Universidade de Lisboa

A resolução de problemas envolvendo polígonos: um estudo com alunos do 7.º ano de escolaridade

Filipa Alexandra Sales Ferreira

Mestrado em Ensino da Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela

Prof.ª Doutora Leonor Santos e coorientado pela

Prof.ª Doutora Isabel Simão

2016

Resumo

O presente relatório de cariz investigativo tem como objetivo compreender como os alunos de uma turma de 7.º ano resolvem problemas envolvendo polígonos. Para levar a cabo esta investigação formulei dois grupos de questões orientadoras a que me proponho responder: i) Quais as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas? Existe uma relação entre as estratégias utilizadas e os problemas propostos?; ii) Que tipos de dificuldades evidenciam os alunos na resolução de problemas e como procuram ultrapassá-las?

O estudo apresentado decorreu no ano letivo 2014/2015 no âmbito da minha prática letiva supervisionada da unidade "Figuras geométricas", na escola E.B. 2,3 de Fernando Pessoa, seguindo um paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa. Embora todos os alunos estivessem envolvidos no estudo foi dada especial atenção a dois pares de alunos. Os dados recolhidos são provenientes de vários instrumentos: i) observação de aulas, incluindo o registo áudio e registos escritos realizados pela minha colega de estágio; ii) recolha documental contendo as produções dos alunos e documentos oficiais, e iii) entrevistas aos pares selecionados.

Os resultados do estudo evidenciam que os alunos recorrem a estratégias variadas na resolução de problemas envolvendo polígonos. Entre as mais frequentes encontram-se a simplificação do problema, tentativa e erro e construção de um novo esquema, sendo esta última utilizada tanto como estratégia exclusiva como complementar. Os alunos tendem a utilizar mais do que uma estratégia de resolução para o mesmo problema, sendo possível afirmar que existem relações entre as características do problema e a estratégia utilizada pelos alunos.

O estudo revela ainda que a maior dificuldade dos alunos prende-se com a comunicação matemática, evidenciando dificuldades em fundamentar os seus raciocínios por escrito. Para ultrapassar esta e outras dificuldades os alunos apoiam-se em realizações de problemas realizados anteriormente, ainda que continuem muito dependentes do auxílio da professora.

Palavras-chave: Resolução de problemas, estratégias de resolução de problemas, dificuldades na resolução de problemas, Geometria.

Abstract

This investigative nature report aims to understand how 7th grade students of a specific class solve polygon related problems.

In order to carry out this investigation I proposed myself to answer two guideline group of questions: i) what type of strategies are used by students in problem solving? Is there any link between those strategies and the proposed problems?; ii) what type of difficulties were demonstrated by students and how did they tried to overcome them.

This study was developed during the academic year of 2014/2015 within my supervised practice teaching unit “Geometric Figures” in E.B 2, 3 de Fernando Pessoa School. It follows a interpretative paradigm and qualitative approach. The study, although evolving everyone in the class, focused on two pair of students. Collected data came from different instruments: i) classroom observation including the audio and written recording (some made by my co-worker); ii) document collection containing student’s productions and official documentation, and iii) interviewing the selected students.

We can extrapolate from the study that students use a multitude of strategies regarding polygon related problem solving. Simplification, trial-error and new scheme construction are within the most common strategies, being the last one used as much as exclusive as complementary. Students tend to use more that one strategy for the same problem. It is therefore acceptable to establish a link between the problem’s nature, and the strategy used by students.

The study also concludes that mathematical communication is the major endeavour students have to face, for they struggle to explain in written their reasoning. In order to overcome these difficulties students tend to support themselves in previous problems, even though they still strongly depend on teacher’s help.

Key words: Problem solving, strategies on problem solving, difficulties on problem solving, Geometry.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à Professora Doutora Leonor Santos pela paciência, disponibilidade, por todas as valiosas sugestões e críticas que me deu e por todas as palavras motivadoras.

Agradeço à Professora Doutora Isabel Simão pela sua simpatia e disponibilidade na sua orientação científica ao longo de todo o trabalho.

Não esquecendo de agradecer à Professora Doutora Cláudia Torres, por me ter aberto a porta da sua sala com toda a simpatia e disponibilidade, por todo o apoio durante a prática letiva e por todos as aprendizagens que me proporcionou. Um muito obrigado à Escola E.B. 2, 3 de Fernando Pessoa por tornar este projeto possível e pela simpatia com que todos me receberam, em especial à turma do 7.º 1.ª pela cooperação no estudo e boa disposição.

À minha colega de estágio Helena Guimarães com quem partilhei tantas horas de trabalho, que nunca hesitou em me motivar, aconselhar e ajudar até ao último momento, por tudo o que aprendi com ela, e porque além de ser uma excelente colega se revelou uma óptima amiga.

Não seria possível ter chegado até aqui sem a coragem e apoio incondicional da minha mãe, a conclusão desta etapa é uma vitória que não é só minha. Muito obrigado mãe!

A todos os que são o meu pilar, irmãs, cunhados, avós, tios, primos, o meu padrasto, obrigado por toda a motivação e ajuda ao longo de toda a minha vida escolar e pela força que me deram nesta fase, sem nunca deixar de acreditar no meu sucesso. Ao meu tio Toy não vou puder agradecer…mas ele estaria decerto cheio de orgulho.

Mais do que um agradecimento, um pedido de desculpa aos meus sobrinhos pelas brincadeiras e passeios que tive de dispensar para a conclusão deste objetivo.

Agradeço também a todos os meus amigos pelo incentivo, por estarem sempre perto nos momentos menos bons, assim como, estarão comigo para mais uma comemoração.

Índice

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Capítulo I

Introdução

O presente trabalho consiste no relatório de cariz investigativo realizado no âmbito da minha prática letiva supervisionada do mestrado em Ensino da Matemática. O estudo apresentado foi desenvolvido durante a lecionação da unidade "Figuras geométricas" enquadrada no domínio da Geometria, numa turma de 7.º ano de escolaridade da escola de 3.º ciclo de Fernando Pessoa, nos Olivais, que decorreu durante no ano letivo 2014/2015.

Aproveito desde já para apresentar as motivações e circunstâncias que me levaram a desenvolver este trabalho em torno da resolução de problemas no domínio da Geometria, e a escolher o objetivo e questões orientadoras do estudo, que serão também apresentadas neste capítulo.

Motivações

Para dar início a este estudo era necessário, em primeiro lugar, escolher a unidade didáctica onde este se iria desenvolver. De acordo com a planificação anual, estabelecida pelo grupo da disciplina de Matemática no início do ano letivo, no segundo período (época onde pretendia realizar o estudo) iriam ter lugar a lecionação dos domínios da Álgebra e da Geometria. Optei então por me focar no da Geometria, por um lado, por não ser tão estudado quanto o da Álgebra, por outro lado, por me despertar maior interesse, dadas as dificuldades dos alunos neste domínio, nomeadamente, na capacidade de visualização.

Numa das primeiras pesquisas realizadas em busca de um objetivo pertinente para o meu estudo, pude ler no Relatório Nacional de Provas Finais - 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico 2010-2014 que:

> No domínio Geometria e Medida, resulta evidente a necessidade de insistir na resolução de problemas que envolvam as noções de áreas, perímetros, volumes e propriedades de figuras planas/sólidos com figuras suporte, mas também sem figuras suporte, de modo a trabalhar a capacidade de abstração. (IAVE, 2015, p. 54)

Esta necessidade justifica-se dados os fracos resultados tanto na busca de estratégias adequadas para resolver problemas como na capacidade de construir textos de carácter argumentativo (IAVE, 2015). É por isso recomendado que a resolução de problemas, que impliquem a leitura e interpretação do enunciado, que envolvam estratégias diversificadas com verificação de resultados e posterior discussão, seja realizada de modo sistemático (IAVE, 2015).

Recordando o meu percurso escolar sinto que a resolução de problemas nunca foi encarada como uma atividade fundamental para a aprendizagem da matemática, não era realizada de forma sistemática, nem transposta para a utilidade que pode ter para o meu quotidiano. Na verdade foi ao iniciar a minha formação para professora, que refleti pela primeira vez sobre a importância das tarefas propostas aos alunos, assim como, a diversidade existente. Os problemas foram das primeiras tarefas exploradas e, de facto, desde o início que me fascinaram. Poderia assim ser a resolução de problemas um bom foco para o meu estudo.

Numa época onde arrisco a dizer que a matemática está entre as disciplinas menos preferidas dos alunos é importante fomentar "o gosto pela Matemática e pela redescoberta das relações e dos factos matemáticos (…) que pode e deve ser alcançado através do progresso da compreensão matemática e da resolução de problemas" (ME, 2013, p. 2). "Proporcionar oportunidades aos alunos para resolverem, explorarem, investigarem, e discutirem problemas, numa larga variedade de situações, é uma ideia-chave para que a aprendizagem da Matemática constitua uma experiência positiva significativa" (Abrantes, 1989, p. 35). Também através da resolução de problemas os alunos podem reconhecer "o poder e a utilidade da matemática" (NCTM, 2008, p. 302) que tantos alunos procuram nas suas aulas. Com isto, não foram precisos mais argumentos para me convencer de que estaria a escolher um tema não só do meu interesse como um tema bastante rico e importante para os alunos. Compreender como os alunos resolvem os problemas pareceu-me uma excelente oportunidade para perceber como poderei ajudá-los e gerir melhor as aulas em torno destas tarefas na minha prática futura.

É de fazer notar que ainda que a tecnologia não assuma um papel principal neste estudo é reconhecido como sendo fundamental para o ensino e a aprendizagem da geometria (NCTM, 2008). Contudo, uma vez que, a escola onde o estudo se irá realizar não dispõe de condições suficientes para que todos os alunos possam trabalhar com um *software* de geometria dinâmica, em grande parte das aulas, esta metodologia não foi privilegiada.

Problema e questões do estudo

O estudo realizado tem como objetivo compreender como os alunos de uma turma de 7.º ano resolvem problemas envolvendo polígonos. Para concretizar este objetivo formulei dois grandes grupos de questões orientadoras:

- ✓ Quais as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas? Existe uma relação entre as estratégias utilizadas e os problemas propostos?
- ✓ Que tipos de dificuldades evidenciam os alunos na resolução de problemas e como procuram ultrapassá-las?

Capítulo II

Enquadramento curricular e didático

Este trabalho foi desenvolvido ao longo da lecionação de uma das unidades do domínio da Geometria, tema que começarei por desenvolver no início deste capítulo, começando por uma breve abordagem histórica do ensino da Geometria e uma fundamentação da sua importância no ensino da Matemática com base em literatura de referência da área da didática da disciplina. Em seguida, irei desenvolver o tema da problemática em estudo, a resolução de problemas, começando pelo levantamento das várias perspetivas sobre a definição de problema e fazendo um enquadramento das questões de investigação que orientam este estudo.

O Ensino da Geometria

Embora atualmente a Geometria tenha um papel bastante significativo no ensino em Portugal as perspetivas em relação ao seu ensino nem sempre foram as mesmas. Exatamente antes do chamado movimento da Matemática Moderna o ensino da Geometria baseava-se em duas componentes principais: as construções geométricas, onde se determinavam alguns lugares geométricos e se faziam cálculos algébricos com segmentos de reta; e o estudo da Geometria euclidiana no plano e no espaço, onde eram "enunciados e demostrados nos livros de texto dezenas e dezenas de axiomas, postulados, lemas, teoremas, corolários, escólios, etc" (Veloso, 1998, p. 19) com o objetivo de desenvolver nos alunos hábitos de raciocínio sistemático e rigoroso. Já nos anos 70 e 80, com o movimento da Matemática Moderna, a Geometria foi "na prática desaparecendo do currículo implementado pelos professores" (Veloso, 1998). A Geometria passou a ser encarada como "subproduto ou 'parente pobre' da álgebra linear" (Veloso, 1998, pp. 22, 23). As construções geométricas, atividades interessantes da Geometria, foram afastadas para a disciplina de Educação Visual sem qualquer trabalho interdisciplinar com a Matemática. A intuição foi absorvida pela abordagem formal das transformações geométricas e a visualização passou a ser encarada com um estatuto diminuto em comparação à aritmética, à álgebra ou à análise (Veloso, 1998). Assim, gerações de alunos viram reduzidos a sua aprendizagem em Geometria ao teorema de Pitágoras e ao cálculo de áreas e volumes (Veloso, 1998).

Em 1989, a publicação das Normas para o Currículo do NCTM revelou-se um momento crucial para que a Geometria voltasse a ser considerada um tema relevante da Matemática escolar (Veloso, 1998). Este documento, além de alterações metodológicas, fez propostas fundamentais para a alteração dos programas de Matemática que veio a trazer uma visão renovada do ensino da Geometria (Veloso, 1998). Progressivamente, a Geometria foi ganhando relevância nos currículos de Matemática e, atualmente, está presente no ensino em todos os anos de escolaridade sendo considerada não só uma ajuda para os alunos representarem e darem significado ao mundo (NCTM, 1991) como "conteúdo do currículo de matemática onde os alunos aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da matemática" (NCTM, 2008, p. 44). Além disso, a formulação e validação de conjeturas e a classificação e definição de objetos geométricos proporciona o desenvolvimento do raciocínio matemático dedutivo e indutivo (NCTM, 2008).

Freudenthal (1973, citado por Abrantes, 1999) acrescenta ainda que a Geometria é essencialmente a compreensão do espaço onde a criança aprende a "conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor" (p. 155). Através do estudo da Geometria "os alunos poderão aprender as formas e estruturas geométricas e o modo de analisar as suas características e relações" (NCTM, 2008, p. 44), assim como, desenvolver a sua capacidade de argumentação (NCTM, 2008).

Outras das capacidades fundamentais da aprendizagem da Geometria que foi recuperada é a capacidade de visualização, podendo esta ser fomentada desde os primeiros anos de escolaridade:

> Desde o início dos primeiros anos de escolaridade, os alunos deverão desenvolver a capacidade de visualização através de experiências concretas com uma diversidade de objectos geométricos e através da utilização das tecnologias, que permitem rodar, encolher e deformar uma série de objectos bi e tridimensionais. (NCTM, 2008, p. 47)

Numa época onde a importância da articulação entre os temas é cada vez mais reconhecida, a Geometria é um contexto rico para a articulação com outras áreas da matemática (Brenda, Serrazina, Menezes, Sousa, & Oliveira, 2011). Tal como indicam os Princípios e Normas para a Matemática Escolar "as ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e resolução de problemas em outras áreas e em situações do dia-a-dia, pelo que a geometria deverá ser integrada, sempre que possível, com outras áreas" (NCTM, 2008, p. 44). No nosso dia-a-dia, cruzamo-nos com variadas formas e estruturas geométricas, quer na natureza, quer na observação da arte ou da arquitetura, que é extremamente importante compreender.

> A geometria é, por excelência, o tema matemático que permite que os alunos aprendam a ver a estrutura e simetria presentes no mundo à sua volta, nomeadamente nos monumentos históricos ou na própria natureza, e também em outros temas da própria matemática, aprendendo dessa forma a valorizar o mundo estético. (Brenda et al., 2011, p. 15)

Segundo Abrantes (1999), a Geometria é também talvez, mais do que qualquer outro, um dos domínios da matemática mais propício à realização de descobertas e à resolução de problemas desde os primeiros anos de escolaridade, uma vez que se pode fazer apelo à intuição e à visualização e recorrer de modo natural à manipulação de materiais. Além disso, acrescenta que,

> a geometria é uma fonte de problemas de vários tipos: de visualização e representação; de construção e lugares geométricos; envolvendo transformações geométricas; em torno das ideias de forma e dimensão; implicando conexões com outros domínios da Matemática, como os números, a álgebra, o cálculo combinatório, a análise; apelando a processos de "organização local" da Matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades. (Abrantes, 1999, p. 156)

Deste modo, a problemática definida neste estudo encontra-se bem enquadrada nesta unidade de ensino, pois por um lado este domínio matemático é propício à resolução de problemas e, por outro lado, estas tarefas, os problemas, são também uma contribuição importante para o ensino da Geometria.

Também nas Normas para a Matemática Escolar do NCTM é visível esta relevância. Estas recomendam que os programas do pré-escolar ao 12.º ano devem habilitar os alunos a:

- Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
- Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação;
- Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;

- Usar a visualização, o raciocino espacial e a modelação geométrica para resolver problemas. (NCTM, 2008, p. 44)

A Resolução de Problemas

Já desde o início do século XX, a resolução de problemas era discutida por alguns investigadores, mas foi na década de 40, com a ação de George Polya que esta atividade começou a ser vista como fundamental no ensino da Matemática (Ponte, 1992). Ainda assim, a resolução de problemas não ficou favorecida com a chegada da época denominada por Matemática Moderna nos anos 60. Só depois do seu declínio é que a resolução de problemas "emergiu como uma orientação pedagógica alternativa" (Ponte, 1992, p. 96).

Atualmente, os problemas são vistos como a força motora do desenvolvimento da Matemática e como tal "não é por isso de estranhar que a actividade de Resolução de Problemas constitua uma importante orientação curricular para o ensino desta disciplina" (Ponte, 1992, p. 95). Deste modo, a resolução de problemas não é apenas uma competência a desenvolver isoladamente, pelo contrário, deve estar presente em todas as unidades de ensino, contribuindo para a sua aprendizagem. O NCTM refere nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar que "a resolução de problemas constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática" (NCTM, 2008, p. 57). Já em Portugal, também a Associação de Professores de Matemática coloca a resolução de problemas no centro do ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática (1988). Assim, os programas de ensino de todos os anos de escolaridade devem habilitar os alunos a:

- Construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas;
- Resolver problemas que surgem em matemática e em outros contextos;
- Aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas;
- Analisar e reflectir sobre o processo de resolução matemática de problemas. (NCTM, 2008, p. 57)

Tal como refere Abrantes (1989), na vida real também somos confrontados com problemas que não conhecemos a sua solução previamente e é precisamente este tipo de atividades que deveria inspirar a aprendizagem da Matemática nas nossas escolas. Ao resolverem problemas, os alunos não só adquirirem conhecimentos matemáticos, assim como, ferramentas essenciais para o seu quotidiano e para a sua vida profissional, como desenvolvem novos modos de pensar, persistência, curiosidade e confiança para enfrentar situações novas (NCTM, 2008). É então de salientar que “a resolução de problemas não só constitui um objectivo da aprendizagem matemática, como é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática” (NCTM, 2008, p. 57). Por isso, “vamos então deixar que as crianças desenvolvam atitudes e convicções que espelhem uma visão de uma matemática desafiante, criativa e interessante, uma matemática que faz raciocinar!” (Moreira, 2008, p. 16).

O que é um problema?

Ainda que este assunto já seja explorado há muito tempo por diversos autores, existem várias perspetivas relativamente à definição de problemas e à definição de resolução de problemas. Tal como refere Schoenfeld (1996) “se pedirmos a sete educadores matemáticos para definir resolução de problemas será muito provável obtermos, pelo menos, nove opiniões diferentes” (p. 1).

Resolver problemas “é o que se tem de fazer quando não se sabe o que se tem de fazer” (Moreira, 2008, p. 11), ou seja, é o que fazemos quando estamos perante uma situação que pretendemos resolver mas não conhecemos a forma para o fazer. Por outras palavras ainda, “um problema consiste numa tarefa para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, mas em cuja solução se empenha activamente” (Ponte, 1992, p. 95). Ponte (2005) define as diferentes tarefas tendo em conta não só a perceção da sua dificuldade (desafio reduzido ou elevado) como tem também em conta as suas caraterísticas (tarefa aberta ou fechada), distinguindo os problemas dos exercícios, das investigações e das tarefas de exploração (como ilustra a figura 2.1).

Fig. 2.1 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura. (Ponte, 2005)

Assim, um problema é uma tarefa fechada “onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido” (Ponte, 2005, pp. 7-8) com um desafio elevado. Assim, é de notar que “ não é pelo facto de uma questão ser ou não colocada num contexto extra-matemático que ela é um exercício ou um problema” (Ponte, 2005). Também Kantowski (1981, citado por Abrantes, 1989) partilha a perspetiva de Ponte em relação à distinção de problemas e exercícios salientando que um problema “difere de um exercício pelo facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução” (p. 8). Outros autores, como por exemplo, Borasi (1986) classificam as tarefas tendo em conta apenas as suas caraterísticas, não tendo em conta a perceção da dificuldade que o indivíduo tem quando a resolve, além disso, não partilha desta distinção entre problemas e exercícios como veremos mais adiante.

Alguns autores falam ainda de diferentes tipos de problemas. Por exemplo, Ponte (1992) distingue dois tipos de problemas, tendo em conta o seu contexto, problemas puramente matemáticos e problemas da vida real. Esta distinção deve-se aos diferentes contextos considerados na formulação do problema. Este autor subdivide ainda os problemas da vida real em três tipos:

- Problemas de tipo 1 que são situações do mundo real, mais ou menos curtas, com informação suficiente, ou por vezes em excesso, para a sua resolução e que normalmente apresentam uma questão que tem uma solução simples. Estes problemas podem ser resolvidos quando os alunos já adquiriram os conhecimentos necessários para a sua resolução sendo possível realizar vários problemas deste tipo numa só aula.

- Problemas do tipo 2 são situações do mundo real que podem ter várias explorações recorrendo a variadas técnicas matemáticas. A resolução deste tipo de problemas é por norma dirigida pelo professor mas há espaço para explicações divergentes. Estes problemas têm como objetivo a melhor compreensão de uma situação real e a sua resolução pode prolongar-se até cinco aulas.
- Problemas do tipo 3 são investigações abertas em que a sua exploração pode levar os alunos a um de vários caminhos possíveis. A resolução destes problemas é favorável a uma postura mais participativa por parte dos alunos do que o habitual e pode-se estender por várias semanas, levando os alunos a desenvolver diversas atividades e experiências que são de elevado interesse pedagógico.

Já Borasi (1986) classifica os diferentes problemas tendo em conta quatro elementos estruturais: o contexto, a formulação, o número de soluções e o método de abordagem que pode ser utilizado para alcançar a sua solução. Deste modo, a autora distingue sete tipos de problemas:

i) Exercícios - apresentam um contexto inexistente, a formulação é única e explícita, a solução única e exata e o seu método de abordagem é uma combinação de algoritmos conhecidos;

ii) Problemas de palavras - são caraterizados pelo seu contexto explícito no texto do problema, formulação única e explícita, solução única e exata e o seu método de abordagem é uma combinação de algoritmos conhecidos;

iii) Problemas puzzle - apresentam as caraterísticas dos problemas de palavras com exceção do método de abordagem que consiste na elaboração de um novo algoritmo, uma “ideia luminosa”;

iv) Prova de uma conjetura – nestes problemas o contexto está parcialmente no enunciado, uma vez que se assume o conhecimento de algumas teorias associadas ao problema, a formulação é única e explícita e a solução é geral ainda que não seja necessariamente única, o seu método de abordagem envolve a exploração do seu contexto e a elaboração de novos algoritmos;

v) Problemas da vida real – neste caso o contexto é parcialmente dado, a formulação oferece a possibilidade de várias alternativas, existem várias soluções possíveis mas são apenas aproximações e o seu método de abordagem passa pela exploração do contexto e sua reformulação e pela criação de um novo modelo para resolver o problema;

vi) Situações problemáticas - o contexto é parcialmente apresentado no enunciado e problemático, e o solucionador do problema pode recolher informação adicional, a formulação é vaga e existem várias possibilidades para a solução. Quanto ao método de abordagem é baseado na exploração e reformulação do contexto, podendo existir a formulação de novos problemas.

vii) Situações – o contexto é também parcialmente apresentado mas não é problemático, a formulação é inexistente e nem é implícita, quanto à solução é a criação de um problema e por isso o seu método de abordagem passa pela formulação de novos problemas.

Para este estudo, um problema será encarado como uma tarefa onde os dados necessários estão claros, onde se sabe o que é pedido, mas não é indicado um modo de o resolver.

A resolução de problemas no ensino

Para Polya (1995), a resolução de problemas é encarada como uma habilidade que se adquire através da imitação e da prática, como por exemplo é a natação, onde "temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus problemas e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os" (p. 3).

Este autor propõe ainda um modelo para resolver problemas que deve passar por quatro fases fundamentais i) compreender o problema, ii) estabelecer um plano, iii) executar o plano, e iv) verificar os resultados. No fundo, para iniciar a resolução de um problema é necessário, em primeiro lugar, compreender o enunciado, além disso, é também fundamental que o aluno deseje resolver o problema. O aluno deve identificar os dados, as incógnitas e condicionantes, e no caso de ser adequado recorrer a figuras. Em seguida, é necessário pensar de um modo geral quais os cálculos e/ou desenhos necessários para obter a solução do problema e organizar as ideias que vão surgindo realizando um plano de resolução. Estas estratégias de resolução podem surgir a partir de uma experiência passada e de conhecimentos anteriormente adquiridos. Segundo o autor, a passagem da fase anterior para esta poderá ser um caminho "longo e tortuoso" (Polya, 1995, p. 5). Em terceiro lugar, o aluno terá de colocar em prática o plano formulado na fase anterior sendo essencial verificar todos os passos. Por fim, é necessário "olhar para trás" analisar toda a resolução e verificar o resultado final avaliando se a estratégia seguida foi adequada. Ao realizarem estas ações, os alunos não só podem consolidar os seus conhecimentos como lhes permite o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. Além disso, nesta última fase, é também possível e vantajoso procurar extensões do problema (Polya, 1995). Assim, "os alunos deverão ter muitas oportunidades para formular, discutir e resolver problemas complexos que requeiram um esforço significativo e, em seguida, deverão ser encorajados a refletir sobre os seus raciocínios" (NCTM, 2008, p. 57) para que tomem responsabilidade de refletir sobre o seu trabalho e desenvolverem a sua capacidade de resolver problemas.

Este autor não recusa a ideia de um aluno mesmo sem percorrer este caminho chegue impulsivamente à solução do problema, movendo-se por aquilo a que o autor chama de uma ideia brilhante, mas admite que "alguma coisa muito inconveniente e desastrosa pode resultar se o estudante deixar de lado qualquer uma das quatro fases sem dela ter uma perfeita noção" (Polya, 1995, p. 4).

Tal como referido anteriormente os alunos estabelecem o seu plano de resolução tendo em conta as recordações que têm de outros problemas semelhantes já resolvidos ou até de teoremas anteriormente demostrados. Assim, podem optar por diferentes estratégias para resolverem o novo problema, sendo que nos 2.º e 3.º ciclos os alunos já devem estar aptos a escolher e a utilizar estratégias adequadas (NCTM, 2008). Contudo, para que tal seja possível, é necessário proporcionar-lhes desde cedo o contacto com diferentes estratégias para que estes possam avaliar quais as adequadas perante um novo problema.

Borralho (1995, citado por Ribeiro, 2005) indica um conjunto de estratégias utilizadas para resolver problemas, são elas: " (1) descobrir um padrão; (2) construir uma tabela; (3) dramatizar o problema; (4) utilizar um desenho ou outro modelo; (5) fazer um desenho, um diagrama ou um gráfico; (6) formular e/ou testar uma conjectura; (7) trabalhar do fim para o princípio; (8) seleccionar notação apropriada, reformular o problema; (9) simplificar o problema; (10) identificar a informação pretendida, a informação dada e a informação de que necessita” (pp. 52-53). Estudos empíricos evidenciam que as estratégias mais frequentemente usadas pelos alunos são “a utilização de esquemas, a identificação de padrões, a listagem de todas as possibilidades, a experimentação com valores ou casos particulares, o trabalho do fim para o princípio, a tentativa e erro, a criação de um problema equivalente e a simplificação do problema” (NCTM, 2008, p. 59).

O professor tem um papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem, em particular na escolha de problemas e de tarefas matemáticas relevantes, uma vez que, através de bons problemas, os alunos podem consolidar e ampliar os seus conhecimentos que, quando bem selecionados, podem estimular a aprendizagem matemática (NCTM, 2008). Os problemas devem ser bem selecionados não sendo nem demasiado fáceis nem demasiado difíceis, naturais e interessantes, além disso, deve ser dado um certo tempo para a sua compreensão (Polya, 1995). Abrantes (1989) salienta a importância de colocar os alunos em contacto com uma grande variedade de situações onde resolver, explorar, investigar e discutir problemas é fundamental para aprendizagens mais significativas no ensino da Matemática. Além disso, durante a resolução dos problemas, o professor deve auxiliar os alunos a resolvê-los, colocando questões ou fazendo sugestões, tendo ao mesmo tempo o objetivo de desenvolver a capacidade dos alunos de resolver futuros problemas autonomamente (Polya, 1995):

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com o auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer processo. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (Polya, 1995, p. 1)

É, contudo, de fazer notar que a resolução de problemas é uma das “áreas nas quais o desempenho dos nossos alunos está longe de ser satisfatório” (Guimarães, 2005, p. 23). Um dos fatores que pode explicar o insucesso na resolução de problemas liga-se com uma possível leitura ineficaz realizada pelos alunos perante um problema na disciplina de Matemática, uma vez que, “ alguns alunos em Matemática lêem o enunciado de um problema seguindo com os olhos (da esquerda para a direita) as palavras à procura de um número (“logicamente, a aula é de Matemática e não de Português”)” (Brito, 2008, p. 41). Brito (2008) após constatar que 25% dos alunos deixaram em branco as questões relativas à resolução de problemas, no exame nacional de Matemática de 9.º ano em 2005, concluiu que os alunos têm dificuldade em resolver problemas quando apresentados por escrito, salientando que "a sua leitura não despertou conhecimentos adquiridos ou, de facto, não os adquiriram. Ou, ainda, não souberam como passar para o papel os seus raciocínios" (p. 41). Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar referem que alguns estudos evidenciam que o insucesso dos alunos na resolução de problemas não se deve à falta de conhecimentos matemáticos, mas sim à deficiente utilização dos mesmos (NCTM, 2008). Assim, resolver problemas não passa só por ter os conhecimentos de base ou por conhecer estratégias de resolução de problemas, visto que nem sempre é óbvio qual a estratégia adequada para resolver um dado problema, passando assim a dificuldade a ser a seleção da estratégia e como a aplicar (Ponte, 1992). Schoenfeld (1985, citado em Fernandes, 1989) considera que para resolver problemas é necessário ter em conta quatro aspetos diferentes:

1) Conhecimentos matemáticos, factos e algoritmos adquiridos até ao momento;
2) Conhecimento de estratégias de resolução de problemas,
3) Conhecimento de estratégias de verificação, ou de controlo, uma vez que o aluno deve tomar decisões sobre os recursos a usar e quando os usar;
4) Crenças dos alunos em relação a si, à Matemática, aos problemas e ao mundo em geral.

Os três últimos aspetos considerados relacionam-se com a metacognição, isto é, o "que cada um sabe acerca dos seus próprios conhecimentos e à forma como cada um gere tais conhecimentos durante qualquer actividade cognitiva" (Fernandes, 1989, p. 3). Assim, os aspetos metacognitivos são de extrema importância devendo ser utilizados e ensinados na sala de aula contribuindo para que os alunos melhorem a qualidade das suas decisões durante a resolução de problemas, tenham consciência das estratégias, técnicas, conceitos e processos matemáticos que os auxiliam na sua resolução e para desenvolver a capacidade de as utilizarem de modo eficaz (Fernandes, 1989). Assim, como professores de Matemática devemos ter presentes duas ideias geralmente aceites:

> A primeira é a de que se um indivíduo não possuir capacidades desenvolvidas ao nível da metacognição, tal não poderá implicar falta de flexibilidade e desperdício de ideias válidas e originais que são aspectos muito importantes na resolução de problemas. Por consequência devemos fazer tudo o que esteja ao nosso alcance para desenvolver tais capacidades. A segunda é a de que parece ser possível, embora bastante difícil, desenvolver as tais capacidades metacognitivas dos alunos; parece

> pois que podemos ter um importante papel a desempenhar no ensino da resolução de problemas. (Fernandes, 1989, p. 4)

Assim, Schoenfeld (1987, citado em Fernandes, 1989) refere quatro técnicas que podem ser utilizadas na sala de aula para desenvolver as capacidades cognitivas dos alunos: i) a utilização da tecnologia vídeo mostrando outros alunos a resolver problemas; ii) o professor "falar (pensar) alto" enquanto apresenta a resolução dos problemas" (p. 5); iii) discutir os problemas em turma; e iv) utilizar pequenos grupos de alunos que resolvem os problemas enquanto o professor se apresenta disponível para os ajudar.

Capítulo III

Contexto Escolar

Neste capítulo farei em primeiro lugar uma breve caracterização da escola onde decorreu a minha intervenção letiva com base no Projeto Educativo do Agrupamento e posteriormente a caracterização da turma. Relativamente à turma selecionada farei menção ao comportamento e desempenho da turma em especial na disciplina de Matemática e a outros aspetos que considerei pertinentes para a compreensão do contexto em estudo. Esta caracterização é baseada na minha observação realizada ao longo do ano, nas observações realizadas pela professora titular da turma e por informação recolhida no documento oficial da caracterização da turma.

Caracterização da Escola

O estudo foi realizado na Escola de 2.º e 3.º ciclo de Fernando Pessoa. Esta escola é a sede do Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa que abrange alunos desde o jardim de infância ao 9.º ano constituído por mais três estabelecimentos de ensino sendo eles: EB1 c/JI Infante D. Henrique; EB1 c/JI Arco-íris; e EB1 c/JI Adriano Correia de Oliveira. Este Agrupamento de Escolas situa-se no conselho de Lisboa, nomeadamente na freguesia de Santa Maria dos Olivais, caracterizada pela sua heterogeneidade a diversos níveis, dado a coexistência de famílias de diferentes estratos sociais e é um Território Educativo de Intervenção Prioritária (TEIP). Relativamente à sede do Agrupamento reúne um total de 80 docentes e 790 alunos dos quais 271 beneficiam do apoio do ASE, 77 estão ao abrigo do DL 3/2008, 92 têm apoio psicopedagógico e 63 beneficiam do apoio do Gabinete de Apoio ao Aluno e à Família (GAAF).

Caracterização da turma

Neste estudo participou a turma do 7.º 1.ª da escola anteriormente apresentada. Esta turma é constituída por 29 alunos, 16 rapazes e 13 raparigas. Existe uma aluna que apresenta necessidades educativas especiais estando abrangida pelo decreto-lei n.º 3 de 2008. A presente turma é uma turma do ensino artístico, ou seja, alguns alunos frequentam disciplinas específicas de formação musical que substituem as disciplinas de formação artística da escola regular. No início do ano letivo as idades dos alunos estavam compreendidas entre os 11 e os 14 anos de idade (Quadro 3.1) sendo que dois alunos frequentam o 7.º ano de escolaridade pela segunda vez.

Quadro 3. 1- Idades dos alunos da turma em estudo

Idades	Número de alunos
11 anos	5
12 anos	19
13 anos	4
14 anos	1

Segundo a professora de Matemática, esta turma é constituída por “alunos muito interessados e participativos”. Em relação ao desempenho na disciplina de Matemática considera-o muito heterogéneo, uma vez que “há alunos muito bons e bem preparados, mas há também um elevado número de alunos que apresentam muitas dificuldades e um percurso em matemática pautado pelo insucesso”. Ainda que dêem “todos ‘ar’ de que estão a trabalhar” alguns alunos desistem com facilidade ou nem tentam perceber o que se pretende, enquanto outros trabalham bastante de modo autónomo “embora ainda necessitem da validação do professor para dar continuidade ao seu trabalho”.

Na figura seguinte é possível observar os resultados obtidos pela turma no primeiro período na disciplina de Matemática.

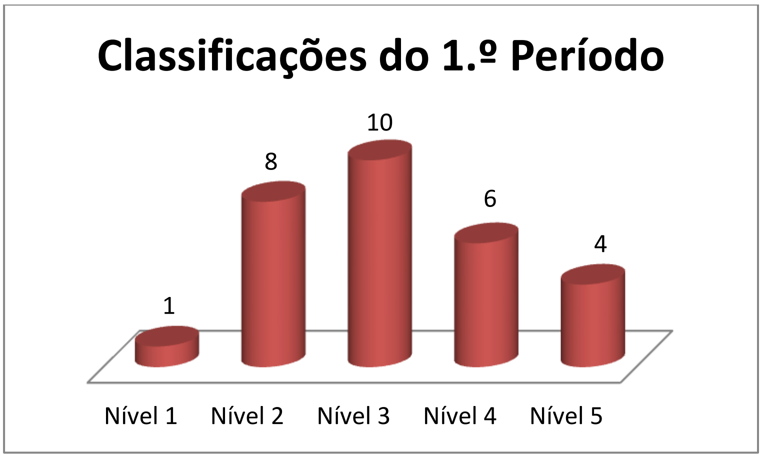


Fig. 3.1 – Classificações da turma no 1.º Período

Nove alunos tiveram nível de aproveitamento igual ou inferior a dois, catorze alunos obtiveram níveis de três e quatro e quatro alunos obtiveram a classificação máxima.

No segundo período notaram-se algumas mudanças como evidência a figura seguinte.

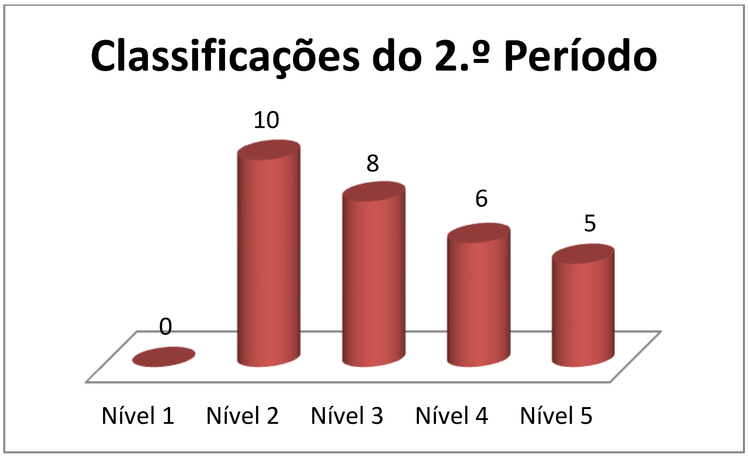


Fig. 3.2 – Classificações da turma no 2.º Período

O número de níveis negativos aumentou para dez mas nenhum aluno obteve nível 1 na disciplina. Também o número de alunos com o nível máximo aumentou para cinco. Ainda assim, o número de alunos com níveis três e quatro continua a ser catorze.

No último período do ano letivo os níveis negativos não sofreram alterações relativamente ao segundo período. Um dos alunos com nível quatro desceu para o nível três e outro subiu para o nível cinco, provocando algumas alterações na distribuição das notas da turma, como mostra a figura 3.3.

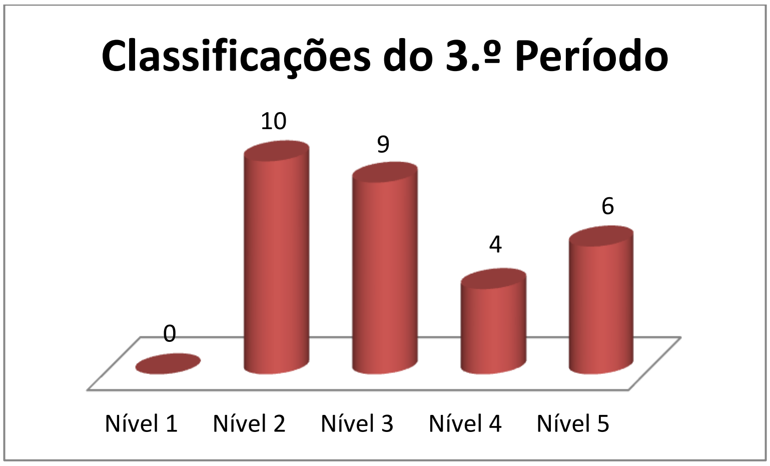


Fig. 3.3 – Classificações da turma no 3.º Período

É de notar que cerca de um terço dos alunos obtiveram níveis negativos a Matemática, contudo, tal como a professora titular da turma referiu no final do primeiro período "há alunos que estão particularmente desmotivados em relação à escola, não é uma questão da Matemática". Na verdade, as dificuldades dos alunos não se sentiram apenas na disciplina de Matemática sendo dos dez alunos com níveis negativos a Matemática seis alunos não transitaram para o 8.º ano.

Ao nível do comportamento, o concelho de turma considerou-o satisfatório, embora a turma seja muito faladora e agitada destacando por vezes alguns alunos devido ao seu mau comportamento. A professora titular considera ainda que a turma "tem vindo a apropriar-se das normas de sala de aula e à forma de trabalho que lhes vai sendo incutida".

Para caracterizar melhor os alunos é importante ter alguns conhecimentos sobre o seu agregado familiar, em especial a sua situação económica, as habilitações literárias dos pais assim como com quem os alunos vivem. Todos os alunos vivem em casa própria, 21 com os pais e oito apenas com a mãe, estando cinco alunos abrangidos pelo escalão A e cinco pelo escalão B. A maioria dos pais dos alunos desta turma encontram-se empregados, e as suas habilitações literárias recaem maioritariamente no ensino básico, como está evidenciado na figura seguinte.

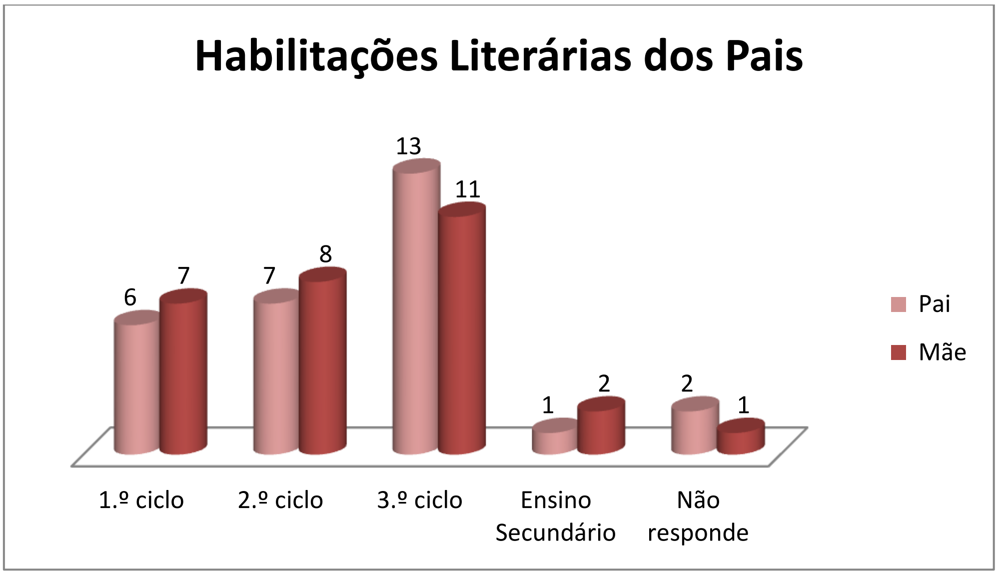


Fig. 3.4 – Habilitações Literárias dos Pais da turma em estudo

Muito embora a grande maioria dos pais possuam habilitações literárias inferiores ao ensino secundário, a maioria dos alunos dessa turma ambiciona chegar ao ensino superior (Figura 3.5) aspirando profissões ligadas às ciências e às artes.

Fig. 3.5 – Expetativas de futuro dos alunos da turma em estudo

Capítulo IV

Unidade de Ensino

Este capítulo inicia-se com a explicitação da articulação da unidade de ensino lecionada no programa da disciplina de Matemática, contemplando os conceitos anteriormente lecionados na turma em estudo e a sua importância para conteúdos lecionados no futuro, seguindo-se a exposição dos principais conceitos matemáticos envolvidos no estudo.

De seguida, são apresentadas e justificadas as estratégias de ensino adotadas tendo em conta a unidade lecionada, os recursos disponíveis e as características dos alunos em estudo. Segue-se a planificação da unidade lecionada e a apresentação das tarefas propostas durante a intervenção letiva. Por fim, é feita uma descrição sumária das aulas lecionadas explicando os objetivos cumpridos face aos planos elaborados e os desvios verificados.

Ancoragem da unidade de ensino no programa da disciplina

A proposta pedagógica que serviu de contexto ao estudo proposto foi desenvolvida segundo as orientações curriculares do Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico em vigor (ME, 2013). O estudo foi realizado numa turma do 7.º ano de escolaridade e enquadrado na unidade "Figuras Geométricas" do domínio "Geometria e Medida". A unidade referida é por sua vez constituída por duas subunidades: "Linhas poligonais e polígonos" e "Quadriláteros".

No 1.º ciclo, ainda segundo as orientações curriculares do programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (ME, 2007) os alunos aprenderam a reconhecer propriedades de figuras no plano e a fazer classificações, assim como, a desenhar alguns polígonos. Além disso, foi também no 1.º ciclo que estes alunos tiveram contacto com a noção de retas paralelas e perpendiculares, assim como, com a noção de ângulo, aprendendo a comparar diferentes ângulos, classificá-los como retos, agudos, obtusos ou rasos e a identificá-los em figuras geométricas.

No 2.º ciclo os alunos tiveram oportunidade de dar continuidade ao estudo das figuras geométricas abordando conceitos como retas, semi-retas, segmentos de reta, ângulos, polígonos, círculos e circunferências. Deste modo, alguns dos conceitos estudados no 2.º ciclo são fundamentais para iniciar o estudo do domínio "Geometria e Medida" no 7.º ano de escolaridade, nomeadamente o tópico "Ângulos: amplitude e medição" e "Polígonos: propriedades e classificação" onde os objetivos de aprendizagem são indicados no quadro seguinte (Quadro 4.1).

Quadro 4. 1 – Conteúdos estudados no 2.º ciclo (ME, 2007, pp. 37-38)

Tópicos	Objetivos específicos
Ângulos: amplitude e medição	Medir, em graus, a amplitude de um ângulo e construir um ângulo sendo dada a sua amplitude. Estabelecer relações entre ângulos e classificar ângulos. Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos.
Polígonos: propriedades e classificação	Identificar os elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos. Classificar triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados. Construir triângulos e compreender os casos de possibilidade na sua construção. Compreender relações entre elementos de um triângulo e usá-las na resolução de problemas. Compreender o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um triângulo. Resolver problemas envolvendo propriedades dos triângulos.

Deste modo, antes de iniciar a subunidade didática em estudo considerei fundamental revisitar alguns conteúdos trabalhados durante o 2.º ciclo que seriam essenciais para o trabalho realizado durante toda a unidade. Assim, foi realizada uma breve revisão relativa aos ângulos complementares, suplementares, verticalmente opostos e ângulos alternos internos e à soma dos ângulos internos de um triângulo.

Além disso, uma vez que a turma em estudo apenas este ano integrou o recente programa de Matemática (ME, 2013), a intervenção realizada englobou ainda o tópico “Critérios de igualdade de triângulos” atualmente estudado no 5.º ano de escolaridade, mas que segundo o programa anterior apenas era estudado durante o 3.º ciclo do ensino básico (ME, 2007). Para a lecionação deste tópico é sugerido que sejam alcançadas as seguintes metas de aprendizagem:

- ✓ Construir triângulos dados os comprimentos dos lados, reconhecer que as diversas construções possíveis conduzem a triângulos iguais e utilizar corretamente, neste contexto, a expressão «critério LLL de igualdade de triângulos».
- ✓ Construir triângulos dados os comprimentos de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado e reconhecer que as diversas construções possíveis conduzem a triângulos iguais e utilizar corretamente, neste contexto, a expressão «critério LAL de igualdade de triângulos».
- ✓ Construir triângulos dado o comprimento de um lado e as amplitudes dos ângulos adjacentes a esse lado e reconhecer que as diversas construções possíveis conduzem a triângulos iguais e utilizar corretamente, neste contexto, a expressão «critério ALA de igualdade de triângulos». (ME, 2013, p. 32)

Relativamente às subunidades didáticas “Linhas poligonais e polígonos” e “Quadriláteros” o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) tem como objetivos desenvolver o estudo dos conteúdos apresentados no quadro 4.2.

Os objetivos a alcançar com o estudo destes tópicos são indicados nas metas curriculares de Matemática do ensino básico (ME, 2013). O estudo desta unidade de ensino revela-se bastante relevante para a continuidade do estudo do domínio “Geometria e Medida”, ainda neste ano de escolaridade, em particular para as unidades “Paralelismo, congruência e semelhança” e “Áreas de quadriláteros”.

O estudo e a utilização dos conhecimentos lecionados nesta unidade irão ainda ser trabalhados até ao final do 3.º ciclo do ensino básico, nomeadamente, no estudo dos “Vetores, translações e isometrias” no 8.º ano de escolaridade e da “Trigonometria”, dos “Lugares geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos” e das “Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferências” durante o 9.º ano de escolaridade.

Quadro 4. 2 – Conteúdos da unidade “Figuras geométricas” (ME, 2013, p. 20)

Subunidades	Conteúdos
Linhas poligonais e Polígonos	✓ Linhas poligonais; vértices, lados, extremidades, linhas poligonais fechadas e simples; parte interna e externa de linhas poligonais fechadas simples; ✓ Polígonos simples; vértices, lados, interior, exterior, fronteira, vértices e lados consecutivos; ✓ Ângulos internos de polígonos; ✓ Polígonos convexos e côncavos; caracterização dos polígonos convexos através dos ângulos internos; ✓ Ângulos externos de polígonos convexos; ✓ Soma dos ângulos internos de um polígono; ✓ Soma de ângulos externos de um polígono convexo; ✓ Diagonais de um polígono.
Quadriláteros	✓ Diagonais de um quadrilátero; ✓ Paralelogramos: caracterização através das diagonais e caracterização dos retângulos e losangos através das diagonais; ✓ Papagaios: propriedades das diagonais; o losango como papagaio; ✓ Trapézios: bases; trapézios isósceles, escalenos e retângulos; caracterização dos paralelogramos; ✓ Problemas envolvendo triângulos e quadriláteros.

Conceitos matemáticos envolvidos na unidade de ensino

Nesta secção apresentarei os conceitos e as propriedades matemáticas lecionados ao longo da prática letiva descrita neste relatório, assim como, outros que ainda que não tenham sido por mim leccionados, estiveram presentes nas aulas ou estão fortemente ligados ao tema. Para me orientar nestas definições recorri ao Compêndio de Geometria de Diogo Amorim (1943).

Ângulos e relações entre ângulos

Em primeiro lugar é importante começar por definir ângulo e os seus elementos. Um <u>ângulo</u> (Figura 4.1) é uma região do plano limitado por duas semi-rectas que partem da mesma origem. A essas semi-rectas ($\dot{O}A$ e $\dot{O}B$) dá-se o nome de lados do ângulo, a sua origem (ponto O) denomina-se de vértice do ângulo.

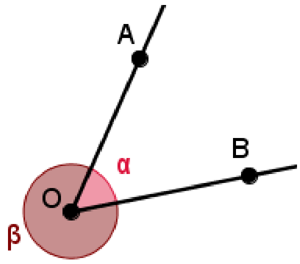


Fig. 4.1 – Ângulo

Os lados do ângulo dividem assim o plano em dois ângulos, o ângulo côncavo (β) que contém o prolongamento das semi-rectas e o ângulo convexo (α). Salvo indicação em contrário, sempre que se fala em ângulos considera-se os ângulos convexos.

É também possível distinguir vários tipos de ângulos. Ao ângulo convexo com os lados sobreposto chama-se ângulo nulo, ao ângulo côncavo ângulo giro. Quando as semi-rectas estão no prolongamento uma da outra estamos perante um ângulo raso. Um ângulo reto é metade de um ângulo raso. Por fim, um ângulo agudo é aquele que é menor que o ângulo reto e o que é maior que o ângulo reto denomina-se ângulo obtuso.

Vamos agora estabelecer algumas relações entre ângulos. Temos, por exemplo, os ângulos adjacentes que são ângulos não sobrepostos com o vértice e um lado em comum. Dizemos que dois ângulos são suplementares quando a sua soma é igual a um ângulo raso e no caso de ser igual a um ângulo reto chamamos-lhe ângulos complementares. Dois ângulos denominam-se verticalmente opostos quando os lados de um são o prolongamento dos lados do outro. Uma vez que estes ângulos são suplementares de um mesmo ângulo, vão ser sempre ângulos geometricamente iguais, isto é, podem-se fazer coincidir ponto por ponto.

Para falar de ângulos correspondentes, ângulos alternos internos e alternos externos é importante referir em primeiro lugar a definição de reta secante. Quando consideramos três retas complanares não paralelas entre si, existe sempre uma das retas que corta as outras duas, a esta reta chama-se de reta secante. Por exemplo, na figura seguinte podemos considerar a reta s e t e uma reta secante, a reta r.

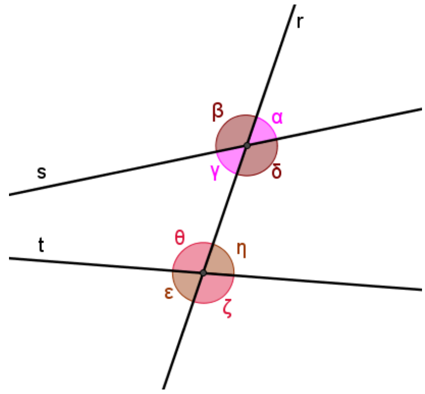


Fig. 4.2 – Retas complanares não paralelas entre si

Na figura 4.3 pode-se também observar os ângulos $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ e θ. Considerando dois ângulos se estes estiveram do mesmo lado da reta secante chamam-se ângulos da mesma parte, se estiverem em lados opostos dizem-se ângulos alternos. Em relação às retas s e t podemos considerar ângulos internos os que se localizam entre as duas retas e externos caso contrário. Temos assim, ângulos alternos internos, como os ângulos γ e η (ou δ e θ) e ângulos alternos externos como os ângulos α e ε (ou β e ζ). No caso de os ângulos serem da mesma parte mas um ser interno e outro externos chamamos-lhe ângulos correspondentes, como por exemplo os ângulos α e η. No caso de as retas cortadas pela secante serem paralelas os ângulos alternos internos, alternos externos e correspondentes são geometricamente iguais e o recíproco também é verdadeiro.

Polígonos

Um polígono é formado pela união dos lados de uma linha poligonal fechada simples com a respectiva parte interna. Estes podem ser convexos quando não são atravessados pelo prolongamento dos seus lados ou caso contrário denominam-se côncavos. Para este estudo foram apenas considerados polígonos convexos. Os polígonos têm como elementos os vértices, os lados, os ângulos internos e externos.

Um ângulo interno de um polígono é formado por dois lados consecutivos do polígono, tendo como vértice o vértice do polígono, e a sua abertura voltada para o interior deste. Já os ângulos externos são formados por cada um dos lados do polígono com o prolongamento do lado consecutivo, são assim, cada um deles, suplementares aos ângulos internos adjacentes

A soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um polígono com n lados é dada pala expressão $(n-2)\ \times 180°$. Já a soma das medidas de amplitude dos ângulos externos de um polígono convexo é $360°$.

As diagonais de um polígono correspondem aos segmentos de reta que unem dois vértices não consecutivos.

Os polígonos são designados pelo seu número de lados ou ângulos. Nesta secção vou apenas dedicar-me aos polígonos com três lados, os triângulos e com quatro lados, os quadriláteros.

No que diz respeito aos **triângulos** é importante abordar os critérios de igualdade destes. À semelhança dos ângulos, dois triângulos dizem-se geometricamente iguais quando se podem fazer coincidir ponto por ponto. Deste modo, em dois triângulos geometricamente iguais os lados e os ângulos de um são geometricamente iguais aos lados e ângulos correspondentes do outro. Ainda assim, para descobrir se dois triângulos são geometricamente iguais não é necessário saber os seis elementos de ambos. Existem três critérios onde apenas com três elementos dos triângulos é possível afirmar que estes são geometricamente iguais.

Critério de igualdade de triângulos LLL - Dois triângulos são geometricamente iguais se os três lados de um são geometricamente iguais aos três lados do outro.

Critério de igualdade de triângulos LAL - Dois triângulos são geometricamente iguais se tiverem dois lados correspondentes geometricamente iguais e o ângulo por eles formado geometricamente iguais.

Critério de igualdade de triângulos ALA - Dois triângulos são geometricamente iguais se tiverem um lado correspondente geometricamente igual e os ângulos adjacentes a esse lado geometricamente iguais.

No que diz respeito aos **quadriláteros** é relevante referir as várias espécies existentes e estabelecer relações entre si.

Podemos distinguir os trapézios, que têm pelo menos dois lados estritamente paralelos, dos não trapézios onde não existem lados estritamente paralelos. Entre os trapézios é de notar:

i) O trapézio rectângulo que tem um dos lados perpendicular aos lados consecutivos;
ii) O trapézio isósceles que tem os dois lados não paralelos geometricamente iguais;

iii) O trapézio escaleno que os lados não paralelos não são geometricamente iguais.

Fig. 4.3 – Trapézios

Já quando o quadrilátero tem os lados paralelos dois a dois designa-se por paralelogramo. Na família dos paralelogramos chamamos-lhe rectângulo se tem os ângulos todos geometricamente iguais e consequentemente retos, e losango quando tem os quatro lados geometricamente iguais. O quadrado aparece então como um caso particular tanto dos losangos como dos rectângulos por ter os quatro lados e ângulos iguais.

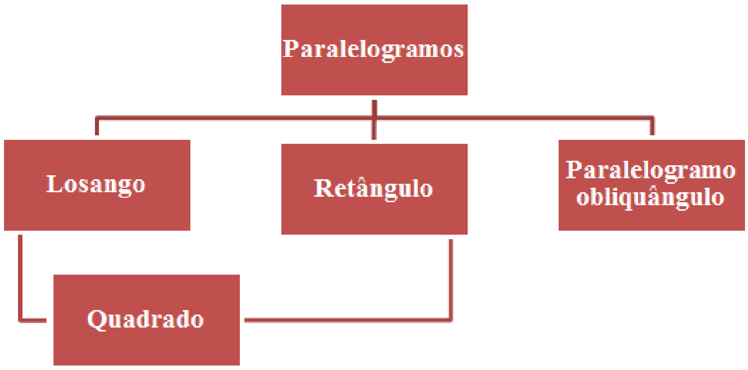


Fig. 4.4 – Relações entre paralelogramos

Os papagaios são caracterizados por ter dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais e consequentemente os losangos são também eles papagaios.

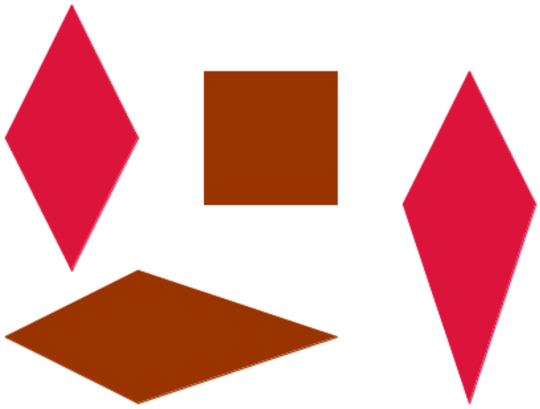


Fig. 4.5 – Papagaios

Estratégias de ensino

As estratégias de ensino adotadas tiveram em conta não só a literatura relativamente à Geometria e à resolução de problemas, como as características dos alunos e os recursos disponíveis, além disso, foi também tido em conta o objetivo do estudo.

Tendo em conta o objetivo do estudo, a lecionação da unidade de ensino privilegiou a resolução de problemas. Ainda assim, dada a importância da diversidade das tarefas no processo de ensino-aprendizagem, também foram pensadas tarefas exploratórias e exercícios durante a unidade de ensino em causa. Contudo, as tarefas exploratórias propostas para esta unidade não foram lecionadas por mim, uma vez que, existiu a necessidade de interromper a minha intervenção letiva, por motivos de avaliação externa da professora titular da turma.

As tarefas utilizadas durante a minha intervenção letiva foram na sua maioria adaptadas do manual de Matemática (Conceição & Almeida, 2014) seguido na escola ou dos materiais de apoio ao professor de Ponte, Oliveira e Candeias (2009). A escolha das tarefas tiveram em conta os objetivos definidos para cada aula, que foram ao encontro do Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013). Foram tidas em conta não só as potencialidades de cada uma das tarefas para a aprendizagem da unidade, por mim lecionada, como a sequência de tarefas que foi proposta.

No entanto, não é suficiente selecionar boas tarefas, é também fundamental refletir sobre o modo como são propostas e conduzidas em sala de aula (Ponte, 2005). E uma vez que, "as estratégias de ensino deverão incidir no envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem e não na simples transmissão de conhecimentos" (NCTM, 1991, p. 80) as planificações realizadas foram assim baseadas na prática de ensino exploratório.

Deste modo, as aulas foram estruturadas de acordo com as quatro fases típicas de uma aula exploratória: a apresentação da tarefa, o trabalho autónomo dos alunos; a discussão e a sistematização das aprendizagens matemáticas (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014). A primeira fase tem como objetivo familiarizar os alunos com o contexto da tarefa, garantir que todos os alunos façam uma boa interpretação da tarefa e que compreendam o que se espera da mesma, ao mesmo tempo que, serve para desafiar os alunos para a sua realização (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014). Esta fase tornou-se bastante importante em alguns problemas, servindo para esclarecer alguns conceitos que constavam nos enunciados, como por exemplo, a expressão "parcialmente sobrepostos". Tendo em conta as características dos alunos, que tal como foi referido na sua caracterização eram agitados, estes momentos serviram sempre para focar a concentração dos alunos na tarefa, principalmente naquelas que iniciavam a aula. É também fundamental organizar o trabalho dos alunos, distribuindo o material necessário e indicando a formas de organização do trabalho, assim como, estabelecer o tempo dedicado a cada uma das fases (Anghileri, 2006, citado por Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014). Uma vez que, em várias aulas foi necessária a utilização de material de desenho e tendo em conta que a escola possuía estes recursos levei para as aulas materiais suficientes para que todos os alunos pudessem realizar as tarefas, fazendo com que a falta de material não comprometesse as aulas.

Na segunda fase, dedicada ao trabalho autónomo dos alunos, o professor tem o papel de apoiar os alunos na sua resolução, esclarecendo dúvidas, colocando questões, ao mesmo tempo que regula as interações entre os alunos, e seleciona as resoluções adequadas para apresentar à turma, assim como, a sua melhor sequência dado os objetivos visados (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014). Durante esta fase, procurei acompanhar o trabalho dos alunos e fui bastante solicitada por alguns alunos, que tinham dúvidas ou que apenas queriam certificar-se que estariam a resolver as tarefas corretamente. Procurei esclarecer as suas dúvidas colocando-lhes questões que os levassem a refletir sobre as suas resoluções, chegando por vezes a interromper o trabalho autónomo para esclarecer dúvidas que verificava serem comuns a vários alunos. Procurei sempre não ajudar demais os alunos, nem os deixar sem auxílio, tal como sugere Polya (1995), e pensando neste equilíbrio e dada a minha inexperiência como professora, elaborei planos de aula detalhados com possíveis dificuldades e questões que poderia fazer nesta fase. Ao circular pela sala, permitiu-me também fazer anotações sobre as estratégias que os alunos estavam a utilizar nas suas resoluções, o que me permitiu escolher os alunos para as apresentar à turma. Mais uma vez, os planos foram pensados para me auxiliarem neste momento permitindo uma decisão mais rápida e refletida da sequência de resoluções a serem apresentadas, ainda que, surgissem algumas situações não previstas.

Já "as discussões realizadas com toda a turma exigem aos alunos capacidade de síntese, espírito crítico, e capacidade de resumir ideias ou conjeturas que sejam produto de trabalho individual ou de grupo" (NCTM, 1991, p. 80). Cabe ao professor garantir, nesta fase, o envolvimento de toda a turma (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014) gerindo as intervenções dos alunos assim como promover "a qualidade matemática das suas explicações e argumentações" (Ruthven, Hofmann, & Mercer, 2001, citado por Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014, p. 219). Nesta fase, procurei promover a discussão entre os alunos e a confrontação de ideias, dando espaço a que os alunos se questionassem uns aos outros, assumindo um papel de moderadora, além disso, procurei questionar alunos que me tinham apresentado ideias revelantes durante o trabalho autónomo para serem discutidas em turma ou até os menos participativos, aproveitando até para questionar os que se encontravam mais distraídos fazendo com que estes se concentrassem novamente na discussão.

Por fim, a sistematização é o momento de "institucionalização das aprendizagens" que todos os alunos devem reconhecer (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014, p. 220). Podem surgir novos conceitos ou procedimentos, serem estabelecidas conexões com aprendizagens anteriores, analisadas e comparadas as potencialidades dos processos envolvidos nas tarefas ou reforçar aspetos fundamentais, por exemplo, da resolução de problemas ou do raciocínio matemático (Canavarro, 2011). Esta fase não teve lugar em todas as aulas, mas foi fundamental para estabelecer mais formalmente os conceitos trabalhados, fazer o seu registo por escrito e reforçar as aprendizagens realizadas ao longo das aulas.

Ao longo da minha intervenção letiva foi privilegiado o trabalho a pares que, por um lado, dá a oportunidade de os alunos ouvirem e partilharem as suas opiniões e ideias com os colegas, de desenvolverem a sua capacidade de comunicação e raciocínio e, por outro lado, proporciona ao professor a possibilidade de interagir com os seus alunos de modo mais intenso tirando "partido das características dos alunos quanto à sociabilidade" (NCTM, 1991, p. 80). Ainda assim, alguns alunos por vezes trabalharam individualmente, porque os seus pares não estavam presentes, ou porque existiu a necessidade de os manter sozinhos pelo seu comportamento. Infelizmente também verifiquei que alguns alunos não realizavam as tarefas em conjunto, nem eram muito comunicativos, contrastando com outros que procuravam os seus colegas para os auxiliar ou trocar ideias.

Ao longo da minha intervenção letiva os alunos recorreram a material de desenho para construir figuras geométricas, visto que, "na aprendizagem da Matemática, em particular na geometria, devem ser usados diversos recursos, tais como, a régua, esquadro e transferidor e outros materiais manipuláveis" (Brenda et al., 2011). Estes materiais foram fundamentais para a construção de triângulos, que foram o ponto de partida para estabelecer conexões com os critérios de igualdade de triângulos, assim como, para a construção de figuras por parte dos alunos como apoio à resolução de problemas.

Foi também tida em conta a importância dada à tecnologia no ensino da Geometria (NCTM, 2008; Brenda et al., 2011), nomeadamente, na utilização de ambientes de geometria dinâmica (AGD), até porque, tal como indica Ponte, Oliveira, e Candeias (2009, p. 13) "levar os alunos a contactar com um AGD é, também dar-lhes a possibilidade de passarem por uma experiência de aprendizagem matematicamente significativa", contudo, a escola onde decorreu a minha intervenção letiva apenas possui uma sala de computadores, o que tornou inviável a utilização de um AGD por parte dos alunos, visto que seria o seu primeiro contacto com este tipo de *softwares*, e estes precisariam de tempo para se ambientar às com as características do *software* proposto.

Planificação da unidade de ensino

Antes de iniciar a minha prática letiva foi estabelecida uma planificação da unidade de ensino, onde tive em conta não só a planificação a médio e a longo prazo, realizada pelo grupo disciplinar de Matemática da escola onde decorreu a minha intervenção letiva, como os objetivos especificados no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico em vigor (ME, 2013) e as características da turma, que tive oportunidade de acompanhar desde o início do ano letivo. A planificação da unidade de ensino realizada inicialmente sofreu algumas alterações devido a alguns constrangimentos de tempo que surgiram após o início da minha intervenção. Deste modo, a planificação aqui apresentada corresponde à sua última versão (Anexos I – VI).

A minha prática letiva foi desenvolvida ao longo de seis aulas, duas de 45 minutos e 4 de 90 minutos no final do 2.º período e início do 3.º período. A unidade didática foi iniciada no dia 23 de fevereiro com uma revisão de conceitos estudados no 2.º ciclo, como ângulos complementares, suplementares, adjacentes e a soma de ângulos internos e externos de um triângulo, que tanto eu como a professora titular da turma considerámos fundamentais que os alunos tivessem presentes este ano de escolaridade. Sendo que a primeira aula era apenas de 45 minutos a primeira parte da aula de dia 24 de fevereiro foi também dedicada à revisão de conceitos, como sejam ângulos alternos e internos complementares e verticalmente opostos. As revisões foram realizadas partindo da resolução de problemas de modo que os alunos pudessem ver emergir os conceitos já estudados. Nos dias 24, 27 de fevereiro e 2 de março foi planeado o estudo dos critérios de igualdade de triângulos, tomando como ponto de partida a construção de triângulos dadas várias informações, visto já ter sido uma aprendizagem realizada no 2.º ciclo do Ensino Básico. Estas aulas foram acompanhadas de resolução de exercícios e problemas de modo a consolidar as aprendizagens efetuadas. Além disso, foi apresentado em cada aula apenas um critério para que os alunos tivessem tempo de interiorizar as aprendizagens realizadas. A minha intervenção letiva foi interrompida, por motivos de avaliação externa da professora titular da turma, assim, esta garantiu a lecionação das aulas de dia 3, 6 e 9 de março onde foram estudados os conceitos de linhas poligonais e polígonos, a soma dos ângulos internos e externos de polígonos e as propriedades dos quadriláteros sendo estas duas últimas matérias lecionadas com o apoio a tarefas exploratórias (fichas de trabalho 4 e 5). No dia 10 de março retomei a lecionação recorrendo à resolução de problemas para consolidar os conceitos aprendidos até então. Devido às atividades extracurriculares realizadas nas últimas semanas do 2.º período e à interrupção letiva, a última aula da minha intervenção letiva foi lecionada já no 3.º período no dia 10 de abril onde aproveitei para propor problemas desta vez focados nas propriedades dos quadriláteros.

Quadro 4. 3 – Conteúdos abordados e recursos usados, por aula lecionada

Data	Conteúdos abordados	Recursos
23 de fevereiro 45 minutos	-Ângulos complementares, suplementares e adjacentes - Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo	Ficha de trabalho n.º 1
24 de fevereiro 90 minutos	- Ângulos internos alternos, complementares e verticalmente opostos - Noção de igualdade de triângulos - Critério LLL de igualdade de triângulos	Ficha de trabalho n.º 2 Material de desenho
27 de fevereiro 90 minutos	- Noção de igualdade de triângulos - Critério LAL de igualdade de triângulos	Ficha de trabalho n.º 3 Material de desenho
2 de março 45 minutos	- Noção de igualdade de triângulos - Critério ALA de igualdade de triângulos	Material de desenho
10 de março 90 minutos	Consolidação: - Ângulos e relações entre ângulos - Igualdade de triângulos - Soma de ângulos internos de polígonos	Ficha de trabalho n.º 6 Material de desenho
10 de abril 90 minutos	Consolidação: - Classificação e propriedades de quadriláteros	Ficha de trabalho n.º 7 Material de desenho

Para cada uma das aulas foram construídos planos detalhados. Os planos incluíram os objetivos que se pretendia alcançar para cada uma das aulas, os materiais necessários para a sua realização, a metodologia de trabalho, a previsão dos tempos para cada momento da aula e as atividades do aluno e da professora nos vários momentos (Anexo I - VI). Procurei prever as dificuldades dos alunos, assim como, procurar modos de intervir para esclarecer as suas dúvidas ajudando-me a alcançar as estratégias de ensino anteriormente definidas. A realização destes planos com alguma antecedência deu-me a oportunidade de os poder discutir e alterar dando-lhe cada vez mais consistência. Ainda assim, no decorrer da intervenção letiva houve a necessidade de realizar ajustes de aula para aula, quando os objetivos da aula anterior não eram totalmente alcançados.

Fichas de trabalho

Na próxima secção irei apresentar as fichas de trabalho propostas durante a minha lecionação onde descrevo os seus objetivos, os conteúdos envolvidos e os materiais necessários para a sua realização.

Ficha de trabalho n.º 1

Para dar início ao estudo do domínio "Geometria e Medida" decidi estabelecer conexões com conteúdos estudados em anos anteriores, uma vez que, alguns conceitos estudados no 2.º ciclo são fundamentais para a compreensão dos conteúdos em estudo este ano letivo. Deste modo, a primeira ficha de trabalho apenas envolve conteúdos estudados em anos letivos anteriores.

Tendo em conta também que é a primeira ficha de trabalho da unidade em estudo, esta inicia-se com um problema com um enunciado simples, dividido em duas alíneas. O enunciado do problema contém uma imagem de um triângulo com alguns dados associados apelando à sua interpretação. A primeira alínea tem como objetivo a determinação das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo, envolvendo conceitos como ângulos internos de triângulos e a soma das suas medidas de amplitude, ângulos externos do triângulo e ângulos suplementares. Na segunda alínea pretende-se que os alunos descubram a soma das medidas de amplitude dos ângulos externos do triângulo apresentado. Não é objetivo desta alínea que os alunos façam uma generalização da soma das medidas de amplitude dos ângulos externos de um triângulo a partir de um acaso particular, mas sim que, seja um ponto de partida para recordar uma propriedade dos triângulos já estudada.

O segundo problema é semelhante ao primeiro, uma vez que pretendia que incluísse os conceitos estudados no problema anterior, contudo, este acrescenta o conceito de ângulos complementares e tem um enunciado um pouco mais complexo, requerendo a compreensão de conceitos como "triângulo rectângulo em A" e perpendicularidade de segmentos de retas.

Ambos os problemas requerem a interpretação da figura dada, desenvolvendo a capacidade de visualização dos alunos. Além disso, requerem a utilização de notação própria que é fundamental desenvolver desde o início. Ainda que não tenha ficado explícito no enunciado dos problemas, estes foram pensados de modo a proporcionaram o desenvolvimento da comunicação escrita, por isso, durante a aula foi pedido para que fossem apresentadas todas as justificações necessárias. A ficha de trabalho foi realizada com intenção de ver o primeiro problema discutido antes da realização do segundo, para que fosse possível orientar os alunos nas justificações e notações a utilizar desde o início, uma vez que era expectável que no primeiro problema os alunos apresentassem na sua maioria apenas os cálculos efetuados, e ainda que se recordassem das relações entre ângulos estudadas em anos anteriores não fossem capazes de utilizar os termos corretos.

Os dois problemas foram adaptados do manual Matematicamente Falando (Conceição & Almeida, 2014) adotado pela escola onde a lecionação decorreu. A necessidade de adaptação destas tarefas prendeu-se com a necessidade de ajustar a linguagem utilizada.

Ficha de trabalho n.º 2

A ficha de trabalho n.º 2 é constituída por um único problema com um enunciado simples apoiado de uma imagem, à semelhança da ficha anterior. A resolução desta questão envolve os conceitos de ângulos verticalmente opostos, ângulos alternos e internos e ângulos correspondentes. Além de ser um ponto de partida para uma revisão mais formal dos conceitos envolvidos, este problema permite colocar em prática as aprendizagens realizadas na ficha anterior acerca da resolução de problemas, como a interpretação do enunciado, o estabelecimento de um plano de resolução, a sua execução e até uma possível verificação de resultados. Com a discussão deste problema é possível fazer com que os alunos compreendam que por vezes existe informação que não é relevante para a resolução dos problemas e compreender que para o mesmo problema existem várias estratégias, mais ou menos económicas, que podem até recorrer a conceitos diferentes.

À semelhança das questões da ficha anterior também nesta foi pedida a justificação de todos os raciocínios dos alunos, de modo a que estes pudessem desenvolver uma cadeia lógica de argumentos e assim desenvolver a sua comunicação escrita, além disso, permite ao professor verificar a evolução dos alunos na sua comunicação e corrigir eventuais erros.

O problema em questão foi adaptado dos Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3.º ciclo - 7.º ano, Triângulos e Quadriláteros de Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

Ficha de trabalho n.º 3

A terceira ficha de trabalho proposta tem em vista a compressão dos critérios de igualdade de triângulos explorados após realização da ficha de trabalho anterior, nomeadamente os critérios de igualdade de triângulos LLL e LAL.

Uma vez que estes conteúdos são novos para estes alunos considerei importante que esta ficha de trabalho comportasse duas partes. A primeira dedicada a exercícios de consolidação dos conhecimentos e a segunda parte com problemas com o mesmo tema.

A primeira parte tem como objetivo que os alunos compreendam como podem utilizar os critérios de igualdade em casos concretos, e apresenta três exercícios adaptados do caderno de atividades Matematicamente falando 7 (Conceição & Almeida, 2014).

Em cada um deles são dados dois triângulos, onde já se afirma serem geometricamente iguais, e é pedido para que os alunos indiquem os critérios de igualdade que nos permitem justificar tal afirmação. Além disso, é pedido aos alunos no caso da alínea a e c, para indicarem o valor de x que corresponde à medida de amplitude de um ângulo de um dos triângulos dados, e no caso da alínea b à medida de comprimento de um dos lados de um dos triângulos dado, de modo a que os alunos possam fazer as correspondências entre ângulos e lados de triângulos geometricamente iguais. As duas primeiras alíneas apenas podem ser justificadas com um dos critérios já a terceira permite a utilização dos dois critérios estudados.

A segunda parte é constituída por dois problemas. O primeiro problema adaptado do manual Olá Matemática – matemática 5.º ano (Sequeira, Andrade, Almeida & Beja, 2014) apresenta um enunciado mais longo do que as fichas de trabalho anteriores, o que requer uma maior interpretação por parte dos alunos, ainda assim, é acompanhado por uma imagem onde são dados valor para as medidas de comprimento dos lados dos triângulos. Pretende-se assim que os alunos ao investigarem qual o terreno maior compreendam que com as informações dadas é possível provar que estes são geometricamente iguais, recorrendo aos critérios de igualdade de triângulos numa situação contextualizada e mobilizando conceitos estudados nas aulas anteriores, nomeadamente os ângulos verticalmente opostos. O segundo problema pretende que os alunos, dadas as informações no enunciado, investiguem se a situação apresentada na imagem é possível. Este problema adaptado dos Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3.º ciclo - 7.º ano, Triângulos e Quadriláteros (Ponte, Oliveira & Candeias, 2009) leva a que os alunos elaborem uma demostração por redução ao absurdo, sendo dada a oportunidade aos alunos de contactarem com as demostrações matemáticas no domínio da Geometria, ao mesmo tempo que aplicam os critérios de igualdade de triângulos.

Ficha de trabalho n.º 6

Uma vez já estudados os três critérios de igualdade de triângulos, as somas das medidas de amplitude dos ângulos internos e externos de polígonos e os quadriláteros, a sexta ficha de trabalho foi pensada de modo a poder reunir tarefas que envolvessem a grande maioria destes temas, assim como, desenvolver a capacidade de resolução de problemas por parte dos alunos.

O primeiro problema envolve a igualdade de triângulos. No enunciado são dadas várias indicações de como um grupo de amigos colocaram varas junto à margem de um riacho, envolvendo vários termos matemáticos essenciais no domínio da geometria, e deixa ao encargo dos alunos provar que, ao saberem a medida de comprimento do segmento de reta [CE], é possível descobrir a largura do riacho. Além das indicações por escrito da construção realizada pelo grupo de amigos, o enunciado é acompanhado de uma imagem ilustrativa dessa construção, todavia, sem dar todas as informações do texto, como por exemplo, ângulos retos e lados geometricamente iguais. Para esta prova os alunos terão de fazer uma boa interpretação do enunciado e conseguir recolher informações relevantes para a sua resolução, assim como, ser capazes de construir uma cadeia de argumentos lógica.

O segundo problema adaptado dos Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3.º ciclo - 7.º ano, Triângulos e Quadriláteros (Ponte, Oliveira & Candeias, 2009) envolve conceitos como ângulos verticalmente opostos, soma das medidas das amplitude dos ângulos internos do triângulo e dos quadriláteros, ângulos suplementares e as propriedades dos quadrados. Dada uma imagem com dois quadrados sobrepostos é pedido aos alunos para determinarem a medida de amplitude de dois dos ângulos da figura. Num problema semelhante ao das primeiras fichas de trabalho é colocada à prova a capacidade dos alunos de resolver problemas, e a sua capacidade de visualização ao encontrarem relações entre os ângulos da figura dada, além disso, permite ao professor perceber até que ponto os alunos compreenderam os conceitos trabalhados nas primeiras aulas e a sua evolução na comunicação escrita, uma vez que, no enunciado era pedido para apresentar todos os cálculos e as respetivas justificações.

O terceiro problema à semelhança do primeiro foi adaptado do manual Matematicamente Falando (Conceição & Almeida, 2014) e desafia os alunos a aplicarem as propriedades dos polígonos num contexto real, nomeadamente a soma das medidas de amplitude dos ângulos extremos de um polígono e estabelecer relações com o seu número de lados.

Por fim, é apresentado um problema em que é fundamental uma boa interpretação do enunciado, para traduzir a informação dada em linguagem corrente para linguagem matemática, e apela aos conhecimentos sobre a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos e externos dos polígonos.

Ficha de trabalho n.º 7

A última ficha de trabalho tem como objetivo trabalhar as propriedades dos quadriláteros estudados e é constituída por duas partes, a primeira dedicada à resolução de problemas e a segunda com questões de verdadeiro ou falso. A primeira parte é composta por três problemas, no primeiro é pedido para os alunos comentarem uma afirmação sobre uma possível construção de um trapézio isósceles, no segundo é dada a medida de amplitude de um ângulo interno de um losango e é pedido para que os alunos determinem as restantes medidas de amplitude dos ângulos internos deste quadrilátero, por último, o terceiro problema pedia que os alunos desenhassem um paralelogramo, dado o seu perímetro e sabendo que um dos lados tem um terço da medida de comprimento do outro. Os três problemas foram pensados de modo a que os alunos colocassem em prática os seus conhecimentos sobre as propriedades de alguns dos quadriláteros estudados. O terceiro em particular remete para conteúdos estudados em anos anteriores, como o perímetro e os números fracionários. Neste último problema para poderem desenhar o paralelogramo os alunos tem de utilizar as suas propriedades para encontrar as medidas de comprimento dos lados, assim como, utilizar estas para fazer a sua construção.

Na segunda parte as questões de verdadeiro ou falso têm como objetivo fazer com que os alunos adquiriram uma boa compreensão das propriedades dos vários quadriláteros e os consigam relacionar. Assim como, desenvolver a capacidade dos alunos em justificar as afirmações verdadeiras, desenvolvendo a sua comunicação matemática escrita, e justificar as afirmações falsas com recurso a contra-exemplos.

Sínteses das aulas

Em seguida será apresentada uma síntese de cada uma das aulas lecionadas, que nem sempre se realizaram de acordo com os planos apresentados em anexo.

Todavia alguns aspetos foram transversais a todas as aulas. A distribuição das fichas de trabalho foi sempre acompanhada das indicações sobre a metodologia de trabalho e infelizmente do desagrado dos alunos ao recebê-las, embora, depois se envolvessem no trabalho. Durante o trabalho autónomo os alunos tiveram sempre o meu apoio, fui circulando pela sala, esclarecendo as dúvidas e questionando os alunos de modo a os auxiliar, além disso, aproveitava para ver as suas resoluções e selecionar os alunos para apresentarem a sua resolução no momento da discussão. Durante as discussões não escrevi nada no quadro sem a colaboração dos alunos, sendo todas as ideias discutidas em turma segundo a minha orientação. Também procurei em todas as aulas ser rigorosa com a linguagem utilizada e com o tempo os próprios alunos já se corrigiam uns aos outros.

Deste modo, nestas sínteses procuro salientar as diferenças entre o planeado e o concretizado, assim como, as principais decisões tomadas e dificuldades sentidas ao longo da aula. Procurei ainda fazer algumas considerações sobre o que não foi tão bem conseguido e algumas alterações que devem ser efetuadas, tanto a nível dos planos como às tarefas propostas.

Aula do dia 23 de fevereiro

Esta primeira aula, sendo a primeira do Domínio da Geometria este ano letivo, tinha como objetivo rever conceitos já trabalhados ao longo do 2.º ciclo, nomeadamente relações entre ângulos e a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos e externos de um triângulo.

A aula teve início com o sumário e enquanto os alunos o escreviam iniciei a distribuição da ficha de trabalho n.º 1, dando as indicações necessárias tal como planeado. Após a leitura do enunciado do primeiro problema por um aluno selecionado deu-se início ao trabalho autónomo. Quando informados que teriam de trabalhar a pares alguns alunos manifestaram algum desagrado, contudo, posteriormente a maioria envolveu-se na realização da tarefa proposta e, embora não tenham sido todos, os alunos trabalharam a pares. Durante o trabalho autónomo os alunos não manifestaram grandes dificuldades na resolução do primeiro problema, mas foram questionando acerca da notação que se deveria utilizar, outros evidenciaram ainda dificuldades em identificar os ângulos externos do triângulo.

A discussão coletiva iniciou-se dentro do tempo previsto, contudo alongou-se bastante para além do planeado. O aluno chamado ao quadro, de entre os vários alunos que demostraram interesse em fazê-lo, resolveu o problema utilizando ângulos giros, o que logo de início, fez com que vários alunos questionassem a sua resolução. Comecei em primeiro lugar por corrigir a notação apresentada e aproveitar desde logo para esclarecer os alunos sobre as notações corretas para triângulos, ângulos e medidas de amplitude de ângulos. Posteriormente, o aluno explicou a sua resolução e a turma mostrou-se bastante participativa, quer para completar a resolução apresentada, quer para apresentar outras alternativas para chegar ao mesmo resultado, usando neste caso ângulos rasos (como apresentado no plano). Após apresentadas duas alternativas de resolução no quadro, foram escritos os conceitos revistos, tal como previsto, e tendo em conta que durante a discussão surgiu o conceito de ângulos adjacentes decidi escrever também este. De seguida outro aluno foi chamado para discutir a segunda alínea. Este aluno não tinha compreendido o objetivo do problema e pensei ser um bom ponto de partida para a discussão. Houve necessidade de começar por explicitar a definição de ângulos externos do triângulo, de completar a resolução com a origem dos valores escritos pelo aluno e algumas justificações, assim como, fazer com que os alunos compreendessem o que era realmente pedido no problema.

A aula terminou e não houve tempo para concluir o planeado. Apesar de considerar que a discussão coletiva foi um momento crucial para chegar aos objetivos definidos para esta aula com um verdadeiro envolvimento da turma, esta foi bastante prolongada, e o tempo que os alunos demoraram a escrever no quadro toda a sua resolução, para só depois se discutir em turma, o tempo que demorei a escrever os definições do quadro, e a falta de ritmo que estes acontecimentos proporcionaram à aula, poderia tê-la comprometido. Acresce ainda que o plano apenas foi concretizado pela metade o que poderia também ter tido consequências graves na planificação a longo prazo.

Aula do dia 24 de fevereiro

Uma vez que o plano na aula anterior não tinha sido concretizado na totalidade, resolvi começar esta aula com a sua conclusão. Os alunos entraram na sala de aula bastante agitados, tentei chamar a atenção da turma ditando o sumário e entregando de seguida o problema 2 da ficha de trabalho n.º 1. Durante o trabalho autónomo pude observar que alguns alunos estavam a utilizar o transferidor para medir os ângulos, por isso, foi necessário referir que o problema não poderia ser resolvido com o auxílio do transferidor, contudo, não expliquei a razão. Os alunos foram colocando questões sobre como poderiam justificar os seus cálculos ou se estariam a utilizar a notação correta. Quando terminou o tempo destinado ao trabalho autónomo a maioria dos alunos já tinham terminado a tarefa, contudo, durante a discussão ainda existiam pares a resolver a tarefa não tomando a devida atenção à discussão. A resolução do problema foi feita por mim no quadro, por uma questão de gestão de tempo, no entanto, procurei nunca escrever nada sem a participação dos alunos, fui sempre questionando os alunos sobre os cálculos que iam ditando, de modo a poder escrever as justificações de todos os cálculos realizados, procurando assim ser mais rigorosa nas justificações escritas do que na aula anterior. Mais uma vez os alunos tiveram a necessidade de descrever outras alternativas de resolução. Uma das alunas referiu a relação do ângulo externo com os ângulos internos não adjacentes e, apesar de não conseguir explicar o seu raciocínio na totalidade, foi um bom ponto de partida para apresentar este conceito.

A segunda ficha foi distribuída e o enunciado lido, os alunos mostraram-se empenhados. Os alunos apresentaram desde logo bastantes dificuldades e foi necessário interromper o trabalho autónomo para explicar os novos conceitos envolvidos (ângulos verticalmente opostos e alternos internos), ainda assim, poucos foram os alunos que conseguiram identificar ângulos alternos internos na figura dada, apesar das dificuldades e dos poucos avanços os alunos sentiram-se bastante desafiados com esta tarefa. Na verdade, esta interrupção não foi bem conseguida, muitos alunos continuaram concentrados na resolução do problema e não deram importância à explicação que estava a ser feita. Na discussão procurei levar os alunos a identificarem ângulos alternos internos, correspondentes e verticalmente opostos, no entanto, a discussão contou com a participação de poucos alunos. Esta situação levou-me a acreditar que este problema foi apresentado muito cedo, os alunos deveriam ter contactado com estas relações entre ângulos em problemas mais simples, visto que, como não conseguiram mobilizar os conhecimentos isto comprometeu toda a resolução do problema.

Quando pedido para os alunos construírem triângulos dadas as medidas de comprimento dos seus lados estes não revelaram dificuldades, nem no manuseamento do material de desenho, nem na compreensão de que os vários triângulos produzidos eram geometricamente iguais, tornando esta fase da aula mais rápida do que o esperado, uma das alunas chegou ainda a referir que os triângulos construídos eram isósceles. O plano foi assim concretizado, contudo, nem todos os objetivos foram alcançados, além disso, ao longo da aula senti os alunos mais distraídos do que o habitual, a turma estava mais barulhenta e por vezes foi preciso chamar a atenção de alguns alunos pelo seu comportamento.

Aula do dia 27 de fevereiro

O sumário foi escrito no quadro e, enquanto os alunos o escreviam, aproveitei para distribuir o material de desenho necessário para a construção de triângulos. Desenhado o esboço de um triângulo, dadas as medidas de comprimento de dois lados e a medida de amplitude de um ângulo, foi pedido aos alunos para desenharem de modo rigoroso o triângulo, à semelhança da aula anterior. Mais uma vez a construção do triângulo não trouxe dificuldades aos alunos, seguiu-se a construção do triângulo realizada por mim no quadro com as indicações dos alunos, posteriormente foram escritos os vários passos realizados. Nesta fase uma das alunas entreviu para referir que faltava “o chapeuzinho no A”, e por isso, houve mais uma vez a necessidade de explicar a notação correta para ângulos e para a sua medida de amplitude, que tendo em conta a intervenção de outros alunos foi percetível que ainda não tinha sido compreendido por todos. Após enunciar o critério, tal como previsto, levei os alunos a compreender que o ângulo a que nos referíamos teria de ser o que é formado pelos dois lados referidos e não qualquer outro.

A aula prosseguiu com a distribuição da primeira parte da terceira ficha de trabalho e a leitura do seu enunciado. Os exercícios apresentados levantaram mais dificuldades do que o esperado. Ainda no trabalho autónomo foi preciso apoiar vários alunos, uns porque iam justificando que podiam utilizar os dois critérios porque já se dizia que os triângulos eram geometricamente iguais, e outros ainda que conseguissem identificar o critério correto, tiveram dificuldades em identificar os lados e os ângulos correspondentes nos dois triângulos. Durante a discussão foi necessário fazer compreender os alunos que para provar a igualdade dos triângulos deveriam recorrer às informações dadas, e após provada a igualdade poderiam fazer corresponder os lados e os ângulos de ambos os triângulos. Já na terceira alínea selecionei para apresentar a sua resolução uma aluna que fez a aplicação errada do critério LAL, a turma rapidamente entreviu e surgiu a oportunidade para referir a importância da posição do ângulo em relação aos lados, agora com um exemplo prático. Nesta alínea alguns alunos também ficaram confusos por não saberem as medidas de comprimento dos lados. Todas estas questões fizeram com que a discussão fosse mais prolongada do que o desejado, proporcionando pouco ritmo à aula. Refletindo sobre a tarefa e as dificuldades levantadas, penso que teria sido uma melhor opção começar por um exercício onde fossem os alunos a descobrir se os triângulos dados eram geometricamente iguais ou não evitando algumas confusões iniciais.

A segunda parte da ficha de trabalho foi distribuída, contudo por esquecimento não foi realizada a sua leitura para a turma. Os alunos suspeitaram desde logo que os terrenos seriam geometricamente iguais e tentaram aplicar os critérios de igualdade. A maioria das solicitações prenderam-se com a dificuldade em construir uma cadeia de argumentos para explicar o seu raciocínio, para os auxiliar fui colocando algumas questões e sugeri que atribuíssem nomes aos vértices dos triângulos. Pude observar também alguns alunos que justificavam apenas o critério, muitas vezes incorreto, utilizando apenas dois elementos dos triângulos, uma vez que, aparentemente eram os únicos dados que estavam disponíveis. Um destes casos foi levado para a discussão coletiva e com a participação dos colegas foi possível levar os alunos a compreender que teriam de justificar a igualdade de triângulos com um dos critérios estudados até ao momento. Ao longo desta discussão foi também corrigida a notação utilizada, desta vez a de segmentos de reta e de medida de comprimento de segmentos de reta.

Terminada a discussão e visto o tempo para dedicar ao trabalho autónomo do problema seguinte e respetiva discussão não ser suficiente, decidi não iniciar a sua resolução. Dediquei o restante tempo à entrega das fichas de trabalho anteriores e à recolha das fichas realizadas na presente aula. Não obstante, considero que os principais objetivos da aula foram atingindo fazendo um balanço positivo desta.

Aula do dia 2 de março

Uma vez que na aula anterior não foi possível realizar o último problema da ficha n.º 3, após o sumário escrito no quadro distribui este problema pelos alunos e li o seu enunciado para a turma. Tal como esperado um dos alunos comentou de imediato que "se a figura está aí é porque é possível", foi então explicado aos alunos que teriam de averiguar se as características tal como estavam indicadas eram possíveis. Surgiu também a dúvida se o ponto O seria o centro da circunferência, o que de facto não constava na ficha de trabalho. Inicialmente alguns alunos mostraram-se um pouco perdidos sem saber por onde começar, fui fazendo questões sobre o que podiam dizer em relação aos lados dos triângulos, e o que representavam em relação à circunferência, contudo, ao circular pela sala, reparei que poucos foram os alunos que utilizaram os critérios de igualdade dos triângulos. Argumentos como "a lados iguais opõem-se ângulos iguais" eram frequentes e ainda que uns acrescentassem "e os triângulos unem-se no mesmo ponto", os alunos não fizeram referência a esse ponto ter de ser o centro da circunferência, nem as implicações que isso trazia em relação às medidas de comprimento dos lados dos triângulos. Ao tentar fazer com que os alunos se apercebessem dos seus erros e que outros avançassem no problema, prolonguei o momento de trabalho autónomo em demasia, visto que embora a maioria das resoluções não estivessem certas, já estavam concluídas. Nesta altura teria sido mais produtivo ter iniciado a discussão mais cedo, e em conjunto ir corrigindo os argumentos dos alunos, visto serem idênticos a todos. Já na discussão um dos alunos apresentou a sua resolução e surgiu a necessidade de dar um contra exemplo para o argumento "a lados iguais opõem-se ângulos iguais" levando os alunos a compreender que esta propriedade é válida apenas quando estamos a falar de elementos do mesmo triângulo. Contudo, alguns alunos acrescentaram que " os triângulos unem-se no mesmo ponto”, mas não dei o devido tempo para os alunos se explicarem, o que poderia ter feito com que estes compreendessem que esse ponto não poderia ser um qualquer, mas sim, o centro da circunferência, e em vez disso, caí na ansiedade de levar os alunos a utilizar os critérios de igualdade de triângulos, e ainda que os alunos tenham compreendido a aplicação do critério, na minha opinião acabou por resultar de uma discussão pouco significativa para alguns alunos.

Para finalizar, distribui o material de desenho necessário para a construção de um triângulo dados a medida de comprimento de um dos lados, e a medida de amplitude dos ângulos adjacentes, do qual fiz um esboço no quadro. Mais uma vez nem a construção nem a formulação do novo critério de igualdade trouxe dificuldades, contudo alguns alunos fizeram referência a um possível critério AAA que infelizmente não houve tempo para explorar.

Aula do dia 10 de março

Uma vez já estudadas as várias relações entre ângulos, os critérios de igualdade de triângulos e as somas das medidas de comprimento dos ângulos internos e externos de polígonos em aulas anteriores, esta tinha como propósito a consolidação destes conhecimentos, tanto como, desenvolver a capacidade de resolução de problemas dos alunos.

Os alunos mostraram-se muito agitados no início da aula, contudo começaram por escrever o sumário reproduzido no quadro. Em seguida deu-se lugar à distribuição do primeiro problema da ficha de trabalho, e foi selecionado um aluno para proceder à sua leitura. Tal como previsto, aproveitei este momento para esclarecer conceitos como “pontos colineares” e “retas perpendiculares”. Todavia, senti desde logo os alunos perdidos, questionando se era necessário efetuar medições e o que era pedido. Surgiu assim a necessidade de explicar que não era objetivo do problema medir os segmentos de reta, mas sim, provar que ao medir um dos segmentos de reta seria possível saber a medida de comprimento da largura do riacho. Deste modo, os alunos prosseguiram o trabalho autónomo enquanto continuei a circular pela sala auxiliando os alunos que mostraram algumas dificuldades em escrever os seus argumentos. Para a discussão selecionei uma aluna para expor a sua resolução no quadro, contudo esta exposição não foi bem conseguida, a aluna apesar de ter a resolução correta não conseguiu explicar o seu raciocínio nem responder às questões que fui colocando para poder orientar a discussão. Ao perceber que a aluna só tinha conseguido resolver o problema com o auxílio do seu par, pedi a colaboração deste para poder discutir o problema e envolver toda a turma. Infelizmente a resolução não foi concluída na totalidade já que não foi escrito o que se podia concluir após provar que os triângulos eram geometricamente iguais, embora ao longo da discussão os alunos tenham questionado e mostrado interesse sobre o modo como deveriam justificar as suas respostas.

Seguiu-se a distribuição de mais um problema e a sua leitura por uma das alunas, que levantou questões em relação ao significado de "quadrados sobrepostos". Esclarecidas as dúvidas, os alunos envolveram-se no trabalho autónomo e a maioria das questões e sugestões realizadas prenderam-se com as justificações, durante este momento aproveitei também para reproduzir a figura dada no quadro preparando o momento seguinte. Para a discussão um dos alunos foi ao quadro explicar a sua resolução, com a colaboração da turma corrigi alguns erros e por uma questão de gestão de tempo resolvi ser eu a escrever a segunda parte da resolução do problema com a participação dos alunos.

Por fim, foram distribuídos os restantes problemas da ficha de trabalho n.º 6 e dado que, os alunos estavam um pouco agitados resolvi ser eu a ler os enunciados. Ainda durante o trabalho autónomo surgiram questões sobre polígonos regulares ou soma das medidas de amplitude dos ângulos externos do triângulo. Um dos alunos apresentou a sua resolução do problema 3 no quadro que foi discutida em turma, ainda durante esta discussão um dos alunos sugeriu que se o robô em cinco passos gira 30° então por cada passo irá girar 6° (30:5), logo bastava dividir 360° que representaria a volta completa por 6°. Dada a imprevisibilidade deste raciocínio hesitei em responder, perguntei aos restantes alunos se concordavam, na verdade para ganhar tempo para refletir sobre esta questão, estes começaram de imediato a discutir entre eles, por fim, indo de encontro ao que alguns alunos já tinham argumentado acabei por referir que esta resolução, ainda com o mesmo resultado final não descrevia o problema. Visto isso, o aluno que estava no quadro terminou de escrever a resolução já discutida, o que demorou mais do que o desejado e deste modo não foi possível realizar a discussão do último problema. Contudo considero que além de ter um bom ritmo a aula cumpriu os principais objetivos.

Aula do dia 10 de abril

Dado que, após a última aula por mim lecionada, foi feito o estudo dos quadriláteros, esta aula teve como propósito desenvolver a capacidade de resolver problemas com quadriláteros, tal como, consolidar as propriedades destes.

Como em todas as aulas, esta teve início com o sumário. As fichas de trabalho foram distribuídas e solicitei uma aluna para realizar a sua leitura. Distribui material de desenho pelos alunos mas, por falha, não indiquei o tempo para a realização dos três problemas da ficha. Os alunos deram início ao trabalho autónomo, mostrando-se empenhados e a trabalhar a pares.

Ao circular pela sala pude observar várias estratégias de resolução ao mesmo tempo que ia respondendo a questões sobre propriedades dos vários quadriláteros, insistindo nas justificações, pedido que por lapso não constava nos enunciados.

Para a discussão do primeiro problema selecionei dois alunos que em simultâneo escreveram a sua resolução no quadro, posteriormente por ordem explicaram a sua resolução aos colegas. A escolha destes alunos foi realizada pelas suas estratégias de resolução, tal como previsto no plano de aula. Os alunos aceitaram as diferentes estratégias e corrigidos alguns pontos a nível de escrita, avançamos para a discussão do segundo problema que decorreu tal como previsto. Já para a discussão do terceiro problema dividi o quadro, mais uma vez, em duas partes e chamei dois alunos que escreveram em simultâneo a sua resolução, um seguindo uma estratégia por tentativa e erro e outro recorrendo a equações. Em seguida os alunos tiveram oportunidade de explicar aos colegas os seus raciocínios que por sua vez foram questionando alguns aspetos.

Em seguida distribui a segunda parte da ficha de trabalho com frases verdadeiras e falsas. Já durante o trabalho autónomo surgiram algumas dificuldades que também foram abordadas durante a discussão, por exemplo, compreender por que razão um losango é um papagaio mas o contrário já não ser verdadeiro. Esta discussão foi importante não só para compreender melhor as propriedades dos quadriláteros e estabelecer relações entre si, como para fazer com que os alunos construíssem contra-exemplos que provassem a falsidade das afirmações.

Para concluir, o plano foi concluído e considero que os objetivos para esta aula foram muito bem conseguidos, além disso, esta aula foi tida pelas professoras orientadoras, como uma aula com um ritmo bastante equilibrando e sendo o ritmo da aula um dos aspetos apontados nas primeiras aulas como a melhorar, esta aula demostrou também assim uma evolução ao longo da minha prática letiva neste sentido.

Capítulo V

Metodologia de Investigação

Neste capítulo irei justificar as opções metodológicas do estudo tendo por base o objetivo da investigação. Deste modo, começo por fundamentar a escolha da abordagem metodológica. Seguidamente, justifico e descrevo os participantes do estudo, terminando com a apresentação das técnicas e procedimentos de recolha de dados e com a indicação do processo de análise de dados utilizado.

Opções metodológicas

O presente estudo foi realizado em ambiente de sala de aula onde se procurou compreender como alunos de uma turma de 7.º ano resolvem problemas envolvendo polígonos. Neste estudo tive um papel de professora em simultâneo com o papel de investigadora onde recolhi, analisei e interpretei os dados recolhidos de natureza essencialmente descritiva. Tive com este estudo o objetivo de observar, assim como, analisar e interpretar como os alunos resolvem os problemas, as estratégias que adotam e as dificuldades sentidas durante a sua resolução e como as tentam ultrapassar.

Deste modo, optei por seguir uma abordagem de natureza qualitativa, uma vez que se enquadra com as cinco caraterísticas que, segundo Bogdan e Biklen (1994), uma investigação qualitativa deve possuir: i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, pois a investigação foi realizada em sala de aula, constituindo o investigador o instrumento principal; ii) os dados recolhidos são descritivos, pois, analisei e interpretei os dados recolhidos sendo que estes se apresentam em forma de palavras e imagens; iii) o investigador interessa-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos, uma vez que, pretendi observar as estratégias que os alunos adotaram e as dificuldades sentidas durante a sua resolução, e não olhar apenas para o produto final; iv) os dados são analisados de forma indutiva; v) existe uma especial preocupação com a perspetiva dos participantes.

Tendo em conta alguns investigadores que enquadram as abordagens quantitativas no paradigma interpretativo (Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 2005) também esta investigação segue um paradigma interpretativo onde “o objeto geral da investigação é o “mundo humano” enquanto criador de sentido” (p. 175), tendo como objetivo a compreensão dos processos utilizados pelos alunos na resolução de problemas da unidade de ensino lecionada.

Os participantes

O estudo foi realizado a uma turma do 7.º ano de escolaridade, constituída por 29 alunos, tal como já mencionado na caracterização da mesma.

Todos os alunos participaram na investigação, sendo que foram recolhidas as resoluções das fichas de trabalho relativas à resolução de problemas de todos os alunos. Ainda assim, selecionei dois pares de alunos que foram analisados em maior detalhe. Os alunos foram selecionados segundo os seguintes critérios: i) boa capacidade de comunicação; e ii) utilização de estratégias e/ou revelação de dificuldades distintas. Estes critérios foram elaborados tendo em conta o objetivo da investigação, uma vez que, para compreender como os alunos resolvem os problemas é necessário ter acesso aos seus pensamentos e para isso é necessário que estes consigam explicar os seus raciocínios. Além disso, para ter melhor acesso a todo o processo enquanto resolvem os problemas foi adotado o trabalho a pares e dado que a sua interação é fundamental, é necessário que os alunos se mostrem interessados e realizem as tarefas em conjunto. É ainda de fazer notar que ao escolher alunos que apresentem diferentes estratégias na resolução de problemas ou dificuldades distintas aumenta a probabilidade de ver esclarecidas as questões do estudo proposto.

Optei por selecionar dois pares, o Carlos e a Margarida e o David e a Elisa. A Margarida era uma aluna responsável e empenhada com um aproveitamento mediano na disciplina de Matemática. A aluna evidenciava pouca confiança e apresentava muitas dificuldades na disciplina, mas também gostava de ver as suas dúvidas esclarecidas, tornando-se por vezes um pouco dependente da professora. Contudo, também não tinha problemas em pedir ajuda aos colegas. O Carlos era um aluno pouco motivado para a aprendizagem em geral, e por vezes, não apresentava um comportamento correto em sala de aula. Mesmo estando a repetir o 7.º ano, o aluno não se mostrava muito empenhado na disciplina nem preocupado em ultrapassar as suas dificuldades. As suas notas nos testes foram quase todas negativas, contudo, foi no domínio da Geometria que o aluno se revelou mais interessado em desenvolver as tarefas propostas, tendo por isso conseguido alcançar o nível 3 no segundo período na disciplina de Matemática, ainda que não o tenha conseguido manter. Ao longo das aulas participava nas discussões coletivas quando se sentia confortável com a matéria, mas desvalorizava as justificações dos seus raciocínios nem gostava de os apresentar por escrito. Como par, a Margarida e o Carlos surpreenderam-me. A persistência da Margarida em ver esclarecidas as suas dúvidas e o à vontade do Carlos na unidade lecionada fizeram com que estes produzissem diálogos muito interessantes. A Margarida gostava de apresentar as suas resoluções escritas organizadas e o mais completas possível, mas apresentava muitas dificuldades em compreender alguns conceitos e na comunicação matemática, fazendo com que estivesse constantemente a questionar o Carlos, que pacificamente lhe explicava o seu raciocínio, para que esta o pudesse compreender e escrever, tornando-o quase sempre o líder do grupo. A Elisa foi aluna de nível 5, não só a Matemática como a todas as disciplinas. Era bastante organizada e apresentava facilidade em explicar os seus raciocínios. Nos momentos de discussão esperava pacificamente a sua vez de responder respeitando os colegas, ainda que demostrasse estar sempre pronta e interessada. Dado o seu entusiasmo na realização das tarefas e em participar na aula, a aluna evidenciava ter uma boa relação com a matemática e com a escola em geral. O David, aluno de nível 3 na disciplina, evidenciava gostar da disciplina mostrando-se sempre interessado e motivado na realização das tarefas propostas. Apesar de ser um aluno com bastante potencial, revelou-se por vezes inseguro e até pouco confiante em relação às suas capacidades na disciplina. Como par, os dois alunos revelaram-se bastante persistentes na resolução das tarefas propostas e bastante comunicativos. Ambos davam ideias para a resolução dos problemas, questionavam-se e preocupavam-se com a comunicação escrita, sendo que a Elisa mostrava sempre mais facilidade neste último aspeto. Mesmo quando o David evidenciava algumas dificuldades ou se mostrava mais confuso, a Elisa esclarecia as suas dúvidas e rapidamente avançavam nas suas resoluções.

Tendo em conta as normas éticas da investigação, foram solicitadas autorizações aos encarregados de educação dos alunos no início do ano letivo pela diretora de turma solicitando a gravação e a recolha de dados. Além disso, com objetivo de manter o anonimato dos alunos foram atribuídos nomes fictícios.

Técnicas de recolha de dados

Para este estudo utilizei como técnicas de recolha de dados a observação, a recolha documental e a entrevista. A utilização de diferentes instrumentos de recolha de dados permite a triangulação dos dados (Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 2005), contribuindo para a realização de um trabalho mais fundamentado e, como tal, mais credível.

Observação

Dada a natureza deste estudo realizei uma observação participante, uma vez que desempenhei o papel de professora em simultâneo com o de investigadora. Tal como Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (2005) referem, a observação participante é adequada quando se deseja compreender um meio social a que não pertencemos permitindo uma integração progressiva nas atividades.

Tendo em conta a dificuldade em realizar registos escritos das observações realizadas durante as aulas, dada a pouca autonomia que os alunos da turma ainda demostravam, a constante necessidade de interação com o professor e sabendo que o equilíbrio entre a participação e a observação pode levantar dificuldades (Bogdan & Biklen, 1994) fiz um registo escrito das situações que considerei mais relevantes para a investigação no final de cada aula. Além disso, pedi à minha colega de estágio para efetuar registos durante os momentos das aulas relativos à resolução de problemas, segundo a orientação de um guião por mim previamente elaborado (Anexo XII). Para poder acompanhar, em maior detalhe, a interação entre os pares de alunos selecionados durante a resolução de problemas também efetuei um registo áudio. Assim, foi colocado um gravador de áudio junto de cada um dos pares de alunos escolhidos.

Recolha documental

Durante a investigação recolhi todos os registos escritos dos alunos em estudo relativos à resolução de problemas. As resoluções dos alunos apenas foram recolhidas após as discussões em turma para que fosse possível um maior acompanhamento e participação por parte dos alunos neste momento. Ainda assim, alertei sempre os alunos para que durante estes momentos não efetuassem qualquer alteração ao realizado durante o trabalho autónomo. Pretendia assim, ter melhor acesso às suas estratégias, assim como, aos erros efetuados, complementando a informação recolhida pela observação.

Tal como Yin (2010) refere, é importante recolher informação de documentos que possam estar disponíveis. Note-se que esta técnica de recolha de dados foi também utilizada para caracterizar a escola e a turma, sendo que tive acesso ao projeto educativo da escola e foi pedido à diretora de turma o documento oficial da caracterização da turma.

Entrevista

Esta técnica de recolha de dados serve para "recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134).

A entrevista foi realizada, a cada um dos pares de alunos, no final da unidade lecionada (3.º período) e consistiu na realização, por parte dos pares, de problemas relativos à unidade. Foi pedido aos alunos para discutirem com o par as suas ideias e irem explicando as suas estratégias. Foram também colocadas algumas questões de modo a poder ser feito um melhor acompanhamento dos raciocínios dos alunos, assim como, das suas dificuldades, seguindo um guião previamente elaborado (Anexo XIV). As entrevistas foram gravadas mas por razões técnicas não foi possível recuperar esse registo, por esse motivo apenas pude recorrer às notas que fui retirando durante as mesmas. Foram igualmente usadas conversas informais com os alunos nas aulas, enquanto realizavam as tarefas ou durante as discussões com toda a turma. Deste modo, a entrevista teve como objetivo complementar a informação recolhida durante as aulas.

Análise de dados

A análise de dados do presente estudo incidiu sobre as produções escritas dos alunos relativas à resolução de problemas, as anotações fruto da observação direta realizada por mim e pela minha colega de estágio, as entrevistas realizadas a dois pares de alunos selecionados e as transcrições das gravações áudio, sendo que estas transcrições deram início ao tratamento de dados, tornando a informação mais acessível fazendo com que fosse possível cruzar todos dados.

A análise de dados teve início ainda durante a minha intervenção letiva, uma vez que, durante as correções das tarefas, fui fazendo algumas anotações o que me permitiu ter a precessão se estaria a obter dados suficientes para responder às questões a que me propus. Contudo, a sua análise mais formal foi realizada após a recolha de todos os dados, tal como Bogdan e Biklen (1994) consideram ser a estratégia mais adequada para investigadores inexperientes.

Segundo Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (2005, p. 109) a análise de dados de uma investigação qualitativa consiste em três fases: a redução dos dados, a organização e apresentação e por fim a sua interpretação. Também Bogdan e Biklen (1994, p. 205) referem que a análise de dados "envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros".

Assim, após a recolha de todos os dados, estes foram organizados tendo em conta a ordem cronológica dos problemas propostos, sendo em seguida analisado cada problema seguindo um sistema de codificação. "O desenvolvimento de um sistema de codificação envolve vários passos: percorre os seus dados na procura de regularidades e padrões bem como de tópicos presentes nos dados e, em seguida escreve palavras e frases que representam estes mesmos tópicos e padrões" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 221). Os dados foram organizados por problema e como categorias foram utilizadas as diferentes estratégias utilizadas e as dificuldades evidenciadas. As dificuldades evidenciadas pelos alunos na resolução de problemas não foram destacadas das estratégias, uma vez que, estas surgem nos vários tipos de estratégias apresentadas.

Capítulo VI

Apresentação e Análise de dados

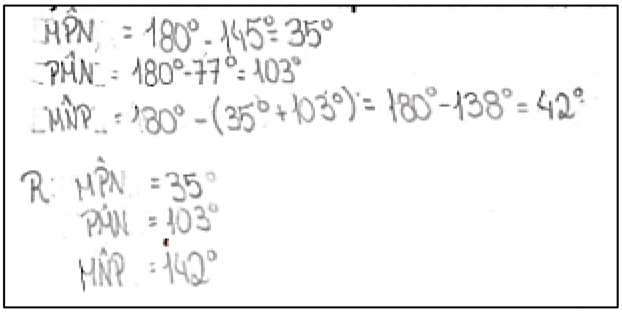
Ao longo deste capítulo irei apresentar e analisar os dados recolhidos. Dos problemas propostos durante a minha intervenção letiva selecionei os que melhor permitem responder às questões do estudo. Assim, a análise de dados seguirá a ordem das tarefas seguindo uma metodologia de investigação qualitativa onde irei mostrar as diferentes estratégias e evidenciar as principais dificuldades dos alunos na resolução dos problemas propostos. Sempre que for relevante, durante a apresentação e análise dos dados irei apresentar resoluções de vários alunos da turma dando especial atenção aos pares.

Ficha de trabalho n.º 1

Problema 1 – alínea a

A alínea a do primeiro problema realizado na unidade de ensino tinha como objetivo a determinação das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo apresentado (anexo VII). Assim, para o resolver era necessário em primeiro lugar identificar os ângulos internos do triângulo, identificar ângulos suplementares e saber que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Todos os alunos que apresentaram uma resolução do problema conseguiram aplicar os conhecimentos adquiridos no 2.º ciclo e identificaram de forma correta os ângulos internos do triângulo apresentado (os ângulos MPN, PMN e MNP), ou seja, compreenderam o enunciado do problema, e rapidamente passaram ao cálculo das medidas pedidas. São exemplo disso o par Elisa e David cuja resolução se apresenta de seguida (Figura 6.1).



$M\hat{P}N = 180° - 145° = 35°$

$P\hat{M}N = 180° - 77° = 103°$

$M\hat{N}P = 180° - (35° + 103°) = 180° - 138° = 42°$

R: $M\hat{P}N = 35°$

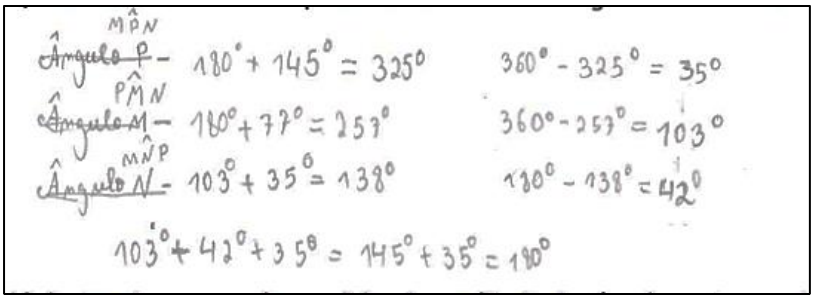
$P\hat{M}N = 103°$

$M\hat{N}P = 42°$

Fig. 6.1 – Resolução da Elisa do problema 1 (alínea a) da ficha de trabalho n.º1

À semelhança de 65 % da turma, os alunos começaram por calcular a medida de amplitude do ângulo MPN fazendo a diferença entre um ângulo raso e 145°, em seguida, de modo idêntico, fizeram a diferença entre um ângulo raso e 77° para calcular a medida de amplitude do ângulo PMN. Para calcular a medida de amplitude do terceiro ângulo interno do triângulo, o ângulo MNP, aproveitaram as medidas de amplitude calculadas anteriormente e fizeram a diferença entre 180° e a soma de 35° com 103°. Apesar de não terem efetuado qualquer justificação para os seus cálculos, é evidente que os alunos não só reconheceram os ângulos rasos presentes na figura e utilizaram-nos para os primeiros dois cálculos, como relembraram que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é 180°, recorrendo a este conhecimento para calcular a medida de amplitude do terceiro ângulo. Por fim, os alunos responderam corretamente ao problema.

Seis dos alunos optaram por considerar o ângulo giro, que continha o ângulo cuja medida de amplitude pretendiam descobrir, para calcular duas das medidas de amplitude pedidas. Como se pode ler na figura 6.2, o Paulo somou 180° com 145°, valores correspondentes às medidas de amplitude dos ângulos QPM e QPN respetivamente, e posteriormente subtraiu essa soma a 360°, valor correspondente à medida de amplitude do ângulo giro, seguindo o mesmo raciocínio para calcular a medida de amplitude do ângulo PMN. Em seguida, somou as duas medidas de amplitude encontradas e tal como o aluno afirmou “a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180”, então subtraiu a soma anterior a 180°. Por fim, somou as medidas de amplitude dos três ângulos internos e verificou que o resultado era 180°.



~~Ângulo P~~ $M\hat{P}N$ – $180° + 145° = 325°$ $360° - 325° = 35°$

~~Ângulo M~~ $P\hat{M}N$ – $180° + 77° = 257°$ $360° - 257° = 103°$

~~Ângulo N~~ $M\hat{N}P$ – $103° + 35° = 138°$ $180° - 138° = 42°$

$103° + 42° + 35° = 145° + 35° = 180°$

Fig. 6.2 – Resolução do Paulo problema 1 (alínea a) da ficha de trabalho n.º1

Pela produção escrita do aluno é percetível que este compreendeu o problema, definiu uma estratégia e conseguiu executá-la. Além disso, à semelhança de outros alunos, efetuou uma verificação do problema embora não tenha apresentado a sua resposta, falha detetada na maioria das produções escritas analisadas. Ainda assim, a sua resolução apresenta algumas lacunas ao nível da comunicação escrita. O aluno parecia querer indicar o ângulo a que se referem os cálculos escrevendo, por exemplo, ângulo P antes dos cálculos, mas quando questionado sobre qual o ângulo com vértice em P a que se queria referir, o aluno corrigiu a notação. Contudo, utilizou a notação indicada para a medida de amplitude do ângulo quando suponho que se queria referir ao ângulo. Além disso, ainda que, quando questionado tenha conseguido justificar todos os passos do problema, o aluno parece não ter sentido necessidade de apresentar nenhuma justificação por escrito.

Apenas um par e o Manuel que trabalhou individualmente calcularam a medida de amplitude do ângulo MNP de modo diferente dos anteriormente apresentados. Estes recorreram a uma equação, utilizando a incógnita x, que apesar de não o indicarem compreende-se que se refere à medida de amplitude do terceiro ângulo interno (Figura 6.3).

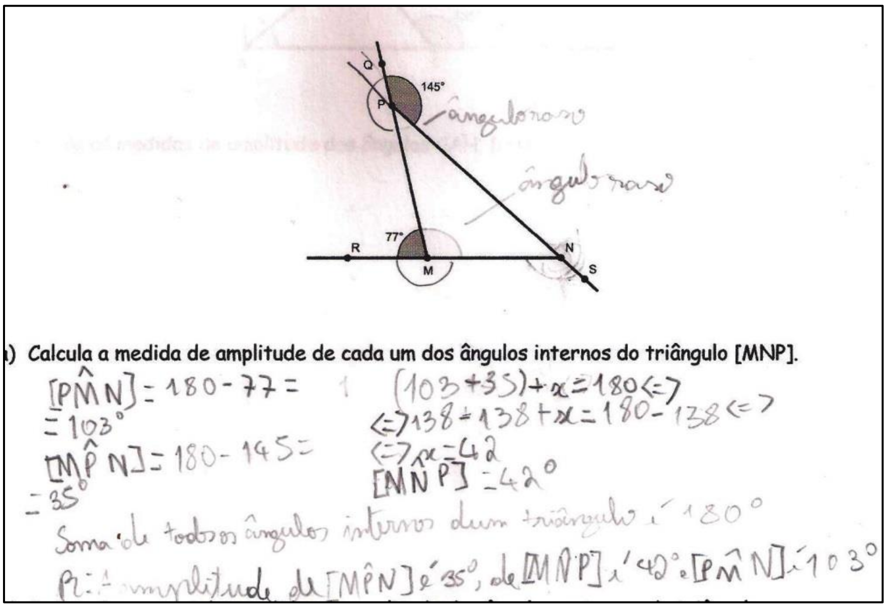


Fig. 6.3 – Resolução do Manuel do problema 1 (alínea a) da ficha de trabalho n.º 1

Manuel foi o único aluno que foi além da realização de cálculos e apresentou algumas justificações, indicando ângulos rasos na figura dada e que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é 180°, ainda que não deixe claro em qual dos cálculos considerou este conhecimento. À semelhança do anterior, este aluno também comete erros na utilização da notação relativa aos ângulos.

Destaco, ainda, a resolução do Gabriel relativa ao cálculo da medida de amplitude do terceiro ângulo interno (Figura 6.4) que evidencia algumas dificuldades na indicação do seu cálculo.

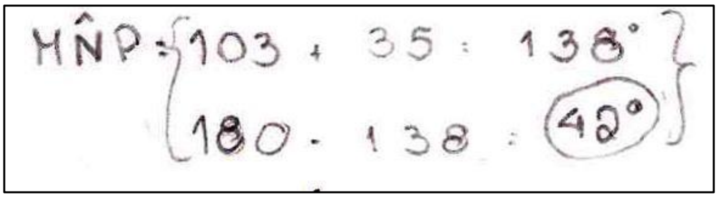


Fig. 6.4 – Parte da resolução do Gabriel do problema 1 (alínea a) da ficha de trabalho n.º 1

O aluno começa por somar as medidas de amplitude já calculadas, subtraindo posteriormente a soma a 180º, contudo recorre a chavetas para indicar que esses cálculos são relativos ao cálculo da medida de amplitude do ângulo MNP, por fim, rodeou o valor 42° ficando percetível que seria o valor a que o aluno pretendia chegar.

Em síntese, este problema não levantou dificuldades de interpretação e a maioria dos alunos conseguiu desenvolver a sua estratégia de resolução para chegar à resposta pretendida, ainda que, apenas três alunos tenham dado a resposta ao problema. Relativamente às estratégias a maioria dos alunos recorreram à *simplificação do problema* (Borralho, 1995; NCTM, 2008), uma vez que, os alunos dividiram o problema em três, sendo cada um deles a descoberta da medida de amplitude de um dos três ângulos pedidos, outros recorreram a uma equação mas todos *utilizaram o esquema dado* (NCTM, 2008) para os auxiliar na sua resolução. Na verdade, as maiores dificuldades observadas durante a aula referem-se à comunicação escrita, uma vez que as professoras presentes foram insistindo para que todos os cálculos fossem devidamente indicados e justificados e apesar de muitos o conseguirem justificar oralmente não o apresentaram por escrito. Também observei que muitos alunos começaram por apresentar apenas cálculos na sua resolução, mas quando questionados pelas professoras foram indicando qual a medida de amplitude que estavam a calcular, surgindo alguns *erros na notação utilizada e na indicação dos cálculos* tal como apresentado anteriormente.

Problema 1 – alínea b

Este problema tinha como objetivo a determinação da soma das medidas de amplitude dos ângulos externos do triângulo apresentado (anexo VII). Assim, os alunos tinham de identificar duas das medidas de amplitude dos ângulos externos já dadas e calcular a medida de amplitude do terceiro ângulo externo, para posteriormente realizar a soma das três medidas de amplitude.

Nesta alínea, cerca de um terço da turma não apresentou qualquer resolução. Devido à diferença de ritmos de trabalho que a turma apresenta, não ficou para mim claro se os alunos não responderam devido à falta de tempo ou se na verdade não compreenderam o problema, ou não conseguiram identificar os ângulos externos do triângulo em causa.

Também nesta alínea foi visível que três dos alunos recorreram aos seus conhecimentos sobre ângulos externos adquiridos em anos anteriores e resolveram o problema sem dificuldades de interpretação e dos conceitos envolvidos. Como se pode ver na figura 6.5, o Manuel identificou os dados que necessitava, ou seja, as medidas de amplitude dos ângulos externos do triângulo, intitulando-os por “ângulos externos”, fazendo para o terceiro ângulo o cálculo necessário para descobrir a sua medida de amplitude, recorrendo à subtração da medida de amplitude do ângulo interno correspondente, calculado na alínea anterior, por 180°. Por fim, o aluno somou os três valores indicados obtendo o valor de 360°.

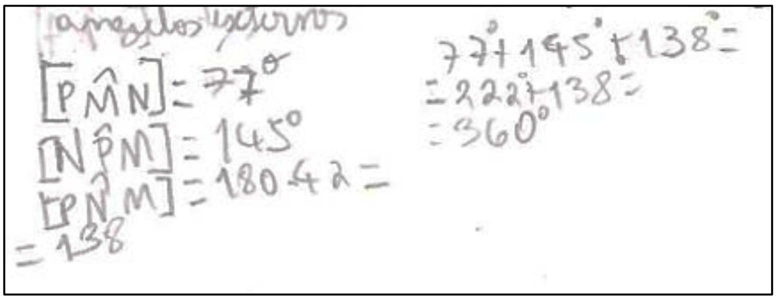


Fig. 6.5 – Resolução do Manuel do problema 1 (alínea b) da ficha de trabalho n.º 1

Pela sua resolução é percetível que o aluno não teve dificuldade em interpretar o problema. Além disso, conseguiu identificar os dados que necessitava, calcular a medida de amplitude do terceiro ângulo e calcular o valor pedido, ainda que, não tenha apresentado a resposta final. Ainda assim, é de salientar a notação errada com a utilização de parêntesis retos, como já se tinha verificado no problema anterior, e a incorreta identificação dos ângulos externos, visto que, em vez de indicar o ângulo PMR que é o ângulo externo com medida de amplitude de 77° indicou o ângulo interno com o mesmo vértice (o ângulo PMN) seguindo o mesmo raciocínio para os outros dois ângulos.

Dois pares de alunos, ao lerem o problema foram mais longe na aplicação das suas aprendizagens do 2.º ciclo e disseram de imediato que a resposta seria 360°. Foi o caso dos alunos Elisa e David:

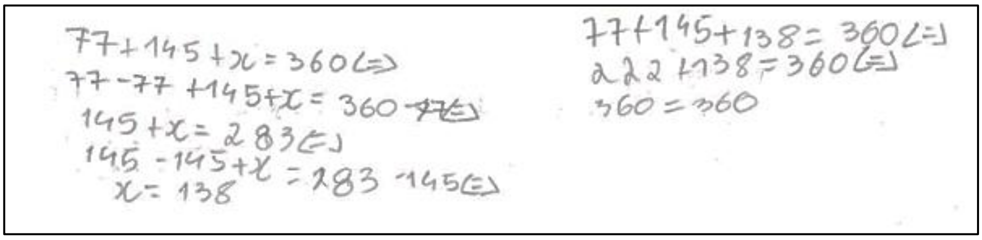
> **Elisa:** Olha, eu acho que é este mais este, mais este, mas vai dar 360 à mesma, portanto é só escrever 360. Fixe, acabou.
> **David:** 360.
> **Elisa:** Porque só quer o resultado não quero… ou não?
> Para esclarecer a sua dúvida a aluna voltou a ler o enunciado.
> **Elisa:** Mete só aqui a soma é 360 ou mete só 360.
> **David:** Não, temos de justificar, é 360 vírgula, porque a soma dos ângulos externos de um triângulo é 360. Não é?
> **Elisa:** Ok.

Ainda que não esperasse que os alunos recordassem este conceito, estes alunos conseguiram dar uma resposta correta e tiveram o cuidado de apresentar a devida justificação (Figura 6.6).


B:. A soma é 360° porque a soma dos ângulos externos de um triângulo é 360°.

Fig. 6.6 – Resolução do David do problema 1 (alínea b) da ficha de trabalho n.º 1

Levados pelo conhecimento de que a soma das medidas de amplitude dos ângulos externos de um triângulo é de 360°, três alunos começaram por construir uma equação. Ainda que não o tenham indicado, é notório que os alunos recorreram à incógnita x para representar a medida de amplitude do ângulo externo que não era dada no enunciado. Assim, igualaram a adição das três medidas de amplitude dos ângulos externos do triângulo a 360º, como mostra a figura 6.7:


$77+145+x=360 \Leftrightarrow$
$77-77+145+x=360-77 \Leftrightarrow$
$145+x=283 \Leftrightarrow$
$145-145+x=283-145 \Leftrightarrow$
$x=138$

$77+145+138=360 \Leftrightarrow$
$222+138=360 \Leftrightarrow$
$360=360$

Fig. 6.7 – Resolução do Gustavo do problema 1 (alínea b) da ficha de trabalho n.º 1

O Gustavo resolveu corretamente a equação e teve o cuidado de efetuar a sua verificação. Para além disso, também é percetível, pelos valores utilizados, que o aluno identificou corretamente os ângulos externos do triângulo, contudo, a sua resolução evidencia que não compreendeu o problema, pois já sabia a resposta desde o início, mas apenas a utilizou para calcular o ângulo desconhecido.

O Carlos e a Margarida compreenderam o problema, mas não identificaram corretamente os ângulos externos do triângulo. Os alunos compreenderam que teriam de somar as três medidas de amplitude dos ângulos externos do triângulo, mas não as conseguiram identificar corretamente como podemos ver no diálogo seguinte:

Margarida: Mas eu não estou a perceber nada.

Carlos: Mais 180… Agora tens de somar estes. Este ângulo externo, mais este ângulo externo, mais este ângulo.
Margarida: Mas como é que chegaste ao 103 e ao 180?
Carlos: 180 já é… tu notas aqui que é 180.
Margarida: Sim.
Carlos: Então se a soma deste mais este é 180, este aqui tem de ser 180 também.
Margarida: Ah! Ok, já percebi porque aqui que é 180 e depois tiraste isto.

Os alunos identificaram um ângulo externo incorretamente com medida de amplitude de 180° e relativamente ao ângulo de medida de amplitude de 103° não fica claro, nem pela recolha áudio, nem documental, se estes se referem ao ângulo PMN ou ao ângulo MNS, visto que, pelos valores colocados junto à figura, os alunos consideraram que estes dois ângulos têm a mesma medida de amplitude (Figura 6.8). Presumo que a situação descrita seja devida a erros de cálculo.

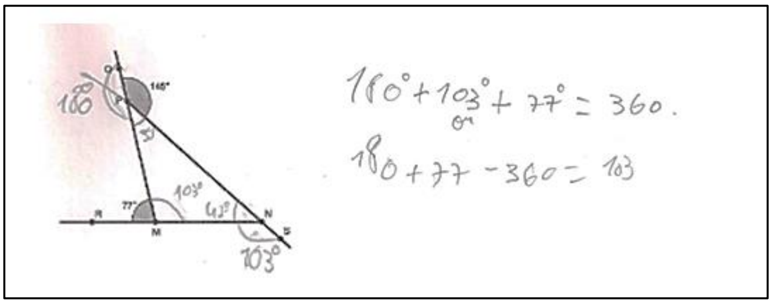


Fig. 6.8 – Resolução do Carlos do problema 1 (alínea b) da ficha de trabalho n.º 1

O Paulo também mostrou conseguir compreender o enunciado deste problema. Mas ao somar os três ângulos externos, considerou como ângulos externos “tudo o que não é interno” obtendo uma soma de 900°, como podemos observar na sua produção escrita (Figura 6.9).

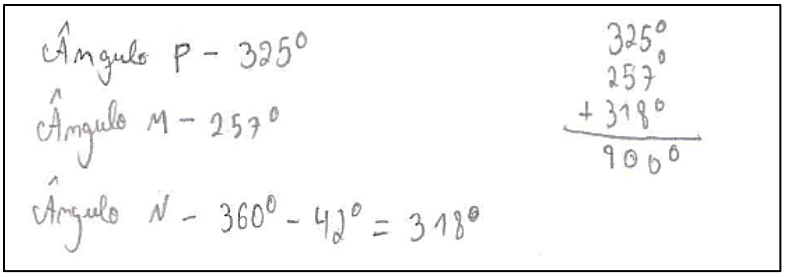


Fig. 6.9 – Resolução com ângulos errados do problema 1 (alínea b) da ficha de trabalho n.º 1

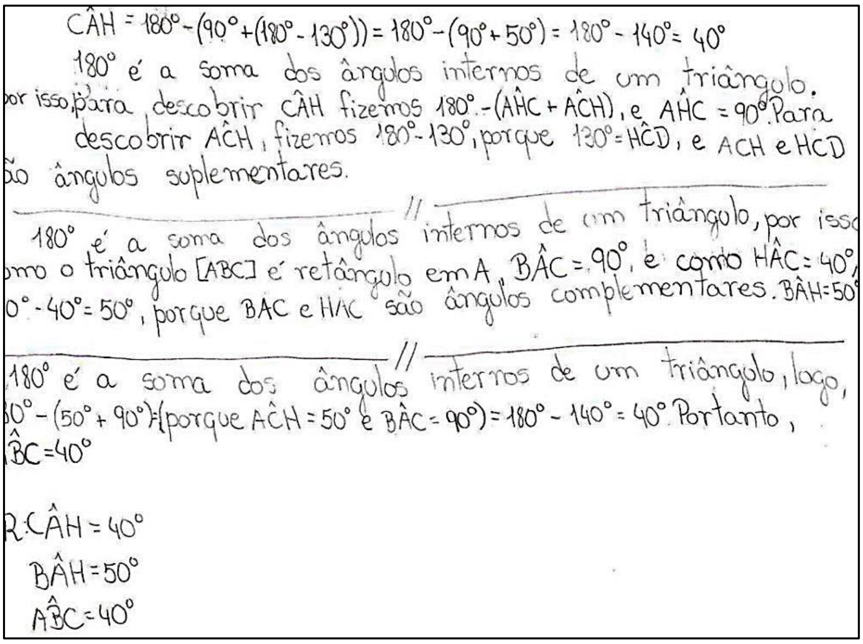
Ao longo da análise pudemos observar que uns alunos recorreram à mesma estratégia utilizada na alínea a, a *simplificação do problema* e *utilização de um esquema dado* (Borralho, 1995; NCTM, 2008) e outros, uma vez que, se recordavam que a soma das medidas de amplitude dos ângulos externos de um triângulo é 360° responderam de modo imediato, recorrendo à *aplicação direta de uma propriedade dos triângulos*, o que torna esta alínea um simples exercício para estes alunos. Relativamente às dificuldades, estas foram diversificadas. Tal como evidenciado anteriormente alguns alunos, mesmo deixando claro que conseguiram localizar corretamente os ângulos externos do triângulo, *não fizeram uma boa compreensão do problema*, e a sua resolução ficou comprometida. Outros *não conseguiram identificar os ângulos externos* de forma correta. Além disso, de todas as produções analisadas, ainda que conseguissem delinear uma estratégia e executá-la apenas cinco alunos apresentaram a resposta ao problema. Os *erros associados à notação utilizada* continuam a ocorrer como podemos observar nas figuras 6.5 e 6.9 o que seria de esperar, uma vez que, esta e a alínea anterior foram realizadas num único momento de trabalho autónomo. Ainda assim, existem outras dificuldades a nível da comunicação escrita como resoluções que apresentam apenas cálculos ou, como é o caso do Carlos (Figura 6.8), *cálculos mal indicados*, levando-me a questionar se existiu compreensão na adição de números negativos estudada no início do ano letivo.

Problema 2

No problema 2 pretendia-se que os alunos identificassem e calculassem a medida de amplitude de três ângulos presentes na figura dada (anexo VII). Para resolverem este problema os alunos tinham de compreender o conceito de triângulo retângulo e de perpendicularidade de retas, identificar ângulos suplementares e complementares e saber que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Tendo em conta a observação realizada em aula e a análise das produções escritas de todos os alunos, percebi que estes não tiveram dificuldades em compreender o objetivo do problema, pois identificaram rapidamente quais os ângulos cuja medida de amplitude teriam de calcular. Apenas quatro alunos não apresentaram qualquer resolução.

Mais de metade dos alunos começaram por calcular o ângulo ACH, tendo em conta que os ângulos ACH e HCD são suplementares e em seguida, visto que, a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é 180° e reconhecendo que AHC é reto, calcularam o ângulo CAH. Para calcular HAB utilizaram a noção de ângulos complementares visto o triângulo [ABC] ser retângulo em A, por fim, calcularam a medida de amplitude do ângulo ABC focando-se na soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo [ABC] ou do triângulo [ABH]. A resolução do par Elisa e David ilustram esta situação (Figura 6.10).



CÂH = 180° - (90° + (180° - 130°)) = 180° - (90° + 50°) = 180° - 140° = 40°
180° é a soma dos ângulos internos de um triângulo.
or isso, para descobrir CÂH fizemos 180° - (AĤC + AĈH), e AĤC = 90°. Para descobrir AĈH, fizemos 180° - 130°, porque 130° = HĈD, e ACH e HCD
ão ângulos suplementares.
//
180° é a soma dos ângulos internos de um triângulo, por iss
omo o triângulo [ABC] é retângulo em A, BÂC = 90°, e como HÂC = 40°,
0° - 40° = 50°, porque BAC e HAC são ângulos complementares. BÂH = 50
//
180° é a soma dos ângulos internos de um triângulo, logo,
0° - (50° + 90°) (porque AĈH = 50° e BÂC = 90°) = 180° - 140° = 40°. Portanto,
B̂C = 40°

R: CÂH = 40°
BÂH = 50°
AB̂C = 40°

Fig. 6.10 – Resolução da Elisa do problema 2 da ficha de trabalho n.º 1

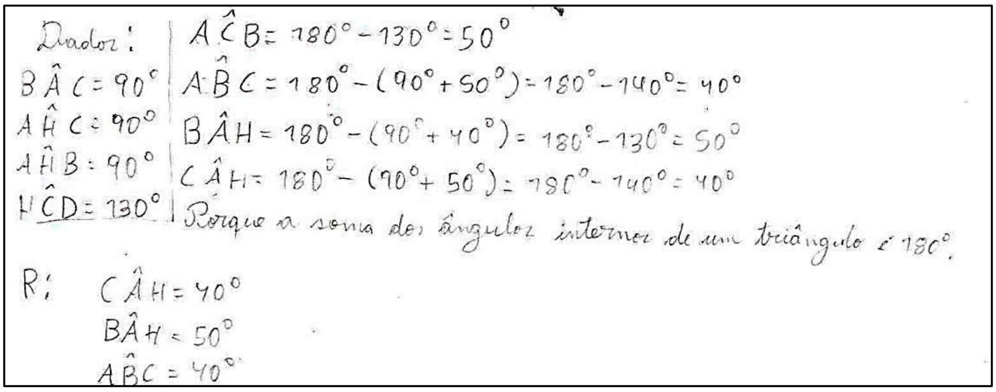
Este par estabeleceu rapidamente o que iria fazer em primeiro lugar e após o cálculo do primeiro ângulo insisti para que os alunos justificassem o seu raciocínio, o que deu origem a que os alunos indicassem a origem de todos os valores e os conhecimentos envolvidos no seu raciocínio. Quando passei pela segunda vez por este par de alunos deparei-me com uma dificuldade:

David: Já vamos passar para o BAH. Sabemos que este é 40 e este pode ser um ângulo reto. Certo stora?
Professora: Pode ser? Como é que sabem que é um ângulo reto?
David: Só se medíssemos com o transferidor.
Professora: Não, não podem usar transferidor. O que é que o enunciado diz?
Elisa: Que este é perpendicular a esta.

Professora: Não é só o desenho que faz parte do enunciado.
Elisa: Que esta linha… que esta reta é perpendicular a esta.
Professora: Hum e antes disso?
Elisa: Que o triângulo ABC é retângulo em A
David: Então pronto.
Elisa: Mas ele não é retângulo em A, aqui?
Professora: Esta reta é perpendicular a esta. E isso pode garantir que estes ângulos são de 90°?
David: Sim
Professora: Então como é que eu sei que este ângulo é de 90°? O ângulo em A é de 90° porquê?
(silêncio)
Elisa: Então porque o triângulo… ah espera…ABC… ah porque este triângulo se é retângulo aqui… este triângulo é retângulo aqui, ou seja, são 90°.
David: Já percebi.

Pelo diálogo é percetível que inicialmente os alunos consideraram que o ângulo BAC tinha de medida de amplitude 90° porque a imagem o aparenta e não porque fizeram uma boa interpretação do enunciado. Quanto às outras resoluções analisadas, uma vez que poucos alunos justificaram todos os seus raciocínios não é claro se também cometeram o mesmo erro. Depois desta conversa, os alunos conseguiram justificar os seus cálculos e prosseguiram a resolução não ficando claro a razão pela qual o seu cálculo é apresentado como consequência de a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo ser 180°. Ainda assim, é de destacar a boa comunicação escrita desta aluna e a correção da notação utilizada, ainda que, pela gravação, se perceba que os alunos foram calculando as medidas de amplitude dos ângulos conforme os dados que tinham disponíveis sem estabelecerem um plano de resolução. Os alunos não se esqueceram de dar a resposta ao problema.

Apenas um aluno, o Frederico, não utilizou a noção de ângulos complementares para resolver o problema (Figura 6.11).



Dados:
$B\hat{A}C = 90°$
$A\hat{H}C = 90°$
$A\hat{H}B = 90°$
$H\hat{C}D = 130°$

$A\hat{C}B = 180° - 130° = 50°$
$A\hat{B}C = 180° - (90° + 50°) = 180° - 140° = 40°$
$B\hat{A}H = 180° - (90° + 40°) = 180° - 130° = 50°$
$C\hat{A}H = 180° - (90° + 50°) = 180° - 140° = 40°$
Porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

R: $C\hat{A}H = 40°$
$B\hat{A}H = 50°$
$A\hat{B}C = 40°$

Fig. 6.11 – Resolução do Frederico do problema 2 da ficha de trabalho n.º 1

Pela sua resolução fica claro que, após o cálculo do ângulo ACB, o aluno considerou a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo [ABC] para calcular a medida de amplitude do ângulo ABC. Posteriormente, focando o triângulo [ABH] descobriu a medida de amplitude do ângulo BAH e, por fim, calculou a medida de amplitude do ângulo CAH tendo em conta a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo [CAH].

Dois dos alunos, ainda que tivessem identificado o ângulo reto do triângulo [ABC] deixaram-se levar pela aparência da imagem e inferiram que os ângulos BAH e HAC tinham a mesma medida de amplitude, ou seja, 45°. É o caso da resolução apresentada pelo Patrício (Figura 6.12), que tem um bom desempenho na disciplina e por norma é bastante preocupado com a qualidade das suas resoluções:

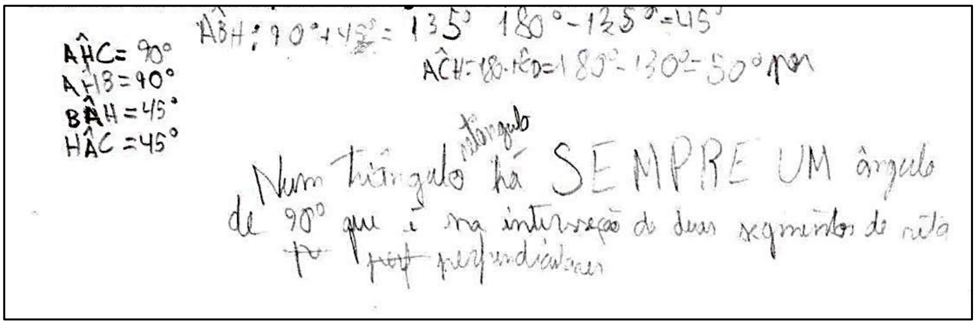


Fig. 6.12 – Resolução do Patrício do problema 2 da ficha de trabalho n.º 1

Pela resolução do aluno vemos que, após encontrar as medidas de amplitude de dois dos ângulos pedidos, somou as duas medidas de amplitude conhecidas dos ângulos internos do triângulo [ABH] para calcular a medida de amplitude do terceiro ângulo interno, ou seja, o ângulo ABC. Ainda que pela sua justificação fique claro que o aluno teve em conta que o enunciado do problema dizia que o triângulo [ABC] é retângulo em A, a sua resolução é evidente que não teve em conta apenas os dados do enunciado mas também fez inferências relativamente à figura dada. É também visível que o aluno após ter calculado a medida de amplitude dos ângulos pedidos, realizou cálculos referentes ao ângulo ACH dando a entender que não teve em conta o que era pedido no problema e calculou todas as medidas de amplitude desconhecidas, não apresentando nenhuma resposta ao problema, facto comum à maioria dos alunos, uma vez que apenas oito alunos apresentaram a resposta do problema.

Destaco ainda, um diálogo realizado entre o Carlos e a Margarida em relação à informação dada no enunciado do problema sobre a perpendicularidade das retas:

> **Carlos:** O ângulo HBA é 90°. (referindo-se a BHA)
> **Margarida:** Porquê? Como é que sabes?
> **Carlos:** É um ângulo reto. Oh, nem meteram em redondo, olha aí. E se tu reparares ângulo HBA é 90 e o ângulo HCA é 90 e isto aqui ia dar um ângulo de 180°. (corretamente BHA e CHA)

Os alunos assumiram pelo símbolo presente na figura que a medida de amplitude do ângulo era de 90º e não porque o enunciado referia que [AH] era perpendicular a [BC]. Assim, não é possível afirmar que todos os alunos compreenderam esta parte do enunciado, ou se à semelhança do Carlos e da Margarida, ignoraram esta informação do enunciado e apenas deram importância à informação dada na imagem.

Em síntese, para resolver este problema a maioria dos alunos *recorreu ao esquema dado* (NCTM, 2008), optou por fazer a *simplificação do problema* (NCTM, 2008; Borralho, 1995) separando-o em várias fases e recorrendo a uma sequência lógica das propriedades dos triângulos chegou ao resultado pretendido. Quanto às dificuldades pudemos ver que ainda que compreendessem o que era pedido nem todos os alunos fizeram uma correta interpretação do enunciado, desvalorizando a informação dada no enunciado e fazendo *inferências a partir da aparência da imagem* dada.

Continuam muito evidentes as *dificuldades na comunicação escrita*. Foi possível observar durante a aula que a maioria dos alunos não sabia o que escrever quando insistia para justificarem os cálculos. Relativamente à *apresentação de resposta ao problema* apesar de já existir uma *evolução* em relação ao último problema ainda são poucos os alunos que têm esta preocupação. A indicação dos cálculos efetuados ainda continua a ser uma dificuldade para alguns alunos. É exemplo disso a resolução da figura 6.12. No cálculo relativo ao primeiro ângulo o aluno usa dois pontos para indicar que os cálculos em seguida servem para encontrar a medida de amplitude em questão. *Quanto à notação, os erros são menos evidentes* e menos variados. Apenas um par de alunos continuou a usar parêntesis retos para indicar a medida de amplitude de um ângulo, sendo que, nos outros casos os alunos não colocaram o acento circunflexo.

Ficha de trabalho n.º 2

Esta ficha continha apenas um problema que pedia a medida de amplitude de um dos ângulos presentes na figura dada (anexo VIII). Para conseguirem encontrar o valor pedido os alunos necessitavam de estabelecer algumas relações entre ângulos dependendo do caminho que utilizassem para resolver o problema. Na figura dada os alunos poderiam identificar ângulos verticalmente opostos, ângulos alternos internos e ângulos correspondentes.

Após entregar a ficha de trabalho aos alunos e circular pela sala de modo a compreender o que os alunos estavam a pensar e quais as suas dificuldades, verifiquei que a maioria dos alunos estavam um pouco "perdidos" por não terem em mente os conceitos necessários para a sua realização, procurando apenas encontrar as mesmas relações entre ângulos necessárias para a realização da ficha anterior. O par de alunos Elisa e David ao lerem o problema acharam que teriam de calcular várias medidas de amplitude dos ângulos para chegar à medida pretendida. Tal como o David referiu, todo este processo seria uma "complicação". Assim, resolveram começar por aquilo que consideraram ser "mais fácil" sem estabelecer qualquer plano de resolução:

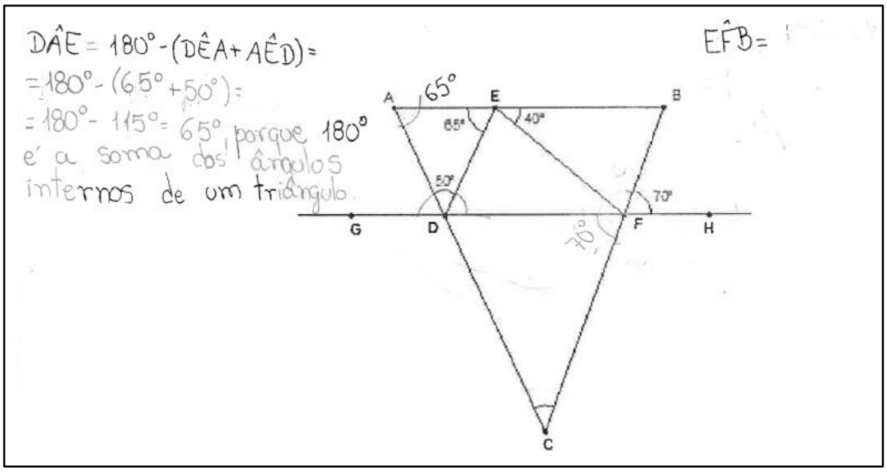


Fig. 6.13 – Resolução da Elisa do problema da ficha de trabalho n.º 2

Os alunos calcularam a medida de amplitude do ângulo DAE e tiveram o cuidado de justificar o seu cálculo (Figura 6.13), assim como indicar a origem dos valores que utilizaram, notando-se uma evolução em relação a resoluções anteriores. Mais de 90% dos alunos calcularam a medida de amplitude do ângulo DAE, mas, tal como este par, tiveram dificuldades em prosseguir. Ao verificar esta dificuldade na maioria dos alunos resolvi interromper a aula para relembrar os conceitos de ângulos verticalmente opostos, alternos internos e correspondentes estudados no 2.º ciclo. Após esta explicação, a Elisa identificou ângulos verticalmente opostos na figura dada, indicando que a medida de amplitude do ângulo DFC é 70°. Em seguida, durante a observação realizada na aula pude constatar que os alunos tentaram calcular o ângulo EFB identificando ângulos verticalmente opostos em torno do vértice F, mas não conseguiram concluir o cálculo, pois apesar de saberem que todas as medidas de amplitude somadas seriam igual a 360° a sua equação tinha duas incógnitas. O David também sugeriu que calculassem o ângulo DEF mas rapidamente percebeu que encontrar esse valor também não iria ser útil. Já no final do trabalho autónomo questionei os alunos:

> **Professora:** O que é que vocês precisam para encontrar este ângulo?
> **David:** Precisamos deste e deste (apontando para os ângulos CAB e CBA).
> **Professora:** Então falta-vos este. E não conseguem relacionar o ângulo ABC com nenhum outro ângulo de que já sabem a medida de amplitude?

É percetível que os alunos compreenderam o que era pedido no problema mas tiveram bastantes dificuldades e por isso não conseguiram encontrar a sua solução. Com o diálogo anterior percebi que os alunos tinham noção da informação que necessitavam para encontrar a solução do problema mas não conseguiram mobilizar os conceitos necessários para a sua resolução como ficou evidente num dos comentários da Elisa durante a resolução "supostamente temos de usar aquilo (informação projetada no quadro) mas eu não sei o que fazer com aquilo".

Já o Carlos não fez uma leitura correta do problema, o que foi detetado por mim logo no início:

> **Professora:** Qual é o ângulo que eu quero saber?
> **Carlos:** ABC.
> **Professora:** Qual é esse ângulo?
> **Carlos:** É este ângulo.
> **Professora:** ACB. É qual?
> **Carlos:** ACB é este.
> **Professora:** Ah ok! É o de baixo. E então o que é que eu preciso de saber para saber esse ângulo aí de baixo?
> **Margarida:** Tenho de saber quanto é que mede este…
> **Professora:** O A.
> **Margarida:** Este e este.
> **Carlos:** Mentira.

Professora: E depois o que fazes com isso?
Margarida: Aqui somo este com este e subtraio por 180.
Carlos: Ah pois. Não stôra… temos de saber quanto é que é este e este, temos de saber só qual é que é este e este.
Professora: Então vá, vamos.
Carlos: Se eu souber quanto é que é este, eu vou saber quanto é que é este, porque este e este são iguais.
Professora: Quem é que diz que esse triângulo tem os ângulos em B e em A iguais?
Carlos: Então oh stôra, senão ficava defeituoso.
Professora: Parecer não é um critério.

Com este diálogo ficou claro que, após identificarem o que era pedido, os alunos rapidamente traçaram um plano geral para resolverem o problema. Ainda assim, o Carlos não teve em conta apenas as informações dadas e deixou-se levar pelo que a imagem aparentava, considerando que o triângulo [ABC] era isósceles. Após este diálogo, o aluno compreendeu que não havia nada que o fizesse garantir que os dois ângulos do triângulo eram iguais. Optando por outro caminho, os alunos começaram por calcular a medida de amplitude do ângulo EAD (Figura 6.14).

.

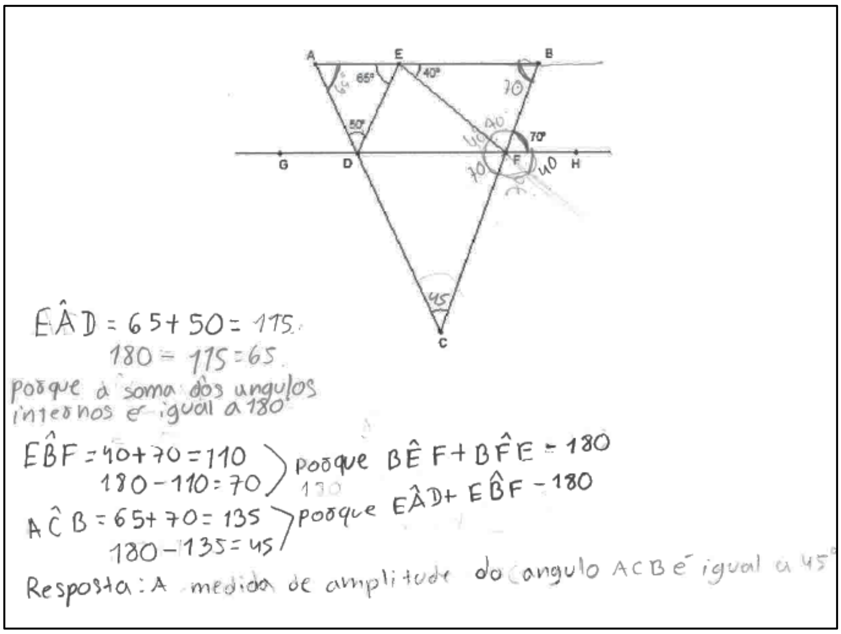


Fig. 6.14 – Resolução da Margarida do problema da ficha de trabalho n.º 2

Ainda da figura 6.14 pode ver-se que, pós o primeiro cálculo, os alunos assumiram as medidas de amplitude dos ângulos EFB e EFD como sendo 70° e 40° respetivamente, mas não apresentaram qualquer justificação por escrito nem é percetível pelo registo áudio o que os levou a assumir estes valores. Quando questionados, os alunos também não conseguiram justificar, dizendo apenas que a soma de todas as medidas de amplitude dos ângulos em torno do vértice F era 360°, por isso, estaria certo e em nenhum momento fizeram referência a ângulos alternos e internos. Deste modo, e tendo em conta o erro cometido pelos alunos logo no início, parece-me que os alunos mais uma vez se deixaram influenciar pelo facto de a imagem aparentar que os ângulos BFH e EFB eram geometricamente iguais para escolherem a medida de amplitude do ângulo EFB, o que neste caso é verdade. Tendo estes valores, os alunos seguiram o seu plano de resolução que passava por encontrar a medida de amplitude do ângulo ABC para depois calcular a medida de amplitude pedida e por fim dar a resposta ao problema.

Ainda que não tivessem feito uma leitura correta desde o início, os alunos conseguiram estabelecer um plano e executá-lo obtendo a resposta ao problema. Contudo, na produção escrita da Margarida podemos observar que a indicação do cálculo dos ângulos não está correta, uma vez que a aluna começa por igualar a medida de amplitude do ângulo EAD a 115 e só depois faz 180-115 para a primeira medida de amplitude calculada e procede de modo idêntico nos restantes cálculos. É, contudo, a primeira vez que a aluna consegue justificar alguns dos seus cálculos e indicar a origem dos valores ainda que cometa muitos erros.

Na verdade, apenas cinco alunos conseguiram chegar ao fim do problema. O Rui conseguiu chegar a uma resposta contudo, como estabeleceu relações erradas entre ângulos, obteve uma solução incorreta (Figura 6.15).

Nos seus cálculos é visível que o aluno considerou que os ângulos EDF e EFD tinham como medida de amplitude 65° e 40° respetivamente. Presumo que o aluno tenha identificado que os ângulos AED e EDF eram geometricamente iguais, assim como, os ângulos BEF e EFD, por serem alternos internos e as retas GH e AB serem paralelas, ainda que, não apresente qualquer justificação. Também o ângulo EFB é erradamente considerado geometricamente igual ao ângulo DEF (pelos cálculos, apesar de na figura estar com valor diferente, que presumo ter sido alterado já durante a discussão). Durante a discussão, o aluno questionou a professora titular se estes dois ângulos não eram ângulos alternos internos, o que me leva a concluir que o aluno ainda não consegue identificar corretamente ângulos alternos internos. Por fim, o aluno calcula as medidas de amplitude dos ângulos CDF e CFD e utilizando estes valores e tendo em conta que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é 180°, encontra a resposta ao problema, o que torna alguns dos cálculos realizados anteriormente desnecessários.

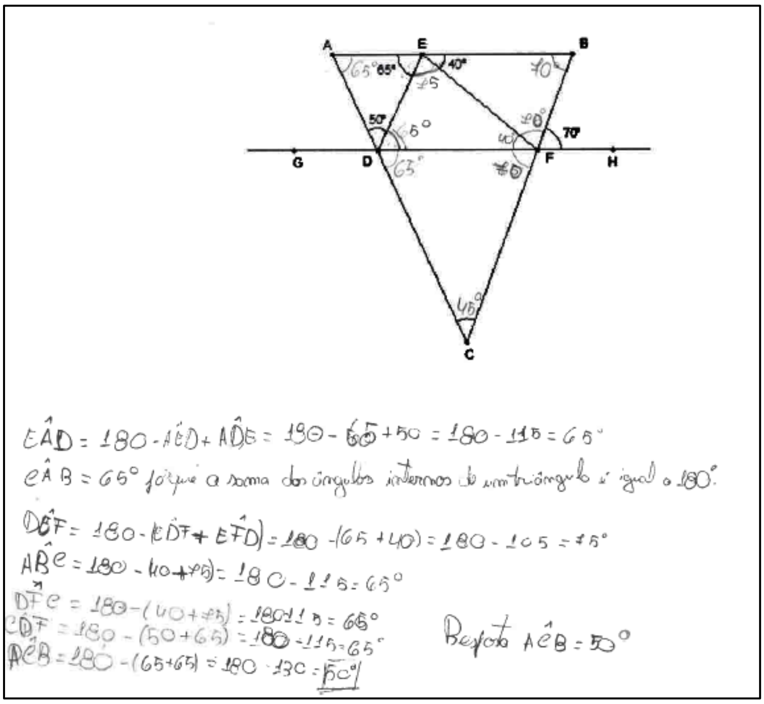


Fig. 6.15 – Resolução do Rui da ficha de trabalho n.º 2

O aluno compreendeu o problema, mas não estabeleceu um plano de resolução e foi calculando as medidas de amplitude que foi conseguindo, fazendo cálculos desnecessários. Por fim, apresentou a sua resposta. O aluno apenas justificou um dos cálculos e a meio da resolução deixou de indicar a origem dos valores utilizados, além disso, revelou também dificuldades na compreensão dos conceitos necessários para a resolução deste problema.

Apenas uma aluna, a Lara, estabeleceu as corretas relações entre os ângulos, ainda que, não justifique todos os seus raciocínios (Figura 6.16). À semelhança dos outros alunos calculou a medida de amplitude do ângulo DAE e posteriormente identificou que os ângulos DFE e FEB eram alternos internos e concluiu que tinham a mesma medida de amplitude, ainda que, não fique claro se a aluna compreendeu que estes só eram geometricamente iguais visto as retas AB e GH serem paralelas. A aluna seguiu para o cálculo da medida de amplitude do ângulo EFB que utilizou em seguida para calcular a medida de amplitude do ângulo ABC. Por fim, sabendo a medida de amplitude do ângulo CAB e do CBA calculou a medida de amplitude pedida e apresentou a resposta ao problema.

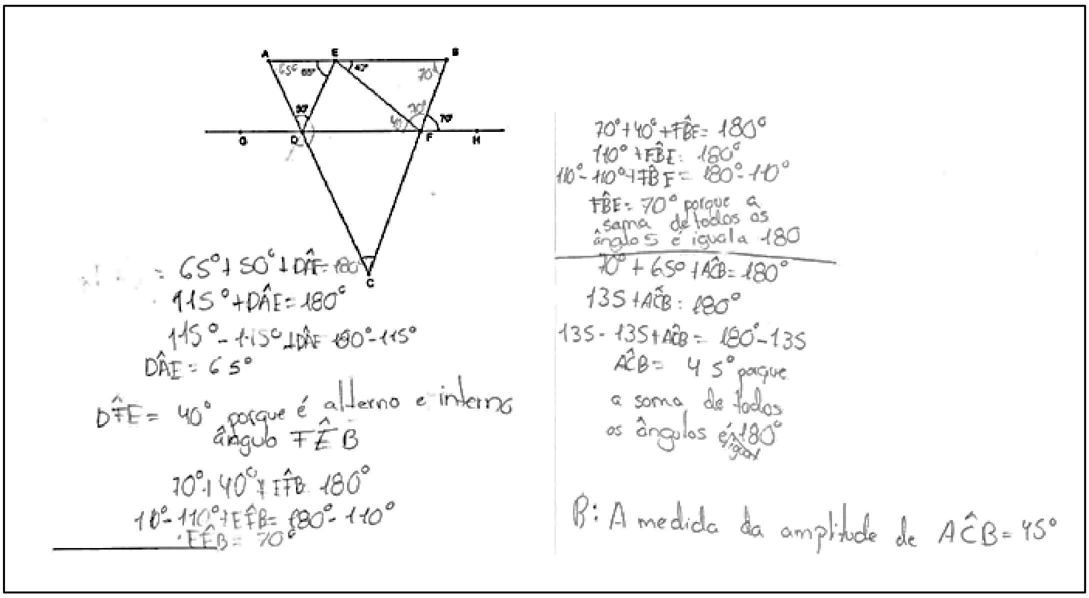


Fig. 6.16 – Resolução da Lara do problema da ficha de trabalho n.º 2

É de notar que a aluna apresenta algum cuidado em justificar alguns dos seus cálculos, mas ainda não utiliza a notação adequada quando se refere aos ângulos. Também nos seus cálculos utiliza equações que resolve corretamente, evidenciando conhecer os princípios de equivalência, e com uma resolução em coluna, contudo, não utiliza sinais de equivalente entre as equações.

Em síntese, na última resolução podemos observar que a sua estratégia passou por, *utilizando o esquema dado* (NCTM, 2008), identificar as medidas de amplitude que necessitavam para chegar à resposta final, e aplicando uma sequência lógica das propriedades dos ângulos, calculá-las em vários passos, fazendo assim uma *simplificação do problema* (Borralho, 1995; NCTM, 2008). Contudo, esta foi a única resolução correta. Os outros alunos ou não conseguiram delinear uma estratégia ou não a conseguiram executar até ao fim de modo correto.

Este problema não levantou dificuldades de interpretação mas, muitos alunos não tomaram atenção a toda a informação do enunciado ou estas não lhe deram nenhuma "pista" para a resolução. Apesar dos conceitos relembrados durante o trabalho autónomo, os alunos tiveram dificuldades em *identificar relações entre ângulos na figura dada*, comprometendo a resolução do problema. A imagem dada parece também ter sido um dos entraves para uma resolução correta do problema, visto que os alunos *retiram conclusões pelo que parecia da figura*, descuidando as indicações do enunciado. Em relação à comunicação escrita continuam a aparecer falhas relativamente à *falta de justificações* e em relação à *notação utilizada*. Pela observação em aula senti que os alunos não apresentam as justificações não por esquecimento, mas por dificuldade em as elaborar. Já em relação à notação praticamente todos os alunos conseguem utilizar a notação correta para indicar a medida de amplitude de um ângulo (evidenciando uma evolução positiva) mas nem sempre conseguem utilizar as notações corretas nas suas justificações como vimos anteriormente (Figura 6.16). Outros dos erros frequentes continua a ser a *indicação errada dos cálculos.*

Ficha de trabalho n.º 6

Problema 2

Neste problema era dada uma figura com dois quadrados parcialmente sobrepostos e era pedido aos alunos para determinarem a medida de amplitude de dois ângulos presentes na figura (anexo X).

Os alunos mostraram-se desde início empenhados na tarefa e pelas suas resoluções evidenciaram ter compreendido o problema. Contudo, três dos alunos não apresentaram qualquer resolução e quatro só encontraram uma das medidas de amplitude pedidas.

O Carlos começou a resolver o problema assim que este foi entregue mas, tal como habitual, não teve o cuidado de justificar os seus raciocínios, nem mesmo apresentar quaisquer cálculos, usando a figura para indicar as medidas de amplitude dos ângulos que ia encontrando. Ao detetar esta situação, tal como habitualmente, entrevi na sua resolução:

> **Professor**a: Não basta escrever…
> **Carlos:** Ainda estou a pensar…
> **Professora:** Sim, mas não basta escrever os ângulos aí, tu tens de fazer as tuas contas também, as contas que fazes de cabeça escreves no papel. Está bem? Vamos pensar, por onde é que vamos começar, quais são os ângulos que temos de calcular?
> **Carlos:** Tenho de escrever 125 mais 125 e 65 mais 65?
> **Professora:** Tens de escrever o que pensaste. Quais são os ângulos que nós temos de calcular? (silêncio) Primeiro tens de pensar nisso, tens de identificar os ângulos que são para calcular (professora afastou-se).
> **Carlos:** Oh, vou mas é calcular todos.

Com este diálogo é percetível que o aluno não leu o enunciado ou pelo menos não o compreendeu. Começou por indicar as medidas de amplitude que conhecia estabelecendo relações entre os ângulos e calculou a medida de amplitude de outros, contudo, nem sabia quais os ângulos que tinham sido pedidos e tal como comentou optou por calcular todos. Após indicar na figura todas as medidas de amplitude encontradas, o aluno foi novamente questionado sobre o que era pedido no problema. Assim, o aluno releu o enunciado e escreveu as medidas de amplitude pedidas, penso que com o intuito de dar uma resposta ao problema, ainda que, não a tenha indicado como tal (Figura 6.17).

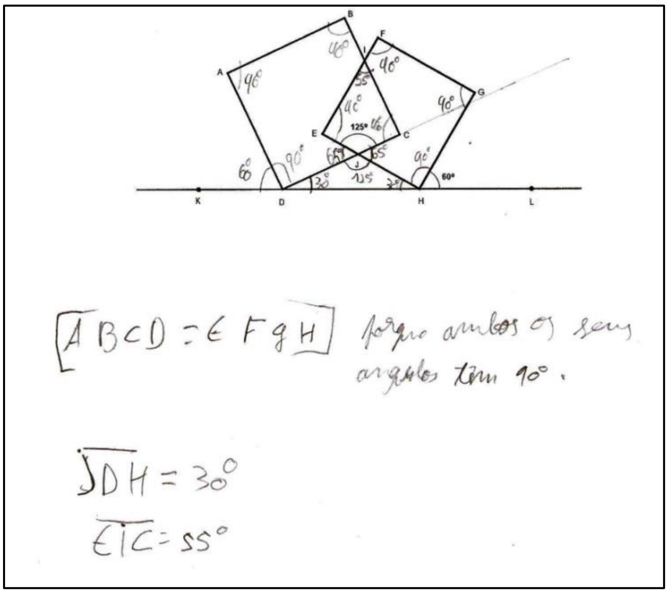


Fig. 6.17 – Resolução do Carlos do problema 2 da ficha de trabalho n.º 6

Com esta resolução é percetível que o aluno consegue estabelecer algumas relações entre os ângulos, como os ângulos verticalmente opostos e suplementares, assim como, identificar que os ângulos internos do quadrado têm 90º de medida de amplitude. Porém evidencia muitas dificuldades a nível de justificações e da notação utilizada. O aluno quando trabalha com o seu par, a Margarida, é desta que vem a preocupação de justificar todos os passos e utilizar as notações corretas, e por norma os raciocínios apresentados vêm do aluno que faz sempre um esforço para explicar à sua colega como pensou. Ao não trabalhar com a Margarida neste problema, o aluno evidenciou falta de hábitos de escrita, e por isso, ainda comete erros de notação graves que já foram ultrapassados por quase todos os alunos. Outro erro cometido por este aluno prende-se com o facto de ter assumido que o ângulo ADK tinha como medida de amplitude 60º. Penso que este raciocínio se deve ao facto de a imagem poder aparentar que o ângulo ADK é geometricamente igual ao ângulo GHL, apesar do enunciado não ter nenhuma indicação a esse respeito. Deste modo, penso que o aluno voltou novamente a ser influenciado pela aparência da imagem e como não verificou que a soma dos ângulos internos do triângulo teria de ser 180º não detetou qualquer erro na sua resolução.

Não foi apenas o Carlos que se deixou influenciar pela imagem, outros três alunos cometeram o mesmo erro. É exemplo disso a resolução do Patrício (Figura 6.18).

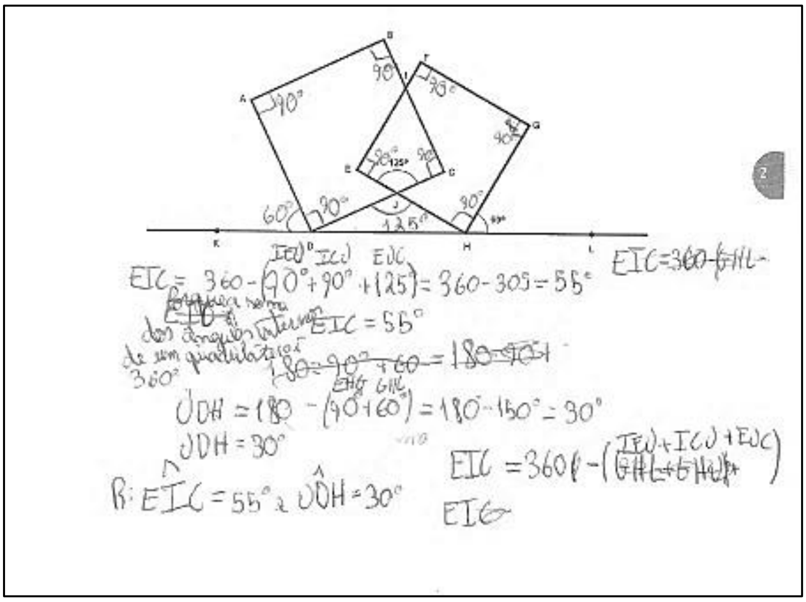


Fig. 6.18 – Resolução errada do problema 2 da ficha de trabalho n.º 6

Devido à proximidade dos pares, a Margarida optou por nesta aula trabalhar com uma colega que estava ao seu lado, a Diana. As duas alunas começaram por ler o enunciado e retirar os dados que consideraram importantes para a resolução do problema:

Margarida: [ABCD] e [EFGH] são iguais.
Diana: São parcialmente sobrepostos. Qual iguais? Parcialmente sobrepostos.
Margarida: Já está (após escrever essa informação).
Diana: Então e agora?
Margarida: Depois sabemos que o GHL mede 60. Sabemos que o ângulo… EJC é igual a 125. Sabemos mais alguma coisa? Não pois não?
Diana: Não.
Marta: Não sabemos mais nada.

Diana: Sabemos que…
Margarida: Sabemos que este aqui é 90º.
Diana: Não espera deixa-me pensar… Sabemos que estes são… ambos parcialmente opostos.
Margarida: Ah?
Diana: Este e este são opostos… são iguais…
Margarida: O ângulo EIC é igual ao ângulo BIE.
Diana: Não.
Margarida: Então não era o que estavas a dizer?
Diana: Não, isso não se diz assim…
Margarida: Olha, vou dizer estes que são 90º.
Diana: Não, mas tu não sabes.
Margarida: Mas são 90º!
Diana: Eu sei que são quadrados mas…
Margarida: Então explicamos que o quadrado tem todos os ângulos… que todos os ângulos do quadrado são 90º.
Diana: Pois está bem. Mas o que nós queremos descobrir não são os do quadrado. Os que nós queremos descobrir são estes, estes e estes, e estes. Nós estarmos a dizer os do quadrado tem 90º não nos vai ajudar em nada.

Após identificarem os dados explícitos no enunciado, a Diana teve dificuldade em identificar informação subentendida no enunciado. Além disso, não estava certa que essa informação lhe iria ser útil. As alunas chamaram-me para confirmar esta informação e após ter confirmado que o que a Margarida dizia estava correto, as alunas prosseguiram na sua resolução. As alunas calcularam a medida de amplitude do ângulo JHD tendo em conta que o ângulo DHL tinha como medida de amplitude 180º e posteriormente focaram-se no cálculo da medida de amplitude do ângulo DJH, uma vez que, ao saberem duas das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo [DJH] seriam capazes de calcular a medida de amplitude do ângulo JDH. Ao calcular a medida de amplitude do ângulo DJH as alunas não identificaram que os ângulos EJC e DJH eram verticalmente opostos e por consequente geometricamente iguais, mas curiosamente identificaram que os ângulos CJH e EJD eram geometricamente iguais e tendo em conta que os ângulos EJC, CJH, DJH e EJD formam um ângulo giro calcularam a medida de amplitude do ângulo DJH. Tal como ilustra a resolução da Margarida (Figura 6.19).

As alunas já não conseguiram calcular a última medida de amplitude, uma vez que se deu início à discussão do problema em turma. Ainda assim, as alunas tiveram o cuidado de indicar todos os cálculos realizados e de associar alguns valores a medidas de amplitude de ângulos que consideraram importantes referir, evidenciando alguma evolução em relação aos primeiros problemas. Também é evidente, pela sua resolução, que as alunas identificaram ângulos suplementares, verticalmente opostos e que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo era 180º mas, mais uma vez, a grande dificuldade passou por explicitar todos os passos do seu raciocínio.

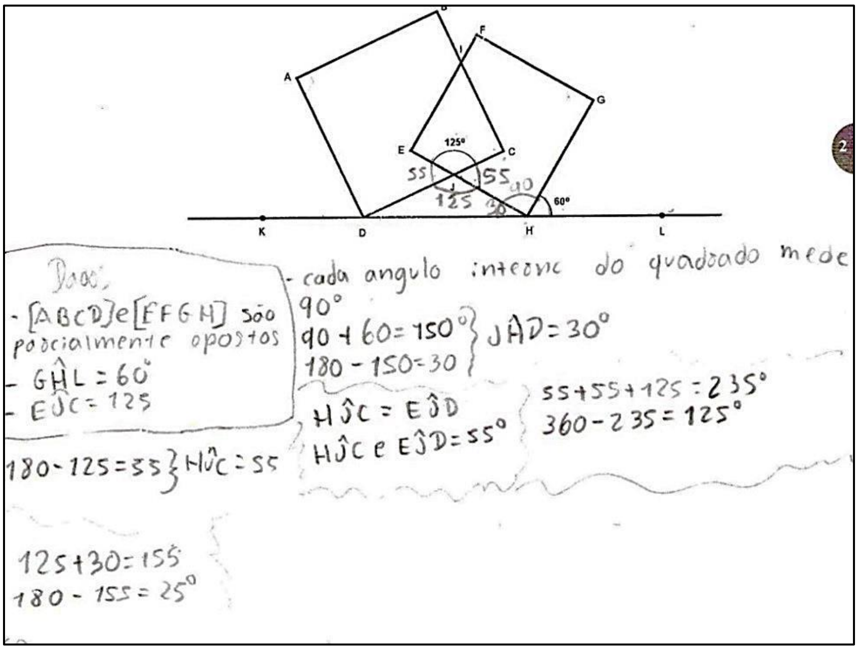


Fig. 6.19 – Resolução da Margarida do problema 2 da ficha de trabalho n.º 6

O par de alunos Elisa e David apresentaram uma resolução idêntica aos restantes elementos da turma, ainda que, nem todos tenham o mesmo cuidado na apresentação do seu raciocínio e nas justificações dos cálculos que este par tem, principalmente a aluna Elisa. Ainda assim, os alunos depararam-se com algumas dificuldades até chegar à resposta final. Os alunos começaram por ler o enunciado e focaram-se em primeiro lugar na imagem dada:

David: Ok o papagaio é um quadrilátero…
Elisa: Este também tem 125º.
David: Ya, porque são verticalmente opostos.
Elisa: Já sabemos um. Ieee!!!
David: 125 º ok.

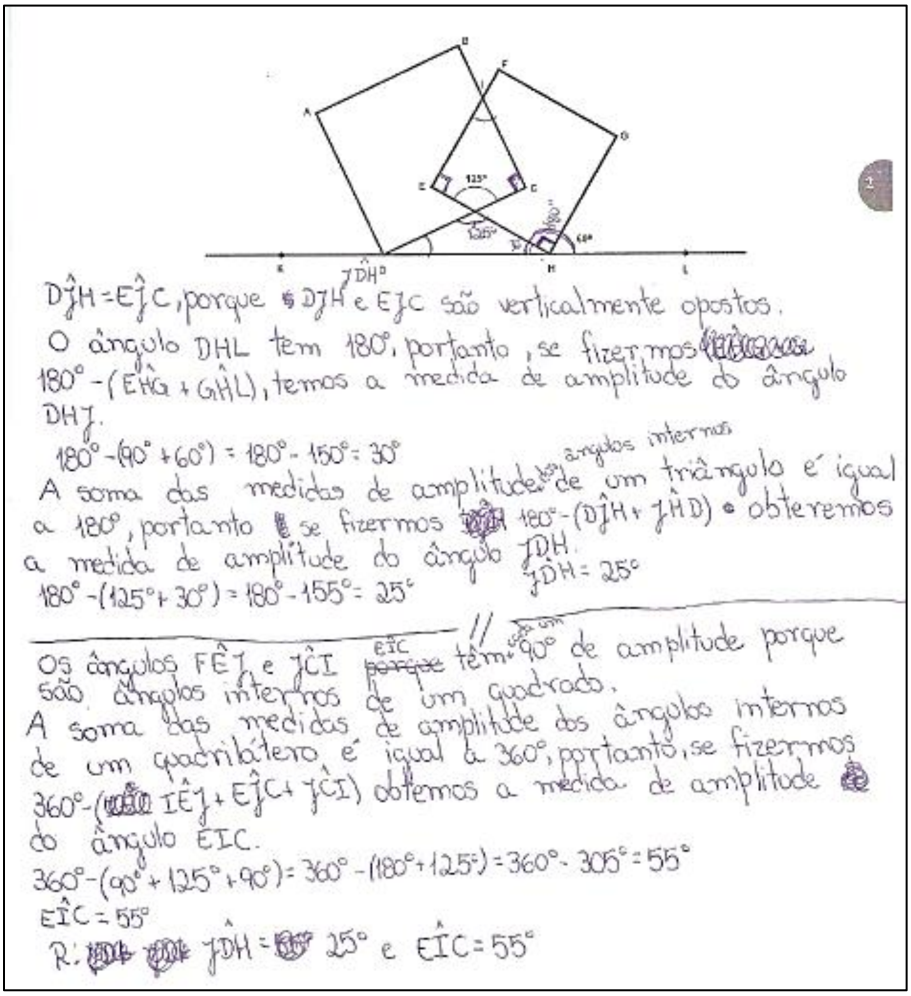
Pela imagem, a Elisa identificou rapidamente ângulos verticalmente opostos. Posteriormente os alunos identificaram as medidas de amplitude pedidas e começaram a delinear um caminho para a resolução tendo em conta relações de ângulos estudadas em aulas anteriores:

David: Temos de saber este, temos de saber onde é que está o JDH onde está o J ah o JDH é este e EIC… é este.
David: Ok se este é 125… um quadrilátero tem de ter 360, não é? A soma…
Elisa: Sim, por dentro.
David: Por dentro ok
Elisa: Este aqui tem de ter 180 por dentro.
Elisa: Mas nós sabemos que este é verticalmente oposto a este, verticalmente oposto não alternos internos.
David: Qual?
Elisa: Este alterno interno a este. Não é? (referindo o ângulo CJH e o ângulo JHD).
David: Sim.
Elisa: Então sabemos a medida deste, também sabemos a medida deste. Sabemos a medida deste porque tem de ser 360 menos 180.
David: Se fizermos a reta assim (referindo a reta EH), se fizeres 125 para 180 já vai dar.
Elisa: Ok, então temos de escrever isso tudo primeiro, o que nós fizemos.
David: Está aqui 180…
Elisa: Não, primeiro vamos fazer …DJH é verticalmente oposto a EJC …
David: E depois como é que explicamos esta do 180?
Elisa: Ah isso depois pensamos…

Os alunos começaram por tentar descobrir a medida de amplitude de um ângulo interno alterno ao ângulo JHD, contudo, não tiveram em conta que estes ângulos não eram formados por retas paralelas e por essa razão não iriam ser geometricamente iguais. Após escreverem quais os ângulos verticalmente opostos e fazerem alguns cálculos o David detetou que algo não estava bem:

David: Dá 55º. Estranho…Então mas os alternos internos tem a mesma medida de amplitude não é?
Elisa: Acho que sim. Se não for estamos feitos.
David: Não, não tem. Vê-se já por aqui, olha lá. Como é que este ângulo está mais aberto que este (silêncio). Vês?
Elisa: Espera…Este ângulo tem 90… Ah que estupida!!! Este ângulo tem 90.
David: Sim é um ângulo reto. Agora assustaste-me.
Elisa: E depois 180…

O sentido crítico do aluno ajudou-o a detetar o erro e a nova descoberta da Elisa fez com que seguissem um novo caminho para encontrarem o ângulo JDH tal como é apresentado na sua resolução (Figura 6.20).



$D\hat{J}H = E\hat{J}C$, porque $D\hat{J}H$ e $E\hat{J}C$ são verticalmente opostos.
O ângulo DHL tem 180°, portanto, se fizermos $180° - (E\hat{H}G + G\hat{H}L)$, temos a medida de amplitude do ângulo DHJ.
$180° - (90° + 60°) = 180° - 150° = 30°$
A soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, portanto se fizermos $180° - (D\hat{J}H + J\hat{H}D)$ obteremos a medida de amplitude do ângulo $J\hat{D}H$.
$J\hat{D}H = 25°$
$180° - (125° + 30°) = 180° - 155° = 25°$
//
Os ângulos $F\hat{E}J$ e $J\hat{C}I$ ~~porque~~ $E\hat{I}C$ têm cada um 90° de amplitude porque são ângulos internos de um quadrado.
A soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°, portanto, se fizermos $360° - (I\hat{E}J + E\hat{J}C + J\hat{C}I)$ obtemos a medida de amplitude do ângulo $E\hat{I}C$.
$360° - (90° + 125° + 90°) = 360° - (180° + 125°) = 360° - 305° = 55°$
$E\hat{I}C = 55°$
R.: $J\hat{D}H = 25°$ e $E\hat{I}C = 55°$

Fig. 6.20 – Resolução da Elisa do problema 2 da ficha de trabalho n.º 6

Posteriormente os alunos seguiram para o cálculo da medida de amplitude do ângulo EIC. O David ao resolver a segunda parte do problema no verso da folha começou por fazer um desenho do quadrilátero envolvido para o ajudar na resolução (Figura 6.21).

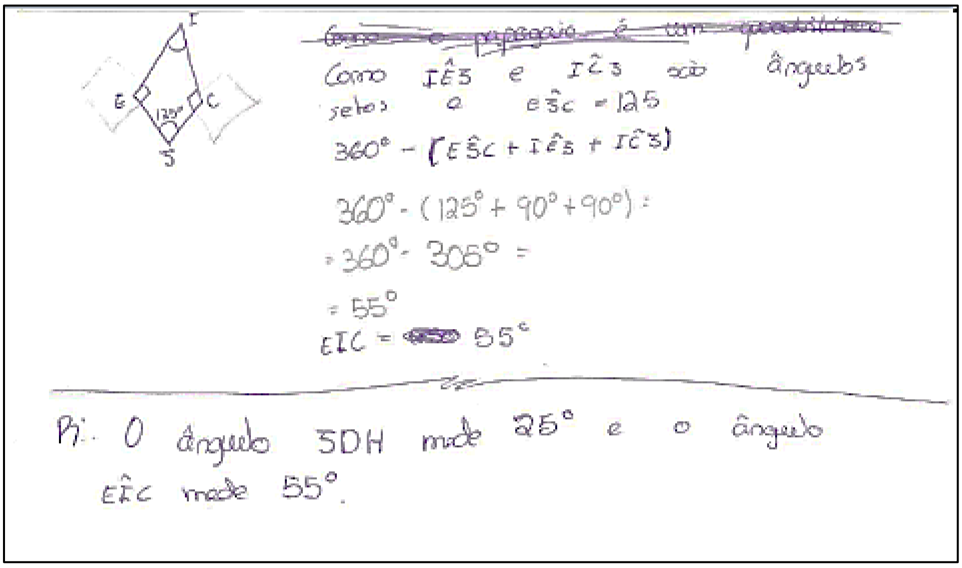


Fig.6.21 – Parte da resolução do David do problema 2 da ficha de trabalho n.º 6

Contudo, teve algumas dificuldades em iniciar a resolução, uma vez, que considerou que o quadrilátero [EICJ] era um papagaio e estava a tentar usar as suas propriedades em relação aos lados para chegar à resposta, tal como é evidente no seguinte diálogo:

> **David:** Vou desenhar aqui um papagaio mais ou menos, vou desenhar do outro lado que é para ser mais fácil.
> **David:** Um quadrilátero com pelo menos um par de ângulos opostos geometricamente iguais? É assim que se diz?
> **Elisa:** Sim mas para que é que queres isso?
> **David:** Não sei.
> **Elisa:** Explica.
> **David:** Como o papagaio é um quadrilátero com dois lados, um par de lados geometricamente opostos…
> **Elisa:** Não mas nós podemos dizer, deixa fazer a lápis para riscar a tua folha. Como isto depois tem aqui um quadrado, imagina que é um quadrado…
> **David:** Sim e como a soma dos ângulos do quadrado…Boa, boa!!!
> **Elisa:** Podemos dizer…estas a ver?
> **David:** Sim…ya ok então o que eu estou a escrever não tem nada a ver pois não?
> **Elisa:** Não.

Após este diálogo, os alunos calcularam a medida de amplitude do ângulo EIC tendo em conta que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º e apresentaram a resposta ao problema. Ainda que não o tenham indicado, quando questionada por uma professora presente na sala por que razão afirmava que aquele ângulo tinha de medida de amplitude 90º esta respondeu "porque é um ângulo interno do quadrado".

Os alunos não encontraram de imediato o caminho para a resolução do problema mas não desistiram e ao detetar erros conseguiram sempre ultrapassá-los, chegando ao fim da resolução com sucesso. É de destacar o facto de o David denominar o quadrilátero [EICJ] de papagaio pela sua aparência uma vez que não tem características necessárias do quadrilátero para o poder afirmar. O David não foi o único a fazer esta observação. Ao longo da resolução, alguns alunos usaram a palavra "papagaio" para se referir ao quadrilátero em questão. O Manuel foi mais longe e erradamente considerou que o papagaio tinha dois pares de lados perpendiculares, usando esta informação para justificar o facto dos ângulos IEJ e ICJ serem retos (Figura 6.22).

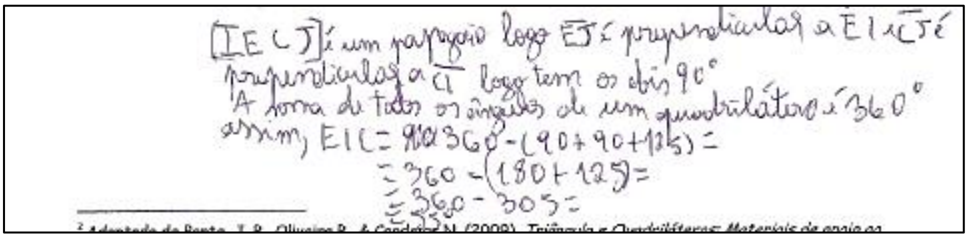


Fig.6.22 – Parte da resolução do Manuel do problema 2 da ficha de trabalho n.º 6 referindo um papagaio

Em síntese, a grande maioria dos alunos conseguiu resolver o problema e à semelhança dos problemas anteriores os alunos *dividiram este problema em problemas mais simples* que passavam por calcular uma das medidas de amplitude dos ângulos pedidos, outra das estratégias seguida passou por *recorreram à imagem dada ou fazerem um desenho* em complemento com a estratégia anteriormente indicada (NCTM, 2008, Borralho, 1995). Metade dos alunos também apresentou a resposta ao problema. Pelas resoluções apresentadas é evidente que os alunos conseguiram identificar ângulos verticalmente opostos, ângulos suplementares, assim como, identificar triângulos e quadriláteros e reconhecer que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos é 180º e 360º respetivamente. Pela resolução da Diana e da Margarida parece-me que as alunas não compreenderam na totalidade o conceito de ângulos verticalmente opostos dado a quantidade de cálculos que fizeram para calcular a medida de amplitude do ângulo DJH, assim como, o David e a Elisa evidenciaram não saber em que condições os ângulos alternos internos são geometricamente iguais, ainda que já os saibam identificar, o que não se tinha verificado no problema anterior. Não tendo sido dificuldades comprometedoras para a resolução de problemas, evidenciam que *alguns conceitos não estão consolidados*. Também este problema não levantou dificuldades de interpretação, contudo os alunos nem sempre tiveram em atenção apenas as informações dadas e alguns deixaram-se *levar pela aparência da imagem* dada tirando elações erradas. Em relação à comunicação escrita, apenas sete alunos apresentaram os cálculos ou só apresentaram valores na imagem dada (caso do Carlos) notando-se uma *evolução em termos de justificações dos cálculos efetuados* em relação a problemas anterior, o raciocínio menos justificado foi o facto dos ângulos internos do quadrado serem retos o que penso que se deve ao facto de esta ser uma situação nova para os alunos enquanto os outros tipos de justificações já tinham sido pedidas em problemas anteriores. Em relação à *notação surgiram novamente erros*, uma vez que, os alunos ainda continuam a utilizar a notação dos ângulos quando se querem referir à sua medida de amplitude e vice-versa, como podemos observar na figura 5.18 e na resolução do David. Os casos mais graves, em que a notação em nada se assemelha à correta, como o caso do Carlos, são pontuais.

Ficha de trabalho n.º 7 – Parte I

Problema 1

Neste problema era pedido aos alunos que comentassem uma afirmação sobre a construção de um trapézio isósceles, dadas as medidas de amplitude de três dos seus ângulos internos (anexo XI).

Dois dos alunos (O Renato e o Rui) recorreram ao material de desenho para construir um quadrilátero tendo em conta as medidas de amplitude dos ângulos internos dados. Após a sua construção os alunos concluíram que com as medidas de amplitude dadas não era possível obter um trapézio isósceles, por não ter as bases paralelas, nem os dois lados não paralelos geometricamente iguais (Figura 6.23).

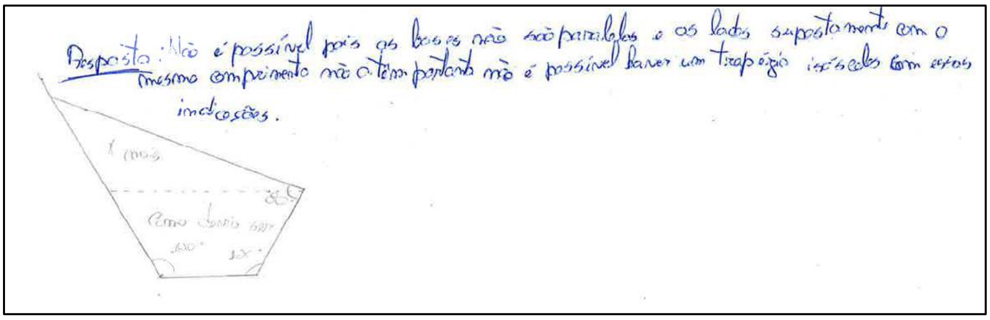


Fig. 6.23 – Resolução do Renato do problema 1 da ficha n.º 7 recorrendo a um desenho

Ambos os alunos construíram os ângulos com medidas de amplitude iguais a 120° adjacentes ao mesmo lado, assim, ainda que não o justifiquem, pela sua construção parece-me que ambos partiram do princípio que o trapézio que queriam obter teria de ter os ângulos adjacentes à mesma base geometricamente iguais. Deste modo, os alunos com uma estratégia que passou por fazer um desenho chegaram à resposta do problema e evidenciaram os seus conhecimentos sobre as características do trapézio isósceles.

A maioria dos alunos optou por recorrer a expressões numéricas e utilizando um raciocínio dedutivo por redução ao absurdo verificaram a falsidade da afirmação dada, ainda que de dois modos diferentes. Dez alunos resolveram somar as medidas de amplitude dadas e usar o seu conhecimento de que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, para descobrir que a medida de amplitude em falta era 40°. Por fim, concluíram que a afirmação não estava correta por não ser possível ter dois pares de ângulos geometricamente iguais, tal como ilustra a resolução do par seguinte (Figura 6.24).

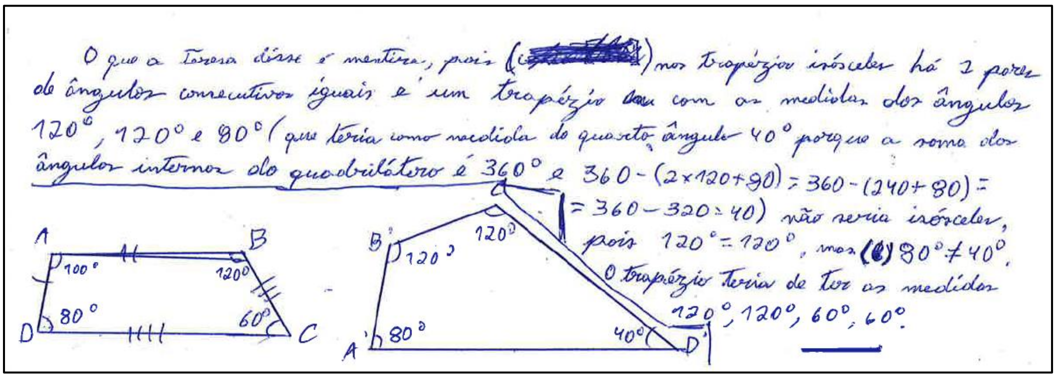


Fig. 6.24 – Resolução do Frederico do problema 1 da ficha n.º 7

Este par de alunos vai mais longe e chega a deixar uma sugestão de medidas de amplitude com as quais seria possível construir um trapézio isósceles. Os alunos construíram duas figuras recorrendo a material de desenho, embora, não seja percetível o raciocínio feito para a construção da primeira, a segunda corresponde à construção que poderia ser obtida com as medidas de amplitude dadas. Pela organização da resolução parece ser possível afirmar que o aluno construiu as figuras em primeiro lugar realizando os cálculos necessários mentalmente e só posteriormente construiu uma cadeia argumentativa para justificar a sua resposta, evidenciando um raciocínio lógico e uma boa capacidade de argumentação.

Já cinco alunos assumiram que o trapézio isósceles tinha dois pares de ângulos geometricamente iguais e somando as medidas de amplitude dadas com 80° obtiveram uma soma de 400°, em vez de 360°, que corresponde à soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um quadrilátero, concluindo assim que seria impossível construir o trapézio isósceles tal como indicado (Figura 6.25).

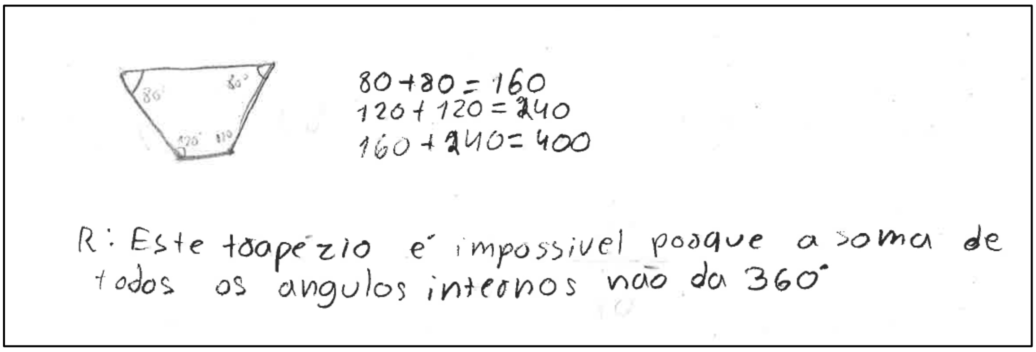


Fig.6.25 – Resolução da Margarida do problema 1 da ficha n.º 7

A Margarida e o Carlos pensaram deste modo, tal como ilustra a figura 6.25. Os alunos inicialmente tiveram dificuldades em identificar as características de um trapézio questionando-me sobre esse assunto. Aconselhei-os a consultar as fichas de trabalho anteriores. Após essa consulta, os alunos começaram por esboçar um trapézio isósceles, opção tomada por mais de metade dos alunos, e identificar que o ângulo desconhecido teria de ser geometricamente igual ao adjacente à mesma base e assim prosseguiram a sua resolução. Ainda que não tenham justificado todos os seus raciocínios, os alunos conseguiram levar a sua estratégia até ao fim e responder ao que era pedido.

Outro par de alunos também teve dificuldade em identificar as características do quadrilátero envolvido e considerou que um trapézio isósceles tinha dois lados geometricamente iguais, embora diga apenas “igual”, e como consequência dois ângulos geometricamente iguais e, assim, considerou que a afirmação não tinha nada de errado (Figura 6.26). Parece-me que esta resposta poderá ser consequência de uma associação errada às características do triângulo isósceles, um dos primeiros polígonos estudados durante o seu percurso escolar.

Concordo pois o trapézio isosceles tem 2 lados iguais portanto vai ter 2 ângulos iguais.

Fig. 6.26 – Resolução do António do problema 1 da ficha n.º 7 usando características erradas

Existiram ainda três alunos que não tiveram em conta as características do trapézio isósceles e se focaram apenas no facto de este ser um quadrilátero e a soma das medidas de amplitude dos seus ângulos internos ser 360°, como é exemplo a resolução do Paulo (Figura 6.27). Deste modo, os alunos tendo em conta que já eram dadas três medidas de amplitude e estas somadas não excediam o valor de 360°, descobriram a medida de amplitude do quarto ângulo interno e não contestaram a veracidade da afirmação do enunciado do problema.

Eu penso que é verdade, pois a soma dos 4 ângulos internos de um trapézio é 360°graus. ~~Os três ângulos que ela nos apresenta~~ A soma da amplitude dos três ângulos que ela nos apresenta é 320°, sendo o outro ângulo de 40°.

$360° - (120° + 120° + 80°) = 360° - 320° = 40°$

$120° + 120° + 80° + 40° = 240° + 120° = 360°$

Fig. 6.27 – Resolução do Paulo do problema 1 da ficha n.º 7 não tendo em conta as características

Na resolução deste problema, os alunos optaram por estratégias diferentes, uns recorreram exclusivamente à *construção de um desenho* como o caso do Rui e do Renato (Borralho, 1995; NCTM, 2008) e outros optaram por recorrer a um *raciocínio por redução ao absurdo* sendo que em alguns casos recorreram à construção do quadrilátero como estratégia complementar. Os alunos que concordaram com a afirmação dada acabaram por revelar dificuldades na *identificação das características do polígono* em causa, sendo esta a principal dificuldade revelada neste problema. Relativamente à comunicação escrita alguns alunos apresentaram justificações mais completas que o habitual notando-se uma evolução positiva, contudo, para outros apresentar resoluções completas ainda continua a ser uma dificuldade, existem também ainda alguns *erros na linguagem* utilizada, como por exemplo, indicar ângulos iguais em vez de geometricamente iguais. Outro aspeto observado neste problema foi a opção de alguns alunos de dar nomes aos vértices do seu esboço para posteriormente poderem identificar os ângulos a que se queriam referir, contudo em nenhum dos casos a notação utilizada estava incorreta.

Problema 2

O problema 2 tinha como objetivo que os alunos utilizassem os seus conhecimentos sobre as características do losango, nomeadamente a relação entre os seus ângulos internos para, dada a medida de amplitude de um dos ângulos internos, determinar as restantes medidas de amplitude (anexo XI).

O Rui pela sua resposta aparenta ter recorrido novamente a uma estratégia de resolução que passou pela construção do quadrilátero em causa, neste caso o losango (Figura 6.28).

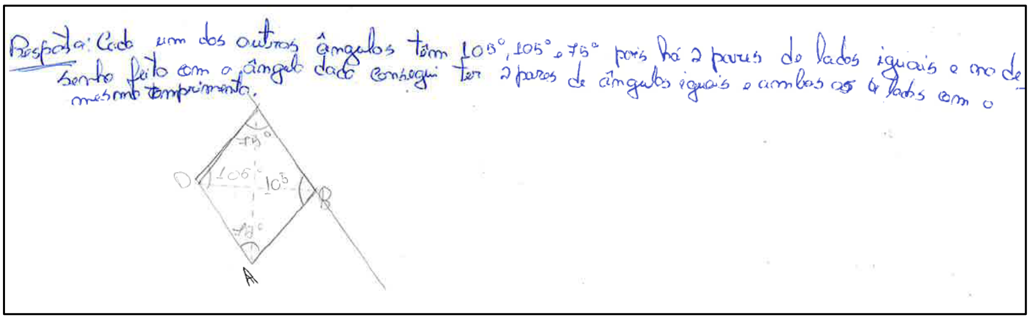


Fig. 6.28 – Resolução do Rui do problema 2 da ficha n.º 7 recorrendo a um desenho

Pelo que o aluno indica, começou por construir um ângulo com medida de amplitude de 75° e teve em atenção que todos os lados do quadrilátero teriam de ser geometricamente iguais. Apesar de não ser totalmente claro, pela presença das linhas a tracejado, penso que o aluno teve em conta o facto das diagonais do losango serem perpendiculares e se bissetarem para concluir a sua construção de modo correto. Após a construção, o aluno efetuou as medições necessárias para dar a sua resposta ao problema. Este aluno evidencia conhecer as características do losango e ter alguma destreza com o material de desenho.

Os restantes alunos optaram pela realização de alguns cálculos para obterem os valores pedidos. O Gustavo começou por utilizar os seus conhecimentos sobre a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do losango ser 360° e subtraiu a 75 a esse valor para posteriormente dividir o resultado por três, considerando que os restantes ângulos internos seriam geometricamente iguais (Figura 6.29). Após esta primeira resolução o aluno apercebeu-se do seu erro e teve em conta que o losango teria de ter dois pares de ângulos opostos geometricamente iguais e subtraiu duas vezes o valor 75 a 360, e dividiu a diferença por dois, obtendo as medidas de amplitude de todos os ângulos internos do losango.

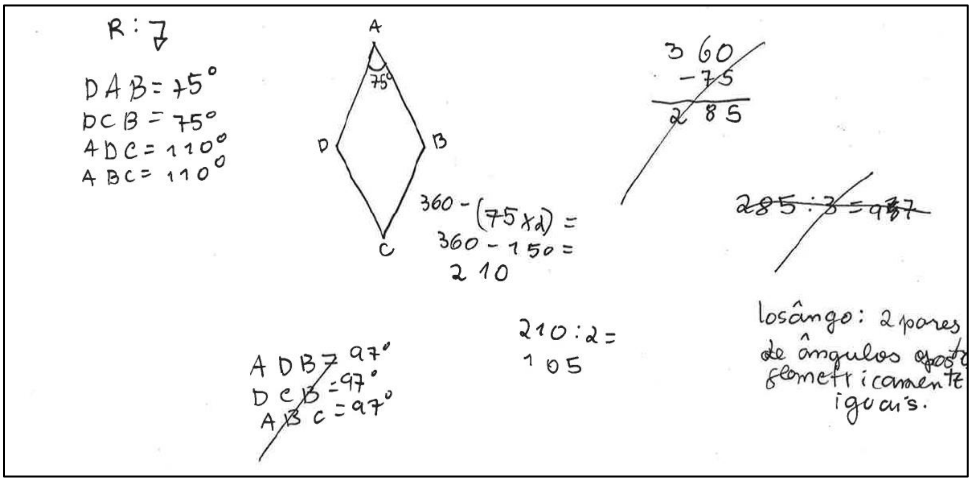


Fig. 6.29 – Resolução do Gustavo do problema 2 da ficha n.º 7 apresentando dificuldades

Ainda que apresentasse algumas dificuldades no início, o aluno conseguiu resolver de modo correto o problema, contudo, penso que por distração, não apresentou a resposta correta. Além disso, o aluno também não utiliza a notação correta para indicar as medidas de amplitude dos ângulos.

Também o par Margarida e Carlos obtiveram uma resolução idêntica, mas só após a minha intervenção junto do par:

Professora: O que é que um losango tem de ter? Eu já sei um ângulo do losango.
Carlos: 75°.
Professora: Um ângulo é 75. E quais são as características do losango? (silêncio). O que é um losango? É um quadrilátero certo?
Margarida: Sim.
Professora: O que é que têm de ter um losango?
Carlos: lados…
Professora: Os lados todos geometricamente iguais.
Margarida: Eu acho que um losango é mais ou menos assim. (desenha)
Professora: Ok. Agora põe aí as letrinhas. O losango tem um nome [ABCD]. E agora? Já sabes um ângulo.
Margarida: Sabemos este.
Professora: E o que é que o losango tem de ter além dos lados…
Margarida: Ou seja este aqui vai ser igual a este.
Professora: Porque…? No losango acontece sempre o quê?
Carlos: Este tem de ser igual a este.
Professora: Qual? o lado ou o ângulo?
Margarida: Este. Eu acho que são estes aqui.
Professora: Ela está a dizer que os ângulos opostos têm de ser iguais, o ângulo em A e o ângulo em C têm de ser geometricamente iguais.
Carlos: Têm.
Margarida: E depois eu acho que o D e o B têm de ser iguais.
Professora: E o que sabemos mais sobre qualquer quadrilátero? Os ângulos de qualquer quadrilátero todos juntos são quanto?
Margarida: 360.

Antes do diálogo, os alunos apenas estavam a tentar construir um losango, mas sem refletir sobre as suas características e a única informação que tinham era apenas a medida de amplitude de um dos ângulos. Após a minha intervenção, os alunos não tiveram dificuldade em elaborar uma estratégia para resolver o problema e dar a resposta usando a notação adequada. Ainda assim, os alunos continuam a revelar dificuldades em escrever os seus argumentos cometendo algumas lacunas. Também é percetível que a principal dificuldade deste par está relacionada com os conhecimentos sobre as características do losango.

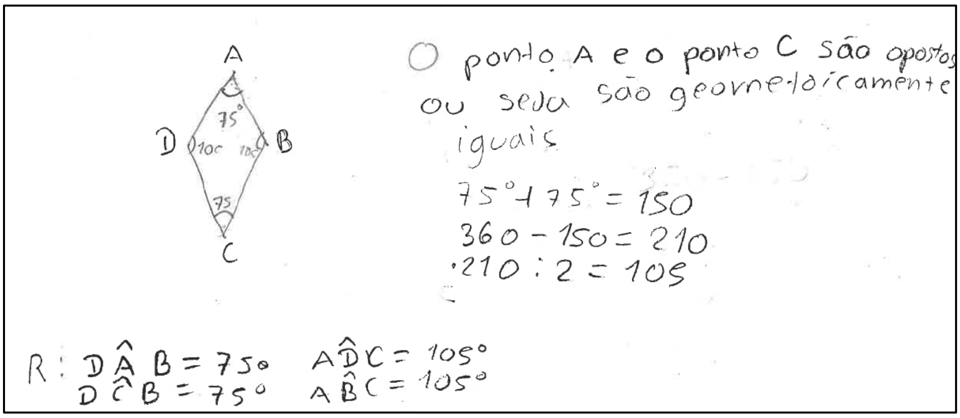


Fig. 6. 30 – Resolução da Margarida do problema 2 da ficha n.º 7

O David, que trabalhou com o Manuel, uma vez que a Elisa faltou, também começou por fazer um esboço do losango identificando os seus vértices e as suas características em relação aos ângulos. Posteriormente recorreu a uma equação para descobrir a medida de amplitude do ângulo ADC e assim obteve as medidas de amplitude desconhecidas (Figura 6.31).

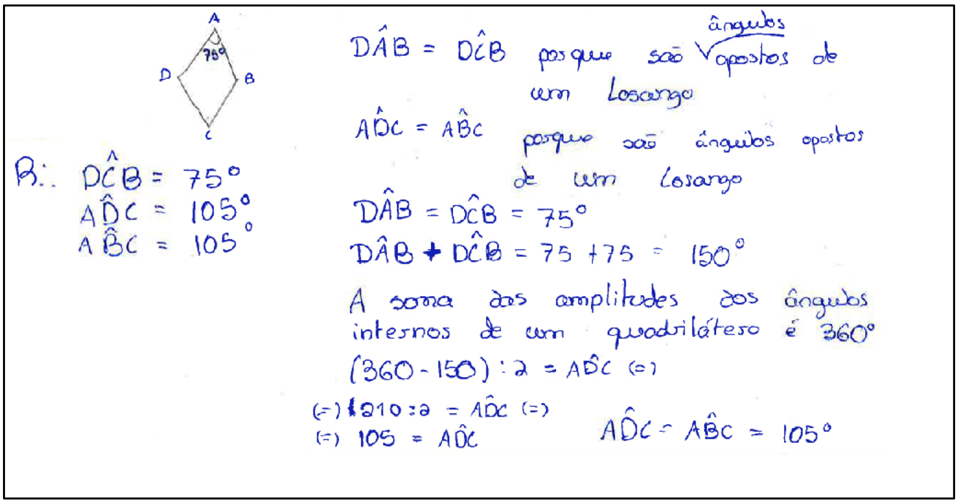


Fig. 6.31 – Resolução do David do problema 2 da ficha n.º 7

É de destacar que os alunos não só utilizaram a notação correta como tiveram o cuidado de justificar todos os passos do seu raciocínio, e no final responderam corretamente ao problema.

É de notar que à semelhança das resoluções apresentadas todos os alunos construíram figuras para os auxiliar nas suas resoluções. À exceção de um dos alunos (Figura 6.32) todos indicaram corretamente na figura que o ângulo DAB tinha 75° de medida de amplitude e construíram um quadrilátero [ABCD].

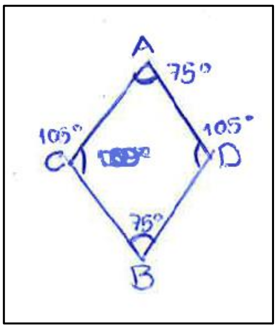


Fig.6.32 – Construção errada do losango

Existiram ainda algumas resoluções em que os alunos construíram figuras que não aparentavam respeitar as características dos losangos, como é o caso da Margarida (Figura 6.30) onde, mesmo sendo um esboço, os lados do quadrilátero não aparentam ser geometricamente iguais. Além disso, a grande maioria dos alunos optaram por construir o losango na mesma posição do que a apresentada nos exemplos acima, o que pode estar relacionado com o facto de os alunos terem contactado mais vezes com o losango nesta posição.

Para resolver este problema os alunos recorreram novamente exclusivamente à *construção de desenhos* (Borralho, 1995; NCTM, 2008), caso do Rui, ou a um *raciocínio direto*, baseando-se nas características do polígono em causa, os alunos foram descobrindo as medidas de amplitude sucessivamente, fazendo uma simplificação do problema original (Borralho, 1995; NCTM, 2008), todos os alunos que seguiram esta última estratégia construíram um quadrilátero como estratégia complementar alguns recorreram a equações durante a sua resolução. Todos os alunos interpretaram corretamente o que era pedido e dezasseis deles apresentaram a resposta ao problema. As maiores dificuldades presentes neste problema estiveram relacionadas a *falta de conhecimento das características do losango* sendo esta um dos maiores motivos de solicitação de ajuda às professoras durante a aula. No que respeita à comunicação escrita ainda existem muitos alunos que *não conseguem elaborar justificações completas dos seus raciocínios* ou *não utilizam uma linguagem matemática cuidada* como é exemplo a resolução da Margarida. Existem também alguns alunos, que penso por esquecimento, visto não cometerem o mesmo erro em todas as suas resoluções, continuam a utilizar a notação para ângulos em vez da notação para a medida de amplitude destes.

Problema 3

O último problema da ficha de trabalho pedia que os alunos desenhassem um paralelogramo tendo em conta que este tinha 24 cm de perímetro e um lado tinha um terço da medida de comprimento do outro (anexo XI).

Durante o trabalho autónomo uma das alunas, a Íris, chamou-me para questionar se estaria num bom caminho para chegar à resposta. A aluna já tinha pensado que um dos lados poderia ser 3 cm e desse modo o menor teria de ser 1 cm contudo o perímetro não iria ser 24 cm. Pensou em escolher outro valor, mas estava um pouco insegura se estaria num bom caminho. Incentivada a continuar o seu raciocínio e em apresentar por escrito todas as suas tentativas do modo mais completo possível a aluna apresentou a seguinte resolução (Figura 6.33).

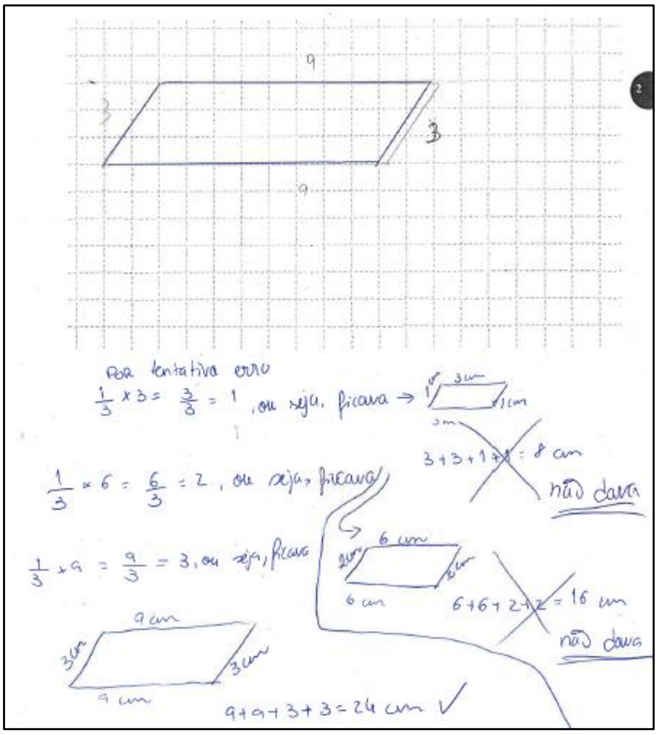


Fig. 6.33 – Resolução por tentativa e erro da Íris do problema 3 da ficha n.º 7

A aluna experimentou atribuir ao lado maior as medidas de comprimento 3, 6 e 9 obtendo o perímetro pretendido com o último valor, seguindo uma estratégia por tentativa e erro. Por fim, construiu o paralelogramo com as medidas corretas.

A Lara seguiu o mesmo tipo de estratégia mas com um raciocínio um pouco diferente.

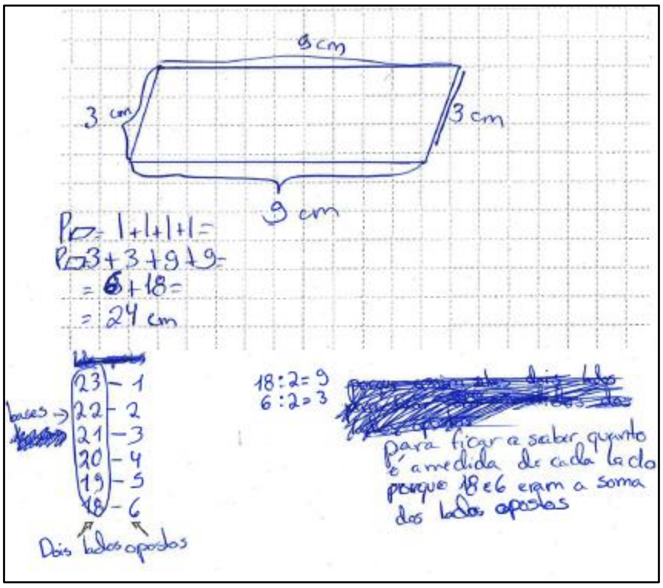


Fig. 6.34 – Outra resolução por tentativa e erro da Lara do problema 3 da ficha n.º 7

A aluna partindo do princípio que o perímetro do paralelogramo tinha de ser 24 cm começou por pensar que, se dois dos lados tivessem em conjunto 23 cm de medida de comprimento os outros dois teriam de medir em conjunto 1 cm. Em seguida a aluna verificou que 1 não é um terço de 23, então pensou nos números 22 e 2 e assim sucessivamente, até obter os valores 18 e 6 que verificam a condição de o segundo ser um terço do primeiro (Figura 6.34). Para concluir os seus cálculos a aluna dividiu os valores encontrados por dois, uma vez que estes representavam a soma das duas medidas de comprimento dos lados opostos. Por fim, construiu o paralelogramo tendo em conta os valores encontrados.

Cinco alunos optaram por utilizar os dados do enunciado para construir uma equação. A maioria preferiu pensar que o lado maior era o triplo do lado menor, em vez de, tal como indicava o enunciado, que o lado menor era um terço do lado maior.

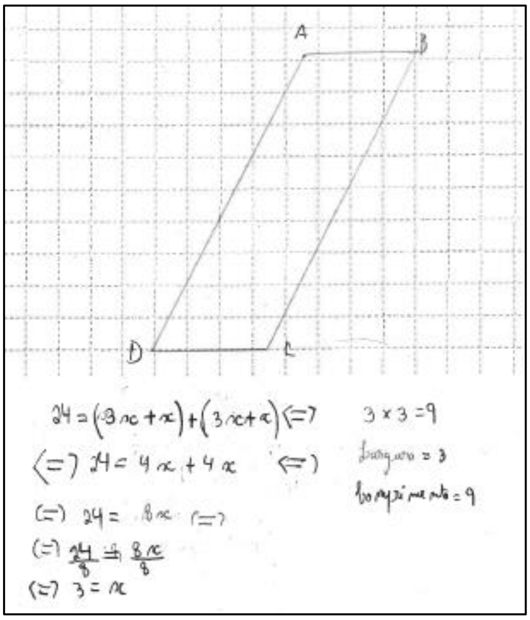


Fig. 6.35 – Resolução utilizando uma equação do Paulo do problema 3 da ficha n.º 7

O Paulo à semelhança dos restantes igualou a soma das medidas de amplitude de todos os lados do paralelogramo a 24 utilizando como incógnita o x, que apesar de não o indicar é percetível que corresponde à medida de comprimento do lado menor do paralelogramo (Figura 6.35). Com esta resolução os alunos evidenciaram ter adquirido os conhecimentos das características do quadrilátero em questão, uma boa interpretação do enunciado, assim como, uma boa compreensão dos números fracionários.

Apenas o Patrício optou por construir a equação considerando a incógnita, x, como sendo a medida de comprimento do lado maior do paralelogramo (Figura 6.36).

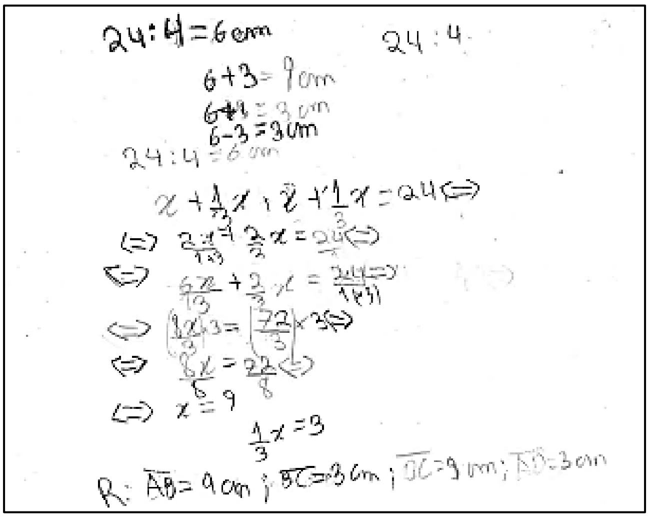


Fig. 6.36 – Outra resolução utilizando uma equação do Patrício do problema 3 da ficha n.º 7

O David e o Manuel começaram por identificar uma das características do paralelogramo (lados opostos geometricamente iguais), fizeram um esboço do quadrilátero identificando os seus vértices e escreveram em linguagem simbólica a última informação dada no enunciado. Com esta informação os alunos também pensaram em construir uma equação:

Manuel: Por isso o que nós temos de fazer é encontrarmos…ok, vamos fazer uma equação.
David: Como?
Manuel: Então 24 igual a x, mais x vezes 3.
David: Vezes 3 porquê? Agora explica-me que eu sou muito burro.
Manuel: Espera… primeiro vamos dizer que, para tu perceberes melhor, dizemos que AC é igual a x, exato, e $\overline{AB}$=3… não espera, espera, igual a 1/3 de…espera assim não dá … não era isto que eu queria, ok igual a 3x e isto igual a x, desculpa.

No diálogo comandado pelo Manuel é evidente que o aluno além de se ter confundido ao definir a incógnita x, não teve em conta os quatro lados do paralelogramo para construir a equação. Após resolver a equação, o aluno tentou com o resultado calcular mentalmente o perímetro da figura e não obteve o valor esperado, fazendo com que desistisse da estratégia seguida:

Manuel: Isto não ajudou nada por isso vamos por tentativa e erro…Ok vamos lá. Eu vou começar por… ok, x=3. Então 3 vezes dois mais três vezes 3 mais 2 vezes 2, eh espera, espera, confundi…é esta a expressão.
David: Agora explica.

Manuel: 3 vezes 2 Isto é porque tem dois lados que tem 3 cm
David: Como é que sabes?
Manuel: Eu estou a fazer por tentativa e erro.
David: Depois vamos substituir o 3 por outro número não é?
Manuel: Depois sabemos que há um lado que é o triplo do outro, eles dizem que é um terço mas nós podemos considerar que é o triplo do outro lado e depois… e isto é … e esse lado esta aqui vezes dois, porque também há dois lados com o tal… pronto… acho que é um pouco difícil de explicar.

Adotada uma nova estratégia, a tentativa e erro, os alunos voltaram a cometer erros. Desta vez já consideraram que existiam dois pares de lados geometricamente iguais, mas em vez de calcular o triplo da medida de comprimento do lado menor, consideraram o triplo da soma das medidas de comprimento dos dois lados menores como podemos observar na figura 6.37.

Após duas tentativas, o Manuel desconfiou dos resultados obtidos, calculou mentalmente o caso de o x ser igual a 1 mas também não obteve 24 cm como era de esperar assim acabou por referir: “Isto não está a dar, acho que não é assim, eu acho que nós estamos a fazer alguma coisa mal”. E abandonou os cálculos realizados. Foi então que, por sugestão do David, resolveram experimentar o valor 9 para medida de comprimento do lado maior, uma vez que este tinha ouvido essa informação de um dos colegas da turma. Ao construírem a nova expressão não seguiram o mesmo raciocínio utilizado anteriormente, visto que desta vez consideraram em primeiro lugar o valor da medida de comprimento do lado maior, ainda que voltassem a utilizar erradamente a incógnita x. Esta nova expressão foi construída de modo correto e assim os alunos conseguiram obter as medidas de comprimento que necessitavam para construírem o paralelogramo, que neste caso o fizeram com o auxílio de um Aristo, evidenciando uma boa manipulação deste material de desenho.

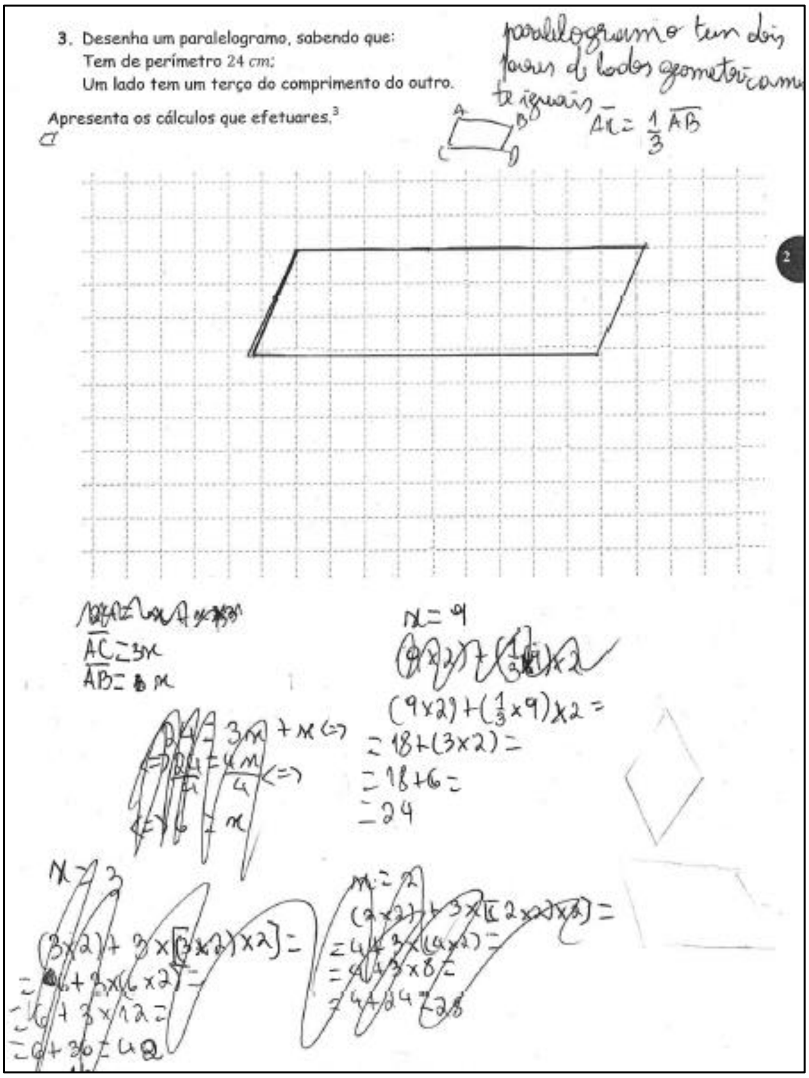


Fig. 6.37 – Resolução do Manuel do problema 3 da ficha n.º 7

Os alunos tentaram seguir duas estratégias diferentes para a resolução, mas acabaram por as abandonar por "não estar a dar certo" e só durante a discussão do problema em turma é que os alunos conseguiram detetar os erros cometidos. Ainda que em nenhum momento os alunos tivessem posto em causa a equação construída, nem as expressões numéricas utilizadas, revelando dificuldades no cálculo do perímetro do quadrilátero, os alunos revelaram algum sentido crítico com as suas resoluções. No primeiro caso, o aluno calculou mentalmente o perímetro se o paralelogramo tivesse o lado menor com medida de comprimento igual a 6 verificando que não dava 24 cm e, no segundo caso, uma vez que na primeira tentativa obtiveram um valor superior a 24 tentaram um valor menor para o x, contudo decidiram abandonar as estratégias sem nunca verificar as expressões numéricas construídas.

O Rui apresentou uma resolução bem diferente dos seus colegas. Este considerou que se o lado menor representava 1/3 do lado maior, então o perímetro do paralelogramo estava dividido em 8 partes iguais. Assim, dividindo os 24 cm por esse número de partes, o aluno encontrou a medida de comprimento do lado menor que representava uma parte e ao multiplicá-la por três obteve a medida de comprimento do lado maior (Figura 6.38).

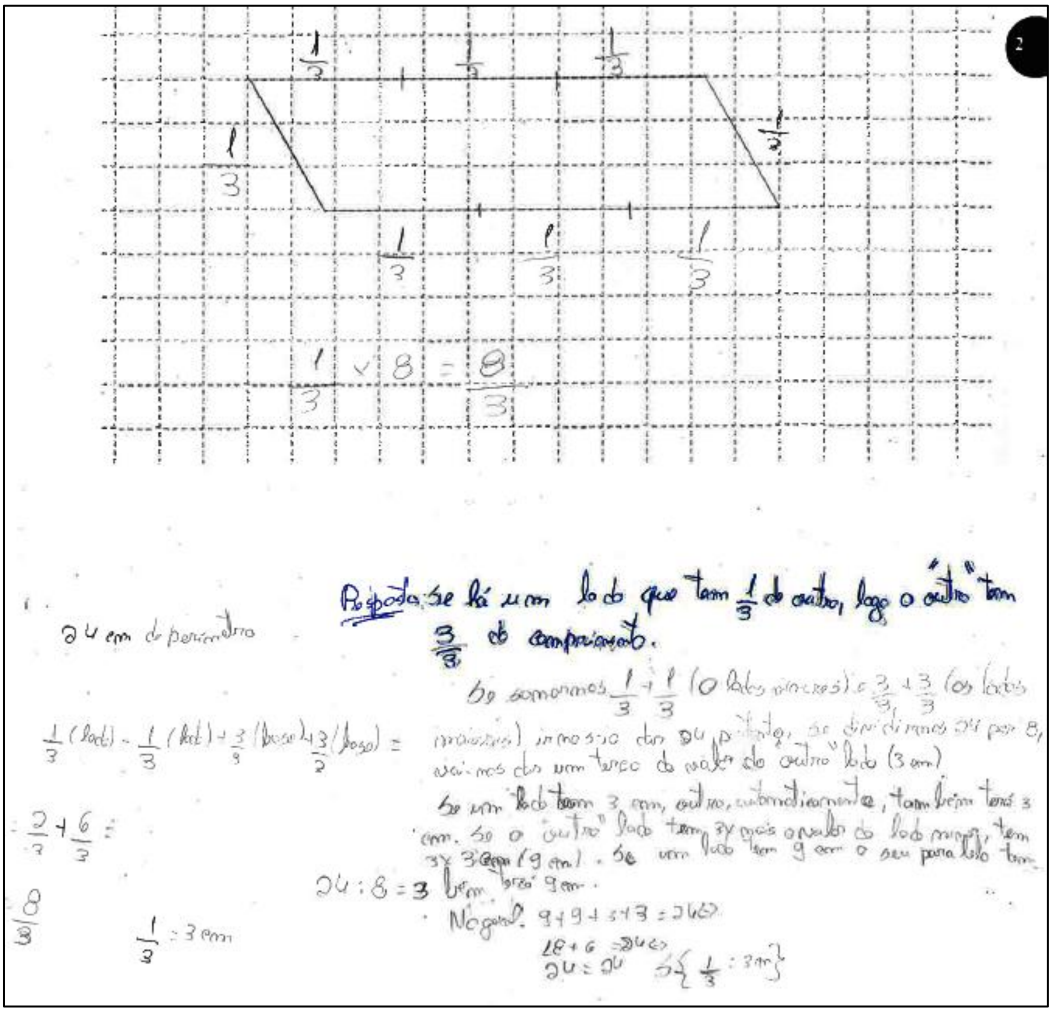


Fig. 6.38 – Resolução do Rui do problema 3 da ficha n.º 7

A Margarida e o Carlos à semelhança de alguns alunos não conseguiram efetuar a construção do paralelogramo com as informações dadas. Neste caso, devido à gravação áudio, foi possível identificar algumas dificuldades deste par. Ao ler o enunciado, a Margarida começou por perguntar o que era um paralelogramo ao que o seu par sugeriu que consultassem o caderno. Após a consulta, o par começou por desenhar um paralelogramo qualquer para os auxiliar na resolução e, em seguida, voltaram a ler o enunciado já tomando em conta as características do quadrilátero em causa:

> **Margarida:** Nós sabemos que ele tem 24 cm e sabemos que dois lados… que tem dois pares de lados iguais… um lado tem… aqui 1/3 já não percebo.

A Margarida manifestou logo de início dificuldades em compreender na totalidade o enunciado. Já o Carlos não se manifestou relativamente a este comentário da colega. Assim, os alunos acabaram por desistir da resolução do problema, sem pedir auxílio às professoras presentes na sala de aula.

É de destacar também a opção dos alunos pela posição dos paralelogramos construídos sendo que dos oitos alunos que efetuaram uma construção rigorosa ou não do paralelogramo, apenas um par optou por construir um paralelogramo obliquângulo na vertical como ilustra a figura 6.35. Um dos alunos construiu um retângulo (Figura 6.39) e os restantes optaram por construir o paralelogramo obliquângulo na horizontal.

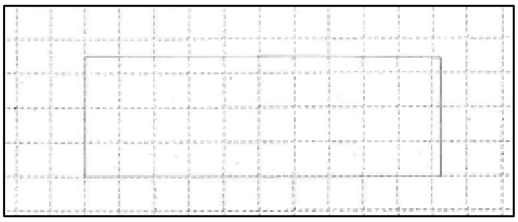


Fig. 6.39 – Construção do paralelogramo

Relativamente à construção da figura anterior não tenho evidências suficientes para afirmar que o aluno a efetuou por compreender que o retângulo é um caso particular dos paralelogramos. Quanto à preferência dos alunos pela posição horizontal penso que seja pelo facto dos alunos encontrarem com mais frequência o paralelogramo nesta posição.

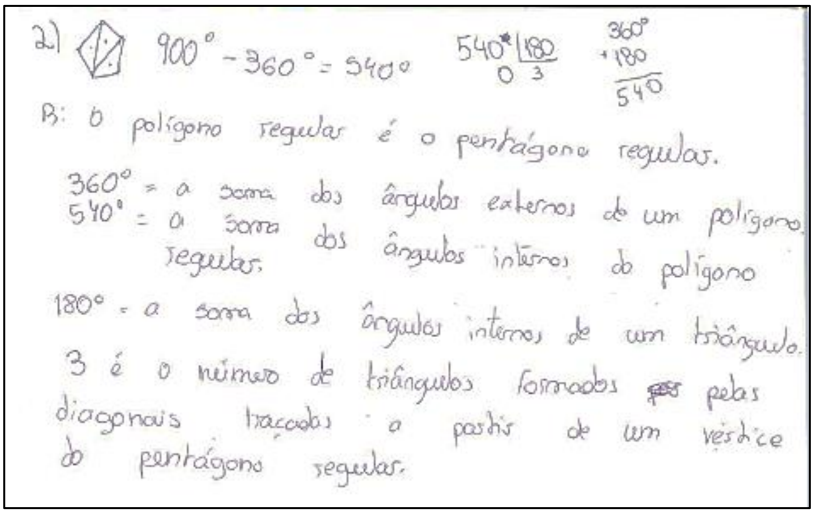
Em síntese, alguns alunos recorreram a estratégias de *tentativa e erro* (NCTM, 2008) e outros optaram por *recorrer a equações para estabelecer as relações* descritas no enunciado para chegar aos valores necessários para efetuar a construção pedida. Tendo em conta as produções escritas dos alunos e a observação por mim realizada durante o trabalho autónomo, as dificuldades em *reconhecer as propriedades do quadrilátero* em questão não foram tão evidentes como nos problemas anteriores, ainda que, existam alguns alunos que não tenham em mente o que é um paralelogramo, como foi o exemplo da Margarida. Surgiram dificuldades relacionadas com a *interpretação do problema* nomeadamente na expressão "um lado tem um terço do comprimento do outro" e com o cálculo do perímetro do quadrilátero. A *verificação da estratégia* utilizada também foi uma das falhas detetadas, por exemplo no caso dos alunos Manuel e David, os alunos nunca recuaram para detetar eventuais erros optando sempre por seguir outras estratégias.

Problema proposto nas entrevistas

Problema 2

Este problema tinha como objetivo que os alunos descobrissem qual o polígono regular que somadas as medidas de amplitude dos ângulos internos e externos se obtinha o valor de 900º (Anexo XIII).

Ao ler o enunciado pela primeira vez, a Elisa não fez uma boa interpretação do problema, uma vez que começou por referir que tinham de encontrar um polígono regular em que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos fosse 900º. Ao serem questionados sobre se seria mesmo esse o objetivo do problema os alunos leram novamente o enunciado e perceberam o erro cometido. O David começou por referir que poderiam fazer por tentativa e erro, à semelhança do problema 1 da entrevista. A Elisa não descartou essa hipótese e começou por relembrar o colega que para saberem a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos dos vários polígonos poderiam dividi-los em triângulos a partir de um vértice, assim, poderiam multiplicar o número de triângulos por 180º, à semelhança do que tinham realizado numa tarefa dada pela professora de matemática, relativa aos ângulos internos dos polígonos. Para relembrar este conceito, a Elisa desenhou um pentágono (Figura 6.40), como exemplo, para a auxiliar na sua explicação. O David rapidamente acompanhou o raciocínio da colega recordando a aula a que a aluna se referia. Deste modo, os alunos começaram por retirar logo 360º a 900º, sendo o 360º o valor da soma das medidas de amplitude dos ângulos externos de qualquer polígono, conceito que os dois alunos pareciam ter bem presente, em seguida dividiram o valor encontrado por 180º que daria o número de triângulos em que o polígono daria para dividir. Ao encontrar este último valor os alunos repararam que era o caso da figura que tinham desenhado e não tiveram dificuldade em responder que era um pentágono. Ao serem recordados que o enunciado pedia um polígono regular, os alunos apresentaram a sua resposta prontamente como se pode ver na figura 6.40.


2) 900° − 360° = 540°   540° | 180 → 0, 3   360° + 180 = 540

R: o polígono regular é o pentágono regular.

360° = a soma dos ângulos externos de um polígono
540° = a soma dos ângulos internos do polígono
regular.

180° = a soma dos ângulos internos de um triângulo.

3 é o número de triângulos formados ~~por~~ pelas diagonais traçadas a partir de um vértice do pentágono regular.

Fig.6.40 – Resolução da Elisa e do David do problema 2 da entrevista

Após redigirem a sua resposta, questionei os alunos se a sua resolução estaria completa com todos os seus raciocínios explícitos, os alunos aperceberam-se que não e mesmo depois de terem escrito a resposta justificaram todos os valores utilizados nos seus cálculos.

A Margarida e o Carlos também começaram por não ler bem o enunciado. Mas tal como o par anterior ao serem questionados sobre o que era para fazer, estes depressa se aperceberam do seu erro. Compreendido o enunciado o Carlos começou por tentar somar várias vezes o valor 360 até obter o valor 900. Fazendo cálculos mentalmente, a Margarida percebeu que não iriam conseguir chegar ao valor pretendido, mas não questionou a estratégia seguida pelo colega. Ao observar a sua resolução questionei os alunos sobre o que entendiam por ângulo externo, uma vez que a sua resolução até ao momento fez-me pensar que os alunos estariam a pensar que a soma das medidas de amplitude do ângulo interno com o externo com o mesmo vértice seria 360º. A minha questão provocou silêncio nos alunos. Então resolvi fazer um esboço de um quadrilátero e pedir aos alunos para identificarem um ângulo externo, para testar a minha teoria. O resultado obtido foi o da figura seguinte.

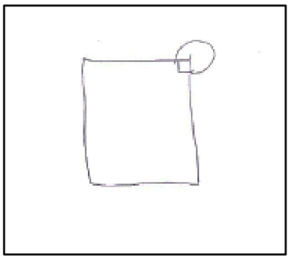


Fig. 6.41 – Identificação errada de um ângulo externo

Foi necessário fazer uma pausa para explicar aos alunos o que era um ângulo externo. Para uma melhor compreensão por parte dos alunos, desenhei de novo o quadrilátero e identifiquei os seus ângulos externos. Deste modo, os alunos perceberam que a estratégia seguida até ao momento já não fazia sentido. O Carlos optou então por fazer um esboço de um polígono regular, curiosamente à semelhança do par anterior também desenhou um pentágono. Tentou dividi-lo num quadrilátero, uma vez que sabia que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um quadrilátero era 360º. Apesar do seu objetivo, a divisão não foi bem concretizada e causou entraves na continuação do seu raciocínio. O aluno não conseguiu identificar que o polígono ficava dividido num quadrilátero e num triângulo, nem conseguiu perceber como calcularia as medidas de amplitude dos ângulos externos. Já a Elisa pareceu confusa com o raciocínio seguido pelo Carlos e não lhe deu credibilidade para avançar. Após algum tempo sem qualquer avanço, e ao aperceber-me que nenhum dos alunos sabia qual a soma dos ângulos externos de um polígono, sugeri que fizessem outro esboço e começassem por identificar os ângulos internos e externos. Após seguirem a minha sugestão, os alunos rapidamente perceberam que poderiam somar sucessivamente o valor de 180º até obter 900º chegando ao valor 5 (que representaria o número de ângulos de 180º). Uma vez que a sua resposta coincidia com a figura desenhada os alunos não tiveram dificuldade em compreender que se tratava de um pentágono e avançar rapidamente para a resposta. Também este par foi chamado à atenção para o facto de o enunciado pedir um polígono regular, e para justificarem todos os seus raciocínios. Assim os alunos tiveram em conta a primeira chamada de atenção completando a sua resposta e para completar a sua resolução acrescentaram apenas o cálculo $180 \times 5 = 900$.

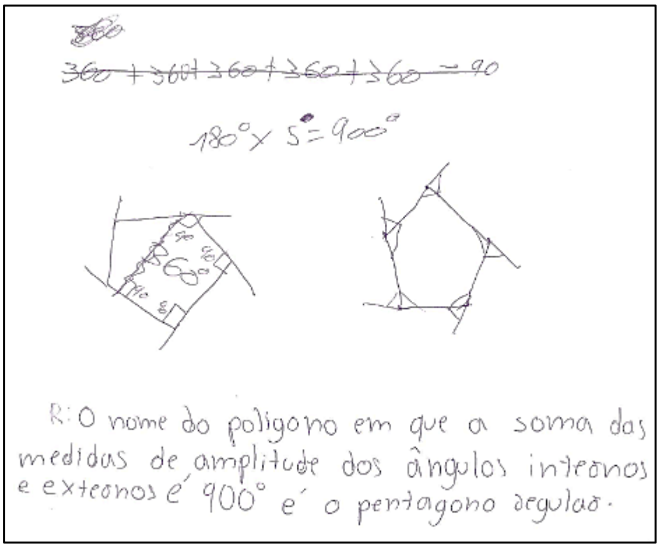


Fig. 6.42 – Resolução do Carlos e da Margarida do problema 2 da entrevista

Em síntese, os alunos conseguiram resolver o problema ainda que no caso do segundo par tenha sido necessária orientação. Apesar de inicialmente terem pensado em utilizar a estratégia de tentativa e erro a Elisa e o David optaram por *recorrer às propriedades dos polígonos* estudadas para chegar à resposta correta, utilizaram apenas o desenho para poderem recordar propriedades estudadas anteriormente, já o Carlos e a Margarida optaram por seguir uma *estratégia de experimentação de um caso particular* (Borralho, 1995) completando-a com a *utilização de esquemas* e a *tentativa e erro* (NCTM, 2008). Os alunos cometeram erros na interpretação do enunciado e no caso da Margarida e do Carlos as dificuldade em compreender os conceitos envolvidos nomeadamente, o de ângulo externo, e em recordar as propriedades dos polígonos e dos seus ângulos foram evidentes. No que diz respeito à justificação do raciocínio dos pares, a Elisa e o David não tiveram qualquer dificuldade ainda que tivessem de ser chamados à atenção para apresentar uma resolução o mais completa possível, já a Margarida e o Carlos julgaram o desenho e a apresentação do cálculo efetuado suficiente para tornar percetível o raciocínio seguido. É de notar que ambos os pares tiveram o cuidado de dar a resposta ao problema sem ser necessária a intervenção da professora.

Capítulo VII

Reflexão Final

Este capítulo final comporta duas partes, a apresentação das principais conclusões do estudo e uma reflexão pessoal. Na primeira parte procuro dar resposta às questões inicialmente formuladas tendo em conta os dados analisados e a revisão da literatura realizada. Por fim, termino com a reflexão pessoal sobre as aprendizagens realizadas enquanto futura professora e investigadora.

Principais conclusões

Neste estudo procurei compreender como os alunos de uma turma de 7.º ano resolvem problemas envolvendo polígonos. Sendo assim, organizo a conclusão de acordo com os dois grandes grupos de questões a que me propus responder.

Quais as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas? Existe uma relação entre as estratégias utilizadas e os problemas propostos?

Os resultados obtidos evidenciam que os alunos recorreram a estratégias variadas. Uma das estratégias mais observada nos problemas analisados das três primeiras fichas apresentadas (ficha n.º 1, 2 e 6) foi a *simplificação do problema* (NCTM, 2008; Borralho, 1995). Nestes problemas uma vez que era pedido aos alunos para encontrarem mais do que um valor, estes concentravam-se na informação que tinham ao seu dispor e da que necessitavam encontrar e rapidamente separavam a sua resolução em várias fases. Deste modo, organizando a sua resolução em vários passos sucessivos e, aplicando uma cadeia lógica das propriedades dos ângulos e dos polígonos, chegaram à resposta pretendida. Ainda assim, dentro da mesma estratégia, pudemos observar diferentes caminhos utilizados pelos alunos, recorrendo a cálculos sucessivos ou a equações e até a relações entre ângulos diferentes, o que veio a tornar as discussões mais ricas.

Como complemento desta estratégia, esteve sempre presente a *utilização da figura dada* (NCTM, 2008; Borralho, 1995) que, embora por vezes tenha servido para os alunos como o único enunciado do problema ignorando as outras informações dadas, foi evidente que foi sempre um grande suporte para compreender melhor as informações dadas por escrito, assim como, para identificarem relações entre os ângulos.

Nos últimos problemas, já relacionados com as propriedades dos quadriláteros estudados, não era apresentada nenhuma imagem no enunciado. Deste modo, foi possível observar resoluções que tiveram como estratégia exclusiva a *construção de um novo esquema* (NCTM, 2008; Borralho, 1995), nomeadamente um quadrilátero como pudemos observar nas resoluções do Renato e do Rui. Também surgiu novamente a *simplificação do problema* (NCTM, 2008; Borralho, 1995) complementada pelo raciocínio direto baseado nas caraterísticas dos polígonos envolvidos. Nestes últimos problemas analisados surgiram também estratégias como o raciocínio por *redução ao absurdo* para provar a falsidade de uma afirmação, a *tentativa e erro* (NCTM, 2008) para descobrir as medidas de comprimento dos lados de um polígono dado o seu perímetro ou a *experiência de um caso particular* (NCTM, 2008) para encontrar o número de lados de um polígono com caraterísticas bem definidas. Esta última estratégia foi possível observar na entrevista com o par Margarida e Carlos. Começou inicialmente por ser apenas uma maneira de perceber melhor os conceitos envolvidos, acabando por conduzir os alunos à resposta.

Nos problemas analisados da ficha 7 e até na entrevista pudemos observar que, a par das estratégias acima indicadas, muitos alunos recorreram também à *realização de um desenho* (NCTM, 2008; Borralho, 1995). Esta estratégia surgiu muitas vezes logo no início das resoluções, como o caso das resoluções do Frederico e da Margarida do problema 1 da ficha n.º 7, mas foi mais expressiva no problema 2 da ficha n.º 7. Visto que no enunciado era dado o nome dos vértices do quadrilátero em causa, penso que os alunos sentiram a necessidade de recorrer a esta estratégia como auxílio da compreensão do enunciado. Mesmo no problema em que a própria resolução implicava a construção de um quadrilátero (problema 3 da ficha n.º 7) alguns alunos sentiram a necessidade de fazerem esboços de paralelogramos para os auxiliar na justificação do seu raciocínio, como foi o exemplo da Iris, ou para retirarem os dados do enunciado para uma melhor compreensão, como no caso do Manuel. Menos frequente foi a realização do desenho quando já era dada uma figura, como foi o caso do David, que desenhou o quadrilátero que fazia parte da figura dada para o auxiliar numa das fases da sua resolução (problema 2 da ficha n.º 6).

Deste modo, é possível afirmar que para resolverem um problema os alunos recorrem a mais do que uma estratégia no mesmo problema. Em conjunto estas estratégias permitiram que os alunos percorressem todo o caminho para a resolução dos problemas desde a compreensão do problema à resposta pretendida.

Parece-me também possível afirmar que existem relações, mais ou menos evidentes, entre os problemas propostos e as estratégias utilizadas. Nos problemas onde foram pedidas diretamente vários valores de algumas medidas de amplitude de ângulos de figuras dadas que envolviam relações entre ângulos, os alunos recorreram sempre à simplificação do problema, ainda que nem sempre pelo mesmo caminho, uma vez que, uns preferiram o cálculo numérico e outros recorreram a equações e também utilizaram propriedades diferentes no mesmo problema. Já nos problemas que envolviam apenas propriedades dos polígonos surgiram novas estratégias como o raciocínio por redução ao absurdo, a experimentação de um caso particular, a tentativa e erro e o uso exclusivo do desenho, sendo as duas últimas as mais recorrentes. Esta relação encontrada pode estar também interligada com a experiência dos alunos. Ao estarem cada vez mais em contato com a resolução de problemas em Geometria e ao serem valorizados diferentes caminhos para a resolução do mesmo problema, os alunos podem ter adotado e valorizado estratégias diferentes, algumas já usadas noutros domínios da matemática, que os levariam igualmente a uma resolução correta. Também foi possível observar que nos problemas propostos onde não foram dadas figuras os alunos sentiram necessidade de as construir durante a sua resolução.

Que tipos de dificuldades evidenciam os alunos na resolução de problemas e como procuram ultrapassá-las?

Foi possível observar que uma das dificuldades dos alunos esteve relacionada com a *compreensão do problema*, à semelhança do que já tinha sido observado em estudos anteriores, tanto no domínio da Geometria (Esteves, 2010) como em outros domínios (Santos, 2012). Surgiram situações onde os alunos não conseguiram identificar o que era pedido, e por isso apesar de já saberem a resposta final desde o início, desenvolveram a sua resolução em torno de outro objetivo que não era mencionado, como na segunda alínea do primeiro problema proposto, e outras, onde foi o vocabulário envolvido causou um entrave à sua resolução. Expressões como "quadrados sobreposto" e "um lado tem um terço do comprimento do outro" suscitaram dúvidas, embora no primeiro caso estas tenham ficado esclarecidas ainda durante a leitura do enunciado em turma não causando um entrave à resolução do problema, como foi o caso da segunda expressão. Já em outras expressões, como triângulos retângulos num vértice e a perpendicularidade entre segmentos, nem sempre ficou claro se os alunos as compreenderam na totalidade ou se deixaram que a imagem falasse por si. Foram também inúmeras as vezes em que os alunos viram a imagem fornecida como o enunciado do problema, ignorando o enunciado escrito. E muitas outras onde os alunos se deixaram levar pelo aspeto da figura, o que umas vezes correspondeu à verdade, mas muitas outras não. O Carlos e o Patrício foram os dois alunos que mais vezes evidenciaram esta dificuldade. Esta dificuldade poder-me-ia levar a pensar que vêm de alunos com mais dificuldades na disciplina ou mais distraídos, contudo, embora o Carlos seja um aluno distraído e com um nível de aproveitamento negativo a Matemática, o Patrício é um aluno bastante empenhado e com um bom nível de aproveitamento na disciplina. Existiram ainda situações em que os alunos não fizeram uma leitura correta do problema e não identificaram corretamente o que era pedido, como o caso do Carlos na segunda ficha de trabalho, ou como mencionado na entrevista onde os alunos fizeram uma leitura rápida e incorreta do enunciado tal como mencionado por Brito (2008).

Após a compreensão do problema segue-se uma das fases mais difíceis da resolução de problemas segundo Polya (1995) o *estabelecimento de um plano*. Nesta fase, as gravações áudio efetuadas durante o estudo foram de extrema importância para perceber se os alunos concretizavam esta fase ou não. Foi possível observar que o David e a Elisa no problema 2 da primeira ficha de trabalho não estabeleceram um plano de resolução e foram calculando as medidas de amplitude dos ângulos conforme os dados que iam tendo disponíveis, e ainda que isto não tenha comprometido a resolução correta deste problema, na ficha seguinte o não estabelecimento de um plano fez com que os alunos não conseguissem resolver o problema dado. Já os alunos Patrício e Rui ao não estabelecerem um plano de resolução acabaram por realizar cálculos que não eram necessários e o Carlos por vezes optou por calcular as medidas de amplitude de todos os ângulos presentes na figura sem sequer se aperceber do que era pedido.

Já na fase da execução do plano, embora como já vimos este nem sempre tenha sido elaborado, a principal dificuldade foi a *comunicação matemática*. Quanto à comunicação escrita esta foi bastante evidente ao longo da análise das resoluções dos alunos. Estes desde início apresentaram dificuldades em justificar o seu raciocínio e revelaram falta de hábitos em fundamentar as suas opções, assim como, demostraram uma má utilização dos símbolos matemáticos. Contudo, foi também evidente a evolução, quer na quantidade, quer na qualidade da escrita, por parte dos alunos ao longo do estudo. Após a resolução coletiva da primeira ficha foi notório a evolução da maioria dos alunos, esta discussão pareceu ser um fio condutor para os alunos conseguirem justificar raciocínios semelhantes em fichas realizadas posteriormente e corrigiram os símbolos matemáticos utilizados. Ainda assim, na primeira vez em que surgia um conceito novo, alguns alunos voltaram a sentir dificuldades em construir uma cadeia lógica de argumentos que justificasse o seu raciocínio. É notório que nos alunos que desvalorizaram a justificação do seu raciocínio, como o caso do Carlos, mostraram dificuldades até ao fim do estudo, revelando a importância do trabalho contínuo para a evolução da comunicação escrita. Ao questionar os alunos sobre os seus cálculos ou conclusões estabelecidas estes por vezes respondiam corretamente, contudo, não conseguiram fazer um registo correto desses raciocínios no papel indo ao acordo do indicado por Brito (2008). Estes dados apontam para a importância de colocar os alunos perante novos problemas envolvendo novos conceitos fazendo com que adquiram cada vez mais experiencia na sua resolução. Os *conhecimentos matemáticos* adquiridos, ou não, até ao momento foram também por vezes causadores de dificuldades. A Margarida e o Carlos, por exemplo, revelaram dificuldade em identificar ângulos externos logo na primeira ficha de trabalho, e ainda que tenha sido feita a sua discussão, os alunos na entrevista revelaram novamente não ter este conceito consolidado. Já no par Elisa e David pudemos observar a dificuldade dos alunos na segunda ficha de trabalho, embora os alunos soubessem que teriam de utilizar a informação projectada no quadro, que aparentemente estavam a compreender, mas não conseguiram mobilizá-la para a resolução do problema proposto, tal como já referido pela NCTM (2008). Infelizmente os alunos revelaram mais tarde, na penúltima ficha de trabalho, que os conhecimentos sobre as condições em que ângulos alternos internos são geometricamente iguais não estavam consolidadas.

A fase de verificação de resultados não foi muito visível neste estudo, em muito devido ao modo como as aulas foram conduzidas. O David e o Manuel, por exemplo, aperceberam-se que o seu resultado final estava errado, mas ao contrário de verificarem toda a resolução em busca de algum erro ou/e refletirem se estariam a seguir uma estratégia adequada acabaram por mudar de estratégia.

As dificuldades sentidas na resolução de problemas ainda foram bastantes mas foi possível observar a superação de muitas delas por parte dos alunos. Como já seria de esperar existiram alunos com mais dificuldades do que outros e também mais dependentes do auxílio das professoras presentes em sala de aula. Contudo, até nesta dependência foi possível observar uma grande diminuição, por exemplo a Margarida e Carlos que no início solicitavam várias vezes as professoras com o tempo foram recorrendo cada vez mais aos materiais que tinham disponíveis, tornando-se mais autónomos. O trabalho contínuo realizado foi uma mais-valia para a evolução dos alunos na resolução de problemas, que com o tempo foram desenvolvendo a sua capacidade de comunicação, fazendo cada vez mais uma utilização correta dos símbolos matemáticos e desenvolvendo novas estratégias de resolução de problemas e, ainda que houvesse ainda um longo caminho a percorrer, o balanço foi bastante positivo.

Reflexão pessoal

Após a realização deste trabalho é importante refletir mais uma vez sobre as aprendizagens realizadas e tudo o que esta experiência significou para a minha vida pessoal e profissional.

Pela primeira vez tive a oportunidade de estar em contacto com uma turma durante um ano letivo inteiro e conduzir como professora principal algumas das suas aulas. Desde logo fui recebida com simpatia, tantos pelos alunos, como pela professora cooperante. Os alunos rapidamente perceberam que mais uma professora nas aulas de Matemática poderia ser uma mais-valia e não perderam tempo em colocar-me dúvidas e em procurar apoio. Nas aulas por mim lecionadas, os alunos mostraram-se disponíveis e agiram naturalmente. Este contacto desde o início do ano letivo foi de extrema importância, tanto para compreender melhor os alunos que tinha pela frente, como, para me sentir mais integrada no contexto escolar enquanto professora e mais confiante.

Antes de iniciar a minha prática letiva foi necessário realizar uma planificação para a unidade didática e posteriormente construir os planos para todas as aulas que iria lecionar. Estes planos foram essenciais nesta experiência. Foram o meu fio condutor. Contudo, estiveram em constante alteração durante toda a prática letiva. Umas vezes porque a aula anterior não tinha sido concretizada na totalidade, porque as necessidades dos alunos estão em contante alteração, ou até porque surgiam novas ideias sobre dificuldades ou estratégias de resolução que poderiam emergir. Não posso deixar de referir a importância de tudo o que aprendi durante o Mestrado e a revisão da literatura sobre resolução de problemas, para a construção dos planos apresentados, assim como, a correção das fichas de trabalho, aula após aula, que me permitiram acompanhar no momento, as dificuldades e erros dos alunos e assim adaptar as aulas seguintes. A constante reflexão em torno destes planos com as minhas orientadoras e colega de estágio, assim como as reuniões após as aulas, também foram uma grande contribuição para o seu constante aperfeiçoamento.

Contudo, tal como era de esperar surgiram imprevistos, acontecimentos para os quais nenhum plano nos prepara. Ao longo das aulas debati-me com uma das minhas grandes dificuldades, a gestão do ritmo das aulas. A heterogeneidade de ritmos de trabalho e de conhecimentos dos alunos na disciplina tornou-se bastante evidente desde o início, e nem sempre consegui perceber se os alunos não resolviam as tarefas propostas por falta de tempo ou por não as compreenderem. Isto provocou-me algum conflito interior. Eu não queria limitar os alunos com mais dificuldades, não queria que "corressem" atrás do resto da turma, não queria restringir o seu tempo mas também não queria abandonar uma grande parte da turma que já estava pronta a avançar, a aprender mais, e não podia permitir que a sua espera destabilizasse toda a turma. Com o decorrer das aulas e com as valiosas sugestões e críticas das professoras compreendi que por vezes dar mais tempo aos alunos não iria adiantar. Na verdade eles precisam de mais apoio para prosseguirem na resolução do problema, a discussão em conjunto iria-lhes ser mais útil, e os que já tinham terminado acabavam por se distrair e distrair o resto da turma. Foi preciso encontrar um meio-termo, dar tempo para todos pensarem sobre o problema, apoiar nas dificuldades que surgiam, mas não estender demasiado o tempo de trabalho autónomo, para que a falta de ritmo da aula não desmotivasse a turma. As discussões foram outro dos desafios, planeei criteriosamente as questões que poderia fazer para ajudar os alunos a chegar à resposta sem lhes dar a resposta, mas nada me preparou para num curto espaço de tempo decidir quem respondia, o que era útil dar seguimento ou não, quando parar uma discussão entre os alunos, como envolver a turma toda, chamar a atenção dos alunos que estavam distraídos sem "parar" constantemente a aula, ser imparcial quando os alunos respondiam…foram muitas decisões para tomar, e ainda que, considere que fiz uma grande evolução e tomei decisões corretas, no final houve sempre a sensação que em algumas situações poderia ter agido de oura forma.

O trabalho a pares foi outra das decisões que me pareceu correta desde o início mas tornou-se complicada de gerir. Os alunos não estavam habituados, em algumas aulas havia alunos que estavam sozinhos devido ao plano da sala de aula definido pela diretora de turma, e a proximidade dos pares fez com que muitas das vezes os alunos tivessem tendência em não trabalhar com o seu par mas com outros alunos que se encontravam perto. Ainda assim, este método foi muito importante para a investigação, pois só com o trabalho em grupo foi possível ouvir as suas discussões, e ainda que os alunos não tenham seguido à risca os pares definidos, acabaram por colaborar e aprender uns com os outros.

Enquanto investigadora também me debati com algumas dificuldades. Se ao longo da prática letiva pensei que não tinha os dados suficientes para fazer esta investigação, quando chegou o momento de os analisar e interpretar depressa mudei de opinião. Os dados eram muitos e não sabia bem por onde começar. As orientações metodológicas de investigação tiveram aqui um papel fundamental para conseguir iniciar este processo, assim como, o apoio da minha orientadora para o poder desenvolver. Na verdade, a análise de dados revelou-se um processo demorado e difícil de finalizar, mas ao mesmo tempo muito gratificante. Ouvir novamente as aulas, olhar com atenção todas as resoluções, perceber a evolução dos alunos, observar as suas estratégias e dificuldades foram uma experiência bastante enriquecedora, não só enquanto investigadora, como também enquanto professora que com mais alguma distância me fez refletir novamente sobre as minhas ações e as dos alunos na sala de aula. Por exemplo, apenas com esta análise mais profunda pude perceber que ao longo das aulas não dei a devida atenção à verificação dos problemas e tendo em conta a análise das resoluções dos alunos isso acabou decerto por influenciar a atitude dos alunos nesta fase de resolução de problemas.

Por fim, resta-me fazer um balanço global desta experiência que considero ser positivo. As aprendizagens foram muitas e permitiram-me arrecadar novos conhecimentos para a minha prática letiva e até para futuras investigações. Não teria sido capaz de abarcar este desafio, nem de chegar ao fim sozinha, mas hoje sinto-me mais preparada para o que poderá surgir no futuro. Existiram dias cheios de trabalho para ter tudo pronto a tempo e dar sempre o meu melhor, mas também muitos momentos onde me senti verdadeiramente realizada, quase esquecida até do que se passava para lá da sala de aula, o que me fez ficar ainda mais certa que só poderia ter escolhido uma profissão - ser professora.

Referências

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática, 8,* 7-10 e 35.

Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153-167). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9,* 33–52.

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à* teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics,* 17*(2)*, 125-141.

Borralho, A. (1995). Resolução de Problemas: Uma Perspectiva para Abordar o Ensino/Aprendizagem da Matemática. In A. Borralho & M. Borrões (Eds.), *O Ensino/Aprendizagem da Matemática: Algumas Perspectivas Metodológicas* (pp. 9-65). Évora: Universidade de Évora.

Brenda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no ensino básico. Lisboa*: Ministério da Educação/DGIDC.

Brito, L. (2008). Ler e resolver Problemas. *Educação e Matemática*, *99*, 40 – 44

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, pp. 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 217-233). Lisboa: IE. (http://www.ie.ulisboa.pt/portal/page?_pageid=406,1852906&_dad=portal&_schema=PORTAL)

Conceição, A., & Almeida, M. (2014a). *Matematicamente falando 7*. Porto: Areal editores.

Conceição, A., & Almeida, M. (2014b). *Matematicamente falando 7: Caderno de atividades*. Porto: Areal editores.

Esteves, A. S. A. (2010). *Resolução de problemas no tema Lugares Geométricos: O papel dos recursos na actividade matemática dos alunos* (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada, Universidade de Lisboa). Lisboa.

Faria, L., Guerreiro, L. & Almeida, P., R. (2014). *Matemática Dinâmica 7*. Porto: Porto Editora.

Fernandes, D. (1989). Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de matemática. *Educação e Matemática*,8, 3-6.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Guimarães, H. M. (2005). A resolução de problemas no ensino da Matemática — Alguns passos do seu percurso no discurso curricular em Portugal. In L. Santos, A. P. Canavarro e J. Brocardo (Org.), *Educação e Matemática: caminhos e encruzilhadas — Actas do encontro de homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 145-166). Lisboa: APM.

IAVE (2015). Provas Finais - 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico, Relatório Nacional: 2010-2014. Retirado de http://iave.pt/np4/file/182/Relat_EB_2015_LV.pdf em 6- 06-2015.

Kantowski, M. G. (1981). Problem solving. In Fennema (Ed.), *Mathematics Education Research – implications for the 80's*, (pp.111-126). Reston, Va.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2005). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Moreira, L. (2008). Resolvo problemas, logo penso. *Educação e Matemática, 100*, 11-17.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM, IIE.

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Neves, M. A. F., & Silva, A. P. (2014). *Matemática 7*. Porto: Porto Editora.

Pólya, G. (1995). *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (1992). Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de Educação*, *2*, 95-108.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Oliveira, P., & Candeias, N. (2009). *Triângulos e quadriláteros. Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7º ano*. Lisboa: ME-DGIDC.

Ribeiro, D. (2005). *A resolução de problemas e o desenvolvimento da comunicação matemática: um estudo no 4.º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa.

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 81-88). Ankara, Turkey: PME.

Santos, V. I. O. (2012). *Resolução de problemas envolvendo Sistemas de Equações de 1.º grau a duas incógnitas – um estudo com alunos do 8.º ano* (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada, Universidade de Lisboa). Lisboa.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp.189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?. In P. Abrantes, L. Leal & J. Ponte (Eds.). *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Sequeira, A. F., Andrade, A. P., Almeida, C. & Beja, E. (2014). *Olá Matemática – matemática 5.º ano*. Porto: Porto Editora.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Yin, R., K. (2010). *Estudo de caso: Planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman.

Anexos

Anexo I- Plano de Aula do dia 23 de fevereiro

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190

Plano de Aula

Data/ Hora: 23 de Fevereiro às 9h00 **Sala:** 11 **Turma:** 7.º 1.º

Sumário Lição n.º 89
Resolução de problemas com ângulos.

Tópicos/subtópicos
Ângulos e relações entre ângulos.

Objetivos específicos
- Distinguir ângulos complementares e suplementares. - Identificar ângulos adjacentes. - Compreender o valor da soma das medidas de amplitude dos ângulos internos e externos de um triângulo. - Desenvolver a capacidade de resolver problemas.

Capacidades transversais
Resolução de problemas. Raciocínio matemático. Comunicação matemática.

Conhecimentos prévios
-Reconhecer que a soma das medidas de amplitude de ângulos suplementares é 180° e de ângulos complementares é de 90°. -Saber que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Recursos	
Do professor	**Dos alunos**
- Planificação da aula; - Quadro branco e marcador; - Régua e esquadro.	- Ficha de trabalho n.º 1; - Lápis e borracha;

Metodologia de trabalho
- Trabalho a pares. - Discussão coletiva das resoluções obtidas.

Momentos da aula	
1º Momento: Sumário, distribuição e apresentação da ficha de trabalho	5 minutos
2º Momento: Realização do primeiro problema da ficha de trabalho	
I. Trabalho autónomo dos alunos.	10 minutos
II. Discussão coletiva e revisão de conceitos.	10 minutos
3º Momento: Realização do segundo problema da ficha de trabalho	
I. Trabalho autónomo dos alunos.	10 minutos
II. Discussão coletiva e sistematização de conceitos.	10 minutos

Desenvolvimento da aula

1º Momento: Sumário, distribuição e apresentação da ficha de trabalho (5 minutos)
A aula iniciará com o sumário escrito no quadro. Enquanto os alunos transcrevem o sumário a professora irá distribuir a ficha de trabalho pela turma. Em seguida a professora selecionará um dos alunos para ler o enunciado do primeiro problema, com o objetivo de familiarizar os alunos com o problema e garantir se há alguma dúvida. A professora informará que realizarão a tarefa a pares e que, posteriormente terá lugar uma discussão coletiva. Além disso, a professora deve alertar os alunos para não apagarem nenhum dos seus processos de resolução, e caso o queiram abandonar devem indicá-lo e continuar a sua resolução, e que no final da aula a tarefa será recolhida. Por último, ficará definido 10 minutos de trabalho autónomo para a realização do primeiro problema.

2º Momento: Realização do primeiro problema da ficha de trabalho	
O primeiro problema tem como objetivo a revisão de alguns conceitos aprendidos no 2.º ciclo e compreender como os alunos se envolvem na resolução de problemas envolvendo ângulos, assim como, a capacidade de comunicação escrita.	
Trabalho autónomo dos alunos (10 minutos)	
Atividade do aluno	**Atividade da professora**
Alínea a: Em primeiro lugar os alunos devem compreender que é necessário calcular as medidas de amplitude dos ângulos NMP, MPN e MNP. Tendo em conta os dados do enunciado, os alunos devem calcular a medida de amplitude do ângulo NMP tendo em conta que os ângulos NMP e RMP são suplementares assim, $\boldsymbol{N\hat{M}P} = \mathbf{180°} - \boldsymbol{R\hat{M}P} = \mathbf{180°} - \mathbf{77°} = \mathbf{103°}$. Como MPN e NPQ são ângulos suplementares então $\boldsymbol{M\hat{P}N} = \mathbf{180°} - \boldsymbol{N\hat{P}Q} = \mathbf{180°} - \mathbf{145°} = \mathbf{35°}$ Por fim, tendo em conta que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo é igual a $\mathbf{180°}$ considerando o triângulo $[\boldsymbol{MNP}]$ temos $\boldsymbol{M\hat{N}P} = \mathbf{180°} - \boldsymbol{N\hat{M}P} - \boldsymbol{M\hat{P}N} = \mathbf{180°} - \mathbf{103°} - \mathbf{35°} = \mathbf{42°}$. Os alunos devem ainda apresentar a resposta ao problema sendo esta: $\boldsymbol{N\hat{M}P} = \mathbf{103°}$, $\boldsymbol{M\hat{P}N} = \mathbf{35°}$ e $\boldsymbol{M\hat{N}P} = \mathbf{42°}$	A professora irá circular pela sala observando as resoluções dos alunos e apoiando-os nas suas dificuldades. Assim com, incentivar os alunos para que justifiquem todos os cálculos. A professora deve ainda realizar um esboço da figura dada no quadro de modo a apoiar o momento da discussão que se seguirá e reservar o lado direito do quadro para registar as conclusões.

<table>
<tr>
<td>

Erros e Dificuldades:
- Os alunos podem fazer uma interpretação errada do enunciado e responder apenas que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.
- Não identificar os ângulos suplementares.
- Não saber calcular a medida de amplitude do ângulo MNP.

</td>
<td>

Apoio da Professora:
- O que é pedido no enunciado? É necessário calcular as medidas de amplitude de quantos ângulos?
- Qual a medida de amplitude do ângulo RMN? Qual a sua relação com o ângulo NMQ?
- Sabendo a medidas de amplitude de dois ângulos de um triângulo é possível calcular a medida de amplitude do terceiro?

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Alínea b:
Tendo em conta a figura dada os alunos devem identificar os ângulos RMP, NPQ e MNS como os ângulos externos do triângulo. Assim, apenas falta calcular a medida de amplitude do ângulo MNS. Tendo em conta que MNS e MNP são ângulos suplementares então a soma das suas medidas de amplitude é de $\mathbf{180°}$ logo $\boldsymbol{M\hat{N}S = 180° - M\hat{N}P = 180° - 42° = 138°}$.
Deste modo temos $\boldsymbol{R\hat{M}P + N\hat{P}Q + M\hat{N}S = 77° + 145° + 138° = 360°}$
Assim, os alunos podem responder que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo [MNP] é 360°.

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

Erros e dificuldades:
- Os alunos poderão não identificar corretamente os ângulos externos do triângulo (podem por exemplo considerar que a medida de amplitude do ângulo externo do triângulo é $\mathbf{360°}$ subtraindo-lhe a medida de amplitude do ângulo interno com o mesmo vértice).

</td>
<td>

Apoio da Professora:
- Quais são os ângulos externos do triângulo?

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Discussão coletiva (10 minutos)

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Alínea a:
A professora deverá solicitar um aluno que se voluntarie para resolver a primeira alínea no quadro. Deve questionar a turma sobre o que era pedido no enunciado e quais são os ângulos internos do triângulo em questão. Além disso, a professora deve envolver os alunos na discussão e geri-la, deste modo, deve questionar a turma se concorda com a resolução do seu colega e ir pedindo que a turma explique o que foi apresentado pelo colega.

Por fim a professora deve sistematizar os conceitos envolvidos escrevendo-os no lado direito do quadro (que não será apagado até ao final da aula).

Ângulos suplementares: dois ângulos chamam-se suplementares quando a soma das suas medidas de amplitude é igual a $\mathbf{180°}$.

A soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é $\mathbf{180°}$.

</td>
</tr>
</table>

Alínea b:

A professora deverá solicitar um aluno que se voluntarie para resolver a segunda alínea no quadro. Deve questionar a turma sobre o que era pedido no enunciado e quais são os ângulos externos do triângulo em questão. Além disso, a professora deve envolver os alunos na discussão e geri-la utilizando a mesma estratégia da alínea *a*.
A professora deverá questionar os alunos se é possível generalizar para todos os triângulos a resposta dada para este triângulo. Fazendo-os compreender que não basta um exemplo para poder generalizar mas que esta conclusão é verdadeira para todos os triângulos.
Por fim, a professora deve sistematizar o conceito envolvido e escrevê-lo no lado direito do quadro (que não será apagado até ao final da aula).

A soma das medidas de amplitude dos ângulos externos de um triângulo é igual a $360°$.

Durante toda a discussão a professora deverá pedir a justificação de todos os cálculos, incentivar a utilização de uma notação correta e a resposta a todas as questões.

3º Momento: Realização do segundo problema da ficha de trabalho.	
A professora começará por selecionar um dos alunos para ler a segunda questão da ficha de trabalho, com objetivo de esclarecer eventuais dúvidas, como por exemplo os conceitos de "triângulo retângulo em A" ou a perpendicularidade de retas. A professora informará que realizarão a tarefa a pares e que, posteriormente terá lugar uma discussão coletiva, ficando definido 10 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa. Além disso, a professora deve alertar os alunos para não apagarem nenhum dos seus processos de resolução, e caso o queiram abandonar devem indicá-lo e continuar a sua resolução, e que no final da aula a tarefa será recolhida.	
Trabalho autónomo dos alunos (10 minutos)	
Atividade do aluno	**Atividade da professora**
Hipótese 1: $\boldsymbol{A\hat{C}H = 180 - D\hat{C}H = 180 - 130 = 50°}$ porque os ângulos $\boldsymbol{ACH}$ e $\boldsymbol{DCH}$ são suplementares. Considerando o triângulo $[\boldsymbol{ABC}]$, $\boldsymbol{A\hat{B}C = 180 - B\hat{A}C - A\hat{C}B = 180 - B\hat{A}C - A\hat{C}H = 180 - 90 - 50 = 40°}$ porque a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo é igual a $\boldsymbol{180°}$. Considerando o triângulo $[\boldsymbol{ACH}]$, $\boldsymbol{C\hat{A}H = 180 - C\hat{H}A - A\hat{C}H = 180 - 90 - 50 = 40°}$ porque a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo é igual a $\boldsymbol{180°}$. Considerando o triângulo $[\boldsymbol{ABH}]$, $\boldsymbol{B\hat{A}H = 180 - A\hat{H}B - A\hat{B}H = 180 - 90 - 40 = 50°}$ porque a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo é igual a $\boldsymbol{180°}$. **Hipótese 2:** $\boldsymbol{A\hat{C}H = 180 - D\hat{C}H = 180 - 130 = 50°}$ porque os ângulos $\boldsymbol{ACH}$ e $\boldsymbol{DCH}$ são suplementares. Considerando o triângulo $[\boldsymbol{ACH}]$, $\boldsymbol{C\hat{A}H = 180 - C\hat{H}A - A\hat{C}H = 180 - 90 - 50 = 40°}$ porque a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo é igual a $\boldsymbol{180°}$.	A professora irá circular pela sala observando as resoluções dos alunos e apoiando-os nas suas dificuldades. Assim, como incentivar os alunos para que registem todos os seus raciocínios e justificações para todos os passos. A professora irá observar as estratégias utilizadas pelos alunos de modo a poder fazer uma seleção para a fase de discussão.

<table>
<tr>
<td>
$B\hat{A}H = B\hat{A}C - C\hat{A}H = 90 - 40 = 50°$ porque BAH e CAH são ângulos complementares.
Considerando o triângulo $[ABH]$ temos $A\hat{B}C = A\hat{B}H = 180 - B\hat{A}H - B\hat{H}A = 180 - 50 - 90 = 40°$ porque a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo é igual a $180°$.

Hipótese 3:
Os alunos podem ainda calcular a medida de amplitude do ângulo ABC tendo em conta que a medida de amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas de amplitude dos ângulos internos opostos.

Os alunos devem ainda apresentar a resposta ao problema sendo esta: $C\hat{A}H = 40°$, $B\hat{A}H = 50°$ e $A\hat{B}C = 40°$.

Erros e Dificuldades:
- Não considerar que o triângulo é retângulo em A.
- Considerar que o ângulo CAH tem metade da medida de amplitude do ângulo CAB.
- Não justificar os cálculos.
</td>
<td>
Apoio da Professora:
- Consideraste todos os dados do enunciado?
- Como podes garantir que a medida de amplitude do ângulo CAH é metade da medida de amplitude do ângulo CAB?
- A que corresponde esse valor? Porque razão podes efetuar esse cálculo?
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Discussão coletiva (10 minutos)</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
A professora deverá selecionar um aluno da turma que tenha optado por uma estratégia semelhante à hipótese 2 para a apresentar no quadro, uma vez que, apresenta um nível de complexidade semelhante à hipótese 1 mas recorre à noção de ângulos complementares. Outro aluno que tenha recorrido à hipótese 3 irá também apresentar a sua resolução e explicá-la aos colegas. Caso esta última hipótese não surja, a professora recorrendo à imagem poderá questionar os alunos sobre a relação entre o ângulo externo de um triângulo e os ângulos internos não adjacentes.

Para sistematizar, a professora deve escrever as seguintes revisões no lado direito do quadro:

Ângulos complementares: dois ângulos chamam-se complementares quando a soma das suas medidas de amplitude é igual a 90°.

Ângulos adjacentes: dois ângulos chamam-se adjacentes quando tem em comum o vértice e um dos lados e nenhum outro ponto.

Este último conceito será relembrado pela professora caso não surja durante a discussão do problema.

Durante a discussão a professora deve questionar os alunos sobre o nome correto dos ângulos e as suas relações assim como incentivar os alunos a utilizarem uma notação
</td>
</tr>
</table>

correta e dar a resposta ao problema.

Avaliação formativa
- Observação direta, com foco no interesse e no envolvimento das tarefas propostas, e na qualidade da participação. - Recolha das produções dos alunos com o objetivo de verificar quais foram as suas aprendizagens e para poder refletir sobre a aula e reforçar aprendizagens menos conseguidas em aulas posteriores.

Pedagogia diferenciada
Todos os alunos realizarão as mesmas tarefas.

Anexo II- Plano de Aula do dia 24 de fevereiro

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190

Plano de Aula

Data/ Hora: 24 de Fevereiro às 11h45 **Sala:** 11 **Turma:** 7.º 1.º

Sumário Lições n.º 90 e 91
Resolução de problemas com ângulos. Critério de igualdade de triângulos LLL.

Tópicos/subtópicos
- Ângulos e relação entre ângulos. - Igualdade de triângulos.

Objetivos específicos
- Resolver problemas com ângulos internos alternos, complementares e verticalmente opostos. - Compreender a noção de igualdade de triângulos. - Conhecer o critério LLL de igualdade de triângulos.

Capacidades transversais
Resolução de problemas. Raciocínio matemático. Comunicação matemática.

Conhecimentos prévios
- Identificar ângulos alternos internos, correspondentes e verticalmente opostos. - Construir triângulos sendo dados as medidas os comprimento dos três lados.

Recursos	
Do professor	**Dos alunos**
- Planificação da aula; - Quadro branco e marcador; - Régua e compasso; - Projetor e slides.	- Fichas de trabalho n.º 1 e 2 - Compasso e régua; - Lápis e borracha.

Metodologia de trabalho
- Trabalho a pares. - Discussão coletiva das resoluções obtidas.

Momentos da aula	
1º Momento: Sumário e conclusão da aula anterior	25 minutos
2º Momento: Realização da ficha n.º 2	
I. Trabalho autónomo dos alunos.	15 minutos
II. Discussão coletiva.	25 minutos
3º Momento: Construção de triângulos	20 minutos
4º Momento: Sistematização dos conceitos.	5 minutos

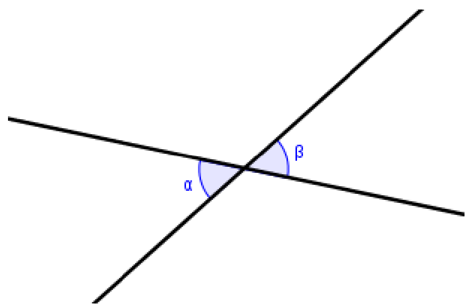
Desenvolvimento da aula

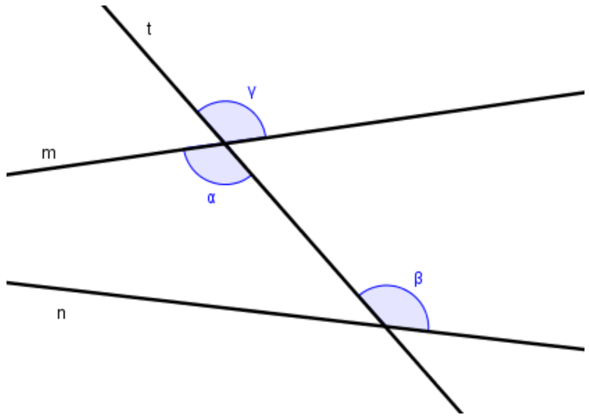
1º Momento: Sumário e conclusão da aula anterior (25 minutos)
A aula iniciará com o sumário escrito no quadro. Enquanto os alunos transcrevem o sumário a professora irá distribuir a ficha de trabalho 1. A professora irá relembrar os alunos que realizarão a tarefa a pares e à semelhança da aula anterior alertar os alunos para não apagarem nenhum dos seus processos de resolução, e caso o queiram abandonar devem indicá-lo e continuar a sua resolução, e que no final da aula a ficha de trabalho será recolhida. Será dado aos alunos 10 minutos para resolverem ou concluirem a resolução do problema e posteriormente será realizada a discussão da tarefa.

2º Momento: Realização da ficha de trabalho n.º 2	
A professora irá distribuir a ficha de trabalho pela turma. Em seguida a professora selecionará um dos alunos para ler o enunciado do problema e esclarecer eventuais dúvidas. Estrategicamente os alunos serão informados que têm 10 minutos para a realização do problema de modo a impor algum ritmo à turma, embora a professora tenha definido 15 minutos de trabalho autónomo.	
Trabalho autónomo dos alunos (15 minutos)	
Atividade do aluno	**Atividade da professora**
Hipótese 1 Esta estratégia passa por encontrar a medida de amplitude dos ângulos internos do triângulo $[DFC]$ recorrendo aos ângulos verticalmente opostos e alternos internos. $E\hat{D}F = A\hat{E}D = 65°$ porque EDF e AED são ângulos alternos internos e as retas AE e DF são paralelas. Como o ângulo ADC é raso então $C\hat{D}F = 180 - A\hat{D}E - E\hat{D}F = 180 - 50 - 65 = 65°$. $D\hat{F}C = 70°$ pois DFC e BFH são ângulos verticalmente opostos e $B\hat{F}H = 70°$. $D\hat{C}F = 180 - DFC - CDF = 180 - 70 - 65 = 45°$ porque a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$. **Hipótese 2** Esta estratégia passa por encontrar a medida de amplitude dos ângulos internos do triângulo	A professora irá circular pela sala observando as resoluções dos alunos e apoiando-os nas suas dificuldades. Assim com, incentivar os alunos para justificarem todos os cálculos. A professora fará um esboço da imagem do problema para auxiliar a posterior discussão.

$[DFC]$ recorrendo aos ângulos verticalmente opostos e correspondentes. Tendo em conta o triângulo $[ADE]$, $D\hat{A}E = 180 - A\hat{E}D - A\hat{D}E = 180 - 65 - 50 = 65°$ porque a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$. Como os ângulos DAE e FDC são correspondentes e AB é paralela a DF então $F\hat{D}C = D\hat{A}E = 65°$. $D\hat{F}C = 70°$ pois DFC e BFH são ângulos verticalmente opostos e $B\hat{F}H = 70°$. $D\hat{C}F = 180 - DFC - CDF = 180 - 70 - 65 = 45°$ porque a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$. **Hipótese 3** Esta estratégia passa por encontrar a medida de amplitude dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$ recorrendo aos ângulos alternos internos. Tendo em conta o triângulo $[ADE]$, $D\hat{A}E = 180 - A\hat{E}D - A\hat{D}E = 180 - 65 - 50 = 65°$ porque a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$. Os ângulos EBF e BDH são alternos internos e as retas EB e FH são paralelas logo $E\hat{B}F = B\hat{D}H = 70°$ Por fim considerando o triângulo [ABC] temos $A\hat{C}B = 180 - E\hat{B}F - D\hat{A}E = 180 - 70 - 65 = 45°$. Os alunos devem ainda dar resposta ao problema: a medida de amplitude do ângulo ACB é igual a $45°$. **Erros e Dificuldades:** - Não estabelecer um plano de resolução do problema. - Não identificar ângulos alternos e internos. - Assumir desde o início dados que desconhecem (assumir que alguns triângulos são isósceles porque a figura o aparenta). - Não justificar os cálculos.	**Apoio da Professora:** - Porque razão calculaste esse ângulo? Isso vai ajudar-te a encontrar o que o problema pede? - Quais as condições dadas no enunciado? O que podes saber com essa informação? - Atenção que só podes garantir aquilo que o enunciado te diz. - Caso a professora verifique que os não conseguem resolver o problema por não conseguirem identificar ângulos alternos internos, verticalmente opostos ou correspondentes a professora pode interromper o trabalho autónomo para

	fazer a revisão destes ângulos projectando-as no quadro lateral (como previsto no momento da discussão).

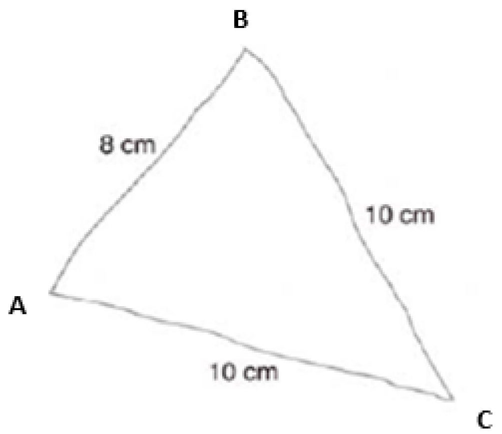
Discussão coletiva (25 minutos)
A discussão terá início com a professora a questionar os alunos sobre o que é pedido no problema. Em seguida serão escolhidos, caso seja possível, dois alunos que tenham optado pela estratégia 2 e 3 (ou idênticas) para apresentarem a sua resolução no quadro em simultâneo, visto que as duas estratégias se complementam em relação aos conceitos que se pretende rever. Analisando cada uma das resoluções de cada vez, a professora deverá questionar os alunos se concordam com a resolução dos colegas, se a notação utilizada é correta e a razão porque se pode efetuar os cálculos apresentados (caso o aluno que está no quadro não apresente todas as justificações). A professora deve ainda salientar durante a discussão que por vezes existem dados que são irrelevantes para a resolução do problema, como é o caso da medida de amplitude do ângulo BEF. Por fim, a professora poderá questionar os alunos de modo a que em conjunto seja possível sistematizar os conceitos envolvidos projetando-os no quadro (a azul). **Como podemos definir ângulos verticalmente opostos?** **Dois ângulos dizem-se verticalmente opostos se têm o vértice comum e os lados de um estão no prolongamento dos lados do outro.**    **Qual a relação entre estes ângulos?** **Ângulos verticalmente opostos são congruentes (têm a mesma medida de amplitude).** **E só falamos em ângulos alternos internos quando temos retas paralelas intersetadas por uma terceira? E quando são paralelas o que podemos dizer da relação deste ângulos? E os ângulos correspondentes?** **Ângulos alternos e internos e ângulos correspondentes: Na figura temos que α e β são ângulos alternos internos. E γ e β são ângulos correspondentes.**



Se as retas m e n forem paralelas então:
- os ângulos internos alternos são congruentes
- os ângulos correspondentes são congruentes.

3º Momento: Construção de triângulos (20 minutos)

A professora começará por apresentar o esboço do seguinte triângulo que os alunos devem esboçar no seu caderno (não é necessário a utilização da régua).



De seguida a professora colocará as seguintes questões:
Como posso construir de modo rigoroso este triângulo? Qual o material que vou precisar? Como posso começar?

Assim com a colaboração dos alunos a professora irá construir o triângulo pretendido no quadro e os alunos efetuarão a construção no seu caderno, escrevendo os passos efetuados à medida que se vai construindo o triângulo (a professora informará os alunos que utilizará outras medidas no seu triângulo apenas para que estes possam visualizar bem a construção dos seus lugares, a professora utilizará as medidas $\overline{AB} = 40cm$ $\overline{BC} = 50\ cm$ e $\overline{AC} = 50\ cm$).

No final deve ficar registado no quadro:

1ºPasso
Traçar um segmento de reta [AB] de medida de comprimento 8 cm;
Abrir o compasso com uma abertura de 10 cm;
Fazer centro em A e traçar um arco de circunferência.

2ºpasso
Abrir o compasso com uma abertura de 10 cm;
Fazer centro em B e traçar um arco de circunferência que intersete o primeiro arco traçado.

3ºpasso
Chamar C ao ponto de interseção.
Unir A com C e B com C.

Durante a construção a professora deve ainda questionar os alunos se a construção teria de começar pelo segmento $[AB]$ ou poderia ser iniciada por um dos outros segmentos.

Após todos os alunos compreenderem o processo de construção de um triângulo dado as medidas de comprimento dos três lados, a professora colocará a questão á turma: **Os triângulos que obtiveram são geometricamente iguais aos dos colegas?**
Os alunos devem compreender que com uma construção rigorosa de um triângulo dadas as três medidas de comprimento dos lados obtemos sempre triângulos geometricamente iguais, ou seja, com a mesma forma e tamanho. E por esta razão é possível definir o critério LLL para a igualdade de triângulos. Assim, professora projetará o seguinte critério:

Critério LLL (lado, lado, lado)
Dois triângulos são geometricamente iguais se os três lados de um são geometricamente iguais aos três lados do outro.

4º Momento: Sistematização dos conceitos (5 minutos)
Para finalizar a aula, a professora deverá questionar os alunos sobre quais os conceitos trabalhados ao longo da aula e o que aprenderam de novo.

Avaliação formativa
- Observação direta, com foco no interesse e no envolvimento das tarefas propostas, e na qualidade da participação. - Recolha das produções dos alunos com o objetivo de verificar quais foram as suas aprendizagens e para poder refletir sobre a aula e reforçar aprendizagens menos conseguidas em aulas posteriores.

Pedagogia diferenciada
Todos os alunos realizarão as mesmas tarefas.

Anexo III- Plano de Aula do dia 27 de fevereiro

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190

Plano de Aula

Data/ Hora: 27 de Fevereiro às 11h45 **Sala:** 11 **Turma:** 7.º 1.º

Sumário Lições n.º 92 e 93
Critério de igualdade de triângulos LAL. Resolução de exercícios e problemas.

Tópicos/subtópicos
- Igualdade de triângulos.

Objetivos específicos
- Compreender a noção de igualdade de triângulos. - Conhecer o critério LAL de igualdade de triângulos. - Desenvolver a capacidade de resolver problemas com triângulos.

Capacidades transversais
Resolução de problemas. Raciocínio matemático. Comunicação matemática.

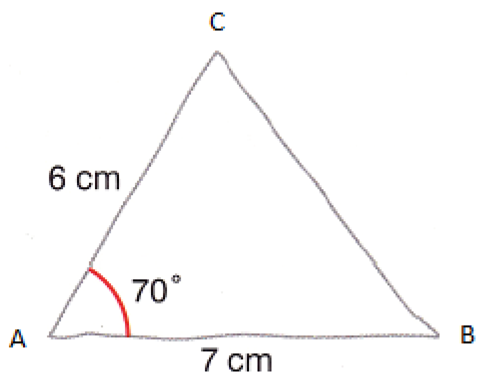
Conhecimentos prévios
- Construir triângulos sendo dadas as medidas de comprimento de dois lados e a medida de amplitude do ângulo por eles formado.

Recursos	
Do professor	**Dos alunos**
- Planificação da aula; - Quadro branco e marcador; - Régua, compasso e transferidor;	- Ficha de trabalho n.º 3; - Compasso, régua e transferidor; - Lápis, borracha e caneta.

Metodologia de trabalho
- Trabalho a pares. - Discussão coletiva das resoluções obtidas.

Momentos da aula	
1º Momento: Sumário e construção de triângulos.	5 minutos
III. Trabalho autónomo dos alunos.	10 minutos
IV. Discussão coletiva.	5 minutos
2º Momento: Resolução da primeira parte da ficha de trabalho.	
V. Trabalho autónomo dos alunos.	10 minutos
VI. Discussão coletiva.	10 minutos
3º Momento: Apresentação e resolução da segunda parte da ficha de trabalho (questão 1).	3 minutos
I. Trabalho autónomo dos alunos.	15 minutos
II. Discussão coletiva.	10 minutos
4º Momento: Apresentação e resolução da segunda parte da ficha de trabalho (questão 2).	2 minutos
I. Trabalho autónomo dos alunos.	10 minutos
II. Discussão coletiva.	10 minutos

Desenvolvimento da aula

1º Momento: Sumário e construção de triângulos (20 minutos)
A aula iniciará com o sumário escrito no quadro. Em seguida a professora começará por apresentar o esboço do triângulo $[\boldsymbol{ABC}]$ no quadro que os alunos devem também esboçar no seu caderno (não é necessário a utilização da régua).  Os alunos serão informados que terão 5 minutos para fazer a construção rigorosa do triângulo no seu caderno. Enquanto os alunos estiverem a fazer as suas construções a professora irá circular pela sala e verificar se todos os alunos estão a marcar os ângulos corretamente e se estão a seguir uma estratégia rigorosa de construção do triângulo, assim como, esclarecer eventuais dúvidas. Após o trabalho autónomo dos alunos a professora colocará as seguintes questões: **Como posso construir de modo rigoroso este triângulo? Qual o material que vou precisar? Como posso começar?** Assim com a colaboração dos alunos a professora irá construir o triângulo pretendido no quadro, escrevendo os passos efetuados à medida que se vai construindo o triângulo (a professora informará os alunos que utilizará outra medida de comprimento do lado $[\boldsymbol{AB}]$ no seu triângulo apenas para que estes possam visualizar bem a construção dos seus lugares, a professora utilizará as medidas $\overline{\boldsymbol{AB}} = \mathbf{35}\ \boldsymbol{cm}$ e $\overline{\boldsymbol{AC}} = \mathbf{30}\ \boldsymbol{cm}$). No final para além da construção deve ficar registado no quadro:

1ºPasso
Traçar um dos lados do triângulo $[ABC]$, por exemplo, $[AB]$ com $7\ cm$ de medida de comprimento;
Com o transferidor marcar o ângulo de lado $[AB]$ com vértice em A e com $70°$ de medida de amplitude e desenhar a semirreta correspondente.

2ºpasso
Sobre a semirreta de origem em A marcar o ponto C que dista $6\ cm$ de A (com régua ou com compasso).

3ºpasso
Unir A com C e B com C.

Durante a construção a professora deve ainda questionar os alunos se a construção teria de começar pelo segmento $[\boldsymbol{AB}]$ ou poderia ser iniciada pelo segmento $[\boldsymbol{AC}]$.

Após todos os alunos compreenderem o processo de construção de um triângulo dadas as medidas de comprimento de dois lados e a medida de amplitude do ângulo por eles formado, a professora colocará a questão á turma: **Os triângulos que obtiveram são geometricamente iguais aos dos colegas? E se tivessem noutra posição?**
Os alunos devem compreender que com uma construção rigorosa de um triângulo dadas as medidas de comprimento de dois lados e a medida de amplitude do ângulo por eles formado obtemos sempre triângulos geometricamente iguais, ou seja, com a mesma forma e tamanho à semelhança do que acontecia na construção da aula anterior (LLL). E por esta razão é possível definir o critério LAL para a igualdade de triângulos. Assim, professora escreverá no lado direito do quadro o seguinte critério:

Critério LAL (lado, ângulo, lado)
Dois triângulos são geometricamente iguais se tiverem dois lados correspondentes geometricamente iguais e o ângulo por eles formado geometricamente iguais.

A professora deve ainda salientar que o ângulo terá de ser o que é formado pelos dois lados dados e não por um dos outros ângulos do triângulo e por essa razão dizemos LAL e não LLA ou ALL.

2º Momento: Realização da primeira parte da ficha de trabalho	
A professora irá distribuir a primeira parte da ficha de trabalho 3 pela turma. Esta ficha tem como objetivo a consolidação das aprendizagens realizadas em relação à igualdade de triângulos. A professora deve salientar que é necessário justificar todas as respostas e que terão 10 minutos para realizar a ficha de trabalho.	
Trabalho autónomo dos alunos (10 minutos)	
Atividade do aluno	**Atividade da professora**
Em seguida são apresentadas as resoluções que os alunos devem efetuar nas várias alíneas da ficha de trabalho. **Questão 1** **Alínea a:** Os triângulos $[\boldsymbol{ABC}]$ e $[\boldsymbol{DEF}]$ são geometricamente iguais pelo critério $\boldsymbol{LLL}$ porque $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{DE}}$, $\overline{\boldsymbol{BC}}$=$\overline{\boldsymbol{DF}}$ e $\overline{\boldsymbol{CA}} = \overline{\boldsymbol{FE}}$.	A professora irá circular pela sala observando as resoluções dos alunos e apoiando-os nas suas dificuldades. Assim com, incentivar os alunos para justificarem todas as alíneas. A professora deve preparar o quadro para a posterior discussão dividindo o quadro em três colunas.

Assim, $x = E\hat{D}F = 50°$ **Erros e Dificuldades:** - Indicar apenas o critério sem estabelecer as relações entre os lados correspondentes dos triângulos. - Não fazer a correspondência dos ângulos correta devido à posição dos triângulos.	 **Apoio da Professora:** - Como sabes que é esse o critério de igualdade? Deves indicar essas relações. - Quais os lados do ângulo desconhecido? Quais os lados correspondentes no triângulo [DEF]?
Alínea b: Os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são geometricamente iguais pelo critério LAL porque $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC}$=$\overline{FD}$ e $A\hat{B}C = E\hat{F}D$. Assim, $x = \overline{AC} = 12\ cm$ **Erros e Dificuldades:** - Indicar apenas o critério sem estabelecer as relações entre os lados correspondentes dos triângulos.	 **Apoio da Professora:** - Como sabes que é esse o critério de igualdade? Deves indicar essas relações.
Alínea c: Os alunos podem justificar a igualdade dos dois triângulos recorrendo a dois critérios. **Hipótese 1** Os triângulo $[ABC]$ e $[DBC]$ são geometricamente iguais pelo critério LLL porque $\overline{AB} = \overline{DB}$, $\overline{AC} = \overline{DC}$ e os triângulos tem o lado $[BC]$ em comum. Assim, $x = A\hat{C}B$ mas como a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$ então $x = A\hat{C}B = 180 - B\hat{A}C - A\hat{B}C = 180 - 58 - 90 = 32°$. **Hipótese 2** Os triângulo $[ABC]$ e $[DBC]$ são geometricamente iguais pelo critério LAL porque $\overline{AB} = \overline{DB}$, $D\hat{B}C = A\hat{B}C$ e os triângulos têm o lado $[BC]$ em comum. Assim, $x = A\hat{C}B$ mas como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$ então $x = A\hat{C}B = 180 - B\hat{A}C - A\hat{B}C = 180 - 58 - 90 = 32°$. **Erros e Dificuldades:** - Não considerar o lado em comum para a utilização do critério de igualdade. - Não encontrar o valor de x, uma vez que, o	 **Apoio da Professora:** - O lado $[CB]$ pertence a que triângulo? O que podemos garantir com essa informação?

ângulo correspondente no triângulo $[ABC]$ não está indicado. - Não justificar os cálculos.	- Tendo em conta o que é dado não é possível saber a medida de amplitude desse ângulo? - Porque razão podes fazer esse cálculo?

Discussão coletiva (10 minutos)
Para cada uma das alíneas a professora deve escolher um aluno, que à vez, deverá resolver e explicar a sua resolução aos colegas. A professora deve questionar a turma se concorda com a resolução do colega e questionar os vários passos que não apresentem a devida justificação, de modo a que o aluno possa completar a sua resolução no quadro. No caso da alínea c se nenhum aluno fizer referência a outra estratégia diferente da apresentada no quadro, a professora deverá colocar algumas questões à turma: **É possível recorrer a outro critério para justificar que os triângulos [ABC] e [DBC] são geometricamente iguais?** **Quais as informações que sabemos dos dois triângulos?** **É possível recorrer a outro critério tendo em conta estas informações? Qual? Porquê?**

3º Momento: Realização da segunda parte da ficha de trabalho (questão 1) (3 minutos)	
Em primeiro lugar a professora irá distribuir a primeira questão da segunda parte da ficha de trabalho pela turma e posteriormente selecionará um dos alunos para ler o enunciado. A professora informará que realizarão a tarefa a pares e que, posteriormente terá lugar uma discussão coletiva. Além disso, a professora deve alertar os alunos para fazer a resolução a caneta e caso queiram abandonar algum raciocínio devem indicá-lo e continuar a sua resolução, e que no final da aula a tarefa será recolhida. Por último, ficará definido 15 minutos de trabalho autónomo.	
Trabalho autónomo dos alunos (15 minutos)	
Atividade do aluno	**Atividade da professora**
Questão 1 **Hipótese 1** Os alunos podem, por exemplo, definir que o terreno do senhor Pereira é o triângulo $[ABC]$ e o terreno da dona Ermelinda é o triângulo $[CDE]$. Onde $\overline{AC} = 10\ m$, $\overline{BC} = 8\ m$, $\overline{CD} = 8\ m$ e $\overline{CE} = 10\ cm$. Assim, uma vez que os ângulos ABC e DCE são ângulos verticalmente opostos temos $A\hat{C}B = D\hat{C}E$. Além disso, $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\overline{AC} = \overline{EC}$ então pelo critério de igualdade de triângulos LAL podemos afirmar que os triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$ são geometricamente iguais. Deste modo, os terrenos da dona Ermelinda e do senhor Pereira são iguais (ou têm o mesmo tamanho) e por isso nenhum tem razão. **Hipótese 2** Os alunos podem também dizer que ambos os triângulos têm um lado com medida de comprimento igual a 8 m, um lado com medida de comprimento igual a 10 m e que os ângulos	A professora irá circular pela sala observando as resoluções dos alunos e apoiando-os nas suas dificuldades. Assim com, incentivar os alunos para justificarem todos os cálculos.

<table>
<tr><td>internos dos triângulos formados pelos dois lados são geometricamente iguais, uma vez que, são ângulo verticalmente opostos. Assim podemos concluir que os triângulos são geometricamente iguais pelo critério de igualdade de triângulos LAL.
Deste modo, os terrenos da dona Ermelinda e do senhor Pereira são iguais (ou têm o mesmo tamanho) e por isso nenhum tem razão.

R.: Nenhum proprietário tem razão.

Erros e Dificuldades:
- Não compreender como pode relacionar o tamanho dos dois terrenos.
- Tentar calcular a área dos triângulos.
- Não identificar ângulos verticalmente opostos.
- Identificar apenas o critério de igualdade de triângulos
-Não conseguir justificar por não conseguir indicar os lados ou os ângulos dos triângulos.</td><td>Apoio da Professora:
- O que pede o problema? Como posso saber se algum deles tem razão? Como posso saber se um é maior que o outro?
- Temos informações suficientes para calcular a área? Para relacionar o seu tamanho tenho de calcular a área? O que já aprendemos que relaciona o tamanho dos triângulos?
- Porque razão utilizaste esse critério?
- Podes dizer por palavras, ou dar nomes aos elementos que precisas para te ajudar na tua resolução.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Discussão coletiva (10 minutos)</td></tr>
<tr><td colspan="2">A professora selecionará um dos alunos para apresentar a sua resolução no quadro e explicar aos colegas como pensou. Logo no início a professora deve fazer algumas questões de modo a envolver a turma na discussão e levá-los a compreender que em primeiro lugar devemos compreender bem enunciado, identificar o que é pedido e pensar numa estratégia antes de começar a escrever.

- O que pede o problema?
- Como posso saber se algum deles tem razão?
- Como posso saber se um é maior que o outro?
- Qual a ideia que tiveram para resolver o problema?
- E se provarem que os triângulos são geometricamente iguais conseguimos resolver o problema?
- Como podemos provar isso? Porquê?
- O que podemos concluir? Qual a resposta ao problema?

Durante a discussão a professora deverá apelar à justificação de todos os cálculos e à utilização de uma notação adequada (caso o aluno enfrente dificuldade em escrever as justificações a professora poderá sugerir que o aluno atribua nomes aos vértices dos triângulos ou pedir a colaboração da turma para que este utilize uma linguagem adequada).</td></tr>
</table>

4º Momento: Realização da segunda parte da ficha de trabalho (questão 2) (2 minutos)
A professora irá distribuir a segunda questão da segunda parte da ficha de trabalho pela turma e irá ler o enunciado. Os alunos devem compreender que apesar de a figura estar construída é necessário investigar se as suas caraterísticas tal como indicadas são possíveis.

A professora informará que terão 10 minutos de trabalho autónomo e nas mesmas condições que na questão anterior.
Trabalho autónomo dos alunos (10 minutos)

Atividade do aluno	**Atividade da professora**
Se a figura for possível, uma vez que, os segmentos de reta $[AO]$, $[OB]$, $[OC]$ e $[OD]$ são raios da circunferência então as suas medidas de comprimento são iguais. Como $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AO} = \overline{DO}$, $\overline{BO} = \overline{CO}$ pelo critério LLL podemos garantir que os triângulos $[ABO]$ e $[CDO]$ são geometricamente iguais e os ângulos AOB e COD têm de ter a mesma medida, mas isso não acontece porque $A\hat{O}B = 40°$ e $C\hat{O}D = 42°$, então podemos concluir que esta figura não é possível.	A professora irá circular pela sala observando as resoluções dos alunos e apoiando-os nas suas dificuldades. Assim com, incentivar os alunos para justificarem todos os passos.
Erros e Dificuldades: - Não conseguir iniciar a resolução do problema por falta de estratégias. - Não considerar que os lados $[AO]$, $[OB]$, $[OC]$ e $[OD]$têm a mesma medida de comprimento. - Aplicar o critério LLL e concluir que a figura é possível.	**Apoio da Professora:** - O que sabemos sobre a circunferência? Qual o segmento de reta que representa o raio da circunferência? Existe apenas um? - O que sabemos sobre esses segmentos de reta? - Se esses triângulos são geometricamente iguais pelo critério LLL o que podemos dizer dos seus ângulos?

Discussão coletiva (10 minutos)
A professora selecionará um dos alunos para apresentar a sua resolução no quadro e explicar aos colegas como pensou. A professora deve fazer algumas questões para envolver os alunos na discussão: **- O que pede o problema?** **- O que preciso de acontecer para que a imagem seja possível? E para que seja impossível?** **- Como podemos começar?** **- O que podemos concluir? Qual a resposta ao problema?** Durante a discussão a professora deverá apelar à justificação de todos os passos e à utilização de uma notação adequada, no caso de surgirem dificuldades a professora poderá colocar as mesmas questões previstas para o apoio no trabalho autónomo.

Avaliação formativa
- Observação direta, com foco no interesse e no envolvimento das tarefas propostas, e na qualidade da participação. - Recolha das produções dos alunos com o objetivo de verificar quais foram as suas aprendizagens e para poder refletir sobre a aula e reforçar aprendizagens menos conseguidas em aulas posteriores.

Pedagogia diferenciada
Todos os alunos realizarão as mesmas tarefas. Tendo em conta os diferentes ritmos de trabalho na turma, caso alguns alunos terminei a tarefa proposta antes do previsto a professora poderá sugerir a realização do exercício 4 da página 121 do manual adotado.

Anexo IV- Plano de Aula do dia 2 de março

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190

Plano de Aula

Data/ Hora: 2 de Março às 9h00 **Sala:** 11 **Turma:** 7.º 1.º

Sumário Lição n.º 94
Resolução de problemas. Critério de igualdade de triângulos ALA.

Tópicos/subtópicos
- Igualdade de triângulos.

Objetivos específicos
- Compreender a noção de igualdade de triângulos. - Conhecer o critério ALA de igualdade de triângulos. - Desenvolver a capacidade de resolver problema com triângulos.

Capacidades transversais
Resolução de problemas. Raciocínio matemático. Comunicação matemática.

Conhecimentos prévios
- Construir triângulos sendo dado a medida de comprimento de um lado e a amplitude dos ângulos adjacentes a esse lado.

Recursos	
Do professor	**Dos alunos**
- Planificação da aula; - Quadro branco e marcador; - Régua, compasso e transferidor;	- Ficha de trabalho n.º 3; - Compasso, régua e transferidor; - Lápis, borracha e caneta.

Metodologia de trabalho
- Trabalho a pares. - Discussão coletiva das resoluções obtidas.

Momentos da aula	
1º Momento: Sumário e apresentação da segunda parte da ficha de trabalho (questão 2)	5 minutos
I. Trabalho autónomo dos alunos.	10 minutos
II. Discussão coletiva.	10 minutos
2º Momento: Construção de triângulos	
I. Trabalho autónomo dos alunos.	10 minutos
II. Discussão coletiva.	10 minutos

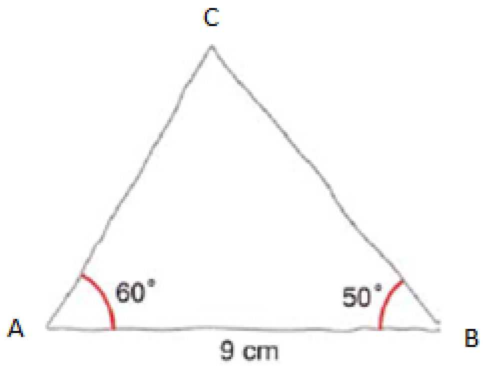
Desenvolvimento da aula

1º Momento: Sumário e apresentação da segunda parte da ficha de trabalho (questão 2) (5 minutos)	
A aula iniciará com o sumário escrito no quadro. Em seguida a professora irá distribuir a segunda questão da segunda parte da ficha de trabalho pela turma e irá ler o enunciado. Os alunos devem compreender que apesar de a figura estar construída é necessário investigar se as suas caraterísticas tal como indicadas são possíveis. A professora informará que realizarão a ficha de trabalho a pares e que, posteriormente terá lugar uma discussão coletiva. Além disso, a professora deve alertar os alunos para utilizarem caneta nas suas resoluções e caso queiram abandonar algum dos seus raciocínios devem indicá-lo e continuar a sua resolução, e que no final da aula a ficha de trabalho será recolhida. Por último, ficará definido 10 minutos de trabalho autónomo para a realização do primeiro problema.	
Trabalho autónomo dos alunos (10 minutos)	
Atividade do aluno	**Atividade da professora**
Se a figura for possível, uma vez que, os segmentos de reta $[\boldsymbol{AO}]$, $[\boldsymbol{OB}]$, $[\boldsymbol{OC}]$ e $[\boldsymbol{OD}]$ são raios da circunferência então as suas medidas de comprimento são iguais. Como $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{CD}}$, $\overline{\boldsymbol{AO}} = \overline{\boldsymbol{DO}}$, $\overline{\boldsymbol{BO}} = \overline{\boldsymbol{CO}}$ pelo critério LLL podemos garantir que os triângulos $[\boldsymbol{ABO}]$ e $[\boldsymbol{CDO}]$ são geometricamente iguais e os ângulos $\boldsymbol{AOB}$ e $\boldsymbol{COD}$ têm de ter a mesma medida, mas isso não acontece porque $\boldsymbol{A\hat{O}B} = \mathbf{40}°$ e $\boldsymbol{C\hat{O}D} = \mathbf{42}°$, então podemos concluir que esta figura não é possível.	A professora irá circular pela sala observando as resoluções dos alunos e apoiando-os nas suas dificuldades. Assim com, incentivar os alunos para justificarem todos os passos.
Erros e Dificuldades: - Não conseguir iniciar a resolução do problema por falta de estratégias. - Não considerar que os lados $[\boldsymbol{AO}]$, $[\boldsymbol{OB}]$, $[\boldsymbol{OC}]$ e $[\boldsymbol{OD}]$têm a mesma medida de comprimento. - Aplicar o critério LLL e concluir que a figura é possível.	**Apoio da Professora:** - O que sabemos sobre a circunferência? Qual o segmento de reta que representa o raio da circunferência? Existe apenas um? - O que sabemos sobre esses segmentos de reta? - Se esses triângulos são geometricamente iguais pelo critério LLL o que podemos dizer dos seus ângulos?

Discussão coletiva (10 minutos)
A professora selecionará um dos alunos para apresentar a sua resolução no quadro e explicar aos colegas como pensou. A professora deve fazer algumas questões para envolver os alunos na discussão: **- O que pede o problema?** **- O que preciso de acontecer para que a imagem seja possível? E para que seja impossível?** **- Como podemos começar?** **- O que podemos concluir? Qual a resposta ao problema?** Durante a discussão a professora deverá apelar à justificação de todos os passos e à utilização de uma notação adequada, no caso de surgirem dificuldades a professora poderá colocar as mesmas questões previstas para o apoio no trabalho autónomo.

2º Momento: Construção de triângulos (25 minutos)

A professora começará por apresentar o esboço do triângulo $[ABC]$ que os alunos devem esboçar no seu caderno (não é necessário a utilização da régua nem transferidor).



Os alunos serão informados que terão 10 minutos para fazer a construção rigorosa do triângulo no seu caderno. Após o trabalho autónomo dos alunos a professora colocará as seguintes questões:

Como posso construir de modo rigoroso este triângulo? Qual o material que vou precisar? Como posso começar?

Assim com a colaboração dos alunos a professora irá construir o triângulo pretendido no quadro, escrevendo os passos efetuados à medida que se vai construindo o triângulo (a professora informará os alunos que utilizará outra medida de comprimento do lado [AB] no seu triângulo apenas para que estes possam visualizar bem a construção dos seus lugares, a professora utilizará a medida $\overline{AB} = 45cm$).

No final para além da construção deve ficar registado no quadro:

1ºPasso: Traçar o segmento de reta [AB] de medida de comprimento 9 cm;
2.º Passo: Marcar o ângulo com vértice em A e de lado [AB] com medida de amplitude de 60° e desenhar a semirreta correspondentes.
3.º Passo: Marcar o ângulo com vértice em B e de lado [AB] com medida de amplitude de 50° e desenhar a semirreta correspondente.
4.º Passo: Chamar C ao ponto de intersecção das semirretas.

Após todos os alunos compreenderem o processo de construção de um triângulo dado o comprimento de um lado e a amplitude dos ângulos adjacentes a esse lado, a professora colocará a questão á turma: **Os triângulos que obtiveram são geometricamente iguais aos dos colegas?**

Os alunos devem compreender que com uma construção rigorosa de um triângulo, dado o comprimento de um lado e a amplitude dos ângulos adjacentes a esse lado, obtemos sempre triângulos geometricamente iguais, ou seja, com a mesma forma e tamanho. E por esta razão é possível definir o critério ALA para a igualdade de triângulos. Assim, professora escreverá no quadro o seguinte critério:

Critério ALA (ângulo, lado, ângulo)

Dois triângulos são geometricamente iguais se tiverem um lado correspondente geometricamente igual e os ângulos adjacentes a esse lado geometricamente iguais.

Avaliação formativa
- Observação direta, com foco no interesse e no envolvimento das tarefas propostas, e na qualidade da participação. - Recolha das produções dos alunos com o objetivo de verificar quais foram as suas aprendizagens e para poder refletir sobre a aula e reforçar aprendizagens menos conseguidas em aulas posteriores.

Pedagogia diferenciada
Todos os alunos realizarão as mesmas tarefas.

Anexo V- Plano de Aula do dia 10 de março

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190

Plano de Aula

Data/ Hora: 10 de Março às 11h45 **Sala:** 11 **Turma:** 7.º 1.º

Sumário Lição n.º 100 e 101
Resolução de problemas envolvendo polígonos.

Tópicos/subtópicos
- Ângulos e relações entre ângulos. - Igualdade de triângulos. - Linhas poligonais e polígonos.

Objetivos específicos
- Desenvolver a capacidade de resolver problemas com polígonos.

Capacidades transversais
Resolução de problemas. Raciocínio matemático. Comunicação matemática.

Conhecimentos prévios
- Identificar ângulos verticalmente opostos. - Saber utilizar os critérios de igualdade de triângulos. - Identificar a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados. - Reconhecer o valor da soma dos ângulos externos de qualquer polígono.

Recursos	
Do professor	**Dos alunos**
- Planificação da aula; - Quadro branco e marcador;	- Ficha de trabalho n.º 6; - Lápis, borracha e caneta.

Metodologia de trabalho
- Trabalho a pares. - Discussão coletiva das resoluções obtidas.

Momentos da aula	
1º Momento: Sumário e apresentação da primeira questão da ficha de trabalho	5 minutos
VII. Trabalho autónomo dos alunos.	15 minutos
VIII. Discussão coletiva.	10 minutos
2º Momento: Distribuição e apresentação da segunda questão da ficha de trabalho	2 minutos
III. Trabalho autónomo dos alunos.	15 minutos
IV. Discussão coletiva.	10 minutos
3º Momento: Distribuição e apresentação da terceira questão da ficha de trabalho	3 minutos
I. Trabalho autónomo dos alunos.	15 minutos
II. Discussão coletiva.	15 minutos

Desenvolvimento da aula

1º Momento: Distribuição e apresentação da primeira questão da tarefa (5 minutos)	
A aula iniciará com o sumário escrito no quadro. Em seguida a professora irá distribuir a primeira questão da da ficha de trabalho pela turma e irá selecionar um aluno para ler o enunciado. A leitura do enunciado tem como objetivo focar os alunos no problema e esclarecer dúvidas que possam surgir na linguagem do enunciado, como por exemplo, pontos colineares e retas perpendiculares. A professora informará que realizarão a tarefa a pares e que, posteriormente terá lugar uma discussão coletiva. Além disso, a professora deve alertar os alunos para utilizarem caneta nas suas resoluções e caso queiram abandonar algum dos seus raciocínios devem indicá-lo e continuar a sua resolução, e que no final da aula a tarefa será recolhida. Por último, ficará definido 15 minutos de trabalho autónomo para a realização do primeiro problema.	
Trabalho autónomo dos alunos (15 minutos)	
Atividade do aluno	**Atividade da professora**
Os alunos devem identificar que os ângulos $\boldsymbol{ADB}$ e $\boldsymbol{CDE}$ são verticalmente opostos e por essa razão $\boldsymbol{A\hat{D}B} = \boldsymbol{C\hat{D}E}$. Além disso como $\boldsymbol{CE}$ é perpendicular a $\boldsymbol{CB}$ então $\boldsymbol{E\hat{C}B} = \boldsymbol{90°}$ e como $\boldsymbol{BD}$ é perpendicular a $\boldsymbol{AB}$ então $\boldsymbol{D\hat{B}A} = \boldsymbol{90°}$, logo $\boldsymbol{E\hat{C}D} = \boldsymbol{D\hat{B}A}$. Como $\boldsymbol{E\hat{C}D} = \boldsymbol{D\hat{B}A}$, $\overline{\boldsymbol{BD}} = \overline{\boldsymbol{CD}}$ e $\boldsymbol{A\hat{D}B} = \boldsymbol{C\hat{D}E}$ então os triângulos $[\boldsymbol{CDE}]$ e $[\boldsymbol{ABD}]$ são geometricamente iguais pelo critério ALA. Como os triângulos são geometricamente iguais então $\overline{\boldsymbol{CE}} = \overline{\boldsymbol{AB}}$ e por isso se medirmos $[\boldsymbol{CE}]$ obtermos a distância e $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, ou seja, a largura do riacho. **Erros e Dificuldades:** - Assumir que os triângulos são geometricamente iguais por a figura o aparentar. - Não identificar que $\boldsymbol{CDE}$ e $\boldsymbol{DBA}$ são ângulos verticalmente opostos. - Não identificar os dados do enunciado olhando	A professora irá circular pela sala observando as resoluções dos alunos e apoiando-os nas suas dificuldades. Assim com, incentivar os alunos para justificarem todos os cálculos. **Apoio da Professora:** - Como sabes que os triângulos são geometricamente iguais? Tens dados suficientes para provar isso? Um desenho prova alguma coisa? - O que sabes sobre os lados dos dois

apenas para a figura. - Não compreender que os ângulos DBA e DCE são retos. - Não justificar por que razão é possível aplicar o critério ALA. - Não responder ao problema.	triângulos e sobre os ângulos? É possível estabelecer outras relações entre os ângulos dos triângulos? Consegues aplicar algum princípio de igualdade de triângulos? - Por que razão podes afirmar que os triângulos são geometricamente iguais pelo critério ALA? - O que pedia o problema? Por que razão basta medir [CE]?

Discussão coletiva (10 minutos)
A professora selecionará um dos alunos para apresentar a sua resolução no quadro e explicar aos colegas como pensou. A professora deve fazer algumas questões para envolver os alunos na discussão: **- O que pede o problema?** **- Por onde podemos começar?** **- O que sabemos sobre os dois triângulos?** **- Qual a resposta ao problema?** Durante a discussão a professora deverá apelar à justificação de todos os passos e à utilização de uma notação adequada, no caso de surgirem dificuldades a professora poderá colocar as mesmas questões previstas para o apoio no trabalho autónomo.

2º Momento: Apresentação da segunda questão da tarefa (2 minutos)
A professora irá distribuir a segunda questão da ficha de trabalho pela turma e irá ler o enunciado. A professora informará que terão 15 minutos para resolver o problema usando a mesma metodologia que no problema anterior.
Trabalho autónomo dos alunos (15 minutos)

Atividade do aluno	**Atividade da professora**
Os alunos podem calcular a medida de amplitude dos dois ângulos pedidos de modo independente. Para calcular a medida de amplitude de JDH os alunos devem ter em conta que LHD é um ângulo raso e GHE é um ângulo interno de um quadrado logo $L\hat{H}D = 180^\circ$ e $G\hat{H}E = 90^\circ$ assim $D\hat{H}J = 180^\circ - E\hat{H}G - G\hat{H}L = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ Sabendo que $D\hat{J}H = 125^\circ$ porque os ângulos EJC e DJH são verticalmente opostos, então $J\hat{D}H = 180 - D\hat{J}H - J\hat{H}D = 180^\circ - 125^\circ - 30^\circ = 25^\circ$ porque a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Para calcular a medida de amplitude de EIC basta ter em conta que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um	A professora irá circular pela sala observando as resoluções dos alunos e apoiando-os nas suas dificuldades. Assim com, incentivar os alunos para justificarem todos os cálculos.

quadrilátero é igual a $360°$ e que IEJ e ICJ são ângulos internos de quadrados logo a sua medida de amplitude é igual a $90°$. Assim $E\hat{I}C = 360 - I\hat{E}J - I\hat{C}J - E\hat{J}C = 360° - 90° - 90° - 125° = 55°$ Os alunos devem dar como resposta que a medida de amplitude do ângulo JDH é igual a $25°$ e a medida de amplitude do ângulo EIC é igual a $55°$. **Erros e Dificuldades:** - Não conseguir calcular a medida de amplitude do ângulo JDH por falta de estratégias. - Assumir que o triângulo $[DHJ]$ é isósceles. - Não identificar que EJC e DJH são ângulos verticalmente opostos. - Não identificar o quadrilátero $[EICJ]$ e por essa razão não conseguir perceber que a soma das medidas de amplitude dos seus ângulos é igual a $360°$. - Não identificar os ângulos IEJ e ICJ como ângulos internos de quadrados. - Não justificar os cálculos.	**Apoio da Professora:** - O que precisarias de saber para calcular a medida de amplitude desse ângulo? E podes saber isso? Como? - O enunciado fornece dados suficientes que permitam afirmar que o triângulo é isósceles? - O que sabes sobre o ângulo DJH? Podes estabelecer alguma relação com ângulos que já saibas a sua medida de amplitude? - Que polígonos observas na figura? O que podes dizer sobre esses polígonos? - Dada a informação do enunciado podemos saber logo a medida de amplitude de alguns ângulos? O que sabemos sobre a medida de amplitude dos ângulos internos de um quadrado? - Por que razão fazer esse cálculo? Deves escrever essa justificação junto do cálculo.

Discussão coletiva (10 minutos)

A professora selecionará um dos alunos para apresentar a sua resolução no quadro e explicar aos colegas como pensou. A professora deve fazer algumas questões para envolver os alunos na discussão:

- O que pede o problema?
- Por onde podemos começar?
- O que precisamos de saber para calcular a medida de amplitude desse ângulo? Temos dados suficiente para isso?
- Qual a resposta ao problema?

Durante a discussão a professora deverá apelar à justificação de todos os passos e à utilização de uma notação adequada, no caso de surgirem dificuldades a professora poderá colocar as mesmas questões previstas para o apoio no trabalho autónomo.

<table>
<tr><th colspan="2">3º Momento: Distribuição e apresentação da terceira e quarta questão da tarefa (3 minutos)</th></tr>
<tr><td colspan="2">A professora irá distribuir a terceira e quarta questões da ficha de trabalho pela turma e irá pedir a um dos alunos para ler o enunciado. Na terceira questão deve ficar claro qual o ângulo que tem medida de amplitude de 30° e que o ponto P é o ponto de partida e de chegada do robô. A professora deve ainda informar os alunos que têm 15 minutos para realizar as duas questões (a caneta) justificando todos os cálculos e raciocínios.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Trabalho autónomo dos alunos (15 minutos)</th></tr>
<tr><th>Atividade do aluno</th><th>Atividade da professora</th></tr>
<tr><td>Questão 3:
Uma vez que o robô vai girar sempre $30°$ para a direita, até voltar ao ponto de partida, o seu trajeto vai representar a fronteira de um polígono regular onde a medida de amplitude de cada ângulo externo será de $30°$.
Como um polígono de n lados tem n ângulos externos então o polígono vai ter 12 lados ($360°: 30° = 12$). Como para formar cada lado o robô dá 5 passos então o robô dará 60 ($12 \times 5 = 60$) passos até chegar ao ponto de partida.</td><td>A professora irá circular pela sala observando as resoluções dos alunos e apoiando-os nas suas dificuldades. Assim com, incentivar os alunos para justificarem todos os cálculos. A professora deve também observar as estratégias utilizadas pelos alunos de modo a preparar o momento da discussão.</td></tr>
<tr><td>Erros e Dificuldades:
- Não compreender que o percurso formado pelo robô irá originar a fronteira de um polígono.
- Não identificar que os ângulos externos do polígono terão de medida de amplitude 30°.
- Não relacionar os ângulos dados como a sua soma.
- Responder que o robô dá 12 passos para voltar ao ponto de partida.

Questão 4:
Os alunos podem optar por usar uma estratégia de tentativa e erro ou recorrer às equações para dar resposta a esta questão.

Hipótese 1:
Os alunos podem começar por identificar a soma dos ângulos internos e externos de vários polígonos e comparar os resultados até que a soma dos ângulos internos seja o dobro da soma dos ângulos externos. Esses dados podem ser apresentados de modo mais desorganizado ou por exemplo através de uma tabela.</td><td>Apoio da Professora:
- Se continuássemos a desenhar o trajeto do robô qual a figura que iriamos obter?
- O que representa o ângulo com medida de amplitude de 30° nessa figura?
- O que sabemos sobre os ângulos externos? E no caso do polígono regular o que podemos dizer sobre os seus ângulos externos?
- Quantos passos dá o robô em cada lado do polígono? Sabendo o número de lados o que podes dizer?</td></tr>
</table>

Número de lados do polígono	Soma dos ângulos internos	Soma dos ângulos externos
3	180°	360°
4	360°	360°
5	540°	360°
6	720°	360°

Hipótese 2:

Uma vez que os alunos já conhecem a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono de n lados podem traduzir o enunciado por meio de uma equação.

$$\mathbf{(n-2)\times 180 = 2\times 360 \Leftrightarrow}$$
$$\mathbf{\Leftrightarrow 180n - 360 = 720 \Leftrightarrow}$$
$$\mathbf{\Leftrightarrow 180n = 720 + 360 \Leftrightarrow}$$
$$\mathbf{\Leftrightarrow 180n = 1080 \Leftrightarrow n = 6}$$

Os alunos devem responder que o polígono regular nestas condições é o hexágono regular.

Erros e Dificuldades:

- Não se recordarem da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono de n lados.
- Identificar o polígono em que a soma dos ângulos externos é o dobro da soma dos ângulos internos.
- Não equacionar bem o problema.
- Dar como resposta: Hexágono.

Apoio da Professora:

- Como chegamos a essa fórmula? Em que polígonos podemos decompor os vários polígonos para saber qual a soma dos seus ângulos internos?
- Qual a relação que se pretende? Onde podes encontrar essa relação na tua tabela?
- O que representa o primeiro membro da equação? E o segundo? É essa a relação que se pretende?
- Qual a pergunta realizada? Um hexágono é sempre um polígono regular?

Discussão coletiva (15 minutos)

Questão 3:

A professora selecionará um dos alunos para apresentar a sua resolução no quadro e explicar aos colegas como pensou. A professora deve fazer questionar a turma se concorda com a resolução do colega e caso surjam dúvidas deve colocar a dúvida a turma de modo a envolver todos os alunos na discussão.

Caso surjam muitas dificuldades a professora poderá ainda colocar as mesmas questões previstas para o apoio no trabalho autónomo.

Questão 4:

A professora selecionará um dos alunos que tenha recorrido a uma estratégia de tentativa e erro para apresentar a sua resolução no quadro e explicar como pensou. Em seguida, outro aluno que tenha optado por resolver a questão por meio de uma equação também irá apresentar a sua resolução.

Pretende-se que os alunos valorizem as duas estratégias de resolução pois permitem encontrar a resposta à questão apresentada. Contudo, a professora deve também chamar à atenção que para casos mais simples a tentativa e erro é uma estratégia viável, mas no caso de a relação se verificar para um polígono com um maior número de lados essa estratégia poderia levar bastante tempo.

Avaliação formativa
- Observação direta, com foco no interesse e no envolvimento das tarefas propostas, e na qualidade da participação. - Recolha das produções dos alunos com o objetivo de verificar quais foram as suas aprendizagens e para poder refletir sobre a aula e reforçar aprendizagens menos conseguidas em aulas posteriores.

Pedagogia diferenciada
Todos os alunos realizarão as mesmas tarefas.

Anexo VI- Plano de Aula do dia 10 de abril

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190

Plano de Aula

Data/ Hora: 10 de Abril às 11h45 **Sala:** 11 **Turma:** 7.º 1.º

Sumário Lições n.º 107 e 108
Classificação de quadriláteros - resolução de problemas.

Tópicos/subtópicos
- Classificação de quadriláteros.

Objetivos específicos
- Identificar e distinguir os diferentes quadriláteros. - Desenvolver a capacidade de resolver problemas com quadriláteros.

Capacidades transversais
Resolução de problemas. Comunicação matemática.

Conhecimentos prévios
- Reconhecer as caraterísticas específicas de cada um dos quadriláteros; - Estabelecer hierarquias entre os diferentes quadriláteros. - Reconhecer o valor da soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

Recursos	
Do professor	**Dos alunos**
- Planificação da aula; - Quadro branco e marcador; - Régua e compasso.	- Ficha de trabalho n.º 7; - Lápis, borracha e caneta; - Régua, transferidor e compasso.

Metodologia de trabalho
- Trabalho a pares. - Discussão coletiva das resoluções obtidas.

Momentos da aula	
1º Momento: Sumário, distribuição e apresentação da primeira parte da ficha de trabalho **IX.** Trabalho autónomo dos alunos.	5 minutos 25 minutos

I. Discussão coletiva.	25 minutos
2º Momento: Distribuição e apresentação da segunda parte da ficha de trabalho	5 minutos
I. Trabalho autónomo dos alunos.	15 minutos
II. Discussão coletiva.	15 minutos

Desenvolvimento da aula

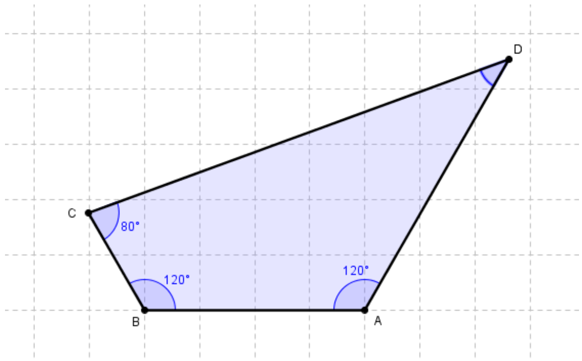
<table>
<tr><th colspan="2">2º Momento: Distribuição e apresentação da segunda parte da ficha de trabalho (5 minutos)</th></tr>
<tr><td colspan="2">A aula iniciará com o sumário escrito no quadro. Em seguida a professora irá distribuir a primeira parte da ficha de trabalho pela turma e irá selecionar um aluno para ler o enunciado dos problemas apresentados e esclarecer eventuais dúvidas. A professora informará que terão 25 minutos para resolver os problemas sendo que estes serão resolvidos a caneta e caso os alunos queiram abandonar algum dos seus raciocínios devem indicá-lo e continuar a sua resolução, e que no final da aula a tarefa será recolhida.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Trabalho autónomo dos alunos (25 minutos)</th></tr>
<tr><th>Atividade do aluno</th><th>Atividade da professora</th></tr>
<tr><td>Questão 1:
Em primeiro lugar os alunos devem identificar que num trapézio isósceles os ângulos adjacentes à mesma base são geometricamente iguais. Em seguida podem optar por diversas estratégias.

Hipótese 1:
Os alunos podem pensar que visto que dois dos ângulos internos tem de medida de amplitude $\mathbf{120°}$, os outros dois ângulos internos também tem de ser geometricamente iguais, assim o ângulo desconhecido têm de ter de medida de amplitude $\mathbf{80°}$. Mas como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $\mathbf{360°}$ e $\mathbf{120° + 120° + 80° + 80°}$ não é igual a $\mathbf{360°}$ então o que a amiga da Teresa escreveu não é verdadeiro.

Hipótese 2:
Por outro lado os alunos podem calcular a medida de amplitude do ângulo desconhecido, α, através de uma equação tendo em conta que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um quadrilátero é $\mathbf{360°}$ então $\mathbf{120° + 120° + 80° + \boldsymbol{\alpha} = 360° \Leftrightarrow 320° + \boldsymbol{\alpha} = 360° \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = 360° - 320° \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = 40°}$.
Uma vez que as medidas de amplitude dos ângulos internos do quadrilátero são 120°, 120°, 80° e 40° então este não pode ser um trapézio isósceles porque não tem os ângulos adjacentes às bases geometricamente iguais.

Hipótese 3:
Os alunos podem ainda optar por desenhar um quadrilátero com as medidas de amplitude dos ângulos internos dadas e observar que o quadrilátero obtido não é um trapézio pois não tem um par de lados</td><td>A professora irá circular pela sala observando as resoluções dos alunos e apoiando-os nas suas dificuldades. Assim como, incentivar os alunos para explicarem os seus raciocínios.</td></tr>
</table>

paralelos.



Resposta ao problema: O que a Teresa escreveu não está certo pois com as medidas de amplitude dadas não é possível construir um trapézio isósceles.

Erros e Dificuldades:
- Os alunos podem apenas somar os vários valores dados e como a soma é inferior a 360° concluir que o que a Teresa escreveu é possível sem ter em atenção as propriedades do trapézio isósceles.
- Não compreender quais as caraterísticas dos quadriláteros que é necessário mobilizar para a resolução do problema.

Apoio da Professora:
- Sabendo que a soma das medidas de amplitude dos seus ângulos internos é 360° eu posso concluir que o quadrilátero construído é um trapézio isósceles? Quais as caraterísticas do trapézio isósceles?
- Quais as informações que nos são dadas sobre a construção realizada? O que sabemos sobre a relação dos ângulos internos de um trapézio isósceles?
- A que é igual a soma dos quatro ângulos internos de um trapézio?

Questão 2:
Os alunos devem ter em conta que um losango tem os ângulos internos opostos geometricamente iguais.
Assim o ângulo BCD tem de medida de amplitude $\mathbf{75°}$ pois é o ângulo oposto ao ângulo DAB. A soma das medidas de amplitude dos dois ângulos restantes é de $\mathbf{210°}$ $(\mathbf{360°} - \mathbf{75°} - \mathbf{75°})$ visto que a soma dos ângulos internos do losango é $\mathbf{360°}$. Como estes dois ângulos são opostos também são geometricamente iguais assim $\boldsymbol{A\hat{B}C} = \boldsymbol{C\hat{D}A} = \mathbf{210°}:\mathbf{2} = \mathbf{105°}$.

Resposta ao problema: O ângulo BCD tem de medida de amplitude $\mathbf{75°}$ e os ângulos ABC e CDA tem de medida de amplitude $\mathbf{105°}$.

Erros e Dificuldades:
- Não conseguir construir uma estratégia para a resolução do problema.

Apoio da Professora:
- Que caraterísticas tem um losango? O que sabemos sobre a relação entre os seus ângulos internos?

Questão 3:
Para encontrar as medidas de comprimento dos lados do paralelogramo os alunos têm duas hipóteses.

Hipótese 1:

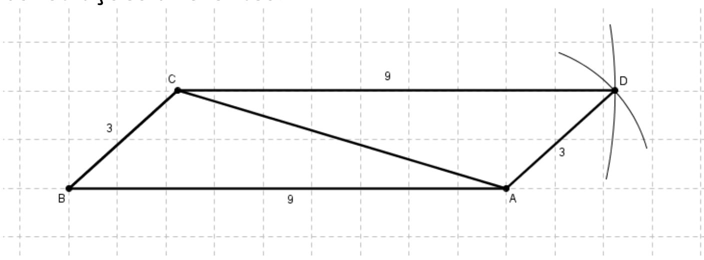
Em primeiro lugar os alunos têm de recordar que um paralelogramo tem os lados opostos geometricamente iguais. Em seguida podem encontrar a medida de comprimento dos lados do paralelogramo por tentativa e erro.

Hipotese 2:

Em primeiro lugar os alunos têm de recordar que um paralelogramo tem os lados opostos geometricamente iguais assim se $\boldsymbol{a}$ representar a medida de comprimento de um dos lados então $\boldsymbol{a/3}$ representa a medida de comprimento de outro lado. O problema pode-se equacionar então da seguinte forma:

$$\boldsymbol{a + a + \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = 24 \Leftrightarrow 2a + \frac{2a}{3} = 24 \Leftrightarrow}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \frac{8a}{3} = 24 \Leftrightarrow a = 9}$$

Assim, os alunos podem concluir que um dos lados mede 9 e outro mede 3. Assim, os alunos podem construir dois dos lados e com o material de desenho tendo em conta que os lados opostos são paralelos e geometricamente iguais construir os outros dois lados do paralelogramo. Com apenas estas informações os alunos podem obter construções diferentes.



Exemplo de uma construção do paralelogramo

Erros e Dificuldades:

- Não identificar as caraterísticas do paralelogramo necessárias para a resolução do problema.
- Não conseguir equacionar o problema, para descobrir as medidas de comprimento dos lados do paralelogramo.
- Não conseguir realizar a construção do paralelogramo.

Apoio da Professora:

- O que carateriza o paralelogramo? O que sabemos sobre a relação dos seus lados?
- Tendo em conta que sabemos o perímetro como podemos descobrir a medida de comprimento dos lados do paralelogramo.
- Tendo as medidas de comprimento dos lados o que é necessário garantir para que a construção seja um paralelogramo?

Discussão coletiva (25 minutos)

Questão 1:

Caso se verifique as diferentes hipóteses de resoluções apresentadas a professora deve dividir o quadro em duas colunas e selecionar um aluno que tenha resolvido o problema segundo a hipótese 1 ou 2 tendo em conta que apresentam o mesmo nível de complexidade para apresentar a sua resolução no quadro e explicar aos colegas como pensou e em simultâneo um aluno que tenha optado pela hipótese de resolução 3 que após efectuar a construção deve explicar o seu raciocínio. A professora deve questionar a turma se concorda com as resoluções dos colegas e caso surjam dúvidas deve colocar a dúvida a turma de modo a envolver todos os alunos na discussão.

Questão 2:

A professora selecionará um aluno para apresentar a sua resolução no quadro e explicar aos colegas como pensou. A professora deve questionar a turma se concorda com a resolução do colega e caso surjam dúvidas deve colocar a dúvida a turma de modo a envolver todos os alunos na discussão.

Questão 3:

A professora deve dividir o quadro em duas colunas e selecionar dois alunos que tenham optado por diferentes estratégias de resolução (caso se verifique esta diversidade) para apresentarem a sua resolução no quadro (em simultâneo) e explicarem aos colegas como pensaram. A professora deve questionar a turma se concorda com a resolução do colega e caso surjam dúvidas deve colocar a dúvida à turma de modo a envolver todos os alunos na discussão. A professora deve ainda ilustrar a construção do paralelogramo com o compasso e régua uma vez que a diagonal divide o paralelogramo em dois triângulos geometricamente iguais. A professora também deve alertar os alunos que apesar de ser possível obter paralelogramos diferentes e em diferentes posições as suas construções têm de ter os lados opostos paralelos e geometricamente iguais para que seja um paralelogramo. É também interessante explorar porque razão a construção não é única, visto que, para construir o primeiro triângulo apenas temos as medidas de comprimento de dois dos lados.

Nas várias questões caso os alunos não façam esboços da figura associada ao problema a professora poderá faze-lo de modo a que os alunos possam acompanhar melhor as explicações da professora e dos colegas.

2º Momento: Distribuição e apresentação da segunda parte da ficha de trabalho (5 minutos)

A professora irá distribuir a segunda parte da ficha de trabalho pela turma e irá selecionar um aluno para ler o enunciado. A professora informará que terão 15 minutos para resolver a tarefa sendo que esta será resolvida a caneta e caso os alunos queiram abandonar algum dos seus raciocínios devem indicá-lo e continuar a sua resolução. Além disso, a professora informará que no final da aula a tarefa será recolhida.

Trabalho autónomo dos alunos (15 minutos)

Atividade do aluno	Atividade da professora
Questão 1: Os alunos devem indicar se as afirmações são verdadeiras ou falsas e justificar a sua resposta	A professora irá circular pela sala observando as resoluções dos alunos e apoiando-os nas suas dificuldades.

<table>
<tr><td>em ambos os casos.

Alínea a:
Os alunos devem indicar que a afirmação e falsa. Temos por exemplo o trapézio escaleno ou o trapézio retângulo que não tem dois lados com a mesma medida de comprimento.

Alínea b:
A afirmação é verdadeira, uma vez que, um papagaio tem dois lados consecutivos geometricamente iguais e o losango tem todos os lados geometricamente iguais.

Alínea c:
A afirmação é falsa. Como contra exemplo os alunos podem indicar o trapézio retângulo que têm dois ângulos retos e não é isósceles.

Alínea d:
A afirmação é falsa. Como contra exemplo os alunos devem dar o exemplo do retângulo que é um paralelogramo e têm três ângulos retos.

Alínea e:
A afirmação é verdadeira uma vez que o losango é caraterizado por ter todos os lados geometricamente iguais e as suas diagonais são perpendiculares.

Erros e Dificuldades:
- Na alínea a os alunos podem ser influenciados pelo problema anterior e considerarem apenas o trapézio isósceles que tem dois lados com a mesma medida de comprimento e assim responder que a afirmação é verdadeira.
- Não identificarem as propriedades necessárias dos vários quadriláteros.</td>
<td>Assim com, incentivar os alunos para justificarem todas as respostas.

Apoio da Professora:
- Que tipo de trapézios conheces? Todos eles têm dois lados com a mesma medida de comprimento.
- O que sabes sobre os quadriláteros mencionados? Não existem outros quadriláteros que satisfaçam as propriedades indicadas?
- Sugerir aos alunos em caso de dúvida que consultem o caderno.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Discussão coletiva (15 minutos)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Questão 1:
A professora selecionará um aluno para apresentar a resolução das duas primeiras alíneas no quadro e explicar aos colegas como pensou. A professora deve questionar a turma se concorda com a resolução do colega e caso surjam dúvidas deve colocar a dúvida à turma de modo a envolver todos os alunos na discussão. O mesmo será efetuado para as duas alíneas seguintes e por fim com a colaboração dos alunos a professora escreverá a resposta à última alínea no quadro.</td></tr>
</table>

Avaliação formativa
- Observação direta, com foco no interesse e no envolvimento das tarefas propostas, e na qualidade da participação.

- Recolha das produções dos alunos com o objetivo de verificar quais foram as suas aprendizagens e para poder refletir sobre a aula e reforçar aprendizagens menos conseguidas em aulas posteriores.

Pedagogia diferenciada
Todos os alunos realizarão as mesmas tarefas.

Anexo VII- Fichas de trabalho n.º1

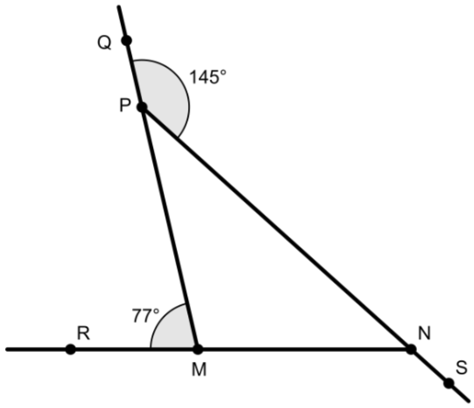
ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA

Matemática do 3º ciclo **Ficha de trabalho nº1**

Nome: ____ Nº ___ Turma: ____ Data: ______

Problemas com ângulos[1]

1. Observa a figura seguinte:

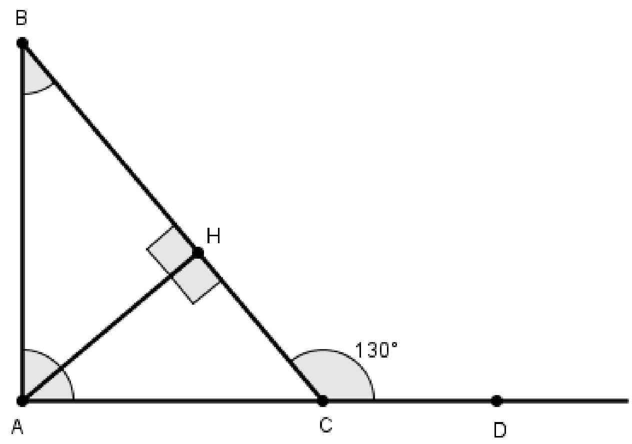


a) Calcula a medida de amplitude de cada um dos ângulos internos do triângulo [MNP].

b) Determina a soma das medidas de amplitude dos ângulos externos do triângulo.

[1] Adaptada de Conceição, A., & Almeida, M. (2014). *Matematicamente falando 7*. Porto: Areal editores.

2. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em A; $[AH]$ é perpendicular a $[BC]$ e o ângulo externo em C mede $130°$.



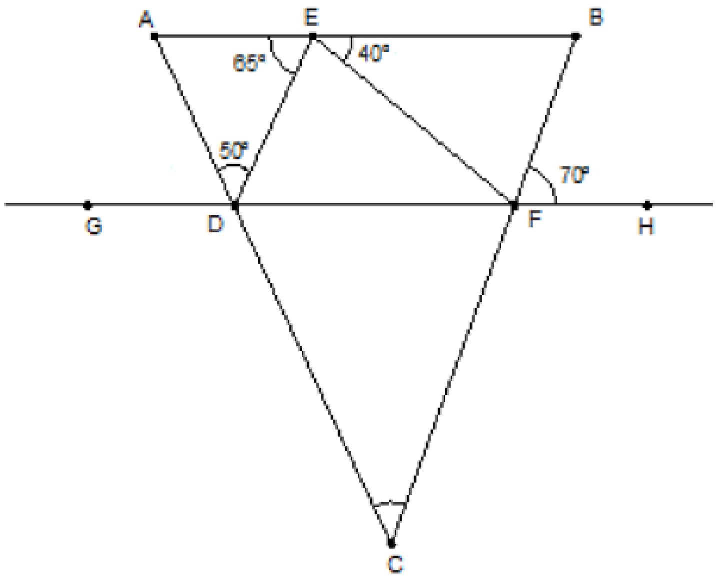
Calcula as medidas de amplitude dos ângulos CAH, BAH e ABC.

ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA

Matemática do 3º ciclo **Ficha de trabalho nº2**

Problema com ângulos[1]

Na seguinte figura estão representados os triângulos [ABC] e [DEF]. A reta GH é paralela ao lado [AB]. Qual é a medida de amplitude do ângulo ACB?



[1] Adaptada de Ponte, J. P., Oliveira P., & Candeias N. (2009). *Triângulo e Quadriláteros: Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7.º ano.* Lisboa: DGIDC.

Anexo IX- Fichas de trabalho n.º3

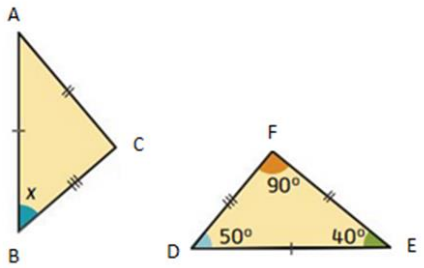
ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA

Matemática do 3º ciclo | **Ficha de trabalho nº3**

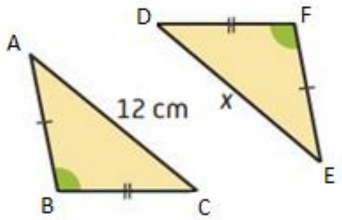
Parte I- Critérios de Igualdade de triângulos[1]

1. Identifica em cada uma das alíneas o critério que permite afirmar que os dois triângulos apresentados são geometricamente iguais e determina os valores de x pedidos.

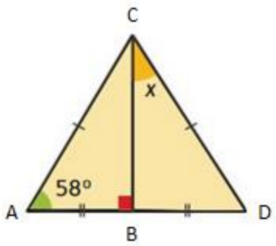
a) $\overline{AB} = \overline{ED}$, $\overline{AC} = \overline{EF}$ e $\overline{BC} = \overline{DF}$



b) $A\hat{B}C = E\hat{F}D$, $\overline{AB} = \overline{EF}$ e $\overline{BC} = \overline{FD}$



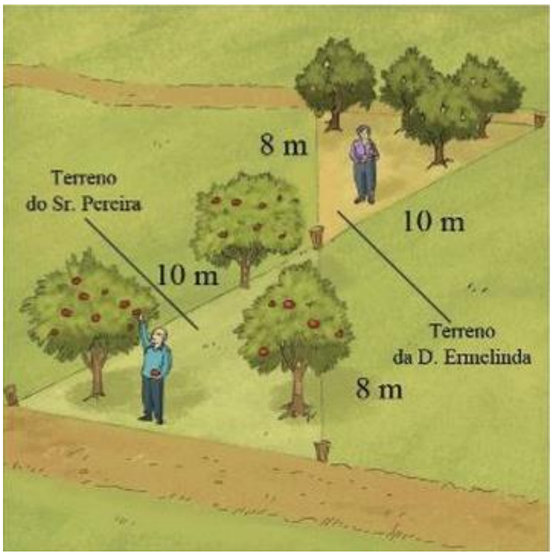
c) $\overline{AC} = \overline{DC}$ e $\overline{AB} = \overline{DB}$



[1] Adaptada de Conceição, A., & Almeida, M. (2014). *Matematicamente falando 7: Caderno de atividades*. Porto: Areal editores.

Parte II – Resolução de problemas

1. O senhor Pereira tinha um terreno onde cultivava maçãs. Ao lado do terreno do senhor Pereira estava o terreno da dona Ermelinda, onde ela se dedicava ao cultivo de pêras.



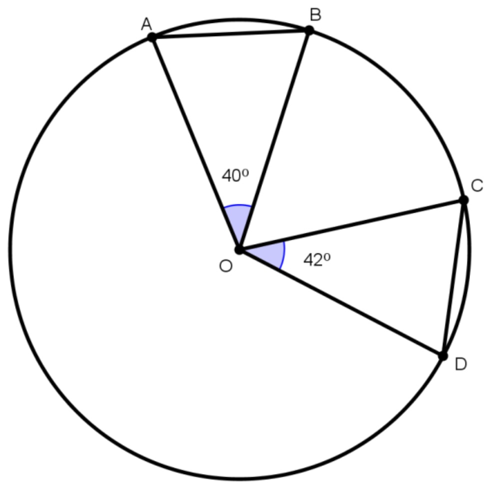
Um dia apareceu o senhor Tomé que queria comprar um dos terrenos, reuniu com o senhor Pereira e com a dona Ermelinda e disse-lhes: "Estou interessado em comprar o terreno maior!".

Como ambos os proprietários queriam vender os seus terrenos, apressaram-se logo a dizer que o seu era o maior.

Observa a figura e diz se algum dos proprietários tem razão. [2]

[2] Adaptado de Sequeira, A. F., Andrade, A. P., Almeida, C. & Beja, E. (2014). *Olá Matemática – matemática 5.º ano*. Porto: Porto Editora.

2. Tendo em conta que $\overline{AB} = \overline{CD}$, diz se a figura é possível ou impossível. Justifica a tua resposta. [3]



[3] Adaptada de Ponte, J. P., Oliveira P., & Candeias N. (2009). *Triângulo e Quadriláteros: Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7.º ano*. Lisboa: DGIDC.

Anexo X- Fichas de trabalho n.º6

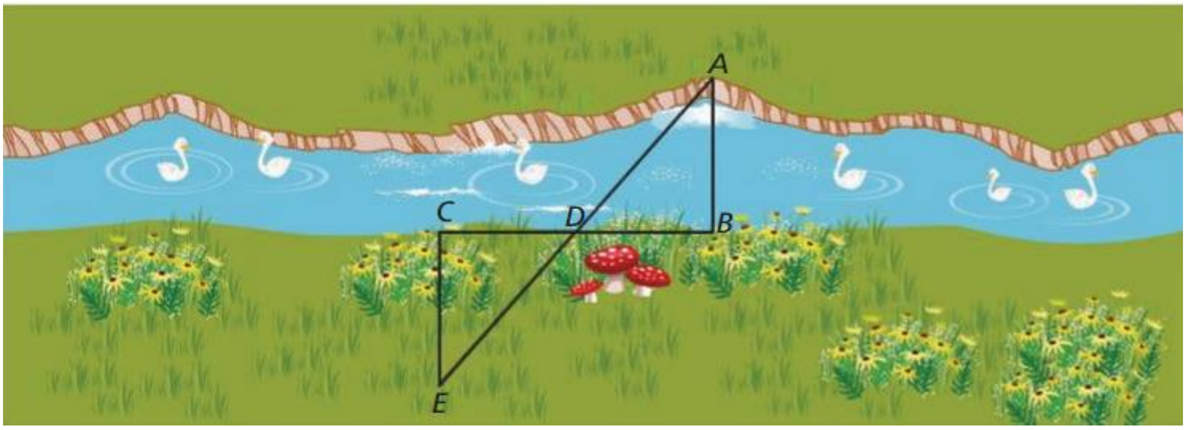
ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA

Matemática do 3º ciclo **Ficha de trabalho nº6**

Nome: ______________________________________ Nº ___ Turma: ____ Data: ______

Problemas com polígonos

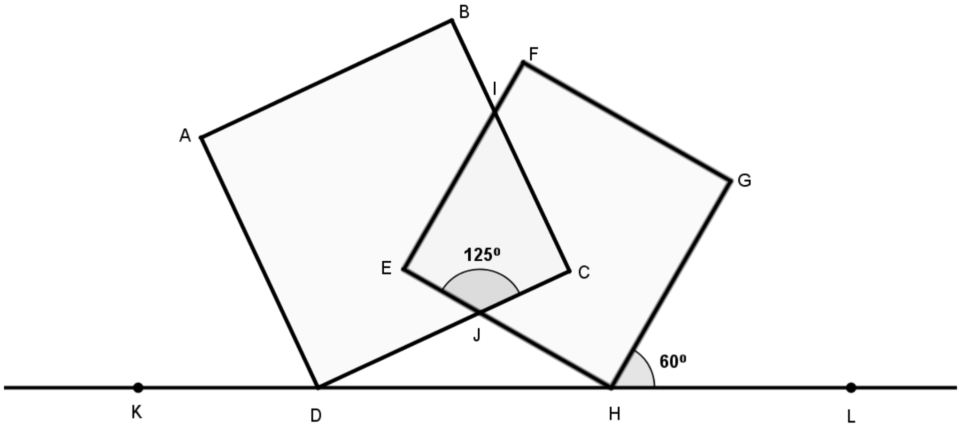
1. Para determinarem a largura de um riacho, a Lia e os amigos colocaram varas em dois pontos, A e B, das suas margens. Depois, uma outra vara no ponto D e outra no ponto C de tal modo que B, D e C são colineares, BD é perpendicular a AB e $\overline{BD} = \overline{CD}$. Por fim, puseram uma última vara no ponto E de forma a que A, D e E fossem colineares e CE fosse perpendicular a CB.



Prova que desta forma e medindo $[CE]$, eles obtém a distância pretendida.[1]

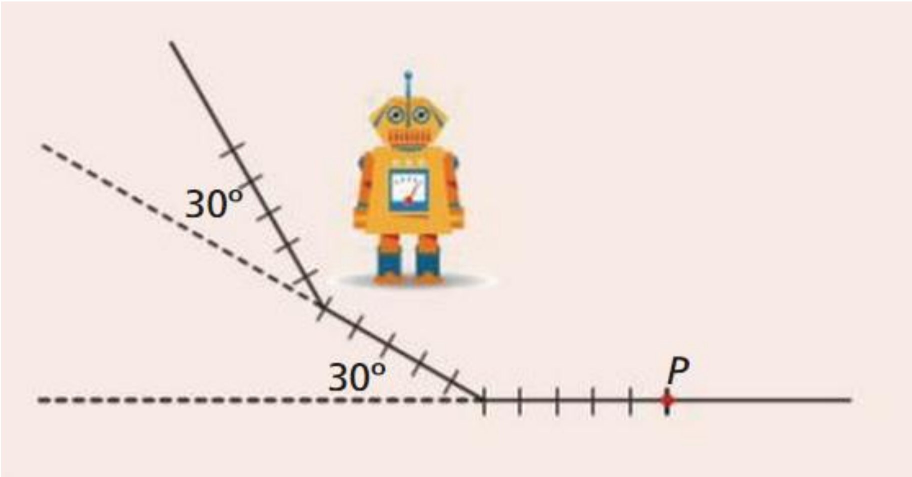
[1] Adaptada de Conceição, A., & Almeida, M. (2014). *Matematicamente falando 7.* Porto: Areal editores.

2. Na figura estão representados a reta DH e os quadrados [ABCD] e [EFGH] parcialmente sobrepostos. Determina as medidas de amplitude dos ângulos JDH e EIC. Apresenta os teus cálculos e as respetivas justificações.[2]



[2] Adaptada de Ponte, J. P., Oliveira P., & Candeias N. (2009). *Triângulo e Quadriláteros: Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7.º ano*. Lisboa: DGIDC.

3. Um robô é programado para dar 5 passos e girar 30° para a direita. Quantos passos ele dá para voltar ao ponto de partida, P?[3]



4. Qual é o polígono regular em que a soma dos ângulos internos é o dobro da soma dos ângulos externos?

[3] Adaptada de Conceição, A., & Almeida, M. (2014). *Matematicamente falando 7.* Porto: Areal editores.

Anexo XI- Fichas de trabalho n.º7

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA

Matemática do 3º ciclo **Ficha de trabalho nº7**

Nome: ____ Nº ___ Turma: ____ Data: ______

Parte I- Problemas com quadriláteros

1. A amiga da Teresa escreveu "Desenhei um trapézio isósceles. Três dos seus ângulos internos têm as seguintes amplitudes: $120°$, $120°$ e $80°$." O que pensas acerca do que a amiga da Teresa escreveu?[1]

2. Num losango $[ABCD]$ o ângulo DAB tem $75°$ de medida de amplitude. Determina a amplitude de cada um dos outros ângulos internos.[2]

[1] Adaptada de Neves, M. A. F., & Silva, A. P. (2014). *Matemática 7*. Porto: Porto Editora.
[2] Adaptada de Conceição, A., & Almeida, M. (2014). *Matematicamente falando 7*. Porto: Areal editores.

3. Desenha um paralelogramo, sabendo que:
Tem de perímetro $24\ cm$;
Um lado tem um terço do comprimento do outro.

Apresenta os cálculos que efetuares.[3]

[3] Adaptada de Faria, L., Guerreiro, L. & Almeida, P., R. (2014). *Matemática Dinâmica 7.* Porto: Porto Editora.

Parte II- Verdadeiro ou Falso

1. Indica, justificando, se as afirmações são verdadeiras ou falsas.[4]

   a) Qualquer trapézio tem dois lados com a mesma medida de comprimento.

   b) Um losango é um papagaio.

   c) Um trapézio com dois ângulos geometricamente iguais é isósceles.

   d) Um paralelogramo com três ângulos retos é um quadrado.

   e) Um paralelogramo que tem os lados geometricamente iguais e as suas diagonais são perpendiculares é um losango.

[4] Adaptada de Conceição, A., & Almeida, M. (2014). *Matematicamente falando 7*. Porto: Areal editores.

Anexo XII- Guião de observação de aulas

Momentos de trabalho autónomo

- Atitudes dos alunos perante o problema (envolvimento, interesse, atenção).
- Questões colocadas a colegas (dúvidas, auxílios).

Momentos de discussão coletiva

- Atitudes dos alunos durante a discussão (participação, interesse, atenção).
- Dúvidas apresentadas durante as discussões coletivas (questões colocadas, resposta da professora).
- Outras estratégias propostas pelos alunos para além das apresentadas no quadro.

Anexo XIII- Tarefas da Entrevista

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA

Matemática do 3º ciclo **Entrevista**

Nome: ____ Nº ___ Turma: ____ Data: ______

1. A Maria construiu um quadrilátero e informou que:

- um dos ângulos tinha de medida de amplitude 150°;

- o ângulo $\boldsymbol{\beta}$ tem o triplo da medida de amplitude do ângulo $\boldsymbol{\alpha}$;

- o ângulo $\boldsymbol{\gamma}$ tem mais dez graus de medida de amplitude que o ângulo $\boldsymbol{\alpha}$.

Quais as medidas de amplitude dos ângulos α, β e γ ?

2. Qual o polígono regular em que a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos e externos é $900°$?

Anexo XIV-Guião da Entrevista

A entrevista que se irá realizar faz parte do estudo que tem vindo por mim a ser desenvolvido durante as aulas sobre a resolução de problemas envolvendo polígonos. Assim, a entrevista consistirá na resolução, a pares, de dois problemas que deverão ser resolvidos a caneta e caso queiram abandonar algum dos raciocínios ou corrigir eventuais erros basta colocarem o que pretendem abandonar entre parêntesis. Além disso, caso o par tenha dúvidas pode colocar as suas questões ao longo da entrevista.

Durante a entrevista serão colocadas algumas questões com o objetivo de compreender melhor as opções tomadas pelos alunos e as suas dificuldades e para que justifiquem todos os seus passos (caso não se verifique essa justificações por escrito). Além disso, poderei colocar algumas questões de modo a auxiliar os alunos nas suas dificuldades.

Possíveis questões a realizar durante a entrevista:

Problema 1

- Porque razão optaram por resolver o problema desse modo?

- Como calcularam a medida de amplitude dos ângulos?

- O que sabem sobre as medidas de amplitude dos ângulos de um quadrilátero?

- Qual a resposta do problema?

- Qual a maior dificuldade que sentiram na resolução deste problema?

Problema 2

- Porque razão optaram por resolver o problema desse modo?

- Por que razão efectuaste esse cálculo? O que significa o 180° neste caso? (caso os alunos dividam 900 por 180 onde este último valor representa o ângulo interno e o ângulo externo adjacente)

- Como sabemos a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos de um polígono qualquer? Como chegamos a essa fórmula? Em que polígonos podemos decompor os vários polígonos para saber qual a soma dos seus ângulos internos? (caso esta dificuldade persista os alunos poderão ter acesso à fórmula).

- O que sabemos sobre a soma da medida de amplitude dos ângulos externos de um polígono?

- O que representa o valor 900°?

- O que representa o primeiro membro da equação? E o segundo membro? (caso os alunos apresentem uma equação)

- Qual a resposta do problema?

- Qual a maior dificuldade que sentiram na resolução deste problema?