

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Álgebras de Estabilização

Bernardo Hipólito Fernandes

Mestrado em Matemática

Dissertação orientada por
Gracinda M. S. Gomes

2018

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à Professora Gracinda Gomes, orientadora desta tese de mestrado, por toda a ajuda e empenho na realização deste trabalho.

Uma palavra de agradecimento é devida aos Professores Mário Branco, Thomas Colcombet e Jean-Éric Pin pelas suas sugestões e o seu apoio.

Ao Professor Colcombet agradeço, em particular, ter-me recebido na Universidade Paris Diderot no âmbito de um estágio de curta duração.

À Fundação Calouste Gulbenkian, quero agradecer a oportunidade de ter sido seu bolsheiro nos anos de 2016 e 2017 no âmbito do programa Estímulo à Investigação 2015.

Esta dissertação integrou-se no projeto CEMAT-CIÊNCIAS, UID/MULTI/04621/2013 da FCT.

Álgebras de Estabilização

Bernardo Fernandes

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa
2018

RESUMO

Este trabalho explora uma generalização da teoria algébrica das Linguagens Formais. Tendo os trabalhos de Thomas Colcombet e de Laure Daviaud, Denis Kuperberg e Jean-Éric Pin sobre funções de custo como ponto de partida, apresentamos os conceitos de ideal de ordem, álgebra de estabilização e autómato de estabilização. Obtemos generalizações de resultados conhecidos no âmbito das Linguagens Formais, como por exemplo do Teorema de Eilenberg e do Teorema de Schützenberger sobre identidades associadas a variedades, e também obtemos uma resposta para o Problema da Igualdade.

Provamos também que o conceito de ideal de ordem reconhecível é uma generalização do conceito de função custo reconhecível pelo que a teoria desenvolvida se aplica também no estudo das funções de custo.

Palavras-chave— Álgebra de estabilização, linguagem regular, ideal de ordem, pseudovariiedade, função de custo.

Álgebras de Estabilização

Bernardo Fernandes

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa
2018

ABSTRACT

This thesis explores a generalisation of the algebraic theory of Formal Languages. Having the work of Thomas Colcombet and of Laure Daviaud, Denis Kuperberg and Jean-Éric Pin about cost functions as a starting point, we present the concepts of ordered ideal, stabilisation algebra and stabilisation automata. We generalize various known results in Formal Languages, for example, the Eilenberg Theorem and the Schützenberger Theorem about identities associated to varieties, besides we answer to the Equality Problem.

We also prove that the concept of recognisable ordered ideal is a generalisation of the concept of recognisable cost function, whence the theory developed in this thesis also applies to the study of cost functions.

Keywords— Stabilisation algebra, regular language, ordered ideal, pseudovariety, cost function.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Generalidades	3
2.1	Linguagens Regulares	3
2.2	Variedades de linguagens	3
3	Álgebras de Estabilização	5
3.1	A álgebra de estabilização $F(A)$	5
3.2	Ideais de ordem de $F(A)$ reconhecíveis	7
3.3	Álgebra de Estabilização Sintática	9
3.4	Complemento	16
3.5	Autómato de estabilização	16
3.5.1	Problema da Igualdade	20
3.6	Pseudovariedades e Variedades de ideais de ordem	23
3.6.1	Teorema de Eilenberg	25
3.6.2	Quasi-Ordens	30
3.6.3	Desigualdades	31
3.6.4	Exemplo: J_1^*	37
3.6.5	Identities	40
4	Funções de Custo	44
4.1	Definição	44

4.2	Transformada de Estabilização	45
4.3	Árvores	47
4.4	Reconhecibilidade	61
4.5	Funções de Custo e Álgebras de Estabilização	64
	Bibliografia	70
	Índice Remissivo	71
	Símbolos	72

Lista de Figuras

3.3	Autômato de estabilização \mathcal{A}	18
3.4	Álgebra de estabilização T_1	37
3.5	Álgebra de estabilização U_1	38
3.6	Álgebra de estabilização V_1	38
3.7	Subálgebra de estabilização de V_1	38
3.8	Subálgebra de estabilização U'_1	40
4.1	Semigrupo S	48
4.2	Monoide de estabilização $(M, \cdot, \leq, \#)$	49
4.3	Monoide de estabilização $(M, \cdot, \leq, \#)$	51
4.4	Monoide de estabilização $(M, \cdot, \leq, \#)$	53

CAPÍTULO 1

Introdução

As teorias dos autómatos, das linguagens formais, dos monoides e das lógicas formais estão intrinsecamente ligadas, tendo o seu grande impacto no âmbito da Computação Teórica, da Álgebra e da Lógica Simbólica. Apesar de poderem parecer áreas bastante abstratas, têm aplicações no mundo "real", por exemplo no mundo da programação, dos circuitos e mesmo no campo da neurofisiologia, neste último âmbito com o propósito de modelar o cérebro humano. Grande parte da teoria no caso finito foi desenvolvida durante a segunda metade do século XX, tendo como destaque os estudos de Samuel Eilenberg, Marcel-Paul Schützenberger e Stephen Kleene. Um dos problemas abordados foi o Problema da Igualdade. A questão consiste em saber se dadas duas linguagens regulares arbitrárias é possível decidir em tempo finito se são ou não iguais. Neste caso, o problema é decidível.

Em Matemática é recorrente a necessidade de estender noções de modo a obter uma teoria mais rica nomeadamente com novos resultados, demonstrações mais simples, etc. Não fugindo à regra, o mesmo se passou com a teoria das linguagens formais. Em 1961, Schützenberger generalizou o Teorema de Kleene para séries de potências formais sobre semigrupos. Apesar de uma linguagem formal poder ser vista como uma série de potências formais, acontece que alguns dos problemas que se haviam colocado em linguagens formais, quando postos para séries formais não admitiam a mesma resposta. Um desses problemas é o Problema de Igualdade, e a resposta negativa é-nos dada por exemplo quando se toma um alfabeto com pelo menos duas letras [5].

Foi este problema, que levou Thomas Colcombet (2013) a introduzir o conceito de função de custo, o qual também generaliza o de linguagem formal mas que não é tão geral como o de série formal. Este novo conceito veio a revelar-se de certo modo melhor do que o de série formal pois, para além de estabelecer um paralelo com a teoria clássica de linguagens formais, também responde afirmativamente, em particular ao Problema da Igualdade.

Colcombet ao desenvolver a teoria das funções de custo, segue uma vertente menos algébrica do que aquela que é seguida normalmente em linguagens formais, focando-se mais em aspetos da lógica e da computação.

Tendo como ponto de partida os trabalhos de T. Colcombet [2] e também o de L. Daviaud, D. Kuperberg e J.-É. Pin [3] sobre variedades de funções de custo, propusemo-nos estudar funções de custo de um ponto vista mais algébrico, procurando fazer um paralelo com resultados já conhecidos em linguagens formais, como por exemplo o Teorema de Eilenberg.

No primeiro capítulo, recordamos as definições e os resultados mais importantes na teoria das linguagens formais necessários no nosso contexto.

No segundo e principal capítulo, desenvolveremos uma teoria análoga à das linguagens formais, introduzindo o conceito de ideal de ordem reconhecível o qual generaliza o de linguagem regular. Definimos álgebra de estabilização e autômato de estabilização. O nosso conceito de álgebra de estabilização difere em parte do apresentado em [3]. Construimos $F(A)$, a álgebra de estabilização "livre", e definimos ideal de ordem reconhecível em $F(A)$. Após apresentarmos o conceito de autômato de estabilização, provamos que um ideal de ordem é reconhecido por uma álgebra de estabilização finita se e só se é reconhecido por um autômato de estabilização finito. Provamos também que o Problema da Igualdade para ideais de ordem reconhecíveis é decidível, tal como acontece nas linguagens regulares.

No terceiro capítulo, mostramos como a teoria obtida no capítulo anterior se relaciona com a teoria das funções de custo. Neste capítulo, introduzimos o conceito de n -factorização que provamos ser equivalente ao de n -computação de Colcombet e com esta abordagem vemos que o conceito de ideal de ordem reconhecível generaliza o conceito de função de custo regular.

CAPÍTULO 2

Generalidades

Este capítulo tem como objetivo recordar alguns resultados e ideias mais importantes, para o nosso estudo, sobre a Teoria Clássica das Linguagens Formais, que serão úteis para a compreensão do próximo capítulo. Para uma leitura mais detalhada sobre este tema, o leitor poderá consultar por exemplo [6].

2.1 Linguagens Regulares

No que segue, A^+ (A^*) denota o semigrupo (monoide) livre num alfabeto A . Uma linguagem L em A é uma parte de A^+ (A^*).

Definição 2.1.1. Dados um alfabeto finito A , uma linguagem $L \subseteq A^+$ e um semigrupo finito S , dizemos que um morfismo $\varphi : A^+ \rightarrow S$ reconhece L se $\varphi^{-1}(\varphi(L)) = L$, e, neste caso, que S reconhece L . Se existe um semigrupo finito que a reconhece, então L diz-se reconhecível.

Exemplo 2.1.2. Sejam

$$A = \{a, b\}, S = \{0, 1\} \quad \text{e} \quad \varphi : A^+ \rightarrow S, \varphi(a) = 0, \varphi(b) = 1.$$

Então φ reconhece $L = b^+ = \{b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e L é reconhecível.

Dada uma linguagem $L \subseteq A^+$, podemos-nos perguntar se existe ou não um semigrupo finito S que reconheça L . Tal nem sempre sucede, por exemplo a linguagem $L = \{a^p \mid p \in \mathbb{N}, p \text{ primo}\}$ em $A = \{a\}$ não é reconhecível.

Definição 2.1.3. Dada uma linguagem $L \subseteq A^+$, definimos a relação $\rho_L \subseteq A^+ \times A^+$ por

$$u\rho_L v \quad \text{se e só se} \quad (\forall x, y \in A^*, xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L)$$

A relação ρ_L é uma congruência em A^+ e satura L , i.e., se $(u, v) \in \rho_L$ e $u \in L$ então $v \in L$. Dado que temos uma congruência, o conjunto $S(L) := A^+/\rho_L$ é um semigrupo que designamos por semigrupo sintático de L .

Proposição 2.1.4. Dada uma linguagem $L \subseteq A^+$, o semigrupo $S(L)$ é finito se e só se L é reconhecível.

2.2 Variedades de linguagens

Apresentemos alguma notação: escrevemos $T \leq S$ se T é um subsemigrupo de um semigrupo S ; $\varphi : S \rightarrow T$ se φ é uma aplicação sobrejetiva e $\varphi : S \hookrightarrow T$ se for injetiva.

Definição 2.2.1. Seja \mathbf{V} uma classe não vazia de semigrupos finitos. Dizemos que \mathbf{V} é uma *pseudovari-
edade* se satisfaz as seguintes condições:

- Se $S \in \mathbf{V}$ e $T \leq S$, então $T \in \mathbf{V}$;
- Se $S \in \mathbf{V}$ e $\varphi : S \rightarrow T$ morfismo, então $T \in \mathbf{V}$;
- Se $S_1, \dots, S_k \in \mathbf{V}$, então $S_1 \times \dots \times S_k \in \mathbf{V}$.

Exemplo 2.2.2. A classe de todos os semigrupos finitos forma uma pseudovari-
edade. A classe de todos os grupos finitos não forma uma pseudovari-
edade, pois não satisfaz a primeira condição.

Dada uma linguagem $L \subseteq A^+$ e $u \in A^+$ definimos os residuais $Lu^{-1}, u^{-1}L$ como sendo $\{v \in A^+ \mid vu \in L\}$ e $\{v \in A^+ \mid uv \in L\}$, respetivamente. No que se segue, dada uma classe de linguagens reconhecíveis \mathcal{V} , definimos $\mathcal{V}(A^+)$ como sendo

$$\{L \in \mathcal{V} \mid L \subseteq A^+\}.$$

Definição 2.2.3. Dada uma classe de linguagens reconhecíveis \mathcal{V} , dizemos que \mathcal{V} é uma *variedade de
linguagens* se satisfaz as seguintes condições:

- Se A é alfabeto finito, então $\mathcal{V}(A^+)$ é uma álgebra de Boole para as operações união e comple-
mento em A^+ ;
- Se $\varphi : A^+ \rightarrow B^+$ é um morfismo livre, i.e., um morfismo tal que $\varphi(a) \in B^+$ para qualquer $a \in A$,
então $L \in \mathcal{V}(B^+)$ implica $\varphi^{-1}(L) \in \mathcal{V}(A^+)$;
- Se $L \in \mathcal{V}(A^+)$ e $a \in A$, então $La^{-1}, a^{-1}L \in \mathcal{V}(A^+)$.

A cada pseudovari-
edade \mathbf{V} podemos associar uma variedade de linguagens \mathcal{V} , consistindo na classe de
linguagens reconhecíveis cujo semigrupo sintático pertence a \mathbf{V} , i.e., $\mathbf{V} \mapsto \mathcal{V}$ definida por $\mathcal{V}(A^+) =$
 $\{L \subseteq A^+ \mid S(L) \in \mathbf{V}\}$, para A alfabeto finito.

Proposição 2.2.4. A aplicação $\mathbf{V} \mapsto \mathcal{V}$ define uma bijeção entre pseudovari-
edades de semigrupos finitos e variedades de linguagens, cuja inversa é $\mathcal{V} \mapsto \mathbf{V}$, onde \mathbf{V} é a pseudovari-
edade gerada por $\{S(L) \mid L \in \mathcal{V}\}$.

Definição 2.2.5. Dados um alfabeto A , palavras u, v de A^+ e um semigrupo finito S , dizemos que S
satisfaz a identidade $u = v$ se para qualquer morfismo $\varphi : A^+ \rightarrow S$ se tem $\varphi(u) = \varphi(v)$. Denotamos por
 $\mathbf{V}(u, v)$ a classe de semigrupos que satisfazem $u = v$.

Exemplo 2.2.6. Os conjuntos $\mathbf{V}(u, v)$, $\bigcap_{n \geq 1} \mathbf{V}(u_n, v_n)$, $\bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \mathbf{V}(u_n, v_n)$ formam pseudovari-
edades.

Proposição 2.2.7. Toda a pseudovari-
edade \mathbf{V} é ultimamente definida por uma sequência de identidades,
i.e., existe uma sequência de identidades $\{u_n = v_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$\mathbf{V} = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \mathbf{V}(u_n, v_n).$$

CAPÍTULO 3

Álgebras de Estabilização

Neste capítulo apresentamos o conceito de álgebra de estabilização, o qual generaliza o conceito de monoide, e o de ideal de ordem reconhecível que generaliza o de linguagem reconhecível.

Em [2], Thomas Colcombet introduz o conceito de monoide de estabilização, que utiliza no estudo de funções de custo. Mais tarde em [3], é definido o conceito de álgebra de estabilização com o intuito de generalizar a noção de monoide de estabilização. A definição aqui apresentada difere um pouco da de [3], e surgiu ao tentar ultrapassar algumas questões que nos ocorreram ao estudar a teoria apresentada em [3], mas podemos dizer que ambas partilham a mesma ideia-base.

3.1 A álgebra de estabilização $F(A)$

Começemos por recordar a definição de semigrupo ordenado:

Definição 3.1.1. Um semigrupo ordenado (S, \cdot, \leq) é um semigrupo (S, \cdot) munido de uma ordem parcial \leq compatível com o produto, isto é, para quaisquer $a, b \in S$, se $a \leq b$ então $ac \leq bc$ e $ca \leq cb$ para todo $c \in S$. Um monoide ordenado é um semigrupo ordenado munido de uma identidade para o produto.

Definição 3.1.2. Uma *álgebra de estabilização*, a.e., S é uma álgebra $(S, \cdot, \leq, \omega, \sharp)$ em que, (S, \cdot, \leq) é um semigrupo ordenado e $\omega, \sharp: S \rightarrow S$ são operações unárias que satisfazem, para $s, t \in S$,

- i) $(st)^\sharp s = s(ts)^\sharp$,
- ii) $(s^\sharp)^\sharp = s^\sharp s^\omega = s^\omega s^\sharp = s^\sharp \leq s^\omega$,
- iii) $s \leq t \Rightarrow s^\omega \leq t^\omega, s^\sharp \leq t^\sharp$.

Exemplo 3.1.3. Se S é um semigrupo finito, definindo $a^\omega = a^\sharp = a^{|S|!} \in E(S)$, para $a \in S$, e $a \leq b$ se só se $a = b$, para quaisquer $a, b \in S$ temos uma álgebra de estabilização.

Uma álgebra de estabilização \mathcal{M} possui uma *identidade* $1 \in \mathcal{M}$, se, para qualquer $m \in \mathcal{M}$,

$$m \cdot 1 = 1 \cdot m = m \text{ e } 1^\omega = 1^\sharp = 1.$$

Neste caso, dizemos que \mathcal{M} é uma *álgebra de estabilização com identidade*.

Entre álgebras de estabilização os morfismos serão morfismos que respeitam o produto, a ordem e as operações unárias. Já entre álgebras de estabilização com identidade exigimos ainda que o morfismo respeite a identidade. É claro que a imagem por um morfismo entre a.e. é uma a.e.

O nosso conceito de álgebra de estabilização com identidade é uma generalização do conceito de monoide de estabilização apresentado em [2]. No Capítulo 4 será dada uma maior ênfase a este tema.

Definição 3.1.4. Dados um alfabeto A e símbolos \cdot, ω, \sharp , definimos

- $A^1 = A$,
- $A^{n+1} = A^n \cup \{u \cdot v \mid u, v \in A^n\} \cup \{u^\omega \mid u \in A^n\} \cup \{u^\sharp \mid u \in A^n\}$.

e $T(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$. É claro que $T(A)$ é uma $(2, 1, 1)$ -álgebra para as operações \cdot, ω, \sharp .

Exemplo 3.1.5. Sendo $A = \{a, b\}$, temos que $(a^\omega \cdot b)^\sharp \in T(A)$, pois $a^\omega \in A^2$, $a^\omega \cdot b \in A^3$ e $(a^\omega \cdot b)^\sharp \in A^4 \subseteq T(A)$.

Definição 3.1.6. Em $T(A)$ definimos duas relações binárias ρ e \leq_ρ do seguinte modo: dados $u, v \in T(A)$,

$$u \rho v \quad \text{se} \quad \forall \mathcal{S} \text{ a.e.}, \forall \varphi : T(A) \xrightarrow{(2,1,1)} \mathcal{S}, \varphi(u) = \varphi(v),$$

e

$$u \leq_\rho v \quad \text{se} \quad \forall \mathcal{S} \text{ a.e.}, \forall \varphi : T(A) \xrightarrow{(2,1,1)} \mathcal{S}, \varphi(u) \leq_{\mathcal{S}} \varphi(v).$$

Exemplo 3.1.7. Sendo $A = \{a, b\}$, tem-se $a \rho b$ porque podemos definir um morfismo φ tal que $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Por outro lado $a^\sharp \leq_\rho a^\omega$.

Por definição, \leq_ρ é uma quasi ordem em $T(A)$.

Proposição 3.1.8. ρ é uma relação de congruência na $(2, 1, 1)$ -álgebra $T(A)$.

Demonstração. É claro que ρ é uma relação de equivalência. Vejamos as restantes condições:

- Se $u \rho u'$ e $v \rho v'$ então dado $\varphi : T(A) \rightarrow \mathcal{S}$, $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v) = \varphi(u')\varphi(v') = \varphi(u'v')$. Logo $uv \rho u'v'$;
- Se $u \rho v$, então dado $\varphi : T(A) \rightarrow \mathcal{S}$, $\varphi(u^\omega) = \varphi(u)^\omega = \varphi(v)^\omega = \varphi(v^\omega)$. Logo $u^\omega \rho v^\omega$;
- A demonstração da implicação $u \rho v \Rightarrow u^\sharp \rho v^\sharp$ é análoga ao ponto anterior.

Portanto ρ é uma congruência. □

Definição 3.1.9. Denotamos $T(A)/\rho$ por $F(A)$ e as classes $[u]_\rho$ por \bar{u} , para $u \in T(A)$. Dizemos que $\bar{u} \leq \bar{v}$ se $u \leq_\rho v$.

A relação \leq está bem definida. De facto se $\bar{u}_1 \leq_\rho \bar{v}_1$, $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ e $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$, dado um $(2, 1, 1)$ -morfismo arbitrário $\varphi : T(A) \rightarrow \mathcal{S}$ arbitrário tem-se $\varphi(u_2) = \varphi(u_1) \leq \varphi(v_1) = \varphi(v_2)$, logo $u_2 \leq_\rho v_2$ e por isso $\bar{u}_2 \leq \bar{v}_2$.

Proposição 3.1.10. $F(A)$ é uma álgebra de estabilização.

Demonstração. Como ρ é uma relação de congruência, temos que $\bar{u} \cdot \bar{v}$, \bar{u}^ω e \bar{u}^\sharp estão bem definidos, pelo que \cdot, ω, \sharp são operações em $F(A)$.

Ora $F(A)$ é um semigrupo ordenado, pois \leq é uma ordem parcial e é compatível com as operações \cdot, ω, \sharp . Resta ver que as outras condições da definição de álgebra de estabilização são satisfeitas:

- i) $(\bar{s}\bar{t})^\# \bar{s} = \overline{(st)^\# s} = \overline{s(ts)^\#} = \bar{s}(\bar{t}\bar{s})^\#$, pois $(st)^\# s \rho s(ts)^\#$;
- ii) A demonstração que as igualdades são satisfeitas é análoga à do ponto anterior. Além disso, $\bar{s}^\# = \overline{s^\#} \leq \overline{s^\omega} = \bar{s}^\omega$ pois $s^\# \leq_\rho s^\omega$;
- iii) Suponhamos $\bar{s} \leq \bar{t}$. Seja $\varphi : T(A) \rightarrow \mathcal{S}$. Temos $\varphi(s) \leq_{\mathcal{S}} \varphi(t)$ pois $s \leq_\rho t$. Logo $\varphi(s)^\omega \leq_{\mathcal{S}} \varphi(t)^\omega$, pelo que $\varphi(s^\omega) \leq_{\mathcal{S}} \varphi(t^\omega)$, donde $\overline{s^\omega} \leq \overline{t^\omega}$ e, portanto, $\bar{s}^\omega \leq \bar{t}^\omega$. Analogamente, $\bar{s} \leq \bar{t}$ implica $\bar{s}^\# \leq \bar{t}^\#$.

Logo $F(A)$ é álgebra de estabilização. □

Lema 3.1.11. *Sejam \mathcal{T} uma álgebra de estabilização e $\varphi : A \rightarrow \mathcal{T}$ uma aplicação. Então existe um único $(2, 1, 1)$ -morfismo $\widetilde{\varphi} : T(A) \rightarrow \mathcal{T}$ e um único morfismo de álgebras de estabilização $\widehat{\varphi} : F(A) \rightarrow \mathcal{T}$, que são extensões de φ .*

Demonstração. Tal como sucede com $T(A)$, definimos $\widetilde{\varphi}$ por recorrência. Dado um elemento u de $T(A)$,

- Se $u \in A$, $\widetilde{\varphi}(u) := \varphi(u)$;
- Se $u = u_1 u_2$, $\widetilde{\varphi}(u) := \widetilde{\varphi}(u_1) \widetilde{\varphi}(u_2)$;
- Se $u = u_1^\omega$, $\widetilde{\varphi}(u) := \widetilde{\varphi}(u_1)^\omega$;
- Se $u = u_1^\#$, $\widetilde{\varphi}(u) := \widetilde{\varphi}(u_1)^\#$.

Por definição, $\widetilde{\varphi}$ é um $(2, 1, 1)$ -morfismo. Atendendo à definição de ρ e \leq_ρ , temos que a aplicação

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} : F(A) &\rightarrow \mathcal{T} \\ \bar{u} &\mapsto \widetilde{\varphi}(u) \end{aligned}$$

está bem definida e é um morfismo de álgebras de estabilização. Por construção, a unicidade de $\widetilde{\varphi}$ e $\widehat{\varphi}$ é clara. □

3.2 Ideais de ordem de $F(A)$ reconhecíveis

Nesta secção vamos definir ideal de ordem reconhecível da álgebra de estabilização $F(A)$, conceito que vai desempenhar o mesmo papel do de linguagem reconhecível em A^+ .

Definição 3.2.1. Sejam \mathcal{S} uma álgebra de estabilização e $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$. Dizemos que \mathcal{T} é uma *subálgebra de estabilização* de \mathcal{S} , e escrevemos $\mathcal{T} \leq \mathcal{S}$, se \mathcal{T} é uma a.e. para as operações e para a ordem induzidas em \mathcal{T} pelas de \mathcal{S} .

Note-se que neste caso a aplicação inclusão $\text{id} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ é um $(2, 1, 1)$ -morfismo e tem-se $t_1 \leq_{\mathcal{T}} t_2$ se e só se $\text{id}(t_1) \leq_{\mathcal{S}} \text{id}(t_2)$.

Definição 3.2.2. Sejam \mathcal{T} e \mathcal{S} álgebras de estabilização tais que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$. Dizemos que \mathcal{T} é uma *o-subálgebra de estabilização* de \mathcal{S} , e escrevemos $\mathcal{T} \leq_o \mathcal{S}$ se a aplicação $\text{id} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ é um morfismo.

Por definição, $\mathcal{T} \leq \mathcal{S}$ implica $\mathcal{T} \leq_o \mathcal{S}$. Note-se que se $\mathcal{T} \leq_o \mathcal{S}$ podemos ter elementos u e v em \mathcal{T} tais que $u \leq_{\mathcal{S}} v$ mas $u \not\leq_{\mathcal{T}} v$.

Exemplo 3.2.3. Consideremos:



Neste caso $\mathcal{T} \not\subseteq \mathcal{S}$, apesar da aplicação $\text{id} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ ser um $(2, 1, 1)$ -morfismo porque $b \leq a$ em \mathcal{S} mas $b \not\leq a$ em \mathcal{T} . No entanto $\mathcal{T} \leq_o \mathcal{S}$.

Definição 3.2.4. Dada uma álgebra de estabilização \mathcal{S} , dizemos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ é um *ideal de ordem* de \mathcal{S} quando dados $t \in \mathcal{T}$ e $s \in \mathcal{S}$, se $s \leq t$ então $s \in \mathcal{T}$.

No exemplo 3.2.3, \mathcal{T} é um ideal de ordem de \mathcal{S} .

Exemplo 3.2.5. Consideremos:



Neste caso, \mathcal{T} não é um ideal de ordem de \mathcal{S} pois $b \leq a \in \mathcal{T}$ mas $b \notin \mathcal{T}$.

Definição 3.2.6. Sejam \mathcal{S} uma álgebra de estabilização e $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ um morfismo de álgebras de estabilização. Dizemos que $L \subseteq F(A)$ é *reconhecido* por φ se

- $\varphi^{-1}(\varphi(L)) = L$,
- $\varphi(L)$ é um ideal de ordem de $\varphi(F(A))$, i.e. $(\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v}), \bar{v} \in L) \Rightarrow \exists \bar{u}_1 \in L$ tal que $\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{u}_1)$.

Diz-se que uma a.e. \mathcal{S} reconhece $L \subseteq F(A)$ se existe um morfismo $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ que reconhece L . Dizemos também que $L \subseteq F(A)$ é *reconhecível* se existe \mathcal{S} a.e. finita que reconhece L .

Como caso particular, dado que $\varphi(L)$ é um ideal de ordem, tem-se

$$(y \leq x \text{ e } x \in L) \Rightarrow (\varphi(y) \leq \varphi(x) \text{ e } \varphi(x) \in \varphi(L)) \Rightarrow \varphi(y) \in \varphi(L) \Rightarrow y \in L,$$

ou seja, se L é reconhecido por φ , então L é um ideal de ordem de $F(A)$.

Observação 3.2.7. Equivalentemente, $L \subseteq F(A)$ é *reconhecido* por φ se e só se

$$\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v}), \bar{v} \in L \Rightarrow \bar{u} \in L.$$

Esta caracterização será a mais usada no que se segue.

Definição 3.2.8. Sejam \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 álgebras de estabilização. Definimos o conjunto $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ e as respetivas operações $\cdot, \omega, \#$ de maneira natural, ou seja, estão definidas componente a componente. A ordem em $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ fica definida por $(t_1, t_2) \leq_{\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2} (s_1, s_2)$ se e só se $t_1 \leq_{\mathcal{S}_1} s_1$ e $t_2 \leq_{\mathcal{S}_2} s_2$.

Por definição, $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ é uma álgebra de estabilização.

Proposição 3.2.9. *Sejam \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 álgebras de estabilização e \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 subálgebras de estabilização de \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , respetivamente. Então $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ é uma subálgebra de estabilização de $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$.*

Demonstração. Como \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 são álgebras de estabilização, então $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ também é. Sejam (t_1, t_2) e (t'_1, t'_2) elementos de $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$. Por definição,

$$(t_1, t_2) \leq_{\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2} (t'_1, t'_2) \Leftrightarrow t_1 \leq_{\mathcal{T}_1} t'_1, t_2 \leq_{\mathcal{T}_2} t'_2 \Leftrightarrow t_1 \leq_{\mathcal{S}_1} t'_1, t_2 \leq_{\mathcal{S}_2} t'_2 \Leftrightarrow (t_1, t_2) \leq_{\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2} (t'_1, t'_2).$$

Assim $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ é uma subálgebra de estabilização de $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$. \square

Proposição 3.2.10. *Sejam L_1 e L_2 ideais de ordem de $F(A)$ reconhecíveis, então os ideais de ordem $L_1 \cap L_2$ e $L_1 \cup L_2$ de $F(A)$ são reconhecíveis.*

Demonstração. Sejam $\varphi_1 : F(A) \rightarrow \mathcal{S}_1$ e $\varphi_2 : F(A) \rightarrow \mathcal{S}_2$ morfismos que reconhecem L_1 e L_2 respetivamente, com \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 a.e. finitas.

Consideremos o morfismo $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ dado por $\varphi(u) = (\varphi_1(\bar{u}), \varphi_2(\bar{u}))$. Vejamos que φ reconhece $L_1 \cap L_2$ e $L_1 \cup L_2$:

i) Reconhece $L_1 \cap L_2$:

- Suponhamos $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$ com $\bar{v} \in L_1 \cap L_2$. Logo $\varphi_1(\bar{u}) \leq \varphi_1(\bar{v})$ com $\bar{v} \in L_1 \cap L_2 \subseteq L_1$. Então $\bar{u} \in L_1$. Analogamente $\bar{u} \in L_2$ e portanto $\bar{u} \in L_1 \cap L_2$.

ii) Reconhece $L_1 \cup L_2$:

- Suponhamos $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$ com $\bar{v} \in L_1 \cup L_2$. Existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $\bar{v} \in L_i$. Logo $\varphi_i(\bar{u}) \leq \varphi_i(\bar{v})$ com $\bar{v} \in L_i$. Então $\bar{u} \in L_i$ e portanto $\bar{u} \in L_1 \cup L_2$.

A demonstração fica assim concluída. \square

Proposição 3.2.11. *Sejam A e B alfabetos, $\psi : F(A) \rightarrow F(B)$ um morfismo de álgebras de estabilização e L um ideal de ordem de $F(B)$ reconhecível. Então $\psi^{-1}(L)$ é um ideal de ordem reconhecível de $F(A)$.*

Demonstração. Seja $\varphi : F(B) \rightarrow \mathcal{S}$ um morfismo de a.e. que reconhece L , com \mathcal{S} finita. Vejamos que o morfismo $\varphi \circ \psi$ reconhece $\psi^{-1}(L)$. Suponhamos que $(\varphi \circ \psi)(\bar{u}) \leq (\varphi \circ \psi)(\bar{v})$ com $\bar{v} \in \psi^{-1}(L)$. Assim $\varphi(\psi(\bar{u})) \leq \varphi(\psi(\bar{v}))$ com $\psi(\bar{v}) \in L$. Como φ reconhece L , obtemos $\psi(\bar{u}) \in L$ e portanto $\bar{u} \in \psi^{-1}(L)$. \square

3.3 Álgebra de Estabilização Sintática

Tal como acontece no caso das linguagens reconhecíveis, podemos-nos perguntar se existe ou não uma "álgebra de estabilização sintática" associada a um dado ideal de ordem L de $F(A)$. Vamos mostrar que tal sucede.

No que se segue, A é um alfabeto finito e x é um elemento fixo não pertencente a A .

Definição 3.3.1. Dado um alfabeto A e uma letra $x \notin A$, definimos:

- $c_1 = \{x\}$,
- $c_2 = \{xw : w \in T(A)\} \cup \{wx : w \in T(A)\} \cup \{x^\omega, x^\#\}$,
- $c_{n+1} = \{cw : c \in c_n, w \in T(A)\} \cup \{wc : c \in c_n, w \in T(A)\} \cup \{c^\omega : c \in c_n\} \cup \{c^\# : c \in c_n\}$

$$e \text{ ctx}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} c_n.$$

Notemos que na expressão de um elemento de $\text{ctx}(A)$ o símbolo x surge apenas uma vez. Um exemplo, com $A = \{a, b\}$, $a^\omega b a x a b (b a)^\# \in c_3$. Temos $\text{ctx}(A) \subset T(A \cup \{x\})$ mas por exemplo $x^2 \in T(A \cup \{x\})$ e $x^2 \notin \text{ctx}(A)$. Fixo $t \in T(A)$, denotamos por

$$\begin{aligned} \phi_t : T(A \cup \{x\}) &\rightarrow T(A) \\ x &\mapsto t \\ a &\mapsto a \end{aligned}$$

o único $(2, 1, 1)$ -morfismo de álgebras $(\cdot, \omega, \#)$ tal que $\phi_t(x) = t$ e $\phi_t(a) = a$, para qualquer $a \in A$.

Observação 3.3.2. Por definição, se t e w são elementos de $T(A)$, então $\phi_t(w) = w$.

Definição 3.3.3. Definimos $\text{Ctx}(A) = \{\bar{u} \in F(A \cup \{x\}) : u \in \text{ctx}(A)\}$, a que chamamos o *conjunto dos contextos*. Dados $t \in T(A)$ e $C = \bar{c} \in \text{Ctx}(A)$ com $c \in \text{ctx}(A)$, definimos $C(\bar{t}) := \overline{\phi_t(c)}$.

Antes de provarmos que esta definição é coerente, notemos que podemos encarar a definição anterior como um processo de "substituição de \bar{x} por \bar{t} ",

$$\begin{aligned} \text{Ctx}(A) &\rightarrow F(A) = T(A)/\rho \\ C = \bar{c} &\mapsto \overline{\phi_t(c)} =: C(\bar{t}) \end{aligned}$$

É necessário verificar que este conceito está bem definido, isto é, não depende dos representantes tomados. Sejam $t_1, t_2 \in T(A)$ tais que, $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$. Temos $\overline{\phi_{t_1}(x)} = \bar{t}_1 = \bar{t}_2 = \overline{\phi_{t_2}(x)}$ e $\overline{\phi_{t_1}(a)} = \bar{a} = \overline{\phi_{t_2}(a)}$ para $a \in A$. Logo, para qualquer $c \in \text{ctx}(A)$, obtemos $\overline{\phi_{t_1}(c)} = \overline{\phi_{t_2}(c)}$, atendendo à definição de $\text{ctx}(A)$.

Suponhamos agora que $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$, com $c_1, c_2 \in \text{ctx}(A)$. Dado um $(2, 1, 1)$ -morfismo arbitrário

$$\varphi : T(A) \rightarrow \mathcal{S},$$

$\varphi \circ \phi_{t_1} : T(A \cup \{x\}) \rightarrow \mathcal{S}$ é também um $(2, 1, 1)$ -morfismo. Como $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$, temos $\overline{\varphi \circ \phi_{t_1}(c_1)} = \overline{\varphi \circ \phi_{t_1}(c_2)}$, ou seja, $\overline{\varphi(\phi_{t_1}(c_1))} = \overline{\varphi(\phi_{t_1}(c_2))}$. Por isso $\overline{\phi_{t_1}(c_1)} = \overline{\phi_{t_1}(c_2)}$. Analogamente, $\overline{\phi_{t_2}(c_1)} = \overline{\phi_{t_2}(c_2)}$.

Assim $\overline{\phi_{t_1}(c_1)} = \overline{\phi_{t_2}(c_2)}$, para $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$ e $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$.

Exemplo 3.3.4. Consideremos $A = \{a, b\}$ e $C = (\bar{a}^\# \cdot \bar{x})^\omega \in \text{Ctx}(A)$. Então $C(\bar{b}) = \overline{\phi_b((a^\# \cdot x)^\omega)} = \overline{(a^\# \cdot b)^\omega}$.

Lema 3.3.5. Seja $C \in \text{Ctx}(A)$.

- i) Dado $u \in T(A)$, existem $D, D' \in \text{Ctx}(A)$ tais que $C(\overline{vu}) = D(\bar{v})$ e $C(\overline{uv}) = D'(\bar{v})$, para todo o $v \in T(A)$;
- ii) Existe $D \in \text{Ctx}(A)$ tal que $C(\bar{u}^\omega) = D(\bar{u})$, para todo o $u \in T(A)$;
- iii) Existe $D \in \text{Ctx}(A)$ tal que $C(\bar{u}^\#) = D(\bar{u})$, para todo o $u \in T(A)$.

Demonstração. Seja $C = \bar{c}$, com $c \in \text{ctx}(A)$:

- i) Tomemos $\psi_1, \psi_2 : T(A \cup \{x\}) \rightarrow T(A \cup \{x\})$ $(2, 1, 1)$ -morfismos tais que $\psi_1(x) = xu$, $\psi_1(a) = a$, $\psi_2(x) = ux$ e $\psi_2(a) = a$ para $a \in A$. Sejam $D = \overline{\psi_1(c)}$ e $D' = \overline{\psi_2(c)}$. Repare-se que $\psi_1(c)$ e $\psi_2(c)$ pertencem a $\text{ctx}(A)$, donde $D, D' \in \text{Ctx}(A)$.

Dado que $\phi_v \circ \psi_1(x) = \phi_v(xu) = vu$ e $\phi_v \circ \psi_1(a) = a$ para todo o $a \in A$, temos $\phi_v \circ \psi_1 = \phi_{vu}$. Analogamente, $\phi_v \circ \psi_2 = \phi_{uv}$. Então

$$\begin{aligned} C(\overline{vu}) &= \overline{\phi_{vu}(c)} = \overline{\phi_v(\psi_1(c))} = D(\bar{v}), \\ C(\overline{uv}) &= \overline{\phi_{uv}(c)} = \overline{\phi_v(\psi_2(c))} = D'(\bar{v}). \end{aligned}$$

- ii) Tomemos agora $\psi : T(A \cup \{x\}) \rightarrow T(A \cup \{x\})$ um morfismo tal que $\psi(x) = x^\omega$ e $\psi(a) = a$ para $a \in A$. Seja $D = \overline{\psi(c)}$. É claro que $\psi(c)$ pertence a $\text{ctx}(A)$, donde $D \in \text{Ctx}(A)$. Dado que $\phi_u \circ \psi(x) = u^\omega$ e $\phi_u \circ \psi(a) = a$ para todo o $a \in A$, temos $\phi_u \circ \psi = \phi_{u^\omega}$. Então obtemos $C(\bar{u}^\omega) = \overline{\phi_{u^\omega}(c)} = \phi_u(\psi(c)) = D(\bar{u})$.
- iii) Tomemos $\psi : T(A \cup \{x\}) \rightarrow T(A \cup \{x\})$ um morfismo tal que $\psi(x) = x^\sharp$ e $\psi(a) = a$ para $a \in A$. Seja $D = \overline{\psi(c)}$. Temos $D \in \text{Ctx}(A)$ e, dado que $\phi_u \circ \psi(x) = u^\sharp$ e $\phi_u \circ \psi(a) = a$ para todo o $a \in A$, obtemos $\phi_u \circ \psi = \phi_{u^\sharp}$. Logo $C(\bar{u}^\sharp) = \overline{\phi_{u^\sharp}(c)} = \phi_u(\psi(c)) = D(\bar{u})$.

A demonstração fica assim concluída. \square

Definição 3.3.6. Dado $L \subseteq F(A)$, denotamos por ρ_L a relação binária em $F(A)$ definida por, para $\bar{u}, \bar{v} \in L$,

$$\bar{u}\rho_L\bar{v} \text{ se e só se } \forall C \in \text{Ctx}(A), C(\bar{u}) \in L \Leftrightarrow C(\bar{v}) \in L,$$

que designamos por relação sintática associada a L .

Proposição 3.3.7. A relação ρ_L é uma congruência em $F(A)$.

Demonstração. É claro que ρ_L é uma relação de equivalência. Vejamos que respeita as operações binária e unárias.

- o Suponhamos $\overline{u_1\rho_L v_1}$ e $\overline{u_2\rho_L v_2}$. Pelo Lema 3.3.5 (i), dado $C \in \text{Ctx}(A)$, existem D e D' tais que $C(\overline{w u_2}) = D(\bar{w})$ e $C(\overline{v_1 w}) = D'(\bar{w})$, para todo o $w \in T(A)$. Então

$$\begin{aligned} C(\overline{u_1 u_2}) \in L &\Leftrightarrow D(\bar{u}_1) \in L \Leftrightarrow D(\bar{v}_1) \in L \\ &\Leftrightarrow C(\overline{v_1 u_2}) \in L \Leftrightarrow D'(\bar{u}_2) \in L \\ &\Leftrightarrow D'(\bar{v}_2) \in L \Leftrightarrow C(\overline{v_1 v_2}) \in L. \end{aligned}$$

Concluimos que $\overline{u_1 u_2 \rho_L v_1 v_2}$.

- o Se $\bar{u}\rho_L\bar{v}$, pelo Lema 3.3.5 (ii), dado $C \in \text{Ctx}(A)$, tem-se para algum $D \in \text{Ctx}(A)$,

$$C(\bar{u}^\omega) \in L \Leftrightarrow D(\bar{u}) \in L \Leftrightarrow D(\bar{v}) \in L \Leftrightarrow C(\bar{v}^\omega) \in L,$$

donde $\bar{u}^\omega \rho_L \bar{v}^\omega$. Prova-se analogamente que $\bar{u}^\sharp \rho_L \bar{v}^\sharp$.

Portanto ρ_L é uma congruência. \square

Designamos a congruência ρ_L como a congruência sintática associada a L .

Definição 3.3.8. Designamos a $(2, 1, 1)$ -álgebra $F(A)/\rho_L$ por $\mathcal{S}(L)$.

Definição 3.3.9. Sejam $[\bar{u}]_{\rho_L}, [\bar{v}]_{\rho_L} \in \mathcal{S}(L)$. Dizemos que

$$[\bar{u}]_{\rho_L} \leq [\bar{v}]_{\rho_L} \text{ se e só se } \forall C \in \text{Ctx}(A), C(\bar{u}) \in L \Leftrightarrow C(\bar{v}) \in L.$$

Lema 3.3.10. A relação \leq é uma ordem parcial em $\mathcal{S}(L)$.

Demonstração. Vejamos que \leq está bem definida. Suponhamos que $\overline{u_1\rho_L u_2}, \overline{v_1\rho_L v_2}$ e $\forall C \in \text{Ctx}(A), C(\bar{u}_1) \in L \Leftrightarrow C(\bar{v}_2) \in L$. Dado $C \in \text{Ctx}(A)$,

$$C(\bar{u}_2) \in L \Leftrightarrow C(\bar{u}_1) \in L \Leftrightarrow C(\bar{v}_1) \in L \Leftrightarrow C(\bar{v}_2) \in L.$$

Logo \leq está bem definida e é claramente reflexiva, antissimétrica e transitiva. \square

Lema 3.3.11. *Seja \mathcal{S} uma álgebra de estabilização. Dado $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ morfismo de álgebras de estabilização, para $\bar{u}, \bar{v} \in F(A)$,*

$$\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v}) \Rightarrow \varphi(C(\bar{u})) \leq \varphi(C(\bar{v})), \forall C \in \text{Ctx}(A).$$

Demonstração. Dado $C = \bar{c} \in \text{Ctx}(A)$ com $c \in \text{ctx}(A)$, temos que $c \in c_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Provemos o resultado por indução sobre n .

- Se $n = 1$, temos $c = x$, e por isso $C(\bar{u}) = \overline{\phi_u(c)} = \overline{\phi_u(x)} = \bar{u}$. Analogamente $C(\bar{v}) = \bar{v}$. Então $\varphi(C(\bar{u})) = \varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v}) = \varphi(C(\bar{v}))$.
- Supondo que a afirmação é válida para n_0 . Provemos o caso $n = n_0 + 1$. Ora se $c \in c_{n_0+1}$, temos c da forma $d \cdot w$ ou $w \cdot d$ ou d^ω ou d^\sharp , com $d \in c_{n_0}$ e $w \in T(A)$. Seja $D = \bar{d}$. Se $c = d \cdot w$, então:

$$\begin{aligned} \varphi(C(\bar{u})) &= \varphi(\overline{\phi_u(c)}) = \varphi(\overline{\phi_u(d \cdot w)}) = \varphi(\overline{\phi_u(d)\phi_u(w)}) = \\ &= \varphi(\overline{\phi_u(d)} \cdot \bar{w}) = \varphi(D(\bar{u}))\varphi(\bar{w}) \leq && \text{(Observação 3.3.2)} \\ &\leq \varphi(D(\bar{v}))\varphi(\bar{w}) = \varphi(\overline{\phi_v(d)\phi_v(w)}) = \varphi(C(\bar{v})). && \text{(por hipótese de indução)} \end{aligned}$$

Se $c = d^\omega$, então:

$$\begin{aligned} \varphi(C(\bar{u})) &= \varphi(\overline{\phi_u(c)}) = \varphi(\overline{\phi_u(d^\omega)}) = \varphi(\overline{\phi_u(d)})^\omega = \varphi(D(\bar{u}))^\omega \leq \\ &\leq \varphi(D(\bar{v}))^\omega = \varphi(\overline{\phi_v(d)})^\omega = \varphi(\overline{\phi_v(d^\omega)}) = \varphi(\overline{\phi_v(c)}) = \varphi(C(\bar{v})). \end{aligned}$$

Os casos $w \cdot d$ e d^\sharp são análogos.

O resultado fica provado pelo princípio de indução. □

Aplicando o lema anterior para o morfismo identidade de $F(A)$, obtemos que $\bar{u} \leq \bar{v}$ implica $C(\bar{u}) \leq C(\bar{v})$, para qualquer $C \in \text{Ctx}(A)$. Assim, observamos que $\bar{u} \leq \bar{v}$ é uma condição suficiente para $\varphi(C(\bar{u})) \leq \varphi(C(\bar{v}))$.

Daqui em diante, quando referirmos que L é um ideal de ordem, queremos dizer que L é um ideal de ordem de $F(A)$, onde A é um alfabeto finito.

Proposição 3.3.12. *Seja L um ideal de ordem. Então $\mathcal{S}(L)$ é uma álgebra de estabilização.*

Demonstração. Como consequência da Proposição 3.3.7, tem-se que $\mathcal{S}(L)$ é uma $(2, 1, 1)$ -álgebra. Pelo Lema 3.3.10, temos que \leq é uma ordem parcial em $\mathcal{S}(L)$. Vejamos que \leq é compatível com o produto:

- Suponhamos que $[\bar{u}_1]_{\rho_L} \leq [\bar{v}_1]_{\rho_L}$ e $[\bar{u}_2]_{\rho_L} \leq [\bar{v}_2]_{\rho_L}$. Seja $C \in \text{Ctx}(A)$. Pelo Lema 3.3.5 (i), existem $D, D' \in \text{Ctx}(A)$ tais que $C(\overline{w u_2}) = D(\bar{w})$ e $C(\overline{v_1 w}) = D'(\bar{w})$ para todo o $w \in T(A)$. Então

$$\begin{aligned} C(\overline{u_1 u_2}) &= D(\bar{u}_1) \in L \\ &\Leftrightarrow D(\bar{v}_1) \in L \Leftrightarrow C(\overline{v_1 u_2}) = D'(\bar{u}_2) \in L && ([\bar{u}_1] \leq [\bar{v}_1]) \\ &\Leftrightarrow D'(\bar{v}_2) = C(\overline{v_1 v_2}) \in L. && ([\bar{u}_2] \leq [\bar{v}_2]) \end{aligned}$$

Então $[\bar{u}_1][\bar{u}_2] \leq [\bar{v}_1][\bar{v}_2]$.

Resta ver que $\mathcal{S}(L)$ satisfaz as condições i), ii) e iii) da definição 3.1.2 de álgebra de estabilização.

i) Atendendo à definição 3.1.9 temos

$$\begin{aligned}
 ([\bar{u}][\bar{v}])^\sharp[\bar{u}] &= [\bar{u}\bar{v}]^\sharp[\bar{u}] \\
 &= [(\bar{u}\bar{v})^\sharp][\bar{u}] \\
 &= [(\bar{u}\bar{v})^\sharp\bar{u}] \\
 &= [\bar{u}(\bar{v}\bar{u})^\sharp] \\
 &= \dots = [\bar{u}([\bar{v}][\bar{u}])^\sharp].
 \end{aligned}$$

ii) As igualdades demonstram-se de modo análogo às de i). Vejamos então que $[\bar{u}]^\sharp \leq [\bar{u}]^\omega$. Temos $\bar{u}^\sharp \leq \bar{u}^\omega$, pelo que, dado $C \in \text{Ctx}(A)$, como consequência do Lema 3.3.11 temos $C(\bar{u}^\sharp) \leq C(\bar{u}^\omega)$. Ora como L é um ideal de ordem, se $C(\bar{u}^\omega) \in L$ então $C(\bar{u}^\sharp) \in L$. Assim $[\bar{u}^\sharp] \leq [\bar{u}^\omega]$, ou seja, $[\bar{u}]^\sharp \leq [\bar{u}]^\omega$.

iii) Se $[\bar{u}] \leq [\bar{v}]$, então por 3.3.5 (ii) existe $D \in \text{Ctx}(A)$ tal que $C(\bar{w}^\omega) = D(\bar{w})$ para todo o $w \in T(A)$. Temos

$$C(\bar{u}^\omega) \in L \Leftrightarrow D(\bar{u}) \in L \Leftrightarrow D(\bar{v}) \in L \Leftrightarrow C(\bar{v}^\omega) \in L,$$

donde $[\bar{u}]^\omega \leq [\bar{v}]^\omega$. Analogamente prova-se que \leq respeita $^\sharp$.

Portanto $\mathcal{S}(L)$ é uma álgebra de estabilização. □

Definição 3.3.13. A $\mathcal{S}(L)$ chamamos *álgebra de estabilização sintática* de L .

Proposição 3.3.14. Se L é um ideal de ordem de $F(A)$, então $\mathcal{S}(L)$ reconhece L .

Demonstração. Seja $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}(L)$ definido por $\varphi(\bar{u}) = [\bar{u}]$. É claro que φ é compatível com as operações $(\cdot, ^\omega, ^\sharp)$ atendendo à definição das operações em $\mathcal{S}(L) = F(A)/\rho_L$. Vejamos que φ respeita a ordem.

Se $\bar{u} \leq \bar{v}$, como consequência do Lema 3.3.11, temos $C(\bar{u}) \leq C(\bar{v})$ para qualquer $C \in \text{Ctx}(A)$. Portanto se $C(\bar{v}) \in L$ então $C(\bar{u}) \in L$, pois L é um ideal de ordem. Assim $[\bar{u}] \leq [\bar{v}]$.

Suponhamos que $[\bar{u}] \leq [\bar{v}]$ e $\bar{v} \in L$. Tomando $C = \bar{x}$ temos $C(\bar{v}) = \bar{v} \in L$. Como $[\bar{u}] \leq [\bar{v}]$ então $C(\bar{u}) \in L$, logo $\bar{u} \in L$. □

Proposição 3.3.15. Sejam \mathcal{S} uma álgebra de estabilização e $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ um morfismo de a.e. que reconhece um ideal de ordem L de $F(A)$. Se \mathcal{S} é finito então $\mathcal{S}(L)$ também é finito.

Demonstração. Pelo Lema 3.3.11, para qualquer C em $\text{Ctx}(A)$, $\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{v})$ implica $\varphi(C(\bar{u})) = \varphi(C(\bar{v}))$.

Vejamos que a lei

$$\begin{aligned}
 \theta : \varphi(F(A)) &\rightarrow \mathcal{S}(L) \\
 \varphi(\bar{u}) &\mapsto [\bar{u}]_{\rho_L}
 \end{aligned}$$

define uma aplicação sobrejetiva. De facto, se $\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{v})$, como $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$, obtemos

$$C(\bar{u}) \in L \Leftrightarrow \varphi(C(\bar{u})) \in \varphi(L) \Leftrightarrow \varphi(C(\bar{v})) \in \varphi(L) \Leftrightarrow C(\bar{v}) \in L,$$

donde $[\bar{u}]_{\rho_L} = [\bar{v}]_{\rho_L}$. Logo θ está bem definida e é claramente sobrejetiva. Portanto $|\mathcal{S}(L)| \leq |\varphi(F(A))| \leq |\mathcal{S}|$, donde se \mathcal{S} é finito, $\mathcal{S}(L)$ também é. □

Ao morfismo $\pi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}(L)$ definido por $\bar{u} \mapsto [\bar{u}]$ chamamos *morfismo sintático*.

Definição 3.3.16. Sejam \mathcal{S} e \mathcal{S}' álgebras de estabilização. Dizemos que \mathcal{S} divide \mathcal{S}' e escrevemos $\mathcal{S} \mid \mathcal{S}'$, se existe uma subálgebra de estabilização \mathcal{T}' de \mathcal{S}' e um morfismo $\varphi : \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{S}$ sobrejetivo. Dizemos que \mathcal{S} o-divide \mathcal{S}' e escrevemos $\mathcal{S} \mid_o \mathcal{S}'$, se existe uma o-subálgebra de estabilização \mathcal{T}' de \mathcal{S}' e um morfismo $\varphi : \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{S}$ sobrejetivo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}' & \hookrightarrow & \mathcal{S}' \\ & \downarrow \varphi & \\ & \mathcal{S} & \end{array}$$

Dado que $\mathcal{T}' \leq \mathcal{S}'$ implica $\mathcal{T}' \leq_o \mathcal{S}'$, então

$$\mathcal{S} \mid \mathcal{S}' \Rightarrow \mathcal{S} \mid_o \mathcal{S}'.$$

Proposição 3.3.17. Sejam \mathcal{T} , \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 álgebras de estabilização tais que \mathcal{T} divide \mathcal{S}_1 . Então \mathcal{T} divide $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$.

Demonstração. Seja \mathcal{T}_1 uma subálgebra de estabilização de \mathcal{S}_1 e $\varphi : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}$ um morfismo sobrejetivo. Pela Proposição 3.2.9, $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{S}_2$ é uma subálgebra de estabilização de $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$. Como a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi' : \mathcal{T}_1 \times \mathcal{S}_2 &\rightarrow \mathcal{T} \\ (t, s) &\mapsto \varphi(t) \end{aligned}$$

é um morfismo sobrejetivo, a álgebra de estabilização \mathcal{T} divide $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$. \square

Proposição 3.3.18. Sejam $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}'_1$ e \mathcal{S}'_2 álgebras de estabilização tais que \mathcal{S}'_1 divide \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}'_2 divide \mathcal{S}_2 . Então $\mathcal{S}'_1 \times \mathcal{S}'_2$ divide $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$.

Demonstração. Como \mathcal{S}'_1 divide \mathcal{S}_1 , existem $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{S}_1$ e um morfismo $\varphi_1 : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{S}'_1$ sobrejetivo. Analogamente existem uma subálgebra de estabilização \mathcal{T}_2 de \mathcal{S}_2 e um morfismo sobrejetivo $\varphi_2 : \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{S}'_2$. Pela Proposição 3.2.9, $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ é uma subálgebra de estabilização de $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$. Como a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_1 \times \varphi_2 : \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 &\rightarrow \mathcal{S}'_1 \times \mathcal{S}'_2 \\ (s_1, s_2) &\mapsto (\varphi_1(s_1), \varphi_2(s_2)) \end{aligned}$$

é um morfismo de álgebras de estabilização e é sobrejetiva, tem-se o que se pretendia. \square

Lema 3.3.19. Sejam $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ álgebras de estabilização e $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ um morfismo, então $\varphi(\mathcal{S}_1) \leq \mathcal{S}_2$.

Demonstração. Dado que φ é um morfismo, temos que $\varphi(\mathcal{S}_1)$ é uma álgebra de estabilização onde as operações e a ordem são as induzidas pelas de \mathcal{S}_2 . \square

Proposição 3.3.20. Seja L um ideal de ordem de $F(A)$. Se \mathcal{S} é uma álgebra de estabilização que reconhece L , então $\mathcal{S}(L) \mid \mathcal{S}$.

Demonstração. Seja $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ um morfismo que reconhece L . Pelo Lema 3.3.19, $\varphi(F(A))$ é uma subálgebra de estabilização de \mathcal{S} .

$$\begin{array}{ccc} \varphi(F(A)) & \xhookrightarrow{i} & \mathcal{S} \\ & \downarrow \varphi & \\ & \mathcal{S}(L) & \end{array}$$

Seja $\phi : \varphi(F(A)) \rightarrow \mathcal{S}(L)$ definida por $\phi(\varphi(\bar{u})) = [\bar{u}]_{\rho_L}$. Vejamos que ϕ está bem definida. Supondo $\varphi(\bar{u}) \leq_S \varphi(\bar{v})$, pelo Lema 3.3.11, temos para qualquer $C \in \text{Ctx}(A)$,

$$C(\bar{u}) \in L \Leftrightarrow \varphi(C(\bar{u})) \in \varphi(L) \Leftarrow \varphi(C(\bar{v})) \in \varphi(L) \Leftrightarrow C(\bar{v}) \in L.$$

Logo $[\bar{u}]_{\rho_L} \leq [\bar{v}]_{\rho_L}$. Como \leq_S é antissimétrica, então

$$\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{v}) \Rightarrow [\bar{u}]_{\rho_L} = [\bar{v}]_{\rho_L}.$$

Assim concluímos que ϕ está bem definida.

Atendendo a que φ é um morfismo e à definição das operações em $\mathcal{S}(L)$, conclui-se que ϕ também é um morfismo. Como ϕ é obviamente sobrejetiva, tem-se o resultado pretendido. \square

Observação 3.3.21. Pela demonstração anterior, podemos concluir que $\mathcal{S}(L)$ é um quociente de \mathcal{S} se $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ é sobrejetiva.

Proposição 3.3.22. *Seja L um ideal de ordem de $F(A)$ e \mathcal{S} uma álgebra de estabilização. Se $\mathcal{S}(L) \mid \mathcal{S}$, então \mathcal{S} reconhece L .*

Demonstração. Por hipótese, existe um morfismo $\psi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}(L)$, onde $\mathcal{T} \leq \mathcal{S}$. Para cada $a \in A$, podemos escolher $t_a \in \mathcal{T}$ tal que $\psi(t_a) = [\bar{a}]_{\rho_L}$. Seja $\varphi : A \rightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ tal que $a \mapsto t_a$. Atendendo ao Lema 3.1.11, denotamos por $\widehat{\varphi} : F(A) \rightarrow \mathcal{T}$ o morfismo de álgebras de estabilização induzido por φ . Consideremos o seguinte diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{S}(L) \\ \swarrow \widehat{\varphi} & & \uparrow \pi \\ & & F(A) \end{array}$$

onde π é o morfismo canónico de $F(A)$ em $\mathcal{S}(L)$. O diagrama é comutativo pois se u é um elemento de $\mathcal{T}(A)$,

- Caso $u \in A$, por definição temos $\psi \circ \widehat{\varphi}(u) = \psi(\varphi(u)) = \psi(t_u) = [\bar{u}]_{\rho_L} = \pi(\bar{u})$;
- Caso $u = u_1 u_2$, então $\psi \circ \widehat{\varphi}(u) = \psi \circ \widehat{\varphi}(u_1 u_2) = \psi(\widehat{\varphi}(u_1))\psi(\widehat{\varphi}(u_2)) = \pi(\bar{u}_1)\pi(\bar{u}_2) = \pi(\bar{u})$;
- Os restantes casos são análogos.

Vejamos que $\text{id} \circ \widehat{\varphi}$, onde $\text{id} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ é a inclusão, reconhece L :

- Suponhamos $(\text{id} \circ \widehat{\varphi})(\bar{u}) \leq (\text{id} \circ \widehat{\varphi})(\bar{v})$ com $\bar{v} \in L$ e $\bar{u} \in F(A)$. Em particular tem-se $\widehat{\varphi}(\bar{u}) \leq \widehat{\varphi}(\bar{v})$. Como ψ é um morfismo, temos que $\psi \circ \widehat{\varphi}(\bar{u}) \leq \psi \circ \widehat{\varphi}(\bar{v})$, isto é, $[\bar{u}]_{\rho_L} \leq [\bar{v}]_{\rho_L}$. Seja $C = \bar{x} \in \text{Ctx}(F(A))$, então

$$\bar{u} \in L \Leftrightarrow C(\bar{u}) \in L \Leftarrow C(\bar{v}) \in L \Leftrightarrow \bar{v} \in L.$$

Concluímos que \mathcal{S} reconhece L . \square

Corolário 3.3.23. *Seja \mathcal{S} uma álgebra de estabilização e L um ideal de ordem de $F(A)$. Então \mathcal{S} reconhece L se e só se $\mathcal{S}(L) \mid \mathcal{S}$.*

Lema 3.3.24. *A relação \mid é transitiva.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ e \mathcal{S}_3 álgebras de estabilização tais que $\mathcal{S}_1 \mid \mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}_2 \mid \mathcal{S}_3$. Sejam $\mathcal{S}'_2 \leq \mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}'_3 \leq \mathcal{S}_3$ e morfismos $\psi_2 : \mathcal{S}'_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$, $\psi_3 : \mathcal{S}'_3 \rightarrow \mathcal{S}_2$.

Vejamos que $\psi_3^{-1}(\mathcal{S}'_2) \leq \mathcal{S}_3$: de facto,

- $\psi_3^{-1}(\mathcal{S}'_2)$ é uma $(2, 1, 1)$ -subálgebra de \mathcal{S}'_3 , pelo que podemos considerar $\psi_3^{-1}(\mathcal{S}'_2)$ como subálgebra de estabilização de \mathcal{S}'_3 e, logo, de \mathcal{S}_3 .

Definindo $\varphi : \psi_3^{-1}(\mathcal{S}'_2) \rightarrow \mathcal{S}'_2 \rightarrow \mathcal{S}_1, z \mapsto \psi_2 \circ \psi_3(z)$, temos um morfismo. Logo $\mathcal{S}_1 \mid \mathcal{S}_3$. \square

Proposição 3.3.25. *Seja \mathcal{S} uma álgebra de estabilização e L um ideal de ordem de $F(A)$. Se \mathcal{S} reconhece L e $\mathcal{S} \mid \mathcal{T}$ então \mathcal{T} reconhece L .*

Demonstração. Como \mathcal{S} reconhece L , então $\mathcal{S}(L) \mid \mathcal{S}$, pela Proposição 3.3.20. Como a relação \mid é transitiva, temos que $\mathcal{S}(L) \mid \mathcal{T}$. Pelo Corolário 3.3.23, concluímos que \mathcal{T} reconhece L . \square

3.4 Complemento

Vamos agora estudar um objeto que, de certo modo, corresponde ao complemento em linguagens regulares.

Definição 3.4.1. Dado $L \subseteq F(A)$, definimos $F(A) \ominus L = \{\bar{u} \in F(A) \mid \nexists \bar{l} \in L, [\bar{l}]_{\rho_L} \leq [\bar{u}]_{\rho_L}\}$, que de certo modo, pode ser visto como “ $F(A) \setminus (\uparrow_{\rho_L} L)$ ”.

Recorde-se que no caso das linguagens regulares, a ordem em A^+ é a igualdade, pelo que, $A^+ \ominus L = A^+ \setminus L$ pois

$$\bar{u} \in A^+ \setminus L \Leftrightarrow \nexists \bar{l} \in L, [\bar{l}]_{\rho_L} = [\bar{u}]_{\rho_L} \Leftrightarrow \nexists \bar{l} \in L, [\bar{l}]_{\rho_L} \leq [\bar{u}]_{\rho_L} \Leftrightarrow \bar{u} \in A^+ \ominus L.$$

Proposição 3.4.2. *Seja L um ideal de ordem de $F(A)$.*

- O morfismo sintático associado a L reconhece $F(A) \ominus L$.*
- Se L é reconhecível, $F(A) \ominus L$ também o é.*

Demonstração. Consideremos o morfismo sintático $\pi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}(L)$, $\pi(\bar{u}) = [\bar{u}]_{\rho_L}$. Provemos que reconhece $F(A) \ominus L$.

Suponhamos que $\pi(\bar{u}) \leq \pi(\bar{v})$ com $\bar{v} \in F(A) \ominus L$. Se $\bar{u} \notin F(A) \ominus L$, então existe $\bar{l} \in L$ tal que $[\bar{l}]_{\rho_L} \leq [\bar{u}]_{\rho_L}$ donde $[\bar{l}]_{\rho_L} \leq [\bar{v}]_{\rho_L}$, o que implica que $\bar{v} \notin F(A) \ominus L$. Logo $\bar{u} \in F(A) \ominus L$. \square

Como consequência, se L é um ideal de ordem então $F(A) \ominus L$ é também um ideal de ordem.

3.5 Autómato de estabilização

Nesta secção apresentaremos o conceito análogo ao de autómato no campo das álgebras de estabilização. Obteremos também uma caracterização alternativa de ideal de ordem reconhecível.

Consideremos um conjunto parcialmente ordenado Q , um alfabeto finito A e uma aplicação (ou ação de A em Q)

$$\diamond : Q \times A \rightarrow Q.$$

Para cada elemento $q \in Q$, consideremos aplicações

$$\sigma, l_q^\omega, l_q^\sharp : Q \rightarrow Q.$$

A ação de A em Q pode ser estendida por indução a uma ação de $T(A)$ em Q : dados $w \in T(A)$ e $q \in Q$, definimos por indução $q \diamond w$:

- Se $w \in A^1$, então $q \diamond w$ já está definido;
- Se $w = w_1 w_2$, com $w_1, w_2 \in A^n$, então $q \diamond w := (q \diamond w_1) \diamond w_2$;
- Se $w = w_1^\omega$, com $w_1 \in A^n$, então $q \diamond w := l_q^\omega(\sigma(q) \diamond w_1)$;
- Se $w = w_1^\sharp$, com $w_1 \in A^n$, então $q \diamond w := l_q^\sharp(\sigma(q) \diamond w_1)$.

Definição 3.5.1. Um *autômato* \mathcal{A} é constituído por um 7-tuplo

$$(Q, A, \diamond, \sigma, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\sharp\}_{q \in Q}),$$

onde

- Q é um conjunto parcialmente ordenado cujos elementos chamamos de estados;
- A é um alfabeto finito;
- \diamond denota uma ação de A em Q tal que a correspondente ação de $T(A)$ sobre Q é compatível com a ordem de Q , isto é, para cada $w \in T(A)$

$$q_1 \leq q_2 \implies q_1 \diamond w \leq q_2 \diamond w;$$

- T é um subconjunto de Q ;
- σ é uma aplicação de Q para Q ;
- l_q^ω, l_q^\sharp são aplicações de Q para Q e que satisfazem

$$q_1 \leq q_2 \implies l_q^\omega(q_1) \leq l_q^\omega(q_2) \quad \text{e} \quad q_1 \leq q_2 \implies l_q^\sharp(q_1) \leq l_q^\sharp(q_2),$$

para quaisquer estados q, q_1 e q_2 em Q . Às aplicações l_q^ω e l_q^\sharp chamamos de *levantamentos*.

Um autômato \mathcal{A} diz-se finito se o número de estados é finito.

Observação 3.5.2. Notemos que a ação de $T(A)$ em Q , determina para cada $w \in T(A)$, a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{w} : Q &\rightarrow Q \\ q &\mapsto q \diamond w \end{aligned}$$

Assim $\{\tilde{w} : w \in T(A)\}$ é um subsemigrupo do monoide das transformações $\mathcal{O}^*(Q)$ que preservam a ordem de Q .

Seja $\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, \sigma, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\sharp\}_{q \in Q})$ um autômato. Fixado um estado $i \in Q$, definimos o conjunto

$$\text{Im}(\diamond) = \{q \in Q \mid \exists w \in T(A) \text{ tal que } q = i \diamond w\}.$$

Dado que $\text{Im}(\diamond)$ é um subconjunto de Q , podemos associar-lhe a restrição da ordem parcial de Q .

Definição 3.5.3. Consideremos um autômato $\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, \sigma, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\sharp\}_{q \in Q})$ e um estado $i \in Q$. Dizemos que \mathcal{A} é um *autômato generalizado* se T é um ideal de ordem de $\text{Im}(\diamond)$ e $\text{Im}(\sigma) = \{i\}$.

Ao elemento i chamamos *estado inicial* e aos elementos de T chamamos *estados terminais*. Deste modo, um autômato generalizado pode ser visto como um 7-tuplo

$$\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, i, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\sharp\}_{q \in Q}),$$

onde T é um ideal de ordem de $\text{Im}(\diamond)$.

Exemplo 3.5.4. Consideremos o conjunto parcialmente ordenado $Q := (\{i, q\}, =)$, o alfabeto $A := \{a, b\}$ e a ação e levantamentos

$$\begin{aligned} \diamond : Q \times A &\rightarrow Q & l_i^\omega, l_i^\#, l_q^\omega, l_q^\# : Q &\rightarrow Q \\ (i, a) &\mapsto q & i &\mapsto q \\ (q, a) &\mapsto q & q &\mapsto q \\ (i, b) &\mapsto i & & \\ (q, b) &\mapsto q & & \end{aligned}$$

Por exemplo,

$$i \diamond b^\omega a^2 a^\# = l_i^\omega(i \diamond b) \diamond a^2 a^\# = l_i^\omega(i) \diamond a^2 a^\# = q \diamond a^2 a^\# = q \diamond a^\# = l_q^\#(i \diamond a) = q.$$

O autômato $\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, i, T, \{l_i^\omega, l_q^\omega\}, \{l_i^\#, l_q^\#\})$ pode ser descrito por:

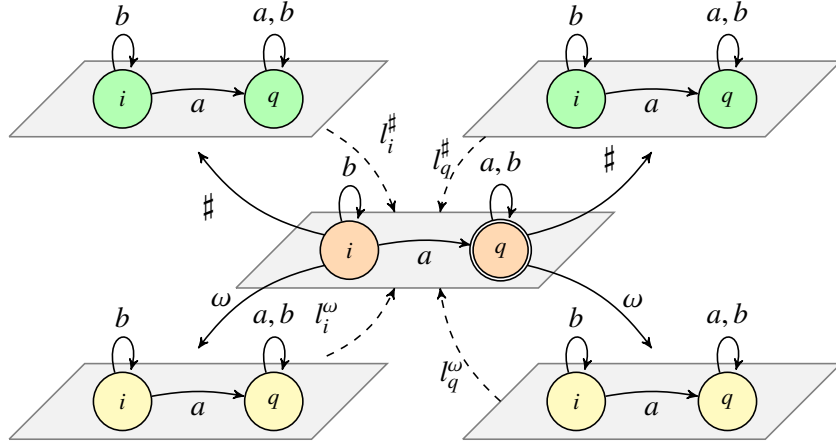


Figura 3.3: Autômato de estabilização \mathcal{A}

Definição 3.5.5. Um autômato generalizado $\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, i, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\#\}_{q \in Q})$ diz-se ser um *autômato de estabilização* se para quaisquer elementos u e v de $T(A)$ tais que $u \leq_p v$, se tem $\tilde{u}(q) \leq \tilde{v}(q)$ para qualquer estado $q \in Q$.

Como consequência, num autômato de estabilização $\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, i, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\#\}_{q \in Q})$ tem-se $\bar{u} = \bar{v} \Leftrightarrow u\rho v \Rightarrow \forall q \in Q, \tilde{u}(q) = \tilde{v}(q)$.

Se $\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, i, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\#\}_{q \in Q})$ é um autômato de estabilização, então podemos definir uma ação de $F(A)$ em Q em que, dados $q \in Q$ e $\bar{u} \in F(A)$,

$$q \diamond \bar{u} := q \diamond u.$$

De facto, a definição está bem definida pois se $\bar{u} = \bar{v}$ com u, v em $T(A)$ então

$$\begin{aligned} q \diamond u &= \tilde{u}(q) = \tilde{v}(q) && \text{(uma vez que } u\rho v) \\ &= q \diamond v. \end{aligned}$$

Definição 3.5.6. Um autômato de estabilização \mathcal{A} reconhece um ideal de ordem L de $F(A)$ se $L = L(\mathcal{A})$, onde $L(\mathcal{A})$ é o conjunto de elementos \bar{u} de $F(A)$ que levam i para um estado terminal, i.e. $i \diamond \bar{u} \in T$.

Proposição 3.5.7. *Seja L um ideal de ordem de $F(A)$.*

- i) *Se L é reconhecido por um autômato de estabilização \mathcal{A} , então também é reconhecido por uma álgebra de estabilização $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Se o conjunto dos estados de \mathcal{A} é finito, isto é, se \mathcal{A} é finito, então $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ é finito.*
- ii) *Se L é reconhecido por uma álgebra de estabilização \mathcal{S} então é reconhecido por um autômato de estabilização $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Se \mathcal{S} é finito então $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ é finito.*

Demonstração. i) Suponhamos L é reconhecido por um autômato de estabilização

$$\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, i, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\sharp\}_{q \in Q}).$$

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) := \{\tilde{w} : w \in T(A)\}$$

e as operações definidas por

$$\tilde{u} \cdot \tilde{v} := \tilde{v} \circ \tilde{u} = \widetilde{uv}, \quad \tilde{u}^\omega := \widetilde{u^\omega} \text{ e } \tilde{u}^\sharp := \widetilde{u^\sharp}.$$

É claro que as operações estão bem definidas. Dizemos que $\tilde{u} \leq \tilde{v}$ se para qualquer estado $q \in Q$, $\tilde{u}(q) \leq \tilde{v}(q)$. É claro, também, que a relação \leq é reflexiva, transitiva e antissimétrica, por isso é uma ordem parcial. Vejamos que $(\mathcal{S}(\mathcal{A}), \cdot, \leq, \omega, \sharp)$ é uma álgebra de estabilização:

- Já observamos que se trata de um semigrupo e é um semigrupo ordenado pois a ordem parcial \leq é compatível com o produto: se $u, v, x, y \in T(A)$ e $\tilde{u} \leq \tilde{v}$ e $\tilde{x} \leq \tilde{y}$, então para qualquer estado $q \in Q$, tendo em conta que $\tilde{y} \in O^*(Q)$,

$$(\tilde{u}\tilde{x})(q) = (\tilde{x} \circ \tilde{u})(q) \leq (\tilde{y} \circ \tilde{u})(q) \leq (\tilde{y} \circ \tilde{v})(q) = (\tilde{v} \cdot \tilde{y})(q).$$

- Temos por exemplo, $u(vu)^\sharp \rho (uv)^\sharp u$ em $T(A)$, donde $\widetilde{u(vu)^\sharp} = (\widetilde{uv})^\sharp u$ e portanto

$$\tilde{u}(\tilde{v}\tilde{u})^\sharp = \tilde{u}(\widetilde{vu})^\sharp = \widetilde{u(vu)^\sharp} = \widetilde{u(vu)^\sharp} = (\widetilde{uv})^\sharp u = \dots = (\tilde{u}\tilde{v})^\sharp \tilde{u},$$

sendo as restantes igualdades demonstradas de modo análogo. Como \mathcal{A} é um autômato de estabilização e $u^\sharp \leq_\rho u^\omega$,

$$\tilde{u}^\sharp = \widetilde{u^\sharp} \leq \widetilde{u^\omega} = \tilde{u}^\omega.$$

- Suponhamos que $\tilde{u} \leq \tilde{v}$. Então para qualquer estado $q \in Q$ temos $\tilde{u}(q) \leq \tilde{v}(q)$, em particular $\tilde{u}(i) \leq \tilde{v}(i)$. Por definição de \diamond , para qualquer $q \in Q$,

$$\tilde{u}^\omega(q) = \widetilde{u^\omega}(q) = q \diamond u^\omega = l_q^\omega(i \diamond u) = l_q^\omega(\tilde{u}(i)) \leq l_q^\omega(\tilde{v}(i)) = \dots = \tilde{v}^\omega(q).$$

Logo $\tilde{u}^\omega \leq \tilde{v}^\omega$. Analogamente, $\tilde{u}^\sharp \leq \tilde{v}^\sharp$.

Vejamos que $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ reconhece L . Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : F(A) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{A}) \\ \bar{u} &\mapsto \tilde{u} \end{aligned}$$

Por definição das operações definidas em $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, é claro que φ é um $(2, 1, 1)$ -morfismo e respeita a ordem. Vejamos que reconhece L . Suponhamos que $\bar{u} \in F(A)$, $\bar{v} \in L$ e $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$, i.e. $\tilde{u} \leq \tilde{v}$ em $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Em particular $\tilde{u}(i) \leq \tilde{v}(i)$. Como $L = L(\mathcal{A})$ e $\bar{v} \in L$, então $\tilde{v}(i) \in T$. Dado que T é ideal de ordem de $\text{Im}(\diamond)$, tem-se $\tilde{u}(i) \in L$, pelo que $\bar{u} \in L$.

Como $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{O}^*(Q)$, se Q é finito, então $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ é finito.

- ii) Suponhamos que $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, \cdot, \leq, \omega, \sharp)$ é uma álgebra de estabilização que reconhece L . Seja $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ um morfismo de álgebras de estabilização que reconhece L e ϵ um elemento que acrescentamos a \mathcal{S} tal que é uma identidade para as operações \cdot, ω e \sharp . Consideremos $Q := \mathcal{S} \cup \{\epsilon\}$ munido da ordem $\leq_Q = \leq_{\mathcal{S}} \cup \{(\epsilon, \epsilon)\}$, o estado inicial $i = \epsilon$, $T = \varphi(L)$ e $r \in Q$. Definimos as aplicações

$$\begin{array}{lll} \diamond : Q \times A \rightarrow Q & l_r^\omega : Q \rightarrow Q & l_r^\sharp : Q \rightarrow Q \\ (q, a) \mapsto q \cdot \varphi(\bar{a}) & q \mapsto r \cdot q^\omega & q \mapsto r \cdot q^\sharp \end{array}$$

Vejamos que a extensão de \diamond a $T(A)$, é dada por $q \diamond u = q \cdot \varphi(\bar{u})$, para $u \in T(A)$ e $q \in Q$. Como $T(A) = \bigcup A^n$, por indução temos

- Se $u \in A$, então $q \diamond u = q \cdot \varphi(\bar{u})$;
- Se $u = u_1 u_2$, então $q \diamond u = (q \diamond u_1) \diamond u_2 = (q \cdot \varphi(\bar{u}_1)) \cdot \varphi(\bar{u}_2) = q \cdot (\varphi(\bar{u}_1) \cdot \varphi(\bar{u}_2)) = q \cdot \varphi(\bar{u})$;
- Se $u = u_1^\omega$, então $q \diamond u = q \diamond u_1^\omega = l_q^\omega(i \diamond u_1) = l_q^\omega(\varphi(\bar{u}_1)) = q \cdot \varphi(\bar{u}_1)^\omega = q \cdot \varphi(\bar{u}_1^\omega) = q \cdot \varphi(\bar{u})$;
- Se $u = u_1^\sharp$, então $q \diamond u = q \diamond u_1^\sharp = l_q^\sharp(i \diamond u_1) = l_q^\sharp(\varphi(\bar{u}_1)) = q \cdot \varphi(\bar{u}_1)^\sharp = q \cdot \varphi(\bar{u}_1^\sharp) = q \cdot \varphi(\bar{u})$.

Por definição, se $q_1 \leq q_2$ então para qualquer elemento $u \in T(A)$, temos $\tilde{u}(q_1) \leq \tilde{u}(q_2)$. Para cada $r \in Q$, as aplicações l_r^ω e l_r^\sharp são levantamentos pois se $q_1 \leq q_2$, então

$$l_r^\omega(q_1) = r \cdot q_1^\omega \leq r \cdot q_2^\omega = l_r^\omega(q_2)$$

pois Q é um monoide ordenado. Da mesma forma, se $q_1 \leq q_2$ então $l_r^\sharp(q_1) = l_r^\sharp(q_2)$. Dado que T é um ideal de ordem de $\varphi(F(A))$ e $\text{Im}(\diamond) = \varphi(F(A))$, obtemos um autômato generalizado $\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, i, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\sharp\}_{q \in Q})$.

Vejamos que \mathcal{A} é um autômato de estabilização. Suponhamos que $u, v \in T(A)$ e que $u \leq_\rho v$, então em particular $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$. Logo para qualquer $q \in Q$, tem-se $\tilde{u}(q) = q \cdot \varphi(\bar{u}) \leq q \cdot \varphi(\bar{v}) = \tilde{v}(q)$, pois Q é um monoide ordenado.

Resta ver que L é a linguagem reconhecida por este autômato. Como, para $u \in T(A)$,

$$\bar{u} \in L \text{ se e só se } \varphi(\bar{u}) \in \varphi(L) = T \text{ se e só se } i \diamond \bar{u} \in T \text{ se e só se } \bar{u} \in L(\mathcal{A}),$$

obtemos $L = L(\mathcal{A})$.

Se \mathcal{S} é finito, então $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ é finito. □

Corolário 3.5.8. *Um ideal de ordem é reconhecível se e só se for reconhecido por um autômato de estabilização finito.*

3.5.1 Problema da Igualdade

Dados ideais de ordem reconhecíveis L_1 e L_2 , podemos-nos perguntar se são ou não iguais. É claro que uma possível abordagem consistiria em verificar se cada elemento de L_1 pertence a L_2 e vice-versa. No caso de estarmos perante ideais de ordem infinitos, este processo não seria finito, ou seja, não seria decidível. Então a pergunta que surge é se o problema em causa é decidível ou não, isto é, se existe um algoritmo independente dos ideais de ordem considerados, que dê num número finito de passos, uma resposta ao problema. O objetivo desta secção será provar que existe um tal algoritmo e, portanto, que este problema de igualdade é decidível.

Definição 3.5.9. Seja $\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, \sigma, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\sharp\}_{q \in Q})$ um autômato. Dizemos que $n \in \mathbb{N}$ é uma *fronteira* de \mathcal{A} se para qualquer $v \in T(A)$, existe $u \in A^n$ tal que $\tilde{v} = \tilde{u}$.

Por outras palavras, definindo o conjunto $\widetilde{A}^m := \{\tilde{u} \in O^*(Q) \mid u \in A^m\}$, temos que n é uma *fronteira* de \mathcal{A} se e só se $\widetilde{A}^m \subseteq \widetilde{A}^n$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$.

Vejamos uma condição suficiente para garantirmos a existência de uma *fronteira* num autômato \mathcal{A} arbitrário.

Proposição 3.5.10. *Sejam $\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, \sigma, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\sharp\}_{q \in Q})$ um autômato e n um natural tal que $\widetilde{A}^n = \widetilde{A}^{n+1}$. Então n é uma *fronteira*.*

Demonstração. Seja m um natural arbitrário e $u \in A^m$. Queremos provar que $\tilde{u} \in \widetilde{A}^n$. É claro que se $m \leq n + 1$ o resultado é verdadeiro pois $A^m \subseteq A^{n+1}$. Admitamos que o resultado é verdadeiro para $m - 1$ tal que $m - 1 \geq n + 1$. Como $u \in A^m$, existem elementos $u_1, u_2 \in A^{m-1}$ tais que $u = u_1 u_2$ ou $u = u_1^\omega$ ou $u = u_1^\sharp$. Por hipótese, então existem elementos v_1 e v_2 em A^n tais que $\tilde{u}_1 = \tilde{v}_1$ e $\tilde{u}_2 = \tilde{v}_2$. Assim se $u = u_1 u_2$,

$$\tilde{u} = \widetilde{u_1 u_2} = \tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1 = \tilde{v}_2 \circ \tilde{v}_1 = \widetilde{v_1 v_2}.$$

Como $v_1, v_2 \in A^n$, então $v_1 v_2 \in A^{n+1}$ donde $\tilde{u} \in \widetilde{A}^{n+1} = \widetilde{A}^n$. Se $u = u_1^\omega$, temos, para todo o $q \in Q$,

$$\tilde{u}(q) = \widetilde{u_1^\omega}(q) = q \diamond u_1^\omega = l_q^\omega(\sigma(q) \diamond u_1) = l_q^\omega(\tilde{u}_1(\sigma(q))) = l_q^\omega(\tilde{v}_1(\sigma(q))) = \dots = \tilde{v}_1^\omega(q),$$

com $v_1^\omega \in A^{n+1}$. Logo $\tilde{u} \in \widetilde{A}^{n+1} = \widetilde{A}^n$. O mesmo se verifica se $u = u_1^\sharp$. O resultado fica demonstrado pelo princípio de indução. \square

Corolário 3.5.11. *Seja \mathcal{A} um autômato com conjunto de estados Q finitos e $n = |Q|^{|Q|}$. Então n é uma *fronteira* de \mathcal{A} .*

Demonstração. Começemos por observar que se r não é uma *fronteira* então nenhum $s < r$ é uma *fronteira*. Portanto, se n não fosse uma *fronteira*, tendo em conta a Proposição 3.5.10, teríamos

$$\widetilde{A}^1 \subsetneq \widetilde{A}^2 \subsetneq \widetilde{A}^3 \subsetneq \dots \subsetneq \widetilde{A}^n \subsetneq \widetilde{A}^{n+1}.$$

Assim existiriam pelo menos $n + 1$ elementos distintos em \widetilde{A}^{n+1} , ou seja, existiriam $1 + |Q|^{|Q|}$ aplicações da forma $Q \rightarrow Q$ o que é falso. Logo n é uma *fronteira*. \square

No que se segue, seria suficiente provar que qualquer autômato tem uma *fronteira*. Mas com a demonstração que vamos dar, conseguimos ter uma noção mais exata do número máximo de passos necessário para o algoritmo concluir se dois ideais de ordem reconhecíveis são iguais ou não.

Definição 3.5.12. Seja $\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, \sigma, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\sharp\}_{q \in Q})$ um autômato. Dizemos que $q_1, q_2 \in Q$ são *equivalentes* se

$$\forall w \in T(A), \tilde{w}(q_1) \in T \Leftrightarrow \tilde{w}(q_2) \in T.$$

Existe um algoritmo que nos permite, dado um autômato \mathcal{A} finito e dois estados q_1 e q_2 de \mathcal{A} , dizer se q_1 e q_2 são equivalentes? A este problema chamamos *problema da equivalência*.

Lema 3.5.13. *Sejam $\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, \sigma, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\sharp\}_{q \in Q})$ um autômato finito e n uma *fronteira* de \mathcal{A} . Dados $q_1, q_2 \in Q$, se*

$$\forall u \in A^n, q_1 \diamond u \in T \Leftrightarrow q_2 \diamond u \in T$$

então q_1 é equivalente a q_2 .

Demonstração. Pretendemos provar que

$$\forall w \in T(A), \tilde{w}(q_1) \in T \Leftrightarrow \tilde{w}(q_2) \in T,$$

ou seja,

$$\forall w \in T(A), q_1 \diamond w \in T \Leftrightarrow q_2 \diamond w \in T.$$

Como n é uma fronteira, visto que

$$\forall w \in T(A), \exists u \in A^n \text{ tal que } \tilde{w} = \tilde{u},$$

o resultado é imediato. \square

Vamos então provar que

Proposição 3.5.14. *O problema da equivalência é decidível. Mais concretamente, existe um algoritmo tal que dado um autómato \mathcal{A} finito e estados q_1, q_2 de \mathcal{A} nos permite dizer se q_1 e q_2 são equivalentes ou não num número finito de passos que apenas depende de $|Q|$ e $|A|$.*

Demonstração. Consideremos o autómato $\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, \sigma, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\sharp\}_{q \in Q})$ e os estados $q_1, q_2 \in Q$. Pela Proposição 3.5.11, temos que $n = |Q|^{|Q|}$ é uma fronteira de \mathcal{A} . O conjunto A^n é finito e o seu número de elementos depende apenas de $|Q|$ e $|A|$. O algoritmo consiste em testar apenas para elementos $u \in A^n$ se

$$q_1 \diamond u \in T \Leftrightarrow q_2 \diamond u \in T$$

pois pela Lema 3.5.13, tal é suficiente para concluir se q_1 e q_2 são equivalentes ou não. Por construção, o número de passos necessários para responder ao problema de equivalência apenas depende de $|Q|$ e $|A|$. \square

Provemos agora que o problema da igualdade é de facto decidível. De facto, podemos considerar esta conclusão como um corolário da proposição anterior.

Proposição 3.5.15. *O problema da igualdade é decidível. Mais concretamente, existe um algoritmo que, dados L_1 e L_2 ideais de ordem reconhecíveis de $F(A)$, nos permite dizer se L_1 é ou não igual a L_2 .*

Demonstração. Sejam

$$\mathcal{A}_1 = (Q_1, A, \diamond_1, i_1, T_1, \{x_q^\omega\}_{q \in Q_1}, \{x_q^\sharp\}_{q \in Q_1}) \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_2 = (Q_2, A, \diamond_2, i_2, T_2, \{y_q^\omega\}_{q \in Q_2}, \{y_q^\sharp\}_{q \in Q_2})$$

autómatos de estabilização que reconhecem L_1 e L_2 respetivamente. Sem perda de generalidade, podemos considerar $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. Consideremos o autómato

$$\mathcal{A} = (Q, A, \diamond, \sigma, T, \{l_q^\omega\}_{q \in Q}, \{l_q^\sharp\}_{q \in Q})$$

onde $Q = Q_1 \cup Q_2$ munido da ordem $\leq_{Q_1} \cup \leq_{Q_2}$, $T = T_1 \cup T_2$,

$$\begin{array}{ll} \diamond : Q \times A \rightarrow Q & \sigma : Q \rightarrow Q \\ (q, a) \mapsto q \diamond_1 a, & \text{se } q \in Q_1 & q \mapsto i_1, & \text{se } q \in Q_1 \\ (q, a) \mapsto q \diamond_2 a, & \text{se } q \in Q_2 & q \mapsto i_2, & \text{se } q \in Q_2 \end{array}$$

se $r \in Q_1$,

$$\begin{array}{ll} l_r^\omega : Q \rightarrow Q & l_r^\sharp : Q \rightarrow Q \\ q \mapsto x_r^\omega(q), \quad \text{se } q \in Q_1 & q \mapsto x_r^\sharp(q), \quad \text{se } q \in Q_1 \\ q \mapsto q, \quad \text{se } q \in Q_2 & q \mapsto q, \quad \text{se } q \in Q_2 \end{array}$$

se $r \in Q_2$,

$$\begin{array}{ll} l_r^\omega : Q \rightarrow Q & l_r^\sharp : Q \rightarrow Q \\ q \mapsto q, \quad \text{se } q \in Q_1 & q \mapsto q, \quad \text{se } q \in Q_1 \\ q \mapsto y_r^\omega(q), \quad \text{se } q \in Q_2 & q \mapsto y_r^\sharp(q), \quad \text{se } q \in Q_2 \end{array}$$

É claro que as aplicações l_q^ω, l_q^\sharp são levantamentos e para qualquer $u \in T(A)$,

$$q_1 \diamond u = q_1 \diamond_1 u, \quad q_2 \diamond u = q_2 \diamond_2 u \quad \text{e} \quad q \leq q' \Rightarrow q \diamond u \leq q' \diamond u$$

se $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$ e $q, q' \in Q$. Deste modo, tem-se que i_1 e i_2 são equivalentes se e só se $L_1 = L_2$. Pela Proposição 3.5.14, o problema da equivalência é decidível, logo o problema $L_1 = L_2$ é decidível. \square

3.6 Pseudovariiedades e Variedades de ideais de ordem

Nesta secção apresentaremos os conceitos que vão corresponder aos de pseudovariiedade de monoides e de variedades de linguagens no campo das álgebras de estabilização. Em particular, vamos obter o correspondente do Teorema de Eilenberg.

Definição 3.6.1. Uma classe de álgebras de estabilização finitas não vazia \mathbf{V} é uma *pseudovariiedade de álgebras de estabilização* se

- i) $S \in \mathbf{V}, \mathcal{T} \leq S \Rightarrow \mathcal{T} \in \mathbf{V}$;
- ii) $S \in \mathbf{V}, \varphi : S \rightarrow \mathcal{T}$ é um morfismo $\Rightarrow \mathcal{T} \in \mathbf{V}$;
- iii) $S_1, \dots, S_k \in \mathbf{V} \Rightarrow S_1 \times \dots \times S_k \in \mathbf{V}$.

Como consequência da definição, uma pseudovariiedade de álgebras de estabilização é fechada para “divisores” e contém a álgebra de estabilização singular $\{1\}$.

Dada uma classe de ideais de ordem reconhecíveis \mathcal{V} , denotamos por $\mathcal{V}(F(A))$ o conjunto de ideais de ordem de \mathcal{V} sobre o alfabeto A . Seja L um ideal de ordem de $F(A)$, \bar{u} um elemento de $F(A)$ e C um elemento de $\text{Ctx}(A)$. Definimos

- $\bar{u}^{-1}L = \{\bar{w} \in F(A) \mid \bar{u}\bar{w} \in L\}$,
- $L\bar{u}^{-1} = \{\bar{w} \in F(A) \mid \bar{w}\bar{u} \in L\}$,
- $L^\sharp^{-1} = \{\bar{w} \in F(A) \mid \bar{w}^\sharp \in L\}$,
- $L^{\omega^{-1}} = \{\bar{w} \in F(A) \mid \bar{w}^\omega \in L\}$,
- $C^{-1}(L) = \{\bar{w} \in F(A) \mid C(\bar{w}) \in L\}$.

Proposição 3.6.2. *Sejam L um ideal de ordem reconhecível de $F(A)$ e $\bar{u} \in F(A)$. Então*

$$L^{\sharp^{-1}}, L^{\omega^{-1}}, \bar{u}^{-1}L, L\bar{u}^{-1}$$

são ideais de ordem reconhecíveis de $F(A)$.

Demonstração. Seja $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ um morfismo que reconhece L , com \mathcal{S} a.e. finita. Vejamos que φ também reconhece $L^{\sharp^{-1}}$. Suponhamos que $\varphi(\bar{w}) \leq \varphi(\bar{v})$ com $\bar{v} \in L^{\sharp^{-1}}$. Como φ é um morfismo e \leq respeita as operações, obtemos $\varphi(\bar{w}^{\sharp}) \leq \varphi(\bar{v}^{\sharp})$ com $\bar{v}^{\sharp} \in L$. Dado que φ reconhece L , tem-se que $\bar{w}^{\sharp} \in L$ e portanto $\bar{w} \in L^{\sharp^{-1}}$.

Vejamos que φ reconhece $\bar{u}^{-1}L$. Suponhamos que $\varphi(\bar{w}) \leq \varphi(\bar{v})$ com $\bar{v} \in \bar{u}^{-1}L$. Como φ é um morfismo e \leq respeita as operações, obtemos $\varphi(\bar{u}\bar{w}) \leq \varphi(\bar{u}\bar{v})$ com $\bar{u}\bar{v} \in L$. Dado que φ reconhece L , tem-se que $\bar{u}\bar{w} \in L$ e portanto $\bar{w} \in \bar{u}^{-1}L$. Os restantes casos são análogos. \square

Definição 3.6.3. *Uma variedade de ideais de ordem \mathcal{V} é uma classe de ideais de ordem reconhecíveis que satisfaz para alfabetos finitos A e B :*

- i) $\mathcal{V}(F(A))$ contém os ideais de ordem $\emptyset, F(A)$;
- ii) $\mathcal{V}(F(A))$ é fechada para a união e a interseção;
- iii) $\psi : F(A) \rightarrow F(B)$ morfismo e $L \in \mathcal{V}(F(B)) \Rightarrow \psi^{-1}(L) \in \mathcal{V}(F(A))$;
- iv) $L \in \mathcal{V}(F(A), \bar{u} \in F(A) \Rightarrow L^{\sharp^{-1}}, L^{\omega^{-1}}, \bar{u}^{-1}L, L\bar{u}^{-1} \in \mathcal{V}(F(A))$.

Observação 3.6.4. Consideremos um alfabeto finito A , a álgebra de estabilização singular $\mathcal{S} = \{1\}$ e o morfismo $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$. Por definição, o morfismo φ reconhece os ideais de ordem \emptyset e $F(A)$, ou seja, os ideais de ordem \emptyset e $F(A)$ são reconhecíveis. Tendo em conta as Proposições 3.2.10, 3.2.11 e 3.6.2, concluímos que a definição anterior está bem definida.

Proposição 3.6.5. *Seja \mathcal{V} uma classe de ideais de ordem. As afirmações seguintes são equivalentes.*

- i) *Para quaisquer $L \subseteq F(A)$, $\bar{u} \in F(A)$,*

$$L \in \mathcal{V}(F(A)) \Rightarrow L^{\sharp^{-1}}, L^{\omega^{-1}}, \bar{u}^{-1}L, L\bar{u}^{-1} \in \mathcal{V}(F(A)).$$

- ii) *Para quaisquer $L \subseteq F(A)$, $C \in \text{Ctx}(A)$*

$$L \in \mathcal{V}(F(A)) \Rightarrow C^{-1}(L) \in \mathcal{V}(F(A)).$$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja C um elemento arbitrário de $\text{Ctx}(A)$. Por definição $C = \bar{c}$, onde $c \in c_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Fazemos indução em $n \in \mathbb{N}$:

- o Caso $n = 1$, então $c = x$. Assim, $C^{-1}(L) = \{\bar{u} \in F(A) \mid \bar{u} \in L\} = L \in \mathcal{V}(F(A))$.
- o Suponhamos que $n = n_0 + 1$ e que a afirmação é verdadeira para o caso n_0 . Ou temos $c = d \cdot w$ ou $c = w \cdot d$ ou $c = d^\omega$ ou $c = d^\sharp$, onde $d \in c_{n_0}$ e $w \in T(A)$. Seja $D = \bar{d}$.
Caso $c = d \cdot w$, então $C^{-1}(L) = D^{-1}(L\bar{w}^{-1})$ pois, para $\bar{u} \in F(A)$,

$$\begin{aligned} \bar{u} \in C^{-1}(L) &\Leftrightarrow C(\bar{u}) \in L \\ &\Leftrightarrow \overline{\phi_u(c)} = \overline{\phi_u(d \cdot w)} \in L \\ &\Leftrightarrow \overline{\phi_u(d)} \cdot \overline{\phi_u(w)} \in L && (\phi_u \text{ é } (2, 1, 1)\text{-morfismo}) \\ &\Leftrightarrow \overline{\phi_u(d)} \cdot \bar{w} \in L && (\text{Observação 3.3.2}) \\ &\Leftrightarrow D(\bar{u}) \in L\bar{w}^{-1} \Leftrightarrow \bar{u} \in D^{-1}(L\bar{w}^{-1}). \end{aligned}$$

Por hipótese tem-se $L\bar{w}^{-1} \in \mathcal{V}(F(A))$, e atendendo à hipótese de indução, $C^{-1}(L) \in \mathcal{V}(F(A))$.

Caso $c = d^\omega$, então $C^{-1}(L) = D^{-1}(L^{\omega^{-1}})$ pois

$$\begin{aligned} \bar{u} \in C^{-1}(L) &\Leftrightarrow C(\bar{u}) \in L \\ &\Leftrightarrow \overline{\phi_u(c)} = \overline{\phi_u(d^\omega)} \in L \\ &\Leftrightarrow \overline{\phi_u(d)^\omega} \in L && (\phi_u \text{ é } (2, 1, 1)\text{-morfismo}) \\ &\Leftrightarrow \overline{\phi_u(d)}^\omega \in L \\ &\Leftrightarrow D(\bar{u}) \in L^{\omega^{-1}} \Leftrightarrow \bar{u} \in D^{-1}(L^{\omega^{-1}}). \end{aligned}$$

Por hipótese tem-se $L^{\omega^{-1}} \in \mathcal{V}(F(A))$, e atendendo à hipótese de indução, $C^{-1}(L) \in \mathcal{V}(F(A))$. Os restantes casos são análogos.

(\Leftarrow) Seja $C = \bar{x}^\sharp$. Por definição $C^{-1}(L) = L^{\sharp^{-1}}$ e por hipótese $C^{-1}(L) \in \mathcal{V}(F(A))$, logo $L^{\sharp^{-1}} \in \mathcal{V}(F(A))$. Analogamente temos $L^{\omega^{-1}}, \bar{u}^{-1}L, L\bar{u}^{-1} \in \mathcal{V}(F(A))$. \square

3.6.1 Teorema de Eilenberg

No que se segue, sempre que considerarmos um subconjunto L de $F(A)$ estará implícito que L é um ideal de ordem.

Proposição 3.6.6. *Seja \mathbf{V} uma pseudovariabilidade de álgebras de estabilização. Então*

$$\{L \subseteq F(A) : \mathcal{S}(L) \in \mathbf{V}\} = \{L \subseteq F(A) : \exists \mathcal{S} \in \mathbf{V} \text{ que reconhece } L\}.$$

Demonstração. (\subseteq) Pela Proposição 3.3.14, tem-se que $\mathcal{S}(L)$ reconhece L .

(\supseteq) Seja \mathcal{S} um elemento de \mathbf{V} que reconhece L . Pela Proposição 3.3.20, obtemos que $\mathcal{S}(L) \mid \mathcal{S}$, logo $\mathcal{S}(L)$ é quociente de uma subálgebra de estabilização \mathcal{T} de \mathcal{S} . Pelas propriedades i) e ii) da definição de pseudovariabilidade, $\mathcal{T} \in \mathbf{V}$ e logo $\mathcal{S}(L) \in \mathbf{V}$. \square

Proposição 3.6.7. *Seja \mathbf{V} uma pseudovariabilidade de álgebras de estabilização. Então \mathcal{V} definida por, para cada alfabeto finito A , $\mathcal{V}(F(A)) := \{L \subseteq F(A) : \mathcal{S}(L) \in \mathbf{V}\}$ é uma variedade de ideais de ordem.*

Demonstração. Vamos provar que $\mathcal{V}(F(A))$ satisfaz as condições da Definição 3.6.3.

- i) A pseudovariabilidade \mathbf{V} contém a álgebra de estabilização singular, donde pela Observação 3.6.4, temos que

$$\emptyset, F(A) \in \{L \subseteq F(A) : \exists \mathcal{S} \in \mathbf{V} \text{ que reconhece } L\}.$$

Pela Proposição 3.6.6, concluímos que $\emptyset, F(A) \in \mathcal{V}(F(A))$.

- ii) Consideremos L_1 e L_2 ideais de ordem em $\mathcal{V}(F(A))$. Por definição, as álgebras de estabilização $\mathcal{S}(L_1)$ e $\mathcal{S}(L_2)$ pertencem a \mathbf{V} . Logo $\mathcal{S}(L_1) \times \mathcal{S}(L_2) \in \mathbf{V}$ e pela demonstração da Proposição 3.2.10, tem-se que $\mathcal{S}(L_1) \times \mathcal{S}(L_2)$ reconhece $L_1 \cap L_2$ e $L_1 \cup L_2$, donde pela Proposição 3.6.6, concluímos que $\mathcal{V}(F(A))$ é fechado para a união e interseção.
- iii) Sejam $\psi : F(A) \rightarrow F(B)$ um morfismo e L um ideal de ordem em $\mathcal{V}(F(B))$. Pela demonstração da Proposição 3.2.11, a álgebra de estabilização $\mathcal{S}(L)$ reconhece $\psi^{-1}(L)$, donde pela Proposição 3.6.6, concluímos que $\psi^{-1}(L) \in \mathcal{V}(F(A))$.

- iv) Atendendo à Proposição 3.6.5, tomemos L e C elementos de $\mathcal{V}(F(A))$ e $\text{Ctx}(A)$, respetivamente. Seja $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ um morfismo que reconhece L com $\mathcal{S} \in \mathbf{V}$ e vejamos que φ reconhece $C^{-1}(L)$. Suponhamos que $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$ com $\bar{v} \in C^{-1}(L)$. Pela Proposição 3.3.11, obtemos $\varphi(C(\bar{u})) \leq \varphi(C(\bar{v}))$ com $C(\bar{v}) \in L$. Dado que φ reconhece L , tem-se que $C(\bar{u}) \in L$ e portanto $\bar{u} \in C^{-1}(L)$. Pela Proposição 3.6.6, concluímos que $C^{-1}(L) \in \mathcal{V}(F(A))$.

Assim, obtemos o resultado pretendido. \square

Pela proposição anterior, podemos definir uma correspondência \mathcal{F} que a cada pseudovarietade de álgebras de estabilização \mathbf{V} associa uma variedade de ideais de ordem $\mathcal{F}(\mathbf{V})$, ou simplesmente \mathcal{V} se não houver perigo de confusão.

Definição 3.6.8. Sejam \mathcal{S} uma álgebra de estabilização e s um elemento de \mathcal{S} . Definimos s^* como o conjunto dos elementos de \mathcal{S} menores que s , ou seja,

$$s^* = \{t \in \mathcal{S} \mid t \leq s\}.$$

Proposição 3.6.9. Sejam \mathbf{V} uma pseudovarietade de álgebras de estabilização, $\mathcal{V} = \mathcal{F}(\mathbf{V})$ a variedade de ideais de ordem associada a \mathbf{V} e \mathcal{S} um elemento de \mathbf{V} . Então existe um alfabeto finito A e ideais de ordem $L_1, \dots, L_k \in \mathcal{V}(F(A))$ tais que \mathcal{S} divide $\mathcal{S}(L_1) \times \dots \times \mathcal{S}(L_k)$.

Demonstração. Consideremos um alfabeto A tal que $|A| = |\mathcal{S}|$. Como \mathcal{S} é finito, A é também finito e existe um morfismo de a.e. sobrejetivo

$$\varphi : F(A) \twoheadrightarrow \mathcal{S}.$$

Para cada elemento s de \mathcal{S} , definimos $L_s = \varphi^{-1}(s^*)$. Por definição s^* é um ideal de ordem de \mathcal{S} e por conseguinte L_s é um ideal de ordem de $F(A)$. Também se tem que φ reconhece L_s , e por isso $L_s \in \mathcal{V}(F(A))$. Dados \bar{u} e \bar{v} elementos de $F(A)$, definimos:

$$\bar{u} \sim \bar{v} \iff \bar{u}\rho_{L_s}\bar{v}, \forall s \in \mathcal{S}.$$

Cada ρ_{L_s} é uma $(2, 1, 1)$ -congruência donde \sim também é uma $(2, 1, 1)$ -congruência em $F(A)$. Vejamos que $\sim \subseteq \ker \varphi$:

- Sejam (\bar{u}, \bar{v}) um elemento de \sim e $s := \varphi(\bar{u})$. Por hipótese, $\bar{u}\rho_{L_s}\bar{v}$. Tomando $C = \bar{x}$, por definição de ρ_{L_s} , podemos concluir que $C(\bar{v}) \in L_s$ pois $C(\bar{u}) \in L_s$ visto que $\varphi(C(\bar{u})) = \varphi(\bar{u}) = s \in s^*$. Então $\varphi(\bar{v}) \in s^*$, ou seja, $\varphi(\bar{v}) \leq s = \varphi(\bar{u})$.

Analogamente $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$. Logo $\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{v})$, isto é, $(\bar{u}, \bar{v}) \in \ker \varphi$.

Mostremos agora que $F(A)/_{\ker \varphi}$ e $F(A)/_{\sim}$ são álgebras de estabilização para ordens parciais naturais:

- Sendo φ um $(2, 1, 1)$ -morfismo, $\ker \varphi$ é uma $(2, 1, 1)$ -congruência e $F(A)/_{\ker \varphi}$ é uma $(2, 1, 1)$ -álgebra.

Definimos que $[\bar{u}]_{\ker \varphi} \leq [\bar{v}]_{\ker \varphi}$ se e só se $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$. É claro que esta definição de \leq não depende dos representantes tomados. As propriedades específicas da definição de a.e. resultam de φ ser $(2, 1, 1)$ -morfismo e desta definição de \leq .

- Definindo $[\bar{u}]_{\sim} \leq [\bar{v}]_{\sim}$ se e só se para qualquer $s \in \mathcal{S}$, $[\bar{u}]_{\rho_{L_s}} \leq [\bar{v}]_{\rho_{L_s}}$, vemos também que $F(A)/_{\sim}$ é a.e.

Tomemos a aplicação

$$\begin{aligned}\psi : \mathcal{S} &\rightarrow F(A)_{/\ker\varphi} \\ \varphi(\bar{u}) &\mapsto [\bar{u}]_{\ker\varphi}\end{aligned}$$

que sabemos ser um $(2, 1, 1)$ -isomorfismo pela demonstração do teorema do homomorfismo para $(2, 1, 1)$ -álgebras.

- Os morfismos ψ e ψ^{-1} são compatíveis com a ordem, pela definição de \leq em $F(A)_{/\ker\varphi}$.

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned}\pi_1 : F(A)_{/\sim} &\rightarrow F(A)_{/\ker\varphi} \\ [\bar{u}]_{\sim} &\mapsto [\bar{u}]_{\ker\varphi}\end{aligned}$$

Como \sim está contido em $\ker\varphi$, de facto π_1 é uma aplicação sobrejetiva e é um morfismo. A a.e. \mathcal{S} é finita, logo $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_k\}$. Designemos L_{s_j} por L_j para simplificar a escrita. Seja

$$\begin{aligned}\pi_2 : F(A)_{/\sim} &\rightarrow \prod_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{S}(L_s) \\ [\bar{u}]_{\sim} &\mapsto ([\bar{u}]_{\rho_{L_1}}, \dots, [\bar{u}]_{\rho_{L_k}})\end{aligned}$$

Como \sim está contido em ρ_{L_s} para todo o elemento s de \mathcal{S} , a aplicação está bem definida. É claro que π_2 é $(2, 1, 1)$ -morfismo. Vejamos que π_2 é injetivo:

- $\pi_2([\bar{u}]_{\sim}) = \pi_2([\bar{v}]_{\sim}) \Rightarrow ([\bar{u}]_{\rho_{L_1}}, \dots, [\bar{u}]_{\rho_{L_k}}) = ([\bar{v}]_{\rho_{L_1}}, \dots, [\bar{v}]_{\rho_{L_k}}) \Rightarrow \bar{u}\rho_{L_s}\bar{v}, \forall s \in \mathcal{S} \Rightarrow [\bar{u}]_{\sim} = [\bar{v}]_{\sim}$.
- Os morfismos π_2 e $\pi_2^{-1}|_{\text{Im}(\pi_2)}$ também são compatíveis com a ordem, dado que,

$$[\bar{u}]_{\sim} \leq [\bar{v}]_{\sim} \Leftrightarrow \forall s \in \mathcal{S}, [\bar{u}]_{\rho_{L_s}} \leq [\bar{v}]_{\rho_{L_s}} \Leftrightarrow \pi_2([\bar{u}]_{\sim}) \leq \pi_2([\bar{v}]_{\sim}).$$

Concluimos que $\pi_2(F(A)_{/\sim}) \leq \mathcal{S}(L_1) \times \dots \times \mathcal{S}(L_k)$, por 3.3.19.

Como $\alpha = \psi^{-1} \circ \pi_1 \circ \pi_2^{-1}|_{\text{Im}(\pi_2)} : \pi_2(F(A)_{/\sim}) \rightarrow \mathcal{S}$ é um morfismo sobrejetivo, temos o que se pretendia.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{S} & \xleftarrow{\alpha} & \pi_2(F(A)_{/\sim}) \\ & & \psi \downarrow \cong & & \pi_2 \uparrow \\ & & F(A)_{/\ker(\varphi)} & \xleftarrow{\pi_1} & F(A)_{/\sim} \end{array}$$

□

Proposição 3.6.10. *Sejam \mathbf{V} e \mathbf{W} pseudovarieties de álgebras de estabilização. Então \mathbf{V} está contido em \mathbf{W} se e só se para todo o alfabeto finito A , $\mathcal{V}(F(A))$ está contido em $\mathcal{W}(F(A))$, i.e. a correspondência \mathcal{F} preserva inclusões.*

Demonstração. (\Rightarrow) Dado um elemento L de $\mathcal{V}(F(A))$, então $\mathcal{S}(L)$ pertence a \mathbf{V} . Por hipótese $\mathcal{S}(L) \in \mathbf{W}$ e por isso $L \in \mathcal{W}(F(A))$.

(\Leftarrow) Dado um elemento \mathcal{S} de \mathbf{V} , pela Proposição 3.6.9, existem um alfabeto finito A e ideais de ordem L_1, \dots, L_k em $\mathcal{V}(F(A))$ tais que \mathcal{S} divide $\mathcal{S}(L_1) \times \dots \times \mathcal{S}(L_k)$. Por definição de divisão, existem uma subálgebra de estabilização \mathcal{T} de $\mathcal{S}(L_1) \times \dots \times \mathcal{S}(L_k)$ e um morfismo sobrejetivo $\alpha : \mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{S}$.

Como L_1, \dots, L_k pertencem a $\mathcal{W}(F(A))$, temos $\mathcal{S}(L_1), \dots, \mathcal{S}(L_k) \in \mathbf{W}$. Logo $\mathcal{S}(L_1) \times \dots \times \mathcal{S}(L_k) \in \mathbf{W}$, donde $\mathcal{T} \in \mathbf{W}$, e portanto $\mathcal{S} \in \mathbf{W}$. □

Seja C uma coleção de álgebras de estabilização. Denotamos por

$$(C) = \bigcap_{C \subseteq \mathbf{W}} \mathbf{W}$$

a pseudovarietade gerada por C , isto é, a menor pseudovarietade que contém C . É rotina provar que (C) é uma pseudovarietade. Dado que C está contida na pseudovarietade constituída por todas as álgebras de estabilização, (C) existe.

Proposição 3.6.11. *Seja $\mathbf{V} = (C)$. Então*

$$\mathcal{S} \in \mathbf{V} \text{ se e só se } \exists r \in \mathbb{N}, \exists \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r \in C : \mathcal{S} \mid \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_r.$$

Demonstração. (\Rightarrow) Consideremos a classe $\mathbf{A} = \{\mathcal{S} \in \mathbf{V} \mid \exists \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r \in C \text{ tal que } \mathcal{S} \mid \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_r\}$. Vejamos que \mathbf{A} é uma pseudovarietade:

- Seja $\mathcal{T} \leq \mathcal{S} \in \mathbf{A}$. Suponhamos que $\mathcal{S} \mid \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_r$ com $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r \in C$. Então como $\mathcal{T} \mid \mathcal{S}$, pelo Lema 3.3.24, concluimos que $\mathcal{T} \mid \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_r$ e por isso $\mathcal{T} \in \mathbf{A}$;
- Seja $\varphi : \mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathcal{T}$ um morfismo sobrejetivo, com $\mathcal{S} \in \mathbf{A}$. Então $\mathcal{T} \mid \mathcal{S}$ e, como o caso anterior, $\mathcal{T} \in \mathbf{A}$;
- Sejam $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n \in \mathbf{A}$. Fixado $j \in \{1, \dots, n\}$, existem $\mathcal{S}_1^j, \dots, \mathcal{S}_{k_j}^j$ elementos de C tais que \mathcal{T}_j divide $\mathcal{S}_1^j \times \dots \times \mathcal{S}_{k_j}^j$. Pela Proposição 3.3.18, $\mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_n$ divide $\mathcal{S}_1^1 \times \dots \times \mathcal{S}_{k_1}^1 \times \dots \times \mathcal{S}_1^n \times \dots \times \mathcal{S}_{k_n}^n$ e por isso $\mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_n \in \mathbf{A}$.

Como C está contido em \mathbf{A} e \mathbf{A} é uma pseudovarietade, concluimos que $(C) \subseteq \mathbf{A}$, isto é, $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{A}$.

(\Leftarrow) Seja \mathcal{S} uma álgebra de estabilização que divide $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_r$, onde $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r \in C$. Como \mathbf{V} é uma pseudovarietade, $\mathcal{S} \in \mathbf{V}$. \square

Proposição 3.6.12. *Seja \mathcal{W} uma variedade de ideais de ordem. Então existe uma pseudovarietade de álgebras de estabilização \mathbf{V} tal que $\mathcal{F}(\mathbf{V}) = \mathcal{W}$.*

Demonstração. Consideremos a pseudovarietade $\mathbf{V} := (\mathcal{S}(L) : L \in \mathcal{W}(F(A)), A \text{ alfabeto})$ e \mathcal{V} a variedade de ideais de ordem L tais que $\mathcal{S}(L) \in \mathbf{V}$, i.e. $\mathcal{V} = \mathcal{F}(\mathbf{V})$. Vejamos que $\mathcal{W} = \mathcal{V}$.

(\subseteq) Seja L um ideal de ordem pertencente a \mathcal{W} . Por definição de \mathbf{V} , temos $\mathcal{S}(L) \in \mathbf{V}$, donde $L \in \mathcal{V}$.

(\supseteq) Vejamos que $\mathcal{V}(F(A)) \subseteq \mathcal{W}(F(A))$ para cada alfabeto finito A .

Consideremos um ideal de ordem L em $\mathcal{V}(F(A))$. Então, $\mathcal{S}(L) \in \mathbf{V}$. Pela Proposição 3.6.11, existem alfabetos finitos A_1, \dots, A_r e ideais de ordem L_1, \dots, L_r pertencentes, respetivamente, a

$$\mathcal{W}(F(A_1)), \dots, \mathcal{W}(F(A_r))$$

tais que $\mathcal{S}(L)$ divide $\mathcal{S}(L_1) \times \dots \times \mathcal{S}(L_r)$. Denotemos $\mathcal{S}(L_1) \times \dots \times \mathcal{S}(L_r)$ por \mathcal{S} . Como $\mathcal{S}(L) \mid \mathcal{S}$, pela Proposição 3.3.22, \mathcal{S} reconhece L .

Sejam $\pi_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}(L_i)$ a projeção na i -ésima componente, $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ um morfismo que reconhece L e $\eta_i : F(A_i) \rightarrow \mathcal{S}(L_i)$ o morfismo sintático de L_i . Denotemos $\pi_i \circ \varphi$ por φ_i .

Vejamos que existe um morfismo $\psi_i : F(A) \rightarrow F(A_i)$ tal que $\varphi_i = \eta_i \circ \psi_i$:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \overset{\psi_i}{\dashrightarrow} & F(A_i) \\ \downarrow \varphi & \searrow \varphi_i & \downarrow \eta_i \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\pi_i} & \mathcal{S}(L_i) \end{array} \quad (1)$$

- Como η_i é sobrejetivo, para cada letra a de A , escolhamos um elemento de $\eta_i^{-1}(\varphi_i(\bar{a})) \subseteq F(A_i)$. Assim obtemos uma aplicação $\alpha : A \rightarrow F(A_i)$ e consequentemente um morfismo $\widehat{\alpha} = \psi_i : F(A) \rightarrow F(A_i)$, tal que, $\varphi_i(\bar{a}) = \eta_i \circ \psi_i(\bar{a})$ para qualquer $a \in A$. Por isso $\varphi_i = \eta_i \circ \psi_i$, atendendo ao Lema 3.1.11.

Dado $s \in \mathcal{S}$, o conjunto $s^* := \{t \in \mathcal{S} \mid t \leq s\}$ é um ideal de ordem de \mathcal{S} . Como $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$ e $\varphi(L)$ é um ideal de ordem de $\varphi(F(A))$, então

$$L = \bigcup_{s \in \varphi(L)} \varphi^{-1}(s^*).$$

Como $\varphi(L)$ é finito, então esta união tem um número finito de parcelas. Notemos que se $\varphi(L) = \emptyset$, então $L = \emptyset$, donde $L \in \mathcal{W}(F(A))$. Se virmos que $\varphi^{-1}(s^*) \in \mathcal{W}(F(A))$ para todo o $s \in \varphi(L)$, podemos concluir que $L \in \mathcal{W}(F(A))$ como pretendemos. Por definição de \mathcal{S} , temos $s = (s_1, \dots, s_r)$ donde $s^* = s_1^* \times \dots \times s_r^*$, pois, dado $t = (t_1, \dots, t_r) \in \mathcal{S}$,

$$t \in s^* \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq r, t_i \leq s_i \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq r, t_i \in s_i^* \Leftrightarrow t \in s_1^* \times \dots \times s_r^*.$$

Vejamus que também se tem a igualdade

$$\varphi^{-1}(s^*) = \bigcap_{i=1}^r \varphi_i^{-1}(s_i^*)$$

De facto,

$$\bar{u} \in \varphi^{-1}(s^*) \Leftrightarrow \varphi(\bar{u}) \in s^* \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq r, \pi_i \circ \varphi(\bar{u}) \in s_i^* \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq r, \varphi_i(\bar{u}) \in s_i^*.$$

Como é a interseção de um número finito de parcelas, se para cada i em $\{1, \dots, r\}$, se tem $\varphi_i^{-1}(s_i^*) \in \mathcal{W}(F(A))$, então podemos concluir que $\varphi^{-1}(s^*) \in \mathcal{W}(F(A))$.

Dado que $\varphi_i = \eta_i \circ \psi_i$, obtemos $\varphi_i^{-1}(s_i^*) = \psi_i^{-1}(\eta_i^{-1}(s_i^*))$. Atendendo à definição de variedade de ideais de ordem, se provarmos que $\eta_i^{-1}(s_i^*) \in \mathcal{W}(F(A_i))$, então $\varphi_i^{-1}(s_i^*) \in \mathcal{W}(F(A))$.

Como $s \in \varphi(L)$, existe uma palavra \bar{v} em $F(A)$ tal que $\varphi(\bar{v}) = s$. Consideremos o conjunto $\text{Ctx}_i := \{C \in \text{Ctx}(A_i) \mid C(\psi_i(\bar{v})) \in L_i\}$ e vejamos que

$$\eta_i^{-1}(s_i^*) = \bigcap_{C \in \text{Ctx}_i} C^{-1}(L_i)$$

Ora, tendo em conta que o diagrama (1) é comutativo, para $\bar{w} \in F(A_i)$,

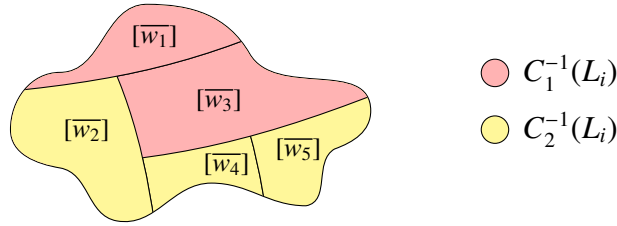
$$\begin{aligned} \bar{w} \in \eta_i^{-1}(s_i^*) &\Leftrightarrow \eta_i(\bar{w}) \leq s_i = \pi_i(\varphi(\bar{v})) = \eta_i(\psi_i(\bar{v})) \\ &\Leftrightarrow [\bar{w}]_{\rho_{L_i}} \leq [\psi_i(\bar{v})]_{\rho_{L_i}} \\ &\Leftrightarrow \forall C \in \text{Ctx}(A_i), (C(\bar{w}) \in L_i \Leftrightarrow C(\psi_i(\bar{v})) \in L_i) \\ &\Leftrightarrow \forall C \in \text{Ctx}_i, C(\bar{w}) \in L_i \\ &\Leftrightarrow \forall C \in \text{Ctx}_i, \bar{w} \in C^{-1}(L_i). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{W}(F(A_i))$ é uma variedade de ideais de ordem, $L_i \in \mathcal{W}(F(A_i))$ e Ctx_i está contido em $\text{Ctx}(A_i)$, então para todo o elemento C de Ctx_i , obtemos $C^{-1}(L_i) \in \mathcal{W}(F(A_i))$. Se provarmos que os conjuntos da forma $C^{-1}(L_i)$, com $C \in \text{Ctx}_i$, são em número finito então a proposição fica demonstrada. Como caso particular, se $\text{Ctx}_i = \emptyset$, então $\eta_i^{-1}(s_i^*) = F(A_i)$ e por isso $\eta_i^{-1}(s_i^*) \in \mathcal{W}(F(A_i))$.

- Como $S(L_i)$ é finito, $S(L_i) = \{[\bar{w}_1]_{\rho_{L_i}}, \dots, [\bar{w}_k]_{\rho_{L_i}}\}$. Fixado um elemento \bar{w} de $C^{-1}(L_i)$, dado que

$$\bar{w}' \in [\bar{w}]_{\rho_{L_i}} \Rightarrow C(\bar{w}') \in L_i \Rightarrow \bar{w}' \in C^{-1}(L_i),$$

então $C^{-1}(L_i)$ contém a classe $[\bar{w}]_{\rho_{L_i}}$. Como a congruência ρ_{L_i} tem apenas k classes, concluímos que existem no máximo 2^k conjuntos da forma $C^{-1}(L_i)$, com $C \in \text{Ctx}_i$.



Concluímos, portanto, a demonstração do resultado. \square

Teorema 3.6.13 (Eilenberg). *A aplicação $\mathcal{F} : \mathbf{V} \mapsto \mathcal{V}$ define uma bijeção entre pseudovariiedades de álgebras de estabilização e variedades de ideais de ordem.*

Demonstração. Pela Proposição 3.6.10 a aplicação é injetiva. Pela Proposição 3.6.12 a aplicação é sobrejetiva. \square

Proposição 3.6.14. *Seja \mathbf{V} uma pseudovariiedade de álgebras de estabilização. Então \mathcal{V} é fechada para a operação \ominus .*

Demonstração. Consideremos um ideal de ordem L pertencente a \mathcal{V} . Por definição $\mathcal{S}(L) \in \mathbf{V}$. Seja

$$\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}(L)$$

o morfismo sintático de L . Pela Proposição 3.4.2, o morfismo φ reconhece $F(A) \ominus L$. Logo pela Proposição 3.3.20, $\mathcal{S}(F(A) \ominus L)$ divide $\mathcal{S}(L)$ e portanto $\mathcal{S}(F(A) \ominus L) \in \mathbf{V}$. Concluímos que $F(A) \ominus L \in \mathcal{V}$. \square

3.6.2 Quasi-Ordens

Esta secção tem como objetivo apresentar alguns conceitos e resultados sobre quasi-ordens dos quais faremos uso na próxima secção. Nesta subsecção vamos fixar uma álgebra de estabilização \mathcal{S} .

Definição 3.6.15. Um subconjunto ρ de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ é uma *quasi-ordem compatível com as operações*, ou apenas *quasi-ordem*, se for uma relação reflexiva, transitiva e que satisfaça as seguintes condições:

- $(a, b), (c, d) \in \rho \Rightarrow (a \cdot b, c \cdot d) \in \rho$,
- $(a, b) \in \rho \Rightarrow (a^\#, b^\#) \in \rho$,
- $(a, b) \in \rho \Rightarrow (a^\omega, b^\omega) \in \rho$.

Definição 3.6.16. Sejam W e W' subconjuntos de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Dizemos que W' é a *quasi-ordem gerada* por W se W' for a menor quasi-ordem que contém W .

De facto, a menor quasi-ordem que contém W existe e é dada por

$$W' = \bigcap_{\substack{W \subseteq \rho \\ \rho \text{ quasi-ordem}}} \rho.$$

Vejamos outra possível caracterização.

Lema 3.6.17. *Sejam W um conjunto e W' a quasi-ordem gerada por W . Então $W' = \bigcup_{n \geq 1} W_n$, onde W_n é definido recursivamente:*

- $W_1 = W \cup \{(u, u) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}\}$,
- $W_{n+1} = W_n \cup \{(a, c) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid \exists b \in \mathcal{S} : (a, b), (b, c) \in W_n\} \cup \{(ac, bd) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid (a, b), (c, d) \in W_n\} \cup \{(a^\#, b^\#) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid (a, b) \in W_n\} \cup \{(a^\omega, b^\omega) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid (a, b) \in W_n\}$.

Demonstração. Seja $R = \bigcup_{n \geq 1} W_n$. Por definição, R é uma quasi-ordem que contém W . Como W' é a quasi-ordem gerada por W , tem-se que W' está contido em R . Fixemos uma quasi-ordem ρ que contém W e vejamos por indução em n que para qualquer natural n , se tem $W_n \subseteq \rho$:

- O caso $n = 1$ é imediato;
- Suponhamos que $W_{n_0} \subseteq \rho$ e consideremos um elemento (a, c) de W_{n_0+1} . Caso existam elementos $(a, b), (b, c)$ pertencentes a W_{n_0} , então $(a, b), (b, c) \in \rho$ donde $(a, c) \in \rho$. Os restantes casos são análogos. Portanto $W_{n_0+1} \subseteq \rho$.

Concluimos que R está contido em W' . Logo $R = W'$. □

Fixemos $W \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Sejam W'_1 a quasi-ordem gerada por W e W'_2 a congruência gerada por W . Então $W'_1 \subseteq W'_2$.

Proposição 3.6.18. *Se W é uma relação simétrica então a quasi-ordem gerada por W é uma congruência.*

Demonstração. Seja W' a quasi-ordem gerada por W . Se virmos que W' é uma relação simétrica, a proposição fica provada. Pelo Lema 3.6.17, $W' = \bigcup_{n \geq 1} W_n$. Vejamos por indução em n , que W_n é simétrica:

- O caso $n=1$ é imediato pois W é simétrica.
- Supondo que W_{n_0} é simétrica, consideremos um elemento (a, c) de W_{n_0+1} . Caso existam elementos $(a, b), (b, c)$ pertencentes a W_{n_0} , então $(c, b), (b, a) \in W_{n_0}$ pois por hipótese de indução a relação W_{n_0} é simétrica. Logo $(c, a) \in W_{n_0+1}$. Os restantes casos são análogos.

Concluimos que W' é simétrica. □

3.6.3 Desigualdades

Na teoria das linguagens formais, temos que toda a pseudovariabilidade de monoides é ultimamente definida por um sequência de identidades. Nesta secção provamos uma generalização deste resultado para álgebras de estabilização.

Definição 3.6.19. Sejam \bar{u} e \bar{v} elementos de $F(A)$ e \mathcal{S} uma álgebra de estabilização. Dizemos que \mathcal{S} satisfaz a desigualdade $\bar{u} \leq \bar{v}$ se para qualquer morfismo $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ se tem $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$, e que satisfaz a identidade $\bar{u} = \bar{v}$ se satisfaz as desigualdades $\bar{u} \leq \bar{v}$ e $\bar{v} \leq \bar{u}$.

Note-se que em [7] designam-se as desigualdades também por identidades.

Definição 3.6.20. Seja A um alfabeto finito. Dadas palavras \bar{u} e \bar{v} de $F(A)$, denotamos por $\mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$ a classe de álgebras de estabilização finitas que satisfazem $\bar{u} \leq \bar{v}$.

Proposição 3.6.21. $\mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$ é uma pseudovariiedade.

Demonstração. Vejamos,

- i) Sejam $\mathcal{S} \in \mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$ e $\mathcal{T} \leq \mathcal{S}$. Qualquer morfismo $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{T}$ se pode estender a $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ pois \mathcal{T} é uma subálgebra de estabilização de \mathcal{S} , pelo que $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$. Logo $\mathcal{T} \in \mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$.
- ii) Sejam $\mathcal{S} \in \mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$ e $\phi : \mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathcal{T}$ um morfismo sobrejetivo. Seja $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{T}$ um morfismo. Definimos

$$\begin{aligned} \alpha : A &\rightarrow \mathcal{S} \\ a &\mapsto s_a \end{aligned}$$

onde s_a é tal que $\phi(s_a) = \varphi(\bar{a})$.

Consideremos o morfismo $\widehat{\alpha} : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ definido em 3.1.11. Como $\phi(\widehat{\alpha}(\bar{a})) = \varphi(\bar{a})$ para qualquer $a \in A$, temos $\phi \circ \widehat{\alpha} = \varphi$ pelo Lema 3.1.11. Por hipótese $\widehat{\alpha}(\bar{u}) \leq \widehat{\alpha}(\bar{v})$, pois $\mathcal{S} \in \mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$, e ϕ respeita a ordem por ser um morfismo de álgebras de estabilização. Logo $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$. Portanto $\mathcal{T} \in \mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$.

$$\begin{array}{ccccc} T(A) & \twoheadrightarrow & F(A) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{T} \\ & \searrow \bar{\alpha} & \downarrow \widehat{\alpha} & \nearrow \phi & \\ & & \mathcal{S} & & \end{array}$$

- iii) Sejam $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r \in \mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$. Fixado um morfismo $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_r$,

$$\pi_i \circ \varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}_i$$

é também um morfismo, onde π_i é a projeção da i -ésima componente. Por hipótese $(\pi_i \circ \varphi)(\bar{u}) \leq (\pi_i \circ \varphi)(\bar{v})$ para qualquer i em $\{1, \dots, r\}$. Logo $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$ e $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_r \in \mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$.

□

Proposição 3.6.22. Seja $\{(\bar{u}_i, \bar{v}_i) \text{ com } i \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de pares de elementos de $F(A)$. Então $\mathbf{V}' = \bigcap_{i \geq 1} \mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ é uma pseudovariiedade.

Demonstração. i) Sejam $\mathcal{S} \in \mathbf{V}'$ e $\mathcal{T} \leq \mathcal{S}$. Para cada $i \geq 1$, temos que \mathcal{S} pertence a $\mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$. Logo $\mathcal{T} \in \mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ pois $\mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ é uma pseudovariiedade. Logo $\mathcal{T} \in \mathbf{V}'$.

ii) Sejam $\mathcal{S} \in \mathbf{V}'$ e $\varphi : \mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathcal{T}$ um morfismo. Para $i \geq 1$, a álgebra de estabilização \mathcal{S} pertence a $\mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$. Logo $\mathcal{T} \in \mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ pois $\mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ é uma pseudovariiedade. Portanto $\mathcal{T} \in \mathbf{V}'$.

iii) Sejam $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r \in \mathbf{V}$. Para $i \geq 1$ e $1 \leq j \leq r$, temos $\mathcal{S}_j \in \mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$. Logo $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_r \in \mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ pois $\mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ é uma pseudovariiedade. Assim $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_r \in \mathbf{V}'$.

□

Proposição 3.6.23. Seja $\{(\bar{u}_i, \bar{v}_i) \text{ com } i \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de pares de elementos de $F(A)$. Então $\mathbf{V}'' = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{i \geq k} \mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ é uma pseudovariiedade.

Demonstração. i) Sejam $\mathcal{S} \in \mathbf{V}''$ e $\mathcal{T} \leq \mathcal{S}$. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $i \geq k$, \mathcal{S} pertence a $\mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$. Desse modo, $\mathcal{T} \in \mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ pois $\mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ é uma pseudovariiedade, donde $\mathcal{T} \in \mathbf{V}''$.

ii) Sejam $\mathcal{S} \in \mathbf{V}''$ e $\varphi : \mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathcal{T}$ um morfismo. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $i \geq k$, \mathcal{S} pertence a $\mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$. Então $\mathcal{T} \in \mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$, donde $\mathcal{T} \in \mathbf{V}''$.

iii) Sejam $S_1, \dots, S_r \in \mathbf{V}''$. Para cada j em $\{1, \dots, r\}$, existe $k_j \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $i \geq k_j$, S_j pertence a $\mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$. Tomemos $k = \max\{k_1, \dots, k_r\}$. Para cada $i \geq k$, temos $S_1 \times \dots \times S_r \in \mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ pois $\mathbf{V}(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ é uma pseudovariabilidade. Logo $S_1 \times \dots \times S_r \in \mathbf{V}''$.

□

Definição 3.6.24. Sejam A um alfabeto finito, \mathcal{S} uma álgebra de estabilização e $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ um morfismo. Definimos uma relação \sim_φ em $F(A)$ por

$$\bar{u} \sim_\varphi \bar{v} \text{ se e só se } \varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{v})$$

e uma relação $\sim_{\mathcal{S}}$ por $\bar{u} \sim_{\mathcal{S}} \bar{v}$ se para todo o morfismo $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$, se tem $\bar{u} \sim_\varphi \bar{v}$.

As relações \sim_φ e $\sim_{\mathcal{S}}$ são congruências em $F(A)$ e os conjuntos $F(A)_{/\sim_\varphi}$ e $F(A)_{/\sim_{\mathcal{S}}}$ são álgebras de estabilização com as operações $(2, 1, 1)$ definidas de modo natural e onde:

- $[\bar{u}]_{\sim_\varphi} \leq_{\sim_\varphi} [\bar{v}]_{\sim_\varphi}$ se $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$;
- $[\bar{u}]_{\sim_{\mathcal{S}}} \leq_{\sim_{\mathcal{S}}} [\bar{v}]_{\sim_{\mathcal{S}}}$ se para qualquer morfismo $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$, $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v})$.

Daqui em diante, à relação $\sim_{\mathcal{S}}$ estará sempre subjacente à escolha de um alfabeto finito A .

Definição 3.6.25. Uma congruência \sim em $F(A)$ tem *índice finito* se o conjunto $F(A)_{/\sim}$ é finito.

Proposição 3.6.26. *Seja \mathcal{S} uma álgebra de estabilização finita. Então $\sim_{\mathcal{S}}$ tem índice finito.*

Demonstração. Consideremos um morfismo $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$. Definimos

$$\begin{aligned} \phi : F(A)_{/\sim_\varphi} &\rightarrow \mathcal{S} \\ [\bar{u}]_{\sim_\varphi} &\mapsto \varphi(\bar{u}) \end{aligned}$$

A aplicação está bem definida e é injetiva pois

$$\bar{u} \sim_\varphi \bar{v} \Leftrightarrow \varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{v}).$$

Logo $|F(A)_{/\sim_\varphi}| \leq |\mathcal{S}|$. Como \mathcal{S} é finito, existe um número finito m de morfismos $\varphi_i : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ com $i = 1, \dots, m$. Por definição

$$\sim_{\mathcal{S}} = \bigcap_{i=1, \dots, m} \sim_{\varphi_i}$$

e cada \sim_{φ_i} tem índice finito. Consideremos o conjunto

$$R := \left\{ ([\bar{u}]_{\sim_{\varphi_1}}, \dots, [\bar{u}]_{\sim_{\varphi_m}}) \in F(A)_{/\sim_{\varphi_1}} \times \dots \times F(A)_{/\sim_{\varphi_m}} : \bar{u} \in F(A) \right\}.$$

Desse modo, a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : R &\rightarrow F(A)_{/\sim_{\mathcal{S}}} \\ ([\bar{u}]_{\sim_{\varphi_1}}, \dots, [\bar{u}]_{\sim_{\varphi_m}}) &\mapsto [\bar{u}]_{\sim_{\mathcal{S}}} \end{aligned}$$

está bem definida e é sobrejetiva. Como $F(A)_{/\sim_{\varphi_1}} \times \dots \times F(A)_{/\sim_{\varphi_m}}$ é finito, $F(A)_{/\sim_{\mathcal{S}}}$ também o é. Assim $\sim_{\mathcal{S}}$ tem índice finito. □

Proposição 3.6.27. *Seja \sim uma congruência de índice finito em $F(A)$. Então \sim é finitamente gerada como congruência.*

Demonstração. Para cada elemento $[\bar{u}]_{\sim}$ de $F(A)_{/\sim}$, existe um natural $k_{[\bar{u}]_{\sim}}$ e um representante $\bar{w} \in F(A)$ de $[\bar{u}]_{\sim}$ tal que $w \in A^{k_{[\bar{u}]_{\sim}}-1}$. Como $F(A)_{/\sim}$ tem um número finito de elementos, $k := \max \{k_{[\bar{u}]_{\sim}} \mid \bar{u} \in F(A)\}$ fica bem definido. Consideremos o conjunto

$$W = \{(\overline{w_1}, \overline{w_2}) \in F(A) \times F(A) \mid \overline{w_1} \sim \overline{w_2} \text{ e } \exists u \in A^k, v \in A^{k-1} \text{ tal que } \overline{w_1} = \bar{u}, \overline{w_2} = \bar{v}\}$$

\equiv a congruência gerada por W . Provemos por indução que dado $\bar{w} \in F(A)$, existe $v \in A^{k-1}$ tal que $\bar{w} \equiv \bar{v}$:

- O caso $w \in A^{k-1}$ é trivial.
- Se $w \in A^k$, por definição de k , existe $v \in A^{k-1}$ tal que $\bar{w} \sim \bar{v}$. Então $(\bar{w}, \bar{v}) \in W$ e por isso $\bar{w} \equiv \bar{v}$.
- Se $w \in A^{n_0+1}$ e $n_0 + 1 > k$, então:
 - Suponhamos que existem $w_1, w_2 \in A^{n_0}$ tal que $w = w_1 \cdot w_2$. Por hipótese de indução, existem $v_1, v_2 \in A^{k-1}$ tal que $\overline{w_1} \equiv \overline{v_1}$ e $\overline{w_2} \equiv \overline{v_2}$. Logo $\bar{w} \equiv \overline{v_1 \cdot v_2}$, onde $v_1 \cdot v_2 \in A^k$. Por definição de k , existe $v \in A^{k-1}$ tal que $\overline{v_1 \cdot v_2} \sim \bar{v}$, logo, $(v_1 \cdot v_2, v) \in W$. Concluimos que $\bar{w} \equiv \bar{v}$.
 - Os restantes casos são análogos.

Por um lado, \equiv está contido em \sim . Dado $(\bar{u}, \bar{v}) \in \sim$, existem $u_1, v_1 \in A^{k-1}$ tal que $\bar{u} \equiv \overline{u_1}$ e $\bar{v} \equiv \overline{v_1}$. Como $\equiv \subseteq \sim$, temos $\overline{u_1} \sim \overline{v_1}$ e por isso $(\overline{u_1}, \overline{v_1}) \in W$. Então $\overline{u_1} \equiv \overline{v_1}$. Concluimos que (\bar{u}, \bar{v}) pertence a \equiv . Portanto $\sim = \equiv$. Como W é finito, \sim é finitamente gerada. \square

Dada uma álgebra de estabilização finita \mathcal{S} , pelas Proposições 3.6.26 e 3.6.27, existe um conjunto finito R que gera a congruência $\sim_{\mathcal{S}}$. Se definirmos

$$Y = \{(\bar{u}, \bar{v}), (\bar{v}, \bar{u}) \in F(A) \times F(A) \mid (\bar{u}, \bar{v}) \in R\},$$

então Y é uma relação simétrica, finita e que gera $\sim_{\mathcal{S}}$. Pela Proposição 3.6.18, a quasi-ordem gerada por Y é $\sim_{\mathcal{S}}$.

Definição 3.6.28. Sejam A um alfabeto finito e $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$ um morfismo. Definimos

$$\bar{u} \leq_{\varphi} \bar{v} \text{ se e só se } \varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\bar{v}).$$

Dizemos que $\bar{u} \leq_{\mathcal{S}} \bar{v}$ se para todo o morfismo $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{S}$, se tem $\bar{u} \leq_{\varphi} \bar{v}$.

Por definição, dadas duas palavras \bar{u} e \bar{v} em $F(A)$, então:

- $(\bar{u} \leq_{\varphi} \bar{v} \text{ e } \bar{v} \leq_{\varphi} \bar{u}) \Leftrightarrow \bar{u} \sim_{\varphi} \bar{v}$,
- $(\bar{u} \leq_{\mathcal{S}} \bar{v} \text{ e } \bar{v} \leq_{\mathcal{S}} \bar{u}) \Leftrightarrow \bar{u} \sim_{\mathcal{S}} \bar{v}$.

Por definição, \mathcal{S} satisfaz $\bar{u} \leq \bar{v}$ se e só se $\bar{u} \leq_{\mathcal{S}} \bar{v}$.

Proposição 3.6.29. Sejam A um alfabeto finito, \mathcal{S} uma álgebra de estabilização finita e

$$\gamma = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in F(A) \times F(A) \mid \bar{u} \leq_{\mathcal{S}} \bar{v}\}.$$

Então existe um conjunto finito W tal que a quasi-ordem gerada por W é γ .

Demonstração. Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ todos os morfismos de $F(A)$ para \mathcal{S} . Seja

$$\begin{aligned} \psi : F(A) &\rightarrow \mathcal{S}^r \\ \bar{u} &\mapsto (\varphi_1(\bar{u}), \dots, \varphi_r(\bar{u})) \end{aligned}$$

Então ψ é um morfismo. Denotemos por X_j o conjunto $\{\psi(\bar{u}) \in \mathcal{S}^r \mid u \in A^j\}$. Como \mathcal{S} é finito, então \mathcal{S}^r é finito, logo existe um natural n_0 tal que $X_{n_0} = \psi(F(A))$. Pelas Proposições 3.6.26 e 3.6.27, a relação $\sim_{\mathcal{S}}$ tem índice finito e é gerada por um subconjunto finito R de $F(A) \times F(A)$. Consideremos o conjunto

$$Y = \{(\bar{u}, \bar{v}), (\bar{v}, \bar{u}) \in F(A) \times F(A) \mid (\bar{u}, \bar{v}) \in R\}.$$

Por hipótese Y é finito, está contido em γ e gera a congruência $\sim_{\mathcal{S}}$. Seja

$$Z = \{(\overline{w_1}, \overline{w_2}) \in F(A) \times F(A) \mid \exists (u, v) \in A^{n_0} \times A^{n_0} \text{ tal que } (\overline{w_1}, \overline{w_2}) = (\bar{u}, \bar{v}) \text{ e } \bar{u} \leq_{\mathcal{S}} \bar{v}\}.$$

Vejamos que γ é a quasi-ordem gerada por $W := Y \cup Z$, isto é, γ é a menor quasi-ordem W' que contém W .

(\subseteq) Por definição, Y e Z estão contidos em γ e γ é uma quasi-ordem, logo $W' \subseteq \gamma$.

(\supseteq) Seja (\bar{u}, \bar{v}) um elemento de γ . Por definição de n_0 , existem elementos w_1 e w_2 de A^{n_0} tais que $\psi(\bar{u}) = \psi(\overline{w_1})$ e $\psi(\bar{v}) = \psi(\overline{w_2})$. Deste modo, $(\bar{u}, \overline{w_1})$ e $(\overline{w_2}, \bar{v})$ pertencem a $\sim_{\mathcal{S}}$, que é gerada por Y . Pela Proposição 3.6.18, a quasi-ordem gerada por Y é $\sim_{\mathcal{S}}$, ou seja, $Y' = \sim_{\mathcal{S}}$. Como $Y \subseteq W$, então $Y' \subseteq W'$. Assim $(\bar{u}, \overline{w_1}), (\overline{w_2}, \bar{v}) \in W'$. Por outro lado, $(\overline{w_1}, \overline{w_2}) \in Z$. Por transitividade, $(\bar{u}, \overline{w_2}) \in W'$ e novamente por transitividade $(\bar{u}, \bar{v}) \in W'$. Logo $\gamma \subseteq W'$.

Portanto $\gamma = W'$. □

Proposição 3.6.30. *Sejam \mathcal{S} uma álgebra de estabilização e $W \subseteq F(A) \times F(A)$ um conjunto tal que a menor quasi-ordem que o contém é W' . Suponhamos que para qualquer elemento (\bar{u}, \bar{v}) de W , a álgebra de estabilização \mathcal{S} satisfaz $\bar{u} \leq \bar{v}$. Então \mathcal{S} satisfaz $\overline{w_1} \leq \overline{w_2}$, para qualquer $(\overline{w_1}, \overline{w_2}) \in W'$.*

Demonstração. Por definição tem-se que \mathcal{S} satisfaz $\bar{u} \leq \bar{v}$ se e só se $(\bar{u}, \bar{v}) \in \leq_{\mathcal{S}}$. Dado que $\leq_{\mathcal{S}}$ é uma quasi-ordem, tem-se que $W' \subseteq \leq_{\mathcal{S}}$ pois $W \subseteq \leq_{\mathcal{S}}$. O resultado fica assim demonstrado. □

Definição 3.6.31. Dizemos que uma pseudovariiedade \mathbf{V} é *ultimamente definida por uma sequência de desigualdades* $\{\bar{u}_n \leq \bar{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se

$$\mathbf{V} = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \mathbf{V}(\bar{u}_n, \bar{v}_n).$$

Proposição 3.6.32. *Qualquer pseudovariiedade \mathbf{V} de álgebras de estabilização é ultimamente definida por uma sequência de desigualdades.*

Demonstração. Como qualquer álgebra de estabilização de \mathbf{V} é finita, \mathbf{V} é numerável a menos de isomorfismo e por isso podemos supor $\mathbf{V} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{R}_n = \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n$. Para cada natural i , tomamos um alfabeto $A_i = \{a_1, \dots, a_i\}$. Consideremos o conjunto

$$\gamma_i = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in F(A_i) \times F(A_i) \mid \bar{u} \leq_{\mathcal{R}_i} \bar{v}\}.$$

Pela Proposição 3.6.29, existe um conjunto finito $W_i = \{(u_i^1, v_i^1), \dots, (u_i^{r_i}, v_i^{r_i})\}$ que gera a quasi-ordem γ_i . Vejamos que

$$\mathcal{S} \in \mathbf{V} \text{ se e só se } \mathcal{S} \in \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq k} \bigcap_{i=1}^{r_n} \mathbf{V}(u_n^i, v_n^i):$$

(\Rightarrow) Dada uma álgebra de estabilização \mathcal{S} pertencente a \mathbf{V} , então $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e logo \mathcal{S} divide \mathcal{R}_n , para qualquer $n \geq k$. Assim, pela Proposição 3.6.21,

$$\mathcal{S} \in \bigcap_{n \geq k} \bigcap_{i=1}^{r_n} \mathbf{V}(u_n^i, v_n^i)$$

(\Leftarrow) Seja

$$\mathcal{S} \in \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq k} \bigcap_{i=1}^{r_n} \mathbf{V}(u_n^i, v_n^i).$$

Então existe um natural $k_0 \geq |\mathcal{S}|$ tal que

$$\mathcal{S} \in \bigcap_{n \geq k_0} \bigcap_{i=1}^{r_n} \mathbf{V}(u_n^i, v_n^i).$$

Dado $n \geq k_0$, como $k_0 \geq |\mathcal{S}|$ podemos fixar um morfismo sobrejetivo $\varphi : F(A_n) \twoheadrightarrow \mathcal{S}$. Consideremos

$$\begin{aligned} \phi : F(A_n)/\sim_{\mathcal{R}_n} &\twoheadrightarrow \mathcal{S} \\ [\bar{u}]_{\sim_{\mathcal{R}_n}} &\mapsto \varphi(\bar{u}) \end{aligned}$$

Trata-se de um morfismo sobrejetivo:

- ϕ está bem definida: Supondo que $[\bar{u}]_{\sim_{\mathcal{R}_n}} = [\bar{v}]_{\sim_{\mathcal{R}_n}}$, então por definição $(\bar{u}, \bar{v}), (\bar{v}, \bar{u}) \in \gamma_n$. Como \mathcal{S} pertence a $\bigcap_{i=1}^{r_n} \mathbf{V}(u_n^i, v_n^i)$, pela Proposição 3.6.30 temos que \mathcal{S} satisfaz $\bar{u} \leq \bar{v}$ e $\bar{v} \leq \bar{u}$ pois γ_n é a menor quasi-ordem que contém W_n . Logo $\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{v})$;
- Respeita a ordem por um raciocínio análogo ao anterior;
- ϕ é um morfismo: É imediato por definição das operações \cdot , ω e $\#$ em $F(A)/\sim_{\mathcal{R}_n}$;
- ϕ é sobrejetiva pois φ é sobrejetiva.

Depois de provarmos que $F(A_n)/\sim_{\mathcal{R}_n} \in \mathbf{V}$ a proposição fica demonstrada. Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ todos os morfismos de $F(A_n)$ em \mathcal{R}_n . Consideremos

$$\begin{aligned} \pi : F(A_n)/\sim_{\mathcal{R}_n} &\rightarrow F(A_n)/\sim_{\varphi_1} \times \cdots \times F(A_n)/\sim_{\varphi_r} \\ [\bar{u}]_{\sim_{\mathcal{R}_n}} &\mapsto ([\bar{u}]_1, \dots, [\bar{u}]_r) \end{aligned}$$

Então π é um morfismo injetivo:

- Bem definida: Se $\bar{u} \sim_{\mathcal{R}_n} \bar{v}$, por definição, para qualquer $1 \leq i \leq r$, temos $\bar{u} \sim_{\varphi_i} \bar{v}$;
- Injetiva: Se $\pi([\bar{u}]_{\sim_{\mathcal{R}_n}}) = \pi([\bar{v}]_{\sim_{\mathcal{R}_n}})$, então para qualquer morfismo φ_i , temos $\bar{u} \sim_{\varphi_i} \bar{v}$. Logo $\bar{u} \sim_{\mathcal{R}_n} \bar{v}$;
- Ordem: Por definição, temos $[\bar{u}]_{\sim_{\mathcal{R}_n}} \leq [\bar{v}]_{\sim_{\mathcal{R}_n}}$ sse $\pi([\bar{u}]) \leq \pi([\bar{v}])$;
- Morfismo: É imediato por definição das operações \cdot , ω e $\#$.

Desse modo, $F(A_n)/\sim_{\mathcal{R}_n}$ é isomorfo à álgebra de estabilização $\pi(F(A_n)/\sim_{\mathcal{R}_n})$. Como

$$\pi(F(A_n)/\sim_{\mathcal{R}_n}) \leq F(A_n)/\sim_{\varphi_1} \times \cdots \times F(A_n)/\sim_{\varphi_r},$$

é suficiente provar que $F(A_n)/\sim_{\varphi_1} \times \cdots \times F(A_n)/\sim_{\varphi_r}$ pertence a \mathbf{V} . Seja $\pi'_i : F(A_n)/\sim_{\varphi_i} \rightarrow \mathcal{R}_n$ definido por $[\bar{u}]_i \mapsto \varphi_i(\bar{u})$. Vejamos que π'_i é um morfismo injetivo:

- Bem definida / Injetiva: $\bar{u} \sim_{\varphi_i} \bar{v} \Leftrightarrow \varphi_i(\bar{u}) = \varphi_i(\bar{v})$;

- Ordem: $[\bar{u}]_i \leq [\bar{v}]_i \Leftrightarrow \varphi_i(\bar{u}) \leq \varphi_i(\bar{v})$;
- Morfismo: É imediato pois cada φ_i é um morfismo.

Logo $F(A_n)/\varphi_i$ é isomorfo a uma subálgebra de estabilização \mathcal{T}_i de \mathcal{R}_n . Como $\mathcal{R}_n \in \mathbf{V}$, pela definição de pseudovariabilidade obtemos $\mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_r \in \mathbf{V}$ e, por conseguinte, $F(A_n)/\varphi_1 \times \cdots \times F(A_n)/\varphi_r \in \mathbf{V}$. Concluimos assim que $\mathbf{S} \in \mathbf{V}$.

□

Corolário 3.6.33. *Qualquer pseudovariabilidade de semigrupos ordenados é ultimamente definida por uma sequência de desigualdades.*

Proposição 3.6.34. *Seja $\mathbf{V} = (\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r)$. Então \mathbf{V} é definida por uma sequência de desigualdades $\{\bar{u}_n = \bar{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, isto é,*

$$\mathbf{V} = \bigcap_{n \geq 1} \mathbf{V}(\bar{u}_n, \bar{v}_n).$$

Demonstração. Pela Proposição 3.6.32

$$\mathbf{V} = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \mathbf{V}(\bar{u}_n, \bar{v}_n).$$

Para todo o $1 \leq i \leq r$, existe um natural m_i tal que $\mathcal{S}_i \in \bigcap_{n \geq m_i} \mathbf{V}(\bar{u}_n, \bar{v}_n)$. Seja $m_0 = \max\{m_i : 1 \leq i \leq r\}$. Logo o conjunto $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r\}$ está contido em $\bigcap_{n \geq m_0} \mathbf{V}(\bar{u}_n, \bar{v}_n)$ e por conseguinte $\mathbf{V} = (\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r) \subseteq \bigcap_{n \geq m_0} \mathbf{V}(\bar{u}_n, \bar{v}_n)$. Concluimos que $\mathbf{V} = \bigcap_{n \geq m_0} \mathbf{V}(\bar{u}_n, \bar{v}_n)$. □

O mesmo tipo de resultados podem ser igualmente obtidos no âmbito de álgebras de estabilização com identidade. Daqui em diante, denotamos as álgebras de estabilização com identidade por \mathcal{M} e a álgebra de estabilização com identidade livre por $F^1(A) := (T(A) \cup \{\epsilon\})/\rho$.

3.6.4 Exemplo: \mathbf{J}_1^*

Definição 3.6.35. Seja \mathbf{J}_1^* a pseudovariabilidade de álgebras de estabilização com identidade que satisfazem

$$xy = yx, \quad x^2 = x, \quad x^\omega = x, \quad x^\#y^\# = (xy)^\#, \quad x \leq 1.$$

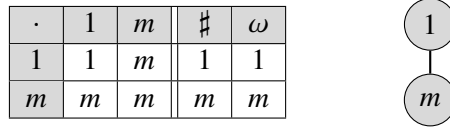
Definição 3.6.36. Uma álgebra de estabilização \mathcal{M} é cíclica se existe um elemento m de \mathcal{M} tal que \mathcal{M} é gerado por m como $(2, 1, 1, 0)$ -álgebra.

Seja \mathcal{M} uma álgebra de estabilização cíclica em \mathbf{J}_1^* . Se \mathcal{M} apenas tiver um elemento, então a tabela de Cayley é dada por

·	1	#	ω
1	1	1	1

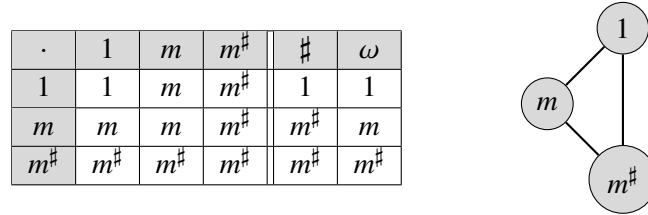
Figura 3.4: Álgebra de estabilização T_1

Caso \mathcal{M} tenha dois elementos, apenas temos uma possibilidade para a tabela de Cayley

Figura 3.5: Álgebra de estabilização U_1

pois \mathcal{M} satisfaz $x = x^2$, $x = x^\omega$. Não podemos ter $m^\# = 1$, pois se $m^\# = 1$, teríamos $1 = m$.

Se \mathcal{M} tiver três elementos, mais uma vez temos uma única possibilidade.

Figura 3.6: Álgebra de estabilização V_1

Atendendo às propriedades dos elementos de \mathbf{J}_1^* e às propriedades da definição de álgebra de estabilização vemos que não existem álgebras de estabilização cíclicas em \mathbf{J}_1^* com mais de 3 elementos.

Proposição 3.6.37. *Seja $X = \{\mathcal{N} \in \mathbf{J}_1^* \mid \mathcal{N} \text{ é cíclica}\}$. Então $\mathbf{J}_1^* = (X)$.*

Demonstração. O conjunto X está contido em \mathbf{J}_1^* , logo a pseudovariiedade (X) gerada por X também está contida em \mathbf{J}_1^* . Dado $\mathcal{M} \in \mathbf{J}_1^*$, seja $\{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_r\}$ o conjunto de todas as subálgebras de estabilização cíclicas de \mathcal{M} . Como \mathbf{J}_1^* é uma pseudovariiedade, temos que $\mathcal{N}_1 \times \dots \times \mathcal{N}_r \in \mathbf{J}_1^*$. Consideremos a aplicação

$$\alpha : \mathcal{N}_1 \times \dots \times \mathcal{N}_r \rightarrow \mathcal{M}$$

$$(m_1, \dots, m_r) \mapsto m_1 \cdots m_r$$

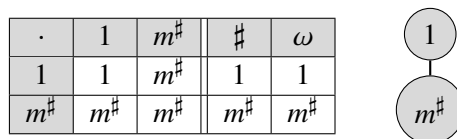
Então α é

- Morfismo: Como \mathcal{M} satisfaz $xy = yx$, $x^\omega = x$ e $(xy)^\# = x^\#y^\#$ e obviamente respeita a ordem, então α é um morfismo;
- Sobrejetiva: Dado $m \in \mathcal{M}$, existe um índice i tal que $\mathcal{N}_i = \langle m \rangle$. Logo $\alpha(1, \dots, m, \dots, 1) = m$.

Logo $\mathcal{M} \in (X)$. Concluimos que $\mathbf{J}_1^* = (X)$. □

Proposição 3.6.38. $\mathbf{J}_1^* = (V_1)$.

Demonstração. Pela Proposição 3.6.37, temos $\mathbf{J}_1^* = (X)$, onde $X = \{\mathcal{N} \in \mathbf{J}_1^* \mid \mathcal{N} \text{ é cíclica}\}$. Como vimos atrás, uma álgebra de estabilização cíclica em \mathbf{J}_1^* é isomorfa a T_1 , U_1 ou V_1 . Por definição, T_1 é uma subálgebra de estabilização de V_1 e U_1 é isomorfo à subálgebra de estabilização de V_1 :

Figura 3.7: Subálgebra de estabilização de V_1

Concluimos que qualquer elemento de X pertence a (V_1) e por isso $(X) \subseteq (V_1)$. Como $V_1 \in (X)$, então $(X) = (V_1)$. Assim $\mathbf{J}_1^* = (V_1)$. \square

Vejamus uma descrição de $\mathcal{V}(F^1(A))$ no caso geral em que $\mathbf{V} = (\mathcal{M})$. Denotemos por $\langle L_i \subseteq F^1(A) \mid i \in I \rangle_{\cap, \cup}$ o menor conjunto que contém L_i para qualquer $i \in I$ e é fechado para uniões e intersecções.

Proposição 3.6.39. *Sejam \mathcal{M} uma álgebra de estabilização e $\mathbf{V} := (\mathcal{M})$. Então, dado um alfabeto finito A ,*

$$\mathcal{V}(F^1(A)) = \langle \varphi^{-1}(m^*) \mid \varphi : F^1(A) \rightarrow \mathcal{M}, m \in \mathcal{M} \rangle_{\cap, \cup}$$

Demonstração. (\subseteq) Seja L um elemento de $\mathcal{V}(F^1(A))$. Como $\mathcal{M}(L)$ pertence a \mathbf{V} , pela Proposição 3.6.11, existe um natural r tal que $\mathcal{M}(L)$ divide \mathcal{M}^r . Pela Proposição 3.3.25, \mathcal{M}^r reconhece L , logo existe um morfismo $\varphi : F^1(A) \rightarrow \mathcal{M}^r$ que reconhece L . Definindo $P = \varphi(L)$, então

$$L = \varphi^{-1}(P) = \bigcup_{m \in P} \varphi^{-1}(m^*).$$

Seja $\pi_i : \mathcal{M}^r \rightarrow \mathcal{M}$ a i -ésima projeção. Então dado $m = (m_1, \dots, m_r) \in P$,

$$m^* = \bigcap_{i=1}^r \pi_i^{-1}(m_i^*),$$

pois $x = (x_1, \dots, x_r) \in m^*$ se e só se $(\forall i, \pi_i(x) \leq m_i)$ se e só se $(\forall i, \pi_i(x) \in m_i^*)$ se e só se $\forall i, x \in \pi_i^{-1}(m_i^*)$. Logo

$$L = \bigcup_{m \in P} \varphi^{-1}(m^*) = \bigcup_{m \in P} \bigcap_{i=1}^r (\pi_i \circ \varphi)^{-1}(m_i^*),$$

onde $\pi_i \circ \varphi : F^1(A) \rightarrow \mathcal{M}$. Então $L \in \langle \varphi^{-1}(m^*) \mid \varphi : F^1(A) \rightarrow \mathcal{M}, m \in \mathcal{M} \rangle_{\cap, \cup}$.

(\supseteq) Sejam $m \in \mathcal{M}$, $\varphi : F^1(A) \rightarrow \mathcal{M}$ um morfismo e $L = \varphi^{-1}(m^*)$. Como \mathcal{M} reconhece L e $\mathcal{M} \in \mathbf{V}$, pela Proposição 3.6.6, temos que $L \in \mathcal{V}(F^1(A))$. \square

Pelas Proposições 3.6.38 e 3.6.39, temos que $\mathcal{J}_1^*(F^1(A)) = \langle \varphi^{-1}(n^*) \mid \varphi : F^1(A) \rightarrow V_1, n \in V_1 \rangle_{\cap, \cup}$, mas vejamos que conseguimos ser mais precisos.

Definição 3.6.40. Sejam A um alfabeto e

- $B^1 = A$,
- $B^{n+1} = B^n \cup \{u \cdot v \mid u, v \in A^n\} \cup \{u^\omega \mid u \in A^n\}$.

Definimos $T'(A) = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^n \right) \cup \{\epsilon\}$ e $\tilde{F}(A) = \{\bar{u} \in F^1(A) \mid u \in T'(A)\}$.

Intuitivamente, $\tilde{F}(A)$ é o conjunto dos elementos \bar{w} de $F^1(A)$ tais que existe um representante u de \bar{w} em que não aparece $\#$.

Proposição 3.6.41. *Temos que $\mathcal{J}_1^*(F^1(A)) = \langle F^1(A) \setminus F^1(B), F^1(A) \setminus \tilde{F}(B) \mid B \subseteq A \rangle_{\cap, \cup}$.*

Demonstração. Como vimos, pelas Proposições 3.6.38 e 3.6.39, sabemos que $\mathcal{J}_1^*(F^1(A)) = \langle \varphi^{-1}(n^*) \mid \varphi : F^1(A) \rightarrow V_1, n \in V_1 \rangle_{\cap, \cup}$.

(\subseteq) Dados um morfismo $\varphi : F^1(A) \rightarrow V_1$ e n um elemento de V_1 , por definição, $n = 1$ ou $n = m$ ou $n = m^\#$.

- Suponhamos que $n = 1$. Como V_1 satisfaz a identidade $x \leq 1$, então $\varphi^{-1}(1^*) = F^1(A) = F^1(A) \setminus F(B)$, onde $B = \emptyset$,
- Suponhamos que $n = m$. Definimos $B = \{a \in A : \varphi(\bar{a}) = 1\}$. Como dado $\bar{u} \in F^1(A)$,

$$\bar{u} \notin \varphi^{-1}(n^*) \Leftrightarrow \varphi(\bar{u}) \not\leq n = m \Leftrightarrow \varphi(\bar{u}) = 1 \Leftrightarrow \bar{u} \in F^1(B) \Leftrightarrow \bar{u} \notin F^1(A) \setminus F^1(B),$$

então $\varphi^{-1}(n^*) = F^1(A) \setminus F^1(B)$.

- Suponhamos que $n = m^\sharp$. Definimos $B = \{a \in A : \varphi(\bar{a}) = 1 \text{ ou } \varphi(\bar{a}) = m\}$. Como

$$\bar{u} \notin \varphi^{-1}(n^*) \Leftrightarrow \varphi(\bar{u}) \not\leq n = m^\sharp \Leftrightarrow \varphi(\bar{u}) \in \{1, m\} \Leftrightarrow \bar{u} \in \tilde{F}(B) \Leftrightarrow \bar{u} \notin F^1(A) \setminus \tilde{F}(B),$$

então $\varphi^{-1}(n^*) = F^1(A) \setminus \tilde{F}(B)$.

Portanto obtemos $\mathcal{J}_1^*(F(A)) \subseteq \langle F^1(A) \setminus F^1(B), F^1(A) \setminus \tilde{F}(B) \mid B \subseteq A \rangle_{\cap, \cup}$.

(\supseteq) Seja B um subconjunto de A . Consideremos o morfismo $\varphi : F^1(A) \rightarrow V_1$ tal que $\varphi(\bar{a}) = 1$ se $a \in B$ e $\varphi(\bar{a}) = m$ se $a \in A \setminus B$. Como

$$\bar{u} \notin F^1(A) \setminus F^1(B) \Leftrightarrow \bar{u} \in F^1(B) \Leftrightarrow \varphi(\bar{u}) = 1 \Leftrightarrow \bar{u} \notin \varphi^{-1}(m^*),$$

então $F^1(A) \setminus F^1(B) = \varphi^{-1}(m^*)$ e por isso $F^1(A) \setminus F^1(B) \in \mathcal{J}_1^*(F(A))$. Do mesmo modo, definindo $\varphi : F^1(A) \rightarrow V_1$ tal que $\varphi(\bar{a}) = m$ se $a \in B$ e $\varphi(\bar{a}) = m^\sharp$ se $a \in A \setminus B$, obtemos

$$\bar{u} \notin F^1(A) \setminus \tilde{F}(B) \Leftrightarrow \bar{u} \in \tilde{F}(B) \Leftrightarrow \varphi(\bar{u}) \in \{1, m\} \Leftrightarrow \bar{u} \notin \varphi^{-1}(m^{\sharp*}).$$

Logo $F^1(A) \setminus \tilde{F}(B) = \varphi^{-1}(m^{\sharp*})$ e temos $F^1(A) \setminus \tilde{F}(B) \in \mathcal{J}_1^*(F^1(A))$. □

3.6.5 Identidades

Nesta secção pretendemos estudar as pseudovariiedades de álgebras de estabilização ultimamente definidas por uma sequência de igualdades.

Recorde-se que \mathcal{T} é uma o-subálgebra de estabilização de \mathcal{S} , isto é $\mathcal{T} \leq_o \mathcal{S}$, se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ e a aplicação $\text{id} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ é um morfismo.

Definição 3.6.42. Uma classe de álgebras de estabilização finitas \mathbf{V}_o é uma *pseudovariiedade de ordem de álgebras de estabilização* se:

- i) $\mathcal{S} \in \mathbf{V}_o, \mathcal{T} \leq_o \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{T} \in \mathbf{V}_o$,
- ii) $\mathcal{S} \in \mathbf{V}_o, \varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ é um morfismo $\Rightarrow \mathcal{T} \in \mathbf{V}_o$,
- iii) $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k \in \mathbf{V}_o \Rightarrow \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_k \in \mathbf{V}_o$.

Por definição, uma pseudovariiedade de ordem é uma pseudovariiedade. No entanto, \mathbf{J}_1^* é uma pseudovariiedade que não é uma pseudovariiedade de ordem. Atendendo à Figura 3.5,

·	1	m	#	ω
1	1	m	1	1
m	m	m	m	m

1

m

Figura 3.8: Subálgebra de estabilização U'_1

temos que U'_1 é uma o-subálgebra de estabilização de U_1 mas não pertence a \mathbf{J}_1^* .

Proposição 3.6.43. *Seja \mathbf{V}_o uma pseudovarietade de ordem. Então \mathbf{V}_o é fechado para a ordem. Mais concretamente, se $(\mathcal{S}, \leq_{\mathcal{S}})$ pertence a \mathbf{V}_o e (\mathcal{S}, \leq) é uma álgebra de estabilização onde as operações \cdot, ω, \sharp se mantêm, então (\mathcal{S}, \leq) também pertence a \mathbf{V}_o .*

Demonstração. Seja \leq_1 a intersecção de todas as ordens \leq' tais que (\mathcal{S}, \leq') é uma álgebra de estabilização. Então (\mathcal{S}, \leq_1) é uma álgebra de estabilização. Como $(\mathcal{S}, \leq_1) \leq_o (\mathcal{S}, \leq_{\mathcal{S}})$, então $(\mathcal{S}, \leq_1) \in \mathbf{V}_o$. A aplicação $\text{id} : (\mathcal{S}, \leq_1) \rightarrow (\mathcal{S}, \leq)$ é um morfismo sobrejetivo. Concluimos que $(\mathcal{S}, \leq) \in \mathbf{V}_o$. \square

No estudo das linguagens regulares, chamamos a $u = v$ uma identidade, com $u, v \in A^*$. De modo a manter a mesma terminologia, chamamos a $\bar{u} = \bar{v}$ uma identidade em $F(A)$. Anteriormente, considerámos $\mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$ com $\bar{u} \leq \bar{v}$. Vamos agora considerar $\mathbf{V}(\bar{u} = \bar{v})$.

Definição 3.6.44. Dados $\bar{u}, \bar{v} \in F(A)$, denotamos por $\mathbf{V}_o(\bar{u}, \bar{v})$ a classe de álgebras de estabilização que satisfazem a identidade $\bar{u} = \bar{v}$.

Proposição 3.6.45. $\mathbf{V}_o(\bar{u}, \bar{v})$ é uma pseudovarietade de ordem.

Demonstração. i) Sejam $\mathcal{S} \in \mathbf{V}_o(\bar{u}, \bar{v})$ e $\mathcal{T} \leq_o \mathcal{S}$. Para qualquer morfismo $\varphi : F(A) \rightarrow \mathcal{T}$, $\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{v})$ pois $\leq_{\mathcal{T}}$ está contida em $\leq_{\mathcal{S}}$. Logo $\mathcal{T} \in \mathbf{V}_o(\bar{u}, \bar{v})$.

ii) Sejam $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ um morfismo sobrejetivo, com $\mathcal{S} \in \mathbf{V}_o(\bar{u}, \bar{v})$. Como

$$\mathbf{V}_o(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v}) \cap \mathbf{V}(\bar{v}, \bar{u}),$$

temos que \mathcal{S} pertence a $\mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$ e $\mathbf{V}(\bar{v}, \bar{u})$. Então \mathcal{T} pertence a $\mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$ e a $\mathbf{V}(\bar{v}, \bar{u})$, donde, $\mathcal{T} \in \mathbf{V}_o(\bar{u}, \bar{v})$.

iii) Sejam $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r \in \mathbf{V}_o(\bar{u}, \bar{v})$. Então $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r$ pertencem a $\mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$ e a $\mathbf{V}(\bar{v}, \bar{u})$. Por isso, $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_r \in \mathbf{V}_o(\bar{u}, \bar{v})$. \square

Proposição 3.6.46. $\mathbf{V}'_o := \bigcap_{i \geq 1} \mathbf{V}_o(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ é uma pseudovarietade de ordem.

Demonstração. Análogo à Proposição 3.6.22. \square

Proposição 3.6.47. $\mathbf{V}''_o = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{i \geq k} \mathbf{V}_o(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ é uma pseudovarietade de ordem.

Demonstração. Análogo à Proposição 3.6.23. \square

Proposição 3.6.48. *Sejam \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 álgebras de estabilização e $\phi : (\mathcal{S}_1, \leq_1) \rightarrow (\mathcal{S}_2, \leq_2)$ um morfismo sobrejetivo para as operações \cdot, ω e \sharp . Então existe uma ordem parcial \leq em \mathcal{S}_1 tal que (\mathcal{S}_1, \leq) é uma álgebra de estabilização e $\phi : (\mathcal{S}_1, \leq) \rightarrow (\mathcal{S}_2, \leq_2)$ é um morfismo sobrejetivo de álgebras de estabilização.*

Demonstração. Definimos $W = \{(a^\sharp, a^\omega) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_1 \mid a \in \mathcal{S}_1\}$ e $\leq = W'$, ou seja, a quasi-ordem gerada por W . A relação \leq é uma ordem parcial em \mathcal{S}_1 :

- o Por definição, a relação \leq é reflexiva, transitiva e é fechada para as operações \cdot, ω e \sharp . Resta ver que é antissimétrica. O conjunto W está contido em \leq_1 e portanto $W' \subseteq \leq'_1$. Como \leq_1 é uma quasi-ordem, tem-se $W' \subseteq \leq_1$. Logo a relação \leq está contida em \leq_1 . Então se $a_1 \leq a_2$ e $a_2 \leq a_1$, temos $a_1 \leq_1 a_2$ e $a_2 \leq_1 a_1$, ou seja, $a_1 = a_2$.

Para qualquer elemento $a \in \mathcal{S}_1$, temos $(a^\#, a^\omega) \in \leq$. Logo (\mathcal{S}_1, \leq) é uma álgebra de estabilização. Pelo Lema 3.6.17,

$$\leq = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n.$$

Provemos por indução que a aplicação

$$\phi : (\mathcal{S}_1, \leq) \rightarrow (\mathcal{S}_2, \leq_2)$$

satisfaz o seguinte: para qualquer $s, t \in \mathcal{S}_1$, $s \leq t \Rightarrow \phi(s) \leq_2 \phi(t)$. Suponhamos $x \leq y$.

- Se $(x, y) \in W_1$, então $\phi(x) \leq_2 \phi(y)$;
- Suponhamos que o resultado é verdadeiro para qualquer elemento (x', y') de W_{n_0} e que $(x, y) \in W_{n_0+1}$. Caso $(x, y) = (a, c)$ com $(a, b), (b, c) \in W_{n_0}$, por hipótese de indução $\phi(a) \leq_2 \phi(b)$ e $\phi(b) \leq_2 \phi(c)$. Como \leq_2 é uma ordem parcial, $\phi(x) = \phi(a) \leq_2 \phi(c) = \phi(y)$.
Caso $(x, y) = (ac, bd)$ com $(a, b), (c, d) \in W_{n_0}$, por hipótese de indução $\phi(a) \leq_2 \phi(b)$ e $\phi(c) \leq_2 \phi(d)$. Como ϕ é um morfismo e \leq_2 é uma ordem parcial compatível com o produto,

$$\phi(x) = \phi(ac) = \phi(a)\phi(c) \leq_2 \phi(b)\phi(d) = \phi(bd) = \phi(y).$$

Os restantes casos são análogos.

Concluimos que $\phi : (\mathcal{S}_1, \leq) \rightarrow (\mathcal{S}_2, \leq_2)$ é um morfismo de álgebras de estabilização. \square

Definição 3.6.49. Dizemos que uma pseudovariiedade \mathbf{V} é *ultimamente definida por uma sequência de identidades* $\{\bar{u}_n = \bar{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se

$$\mathbf{V} = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \mathbf{V}_o(\bar{u}_n, \bar{v}_n).$$

Proposição 3.6.50. Toda a pseudovariiedade de ordem \mathbf{V}_o é ultimamente definida por uma sequência de identidades $\{\bar{u}_n = \bar{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Demonstração. Como qualquer álgebra de estabilização de \mathbf{V} é finita, \mathbf{V} é numerável a menos de isomorfismo e por isso podemos supor $\mathbf{V} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{R}_n = \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n$. Para cada natural i , tomamos um alfabeto $A_i = \{a_1, \dots, a_i\}$.

Pela Proposição 3.6.29, existe um conjunto finito $W_i = \{(u_i^1, v_i^1), \dots, (u_i^{r_i}, v_i^{r_i})\}$ que gera a quasi-ordem $\sim_{\mathcal{R}_i}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que W_i é simétrico. Vejamos que

$$\mathcal{S} \in \mathbf{V} \text{ se e só se } \mathcal{S} \in \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq k} \bigcap_{i=1}^{r_n} \mathbf{V}(u_n^i, v_n^i):$$

(\Rightarrow) Dada uma álgebra de estabilização \mathcal{S} pertencente a \mathbf{V} , então $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e logo \mathcal{S} divide \mathcal{R}_n , para qualquer $n \geq k$. Assim, pela Proposição 3.6.45,

$$\mathcal{S} \in \bigcap_{n \geq k} \bigcap_{i=1}^{r_n} \mathbf{V}_o(u_n^i, v_n^i)$$

(\Leftarrow) Seja

$$\mathcal{S} \in \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq k} \bigcap_{i=1}^{r_n} \mathbf{V}_o(u_n^i, v_n^i).$$

Então existe um natural $k_0 \geq |\mathcal{S}|$ tal que

$$\mathcal{S} \in \bigcap_{n \geq k_0} \bigcap_{i=1}^{r_n} \mathbf{V}_o(u_n^i, v_n^i).$$

Dado $n \geq k_0$, tal como provámos na demonstração da Proposição 3.6.32, temos que $F(A_n)/_{\sim_{\mathcal{R}_n}} \in \mathbf{V}_o$.

Vejamos que $\mathcal{S} \in \mathbf{V}_o$. Como $n \geq |\mathcal{S}|$, existe um morfismo sobrejetivo $\varphi : F(A_n) \twoheadrightarrow \mathcal{S}$. Consideremos

$$\begin{aligned} \phi : F(A_n)/_{\sim_{\mathcal{R}_n}} &\twoheadrightarrow \mathcal{S} \\ [\bar{u}]_{\sim_{\mathcal{R}_n}} &\mapsto \varphi(\bar{u}) \end{aligned}$$

Trata-se de um $(2, 1, 1)$ -morfismo sobrejetivo:

- ϕ está bem definida: Supondo que $[\bar{u}]_{\sim_{\mathcal{R}_n}} = [\bar{v}]_{\sim_{\mathcal{R}_n}}$, então por definição $(\bar{u}, \bar{v}) \in \sim_{\mathcal{R}_n}$. Como W_n é um conjunto simétrico e gera a congruência $\sim_{\mathcal{R}_n}$, pela Proposição 3.6.18, tem-se que $\sim_{\mathcal{R}_n}$ é a quasi-ordem gerada por W_n . Como \mathcal{S} pertence a $\bigcap_{i=1}^{r_n} \mathbf{V}_o(u_n^i, v_n^i)$, pela Proposição 3.6.30 temos que \mathcal{S} satisfaz $\bar{u} \leq \bar{v}$ e $\bar{v} \leq \bar{u}$ pois $\sim_{\mathcal{R}_n}$ é a menor quasi-ordem que contém W_n . Logo $\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{v})$;
- ϕ é um $(2, 1, 1)$ -morfismo: É imediato por definição das operações \cdot , ω e \sharp ;
- ϕ é sobrejetiva pois φ é sobrejetiva.

Pela Proposição 3.6.48, existe uma ordem \leq em $F(A_n)/_{\sim_{\mathcal{R}_n}}$ tal que ϕ é um morfismo sobrejetivo. Como uma pseudovarietade de ordem é fechada para a ordem, temos que $(F(A_n)/_{\sim_{\mathcal{R}_n}}, \leq) \in \mathbf{V}_o$. Concluimos que $\mathcal{S} \in \mathbf{V}_o$.

□

Definição 3.6.51. Seja C uma coleção de álgebras de estabilização. Denotamos por $(C)_o$ a menor pseudovarietade de ordem que contém C .

Por definição, (C) está contido em $(C)_o$.

Proposição 3.6.52. Seja $\mathbf{V}_o = (\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r)_o$. Então \mathbf{V}_o é definida por uma sequência de identidades $\{\bar{u}_n = \bar{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, isto é,

$$\mathbf{V}_o = \bigcap_{n \geq 1} \mathbf{V}_o(\bar{u}_n, \bar{v}_n).$$

Demonstração. Pela Proposição 3.6.50

$$\mathbf{V}_o = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \mathbf{V}_o(\bar{u}_n, \bar{v}_n).$$

Para todo o $1 \leq i \leq r$, existe um natural m_i tal que $\mathcal{S}_i \in \bigcap_{n \geq m_i} \mathbf{V}_o(\bar{u}_n, \bar{v}_n)$. Seja $m_0 = \max\{m_i : 1 \leq i \leq r\}$. Então o conjunto $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r\}$ está contido em $\bigcap_{n \geq m_0} \mathbf{V}_o(\bar{u}_n, \bar{v}_n)$ e por conseguinte $(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r)_o \subseteq \bigcap_{n \geq m_0} \mathbf{V}_o(\bar{u}_n, \bar{v}_n)$. Concluimos que $\mathbf{V}_o = \bigcap_{n \geq m_0} \mathbf{V}_o(\bar{u}_n, \bar{v}_n)$. □

CAPÍTULO 4

Funções de Custo

Neste capítulo apresentamos os conceitos de função de custo, de monoide de estabilização e de n -fatorização, sendo este último equivalente ao de n -computação dado por Thomas Colcombet em [2]. Introduziremos a ideia de transformada de estabilização que nos será útil para provar que existe uma bijeção entre funções de custo regulares e ideais de ordem reconhecidos por monoides de estabilização.

4.1 Definição

Começamos por apresentar o conceito de função de custo.

Definição 4.1.1. Seja A um alfabeto finito e \mathcal{A} o conjunto de todas as aplicações da forma $f : A^* \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Dizemos que $f \approx g$ se e só se para qualquer subconjunto X de A^* , se tem $f|_X$ limitada sse $g|_X$ limitada.

É claro que a relação \approx é uma relação de equivalência.

Definição 4.1.2. Uma *função de custo* é um elemento de \mathcal{A}/\approx .

Definição 4.1.3. Dada uma linguagem L de A^* , definimos a aplicação

$$\chi_L : A^* \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$
$$\chi_L(u) = \begin{cases} 0 & u \in L \\ \infty & u \notin L \end{cases}$$

a que chamamos *função característica de L* .

Proposição 4.1.4. Dadas duas linguagens L e L' de A^* , tem-se $\chi_L \approx \chi_{L'}$ se e só se $L = L'$.

Demonstração. Supondo que as aplicações χ_L e $\chi_{L'}$ estão \approx -relacionadas. Como $\chi_L|_L$ é limitado, então $\chi_{L'}|_L$ também é limitado. Desse modo, L está contida em L' . Analogamente, temos a inclusão inversa.

Caso L e L' sejam iguais, por definição $\chi_L = \chi_{L'}$, e por isso $\chi_L \approx \chi_{L'}$. □

A proposição anterior permite-nos identificar a linguagem L com a função de custo $[\chi_L]_{\approx}$ associada à sua função característica.

Definição 4.1.5. Um *monoide de estabilização* M é um monoide ordenado finito munido de uma aplicação $\sharp : E(M) \rightarrow E(M)$ que satisfaz as condições seguintes, para $s, t \in M$ e $e \in E(M)$:

- i) $(st)^\# s = s(ts)^\#$ se $st, ts \in E(M)$;
- ii) $(e^\#)^\# = e^\# e = e^\# \leq e$;
- iii) $e \leq f \Rightarrow e^\# \leq f^\#$;
- iv) $1^\# = 1$.

Note-se que $e^\# e = e e^\#$ pois $e^\# e = (ee)^\# e = e(ee)^\# = e e^\#$.

Observação 4.1.6. Um monoide finito M pode ser encarado com um monoide de estabilização

$$(M, \cdot, \leq, \#),$$

onde \leq é a igualdade e $\# : E(M) \rightarrow E(M)$ é a aplicação identidade.

4.2 Transformada de Estabilização

Nesta secção vamos introduzir um operador, a que chamamos de transformada de estabilização, que permite converter um monoide de estabilização numa álgebra de estabilização.

Um monoide de estabilização $(M, \cdot, \leq, \#)$ pode ser considerado uma álgebra de estabilização se definirmos as operações unárias $\omega, \#'$ do seguinte modo:

$$\begin{array}{ll} \omega : M \rightarrow E(M) & \#' : M \rightarrow E(M) \\ m \mapsto m^{|M|!} & m \mapsto m^{\omega\#} \end{array}$$

Em particular, se $e \in E(M)$ temos $e^\omega = e$. De facto, $(M, \cdot, \leq, \omega, \#')$ é uma álgebra de estabilização pois, dados $s, t \in M$,

- i) $(st)^\# s = ((st)^{|M|!})^\# s = (s(ts)^{|M|!-1}t)^\# s = s((ts)^{|M|!-1}ts)^\# = s((ts)^{|M|!})^\# = s(ts)^\# s$;
- ii) $s^\# \#' = s^{\omega\# \omega\#} = s^{\omega\# \#} = s^{\omega\#} = s^\#$ pois $s^{\omega\#} \in E(M)$. Do mesmo modo $s^\# s^\omega = s^\omega s^\# = s^\#$. Também $s^\# s^\omega = s^\# \leq s^\omega$;
- iii) Por definição, $s \leq t \Rightarrow s^\omega \leq t^\omega, s^\# \leq t^\#$;
- iv) $1 = 1^\omega = 1^\#$.

Definição 4.2.1. À transformação anterior chamamos *transformada de estabilização* e identificamo-la com o símbolo \mathcal{E} , isto é,

$$\mathcal{E}(M, \cdot, \leq, \#) = (M, \cdot, \leq, \omega, \#').$$

Ao escrevermos apenas $\mathcal{E}(M)$ estaremos a pensar na álgebra de estabilização.

Um morfismo de monoides de estabilização $\psi : M \rightarrow N$ é também um morfismo de álgebras de estabilização de $\mathcal{E}(M)$ em $\mathcal{E}(N)$: dado $m \in \mathcal{E}(M)$,

- $\psi(m)^\omega = \psi(m)^{|N|!} = \psi(m)^{|N|!|M|!} = \psi(m^{|M|!|N|!}) = \psi(m^{|M|!}) = \psi(m^\omega)$;
- $\psi(m)^\# = \psi(m)^{\omega\#} = \psi(m^\omega)^\# = \psi(m^{\omega\#}) = \psi(m^\#)$.

Por outras palavras, a transformada de estabilização respeita os morfismos, ou seja,

$$\begin{aligned}\psi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}(M) &\rightarrow \mathcal{E}(N) \\ m &\mapsto \psi(m)\end{aligned}$$

é um morfismo de álgebras de estabilização.

Daqui em diante, dada uma álgebra de estabilização, denota-se a primeira operação unária com o símbolo ω quando se trata da potência idempotente e ω' em geral. Mais concretamente, diferenciamos o símbolo ω com um apóstrofe consoante o respetivo caso.

Proposição 4.2.2. *Seja $(M, \cdot, \leq, \omega', \#')$ uma álgebra de estabilização com identidade finita tal que para qualquer $e \in E(M)$ se tem $e^{\omega'} = e$, e também $e^{\#'} \in E(M)$. Sendo $\#$ a restrição de $\#'$ a $E(M)$, tem-se que $(M, \cdot, \leq, \#)$ é um monoide de estabilização.*

Demonstração. Comparando as definições de álgebra de estabilização 3.1.2 e de monoide de estabilização 4.1.5 concluímos que $(M, \cdot, \leq, \#)$ é um monoide de estabilização. \square

De modo a simplificar a notação, quando não houver perigo de confusão, denota-se o monoide de estabilização da proposição anterior por $\mathcal{E}^{-1}(M)$.

Sejam $(M, \cdot, \leq, \omega', \#')$ e $(N, \cdot, \leq, \omega', \#')$ álgebras de estabilização com identidade finitas nas condições da Proposição 4.2.2. Então um morfismo de álgebras de estabilização $\psi : M \rightarrow N$ é também um morfismo de monoides de estabilização: dado $e \in E(\mathcal{E}^{-1}(M))$,

$$\psi(e^{\#}) = \psi(e^{\#'}) = \psi(e)^{\#'} = \psi(e)^{\#}.$$

Por outras palavras, a inversa da transformada de estabilização respeita os morfismos, ou seja,

$$\begin{aligned}\psi_{\mathcal{E}^{-1}} : \mathcal{E}^{-1}(M) &\rightarrow \mathcal{E}^{-1}(N) \\ m &\mapsto \psi(m)\end{aligned}$$

é um morfismo de monoides de estabilização.

Dado um monoide de estabilização M , a transformada inversa de $\mathcal{E}(M)$ está bem definida e $\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(M)) = M$. Mas nem sempre se tem $\mathcal{E}(\mathcal{E}^{-1}(M)) = M$ para qualquer álgebra de estabilização M nas condições da Proposição 4.2.2. Por outras palavras, a transformada de estabilização é injetiva mas não é sobrejetiva.

Proposição 4.2.3. *Seja M um monoide de estabilização e N uma álgebra de estabilização tal que N divide $\mathcal{E}(M)$. Então*

$$\mathcal{E}(\mathcal{E}^{-1}(N)) = N.$$

Demonstração. Consideremos $M = (M, \cdot, \leq, \omega', \#')$ e $N = (N, \cdot, \leq, \omega', \#')$.

- i) Suponhamos que N é uma subálgebra de estabilização de $\mathcal{E}(M)$. Em particular, N é finito. É claro que $e^{\omega'} = e$ e $e^{\#'} \in E(N)$ para qualquer $e \in E(N)$. Atendendo à Proposição 4.2.2, podemos formar o monoide de estabilização $\mathcal{E}^{-1}(N)$. Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} (N, \cdot, \leq, \omega', \#') & \xrightarrow{\mathcal{E}^{-1}} & (\mathcal{E}^{-1}(N), \cdot, \leq, \#_2) & \xrightarrow{\mathcal{E}} & (\mathcal{E}(\mathcal{E}^{-1}(N)), \cdot, \leq, \omega_2, \#_2) \\ \downarrow & & & & \\ (\mathcal{E}(M), \cdot, \leq, \omega_1, \#_1) & & & & \end{array}$$

De facto, temos para $n \in \mathcal{N}$:

- $n^{\omega_2} = n^{|\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{N})|!} = n^{|\mathcal{M}|!} = n^{|\mathcal{M}|!} = n^{\omega_1} = n^{\omega'}$;
- $n^{\#_2} = n^{|\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{N})|! \#_2} = n^{|\mathcal{N}|! \#_2} = n^{|\mathcal{N}|! \#'} = n^{|\mathcal{N}|! \#'_1} = n^{|\mathcal{N}|! |\mathcal{M}|! \#} = n^{|\mathcal{M}|! \#} = n^{\#_1} = n^{\#}$.

Logo $\mathcal{E}(\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{N})) = \mathcal{N}$.

- ii) Suponhamos que existe um morfismo de álgebras de estabilização sobrejetivo $\varphi : \mathcal{E}(M) \twoheadrightarrow \mathcal{N}$. Temos $|\mathcal{N}| \leq |\mathcal{M}|$, logo \mathcal{N} é finita. Para qualquer $e \in E(\mathcal{N})$, existe $m \in M$ tal que $\varphi(m) = e$. Então

$$e^{\omega'} = \varphi(m)^{\omega'} = \varphi(m^\omega) = \varphi(m^{|\mathcal{M}|!}) = \varphi(m)^{|\mathcal{M}|!} = e$$

e $e^{\#'} \in E(\mathcal{N})$ pois

$$e^{\#'} e^{\#'} = \varphi(m)^{\#'} \varphi(m)^{\#'} = \varphi(m^{\omega\#} m^{\omega\#}) = \varphi(m^{\omega\#}) = \dots = e^{\#'}.$$

Atendendo à Proposição 4.2.2, tem-se que podemos formar o monoide de estabilização $\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{N})$. Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{c} (\mathcal{E}(M), \cdot, \leq, \omega_1, \#'_1) \\ \downarrow \varphi \\ (\mathcal{N}, \cdot, \leq, \omega', \#') \xrightarrow{\mathcal{E}^{-1}} (\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{N}), \cdot, \leq, \#_2) \xrightarrow{\mathcal{E}} (\mathcal{E}(\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{N})), \cdot, \leq, \omega_2, \#'_2) \end{array}$$

Dado $n \in \mathcal{N}$, existe $m \in M$ tal que $\varphi(m) = n$. Deste modo:

- $n^{\omega_2} = \varphi(m)^{\omega_2} = \varphi(m)^{|\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{N})|!} = \varphi(m)^{|\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{N})|! |\mathcal{M}|!} = \varphi(m)^{|\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{N})|! |\mathcal{M}|!} = \varphi(m^{|\mathcal{M}|!}) = \varphi(m^{\omega_1}) = \varphi(m)^{\omega'} = n^{\omega'}$;
- $n^{\#'_2} = \varphi(m)^{\#'_2} = \varphi(m)^{|\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{N})|! \#_2} = \varphi(m^{\omega_1})^{\#_2} = \varphi(m^{\omega_1})^{\#'} = \varphi(m^{\omega_1 \#'_1}) = \varphi(m^{\omega_1 \#}) = \varphi(m^{\omega_1 \#}) = \varphi(m)^{\#'} = n^{\#}$.

Logo $\mathcal{E}(\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{N})) = \mathcal{N}$.

No caso geral, suponhamos que existe uma subálgebra de estabilização \mathcal{T} de $\mathcal{E}(M)$ e um morfismo sobrejetivo de álgebras de estabilização $\psi : \mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$. Então por i), tem-se $\mathcal{E}(\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$ e consequentemente $\mathcal{E}(\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{N})) = \mathcal{N}$ por ii). \square

Corolário 4.2.4. *Seja \mathbf{M} a classe de todos os monoides de estabilização. Então $\mathcal{E}(\mathbf{M})$ é uma pseudovariabilidade de álgebras de estabilização com identidade.*

Demonstração. Pela Proposição 4.2.3, tem-se que $\mathcal{E}(\mathbf{M})$ é fechado para divisões. Suponhamos que $M_1, \dots, M_k \in \mathbf{M}$ e que $\mathcal{N} = \mathcal{E}(M_1) \times \dots \times \mathcal{E}(M_k)$. Por definição,

$$\mathcal{E}(M_1) \times \dots \times \mathcal{E}(M_k) = \mathcal{E}(M_1 \times \dots \times M_k).$$

Logo $\mathcal{N} \in \mathcal{E}(\mathbf{M})$. Concluimos que $\mathcal{E}(\mathbf{M})$ é uma pseudovariabilidade. \square

4.3 Árvores

Nesta secção obtemos uma caracterização alternativa do conceito de n -computação apresentado por Thomas Colcombet [2].

Começemos por recordar o teorema das florestas de fatorização inicialmente apresentado por Simon [8].

Seja $w_1, \dots, w_k \in A^+$, representamos por (w_1, \dots, w_k) a sequência infinita indexada em \mathbb{N}

$$(w_1, \dots, w_k, 0, \dots).$$

Definição 4.3.1. Sejam S um semigrupo finito e $\varphi : A^+ \rightarrow S$ um morfismo. Uma *floresta de fatorização de tipo Ramsey* de φ é uma aplicação $d : A^+ \rightarrow (A^+ \cup \{0\})^{\mathbb{N}}$ dada por $d(w) = (w_1, \dots, w_k)$ para $w \in A^+$, tal que:

- $w \in A \Leftrightarrow d(w) = (w)$,
- $w = w_1 \dots w_k$,
- Se $k \geq 3$, então $\varphi(w_1) = \dots = \varphi(w_k) \in E(S)$.

Numa tal floresta de fatorização de tipo Ramsey, a *altura* h_d de uma palavra w é dada por:

$$h_d(w) = \begin{cases} 0 & \text{se } w \in A \\ 1 + \max \{h_d(w_1), \dots, h_d(w_k)\} & \text{se } d(w) = (w_1, \dots, w_k) \end{cases}$$

A fatorização de uma palavra w é representável por uma *árvore*.

Exemplo 4.3.2. Consideremos o alfabeto $A = \{a, b\}$, o semigrupo S dado por

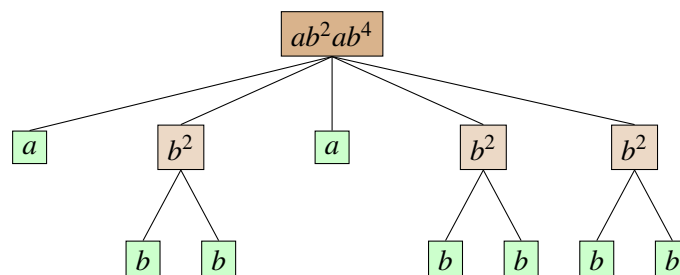
·	1	s
1	1	s
s	s	1

Figura 4.1: Semigrupo S

e o morfismo $\varphi : A^+ \rightarrow S$ definido por $\varphi(a) = 1$ e $\varphi(b) = s$. Seja d a floresta de factorização de tipo Ramsey definida por

- $d(a) = (a)$;
- $d(b) = (b)$;
- $d(b^2) = (b, b)$;
- $d(ab^2ab^4) = (a, b^2, a, b^2, b^2)$;
- $d(w) = (u_1, u_2)$, se $w \neq ab^2ab^4, b^2, b, a$ e $w = u_1u_2$ com $u_1 \in A$.

Então ab^2ab^4 é representável pela árvore



que tem altura 2.

Teorema 4.3.3. *Seja S um semigrupo finito e $\varphi : A^+ \rightarrow S$ um morfismo sobrejetivo. Então existe uma floresta de fatorização de tipo Ramsey d de φ , tal que para qualquer palavra $w \in A^+$, se tem $h_d(w) \leq 3|S|$.*

Demonstração. Consultar [8]. □

Recordemos uma definição mais geral de árvore apresentada em [1].

Definição 4.3.4. *Seja M um monoide de estabilização. Uma árvore (não vazia) t ordenada e de aridade não fixa é uma função parcial $t : \mathbb{N}^+ \rightarrow M$ tal que:*

- $\text{dom}(t)$ é finito;
- $\text{dom}(t) \cap \mathbb{N} = \{1\}$;
- $\text{dom}(t)$ é um conjunto fechado para prefixos não vazios, isto é,

se $y \in \text{dom}(t)$ e $x \in \mathbb{N}^+$ é um prefixo de y , então $x \in \text{dom}(t)$;

- Não existem saltos em $\text{dom}(t)$, isto é,

se $m, n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{N}^+$ são tais que $m \leq n$ e $xn \in \text{dom}(t)$,
então $xm \in \text{dom}(t)$.

Exemplo 4.3.5. *Seja M um monoide de estabilização*

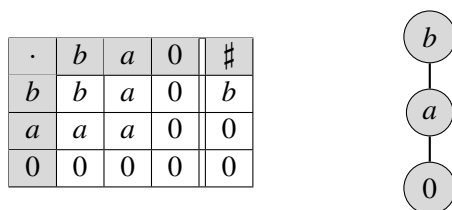
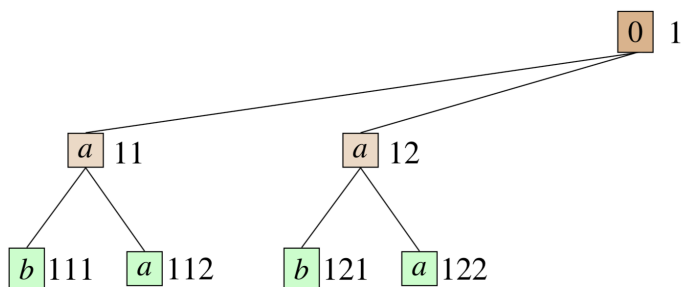


Figura 4.2: Monoide de estabilização $(M, \cdot, \leq, \#)$

e $X = \{1, 11, 111, 112, 12, 121, 122\}$. Então a aplicação $t : X \rightarrow M$ definida por



é uma árvore não vazia, ordenada e de aridade não fixa.

Os elementos de $\text{dom}(t)$ são chamados de *nós* da árvore t . Dados $x, y \in \text{dom}(t)$, dizemos que y é um *filho* de x se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $xn = y$. As *folhas* de t são os nós sem filhos. Dois nós

$$x = x_1 \dots x_{k_1} \quad \text{e} \quad y = y_1 \dots y_{k_2},$$

com $x_1, \dots, x_{k_1}, y_1, \dots, y_{k_2} \in \mathbb{N}$, estão em relação $<_l$ se e só se $\exists i \in \{2, \dots, k\}$ tal que

$$x_1 = y_1, \quad \dots \quad x_{i-1} = y_{i-1}, \quad x_i < y_i,$$

onde $k = \min\{k_1, k_2\}$. Um nó x está à esquerda de um nó y se $x <_l y$. No exemplo 4.3.5, tem-se que o nó 11 está à esquerda de 121 mas o nó 1 não está à esquerda de nenhum nó. Dizemos que a folha x é a i -folha se $x = y_i$, onde $y_1 <_l \dots <_l y_k$ são as folhas de t . A altura de um nó x é dada por

$$h_t(x) := 1 + \max\{|z| : z \in \mathbb{N}^* \text{ e } xz \in \text{dom}(t)\}.$$

Em particular, a altura de um nó é 1 se e só se é uma folha. A altura da árvore t é definida por $h_t(1)$.

Daqui em diante, sempre que considerarmos uma árvore, estará implícito que é uma árvore ordenada e de aridade não fixa.

Proposição 4.3.6. *Seja t uma árvore e x um nó de t com k filhos $y_1 <_l \dots <_l y_k$. Então*

$$h_t(x) = 1 + \max\{h_t(y_1), \dots, h_t(y_k)\}.$$

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{N}^*$ tal que $xz \in \text{dom}(t)$ e $h_t(x) = 1 + |z|$.

(\geq) Fixado $i \in \{1, \dots, k\}$, tem-se que $\exists n_i \in \mathbb{N}$ tal que $y_i = xn_i$ pois y_i é um filho de x . Seja $z_i \in \mathbb{N}^*$ tal que $y_i z_i \in \text{dom}(t)$ e $h_t(y_i) = 1 + |z_i|$. Então $x(n_i z_i) \in \text{dom}(t)$ e, pela maximalidade de $|z|$, tem-se $|z| \geq |n_i z_i|$. Assim,

$$h_t(x) = 1 + |z| \geq 1 + 1 + |z_i| = 1 + h_t(y_i).$$

Concluimos que $h_t(x) \geq 1 + \max\{h_t(y_1), \dots, h_t(y_k)\}$.

(\leq) Dado que x não é uma folha, temos $z \in \mathbb{N}^+$. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{N}^*$ tais que $z = nw$. Como $xz \in \text{dom}(t)$ e $\text{dom}(t)$ é fechado para prefixos, tem-se $xn \in \text{dom}(t)$. Assim xn é um filho de x , digamos y_i .

Seja $z_i \in \mathbb{N}^*$ tal que $y_i z_i \in \text{dom}(t)$ e $h_t(y_i) = 1 + |z_i|$. Como $y_i z_i = x(nz_i)$, pela maximalidade de $|z|$, tem-se $|z| \geq |nz_i|$, donde $|w| \geq |z_i|$. Por outro lado, como $y_i w \in \text{dom}(t)$, pela maximalidade de $|z_i|$, tem-se $|w| \leq |z_i|$. Deste modo $|w| = |z_i|$. Assim,

$$h_t(x) = 1 + |z| = 1 + 1 + |w| = 1 + 1 + |z_i| = 1 + h_t(y_i) \leq 1 + \max\{h_t(y_1), \dots, h_t(y_k)\}.$$

O resultado fica provado. □

Apresentamos agora o conceito de n -computação introduzido por Thomas Colcombet em [2]. No que se segue, o conjunto M^+ denotará o conjunto das palavras sobre o alfabeto M .

Definição 4.3.7. Consideremos um monoide de estabilização M e $u = m_1 \dots m_r \in M^+$. Uma n -computação sobre a palavra u é uma árvore t de aridade não fixa, ordenada tal que:

- As imagens por t das folhas lidas da esquerda para a direita formam a palavra $u \in M^+$, ou seja, se $x_1 <_l \dots <_l x_k$ são as folhas de t , então $t(x_i) = m_i$ para $1 \leq i \leq k$.
- Para cada nó x , com k filhos $y_1 <_l \dots <_l y_k$, temos uma das seguintes situações:

- $k = 0$ (folha),
- $k = 2$ e $t(x) = t(y_1) \cdot t(y_2)$ (nó produto),
- $2 < k \leq n$ e $t(x) = t(y_1) = \dots = t(y_k) \in E(M)$ (nó de idempotente),
- $k > n$, $t(y_1) = \dots = t(y_k) = e \in E(M)$ e $t(x) = e^\#$ (nó de estabilização).

Exemplo 4.3.8. Consideremos um exemplo de [2]. Seja

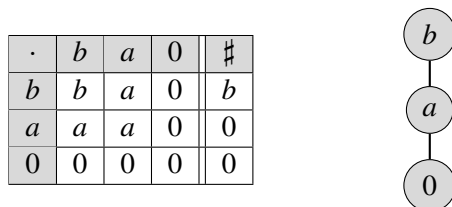
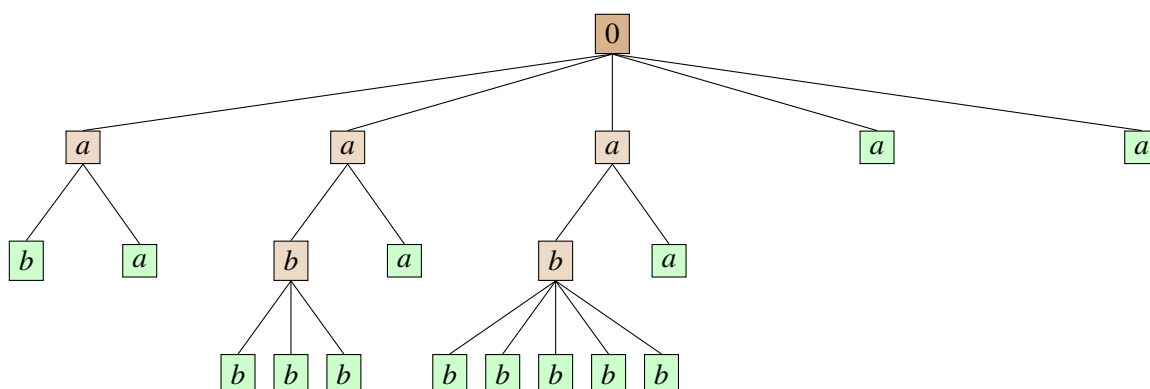


Figura 4.3: Monoide de estabilização $(M, \cdot, \leq, \#)$

M um monoide de estabilização. Então a árvore t com domínio

$\{1, 11, 111, 112, 12, 121, 1211, 1212, 1213, 122, 13, 131, 1311, 1312, 1313, 1314, 1315, 132, 14, 15\}$

e tal que



é uma 4-computação de altura 4 sobre a palavra $babbbabbbbbaaa$ de M^+ .

Vamos agora introduzir um novo conceito, que é "equivalente" ao de n -computação mas que nos parece de trato mais simples do ponto de vista matemático. Este surge com o intuito de generalizar o de fatorização floresta.

Definição 4.3.9. Dado um alfabeto finito B , definimos $B^\# = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ como sendo uma $(2, 1)$ -álgebra, onde

- $B_1 = B$,
- $B_{n+1} = B_n \cup \{uv \mid u, v \in B_n\} \cup \{u^\# \mid u \in B_n\}$.

Dado um elemento w de $B^\#$, definimos $|w| = \min \{n \in \mathbb{N} \mid w \in B_n\}$.

Definição 4.3.10. Dado um alfabeto finito B , definimos a aplicação $\pi_B : B^\# \rightarrow B^+$ do seguinte modo:

- $\pi_B(u) = u$, se $u \in B_1$;

- $\pi_B(u_1 u_2) = \pi_B(u_1) \pi_B(u_2)$, se $u_1, u_2 \in B_n$;
- $\pi_B(u_1^\#) = \pi_B(u_1)$, se $u_1 \in B_n$.

Por exemplo, dados $a, b \in B$ temos $\pi_B((a^\# b)^\#) = \pi_B(a^\# b) = \pi_B(a^\#) \pi_B(b) = ab$. De certo modo, podemos dizer que a aplicação π_B retira o símbolo $\#$ de um elemento $u \in B^\#$.

Definição 4.3.11. Sejam B um alfabeto finito, M um monoide de estabilização e $\theta : B^+ \rightarrow M$ um morfismo. Definimos a aplicação $\theta^\# : B^\# \rightarrow M$:

- $\theta^\#(u) = \theta(u)$, se $u \in B_1$;
- $\theta^\#(u_1 u_2) = \theta^\#(u_1) \theta^\#(u_2)$, se $u_1, u_2 \in B_n$;
- $\theta^\#(u_1^\#) = \theta^\#(u_1)^{|M|^\#}$, se $u_1 \in B_n$.

Seja M um monoide de estabilização e $\theta : B^+ \rightarrow M$ um morfismo. Como B^+ está contido em $B^\#$, para qualquer palavra w de B^+ , temos $\theta^\#(w) = \theta(w)$ por definição de $\theta^\#$. Por outras palavras, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} B^+ & \xrightarrow{\theta} & M \\ \downarrow & \nearrow \theta^\# & \\ B^\# & & \end{array}$$

Definição 4.3.12. Dados um alfabeto finito B e um subconjunto finito X de $B^\#$, dizemos que X é *fechado* se para todo o $w \in X \setminus B$, existem $w_1, \dots, w_k \in X$ tais que $w = w_1 \dots w_k$ ou $w = (w_1 \dots w_k)^\#$.

Por exemplo, seja $B = \{a, b\}$ um alfabeto. Os conjuntos $\{a, b, ab\}$, $\{a, b, (ab)^\#\}$ e $\{a, b, (ab)^\#, (ab)^\# b\}$ são fechados e o conjunto $\{a, b, b(ab)^\#\}$ não é fechado.

Sejam M um monoide e $u = m_1 \dots m_r$ uma palavra de M^+ , com $m_i \in M$. Associemos a u o alfabeto $B_u = \{b_1, \dots, b_r\}$ e o morfismo de semigrupos

$$\theta_u : B_u^+ \rightarrow M$$

tal que, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, se tem $\theta_u(b_i) = m_i$.

Definição 4.3.13. Sejam M um monoide de estabilização e n um natural. Dados uma palavra $u \in M^+$ e X um conjunto fechado de $B_u^\#$ tal que $\exists! v \in X$ que satisfaz $\pi_{B_u}(v) = b_1 \dots b_r$, uma n -fatorização sobre u é uma aplicação $d_u : X \rightarrow (X \cup \{0\})^\mathbb{N}$, $d_u(w) = (w_1, \dots, w_k)$ tal que:

- $w \in B_u \Leftrightarrow d_u(w) = (w)$;
- Se $k = 2$, $w = w_1 w_2$;
- Se $3 \leq k \leq n$, $\theta_u^\#(w_1) = \dots = \theta_u^\#(w_k) = e \in E(M)$ e $w = w_1 \dots w_k$;
- Se $3 \leq n < k$, $\theta_u^\#(w_1) = \dots = \theta_u^\#(w_k) = e \in E(M)$ e $w = (w_1 \dots w_k)^\#$.

Dizemos que v é o *núcleo* de d_u . A *altura* h_{d_u} de uma palavra $w \in X$ é dada por:

$$h_{d_u}(w) = \begin{cases} 1 & \text{se } w \in B_u \\ 1 + \max\{h_{d_u}(w_1), \dots, h_{d_u}(w_k)\} & \text{se } d_u(w) = (w_1, \dots, w_k) \text{ com } k \geq 2 \end{cases}$$

Por definição, se $w \in X \cap (B_u)_{n+1}$ e $d_u(w) = (w_1, \dots, w_k)$ então $w_1, \dots, w_k \in (B_u)_n$.

Exemplo 4.3.14. Consideremos novamente o Exemplo 4.3.8, isto é, seja M o monoide de estabilização

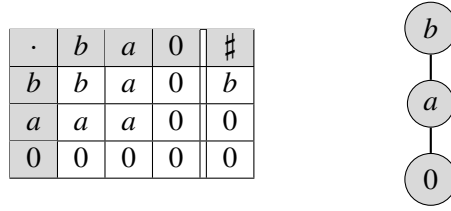
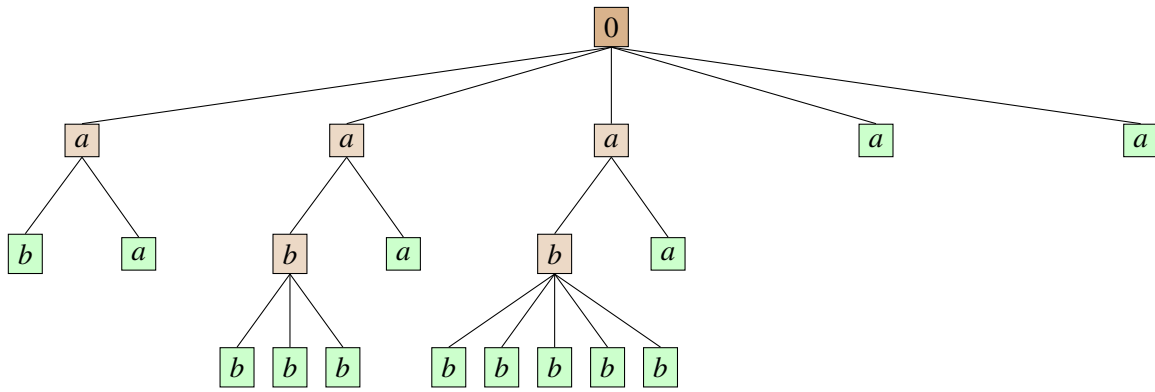


Figura 4.4: Monoide de estabilização $(M, \cdot, \leq, \#)$

Tomemos a 4-computação anterior sobre a palavra $u = babbabbabbbbaaa$ de M^+ :



Vejamos que lhe podemos associar uma 4-fatorização sobre u .

Consideremos o alfabeto $B_u = \{b_1, \dots, b_{14}\}$ e o conjunto fechado

$$X = \{b_1, \dots, b_{14}, b_1b_2, b_3b_4b_5, b_3b_4b_5b_6, (b_7b_8b_9b_{10}b_{11})^\#, (b_7b_8b_9b_{10}b_{11})^\#b_{12}, (b_1b_2b_3b_4b_5b_6(b_7b_8b_9b_{10}b_{11})^\#b_{12}b_{13}b_{14})^\#\}$$

Sendo $v := (b_1b_2b_3b_4b_5b_6(b_7b_8b_9b_{10}b_{11})^\#b_{12}b_{13}b_{14})^\#$, por definição, $\pi_{B_u}(v) = b_1 \dots b_{14}$. Seja $d_u : X \rightarrow (X \cup \{0\})^{\mathbb{N}}$ a aplicação definida por:

- $d_u(v) = (b_1b_2, b_3b_4b_5b_6, (b_7b_8b_9b_{10}b_{11})^\#b_{12}, b_{13}, b_{14})$, onde $4 < k$ e $\theta_u^\#(b_1b_2) = \theta_u^\#(b_3b_4b_5b_6) = \theta_u^\#((b_7b_8b_9b_{10}b_{11})^\#b_{12}) = \theta_u^\#(b_{13}) = \theta_u^\#(b_{14}) = a \in E(M)$;
- $d_u(b_1b_2) = (b_1, b_2)$;
- $d_u(b_3b_4b_5b_6) = (b_3b_4b_5, b_6)$;
- $d_u(b_3b_4b_5) = (b_3, b_4, b_5)$, onde $\theta_u^\#(b_3) = \theta_u^\#(b_4) = \theta_u^\#(b_5) = b \in E(M)$;
- $d_u((b_7b_8b_9b_{10}b_{11})^\#b_{12}) = ((b_7b_8b_9b_{10}b_{11})^\#, b_{12})$;
- $d_u((b_7b_8b_9b_{10}b_{11})^\#) = (b_7, b_8, b_9, b_{10}, b_{11})$, onde $4 < k$ e $\theta_u^\#(b_7) = \theta_u^\#(b_8) = \theta_u^\#(b_9) = \theta_u^\#(b_{10}) = \theta_u^\#(b_{11}) = b \in E(M)$;

- $d_u(b_i) = (b_i)$ para $1 \leq i \leq 14$.

Neste caso a altura da árvore é precisamente

$$h_{d_u}(v) = h_{d_u}((b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 (b_7 b_8 b_9 b_{10} b_{11})^\# b_{12} b_{13} b_{14})^\#) = 4.$$

O exemplo anterior leva-nos a crer que o conceito de n -computação "corresponde" ao de n -fatorização e reciprocamente.

Proposição 4.3.15. *Seja M um monoide de estabilização, $u \in M^+$ e t uma n -computação sobre u de altura h . Então existe uma n -fatorização sobre u com núcleo v tal que $h_{d_u}(v) = h$ e $\theta_u^\#(v) = t(1)$.*

Demonstração. Consideremos um monoide de estabilização M , uma palavra $u := m_1 \dots m_r \in M^+$ e $n \in \mathbb{N}$. Sejam $B_u = \{b_1, \dots, b_r\}$ e $\theta_u : B_u^+ \rightarrow M$, um morfismo tal que $\theta_u(b_i) = m_i$.

Consideremos uma n -computação t sobre u , de acordo com a Definição 4.3.7. Dado $x \in \text{dom}(t)$, definimos recursivamente sobre a altura dos nós da n -computação a aplicação $\alpha : \text{dom}(t) \rightarrow B_u^\#$ do seguinte modo:

- Se $h_t(x) = 1$, então x é uma folha. Assumindo que é a i -folha, então $\alpha(x) = b_i$.
- Se x é um nó com filhos $y_1 <_l \dots <_l y_k$, então

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(y_1) \dots \alpha(y_k) & \text{se } k \leq n \\ (\alpha(y_1) \dots \alpha(y_k))^\# & \text{se } k > n \end{cases}$$

Pelo Corolário 4.3.17, que provaremos à frente, a aplicação α é injetiva e por definição, o conjunto $X := \alpha(\text{dom}(t))$ é fechado. Provemos também que para qualquer nó $x \in \text{dom}(t)$,

$$\theta_u^\#(\alpha(x)) = t(x), \quad (4.1)$$

usando indução na altura de x .

- Se x é a i -folha, então

$$\theta_u^\#(\alpha(x)) = \theta_u^\#(b_i) = m_i = t(x).$$

Se x é um nó com filhos $y_1 <_l \dots <_l y_k$ e $k \leq n$, então

$$\begin{aligned} \theta_u^\#(\alpha(x)) &= \theta_u^\#(\alpha(y_1) \dots \alpha(y_k)) = \theta_u^\#(\alpha(y_1)) \dots \theta_u^\#(\alpha(y_k)) \\ &= t(y_1) \dots t(y_k) = t(x). \end{aligned} \quad (\text{por hipótese de indução})$$

Se x é um nó com filhos $y_1 <_l \dots <_l y_k$ e $n < k$, então

$$\begin{aligned} \theta_u^\#(\alpha(x)) &= \theta_u^\#((\alpha(y_1) \dots \alpha(y_k))^\#) \\ &= \theta_u^\#(\alpha(y_1) \dots \alpha(y_k))^{|M|^\#} = (\theta_u^\#(\alpha(y_1)) \dots \theta_u^\#(\alpha(y_k)))^{|M|^\#} \\ &= (t(y_1) \dots t(y_k))^{|M|^\#} \quad (\text{por hipótese de indução}) \\ &= e^{|M|^\#} = e^\# = t(x). \end{aligned}$$

Definimos a aplicação $d_u : X \rightarrow (X \cup \{0\})^\mathbb{N}$ do seguinte modo, onde $w = \alpha(x)$:

- $d_u(w) = (\alpha(x))$ se x é uma folha,

- $d_u(w) = (\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_k))$ se $y_1 <_l \dots <_l y_k$ são os filhos de x ,

e o núcleo v de d_u como sendo $\alpha(1)$. Obtemos uma n -fatorização sobre u pois: por (4.1) a aplicação d_u satisfaz as condições da definição de n -fatorização, pelo Lema 4.3.18 v é o núcleo de d_u e $\theta_u^\#(v) = t(1)$ por (4.1), e pelo Lema 4.3.19 temos $h_t(x) = h_{d_u}(\alpha(x))$ para qualquer nó x de t , em particular,

$$h = h_t(1) = h_{d_u}(\alpha(1)) = h_{d_u}(v).$$

Assim concluímos a demonstração. □

Dados uma n -computação t e nós $x, y, z \in \text{dom}(t)$, dizemos que $y \leq x$ se y é um descendente de x , ou seja, se x for um prefixo de y . Se x for diferente de y e $y \leq x$, escrevemos $x < y$. Por exemplo se y_1 e y_2 são filhos de x , então $y_1 \leq x$ e $y_1 \not\leq y_2$. Por outro lado, se $y_1 < z$ então $y_2 < z$. Tem-se também que \leq é uma relação de ordem no conjunto dos nós. Os próximos lemas são fundamentais para a demonstração da Proposição 4.3.15.

Seja A um alfabeto. Dadas palavras $w_1, w_2 \in A^+$, dizemos que $w_1 \leq_s w_2$ se w_1 é um segmento de w_2 .

Lema 4.3.16. *Segundo a notação da Proposição 4.3.15 e da sua demonstração, tem-se:*

- (A) $\pi_{B_u}(\alpha(x))$ e $\pi_{B_u}(\alpha(y))$ têm uma letra em comum \implies

$$\pi_{B_u}(\alpha(x)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y)) \quad \text{ou} \quad \pi_{B_u}(\alpha(y)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(x)).$$

- (B) $\pi_{B_u}(\alpha(x)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y)) \iff x \leq y$.

Demonstração. As duas alíneas irão ser demonstradas em simultâneo por indução em

$$h(x, y) := |\pi_{B_u}(\alpha(x))| + |\pi_{B_u}(\alpha(y))|.$$

Primeiro vemos os casos degenerados, ou seja, quando x ou y são uma folha. Depois provamos o caso geral.

- Se x é a i -folha, então (A) é verdadeira pois teremos $\pi_{B_u}(\alpha(x)) = b_i$ donde verifica-se $\pi_{B_u}(\alpha(x)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y))$. Provamos (B) por indução em $|\pi_{B_u}(\alpha(y))|$.
 - ▶ Se $|\pi_{B_u}(\alpha(y))| = 1$, então y é uma folha e obtemos $x = y$.
 - ▶ Suponhamos que $|\pi_{B_u}(\alpha(y))| = n_0 + 1 \geq 2$ e que o resultado se verifica para qualquer nó z tal que $|\pi_{B_u}(\alpha(z))| \leq n_0$. Sejam $z_1 <_l \dots <_l z_k$ os filhos de y . Temos $\pi_{B_u}(\alpha(y)) = \pi_{B_u}(\alpha(z_1)) \dots \pi_{B_u}(\alpha(z_k))$. Então

$$\begin{aligned} \pi_{B_u}(\alpha(x)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y)) &\iff \exists i \in \{1, \dots, k\}, \pi_{B_u}(\alpha(x)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(z_i)) \\ &\iff \exists i \in \{1, \dots, k\}, x \leq z_i \quad (\text{por hipótese de indução}) \\ &\iff x \leq y. \end{aligned}$$

Fica demonstrado que (B) é verdadeira quando x é um folha.

- Se y é a i -folha, então tal como anteriormente (A) é verdadeira. Como $\pi_{B_u}(\alpha(y)) = b_i$,

$$\pi_{B_u}(\alpha(x)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y)) \iff \pi_{B_u}(\alpha(x)) = b_i \iff x = y \iff x \leq y.$$

- o Passemos ao caso geral. Se x e y são nós iguais, então (A) e (B) são triviais. Por isso, suponhamos que x e y são nós diferentes. Do que acabámos de provar, concluímos que (A) e (B) são verdadeiras para quaisquer nós x e y tais que $h(x, y) = 2$. Suponhamos que $h(x, y) = n_0 + 1 \geq 3$ e que ambas as alíneas se verificam para quaisquer nós z e z' tais que $h(z, z') \leq n_0$. Se x ou y for uma folha então o resultado já está provado. Suponhamos pois que x tem filhos $z_1 <_l \dots <_l z_{k_1}$ e y tem filhos $z'_1 <_l \dots <_l z'_{k_2}$. Obtemos

$$\begin{cases} \pi_{B_u}(\alpha(x)) = \pi_{B_u}(\alpha(z_1)) \dots \pi_{B_u}(\alpha(z_{k_1})) \\ \pi_{B_u}(\alpha(y)) = \pi_{B_u}(\alpha(z'_1)) \dots \pi_{B_u}(\alpha(z'_{k_2})) \end{cases}.$$

- Se $\pi_{B_u}(\alpha(x))$ e $\pi_{B_u}(\alpha(y))$ têm uma letra em comum, existem $i \in \{1, \dots, k_1\}$ e $j \in \{1, \dots, k_2\}$ tais que $\pi_{B_u}(\alpha(z_i))$ e $\pi_{B_u}(\alpha(z'_j))$ têm uma letra em comum. Como $h(z_i, z'_j) \leq n_0$, por hipótese de indução temos

$$\pi_{B_u}(\alpha(z_i)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(z'_j)) \quad \text{ou} \quad \pi_{B_u}(\alpha(z'_j)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(z_i)).$$

Se $\pi_{B_u}(\alpha(z_i)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(z'_j))$, então por hipótese de indução $z_i \leq z'_j$. Assim $x \leq z'_j$ pois $x \neq y$. Como $h(x, z'_j) \leq n_0$, temos $\pi_{B_u}(\alpha(x)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(z'_j))$ e, conseqüentemente, $\pi_{B_u}(\alpha(x)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y))$. O outro caso é análogo.

- Temos também

$$\begin{aligned} \pi_{B_u}(\alpha(x)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y)) &\iff \forall i \in \{1, \dots, k_1\}, \pi_{B_u}(\alpha(z_i)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y)) \\ &\iff \forall i \in \{1, \dots, k_1\}, z_i \leq y \quad (\text{hipótese de indução}) \\ &\iff x \leq y \end{aligned}$$

pois $h(z_i, y) \leq n_0$. Notemos que a implicação

$$\forall i \in \{1, \dots, k_1\}, \pi_{B_u}(\alpha(z_i)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y)) \Rightarrow \pi_{B_u}(\alpha(x)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y))$$

é verdadeira pois $\pi_{B_u}(\alpha(z_i))$ e $\pi_{B_u}(\alpha(z_j))$ não têm letras em comum, para $i \neq j$. Mais concretamente, dado que $h(z_i, z_j) \leq n_0$, se tivessem letras em comum, por hipótese de indução, usando (A) e em seguida (B), chegaríamos a $z_i \leq z_j$ ou $z_j \leq z_i$ o que é um absurdo.

Pelo princípio de indução, (A) e (B) ficam provadas e a demonstração fica concluída. \square

Corolário 4.3.17. Segundo a notação da Proposição 4.3.15 e da sua demonstração, a aplicação $\pi_{B_u} \circ \alpha$ é injetiva. Em particular a aplicação α é injetiva.

Demonstração. Sejam $x, y \in \text{dom}(t)$, tais que $\pi_{B_u}(\alpha(x)) = \pi_{B_u}(\alpha(y))$. Pelo Lema 4.3.16, tem-se $x \leq y$ e $y \leq x$, e portanto $x = y$. \square

Lema 4.3.18. Segundo a notação da Proposição 4.3.15 e da sua demonstração, tem-se que $v := \alpha(1)$ é o núcleo de d_u .

Demonstração. É necessário demonstrar que $\pi_{B_u}(v) = b_1 \dots b_r$ e que v o é único elemento de X nestas condições. A unicidade é clara dado que pelo Corolário 4.3.17, a aplicação $\pi_{B_u} \circ \alpha$ é injetiva. Sem perda de generalidade podemos supor que a árvore tem mais do que um nó, ou seja, $\text{dom}(t) \neq \{1\}$. Vejamos primeiro que $\pi_{B_u}(v)$ contém as letras $b_1, \dots, b_r \in B_u$.

- o Fixado $i \in \{1, \dots, r\}$, temos $x \leq 1$ onde x é a i -folha. Pelo Lema 4.3.16 (B), obtemos $\pi_{B_u}(\alpha(x)) \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(1))$, donde $b_i \leq_s \pi_{B_u}(v)$.

Sejam $b_i, b_j \in B_u$ e $x, x' \in \text{dom}(t)$ tais que

$$x <_l x', \quad b_i \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(x)), \quad b_j \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(x')). \quad (4.2)$$

Provemos que $i < j$.

- Provemos por indução sobre $h(x, x') := h_t(x) + h_t(x')$. Se $h(x, x') = 2$, temos que x é a i -folha e x' é a j -folha. Desse modo $i < j$.

Seja $n_0 \geq 2$. Suponhamos que o resultado é verdadeiro para quaisquer nós y, y' tais que $h(y, y') = n_0$ e que $h(x, x') = n_0 + 1$. Como $h(x, x') \geq 3$, temos que x ou x' têm filhos. Sendo $y_1 <_l \dots <_l y_k$ os filhos de x , obtemos $y_1, \dots, y_k <_l x'$, pois $x <_l x'$. Como $b_i \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(x))$, existe $n \in \{1, \dots, k\}$ tal que $b_i \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y_n))$ pois

$$\pi_{B_u}(\alpha(x)) = \pi_{B_u}(\alpha(y_1)) \dots \pi_{B_u}(\alpha(y_k)).$$

Por hipótese de indução $i < j$, pois $h(y_n, x') = n_0$. De maneira análoga se prova o caso em que x' tem filhos. O resultado fica assim provado pelo princípio de indução.

Seja

$$R = \{x \in \text{dom}(t) : \exists i, j \in \{1, \dots, r\}, \exists w \in B_u^* \text{ tal que } b_j w b_i \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(x)) \text{ e } i \leq j\}.$$

A demonstração fica concluída se provarmos que $R = \emptyset$.

- Se $R \neq \emptyset$, existe $x \in R$ tal que $h_t(x)$ é mínimo. Sejam $i, j \in \{1, \dots, r\}$ e $w \in B_u^*$ tal que $b_j w b_i \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(x))$ e $i \leq j$. Como $b_j w b_i \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(x))$, o nó x não é uma folha. Sejam $y_1 <_l \dots <_l y_k$ os filhos de x . Dado que

$$\pi_{B_u}(\alpha(x)) = \pi_{B_u}(\alpha(y_1)) \dots \pi_{B_u}(\alpha(y_k)),$$

pela minimalidade de x , existem $n_i, n_j \in \{1, \dots, k\}$ diferentes tais que

$$b_j \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y_{n_j})), \quad b_i \leq_s \pi_{B_u}(\alpha(y_{n_i})), \quad y_{n_j} <_l y_{n_i}.$$

Como estamos nas condições de (4.2), podemos concluir que $j < i$ e chegamos a um absurdo pois $i \leq j$. Concluimos pois que $R = \emptyset$.

O lema fica assim provado. □

Lema 4.3.19. Segundo a notação da Proposição 4.3.15 e da sua demonstração, para qualquer $x \in \text{dom}(t)$ tem-se

$$h_t(x) = h_{d_u}(\alpha(x)).$$

Demonstração. Provemos o resultado por indução sobre $h_t(x)$. Se $h_t(x) = 1$, então x é uma folha. Sendo x a i -folha, temos $\alpha(x) = b_i \in B_u$ e por isso $h_{d_u}(\alpha(x)) = 1$.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ e suponhamos que o resultado é verdadeiro para qualquer $y \in \text{dom}(t)$ tal que $h_t(y) \leq n_0$. Seja x tal que $h_t(x) = n_0 + 1$. Como $h_t(x) \geq 2$, o nó x não é uma folha. Sejam $y_1 <_l \dots <_l y_k$ os filhos de x . Pela Proposição 4.3.6, tem-se que

$$h_t(x) = 1 + \max\{h_t(y_1), \dots, h_t(y_k)\},$$

e pelo princípio de indução

$$h_t(x) = 1 + \max\{h_{d_u}(\alpha(y_1)), \dots, h_{d_u}(\alpha(y_k))\}$$

pois $h_t(y_i) \leq n_0$ para qualquer $i \in \{1, \dots, k\}$. Por definição de h_{d_u} , concluímos que $h_t(x) = h_{d_u}(\alpha(x))$. □

Proposição 4.3.20. *Sejam M um monoide de estabilização, $u \in M^+$ e d_u uma n -fatorização sobre u com núcleo v . Então existe uma n -computação sobre u de altura h tal que $h_{d_u}(v) = h$ e $\theta_u^\sharp(v) = t(1)$.*

Demonstração. Seja d_u uma n -fatorização associada a u com núcleo v . Dados $w, w' \in X$, dizemos que $w \triangleleft w'$ se $|w'| \neq 1$, $d_u(w') = (w_1, \dots, w_k)$ e existe $1 \leq i \leq k$ tal que $w = w_i$. Definimos o conjunto

$$X_v = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$$

do seguinte modo:

- $X_1 = \{v\}$;
- $X_{m+1} = \{w \in X : \exists w' \in X_m \text{ tal que } w \triangleleft w'\}$.

Dados $m \in \mathbb{N}$ e $w \in X_{m+1}$, existem $w'_2 \in X_2, \dots, w'_m \in X_m$ tais que

$$w \triangleleft w'_m \triangleleft \dots \triangleleft w'_2 \triangleleft v, \quad (4.3)$$

a que chamamos uma cadeia de w , e neste caso temos

$$\pi_{B_u}(w) <_s \pi_{B_u}(w'_m) <_s \dots <_s \pi_{B_u}(w'_2) <_s \pi_{B_u}(v) = b_1 \dots b_r. \quad (4.4)$$

Pelo Lema 4.3.22, a cadeia (4.3) é única.

Dado $w \in X_v$, definimos a aplicação $\beta : X_v \rightarrow \mathbb{N}^+$ do seguinte modo:

- Se $w \in X_1$, então $\beta(w) = 1$.
- Se $w \in X_m$ e $w \triangleleft w'$ é tal que $d_u(w') = (w_1, \dots, w_i, \dots, w_k)$, onde $w_i = w$, então $\beta(w) = \beta(w')i$.

A aplicação β é injetiva.

- Suponhamos que $w, z \in X_v$ são tais que $\beta(w) = \beta(z)$. Como $\beta(w), \beta(z) \in \mathbb{N}^+$, obtemos $|\beta(w)| = |\beta(z)| = m$ e por construção $w, z \in X_m$. Provemos por indução em m que $w = z$. Se $m = 1$, então $w = z$. Se $m \geq 2$, sejam w', z' tais que $w \triangleleft w'$ e $z \triangleleft z'$. Por definição de β , tem-se $\beta(w) = \beta(w')i$ e $\beta(z) = \beta(z')j$. Então em \mathbb{N}^+ obtemos $\beta(w') = \beta(z')$ e $i = j$. Por hipótese de indução $w' = z'$. Logo $w = z$.

Seja $t : \beta(X_v) \rightarrow M$ a aplicação definida por $x \mapsto \theta_u^\sharp(w)$, onde $\beta(w) = x$. Em particular, $\text{dom}(t) = \beta(X_v)$. A aplicação t é uma árvore:

- $\text{dom}(t)$ é finito pois X_v é finito.
- $\text{dom}(t) \cap \mathbb{N} = \{1\}$;
- Se $\beta(w) \in \text{dom}(t)$ e $x = x_1 \dots x_{k_1} \in \mathbb{N}^+, y_1 \dots y_{k_2} \in \mathbb{N}^+$ são tais que $\beta(w) = x_1 \dots x_{k_1} y_1 \dots y_{k_2}$, então por definição de β , existe $w'_1 \in X_v$ tal que $\beta(w'_1) = x_1 \dots x_{k_1} y_1 \dots y_{k_2-1}$. Repetindo o mesmo processo $k_2 - 1$ vezes, obtemos que existe $w'_{k_2} \in X_v$ tal que $\beta(w'_{k_2}) = x$, ou seja, $\text{dom}(t)$ é um conjunto fechado para prefixos não vazios;
- Por definição de β , não existem saltos em $\text{dom}(t)$.

A árvore t é uma n -computação:

- Dado $w \in X_v$, $\beta(w)$ é uma folha se e só se para qualquer $x \in \mathbb{N}^+$, tem-se $\beta(w)x \notin \text{dom}(t)$ se e só se $d_u(w) = (w)$ se e só se $w \in B_u \cap X_v$. Como $\pi_{B_u}(v) = b_1 \dots b_r$, temos $B_u \cap X_v = B_u$ e por isso existem exactamente r folhas $\beta(w_1) <_l \dots <_l \beta(w_r)$. Pelo Lema 4.3.23, obtemos $w_1 = b_1, \dots, w_r = b_r$. Deste modo obtem-se $t(\beta(w_i)) = \theta_u^\sharp(w_i) = m_i$ para $1 \leq i \leq r$.
- Dado que $t(x) = \theta_u^\sharp(w)$, onde $\beta(w) = x$, as restantes condições da definição de n -árvore são satisfeitas.

Obtemos assim uma n -computação. Claramente $t(1) = \theta_u^\sharp(v)$, por definição de t . Resta ver que $h_{d_u}(v) = h$. Dado $w \in X_v$, provemos por indução em $|\cdot|$, que $h_{d_u}(w) = h_t(\beta(w))$.

- Se $|w| = 1$, isto é, se $w \in B_u$, então $h_{d_u}(w) = 1$ e

$$h_t(\beta(w)) = 1 + \max\{|z| : z \in \mathbb{N}^* \text{ e } \beta(w)z \in \text{dom}(t)\} = 1 + 0 = 1;$$

- Seja $n_0 \in \mathbb{N}$. Suponhamos que o resultado é verdadeiro para qualquer $w' \in X_v$ tal que $|w'| \leq n_0$, e tomemos $w \in X_v$ tal que $|w| = n_0 + 1 \geq 2$. Por definição de d_u , temos

$$d_u(w) = (w_1, \dots, w_k)$$

e $h_{d_u}(w) = 1 + \max\{h_{d_u}(w_1), \dots, h_{d_u}(w_k)\}$. Por hipótese de indução e pela Proposição 4.3.6,

$$h_{d_u}(w) = 1 + \max\{h_{d_u}(w_1), \dots, h_{d_u}(w_k)\} = 1 + \max\{h_t(\beta(w_1)), \dots, h_t(\beta(w_k))\} = h_t(\beta(w)).$$

Em particular, obtemos $h_{d_u}(v) = h_t(\beta(v)) = h$. A demonstração fica assim concluída. \square

Demonstremos agora os resultados usados na demonstração anterior. O próximo lema será usado na demonstração de 4.3.22.

Lema 4.3.21. Segundo a notação da demonstração da Proposição 4.3.20, dados $m \in \mathbb{N}$ e $w, z \in X_m$, tem-se

$$w = z \quad \text{ou} \quad \pi_{B_u}(w) \text{ e } \pi_{B_u}(z) \text{ não têm letras em comum.}$$

Demonstração. Provemos o resultado por indução em $m \in \mathbb{N}$.

- Se $m = 1$, então $w = v$ e $z = v$.
- Seja $m_0 \in \mathbb{N}$ e suponhamos que o resultado é verdadeiro para m_0 e que $w, z \in X_{m_0+1}$. Sejam $w', z' \in X_{m_0}$ tais que $w \triangleleft w'$ e $z \triangleleft z'$. Por hipótese de indução,

$$w' = z' \quad \text{ou} \quad \pi_{B_u}(w') \text{ e } \pi_{B_u}(z') \text{ não têm letras em comum.}$$

Se $w' = z'$, existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que

$$d_u(w') = (w_1, \dots, w_k), \quad w = w_i, \quad z = w_j.$$

Como $\pi_{B_u}(w') <_s \pi_{B_u}(v) = b_1 \dots b_r$ e

$$\pi_{B_u}(w') = \pi_{B_u}(w_1) \dots \pi_{B_u}(w_k),$$

obtemos $i = j$ ou $\pi_{B_u}(w_i)$ e $\pi_{B_u}(w_j)$ não têm letras em comum. Por outras palavras,

$$w = z \quad \text{ou} \quad \pi_{B_u}(w) \text{ e } \pi_{B_u}(z) \text{ não têm letras em comum.}$$

Se $\pi_{B_u}(w')$ e $\pi_{B_u}(z')$ não têm letras em comum, então o mesmo sucede com $\pi_{B_u}(w)$ e $\pi_{B_u}(z)$, pois

$$\pi_{B_u}(w) <_s \pi_{B_u}(w') \quad \text{e} \quad \pi_{B_u}(z) <_s \pi_{B_u}(z').$$

A demonstração fica concluída pelo princípio de indução. \square

Lema 4.3.22. Segundo a notação da Proposição 4.3.20 e da sua demonstração, dados $w, w', z', z'' \in X_v$ tais que $w < w'_{k_1}$ e $w < z''_{k_2}$, então $w'_{k_1} = z''_{k_2}$.

Demonstração. Existem $w'_2 \in X_2, \dots, w'_{k_1-1} \in X_{k_1-1}$ e $z'_2 \in X_2, \dots, z'_{k_2-1} \in X_{k_2-1}$ tais que

$$w < w'_{k_1} < \dots < w'_2 < v \quad \text{e} \quad w < z'_{k_2} < \dots < z'_2 < v.$$

Suponhamos que $k_1 \neq k_2$ e sem perda de generalidade que $k_1 < k_2$. Por (4.4) e pelo Lema 4.3.21, obtemos

$$w'_2 = z'_2, \dots, w'_{k_1} = z'_{k_1}, \quad \text{e} \quad w = z'_{k_1+1}.$$

Como $\pi_{B_u}(w) <_s \pi_{B_u}(z'_{k_1+1})$, obtemos $\pi_{B_u}(w) <_s \pi_{B_u}(w)$, o que é um absurdo. Deste modo, tem-se $k_1 = k_2$ e novamente pelo Lema 4.3.21 $w'_{k_1} = z'_{k_2}$. \square

Lema 4.3.23. Segundo a notação da Proposição 4.3.20 e da sua demonstração, dados $w, z \in X_v$ e $b_i, b_j \in B_u$ tais que $b_i \leq_s \pi_{B_u}(w)$ e $b_j \leq_s \pi_{B_u}(z)$, então

$$\beta(w) <_l \beta(z) \implies i < j.$$

Demonstração. Sejam $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tais que $w \in X_{m_1}$ e $z \in X_{m_2}$. Se $m_1 = 1$ ou $m_2 = 1$, isto é, $w = v$ ou $z = v$, então $\beta(w) \not<_l \beta(z)$. Provemos o resultado por indução em $m_1 + m_2$.

- o Se $m_1 + m_2 = 4$ e $m_1, m_2 > 1$, então $m_1 = m_2 = 2$ e, logo $w < v$ e $z < v$. Seja $\beta(w) = 1l_1$ e $\beta(z) = 1l_2$ com $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\beta(w) <_l \beta(z) \Leftrightarrow 1l_1 <_l 1l_2 \Leftrightarrow l_1 < l_2.$$

Por definição de β , temos $d(v) = (\dots, w, \dots, z, \dots)$. Logo $i < j$ pois

$$b_1 \dots b_r = \pi_{B_u}(v) = \dots \pi_{B_u}(w) \dots \pi_{B_u}(z) \dots$$

- o Seja $m_0 \geq 4$. Suponhamos que o resultado é verdadeiro para m_0 e que $m_1 + m_2 = m_0 + 1$. Sejam $x_1, \dots, x_{k_1} \in \mathbb{N}$ e $y_1, \dots, y_{k_2} \in \mathbb{N}$ tais que $\beta(w) = x_1 \dots x_{k_1}$ e $\beta(z) = y_1 \dots y_{k_2}$. Sem perda de generalidade admitamos $k_1 \leq k_2$. Como $\beta(w) <_l \beta(z)$, existe $k \in \{2, \dots, k_1\}$, tal que

$$x_1 = y_1, \quad \dots, \quad x_{k-1} = y_{k-1}, \quad x_k < y_k.$$

Se $k < k_2$, então $\beta(w) <_l \beta(z')$ onde $z < z'$. Por hipótese de indução, concluímos que $i < j$ pois $\pi_{B_u}(z) <_s \pi_{B_u}(z')$.

Se $k = k_1 = k_2$, então $\beta(w) = \beta(w')x_k$ e $\beta(z) = \beta(z')y_k$, onde

$$w < w', \quad z < z', \quad \beta(w') = \beta(z'), \quad x_k < y_k.$$

Consequentemente $w' = z'$ pois β é injetiva. Assim, $d_u(w') = (\dots, w, \dots, z, \dots)$ pois $x_k < y_k$. Portanto, $i < j$ pois $\pi_{B_u}(w') <_s \pi_{B_u}(v) = b_1 \dots b_r$ e

$$\pi_{B_u}(w') = \dots \pi_{B_u}(w) \dots \pi_{B_u}(z) \dots$$

O caso $k_2 \leq k_1$ é análogo.

A demonstração fica assim concluída. \square

Como conclusão,

Corolário 4.3.24. *Sejam M um monoide de estabilização, $m \in M$, $u \in M^+$ e $h \in \mathbb{N}$. Existe uma n -computação sobre u de altura h e $t(1) = m$ se e só se existe uma n -fatorização d_u sobre u com núcleo v , tal que $h_{d_u}(v) = h$ e $\theta_u^\sharp(v) = m$.*

Demonstração. É uma simples aplicação das Proposições 4.3.15 e 4.3.20. \square

Proposição 4.3.25. *Seja M um monoide de estabilização e $n \in \mathbb{N}$. Então para qualquer palavra $u \in M^+$, existe uma n -fatorização associada a u , $d_u : X \rightarrow (X \cup \{0\})^{\mathbb{N}}$, tal que $h_{d_u}(v) \leq 3|M|$, onde v é o núcleo de d_u .*

Demonstração. Consultar [2 - Teorema 4.10], tendo em conta a Proposição 4.3.15. \square

4.4 Reconhecibilidade

Definição 4.4.1. Consideremos um alfabeto finito A , um monoide de estabilização M e um morfismo $\varphi : A^* \rightarrow M$. Definimos a aplicação

$$\varphi^+ : A^* \rightarrow M^+$$

tal que $\varphi^+(\epsilon) = 1$ e $\varphi^+(u) = \varphi(a_1) \dots \varphi(a_k) \in M^+$, onde $u = a_1 \dots a_k$, com $a_i \in A$.

Daqui em diante, denotaremos $\varphi^+(u)$ por \vec{u} , de modo a simplificar a escrita. Tendo em conta a Definição 4.3.9, dado um alfabeto finito A , definimos A^\sharp como sendo o conjunto que se obtém anexando a A^\sharp uma identidade. De maneira análoga à Definição 4.3.11, dado um morfismo $\varphi : A^* \rightarrow M$, definimos o morfismo $\varphi^\sharp : A^\sharp \rightarrow M$ que respeita a identidade.

Definição 4.4.2. Seja M um monoide de estabilização, $\varphi : A^* \rightarrow M$ um morfismo tal que φ^\sharp é sobrejetivo e I um ideal de ordem de M . Dado um inteiro $p \geq 3|M|$, definimos a aplicação $(M, \varphi, I)_p : A^* \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ tal que

$$(M, \varphi, I)_p(u) = \sup \left\{ n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 : \text{existe uma } n\text{-fatorização } d_{\vec{u}} \text{ com núcleo } v \text{ tal que } h_{d_{\vec{u}}}(v) \leq p \text{ e } \theta_{\vec{u}}^\sharp(v) \in I \right\}.$$

Definimos a função de custo $\llbracket M, \varphi, I \rrbracket_p := [(M, \varphi, I)_p]_{\approx}$.

Observação 4.4.3. De notar que \vec{u} depende de φ . A definição anterior é equivalente à definição apresentada em [2], pois pelo Corolário 4.3.24, são equivalentes

- i) Existe uma n -computação t tal que $h_t(1) \leq p$ e $t(1) \in I$.
- ii) Existe uma n -fatorização $d_{\vec{u}}$ com núcleo v tal que $h_{d_{\vec{u}}}(v) \leq p$ e $\theta_{\vec{u}}^\sharp(v) \in I$.

Proposição 4.4.4. *Dados inteiros $p, q \geq 3|M|$, então $\llbracket M, \varphi, I \rrbracket_p = \llbracket M, \varphi, I \rrbracket_q$.*

Demonstração. Consultar [2 - Lema 4.18]. \square

Podemos então definir o conceito de função de custo regular.

Definição 4.4.5. Dado um inteiro $p \geq 3|M|$, definimos a função de custo $\llbracket M, \varphi, I \rrbracket := \llbracket M, \varphi, I \rrbracket_p$ e dizemos que $\llbracket M, \varphi, I \rrbracket$ é reconhecida por (M, φ, I) . Uma função de custo regular é uma função de custo do tipo $\llbracket M, \varphi, I \rrbracket$.

Consideremos uma linguagem regular L . Vejamos que a função de custo associada à função característica de L é reconhecível como função de custo.

Proposição 4.4.6. *Sejam M um monoide finito e L uma linguagem reconhecida por um morfismo sobrejetivo $\varphi : A^* \rightarrow M$. Dado um inteiro $p \geq 3|M|$, então*

$$(M, \varphi, M \setminus \varphi(L))_p = \chi_L.$$

Demonstração. Pela Observação 4.1.6, consideremos M como sendo um monoide de estabilização. Como a ordem em M é a igualdade, o conjunto $I := M \setminus \varphi(L)$ é um ideal de ordem de M . Fixemos uma palavra $u \in A^*$ e suponhamos que

$$u = b_1 \dots b_r \quad \text{e} \quad \vec{u} = m_1 \dots m_r \in M^+.$$

Pela Proposição 4.3.25, para qualquer natural n , existe uma n -fatorização $d_{\vec{u}}$ com núcleo ν que satisfaz $h_{d_{\vec{u}}}(\nu) \leq 3|M|$. Seja $d_{\vec{u}}$ uma tal n -fatorização. Se w é um elemento de X , então por definição $d_{\vec{u}}(w) = (w_1, \dots, w_k)$. Vejamos por indução em $|\cdot|$ que

$$\theta_{\vec{u}}^{\#} \Big|_X = \theta_{\vec{u}} \circ \pi_{B_{\vec{u}}} \Big|_X. \quad (4.5)$$

Seja $w \in X$.

- Se $|w| = 1$, então $w = b_i \in B_{\vec{u}}$. Por definição $\theta_{\vec{u}}^{\#}(w) = \theta_{\vec{u}}(b_i) = \theta_{\vec{u}}(\pi_{B_{\vec{u}}}(w))$.
- Suponhamos que para qualquer $w' \in X$ tal que $1 \leq |w'| \leq n$ se tem (4.5). Admitamos que $w \in X$ tal que $|w| = n + 1$. Temos $d_{\vec{u}}(w) = (w_1, \dots, w_k)$ com $k \neq 1$ e $w_1, \dots, w_k \in (B_{\vec{u}})_n$.
 - ▶ Se $2 \leq k \leq n$, então $w = w_1 \dots w_k$ e, por definição de $\theta_{\vec{u}}^{\#}$, tem-se $\theta_{\vec{u}}^{\#}(w) = \theta_{\vec{u}}^{\#}(w_1) \dots \theta_{\vec{u}}^{\#}(w_k)$. Por hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \theta_{\vec{u}}^{\#}(w) &= \theta_{\vec{u}}^{\#}(w_1) \dots \theta_{\vec{u}}^{\#}(w_k) = \theta_{\vec{u}}(\pi_{B_{\vec{u}}}(w_1)) \dots \theta_{\vec{u}}(\pi_{B_{\vec{u}}}(w_k)) \\ &= \theta_{\vec{u}}(\pi_{B_{\vec{u}}}(w_1) \dots \pi_{B_{\vec{u}}}(w_k)) \end{aligned} \quad (\text{Definição 4.3.11})$$

$$= \theta_{\vec{u}} \circ \pi_{B_{\vec{u}}}(w). \quad (\text{Definição 4.3.10})$$

- ▶ Se $3 \leq n < k$, então $w = (w_1 \dots w_k)^{\#}$ e $\theta_{\vec{u}}^{\#}(w_i) = e \in E(M)$. Por definição de $\theta_{\vec{u}}^{\#}$, obtem-se $\theta_{\vec{u}}^{\#}(w) = \theta_{\vec{u}}^{\#}(w_1 \dots w_k)^{\#}$. Ora, a aplicação $\#$ definida em M é a identidade em $E(M)$, pelo que, por hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \theta_{\vec{u}}^{\#}(w) &= \theta_{\vec{u}}^{\#}((w_1 \dots w_k)^{\#}) \\ &= \left(\theta_{\vec{u}}^{\#}(w_1) \dots \theta_{\vec{u}}^{\#}(w_k) \right)^{|M|^{\#}} = e^{|M|^{\#}} = e \end{aligned} \quad (\text{Definição 4.3.11})$$

$$= e \dots e$$

$$= \theta_{\vec{u}}(\pi_{B_{\vec{u}}}(w_1)) \dots \theta_{\vec{u}}(\pi_{B_{\vec{u}}}(w_k)) \quad (\text{Indução})$$

$$= \theta_{\vec{u}}(\pi_{B_{\vec{u}}}(w_1 \dots w_k)) \quad (\text{Definição 4.3.10})$$

$$= \theta_{\vec{u}} \circ \pi_{B_{\vec{u}}}(w).$$

Então pelo princípio de indução, temos $\theta_{\bar{u}}^{\#}(w) = \theta_{\bar{u}} \circ \pi_{B_{\bar{u}}}(w)$, para qualquer $w \in X$. Concluimos que $\theta_{\bar{u}}^{\#}|_X = \theta_{\bar{u}} \circ \pi_{B_{\bar{u}}}|_X$. Como caso particular obtemos, pela Definição 4.3.13,

$$\theta_{\bar{u}}^{\#}(v) = \theta_{\bar{u}} \circ \pi_{B_{\bar{u}}}(v) = \theta_{\bar{u}}(b_1 \dots b_r) = \theta_{\bar{u}}(b_1) \dots \theta_{\bar{u}}(b_r) = m_1 \dots m_r = \varphi(u).$$

Dado que $\varphi^{\#}$ é sobrejetivo, tem-se para $p \geq 3|M|$,

$$\begin{aligned} (M, \varphi, I)_p(u) &= \\ &= \sup \{n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 : \text{existe uma } n\text{-fatorização } d_{\bar{u}} \text{ com núcleo } v \text{ tal que } h_{d_{\bar{u}}}(v) \leq p \text{ e } \theta_{\bar{u}}^{\#}(v) \in I\} \\ &= \sup \{n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 : \text{existe uma } n\text{-fatorização } d_{\bar{u}} \text{ com núcleo } v \text{ tal que } h_{d_{\bar{u}}}(v) \leq p \text{ e } \varphi(u) \in I\}. \end{aligned}$$

Como já observámos para $p \geq 3|M|$, para qualquer natural n existe sempre uma n -fatorização $d_{\bar{u}}$ em que a altura do núcleo é majorada por p . Assim,

- Se $\varphi(u) \in I$, ou seja, $u \notin L$, temos $(M, \varphi, I)_p(u) = \sup \mathbb{N} = \infty = \chi_L(u)$;
- Se $\varphi(u) \notin I$, ou seja, $u \in L$, então $(M, \varphi, I)_p(u) = \sup \emptyset = 0 = \chi_L(u)$.

Concluimos que $(M, \varphi, M \setminus \varphi(L))_p = \chi_L$. □

Atendendo ao que acabámos de demonstrar,

$$[\chi_L]_{\approx} = \llbracket M, \varphi, M \setminus \varphi(L) \rrbracket,$$

logo, $[\chi_L]_{\approx}$ é uma função de custo regular.

Definição 4.4.7. Sejam $[f]_{\approx}$ e $[g]_{\approx}$ funções de custo. Definimos

$$\max\{[f]_{\approx}, [g]_{\approx}\} = [\max\{f, g\}]_{\approx} \text{ e } \min\{[f]_{\approx}, [g]_{\approx}\} = [\min\{f, g\}]_{\approx}.$$

Vejamos que \max e \min estão bem definidas. Suponhamos que $f \approx f'$ e $g \approx g'$. Seja $X \subseteq A^*$.

- Temos que $\max\{f, g\}|_X$ é limitada se e só se $f|_X$ e $g|_X$ são limitadas se e só se $f'|_X$ e $g'|_X$ são limitadas se e só se $\max\{f', g'\}|_X$ é limitada.
- Se $\min\{f, g\}|_X$ é limitada, então existe um natural α tal que $\min\{f, g\}|_X \leq \alpha$. Seja

$$A_1 = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \text{ e } A_2 = \{x \in X : g(x) \leq \alpha\}.$$

Por definição, $A_1 \cup A_2 = X$. Atendendo à hipótese, temos f' limitada em A_1 e g' limitada em A_2 , logo existem naturais β_1, β_2 tais que

$$A_1 \subseteq \{x \in X : f'(x) \leq \beta_1\} \text{ e } A_2 \subseteq \{x \in X : g'(x) \leq \beta_2\}.$$

Assim, para qualquer elemento x de X , tem-se $\min\{f', g'\}(x) \leq \max\{\beta_1, \beta_2\}$, e portanto, $\min\{f', g'\}|_X$ é limitada. Analogamente se prova o recíproco.

Proposição 4.4.8. Sejam $[f]_{\approx}$ e $[g]_{\approx}$ funções de custo reconhecíveis, tais que $f = (M, \varphi, I_1)_p$ e $g = (M, \varphi, I_2)_p$, com $p \geq 3|M|$. Então

$$\max\{[f]_{\approx}, [g]_{\approx}\} = \llbracket M, \varphi, I_1 \cup I_2 \rrbracket.$$

Demonstração. Por definição de f e g , temos

$$f(u) = \sup \left\{ n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 : \text{existe uma } n\text{-fatorização } d_{\vec{u}} \text{ com núcleo } v \text{ tal que } h_{d_{\vec{u}}}(v) \leq p \text{ e } \theta_{\vec{u}}^{\#}(v) \in I_1 \right\}$$

e

$$g(u) = \sup \left\{ n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 : \text{existe uma } n\text{-fatorização } d_{\vec{u}} \text{ com núcleo } v \text{ tal que } h_{d_{\vec{u}}}(v) \leq p \text{ e } \theta_{\vec{u}}^{\#}(v) \in I_2 \right\}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \max\{f, g\}(u) &= \\ \sup \left\{ n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 : \text{existe uma } n\text{-fatorização } d_{\vec{u}} \text{ com núcleo } v \text{ tal que } h_{d_{\vec{u}}}(v) \leq p \text{ e } \theta_{\vec{u}}^{\#}(v) \in I_1 \cup I_2 \right\}. \end{aligned}$$

Assim $\max\{f, g\} = (M, \varphi, I_1 \cup I_2)_p$. Então

$$\max\{[f]_{\approx}, [g]_{\approx}\} = \llbracket M, \varphi, I_1 \cup I_2 \rrbracket.$$

□

Proposição 4.4.9. *Sejam M e N monoídes de estabilização e $\psi : M \twoheadrightarrow N$ um morfismo sobrejetivo. Dado um morfismo $\varphi : A^* \rightarrow M$ tal que $\varphi^{\#}$ é sobrejetivo e um ideal de ordem I de N , então*

$$\llbracket M, \varphi, \psi^{-1}(I) \rrbracket = \llbracket N, \psi \circ \varphi, I \rrbracket.$$

Demonstração. Consultar [2 - Proposição 4.21].

□

Definição 4.4.10. Dizemos que (M', φ', I') é um *quociente* de (M, φ, I) se existe um morfismo sobrejetivo $\psi : M \twoheadrightarrow M'$ tal que $I = \psi^{-1}(I')$ e $\psi \circ \varphi = \varphi'$.

$$\begin{array}{ccc} A^* & \xrightarrow{\varphi} & M \\ & \searrow \varphi' & \downarrow \psi \\ & & M' \end{array}$$

Proposição 4.4.11. *Se (M', φ', I') é um quociente de (M, φ, I) , então $\llbracket M, \varphi, I \rrbracket = \llbracket M', \varphi', I' \rrbracket$.*

Demonstração. É uma simples aplicação da Proposição 4.4.9.

□

Proposição 4.4.12. *Seja f uma função de custo regular. Então existe um triplo (M_f, φ_f, I_f) que reconhece f e para qualquer triplo (M, φ, I) que reconheça f , existe um morfismo sobrejetivo $\psi : M \twoheadrightarrow M_f$ tal que $\varphi_f = \psi \circ \varphi$ e ainda $I = \psi^{-1}(I_f)$. O monoíde de estabilização M_f é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Consultar [3].

□

4.5 Funções de Custo e Álgebras de Estabilização

Nesta secção vamos mostrar como o conceito de função de custo regular se relaciona com o de ideal de ordem reconhecível. Mais especificamente, provaremos que a classe das funções de custo regulares se mergulham na classe dos ideais de ordem reconhecíveis.

Proposição 4.5.1. *Sejam M um monoide de estabilização e $\varphi : A^* \rightarrow M$ um morfismo. Existe um morfismo de álgebras de estabilização $\bar{\varphi} : F^1(A) \rightarrow \mathcal{E}(M)$, tal que o diagrama seguinte é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} A^* & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^1(A) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathcal{E}(M) \end{array}$$

Demonstração. Consideremos a aplicação $f : T(A) \cup \{\epsilon\} \rightarrow \mathcal{E}(M)$, definida por:

- Se $w = \epsilon$, então $f(w) := 1$;
- Se $w \in A^1$, então $f(w) := \varphi(w)$;
- Se $w \in A^{n+1}$ é tal que $w = w_1 w_2$ com $w_i \in A^n$, então $f(w) := f(w_1) f(w_2)$;
- Se $w \in A^{n+1}$ é tal que $w = (w_1)^\sharp$ com $w_1 \in A^n$, então $f(w) = f(w_1)^{\omega^\sharp}$;
- Se $w \in A^{n+1}$ é tal que $w = (w_1)^\omega$ com $w_1 \in A^n$, então $f(w) = f(w_1)^\omega$.

então f é um morfismo de tipo $(2, 1, 1)$. Definimos agora a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : F^1(A) &\rightarrow \mathcal{E}(M) \\ \bar{w} &\mapsto f(w) \end{aligned}$$

Tal como no Lema 3.1.11, concluímos que $\bar{\varphi}$ é um morfismo de álgebras de estabilização. Por construção de f e $\bar{\varphi}$, tem-se $\varphi = \bar{\varphi}|_{A^*}$:

- Se $w = \epsilon$, então $\varphi(w) = 1 = f(w) = \bar{\varphi}|_{A^*}(1)$;
- Se $w = w_1 \dots w_k$ com $w_i \in A$, então $\varphi(w) = f(w_1) \dots f(w_k) = \bar{\varphi}|_{A^*}(w_1) \dots \bar{\varphi}|_{A^*}(w_k) = \bar{\varphi}|_{A^*}(w)$.

□

Observação 4.5.2. Do mesmo modo, pode-se provar que $\dot{\varphi}^\sharp = \bar{\varphi}|_{A^\sharp}$.

Proposição 4.5.3. *Sejam M um monoide de estabilização e $\varphi : A^* \rightarrow M$ um morfismo. Então $\dot{\varphi}^\sharp$ é sobrejetivo se e só se $\bar{\varphi}$ é sobrejetivo.*

Demonstração. A implicação da esquerda para a direita será demonstrada diretamente, ao passo que na demonstração da outra é usado um raciocínio por absurdo.

(\Rightarrow) Seja $m \in M$. Por hipótese, existe $u \in A^\sharp$ tal que $\dot{\varphi}^\sharp(u) = m$. Por construção, tem-se que A^\sharp está contido em $T(A) \cup \{\epsilon\}$. Por definição de $\dot{\varphi}^\sharp$ e usando a notação da Proposição 4.5.1, temos $f(u) = \dot{\varphi}^\sharp(u)$, donde concluímos que $\bar{\varphi}(\bar{u}) = f(u) = m$.

(\Leftarrow) Suponhamos que a aplicação $\dot{\varphi}^\sharp$ não é sobrejetiva. Assim, o conjunto

$$R = \{n \in \mathbb{N} : \exists u \in A^n \text{ tal que } \bar{\varphi}(\bar{u}) \notin \dot{\varphi}^\sharp(A^\sharp)\}$$

é não vazio, donde admite um mínimo. Seja $u \in A^n$ tal que n seja o mínimo de R . Se $n = 1$, então $u \in A$ e portanto $\bar{\varphi}(\bar{u}) = \varphi(u) = \dot{\varphi}^\sharp(u) \in \dot{\varphi}^\sharp(A^\sharp)$. Se $n \geq 2$, existem $u_1, u_2 \in A^{n-1}$ tais que

$$u = u_1 u_2 \quad \text{ou} \quad u = u_1^\omega \quad \text{ou} \quad u = u_1^\sharp.$$

Pela minimalidade de n , existem $v_1, v_2 \in \dot{A}^\#$ tais que $\bar{\varphi}(\bar{u}_1) = \dot{\varphi}^\#(v_1)$ e $\bar{\varphi}(\bar{u}_2) = \dot{\varphi}^\#(v_2)$.

- Caso $u = u_1 u_2$,

$$\bar{\varphi}(\bar{u}) = \bar{\varphi}(\bar{u}_1)\bar{\varphi}(\bar{u}_2) = \dot{\varphi}^\#(v_1)\dot{\varphi}^\#(v_2) = \dot{\varphi}^\#(v_1 v_2) \in \dot{\varphi}^\#(\dot{A}^\#).$$

- Caso $u = u_1^\omega$,

$$\bar{\varphi}(\bar{u}) = \bar{\varphi}(\bar{u}_1)^\omega = \bar{\varphi}(\bar{u}_1)^{|M|!} = \dot{\varphi}^\#(v_1)^{|M|!} = \dot{\varphi}^\#(v_1^{|M|!}) \in \dot{\varphi}^\#(\dot{A}^\#).$$

- Caso $u = u_1^\#$,

$$\bar{\varphi}(\bar{u}) = \bar{\varphi}(\bar{u}_1)^\# = \dot{\varphi}^\#(v_1)^{\omega^\#} = \dot{\varphi}^\#(v_1)^{|M|!\#} = \dot{\varphi}^\#(v_1^\#) \in \dot{\varphi}^\#(\dot{A}^\#).$$

Chegamos a um absurdo pelo que $R = \emptyset$ e, portanto, $\dot{\varphi}^\#$ é sobrejetiva.

□

Lema 4.5.4. *Sejam M e N monoides de estabilização, $\varphi : A^* \rightarrow M$ um morfismo e $\psi : M \rightarrow N$ um morfismo de monoides de estabilização. Então $\overline{\psi \circ \varphi} = \psi_\mathcal{E} \circ \bar{\varphi}$.*

Demonstração. Seja $\bar{w} \in F^1(A)$ com $w \in T(A) \cup \{\epsilon\}$. Tendo em conta a Proposição 4.5.1, sejam $f_{\psi \circ \varphi}$ e f_φ tais que

$$\overline{\psi \circ \varphi}(\bar{w}) = f_{\psi \circ \varphi}(w) \quad \text{e} \quad \bar{\varphi}(\bar{w}) = f_\varphi(w).$$

Provemos por indução em $|w|$ que $f_{\psi \circ \varphi}(w) = \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(w))$.

- Se $w = \epsilon$, então $f_{\psi \circ \varphi}(w) = 1 = \psi_\mathcal{E}(1) = \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(1))$;
- Se $w \in A^1$, então $f_{\psi \circ \varphi}(w) = \psi \circ \varphi(w) = \psi_\mathcal{E}(\varphi(w)) = \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(w))$;
- Se $w \in A^{n+1}$ é tal que $w = w_1 w_2$ com $w_i \in A^n$, então

$$\begin{aligned} f_{\psi \circ \varphi}(w) &= f_{\psi \circ \varphi}(w_1) f_{\psi \circ \varphi}(w_2) \\ &= \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(w_1)) \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(w_2)) && \text{(Indução)} \\ &= \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(w_1) f_\varphi(w_2)) && \text{(Definição de } \psi_\mathcal{E}) \\ &= \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(w)); && \text{(Definição de } f_\varphi) \end{aligned}$$

- Se $w \in A^{n+1}$ é tal que $w = w_1^\omega$ com $w_1 \in A^n$, então

$$\begin{aligned} f_{\psi \circ \varphi}(w) &= f_{\psi \circ \varphi}(w_1)^\omega && \text{(Definição de } f_{\psi \circ \varphi}) \\ &= \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(w_1))^\omega && \text{(Indução)} \\ &= \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(w_1)^\omega) && \text{(Definição de } \psi_\mathcal{E}) \\ &= \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(w)); && \text{(Definição de } f_\varphi) \end{aligned}$$

- Se $w \in A^{n+1}$ é tal que $w = w_1^\#$ com $w_1 \in A^n$, então

$$\begin{aligned} f_{\psi \circ \varphi}(w) &= f_{\psi \circ \varphi}(w_1)^{\omega^\#} && \text{(Definição de } f_{\psi \circ \varphi}) \\ &= \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(w_1))^{\omega^\#} && \text{(Indução)} \\ &= \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(w_1)^{\omega^\#}) && \text{(Definição de } \psi_\mathcal{E}) \\ &= \psi_\mathcal{E}(f_\varphi(w)); && \text{(Definição de } f_\varphi) \end{aligned}$$

Assim,

$$\overline{\psi \circ \varphi}(\bar{w}) = f_{\psi \circ \varphi}(w) = \psi_{\mathcal{E}}(f_{\varphi}(w)) = \psi_{\mathcal{E}}(\bar{\varphi}(\bar{w})),$$

para qualquer $w \in T(A) \cup \{\epsilon\}$. □

Proposição 4.5.5. *Consideremos as classes \mathcal{A} das funções de custo regulares e \mathcal{B} dos ideais de ordem reconhecíveis. A aplicação $\Gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ definida por $\llbracket M, \varphi, I \rrbracket \mapsto \bar{\varphi}^{-1}(I)$ é injetiva.*

Demonstração. Seja $\llbracket M, \varphi, I \rrbracket$ uma função de custo regular. Pela Proposição 4.5.1, a aplicação $\bar{\varphi}$ é um morfismo de álgebras de estabilização. Como I é um ideal de ordem de M , também é ideal de ordem de $\mathcal{E}(M)$ e tem-se que $\bar{\varphi}^{-1}(I)$ é um ideal de ordem de $F^1(A)$. Portanto, o morfismo $\bar{\varphi}$ reconhece $\bar{\varphi}^{-1}(I)$, donde $\bar{\varphi}^{-1}(I)$ é um ideal de ordem reconhecível.

Vejamos que de facto a definição da aplicação Γ não depende do representante de $\llbracket M, \varphi, I \rrbracket$:

- Suponhamos que $\llbracket M_1, \varphi_1, I_1 \rrbracket = \llbracket M_2, \varphi_2, I_2 \rrbracket =: f$. Pela Proposição 4.4.12, existe um morfismo de monoides de estabilização sobrejetivo $\psi : M_1 \twoheadrightarrow M_f$ tal que $\varphi_f = \psi \circ \varphi_1$ e $I_1 = \psi^{-1}(I_f)$. Então dado $x \in F^1(A)$, temos

$$\begin{aligned} x \in \bar{\varphi}_f^{-1}(I_f) &\Leftrightarrow \bar{\varphi}_f(x) \in I_f \\ &\Leftrightarrow \overline{\psi \circ \varphi_1}(x) \in I_f && (\varphi_f = \psi \circ \varphi_1) \\ &\Leftrightarrow \psi_{\mathcal{E}} \circ \bar{\varphi}_1(x) \in I_f && (\text{Lema 4.5.4}) \\ &\Leftrightarrow \psi \circ \bar{\varphi}_1(x) \in I_f \Leftrightarrow \bar{\varphi}_1(x) \in I_1 \Leftrightarrow x \in \bar{\varphi}_1^{-1}(I_1). && (\psi_{\mathcal{E}} = \psi) \end{aligned}$$

Analogamente $\bar{\varphi}_f^{-1}(I_f) = \bar{\varphi}_2^{-1}(I_2)$. Concluimos que $\bar{\varphi}_1^{-1}(I_1) = \bar{\varphi}_2^{-1}(I_2)$.

Vejamos em seguida que a aplicação Γ é injetiva.

- Sejam $\llbracket M_1, \varphi_1, I_1 \rrbracket, \llbracket M_2, \varphi_2, I_2 \rrbracket \in \mathcal{A}$ tais que $\bar{\varphi}_1^{-1}(I_1) = \bar{\varphi}_2^{-1}(I_2) =: L$. O morfismo $\bar{\varphi}_1$ reconhece o ideal de ordem L e é sobrejetivo pela Proposição 4.5.3 pois φ_1^{\sharp} é sobrejetivo. Pela Observação 3.3.21, a álgebra de estabilização $\mathcal{M}(L)$ é um quociente de $\mathcal{E}(M_1)$, ou seja, existe um morfismo $\psi : \mathcal{E}(M_1) \twoheadrightarrow \mathcal{M}(L)$. De facto, pela demonstração da Proposição 3.3.20, temos ainda que

$$\psi \circ \bar{\varphi}_1 = \pi_L, \tag{4.6}$$

onde π_L é o morfismo sintático. Consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xleftarrow{\iota_0} & \mathcal{E}(M_1) & \xleftarrow{\iota_1} & \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(M_1)) = M_1 \\ \uparrow \varphi_1^{\sharp} & & \uparrow \bar{\varphi}_1 & & \downarrow \psi_{\mathcal{E}^{-1}} \\ \uparrow \varphi & & \uparrow & & \\ A^{\sharp} & \longrightarrow & F^1(A) & \xrightarrow{\psi} & \\ \downarrow & & \downarrow \pi_L & & \\ A^* & & \mathcal{M}(L) & \xleftarrow{\iota_2} & \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{M}(L)) \end{array}$$

Pela Proposição 4.2.3, tem-se que $\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{M}(L))$ está bem definido. Dado que φ_1^{\sharp} e $\psi_{\mathcal{E}^{-1}}$ são sobrejetivas, então $(\iota_2 \circ \pi_L)|_{A^{\sharp}}$ é sobrejetiva e por isso (4.7) faz sentido pois $(\iota_2 \circ \pi_L)|_{A^{\sharp}} = ((\iota_2 \circ \pi_L)|_{A^*})^{\sharp}$. Vamos agora provar que

$$\llbracket M_1, \varphi_1, I_1 \rrbracket = \llbracket \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{M}(L)), (\iota_2 \circ \pi_L)|_{A^*}, I \rrbracket, \tag{4.7}$$

onde $I := \pi_L(L)$ é ideal de ordem de $\mathcal{M}(L)$ e consequentemente de $\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{M}(L))$. Prova-se o resultado análogo para $\llbracket M_2, \varphi_2, I_2 \rrbracket$ e, portanto poderemos concluir que $\llbracket M_1, \varphi_1, I_1 \rrbracket = \llbracket M_2, \varphi_2, I_2 \rrbracket$.

Por definição,

$$(\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{M}(L)), \psi_{\mathcal{E}^{-1}} \circ \varphi_1, I) \text{ é um quociente de } (M_1, \varphi_1, \psi_{\mathcal{E}^{-1}}^{-1}(I)).$$

Dada uma palavra $u \in A^*$, tem-se $\psi_{\mathcal{E}^{-1}} \circ \varphi_1(u) = \psi \circ \overline{\varphi}_1(\bar{u}) = \pi_L(\bar{u}) = \pi_L|_{A^*}(u)$. Pela Proposição 4.4.11,

$$\llbracket M_1, \varphi_1, \psi_{\mathcal{E}^{-1}}^{-1}(I) \rrbracket = \llbracket \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{M}(L)), \psi_{\mathcal{E}^{-1}} \circ \varphi_1, I \rrbracket = \llbracket \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{M}(L)), (\iota_2 \circ \pi_L)|_{A^*}, I \rrbracket. \quad (4.8)$$

Portanto, para demonstrarmos (4.7), resta provar que $\llbracket M_1, \varphi_1, \psi_{\mathcal{E}^{-1}}^{-1}(I) \rrbracket = \llbracket M_1, \varphi_1, I_1 \rrbracket$. Dado que $\psi_{\mathcal{E}^{-1}}^{-1}(I) = \psi^{-1}(I)$ e pela Proposição 4.4.4, é suficiente demonstrar que

$$(M_1, \varphi_1, \psi^{-1}(I))_p = (M_1, \varphi_1, I_1)_p,$$

para um natural $p \geq 3|M_1|$. Atendendo à definição 4.4.2, para completarmos a demonstração basta provar que fixado $u = a_1 \dots a_r \in A^*$, se tem para qualquer elemento v de $B_{\bar{u}}^\sharp$,

$$\theta_{\bar{u}}^\sharp(v) \in \psi^{-1}(I) \text{ se e só se } \theta_{\bar{u}}^\sharp(v) \in I_1.$$

Consideremos a aplicação $\alpha : B_{\bar{u}}^+ \rightarrow A^*$ definida por $\alpha(b_i) = a_i$, e os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} A^* & \xrightarrow{\varphi_1} & M_1 \\ \alpha \uparrow & \nearrow \theta_{\bar{u}} & \\ B_{\bar{u}}^+ & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F^1(A) & \xrightarrow{\overline{\varphi}_1} & \mathcal{E}(M_1) \\ \bar{\alpha} \uparrow & \nearrow \overline{\theta}_{\bar{u}} & \\ F(B_{\bar{u}}) & & \end{array}$$

Assim, $\overline{\theta}_{\bar{u}}|_{B_{\bar{u}}^\sharp} = (\overline{\varphi}_1 \circ \bar{\alpha})|_{B_{\bar{u}}^\sharp}$, então fixado $v \in B_{\bar{u}}^\sharp$, obtemos

$$\begin{aligned} \theta_{\bar{u}}^\sharp(v) \in \psi^{-1}(I) &\Leftrightarrow \psi \circ \theta_{\bar{u}}^\sharp(v) \in I \\ &\Leftrightarrow \psi \circ \overline{\theta}_{\bar{u}}(\bar{v}) \in I \Leftrightarrow (\psi \circ \overline{\varphi}_1)(\bar{\alpha}(\bar{v})) \in I && \text{(Observação 4.5.2)} \\ &\Leftrightarrow \pi_L(\bar{\alpha}(\bar{v})) \in \pi_L(L) && \text{(Por (4.6))} \\ &\Leftrightarrow \alpha(\bar{v}) \in L && \text{(\pi}_L \text{ reconhece } L) \\ &\Leftrightarrow (\overline{\varphi}_1 \circ \bar{\alpha})(\bar{v}) \in \overline{\varphi}_1(L) = I_1 && \text{(Definição de } L) \\ &\Leftrightarrow \overline{\theta}_{\bar{u}}(\bar{v}) \in I_1 \\ &\Leftrightarrow \theta_{\bar{u}}^\sharp(v) \in I_1 && \text{(Observação 4.5.2)} \end{aligned}$$

A demonstração fica assim concluída. □

Recordemos que pelo Teorema de Eilenberg, a aplicação \mathcal{F} é uma correspondência bijetiva entre pseudovarieties de álgebras de estabilização e variedades de ideais de ordem reconhecíveis.

Proposição 4.5.6. *Seja \mathbf{M} a classe de todos os monoides de estabilização. Então $\Gamma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}(\mathcal{E}(\mathbf{M}))$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.2.4, temos que $\mathcal{E}(\mathbf{M})$ é uma pseudovariety de álgebras de estabilização.

Seja L um ideal de ordem de $\Gamma(\mathcal{A})$, então $L = \bar{\varphi}^{-1}(I)$ com $\llbracket M, \varphi, I \rrbracket \in \mathcal{A}$. Logo L é um ideal de ordem de $F^1(A)$ reconhecível por $\bar{\varphi} : F^1(A) \rightarrow \mathcal{E}(M)$. Como $\mathcal{E}(M) \in \mathcal{E}(\mathbf{M})$, tem-se $L \in \mathcal{F}(\mathcal{E}(\mathbf{M}))$.

Seja L um ideal de ordem de $\mathcal{F}(\mathcal{E}(\mathbf{M}))$. Então, existe um monoide de estabilização M tal que $\mathcal{E}(M)$ reconhece L . Consideremos um morfismo sobrejetivo $\eta : F^1(A) \rightarrow \mathcal{E}(M)$ que reconhece L . Seja $I := \eta(L)$. É claro que I é um ideal de ordem de $\mathcal{E}(M)$ e consequentemente de M . Tomemos a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \varphi : A^* &\rightarrow M \\ w &\mapsto \eta(\bar{w}) \end{aligned}$$

Por definição de $\bar{\varphi}$, tem-se que $\bar{\varphi} = \eta$. Dado que $\bar{\varphi}$ é sobrejetiva, pela Proposição 4.5.3 a aplicação $\varphi^\#$ é sobrejetiva. Então $\Gamma(\llbracket M, \varphi, I \rrbracket) = \bar{\varphi}^{-1}(I) = \eta^{-1}(\eta(L)) = L$. \square

Concluimos com a apresentação do resultado seguinte, o principal deste capítulo.

Teorema 4.5.7. *Existe uma bijeção entre a classe das funções de custo regulares e a variedade de ideais de ordem reconhecidos por monoides de estabilização.*

Demonstração. Como consequência das Proposições 4.5.5 e 4.5.6, existe uma bijeção entre funções de custo regulares \mathcal{A} e ideais de ordem reconhecidos por monoides de estabilização $\mathcal{F}(\mathcal{E}(\mathbf{M}))$. \square

Bibliografia

- [1] E. Branco, ‘Linguagens reconhecíveis nas variantes de palavras, árvores e florestas: caracterizações e um estudo comparativo’, *Tese de Mestrado em Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa* (2014).
http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/15946/1/ulfc112553_tm_Eduardo_Branco.pdf
- [2] T. Colcombet, ‘Fonctions Régulières de Coût’, *Habilitation à diriger les recherches, École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre* (2013).
https://www.irif.fr/~colcombe/Publications/habilitation-colcombet_v1.1.pdf
- [3] L. Daviaud, D. Kuperberg e J-É. Pin, ‘Varieties of cost functions’, *STACS*, **47** (2016), 30:1–30:14.
<https://www.irif.fr/~jep/PDF/STACS2016.pdf>
- [4] J. Hopcroft, R. Motwani e J. Ullman, ‘Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation’, *Addison-Wesley* (1979).
- [5] D. Krob, ‘The equality problem for rational series with multiplicities in the tropical semiring is undecidable’, *Internat. J. Algebra Comput.*, **4**, (3) (1994), 405-425.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00017323>
- [6] J-É. Pin, ‘Varieties of formal languages’, *North Oxford Academic* (1986).
- [7] J-É. Pin, ‘A variety theorem without complementation’, *Russian Mathematics*, **39**, (1995), 80-90.
<https://www.irif.fr/~jep/PDF/OrderedVarieties.pdf>
- [8] I. Simon, ‘Factorization forests of finite height’, *Theoretical Computer Science*, **72**, (1) (1990), 65–94.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030439759090047L>
- [9] H. Straubing, ‘Finite Automata, Formal Logic and Circuit Complexity’, *Progress in Theoretical Computer Science* (1994).
- [10] W. Thomas, ‘Languages, Automata and Logic’ (1996).
<http://www.cs.cornell.edu/courses/cs6860/2010fa/Handouts/thomas.pdf>

Índice Remissivo

A

álgebra de estabilização, 5
 cíclica, 37
 com identidade, 5
 sintática, 13
árvore, 48
 ordenada, 49
autômato, 17
 de estabilização, 18
 generalizado, 17

C

computação, 50

D

decidível, 20
divide, 14

E

equivalentes, 21

F

fatorização
 n -fatorização, 52
fechado, 52
filho, 50
floresta de fatorização de tipo Ramsey, 48
folha, 50
fronteira, 21
função característica, 44
função de custo, 44
 regular, 62

I

ideal de ordem, 8
 reconhecido, 8
 reconhecível, 8
índice finito, 33

M

monoide de estabilização, 44
morfismo sintático, 13

N

nó, 50
núcleo, 52

O

o-divide, 14
o-subálgebra de estabilização, 7

P

problema da equivalência, 21
pseudovarietade
 de ordem de álgebras de estabilização, 40
 de álgebras de estabilização, 23

Q

quasi-ordem, 30
 gerada, 30
quociente, 64

S

semigrupo ordenado, 5
subálgebra de estabilização, 7

T

transformada de estabilização, 45

U

ultimamente definida por uma sequência
 de desigualdades, 35
 de identidades, 42

V

variedade de ideais de ordem, 24

Símbolos

3- Álgebras de estabilização

A^n , 6
 $T(A)$, 6
 ρ , 6
 \leq_ρ , 6
 $F(A)$, 6
 $\tilde{\varphi}$, 7
 $\widehat{\varphi}$, 7
 $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, 8
 c_n , 10
 $\text{ctx}(A)$, 10
 ϕ_r , 10
 $\text{Ctx}(A)$, 10
 $C(\tilde{r})$, 10
 ρ_L , 11
 $\mathcal{S}(L)$, 11
 $F(A) \ominus L$, 16
 $L(\mathcal{A})$, 18
 $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, 19
 $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, 19
 $\widetilde{A^m}$, 21
 $\mathcal{V}(F(A))$, 23
 $C^{-1}(L)$, 23
 \mathcal{F} , 26
 s^* , 26
 (C) , 28
 W' , 30
 $\bar{u} \leq \bar{v}$, 31
 $\bar{u} = \bar{v}$, 31
 $\mathbf{V}(\bar{u}, \bar{v})$, 31
 \sim_φ , 33

$\sim_{\mathcal{S}}$, 33
 \leq_φ , 34
 $\leq_{\mathcal{S}}$, 34
 \mathbf{J}_1^* , 37
 T_1 , 37
 U_1 , 38
 V_1 , 38
 $\langle \cdot \rangle_{n,u}$, 39
 $\mathbf{V}_o(\bar{u}, \bar{v})$, 41
 $(C)_o$, 43

4- Funções de custo

\mathcal{E} , 45
 $\psi_{\mathcal{E}}$, 46
 \mathcal{E}^{-1} , 46
 $\psi_{\mathcal{E}^{-1}}$, 46
 \mathbf{M} , 47
 h_d , 48
 $B^\#$, 51
 $|\cdot|$, 51
 π_B , 51
 $\theta^\#$, 52
 B_u , 52
 θ_u , 52
 d_u , 52
 h_{d_u} , 52
 \vec{u} , 61
 $\llbracket M, \varphi, I \rrbracket$, 62
 (M, φ, I) , 62
 (M_f, φ_f, I_f) , 64
 $\bar{\varphi}$, 65