógnitas presentes num problema e para representar quadrados e raízes quadradas. As regras algébricas usuais para operar com números negativos foram estabelecidas por Brahmagupta e segundo alguns historiadores ele sabia que uma equação do segundo grau pode ter duas raízes, embora nos problemas que propunha utilizasse apenas as raízes positivas. No século XII, Bhaskara II usou uma notação análoga à de Brahmagupta. É de salientar ainda a audácia que tiveram em criar um sistema numérico que ao longo dos séculos foi evoluindo para o nosso atual sistema de numeração posicional decimal – o sistema Hindu-Arábico (Estrada et al., 2000).

## 5. Pensamento Algébrico no Islão Medieval

De todos os campos em que os matemáticos islâmicos deram contribuições relevantes sobressai o da Álgebra. Não só nos transmitiram técnicas de resolução de equações, na tradição das antigas escolas de escribas da Mesopotâmia, mas foram também inovadores. Além disso, estenderam à Álgebra o conceito de demonstração apreendido dos géometras gregos que começaram a ser estudados, traduzidos e comentados na casa da Sabedoria, em Bagdad, a partir do século nove. Além disso, “as equações foram pela primeira vez estudadas como entes matemáticos próprios, e não como resultantes da resolução de problemas” (Estrada et al., 2000, p. 415). Dos vários matemáticos árabes responsáveis por estes progressos é de destacar o nome de al-Khwarizmi, Tabit ibn-Qurra e Abu-Kamil.

### 5.1. O tratado de Álgebra de al-Khwarizmi

O primeiro tratado sobre álgebra no Islão foi escrito por al-Khwarizmi e tem por título *Tratado Conciso sobre o Cálculo por al-jabr e al-muqabala*. Considerado como o iniciador da teoria da resolução das equações algébricas, os historiadores de matemática admitem que foi com este tratado que se deu o nascimento oficial da Álgebra como disciplina. Por este motivo al-Khwarizmi é considerado por muitos historiadores como o pai da Álgebra, sendo importante salientar que foi da deturpação do termo al-jabr, presente no título deste tratado, e da extensão do nome à resolução das equações que, no século XIV, surgiu a palavra “álgebra”. Muhammad Ibn-Musa al-Khwarizmi (c. 780-850) foi considerado o primeiro sábio eminente da época. O designativo “al-Khwarizmi” indica que era natural de Khwarezm, perto do delta do Mar Aral. Al-Khwarizmi deixou-nos obras em Aritmética, Álgebra, Astronomia, Geografia e sobre o Calendário. Trabalhou na “Casa da Sabedoria” em Bagdade entre 813 e 833.

A Álgebra de al-Khwarizmi é dedicada ao califa de al-Mamum, a quem o autor se refere nestes termos:

“me encorajou a compor um pequeno tratado sobre o cálculo por al-jabr e por al-muqabala, limitando-o ao que é mais fácil e mais útil em aritmética e que os homens constantemente precisam nos casos de heranças, legados, repartição, leis, comércio, e em todos os seus intercâmbios ou onde a medida de terras, a construção de canais, cálculos geométricos e outros objetos de várias espécies estão envolvidas...” (Estrada et al, 2000 apud van der Waerden, 1985, p.5).

O tratado de al-Khwarizmi ensina a resolver equações do 1.º e do 2.º grau com coeficientes numéricos e é composto por três partes. Na primeira parte, al-Khwarizmi faz uma classificação das equações (lineares e quadráticas) em seis tipos (formas canónicas), indica os algoritmos para as resolver e faz demonstrações desses algoritmos (muitas vezes com o auxílio de propriedades geométricas, lembrando em parte a álgebra geométrica dos gregos) e apresenta regras para multiplicar monómios e binómios e para operar com radicais quadráticos. A segunda parte é dedicada à Geometria prática, especialmente, ao cálculo de áreas e volumes e a terceira parte apresenta vários problemas sobre legados e a sua respetiva resolução. Os problemas de partilha de heranças são frequentemente traduzidos por sistemas de equações indeterminados, pelo que não se atribui a al-Khwarizmi a descoberta da sua resolução, pois, nesta altura, a *Aritmética* de Diofanto já teria sido traduzida para árabe.

Na primeira parte apresenta ainda problemas cuja tradução algébrica é redutível a uma das seis formas canónicas:

1. Quadrados iguais a raízes ( $ax^2 = bx$ )
2. Quadrados iguais a números ( $ax^2 = c$ )
3. Raízes iguais a números ( $bx = c$ )
4. Quadrados e raízes iguais a números ( $ax^2 + bx = c$ )
5. Quadrados e números iguais a raízes ( $ax^2 + c = bx$ )
6. Raízes e números iguais a quadrados ( $bx + c = ax^2$ )

Esta classificação em seis grupos resulta dos matemáticos islâmicos, ao contrário dos hindus, não lidarem com números negativos. Todos os coeficientes são positivos e todos os termos devem aparecer como grandezas aditivas. Na redução de outras equações a uma destas seis equações tipo intervêm duas operações fundamentais: al-jabr e al-muqabala. A operação al-jabr significa restauração, reposição e consiste em adicionar a ambos os membros de uma equação termos iguais aos que são afetados do sinal negativo (por exemplo  $x^2 - 8 = 4x$  transforma-se por al-jabr em  $x^2 = 4x + 8$ ). A operação al-muqabala significa comparação e consiste numa redução de termos positivos numa equação, subtraindo termos iguais aos dois membros (a equação  $x^2 + 20x = 5 + 7x$  transforma-se por al-muqabala em  $x^2 + 13x = 5$ ).

Todos os algoritmos pressupõem que o coeficiente do termo em  $x^2$  é igual à unidade, o que não acontecia nem nas equações da antiga Babilónia, nem em Diofanto de Alexandria. Caso isso não acontecesse, multiplicavam ou dividiam convenientemente para tornar o coeficiente do termo em  $x^2$  igual a um. Termina a primeira parte do tratado fazendo uma exposição sobre a regra de três.

As soluções para os três primeiros tipos de equações são evidentes. Inicialmente trata a equação  $ax^2 = bx$  como a equação linear  $ax = b$ , ignorando a solução zero e assim acontecerá até ao século XVII, nomeadamente em Pedro Nunes. É também de referir que ele procurava a solução da equação e o seu quadrado.

Como al-Khwarizmi não emprega qualquer símbolo, nem sequer para representar números, iremos escrever tudo por palavras, incluindo os números. A sua álgebra é completamente retórica. No entanto, distingue três espécies de números: os números simples, que designa por dirham (nome da unidade monetária grega drachme); a incógnita, que designa por say (coisa) ou girz quando se trata de uma raiz de uma equação; por fim chama *māl* (tesouro, riqueza) ao quadrado da incógnita. As suas regras para os tipos compostos são mais interessantes. Começemos por apresentar um problema que se traduz por uma equação redutível ao tipo 4 e a respetiva técnica de resolução:

“Um quadrado e dez raízes da mesma quantidade perfazem trinta e nove dirhams; quer dizer, qual deve ser o quadrado que quando acrescentado de dez raízes perfaz trinta e nove” (Estrada et al., 2000, p. 417).

O algoritmo apresentado por al-Khwarizmi é:

“Divide por dois o número das raízes, que dá cinco. Isto multiplica por si próprio que dá vinte e cinco. Junta isto a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora toma a raiz que é oito e subtrai dela metade do número de raízes que é cinco. O resto é três. Esta é a raiz do quadrado que tu procuraste, o quadrado é 9” (Estrada et al., 2000, p. 418).

A equação que traduz o problema em linguagem simbólica é  $x^2 + 10x = 39$ . O algoritmo seguido pelo autor foi  $x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = 3$ . A descrição verbal do procedimento de al-Khwarizmi é essencialmente a dos escribas babilónicos. Para este caso,  $x^2 + bx = c$ , a descrição verbal do processo de solução é traduzida pela nossa fórmula  $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ .

A justificação geométrica deste procedimento de al-Khwarizmi também ilustra a herança dos babilónios. Na figura 5.1 al-Khwarizmi apresenta o que ele designa por demonstração geométrica desta regra.

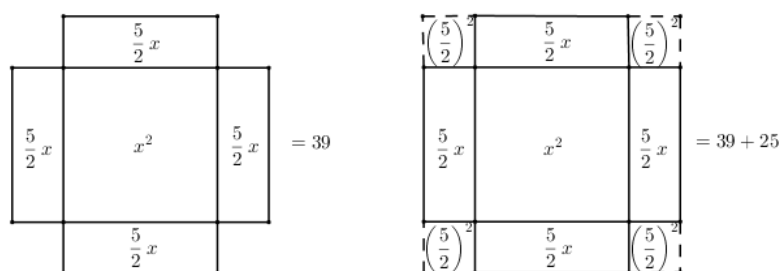


Figura 5.1 - Justificação geométrica da al-Khwarizmi, da solução de  $x^2 + 10x = 39$ .

Primeiramente, a equação é escrita na forma  $x^2 + 4 \times \frac{10}{4}x = 39$ , ou seja,  $x^2 + 4 \times \frac{5}{2}x = 39$ . Interpretando geometricamente o lado esquerdo desta equação, temos a soma das áreas de um quadrado de lado  $x$  e de quatro retângulos de lados  $\frac{5}{2}$  e  $x$  totalizando 39 unidades de área. Completando então essa soma de áreas com a área de quatro quadrados de lados  $\frac{5}{2}$ , cada um de área  $\frac{25}{4}$ , obtém-se a área de um quadrado de lado  $x + 2 \times \frac{5}{2} = x + 5$ , medindo então  $39 + 4 \times \frac{25}{4} = 39 + 25 = 64$  unidades de área. Algebricamente,  $x^2 + 4 \times \frac{5}{2}x + 4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 39 + 4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2$ , ou seja,  $(x + 5)^2 = 39 + 25 = 64$  de onde, então, al-Khwarizmi deduz que  $x + 5 = \sqrt{64} = 8$ . Chega-se então à solução  $x = 8 - 5 = 3$ .

É apresentado por al-Khwarizmi uma outra demonstração geométrica do mesmo problema. Neste método mais simples, a equação é escrita na forma  $x^2 + 5x + 5x = 39$  (Fig. 5.2).

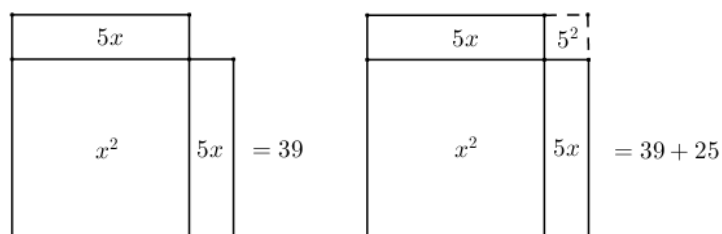


Figura 5.2 - Justificação geométrica da al-Khwarizmi, da solução de  $x^2 + 10x = 39$ .

Começando com um quadrado que representa  $x^2$ , acrescenta dois retângulos de lados 5 e  $x$  totalizando 39 unidades de área. Completando então essa soma de áreas com a área de um quadrado de lado 5, de área 25, obtém-se a área de um quadrado de lado  $x + 5$ , medindo então  $39 + 25 = 64$  unidades de área. Algebricamente,  $x^2 + 5x + 5x + 5^2 = 39 + 5^2$ . Donde,  $(x + 5)^2 = 39 + 25 = 64$ .

Note-se que é esta última construção que corresponde ao algoritmo dado e não a apresentada em primeiro lugar. As demonstrações geométricas de al-Khwarizmi não são tão rigorosas como as demonstrações geométricas gregas, apesar de, à data, já existir a primeira tradução árabe dos *Elementos* de Euclides. De facto, assemelham-se mais aos argumentos geométricos babilónicos, a partir dos quais nasceram os algoritmos algébricos. Alias, a primeira das provas geométricas apresentadas por al-Khwarizmi para este problema tem semelhanças evidentes com a interpretação geométrica de Jens Høyrup para o problema 23 da placa BM 13901, já referida anteriormente.

Na resolução de equações do tipo 5,  $ax^2 + c = bx$ , al-Khwarizmi vai mais além dos escribas babilônicos, ele mostra que sabe que a equação pode ter duas raízes positivas, uma única raiz (dupla) ou pode ser impossível. O exemplo escolhido é a equação  $x^2 + 21 = 10x$ . O algoritmo apresentado por al-Khwarizmi é:

“Divide em 2 as raízes, que dá 5; multiplica 5 por si próprio, que dá 25. Retira os 21 que tu juntaste ao quadrado; sobram 4. Extrai a raiz de 4 que dá 2 e subtrai-a a metade das raízes, isto é, de 5. Resta 3; é a raiz do quadrado que procuras e o quadrado é 9.

Se tu o desejares, o mesmo 2 que à metade da raiz subtraíste, podes juntar o que dá 7, que é também a raiz do quadrado que tu procuras e o quadrado é 49.

Se tu encontrares um problema que se reduza a este caso, examina a sua resolução por meio da adição; se não pudes tu obterás certamente a solução com a ajuda da subtração. Entre os três casos em que se deve dividir em dois as raízes é o único em que nos servimos da adição e da subtração. Sabe também que se neste caso tu divides em dois as raízes e a multiplicas por ela própria e o produto for mais pequeno que os dirhams que são acrescentados ao quadrado, então o problema é impossível. Mas se é igual aos dirhams, a raiz do quadrado é igual a metade da raiz, sem que se junte ou tire seja o que for” (Estrada et al., 2000, p. 420).

A equação que traduz o problema em linguagem simbólica é  $x^2 + 21 = 10x$ . O algoritmo seguido pelo autor foi  $x = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 3$ . Donde,  $x^2 = 9$ . Note-se que esta equação tem duas soluções positivas. Para obter a outra solução, como o próprio autor referiu, basta alterar a última operação (que foi indicada no algoritmo) para uma adição. O valor da segunda solução é  $x = \frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 7$ . Donde,  $x^2 = 49$ .

A apresentação por al-Khwarizmi do método e a descrição para o tipo 5, mostra que, ao contrário dos babilônios, ele podia resolver equações com duas raízes positivas, pelo menos numericamente. Para este caso,  $x^2 + c = bx$ , a descrição verbal do processo de solução é traduzida pela nossa fórmula  $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ . A demonstração geométrica neste caso, recorda-nos a demonstração babilónica do sistema  $x + y = b$  e  $xy = c$ . É apresentada a seguir a demonstração geométrica referente à raiz que resulta da subtração, ilustrada na figura 5.3.

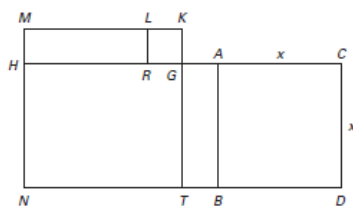


Figura 5.3 - Justificação geométrica de al-Khwarizmi para a resolução de  $x^2 + c = bx$ .

O quadrado ABCD representa  $x^2$ , e o retângulo ABNH representa  $c$ . Logo, HC representa  $b$ . Bissete-se HC em G e prolongue-se TG até K de forma a que  $GK = GA$ , e complete-se o retângulo GKMh. Escolha L em KM de modo que  $KL = GK$  e complete o quadrado KLRG. O retângulo MLRH é igual ao retângulo GATB. A área do quadrado KMNT é  $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ . A área do quadrado KMNT menos o quadrado KLRG é igual ao retângulo ABNH, isto é  $c$ . Donde, o quadrado KLRG é igual a  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ . Como o lado desse quadrado é igual a AG, temos que,  $x = AC = CG - AG$  (Katz, 2010).

Embora al-Khwarizmi tenha notado que CR poderia ser uma solução, não o demonstrou com um diagrama, nem referiu no seu diagrama as condições especiais mencionadas na sua descrição verbal. O texto de al-Khwarizmi que tem por título *Tratado Conciso sobre o Cálculo por al-jabr e al-muqabala* sugere que existiam outras obras que davam uma discussão mais pormenorizada dos procedimentos algébricos e as justificações geométricas correspondentes. De facto, num dos capítulos do livro de ibn Turk, um contemporâneo de al-Khwarizmi, é tratado equações quadráticas dos tipos 1, 4, 5 e 6 de al-Khwarizmi e no qual foi incluído uma descrição geométrica muito mais pormenorizada do método de resolução, do que apresentada na obra por al-Khwarizmi de  $x^2 + 21 = 10x$ .

Não se sabe até que ponto al-Khwarizmi foi inovador, até porque ele não atribui a si próprio quaisquer descobertas, mas constata-se que introduziu conceitos novos, nomeadamente o conceito de equação e de classificação de equações. Além disso, passou a tratar as equações como entes matemáticos, ao contrário do que havia sido feito na antiga Babilónia, em que os problemas conduziam a equações. Também as formas canónicas aparecem pela primeira vez, assim como o conceito de incógnita a que chama raiz, no sentido de algo a determinar. É utilizado o cálculo algébrico com monómios e binómios em que entra a incógnita, e sobre os quais vão incidir as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão.

O termo al-jabr foi tomado para título de todas as obras árabes posteriores sobre o mesmo tema. Posteriormente estendeu-se a toda a teoria das equações e fez a sua aparição na Europa no século XIV na palavra Álgebra para designar este ramo da Matemática.

## 5.2. Omar Khayyam e a solução de Equações Cúbicas

No final do século nono, os matemáticos islâmicos conheciam o suficiente dos autores gregos para saberem que certos problemas conduziam a equações do 3.º grau, equações que podiam ser resolvidas encontrando a interseção de duas secções cónicas. Durante o século X e XI alguns matemáticos islâmicos resolveram certas equações cúbicas seguindo a ideia dos gregos. O matemático conhecido no ocidente por Omar Khayyam (1048-1131) foi o primeiro a classificar e a resolver todos os tipos de equações cúbicas. A sua obra intitulada de *Tratado sobre Demonstrações de Problemas de al-Jabr e al-Muqābala* é dedicado à resolução de equações cúbicas. No seu prefácio o autor torna claro que o leitor da obra deve conhecer os *Elementos* e os *Data* de Euclides e os dois primeiros livros das Cónicas de Apolónio, visto que, as equações cúbicas podem ser resolvidas usando as propriedades das secções cónicas. No entanto, o texto dirige-se a problemas algébricos, não geométricos e Omar Khayyam propõe algoritmos algébricos para a resolução de equações cúbicas, análogos aos três algoritmos de al-Khwarizmi para a resolução de equações quadráticas (Katz, 2010).

Omar Khayyam começa por dar uma classificação completa das equações até ao terceiro grau. Como para Omar Khayyam, assim como para os seus predecessores, todos os números eram positivos, tinha de listar separadamente as várias formas que podiam ter raízes positivas. Ele obtém vinte e cinco formas canónicas, seis das quais já estudadas por al-Khwarizmi; cinco outras são redutíveis a estas e aparecem catorze novos tipos, cujas soluções são construídas à base de secções cónicas e estão divididas em três grupos: uma equação binómia,  $x^3 = d$ , seis equações trinómias,  $x^3 + cx = d$ ,  $x^3 + d = cx$ ,  $x^3 = cx + d$ ,  $x^3 + bx^2 = d$ ,  $x^3 + d = bx^2$ ,  $x^3 = bx^2 + d$ ; e sete equações tetranómias,  $x^3 + bx^2 + cx = d$ ,  $x^3 + bx^2 + d = cx$ ,  $x^3 + cx + d = bx^2$ ,  $x^3 = bx^2 + cx + d$ ,  $x^3 + bx^2 = cx + d$ ,  $x^3 + cx = bx^2 + d$ , e  $x^3 + d = bx^2 + cx$ . Cada uma destas equações é analisada em pormenor pelo autor, descrevendo as secções cónicas necessárias para a sua solução. Além disso, prova que a sua solução está correta e discute sob as quais pode não haver soluções ou mais de uma solução (Katz, 2010).

## 6. A Matemática no Ocidente Europeu nos séculos XII a XVI

À medida que as cidades europeias, nomeadamente as da Península Ibérica, regressavam à soberania cristã, muitos sábios em toda a Europa começaram a traduzir do árabe para o latim tanto as obras originais árabes, como as gregas que tinham sido traduzidas para árabe. Este trabalho de tradução permitiu que a Europa Medieval contactasse pela primeira vez com as culturas grega e islâmica.

No ocidente a ciência da álgebra foi iniciada por Leonardo de Pisa (Fibonacci) que, no início do século XIII, interessou-se pelo sistema de numeração adotado pelos árabes, e importou-o para o ocidente onde o promoveu. Muitos historiadores consideram Fibonacci como o matemático mais produtivo da Idade Média devido à compilação de obras matemáticas que possibilitaram a propagação e implementação dos conhecimentos árabes, apesar de não lhe ser atribuído a descoberta de métodos originais de resolução de equações.

### 6.1. O Liber Abbaci de Leonardo de Pisa

O *Liber Abbaci* ou *Livro de Cálculo* foi escrito por Fibonacci em 1202, e foi baseado na aritmética e ‘álgebra’ que Fibonacci apreendeu durante as suas viagens pelo Mediterrâneo. Em 1228, o livro foi de novo publicado com ligeiras revisões. Esta obra foi muitas vezes copiada, servindo de modelo a praticamente todas as aritméticas comerciais da época medieval e renascentista. Fibonacci foi um dos primeiros a introduzir os numerais indo-árabes na Europa. A sua obra tem uma forte influência árabe e é composta por quinze capítulos e contém as regras para cálculo com os numerais indo-árabes. Além disso, apresenta diversos problemas, que incluem questões, certamente muito úteis aos mercadores, como o cálculo de juros, conversões monetárias, medidas, e outro tipo de problemas que Fibonacci resolve recorrendo a diversos algoritmos e métodos.

Leonardo de Pisa usou uma grande variedade de métodos nas suas resoluções de problemas. Um método básico usado frequentemente é o método egípcio da falsa posição. Além desse usou também os métodos de al-Khwarizmi para a resolução de equações quadráticas. No capítulo 12 são propostos vários problemas com carácter recreativo, alguns deles semelhantes a problemas que já tinham aparecido em textos matemáticos antigos da Babilónia e, possivelmente, no Egito.

Os matemáticos da Europa Medieval aprenderam o método da falsa posição com os árabes, tendo-se tornado uma característica proeminente dos textos de Matemática, desde o *Liber Abbaci* até às aritméticas do século XVI. Mas, com o desenvolvimento do simbolismo algébrico, a regra foi desaparecendo das obras mais avançadas. Muitas vezes é necessário fazer duas suposições, observando o erro gerado por cada uma. A este método Fibonacci chamava o Método de *Elchataym*, também conhecido por *regra da dupla falsa posição*. O capítulo XIII do *Liber Abbaci* é dedicado a este método. Consideremos o **problema 13 do capítulo XIII do *Liber Abbaci***:

“Dois pássaros começam a voar do topo de duas torres a 50 “pés” de distância, uma tem 30 “pés” de altura, a outra “40 pés” de altura, começando ao mesmo tempo e voando à mesma velocidade. Chegam ao centro de uma fonte entre as duas torres ao mesmo tempo. A que distância está a fonte de cada uma das torres?” (Sigler, 2002, p.462-463)

Este problema pode ser resolvido utilizando o teorema de Pitágoras e resolvendo uma equação. De facto, os dois pássaros voam à mesma velocidade e chegam à fonte ao mesmo tempo, o que significa que percorrem a mesma distância  $y$  (Fig. 6.1).

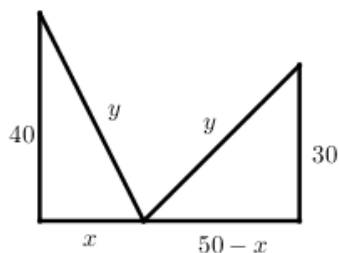


Figura 6.1 - Problema 13 do capítulo XIII do *Liber Abbaci*.

Se consideremos  $x$  a distância da torre mais alta à fonte e aplicarmos o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\begin{cases} y^2 = 40^2 + x^2 \\ y^2 = 30^2 + (50 - x)^2 \end{cases}$$

Igualando ambas as expressões obtemos a equação  $40^2 + x^2 = 30^2 + (50 - x)^2$ , cuja solução é  $x = 18$ . Donde, a fonte encontra-se a 18 pés da torre mais alta e a 32 da outra.

Leonardo supõe que a distância da torre mais alta à fonte é 10 pés, e utiliza, implicitamente, o teorema de Pitágoras. Em notação atual, o procedimento de Leonardo pode ser descrito como se segue:  $10^2 + 40^2 = 100 + 1600 = 1700$  e  $(50 - 10)^2 + 30^2 = 40^2 + 30^2 = 1600 + 900 = 2500$ .

As somas diferem por 800 sendo necessário afastar a fonte da torre mais alta. Suponhamos agora que a distância da torre mais alta à fonte é 15 pés. Em notação atual, as suas indicações traduzem-se agora por  $15^2 + 40^2 = 225 + 1600 = 1825$  e  $(50 - 15)^2 + 30^2 = 35^2 + 30^2 = 1225 + 900 = 2125$ .

As duas somas diferem agora por 300, anteriormente a diferença era de 800. E Leonardo acrescenta, ainda, que “ao adicionarmos 5 pés reduzimos a diferença para 500; se multiplicarmos os 5 pés por 300 e dividirmos por 500, temos 3, que acrescentamos aos 15 pés”. Esta explicação é acompanhada pelo seguinte diagrama (Fig. 6.2):

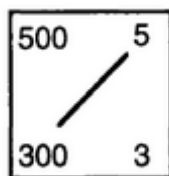


Figura 6.2 - Diagrama do problema 13 do capítulo XIII do *Liber Abbaci*.

E a sua última frase pode ser escrita como  $(5 \times 300) \div 500 = 3$ ;  $3 + 15 = 18$ . Donde conclui que a distância da torre mais alta à fonte é de 18 pés e da mais baixa é, conseqüentemente, de 32 pés.

O problema seguinte é uma versão do clássico problema da “Maria e as maçãs”, cuja melhor estratégia de resolução é do fim para o princípio. Consideremos o **problema 5 da quinta parte do Capítulo XII do *Liber Abbaci***:

“Um homem foi a um pomar que tinha sete portões; aí colheu um certo número de maçãs. Quando deixou o pomar deu ao primeiro guarda metade das maçãs que tinha e mais uma maçã. Ao segundo deu metade das maçãs que lhe sobraram e mais uma maçã. Fez o mesmo em cada um dos cinco guardas que sobravam e deixou o pomar com uma maçã. Quantas maçãs recolheu no pomar?”

Vamos descobrir quantas maçãs o homem tinha antes de atravessar cada portão, mas começando do último para o primeiro portão. No final, ele tem 1 maçã. Antes do último portão tinha  $(1 + 1) \times 2 = 4$  maçãs, antes do sexto portão tinha  $(4 + 1) \times 2 = 10$  maçãs, antes do quinto portão

tinha  $(10 + 1) \times 2 = 22$  maçãs, antes do quarto portão tinha  $(22 + 1) \times 2 = 46$  maçãs, antes do terceiro portão tinha  $(46 + 1) \times 2 = 94$  maçãs, antes do segundo portão tinha  $(94 + 1) \times 2 = 190$  maçãs, antes do primeiro portão tinha  $(190 + 1) \times 2 = 382$  maçãs. Então, o homem recolheu 382 maçãs no jardim.

O problema também pode ser resolvido usando equações, mas o processo é mais longo e complicado. Consideremos  $x$  o número de maçãs que o homem colheu e calculemos quantas maçãs o homem tem antes de atravessar cada portão.

Tabela 6.1 – Problema 5 da quinta parte do Capítulo XII do *Liber Abbaci*.

| Portões | Número de maçãs antes de atravessar cada portão                         | Número de maçãs que dá a cada guarda |
|---------|---|--------------------------------------|
| 1       | $x$   | $\frac{x}{2} + 1$                    |
| 2       | $x - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{x-2}{2}$                      | $\frac{x-2}{4} + 1$                  |
| 3       | $\frac{x-2}{2} - \left(\frac{x-2}{4} + 1\right) = \frac{x-6}{4}$        | $\frac{x-6}{8} + 1$                  |
| 4       | $\frac{x-6}{4} - \left(\frac{x-6}{8} + 1\right) = \frac{x-14}{8}$       | $\frac{x-14}{16} + 1$                |
| 5       | $\frac{x-14}{8} - \left(\frac{x-14}{16} + 1\right) = \frac{x-30}{16}$   | $\frac{x-30}{32} + 1$                |
| 6       | $\frac{x-30}{16} - \left(\frac{x-30}{32} + 1\right) = \frac{x-62}{32}$  | $\frac{x-62}{64} + 1$                |
| 7       | $\frac{x-62}{32} - \left(\frac{x-62}{64} + 1\right) = \frac{x-126}{64}$ | $\frac{x-126}{128} + 1$              |

Assim depois de atravessar o último portão o homem terá  $\frac{x-126}{64} - \left(\frac{x-126}{128} + 1\right) = \frac{x-254}{128}$  maçãs. Como só sobrou uma maçã, temos que,  $\frac{x-254}{128} = 1$ . Donde,  $x = 382$  maçãs.

Suponhamos agora que dois homens têm uma certa quantidade de dinheiro. O primeiro diz para o segundo, “se me der um denarius, ficarei com o mesmo dinheiro que você tem”. O segundo diz para o primeiro: “se me der um denarius, ficarei com dez mais do que você tem”. Quanto é que cada um tem? (Katz, 2010, p. 381).

Consideremos que  $x$  e  $y$  representam as quantias que possuem o primeiro e segundo homem, respectivamente. Este problema em notação simbólica atual pode ser traduzido pelo sistema de equações  $x + 1 = y - 1, y + 1 = 10(x - 1)$ . Leonardo para resolver o problema introduz uma nova incógnita  $z = x + y$  (a soma total de dinheiro). Então,  $x + 1 = \frac{1}{2}z$  e  $y + 1 = \frac{10}{11}z$ . Adicionando estas duas equações obtemos  $z + 2 = \frac{31}{22}z$ , donde  $z = \frac{44}{9}, x = 1\frac{4}{9}$  e  $y = 3\frac{4}{9}$ .

Outro problema típico, com raízes muito antigas, já conhecido na China mil anos antes, tem a ver com aves. Leonardo apresenta várias versões, eis uma delas: “Como comprar 30 aves com 30 moedas se cada perdiz custa 3 moedas, cada pombo 2 moedas e os pardais são dois por uma moeda?” (Santos, 2008, p. 20)

Leonardo nota que pode comprar 5 aves com 5 moedas se escolher uma perdiz e 4 pardais e 3 aves com 3 moedas adquirindo um pombo e 2 pardais. Assim, multiplicando a primeira transação por 3 e a segunda por 5, consegue adquirir 3 perdizes e 12 pardais por 15 moedas e, pelo mesmo preço, 5 pombos e 10 pardais. Somando os dois negócios obtemos 30 aves por 30 moedas.

Consideremos que, em notação atual,  $x$  representa o número de perdizes,  $y$  representa o número de pombos e  $z$  representa o número de pardais. Este problema pode ser traduzido por um sistema de duas equações com três incógnitas:

$$3x + 2y + \frac{1}{2}z = 30$$
$$x + y + z = 30.$$

Multiplicamos a primeira equação por 2 e depois subtraímos a primeira equação à segunda equação para eliminarmos  $z$  e obtemos  $5x + 3y = 30$ . Da afirmação do problema, sabemos que as três incógnitas são números inteiros positivos porque as aves estão vivas e não há aves fracionadas. Observe-se também na última equação, que  $y$  não pode ser 10 ou superior porque isso causaria que  $x$  fosse zero ou negativo. Assim,  $y$  tem que ser um número inteiro entre 1 e 9, e para isolar  $x$ , todos os termos da equação, incluindo  $3y$ , devem ser divididos de modo igual em 5. Observando todos os produtos de 3 vezes os inteiros 1 a 9 (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27), descobrimos que apenas 15 é divisível por 5. Portanto,  $y = 5$ . Segue-se que  $x = 3$  e  $z = 22$ . Donde, a resposta é 22 pardais, 5 pombos e 3 perdizes.

## 6.2. A disputa entre Cardano e Tartaglia pelas equações do 3.º grau

Entre 1500 e 1515, Scipione del Ferro (1465-1526), um professor de Matemática da Universidade de Bolonha, encontrou um método algébrico para resolver a equação cúbica  $x^3 + px = q$ . Do estudo das resoluções islâmicas das equações cúbicas sabemos que a maioria dos matemáticos não aceitava os números negativos, mesmo como coeficientes das equações, havendo 13 tipos diferentes de equações cúbicas mistas irredutíveis, dependendo das relativas posições dos termos quadráticos, lineares e constantes. Assim, Scipione del Ferro tinha começado o processo de resolução de equações cúbicas com a solução de um destes casos. Embora tenha morrido sem publicar a sua descoberta, ele a revelou ao seu sucessor em Bolonha, Annibale della Nave (1500-1558) e ao seu discípulo, Antonio Maria Fiore que, mais tarde, tentou adquirir notoriedade valendo-se da descoberta do mestre.

Nos meios académicos modernos os professores anunciam e publicam novos resultados o mais rapidamente possível para garantirem prioridade. A vida académica na Itália, do século XVI, era muito diferente da de hoje. As nomeações para professor nas universidades eram temporárias e sujeitas a uma renovação periódica pelo senado. Uma das formas de um professor convencer o senado de que merecia continuar com o cargo era vencendo desafios públicos. Dois adversários para uma dada posição apresentavam uma lista de problemas e, num fórum público, algum tempo depois, apresentavam as soluções dos problemas propostos pelo outro candidato. Por isso, se um professor descobrisse um novo método para resolver certos problemas era vantajoso manter o resultado secreto.

Naquela época era frequente o lançamento de desafios entre os sábios (e, também, entre os que não o eram, mas desejavam parecer sê-lo) e Fiore elegeu Niccolò Tartaglia de Brescia (1499-1557), já bastante conhecido pelo seu talento, como alvo. Em 1535, Fiore desafiou Tartaglia para um encontro público, esperando vencer, pois pretendia apresentar questões que dependessem daquele tipo de equação do 3.º grau, da qual somente ele detinha a solução. Tartaglia aceitou o desafio porque não tinha Fiore em grande consideração. No entanto, antes da data marcada, veio a saber que o seu oponente estava armado de um método descoberto pelo falecido professor Scipione del Ferro.

Ao sentir-se ameaçado, conforme mais tarde relatou o próprio Tartaglia, mobilizou todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que foi capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução

daquelas equações, o que consegui a 12 de fevereiro de 1535. No entanto, além de resolver as do tipo  $x^3 + px + q = 0$ , também achou a fórmula geral para as do tipo  $x^3 + px^2 + q = 0$ , que Fiore não conhecia. Como Fiore foi incapaz de resolver muitas das questões propostas por Tartaglia que cobriam outras áreas da matemática, Tartaglia foi declarado vencedor, no entanto, declinou o prêmio aceitando apenas a honra da vitória. Fiore saiu humilhado deste episódio e hoje só é lembrado como alguém que recebeu o merecido castigo ao pretender adquirir fama à custa dos outros.

Depressa chegou a Milão, onde Gerolamo Cardano (1501-1576) dava lições públicas de matemática, notícias do encontro entre Tartaglia e Fiore e das novas soluções da equação cúbica. Por esta época, Cardano ainda acreditava no que dissera Lucas Pacioli sobre a impossibilidade de uma solução geral para as equações do 3.º grau. Cardano escreveu a Tartaglia pedindo-lhe que lhe mostrasse a solução de modo a que ela fosse incluída, com a devida referência, no texto de aritmética que estava a escrever. Tartaglia, inicialmente, recusou, mas depois de muitas diligências e de uma promessa de Cardano de que nunca publicaria as suas descobertas (Tartaglia planeava publicá-las ele mesmo) revelou a Cardano as cobiçadas fórmulas. A chave da resolução foi enviada a Cardano na forma de um poema de vinte e cinco versos, dos quais os nove primeiros diziam respeito à equação  $x^3 + px = q$ . O poema foi transcrito da tradução de Pedro Nunes:

“Quando o cubo junto com as coisas  
Se iguala a algum número  
Descobre dois outros que difiram do conhecido,  
E faz como é usual  
Que o seu produto seja sempre igual  
Ao cubo da terça parte das coisas.  
Então a diferença  
Dos seus lados cúbicos bem subtraída,  
Valerá a tua coisa principal. (...)” (Estrada et al, 2000 apud Pedro Nunes, 1950, p. 404).

Cardano manteve a sua promessa de não publicar o resultado de Tartaglia no seu livro de aritmética e enviou a Tartaglia uma das primeiras cópias impressas para mostrar a sua boa fé. Cardano começou então a trabalhar com o seu assistente Lodovico Ferrari (1522-1565) no problema e, nos anos seguintes, produziu as soluções e as suas justificações para todos os casos da cúbica. Cardano não desejava quebrar o seu juramento solene, mas estava ansioso por apresentar as suas soluções. Como alguns boatos diziam que Scipione del Ferro tinha descoberto primeiro a solução, Cardano viajou com o seu discípulo até Bolonha e visitaram della Nave que, graciosamente, lhes permitiu que inspecionassem os manuscritos de Scipione del Ferro. Cardano, depois disso, não se sentiu obrigado a cumprir a jura a Tartaglia, pois não iria publicar a solução de Tartaglia, mas a descoberta do falecido Scipione del Ferro.

Em 1545, Cardano publicou a sua obra mais importante intitulada *Ars Magna, Sive de Regulis Algebraicis* (A Grande Arte, ou Sobre as Regras de Álgebra) dedicada à solução das equações cúbicas e quárticas. Embora tenha feito rasgados elogios a Tartaglia, acrescentou que independentemente e vinte anos antes, Scipione del Ferro chegara aos mesmos resultados. Tartaglia ficou furioso e julgou ter sido roubado das recompensas do seu trabalho. Os protestos de Tartaglia foram em vão. O corajoso Tartaglia chegou a aceitar um debate público contra Cardano, no próprio território deste, Milão, mas quem compareceu no lugar do perjuro foi Ferrari, o descobridor da solução das equações de 4.º grau. No final a posteridade foi injusta para com o sofrido Tartaglia pois a fórmula que ele ensinara ao desleal inimigo, ao invés de receber o seu nome, é hoje conhecida como fórmula de Cardano.

É importante comparar a resolução da equação  $x^3 + px = q$  apresentada no poema de Tartaglia com a apresentada por Cardano na sua *Ars Magna*. Em termos atuais, os nove primeiros versos do poema

de Tartaglia diz-nos que “dada a equação  $x^3 + px = q$  pretendemos determinar dois números  $u$  e  $v$  tais que  $u - v = q$  e que  $uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ . A solução é  $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ ”. Não era tecido comentários nem indicada qualquer prova. De facto, para resolver a equação  $x^3 + 3x = 14$  bastava procurar dois números positivos  $u$  e  $v$  tais que  $u - v = 14$  e  $uv = 1$ . Estas condições equivalem a dizer que os números são  $u$  e  $\frac{1}{u}$ , com  $u - \frac{1}{u} = 14$ . Donde,  $u^2 - 14u = 1$ . Como a única solução positiva desta equação é  $7 + \sqrt{50}$ , os números procurados são  $u = 7 + \sqrt{50}$  e  $v = \frac{1}{7 + \sqrt{50}} = -7 + \sqrt{50}$ . Logo, a solução da equação  $x^3 + 3x = 14$  é  $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} - \sqrt[3]{-7 + \sqrt{50}}$ .

No capítulo XI intitulado “Cubo e primeira potência igual a número”, Cardano apresenta a seguinte regra geral para a resolução da equação  $x^3 + px = q$ :

“Ao cubo da terça parte do coeficiente de  $x$ ; soma-se o quadrado de metade da constante da equação, e toma-se a raiz quadrada do total. Faz-se isto duas vezes; a uma das duas soma-se metade do número que já se quadrou e à outra subtrai-se metade do mesmo. Tem-se o binómio e o seu apótema, terminologia usada por Euclides no livro X dos elementos. Então subtrai-se a raiz cúbica do apótema da raiz cúbica do binómio, obtendo-se o valor de  $x$ ” (Cardano, 1968, pp. 98-99).

Cardano vai mais longe que Tartaglia na sua explicação. Se se resolve o sistema das duas equações em  $u$  e  $v$ , resolvendo a segunda equação em ordem a  $v$  ( $v = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \frac{1}{u}$ ) e substituindo-a na primeira equação obtém-se  $u - \left(\frac{p}{3}\right)^3 \frac{1}{u} = q$  ou  $u^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = qu$ , uma equação quadrática em  $u$ . Donde,  $u = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}$ . A solução para  $v$  difere apenas no sinal. Então, obtemos a fórmula enunciada por Cardano:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}$$

Cardano apresenta um argumento geométrico para demonstrar este resultado envolvendo cubos aplicados a um exemplo específico. A essência da sua prova pode ser vista através do seguinte argumento algébrico: se  $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$  onde  $u - v = q$  e  $uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$  então

$$\begin{aligned} x^3 + px &= (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= u - 3\sqrt[3]{u^2v} + 3\sqrt[3]{uv^2} - v + 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= u - v - 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) + 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= u - v \\ &= q. \end{aligned}$$

Cardano para ilustrar a sua regra apresenta, como exemplo, a equação  $x^3 + 6x = 20$ . Os passos efetuados para resolver esta equação, em notação atual, são os seguintes:

“o cubo da terça parte do coeficiente de  $x$  é 8, o quadrado de metade da constante é 100, a raiz quadrada do todo é  $\sqrt{108}$ , somando 10 a uma das parcelas obtém-se o binómio  $\sqrt{108} + 10$ , e subtraindo 10 à outra parcela obtém-se o apótema  $\sqrt{108} - 10$ ” (Estrada et al., 2000, p. 464).

A solução é

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

É importante ainda referir que a solução de  $x^3 + 6x = 20$  é  $x = 2$  e a resposta obtida pela fórmula é, de facto, igual a 2, apesar de não ser evidente. O próprio Cardano na página 100 da sua obra refere isso, mas não mostrou como transformar a resposta dada no valor 2.

No **capítulo XII** intitulado “**Cubo igual à primeira potência e número**”, Cardano apresenta a seguinte regra geral para a resolução da equação  $x^3 = px + q$ :  
“Quando o cubo da terça parte do coeficiente de  $x$  não é maior do que o quadrado de metade da constante da equação, subtrai o anterior do último e adiciona a raiz quadrada do restante à metade da constante da equação e, novamente, subtrai da mesma metade, e terá, como foi dito, o binómio e o seu apótema, a soma das raízes cúbicas, que constitui o valor de  $x$ ” (Cardano, 1968, p. 103).

Esta regra difere pouco da anterior e neste caso a fórmula transforma-se em:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Cardano para ilustrar a sua regra apresenta, como exemplo, a equação  $x^3 = 6x + 40$ . Os passos efetuados para resolver esta equação, em notação atual, são os seguintes: o cubo da terça parte do coeficiente de  $x$  é 8, o quadrado de metade da constante é 400, a raiz quadrada da diferença entre o quadrado de metade da constante e o cubo da terça parte do coeficiente de  $x$  é  $\sqrt{392}$ , à raiz quadrada somamos 20 obtém-se o binómio  $20 + \sqrt{392}$  e subtraído obtém-se o apótema  $20 - \sqrt{392}$ . A solução é

$$x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}.$$

Depois de apresentar como exemplos as equações  $x^3 = 6x + 40$  e  $x^3 = 6x + 6$ , repara que se  $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$  não podemos extrair a raiz quadrada. Foi certamente por observar este facto que, no enunciado da regra geral de resolução destas equações, Cardano começa por supor que o cubo da terça parte do coeficiente de  $x$  não é maior do que o quadrado de metade da constante da equação. Para ultrapassar esta dificuldade Cardano descreve outros métodos para lidar com estes casos especiais. Só mais tarde Rafael Bombelli mostrou como lidar, na fórmula de Cardano, com as raízes quadradas de números negativos.

No capítulo XXV Cardano apresenta como exemplo a equação  $x^3 = 20x + 32$  que não está nas condições requeridas para aplicar a fórmula que ele propôs anteriormente, pois  $\left(\frac{32}{2}\right)^2 - \left(\frac{20}{3}\right)^3 < 0$ . Para resolver esta equação Cardano utiliza uma regra específica:

“Quando o cubo é igual à primeira potência e constante, divida o coeficiente de  $x$  em duas partes tal que o produto da primeira pela raiz quadrada da segunda é a constante da equação. De seguida, adicione um quarto da segunda à primeira destas partes. A raiz quadrada do todo adicionado a metade da raiz quadrada da segunda é o valor de  $x$ ” (Cardano, 1968, p.160).

No exemplo, divide o coeficiente de  $x$  em duas partes tais que o produto de uma delas pela raiz quadrada da outra é 32. As partes são 16 e 4. Em seguida soma-se à primeira destas partes um quarto da segunda, obtendo  $16 + 1 = 17$ . Toma-se a raiz quadrada do todo,  $\sqrt{17}$ , e soma-se metade da raiz quadrada da segunda parte. A solução é  $\sqrt{17} + 1$ .

A equação geral  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  pode ser transformada nos dois tipos especiais  $x^3 + px + q = 0$  e  $x^3 + px^2 + q = 0$  solucionados por Tartaglia. A equação geral do terceiro grau é  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . É equivalente a  $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$ . Logo, basta considerar equações em que o coeficiente de  $x^3$  é igual a 1.

Dada a equação  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , a substituição  $x = y - \frac{a}{3}$  a transforma em

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0,$$

ou seja,

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0,$$

que é uma equação desprovida de termo do segundo grau. Portanto, é suficiente estudar as equações do terceiro grau do tipo  $x^3 + px + q = 0$ . Para resolver esta equação, escrevemos  $x = u + v$ . Substituindo, obtemos  $u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0$ , isto é,

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Portanto, se conseguirmos achar  $u, v$  tais que  $u^3 + v^3 = -q$ ,  $uv = -\frac{p}{3}$ , ou seja,

$$u^3 + v^3 = -q, u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

então  $x = u + v$  será raiz da equação  $x^3 + px + q = 0$ . Ora, o problema de achar  $u^3$  e  $v^3$  conhecendo a sua soma e o seu produto é de fácil solução:  $u^3$  e  $v^3$  são as raízes da equação do segundo grau  $w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$ . Utilizando a fórmula clássica para resolver esta equação, obtemos:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad e \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Donde,

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Considerando o radicando  $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ , se  $D > 0$  a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas; se  $D = 0$ , tem-se três raízes reais, sendo uma repetida; se  $D < 0$  então as três raízes da equação  $x^3 + px + q = 0$  são reais e distintas. Quando  $D < 0$ , a fórmula exprime  $x = u + v$  como soma de duas raízes cúbicas de números complexos. No entanto, é este o caso em que a equação possui três raízes reais distintas. Este é chamado o “caso irreduzível” porque, ao tentar eliminar os radicais, recai-se noutra equação do terceiro grau.

## Conclusões

Dados os escassos documentos existentes sobre a matemática egípcia, coloca-se com frequência a questão da existência de elementos científicos na matemática desta civilização. As opiniões não são consensuais uma vez que, normalmente, não é dada a justificação dos métodos usados na resolução dos problemas, sendo apenas apresentada a solução. Por outro lado, não sabemos se conhecemos tal Matemática no seu todo, já que os documentos que possuímos são escassos. Há historiadores que a consideram bastante rudimentar e primitiva, sem quaisquer elementos científicos; outros, contudo, exprimem opiniões mais favoráveis à existência de uma matemática mais científica e sofisticada.

Gillings exprime uma opinião favorável à existência de elementos científicos na matemática egípcia. Comentando os métodos que os egípcios usavam para lidar com a resolução de equações refere que os estudiosos da história e filosofia da ciência do século vinte, ao considerar as contribuições dos antigos egípcios, inclinam-se para a atitude moderna de que um argumento ou prova lógica deve ser simbólico para ser considerado rigoroso, e que um ou dois exemplos específicos usando números escolhidos não podem ser considerados cientificamente sólidos. Mas isso não é verdade! Um argumento ou prova não simbólico pode ser bastante rigoroso, mesmo quando dado para um valor particular da variável; as condições para o rigor são que o valor particular da variável deve ser típico e que uma generalização posterior para qualquer valor deve ser imediata.

Os argumentos apresentados pelos escribas são rigorosos; as provas conclusivas não são realmente necessárias, apenas confirmatórias. O rigor está implícito no método. Temos de aceitar que os egípcios não pensavam nem raciocinavam como os gregos. Se descobriam algum método exato, não se perguntaram por que funcionou. Eles não procuraram estabelecer uma verdade universal através de um argumento simbólico que mostrasse clara e logicamente os seus processos de pensamento. O que fizeram foi explicar e definir numa sequência ordenada de etapas necessárias no procedimento adequado, e na conclusão acrescentaram uma verificação ou prova de que os passos descritos realmente levavam a uma solução correta do problema. Esta era a ciência como eles a conheciam, e não é correto compararmos de maneira muito crítica os seus métodos com os dos gregos ou com qualquer outra civilização posterior (Gillings, 1972).

Tal como os egípcios, os escribas babilónicos sabiam resolver equações lineares. Os Babilónios resolveram também equações do 2.º grau, sistemas e até mesmo equações do 3.º grau sem o uso de qualquer simbolismo algébrico (Cajori, 1991). A maior mestria dos escribas babilónicos na resolução de equações revelou-se nas equações quadráticas. Podemos dizer que os escribas da antiga Babilónia resolviam qualquer equação do 2.º grau completa, por processos que correspondem à aplicação da nossa fórmula resolvente. Acresce ainda dizer que os babilónios podem reivindicar prioridade em várias descobertas, sendo a mais notável a do teorema de Pitágoras, geralmente atribuída a escolas matemáticas posteriores.

É incrível como os babilónios possuíam algoritmos tão avançados, sem terem as respetivas construções intelectuais. De facto, na Matemática babilónica não é possível encontrar o conceito de demonstração, nem a noção de uma estrutura lógica baseada em princípios que garantam aceitação num ou noutro fundamento, nem a consideração de questões como as que ocorrem quando se determinam as condições de solubilidade de um problema.

Por volta do século VI a.C. a matemática sofreu uma alteração radical. Os gregos foram os primeiros a acreditar que o mundo podia ser compreendido racionalmente e que a matemática desempenhava um papel primordial nessa aventura de conhecimento. De um conjunto mais ou menos organizado de regras e técnicas para resolver problemas, tão típicas na Babilónia e no Egito, a matemática transformou-se num edifício de conhecimentos que se desenvolveu por métodos lógico-dedutivos.

Por volta de 300 a.C. foi escrita a obra matemática mais famosa de sempre os *Elementos* de Euclides. O livro II dos Elementos é exclusivamente dedicado ao importante capítulo da matemática grega que geralmente se designa por álgebra geométrica ou por geometria das áreas. Há quem defenda que a álgebra geométrica deriva de uma tradução dos resultados geométricos babilónicos, principalmente quando consideramos a semelhança dos procedimentos geométricos com os algébricos. No entanto, não há evidência direta de qualquer transmissão da matemática babilónica para a Grécia durante ou antes do século IV a.C. Embora os gregos dessa época usassem o que consideramos serem procedimentos algébricos, o seu pensamento matemático era tão geométrico que todos esses procedimentos eram automaticamente expressos desse modo. Os gregos até 300 a.C. não tinham notação algébrica e, portanto, a única forma de poderem manipular expressões que representavam magnitudes era apresentando-as em termos geométricos. De fato, os matemáticos gregos tornaram-se muito proficientes em manipular entidades geométricas. Além disso, não havia maneira de os gregos poderem exprimir, sem ser geometricamente, soluções irracionais de equações quadráticas.

A obra de Diofanto foi o único trabalho algébrico que sobreviveu da Grécia Antiga, tendo sido comentada na antiguidade tardia e estudada por autores islâmicos. Muitos dos seus problemas foram retomados por Rafael Bombelli que os publicou na sua *Álgebra* de 1572.

Ao contrário da matemática egípcia e babilónica, na matemática chinesa existe uma grande diversidade de fontes. Das obras que resistiram à erosão do tempo e ao furor do homem destaca-se o *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*. Esta obra influenciou toda a matemática chinesa, tendo sido utilizada como manual de ensino. A China foi a primeira a criar um sistema de numeração posicional decimal, a reconhecer os números negativos, a chegar ao método de Horner para soluções numéricas de equações algébricas, a apresentar o triângulo aritmético de Pascal, a empregar métodos matriciais para resolver sistemas de equações lineares, a resolver sistemas de congruências pelo método hoje consubstanciado no Teorema Chinês dos Restos, a desenvolver a regra de três, a aplicar a regra da dupla falsa posição.

O grau de influência da matemática grega, da babilónica e da chinesa sobre a matemática indiana e vice-versa, ainda é uma questão não esclarecida, mas há evidências de que em ambos os sentidos ela foi apreciável. Os matemáticos indianos do período medieval eram essencialmente algebristas. Os seus trabalhos apresentavam regras de cálculo, expressões algébricas e ensinavam a resolver equações lineares e quadráticas com uma ou mais variáveis. Todas as regras e métodos utilizados estão corretos, no entanto, falta em alguns casos a indicação de como derivavam os seus métodos e regras. Apesar da falta de derivações escritas, os matemáticos indianos devem ter sido capazes de justificar as suas regras, visto que, os textos necessitavam de interpretações e clarificações. Possivelmente os mestres esclareciam todas as dúvidas dos seus alunos, infelizmente, as suas respostas, provas e raciocínios não ficaram registadas.

O primeiro tratado sobre álgebra no Islão foi escrito por al-Khwarizmi. Nesse tratado al-Khwarizmi faz uma classificação das equações lineares e quadráticas em seis tipos, apresenta os algoritmos para as resolver e as demonstrações geométricas desses algoritmos. As demonstrações geométricas dadas por al-Khwarizmi não são tão rigorosas como as demonstrações geométricas gregas, apesar de, à data, já existir a primeira tradução árabe dos *Elementos* de Euclides. De facto, assemelham-se mais aos argumentos geométricos babilónicos, a partir dos quais nasceram os algoritmos algébricos. Apesar das equações quadráticas já terem sido consideradas em civilizações anteriores, é no trabalho dos algebristas árabes que se encontra uma abordagem mais sistemática e generalizada, que visa compreender não só estes tipos específicos de equações, mas a estrutura fundamental dos procedimentos algébricos e do raciocínio. Outro aspeto interessante é a ausência da vertente recreativa na matemática dos árabes, aspeto tão característico na matemática dos seus antecessores.

Nos séculos XII a XVI, no Ocidente Europeu, dão-se grandes progressos na resolução de equações. Scipione del Ferro é o primeiro a resolver a equação geral do 3.º grau. No entanto, não publica

os seus resultados, e a mesma descoberta é feita por Tartaglia e publicada por Cardano, na sua *Ars Magna*. Por fim, a equação geral do 4.º grau é resolvida por Ferrari. O sucesso destes matemáticos italianos do Renascimento marca um momento importante na história da Matemática, pois, é a primeira vez, que a ciência moderna ultrapassa os êxitos da Antiguidade. É importante referir que são os processos de resolução das equações algébricas do 3.º grau que fazem surgir a necessidade da introdução de um novo tipo de números – os números complexos.

A integração de episódios da história da matemática em contexto de sala de aula é fundamental na aprendizagem dos alunos. A história da matemática promove uma humanização do estudo da própria matemática, uma vez que a associa a pessoas, às necessidades, anseios e dificuldades por elas vivenciadas. Ao humanizar a matemática, a sua história remove alguma da mística muitas vezes associada ao estudo desta disciplina. Propor aos alunos tarefas com uma perspetiva histórica permite que tomem consciência que os assuntos que estão a abordar foram alvo de estudo e interesse no passado, isto é, existiriam mentes humanas que ocuparam o seu tempo na resolução desses mesmos problemas. É, no entanto, de referir que esses problemas tanto surgiam em situações práticas do dia a dia, como resultavam da própria divagação criativa do pensamento humano.

Como refere Eunice Ferreira Neves no seu livro *Episódios da História da Matemática para o ensino*, questões como “Para que serve?” e “Como se lembraram de?”, frequentemente colocadas pelos alunos quando confrontadas com novos conceitos, encontram resposta na história da matemática. Além disso, muitas das dificuldades que os estudantes sentem na aprendizagem de alguns conceitos, nomeadamente, o de equações, são idênticas às que foram sentidas quando eles surgiram, as reticências que colocam relativamente a noções mais delicadas são semelhantes às sentidas ao longo da história (Neves, 2007). A Matemática não foi criada de forma polida como aparece nos livros de hoje, foi antes desenvolvida muitas vezes de forma intuitiva e experimental respondendo à necessidade de resolver problemas.

## Referências Bibliográficas

Allman, G. (1976). *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Arno Press, New York, pp. 5.

Al-Kwarizmi, M. (1831). *The Algebra of Mohammed ben Musa*. Frederic Rosen Trad. London: Oriental Translation Fund.

Baillet J. (1892). Mémoires Publiés par les membres de la Mission Archeologique Française au Caire- Le Papyrus Mathématique D' Akhmim. Paris Ernest Leroux Éditeur.

Bhaskaracarya (2008). *Lilavati Bhaskaracarya: A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition*. Dethi: Motilal Bernardidass Publishers.

Boyer, C.B. (1991). *História da Matemática: tradução: Elza F. Gomide*. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

Bednarz N., Kieran C., Lee L. (1996) *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Springer Science & Business Media.

Cajori, F. The Rhind mathematical papyrus by A. B. Chace; H. P. Manning; R. C. Archibald; L. Bull (Review). *The American Mathematical Monthly*, vol. 37, n. 4, 1930, p. 189-191.

Cajori, F. (1896). *A History of Elementary Mathematics, with Hints on Methods of Teaching*. London: Macmillan Company.

Cardano, G. (1968). *Ars Magna or the Rules of Algebra*. New York: Dover Publication.

Chace, A. B. (1927). *The Rhind Mathematical Papyrus: Free Translation and Commentary with Selected Photographs, Translations, Transliterations and Literal Translations*. Oberlin: Mathematical Association of America.

Clagett, M. (1999). *Ancient Egyptian Science: a Source Book*. Vol. 3. Philadelphia: American Philosophical Society.

Estrada, M., Sá, C., Queiró, J., Céu M., Costa M. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Eves, H. (2004). *Introdução à História da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP.

Eves, H (1983). *Great Moments in Mathematics before 1650*. EUA: The Mathematical Association of America.

Gillings, R. J. (1972). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover Publication.

Heath, T. (1910). *Diophantus of Alexandria. A study in the History of Greek Algebra*. 2<sup>th</sup> ed. New York: Dover Publications.

Heath, T. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Sir Thomas Heath, Dover, New York.

Joseph, G.G. (2011). *The Crest of the Peacock; Non-European Roots of Mathematics*. London, Princeton University Press.

Katz, V., Imhausen A., Robson E., Dauben J.W., Plofker K., Berggren J. L. (2007). *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*. Princeton University Press.

Katz, V. (2010). *História da Matemática*. Jorge Nuno Silva (revisão). Lisboa: Edição da Fundação Calouste Gulbenkian.

Katz, V., Parshall K. (2014) *Taming the Unknown: A History of Algebra from Antiquity to the Early* Princeton University Press.

Libbrecht U. (1973). *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century: The Shu-shu chiu-chang of Ch' in Chiu-shao*. London, M.I.T. Press.

Martzloff, J. C. (2006) *A History of Chinese Mathematics*. Springer.

Melville Duncan J. Poles and walls in Mesopotamia and Egypt. Science Direct. Acedido em 12 de fevereiro, 2017. Versão digital disponível na Internet em:

[http://ac.els-cdn.com/S0315086003000776/1-s2.0-S0315086003000776-main.pdf?\\_tid=cb54ac98-fba2-11e6-ba2b-0000aab0f01&acdnat=1488058909\\_4b2a32b4e9b30ab26244ab0980dd9b2b](http://ac.els-cdn.com/S0315086003000776/1-s2.0-S0315086003000776-main.pdf?_tid=cb54ac98-fba2-11e6-ba2b-0000aab0f01&acdnat=1488058909_4b2a32b4e9b30ab26244ab0980dd9b2b)

Neugebauer O. e Sachs A. (1986) *Mathematical Cuneiform Texts*. American Oriental Society, New Haven, Connecticut.

Neves, E. (2007). *Episódios da História da Matemática para o Ensino - Apresentações e actividades*. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Paton, W. R. (1918). *The Greek Anthology*, Volume V: Book 14. London, W. Heinemann; New York.

Peet, T. E. (1970). *The Rhind Mathematical Papyrus: British Museum 10057 and 10058, introduction, transcription, translation and commentary*. London: The University Press of Liverpool limited Hodder & Stoughton limited.

Pinto, H. (2009). *História da Matemática na Sala de Aula*. 1ª ed. Lisboa: Associação Ludus.

Providência, N. (2000). *Matemática ou mesas, cadeiras e canecas de cerveja*. Lisboa: Gradiva.

Robins, G., Shute, C. (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus: an ancient Egyptian text*. London: British Museum Press.

Santos, C. P., Neto, J. P. & Silva, J. N. (2007). *Jogos do Mundo*, em dez volumes. Visão/Público.

Santos, C. P., Neto, J. P. & Silva, J. N. (2008). *Jogos com História*, em dez volumes. Visão/Público.

Shen, K., Crossley, J. N. & Lun, A. W. (1999). *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*. Oxford, New York: Oxford University Press.

Smith, D.E. (1958) *History of Mathematics*, Vol. I, Dover Publication, INC., New York

Swetz, F. (1979). The evolution of Mathematics in Ancient China, in *Mathematics: people, problems, results*, (pp.28-37), Belmont, Brigham Young University, 1984.

Thureau-Dangin, F. (1938). *Texts Mathématiques Babyloniens*, Leiden: Brill.

Van Der Waerden, B. L. (1975) *Science Awakening I*. 4.<sup>a</sup> edição. Kluwer Academic Publishers.

Vasconcelos, F. (2009). *História das Matemáticas na Antiguidade*. Lisboa: Associação Ludus