UNIVERSIDADE DE LISBOA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A MATEMÁTICA DAS ELEIÇÕES

Carla Guida da Silva Cardoso

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

2009

UNIVERSIDADE DE LISBOA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A MATEMÁTICA DAS ELEIÇÕES

Dissertação orientada pelo Prof. Doutor Jorge Nuno Silva

Carla Guida da Silva Cardoso

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

2009

Many forms of Government have been tried, and will be tried in this world of sin and woe. No one pretends that democracy is perfect or all-wise. Indeed, it has been said that democracy is the worst form of government, except for those that have been tried from time to time.

Winston Churchill

Apresento um agradecimento especial ao Professor Doutor Jorge Nuno Silva pelo seu empenho, pela sua disponibilidade e pela confiança que depositou em mim.

À minha família …

Índice

Página:

Resumo

Enquanto membros de sociedades democráticas, os actos eleitorais são para nós uma presença constante, não existindo o hábito de questionar a sua pertinência ou validade. Mas uma breve reflexão sobre as eleições a que vulgarmente assistimos mostra uma realidade perturbadora.

O presente trabalho aborda a temática eleitoral e as decisões do ponto de vista matemático: serão os métodos de contagem de votos que utilizamos justos? Quais os defeitos a apontar-lhes? De que paradoxos sofrem? Que propriedades são indispensáveis? A vontade dos votantes é fielmente reflectida num acto eleitoral?

Na realidade, vai ser possível encontrar situações em que a decisão tomada, ou o candidato eleito, estarão bastante errados. À medida que se lê este documento encontram-se situações paradoxais graves em métodos usados actualmente em muitas nações democráticas. Ao explorar estes casos, tentando perceber as dificuldades inerentes a um processo de decisão, é possível vislumbrar soluções…

As soluções (ou possibilidade de soluções) aqui apresentadas, não sendo sempre óptimas, são bastante aceitáveis e satisfazem o sentido comum de justiça, de real expressão do que pretendem os votantes.

Palavras - Chave

Eleições
Paradoxos
Representação proporcional
Justa representatividade

Abstract

As members of democratic societies, the elections are a constant presence, and their pertinence or value aren't questioned. But when reflecting on the electoral procedures, we commonly see a disturbing reality.

This work approaches the elections and decisions theme from a mathematical point of view: are the electoral methods we use fair? Are there any flaws? Which characteristics do we consider indispensable? Is the voters will really reflected in the elections?

In fact, we find situations in which the decision or the candidate elected will be wrong. As we read this document, we will be facing serious paradoxes in methods used nowadays in many democratic societies. By exploring these situations and trying to understand the problems within an electoral procedure, it's possible to find solutions…

The solutions (or possible solutions) here presented, not always being optimal, are quite acceptable and satisfy the common sense of justice and the need of expressing what the voters really want.

Keywords

Elections
Paradoxes
Apportionment
Fair Representation

I – Prefácio

Nas páginas que se seguem pode encontrar-se o resultado do estudo que desenvolvi a respeito de métodos eleitorais. Deparei-me pela primeira vez com esta problemática quando, há três anos, me foram atribuídas duas turmas de ensino secundário da nova disciplina Matemática Aplicada às Ciências Sociais, sendo este o primeiro tema a tratar no âmbito do seu programa.

Durante esse ano lectivo fiz as pesquisas que me foram possíveis, consultando vários manuais do secundário e algumas referências bibliográficas indicadas nos mesmos, mas ficou-me a noção de que muito estaria ainda por explorar. Deste modo, quando há um ano, no primeiro semestre do mestrado em Matemática para Professores, me propuseram estudar uma temática do meu interesse, no âmbito da disciplina de Seminário, apresentei esta proposta: os métodos eleitorais. Fui orientada pelo Professor Doutor Jorge Nuno Silva, e, com satisfação, apresentei um trabalhado baseado, sobretudo, na obra de Donald Saari: *Decisions and Elections; Explaining the Unexpected.*

À medida que lia o autor Donald Saari, e realizava mais algumas pesquisas, de modo a aprofundar ou esclarecer questões pontuais, pude aperceber-me que muito havia por abordar. Assim, quando no final do ano lectivo reflecti sobre o que estudar neste segundo ano de mestrado, a resposta pareceu-me evidente: teoria matemática das eleições. Foi com muito agrado que recebi do Professor Doutor Jorge Nuno Silva a resposta afirmativa à orientação do meu trabalho.

Durante o presente ano lectivo pude ler várias obras e também alguns artigos publicados em revistas científicas. É uma reflexão sobre os documentos lidos que apresento nas páginas deste trabalho. Comecei por ler as obras de Jonathan Hodge e Richard Klima, *The Mathematics of Voting and Elections: A Hands-On Approach*, e de Donald Saari, *Chaotic Elections! A Mathematician Looks at Voting*, seguindo a sugestão do Professor Doutor Jorge Nuno Silva. No entanto, após a leitura do livro de Hodge e Klima, ficou-me a necessidade de aprofundar a temática dos métodos proporcionais e, assim, passei à leitura de *Fair Representation, Meeting the Ideal of One Man, One Vote,* dos autores Michel Balinski e Peyton Young. Após esta leitura, foi-me apresentado, pelo Professor Doutor Jorge Nuno Silva, o livro de William Poundstone, *Gaming the vote. Why elections aren't fair (and what we can do about it),* que me proporcionou um importante enquadramento cultural e histórico da problemática das eleições. Ficou-me, no entanto, a noção que tinha aprofundado pouco a questão dos índices de poder, pelo que, pesquisando referências bibliográficas, encontrei na obra *Mathematics and Politics; strategy,* *voting, power and proof,* dos autores Alan Taylor e Allison Pacelli, uma excelente ajuda nesta área.

Para melhor compreender a organização deste trabalho, olhemos os capítulos que o compõem.

As problemáticas associadas ao Teorema de Arrow encontrei-as em todas as obras consultadas, pelo que os capítulos que tratam este assunto resultam da análise de bibliografia diversa. Deparei-me com o Teorema de Sen sobretudo no primeiro livro que li de Saari, *Decisions and Elections; Explaining the Unexpected*. No que concerne à demonstração de ambos os teoremas (Arrow e Sen), alguns artigos científicos revelaram-se uma importante ajuda.

O capítulo Métodos posicionais, voto por aprovação e exclusão imediata aborda questões diversas sobre estas três tipologias de métodos e resulta das duas obras de Saari, da edição de Hodge e Klima e também de alguns apontamentos do livro de William Poundstone.

Sobre Sistemas eleitorais ponderados e Referendos, foram as obras de Hodge e Klima e de Taylor e Pacelli que proporcionaram a base de estudo para estas temáticas e impulsionaram, também, a consulta de vários artigos científicos que se revelaram extremamente úteis (sobretudo no capítulo dedicado aos referendos).

Para o estudo dos métodos de divisão proporcional contei com a ajuda inicial de Saari (em *Decisions and Elections; Explaining the Unexpected*) e de Hodge e Klima. Mas não fiquei plenamente satisfeita… Assim, seguindo a sugestão dos próprios autores, dediquei-me à leitura do livro *Fair Representation, Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, obra de referência nesta área. É a partir desta leitura que surge o capítulo dedicado aos métodos de divisão proporcional. Para facilitar a sua consulta incluo as tabelas que servem de base a grande parte dos comentários e factos assinalados no texto; mais informo que tais dados foram por mim tratados com software adequado, que aqui disponibilizo em formato de ficheiro de folha de cálculo (podem encontrar-se numa pasta de ficheiros existente neste mesmo CD, denominada "Dados").

O último capítulo deste documento é um pequeno resumo de alguns factos históricos que considero deliciosos, no sentido de interessantes e facilitadores da compreensão sobre os desenvolvimentos científicos na área das eleições, que pude encontrar na obra de William Poundstone.

À medida que avancei no estudo das várias obras, deparei-me com questões para as quais não estava sensibilizada, como o facto dos resultados eleitorais não dependerem apenas das preferências dos votantes, mas também (ou talvez deva dizer sobretudo…) do método usado para o tratamento dos resultados. Foi para mim inquietante descobrir como a temática eleitoral se cobre de situações paradoxais e complexas: há teoremas que nos garantem ser impossível (ou quase…) desenvolver um acto eleitoral livre de situações paradoxais ou em ambiente de total honestidade da vontade expressa pelos votantes.

Confesso que me surpreenderam os desenvolvimentos com que tive contacto ao realizar este trabalho: conheço alguma geometria, álgebra ou análise, desconhecia esta teoria das eleições que se tornou visível há dois séculos e cujos desenvolvimentos se tornaram mais profundos e volumosos (qualitativa e quantitativamente) desde meados do século XX.

II – A problemática das eleições

Associa-se à ideia de votar o assinalar com uma cruz o candidato preferido, e aguardar pelo vencedor resultante da contagem de todas as cruzes presentes em todos os boletins de votos considerados válidos; o vencedor será o candidato que obtenha maior número de votos. Tal acontece nas eleições em órgãos representativos de estudantes, como o delegado de turma ou a associação de estudantes, nas direcções de clubes desportivos, nos órgãos de poder autárquico e, naturalmente, nas eleições legislativas. Mas será necessariamente assim? Cada votante coloca uma única cruz? A resposta é negativa… Não só há alternativas à simples marcação de uma cruz, como muitas delas são claramente melhores, no sentido em que reflectem mais fielmente a vontade dos votantes.

Considere-se, então, que, em vez de colocar uma única cruz no boletim, se pede aos votantes que listem a sua preferência relativamente a todos os candidatos envolvidos, ordenando-os do primeiro ao último lugar. Esta alteração permite aplicar métodos eleitorais diversos e verificar as suas semelhanças, ou apontar diferenças.

Tome-se a situação abaixo em que treze administrativos de um escritório escolhem o porta-voz que há-de representá-los nas negociações sobre o aumento salarial do próximo ano; os candidatos ao cargo são a Ana, o Bruno e a Carolina. Abreviam-se os três nomes recorrendo à inicial de cada um, e ao dizer que a preferência de um votante é ABC significa que o mesmo prefere em primeiro lugar a Ana, em segundo o Bruno e por último a Carolina. As votações recolhidas encontram-se na tabela abaixo:

Número de votos	Ordenação de preferências
6	ABC
5	BCA
2	CAB

Tabela 2.1.

Se se considerar apenas a primeira preferência de cada votante (o que corresponde ao vulgar assinalar de uma única cruz – o voto plural) vem A vencedor: A: 6 votos, B: 5 votos; C: 2 votos.

Ao permitir que os votantes escolham dois candidatos e contabilizando-os com igual peso tem-se: A: 6 + 2 = 8 votos, B: 6 + 5 = 11 votos; C: 5 + 2 = 7 votos, B será vencedor (este é o chamado voto antiplural, pois discrimina negativamente o candidato que não deve vencer, atribuindo-lhe zero pontos).

Se se atribuírem pontos aos candidatos consoante o seu lugar na lista de preferências de cada votante, fazendo a primeira preferência ter um peso de 2, a segunda preferência um peso de 1 e a última com zero, vem:

A: $2\times 6+0\times 5+1\times 2=14$ pontos;

B: $1\times 6+2\times 5+0\times 2=16$ pontos;

C: $0\times 6+1\times 5+2\times 2=9$ pontos, donde sai B vencedor.

Este método é denominado contagem de Borda e foi desenvolvido em finais do século XVIII por um matemático francês de nome Jean Charles de Borda[1].

Ao eliminar sucessivamente o candidato menos votado enquanto primeira preferência dos votantes (o método a que se chama exclusão imediata, do termo original em inglês: "instant runoff"), vê-se que em primeiro lugar se elimina C (pois tem apenas duas primeiras preferências) e vem a tabela seguinte, mantendo-se naturalmente a ordenação relativa dos demais candidatos.

Número de votos	Ordenação de preferências
6	AB
5	BA
2	AB

Tabela 2.2.

A é o vencedor pois detém 8 primeiros lugares, em detrimento de B que apenas possui 5 votos como primeira preferência.

Ao experimentar quatro métodos encontrou-se A vencendo dois deles e B nos outros dois. Preocupante? Talvez seja, parece que com o mesmo conjunto de dados (os mesmos votantes e exactamente as mesmas ordenações de preferências), pode eleger-se tanto A como B, escolhendo apenas o método adequado. Na realidade, mais do que a intenção dos votantes, um acto eleitoral reflecte o método eleitoral utilizado para processar os votos.

Mas parece que pelo menos C, o candidato aparentemente pior classificado, não ganhará. Será? Experimente-se efectuar comparações a pares entre os candidatos, eliminando sucessivamente aquele que se revelar perdedor.

[1] Jean Charles de Borda (1733 – 1799). Matemático, astrónomo e engenheiro francês.

Entre A e B, A ganha a B com 8 (6 + 2) votos versus 5, elimina-se B; entre A e C, C ganha a A com 7 (5 + 2) votos versus 6, donde C será o vencedor!

Este método denomina-se votação a pares sequencial e torna-se bastante manipulável, pois o resultado depende da ordem pela qual se faz a comparação. Repare-se que ao começar com o par {B, C} tem-se: B ganha a C (11 versus 2); entre A e B, A ganha a B (8 versus 5), donde sai A vencedor. De modo a tornar este método mais justo é aconselhável definir à priori a ordem pela qual serão comparados os candidatos (este é um método muitas vezes usado em competições desportivas). Mas, por muito declarada que seja a manipulação que se levou a cabo com a votação sequencial a pares, a verdade é que foi encontrada uma forma de tornar C vencedor.

Antes de avançar apresente-se um outro método, recorrendo aos dados constantes na tabela seguinte:

Número de votos	Ordenação de preferências
35	NSJ
28	SNJ
20	JNS
17	JSN

Tabela 2.3.

Usando a maioria simples, J vence com 37 votos (S fica com 28 e N com 35). Numa comparação a pares: N $\succ$ S (leia-se N ganha a S) por 55 versus 45; N $\succ$ J por 63 versus 37; S $\succ$ J por 63 versus 37, ou seja, N vence a todos, ao passo que J perde com todos. Note-se que o vencedor por maioria simples, em disputa directa com cada um dos restantes candidatos, perde com todos eles!

A noção de comparação a pares foi introduzida por Condorcet[2]. Alguns conceitos relacionados com a problemática de Condorcet…

- O candidato que, numa comparação a pares, vença todos os outros é denominado vencedor de Condorcet (no exemplo apresentado, N será um vencedor de Condorcet).
- O candidato que, numa comparação a pares, perca com todos os outros diz-se perdedor de Condorcet (é o caso de J no exemplo acima).

[2] "Marquis de Condorcet", Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Condorcet (1743 – 1794). Matemático, filósofo e economista francês.

É preciso ter em conta que o vencedor (ou perdedor) de Condorcet nem sempre existe; é o caso da situação que se apresentou em primeiro lugar, em que existe um ciclo – comparando os candidatos a pares vem: A $\succ$ B (8 versus 5), B $\succ$ C (11 versus 2) mas C $\succ$ A (7 versus 6). Esta é uma ilustração do Paradoxo de Condorcet, pois se A ganha a B e B ganha a C, se existisse transitividade viria A a ganhar a C, o que não se verifica. Neste caso não existe vencedor nem perdedor de Condorcet.

Esta é a realidade no mundo das eleições: em situações com mais de dois candidatos, dando asas à imaginação na construção de um método eleitoral, quase sempre podem eleger-se diferentes candidatos consoante o método utilizado. Muito se tem estudado nos últimos três séculos sobre este assunto, mas não há uma solução única, não existe um método livre de falhas. Os teóricos deste assunto têm estudado as propriedades de diversos métodos, apontando as maiores fragilidades e as características positivas de cada um, permitindo assim aos utilizadores escolher o que melhor se adequa às suas necessidades.

III – Teorema de Arrow

Em 1951, na obra *Social Choice and Individual Values*, Kenneth Arrow[3] alterou completamente a crença generalizada nos métodos de decisão. O sentimento de dúvida instalado foi de tal forma abrangente que afectou as decisões económicas e políticas, comuns nas sociedades democráticas. Arrow conseguiu este feito listando os requisitos básicos que se espera que cumpram todos os métodos de decisão e eleição – em particular os utilizados em democracia. A conclusão foi espantosa: tais requisitos apenas seriam satisfeitos num sistema ditatorial! O resultado de Arrow sublinha a importância da escolha do método de decisão, assegurando que todos os métodos de decisão não ditatoriais estão minados de falhas básicas.

O Teorema de Arrow é tão importante, surpreendente, não intuitivo e perturbador, que contribuiu para o seu prémio Nobel da Economia em 1972.

Na linguagem de Arrow, um sistema eleitoral é um procedimento que atribui a cada conjunto de preferências identificadas no seio de um acto eleitoral, uma ordenação social final. Usando a linguagem própria da matemática, pode dizer-se que um sistema eleitoral é uma função que transforma as preferências individuais do conjunto dos votantes numa ordenação final dos candidatos que representa a vontade do eleitorado.

O facto de estar em discussão a ordenação total dos candidatos produzida pelo método, em oposição com a simples determinação do vencedor, é bastante importante, pois permite analisar a transitividade do procedimento. Recorde-se que ao encontrar o paradoxo de Condorcet não se verifica a transitividade (em oposição existe um ciclo: $A \succ B$, $B \succ C$ mas $C \succ A$); deixa de ser possível determinar um vencedor na comparação a pares, uma vez que todos os candidatos vencem algum dos outros.

Para prosseguir o estudo considerar-se-ão daqui em diante apenas sistemas eleitorais que evitem ordenações cíclicas, ou seja, exigir-se-á que o sistema eleitoral produza ordenações finais transitivas. Claro que um método eleitoral não poderá produzir resultados transitivos se não se basear em preferências individuais transitivas, pelo que será também exigido que os votantes tenham ordenações transitivas. Pode então definir-se sistema eleitoral como se segue: um sistema eleitoral é uma função que a cada conjunto de preferências individuais transitivas faz corresponder uma ordenação transitiva de preferências sociais. Entenda-se preferência social como o resultado final dum acto eleitoral, após tratadas todas as preferências individuais dos votantes. Note-se que esta definição não exclui empates, tanto ao nível das preferências

[3] Kenneth Arrow (1921- …). Matemático e Economista americano. Professor na Stanford University, E.U.A..

individuais, como da ordenação social; pode assim ler-se esta noção de transitividade no sentido lato e não estrito.

Para compreender melhor as condições de Arrow veja-se um exemplo que ilustra uma delas, a independência binária: aplique-se a contagem de Borda à seguinte situação, onde se pretende eleger o chefe de secção no escritório do Zé Pedro, em que os candidatos são a Ana, o Bruno e o Carlos:

Número de votos	Ordenação de preferências
7	BAC
6	ACB
2	CBA

Tabela 3.1.

Vem então para a contagem de Borda:

A: $7\times1+6\times2+0=19$ pontos;

B: $7\times2+0+2\times1=16$ pontos;

C: $0+6\times1+2\times2=10$ pontos;

donde a ordenação final A $\succ$ B $\succ$ C, ou seja, A é o vencedor!

Suponha-se que o Carlos desiste da luta pelo lugar de chefe. Considerando que foi eliminado o candidato pior classificado é legítimo pensar que não se altera a ordenação, mas veja-se:

Número de votos	Ordenação de preferências
7	BA
6	AB
2	BA

Tabela 3.2.

Usando a contagem de Borda vem:

A: $0+6\times1+0=6$ pontos;

B: $7\times1+0+2\times1=9$ pontos; donde B é o vencedor.

Note-se, então, que a eliminação do candidato menos votado provoca alterações no resultado do acto eleitoral. A eliminação de C dos boletins de voto, embora não provocasse nenhuma alteração nas preferências individuais dos votantes relativamente às candidaturas que se mantiveram, alterou profundamente o resultado das eleições, pois mudou o vencedor.

Esta situação chama a atenção para as mudanças que um candidato pode provocar: mesmo que não tenha possibilidade de vencer, a sua influência pode ser muito significativa. Esta linha de raciocínio leva à sugestão de adicionar à lista de propriedades desejáveis de um método eleitoral, a de ser "imune" à presença ou ausência de candidatos irrelevantes. Um modo de formalizar esta ideia é dizer que se pretende que a ordenação social entre dois candidatos dependa apenas das preferências individuais dos votantes acerca desses dois candidatos, e não das suas preferências sobre as restantes candidaturas. Deste modo, se a sociedade prefere o candidato A ao candidato B, a remoção de C da corrida eleitoral não deverá afectar a preferência de A a B, ou seja, a preferência social entre A e B não deve depender da existência de C nos boletins de voto: a informação relativamente à ordenação que os votantes fazem de C deve ser tão irrelevante como a própria candidatura de C.

Um método eleitoral no qual as preferências finais entre dois candidatos dependem apenas das preferências individuais dos votantes a respeito desses dois candidatos, diz-se que satisfaz a condição de independência binária. Conforme se constata pelo último exemplo apresentado, a contagem de Borda não goza da propriedade da independência binária.

Veja-se um exemplo histórico envolvendo Morgenbesser[4], a respeito da independência binária de Arrow, na formulação original "independence of irrelevant alternatives". Diz-se que Morgenbesser estaria num restaurante em Nova Iorque a escolher a sobremesa. A empregada ter-lhe-á dito que existiam duas possibilidades: tarte de maçã e tarte de amoras; Morgenbesser escolheu a de maçã. Alguns minutos depois, a empregada voltou à mesa e disse que também havia tarte de cereja. Morgenbesser terá dito: "nesse caso, escolho a de amoras".

A tarte de cereja é aquilo a que Arrow chama uma alternativa irrelevante. É irrelevante pois dada a possibilidade de escolher tarte de cereja, Morgenbesser rejeitou-a. Mas o aparecimento de uma opção que não agrada não deve influenciar a escolha. Veja-se: quando as opções eram amoras e maçãs, Morgenbesser escolheu maçã. Então, foi adicionada cereja à carta de sobremesas. Teria feito sentido que Morgenbesser alterasse o seu pedido para cereja, ou que mantivesse a escolha de maçã – mas mudar para amoras é um acto incompreensível.

Olhem-se então as condições que Arrow enunciou em 1951, na obra *Social Choices and Individual Values.*

Condição 1 – Universalidade (Universality) – a única restrição às ordenações individuais que os votantes fazem dos candidatos é a transitividade; em particular, os métodos eleitorais não

[4] Sidney Morgenbesser (1921 – 2004). Filósofo da Columbia University.

devem considerar umas ordenações aceitáveis e outras não, todas as ordenações individuais transitivas dos candidatos possibilitam uma ordenação social transitiva.

Condição 2 – Monotonia (Positive Association of Individual Values) – um sistema eleitoral deve ser monótono, ou seja, mudanças favoráveis a um candidato nas preferências individuais dos votantes não podem implicar que esse candidato desça na ordenação final.

Condição 3 – Independência binária (Independence of Irrelevant Alternatives) – um sistema eleitoral deve satisfazer a independência binária.

Condição 4 – Soberania dos cidadãos (Citizen Sovereignty) – um sistema eleitoral não deve fazer imposições, isto é, não deverá existir um par de candidatos numa eleição, digamos A e B, de modo que A seja preferido a B na ordenação social, independentemente das escolhas dos votantes.

Condição 5 – Não ditatorial (Nondictatorship) – os sistemas eleitorais não devem promover a ditadura, isto é, não deverá existir um votante cuja vontade individual se reflicta ao nível da ordenação social, independentemente das preferências dos restantes votantes.

Teorema 3.1 (Arrow): Num acto eleitoral com mais de dois candidatos é impossível a um sistema eleitoral satisfazer as cinco condições de Arrow.

Arrow interpretava o seu próprio teorema com a seguinte redacção: os únicos métodos que transformarão satisfatoriamente as preferências individuais numa ordenação social são ditatoriais ou impostos.

O teorema de Arrow é um resultado surpreendentemente forte, mas pode tornar-se ainda mais forte. Sem alterar a veracidade do resultado, as condições 2 e 4 podem ser substituídas pela condição de unanimidade de Pareto[5]: se existe um par de candidatos, diga-se {A, B}, tal que todos os votantes preferem A a B, então A deve ser posicionado, em termos de ordenação final, acima de B.

Teorema 3.2 (Arrow - versão forte**):** Numa eleição com mais de dois candidatos é impossível a um sistema eleitoral satisfazer as condições 1, 3 e 5 de Arrow e a unanimidade de Pareto.

[5] Vilfredo Pareto (1848 – 1923). Italiano estudioso de Matemática e Física.

Voto Estratégico

Olhe-se, brevemente, a noção de voto estratégico. Muitos terão já votado de forma não sincera. Tal tende a acontecer quando o candidato preferido tem poucas possibilidades de ganhar, e dessa forma a estratégia será o chamado voto útil. De facto, os votantes são por vezes levados a votar num candidato que não é a sua primeira preferência, com receio que vença o candidato a que se opõem veementemente. A título de exemplo, concorrendo os partidos A, B e C, considere-se que o votante prefere A e não gostaria de forma alguma que C vencesse. Se nas sondagens pré-eleitorais se souber que A tem poucas possibilidades de vencer, e as eleições se disputarem estatisticamente entre B e C, o votante será levado a votar em B, de forma a impedir que C ganhe. Se o voto útil se generalizar, pode instalar-se um estado onde ninguém vota na sua primeira opção, e assim a vontade do povo será distorcida. Esta prática afecta as candidaturas minoritárias e as causas que defendem; toca aqueles que tentam mudança no espectro político ou, simplesmente, marcam determinada posição.

Os estudos de Arrow não abordam a votação estratégica ou voto útil, mas muitos teóricos estudaram este assunto após a publicação do trabalho de Arrow. A questão em mente seria a possibilidade de desenvolver um sistema eleitoral em que não houvesse vantagem em alterar estrategicamente o voto. A resposta é negativa, nenhum sistema eleitoral previne a manipulação. A demonstração foi dada, independentemente, por Allan Gibbard[6], professor na University of Michigan em 1973, e por Mark Satterthwaite[7], professor na Northwestern University em 1975 – este trabalho foi assim denominado Teorema de Gibbard – Satterthwaite.

Teorema 3.3 (Gibbard-Satterthwaite): Qualquer sistema eleitoral não ditatorial, em que estejam envolvidos três ou mais candidatos, é susceptível de manipulação individual por parte dos votantes.

[6] Allan Gibbard (1942- …). Físico e matemático americano. Professor na University of Michigan.
[7] Mark Satterthwaite. Economista americano. Professor na Kellogg School of Management, Northwestern University.

IV – Demonstração do Teorema de Arrow

A demonstração do Teorema de Arrow aqui apresentada é adaptada do trabalho de John Geanakoplos[8].

Notação:

A $\succ$ B deve ler-se: o candidato A é preferido ao candidato B;

A $\approx$ B deve ler-se: os candidatos A e B são igualmente preferidos (temos um empate);

A $\geqq$ B deve ler-se: o candidato A é preferido ao candidato B, ou estão em igualdade de circunstâncias (será uma noção de preferência em sentido lato).

Provar-se-á primeiro a versão forte do Teorema de Arrow, pois será mais simples deduzir a primeira versão a partir desta.

Teorema de Arrow (versão forte): Numa eleição com mais de dois candidatos é impossível a um sistema eleitoral satisfazer as condições de universalidade, independência binária, unanimidade de Pareto e não ser uma ditadura.

Para a demonstração do teorema considerar-se-á um acto eleitoral com mais de dois candidatos que satisfaz a universalidade, a independência binária e a unanimidade, e virá daí a conclusão do sistema ditatorial. Para este fim será necessário provar que existe um votante *v* que, para quaisquer dois candidatos A e B, se *v* prefere A a B então a sociedade irá também preferir A a B.

A estratégia passa por construir um processo no qual se encontre um potencial ditador do sistema eleitoral; seguidamente prova-se que este potencial ditador é de facto um ditador do sistema eleitoral pois tem as características de tal papel.

É útil o seguinte lema:

<u>Lema 4.1:</u> Considere-se uma eleição com mais de dois candidatos e um sistema eleitoral, V, que satisfaz as condições de universalidade, independência binária e unanimidade. Suponha-se que B é um candidato peculiar: todos os votantes o ordenam em primeiro ou em último lugar nas suas preferências individuais. Então a ordenação social produzida por V ordenará também B em primeiro ou em último lugar (mesmo que metade dos votantes considerem B primeira opção e a outra metade o classifique de pior opção).

[8] John Geanakoplos (1955 - …). Professor de Matemática e Economia na Yale University.

Demonstração do Lema 4.1:

Suponha-se, com vista a um absurdo, que a ordenação social produzida por V não ordena B nem em primeiro nem em último lugar. Então existirão candidatos A e C tais que A $\geqq$ B e B $\geqq$ C, o que implica, pela transitividade da preferência social, que A $\geqq$ C (pois, por hipótese, o sistema goza da propriedade da universalidade).

Suponha-se agora que todos os votantes alteram as suas preferências individuais posicionando C acima de A (sem mais nenhuma alteração). Neste cenário, como B está sempre em primeiro ou último lugar ao nível das preferências individuais, as mudanças entre A e C não alterarão as preferências dos votantes no que concerne as ordenações entre A e B ou entre B e C. Assim, como o sistema V goza da propriedade da independência binária, a preferência social entre A e B e entre B e C permanecerá inalterada.

Mas se todos os votantes alterarem as suas preferências relativas entre A e C (colocando C acima de A), a condição da unanimidade de Pareto diz que socialmente se terá C $\succ$ A.

Ponto de situação: temos A $\geqq$ B e B $\geqq$ C, donde por transitividade, que A $\geqq$ C; por outro lado, pela condição da unanimidade de Pareto e independência binária, C $\succ$ A. Absurdo! Fica assim demonstrado o Lema 4.1.

€

Demonstração do Teorema de Arrow:

Suponha-se um acto eleitoral com mais de dois candidatos e um sistema eleitoral, V, verificando as condições de universalidade, independência binária e unanimidade de Pareto; representem-se os *n* votantes por v_1, v_2, …, v_n. Primeiramente examinar-se-á o caso especial em que B (um dos candidatos em concurso) é ordenado em último lugar por todos os outros votantes:

	Votantes			
Ordenação	v_1	v_2	…	v_n
1º lugar	?	?	…	?
⋮	⋮	⋮		⋮
último lugar	B	B	…	B

Tabela 4.1.

Usando a unanimidade de Pareto, nestas condições ter-se-á B ordenado em último lugar na preferência social.

Se todos os votantes alterarem B do último para o primeiro lugar nas suas preferências individuais, então, pela condição de unanimidade de Pareto, B será ordenado em primeiro lugar na listagem de preferências sociais.

Se apenas alguns votantes moverem B da última posição para a primeira ao nível das preferências individuais, então pelo Lema 4.1, B manter-se-á em último lugar ou passará para primeiro na ordenação social.

Considere-se que, um a um, começando em v_1 e de acordo com uma ordem previamente estabelecida (v_1, v_2, …, v_n), os votantes alteram B de último para primeiro lugar nos seus boletins de voto. Como a ordenação social de B terá de modificar-se de último para primeiro lugar (pois todos os votantes acabam por mudar B da última para a primeira posição) então existirá um votante particular, diga-se v_j, que provoca a mudança social esperada. O votante v_j é especial no sentido de "fronteira", em que mesmo que todos os votantes anteriores a si movam B da última para a primeira posição nas suas ordenações individuais, não se daria qualquer alteração ao nível da ordenação social. No entanto, assim que v_j faz a alteração no seu boletim de voto, B passa imediatamente de último para primeiro lugar nas preferências sociais. Assim pode dizer-se que v_j é um votante pivô.

Na realidade v_j será um ditador; veja-se…

	Votantes							
Ordenação	v_1	v_2	…	v_{j-1}	v_j	v_{j+1}	…	v_n
1º lugar	B	B	…	B	?	?	…	?
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
último lugar	?	?	…	?	B	B	…	B

Tabela 4.2: Situação em que a ordenação final terá B na última posição.

	Votantes							
Ordenação	v_1	v_2	…	v_{j-1}	v_j	v_{j+1}	…	v_n
1º lugar	B	B	…	B	B	?	…	?
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
último lugar	?	?	…	?	?	B	…	B

Tabela 4.3: Situação em que a ordenação final terá B na primeira posição.

Começar-se-á por mostrar que para qualquer par de candidatos que não inclua B, diga-se A e C, se v_j prefere A a C então a ordenação final será A $\succ$ C; em seguida constatar-se-á que tal facto também se verifica para qualquer par de candidatos que inclua B.

Sejam, então, A e C dois candidatos distintos de B, para fixar ideias suponha-se que v_j prefere A a C. Pretende-se concluir que A é preferido a C em termos de ordenação final. Como se pretende mostrar que A é preferido a C, independentemente das preferências de qualquer votante além de v_j, não se fará qualquer suposição sobre as preferências dos outros votantes, assumir-se-á apenas que v_j prefere A a C. Para facilitar chama-se S à correspondente lista de preferências.

Como V goza da propriedade da independência binária, nenhuma das seguintes mudanças provocará alterações na ordenação final entre A e C:

- v_j altera, no seu boletim de voto, a posição de B, determinando A $\succ$ B $\succ$ C;

- cada um dos votantes v_1, v_2, …, v_{j-1} move B para a sua primeira preferência individual;

- cada um dos votantes v_{j+1}, v_{j+2}, …, v_n move B para a última posição dos seus boletins de voto.

Suponha-se que são aplicadas a S todas as mudanças sugeridas e chame-se S' à lista de preferências assim obtida.

No que concerne à posição relativa entre A e B, S' estabelece a situação descrita na tabela 4.2, pois v_1, v_2, …, v_{j-1} colocam B na primeira posição, v_{j+1}, v_{j+2}, …, v_n assumem B como última opção e v_j ordena A $\succ$ B $\succ$ C, pelo que em termos relativos apenas de {A, B} será B em último.

Do mesmo modo, ao tomar apenas as ordenações relativas dos candidatos B e C encontra-se, em S', perante uma situação como a ilustrada na tabela 4.3, pois v_1, v_2, …, v_{j-1} têm B em primeira posição; v_{j+1}, v_{j+2}, …, v_n ordenam B em último e v_j ordena C depois de B, o que significa que B está em melhor posição que C, em termos restritos a {B, C} tem-se B primeiro e C último, logo a situação do par {B, C} está espelhada na tabela 4.3, resulta no lugar favorável de B relativamente a C.

Assim, perante S', tem-se A $\succ$ B e B $\succ$ C o que, por transitividade, leva a A $\succ$ C.

Como se tem (por hipótese de independência binária) que as alterações provocadas a partir de S quando se constrói S' não alteram as posições relativas entre A e C na ordenação final, então conclui-se que em S' se tem A $\succ$ C, o mesmo será verdade para S.

Repare-se, então, que ao assumir apenas que v_j prefere A a C, sem nenhuma outra suposição sobre as preferências dos restantes votantes no que concerne a este par {A, C}, foi possível concluir a preferência final A $\succ$C; fica assim estabelecido que sempre que v_j prefere A a C este será o resultado na ordenação social final dos candidatos.

Neste momento está provado que v_j controla o resultado final da ordenação de qualquer par de candidatos que não inclua B, falta agora ver por que razão v_j também dita a ordenação social entre qualquer par que contenha B.

Para tal, suponha-se que existe outro votante, v_i, com as mesmas propriedades de v_j e concluir-se-á que são o mesmo.

Considerando a generalidade com que se assumiu no Lema 4.1 que B era ordenado em último lugar por todos os votantes, e a partir daí se encontrou o votante v_j, potencial ditador, que controla a ordenação social de qualquer par de candidatos que não inclua B, poderia ter-se fixado um outro votante, A, que fosse igualmente ordenado em último lugar pelos votantes, encontrando um v_i adequado (potencial ditador) que exercesse poder sobre qualquer par de candidatos que não incluísse A.

Seja C um candidato distinto de A e de B. Recorde-se que v_j é o votante que se colocar B em primeiro lugar na sua ordenação individual força a ordenação social a fazer o mesmo; além disso, prova-se também que a sua preferência relativamente ao par {A, C} é fielmente reproduzida na ordenação final.

Se v_j quiser B em primeiro ou em último, é o que acontecerá. Se v_j não quiser B nos extremos, então a ordenação A $\succ$ B $\succ$ C ou C $\succ$ B$\succ$ A será também reflectida na ordenação final. Portanto v_j decide também a posição relativa entre B e C, uma vez que se B for primeiro ou último será respectivamente B $\succ$ C ou C $\succ$ B; nos casos em que B assume uma posição intermédia constatou-se que v_j também determina qual a posição relativamente a C, pois v_j determina a ordenação relativa de {A, C} consoante a posição relativa que se atribui a B. (Se v_j considerar A $\succ$ B $\succ$ C, a ordenação final transmitirá A $\succ$ C, e se v_j preferir C$\succ$ B $\succ$ A a ordenação será naturalmente C $\succ$ A, uma vez que A e C são definidos do mesmo modo).

Mas o facto de v_j decidir sobre a ordenação social do par {B, C} colide com os direitos de v_i que se considerou ser o votante decisor sobre este par {B, C}. Então resta concluir que v_i e v_j são o mesmo.

Exactamente do mesmo modo se concluiria que v_j é também decisor sobre o par {A, B}. Tem-se então que v_j é o ditador procurado: as suas preferências individuais ditam a ordenação relativa de qualquer par de candidatos, logo constroem integralmente a ordenação social.

€

Após a prova do que se denominou versão forte do Teorema de Arrow, falta ver a versão original do autor. Recorde-se que a versão forte foi encontrada substituindo as condições 2 e 4 do Teorema de Arrow (monotonia e soberania dos cidadãos) pela condição da unanimidade de Pareto. O seguinte Lema torna essa substituição possível.

<u>Lema 4.2</u>: Se um sistema eleitoral verificar as condições de monotonia, independência binária e soberania dos cidadãos, então também verificará a condição da unanimidade de Pareto.

<u>Demonstração do Lema 4.2:</u>

Admita-se o sistema eleitoral, V, nas condições do Lema: verificando a monotonia, a independência binária e a soberania dos cidadãos. É necessário mostrar que se todos os votantes preferirem A a B, então a ordenação social deve colocar A num lugar acima de B.

Considere-se uma lista arbitrária de preferências, S, na qual todos os votantes preferem A a B. Veja-se por que razão a ordenação final colocará A à frente de B.

S – lista arbitrária de preferências na qual todos os votantes preferem A a B.

Tomem-se outras listas:

S’ – lista arbitrária de preferências que leva a uma ordenação social em que A é preferido a B;

S’’ – lista criada a partir de S’, mudando a posição de A nas preferências individuais de modo a que todos os votantes prefiram A a B.

Tem-se que em S’ haverá um número de votantes que preferem A a B igual ou inferior ao existente em S’’. Assim, uma vez que o sistema eleitoral verifica a monotonia, vem que se S’ provocava uma ordenação final de A superiormente a B, como em S’’ A ganhou ainda mais votos, também S’’ garantirá uma melhor posição social de A relativamente a B.

No que concerne a S e S'', verifica-se que são coincidentes no que respeita à ordenação relativa do par {A, B}, uma vez que se todas as preferências individuais colocam A à frente de B e o método eleitoral em causa verifica a independência binária e a soberania dos cidadãos, então tem-se que tanto S como S'' elegerão A em detrimento de B.

Assim sendo, com V nas condições do Lema, fica provado que se todos os votantes preferem A a B, então a ordenação final das preferências reflectirá esse facto: A terá uma posição mais favorável que a de B, ou seja, V verifica a condição da unanimidade de Pareto.

€

V – Em busca de soluções para o problema de Arrow

Agora que se constatou a veracidade das duas formas do Teorema de Arrow, tente-se contornar os problemas revelados pelo trabalho do autor.

Condição de Pareto

A condição de unanimidade de Pareto revela-se justa, pois evita situações como a de dois candidatos serem considerados empatados na ordenação final, quando os votantes são unânimes ao preferir um deles em detrimento do outro. No entanto, este é exactamente o tipo de ocorrência que se verifica no voto plural e na exclusão imediata, pois os candidatos que não obtiveram qualquer primeiro lugar nas ordenações individuais são relegados, em igualdade de circunstâncias (empate), para o último lugar da lista de ordenação final com zero pontos. Mas a condição da unanimidade de Pareto pode ser ligeiramente modificada de forma a não permitir tais empates.

Condição de Pareto modificada: se existe na eleição um par de candidatos, digamos A e B, tal que todos os votantes preferem A a B, então B não deve ser posicionado acima de A na ordenação final.

Com este novo enunciado da condição de Pareto pode dizer-se que, tanto a votação plural, como a exclusão imediata, verificam a condição de Pareto modificada. Isto porque se todos os votantes, num acto eleitoral, preferirem A a B, então B não receberá qualquer primeiro lugar, donde A não pode receber menos primeiros lugares que B, e assim B não pode ser ordenado acima de A na preferência final. Pode, no entanto, dar-se um empate entre A e B no caso em que existe outro candidato, digamos C, de modo que C esteja sempre acima de A e de B, pois nesta situação tanto A como B são relegados para último lugar com zero pontos. Esta situação é válida tanto para o voto plural como para a exclusão imediata, pois ambos consideram apenas os candidatos que recebem primeiro lugar nas ordenações individuais dos votantes.

Note-se que a condição modificada de Pareto é mais fraca que a condição da unanimidade de Pareto, uma vez que introduz uma comparação em sentido lato, ao passo que a condição da unanimidade garantia uma ordenação estrita dos candidatos. Claro que se um sistema verifica a condição da unanimidade de Pareto também verificará a condição modificada, o que significa que existirão mais métodos eleitorais a satisfazer a condição modificada de Pareto do que a condição da unanimidade de Pareto.

Seguindo esta linha de raciocínio, é natural questionar se a substituição da condição da unanimidade de Pareto pela condição modificada alteraria a conclusão de Arrow. Veja-se que não. Se existisse um sistema eleitoral que satisfizesse as condições de universalidade, da independência binária, a modificada de Pareto e não fosse ditatorial, este sistema poderia ser ligeiramente alterado de forma a produzir um novo sistema que satisfaria as condições iniciais de Arrow: universalidade, independência binária, unanimidade de Pareto e não ditadura, donde seria uma contradição do Teorema de Arrow, pelo que não existirá um sistema eleitoral envolvendo a condição modificada de Pareto que possa alterar o resultado de Arrow.

Suponha-se que existe um sistema eleitoral, V, que satisfaz as condições da universalidade, independência binária, a modificada de Pareto e é não ditatorial. Seja V' um novo sistema eleitoral definido do seguinte modo:

- Se não existirem empates na listagem final de preferências produzida por V, então V' produz a mesma ordenação social;
- Se existirem empates na ordenação final produzida por V, então V' quebra os empates sempre que os votantes unanimemente preferem um candidato em detrimento de outro. Por exemplo, se A está empatado com B na ordenação social produzida por V' e os votantes unanimemente preferem A a B então A será preferido a B na ordenação final produzida por V'.

Assim V' verificaria as condições de universalidade, independência binária, não ditadura e unanimidade de Pareto, contrariando o Teorema de Arrow. Como não há nenhum tipo de irregularidade na construção de V' a partir de V, então a incoerência tem de partir do próprio V – logo tal sistema eleitoral não pode existir.

Voto por aprovação

Na década de setenta do século passado, muitos analistas políticos propuseram, independentemente uns dos outros, um novo método eleitoral – o voto por aprovação, que consiste no seguinte: cada votante "aprova" ou "desaprova" cada candidato, não havendo nenhum tipo de restrição ao número de aprovações que cada votante concede. A ordem final é determinada pelo número de votos de aprovação recebidos por cada candidato, sendo que o vencedor será o candidato com maior aprovação; naturalmente haverá lugar a empates. (Este método é usado sobretudo por sociedades profissionais, como a American Mathematical Society.)

Para exemplificar, considere-se a eleição do porta-voz de um grupo de trabalho constituído por nove indivíduos, sendo que estão disponíveis para o exercício do cargo os candidatos Xavier, Yvone e Zulmira:

Candidato \ Número de votos	4	3	2
Xavier	√		√
Yvone		√	√
Zulmira			

Tabela 5.1.

O símbolo √ assinala um voto por aprovação.

À luz deste sistema, como o Xavier recebeu 6 votos, a Yvone 5 e a Zulmira não recebeu nenhum, considera-se Xavier o porta-voz eleito, sendo que a ordenação final será $X \succ Y \succ Z$.

Muitos autores discutem se fará sentido aplicar o Teorema de Arrow ao voto por aprovação, uma vez que este método não usa a ordenação das preferências individuais dos votantes. Um primeiro olhar leva a responder que possivelmente não se aplicará aqui o Teorema de Arrow, no entanto a realidade é mais complexa: será que o voto por aprovação pode ser considerado um sistema eleitoral à luz da definição introduzida? Recorde-se que se definiu, sob o trabalho de Arrow, sistema eleitoral como uma função que a cada conjunto de preferências individuais transitivas faz corresponder uma ordenação transitiva de preferências sociais. Será que o voto por aprovação satisfaz tais requisitos?

Tome-se, na tabela 5.1, os dois votantes que aprovaram tanto X como Y; podem ter qualquer uma das preferências $X \succ Y \succ Z$; $Y \succ X \succ Z$ ou $X \approx Y \succ Z$.

Este exemplo sugere que, embora o voto por aprovação tenha um boletim de voto diferente dos restantes sistemas eleitorais que se tem estudado, as preferências subjacentes dos votantes podem ser vistas do mesmo modo. Claro que não pode negar-se que a correspondência entre os boletins de voto usados pelo método de aprovação e a ordenação das preferências é mais informal, menos rígida talvez, no sentido em que cada boletim de voto será consistente com várias ordenações de preferências.

Mas veja-se novamente o último exemplo. Sendo que todas as preferências $X \succ Y \succ Z$; $Y \succ X \succ Z$ e $X \approx Y \succ Z$ podem produzir um voto de aprovação para X e outro para Y, não será intuitivo considerar que a que melhor representa esta votação é $X \approx Y \succ Z$? Esta ordenação reflecte de forma rigorosa a atribuição de um voto a X e outro a Y, e evita que se façam suposições sobre a ordenação relativa destes candidatos. Este pensamento ajudará a definir formalmente o método eleitoral de voto por aprovação.

O método eleitoral de voto por aprovação é caracterizado pelas condições:

- O método aceita como preferências individuais válidas aquelas em que o símbolo $\succ$ apareça exactamente uma vez; ou seja, são admitidas apenas as ordenações que têm um ou mais candidatos no primeiro lugar (no caso de empate), seguidos dos restantes candidatos, todos igualmente considerados em última posição.
- A ordenação social é determinada pelo número de primeiros lugares que cada candidato recebe. Por uma questão de conveniência, consideram-se os primeiros lugares como votos de aprovação.

Definido desta forma, o voto por aprovação é um sistema eleitoral à luz da definição dada por Arrow; no entanto, viola a condição da universalidade, uma vez que se restringem as ordenações permitidas aos votantes.

Olhando pelo lado positivo, o voto por aprovação é anónimo (ou seja, trata todos os votantes equitativamente), neutro (a condição da neutralidade refere-se ao igual tratamento dos candidatos), monótono e verifica a condição da unanimidade de Pareto. Será anónimo e neutro pois nenhum votante ou candidato goza de algum tipo de favorecimento relativamente aos seus pares; a questão da monotonia é também bastante intuitiva: se A estiver melhor posicionado relativamente a B significa que tem maior número de votos de aprovação, se esse número aumentar, A marcará de forma ainda mais definida a sua vantagem em relação a B. A verificação da condição da unanimidade de Pareto está intimamente relacionada com o facto de nas preferências individuais apenas aparecer uma ordenação estrita, $\succ$. Assim, se todos os indivíduos preferirem A a B, isto significa que $A \succ B$ para todos, com os restantes candidatos a ficarem empatados com A ou com B, isto traduz que não poderá jamais surgir, na situação final, uma situação de $A \approx B$ ou $B \succ A$.

O voto por aprovação será retomado no capítulo VII e será possível verificar, seguindo o raciocínio de Donald Saari[9], que não é um método imune a falhas e paradoxos.

[9] Donald G. Saari (1940 - …). Matemático norte-americano, Professor de Economia e Matemática na University of Califórnia, e director do Institute for Mathematical Behavioral Sciences na mesma universidade.

Intensidade de independência binária

Veja-se mais uma possível solução para o resultado de Arrow, desta feita proposta por Donald Saari. A interpretação que Saari faz do trabalho de Arrow pode ser sintetizada do seguinte modo:

- Apenas se consideram sistemas eleitorais que produzam ordenações sociais transitivas. Para evitar ordenações não transitivas exige-se que as preferências individuais dos votantes sejam transitivas;
- A condição da independência binária obriga a que a ordenação social de qualquer par de candidatos dependa apenas das preferências individuais dos votantes a respeito desses candidatos. Esta exigência força os sistemas eleitorais a desprezar a informação de ligação que dava a transitividade, tornando impossível, nos sistemas que satisfazem independência binária, distinguir entre votantes com preferências transitivas (chamados racionais ou sofisticados) e votantes com preferências cíclicas (denominados irracionais ou não sofisticados).

De acordo com Saari, a independência binária arruína o pressuposto da transitividade das preferências individuais, o que provoca que sistemas eleitorais aceitáveis produzam preferências sociais cíclicas. A solução que Saari propõe é enfraquecer a condição da independência binária, permitindo aos sistemas eleitorais que tenham em consideração, não apenas as preferências dos indivíduos relativamente a determinado par de candidatos, mas a intensidade com que o fazem.

Suponha-se que a preferência de determinado votante em relação a dois candidatos eleitorais {A, B} é AB. A intensidade desta preferência é o número de candidatos que se posicionam entre A e B na ordenação individual deste votante.

Um sistema eleitoral em que a preferência social entre quaisquer dois candidatos dependa apenas das ordenações individuais que os votantes fazem destes candidatos, e da intensidade da preferência, diz-se que satisfaz o critério da intensidade da independência binária. Dito de outro modo, pode dizer-se que num sistema eleitoral que satisfaz intensidade de independência binária, se uma parte, ou a totalidade, dos votantes modificar as suas preferências individuais sem alterar a sua preferência relativa a A e B, nem a intensidade que lhe atribui, então a ordenação social relativamente a A e B manter-se-á inalterada.

Saari provou que a contagem de Borda é um sistema eleitoral que satisfaz as condições de universalidade, unanimidade, intensidade de independência binária e não ditadura. Este resultado não entra em contradição com o Teorema de Arrow, uma vez que a intensidade da independência binária é mais fraca que a independência binária.

O sucesso alcançado na procura de um sistema eleitoral que se comporte de acordo com as expectativas existentes, depende das condições preteridas. Nestas últimas páginas verificou-se que se não se estiver disponível para abdicar da unanimidade ou da universalidade, pode fazer-se uma ligeira alteração na independência binária e encontrar um método eleitoral satisfatório. Naturalmente, outras alterações conduzirão a novas soluções, e existem ferramentas que permitem avaliar novas possibilidades.

Olhe-se mais atentamente os estudos de Saari, e a solução que o autor propõe no âmbito do Teorema de Arrow.

Um argumento de "perda de informação" explica o Teorema de Arrow. O segredo será perceber por que razão a independência binária de Arrow destrói todas as ligações entre as ordenações binárias dos votantes racionais. Ao fazê-lo, verifica-se que a independência binária enfraquece o pressuposto central de que os votantes têm preferências transitivas.

O problema surge porque as partes disjuntas das ordenações a pares definem demasiados "todos". Não é claro para as propriedades do algoritmo do procedimento, que sociedade – racional ou cíclica – as partes representam. Sem a efectividade de votantes racionais, encontra-se uma situação de "más preferências, maus resultados", que, combinada com a condição de Pareto, dita a conclusão de Arrow.

A independência binária proíbe explicitamente, nos processos que dela gozem, as comparações entre os candidatos de um determinado par em estudo com qualquer outro candidato. Desta maneira, a independência binária ignora toda a informação relativamente à racionalidade dos votantes, uma vez que não permite a análise da transitividade. Se o procedimento não tem em conta informação crucial, é difícil conceber que trará resultados racionais, isto será tão mais evidente quanto maior for a heterogeneidade social.

A dificuldade criada pela independência binária é que a "soma das partes define demasiados todos", não há forma de descortinar que sociedade é a correcta. Imagine-se que alguém pega nas letras que compõem a frase anterior e as separa; parece simples a reconstrução da frase sem qualquer informação além da "sopa de letras"? Está, então, claro o que se quer explicar: depois de separadas as partes, é difícil especular sobre a correcta ligação entre elas.

Olhe-se de perto a comparação a pares, que consiste na confrontação de cada um dos candidatos com todos os outros, e veja-se que está muito próxima de satisfazer todas as condições de Arrow.

- Universalidade: não existem restrições sobre como os votantes ordenam os candidatos, logo a votação a pares satisfaz esta condição.
- Condição de Pareto: para cada par de alternativas {A, B}, se todos preferem A a B, então será essa a ordenação final; a votação a pares satisfaz Pareto.
- Independência binária: ao determinar a ordenação para cada par de alternativas, diga-se {A, B}, a informação sobre como os votantes ordenam C é irrelevante; satisfaz-se a independência binária.
- Não ditatorial: a votação a pares satisfaz o anonimato, logo o resultado é determinado por uma maioria de votos; consequentemente, a votação a pares não origina ditadores.

Parece que todas as condições de Arrow são satisfeitas por este procedimento não ditatorial. Então, onde está o garantido conflito? Falta verificar se os resultados de uma votação a pares são transitivos; não serão. A prova desta afirmação sublinha a importância do perfil de Condorcet, apresentado aqui numa tabela com as partes binárias separadas.

Ao votar nos candidatos A, B e C, obtiveram-se as ordenações ABC, BCA e CAB.

Ordenações	{A, B}	{B, C}	{A, C}
ABC	$A \succ B$	$B \succ C$	$A \succ C$
BCA	$B \succ A$	$B \succ C$	$C \succ A$
CAB	$A \succ B$	$C \succ B$	$C \succ A$
Resultado	$A \succ B$	$B \succ C$	$C \succ A$

Tabela 5.2.

Ao contar qual a ordenação preferida em cada coluna, a votação a pares resulta num ciclo: $A \succ B$, $B \succ C$, $C \succ A$, onde cada eleição é definida por uma maioria de 2/3 dos votos. A única razão que impede a votação a pares de contrariar o Teorema de Arrow é que, apesar de não admitir “más preferências”, sofre “más conclusões”; ou seja, com preferências transitivas origina resultados cíclicos.

A questão a reter a respeito deste procedimento é que não há nada no seu algoritmo que possibilite a verificação da racionalidade dos votantes. Desde que o eleitor seja capaz de ordenar cada par, com a habilidade de o assinalar no seu boletim, este será um voto válido. Isto significa que a votação a pares é um método passível de ser adoptado por votantes não sofisticados, que não conseguem ordenar de forma transitiva as suas preferências (note-se que ordenar cada par não significa garantir a transitividade do todo).

Como agora se compreende, os procedimentos que satisfazem a independência binária devem ser vistos como idealizados para votantes não sofisticados. Para este tipo de procedimentos a racionalidade é uma questão irrelevante – não admira, por isso, que se verifique a conclusão de Arrow.

De facto, a independência binária faz com que os resultados dos perfis de Condorcet pareçam provir de votantes irracionais. Isto levanta uma questão: o que acontecerá se for possível libertar os dados de todos os perfis de Condorcet? A resposta surpreendente é que o ditador de Arrow será substituído em quase todos os procedimentos baseados na votação a pares, o que inclui a contagem de Borda, a própria votação a pares e outros.

Conforme será visto, substituindo a condição de independência binária por uma nova condição que use a informação relativa à racionalidade do votantes, o ditador de Arrow é substituído por um conjunto de procedimentos razoáveis. Isto faz regressar os comentários introdutórios: ao exigir procedimentos que admitem unicamente votantes racionais, podem surgir resultados racionais; ao usar métodos binariamente independentes, que podem admitir votantes irracionais, encontram-se problemas.

Se as conclusões ditatoriais aparecerem porque a independência binária separa informação sobre as preferências dos votantes em partes disjuntas, então uma solução para este problema tem de passar pela reintrodução destas ligações. Ou seja, se a independência binária leva involuntariamente a considerar votantes irracionais, há que rever a propriedade de forma a obrigar o procedimento a reconhecer, e admitir, apenas votantes racionais.

Para alcançar este objectivo é necessário identificar características das ordenações binárias que distingam entre preferências transitivas e cíclicas, ou seja, entre a situação $A \succ B$, $B \succ C$, $A \succ C$, que define a ordenação transitiva $A \succ B \succ C$ e a situação $A \succ B$, $B \succ C$, $C \succ A$, que origina um ciclo. Tentando uma analogia geométrica, isto significa diferenciar três pontos numa recta ou numa circunferência:

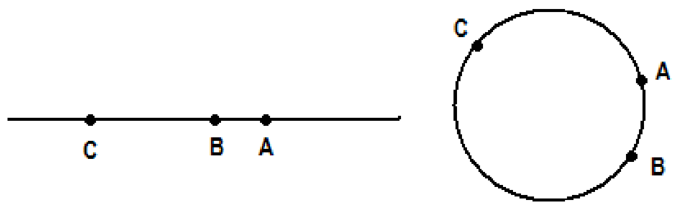

Figura 5.1.

Note-se que na recta o ponto B está entre C e A, mas o mesmo não se passa necessariamente na circunferência.

Para melhor descrever a posição dos pontos na recta considere-se a desigualdade definida por dois pontos, especificando em seguida o número de pontos que estão entre eles, ou seja:

- (A $\succ$ B, 0) pois não há nenhum ponto entre A e B, a desigualdade A $\succ$ B é fraca;
- (B $\succ$ C, 0) como anteriormente, não existem pontos entre B e C, pelo que a relação B $\succ$ C é fraca;
- (A $\succ$ C, 1), existe um ponto entre A e C, pelo que a relação A $\succ$ C é mais forte que as anteriores A $\succ$ B e B $\succ$ C.

Uma vez que as propriedades de uma linha recta são usadas para definir transitividade, é razoável transferir esta propriedade "intensidade" para as ordenações das alternativas. A intensidade da ordenação de um par A $\succ$ C é o número de alternativas admissíveis usadas para separar estes dois candidatos. Seja ***k*** esse número, a intensidade da ordenação nota-se: (A $\succ$ C, ***k***).

Usa-se esta informação de intensidade para distinguir entre preferências cíclicas e transitivas. A ordenação transitiva A $\succ$ B $\succ$ C tem a informação de intensidade: (A $\succ$ B, 0), (B $\succ$ C, 0), (A $\succ$ C, 1), onde um par tem um nível de intensidade 1 (um). Mas perante um votante irracional, sem capacidade para compreender que B está entre A e C, as suas ordenações serão: (A $\succ$ B, 0), (B $\succ$ C, 0), (A $\succ$ C, 0). Esta intensidade 0 (zero), uma fraca ordenação binária, caracteriza os cenários de preferências cíclicas onde a informação será: (A $\succ$ B, 0), (B $\succ$ C, 0), (C $\succ$ A, 0).

A diferença entre a informação de cada uma das situações é que com preferências transitivas um par tem de ter um nível de forte intensidade. Esta é apenas uma pequena diferença, mas será suficiente para resolver o mistério de Arrow. A definição que se segue é usada para criar uma versão "revista", positiva, do resultado de Arrow.

Um procedimento de decisão que ordena as alternativas satisfaz a intensidade de independência binária se a ordenação social relativa de quaisquer duas alternativas é determinada apenas pela ordenação relativa que cada votante faz desse par e pela intensidade desta ordenação.

A intensidade de independência binária requer que um procedimento use um pouco mais de informação sobre os votantes do que a usada pela independência binária, é uma extensão mínima. Todos os procedimentos binariamente independentes satisfazem a intensidade da independência binária, apenas ignoram a acrescida informação sobre intensidade.

A introdução da intensidade da independência binária traz mudanças. A contagem de Borda, por exemplo, satisfaz a propriedade da intensidade mas falha a independência binária de Arrow. Tome-se o exemplo seguinte em que se vê que a contagem de Borda não satisfaz a independência binária. Para tal usam-se dois perfis (entenda-se perfil como uma lista de preferências de todos os votantes), onde cada votante tem a mesma ordenação relativa de {A, B} mas com diferentes níveis de intensidade:

p_1		p_2	
ABC – 5 votos	(A $\succ$ B, 0)	ACB – 5 votos	(A $\succ$ B, 1)
BAC – 6 votos	(B $\succ$ A, 0)	BAC – 6 votos	(B $\succ$ A, 0)

Tabela 5.3.

Pela contagem de Borda em p_1: A: $5\times2+6\times1=16$ pontos;

B: $5\times1+6\times2=17$ pontos;

C: $0+0=0$ pontos, donde a ordenação B $\succ$ A $\succ$ C.

Em p_2, A: $5\times2+6\times1=16$ pontos;

B: $0+6\times2=12$ pontos;

C: $5\times1+0=5$ pontos, donde a ordenação A $\succ$ B $\succ$ C.

Isto significa que de p_1 para p_2, ao modificar apenas a ordenação relativa entre B e C para cinco votantes, alterou-se a ordenação final do par {A, B}. É deste modo violada a independência binária, uma vez que num processo que dela goza, a ordenação de {A, B} não deve ser influenciada por uma alteração no número de votos do candidato C.

Enquanto a condição de Arrow ignora esta importante diferença nas preferências individuais, a nova propriedade da intensidade da independência binária inclui-a no seu processo de decisão. Por outras palavras, a independência binária está interessada apenas em saber quem está “à esquerda” de quem, ao passo que a intensidade da independência binária também se preocupa com quem está no meio.

Veja-se que esta pequena alteração, provocada pela intensidade da independência binária, proporciona um modo de fuga às preocupações do Teorema de Arrow.

Teorema 5.1 (Saari): A contagem de Borda é um procedimento não ditatorial que produz sempre resultados transitivos e satisfaz as condições de domínio ilimitado, intensidade de independência binária e Pareto.

Este Teorema significa que uma pequena alteração na independência binária transforma a sensação de frustração envolvendo o Teorema de Arrow, associado a ditaduras e paradoxos, num cenário de esperança que admite procedimentos de ordenação razoáveis.

Veja-se que de facto a contagem de Borda funciona. Claramente, é um método não ditatorial, pois chega a satisfazer o anonimato, quando a identificação dos votantes não é exigida. Os resultados são transitivos pois a contagem de Borda associa um número de pontos a cada candidato, donde a ordenação final reflecte a característica transitiva dos números inteiros.

Não existem restrições às ordenações dos candidatos desde que sejam feitas de forma transitiva, ou seja, a contagem de Borda satisfaz a universalidade. A contagem de Borda exclui os votantes irracionais, pois perante as preferências cíclicas $A \succ B$, $B \succ C$, $C \succ A$, não há possibilidade de ordenar os candidatos de forma a atribuir os pontos de forma decrescente. Assim, a contagem de Borda é usada apenas por votantes racionais.

Falta apenas verificar que a contagem de Borda satisfaz a intensidade da independência binária e Pareto.

Suponha-se um cenário com quatro votantes e sete candidatos. Dois dos candidatos são a Cândida e a Lídia, e a informação relativa aos pontos obtidos com a contagem de Borda é a seguinte:

Votante	Ordenação da Cândida	Pontos da Cândida	Ordenação da Lídia	Pontos da Lídia	Ordenação
D	3	4	5	2	$(C \succ L, 1)$
E	5	2	6	1	$(C \succ L, 0)$
F	4	3	1	6	$(L \succ C, 2)$
G	6	1	2	5	$(L \succ C, 3)$
Total		10		14	$L \succ C$

Tabela 5.4.

A Lídia tem quatro pontos a mais que a Cândida (14 – 10 = 4). Outra forma de encontrar este valor 4 é somar uma unidade a cada um dos valores de intensidade associado à ordenação $L \succ C$ e calcular a soma: (2 + 1) + (3 + 1) = 7; fazer o mesmo para a ordenação $C \succ L$: (1 + 1) + (0 + 1) =3; e por fim subtrair a soma da Lídia à de Cândida: 7 – 3 = 4.

A igualdade de resultados destes dois cálculos não é acidental. Isto acontece porque o valor de intensidade é sempre uma unidade inferior à diferença dos pontos da contagem de Borda. Por outras palavras, a ordenação relativa da contagem de Borda de dois candidatos pode ser calculada recorrendo à forma como cada votante ordena o par e a intensidade dessa ordenação. Consequentemente, a contagem de Borda satisfaz a condição da intensidade da independência binária.

A condição de Pareto verifica-se porque o nível de intensidade e a diferença entre as pontuações favorece sempre o candidato unanimemente preferido. Assim termina a prova.

Ao encerrar este apontamento dedicado à perspectiva de Saari, vale a pena transcrever o que diz o autor William Poundstone, na obra *Gaming the vote – Why elections aren't fair (and what we can do about it),* página 219:

"In March 2001, Saari travels took him to San Antonio, home of the Alamo, for the meeting of The Public Choice Society. (…) A highlight of the conference was dual (and dueling) presentations by Donald Saari and Kenneth Arrow. Both speakers discussed independence of irrelevant alternatives. Arrow had no trouble defending the intuitive reasonableness of his condition. A race between A [Gore] and B [Bush] should not be decided by C [Nader]. This was the heart of Condorcet's philosophy of voting. Saari challenged this. He maintained that both independence or irrelevant alternatives and Condorcet voting were overrated concepts. He extolled the properties of the Borda count - a system that many, if not most, in attendance regarded as absurdly impractical. One of those there, Iain Mclean, characterized the meeting as a "dialog of the deal".

You would have to be deaf not to hear Saari loud and clear on the evils of Condorcet voting: «I find the Condorcet winner to be a lousy concept full of dangers», he wrote with characteristic candour, «Pairwise voting is a mess!» (…)

Saari told me: «It's part of our culture to believe the best duelist should be the best. I'll take on anyone at all-gotcha! I'll be the last man standing. It takes a while to understand that there's more subtle issues, that we're throwing away valuable, valuable information.»"

VI – Teorema de Sen

Um exemplo de estudos relacionados com os de Arrow data de 1998, de Amartya Sen[10], agraciado com o prémio Nobel da Economia nesse mesmo ano, e sugere um conflito entre direitos sociais e individuais. Este conflito capta aspectos centrais da tensão constante entre os direitos de um indivíduo e as necessidades da sociedade. Enquanto que o resultado de Arrow sugere a escolha desconfortável entre sofrer uma ditadura ou prescindir de certos princípios democráticos básicos, os estudos de Sen apresentam uma igualmente difícil escolha entre a limitação de algumas decisões pessoais e uma sociedade sem capacidade de acção.

Arrow identificou uma questão importante, mas o problema torna-se mais grave. Arrow diz que a única forma de evitar uma ditadura é colocar de lado ou enfraquecer uma das suas premissas. Podendo escolher, será razoável preservar a condição de unanimidade de Pareto em detrimento da independência binária; isto sugere substituir a independência binária por um pressuposto semelhante, mas mais flexível – a intensidade de independência binária.

Veja-se os estudos de Amartya Sen sobre as consequências de garantir direitos limitados a alguns votantes (como o direito que terá cada indivíduo sobre a escolha dos sapatos que calça).

Sen diz que um procedimento satisfaz a condição do liberalismo minimal se, pelo menos, dois votantes têm poder de decisão sobre um par específico de alternativas.

O objectivo do liberalismo minimal é modelar os direitos de cada indivíduo, é a condição que Sen impõe para permitir que cada indivíduo escolha que sapatos calçar. A condição parece razoável, mas Sen mostra que provoca os temidos ciclos, impedindo qualquer tentativa de determinar a “melhor escolha”.

Teorema 6.1 (Sen): Suponha-se que existem três ou mais alternativas de voto e que a condição da universalidade é satisfeita. Se o procedimento eleitoral satisfizer o liberalismo minimal e Pareto, então existem perfis para os quais o procedimento tem resultados cíclicos.

<u>Demonstração:</u>

Sejam A e B dois votantes que satisfazem a condição do liberalismo minimal, sendo decisores sobre os candidatos {X, Y} e {Z, W}, respectivamente.

[10] Amartya Sen (1933-…). Economista indiano. Professor na Harvard University, E.U.A..

Se {X, Y} e {Z, W} são o mesmo conjunto de candidatos dá-se uma contradição, pelo que existe no máximo um candidato comum, digamos X = Z. Suponha-se, então, que o votante A com a preferência $X \succ Y$, e o votante B, $W \succ Z$ (sendo que Z = X); admite-se ainda que todos os votantes (incluindo A e B) preferem $Y \succ W$.

Assim, para o votante A temos: $X \succ Y \succ W$, e para o votante B, $Y \succ W \succ X$ (pois Z = X); esta é uma situação possível pois assumiu-se a transitividade sob a condição da universalidade das preferências.

Respeitando o liberalismo minimal, como A é decisor sobre {X, Y} e B sobre {Z, W}, vem $X \succ Y$ e $W \succ X$; por Pareto tem-se, na ordenação final, $Y \succ W$. Vem então $X \succ Y$, $Y \succ W$, $W \succ X$, um ciclo!

Suponha-se agora que X, Y, Z e W são candidatos distintos. Considere-se que A prefere $X \succ Y$, B prefere $Z \succ W$, e todos os votantes (incluindo A e B) preferem $W \succ X$ e $Y \succ Z$.

Tem-se para o votante A: $X \succ Y$, $Y \succ Z$, $W \succ X$; para o votante B: $Z \succ W$, $W \succ X$, $Y \succ Z$. Pela condição do liberalismo minimal, vem que a ordenação final terá de reflectir $X \succ Y$ e $Z \succ W$; pela unanimidade de Pareto vem $W \succ X$ e $Y \succ Z$.

Como se assumiu também a universalidade vem a transitividade das preferências, logo se $X \succ Y$ e $Y \succ Z$ vem $X \succ Z$. Dá-se, então, um ciclo: $X \succ Z$, $Z \succ W$, $W \succ X$.

Conclui-se assim a demonstração do Teorema de Sen: um procedimento eleitoral satisfazendo a universalidade, Pareto e o liberalismo minimal produz resultados cíclicos.

€

A verificação do Teorema de Sen é imediata com três alternativas. Para os candidatos {A, B, C} considere-se que a Vitória e o Vítor têm poder de decisão sobre os pares {A, B} e {A, C}, respectivamente. Se a preferência da Vitória é ABC, enquanto todos os outros votantes preferem BCA, então a tabela que se segue identifica toda a informação necessária a um procedimento que verifique o liberalismo minimal. Os espaços em branco indicam informações irrelevantes para esta situação, uma vez que o resultado é fruto da escolha de um votante decisivo.

Votante \ Alternativa	{A, B}	{B, C}	{A, C}
Vitória	$A \succ B$	$B \succ C$	----
Vítor	----	$B \succ C$	$C \succ A$
Outros	----	$B \succ C$	----
Resultado	$A \succ B$	$B \succ C$	$C \succ A$

Tabela 6.1.

Obtém-se um resultado cíclico, pois A ganha a B, B ganha a C e C ganha a A.

Note-se que os resultados $A \succ B$ e $C \succ A$ advêm do poder de decisão dos votantes Vitória e Vítor, respectivamente; e o resultado $B \succ C$ aparece por unanimidade. Fica assim evidente que um procedimento eleitoral que satisfaça o liberalismo minimal e Pareto pode provocar resultado cíclicos.

Uma crítica natural a esta ilustração do Teorema de Sen é que os dois votantes decisivos podem fazer julgamentos a respeito da mesma alternativa A. O conflito nasce justamente quando um votante decisivo elege A, enquanto o outro o passa para última possibilidade. Esta situação sugere que talvez o problema de Sen seja artificial, e possa evitar-se com quatro ou mais alternativas, se os votantes decisivos fizerem as suas escolhas sobre pares de possibilidades disjuntos.

Veja-se um caso com as alternativas {A, B, C, D}. Suponha-se que estas quatro possibilidades são acções que um grupo de accionistas pondera comprar. Fruto da sua experiência no mercado, André e Ângelo são decisivos, respectivamente, sobre {A, B} e {C, D}, sendo que a preferência de André é DABC e todos os outros votantes preferem BCDA; a tabela é:

Votante \ Alternativa	{A, B}	{B, C}	{C, D}	{A, D}
André	$A \succ B$	$B \succ C$	----	$D \succ A$
Ângelo	----	$B \succ C$	$C \succ D$	$D \succ A$
Outros	----	$B \succ C$	----	$D \succ A$
Resultado	$A \succ B$	$B \succ C$	$C \succ D$	$D \succ A$

Tabela 6.2.

Dois dos resultados são obtidos pela intervenção dos votantes decisivos, e os outros dois por unanimidade; mais uma vez, satisfazendo Pareto e o liberalismo minimal, obtém-se um resultado cíclico: A $\succ$ B, B $\succ$ C, C $\succ$ D, D $\succ$ A. Assim, o problema continua, apesar de não existirem somente três alternativas.

Numa perspectiva teórica, o mistério é compreender como estas duas propriedades naturais: Pareto e liberalismo minimal, permitem "más conclusões", pois Sen tentou evitar este problema ao proibir "más preferências", eliminando os votantes não racionais. O que correu mal?

Parece aceitável que cada indivíduo possa decidir sobre algo neste mundo; no entanto, o Teorema de Sen deita por terra as expectativas sobre a possibilidade de fazê-lo sem provocar danos colaterais na sociedade. Talvez seja possível descobrir formas inventivas de contornar as dificuldades identificadas por Sen. Tem sido tentado… mas as respostas obtidas até ao momento são negativas. Veja-se uma pequena amostra…

Talvez se consiga algo impondo restrições sobre as circunstâncias em que um agente pode ser decisivo. Allan Gibbard equacionou se um votante estaria autorizado a ter poder de decisão somente quando as suas acções o afectassem unicamente a si. Para explorar esta ideia, Gibbard restringiu-se ao estudo de cenários em que a decisão de um indivíduo não tem efeito em qualquer outra pessoa.

Considere-se duas pessoas: um tradicional e um inovador, no processo de escolha da cor da camisola a vestir: vermelha ou azul. Representa-se por (V, A) a situação em que o inovador escolhe o vermelho e o tradicional o azul (será respeitada esta ordem). O inovador quer usar algo diferente, ao passo que o tradicional quer usar uma camisola da mesma cor. Assim, a ordenação de preferências do inovador será: (A, V) $\succ$ (V, A) $\succ$ (A, A) $\succ$ (V, V); enquanto que o tradicional tem as preferências: (A, A) $\succ$ (V, V) $\succ$ (V, A) $\succ$ (A, V).

Para a construção da tabela note-se que o inovador tem poder de decisão sobre as possibilidades (V, A), (A, A) e (V, V), (A, V), uma vez que só a ele dizem respeito; da mesma forma, o tradicional tem poder de decisão nas situações (V, V), (V, A) e (A, V), (A, A). Vem então a tabela:

Votante \ Alternativa	{(V, V), (V, A)}	{(V, A), (A, A)}	{(A, A), (A, V)}	{(A, V), (V, V)}
Inovador	----	(V, A) $\succ$ (A, A)	----	(A, V) $\succ$ (V, V)
Tradicional	(V, V) $\succ$ (V, A)	----	(A, A) $\succ$ (A, V)	----
Resultado	(V, V) $\succ$ (V, A)	(V, A) $\succ$ (A, A)	(A, A) $\succ$ (A, V)	(A, V) $\succ$ (V, V)

Tabela 6.3.

Obtém-se um ciclo: o problema não se soluciona com a condição de cada agente só ter poder de decisão quando as suas escolhas não influenciam os outros.

O dilema do prisioneiro…

O fenómeno dos ciclos identificado por Sen está presente no quotidiano e em comportamentos desviantes estudados pelas ciências sociais. O “dilema do prisioneiro” abandonou a esfera da teoria dos jogos e é aplicado com sucesso na explicação de uma grande variedade de assuntos, desde o crime à gestão financeira ou problemas de desarmamento nuclear.

Uma razão que levou este jogo modelo a um vasto leque de possibilidades de aplicação é, tal como nos estudos de Sen, a sua capacidade de reflectir o conflito entre os interesses individuais e os da comunidade.

Para exemplificar suponha-se dois prisioneiros, Beto e Zacarias, suspeitos de um crime; suponha-se ainda que a prova apresentada é muito questionável. A estratégia usada pela polícia para tentar descobrir a verdade, passa por questionar separadamente os suspeitos e desta forma levar cada um deles a testemunhar contra o outro. Se ambos se mantiverem em silêncio poderão ser libertados ou ter uma pena mínima. Se um suspeito confessar pode obter um acordo razoável, enquanto o outro enfrenta uma pena dura. Se ambos confessarem sofrerão uma condenação a longo período de prisão (igual para ambos).

Considere-se que existem provas suficientes para condenar os dois suspeitos a um ano de cadeia por crimes menores. No entanto, se um deles denunciar o outro, este terá uma condenação a dez anos de cadeia, ao passo que o primeiro, o denunciante, verá a sua pena suspensa. Se ambos confessarem, a pena a cumprir será de cinco anos de prisão para cada um.

Resumindo as regras do jogo numa tabela, consoante um prisioneiro coopera (com o outro criminoso, entenda-se, não com a polícia) ou denuncia, obtêm-se os seguintes valores, em anos, para as penas de prisão a cumprir:

		Zacarias	
		Coopera	Denuncia
Beto	Coopera	(1, 1)	(10, 0)
	Denuncia	(0, 10)	(5, 5)

Tabela 6.4.

Para simplificar a leitura do tempo de prisão que pode esperar cada um dos suspeitos, usam-se as letras E, F, G, H para representar as quatro estratégias possíveis:

	E	F	G	H
Estratégia	(D, C)	(C, C)	(D, D)	(C, D)
Tempo de prisão do Beto	0	1	5	10
Tempo de prisão do Zacarias	10	1	5	0

Tabela 6.5.

A sequência de preferências de cada candidato depende do que lhe é mais favorável; desta forma as preferências serão: Beto – EFGH; Zacarias – HFGE.

Cada um dos suspeitos tem voto de decisão sobre a sua opção de cooperar com o parceiro ou denunciá-lo. Desta forma, Beto é decisivo sobre {E, F} e sobre {G, H}; Zacarias é decisivo sobre {E, G} e sobre {F, H}. Traduzindo esta informação numa tabela de liberalismo minimal:

Prisioneiro \ Alternativa	{E, F}	{G, H}	{E, G}	{F, H}	{F, G}
Beto	$E \succ F$	$G \succ H$	----	----	$F \succ G$
Zacarias	----	----	$G \succ E$	$H \succ F$	$F \succ G$
Resultado	$E \succ F$	$G \succ H$	$G \succ E$	$H \succ F$	$F \succ G$

Tabela 6.6.

Definem-se assim dois ciclos: $E \succ F$, $F \succ G$, $G \succ E$; e $H \succ F$; $F \succ G$; $G \succ H$.

O "dilema do prisioneiro" introduz um manancial de exemplos sociais que ilustram o tipo de conflito de Sen: preferências individuais versus direitos de comunidade. Um exemplo quotidiano muito simples é o corte de uma via numa auto-estrada. Se existe sinalização, quinhentos metros antes do local, a indicar que os condutores da via da direita devem passar para a faixa da esquerda, tudo decorreria de forma organizada, escoando o trânsito compassadamente, se os condutores começassem, ao sinal, a formar uma única fila. Mas existem sempre os impacientes que "denunciam" do objectivo da comunidade e esperam até ao último momento para passar para a outra faixa de circulação. Ao fazê-lo poupam tempo a si próprios mas contribuem para o agravamento do tráfego, congestionando-o com inconvenientes óbvios para os que "cooperam".

Um conflito sério entre direitos individuais e necessidades sociais vive-se na China, com o excesso de população e a imposição da política "um filho". Aos olhos estritos dos direitos individuais não há discussão: uma família deve decidir, na sua intimidade, quantas crianças ter. No entanto, esta liberdade individual causa um excesso de população, pelo que é necessário resolver o problema. Com um número excessivo de pessoas precipitam-se problemas como a escassez de alimento e a necessidade de expansão do território – a possibilidade de guerra. Esta é claramente uma situação modelada pela formulação de Sen.

Sen exige que os votantes tenham preferências racionais, o que, conforme já foi visto, elimina o efeito de "más preferências" causadoras de resultados cíclicos. Para ilustrar este comentário, considere-se que o pressuposto de Sen não foi assumido e veja-se quais as consequências. Comece-se pelo caso em que todos os votantes são irracionais e têm as mesmas preferências cíclicas: {$A \succ B$, $B \succ C$, $C \succ A$}. Apesar de irracional, como este grupo concorda unanimemente sobre a ordenação de preferências, a condição de Pareto determina o ciclo como o resultado eleitoral. Esta conclusão simplesmente ilustra o fenómeno "más preferências, maus resultados".

Para completar esta análise de "más preferências, maus resultados", associe-se às preferências irracionais acima uma tabela respeitando o liberalismo minimal, quando dois dos três votantes cíclicos, Vitória e Vítor, têm poder de decisão sobre {A, B} e {A, C}, respectivamente:

Votante \ Alternativa	{A, B}	{B, C}	{A, C}
Vitória	$A \succ B$	$B \succ C$	----
Vítor	----	$B \succ C$	$C \succ A$
Outros	----	$B \succ C$	----
Resultado	$A \succ B$	$B \succ C$	$C \succ A$

Tabela 6.7.

Esta tabela é exactamente igual à tabela 6.1. Tem-se assim um problema: por alguma razão, respeitando um nível minimal de liberalismo, os procedimentos tornam impossível distinguir entre votantes com preferências racionais ou com preferências cíclicas.

Nos estudos de Sen os votantes racionais desempenham um papel central, numa tentativa de evitar "maus resultados", proibindo "más preferências". Mas se o liberalismo minimal permite o indesejável, temos de descobrir formas de distinguir os votantes racionais dos cíclicos.

O argumento central é que, contrariamente às intenções e expectativas, admitir um pequeno nível de liberalismo obriga a que todos os procedimentos de liberalismo minimal ignorem o pressuposto da racionalidade dos votantes. Como exemplo, suponha-se que a

Susana, ao escolher um iogurte para o pequeno-almoço, tem três possibilidades de aromas: ananás, banana e cereja. Suponha-se ainda que, como se trata de uma cliente habitual, o empregado do café já conhece as suas preferências AC e CB. Terá a Susana preferências racionais?

Sem informação adicional não é possível responder a esta questão. A transitividade é uma propriedade que, podendo, ou não, verificar-se, compara a ordenação de três pares. Para saber se a Susana é racional é necessário conhecer a sua ordenação do par {A, B}. Se preferir o ananás à banana será racional, caso contrário…

Revendo a última tabela da Vitória e do Vítor, como o procedimento do liberalismo minimal deve ignorar a ordenação de todos os outros votantes, à excepção da Vitória, a respeito do par {A, B}, usa-se apenas a informação sobre as ordenações que o Vítor faz de {B, C} e de {A, C}, não há nenhuma referência à sua preferência relativamente a {A, B}. Tal como aconteceu no exemplo da Susana, não é possível determinar (por falta de informação) se as preferências do Vítor são ou não transitivas.

Este é o ponto fulcral: os problemas de Sen aparecem porque, quando o liberalismo minimal ignora informação sobre a ordenação das preferências de um votante, o procedimento torna-se indiferente relativamente à ordenação do terceiro par. Em particular, o procedimento que satisfaz o liberalismo minimal ignora se a ordenação desconhecida caracteriza o votante como racional ou irracional.

O factor de "votante decisor" no liberalismo minimal, ao excluir a informação relativa à ordenação das restantes preferências, leva ao desconhecimento total sobre a racionalidade desse votante; consequentemente, um procedimento que verifique o liberalismo minimal pode ser usado com votantes racionais ou cíclicos.

Podia catalogar-se este comentário de injusto, equacionando se será impossível conceber um procedimento que aceite apenas votantes racionais. Mas não é: existem numerosos métodos que obrigam à racionalidade dos intervenientes; a contagem de Borda é um exemplo: ao ordenar as preferências no boletim de voto, a pessoa tem de escolher o candidato que ocupa o primeiro lugar, o segundo, e assim sucessivamente. Se o votante tiver as preferências cíclicas AB, BC, CA, quem será o primeiro no seu boletim de voto? Ao associar à ordenação das preferências um número de pontos, a contagem de Borda – e tantos outros métodos de atribuição de pesos aos candidatos, designados por métodos posicionais – exige a racionalidade dos votantes.

Numa sociedade homogénea e racional, a condição do liberalismo minimal não causa problemas. Mas num ambiente suficientemente heterogéneo, a informação ignorada por um procedimento que satisfaça o liberalismo minimal, torna impossível determinar se está a ser empregue em votantes racionais ou irracionais. Mesmo que todos os votantes sejam racionais, existem limites sobre o que esperar quando se usa um método eleitoral tão rústico que também pode ser usado por votantes irracionais. Ao usar o liberalismo minimal não são de esperar conclusões brilhantes como a transitividade.

Para melhor compreender o comportamento de Sen use-se a tabela 6.7. Contextualize-se esta tabela numa problemática entre vizinhos que discutem o direito a ouvir música e o dever de não perturbar os outros:

- A é a situação em que a Vitória coloca o volume do rádio tão alto quanto quiser;
- B é a situação em que a Vitória fixa o volume do rádio a um nível razoável;
- C é a situação em que a Vitória tem de responder perante as autoridades por incumprimento da lei do ruído.

A preferência de Vitória é ABC, ela quer ouvir a sua música e certamente não quererá problemas com as autoridades. As preferências dos outros votantes, incluindo o Vítor, são BCA, querem preservar o sossego nem que seja com sanções a Vitória.

Para perceber melhor o cerne deste dilema de Sen aplique-se a estas preferências a intensidade de ordenação binária. Recorde-se que este conceito especifica o número de alternativas que separam duas opções numa ordenação.

No exemplo, a preferência da Vitória sobre o par {A, B} é ($A \succ B$, 0), ao ser decisiva sobre este par, Vitória impõe o resultado social $A \succ B$. Este comportamento "barulhento" contraria o sentimento inverso dos restantes votantes: ($B \succ A$, 1), com o número 1 (um) evidenciando a forte preferência $B \succ A$, pode dizer-se que os restantes votantes têm um sentimento de forte irritação para com a decisão da Vitória. Por outro lado, Vitória considera Vítor muito inconveniente, uma vez que se Vitória tiver de responder perante as autoridades (a que se opõe fortemente com a sua escolha ($A \succ C$, 1)), deve-o ao Vítor (o que pode constatar-se com a ordenação ($C \succ A$, 0) de Vítor); Vitória e Vítor travam um conflito de Sen.

Note-se que os ciclos de Sen se desenvolvem porque o resultado social determinado pela preferência fraca de cada agente decisivo cria uma reacção externa negativa, em particular, choca com as opções fortes de outros votantes.

Conforme se viu, quando resultados cíclicos ocorrem com as propriedades de Sen, a escolha decisiva de um votante afecta negativa e fortemente um outro votante. Esta "negatividade externa" não mede apenas o efeito do aborrecimento, mas também reflecte a procura pelo indicador de racionalidade. Isto porque se um votante tem uma ordenação forte, então, por definição, não pode ter preferências cíclicas; as suas escolhas gozam de algum nível de transitividade.

Estes argumentos sugerem uma solução para o problema de Sen. Sabe-se que será necessário reintroduzir a racionalidade dos votantes no processo de decisão, e que o problema de Sen ocorre quando o resultado decisivo aborrece fortemente alguém (este nível forte evidencia algum nível de preferências transitivas). Seguindo a linha do exemplo barulho versus silêncio, talvez os direitos decisivos de um indivíduo devam ser reduzidos somente quando infringem fortemente os direitos de outros. O que sugere a substituição do liberalismo de Sen pelo seguinte:

Diz-se que a condição do liberalismo não intrusivo é verificada quando o poder de decisão de um agente sobre um determinado par de alternativas não cria uma forte ordenação binária negativa por parte de qualquer outro agente.

Suponha-se que Vitória decide pôr o volume da música muito alto, quando rodeada por amigos que também apreciam esse nível de som. Como neste contexto a sua acção não cria uma forte reacção externa negativa, não terá problemas com as autoridades. Imagine-se um pouco mais: no meio dos convidados está o João, que não tem particular apreço por ouvir música tão alto. O João sente-se incomodado com a atitude de Vitória, mas se o faz a um nível mínimo, pois a sua preferência inversa é fraca, não estão separados pela alternativa de chamar as autoridades. Fruto da ordenação negativa fraca do João, a Vitória continua a ouvir a sua música como prefere.

Teorema 6.2 (Brunel[11] e Saari): Para três ou mais alternativas, suponha-se que o par decisivo de alternativas atribuídas a diferentes agentes tem a propriedade de não haver uma alternativa comum a quaisquer dois pares. Então existem procedimentos que satisfazem o liberalismo não intrusivo e a condição de Pareto, gerando sempre resultados transitivos.

Regressando ao dilema do prisioneiro, este pode conduzir à estratégia de “tramar o vizinho”, ou seja, denunciar em vez de cooperar. Mas se os dois jogadores tentarem tirar vantagem do parceiro, ambos sofrem. As partes desta história são as estratégias individuais dos jogadores, uma forma de criar ligações que fomentem a cooperação será repetir o jogo muitas vezes. Ao repetir o jogo do dilema do prisioneiro surgirão novas estratégias que permitem cooperação. Para explicar esta nova estratégia, tome-se o pensamento político de competição “Não se zangue, vingue-se!”. A repetição de jogadas proporciona oportunidades de seguir este conselho. Mais especificamente: “o meu parceiro sabe que se me denunciar, da próxima vez que

[11] Anne Brunel. Economista na Université de Caen, França.

nos encontrarmos numa situação semelhante, eu farei o mesmo: vingar-me-ei”. É esta versão “ajuste de contas”, de um politicamente mais correcto, “Faz aos outros o que gostavas que te fizessem a ti”, que cria as ligações entre dois jogos e fomenta a cooperação. Esta forma de estabelecer ligações é semelhante à receita anterior para evitar efeitos desagradáveis do resultado de Sen.

O dilema do prisioneiro pode ser modelado nos termos do resultado de Sen. As ligações entre as partes divorciadas criam-se desenvolvendo um cenário que evite que um jogador decisivo tome uma decisão que incuta um constrangimento negativo externo noutro jogador.

Sabe-se que na resolução de um problema é uma abordagem comum e conveniente, para reduzir o grau de complexidade, decompô-lo em partes. Mas este método impõe um custo elevado. Ao enfatizar partes disjuntas e ignorar a informação que as ligava, corre-se o risco de não atingir os objectivos definidos. Toda a informação de ligação deve ser incluída, e assim, de uma forma natural, as dificuldades de Arrow e Sen podem ser resolvidas. A abordagem correcta é modificar a forma como as comparações binárias são usadas. Para o resultado de Arrow, encontra-se a contagem de Borda; para o Teorema de Sen há que evitar que fortes reacções negativas externas se imponham aos outros agentes.

VII – Métodos posicionais, voto por aprovação e exclusão imediata

Métodos posicionais

Após Borda ter introduzido o seu método eleitoral (a contagem de Borda), outros membros da Academie Française des Sciences, como Laplace, questionaram-se sobre o que existiria de especial na escolha efectuada por Borda quanto aos valores (pontos) a atribuir. Porquê usar 2, 1, 0 e não 6, 5, 0, ou qualquer outra combinação? Estas questões conduzem aos chamados métodos posicionais, um conjunto de procedimentos que inclui a contagem de Borda, o voto plural, o voto antiplural (ou seja, aquele em que o votante discrimina o candidato cuja eleição considera inaceitável), entre outros.

Nesta abordagem é atribuído aos n candidatos um número de pontos consoante a sua ordenação no boletim de voto de cada indivíduo. Se estes pontos são $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n$ onde $w_1 > w_n$, então são atribuídos w_j pontos ao candidato ordenado pelo votante na j-ésima posição. No voto plural vem $w_1 = 1$ e $w_j = 0$ para todo o $j > 1$. Na contagem de Borda temos $w_j = n - j$. No voto antiplural temos $w_n = 0$ e $w_j = 1$, $\forall j \neq n$. Comparar entre si as várias possibilidades de atribuição de pontos dos métodos posicionais é uma linha de estudo abordada desde o século XVIII. A complexidade deste tema acabou por criar uma atitude resignada por parte dos especialistas na área, invocando a subjectividade como característica incontornável na escolha de um método posicional. No entanto, este assunto tem actualmente mais desenvolvimentos e respostas.

Nas próximas páginas serão abordadas situações paradoxais resultantes da aplicação de métodos posicionais. Estes métodos são definidos por um vector $(w_1, w_2, ..., w_n)$, com $w_1 > w_n = 0$ e $w_j \geq w_{j+1}, \forall j$, onde a contagem é feita atribuindo w_j pontos ao candidato com o j-ésimo lugar na ordenação do votante, $j = 1, 2, \ldots, n$. Com esta notação o voto plural terá vector $(1,0,\ldots,0)$, o antiplural terá $(1,1,1,\ldots,1,0)$ e a contagem de Borda $(n-1, n-2, ..., 1, 0)$.

Considere-se o acto eleitoral com os candidatos A, B, C, sendo as preferências dos onze votantes:

Número de votos	Ordenação de preferências
2	ACB
2	BCA
3	ABC
4	CBA

Tabela 7.1.

Com o voto plural será A o vencedor, vem a ordenação A $\succ$ C $\succ$ B com 5, 4 e 2 votos, respectivamente.

Ao contabilizar as duas primeiras escolhas de cada votante temos A: 5, B: 9, C: 8, o que produz a ordenação B $\succ$ C $\succ$ A, naquele que será o resultado da aplicação do método de voto antiplural.

Usando a contagem de Borda vem:

A: $2\times2+0+3\times2+0=10$ pontos;

B: $0+2\times2+3\times1+4\times1=11$ pontos;

C: $2\times1+2\times1+0+4\times2=12$ pontos; donde a ordenação vencedora é C $\succ$ B $\succ$ A.

Não há qualquer dúvida quanto à influência do método de decisão escolhido nos resultados do acto eleitoral. Considerando que os dados em tratamento (os boletins de voto) se mantêm, pode dizer-se que, mais do que reflectir a intenção dos votantes, é possível que um resultado eleitoral reflicta a escolha de um método de contagem dos votos.

Veja-se um outro exemplo com cinco candidatos e dezasseis votantes:

Número de votos	Ordenação de preferências
1	ACEDB
1	EACDB
2	AECDB
2	CBDEA
3	DCEBA
4	EBDAC
3	ABCDE

Tabela 7.2.

Considerando apenas a primeira preferência de cada votante, tem-se: A: 6; B: 0: C: 2; D: 3; E: 5; A é o vencedor.

Com as duas primeiras preferências dos votantes: A: 7; B: 9; C: 6; D: 3; E: 7; B é o vencedor.

Com as três primeiras preferências dos votantes: A: 7; B: 9; C: 12; D: 9; E: 11; C é o vencedor.

Com as quatro primeiras preferências: A: 11; B: 12; C: 12; D: 16; E: 13; D é o vencedor.

Com a contagem de Borda,

A: $1\times4+1\times3+2\times4+0+0+4\times1+3\times4=31$ pontos;

B: $0+0+0+2\times3+3\times1+4\times3+3\times3=30$ pontos;

C: $1\times3+1\times2+2\times2+2\times4+3\times3+0+3\times2=32$ pontos;

D: $1\times1+1\times1+2\times1+2\times2+3\times4+4\times2+3\times1=31$ pontos;

E: $1\times2+1\times4+2\times3+2\times1+3\times2+4\times4+0=36$ pontos;

E é o vencedor!

O teorema que se segue foi divulgado por Saari no artigo *Millions of election rankings from a single profile*, publicado na Social Choice and Welfare (9), 1992, e mostra que este fenómeno eleitoral, em que qualquer um dos candidatos pode vencer, é válido para qualquer número de candidatos.

Teorema 7.1: Para N candidatos, $\{c_1, c_2, ..., c_N\}$ com $N \geq 3$, existem perfis (ou seja, ordenações que os votantes fazem dos candidatos) tais que c_j vence quando são considerados j candidatos escolhidos por cada votante, $j = 1, ..., N-1$; tem-se ainda que c_N é o vencedor segundo a contagem de Borda.

Mas a situação torna-se ainda mais perturbadora. Volte-se ao exemplo registado na tabela 7.1 e observe-se as ordenações produzidas: A $\succ$ C $\succ$ B, B $\succ$ C $\succ$ A, C $\succ$ B $\succ$ A, desconcertante – a primeira e a segunda são o inverso uma da outra. Ao escolher outros métodos posicionais encontram-se ainda mais possibilidades:

Com o método posicional (4,1,0) vem:

A: $2\times4+0+3\times4+0=20$ pontos;

B: $0+2\times4+3\times1+4\times1=15$ pontos;

C: $2\times1+2\times1+0+4\times4=20$ pontos; obtendo-se a ordenação A $\approx$ C $\succ$ B.

Com o método (7,2,0) tem-se:

A: $2\times7+0+3\times7+0=35$ pontos;

B: $0+2\times7+3\times2+4\times2=28$ pontos;

C: $2\times2+2\times2+0+4\times7=36$ pontos; obtendo-se a ordenação C $\succ$ A $\succ$ B.

Com (7,3,0) vem:

A: $2\times7+0+3\times7+0=35$ pontos;

B: $0+2\times7+3\times3+4\times3=35$ pontos;

C: $2\times3+2\times3+0+4\times7=40$ pontos; obtendo-se a ordenação C $\succ$ A $\approx$ B.

Com o método (3,2,0):

A: $2\times3+0+3\times3+0=15$ pontos;

B: $0+2\times3+3\times2+4\times2=20$ pontos;

C: $2\times2+2\times2+0+4\times3=20$ pontos; obtendo-se a ordenação B $\approx$ C $\succ$ A.

Compilando a informação:

Método posicional	Ordenação de preferências
(1,0,0)	A $\succ$ C $\succ$ B
(1,1,0)	B $\succ$ C $\succ$ A
(2,1,0)	C $\succ$ B $\succ$ A
(7,2,0)	C $\succ$ A $\succ$ B
(3,2,0)	B $\approx$ C $\succ$ A
(4,1,0)	A $\approx$ C $\succ$ B
(7,3,0)	C $\succ$ A $\approx$ B

Tabela 7.3.

No mesmo trabalho em que trata o teorema 7.1, Saari prova o seguinte resultado:

Teorema 7.2: Suponha-se que existem $N \geq 2$ candidatos. Para qualquer k satisfazendo $1 \leq k \leq N!-(N-1)!$, pode encontrar-se um perfil onde existem precisamente k resultados estritos de um método posicional; os diferentes resultados são consequência de diferentes métodos posicionais. É impossível encontrar um perfil com mais de $N!-(N-1)!$ ordenações finais estritas.

É possível confirmar que com três candidatos, como no caso da tabela 7.3, existem 3! – 2! = 4 ordenações estritas diferentes. Perante cinco candidatos o número de ordenações estritas será 5! – 4! = 96, um valor que continuará a aumentar com o número de candidatos envolvidos (um exemplo de cinco candidatos para dezasseis votantes foi visto na tabela 7.2).

Repare-se que com seis candidatos (o número de concorrentes às eleições presidenciais em Portugal em 2006) existem 600 ordenações estritas possíveis; é assustador pensar que estas 600 ordenações não resultam de alterações nas preferências dos votantes, mas sim do uso de diferentes métodos de contagem de votos. Assim, como saber qual a real preferência dos votantes?

Saari desenvolveu uma forma geométrica de representação de perfis, baseada na simetria, de modo a facilitar o processo de contagem de votos. Para três candidatos usa-se um triângulo equilátero, associa-se cada vértice a um dos candidatos, e traçam-se as medianas do triângulo de modo a encontrar seis triângulos menores que definem regiões de ordenação em que a proximidade a determinado vértice é importante. A figura seguinte representa as regiões de ordenação:

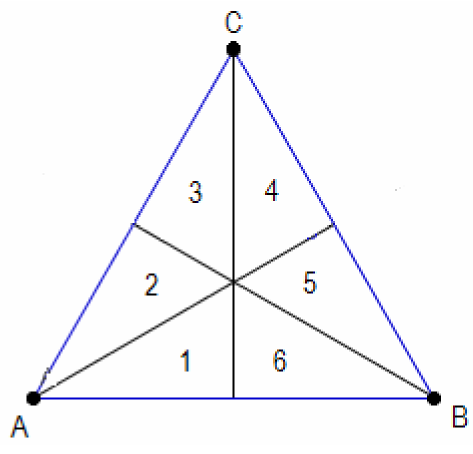

Figura 7.1. Regiões de ordenação

Sendo que um votante na região 1 terá a ordenação de preferências ABC, revelando a ordem decrescente de proximidade da região a cada um dos vértices. De forma resumida:

Ordenação de preferências	Região de ordenação
ABC	1
ACB	2
CAB	3
CBA	4
BCA	5
BAC	6

Tabela 7.4.

Por exemplo, tomando a tabela 7.1, este perfil terá a seguinte representação geométrica:

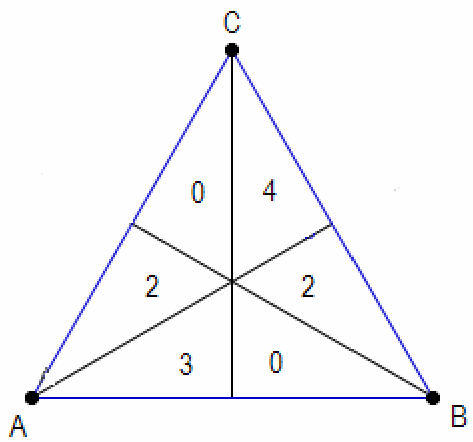

Figura 7.2. Perfil geométrico.

Podem também usar-se vectores para representar os perfis. Ao adoptar a numeração das regiões atribuída em 7.1 tem-se $p = (p_1, ..., p_6)$, um perfil onde p_j é o número de votantes com a ordenação j. Por exemplo, para a figura 7.2 vem o vector $p = (3, 2, 0, 4, 2, 0)$.

Veja-se agora como contabilizar votos usando esta abordagem geométrica (por facilidade continua a usar-se o perfil da figura 7.2). Repare-se que todos os votantes que preferem A a B se posicionam, no triângulo, à esquerda da mediana do lado [AB], perfazendo um valor de 5 indivíduos (3 + 2 + 0 = 5). Analogamente, 6 pessoas preferem B a A pois 4 + 2 + 0 = 6. Seguindo este raciocínio obtêm-se os totais para comparações a pares: B $\succ$ A (6 versus 5); C $\succ$ B (6 versus 5); C $\succ$ A (6 versus 5), que podem ser acrescentados à representação geométrica:

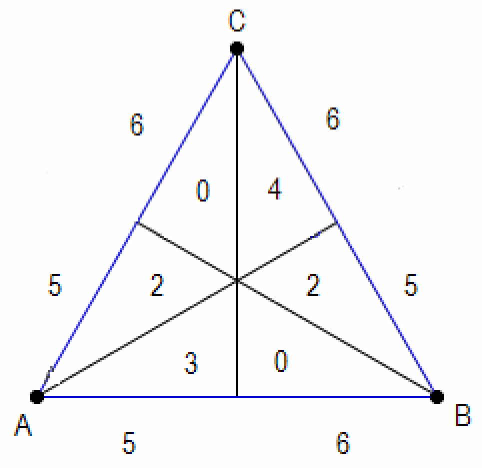

Figura 7.3. Perfil geométrico com subtotais das comparações a pares.

Retomando a linguagem de Condorcet, pode afirmar-se que C é um vencedor de Condorcet e A um perdedor de Condorcet.

Para determinar a ordenação final de preferências é necessário reparar que o total para A, usando o voto plural, será 5 (2 + 3 = 5), correspondendo à soma dos valores das duas regiões adjacentes a A; para B vem 2 (2 + 0 = 2) e para C 4 votos (0 + 4 = 0). Assim, uma contagem segundo o voto plural determinará a ordenação A $\succ$ C $\succ$ B com os votos 5, 4 e 2, respectivamente. Mas falta abordar outros métodos posicionais…

A dificuldade inerente à apresentação de todos os resultados de métodos posicionais prende-se com o facto de existirem muitos procedimentos possíveis. Por outro lado, muitos destes métodos são equivalentes. Por exemplo, é claro que usando o sistema posicional (50, 0, 0) atribuir-se-á maior número de pontos que com o sistema (1, 0, 0), no entanto, as ordenações finais serão as mesmas. De um modo geral, uma ordenação eleitoral será a mesma usando o método $(w_1, w_2, ..., 0)$ ou o método $(\lambda w_1, \lambda w_2, ..., \lambda 0)$, com $\lambda > 0$ um escalar fixo. Este facto sugere a escolha do procedimento recorrendo aos pesos dos métodos posicionais.

Para facilitar os cálculos definir-se-á a normalização os vectores; ao trabalhar eleições com três candidatos significa que no lugar de $(w_1, w_2, 0)$ usar-se-á $\left(\frac{w_1}{w_1}, \frac{w_2}{w_1}, 0\right)$ para criar um vector de votação normalizado da forma $w_s = (1, s, 0)$, onde, uma vez que $w_1 \geq w_2$, se tem $0 \leq s = \frac{w_2}{w_1} \leq 1$. Exemplificando, no caso da contagem de Borda que, conforme se sabe, tem o vector (2, 1, 0), normalizando vem $w_{1/2} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Esta normalização permite descobrir o que acontece com todos os métodos posicionais possíveis para três candidatos usando o vector $w_s = (1, s, 0)$. Já se sabe que *s* = 0 corresponde ao voto plural, a geometria do triângulo permite obter a ordenação. Veja-se que a determinação dos outros w_s é igualmente simples. Por exemplo, o número de pontos de A será o número de votantes que o ordenaram em primeiro lugar mais *s* vezes o número de votantes que escolhem A em segundo (usando as regiões definidas na figura 7.1 será a soma dos valores das regiões 1 e 2 mais *s* vezes a soma dos valores das regiões 3 e 6).

Retomando o exemplo da figura 7.3, obtém-se a figura 7.4 colocando junto de cada vértice o seu voto w_s.

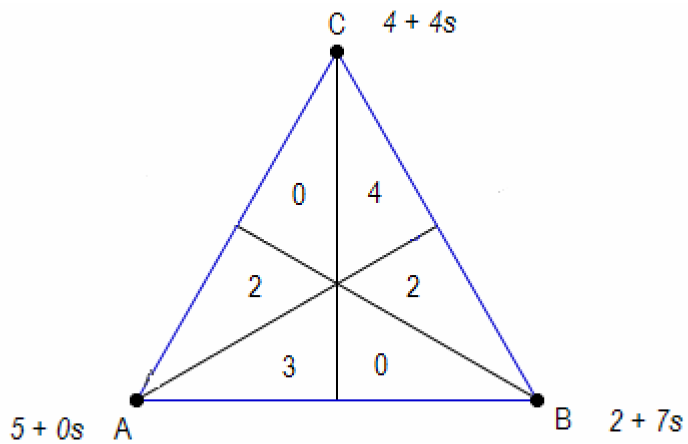

Figura 7.4.

O uso de cálculos elementares permite agora determinar quais os procedimentos que definem as várias ordenações. Por exemplo, para obter C $\succ$ A $\succ$ B vem:

$\begin{cases} 4+4s > 5+0s \\ 5+0s > 2+7s \\ 4+4s > 2+7s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s > 1/4 \\ s < 3/7 \\ s < 2/3 \end{cases}$, ou seja, *s* = 0,4 parece funcionar: $w_{2/5} = \left(1, \frac{2}{5}, 0\right)$, dito de outra forma, o método posicional definido por (5, 2, 0). Deste modo encontram-se os métodos apresentados na tabela 7.3 (repare-se que esta opção agora tomada de (5, 2, 0) produz a mesma ordenação final que o sistema (7, 2, 0) apresentado na tabela 7.3).

Tendo já conseguido uma forma geométrica de interpretar os perfis, é agora necessário representar os resultados das eleições. Isto porque a abordagem geométrica permitirá caracterizar todas as possíveis ordenações finais que ocorrem com a utilização dos métodos posicionais. Comece-se por representar os votos recebidos por cada candidato como uma fracção do total. Assim, se A, B e C obtiverem, respectivamente, 2000, 5000 e 3000 votos, o terno $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{10}\right)$ representa essa situação. Pode aqui estabelecer-se uma analogia com o espaço euclidiano a três dimensões, ou seja, a votação relativa dos candidatos A, B e C é dada por $\{q=(q_A,q_B,q_C)\mid q_j\geq 0, q_A+q_B+q_C=1\}$, $j\in\{A,B,C\}$. Assim, q será parte de um plano em □3, uma região triangular no primeiro octante do espaço euclidiano. Naturalmente, o terno normalizado $q=(q_A,q_B,q_C)$ define a ordenação final. Encontra-se novamente um triângulo que agora representa resultados eleitorais e não perfis.

Suponha-se o seguinte perfil:

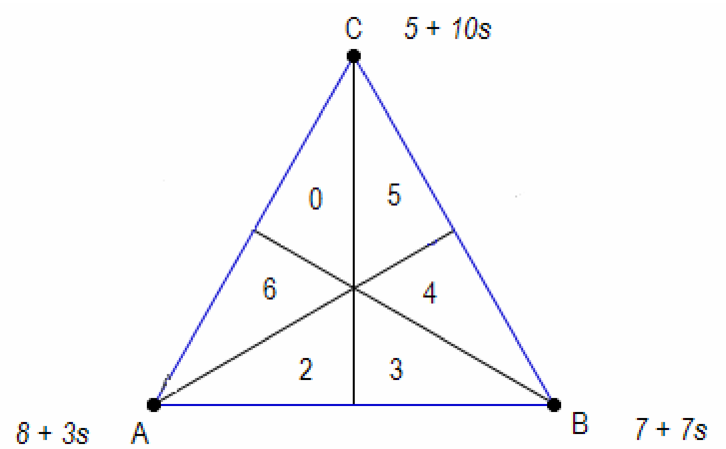

Figura 7.5.

com o resultado eleitoral $w_s=(8+3s,7+7s,5+10s)$; normalizando vem:

$$
\begin{aligned}
q_s &= \frac{1}{20+20s}(8+3s,7+7s,5+10s)\\
&= \frac{1}{20(s+1)}(8+8s-5s,7+7s,5+5s+5s)\\
&= \frac{1}{20(s+1)}\left[(8+8s,7+7s,5+5s)+(-5s,0,5s)\right]\\
&= \frac{s+1}{20(s+1)}(8,7,5)+\frac{1}{20(s+1)}(-5s,0,5s)\\
&= \left(\frac{8}{20},\frac{7}{20},\frac{5}{20}\right)+\frac{1}{20(s+1)}(-5s,0,5s)\\
&= \left(\frac{8}{20},\frac{7}{20},\frac{5}{20}\right)+\frac{1}{20(s+1)}(11s-16s,14s-14s,15s-10s)
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{8}{20}, \frac{7}{20}, \frac{5}{20} \right) + \frac{1}{20(s+1)} \left[(11s, 14s, 15s) - (16s, 14s, 10s) \right]$$

$$= \left(\frac{8}{20}, \frac{7}{20}, \frac{5}{20} \right) - \frac{2s}{20(s+1)} (8,7,5) + \frac{s}{20(s+1)} (11,14,15)$$

$$= \left(\frac{8}{20}, \frac{7}{20}, \frac{5}{20} \right) - \frac{2s}{s+1} \left(\frac{8}{20}, \frac{7}{20}, \frac{5}{20} \right) + \frac{2s}{s+1} \left(\frac{11}{40}, \frac{14}{40}, \frac{15}{40} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{2s}{s+1} \right) \left(\frac{8}{20}, \frac{7}{20}, \frac{5}{20} \right) + \frac{2s}{s+1} \left(\frac{11}{40}, \frac{14}{40}, \frac{15}{40} \right)$$

$$q_s = (1-2t) \left(\frac{2}{5}, \frac{7}{20}, \frac{1}{4} \right) + 2t \left(\frac{11}{40}, \frac{7}{20}, \frac{3}{8} \right) \text{ com } t = \frac{s}{s+1} \qquad (1).$$

Esta expressão (1) mostra que q_s, o resultado eleitoral w_s normalizado, é um ponto num segmento de recta cujos extremos são os perfis normalizados dos resultados do método plural e antiplural. Generalizando, se q_s representa o resultado normalizado de uma eleição, w_s, então $q_s = (1-2t)q_0 + 2tq_1$ com $t = \frac{s}{s+1}$ (2). Denomina-se esta linha de resultados eleitorais de linha de procedimentos.

O resultado para um método específico, a contagem de Borda, por exemplo, é determinado pelo seu valor de *t*. Como na contagem de Borda, $s = \frac{1}{2}$ vem em (2), $t = \frac{1/2}{1/2+1} = \frac{1}{3}$. Assim, o ponto referente à contagem de Borda posiciona-se a $\frac{1}{3}$ do "segmento de recta que une o voto plural ao antiplural".

A linha de procedimentos torna fácil a identificação de todos os resultados eleitorais possíveis para um dado perfil. Representando os pontos que dizem respeito aos perfis normalizados dos votos plural e antiplural, cada ponto do segmento de recta que os une representa um resultado eleitoral w_s.

Para o perfil apresentado na figura 7.5, $p = (2,6,0,5,4,3)$. O ponto $q_0\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{20}, \frac{1}{4} \right)$, com a ordenação A $\succ$ B $\succ$ C é o perfil normalizado do resultado do voto plural; o ponto $q_1\left(\frac{11}{40}, \frac{7}{20}, \frac{3}{8} \right)$ terá a ordenação C $\succ$ B $\succ$ A, é o resultado normalizado do método antiplural. Construindo o triângulo correspondente a este raciocínio vem:

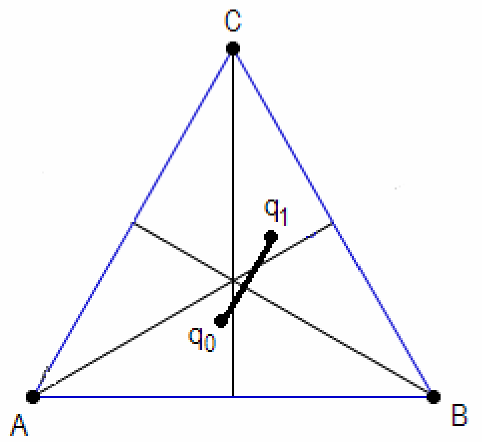

Figura 7.6.

Cada ponto do segmento de recta que liga q_0 a q_1 é resultado eleitoral para algum método posicional. Como este segmento intersecta sete regiões de ordenação (quatro triângulos representando resultados eleitorais estritos e as três medianas), este perfil permitirá as ordenações A $\succ$ B $\succ$ C; A $\approx$ B $\succ$ C; B $\succ$ A $\succ$ C; B$\succ$ A $\approx$ C; B $\succ$ C $\succ$ A; B $\approx$ C $\succ$ A; C $\succ$ B $\succ$ A. Este perfil permitirá a cada candidato ser posicionado em primeiro lugar, não respondendo à questão da procura de um vencedor…

Tudo isto desperta o olhar para uma grande indefinição no mundo das eleições. Esta estrutura matemática corrobora fortemente o facto do resultado eleitoral reflectir o método utilizado em detrimento da intenção dos votantes; alerta para o perigo de não escolher o método eleitoral "correcto", correr o risco de, inadvertidamente, decidir mal.

Alguém que inicie o estudo desta área pode considerar perturbadora a descoberta de quão diferentes podem ser os resultados eleitorais para um determinado perfil fixo. Mas se esta falta de decisão, esta sensação de aleatoriedade, de acaso, provocam perturbação, algo pior acontece ao analisar outros métodos.

Voto por aprovação

O voto por aprovação é simples, desde que não se pense muito no assunto. Quando se começa a questionar, torna-se mais complicado: como marcar a diferença entre os que são dignos da nossa aprovação e os que não são?

Na década de oitenta do século passado, Steven Brams[12] lançou uma campanha pública para a adopção do voto por aprovação. A reacção da imprensa foi favorável: este era um sistema que resolvia o problema de um candidato mais fraco distorcer o resultado eleitoral, e

[12] Steven J. Brams (1940 - …). Professor no departamento de política da New York University.

promovia a honestidade em detrimento do voto estratégico. Para os que conheciam o desconcertante Teorema de Arrow, o voto por aprovação parecia ser a luz ao fundo do túnel. Mas leia-se o que tem Donald Saari a dizer sobre este assunto (citação retirada da obra *Gaming the vote – Why elections aren't fair (and what we can do about it)*, página 200):

"I was at a Conference in Minnesota in 1984, and I ran into Steven Brams. And Steven said «Don, with your new techniques, why don't you look at approval voting?». I agreed to do so, I knew I'd find flaws because with this method you find flaws in anything. But I also expected I'd find a lot of virtues. And in a couple of days I was discovering that approval voting was terrible. Very, very bad."

Saari e outros críticos do voto por aprovação apontam-lhe alguns problemas graves. Um deles é a possibilidade dos votantes preencherem os boletins de voto aleatoriamente, de forma não criteriosa – decisões duvidosas sobre quem é suficientemente bom para ser aprovado podem alterar os resultados eleitorais. Um outro problema grave é o voto estratégico. Os votantes podem decidir o preenchimento do seu boletim de voto em função do que os outros votantes pensam. Claro que este comportamento pode resultar numa decisão eleitoral desajustada relativamente às reais intenções dos votantes.

O voto por aprovação foi adoptado por diversas sociedades profissionais, incluindo sociedades americanas relacionadas com a ciência e mais especificamente com a matemática. Veja-se a comparação entre os resultados da aplicação do voto por aprovação e de métodos posicionais apresentada por Saari na obra *Chaotic Elections! A Mathematician Looks at Voting*, referente à eleição de 1999 do presidente da Society for Social Choice & Welfare (abreviando, SC&W). Nesse ano, sob a iniciativa de Steven Brams, a SC&W converteu a sua eleição por aprovação num "laboratório de teoria das eleições", pedindo aos votantes que ordenassem os três candidatos a concurso (A, B e C). Na figura abaixo apresenta-se o perfil resultante desse acto eleitoral:

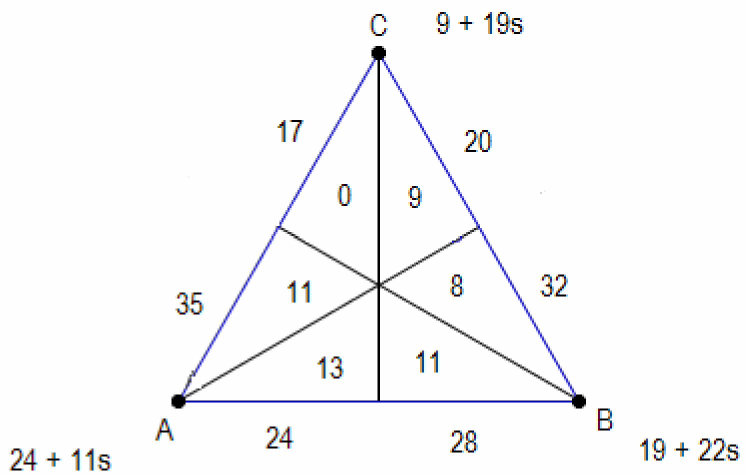

Figura 7.7.

Com a aplicação do voto plural vem: A: 24, B: 19, C: 9, donde a ordenação A $\succ$ B $\succ$ C. Mediante o voto antiplural tem-se: A: 35, B: 41, C: 28, o que proporciona a ordenação B $\succ$ A $\succ$ C. Encontram-se assim os pontos definidos pelos votos plural e antiplural, respectivamente: $q_0 : \left(\frac{24}{52}, \frac{19}{52}, \frac{9}{52}\right)$ e $q_1 : \left(\frac{35}{104}, \frac{41}{104}, \frac{28}{104}\right)$, que numa representação geométrica triangular virá aproximadamente:

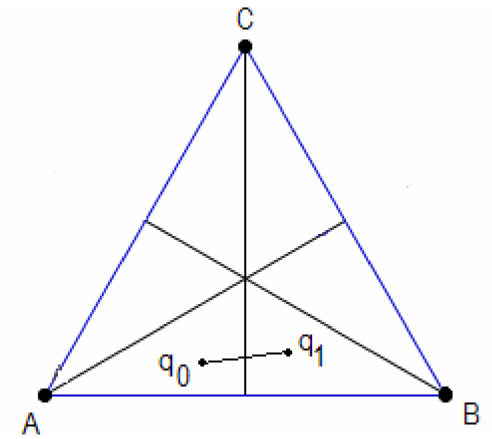

Figura 7.8.

Quem deverá vencer as eleições? A vence o voto plural e B o antiplural. Vê-se também pela posição da linha de procedimentos que C não será vencedor, qualquer quer seja o método posicional utilizado.

Para que B ganhe a A terá de ser: $19+22s > 24+11s \Leftrightarrow 11s > 5 \Leftrightarrow s > \frac{5}{11}$, ou seja, B ganhará a A em mais de metade dos métodos posicionais, incluindo a contagem de Borda. Para além disso verifica-se também que B é o vencedor de Condorcet (e C o perdedor de Condorcet): B $\succ$ A (28 versus 24), B $\succ$ C (32 versus 20), A $\succ$ C (35 versus 17).

Esta é a primeira análise relativamente aos métodos posicionais, mas no que concerne à sua comparação com o voto por aprovação a informação é desanimadora: foi A que se tornou presidente da SC&W, a ordenação final foi A $\succ$ B $\succ$ C com 22, 20 e 9 votos respectivamente.

Estude-se melhor o voto por aprovação identificando todos os possíveis resultados para este perfil particular. Recorde-se que no voto por aprovação cada votante pode aprovar um ou dois candidatos (uma vez que neste exemplo se trata duma eleição com três concorrentes).

Considere-se o caso em que todos os votantes têm a preferência A $\succ$ B $\succ$ C. Se todos votarem unicamente em A, então, o resultado eleitoral normalizado é o ponto $(1,0,0)$ (o número 1 na primeira coordenada dá justamente a vitória unânime de A). Por oposição, se todos os votantes escolherem A e B o resultado normalizado será $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, identificando que tanto A como B receberam, cada um, igual número de votos (será a situação de empate entre A e B sem nenhum voto atribuído a C). No caso geral, em que alguns votantes escolhem apenas A e outros tanto A como B, vem o resultado $(x,1-x,0)$ entre os extremos $(1,0,0)$ e $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, com a localização exacta a ser determinada pela fracção x dos votantes que escolhem unicamente A.

Para o caso específico em estudo comece-se por determinar o mínimo e o máximo do número de pontos que cada candidato pode receber no voto por aprovação:

Extremos do voto por aprovação	A	B	C
Mínimo	24	19	9
Máximo	35	41	28

Tabela 7.5.

Os valores da última linha referem-se à soma do número de votos enquanto primeira e segunda preferências de determinado candidato (por exemplo, 35 = (11 + 13) + (0 + 11), ou seja, os 35 pontos do candidato A advêm de 24 pontos enquanto primeira preferência dos votantes e 11 pontos como segunda escolha).

Repare-se que existem 12 resultados possíveis para A (de 24 a 35), 23 para B e 20 para C, donde 12 $\times$ 23 $\times$ 20 = 5520 diferentes resultados possíveis para este caso particular de voto por aprovação. Note-se ainda que a tabela 7.5 diz que qualquer candidato pode vencer o voto por aprovação, até C (basta que, por exemplo, C consiga 25 aprovações e A e B atinjam no máximo 24 votos, o que é um cenário plausível). Tem-se assim que, enquanto a linha de procedimentos associada aos métodos posicionais dizia que apenas A ou B poderiam ser vencedores, o voto por aprovação permite a eleição de qualquer um dos três candidatos, não mudando o procedimento ou a preferência individual de cada participante, mas apenas estando sujeito à escolha de cada votante quanto ao voto em um ou dois candidatos.

Voltando aos 5520 resultados normalizados possíveis, é evidente que não se procederá à análise de todos eles. Considerem-se os oito pontos resultantes de combinar máximos e mínimos dos três candidatos: $\frac{1}{52}(24,19,9)$; $\frac{1}{71}(24,19,28)$; $\frac{1}{74}(24,41,9)$;

$\frac{1}{93}(24,41,28)$; $\frac{1}{63}(35,19,9)$; $\frac{1}{82}(35,19,28)$; $\frac{1}{85}(35,41,9)$;

$\frac{1}{104}(35,41,28)$.

No espaço tridimensional, o sólido geométrico resultante da união destes pontos dois a dois representa todos os resultados possíveis do voto por aprovação.

Tanto recorrendo à tabela 7.5, como na interpretação geométrica do sólido que se referiu, é possível verificar que existem treze ordenações finais possíveis: as seis ordenações estritas dos três candidatos e sete empates (um com os cinco candidatos empatados entre si e seis com empates a pares). A fonte desta indecisão é evidente: o resultado eleitoral não reflecte somente as preferências dos votantes mas, sobretudo, as condições que motivarão um votante a escolher um ou dois candidatos.

Repare-se que basta a B persuadir seis candidatos que tenham A ou C como primeira preferência, a incluí-lo como segunda aprovação para que B ganhe. No entanto, o cenário mais provável, em termos reais, é, de facto, a eleição de A. Isto porque diz a experiência social que, numa eleição competitiva, a inclinação natural dos indivíduos é escolher unicamente um candidato, uma vez que assinalar mais do que uma opção potencia o desperdício do voto. Ou seja, em situações reais, a experiência diz que os votantes tendem a aprovar apenas um candidato: encontra-se uma situação de voto plural – justamente o procedimento que o voto por aprovação tenta evitar (nos dados da SC&W de 1999, apenas uma pessoa votou em dois candidatos).

Dos oito pontos considerados, dois deles já haviam sido determinados: $\left(\frac{24}{52},\frac{19}{52},\frac{9}{52}\right)$ e $\left(\frac{35}{104},\frac{41}{104},\frac{28}{104}\right)$ são, respectivamente, os pontos associados ao voto plural e ao antiplural, que definem a linha de procedimentos. Pode concluir-se que a linha de procedimentos dos métodos posicionais está contida na região dos resultados admissíveis do voto por aprovação, pelo que este procedimento permitirá um maior número de resultados diferentes comparativamente com os métodos posicionais.

Saari mostra-se bastante desagradado com o voto por aprovação, uma vez que, conforme foi visto no exemplo da SC&W, as possibilidades de resultados finais, a partir de um perfil fixo, caem na ordem dos milhares – os que também são produzidos por métodos posicionais e muitos outros. Este método é socialmente aceite porque se considera que o comportamento, as atitudes e as emoções dos votantes, tendem a eleger o vencedor de Condorcet, caindo no âmbito das ciências sociais e comportamentais, ultrapassando a visão matemática pretendida com este documento.

Olhe-se brevemente um método em que se prevê a distribuição de dez pontos feita por cada votante conforme considere mais justo. Na realidade, esta é uma situação que, quando existir proximidade entre os candidatos, permitirá, à semelhança do voto por aprovação, uma enormidade de diferentes soluções possíveis e, por isso, não terá interesse enquanto possível solução.

De modo a facilitar os cálculos, considere-se que cada votante tem dois pontos que pode distribuir por três candidatos; tomem-se os dados relativos à eleição na SC&W expressos na tabela 7.5. Todos os pontos serão determinados pelas oito combinações extremas resultantes na atribuição de dois pontos ao candidato da primeira preferência, ou de um ponto a cada uma das duas primeiras preferências.

- Se todos os votantes atribuírem dois pontos aos candidatos da primeira preferência então tem-se A $\succ$ B $\succ$ C com 48, 38 e 18 pontos.
- Se ninguém atribuir dois pontos a um candidato temos o resultado B $\succ$ A $\succ$ C com 41, 35 e 28 pontos.
- Se apenas os apoiantes de C lhe derem os dois pontos enquanto todos os outros votantes escolhem dois candidatos vem: C $\succ$ A $\succ$ B com 37, 35 e 32 pontos respectivamente, pois: C: $9\times2+19=37$ pontos, A: $24+11=35$ pontos, B: $19+13=32$ pontos (estes valores vêm no seguimento da figura 7.7).

Não vale a pena continuar, é visível com apenas estas três combinações que qualquer um dos três candidatos é elegível com este sistema. Naturalmente, aumentando o número de pontos para dez, este tipo de situação continuará a verificar-se, pelo que é possível que em muitos casos qualquer candidato seja elegível. Esta situação não traz notícias positivas relativamente ao que foi dito anteriormente…

Por questões de simplicidade, tratou-se até aqui eleições com três candidatos, no que concerne à abordagem com recurso à geometria. No entanto, pode estender-se o estudo a situações com quatro candidatos. A primeira alteração necessária diz respeito ao próprio triângulo equilátero, que deixa de satisfazer as necessidades: passa-se ao tetraedro regular. Tal como acontecia no triângulo, cada vértice fica associado a um candidato e continua a verificar-se a necessidade de considerar as distâncias de determinado ponto aos vários vértices como forma de medir preferências. A ordenação de preferências divide o tetraedro em vinte e quatro tetraedros menores, onde cada região representa uma das 4! = 24 ordenações estritas possíveis para quatro candidatos. Claro que com cinco candidatos, ou mais, deixa de ser possível visualizar este tipo de abordagem geométrica.

Algumas sugestões de resolução

Até este momento descreveram-se problemas: situações que surpreenderam negativamente ao alterar os pesos usados nos métodos posicionais. É agora altura de compreender o que pode correr bem. Para tomar um primeiro passo nesta direcção, tenta-se responder à questão: “o que querem realmente os votantes?”.

Não existe uma resposta única a esta questão. É impossível dizer, enquanto se contabilizam os boletins de voto, o que os votantes tinham em mente ao votarem. É, no entanto, possível fazer uma primeira abordagem a este assunto, ao fazê-lo não se estará apenas a sugerir o que os votantes querem, mas a desenvolver uma metodologia que caracteriza todas as possíveis falhas e paradoxos eleitorais que podem ter lugar com qualquer método posicional. A boa notícia é que as estratégias desenvolvidas para responder à questão “o que querem realmente os votantes?”, levam a um único procedimento, a contagem de Borda, que corresponde a todas as expectativas.

Pense-se nos votos que se anulam mutuamente. Por exemplo, numa situação entre duas candidatas: Ana e Maria, se vinte pessoas votam na Ana e vinte e cinco na Maria, é a última que ganha (por cinco votos). Esta situação pode ser interpretada considerando que existem vinte pares definindo um empate entre Ana e Maria, pois cada voto na candidata Ana é anulado por outro voto em Maria; o empate é quebrado pelos restantes cinco votos em Maria que não encontram “par” em Ana.

Tente-se compreender os diferentes conjuntos e organizações de boletins de voto que se anulam, provocando um empate. Ao compreender que um conjunto de votos define um empate podem analisar-se métodos eleitorais. Nomeadamente, se um método eleitoral determina um resultado diferente de um empate quando nenhum candidato devia ser favorecido, esta anomalia de votação identifica uma fraqueza do próprio método.

Já foi visto em diversos exemplos, que, em muitas situações, é possível eleger qualquer um dos candidatos mediante a alteração do método eleitoral em uso. Comece-se por tentar perceber o que provoca uma "anulação" dos votos.

Recorde-se os perfis de Condorcet. Suponha-se que temos as ordenações ABC, BCA e CAB. Como este perfil ordena cada candidato em qualquer uma das posições exactamente uma vez, verifica-se que todos os métodos posicionais reconhecem a anulação entre os boletins de voto e determinam um empate entre todos os candidatos. Do mesmo modo, como a comparação a pares numa situação de perfil de Condorcet, não reconhece a simetria global, o resultado será sempre um ciclo: A $\succ$ B (2 versus 1), B $\succ$ C (2 versus 1) e C $\succ$ A (2 versus 1).

Para melhor compreender o comportamento dos perfis de Condorcet, usa-se a notação $\tau(\{A, B\}; p)$ para representar a diferença entre os valores obtidos com a votação a pares para os candidatos A e B sob o perfil p. Para ilustrar esta notação tome-se o perfil p em que:

Número de votos	Ordenação de preferências
4	ABCD
3	DBAC
2	CADB

Tabela 7.6.

Tem-se $\tau(\{A, B\}; p) = (4 + 2) – 3 = 3$; $\tau(\{B, A\}; p) = 3 – (4 + 2) = – 3$; $\tau(\{C, D\}; p) = (4 + 2) – 3 =3$.

Esta função τ mede a "distância" entre dois candidatos. A "função distância" entre o número de votos definida deste modo não é aditiva, ao contrário da noção de distância definida na recta real em que a distância entre A e B somada com a distância entre B e C é igual à distância entre A e C. Pode ver-se que:

$\tau(\{A, B\}; p) = 3$; $\tau(\{B, C\}; p) = (4 + 3) – 2 = 5$; $\tau(\{A, C\}; p) = (4 + 3) – 2 = 5$, donde $\tau(\{A, B\}; p) + \tau(\{B, C\}; p) \neq \tau(\{A, C\}; p)$, esta função não goza da propriedade da aditividade. No entanto, esta propriedade é definida para os casos em que venha a verificar-se: se para todos os ternos de candidatos {A, B, C} um perfil p tem a propriedade $\tau(\{A, B\}; p) + \tau(\{B, C\}; p) = \tau(\{A, C\}; p)$, diz-se que o perfil satisfaz a aditividade transitiva a pares.

Mas por que razão os perfis não são aditivos? Encontra-se uma resposta no resultado que se segue, publicado por Saari nos artigos *Explaining all three-alternative voting outcomes,* Journal of Economic Theory (87), 1999 e *Mathematical Structure os Voting Paradoxes I: Pairwise vote*, Economic Theory (15), 2000.

Teorema 7.3: Para qualquer número de candidatos, todos os ciclos resultantes das comparações a pares, e todos os paradoxos envolvendo resultados da votação a pares, são devidos a partes de perfis de Condorcet. De facto, dado um perfil *p*, suponha-se que todos os componentes de perfis de Condorcet são removidos. Represente-se por *p** o novo perfil sem "partes de Condorcet". Nestas condições, não só as ordenações resultantes das comparações a pares em *p** são sempre transitivas, como as diferenças entre "as pontuações" dos candidatos são sempre aditivas (gozando da mesma propriedade de aditividade das distâncias na recta real).

Fica-se assim a saber que, não só os termos de Condorcet são totalmente responsáveis por todas as violações de ordenações transitivas, e outras particularidades associadas – como ciclos, cenários onde a escolha de um agendamento para as comparações a pares altera o resultado eleitoral, problemas com torneios, situações em que a comparação a pares provoca resultados que entram em conflito com outros métodos – como os impedem que as diferenças entre as "pontuações" dos candidatos sejam aditivas. Pode dizer-se que os "termos de Condorcet" provocam um ruído de fundo que distorce a intenção dos votantes.

O marquês de Condorcet e Jean-Charles de Borda foram personalidades académicas francesas desenvolvendo os seus estudos no século XVIII. Mas as suas visões sobre os métodos eleitorais foram muito diferentes. Condorcet discordava veementemente da filosofia de Borda (expressa no método eleitoral então desenvolvido e a que hoje chamamos contagem de Borda), defendia o uso de comparações dos candidatos a pares, desprezando todos os métodos posicionais[13].

Os argumentos de Condorcet foram de tal modo convincentes que ainda hoje o "vencedor de Condorcet" é amplamente aceite como o modelo dos procedimentos eleitorais. Isto significa que a não eleição do vencedor de Condorcet é uma falha grave a apontar a um método eleitoral, esta é uma atitude adoptada actualmente por muitos estudiosos destes procedimentos.

Como modo de descredibilizar os métodos posicionais (e em particular a contagem de Borda), Condorcet apresentou a seguinte situação:

[13] No capítulo XI apresentam-se alguns factos históricos sobre Condorcet e Borda que se consideram interessantes.

Número de votos	Ordenação de preferências
30	ABC
10	BCA
10	CAB
1	ACB
1	CBA
29	BAC

Tabela 7.7: Um perfil histórico.

Com o voto plural tem-se: B: 39, A: 31, C: 11; com o voto antiplural: B: 70; A: 70; C: 22; o que significa, com o conhecimento a respeito da geometria da linha de procedimentos, que as ordenações possíveis para os métodos posicionais variam entre $B \succ A \succ C$ e $A \approx B \succ C$.

Quanto às comparações a pares, vem: $A \succ B$ (41 versus 40), $A \succ C$ (60 versus 21), $B \succ C$ (69 versus 12), donde A é o vencedor de Condorcet (e C o perdedor de Condorcet). Verifica-se assim que a contagem de Borda não elege, neste exemplo, o vencedor de Condorcet (uma vez que é um método posicional e, à excepção do voto antiplural, os restantes métodos provocam a ordenação $B \succ A \succ C$). Este exemplo é, por isso, um estandarte para os que criticam a contagem de Borda e defendem as comparações de Condorcet.

Mas será que este exemplo de Condorcet ilustra uma fraqueza dos métodos posicionais, ou, pelo contrário, fragiliza o seu próprio método? Recorde-se que os "termos" resultantes de perfis de Condorcet deviam anular-se entre si de modo a provocar um empate. Veja-se então o que acontece ao eliminar os termos de Condorcet que se anulam.

Para identificar e eliminar as porções de Condorcet note-se que as preferências ABC, BCA e CAB por um lado, e ACB, CBA e BAC por outro, formam ciclos, provocando por isso anulações de votos entre si. Sendo que entre ABC, BCA e CAB o número máximo de votos comum é 10, este é o valor a eliminar; entre ACB, CBA e BAC o valor será 1. Obtém-se assim uma nova tabela após a eliminação das porções de Condorcet associadas a ciclos que se anulam entre si:

Número de votos	Ordenação de preferências
20	ABC
28	BAC

Tabela 7.8.

Perante esta tabela é visível a descrença que os votantes têm em C, sendo a eleição, na prática, disputada entre A e B, com B a revelar-se mais apreciado entre a comunidade votante; aparece deste modo a ordenação B $\succ$ A $\succ$ C como natural vencedora – do mesmo modo que na maior parte dos métodos posicionais.

Na realidade, o que acontece perante a globalidade dos dados expostos na tabela 7.7, é a determinação do vencedor de Condorcet com base em votos que deviam anular-se entre si. Deste modo, não é claro que o exemplo de Condorcet corrobore o seu desprezo pelos métodos posicionais, uma vez que torna visível a eleição do vencedor de Condorcet com base em votos que deviam anular-se entre si. Mais do que contabilizar a intenção dos votantes, é possível que o vencedor de Condorcet reflicta uma perturbação na contagem de votos provocada por uma interpretação incorrecta de determinados conjuntos de boletins de voto.

Na votação a pares, os ciclos ocorrem porque o método não distingue se a porção de Condorcet num perfil é consequência das preferências transitivas dos votantes (os chamados votantes racionais), ou de votantes com preferências cíclicas. Isto significa que qualquer procedimento baseado na votação a pares, como a eleição do "vencedor de Condorcet", corre o risco de ver as suas conclusões basearem-se numa visão de votantes cíclicos não existentes. Deste modo, é compreensível que métodos assentes sobre comparações a pares causem tantos problemas.

Um dos exemplos mais comuns nas aulas de Saari é a situação de um casal norte-americano, ela Republicana, e ele Democrata, que, por essa razão, consideram que não vale a pena dirigirem-se às urnas de voto, uma vez que os seus votos se anulam mutuamente. Se estivermos numa eleição com apenas estes dois candidatos, tal é verdade, mas com mais concorrentes a situação não é tão simples…

Considere-se então as preferências do casal relativamente às próximas eleições: o Manuel prefere ABC, enquanto a Maria vota CBA. Com a utilização da votação a pares estas preferências de facto anulam-se, pode dizer-se que este método respeita o efeito de simetria. Mas ao optar por um método posicional a situação não é tão simples:

Preferência	A	B	C
Manuel	1	s	0
Maria	0	s	1
Total	1	2s	1

Tabela 7.9.

A e C recebem ambos um ponto, enquanto B recebe 2s pontos. Deste modo as ordenações produzidas por diferentes métodos posicionais podem variar:

Procedimento	Ordenação de preferências
$s < ½$	$A \approx C \succ B$
$s = ½$	$A \approx B \approx C$
$s > ½$	$B \succ A \approx C$

Tabela 7.10.

Apenas a contagem de Borda (correspondente a s = ½) produz o empate que o casal espera, todos os outros métodos posicionais ignoram a simetria das ordenações dos votantes.

A conclusão surpreendente, registada por Saari no artigo "*Explaining all three alternative voting outcomes*", Journal of Economic Theory (87), 1999, é que, para três candidatos, esta simetria – um conjunto de ordenações que deviam criar uma situação de empate – explica integralmente as diferenças entre os resultados associados aos métodos posicionais.

Ilustre-se este resultado com o seguinte perfil (já visto na figura 7.4):

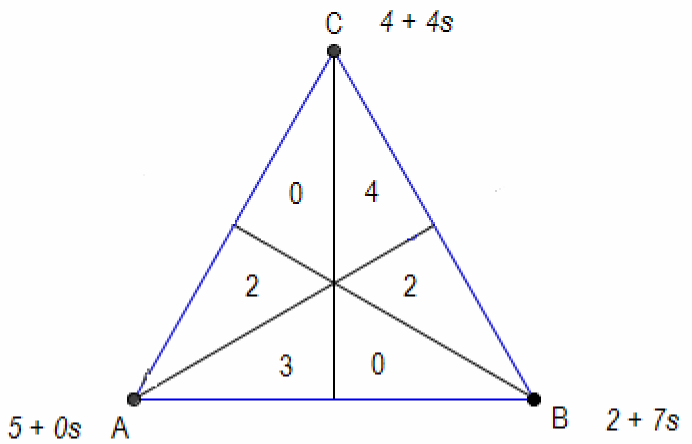

Figura 7.9.

Tal como foi feito no estudo das porções de Condorcet, pode analisar-se este perfil separando os termos simétricos do perfil original. Como os termos simétricos devem anular-se para produzir um empate, a porção que sobra do perfil deve determinar o resultado eleitoral.

Pode ver-se que três pessoas preferem ABC e quatro votantes CBA, podendo assim eliminar-se três votos em cada uma destas ordenações; continuando desse modo vem:

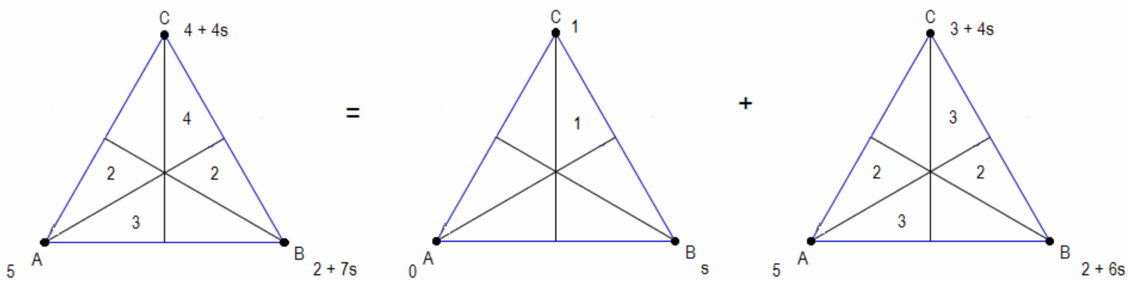

Figura 7.10.

Encontra-se assim com uma situação inicial de onze votantes separada em dois conjuntos: um com dez elementos e outro com apenas um. As preferências dos dez votantes podem ser emparelhadas de modo a provocarem uma situação de empate, donde a ordenação $C \succ B \succ A$, preferida por um único votante, deve quebrar este empate.

Este efeito de "desempate" descreve o que acontece com a contagem de Borda, pois as suas ordenações não são influenciadas pelos termos simétricos. Contrariamente, as ordenações provocadas pelos restantes métodos posicionais são bastante afectadas pelos termos simétricos. Ou seja, porções simétricas num perfil são mais uma fonte de problemas, é esta parte que cria toda a perturbação e resultados diferentes associados aos métodos posicionais. Recorde-se que ao tratar este perfil no início do capítulo foram encontradas sete ordenações diferentes possíveis (resumidas na tabela 7.3); estes paradoxos são o reflexo das diferentes formas de tratamento que os métodos posicionais dão aos votos que deviam anular-se entre si.

Pode registar-se neste ponto que a contagem de Borda é o único procedimento que se revela imune aos efeitos das porções de Condorcet e dos termos simétricos.

O resultado mantém-se para qualquer número de candidatos: dentro dos métodos posicionais, apenas a contagem de Borda tem em consideração os conjuntos de votos que definem um empate. Verifica-se também que todos os resultados problemáticos encontrados com outros métodos eleitorais se baseiam em porções do perfil que não deviam ser consideradas, que acabarão por favorecer alguns candidatos, quando deviam ser anuladas.

Naturalmente, ao adicionar candidatos, a interpretação geométrica assume dimensões superiores que deixa de se possível representar. Verifica-se também que espaços com dimensão superior proporcionam novos tipos de simetrias.

E com o voto por aprovação, o que aconteceria? Volte-se ao Manuel e à Maria, cujas preferências são, respectivamente, ABC e CBA. O Manuel certamente aprovará A e a Maria aprovará C. Não é possível, no entanto, tecer considerações sobre o que se passa com B: B pode não obter qualquer aprovação, obter uma ou duas – o que faz uma grande diferença para a situação destes dois votantes. No limite, B pode ser o vencedor perante estes dois votantes.

Saari chama a esta característica do voto por aprovação "indeterminacy", querendo dizer, justamente, que as ordenações dos votantes a respeito dos candidatos não são suficientes para determinar o vencedor. Na realidade, o vencedor dependerá dos julgamentos individuais de cada votante a respeito de quem será suficientemente bom para ser aprovado. Ninguém sabe como decidirão os votantes numa eleição por aprovação; os defensores deste método sustentam os seus benefícios em pressupostos comportamentais envolvendo a capacidade de decisão dos votantes, o que, segundo Saari, pode tornar-se muito perigoso.

Saari mostra, com um exemplo, como pode correr mal o voto por aprovação. Considere-se que 9 999 votantes têm a preferência ABC, e um votante prefere CBA. Com o voto plural viria A vencedor com 9 999 votos, C 1 voto e B zero votos. O candidato A venceria também mediante a contagem de Borda, as comparações de Condorcet ou a exclusão imediata. Mas A não ganha necessariamente se for usado o voto por aprovação.

Se os 9 999 votantes aprovarem tanto A como B, e o último votante der o seu voto a C e a B, tem-se B com 10 000 aprovações, A com 9 999 e C com 1: B ganha por unanimidade! Este resultado é ridículo. Apenas um votante não considera A como o melhor candidato; nenhum votante prefere B em primeiro lugar. O problema que subjaz a este exemplo é que os 10 000 votos de B são, na realidade, votos de segundo lugar. Não deviam valer o mesmo que os votos de primeiro lugar de A, e mediante o voto por aprovação têm o mesmo valor.

Exclusão imediata

O método da exclusão imediata (do original "instant runoff") é semelhante a uma eleição inicial seguida de várias voltas até à determinação do candidato vencedor. Ou seja, após o momento eleitoral (em que os votantes assinalam nos boletins de voto a ordem de preferência relativamente a todos os candidatos), contabilizam-se o número de primeiros lugares de cada candidato: caso algum atinja mais de metade dos votos, será o vencedor; caso contrário, há que eliminar o candidato com menor número de primeiros lugares e redistribuir os votos de tais boletins pelos candidatos listados em segundo lugar. Este processo é repetido até se encontrar um candidato com mais de metade dos votos.

Este método eleitoral evita o voto estratégico quando comparado com o voto plural. Aqui, o apoiante de um partido pequeno nada tem a perder ao assinalá-lo como primeira opção, pois, caso se confirme a sua fraca popularidade, ao eliminá-lo, passará a considerar-se o candidato que o votante havia assinalado como segundo. Ou seja, perante a eleição entre A, B e C, com A e B favoritos e C um candidato com poucos apoiantes, se a preferência de um indivíduo é CAB, considerando que B é uma solução muito má, o votante poderia estar tentado, mediante o voto plural, a votar em A, exercendo o voto útil numa tentativa de evitar a eleição de B. Mas perante a exclusão imediata não há qualquer vantagem nisso; o votante pode assinalar CAB pois, caso se confirme que C tem poucos votos, este será eliminado e contabilizado o voto em A para este indivíduo.

Mas, embora represente uma melhoria relativamente ao voto plural, a exclusão imediata também tem pontos fracos. Na realidade, ambos os métodos colocam bastante ênfase no primeiro lugar da ordenação de preferências de cada votante (pois também na exclusão imediata é este factor que determina a ordem de eliminação), sem que haja uma medida da intensidade dessa preferência. Na realidade, ser o primeiro só tem significado sob contexto: ser o primeiro no corta-mato da aldeia é diferente se existirem vinte corredores ou apenas dois, e dependerá ainda do valor dos restantes concorrentes…

A exclusão imediata é excelente a prevenir que candidatos menores, sem real poder de vencer, possam enviesar ou distorcer o resultado eleitoral, no entanto, pode ser um método perigoso quando existem vários candidatos fortes a vencedores. Veja-se um exemplo.

Estão a concurso, num acto eleitoral, os candidatos E, R e D. Num primeiro momento a votação é:

Número de votos	Ordenação de Preferências
34	ERD
32	DRE
27	RED

Tabela 7.11.

Procede-se à eliminação de R e à redistribuição dos votos, ficando:

Número de votos	Ordenação de Preferências
61	ED
32	DE

Tabela 7.12.

O candidato E ganha.

Considere-se agora que seis pessoas mudam de DRE para ERD, vem:

Número de votos	Ordenação de Preferências
40	ERD
26	DRE
27	RED

Tabela 7.13.

Neste momento, elimina-se D ficando:

Número de votos	Ordenação de Preferências
40	ER
53	RE

Tabela 7.14.

O candidato R ganha. Ou seja, o aumento do número de primeiros lugares no candidato E levou-o a perder as eleições!

O exemplo aqui apresentado ilustra o facto de a exclusão imediata não gozar da propriedade de monotonia – um candidato que inicialmente vencia, E, transforma-se em perdedor após ter recebido mais votos. Os apoiantes deste método dizem, em sua defesa, que as situações que levam a tal paradoxo são pouco frequentes, pelo que não são motivo de preocupação.

Com base na conclusão de Arrow que nenhum sistema eleitoral é perfeito, muitos teóricos desta temática consideram que a questão não é se é possível encontrar um exemplo em que determinado método eleitoral produza resultados paradoxais, mas quão realista e provável é tal exemplo. Sob este ponto de vista, podem considerar-se aceitáveis as comparações a pares de Condorcet, uma vez que os ciclos não serão muito frequentes.

Do ponto de vista prático, da implementação deste método, a exclusão imediata, à semelhança dos métodos de Borda e Condorcet, obrigam o votante a ordenar todos os candidatos, o que será moroso e pode mesmo ser complicado: em eleições com algumas dezenas de candidatos, não será fácil a um qualquer votante ter opinião sobre todos eles de modo a ordená-los conscientemente – é muito provável que a ordenação de alguns candidatos caia no aleatório.

Também no que concerne à contagem de votos, estes são sistemas eleitorais incompatíveis com a contagem manual, particularmente grave aqui no caso da exclusão imediata. Para a adopção deste método, será necessário recorrer ao voto electrónico, o que pode inviabilizar, social e financeiramente, a sua implementação.

VIII – Sistemas eleitorais ponderados

Tem sido considerada importante a propriedade do anonimato (isto é, o igual tratamento de todos os votantes); de facto, a cultura democrática de “uma pessoa, um voto” leva nesse sentido. No entanto, há situações em que este procedimento não é o mais justo. Ao pensar, por exemplo, nos accionistas de uma empresa, fará sentido que o seu poder de voto tenha relação directa com o número de acções que possuem: será sensato que um accionista que detenha metade da empresa tenha mais poder de decisão do que aqueles que têm uma representação mais modesta. Sistemas eleitorais que seguem este princípio são chamados sistemas eleitorais ponderados. Estes sistemas são utilizados, sobretudo, em discussões dicotómicas (sim/não ou aprovado/indeferido, por exemplo). Note-se aqui o contraste entre este contexto de votação de propostas e as eleições que têm sido estudadas, que levavam a ordenar os candidatos em função das preferências dos votantes. Formalizem-se estas noções.

Um sistema eleitoral ponderado é um sistema usado na tomada de decisão relativamente a questões de resposta dicotómica, sim/não, ou a moções. Os sistemas eleitorais ponderados são caracterizados por possuírem:

- Um conjunto de votantes – num sistema ponderado com n votantes representam-se por $v_1, v_2, \ldots, v_n$;
- Um conjunto de pesos – associa-se a cada votante um número positivo chamado o peso do votante, que é entendido como o número de votos que o votante representa; usa-se a notação w_i para representar o peso do votante v_i;
- Uma quota – será um número positivo *q,* tal que uma moção passa se a soma dos pesos dos votantes que responderam “sim” à moção for superior ou igual a *q*, reprova caso contrário.

Ilustrem-se estes conceitos. A tabela que se segue diz respeito aos três sócios de uma firma de advogados e a parte da empresa que detêm:

Sócios	Número de acções que detêm
Daniel	101
Nádia	97
Elisabete	2

Tabela 8.1.

Suponha-se que está em discussão a contratação de mais colaboradores (uma situação de resposta sim/não). Neste exemplo, os votantes são os três sócios e parece sensato considerar que Daniel terá um peso de 101, Nádia de 97 e Elisabete de 2; quanto à quota, considerando que o total de acções é 200, 101 afigura-se uma escolha razoável.

Mas é preciso aqui algum cuidado. Ao fixar a quota em 101 admite-se que Daniel deterá tamanho poder que a sua vontade será sempre reflectida na decisão final (lembra um ditador…).

Reflectindo um pouco sobre os sistemas ponderados, verifica-se que a aprovação de uma moção não depende necessariamente de quantos votantes votam afirmativamente mas, sobretudo, de quem são os votantes que a aprovam (e o peso que representam, claro!). Tem-se, assim, condições para definir alguns conceitos relacionados com os sistemas eleitorais ponderados:

- Uma coligação é um conjunto de votantes com um número de elementos que pode variar de zero a n (sendo n o número total de votantes);
- O peso de uma coligação é a soma dos pesos de todos os votantes na coligação;
- Uma coligação vencedora é uma coligação que por si só determina o resultado de determinada discussão, independentemente da vontade dos demais votantes;
- Uma coligação perdedora é uma coligação que sozinha não consegue impor a sua vontade;
- Uma coligação vencedora mínima é uma coligação vencedora que se tornaria uma coligação perdedora se perdesse um votante.

Notação: escreve-se [q: w_1, w_2, …, w_n] para descrever um sistema eleitoral ponderado com pesos w_1, w_2, …, w_n e quota q.

Olhe-se novamente o exemplo registado na tabela 8.1. Com uma quota de 101 já se verificou que Daniel é um ditador, uma vez que a sua vontade determina o resultado final. Se a quota for 103, Daniel terá menos poder, não determinará por si só a aprovação de uma moção, mas mantém poder suficiente para impedir a sua aprovação, diz-se por isso que tem poder de veto. Se a quota subir para 105 Daniel terá ainda menos poder: precisa de Nádia para aprovar qualquer moção – nesta situação, apesar de terem um diferente número de acções, Daniel e Nádia têm igual poder. Em oposição, Elisabete não tem qualquer possibilidade de intervir no resultado eleitoral, denominar-se-á votante fantoche (não de forma depreciativa, mas tentando enfatizar que não desempenha qualquer papel relevante no sistema eleitoral).

Formalizem-se estas noções relacionadas com sistemas eleitorais ponderados:

- Um votante presente em todas as coligações vencedoras, e ausente das coligações perdedoras, diz-se um ditador;

- Um votante presente em todas as coligações vencedoras diz-se que tem poder de veto;
- Um votante não pertencente a qualquer coligação vencedora mínima é denominado fantoche. Dito de outro modo, um fantoche é um votante que pode ser removido de qualquer coligação vencedora sem provocar que tal coligação se torne perdedora.

Repare-se, ainda, que na situação da tabela 8.1 com a quota original de 101, o Daniel é um ditador e tem poder de veto, enquanto Nádia e Elisabete são ambas votantes fantoches.

Suponha-se que os três intervenientes adoptam o sistema ponderado [103: 101, 97, 2], com vista à tomada de decisão sobre a contratação de novos colaboradores. Note-se que o peso que a Nádia detém é mais de 48 vezes superior ao de Elisabete, será que isto significa que Nádia é 48 vezes mais poderosa que Elisabete? Possivelmente não, mas afinal quanto poder tem Nádia relativamente a Elisabete? Para responder a questões como esta desenvolveram-se métodos matemáticos de medição do poder detido por cada um dos intervenientes num sistema eleitoral dicotómico – os índices de poder.

O índice de poder de Banzhaf[14]

Banzhaf acredita que um votante é tão mais poderoso quanto mais frequentemente for utilizado em coligações vencedoras como votante crítico, impedindo-as de se tornarem coligações perdedoras.

Define-se, num sistema eleitoral dicotómico:

- um votante numa coligação vencedora diz-se crítico se, ao retirar-se da coligação, obriga a que a mesma passe de vencedora a perdedora;
- o poder de Banzhaf de um votante é o número de coligações vencedoras nas quais o votante é crítico;
- o poder total de Banzhaf de um sistema é a soma do poder de Banzhaf de todos os votantes do sistema;
- o índice de Banzhaf de um votante é o poder de Banzhaf do votante dividido pelo poder total de Banzhaf do sistema.

[14] John F. Banzhaf (1940 - …). Advogado norte americano, Professor na George Washington University Law School. Propôs este índice em 1965.

Voltando ao exemplo da tabela 8.1, com o sistema ponderado [103: 101, 97, 2], as coligações vencedoras serão: {D, E}, {D, N}, {D, N, E}; sendo que Daniel é crítico em todas estas coligações; Nádia e Elisabete são críticas respectivamente nas coligações {D, N} e {D, E}.

Assim, o poder de Banzhaf dos votantes será: Daniel: 3; Nádia: 1; Elisabete: 1.

O poder total de Banzhaf será 3 + 1 + 1 = 5.

O índice de Banzhaf de cada um dos votantes virá: Daniel: $\frac{3}{5}$; Nádia: $\frac{1}{5}$; Elisabete: $\frac{1}{5}$.

Talvez agora não seja unânime que Nádia tenha mais poder que Elisabete…

Ainda com base na tabela 8.1, veja-se o que acontece com o sistema ponderado [101: 101, 97, 2]: as coligações vencedoras serão: {D}, {D, E}, {D, N}, {D, N, E}; sendo que Daniel é crítico em todas estas coligações (Daniel é um ditador); Nádia e Elisabete nunca são críticas.

Assim o poder de Banzhaf dos votantes será: Daniel: 4; Nádia: 0; Elisabete: 0.

O poder total de Banzhaf será 4.

O índice de Banzhaf de cada um dos votantes virá: Daniel: 1; Nádia: 0; Elisabete: 0.

Ao usar o sistema ponderado [105: 101, 97, 2] vêm as coligações vencedoras: {D, N}, {D, N, E}; sendo que Daniel é crítico nas duas, à semelhança de Nádia (têm ambos poder de veto); Elisabete nunca é crítica (é uma votante fantoche).

Assim, o poder de Banzhaf dos votantes será: Daniel: 2; Nádia: 2; Elisabete: 0.

O poder total de Banzhaf será 4.

O índice de Banzhaf de cada um dos votantes virá: Daniel: $\frac{1}{2}$; Nádia: $\frac{1}{2}$; Elisabete: 0.

Um ditador terá índice de Banzhaf igual a um, e um votante fantoche terá índice de Banzhaf igual a zero; um votante com poder de veto terá um índice de Banzhaf superior ou igual aos índices dos restantes votantes (será igual quando existirem dois ou mais votantes com poder de veto). Em linguagem matemática, pode dizer-se que o índice de um votante com poder de veto será o máximo do conjunto dos índices, isto porque um candidato ter poder de veto significa que se não aprovar a moção esta não passará, logo este candidato pertencerá a todas as coligações vencedoras, em particular será crítico na coligação que inclui todos os votantes, assim, o número de presenças de um votante com poder de veto, enquanto votante crítico, nunca poderá ser inferior ao dos restantes intervenientes.

O índice de poder de Shapley-Shubik[15]

A visão de Shapley e Shubik sobre a distribuição de poder nos sistemas eleitorais baseia-se na ideia de votante pivô em detrimento de votante crítico. Os autores acreditavam que as coligações em sistemas eleitorais eram formadas sequencialmente, com algum votante que se juntava a outro, depois um terceiro e assim sucessivamente. Ao pensar deste modo, faz sentido identificar o votante que primeiramente transforma a coligação em vencedora. É a este votante único numa coligação vencedora ordenada que se chamará votante pivô da coligação.

Define-se, num sistema eleitoral dicotómico:

- Para determinada ordenação ou listagem de todos os votantes num sistema, diz-se que um votante *v* é pivô se as duas condições seguintes forem satisfeitas:
    - se todos os votantes que antecedem *v* na listagem votarem a aprovação de uma moção, e *v,* e todos os votantes após *v,* votarem para que a moção chumbe, então a moção chumba;
    - se *v,* e todos os votantes anteriores a *v,* votarem para que uma moção passe, e todos os votantes após *v* determinarem o chumbo da moção, então a moção é aprovada;
- O poder de Shapley-Shubik de um votante é o número de listagens de todos os votantes no sistema nas quais o votante é pivô;
- O poder total de Shapley-Shubik de um sistema é o número total de listagens de todos os votantes no sistema;
- O índice de Shapley-Shubik de um votante é o poder de Shapley-Shubik do votante dividido pelo poder total de Shapley-Shubik do sistema.

Repare-se que nesta definição não se fala de coligação vencedora. Isto deve-se ao facto de, para calcular o índice de Shapley-Shubik, se considerarem todas as possíveis listagens (ordenações) dos votantes, e a partir daí identificar-se o votante pivô de cada uma. Este procedimento é possível porque qualquer coligação, à medida que são adicionados votantes, passará de perdedora a vencedora; assim, ao considerar todas as ordenações dos votantes, encontrar-se-ão todas as coligações vencedoras.

[15] Lloyd Stowell Shapley (1923 - …). Matemático e economista norte-americano. Professor na University of California.
Martin Shubik (1926 - …). Matemático e economista norte-americano. Professor na Yale University.
Propuseram este índice em 1954.

Voltando ao exemplo registado na tabela 8.1, com o sistema eleitoral ponderado [103: 101, 97, 2], eis uma listagem das ordenações dos votantes: DNE, DEN, NDE, NED, EDN, END; os votantes pivô são, respectivamente, Nádia, Elisabete e Daniel nas quatro últimas situações; assim o poder de Shapley-Shubik dos votantes será: Daniel: 4; Nádia: 1; Elisabete: 1.

O poder total de Shapley-Shubik do sistema é 6 (3! = 6).

O índice de Shapley-Shubik de cada um dos votantes virá: Daniel: $\frac{2}{3}$; Nádia: $\frac{1}{6}$; Elisabete: $\frac{1}{6}$.

Com o sistema ponderado [101: 101, 97, 2], Daniel é pivô em todas as coligações (pois Daniel é um ditador).

Assim, o poder de Shapley-Shubik dos votantes será: Daniel: 6; Nádia: 0; Elisabete: 0.

O poder total de Shapley-Shubik é 6, e o índice de Shapley-Shubik de cada um dos votantes virá: Daniel: 1; Nádia: 0; Elisabete: 0.

Ao usar o sistema ponderado [105: 101, 97, 2], Daniel é pivô nas coligações NED, NDE e END; Nádia é pivô em DEN, EDN e DNE; Elisabete nunca é pivô.

Assim o poder de Shapley-Shubik dos votantes será: Daniel: 3; Nádia: 3; Elisabete: 0.

O índice de Shapley-Shubik de cada um dos votantes virá: Daniel: $\frac{1}{2}$; Nádia: $\frac{1}{2}$; Elisabete: 0.

Um ditador terá índice de Shapley-Shubik igual a um, e um votante fantoche terá índice de Shapley-Shubik igual a zero. Um votante com poder de veto terá sempre um peso superior, ou igual (no caso de haver mais do que um votante com poder de veto), ao dos restantes votantes. Verifica-se também que um votante com poder de veto está sempre presente nas coligações vencedoras, ou seja, a sua presença é necessária para que a soma dos pesos perfaça o valor da quota.

No sistema Shapley-Shubik, um votante com poder de veto será pivô em todas as coligações em que a sua entrada permita a passagem da coligação de perdedora a vencedora; como o votante com poder de veto é indispensável à passagem da coligação ao título de vencedora, a sua presença ocorrerá mais vezes nestas coligações que a dos restantes votantes; desse modo (estando mais vezes presente nas coligações mínimas vencedoras), será mais provável a sua localização como pivô. Conclui-se, assim, que o índice Shapley-Shubik de um votante com poder de veto será sempre superior ou igual ao dos restantes votantes (será igual quando existirem dois, ou mais, candidatos com poder de veto).

Comparando os dois índices (de Banzhaf e de Shapley-Shubik) torna-se evidente que os cálculos envolvidos são diferentes, assim como os resultados que produzem; mas há outras questões a sublinhar: de um modo geral, o poder de Banzhaf para um votante é mais simples de calcular que o poder de Shapley-Shubik. No entanto, o poder total de um sistema de Banzhaf é normalmente mais complicado de calcular, pois obriga a encontrar o poder de Banzhaf de cada um dos votantes, ao passo que para determinar o poder total de um sistema de Shapley-Shubik basta calcular o factorial do número de votantes.

Há ainda um aspecto importante a tratar a respeito destes índices de poder: os aspectos paradoxais. Vejam-se dois exemplos retirados da obra *Mathematics and Politics; Strategy, Voting, Power and Proof.*

Aplique-se o índice de Banzhaf no sistema eleitoral ponderado [8: 5, 3, 1, 1, 1], com os votantes A, B, C, D, E respectivamente. As coligações vencedoras são: {A, B}, {A, B, C}, {A, B, D}, {A, B, E}, {A, B, C, D}, {A, B, C, E}, {A, B, D, E}, {A, B, C, D, E}, {A, C, D, E}, sendo A crítico em todas elas. O poder de Banzhaf dos votantes será A: 9, B: 7, C: 1, D: 1, E: 1, o que determina o poder total de Banzhaf do sistema: 19, e assim o índice de Banzhaf de cada votante virá A: $\frac{9}{19}$, B: $\frac{7}{19}$, C: $\frac{1}{19}$, D. $\frac{1}{19}$, E: $\frac{1}{19}$.

Suponha-se agora que o votante A com peso cinco dá um dos seus votos ao votante B, passando o sistema a ser [8: 4, 4, 1, 1, 1]. Vêm as coligações vencedoras {A, B}, {A, B, C}, {A, B, D}, {A, B, E}, {A, B, C, D}, {A, B, D, E}, {A, B, C, E}, {A, B, C, D, E}, donde o índice dos votantes será: A: $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, B: $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, C: 0, D: 0, E: 0.

Assim, o votante A terá índice $\frac{1}{2}$, mas $\frac{1}{2}$ é superior a $\frac{9}{19}$, o índice na primeira situação. Deste modo, ao perder um voto para outro votante, A aumentou o seu poder. De facto, ao passar um voto de A para B, fica-se com C, D e E como votantes fantoches, e A e B, conjuntamente, detêm mais poder do que inicialmente tinham (pode ver-se que têm ambos poder de veto).

O índice de Shapley-Shubik não é vulnerável a este tipo particular de paradoxo, mas também não é imune a situações caricatas.

Suponha-se um processo legislativo que envolve duas câmaras, onde a aprovação de uma lei exige a passagem em ambas as câmaras. Suponha-se, ainda, que a primeira câmara tem as votantes Rute, Sara e Teresa, e que existem duas coligações mínimas vencedoras: Rute (sozinha) e Sara e Teresa (juntas). Na segunda câmara existem duas pessoas, cada uma delas representando uma coligação mínima vencedora.

Ao considerar apenas a primeira câmara vem: o poder total de Shapley-Shubik do sistema é 3! = 6. Rute será pivô nas ordenações RST, RTS, TRS, SRT; Sara será pivô em TSR e Teresa em STR, logo o índice de poder de Shapley-Shubik virá: Rute: $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, Sara: $\frac{1}{6}$, Teresa: $\frac{1}{6}$.

Com as duas câmaras vem um poder total de 5! = 120 (os membros da segunda câmara denominam-se X e Y). Sara será pivô nas ordenações XTSRY, XTSYR, YTSXR, YTSRX, TXSRY, TXSYR, TYSRX, TYSXR, XYTSR, YXTSR, YTXSR, XTYSR, TXYSR, TYXSR, logo o seu índice de poder será $\frac{14}{120}$.

Rute será pivô nas ordenações XRSTY, XRTSY, XRYST, XRYTS, XRTYS, XRSYT, YRSTX, YRTSX, YRXST, YRXTS, YRTXS, YRSXT, XYRTS, XYRST, YXRTS, YXRST, XTRYS, XTRSY, TXRYS, TXRSY, YTRXS, YTRSX, TYRXS, TYRSX, XSRYT, XSRTY, SXRTY, SXRYT, YSRTX, YSRXT, SYRTX, SYRXT, XYTRS, YXTRS, XTYRS, YTXRS, TXYRS, TYXRS, XYSRT, YXSRT, XSYRT, YSXRT, SXYRT, SYXRT, logo o seu índice de poder será $\frac{44}{120}$.

Pode assim considerar-se este exemplo como uma situação paradoxal envolvendo o índice de Shapley-Shubik, pois na situação de uma câmara Rute tinha quatro vezes mais poder que Sara, ao passo que numa situação de duas câmaras terá cerca de três vezes mais poder.

Os índices de Banzhaf e Shapley-Shubik são os mais utilizados, no entanto, não são os únicos à disposição. Vejam-se duas propostas distintas desenvolvidas no final da década de 1970: o índice de poder de Johnston e o índice de poder de Deegan-Packel.

O índice de poder de Johnston

O índice de poder de Banzhaf baseava-se na ideia de votante crítico – aquele que ao ser retirado de uma coligação vencedora a transforma em perdedora. Não toma, no entanto, em consideração o total de votantes que são críticos numa determinada coligação. Ou seja, pode defender-se que se um votante é o único crítico numa coligação C, este facto será um indício de maior poder relativamente à situação em que todos os votantes de C sejam críticos. Esta é a ideia por trás do índice de poder de Johnston, que a seguir se formaliza.

Define-se, num sistema eleitoral dicotómico:

- Suponha-se que $C_1, \ldots, C_j$ são as coligações vencedoras para as quais um votante p é crítico. Considere-se que em C_1 existem n_1 votantes críticos, em C_2 existem n_2, e assim sucessivamente. Então, o poder de Johnston do votante p é dado por: $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_j}$;
- O poder total de Johnston de um sistema é a soma do poder de Johnston de todos os votantes do sistema;
- O índice de Johnston de um votante é o poder de Johnston do votante dividido pelo poder total de Johnston do sistema.

Ilustre-se o índice de poder de Johnston com um exemplo. Considere-se o sistema [51: 50, 49, 1], com os votantes A, B e C respectivamente. As coligações vencedoras serão {A, B}, {A, C}, {A, B, C}. Em {A, B, C}, A é o único votante crítico, o mesmo não acontecendo em {A, B} e {A, C}, onde divide esse papel com B e C, respectivamente. Assim, o poder de Johnston dos votantes será A: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$, B: $\frac{1}{2}$, C: $\frac{1}{2}$. Logo, o poder total do sistema será $2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$ e vêm os índices: A: $\frac{2}{3}$, B: $\frac{1/2}{3}=\frac{1}{6}$, C: $\frac{1/2}{3}=\frac{1}{6}$.

O índice de poder de Deegan-Packel

Em 1978, Deegan e Packel introduziram um índice de poder baseado em três pressupostos:

- Apenas devem ser consideradas coligações vencedoras mínimas para efeitos da determinação do poder relativo dos votantes;
- Todas as coligações vencedoras mínimas têm igual probabilidade de ocorrência;

- O poder de um votante que deriva do facto de pertencer a uma coligação mínima vencedora é igual ao poder de qualquer outro votante pertencente à mesma coligação.

Define-se, num sistema eleitoral dicotómico:

- Suponha-se que $C_1, \ldots, C_j$ são as coligações mínimas vencedoras a que o votante *p* pertence. Considere-se que existem n_1 votantes em C_1, n_2 votantes em C_2, e assim sucessivamente. Então, o poder de Deegan-Packel do votante *p* é dado por: $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_j}$;
- O poder total de Deegan-Packel de um sistema é a soma do poder de Deegan-Packel de todos os votantes do sistema;
- O índice de Deegan-Packel de um votante é o poder de Deegan-Packel do votante dividido pelo poder total de Deegan-Packel do sistema.

Ilustre-se este índice com o mesmo sistema [51: 50, 49, 1] com os votantes A, B, C respectivamente. As coligações vencedoras mínimas são {A, B} e {A, C}. Ao calcular o poder de Deegan-Packel dos votantes vê-se que A está presente nas duas coligações, ao passo que B e C pertencem apenas a uma delas, logo, A: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, B: $\frac{1}{2}$, C: $\frac{1}{2}$. Assim, o poder total do sistema será $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$, donde os índices de poder dos votantes vêm: A: $\frac{1}{2}$, B: $\frac{1/2}{2}=\frac{1}{4}$, C: $\frac{1/2}{2}=\frac{1}{4}$.

Repare-se que no exemplo acima A detém o dobro do poder de B e C, ao passo que no índice de poder de Johnston A teria quatro vezes mais poder que os restantes votantes.

Comparando os índices…

De modo a melhor comparar os quatro índices de poder apresentados veja-se a sua aplicação ao conjunto de países que em 1958 fundaram a Comunidade Económica Europeia. O Tratado de Roma estabeleceu que a França, a Alemanha, e a Itália dispunham de quatro votos cada, a Bélgica e a Holanda dois votos e Luxemburgo um voto, sendo que para qualquer deliberação eram necessários pelo menos doze votos dos dezassete possíveis.

Tome-se o índice de poder de Shapley-Shubik. O poder total do sistema será 6! = 720. Considere-se a França. Este país será pivô quando os países anteriores a si na ordenação somarem oito, nove, dez ou onze votos, veja-se cada um destes casos separadamente.

Para somar oito pontos pode ter dois votos de quatro ou um voto de quatro e dois votos de dois, ou seja, o caso em que Alemanha e Itália (passaremos a abreviar A e I, de modo a facilitar a escrita) precedem a França, o que dá um total de $2! \times 3! = 12$ possibilidades, e ainda o caso de B, H, A ou B, H, I que perfazem $(3! \times 2!) \times 2 = 24$ formas de se combinarem. Assim, para uma soma de oito pontos anteriores a França existem 36 ordenações possíveis.

Para somar um peso de nove pontos pode ter-se dois votos de quatro e um de um, ou um voto de quatro, dois votos de dois e um de um. Assim tem-se A, I, L ($3! \times 2! = 12$ casos), ou A, B, H, L ($4! = 24$), ou I, B, H, L ($4! = 24$); o total será 60 possibilidades.

Para que dez votos precedam a França existem as combinações A, I, B ($3! \times 2! = 12$ casos) ou A, I, H ($3! \times 2! = 12$ casos), logo 24 possibilidades.

Para perfazer onze votos anteriores a França vem A, I, B, L ($4! = 24$ casos) ou A, I, H, L ($4! = 24$ casos), o que totaliza 48 ordenações distintas.

Deste modo o poder de Shapley-Shubik da França será 48 + 24 + 60 + 36 = 168.

Tome-se agora o caso da Bélgica; será pivô quando os países anteriores a si nas ordenações somarem dez ou onze pontos. Para que somem dez votos estarão antes da Bélgica F, A, H ($3! \times 2! = 12$ casos), F, I, H (12 casos) ou A, I, H (12 casos). Se se pretender onze votos anteriores à entrada da Bélgica interessam as combinações F, A, H, L ($4! = 24$ casos), F, I, H, L (24 casos), A, I, H, L (24 casos). Assim, o poder de Shapley-Shubik da Bélgica será 24 + 24 + 24 + 12 + 12 + 12 = 108.

Naturalmente, a Alemanha e a Itália terão o mesmo poder que a França, bem como a Holanda igualará a Bélgica. No que concerne ao Luxemburgo, este país não terá qualquer poder. Pode resumir-se a informação na tabela que se segue.

País	Votos	Percentagem de Votos	Índice de poder de Shapley-Shubik	Percentagem de Poder
França	4	23,5%	7/30	23,3%
Alemanha	4	23,5%	7/30	23,3%
Itália	4	23,5%	7/30	23,3%
Bélgica	2	11,8%	3/20	15%
Holanda	2	11,8%	3/20	15%
Luxemburgo	1	5,9%	0	0%

Tabela 8.2.

Calcule-se o poder de cada país mediante o índice de poder de Banzhaf. Existem catorze coligações vencedoras: {F, A, I}, {F, A, B, H}, {F, I, B, H}, {A, I, B, H}, {F, A, I, L}, {F, A, B, H, L}, {F, I, B, H, L}, {A, I, B, H, L}, {F, A, I, B}, {F, A, I, H}, {F, A, I, B, L}, {F, A, I, H, L}, {F, A, I, B, H}, {F, A, I, B, H, L}.

Tome-se novamente a França; este votante será crítico nas coligações {F, A, I}, {F, A, B, H}, {F, I, B, H}, {F, A, I, L}, {F, A, B, H, L}, {F, I, B, H, L}, {F, A, I, B}, {F, A, I, H}, {F, A, I, B, L}, {F, A, I, H, L}, logo terá poder de Banzhaf 10 (o mesmo se passe com a Alemanha e a Itália).

Considere-se a Bélgica; será um votante crítico em seis coligações: {F, A, B, H}, {F, I, B, H}, {A, I, B, H}, {F, A, B, H, L}, {F, I, B, H, L}, {A, I, B, H, L}, o mesmo acontecendo para a Holanda.

À semelhança do que aconteceu no índice de Shapley-Shubik, o Luxemburgo terá poder nulo, pois não é crítico em nenhuma coligação. Resumindo a informação numa tabela:

País	Votos	Percentagem de Votos	Índice de poder de Banzhaf	Percentagem de Poder
França	4	23,5%	5/21	23,8%
Alemanha	4	23,5%	5/21	23,8%
Itália	4	23,5%	5/21	23,8%
Bélgica	2	11,8%	1/7	14,3%
Holanda	2	11,8%	1/7	14,3%
Luxemburgo	1	5,9%	0	0%

Tabela 8.3.

Veja-se a mesma situação da Comunidade Económica Europeia à luz do índice de poder de Johnston. A construção duma tabela ajuda a organizar de forma mais eficiente a informação. As coligações vencedoras são as mesmas que para o índice de Banzhaf, e em cada coluna assinala-se o poder de Johnston de cada um dos votantes críticos para a coligação correspondente.

Coligação\País	França	Alemanha	Itália	Bélgica	Holanda	Luxemburgo
{F, A, I}	1/3	1/3	1/3			
{F, A, B, H}	1/4	1/4		1/4	1/4	
{F, I, B, H}	1/4		1/4	1/4	1/4	
{A, I, B, H}		1/4	1/4	1/4	1/4	
{F, A, I, L}	1/3	1/3	1/3			
{F, A, B, H, L}	1/4	1/4		1/4	1/4	
{F, I, B, H, L}	1/4		1/4	1/4	1/4	
{A, I, B, H, L}		1/4	1/4	1/4	1/4	
{F, A, I, B}	1/3	1/3	1/3			
{F, A, I, H}	1/3	1/3	1/3			
{F, A, I, B, L}	1/3	1/3	1/3			
{F, A, I, H, L}	1/3	1/3	1/3			
{F, A, I, B, H}						
{F, A, I, B, H, L}						
Poder de Johnston do país	3	3	3	1,5	1,5	0
Índice de Johnston do país	1/4	1/4	1/4	1/8	1/8	0

Tabela 8.4.

Fica assim a tabela resumo:

País	Votos	Percentagem de Votos	Índice de poder de Johnston	Percentagem de Poder
França	4	23,5%	1/4	25%
Alemanha	4	23,5%	1/4	25%
Itália	4	23,5%	1/4	25%
Bélgica	2	11,8%	1/8	12,5%
Holanda	2	11,8%	1/8	12,5%
Luxemburgo	1	5,9%	0	0%

Tabela 8.5.

Falta apenas aplicar o índice de poder de Deegan-Packel aos dados da Comunidade Europeia. As coligações vencedoras mínimas são: {F, A, I}, {F, A, B, H}, {F, I, B, H} e {A, I, B, H}. Use-se novamente uma tabela:

Coligação\País	França	Alemanha	Itália	Bélgica	Holanda	Luxemburgo
{F, A, I}	1/3	1/3	1/3			
{F, A, B, H}	1/4	1/4		1/4	1/4	
{F, I, B, H}	1/4		1/4	1/4	1/4	
{A, I, B, H}		1/4	1/4	1/4	1/4	
Poder de Deegan-Packel do país	5/6	5/6	5/6	3/4	3/4	0
Índice de Deegan-Packel do país	5/24	5/24	5/24	3/16	3/16	0

Tabela 8.6.

Resumindo a informação,

País	Votos	Percentagem de Votos	Índice de poder de Deegan-Packel	Percentagem de Poder
França	4	23,5%	5/24	20,8%
Alemanha	4	23,5%	5/24	20,8%
Itália	4	23,5%	5/24	20,8%
Bélgica	2	11,8%	3/16	18,8%
Holanda	2	11,8%	3/16	18,8%
Luxemburgo	1	5,9%	0	0%

Tabela 8.7.

Após a determinação do poder de cada um dos países fundadores da Comunidade Económica Europeia mediante os quatro índices apresentados, pode verificar-se que não há resultados coincidentes (à excepção do Luxemburgo que será sempre um votante fantoche). Pode ainda ver-se que as maiores discrepâncias acontecem entre o índice de Deegan-Packel (que diferencia apenas em 2% os três países mais fortes comparativamente com os outros dois), e o índice de Johnston que atribui aos três primeiros países o dobro do poder dos outros dois.

Coloca-se naturalmente a questão de qual dos três índices é mais eficiente, no sentido de que melhor reflecte o poder real de cada votante. Mas esta não é uma questão com resposta científica – fica ao critério do implementador, provavelmente um líder político, a escolha de um dos índices de modo a tratar a questão que esteja em causa.

IX – Referendos

Certamente estará vivo na memória o último referendo realizado em Portugal: em Fevereiro de 2007 discutiu-se a despenalização da interrupção voluntária da gravidez. Depois disso assistiu-se a um outro referendo que deu muito que falar: o que resultou no "não" irlandês ao Tratado de Lisboa sobre a União Europeia.

Pode dizer-se que os referendos fazem parte da experiência democrática, sendo caracterizados, por aqueles que os defendem, como uma forma efectiva e eficiente de implementar a democracia directa. Os que se opõem à chamada "democracia directa" evocam, sobretudo, a duvidosa capacidade do cidadão mediano decidir sobre importantes questões políticas que muitas vezes desconhece. De realçar, é o facto de poucos oponentes indicarem como argumento a incapacidade do referendo representar a vontade dos cidadãos. Na realidade, quando se referendam simultaneamente vários assuntos, o acto eleitoral força os votantes a separarem os seus votos em assuntos que podem estar ligados na sua mente.

Os procedimentos eleitorais são muitas vezes binários, oferecendo aos votantes apenas duas escolhas, (mais à frente neste capítulo dedicar-se-á algum tempo à possibilidade do votante se abster). Nas próximas páginas tomar-se-á um tipo específico de eleições binárias, ilustradas por referendos com mais de uma proposta em votação (designados referendos múltiplos). Quando há várias propostas num boletim de voto, haverá, na maioria das vezes, ligações entre elas, sendo que o votante possuirá preferências não separáveis sobre os assuntos em referendo.

Uma característica importante das preferências dos votantes será a sua separação. Quando um indivíduo tem preferências não separáveis, a sua decisão sobre determinado assunto depende do resultado, ou das opções disponíveis, sobre um outro assunto, também a referendar. Inversamente, quando alguém tem preferências separáveis, o que decide sobre determinada proposta é independente do resultado de qualquer outra proposta em discussão.

Assumir que os votantes têm preferências separáveis elimina a maior parte das ordenações possíveis aos eleitores, muitas das quais eram intuitivamente plausíveis. Veja-se o caso da votação de duas propostas; os quatro resultados possíveis são SS, NS, SN, NN (sendo que S e N abreviam sim e não, respectivamente; a primeira letra refere-se à primeira proposta em discussão, a segunda letra dirá respeito ao segundo assunto).

Ao assumir que os votantes têm preferências separáveis, então, para qualquer primeira escolha, só existem duas ordenações completas possíveis. Por exemplo, se a primeira preferência for SS as restantes ordenações desse votante devem ser NS $\succ$ SN $\succ$ NN ou SN $\succ$ NS $\succ$ NN. Se a primeira preferência de um indivíduo for NS, apenas SS $\succ$ NN $\succ$ SN ou NN $\succ$ SS $\succ$ SN são ordenações admissíveis. Seja qual for a primeira preferência de um votante, a opção inversa terá de ser a sua última escolha. Só deste modo se compreende a noção de preferências separáveis. Para dois assuntos apenas oito ordenações de preferências são separáveis, por oposição a dezasseis não separáveis, a saber:

Preferências separáveis:	SS $\succ$ SN $\succ$ NS $\succ$ NN;	SS $\succ$ NS $\succ$ SN $\succ$ NN;
	SN $\succ$ SS $\succ$ NN $\succ$ NS;	SN $\succ$ NN $\succ$ SS $\succ$ NS;
	NS $\succ$ SS $\succ$ NN $\succ$ SN;	NS $\succ$ NN $\succ$ SS $\succ$ SN;
	NN $\succ$ SN $\succ$ NS $\succ$ SS;	NN $\succ$ NS $\succ$ SN $\succ$ SS.
Preferências não separáveis:	SS $\succ$ SN $\succ$ NN $\succ$ NS;	SS $\succ$ NS $\succ$ NN $\succ$ SN;
	SS $\succ$ NN $\succ$ SN $\succ$ NS;	SS $\succ$ NN $\succ$ NS $\succ$ SN;
	SN $\succ$ SS $\succ$ NS $\succ$ NN;	SN $\succ$ NS $\succ$ SS $\succ$ NN;
	SN $\succ$ NS $\succ$ NN $\succ$ SS;	SN $\succ$ NN $\succ$ NS $\succ$ SS;
	NS $\succ$ SS $\succ$ SN $\succ$ NN;	NS $\succ$ SN $\succ$ SS $\succ$ NN;
	NS $\succ$ SN $\succ$ NN $\succ$ SS;	NS $\succ$ NN $\succ$ SN $\succ$ SS;
	NN $\succ$ SS $\succ$ SN $\succ$ NS;	NN $\succ$ SS $\succ$ NS $\succ$ SN;
	NN $\succ$ SN $\succ$ SS $\succ$ NS;	NN $\succ$ NS $\succ$ SS $\succ$ SN.

Tabela 9.1.

Assumir a separação de preferências é eliminar dois terços das ordenações possíveis no que concerne à votação de dois assuntos. De um modo geral, quando existem p propostas em votação e 2^p combinações de resultados, as preferências de um votante são separáveis se, para qualquer assunto, o votante prefere sempre que este seja aprovado ou que chumbe, independentemente do resultado nas outras $p - 1$ propostas. Assim um votante com preferências separáveis tem sempre a certeza sobre o que quer relativamente a determinada proposta, votando assim de modo confidencial num referendo, nunca lamentando o apoio (ou não…) que prestou a qualquer um dos assuntos.

Com três propostas em votação, existem oito primeiras preferências distintas: SSS, SSN, SNS, NSS, SNN, NSN, NNS, NNN, proporcionando 8! = 40 320 ordenações de preferências possíveis. De todas estas, apenas 384, menos de 1%, são separáveis. Com mais de três assuntos em votação apenas uma ínfima parte das ordenações de preferências são separáveis (ou seja, a frequência com que ocorrem preferências não separáveis ajuda também a despertar para a sua importância).

A diferença entre preferências separáveis e não separáveis tem implicações importantes no comportamento dos votantes. Os votantes que têm preferências separáveis conseguem responder com facilidade no acto eleitoral, pois a sua opinião sobre qualquer assunto é independente do resultado da votação de outra proposta. Por oposição, os votantes com preferências não separáveis enfrentam um problema perante o boletim de voto, uma vez que a sua posição sobre determinado assunto depende da decisão tomada (ou a tomar…) sobre um outro.

Para melhor compreender o raciocínio subjacente às preferências não separáveis de um indivíduo veja-se um exemplo retirado de *Voting on Referenda: The Separability Problem and Possible Solutions*, dos autores Brams, Kilgour e Zwicker[16] (1997).

Num boletim de voto contendo várias questões seria surpreendente não encontrar assuntos relacionados entre si. Tome-se o caso de duas propostas (P1 e P2), em que P1 é uma proposta de aumento do tempo de prisão nas sentenças de determinados crimes, e P2 é uma proposta de construção de novos estabelecimentos prisionais. Um votante pode concordar com ambas, sendo a sua primeira preferência SS, mas, conhecendo o estado de sobrelotação das cadeias, considera que a segunda preferência será NN, sendo a sua ordenação completa: SS $\succ$ NN $\succ$ NS $\succ$ SN, que não é separável.

O resultado da votação por maioria, quando alguns votantes têm preferências não separáveis, não é simples. Veja-se um exemplo:

Ordenação	Votante 1	Votante 2	Votante 3
1ª	SN	NS	NN
2ª	SS	SS	SS
3ª	NS	SN	NS
4ª	NN	NN	SN

Tabela 9.2.

Na tabela 9.2. estão representadas as ordenações completas das preferências de três votantes relativamente ao referendo de dois assuntos. Veja-se que nenhum dos votantes tem preferências separáveis. Note-se que ao considerar as primeiras preferências dos três votantes

16 Marc Kilgour. Professor do Departamento de Matemática da Wilfrid Laurier University.
William Zwicker. Professor de Matemática na Union College Math Department (Faculty).

virá como resultado final o chumbo das duas propostas – embora este seja o resultado a rejeitar por dois terços dos votantes (votante 1 e votante 2 ordenam NN em última opção).

Mas repare-se que a situação acima descrita pode ainda tornar-se mais caricata: se os votantes 1 e 2 convencerem, cada um, cem amigos a votarem como eles, e o votante 3 mantiver a sua escolha, é a opção de recusar ambas as propostas que vence! Com um votante a preferi-la contra duzentos e dois que a consideram a pior solução para o problema. É eleita a proposta NN apesar de ser perdedor de Condorcet, pois: NS $\succ$ NN (3 versus 2); SN $\succ$ NN (3 versus 2); SS $\succ$ NN (3 versus 2); enquanto que SS é vencedor de Condorcet: SS $\succ$ SN (3 versus 2); SS $\succ$ NS (3 versus 2); SS $\succ$ NN (2 versus 2); NS $\succ$ NN (3 versus 2); NS $\succ$ SN (3 versus 2); SN $\succ$ NN (3 versus 2).

Portanto, SS $\succ$ NS $\succ$ SN $\succ$ NN.

Ao determinar como vencedor da eleição a opção NN, está a eleger-se o perdedor de Condorcet, ignorando a existência de um vencedor de Condorcet.

Quando os votos sim e não são contabilizados separadamente para cada assunto em votação de modo a determinar o vencedor (como tem sido feito nos exemplos até este momento), diz-se que está a ser usado o método de agregação padrão.

Enquanto os votantes com preferências separáveis nada têm a perder com o uso da agregação padrão, os votantes com preferências não separáveis podem concluir, após a divulgação do resultado final, que votaram contrariamente aos seus interesses (isto caso não tenham conhecimento prévio dos resultados de outras propostas). Considerando que os votantes não têm, usualmente, forma de obter este conhecimento prévio – exceptuando, possivelmente, as sondagens, que traduzem apenas uma aproximação – muito provavelmente votarão de forma diferente daquela que fariam se possuíssem tal informação. No entanto, se a votação das propostas for feita sequencialmente, e os resultados de cada questão divulgados antes da votação do assunto seguinte, o votante cujas preferências não são separáveis pode fazer uma escolha mais próxima dos seus interesses.

Para compreender melhor o problema das preferências não separáveis à luz da agregação padrão, tomem-se apenas duas propostas. Quando alguém vota sim na segunda proposta, este procedimento considera que o votante prefere "sim" a "não" nesta proposta, independentemente do resultado do primeiro assunto. Por outras palavras, o procedimento assume que o votante considera que tanto SS como NS são melhores opções que NN e SN: SS $\succ$ SN e NS $\succ$ NN. Este é justamente o problema: a agregação padrão restringe a capacidade do votante para comunicar preferências não separáveis:

(1) SS $\succ$ SN, indicando que prefere S a N no segundo assunto, e

(2) NN $\succ$ NS, evidenciando que prefere N a S no segundo assunto.

Claro que esta aparente contradição é resolvida notando que as preferências do votante por S relativamente a N no segundo assunto, depende do facto de o resultado na primeira proposta ser "sim", como é dado em (1); caso contrário, a preferência do votante relativamente ao segundo assunto é o oposto, dado em (2).

Outro problema de que sofre a votação simultânea de assuntos é o ilustrado na tabela 9.2; como a agregação padrão obriga os votantes a indicarem apenas uma combinação, a que preferem em primeiro lugar, é negada a oportunidade de registar as suas preferências por todas as combinações possíveis, podendo dar-se o caso de ser eleita a proposta menos apreciada pela maioria dos votantes, conforme foi visto.

Nos referendos actuais os votantes não podem votar directamente em combinações de assuntos relacionados entre si, mas apenas em cada um dos assuntos individualmente. Apesar destes votos separados resultarem numa única combinação de votos, esta é uma escolha problemática para votantes com preferências não separáveis.

Na realidade, votar num referendo não é estritamente binário, uma vez que os votantes não precisam votar em todas as propostas, podem abster-se. Ao permitir a abstenção, está a ser dada aos votantes uma terceira opção, o que transforma as possibilidades de voto em ternos. Claro que um votante que se abstenha em todos os assuntos não apresenta qualquer preferência, não havendo, por isso, necessidade de contabilizar tais votos. No entanto, serão considerados os boletins de voto em que alguns assuntos são tratados como "sim/não", embora noutros haja abstenções.

Considere-se que existem *p* propostas e *n* votantes num determinado referendo. Definem-se variáveis v_i^j tal que o voto do indivíduo *i* na proposta *j* é:

$$v_i^j = \begin{cases} 1, & \text{responde sim;} \\ 0, & \text{abstém-se;} \\ -1, & \text{responde não.} \end{cases}$$

Deste modo, as *p* escolhas do votante *i* podem ser representadas por um vector com *p* coordenadas: $v_i = \left(v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^p\right) \in \{1;0;-1\}^p$, que dá as combinações de "sim", "não" e abstenções que o indivíduo escolhe para as *p* propostas. Uma combinação vencedora é um vector com *p* coordenadas: $c = (c_1, c_2, ..., c_p) \in \{1; -1\}^p$, que de algum modo representa as escolhas dos votantes *1, 2, …, n* relativamente às *p* propostas.

Com o uso da agregação padrão, o vencedor na proposta *j* será "sim" se os votos positivos ($v_i^{\,j}$ = +1) forem em número superior aos votos negativos ($v_i^{\,j}$ = -1) após contabilizados todos os votos; será "não" se os votos negativos forem mais que os positivos, e ambos, se o número de votos negativos for igual ao número de votos positivos. Este método de agregação pode formalizar-se do seguinte modo:

Um vencedor sob o método de agregação padrão é um vector (combinação) $c_{std} \in \{1; -1\}^p$ que satisfaz:

$$c_{std}^{j} = \begin{cases} 1, \sum_{i}^{n} v_i^j \geq 0 \\ -1, \sum_{i}^{n} v_i^j \leq 0 \end{cases} \quad \text{para toda a proposta } j = 1,2,\ldots,p.$$

Note-se que em caso de empate, tanto "sim" como "não" são considerados vencedores; se existirem empates em *t* propostas, então há exactamente 2^t vencedores.

O teorema que se segue evidencia a característica principal da agregação padrão:

Teorema 9.1: Um vector $c_{std} \in \{1; -1\}^p$ é um vencedor sob o método de agregação padrão se e só se c_{std} maximiza a soma $s_{std}(c) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} v_i^j c^j$.

<u>Demonstração:</u>

Como $s_{std}(c) = \sum_{j=1}^{p} c^j \left[\sum_{i=1}^{n} v_i^j \right]$, $s_{std}(c)$ é máxima sse cada termo da soma for máximo.

Naturalmente $c^j = 1$ maximiza o j-ésimo termo da soma sse $\sum_{i=1}^{n} v_i^j$ é não negativo; e $c^j = -1$ maximiza o j-ésimo termo sse esta soma for não positiva.

€

Veja-se um exemplo.

Suponha-se que existem *p = 2* propostas e *n = 7* votantes, que votam as propostas P1 e P2 do seguinte modo:

$$\left(v_i^1, v_i^2\right) = \begin{cases} (1,1), & \text{para 3 votantes;} \\ (-1,0), & \text{para 2 votantes;} \\ (0,-1), & \text{para 2 votantes.} \end{cases}$$

Uma consequência do teorema 9.1 é que cada votante acrescenta determinada quantidade ao total acumulado para cada uma das quatro combinações possíveis (sem abstenções): (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1) como se vê na tabela:

	Resultados			
Votantes	(1; 1)	(1; -1)	(-1; 1)	(-1, -1)
1º votante (1; 1)	2	0	0	-2
2º votante (1; 1)	2	0	0	-2
3º votante (1; 1)	2	0	0	-2
4º votante (-1; 0)	-1	-1	1	1
5º votante (-1; 0)	-1	-1	1	1
6º votante (0; -1)	-1	1	-1	1
7º votante (0; -1)	-1	1	-1	1
Total	2	0	0	-2

Tabela 9.3. Quantidades adicionadas aos totais acumulados mediante a agregação padrão.

Assim, o vencedor será (1; 1) pois o seu total, 2, é o mais elevado. Claro que já se sabia que (1; 1) vencia mediante a agregação padrão, pois cada proposta tem três “sins” e dois “nãos”.

A importância do teorema 9.1 reside no tratamento das combinações, isto é, mostra que um referendo usando a agregação padrão pode ser encarado como um concurso entre todas as possíveis combinações, com cada voto a contribuir com um determinado valor (que pode ser positivo, negativo ou nulo), para o total acumulado de cada combinação. No exemplo que se acabou de ver, cada um dos votantes em (1; 1) eleva o total da combinação (1; 1) em 2 pontos: +1 para P1, o primeiro termo do somatório no teorema 9.1, e +1 para P2. O teorema 9.1 diz que, após contabilizar todos os votos deste modo, a combinação com o resultado mais elevado vence.

Os valores que são somados por cada votante, conforme especificado no teorema 9.1, oferecem uma comparação interessante. Se existirem duas propostas e os indivíduos votarem numa combinação específica, essa combinação recebe +2 pontos, a combinação oposta recebe -2 pontos e as duas restantes, que coincidem com a selecção do votante numa das proposições, recebem zero pontos. Do mesmo modo, quando um votante se abstém numa das proposições, mas expressa o seu acordo ou desacordo relativamente à outra, as duas combinações que correspondem à preferência expressa recebem +1 ponto, enquanto que as outras recebem -1 ponto (tudo isto está registado na tabela 9.3).

Quando existem três propostas, e o votante expressa a preferência sobre as três (sem qualquer abstenção), a combinação correspondente à escolha do votante receberá +3 pontos, a combinação que apresenta duas escolhas coincidentes com a opção do indivíduo (e uma discordante) receberá +1 ponto, a combinação que tiver duas escolhas discordantes e uma coincidente receberá -1 ponto e a combinação totalmente oposta à escolhida pelo votante terá -3 pontos. De um modo geral, a quantidade a somar ou subtrair (no caso de números negativos), ao total de cada combinação é igual ao número de propostas em que a escolha do votante e determinada combinação coincidem, menos o número de propostas em que discordam.

Este procedimento de atribuir pontos à proposta, e determinar assim o vencedor, produz uma espécie de contagem de Borda sobre todas as combinações; por exemplo com três propostas em referendo as quantias a somar são +3, +1, -1 e -3. No método de agregação padrão, um votante efectivamente atribui uma ordenação numérica, quantificável, a todas as combinações, em função do grau com que a sua opinião coincide com cada uma das combinações (com a abstenção sem somar nem subtrair qualquer quantidade).

Conforme já foi dito, os votantes com preferências separáveis não terão qualquer razão para se arrependerem do seu voto mediante o método de agregação padrão, já os indivíduos com preferências não separáveis agradecem qualquer flexibilidade adicional que um outro procedimento eleitoral lhes possa proporcionar.

Considere-se, a título de exemplo, um votante com a ordenação de preferências SS $\succ$ NN $\succ$ SN $\succ$ NS. Mediante a contagem de Borda este indivíduo podia hierarquizar as suas preferências exactamente com esta ordem. Com o voto por aprovação poderia aprovar SS e NN. Usando a agregação padrão, a escolha do indivíduo não é correctamente reproduzida, uma vez que ao votar SS estará a determinar NN como última opção; ao escolher SS assumem-se como opções parcialmente válidas SN e NS, no entanto a segunda opção do votante não é nenhuma destas duas, mas sim NN. Na realidade, apesar das suas falhas, o voto plural serviria melhor os interesses deste votante, uma vez que atribuía o primeiro lugar a SS e consideraria os três restantes com igual valor, não valorizaria SN e NS em detrimento de NN.

Escolher uma combinação das 2^p possíveis (considerando p propostas) parece bastante limitado, talvez fizesse mais sentido o votante ter a oportunidade de hierarquizar as várias combinações (usando a contagem de Borda), ou indicar mais do que uma combinação aceitável (voto por aprovação). Isto é exequível se existirem apenas duas ou três propostas relacionadas, dando quatro ou oito combinações possíveis; claro que a situação se alteraria consideravelmente se existissem muitas propostas em referendo, pois seria necessário determinar que propostas se relacionam entre si e como devem ser agrupadas nos boletins de voto. Tornar-se-ia também essencial, perante três ou mais propostas relacionadas, reduzir o número de combinações permitidas para um valor tratável, como oito. Embora pareça que o voto por aprovação fosse praticável com mais propostas, a ordenação exigida pela contagem de Borda para mais de oito alternativas não faria muito sentido.

Brams, Kilgour e Zwicker nos artigos *Paradox of Multiple Referenda* e *Voting on Referenda: The Separability Problem and Possible Solutions* (1997), concluem que, apesar de o voto plural não ser um procedimento recomendado para referendos com múltiplas propostas, parece trazer melhorias relativamente à agregação padrão quando existem muitos votantes com preferências não separáveis. É possível usar dados resultantes de referendos reais para efectuar comparações entre os resultados produzidos pela agregação padrão e pelo voto plural, no entanto esta abordagem apresenta um problema, veja-se. Retome-se o exemplo na tabela 9.3, estudando-o à luz do método plural. Deve-se, neste âmbito, interpretar (1; 1) como um votante que atribui um ponto à opção (1; 1) e zero às restantes, ficando assim as três primeiras linhas com 1 na primeira coluna e restantes colunas com 0. Mas o que fazer nas outras linhas? Quando um votante se abstém em alguma proposta não é claro como devem ser contabilizados estes votos perante o método plural. Note-se que a questão de como contabilizar os votos em que existem abstenções é de extrema importância, na medida em que pode existir uma larga percentagem de votantes que se abstenham perante algum assunto, e, se assim for, não pode ser ignorada uma parte significativa dos votos; além de que o próprio acto de abster-se perante uma proposta tem subjacente uma postura relativamente a este assunto.

Muitos votantes têm, legitimamente, preferências não separáveis em referendos múltiplos com propostas relacionadas entre si. Acreditam os autores Brams, Kilgour e Zwicker que estes indivíduos são mal servidos pela agregação padrão, tudo correria melhor se fossem usados outros métodos, como o voto por aprovação ou a contagem de Borda, que têm sido bastante estudados e são usados em situações de eleição de um candidato. Aplicados a situações de referendo com baixo número de combinações admissíveis (de quatro a oito se existirem dois ou três assuntos em discussão), proporcionariam uma escolha mais próxima do consenso.

No entanto, não pode ignorar-se que foi possível verificar no capítulo VII, seguindo as indicações de Saari, que o voto por aprovação apresenta falhas que em muito suplantam as suas qualidades. Deste modo contorna-se a sugestão dos autores Brams, Zilgour e Zwicker relativamente ao voto por aprovação a aceitar-se-á a contagem de Borda (recorde-se que Steven Brams discutiu a pertinência do voto por aprovação directamente com Saari).

Registe-se o que dizem os autores Dean Lacy e Emerson M. S. Niou[17] no artigo *A Problem with Referendums* (2000).

Um votante estratégico (também chamado de votante com recurso ao voto útil) é alguém que, com conhecimento prévio das preferências dos restantes votantes, altera o seu próprio voto (escolhendo como primeira opção um candidato que muitas vezes não é o que prefere), com vista a prevenir resultados finais que considera desajustados.

A votação sequencial perante votantes estratégicos pode resolver o problema das preferências não separáveis, no entanto não será de esperar votantes estratégicos num referendo. O voto útil requer que os votantes tenham uma ideia a respeito das preferências de todos os outros votantes, o que se torna impossível em referendos realizados à escala nacional de um qualquer país.

De qualquer modo, independentemente do uso do voto útil, a votação sequencial por si só traz alguns impedimentos. O seu uso à escala nacional de um referendo obrigaria a que o resultado da votação de uma proposta fosse divulgado antes do sufrágio da proposta seguinte, o que forçaria os governos a abrirem as mesas de votos diversas vezes, tornando o processo demasiado extenso temporalmente e financeiramente inviável. Claro que uma situação de votação sequencial, em que um indivíduo soubesse o resultado da proposta A antes de tomar uma decisão sobre a proposta B, permitiria aos votantes com preferências não separáveis tomarem decisões de modo mais informado, fazendo assim com que o seu voto fosse consciente e não houvesse lugar a mal-entendidos.

Concluem os autores Dean Lacy e Emerson M. S. Niou que, apesar das limitações na implementação da votação sequencial com recurso ao voto útil, esta garante a eleição do vencedor de Condorcet quando o mesmo existe, perante votantes com preferências não separáveis.

[17] Dean Lacy. Professor of Government na University of Virginia.
Emerson M. S. Niou (1958 - …). Professor do Department of Political Science na Duke University.

Muitos dos problemas associados às eleições com um único vencedor, surgem igualmente nos referendos múltiplos. Assim sendo, não será de estranhar que a solução proposta aqui seja semelhante à estudada para as eleições com a determinação de um vencedor: a contagem de Borda. No entanto, uma diferença significativa é que em situações de referendos múltiplos, o número de combinações possíveis aumenta exponencialmente com o número de propostas em discussão, enquanto que em situações de eleição de um candidato não se dá uma explosão de escolhas possíveis se aumentar o número de candidatos. A construção de subconjuntos para as propostas potenciará a diminuição de combinações possíveis e a partir daí o uso da contagem de Borda ou do voto por aprovação, no entanto a separação das propostas em subconjuntos nem sempre é tarefa fácil…

Neste capítulo identificou-se um problema com os referendos múltiplos que vulgarmente se utilizam. Quando alguns votantes têm preferências não separáveis a respeito dos assuntos em discussão, os referendos são incapazes de reflectir fielmente a complexidade das preferências dos votantes. Os referendos, que são muitas vezes tidos como o paradigma do sistema democrático, podem produzir, em vez disso, resultados a que se opõe a maioria dos votantes (recorde-se a situação vista na tabela 9.2).

As possíveis soluções para que os referendos reproduzam correctamente a vontade dos indivíduos trazem também novos problemas: a contagem de Borda e a votação sequencial são impraticáveis quando estão em votação mais de três propostas relacionadas entre si (do ponto de vista do tempo que obriga a despender e dos recursos financeiros e humanos).

Note-se que a resolução dos problemas introduzidos pela noção de separação das preferências dos votantes é uma área de estudo muito recente, estão publicados pouco mais de uma dezena de artigos sobre esta questão. Deste modo, há ainda muito trabalho a fazer nesta área, as ideias que aqui se apresentam sobre possíveis soluções são propostas, bons primeiros passos, mas não constituem de todo soluções possíveis, muitas estarão ainda por descobrir… O referendo que envolva votantes com preferências não separáveis (por menor que seja esse número) não reflecte, ainda, “a vontade do povo”.

X – Métodos de divisão proporcional

Encontrar um método que permita a representação proporcional é um desafio matemático, sob muitos aspectos, diferente daquele que se encontra ao procurar um único vencedor eleitoral. Um sistema que vise a determinação de um único vencedor eleitoral pretende conciliar as contradições que, eventualmente, existam no eleitorado, de modo a encontrar o representante que agrade à maioria. A representação proporcional, em oposição, almeja reproduzir a diversidade e as contradições do eleitorado à escala da legislatura.

Este capítulo trata um problema simultaneamente político e matemático: como dividir os lugares em disputa pelos vários concorrentes de forma proporcional à sua representação na sociedade. Pode inicialmente parecer uma questão de simples resolução, mas envolve dificuldades técnicas que ocupam políticos e matemáticos há mais de dois séculos. O cerne do problema é o facto de uma divisão exacta ser impossível face à indivisibilidade dos lugares a concurso. Inevitavelmente, alguns concorrentes serão sobrevalorizados em detrimento de outros subrepresentados. O que fazer perante o partido C cuja quota sobre o total é de 4,5? Atribuir-lhe quatro ou cinco representantes? Ao atribuir quatro lugares subvaloriza-se o peso deste partido, mas ao atribuir cinco está a sobrevalorizar-se a sua influência. O ideal de "um homem, um voto" não será possível…

Constatar-se-á que não há um método perfeito. Para os mais cépticos, existe até um teorema da impossibilidade que mostra que o problema não tem solução. Mas, apesar disso, é necessário distribuir os lugares a concurso. Como dizia Daniel Webster,[18] há mais de cento e cinquenta anos, o desafio não é encontrar uma solução perfeita – tal não existe – mas aproximar da perfeição tanto quanto possível.

Apesar da questão da divisão proporcional ser comum a todos os governos representativos, estuda-se aqui o caso dos Estados Unidos da América, pois esta nação tem neste campo a História mais antiga e rica. No entanto, os antecedentes da representatividade proporcional fazem recuar ao próprio conceito da democracia, à Grécia do século V a. C..

Desde 1787 que se realizam censos nos Estados Unidos da América, com vista à actualização do número de lugares que cada estado possui na Câmara dos Representantes, em função da sua população; estes censos têm lugar de dez em dez anos, proporcionando, assim, mais de duzentos anos de dados que podem ser estudados e dos quais se retiram duas grandes

[18] Daniel Webster (1782-1852). Advogado e político; foi eleito para a Câmara dos Representantes dos Estados Unidos em 1812.

lições (os dados que se referem aos censos e seu tratamento podem encontrar-se nas páginas finais deste capítulo).

A primeira lição a retirar é a importância deste problema. Alguns políticos podem tentar desvalorizar esta questão, mas a realidade é que os efeitos da atribuição de um lugar adicional ao partido A, em detrimento do partido B, têm consequências na constituição do parlamento, seguindo-se naturais implicações sociais que podem ser relevantes.

A segunda lição a retirar da História política dos Estados Unidos, neste campo, tem a ver com a determinação da justiça de um método. Duzentos anos de experiência acumulada permitem verificar como os métodos funcionam na prática, isto é, constatar quais os métodos que favorecem os estados mais fortes, quais os que prejudicam um estado que viu aumentar a sua população em detrimento de outro que terá estabilizado, entre outras questões.

A questão a colocar será: que método melhor se aproxima do ideal da representatividade proporcional? Ou, de modo equivalente, qual o desvio admissível do ideal "um homem, um voto"? A resposta depende daquilo que se tenha em mente. Uma possibilidade é, naturalmente, eliminar qualquer método de distribuição proporcional, negociando a solução entre os intervenientes. Se pretender banir qualquer favorecimento quer aos estados (ou partidos) mais pequenos, quer aos maiores, o método de Daniel Webster é uma solução. Se se considerar que a estabilidade política é deveras preciosa para ser colocada em risco por correntes políticas de menor expressão, então deve escolher-se um método que favoreça os partidos mais fortes – método de Jefferson. A escolha do método fica assim ao cuidado da intenção do implementador, em função das características que considere mais relevantes e dos objectivos que tem em mente com o acto eleitoral.

Alguns métodos…

A História mostra a imaginação matemática de alguns políticos quando estão em jogo lugares no poder. Nos Estados Unidos da América o assunto preocupou muitos homens de estado como George Washington, Thomas Jefferson, Alexander Hamilton, John Quincy Adams ou Daniel Webster[19]. Algumas das suas propostas foram além de soluções práticas para determinado momento, e transformaram-se em abordagens teóricas interessantes para muitas

[19] George Washington (1789-1797). Primeiro Presidente dos Estados Unidos da América.
Thomas Jefferson (1743-1826). Foi o terceiro Presidente dos Estados Unidos da América e autor da Declaração de Independência deste país.
Alexander Hamilton (1757-1804). Político norte-americano. Foi Secretário do Tesouro, fundou o Banco Nacional.
Jonh Quincy Adams (1767-1848). Advogado, foi o sexto Presidente dos Estados Unidos da América.

nações de hoje. O envolvimento destas importantes personalidades, a par de muitas outras, corrobora tanto a complexidade do problema como as suas profundas consequências políticas.

A primeira distribuição de lugares na Câmara dos Representantes nos Estados Unidos foi fixada pela Constituição, até que um censo tivesse lugar. Os resultados do primeiro censo foram dados a conhecer ao Congresso em 1791.

Estado	População
Virginia	630 560
Massachusetts	475 327
Pennsylvania	432 879
North Carolina	353 523
New York	331 589
Maryland	278 514
Connecticut	236 841
South Carolina	206 236
New Jersey	179 570
New Hampshire	141 822
Vermont	85 533
Georgia	70 835
Kentucky	68 705
Rhode Island	68 446
Delaware	55 540
Total	3 615 920

Tabela 10.1: População nos diversos estados em 1791.

Sem a definição prévia da regra a seguir para a distribuição dos lugares, bem como sem o número de lugares da Câmara dos Representantes fixo, surgiu imediatamente uma discussão sobre o método a adoptar, que opôs Thomas Jefferson a Alexander Hamilton.

Na altura a que se reportam estes factos (finais do século XVIII), o número de lugares na Câmara não estava previamente definido, o valor que se encontrava fixo era a “razão de representação”, ou seja, o número x de pessoas necessárias à obtenção de um representante. Após o conhecimento deste valor x, procedia-se ao quociente entre o número de indivíduos que constituem a população e x (designado, por este facto, o divisor).

O menor divisor permitido pela Constituição era de 30 000; os resultados aplicando este valor encontram-se na tabela 10.2. Coloca-se então a questão: o que fazer às partes decimais? Uma solução simples consiste em ignorá-las, levando assim ao total de cento e doze lugares na Câmara.

Estado	Quociente (com divisor 30 000)	Proposta de distribuição
Virginia	21,019	21
Massachusetts	15,844	15
Pennsylvania	14,429	14
North Carolina	11,784	11
New York	11,053	11
Maryland	9,284	9
Connecticut	7,895	7
South Carolina	6,875	6
New Jersey	5,986	5
New Hampshire	4,727	4
Vermont	2,851	2
Georgia	2,361	2
Kentucky	2,290	2
Rhode Island	2,282	2
Delaware	1,851	1
Total	120,531	112

Tabela 10.2: Proposta da Câmara dos Representantes para a distribuição dos seus próprios lugares em 1792.

Mas não havia consenso quanto à utilização do divisor 30 000, e o Senado recusou mesmo esta sugestão, subindo o valor para 33 000, provocando a redução do número de lugares para cento e cinco, conforme se vê na tabela 10.3. Estava lançado um conflito.

Estado	Quociente (com divisor 33 000)	Proposta de distribuição
Virginia	19,108	19
Massachusetts	14,404	14
Pennsylvania	13,118	13
North Carolina	10,713	10
New York	10,048	10
Maryland	8,440	8
Connecticut	7,177	7
South Carolina	6,250	6
New Jersey	5,442	5
New Hampshire	4,298	4
Vermont	2,592	2
Georgia	2,147	2
Kentucky	2,082	2
Rhode Island	2,074	2
Delaware	1,683	1
Total	109,573	105

Tabela 10.3: Proposta do Senado para a distribuição dos lugares da Câmara dos Representantes em 1792.

A sugestão de Jefferson, de simplesmente eliminar as partes decimais dos valores encontrados, tende a favorecer os estados mais populosos em detrimento dos mais pequenos. Pode constatar-se este facto na tabela 10.2 relativamente aos estados de Delaware e Massachusetts: o primeiro tem parte decimal 0,851 correspondente a 46% do total do seu quociente, enquanto que a parte decimal 0,844 de Massachusetts corresponde a 5% do seu valor total. Olhando a tabela 10.1 verifica-se que isto significa que Delaware obtém um representante para 55 540 pessoas, enquanto que Massachusetts obtém um lugar por cada grupo de 31 688 habitantes (475 327 $\div$ 15 $\approx$ 31 688). Claramente este método inclina a balança a favor dos estados mais fortes.

Uma questão muito importante que estava por resolver, antes mesmo da discussão do método, era o número de lugares na Câmara dos Representantes (na altura era sessenta e cinco). Os apoiantes de Jefferson defendiam que tal valor era excessivamente baixo, provocando no povo uma sensação de desconfiança, uma vez que um grupo desta dimensão seria facilmente influenciável e eventualmente corruptível. Com um maior número de pessoas os processos políticos, e as decisões tomadas, tendem a ser mais equilibradas, mais justas.

Por esta altura, Alexander Hamilton, Secretário do Tesouro e figura emergente na administração de Washington, concebeu uma nova proposta. Defendeu que para encontrar a parte justa de cada estado deve começar-se por fixar o número total de lugares a preencher, e então determinar a parte proporcional de cada estado.

Uma forma de determinar a parte que cabe a cada estado é usar a proporcionalidade directa, a vulgar regra de três simples. Ao aplicá-la obtém-se, para cada estado, um valor a que se chama quota. A tabela 10.4 compara as quotas dos estados com as distribuições propostas pela Câmara e pelo Senado.

Estado	Quota (com 112)	Proposta de distribuição da Câmara	Quota (com 105)	Proposta de distribuição do Senado
Virginia	19,531	21	18,310	19
Massachusetts	14,723	15	13,803	14
Pennsylvania	13,408	14	12,570	13
North Carolina	10,950	11	10,266	10
New York	10,271	11	9,629	10
Maryland	8,627	9	8,088	8
Connecticut	7,336	7	6,877	7
South Carolina	6,388	6	5,989	6
New Jersey	5,562	5	5,214	5
New Hampshire	4,393	4	4,118	4
Vermont	2,649	2	2,484	2
Georgia	2,194	2	2,057	2
Kentucky	2,128	2	1,995	2
Rhode Island	2,120	2	1,988	2
Delaware	1,720	1	1,613	1
Total	112,000	112	105,000	105

Tabela 10.4: Propostas do Senado e da Câmara para a distribuição dos lugares da Câmara dos Representantes em 1792, e as respectivas quotas.

Na distribuição da Câmara o estado de Virginia obtém mais lugares do que a sua quota arredondada por excesso; diz-se que neste caso é violada a regra da quota, pois o valor determinado na distribuição dos lugares é superior à quota (caso fosse inferior ao arredondamento por defeito, dir-se-ia também que havia violação da regra da quota).

Perante esta situação, e considerando o valor populacional total, 3 615 920, Hamilton propôs cento e vinte como valor para o número de lugares na Câmara dos Representantes, pois é a parte inteira do quociente $3\,615\,920 \div 30\,000$.

O método proposto por Hamilton consistia então nos seguintes passos:

1. Fixar o número de lugares a preencher;
2. Determinar a quota e atribuir a cada estado a parte inteira desse valor;
3. Distribuir pelos estados os lugares que eventualmente faltarem, por ordem decrescente das partes decimais dos valores das quotas.

Este método revela-se simples e directo sendo por isso actualmente utilizado em muitos países, conhecido como "método do maior resto".

Em Março de 1792 passou na Câmara dos Representantes e no Senado a distribuição apresentada na tabela 10.5, ficando a aguardar a ratificação do Presidente Washington.

Estado	Quota	Distribuição pelo método de Hamilton
Virginia	20,926	21
Massachusetts	15,774	16
Pennsylvania	14,366	14
North Carolina	11,732	12
New York	11,004	11
Maryland	9,243	9
Connecticut	7,860	8
South Carolina	6,844	7
New Jersey	5,959	6
New Hampshire	4,707	5
Vermont	2,839	3
Georgia	2,351	2
Kentucky	2,280	2
Rhode Island	2,271	2
Delaware	1,843	2
Total	120,000	120

Tabela 10.5: Proposta aprovada pelo Congresso em 1792, elaborada de acordo com o método de Hamilton.

Mas Jefferson não se resignou, apresentou diversos exemplos em defesa do método que considerava superior ao de Hamilton: o que ele próprio havia desenvolvido. O método de Jefferson seguia as etapas:

1. Fixar o número de lugares a preencher;
2. Encontrar um divisor x tal que as partes inteiras dos quocientes assim determinados somem o número de lugares a preencher (esta etapa pode obrigar a várias tentativas);
3. Atribuir a cada estado o número de lugares encontrado na etapa anterior.

A tabela 10.6 mostra a distribuição dos cento e vinte lugares de acordo com o método de Jefferson. Repare-se no favorecimento de estados mais fortes, Pennsylvania e Virginia, por oposição à perda de força de estados mais pequenos, Delaware e New Hampshire, comparativamente à distribuição obtida com o método de Hamilton.

Estado	Quociente (com divisor 28 500)	Distribuição pelo método de Jefferson
Virginia	22,125	22
Massachusetts	16,678	16
Pennsylvania	15,189	15
North Carolina	12,404	12
New York	11,635	11
Maryland	9,772	9
Connecticut	8,310	8
South Carolina	7,236	7
New Jersey	6,301	6
New Hampshire	4,976	4
Vermont	3,001	3
Georgia	2,485	2
Kentucky	2,411	2
Rhode Island	2,402	2
Delaware	1,949	1
Total	126,874	120

Tabela 10.6: Distribuição dos cento e vinte lugares da Câmara de acordo com o método de Jefferson, mediante os dados do censo de 1971.

Neste momento a decisão estava com o Presidente Washington, que exerceu o primeiro veto presidencial: foi derrotada a proposta de Hamilton; Jefferson saiu vencedor.

A luta entre Jefferson e Hamilton mostra quão feroz pode ser a competição política sobre a distribuição de um pequeno número de lugares. Este não foi um fenómeno isolado; em 1941 a transferência de um único lugar entre os estados de Michigan e Arkansas catalisou uma nova tempestade nos métodos de divisão proporcional, este é um tema a tratar mais à frente.

Não é óbvio que método usar… Aos que dizem que é indiferente, a História acaba de mostrar que estão errados. Conforme se verá, acontecimentos posteriores mostraram que tanto o método de Jefferson como o de Hamilton sofrem de falhas graves e acabam por ser postos de parte nos Estados Unidos. Nas décadas seguintes muitos outros métodos foram propostos. A experiência adquirida na aplicação de todos eles sugere as características a ter em conta no momento da escolha de um método.

O método de Jefferson manteve-se em uso até 1830, apesar de desvanecer o entusiasmo inicial. Os Estados Unidos da América passaram de quinze estados, e uma população de 3 615 920 em 1790, para vinte e quatro estados e 11 931 000 indivíduos em 1830; a Câmara dos Representantes cresceu também de cento e cinco para duzentos e quarenta membros.

A experiência acumulada entre 1790 e 1830 mostra que o método de Jefferson favorece os estados mais povoados. Nos cinco censos ocorridos neste intervalo de tempo, Delaware teve como valores de quota 1,613; 1,782; 1,952; 1,685 e 1,517, tendo conseguido apenas um lugar na maioria das vezes (apenas em 1810 conseguiu dois representantes). Por oposição, New York recebeu dez lugares com uma quota de 9,629 em 1790, dezassete com quota 16,661 em 1800, vinte e sete com quota 26,199 em 1810, trinta e quatro com quota 32,503 em 1820 e quarenta com quota 38,593 em 1830.

Em 1822, William Lowndes[20], um representante de South Carolina, introduziu uma nova proposta – uma variação do método de Hamilton – com o objectivo de corrigir as perturbações verificadas com o método de Jefferson.

A implementação do método de Lowndes começa por ser semelhante à do método de Hamilton, diferindo na ordenação dos estados com vista à atribuição dos lugares em falta, não o fazendo – como Hamilton propõe – com recurso às partes decimais das quotas.

Para perceber a sugestão de Lowndes tome-se a situação de 1820, com vinte e quatro estados e duzentos e treze lugares a preencher. A população do estado de Pennsylvania era de 1 049 313 indivíduos, e a sua quota de 24,917, enquanto que Illinois tinha uma população de 54 843 e uma quota de 1,302. Num primeiro passo Lowndes, como Hamilton, atribui vinte e quatro lugares a Pennsylvania e um lugar ao estado do Illinois. Dos duzentos e treze lugares a preencher, após a primeira etapa, faltam atribuir treze representantes. Para determinar que estados obtêm um lugar adicional, divide-se o valor da população de cada estado pelo número de lugares que já possui, encontrando-se assim um "número médio por representante". Para a Pennsylvania este número era $1\ 049\ 313 \div 24 \approx 43\ 721$, e para o Illinois $54\ 843 \div 1 = 54\ 843$. Como o último número é maior, o método de Lowndes determina a atribuição de um lugar extra ao Illinois e não à Pennsylvania. O método de Hamilton faria o oposto, uma vez que o estado de Pennsylvania tem a quota com maior parte decimal que a do Illinois.

Na realidade o método de Lowndes é semelhante ao de Hamilton, diferindo apenas no facto de o primeiro ordenar os restos de acordo com o peso de cada estado.

Pode resumir-se o método de Lowndes nas etapas:

1. Fixar o número de lugares a preencher;
2. Determinar a quota e atribuir a cada estado a parte inteira desse valor;
3. Dividir o valor populacional de cada estado pela parte inteira da sua quota;

[20] William Lowndes (1782-1822). Advogado e político norte-americano.

4. Atribuir aos estados os lugares que eventualmente estiverem em falta, por ordem decrescente dos valores encontrados no ponto anterior.

Lamentavelmente, o método de Lowndes tende a favorecer excessivamente os estados mais pequenos. Conforme se pode ver na tabela 10.7, aplicando este método aos dados de 1820, todos os lugares adicionais seriam atribuídos a estados menores; em particular, Illinois com uma quota de 1,302 teria dois representantes, enquanto Pennsylvania com uma quota de 24,917 conseguiria apenas vinte e quatro. A proposta foi chumbada no Congresso na década de 1820 e não foi retomada. O método de Jefferson, apesar das falhas reveladas, manteve-se no activo.

Estado	População	Quota (com 213)	Parte inteira da quota	Número médio por representante	Lugares a acrescentar	Distribuição segundo o método de Lowndes
New York	1 368 775	32,503	32	42774,2		32
Pennsylvania	1 049 313	24,917	24	43721,4		24
Virginia	895 303	21,260	21	42633,5		21
Ohio	581 434	13,807	13	44725,7		13
North Carolina	556 821	13,222	13	42832,4		13
Massachusetts	523 287	12,426	12	43607,3		12
Kentucky	513 623	12,197	12	42801,9		12
South Carolina	399 351	9,483	9	44372,3		9
Tennesse	390 769	9,279	9	43418,8		9
Maryland	364 389	8,653	8	45548,6		8
Maine	298 335	7,084	7	42619,3		7
Georgia	281 126	6,676	6	46854,3	1	7
Connecticut	275 208	6,535	6	45868,0	1	7
New Jersey	274 551	6,520	6	45758,5	1	7
New Hampshire	244 161	5,798	5	48832,2	1	6
Vermont	235 764	5,598	5	47152,8	1	6
Indiana	147 102	3,493	3	49034,0	1	4
Louisiana	125 779	2,987	2	62889,5	1	3
Alabama	111 147	2,639	2	55573,5	1	3
Rhode Island	83 038	1,972	1	83038,0	1	2
Delaware	70 943	1,685	1	70943,0	1	2
Missouri	62 496	1,484	1	62496,0	1	2
Mississippi	62 320	1,480	1	62320,0	1	2
Illinois	54 843	1,302	1	54843,0	1	2
Total E. U. A.	8 969 878	213	200		13	213

Tabela 10.7: Efeitos da aplicação do método de Lowndes aos dados de 1820.

Em 1830 as fragilidades do método de Jefferson voltam uma vez mais a tema de discussão. A preocupação da região de New England sobre a potencial perda de lugares foi confirmada por uma distribuição levada a cabo por James K. Polk[21] do Tenesse. Polk havia ganhado importância com a oposição às políticas de Adams em 1824, e viria a tornar-se Presidente da Câmara dos Representantes.

Polk utilizou o método de Jefferson e o divisor 48 000, passando depois para 47 700, com vista ao favorecimento de alguns estados de maior importância. Os estados que compõem New England mostraram-se inconformados com a situação, sentimento que se espalhou por outros estados. Com o divisor 47 700 a Câmara dos Representantes veria o número de lugares passar de duzentos e vinte e três para duzentos e quarenta, com o estado de Massachusetts a perder um representante (de treze para doze); consequentemente New England deixaria de ter trinta e nove para passar a trinta e oito representantes.

Estado	População	Quociente (com divisor 47 700)	Distribuição pelo método de Jefferson	Quota (com 240)
Massachusetts	610 408	12,797	12	12,279
Maine	399 454	8,374	8	8,035
Connecticut	297 665	6,240	6	5,988
Vermont	280 657	5,884	5	5,646
New Hampshire	269 326	5,646	5	5,418
Rhode Island	97 194	2,038	2	1,955
Total – New England	1 954 704	40,979	38	39,321

Tabela 10.8: Efeitos da proposta de distribuição de Polk para a região de New England em 1830.

Na realidade, entre 1790 e 1830, a população de New England havia decrescido relativamente ao total dos Estados Unidos (em 1820 representava 18,5% da população total, enquanto em 1830 apenas 16,4%), no entanto, a distribuição para os duzentos e quarenta lugares dava uma quota de 39,321, e com a distribuição proposta por Polk, mediante o método de Jefferson, seriam atribuídos trinta e oito lugares. Para os que se sentiam defraudados por Polk, a solução passava pela diminuição do divisor 47 700 ou pela adopção de um novo método.

John Quincy Adams – na altura um representante do estado de Massachusetts e antigo Presidente – propôs ao seu colega Daniel Webster, no Senado, um novo método (que naturalmente favoreceria os estados de New England).

A proposta de Adams era bastante semelhante à de Jefferson, diferindo apenas no arredondamento a efectuar aos quocientes encontrados: enquanto que Jefferson sugeria a aproximação por defeito, Adams defende o arredondamento por excesso; vejam-se os passos:

[21] James K. Polk (1795-1849). Foi o décimo primeiro Presidente dos Estados Unidos da América, entre 1845 e 1849.

1. Fixar o número de lugares a preencher;
2. Encontrar um divisor x tal que os quocientes assim encontrados, aproximados por excesso às unidades, somem o número de lugares a preencher (esta etapa pode obrigar a várias tentativas);
3. Atribuir a cada estado o número de lugares encontrado na etapa anterior.

Na tabela seguinte encontra-se a aplicação do método de Adams aos dados de 1830 na região de New England:

Estado	População	Quociente (com divisor 50 000)	Distribuição pelo método de Adams	Quota (com 250)
Massachusetts	610 408	12,208	13	12,790
Maine	399 454	7,989	8	8,370
Connecticut	297 665	5,953	6	6,237
Vermont	280 657	5,613	6	5,881
New Hampshire	269 326	5,387	6	5,643
Rhode Island	97 194	1,944	2	2,037
Total – New England	1 954 704	39,094	41	40,959

Tabela 10.9: Efeitos da aplicação do método de Adams para a região de New England em 1830.

Mas quando Adams terminou a construção do seu método era já tarde para actuar sobre a Câmara dos Representantes: Daniel Webster havia assumido a liderança dos estudos para a escolha de um método proporcional, presidindo a uma comissão do Senado constituída justamente com a finalidade de estudar o problema da divisão proporcional. Em 1832 muitos consideravam Daniel Webster um grande homem de estado, a sua inteligência e o seu discurso eloquente tornavam-se lendas.

Apesar de ter recebido a proposta de Adams, Webster não lhe deu qualquer seguimento. Do ponto de vista de New England, o método de Adams era bastante atractivo, mas o que pensariam os restantes cidadãos? Suponha-se que era adoptado o método de Adams, faça-se a sua aplicação aos dados de 1830 para duzentos e quarenta lugares e compare-se esta distribuição com a proposta de Polk (um divisor entre 52 106 e 52 382 proporciona estes dados):

Estado	População	Quota	Distribuição de acordo com o método de Adams	Distribuição de acordo com o método de Jefferson, segundo a proposta de Polk
New York	1 918 578	38,593	37	40
Pennsylvania	1 348 072	27,117	26	28
Kentucky	621 832	12,509	12	13
Vermont	280 657	5,646	6	5
Louisiana	171 904	3,458	4	3
Illinois	157 147	3,161	4	3
Missouri	130 419	2,623	3	2
Mississippi	110 358	2,220	3	2
Delaware	75 432	1,517	2	1
Total E. U. A.	11 931 000	240	240	240

Tabela 10.10: Comparação entre os métodos de Adams e Jefferson para alguns estados, mediante os dados de 1830.

O estado de New York com uma quota de 38,593 recebe, sob Adams, trinta e sete lugares, ao passo que Illinois recebe quatro representantes com uma quota de 3,161. O método de Adams tende a favorecer os estados menores, espelhando inversamente a tendência do método de Jefferson para com os maiores estados. Ambos são também semelhantes no que concerne à violação da regra da quota, a diferença está em que Adams fica abaixo dela enquanto Jefferson a ultrapassa.

Entretanto, Webster recebeu outra proposta de um professor de astronomia e matemática, James Dean[22]. A proposta de Dean é facilmente explicável com um exemplo. Em 1830 a população de Massachusetts era de 610 408: se recebesse doze lugares o seu "número médio por representante" seria 610 408 ÷ 12 ≈ 50 867; se recebesse treze lugares viria 610 408 ÷ 13 ≈ 46 954. Assim, com o divisor 47 700 proposto por Polk, Massachusetts receberia treze lugares pois 46 954 está mais próximo de 47 700 do que 50 867.

Vejam-se as etapas do método de Dean:

1. Fixar o número de lugares a preencher;
2. Determinar um divisor x nas seguintes condições:

divide-se cada valor populacional por x e toma-se a parte inteira deste quociente;

[22] James Dean (1776-1849). Professor na University of Vermont.

divide-se novamente o valor da população de cada estado pelo número inteiro encontrado no passo anterior (2.1) e pelo inteiro imediatamente superior – obtêm-se assim os "quocientes por defeito" e "quocientes por excesso", respectivamente.

3. O valor a atribuir a cada estado corresponderá ao número inteiro que no passo 2.2 provocar uma melhor aproximação entre o quociente de 2.2 e o divisor adoptado.

O método de Dean é ilustrado na tabela 10.11 com os dados de 1830, usando o divisor 50 000 para um total de 240 lugares.

Estado	População	Quociente (com divisor 50 000)	Quociente por excesso	Quociente por defeito	Distribuição pelo o método de Dean	Quota
New York	1 918 578	38, 372	49 194	50 489	38	38,593
Pennsylvania	1 348 072	26,961	49 929	51 849	27	27,117
Kentucky	621 832	12,437	47 833	51 819	12	12,509
Vermont	280 657	5,613	46 776	56 131	6	5,646
Louisiana	171 904	3,438	42 976	57 301	4	3,458
Illinois	157 147	3,143	39 287	52 382	3	3,161
Missouri	130 419	2,608	43 473	65 210	3	2,623
Mississippi	110 358	2,207	36 786	55 179	2	2,220
Delaware	75 432	1,509	37 716	75 432	2	1,517
Total E. U. A.	11 931 000				240	240

Tabela 10.11: Aplicação do método de Dean para alguns estados, mediante os dados de 1830.

Comparando esta situação com os resultados obtidos com o método de Adams pode ver-se que New York e Pennsylvania ganham um lugar, enquanto que Illinois e Mississippi perdem, segundo Dean, um representante cada um. O método proposto por Dean evidencia ser menos enviesado a favor dos estados menores, no entanto, Webster não parece ter ficado convencido das suas vantagens.

A sugestão apresentada por Webster acaba por ser a desenvolvida por ele próprio: arredondar os valores das quotas do modo convencional, ou seja, por defeito se a parte decimal for inferior a 0,5, e por excesso caso contrário.

Passos a seguir para a implementação do método de Webster:

1. Fixar o número de lugares a preencher;
2. Encontrar um divisor x tal que os quocientes assim encontrados, arredondados às unidades da forma usual, somem o número de lugares a preencher (esta etapa pode obrigar a várias tentativas);

3. Atribuir a cada estado o número de lugares encontrado na etapa anterior.

Aplique-se aos dados de 1830 o método de Webster conforme se vê abaixo. Procedeu-se à distribuição de duzentos e quarenta lugares usando o divisor 49 800.

Estado	População	Quociente (com divisor 49 800)	Distribuição segundo o método de Webster	Quota
New York	1 918 578	38,526	39	38,593
Pennsylvania	1 348 072	27,070	27	27,117
Kentucky	621 832	12,487	12	12,509
Vermont	280 657	5,636	6	5,646
Louisiana	171 904	3,452	3	3,458
Illinois	157 147	3,156	3	3,161
Missouri	130 419	2,619	3	2,623
Mississippi	110 358	2,216	2	2,220
Delaware	75 432	1,515	2	1,517
Total E. U. A.	11 931 000	239,578	240	240

Tabela 10.12: Aplicação do método de Webster para alguns estados, mediante os dados de 1830.

Até 1832 foram propostos quatro métodos diferentes baseados na escolha de um divisor, cada um deles com características particulares. A tabela seguinte compara as soluções que cada um deles produz para nove dos vinte e quatro estados existentes em 1830.

Estado	Quota	Distribuição segundo o método de Adams	Distribuição segundo o método de Dean	Distribuição segundo o método de Webster	Distribuição segundo o método de Jefferson
New York	38,593	37	38	39	40
Pennsylvania	27,117	26	27	27	28
Kentucky	12,509	12	12	12	13
Vermont	5,646	6	6	6	5
Louisiana	3,458	4	4	3	3
Illinois	3,161	4	3	3	3
Missouri	2,623	3	3	3	2
Mississippi	2,220	3	2	2	2
Delaware	1,517	2	2	2	1
Total		97	97	97	97

Tabela 10.13: Comparação entre os vários métodos estudados para alguns estados, mediante os dados de 1830.

Da esquerda para a direita, ou seja, de Adams para Dean, daí para Webster e depois para Jefferson, é clara a tendência de perda de favorecimento dos estados mais pequenos, ao mesmo tempo que os maiores vão ganhando mais influência. Adams favorece os menores, não é amigável para com os mais fortes, Jefferson provoca exactamente o efeito oposto. Entre Dean e Webster existem menos diferenças, apesar de existirem evidências de que Dean favorece os pequenos mais do que Webster. Perante tudo isto coloca-se naturalmente a questão: qual dos métodos é o mais justo?

Com o tempo cresceu o desencantamento pelo método de Jefferson, ao mesmo tempo que os argumentos de Webster conquistavam apoiantes. Em 1842 o debate para a distribuição dos lugares na Câmara dos Representantes começou, como vinha sendo hábito, com uma discussão para a escolha do divisor a usar, com vista à aplicação do método de Jefferson. Mas o Senado mostrou-se cansado desta prática e propôs a atribuição de duzentos e vinte e três lugares na Câmara usando o método de Webster. Membro da Câmara, John Quincy Adams aceitou o método mas bateu-se pelo aumento do número de membros, tentando desta forma minimizar a diminuição do número de lugares pertencentes a New England. Acabou por ser aprovado o valor de duzentos e vinte e três para o número de lugares na Câmara.

Os debates no Congresso dos Estados Unidos entre 1792 e 1832 foram alimentados por interesses políticos e pelas flutuações nos valores da população de cada estado. Mas independentemente de causas menos nobres, estas discussões produziram os três métodos proporcionais mais utilizados à escala mundial: Webster, Jefferson e Hamilton. O método de Webster é o mais recente dos três, é também conhecido como método dos números ímpares ou método de Sainte-Lagüe[23]. A contrastar existem os métodos de Lowndes e Dean, que não parecem ter sido adoptados noutros cenários.

Os ciclos regulares de censos em cada dez anos, e a consequente distribuição dos lugares na Câmara, proporcionam dados que potenciam conclusões a respeito dos vários métodos. É possível dizer que alguns respeitam a regra da quota, como os métodos de Hamilton e Lowndes, e que outros a violam, como Jefferson e Adams. Sabe-se também que o método de Adams favorece claramente os estados de menor dimensão, ao passo que Jefferson favorece os maiores; Dean e Webster assumem aqui uma postura mais neutra. Estas observações em breve seriam ampliadas pela descoberta de anomalias surpreendentes em alguns destes métodos.

No período de tempo decorrido entre 1850 e 1900, os Estados Unidos da América foram caracterizados por crescimento, expansão e industrialização. Nestes cinquenta anos a população cresceu de vinte e dois milhões para setenta e cinco milhões, formaram-se catorze novos estados e iniciaram-se muitos fluxos populacionais migratórios de Este para Oeste e das zonas rurais para as cidades. O apressado ritmo de crescimento foi reflectido nos censos

[23] André Sainte-Lagüe (1882-1950). Matemático francês.

realizados de dez em dez anos, o que alimentou novas discussões a respeito da distribuição dos representantes dos vários estados.

Neste ambiente de crescimento, a Câmara dos Representantes passou de duzentos e trinta e quatro membros em 1852 para trezentos e oitenta e seis membros em 1902, mas naturalmente esta transição envolveu polémica… Durante este processo foram diversas vezes utilizados os métodos de Jefferson e Hamilton, revelando anomalias e comportamentos paradoxais que levaram à sua eliminação. Acompanhando o crescimento da experiência em termos de métodos proporcionais, foi o método de Webster que gradualmente ganhou a confiança dos estudiosos, pois evitava paradoxos, e da comunidade em geral dado o sentimento de bom senso que o envolvia. Veja-se com mais atenção os acontecimentos que tiveram lugar entre 1850 e 1900.

Na segunda metade do século XIX era o método de Hamilton o oficialmente adoptado nos Estados Unidos. Tal ficou a dever-se a um representante do Ohio, Samuel F. Vinton[24], que em 1850 propôs a adopção oficial de um método proporcional: o que ele próprio havia desenvolvido. Mas, na realidade, o seu método era em tudo semelhante ao método de Hamilton que o Presidente Washington havia vetado em 1792, no entanto, parece que ninguém terá reparado e o "método de Vinton" foi formalmente adoptado em 1850. Por uma questão de simplicidade na análise continuará a usar-se a denominação de método de Hamilton, uma vez que, na realidade, coincidia com este.

Com a prática da implementação do método de Hamilton revelou-se um fenómeno curioso. Tendo por base os dados do censo de 1870, o Census Bureau exemplificou os resultados do método de Hamilton com o número de lugares a variar entre duzentos e quarenta e um e trezentos. Ao fazê-lo, notou que com duzentos e setenta lugares o estado de Rhode Island teria dois representantes, enquanto se o número total de lugares for de duzentos e oitenta Rhode Island teria apenas um. Para remediar esta situação o Census Bureau propôs a utilização do método de Webster, no entanto a sugestão não foi seguida.

[24] Samuel Finley Vinton (1792-1862). Advogado norte-americano; membro da Câmara dos Representantes pelo estado do Ohio.

Estado	População	Quota (com 270)	Distribuição pelo método de Hamilton	Quota (com 280)	Distribuição pelo método de Hamilton
New York	4 382 759	31,046	31	32,196	32
Pennsylvania	3 521 951	24,948	25	25,872	26
Ohio	2 665 260	18,880	19	19,579	19
Illinois	2 539 891	17,992	18	18,658	19
Missouri	1 721 295	12,193	12	12,645	13
Indiana	1 680 637	11,905	12	12,346	12
Massachusetts	1 457 351	10,323	10	10,706	11
Kentucky	1 321 011	9,358	9	9,704	10
Tennesse	1 258 520	8,915	9	9,245	9
Virginia	1 225 163	8,679	9	9,000	9
Iowa	1 194 020	8,458	8	8,771	9
Georgia	1 184 109	8,388	8	8,699	9
Michigan	1 184 059	8,388	8	8,698	9
North Carolina	1 071 361	7,589	8	7,870	8
Wisconsin	1 054 670	7,471	8	7,748	8
Alabama	996 992	7,062	7	7,324	7
New Jersey	906 096	6,419	6	6,656	7
Mississippi	827 922	5,865	6	6,082	6
Texas	818 579	5,799	6	6,013	6
Maryland	780 894	5,532	6	5,736	6
Louisiana	726 915	5,149	5	5,340	5
South Carolina	705 606	4,998	5	5,183	5
Maine	626 915	4,441	4	4,605	5
Califórnia	560 247	3,969	4	4,116	4
Connecticut	537 454	3,807	4	3,948	4
Arkansas	484 471	3,432	3	3,559	3
West Virginia	442 014	3,131	3	3,247	3
Minnesota	439 706	3,115	3	3,230	3
Kansas	364 399	2,581	3	2,677	3
Vermont	330 551	2,342	2	2,428	2
New Hampshire	318 300	2,255	2	2,338	2
Rhode Island	217 353	1,540	2	1,597	1
Florida	187 748	1,330	1	1,379	1
Delaware	125 015	0,886	1 a)	0,918	1
Nebraska	122 993	0,871	1 a)	0,904	1
Oregon	90 923	0,644	1 a)	0,668	1
Nevada	42 491	0,301	1 a)	0,312	1
Total E. U. A.	38 115 641	270	270	280	280

Tabela 10.14: Aplicação do método de Hamilton aos dados de 1870, variando o número de lugares na Câmara.

Nota: a) Todos os estados garantem, pelo menos, um lugar na Câmara.

O fenómeno observado com Rhode Island voltou a verificar-se em 1880 com o estado de Alabama: com duzentos e noventa e nove lugares este estado teria direito a oito, mas se o total passasse a trezentos Alabama ficaria com sete representantes. Este comportamento foi então designado por paradoxo de Alabama, e deixou nesta altura de ser possível ao Congresso ignorar esta anomalia.

Estado	População	Quota (com 299)	Distribuição pelo método de Hamilton	Quota (com 300)	Distribuição pelo método de Hamilton
New York	5 082 871	30,783	31	30,886	31
Pennsylvania	4 282891	25,938	26	26,025	26
Ohio	3 198 062	19,368	19	19,433	19
Illinois	3 077 871	18,640	18	18,702	19
Missouri	2 168 380	13,132	13	13,176	13
Indiana	1 978 301	11,981	12	12,021	12
Massachusetts	1 783 085	10,799	11	10,835	11
Kentucky	1 648 690	9,985	10	10,018	10
Michigan	1 636 937	9,914	10	9,947	10
Iowa	1 624 615	9,839	10	9,872	10
Texas	1 591 749	9,640	9	9,672	10
Tennesse	1 542 359	9,341	9	9,372	9
Georgia	1 542 180	9,340	9	9,371	9
Virginia	1 512 565	9,160	9	9,191	9
North Carolina	1 399 750	8,477	8	8,505	8
Wisconsin	1 315 497	7,967	8	7,993	8
Alabama	1 262 505	7,646	8	7,671	7
Mississippi	1 131 597	6,853	7	6,876	7
New Jersey	1 131 116	6,850	7	6,873	7
Kansas	996 096	6,033	6	6,053	6
South Carolina	995 577	6,029	6	6,050	6
Louisiana	939 946	5,692	6	5,711	6
Maryland	934 943	5,662	6	5,681	6
California	864 694	5,237	5	5,254	5
Arkansas	802 525	4,860	5	4,876	5
Minnesota	780 773	4,728	5	4,744	5
Maine	648 936	3,930	4	3,943	4
Connecticut	622 700	3,771	4	3,784	4
West Virginia	618 457	3,745	4	3,758	4
Nebraska	452 402	2,740	3	2,749	3
New Hampshire	346 991	2,101	2	2,108	2
Vermont	332 286	2,012	2	2,019	2
Rhode Island	276 531	1,675	2	1,680	2
Florida	269 493	1,632	1	1,638	1
Colorado	194 327	1,177	1	1,181	1
Oregon	174 768	1,058	1	1,062	1
Delaware	146 608	0,888	1 a)	0,891	1
Nevada	62 266	0,377	1 a)	0,378	1
Total	49 371 340	299	299	300	300

Tabela 10.15: Aplicação do método de Hamilton aos dados de 1880: paradoxo de Alabama.

Nota: a) Todos os estados garantem, pelo menos, um lugar na Câmara.

A explicação para o paradoxo de Alabama reside no próprio funcionamento do método de Hamilton. Ao aumentar o número de lugares de duzentos e noventa e nove para trezentos, as quotas dos estados aumentam na mesma proporção, mas não no mesmo valor absoluto. De acordo com o censo de 1880, com duzentos e noventa e nove lugares Alabama teria uma quota de 7,646 obtendo oito lugares pelo método Hamilton, ao conseguir o último lugar adicional a ser atribuído. Com trezentos lugares a quota de Alabama seria de 7,671, um aumento de 0,025 correspondente a 0,33%. Mas todas as quotas aumentariam 0,33%, uma vez que é esta a razão do incremento $\left(\frac{1}{300}\times 100 = 0,33\%\right)$, em particular, nos estados mais populosos este valor percentual corresponderia a um aumento real na quota superior a 0,025, daí que as partes decimais das quotas venham a ser superiores à de Alabama. Foi o que aconteceu com os estados de Illinois e Texas, que com duzentos e noventa e nove lugares teriam quotas de 18,640 e 9,640 respectivamente, e na nova situação passariam a 18, 702 e 9,672, passando assim a ter partes decimais superiores às de Alabama, que deixou de receber o lugar adicional.

Perante este comportamento paradoxal, chegou a ser sugerida por C. W. Seaton, chefe do Census Office, a adopção do método de Jefferson, no entanto, o Congresso não aceitou tal proposta. Os membros tinham presente o enviesamento que tal procedimento provocava ao favorecer os estados mais populosos: por exemplo, com trezentos e vinte lugares a concurso, Pennsylvania teria direito a vinte e nove lugares, apesar da sua quota ser 27,760, enquanto que Rhode Island com uma quota de 1,792 receberia apenas um representante.

Estado	População	Quota (com 320)	Quociente (com divisor 146 500)	Distribuição pelo método de Jefferson
New York	5 082 871	32,945	34,695	34
Pennsylvania	4 282 891	27,760	29,235	29
Ohio	3 198 062	20,728	21,830	21
Illinois	3 077 871	19,949	21,009	21
Missouri	2 168 380	14,054	14,801	14
Indiana	1 978 301	12,822	13,504	13
Massachusetts	1 783 085	11,557	12,171	12
Kentucky	1 648 690	10,686	11,254	11
Michigan	1 636 937	10,610	11,174	11
Iowa	1 624 615	10,530	11,090	11
Texas	1 591 749	10,317	10,865	10
Tennesse	1 542 359	9,997	10,528	10
Georgia	1 542 180	9,996	10,527	10
Virginia	1 512 565	9,804	10,325	10
North Carolina	1 399 750	9,072	9,555	9
Wisconsin	1 315 497	8,526	8,980	8
Alabama	1 262 505	8,183	8,618	8
Mississippi	1 131 597	7,334	7,724	7
New Jersey	1 131 116	7,331	7,721	7
Kansas	996 096	6,456	6,799	6
South Carolina	995 577	6,453	6,796	6
Louisiana	939 946	6,092	6,416	6
Maryland	934 943	6,060	6,382	6
California	864 694	5,605	5,902	5
Arkansas	802 525	5,202	5,478	5
Minnesota	780 773	5,061	5,330	5
Maine	648 936	4,206	4,430	4
Connecticut	622 700	4,036	4,251	4
West Virginia	618 457	4,009	4,222	4
Nebraska	452 402	2,932	3,088	3
New Hampshire	346 991	2,249	2,369	2
Vermont	332 286	2,154	2,268	2
Rhode Island	276 531	1,792	1,888	1
Florida	269 493	1,747	1,840	1
Colorado	194 327	1,260	1,326	1
Oregon	174 768	1,133	1,193	1
Delaware	146 608	0,950	1,001	1
Nevada	622 66	0,404	0,425	1 a)
Total	49 371 340	320		320

Tabela 10.16: Aplicação do método de Jefferson aos dados de 1880.

Nota: a) Todos os estados garantem, pelo menos, um lugar na Câmara.

Acabou por adoptar-se, em 1880, o número trezentos e vinte e cinco como o total de representantes. Não foi especificado o método a usar pois o valor escolhido proporcionava distribuições coincidentes mediante o uso dos métodos de Webster e Hamilton. Assim, o método de Hamilton (ou Vinton) manteve-se legalmente em vigor com o acordo tácito de encontrar um número total de representantes de modo a que os métodos de Webster e Hamilton produzissem os mesmos resultados.

Mas no início do século XX, o método de Hamilton perturbou de tal modo o Congresso que deixou de ser possível aceitá-lo. Em 1901 foi novamente elaborado um documento descrevendo todas as distribuições obtidas com o método de Hamilton variando o número de lugares na Câmara dos Representantes entre trezentos e cinquenta e quatrocentos. O estado de Maine oscilava entre três e quatro representantes, Colorado obteria três lugares à excepção da possibilidade de o total ser trezentos e cinquenta e sete, o que lhe atribuiria apenas dois lugares; estas irregularidades repetiam-se para vários outros estados.

Tornou-se inaceitável continuar com o método de Hamilton como legalmente adoptado: três décadas após o fenómeno de Alabama, o método de Hamilton foi banido. Foi, então, utilizado o método de Webster para a distribuição dos lugares na Câmara dos Representantes, o total foi fixado em trezentos e oitenta e seis pois este valor não provocaria a perda de poder de nenhum estado. Esta não foi a primeira vez que o Congresso rejeitou um método: já havia abandonado o método de Jefferson como resultado do seu favorecimento sistemático aos estados mais populosos.

O Congresso identificou o paradoxo de Alabama no seguimento de alterações no número de lugares na Câmara dos Representantes, mas deixou passar despercebido um paradoxo ainda mais grave do método de Hamilton que ocorre quando se dão mudanças na população. É de esperar que o número de representantes atribuído aos diferentes estados acompanhe as flutuações populacionais, ou seja, se em determinado período de tempo o estado A tiver maior crescimento populacional que o estado B, será absurdo admitir que A perca lugares para B. Mas isto pode acontecer no método de Hamilton, tal verificou-se na aplicação do método aos dados dos diversos censos.

Suponha-se que, para melhor acompanhar as alterações na população, se faz a distribuição dos lugares para a Câmara dos Representantes anualmente; deste modo, interpolam-se os valores para obter, por exemplo, os valores de 1901. Em 1900 o método de Hamilton atribuía dez lugares ao estado da Virginia e três ao Maine, enquanto que em 1901 daria nove lugares a Virginia e quatro ao Maine, isto apesar da população da Virginia crescer mais rapidamente que a do Maine. De facto, em 1900 a população da Virginia era de 1 854 184, o que comparativamente com a do Maine, 694 466, era 2,67 vezes maior; em 1901 os respectivos valores eram de 1 873 951 para 699 114, ou seja, a população da Virginia era 2,68 vezes maior que a do Maine, e, no entanto, perdeu um representante!

A este paradoxo dá-se o nome de paradoxo da população; é simples perceber por que razão acontece. Em 1900 a quota da Virginia, nos trezentos e oitenta e seis lugares, era de 9,599, valor que o método de Hamilton arredondava por excesso; enquanto que a quota do Maine, 3,595, foi aproximada por defeito. Virginia crescia a uma taxa de 1,07% por ano e Maine 0,67%, enquanto que a média dos Estados Unidos era de 2,02% de crescimento populacional por ano. Isto implica que em 1901 as quotas dos dois estados, Maine e Virginia, tenham decrescido para 9,509 e 3,548, respectivamente. Em termos absolutos, a quota de Virginia teve um decréscimo mais acentuado porque tinha maior valor absoluto, isto provocou que, apesar de Virginia ter um maior crescimento comparativamente com o Maine, os dois estados tenham trocado de posições aquando da atribuição dos lugares adicionais do método de Hamilton.

O paradoxo da população viola a ideia fundamental de que alterações nas populações são fielmente reflectidas na distribuição dos lugares. Entre 1900 e 1901, o estado da Virginia crescia mais depressa que o Maine, no entanto o método de Hamilton transforma esta situação na atribuição de um lugar adicional ao Maine, retirando-o a Virginia. Este facto torna a utilização do método de Hamilton duvidosa, mas existe ainda uma outra possibilidade de problema que pode ocorrer quando se adiciona um novo estado.

Oklahoma tornou-se estado em 1907. Antes da sua entrada, fruto do censo de 1900, o número de lugares na Câmara dos Representantes era de trezentos e oitenta e seis, com um valor populacional global de 74 562 608, ou seja, cada membro representava 193 167 pessoas. Na altura, Oklahoma tinha, aproximadamente, um milhão de habitantes, pelo que devia ter direito a cinco representantes. De facto, ao entrar para a Câmara dos Representantes fê-lo com cinco lugares elevando o total para trezentos e noventa e um membros. Seria de esperar que a anterior distribuição dos trezentos e oitenta e seis lugares mais os recentes cinco de Oklahoma coincidisse com a distribuição directa de trezentos e noventa e um lugares, mas de acordo com o método de Hamilton tal não acontece. Ao distribuir os trezentos e noventa e um lugares, Oklahoma terá cinco lugares, Maine quatro e New York trinta e sete. Mas antes da entrada de Oklahoma, com os trezentos e oitenta e seis lugares, New York teria trinta e oito e Maine apenas com três. Ou seja, ao adicionar o novo estado de Oklahoma e o número de lugares a que proporcionalmente teria direito, o método de Hamilton provoca alterações nos lugares de estados que já faziam parte da Câmara dos Representantes, apesar de não haver qualquer alteração nas suas populações. Este é o paradoxo do novo estado, e ocorre pela mesma razão que o paradoxo da população. Quando Oklahoma entra na Câmara, as quotas dos restantes estados decrescem proporcionalmente um baixo valor. Mas em termos absolutos as quotas dos estados mais populosos diminuem mais depressa que as de estados menores, pelo que, podem ser invertidas as suas posições aquando da distribuição dos lugares adicionais de Hamilton.

Em qualquer dos três paradoxos a explicação reside na forma como o método de Hamilton determina a prioridade sob a qual se atribuem os lugares adicionais. O uso das partes decimais não tem raiz na proporcionalidade, uma vez que a dimensão relativa dos estados é ignorada. Intuitivamente, o veto do Presidente Washington e a ascensão do método de Jefferson em 1792 foram correctas. O desafio de encontrar um método proporcional continua assim patente na vida dos políticos norte-americanos.

No século XX a escolha de um método de partilha ocupou, não só os membros do Congresso, como também diversas comunidades científicas e académicas. O cerne dos estudos era o tratamento a dar aos estados menos populosos em comparação com os maiores, isto pois ganhavam importância os movimentos populacionais das áreas agrícolas para as cidades, levando a que os estados mais rurais se sentissem preocupados. Estes factos eram de tal forma evidentes na década de vinte, que os estados rurais acabaram por conseguir impedir qualquer distribuição de lugares na Câmara por mais de uma década. As desigualdades entre estados fortes e fracos, no que concerne à distribuição dos representantes, tornaram-se um assunto de interesse nacional.

Pela primeira vez os métodos proporcionais foram abordados como uma questão matemática. O impulso para este tratamento veio do próprio Census Office que envolveu, a partir de 1899, investigadores de universidades conceituadas nos seus estudos. Uma destas personalidades foi Walter Willcox[25], um pioneiro no estudo da opinião pública mediante a aplicação da estatística a áreas como demografia, saúde pública ou direito.

Em 1910, Wilcox tornou-se o primeiro estudioso integralmente dedicado às questões dos métodos proporcionais. Concluiu, com base em exemplos e em debates do Congresso, que o método de Webster – que ele apelidava de "método das maiores fracções" – era a abordagem correcta. Da apresentação do seu trabalho faziam parte tabelas com a aplicação do método de Webster aos dados do censo de 1910, variando os lugares da Câmara entre trezentos e noventa e quatrocentos e quarenta. Foi com base nestas tabelas que o Congresso determinou, em 1911, o número quatrocentos e trinta e três para o total de representantes, pois este valor prevenia que qualquer estado perdesse lugares. Deste modo, o método de Webster foi indubitavelmente

[25] Walter Francis Willcox (1861-1964). Estatístico norte-americano, foi presidente da American Statistical Association e da American Economic Association.

adoptado, eliminando finalmente o método de Hamilton (ou Vinton) da mente dos políticos norte-americanos.

Entretanto um outro método havia sido desenvolvido. Numa carta ao presidente da House Committee do Census, Joseph A. Hill[26], chefe estatístico da Division of Revision and Results do Bureau of Census, descreveu uma nova abordagem apresentando tabelas com a sua aplicação para os mesmos valores que Willcox havia feito (variando os lugares entre trezentos e noventa e quatrocentos e quarenta).

Pode definir-se o método de Hill como o autor o fez: fixe-se o número de lugares a preencher; atribua-se a cada estado o número de lugares de modo a que nenhuma transferência de lugares entre os estados reduza a diferença percentual na representação entre eles.

A subtileza do método de Hill torna-se evidente ao compará-lo com o método de Dean relativamente aos dados do censo de 1910 para quatrocentos e vinte e cinco lugares.

[26] Joseph Adna Hill (1860-1938). Estatístico norte-americano, foi chefe do United States Census Bureau.

Estado	População	Quota (com 425)	Distribuição pelo método de Dean	Distribuição pelo método de Hill
New York	9 108 934	42,508	42	€42
Pennsylvania	7 665 111	35,770	35	35
Illinois	5 638 591	26,313	26	26
Ohio	4 767 121	22,246	22	22
Texas	3 896 542	18,184	18	18
Massachusetts	3 366 416	15,710	15	16
Missouri	3 293 335	15,369	15	15
Michigan	2 810 173	13,114	13	13
Indiana	2 700 876	12,604	12	12
Georgia	2 609 121	12,176	12	12
New Jersey	2 537 167	11,840	12	12
California	2 376 561	11,091	11	11
Wisconsin	2 332 853	10,887	11	11
Kentucky	2 289 905	10,686	11	11
Iowa	2 224 771	10,382	10	10
North Carolina	2 206 287	10,296	10	10
Tennessee	2 184 789	10,196	10	10
Alabama	2 138 093	9,978	10	10
Minnesota	2 074 376	9,680	10	10
Virginia	2 061 612	9,621	10	10
Mississippi	1 797 114	8,386	8	8
Kansas	1 690 949	7,891	8	8
Oklahoma	1 657 155	7,733	8	8
Louisiana	1 656 388	7,730	8	8
Arkansas	1 574 449	7,347	7	7
South Carolina	1 515 400	7,072	7	7
Maryland	1 295 346	6,045	6	6
West Virginia	1 221 119	5,699	6	6
Nebraska	1 192 214	5,564	6	6
Washington	1 140 134	5,321	5	5
Connecticut	1 114 756	5,202	5	5
Colorado	798 572	3,727	4	4
Florida	752 619	3,512	4	3
Maine	742 371	3,464	3	3
Oregon	672 765	3,140	3	3
Souh Dakota	575 676	2,686	3	3
North Dakota	574 403	2,681	3	3
Rhode Island	542 610	2,532	3	3
New Hampshire	430 572	2,009	2	2
Utah	371 864	1,735	2	2
Montana	366 338	1,710	2	2
Vermont	355 956	1,661	2	2
Idaho	323 440	1,509	2	2
Delaware	202 322	0,944	1 a)	1 a)
Wyoming	144 658	0,675	1 a)	1 a)
Nevada	80 293	0,375	1 a)	1 a)
Total	91 072 117	425	425	425

Tabela 10.17: Aplicação dos métodos de Dean e Hill aos dados de 1910 para 425 lugares.

Nota: a) Todos os estados garantem, pelo menos, um lugar na Câmara.

Os dois métodos diferem em dois estados: Massachusetts e Florida. Pelo método de Dean a Florida está em vantagem relativamente ao Massachusetts:

Estado	População	Quota	Quociente por 217 500	Quociente por excesso	Quociente por defeito	Distribuição segundo o método de Dean
Massachusetts	3 366 416	15,710	15,478	210 401 a)	224 428 b)	15 c)
Florida	752 619	3,512	3,460	188 155	250 873	4

Tabela 10.18. Notas: a) 3 366 416 ÷ 16 = 210 401; b) 3 366 416 ÷ 15 ≈ 224 428; c) O valor a atribuir é 15 pois 224 428 é o valor mais próximo de 217 500, logo atribuir-se-ão a este estado 15 representantes, o divisor que permite obter 224 428.

Vê-se assim que Massachusetts tem um representante por cada 224 428 habitantes, ao passo que para a Florida este valor é de 188 155; a razão entre estes valores é de 1,193, donde pode dizer-se que a Florida é 19,3% melhor representada que o Massachusetts. Suponha-se que é retirado um lugar à Florida e atribuído ao Massachusetts, deste modo tem-se 3 366 416 ÷ 16 = 210 401 pessoas por representante no Massachusetts e 752 619 ÷ 3 = 250 873 pessoas na Florida. Em termos percentuais isto significa que o Massachusetts é 19,2% melhor representado que a Florida. Assim, perante Hill, esta opção é preferível relativamente à distribuição de Dean, donde a distribuição proposta será Massachusetts dezasseis e Florida três representantes.

Em comparação com o método de Dean, pode dizer-se que o método de Hill favorece os estados mais populosos. Mas é Dean que minimiza as desigualdades entre estados nos casos em que se mede em termos de diferença absoluta entre o número de pessoas por representante. Isto porque o método de Dean determina um divisor x que provoca uma distribuição de lugares de modo a que o número de pessoas por representante seja o mais próximo possível de x. Neste contexto, uma transferência de lugares entre estados afastaria o número de pessoas por representante do valor de x, aumentando desse modo a diferença absoluta. Contrariamente, o método de Hill usa a diferença relativa para medir as desigualdades entre os estados. Esta analogia sugere uma forma prática de aplicar o método de Hill: encontrar um divisor x que permita atribuir os lugares de modo a que o número médio de pessoas por representante seja o mais próximo possível de x em termos relativos.

Em 1921, Edward Huntington[27], professor de mecânica e matemática em Harvard (onde havia sido também colega de Hill, quando ambos eram alunos), dedicou algum do seu tempo aos métodos de partilha, sob a alçada do Bureau of the Census. Restabeleceu, nesta altura, o contacto com Hill, ficando a conhecer as suas ideias de minimização das diferenças relativas no número de representantes dos diversos pares de estados. Huntington acabou, inclusivamente, por aperfeiçoar o método de Hill designando-o "método de iguais proporções".

Entre 1910 e 1920 foram criados dois novos estados, Arizona e New Mexico, entrando cada um com um representante, o que elevou o número total para quatrocentos e trinta e cinco lugares. Considerando o que se havia passado em 1900 e 1910, tudo indicava que a distribuição dos lugares em 1920 fosse feita com base no método de Webster. Mas Huntington estava determinado a impor o seu método, e, apoiado por outros académicos da área da estatística, entregou ao presidente do House Committee on the Census a distribuição dos quatrocentos e trinta e cinco lugares de acordo com os dados de 1920. Esta proposta diferia da aplicada com o método de Webster em seis estados:

Estado	População	Quota	Distribuição de Hill	Número de representantes por milhão de pessoas	Distribuição de Webster	Número de representantes por milhão de pessoas
New York	10 380 589	42,919	42	4,046	43	4,142
North Carolina	2 559 123	10,581	10	3,908	11	4,298
Virginia	2 309 187	9,547	9	3,897	10	4,331
Rhode Island	604 397	2,499	3	4,964	2	3,309
New Mexico	353 428	1,461	2	5,659	1	2,829
Vermont	352 428	1,457	2	5,675	1	2,837
Total E. U. A.	105 210 729	435	435		435	

Tabela 10.19: Diferenças entre os métodos de Webster e Hill mediante os dados de 1920.

Uma leitura desta tabela sugere que o método de Hill tende a favorecer os estados menos povoados, uma vez que lhes atribui mais lugares que o método de Webster. Este facto é consequência do conceito da diferença relativa, que acaba por atribuir maior peso às partes decimais dos estados mais pequenos em detrimento dos maiores. A ideia que subjaz a este procedimento parece fazer sentido, mas será realmente justo? A verdade é que, ao olhar para os valores das quotas, o método de Webster parece mais equilibrado.

[27] Edward Vermilye Huntigton (1874-1952). Norte-americano, professor de mecânica e matemática em Harvard. Foi presidente da Mathematical Association of America e da American Association for the Advancement of Science e vice-presidente da American Mathematical Society.

Mas os acontecimentos tomaram outro rumo. Antes da recepção da proposta de Huntington, a House Committee havia sugerido uma distribuição de quatrocentos e oitenta e três usando o método de Webster; este número foi escolhido por impedir a perda de qualquer lugar pelos estados, mas esta ideia não passou no Senado. Esta foi apenas a primeira de muitas propostas, a respeito do censo de 1920, que não teve qualquer seguimento. Em violação da Constituição dos Estados Unidos, acabou por não se realizar a distribuição de acordo com os dados do censo de 1920, mantendo-se a distribuição dos lugares na Câmara dos Representantes definida em 1911.

A não utilização dos dados de 1920 ficou a dever-se à disparidade do aumento da população nos estados mais urbanos por oposição com a perda de habitantes dos estados rurais, provocada por factores como a Primeira Guerra Mundial e a industrialização. Verificou-se, em 1920, que a população dos Estados Unidos havia aumentado em catorze milhões de pessoas, sendo que a população rural havia decrescido cinco milhões e as grandes cidades absorveram dezanove milhões de habitantes. Mas os estados rurais tinham poder no Senado, de modo que, sob os argumentos de que os êxodos populacionais se haviam dado como consequência da guerra, e que os censos teriam tido lugar no Inverno, altura em que muitos partiam para zonas mais temperadas, acabaram por determinar que não houvesse qualquer distribuição em 1920.

Durante esta pausa na distribuição dos lugares na Câmara, a controvérsia sobre o método a usar manteve-se, os protagonistas foram Willcox e Huntington. Willcox defendia o método de Webster como o mais natural, e aquele que não tendia a favorecer os estados mais povoados nem os menos povoados, dizia que, por oposição, o método de Hill favorecia os estados menores. Huntington defendia veementemente que o método de Hill, ao contrário de Webster, era verdadeiramente natural e imparcial.

Numa distribuição ideal, o número de pessoas por representante seria o mesmo para todos os estados, e a razão entre as populações de quaisquer dois estados seria a mesma que a razão entre o seu número de representantes, entre outras igualdades que poderiam ser enunciadas. Mas na prática esta situação não se verifica, donde a tarefa de aproximar dela tanto quanto possível. O objectivo será distribuir os lugares pelos diversos estados, de modo a que qualquer transferência de lugares entre dois intervenientes aumente a disparidade entre eles. Pode dizer-se que uma boa distribuição é aquela que não pode ser melhorada pela transferência de representantes. A questão será como medir esta "disparidade" entre estados.

Hill propõe a diferença relativa entre o número médio de pessoas por representante de cada estado como a medida mais apropriada para quantificar a disparidade entre estados. Dean prefere a utilização do valor absoluto do número médio de pessoas por representante.

O argumento central para Huntington na defesa do método de Hill foi o facto deste método (e não o de Webster) ser o único imparcial no tratamento de pequenos e grandes estados. Chegou a esta conclusão mediante a seguinte linha de raciocínio. Dos cinco métodos, o de Adams claramente favorece os estados menos povoados, ao passo que Jefferson se inclinava a favor dos estados mais fortes. Dos restantes três, o método de Dean beneficia os menores mais do que o método de Hill, e o método de Webster tende a ajudar os estados mais povoados. Assim, conclui Huntington, o método de Hill não apresenta qualquer tipo de inclinação: é imparcial.

Walter Wilcox não concordava com Huntington e publicou nos anos de 1927 e 1928 vários artigos que defendiam a utilização do método de Webster. Willcox não era matemático, era um estudioso dos fenómenos sociais; acreditava que o Congresso pautava a sua decisão a respeito de um método pelos representantes que este produzia. Assim, Willcox elaborou tabelas e esquemas em que mostrava como os estados menos povoados, os medianos e os maiores, se comportavam individualmente e em grupos, mediante a aplicação de cada um dos cinco métodos. Concluiu que, tendo como objectivo o equilíbrio entre estados fortes e estados mais fracos, o método que melhor cumpre este papel é o método de Webster.

Naturalmente, os membros do Congresso sentiram-se incomodados e confusos com todos estes argumentos contraditórios. Deste modo, foi nomeado, a pedido do Presidente da Câmara dos Representantes, Nicholas Longworth, um comité de quatro matemáticos da Nacional Academy of Sciences para estudar este problema (a saber, G. A. Bliss, E. W. Brown, L. P. Eisenhart, Raymond Pearl). Este comité analisou os cinco métodos que evitavam o paradoxo de Alabama, e concluiu que os métodos de Dean e Webster se situam simetricamente na ordenação, não existindo uma justificação matemática para escolher um deles. Uma simetria semelhante existe também para Adams e Jefferson, que mostram maiores discrepâncias que qualquer um dos outros métodos. Assim sendo, o comité concluiu que método o de Hill seria o mais justo, uma vez que é neutro no que diz respeito ao favorecimento aos estados maiores ou mais pequenos e utiliza as diferenças relativas para o estudo do número de pessoas por representante.

Paralelamente a esta monumental discussão académica, o número de lugares detido por cada um dos estados na Câmara dos Representantes manteve-se o que havia sido determinado pelo censo de 1910. Todas as tentativas de efectuar uma redistribuição dos lugares em 1920 falharam. À medida que os anos passavam era mais notória a preocupação de todos, expressa, quer pelos políticos, quer pela imprensa: como o censo de 1930 mostraria uma ainda maior perda de lugares para os estados rurais, a distribuição dos lugares na Câmara seria ainda mais difícil.

O homem que assumiu a tarefa de rectificar esta situação foi o senador Arthur H. Vandenberg, do Michigan. A sua primeira batalha no Congresso foi pela adopção de legislação permanente sobre a distribuição dos lugares, de modo a evitar as situações deploráveis que vinham acontecendo. Na primavera de 1929, Vandenberg introduziu uma proposta no Senado que permitiria uma automática redistribuição dos lugares na Câmara se o Congresso não agisse em determinado período de tempo. Cabia ao Presidente transmitir ao Congresso uma distribuição do número de lugares existentes de acordo com o método utilizado na distribuição anterior – o método de Webster.

No verão de 1929 foi finalmente aprovada legislação no âmbito da distribuição proporcional dos lugares na Câmara dos Representantes. A lei previa que o Presidente enviasse ao Congresso os dados do censo relativos à população de cada estado, bem como a distribuição do número de representantes usando o método adoptado na distribuição anterior, neste caso os métodos de Webster e Hill. Se o Congresso, após a recepção da comunicação, não implementasse a distribuição dos lugares, então esta far-se-ia de acordo com o último método usado. Mas com os dados de 1930 os métodos de Webster e Hill produziam a mesma distribuição, pelo que não houve controvérsia.

Dez anos mais tarde os números não foram tão condescendentes para com os norte-americanos. Em Janeiro de 1941 o Presidente Franklin D. Roosevelt enviou ao Congresso as distribuições dos métodos de Webster e Hill de acordo com os dados do censo de 1940. As duas opções divergiam apenas em relação a dois estados: Arkansas e Michigan; Webster atribuía seis e dezoito representantes respectivamente, enquanto que Hill determinava sete e dezassete (as quotas destes estados eram de 6,473 para o Arkansas e 17,453 para o Michigan). Neste momento Roosevelt tomou uma decisão política. Arkansas era um estado fundamentalmente Democrata e Michigan Republicano, num momento em que as cores do Congresso se inclinavam para o lado dos Democratas, partido que havia também elegido o Presidente, foi aprovada uma lei que reconhecia o método de Hill como oficialmente adoptado para a distribuição dos lugares na Câmara dos Representantes.

Périplo pelos diversos métodos

A História proporciona uma valiosa colecção de receitas para resolver problemas com ingredientes extremamente simples: uma câmara a ser preenchida proporcionalmente em função da população de cada estado. Cada um dos métodos históricos baseia-se numa fórmula precisa, e proporciona um determinado resultado. Mas qual corresponderá mais fielmente ao ideal de proporcionalidade?

Vejam-se os sete métodos que encontrados no percurso histórico percorrido: Hamilton, Lowndes, Jefferson, Adams, Dean, Webster e Hill. Serão os únicos, ou apenas a ponta do iceberg? Esta é uma questão complicada pois certas fórmulas e procedimentos parecem diferentes mas na realidade produzem os mesmos resultados, ou seja, são o mesmo método (o método de Jefferson foi redescoberto numa forma diferente por d'Hondt[28] em 1878; o método de Webster foi proposto de modo independente por Sainte-Lagüe em 1910, num registo diferente).

Ao estudar as ferramentas que permitem compreender os métodos históricos como variações de formas de cálculo, tornar-se-á evidente que existe uma infinidade de possíveis métodos. Uma categoria inclui os métodos de Hamilton e Lowndes, e uma segunda categoria contém os chamados métodos de divisor, que abarca os restantes cinco métodos.

Os métodos tipo Hamilton tomam a quota como factor central. Começam por determinar a quota de cada estado e atribuir a sua parte inteira como valor mínimo de representantes a receber por aquele estado. Os lugares que, eventualmente, fiquem em falta são distribuídos pelos estados de acordo com uma lista ordenada em função de um critério previamente definido. O método de Hamilton prevê que as quotas sejam ordenadas de forma decrescente usando as suas partes decimais. Por outro lado, Lowndes sugere que a ordenação seja feita de modo decrescente, mas com base no número médio de pessoas por representante, ou seja, dividindo o valor populacional de cada estado pela parte inteira da sua quota e ordenando decrescentemente estes valores. Num método tipo Hamilton é usual atribuir um representante a cada estado que tenha quota inferior a um.

A lógica deste tipo de método é evidente: garante que o resultado não viola a regra da quota, uma vez que cada estado obtém um número de representantes igual ao valor da quota arredondado às unidades por defeito ou por excesso. É evidente que pode construir-se um infindável número de métodos que não violem a regra da quota. Por exemplo, podem distribuir-se os lugares em falta em função dos valores do quociente entre as partes decimais da quota e o valor da quota, ou o valor da quota arredondado por defeito ou por excesso, tudo o que a

[28] Victor D'Hondt (1841-1901). Jurista belga e professor de Direito Civil na Ghent University.

imaginação permita. Coloca-se então a questão: destas inúmeras variações, quais as que melhor correspondem à intenção de distribuir de acordo com os valores populacionais?

Uma segunda grande categoria de métodos é baseada num divisor comum; os métodos de Jefferson, Webster e Adams são exemplos de métodos de divisor. A ideia fundamental é escolher uma razão de população para representantes e dividir os valores das populações por esta razão, ou divisor, de modo a obter quocientes. Os quocientes são arredondados por defeito ou por excesso para um número inteiro relativamente próximo, de acordo com uma regra particular que varia consoante o método em uso. Os números inteiros assim encontrados devem totalizar, após somados, o número de lugares a preencher (caso isto não aconteça há que ajustar o divisor, aumentando-o ou diminuindo-o conforme as situações, num processo de procura por tentativa e erro).

O que distingue estes métodos é o tratamento a dar às partes decimais. Jefferson sugere que sejam eliminadas, Adams propõe que sejam arredondadas por excesso às unidades, e Webster propõe que o arredondamento se processe de forma convencional: por defeito se a parte decimal for inferior a 0,5 e por excesso caso contrário. Os métodos de Hill e Dean são, na realidade, métodos de divisor, mas o critério que decide a aproximação a efectuar às partes decimais é um pouco mais complicado.

Recorde-se que o método de Dean prevê a escolha de um divisor comum, x, e a atribuição a cada estado do número de lugares que melhor aproxima o seu número médio de pessoas por representante do valor de x. O mesmo resultado pode ser obtido dividindo a população de cada estado por x e atribuindo a cada estado o quociente arredondado por excesso ou por defeito, consoante ultrapasse, ou não, a média harmónica dos dois valores em análise. Recorde-se que a média harmónica entre dois números x e y é $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$, em particular, se x e y forem inteiros consecutivos, digamos a e $a+1$, vem: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}}=\frac{2}{\frac{a+1+a}{a(a+1)}}=\frac{2a(a+1)}{2a+1}=\frac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}}$. Pelo método de Dean, um estado com população p recebe $a+1$ lugares se $x-\frac{p}{a+1}<\frac{p}{a}-x$, ou seja, se o divisor x e o quociente entre o valor da população e o número de lugares a atribuir estiverem mais próximos do que o divisor x e o quociente entre o valor da população e o valor alternativo para o número de lugares a conceder (recorde-se que estas duas possibilidades de valores para o número de lugares a atribuir são números inteiros consecutivos, uma vez que correspondem a arredondamentos por defeito e por excesso de um quociente inicialmente determinado – o do valor da população do estado pelo divisor x).

A desigualdade acima é equivalente a $\frac{p}{x} > \frac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}}$:

$$x - \frac{p}{a+1} < \frac{p}{a} - x \Leftrightarrow 2x < \frac{p}{a} + \frac{p}{a+1} \Leftrightarrow 2x < \frac{p(a+1)+ap}{a(a+1)} \Leftrightarrow \frac{2x}{p} < \frac{2a+1}{a(a+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{p} < \frac{a+\frac{1}{2}}{a(a+1)} \Leftrightarrow \frac{p}{x} > \frac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}}.$$

Facilmente se verifica que a média harmónica de quaisquer dois números consecutivos é sempre inferior à sua média aritmética, pois: $\frac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}} < \frac{a+(a+1)}{2}$

$$\Leftrightarrow a^2 + a < \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 + a < a^2 + a + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{4}$$, condição universal.

Deste modo, constata-se que o método de Dean é um método de divisor, sendo que aproxima o valor dos quocientes por defeito ou por excesso consoante fique abaixo ou acima da média harmónica dos números inteiros entre os quais se enquadra. Naturalmente, o divisor x terá de ser ajustado (por tentativa e erro), de modo a que o total dos lugares com ele encontrados perfaça o número a distribuir.

O método de Hill é também um método de divisor. A formulação original deste método envolve minimizar as diferenças relativas entre o número médio de pessoas por representante entre cada dois estados. O mesmo objectivo pode ser alcançado introduzindo um divisor x e atribuindo a cada estado o número de lugares que melhor aproxime, em termos relativos, o número médio de pessoas por representante do divisor x. Um modo de efectuar tais cálculos é dividir cada valor populacional por x, sendo a cada estado atribuído o valor deste quociente aproximado por excesso ou por defeito, dependendo de o quociente exceder, ou não, a média geométrica dos dois valores em causa. Recorde-se que a média geométrica de dois números x e y é $\sqrt{xy}$.

Pelo método de Hill, um estado com população p recebe pelo menos $a+1$ lugares se $\dfrac{x}{\frac{p}{a+1}} < \dfrac{\frac{p}{a}}{x}$, o que é equivalente a $\dfrac{p}{x} > \sqrt{a(a+1)}$, veja-se: $\dfrac{x}{\frac{p}{a+1}} < \dfrac{\frac{p}{a}}{x} \Leftrightarrow x^2 < \dfrac{p^2}{a(a+1)}$ $\Leftrightarrow \dfrac{x}{p} < \sqrt{\dfrac{1}{a(a+1)}} \Leftrightarrow \dfrac{p}{x} > \sqrt{a(a+1)}$.

Verifica-se que a média geométrica de dois números consecutivos está compreendida entre a média harmónica e a média aritmética, o que implica que um divisor para o método de Hill esteja compreendido entre os divisores de Dean e Webster. Veja-se que $\dfrac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}} < \sqrt{a(a+1)} < \dfrac{a+(a+1)}{2}$. A primeira desigualdade implica (uma vez que $a > 1$): $\dfrac{a^2(a+1)^2}{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2} < a(a+1) \Leftrightarrow a(a+1) < \left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 + a < a^2 + a + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{4}$, condição universal. A segunda desigualdade, uma vez que também se verifica $a > 1$, implica que: $a(a+1) < \dfrac{(2a+1)^2}{4} \Leftrightarrow 4a^2 + 4a < 4a^2 + 4a + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$, condição universal.

Conclui-se, assim, que estes cinco métodos históricos – Adams, Dean, Hill, Webster e Jefferson – são todos do mesmo tipo, embora para alguns a descrição que por vezes é feita levasse, inicialmente, a pensar o contrário. Em cada um dos métodos os valores das populações são divididos por um divisor comum, de modo a determinar um quociente para cada estado. A diferença entre eles reside na regra utilizada para determinar se o tal quociente é arredondado às unidades por defeito ou por excesso – qualquer método nestas condições diz-se um método de divisor.

Cada método de divisor usa um ponto de viragem diferente, sendo ponto de viragem entendido como o valor que serve de fronteira ao arredondamento por defeito ou por excesso dos quocientes. Para melhor perceber o que se passa, imagine-se que o quociente a analisar se situa entre 2 e 3. Para o método de Adams o ponto de viragem situa-se imediatamente à direita de 2, tão próximo quanto se queira, pois este método determina o arredondamento por excesso, logo, qualquer valor superior a 2, por muito próximo que esteja de 2, será arredondado para 3.

Para Dean, o ponto de viragem é $\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=2,4$ (a média harmónica entre 2 e 3); no método de Hill o ponto que determina o arredondamento a efectuar é $\sqrt{2\times 3}=\sqrt{6}\approx 2,449$ (a média geométrica entre 2 e 3); Webster utiliza a média aritmética, pelo que o ponto de viragem será $\frac{2+3}{2}=2,5$. Por último, nesta sequência, vem o método de Jefferson, que, ao usar o arredondamento por defeito, terá o seu ponto de viragem tão próximo de 3 quanto se queira. Podem, então, ordenar-se os valores dos pontos de viragem dos métodos de forma crescente: Adams, Dean, Hill, Webster e Jefferson.

Com esta linha de raciocínio facilmente se compreende que existe uma infinidade de métodos de divisor, basta encontrar novos pontos de viragem. Uma alternativa foi proposta por Condorcet em 1792: usar a dízima 0,400 como ponto de viragem. Também o número de ouro pode ser usado, designando o método como método de ouro. Considerando que a parte decimal do número de ouro é, aproximadamente, 0,618, este método determina que o ponto de viragem seja 0,382 (1 – 0,618 = 0,382). Pode também definir-se o método do espelho de ouro que usa como ponto de viragem a própria dízima 0,618. Esta ideia de “espelhar” ou “reflectir” os métodos pode também ser feita para os métodos de Dean e Hill. Estará agora evidente que existem tantos métodos de divisor quantos a imaginação de cada um permita.

Uma outra categoria de métodos apela ao espírito jogador. Como exemplo construa-se uma roleta dividida em cinquenta partes, uma para cada estado, sendo a área de cada divisão exactamente proporcional à população do estado que representa. A ideia será rodar a roleta com uma pequena bola que acabará por parar numa das divisões: será nessa altura atribuído um lugar ao estado que a divisão representa. Repetindo este processo quatrocentas e trinta e cinco vezes encontra-se a distribuição dos lugares da Câmara dos Representantes. Este método não possui qualquer enviesamento, no sentido em que não tende a favorecer nenhum estado, ou grupo de estados, uma vez que se baseia na aleatoriedade.

Uma alternativa a esta última sugestão, que se revela mais equilibrada, será começar por atribuir a cada estado o número de representantes correspondente à parte inteira da sua quota e usar a roleta para a distribuição dos lugares adicionais (aqueles que não foram repartidos após a atribuição das partes inteiras das quotas).

Qual dos métodos será mais justo? Para responder a esta questão devem formular-se princípios que possam ser usados para avaliar os métodos. O percurso histórico estudado aponta tais princípios. Que métodos evitam os paradoxos da população, de Alabama e do novo estado? Que métodos respeitam a regra da quota? Que métodos não favorecem tendencialmente os estados mais povoados ou os mais fracos? Que métodos não incitam à separação de estados mais populosos noutros menores? Cada uma destas questões exemplifica um princípio da divisão proporcional. Foram repetidamente usadas ao longo da História para avaliar o mérito de propostas rivais. Pode dizer-se que estas questões orientam a busca por um método justo, que seja realmente proporcional.

Paradoxos

Olhem-se os métodos estudados até aqui mediante as propriedades que se consideram indispensáveis, ou as características que parecem inadmissíveis, como o paradoxo da população.

Uma distribuição de lugares perfeitamente proporcional aos valores populacionais seria a solução ideal. Embora se saiba que esta situação jamais será real, há que cumprir a tarefa de escolher o método cuja distribuição proporcionará a melhor aproximação possível entre as quotas dos estados e os números inteiros correspondentes aos lugares a atribuir. Claro que, quanto maior for o número de lugares a preencher, mais perto se ficará de atingir o ideal de proporcionalidade absoluta; no limite, ter-se-ia a situação de cada indivíduo ser um representante e assim verificar-se-ia a proporcionalidade directa na sua mais perfeita expressão.

Todos os métodos históricos estudados são sensíveis ao princípio elementar de aproximar, tanto quanto possível, a distribuição de lugares do ideal de proporcionalidade directa. Mas os métodos aleatórios, os que se baseiam em experiências aleatórias para a distribuição dos lugares, não agem deste modo. Sabe-se que se o número de experiências aleatórias for elevado, os resultados obtidos (as frequências relativas dos diversos acontecimentos) tendem a aproximar-se do "justo valor" (o valor da probabilidade de cada acontecimento). Mas com um número limitado e pequeno de experiências (o que acontece, por exemplo, para o valor quatrocentos e trinta e cinco), os resultados podem afastar-se muito do valor que seria considerado justo, ou seja, do valor da quota.

O problema da distribuição de lugares é uma questão de proporcionalidade, ou seja, o que verdadeiramente interessa é a dimensão relativa de um estado, e não a absoluta. Um estado com o triplo da população de outro deverá ter três vezes mais representantes, independentemente do valor absoluto das suas populações. Se o número de estados, e de lugares na Câmara dos Representantes, se tivesse mantido estável desde 1792 até à actualidade, e os estados tivessem a mesma taxa de crescimento, então não haveria necessidade de alterar a distribuição, uma vez que a dimensão relativa dos estados não se havia modificado.

Mas a realidade é bem diferente. O número de estados, de lugares e a taxa de crescimento populacional dos estados, alteraram-se bastante durante estes dois séculos, e continuarão a fazê-lo, pois é isso mesmo a evolução. Num sistema de representação proporcional é essencial uma resposta consistente às alterações populacionais: devem, a todo o custo, evitar-se os paradoxos como os encontrados com o método de Hamilton. Os paradoxos da população, de Alabama e do novo estado, ocorrem porque, ao atribuir os lugares que ficam em falta após a distribuição das partes inteiras das quotas, o uso de partes decimais das quotas para estabelecer uma ordenação não respeita a proporcionalidade directa, não reflecte a dimensão relativa dos estados.

Coloca-se a possibilidade do método de Hamilton poder ser alterado de modo a evitar os paradoxos. A proposta de Lowndes pode ser uma tentativa, mas a imaginação abre muitas outras possibilidades. Na realidade esta estratégia não trará frutos. O método de Hamilton, e qualquer variação que se possa conceber, são vítimas do paradoxo da população. Os autores Michel Balinski e Peyton Young[29] provam, na obra *Fair Representation – meeting the ideal of one man, one vote*, que, para evitar o paradoxo da população, é necessário usar um método de divisor.[30]

Teorema 10.1: Os métodos de divisor são os únicos métodos que evitam o paradoxo da população.

É fácil ver por que razão todos os métodos de divisor são imunes ao paradoxo da população. Suponha-se que um estado vê a sua população aumentar, em termos relativos, comparativamente a um outro estado, e que este estado com menor crescimento ganha um lugar adicional. Para que isto se tenha verificado o quociente deste estado tem de ultrapassar o ponto de viragem previsto no método adoptado. Mas como o primeiro estado, em termos relativos, teve um maior crescimento, então também ele aumentou o seu quociente, pelo que não é possível perder lugares. Assim, o paradoxo de população não pode ocorrer. Por que razão

[29] Michel Balinski. Matemático norte-americano. É *Directeur de Recherche* no Laboratoire d'Econométrie, em Paris Hobart Peyton Young. Matemático e economista norte-americano. Professor na University of Oxford.
[30] Todos os teoremas apresentados neste capítulo são encontrados na referida obra.

os métodos de divisor são os únicos que evitam o paradoxo não é óbvio. Mas há mais resultados a destacar.

Teorema 10.2: Todos os métodos de divisor evitam o paradoxo de Alabama.

Por outras palavras, todos os métodos que evitam o paradoxo da população também evitam o paradoxo de Alabama. Isto porque o número de pontos de viragem que um estado ultrapassa será o número de lugares a que tem direito; se o número total de lugares a distribuir aumentar então o divisor comum diminuirá. Com a diminuição do divisor, o quociente de cada estado aumenta, e cada vez que um quociente ultrapassar um ponto de viragem o seu estado terá mais um lugar. Como nenhum quociente pode diminuir, nenhum estado perderá lugares. Deste modo o paradoxo de Alabama não ocorrerá.

Existe também um resultado a respeito do paradoxo do novo estado.

Teorema 10.3: Todos os métodos de divisor evitam o paradoxo do novo estado.

Quando o divisor comum está determinado e fixo, o número de lugares a atribuir a cada estado pode ser determinado olhando apenas para o seu quociente. Assim, se alguns estados saírem da Câmara e levarem consigo os representantes a que teriam direito, os restantes estados manterão os valores dos quocientes, e desse modo o mesmo número de representantes.

Pode assim dizer-se que todos os métodos de divisor evitam o paradoxo da população e são os únicos que o fazem. Verifica-se, ainda, que este tipo de método evita também os paradoxos de Alabama e do novo estado. Deste modo, para eliminar situações paradoxais, há que optar por um método de divisor, apenas assim se garante a inexistência de paradoxos. A questão que se impõe será: quais dos possíveis métodos de divisor são mais próximos do ideal de distribuição proporcional de lugares?

Na História dos métodos proporcionais cedo se notou que alguns métodos – como o de Jefferson – tendiam a favorecer os estados mais povoados, enquanto outros – como o de Adams – aparentavam favorecer os mais pequenos. O uso do método de Jefferson foi banido dos Estados Unidos justamente pela sua tendência de favorecimento aos estados grandes. Ao assumir que os votos têm todos o mesmo valor, então o favorecimento sistemático não é admissível, uma vez que se estaria a assumir – por exemplo, mediante Jefferson – que os habitantes dos estados mais populosos têm maior peso nas decisões a tomar.

Mas existirá um método de divisão proporcional totalmente imparcial? A discussão entre Willcox e Huntington, que se arrastou durante duas décadas, acabou por dar como vencedor o método de Hill sobre o de Webster, embora o punho político tenha tido grande influência neste desfecho. Na realidade, do ponto de vista científico, a questão não foi satisfatoriamente respondida.

Mas o que se quer dizer, de facto, ao afirmar que um método é enviesado? Decerto pensa-se numa tendência sistemática de favorecimento a certos estados. Este favorecimento pode ser descrito em termos absolutos ou relativos. Um estado é favorecido em termos absolutos se obtiver um número de lugares superior à sua quota; um estado é favorecido em termos relativos se receber mais representantes per capita que os restantes. Na prática, qualquer distribuição de lugares favorece alguns estados em detrimento de outros, porque necessariamente alguns estados receberão mais do que as suas quotas, e outros menos. Também em termos práticos, perante dois quaisquer estados, não é expectável que tenham a mesma razão entre o número de representantes e o valor populacional, deste modo, perante qualquer par de estados, um deles será favorecido relativamente ao outro. Assim, considera-se que existe enviesamento num método quando é detectado um padrão sistemático de favorecimento.

Os dados históricos mostram que métodos, à primeira vista aceitáveis, podem esconder formas de enviesamento visíveis com determinados valores populacionais. Comparem-se, por exemplo, os métodos de Adams e Jefferson perante os dados do censo de 1970. Embora Jefferson tenda a favorecer os estados mais populosos e Adams os mais pequenos, não será sempre assim. Por exemplo, Indiana, o décimo primeiro maior estado, tem uma quota de 11,145 e recebe onze representantes de acordo com Jefferson, enquanto Nevada, o quarto menor estado, com 1,050 de quota vê Adams atribuir-lhe um lugar. No entanto, como balanço global, conclui-se que Jefferson favorece os estados mais fortes, não apenas comparativamente com Adams, mas em termos absolutos, assim como Adams favorece os estados menores também em termos absolutos. Para constatar isto mesmo, dividam-se os estados em três grupos aproximadamente equivalentes: os grandes, os médios e os pequenos. Os dezasseis menores estados têm uma quota global de 25,451; Adams atribui-lhes trinta e três lugares e Jefferson vinte e dois. A situação inverte-se ao analisar os dezasseis maiores estados: Jefferson determina-lhes trezentos e nove lugares e Adams duzentos e noventa e um, quando a sua quota é de 300,794.

Claro que os resultados de um só ano não provam que um método é enviesado, mas o exemplo de 1970, juntamente com a observação de outros anos, levantam fortes suspeitas.

Para mostrar que um método é enviesado é necessário encontrar uma tendência sistemática para favorecer os estados mais populosos ou os menores. Naturalmente, qualquer método absolutamente imparcial exibirá algum favorecimento em situações particulares, pois não é possível atingir uma situação de perfeita proporcionalidade. O que caracteriza um método enviesado é o facto de tender a favorecer os estados maiores ou menores após a análise de muitas situações práticas diversas; encontra-se aqui uma aplicação do âmbito da probabilidade e estatística – a lei dos grandes números. Com esta linha de raciocínio, é imediato que os métodos proporcionais baseados na aleatoriedade – como os da roleta – são absolutamente imparciais; claro que têm outras falhas que não são aceitáveis.

Num olhar aos dados proporcionados pelos censos norte-americanos, nas vinte e duas distribuições analisadas, o método de Jefferson favorece os estados mais populosos e o método de Adams inclina-se a favor dos estados menos populosos. Esta situação verifica-se mesmo fixando que qualquer estado, por menor que seja o seu valor populacional, detém pelo menos um representante. Perante os mesmos dados o método de Hill favorece os estados pequenos em dezasseis das vinte e duas distribuições e o método de Webster em doze das vinte e duas situações.

As estatísticas históricas ganham alguma relevância pois são temporalmente cumulativas. Os métodos de Dean e Hill parecem tender a favorecer os estados menores, enquanto que o método de Webster se aproxima do equilíbrio no tratamento de estados grandes e pequenos. De facto, em todos os vinte e dois conjuntos de dados o método de Webster seria aquele que produziria, de todos os cinco métodos, os menores desvios ou favorecimentos.

A experiência empírica sugere que dos cinco métodos históricos, o de Webster é o mais justo no tratamento dos estados mais fortes e mais fracos. Colocam-se então duas questões: será tal conclusão um incidente histórico, sendo que outros dados levariam a diferentes conclusões? E existirão outros métodos, ainda não discutidos, que levariam a resultados mais imparciais que os de Webster?

Para responder à segunda questão parece razoável restringir a procura aos métodos de divisor, uma vez que estes são os únicos livres de paradoxos. Ainda assim, apresenta-se uma infinidade de possibilidades. Mas o estudo do ponto de vista matemático mostra que de todos os métodos de divisor, o de Webster é o único imparcial.

Teorema 10.4: O método de Webster é o único método de divisor não enviesado.

Existe uma justificação intuitiva para este facto. Ao dividir a população de um estado por um divisor comum de modo a encontrar o seu quociente, a parte decimal do quociente terá uma probabilidade de ser superior a 0,5 igual à de ser inferior a 0,5. Isto é verdade independentemente da dimensão do estado. Como o método de Webster arredonda os quocientes usando 0,5 como ponto de viragem, será de esperar que provoque tantos arredondamentos por defeito como por excesso. Pelo contrário, outros métodos de divisor – como Dean e Hill – arredondam por excesso quocientes cuja parte decimal é inferior a 0,5, pelo que tendem a favorecer os estados menos povoados; outros, como Jefferson, arredondam por defeito qualquer quociente cuja parte decimal seja superior ou inferior a 0,5, pelo que favorecerá os estados mais povoados.

A conclusão do ponto de vista empírico coincide com os estudos matemáticos: o método de Webster é o único método de divisor não enviesado. Parece assim estranho que o método de Hill tenha sido adoptado nos Estados Unidos em 1941, em detrimento do método de Webster. Uma combinação peculiar de rivalidade profissional, erro científico e incidente político parecem ter decidido este assunto. Aparentemente, Huntington e os seus colegas matemáticos, ao defenderem o método de Hill ignoraram a possibilidade de outros métodos de divisor. Este caso teria sido facilmente rectificado comparando os dados históricos mediante os restantes métodos. Mas, aparentemente, a ausência de computadores na ajuda aos cálculos parece tê-los dissuadido. No entanto, o cálculo manual não deteve Willcox, que nutria um enorme respeito pelos dados recolhidos, e, assim, elaborou tabelas onde analisou os censos mediante os vários métodos. Mas Willcox não tinha argumentos matemáticos que lhe permitissem provar a sua tese. Por fim, a notoriedade científica de Huntington e seus colegas, aliada aos interesses partidários, ditaram a adopção do método de Hill.

A regra da quota

Olhe-se um dos mais naturais e atractivos conceitos da distribuição proporcional: a regra da quota; a ideia de que o número de lugares a receber por um estado deve estar compreendido entre o valor do arredondamento da quota às unidades por defeito, e o valor do arredondamento por excesso. Este pensamento guiou os métodos de Hamilton e Lowndes, e estava também na mente de Webster quando criou o seu método. Foi a constatação de que o método de Jefferson frequentemente atribui aos estados um valor superior à sua quota, que determinou a sua eliminação pelo Congresso no século XIX. Huntington defendia uma ideia oposta, a de que seria um erro considerar que uma boa distribuição teria de respeitar a regra da quota, possivelmente porque havia verificado que o seu método violava esta regra (na realidade, também o método de Webster viola a regra da quota). A tabela seguinte mostra isso mesmo:

Estado	População	Quota	Quociente (com divisor 46 850)	Distribuição pelo método de Webster	Quociente (com divisor 47 000)	Média geométrica	Distribuição pelo método de Hill
A	70 653	1,552	1,508	2	1,503	1,414	2
B	117 404	2,579	2,506	3	2,498	2,449	3
C	210 923	4,633	4,502	5	4,488	4,472	5
D	1 194 456	26,236	25,495	25	25,414	25,495	25
Total	1 593 436	35		35			35

Tabela 10.20. Exemplo de violação da regra da quota pelos métodos de Webster e de Hill.

Divisor padrão (utilizado para obter as quotas): $1\,593\,436 \div 35 \approx 45\,526{,}74$.

Olhando para as quotas na tabela 10.20, parece que D devia obter vinte e seis representantes em vez de vinte e cinco. O problema é que para isso acontecer há que retirar um representante a um dos outros estados. A qual deles? O método de Hamilton escolheria A para perder o seu segundo representante, mas este estado é o menor de todos, logo sentiria mais os efeitos da perda de um lugar.

Imediatamente se levanta a questão sobre se existirá um método de divisor que respeite sempre a regra da quota. Os autores Balinski e Young dizem que a resposta é negativa.

Teorema 10.5 (Teorema da Impossibilidade de Balinski e Young): Não existe nenhum método que evite o paradoxo da população e cumpra a regra da quota.

Esta é uma descoberta perturbadora. O cerne do problema reside no facto de ao forçar o cumprimento da regra da quota os efeitos serem bastante diferentes para os estados pequenos e para os grandes. Para um estado com quota entre um e dois, a diferença de um lugar representa uma maior flutuação proporcionalmente ao seu valor populacional, do que um outro estado variar entre quarenta e um e quarenta e dois. Pode dizer-se que o cumprimento da regra da quota não é compatível com a ideia de proporcionalidade, uma vez que permite um maior desfasamento no número de representantes per capita para os estados menores comparativamente com os mais populosos.

O exemplo na tabela 10.20 ilustra justamente o que se acabou de referir: considere-se que se pretende a todo o custo cumprir a regra da quota, sendo que para isso o estado D terá vinte e seis lugares. Escolhe-se, então, retirar a B o seu terceiro representante. Suponha-se que os estados B e D vêem parte das suas populações serem transferidas para A e C, conforme se vê na tabela 10.21. A solução de Hill e Webster é a apresentada, com B a obter três lugares e D vinte e cinco. Mas isto implicaria o paradoxo da população, pois os habitantes de B decresceram 2,98% enquanto que em D diminuíram 2,84%, no entanto terá sido D a perder um lugar (mediante a suposição de vinte e seis representantes).

Estado	População	Quota	Distribuição segundo o método de Webster	Média geométrica	Distribuição segundo o método de Hill
A	86 228	1,894	2	1,414	2
B	113 908	2,502	3	2,449	3
C	232 778	5,113	5	5,477	5
D	1 160 522	25,491	25	25,495	25
Total	1 593 436	35	35		35

Tabela 10.21. Divisor padrão (utilizado para obter as quotas) = 1 593 436 ÷ 35 ≈ 45 526,74.

Encontra-se deste modo um dilema: não há um método perfeito. Deve-se, então, encontrar uma solução equilibrada: ou se abdica da regra da quota, ou se assume a possibilidade de encontrar os paradoxos da população ou do novo estado. Globalmente, parece mais importante encontrar um método que reflicta correctamente as alterações populacionais do que respeitar a regra da quota. O exemplo anterior, ilustrado na tabela 10.21, põe em causa a pertinência da regra da quota; desse modo, uma vez confrontados com a necessidade de efectuar uma escolha entre males menores, parece que fará mais sentido evitar as situações paradoxais – fiquem os métodos de divisor.

Na realidade, o preço a pagar pela adopção dos métodos de divisor não é muito alto. Se alguns métodos, como Jefferson e Adams, são bastante inclinados para a violação da regra da quota, outros há, como Webster, em que essas violações são extremamente raras (há que lembrar que o exemplo apresentado na tabela 10.20 foi ficcionado).

Foram construídas estimativas teóricas sobre a probabilidade de cada um dos métodos históricos violar a quota. Estas estimativas foram encontradas usando cinquenta estados e uma distribuição de quatrocentos e trinta e cinco lugares (a distribuição de 1970). As populações que produziram esta distribuição usando um divisor fixo foram consideradas igualmente prováveis; foram contadas as ocorrências em que se deu a violação da regra da quota por algum estado.

	Método:				
	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson
Probabilidade de violação da regra da quota	≈ 1	0,0154	0,00286	0,00061	≈ 1

Tabela 10.22. Probabilidades de violação da regra da quota. Retirado da obra *Fair Representation – meeting the ideal of one man, one vote,* página 81.

Para um número de estados e lugares a atribuir relativamente elevados, e com diferenças populacionais consideráveis, os métodos de Adams e Jefferson violarão quase de modo certo a regra da quota. Em oposição, o método de Webster tem uma probabilidade de violação da regra da quota perto de zero.

Teorema 10.6: De todos os métodos de divisor, o de Webster é aquele em que a probabilidade de violar a regra da quota é menor.

Existe uma razão natural para que o método de Webster esteja mais próximo de satisfazer a regra da quota que os restantes. Webster nunca defendeu que é essencial a um método respeitar a regra da quota. Na verdade, Webster propôs uma ideia relacionada, mas com uma vertente mais praticável: numa boa distribuição não será possível transferir um representante de um estado para outro e simultaneamente aproximar ambos das suas quotas. A isto chama-se "ficar próximo da quota". Ao olhar a tabela 10.20 observa-se que transferir um lugar de D para outro estado aproximá-lo-ia da sua quota, mas retirar um representante a qualquer um dos outros estados afastá-los-ia das suas quotas. Relativamente aos dados de 1920 (presentes na tabela 10.19) para obter a distribuição de Webster é necessário transferir representantes da distribuição de Hill aproximando os estados das suas quotas.

Mais importante, estas diferenças não dependem de como é definida esta proximidade à quota. Em vez da diferença absoluta entre o número de lugares de um estado e a sua quota, considere-se a diferença relativa. O resultado será o mesmo: no exemplo de 1920 (visto na tabela 10.19) a solução de Webster traz seis estados para uma posição mais próxima das suas quotas, comparativamente com a solução de Hill. Não existe uma diferença efectiva entre as duas medidas, uma vez que as diferenças relativas e absolutas referem-se à mesma realidade quando medidas relativamente à quota do estado.

Verifica-se assim que, embora o método de Webster não cumpra sempre a regra da quota, aproxima-se desta quer medida em termos absolutos, quer relativos. Pode ainda afirmar-se que é o único método de divisor nestas condições:

Teorema 10.7: O método de Webster é o único método de divisor que se aproxima da quota.

Em jeito de conclusão, pode dizer-se que, não sendo possível satisfazer sempre todos os princípios simultaneamente, é possível satisfazer todos eles quase sempre.

Conclusão

A História mostra que não existe uma resposta óbvia para a procura de uma representação proporcional. O assunto é simultaneamente complexo e sensível, uma vez que envolve o poder político.

Nos Estados Unidos da América desenvolveram-se discussões intensas pelo poder de um único lugar, foi este o rastilho para o veto presidencial que, em 1792, eliminou o método de Hamilton e provocou a consequente adopção do método de Jefferson. Foi também para evitar a perda de um lugar à região de New England que, em 1830, John Quincy Adams iniciou a busca por um novo método. Dessa discussão resultaram três novos métodos: Adams, Dean e Webster. Foi a atribuição de um lugar adicional a Arkansas em 1941 que impulsionou a adopção do método actualmente utilizado pelos norte-americanos: o método de Hill.

A essência da justa representação proporcional é a ideia de que as alterações populacionais devem ser fielmente reflectidas. É justamente por essa razão que os censos se realizam periodicamente. Deste modo, um método aceitável deve evitar os paradoxos da população e do novo estado. O comportamento do método de Hamilton perante os dados do censo de 1900 – com a delegação de Maine a oscilar entre três e quatro representantes – mostrou que também não é aceitável um método que possa verificar o paradoxo de Alabama. Estudos matemáticos provam que os únicos métodos que evitam estes três paradoxos são os métodos de divisor.

Respeitar a regra da quota é um outro critério que foi naturalmente introduzido na temática da distribuição de lugares: nenhum método deveria ter um número de lugares que ultrapassasse o valor da quota arredondado às unidades por excesso, nem ficasse abaixo do valor arredondado por defeito. Mas já se constatou que nenhum método evita os três paradoxos e respeita a regra da quota, há assim que fazer uma escolha. Webster propõe o princípio de proximidade à quota: não deverá ser possível transferir um lugar de um estado para outro aproximando ambos das suas quotas. Matematicamente, provou-se que o único método de divisor que cumpre este objectivo é o de Webster. Simultaneamente, o método de Webster tem, entre todos os métodos de divisor, a menor probabilidade de violar a quota. De facto, quando o número de lugares e de estados é relativamente grande, como acontece nos Estados Unidos, o método de Webster raramente viola a regra da quota; em termos práticos pode mesmo considerar-se que Webster respeita a regra da quota.

Tanto os estudos teóricos, como a observação empírica, apoiam a conclusão de que o único método proporcional imparcial, que satisfaz o princípio de um homem um voto, é o método de Webster. Mas na realidade é o método de Hill o legalmente adoptado e em uso nos Estados Unidos, sob o argumento de imparcialidade, que se sabe agora não ser verdadeiro. A conclusão a retirar é a de que o método de Webster é o aconselhado para sistemas federais, em particular no caso dos Estados Unidos da América. Em jeito de conclusão, recorde-se que o método de Webster foi usado declaradamente em 1840, 1900 e 1910; em 1880 e 1890 foi usado de modo à sua distribuição coincidir com a do método de Hamilton (manipulando o número de lugares na Câmara); em 1930 a coincidência deu-se entre os métodos de Webster e Hill. O método de Jefferson foi usado cinco vezes, de 1790 a 1830. Em 1850, 1860 e 1870 foi aplicado o método de Hamilton, e em 1920 não se efectuou qualquer distribuição. O método de Hill é usado desde 1940. O método de Webster é um procedimento natural de implementar o ideal da representatividade. Ao introduzir um divisor comum, Webster retém o melhor das abordagens de Hamilton e de Jefferson. O desenvolvimento da teoria dos métodos proporcionais mostrou por que razão o método mais simples e intuitivo é o melhor: evita os paradoxos, é imparcial e, na prática, respeita a regra da quota.

Dados

Nas páginas que se seguem encontram-se os resultados dos Censos dos Estados Unidos da América, entre 1790 e 2000, com a simulação da distribuição de lugares que cada um dos seis métodos mais usuais provocaria na Câmara dos Representantes, perante o número de lugares em disputa. Os dados populacionais foram retirados da obra *Fair Representation-meeting the ideal of one man, one vote*, dos autores Michel Balinski e H. Peyton Young.

Na pasta de ficheiros denominada “Dados” que também faz parte deste CD, podem encontrar-se os ficheiros, sob a forma de folhas de cálculo, que originaram tais tabelas.

Ano: 1790; 105 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
Virginia	630560	18,310	18	18	18	18	19	18
Massachusetts	475327	13,803	14	14	14	14	14	14
Pennsylvania	432879	12,570	12	12	12	13	13	13
North Carolina	353523	10,266	10	10	10	10	10	10
New York	331589	9,629	10	10	10	10	10	10
Maryland	278514	8,088	8	8	8	8	8	8
Connecticut	236841	6,877	7	7	7	7	7	7
South Carolina	206236	5,989	6	6	6	6	6	6
New Jersey	179570	5,214	5	5	5	5	5	5
New Hampshire	141822	4,118	4	4	4	4	4	4
Vermont	85533	2,484	3	3	3	2	2	2
Georgia	70835	2,057	2	2	2	2	2	2
Kentucky	68705	1,995	2	2	2	2	2	2
Rhode Island	68446	1,988	2	2	2	2	2	2
Delaware	55540	1,613	2	2	2	2	1	2
TOTAL	**3615920**	**105,000**	**105**	**105**	**105**	**105**	**105**	**105**

Ano: 1800; 141 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
Virginia	747362	21,550	21	22	22	22	22	22
Pennsylvania	601863	17,355	17	17	17	17	18	17
New York	577805	16,661	17	17	17	17	17	17
Massachusetts	574564	16,568	16	17	17	17	17	17
North Carolina	424785	12,249	12	12	12	12	12	12
Maryland	306610	8,841	9	9	9	9	9	9
South Carolina	287131	8,280	8	8	8	8	8	8
Connecticut	250622	7,227	7	7	7	7	7	7
New Jersey	206181	5,945	6	6	6	6	6	6
Kentucky	204822	5,906	6	6	6	6	6	6
New Hampshire	183855	5,302	6	5	5	5	5	5
Vermont	154465	4,454	5	4	4	4	4	4
Georgia	138807	4,003	4	4	4	4	4	4
Tennessee	100169	2,888	3	3	3	3	3	3
Rhode Island	68970	1,989	2	2	2	2	2	2
Delaware	61812	1,782	2	2	2	2	1	2
TOTAL	**4889823**	**141,000**	**141**	**141**	**141**	**141**	**141**	**141**

Ano: 1810; 181 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	953043	26,199	26	26	26	26	27	26
Virginia	817615	22,476	22	23	23	23	23	23
Pennsylvania	809773	22,261	22	22	22	22	23	22
Massachusetts	700745	19,263	19	19	19	19	20	19
North Carolina	487971	13,414	13	14	14	14	13	14
Kentucky	374287	10,289	10	10	10	10	10	10
South Carolina	336569	9,252	9	9	9	9	9	9
Maryland	335946	9,235	9	9	9	9	9	9
Connecticut	261818	7,197	7	7	7	7	7	7
Tennessee	243913	6,705	7	7	7	7	6	7
New Jersey	241222	6,631	7	7	7	7	6	7
Ohio	230760	6,344	7	6	6	6	6	6
Vermont	217895	5,990	6	6	6	6	6	6
New Hampshire	214460	5,895	6	6	6	6	6	6
Geoorgia	210346	5,782	6	6	6	6	6	6
Rhode Island	76888	2,114	3	2	2	2	2	2
Delaware	71004	1,952	2	2	2	2	2	2
TOTAL	**6584255**	**181,000**	**181**	**181**	**181**	**181**	**181**	**181**

Ano: 1820; 213 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	1368775	32,503	31	32	32	33	34	33
Pennsylvania	1049313	24,917	24	25	25	25	26	25
Virginia	895303	21,260	21	21	21	21	22	21
Ohio	581434	13,807	13	14	14	14	14	14
North Carolina	556821	13,222	13	13	13	13	13	13
Massachusetts	523287	12,426	12	12	12	12	13	12
Kentucky	513623	12,197	12	12	12	12	12	12
South Carolina	399351	9,483	9	9	9	9	10	9
Tennesse	390769	9,279	9	9	9	9	9	9
Maryland	364389	8,653	9	9	9	9	9	9
Maine	298335	7,084	7	7	7	7	7	7
Georgia	281126	6,676	7	7	7	7	7	7
Connecticut	275208	6,535	7	6	7	7	6	7
New Jersey	274551	6,520	7	6	6	7	6	7
New Hampshire	244161	5,798	6	6	6	6	6	6
Vermont	235764	5,598	6	6	6	6	5	6
Indiana	147102	3,493	4	4	3	3	3	3
Louisiana	125779	2,987	3	3	3	3	3	3
Alabama	111147	2,639	3	3	3	3	2	3
Rhode Island	83038	1,972	2	2	2	2	2	2
Delaware	70943	1,685	2	2	2	2	1	2
Missouri	62496	1,484	2	2	2	1	1	1
Mississippi	62320	1,480	2	2	2	1	1	1
Illinois	54843	1,302	2	1	1	1	1	1
Total	**8969878**	**213,000**	**213**	**213**	**213**	**213**	**213**	**213**

Ano: 1830; 240 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	1918578	38,593	37	38	39	39	40	39
Pennsylvania	1348072	27,117	26	27	27	27	28	27
Virginia	1023503	20,588	20	21	21	21	21	21
Ohio	937901	18,867	18	19	19	19	19	19
North Carolina	639747	12,869	13	13	13	13	13	13
Tennessee	625263	12,578	12	13	13	13	13	13
Kentucky	621832	12,509	12	12	12	12	13	12
Massachusetts	610408	12,279	12	12	12	12	12	12
South Carolina	455025	9,153	9	9	9	9	9	9
Georgia	429811	8,646	9	9	9	9	9	9
Maryland	405843	8,164	8	8	8	8	8	8
Maine	399454	8,035	8	8	8	8	8	8
Indiana	343031	6,900	7	7	7	7	7	7
New Jersey	319922	6,435	7	6	6	6	6	6
Connecticut	297665	5,988	6	6	6	6	6	6
Vermont	280657	5,646	6	6	6	6	5	6
New Hampshire	269326	5,418	6	5	5	5	5	5
Alabama	262508	5,281	6	5	5	5	5	5
Louisiana	171904	3,458	4	4	3	3	3	3
Illinois	157147	3,161	4	3	3	3	3	3
Missouri	130419	2,623	3	3	3	3	2	3
Mississippi	110358	2,220	3	2	2	2	2	2
Rhode Island	97194	1,955	2	2	2	2	2	2
Delaware	75432	1,517	2	2	2	2	1	2
TOTAL	**11931000**	**240,000**	**240**	**240**	**240**	**240**	**240**	**240**

Ano: 1840; 223 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	2428919	34,048	33	34	34	34	35	34
Pennsylvania	1724007	24,167	23	24	24	24	25	24
Ohio	1519466	21,300	21	21	21	21	22	21
Virginia	1060202	14,862	15	15	15	15	15	15
Tennesse	755986	10,597	10	11	11	11	11	11
Massachusetts	737699	10,341	10	10	10	10	10	10
Kentucky	706925	9,910	10	10	10	10	10	10
Indiana	685865	9,614	10	10	10	10	10	10
North Carolina	655092	9,183	9	9	9	9	9	9
Georgia	579014	8,116	8	8	8	8	8	8
Maine	501793	7,034	7	7	7	7	7	7
Alabama	489343	6,859	7	7	7	7	7	7
Illinois	476051	6,673	7	7	7	7	6	7
South Carolina	463583	6,498	7	7	7	7	6	7
Maryland	434124	6,085	6	6	6	6	6	6
New Jersey	373036	5,229	5	5	5	5	5	5
Missouri	360406	5,052	5	5	5	5	5	5
Connecticut	310008	4,346	5	4	4	4	4	4
Mississippi	297567	4,171	4	4	4	4	4	4
Vermont	291948	4,092	4	4	4	4	4	4
Louisiana	285030	3,995	4	4	4	4	4	4
New Hampshire	284574	3,989	4	4	4	4	4	4
Michigan	212267	2,976	3	3	3	3	3	3
Rhode Island	108828	1,526	2	2	2	2	1	2
Arkansas	89600	1,256	2	1	1	1	1	1
Delaware	77043	1,080	2	1	1	1	1	1
TOTAL	**15908376**	**223,000**	**223**	**223**	**223**	**223**	**223**	**223**

Ano: 1850; 234 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	3097394	33,186	32	33	33	33	34	33
Pennsylvania	2311786	24,769	24	25	25	25	26	25
Ohio	1980329	21,218	20	21	21	21	22	21
Virginia	1232649	13,207	13	13	13	13	13	13
Massachusetts	994499	10,655	11	11	11	11	11	11
Indiana	988416	10,590	10	11	11	11	11	11
Tennesse	906933	9,717	10	10	10	10	10	10
Kentucky	898012	9,622	10	10	10	10	10	10
Illinois	851470	9,123	9	9	9	9	9	9
North Carolina	753620	8,074	8	8	8	8	8	8
Georgia	753512	8,073	8	8	8	8	8	8
Missouri	647074	6,933	7	7	7	7	7	7
Alabama	634514	6,798	7	7	7	7	7	7
Maine	583188	6,248	6	6	6	6	6	6
Maryland	546887	5,859	6	6	6	6	6	6
South Carolina	514513	5,513	6	5	6	6	5	6
New Jersey	489466	5,244	5	5	5	5	5	5
Mississippi	482595	5,171	5	5	5	5	5	5
Louisiana	419824	4,498	5	5	4	4	4	4
Michigan	397654	4,261	4	4	4	4	4	4
Connecticut	370791	3,973	4	4	4	4	4	4
New Hampshire	317964	3,407	4	3	3	3	3	3
Vermont	314120	3,366	4	3	3	3	3	3
Wisconsin	305391	3,272	4	3	3	3	3	3
Iowa	192214	2,059	2	2	2	2	2	2
Arkansas	191057	2,047	2	2	2	2	2	2
Texas	189327	2,028	2	2	2	2	2	2
Califórnia	165000	1,768	2	2	2	2	1	2
Rhode Island	147544	1,581	2	2	2	2	1	2
Delaware	90619	0,971	1	1	1	1	1	1
Florida	71721	0,768	1	1	1	1	1	1
TOTAL	**21840083**	**234,000**	**234**	**234**	**234**	**234**	**234**	**234**

Ano: 1860; 241 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	3880735	31,650	30	31	32	32	33	32
Pennsylvania	2906215	23,702	23	24	24	24	25	24
Ohio	2339511	19,080	18	19	19	19	20	19
Illinois	1711951	13,962	13	14	14	14	14	14
Virginia	1399972	11,418	11	11	11	11	12	11
Indiana	1350428	11,014	11	11	11	11	11	11
Massachusetts	1231066	10,040	10	10	10	10	10	10
Missouri	1136039	9,265	9	9	9	9	9	9
Kentucky	1065490	8,690	9	9	9	9	9	9
Tennessee	999513	8,152	8	8	8	8	8	8
Georgia	872406	7,115	7	7	7	7	7	7
North Carolina	860197	7,015	7	7	7	7	7	7
Alabama	790169	6,444	7	6	6	6	6	6
Wisconsin	775881	6,328	6	6	6	6	6	6
Michigan	749113	6,110	6	6	6	6	6	6
Iowa	674913	5,504	6	6	6	6	5	6
New Jersey	672027	5,481	6	5	5	6	5	6
Maryland	652173	5,319	5	5	5	5	5	5
Maine	628279	5,124	5	5	5	5	5	5
Mississippi	616652	5,029	5	5	5	5	5	5
Louisiana	575311	4,692	5	5	5	5	5	5
South Carolina	542745	4,426	5	4	4	4	4	4
Texas	531188	4,332	5	4	4	4	4	4
Connecticut	460147	3,753	4	4	4	4	4	4
Arkansas	391004	3,189	3	3	3	3	3	3
Califórnia	362196	2,954	3	3	3	3	3	3
New Hampshire	326073	2,659	3	3	3	3	2	3
Vermont	315098	2,570	3	3	3	3	2	3
Rhode Island	174620	1,424	2	2	2	1	1	1
Minnesota	172023	1,403	2	2	1	1	1	1
Florida	115726	0,944	1	1	1	1	1	1
Delaware	111496	0,909	1	1	1	1	1	1
Kansas	107206	0,874	1	1	1	1	1	1
Oregon	52465	0,428	1	1	1	1	1	1
TOTAL	**29550028**	**241,000**	**241**	**241**	**241**	**241**	**241**	**241**

Ano: 1870; 292 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	4382759	33,576	32	33	34	34	35	34
Pennsylvania	3521951	26,981	26	27	27	27	28	27
Ohio	2665260	20,418	20	20	20	20	21	20
Illinois	2539891	19,458	19	19	19	20	20	20
Missouri	1721295	13,187	13	13	13	13	14	13
Indiana	1680637	12,875	12	13	13	13	13	13
Massachusetts	1457351	11,165	11	11	11	11	11	11
Kentucky	1321011	10,120	10	10	10	10	10	10
Tennesse	1258520	9,641	9	10	10	10	10	10
Virginia	1225163	9,386	9	9	9	9	10	9
Iowa	1194020	9,147	9	9	9	9	9	9
Georgia	1184109	9,071	9	9	9	9	9	9
Michigan	1184059	9,071	9	9	9	9	9	9
North Carolina	1071361	8,208	8	8	8	8	8	8
Wisconsin	1054670	8,080	8	8	8	8	8	8
Alabama	996992	7,638	8	8	8	8	8	8
New Jersey	906096	6,942	7	7	7	7	7	7
Mississippi	827922	6,343	6	6	6	6	6	6
Texas	818579	6,271	6	6	6	6	6	6
Maryland	780894	5,982	6	6	6	6	6	6
Louisiana	726915	5,569	6	6	6	6	5	6
South Carolina	705606	5,406	6	5	5	5	5	5
Maine	626915	4,803	5	5	5	5	5	5
Califórnia	560247	4,292	5	4	4	4	4	4
Connecticut	537454	4,117	4	4	4	4	4	4
Arkansas	484471	3,711	4	4	4	4	3	4
West Virginia	442014	3,386	4	3	3	3	3	3
Minnesota	439706	3,369	4	3	3	3	3	3
Kansas	364399	2,792	3	3	3	3	2	3
Vermont	330551	2,532	3	3	3	3	2	3
New Hampshire	318300	2,438	3	3	2	2	2	2
Rhode Island	217353	1,665	2	2	2	2	1	2
Florida	187748	1,438	2	2	2	1	1	1
Delaware	125015	0,958	1	1	1	1	1	1
Nebraska	122993	0,942	1	1	1	1	1	1
Oregon	90923	0,697	1	1	1	1	1	1
Nevada	42491	0,326	1	1	1	1	1	1
TOTAL	**38115641**	**292,000**	**292**	**292**	**292**	**292**	**292**	**292**

Ano: 1880; 325 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	5082871	33,459	32	34	34	34	35	34
Pennsylvania	4282891	28,193	27	28	28	28	29	28
Ohio	3198062	21,052	20	21	21	21	22	21
Illinois	3077871	20,261	20	20	20	20	21	20
Missouri	2168380	14,274	14	14	14	14	15	14
Indiana	1978301	13,023	13	13	13	13	13	13
Massachusetts	1783085	11,738	12	12	12	12	12	12
Kentucky	1648690	10,853	11	11	11	11	11	11
Michigan	1636937	10,776	11	11	11	11	11	11
Iowa	1624615	10,694	11	11	11	11	11	11
Texas	1591749	10,478	10	11	11	11	11	11
Tennesse	1542359	10,153	10	10	10	10	10	10
Georgia	1542180	10,152	10	10	10	10	10	10
Virginia	1512565	9,957	10	10	10	10	10	10
North Carolina	1399750	9,214	9	9	9	9	9	9
Wisconsin	1315497	8,660	9	9	9	9	9	9
Alabama	1262505	8,311	8	8	8	8	8	8
Mississippi	1131597	7,449	7	7	7	7	7	7
New Jersey	1131116	7,446	7	7	7	7	7	7
Kansas	996096	6,557	7	7	7	7	6	7
South Carolina	995577	6,554	7	7	7	7	6	7
Louisiana	939946	6,187	6	6	6	6	6	6
Maryland	934943	6,155	6	6	6	6	6	6
Califórnia	864694	5,692	6	6	6	6	5	6
Arkansas	802525	5,283	5	5	5	5	5	5
Minnesota	780773	5,140	5	5	5	5	5	5
Maine	648936	4,272	5	4	4	4	4	4
Connecticut	622700	4,099	4	4	4	4	4	4
West Virginia	618457	4,071	4	4	4	4	4	4
Nebraska	452402	2,978	3	3	3	3	3	3
New Hampshire	346991	2,284	3	2	2	2	2	2
Vermont	332286	2,187	3	2	2	2	2	2
Rhode Island	276531	1,820	2	2	2	2	1	2
Florida	269493	1,774	2	2	2	2	1	2
Colorado	194327	1,279	2	1	1	1	1	1
Oregon	174768	1,150	2	1	1	1	1	1
Delaware	146608	0,965	1	1	1	1	1	1
Nevada	62266	0,410	1	1	1	1	1	1
Total	**49371340**	**325,000**	**325**	**325**	**325**	**325**	**325**	**325**

Ano: 1890; 356 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	5997853	34,490	33	34	34	34	36	34
Pennsylvania	5258014	30,236	29	30	30	30	31	30
Illinois	3826351	22,003	21	22	22	22	23	22
Ohio	3672316	21,117	20	21	21	21	22	21
Missouri	2679184	15,406	15	15	15	15	16	15
Massachusetts	2238943	12,875	13	13	13	13	13	13
Texas	2235523	12,855	13	13	13	13	13	13
Indiana	2192404	12,607	12	13	13	13	13	13
Michigan	2093889	12,041	12	12	12	12	12	12
Iowa	1911896	10,994	11	11	11	11	11	11
Kentucky	1858635	10,688	10	11	11	11	11	11
Georgia	1837353	10,565	10	11	11	11	11	11
Tennessee	1767518	10,164	10	10	10	10	10	10
Wisconsin	1686880	9,700	10	10	10	10	10	10
Virginia	1655980	9,523	9	10	10	10	9	10
North Carolina	1617947	9,304	9	9	9	9	9	9
Alabama	1513017	8,700	9	9	9	9	9	9
New Jersey	1444933	8,309	8	8	8	8	8	8
Kansas	1427096	8,206	8	8	8	8	8	8
Minnesota	1301826	7,486	8	7	7	7	7	7
Mississippi	1289600	7,416	7	7	7	7	7	7
Califórnia	1208130	6,947	7	7	7	7	7	7
South Carolina	1151149	6,620	7	7	7	7	6	7
Arkansas	1128179	6,487	7	6	6	6	6	6
Louisiana	1118587	6,432	7	6	6	6	6	6
Nebraska	1058910	6,089	6	6	6	6	6	6
Maryland	1042390	5,994	6	6	6	6	6	6
West Virginia	762794	4,386	5	4	4	4	4	4
Connecticut	746258	4,291	5	4	4	4	4	4
Maine	661086	3,801	4	4	4	4	3	4
Colorado	412198	2,370	3	2	2	2	2	2
Florida	391422	2,251	3	2	2	2	2	2
New Hampshire	376530	2,165	3	2	2	2	2	2
Washington	349390	2,009	2	2	2	2	2	2
Rhode Island	345506	1,987	2	2	2	2	2	2
Vermont	332422	1,912	2	2	2	2	1	2
South Dakota	328808	1,891	2	2	2	2	1	2
Oregon	313767	1,804	2	2	2	2	1	2
North Dakota	182719	1,051	1	1	1	1	1	1
Delaware	168493	0,969	1	1	1	1	1	1
Montana	132159	0,760	1	1	1	1	1	1
Idaho	84385	0,485	1	1	1	1	1	1
Wyoming	60705	0,349	1	1	1	1	1	1
Nevada	45761	0,263	1	1	1	1	1	1
Total	**61908906**	**356,000**	**356**	**356**	**356**	**356**	**356**	**356**

Ano:1900; 386 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	7264183	37,606	36	37	37	37	39	38
Pennsylvania	6302115	32,625	31	32	32	32	34	33
Illinois	4821550	24,960	24	25	25	25	26	25
Ohio	4157545	21,523	21	21	21	21	22	21
Missouri	3106665	16,083	16	16	16	16	16	16
Texas	3048710	15,783	15	16	16	16	16	16
Massachusetts	2805346	14,523	14	14	14	14	15	14
Indiana	2516462	13,027	13	13	13	13	13	13
Michigan	2420982	12,533	12	12	12	12	13	12
Iowa	2231853	11,554	11	11	11	12	12	11
Georgia	2216331	11,474	11	11	11	11	11	11
Kentucky	2147174	11,116	11	11	11	11	11	11
Wisconsin	2067385	10,703	11	11	11	11	11	11
Tennessee	2020616	10,460	10	10	10	10	10	10
North Carolina	1893810	9,804	10	10	10	10	10	10
New Jersey	1883669	9,751	10	10	10	10	10	10
Virginia	1854184	9,599	10	10	10	10	10	10
Alabama	1828697	9,467	9	9	9	9	9	9
Minnesota	1749626	9,058	9	9	9	9	9	9
Mississippi	1551270	8,031	8	8	8	8	8	8
Califórnia	1483504	7,680	8	8	8	8	8	8
Kansas	1470495	7,613	8	8	8	8	7	8
Louisiana	1381625	7,152	7	7	7	7	7	7
South Carolina	1340316	6,939	7	7	7	7	7	7
Arkansas	1311564	6,790	7	7	7	7	7	7
Maryland	1188044	6,150	6	6	6	6	6	6
Nebraska	1066300	5,520	6	5	6	5	5	5
West Virginia	958800	4,964	5	5	5	5	5	5
Connecticut	908420	4,703	5	5	5	5	4	5
Maine	694466	3,595	4	4	4	4	3	3
Colorado	539103	2,791	3	3	3	3	2	3
Florida	528542	2,736	3	3	3	3	2	3
Washington	515572	2,669	3	3	3	3	2	3
Rhode Island	428556	2,219	3	2	2	2	2	2
Oregon	413536	2,141	3	2	2	2	2	2
New Hampshire	411588	2,131	2	2	2	2	2	2
South Dakota	390638	2,022	2	2	2	2	2	2
Vermont	343641	1,779	2	2	2	2	1	2
North Dakota	314454	1,628	2	2	2	2	1	2
Utah	275277	1,425	2	2	1	1	1	1
Montana	232583	1,204	2	1	1	1	1	1
Delaware	184735	0,956	1	1	1	1	1	1
Idaho	159475	0,826	1	1	1	1	1	1
Wyoming	92531	0,479	1	1	1	1	1	1
Nevada	40670	0,211	1	1	1	1	1	1
Total	**74562608**	**386,000**	**386**	**386**	**386**	**386**	**386**	**386**

Ano: 1910; 433 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	9108934	43,308	41	43	43	43	45	43
Pennsylvania	7665111	36,444	35	36	36	36	38	36
Illinois	5638591	26,809	26	27	27	27	28	27
Ohio	4767121	22,665	22	22	22	22	23	23
Texas	3896542	18,526	18	18	18	18	19	18
Massachusetts	3366416	16,006	16	16	16	16	16	16
Missouri	3293335	15,658	15	16	16	16	16	16
Michigan	2810173	13,361	13	13	13	13	14	13
Indiana	2700876	12,841	13	13	13	13	13	13
Georgia	2609121	12,405	12	12	12	12	13	12
New Jersey	2537167	12,063	12	12	12	12	12	12
Califórnia	2376561	11,299	11	11	11	11	11	11
Wisconsin	2332853	11,091	11	11	11	11	11	11
Kentucky	2289905	10,887	11	11	11	11	11	11
Iowa	2224771	10,578	11	11	11	11	11	11
North Carolina	2206287	10,490	10	10	10	10	11	10
Tennessee	2184789	10,388	10	10	10	10	10	10
Alabama	2138093	10,166	10	10	10	10	10	10
Minnesota	2074376	9,863	10	10	10	10	10	10
Virginia	2061612	9,802	10	10	10	10	10	10
Mississippi	1797114	8,544	9	8	8	8	9	9
Kansas	1690949	8,040	8	8	8	8	8	8
Oklahoma	1657155	7,879	8	8	8	8	8	8
Louisiana	1656388	7,875	8	8	8	8	8	8
Arkansas	1574449	7,486	8	7	7	7	7	7
South Carolina	1515400	7,205	7	7	7	7	7	7
Maryland	1295346	6,159	6	6	6	6	6	6
West Virginia	1221119	5,806	6	6	6	6	6	6
Nebraska	1192214	5,668	6	6	6	6	5	6
Washington	1140134	5,421	6	5	5	5	5	5
Connecticut	1114756	5,300	6	5	5	5	5	5
Colorado	798572	3,797	4	4	4	4	3	4
Florida	752619	3,578	4	4	4	4	3	4
Maine	742371	3,530	4	4	4	4	3	3
Oregon	672765	3,199	4	3	3	3	3	3
Souh Dakota	575676	2,737	3	3	3	3	2	3
North Dakota	574403	2,731	3	3	3	3	2	3
Rhode Island	542610	2,580	3	3	3	3	2	3
New Hampshire	430572	2,047	2	2	2	2	2	2
Utah	371864	1,768	2	2	2	2	1	2
Montana	366338	1,742	2	2	2	2	1	2
Vermont	355956	1,692	2	2	2	2	1	2
Idaho	323440	1,538	2	2	2	2	1	1
Delaware	202322	0,962	1	1	1	1	1	1
Wyoming	144658	0,688	1	1	1	1	1	1
Nevada	80293	0,382	1	1	1	1	1	1
Total	**91072117**	**433,000**	**433**	**433**	**433**	**433**	**433**	**433**

Ano: 1920; 435 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	10380589	42,919	41	42	42	43	45	43
Pennsylvania	8720017	36,053	34	36	36	36	37	36
Illinois	6485280	26,814	26	27	27	27	28	27
Ohio	5759394	23,813	23	24	24	24	25	24
Texas	4663228	19,280	19	19	19	19	20	19
Massachusetts	3852356	15,928	16	16	16	16	16	16
Michigan	3668412	15,167	15	15	15	15	15	15
Califórnia	3426031	14,165	14	14	14	14	14	14
Missouri	3404055	14,074	14	14	14	14	14	14
New Jersey	3155900	13,048	13	13	13	13	13	13
Indiana	2930390	12,116	12	12	12	12	12	12
Georgia	2895832	11,973	12	12	12	12	12	12
Wisconsin	2631305	10,879	11	11	11	11	11	11
North Carolina	2559123	10,581	10	10	10	11	11	11
Kentucky	2416630	9,992	10	10	10	10	10	10
Iowa	2404021	9,940	10	10	10	10	10	10
Minnesota	2385656	9,864	10	10	10	10	10	10
Alabama	2348174	9,709	10	10	10	10	10	10
Tennessee	2337885	9,666	10	10	10	10	10	10
Virginia	2309187	9,547	9	9	9	10	10	10
Oklahoma	2028283	8,386	8	8	8	8	8	8
Louisiana	1798509	7,436	8	7	7	7	7	7
Mississippi	1790618	7,403	7	7	7	7	7	7
Kansas	1769257	7,315	7	7	7	7	7	7
Arkansas	1752204	7,245	7	7	7	7	7	7
South Carolina	1683724	6,961	7	7	7	7	7	7
West Virginia	1463701	6,052	6	6	6	6	6	6
Maryland	1449661	5,994	6	6	6	6	6	6
Connecticut	1380631	5,708	6	6	6	6	6	6
Washington	1354596	5,601	6	6	6	6	5	6
Nebraska	1296372	5,360	6	5	5	5	5	5
Florida	968470	4,004	4	4	4	4	4	4
Colorado	939161	3,883	4	4	4	4	4	4
Oregon	783389	3,239	4	3	3	3	3	3
Maine	768014	3,175	3	3	3	3	3	3
North Dakota	643953	2,662	3	3	3	3	2	3
South Dakota	631239	2,610	3	3	3	3	2	3
Rhode Island	604397	2,499	3	3	3	2	2	2
Montana	541511	2,239	3	2	2	2	2	2
Utah	448388	1,854	2	2	2	2	1	2
New Hampshire	443083	1,832	2	2	2	2	1	2
Idaho	430442	1,780	2	2	2	2	1	2
New Mexico	353428	1,461	2	2	2	1	1	1
Vermont	352428	1,457	2	2	2	1	1	1
Arizona	309495	1,280	2	1	1	1	1	1
Delaware	223003	0,922	1	1	1	1	1	1
Wyoming	193487	0,800	1	1	1	1	1	1
Nevada	75820	0,313	1	1	1	1	1	1
Total	**105210729**	**435,000**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**

Ano: 1930; 435 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	12587967	44,849	43	45	45	45	47	45
Pennsylvania	9631299	34,315	33	34	34	34	36	34
Illinois	7630388	27,186	26	27	27	27	28	27
Ohio	6646633	23,681	23	24	24	24	25	24
Texas	5824601	20,752	20	21	21	21	21	21
Califórnia	5668241	20,195	20	20	20	20	21	20
Michigan	4842052	17,251	17	17	17	17	18	17
Massachusetts	4249598	15,141	15	15	15	15	15	15
New Jersey	4041319	14,399	14	14	14	14	15	14
Missouri	3629110	12,930	13	13	13	13	13	13
Indiana	3238480	11,538	11	11	12	12	12	12
North Carolina	3167274	11,285	11	11	11	11	11	11
Wisconsin	2931721	10,445	10	10	10	10	11	10
Georgia	2908446	10,362	10	10	10	10	10	10
Alabama	2646242	9,428	9	9	9	9	9	9
Tennessee	2616497	9,322	9	9	9	9	9	9
Kentucky	2614575	9,315	9	9	9	9	9	9
Minnesota	2551583	9,091	9	9	9	9	9	9
Iowa	2470420	8,802	9	9	9	9	9	9
Virginia	2421829	8,629	9	9	9	9	9	9
Oklahoma	2382222	8,487	9	8	9	9	8	9
Louisiana	2101593	7,488	8	7	8	8	7	8
Mississippi	2008154	7,155	7	7	7	7	7	7
Kansas	1879498	6,696	7	7	7	7	7	7
Arkansas	1854444	6,607	7	7	7	7	6	7
South Carolina	1738760	6,195	6	6	6	6	6	6
West Virginia	1729199	6,161	6	6	6	6	6	6
Maryland	1631522	5,813	6	6	6	6	6	6
Connecticut	1606897	5,725	6	6	6	6	6	6
Washington	1552423	5,531	6	6	6	6	5	6
Florida	1468191	5,231	5	5	5	5	5	5
Nebraska	1375123	4,899	5	5	5	5	5	5
Colorado	1034849	3,687	4	4	4	4	3	4
Oregon	950379	3,386	4	3	3	3	3	3
Maine	797418	2,841	3	3	3	3	2	3
Rhode Island	687497	2,449	3	3	2	2	2	2
North Dakota	673340	2,399	3	2	2	2	2	2
South Dakota	673005	2,398	3	2	2	2	2	2
Montana	524729	1,870	2	2	2	2	1	2
Utah	505741	1,802	2	2	2	2	1	2
New Hampshire	465292	1,658	2	2	2	2	1	2
Idaho	441536	1,573	2	2	2	2	1	2
New Mexico	395982	1,411	2	2	1	1	1	1
Arizona	389375	1,387	2	2	1	1	1	1
Vermont	359611	1,281	2	1	1	1	1	1
Delaware	238380	0,849	1	1	1	1	1	1
Wyoming	223630	0,797	1	1	1	1	1	1
Nevada	86390	0,308	1	1	1	1	1	1
Total	**122093455**	**435,000**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**

Ano: 1940; 435 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	13479142	44,757	43	45	45	45	47	45
Pennsylvania	9900180	32,873	32	33	33	33	34	33
Illinois	7897241	26,222	25	26	26	26	27	26
Ohio	6907612	22,936	22	23	23	23	24	23
Califórnia	6907387	22,936	22	23	23	23	24	23
Texas	6414824	21,300	21	21	21	21	22	21
Michigan	5256106	17,453	17	17	17	18	18	17
Massachusetts	4316721	14,333	14	14	14	14	15	14
New Jersey	4160165	13,814	14	14	14	14	14	14
Missouri	3784664	12,567	12	13	13	13	13	13
North Carolina	3571623	11,859	12	12	12	12	12	12
Indiana	3427796	11,382	11	11	11	11	12	11
Wisconsin	3137587	10,418	10	10	10	10	11	10
Georgia	3123723	10,372	10	10	10	10	10	10
Tennessee	2915841	9,682	10	10	10	10	10	10
Kentucky	2845627	9,449	9	9	9	9	9	9
Alabama	2832961	9,407	9	9	9	9	9	9
Minnesota	2792300	9,272	9	9	9	9	9	9
Virginia	2677773	8,891	9	9	9	9	9	9
Iowa	2538268	8,428	9	8	8	8	8	8
Louisiana	2363880	7,849	8	8	8	8	8	8
Oklahoma	2336434	7,758	8	8	8	8	8	8
Mississippi	2183796	7,251	7	7	7	7	7	7
Arkansas	1949387	6,473	7	7	7	6	6	7
West Virginia	1901974	6,315	7	6	6	6	6	6
South Carolina	1899804	6,308	6	6	6	6	6	6
Florida	1897414	6,300	6	6	6	6	6	6
Maryland	1821244	6,047	6	6	6	6	6	6
Kansas	1801028	5,980	6	6	6	6	6	6
Washington	1736191	5,765	6	6	6	6	6	6
Connecticut	1709242	5,675	6	6	6	6	5	6
Nebraska	1315834	4,369	5	4	4	4	4	4
Colorado	1123296	3,730	4	4	4	4	3	4
Oregon	1089684	3,618	4	4	4	4	3	4
Maine	847226	2,813	3	3	3	3	2	3
Rhode Island	713346	2,369	3	2	2	2	2	2
South Dakota	642961	2,135	3	2	2	2	2	2
North Dakota	641935	2,132	3	2	2	2	2	2
Montana	559456	1,858	2	2	2	2	1	2
Utah	550310	1,827	2	2	2	2	1	2
New Mexico	531818	1,766	2	2	2	2	1	2
Idaho	524873	1,743	2	2	2	2	1	2
Arizona	499261	1,658	2	2	2	2	1	2
New Hampshire	491524	1,632	2	2	2	2	1	2
Vermont	359231	1,193	2	1	1	1	1	1
Delaware	266505	0,885	1	1	1	1	1	1
Wyoming	250742	0,833	1	1	1	1	1	1
Nevada	110247	0,366	1	1	1	1	1	1
Total	**131006184**	**435,000**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**

Ano: 1950; 435 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	14830192	43,038	41	43	43	43	45	43
Califórnia	10586223	30,722	29	30	30	31	32	31
Pennsylvania	10498012	30,466	29	30	30	30	31	30
Illinois	8712176	25,283	24	25	25	25	26	25
Ohio	7946627	23,061	22	23	23	23	24	23
Texas	7711194	22,378	22	22	22	22	23	22
Michigan	6371766	18,491	18	18	18	18	19	18
New Jersey	4835329	14,032	14	14	14	14	14	14
Massachusetts	4690514	13,612	13	14	14	14	14	14
North Carolina	4061929	11,788	12	12	12	12	12	12
Missouri	3954653	11,477	11	11	11	11	11	11
Indiana	3934224	11,417	11	11	11	11	11	11
Georgia	3444578	9,996	10	10	10	10	10	10
Wisconsin	3434575	9,967	10	10	10	10	10	10
Virginia	3318680	9,631	10	10	10	10	10	10
Tennessee	3291718	9,553	10	9	9	9	9	10
Alabama	3061743	8,885	9	9	9	9	9	9
Minnesota	2982483	8,655	9	9	9	9	9	9
Kentucky	2944806	8,546	9	8	8	8	8	8
Florida	2771305	8,042	8	8	8	8	8	8
Louisiana	2683516	7,788	8	8	8	8	8	8
Iowa	2621073	7,606	8	8	8	8	7	8
Washington	2378963	6,904	7	7	7	7	7	7
Maryland	2343001	6,799	7	7	7	7	7	7
Oklahoma	2233351	6,481	7	6	6	6	6	6
Mississippi	2178914	6,323	6	6	6	6	6	6
South Carolina	2117027	6,144	6	6	6	6	6	6
Connecticut	2007280	5,825	6	6	6	6	6	6
West Virginia	2005552	5,820	6	6	6	6	6	6
Arkansas	1909511	5,541	6	6	6	6	5	5
Kansas	1905299	5,529	6	6	6	5	5	5
Oregon	1521341	4,415	5	4	4	4	4	4
Nebraska	1325510	3,847	4	4	4	4	4	4
Colorado	1325089	3,845	4	4	4	4	4	4
Maine	913774	2,652	3	3	3	3	2	3
Rhode Island	791896	2,298	3	2	2	2	2	2
Arizona	749587	2,175	3	2	2	2	2	2
Utah	688862	1,999	2	2	2	2	2	2
New Mexico	681187	1,977	2	2	2	2	2	2
South Dakota	652740	1,894	2	2	2	2	1	2
North Dakota	619636	1,798	2	2	2	2	1	2
Montana	591024	1,715	2	2	2	2	1	2
Idaho	588637	1,708	2	2	2	2	1	2
New Hampshire	533242	1,547	2	2	2	2	1	2
Vermont	377747	1,096	2	1	1	1	1	1
Delaware	318085	0,923	1	1	1	1	1	1
Wyoming	290529	0,843	1	1	1	1	1	1
Nevada	160083	0,465	1	1	1	1	1	1
Total	**149895183**	**435,000**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**

Ano: 1960; 435 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
New York	16782304	40,884	39	41	41	41	42	41
Califórnia	15717204	38,290	37	38	38	38	40	38
Pennsylvania	11319366	27,576	26	27	27	27	28	28
Illinois	10081158	24,559	24	24	24	24	25	25
Ohio	9706397	23,646	23	24	24	24	24	24
Texas	9579677	23,338	22	23	23	23	24	23
Michigan	7823194	19,059	18	19	19	19	20	19
New Jersey	6066782	14,780	14	15	15	15	15	15
Massachusetts	5148578	12,543	12	12	12	13	13	13
Florida	4951560	12,063	12	12	12	12	12	12
Indiana	4662498	11,359	11	11	11	11	11	11
North Carolina	4556155	11,100	11	11	11	11	11	11
Missouri	4319813	10,524	10	10	10	10	11	10
Virginia	3966949	9,664	10	10	10	10	10	10
Wisconsin	3951777	9,627	10	10	10	10	10	10
Georgia	3943116	9,606	10	10	10	10	10	10
Tennessee	3567089	8,690	9	9	9	9	9	9
Minnesota	3413864	8,317	8	8	8	8	8	8
Alabama	3266740	7,958	8	8	8	8	8	8
Louisiana	3257022	7,935	8	8	8	8	8	8
Maryland	3100689	7,554	8	8	8	8	7	8
Kentucky	3038156	7,401	7	7	7	7	7	7
Washington	2853214	6,951	7	7	7	7	7	7
Iowa	2757537	6,718	7	7	7	7	7	7
Connecticut	2535234	6,176	6	6	6	6	6	6
South Carolina	2382594	5,804	6	6	6	6	6	6
Oklahoma	2328284	5,672	6	6	6	6	5	6
Kansas	2178611	5,307	5	5	5	5	5	5
Mississippi	2178141	5,306	5	5	5	5	5	5
West Virginia	1860421	4,532	5	5	5	5	4	4
Arkansas	1786272	4,352	5	4	4	4	4	4
Oregon	1768687	4,309	5	4	4	4	4	4
Colorado	1753947	4,273	5	4	4	4	4	4
Nebraska	1411330	3,438	4	3	3	3	3	3
Arizona	1302161	3,172	3	3	3	3	3	3
Maine	969265	2,361	3	2	2	2	2	2
New Mexico	951023	2,317	3	2	2	2	2	2
Utah	890627	2,170	3	2	2	2	2	2
Rhode Island	859488	2,094	2	2	2	2	2	2
South Dakota	680514	1,658	2	2	2	2	1	2
Montana	674767	1,644	2	2	2	2	1	2
Idaho	667191	1,625	2	2	2	2	1	2
Hawaii	632772	1,542	2	2	2	2	1	2
North Dakota	632446	1,541	2	2	2	2	1	1
New Hampshire	606921	1,479	2	2	2	1	1	1
Delaware	446292	1,087	2	1	1	1	1	1
Vermont	389881	0,950	1	1	1	1	1	1
Wyoming	330066	0,804	1	1	1	1	1	1
Nevada	285278	0,695	1	1	1	1	1	1
Alaska	226167	0,551	1	1	1	1	1	1
Total	**178559219**	**435,000**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**

Ano: 1970; 435 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
Califórnia	20098863	42,847	41	42	43	43	44	43
New York	18338055	39,093	37	39	39	39	41	39
Pennsylvania	11884314	25,335	24	25	25	25	26	25
Texas	11298787	24,087	23	24	24	24	25	24
Illinois	11184320	23,843	23	24	24	24	25	24
Ohio	10730200	22,875	22	23	23	23	24	23
Michigan	8937196	19,052	19	19	19	19	20	19
New Jersey	7208035	15,366	15	15	15	15	16	15
Florida	6855702	14,615	14	15	15	15	15	15
Massachusetts	5726676	12,208	12	12	12	12	12	12
Indiana	5228156	11,145	11	11	11	11	11	11
North Carolina	5125230	10,926	11	11	11	11	11	11
Missouri	4718034	10,058	10	10	10	10	10	10
Virginia	4690742	10,000	10	10	10	10	10	10
Georgia	4627306	9,864	10	10	10	10	10	10
Wisconsin	4447013	9,480	9	9	9	9	9	9
Tennessee	3961060	8,444	8	8	8	8	8	8
Maryland	3953698	8,428	8	8	8	8	8	8
Minnesota	3833173	8,172	8	8	8	8	8	8
Louisiana	3672008	7,828	8	8	8	8	8	8
Alabama	3475885	7,410	8	7	7	7	7	7
Washington	3443487	7,341	7	7	7	7	7	7
Kentucky	3246481	6,921	7	7	7	7	7	7
Connecticut	3050693	6,503	7	6	6	7	6	7
Iowa	2846920	6,069	6	6	6	6	6	6
South Carolina	2617320	5,580	6	6	6	6	5	6
Oklahoma	2585486	5,512	6	6	6	6	5	6
Kansas	2265846	4,830	5	5	5	5	5	5
Mississippi	2233848	4,762	5	5	5	5	5	5
Colorado	2226771	4,747	5	5	5	5	4	5
Oregon	2110810	4,500	5	5	4	5	4	5
Arkansas	1942303	4,141	4	4	4	4	4	4
Arizona	1787620	3,811	4	4	4	4	4	4
West Virginia	1763331	3,759	4	4	4	4	3	4
Nebraska	1496820	3,191	4	3	3	3	3	3
Utah	1067810	2,276	3	2	2	2	2	2
New Mexico	1026664	2,189	3	2	2	2	2	2
Maine	1006320	2,145	3	2	2	2	2	2
Rhode Island	957798	2,042	2	2	2	2	2	2
Hawaii	784901	1,673	2	2	2	2	1	2
New Hampshire	746284	1,591	2	2	2	2	1	2
Idaho	719921	1,535	2	2	2	2	1	2
Montana	701573	1,496	2	2	2	1	1	1
South Dakota	673247	1,435	2	2	2	1	1	1
North Dakota	624181	1,331	2	1	1	1	1	1
Delaware	551928	1,177	2	1	1	1	1	1
Nevada	492396	1,050	1	1	1	1	1	1
Vermont	448327	0,956	1	1	1	1	1	1
Wyoming	335719	0,716	1	1	1	1	1	1
Alaska	304067	0,648	1	1	1	1	1	1
Total	**204053325**	**435,000**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**

Ano: 1980; 435 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
Califórnia	23668562	45,584	44	45	45	45	48	46
New York	17557288	33,814	33	34	34	34	35	34
Texas	14228383	27,403	27	27	27	27	28	27
Pennsylvania	11866728	22,854	22	23	23	23	24	23
Illinois	11418461	21,991	21	22	22	22	23	22
Ohio	10797419	20,795	20	21	21	21	22	21
Florida	9739992	18,758	18	19	19	19	19	19
Michigan	9258344	17,831	17	18	18	18	18	18
New Jersey	7364158	14,183	14	14	14	14	15	14
North Carolina	5874429	11,314	11	11	11	11	11	11
Massachusetts	5737037	11,049	11	11	11	11	11	11
Indiana	5490179	10,574	11	10	10	11	11	11
Georgia	5464265	10,524	10	10	10	10	11	10
Virginia	5346279	10,296	10	10	10	10	10	10
Missouri	4917444	9,471	9	9	9	9	10	9
Wisconsin	4705335	9,062	9	9	9	9	9	9
Tennessee	4590750	8,841	9	9	9	9	9	9
Maryland	4216446	8,120	8	8	8	8	8	8
Louisiana	4203972	8,096	8	8	8	8	8	8
Washington	4130163	7,954	8	8	8	8	8	8
Minnesota	4077148	7,852	8	8	8	8	8	8
Alabama	3890061	7,492	8	7	7	7	7	7
Kentucky	3661433	7,052	7	7	7	7	7	7
South Carolina	3119208	6,007	6	6	6	6	6	6
Connecticut	3107576	5,985	6	6	6	6	6	6
Oklahoma	3025266	5,826	6	6	6	6	6	6
Iowa	2913387	5,611	6	6	6	6	5	6
Colorado	2888834	5,564	6	6	6	6	5	6
Arizona	2717866	5,234	5	5	5	5	5	5
Oregon	2632663	5,070	5	5	5	5	5	5
Mississippi	2520638	4,855	5	5	5	5	5	5
Kansas	2363208	4,551	5	5	5	5	4	5
Arkansas	2285513	4,402	5	4	4	4	4	4
West Virginia	1949644	3,755	4	4	4	4	3	4
Nebraska	1570006	3,024	3	3	3	3	3	3
Utah	1461037	2,814	3	3	3	3	2	3
New Mexico	1299968	2,504	3	3	3	2	2	2
Maine	1124660	2,166	3	2	2	2	2	2
Hawaii	965000	1,859	2	2	2	2	1	2
Rhode Island	947154	1,824	2	2	2	2	1	2
Idaho	943935	1,818	2	2	2	2	1	2
New Hampshire	920610	1,773	2	2	2	2	1	2
Nevada	799184	1,539	2	2	2	2	1	2
Montana	786690	1,515	2	2	2	2	1	1
South Dakota	690178	1,329	2	1	1	1	1	1
North Dakota	652695	1,257	2	1	1	1	1	1
Delaware	595225	1,146	2	1	1	1	1	1
Vermont	511456	0,985	1	1	1	1	1	1
Wyoming	470816	0,907	1	1	1	1	1	1
Alaska	400481	0,771	1	1	1	1	1	1
Total	**225867174**	**435,000**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**

Ano: 1990; 435 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
Califórnia	29839250	52,124	50	52	52	52	54	52
New York	18044505	31,521	30	31	31	31	33	31
Texas	17059805	29,801	29	30	30	30	31	30
Florida	13003362	22,715	22	23	23	23	23	23
Pennsylvania	11924710	20,830	20	21	21	21	21	21
Illinois	11466682	20,030	19	20	20	20	21	20
Ohio	10887325	19,018	18	19	19	19	19	19
Michigan	9328784	16,296	16	16	16	16	17	16
New Jersey	7748634	13,536	13	13	13	13	14	14
North Carolina	6657630	11,630	11	12	12	12	12	12
Georgia	6508419	11,369	11	11	11	11	11	11
Virginia	6216568	10,859	11	11	11	11	11	11
Massachusetts	6029051	10,532	10	10	10	11	11	11
Indiana	5564228	9,720	10	10	10	10	10	10
Missouri	5137804	8,975	9	9	9	9	9	9
Wisconsin	4906745	8,571	9	9	9	9	8	9
Tennessee	4896641	8,554	9	9	9	9	8	9
Washington	4887941	8,538	9	8	9	9	8	9
Maryland	4798622	8,382	8	8	8	8	8	8
Minnesota	4387029	7,663	8	8	8	8	8	8
Louisiana	4238216	7,403	8	7	7	7	7	7
Alabama	4062608	7,097	7	7	7	7	7	7
Kentucky	3698969	6,461	7	6	6	6	6	6
Arizona	3677985	6,425	7	6	6	6	6	6
South Carolina	3505707	6,124	6	6	6	6	6	6
Colorado	3307912	5,778	6	6	6	6	6	6
Connecticut	3295669	5,757	6	6	6	6	6	6
Oklahoma	3157604	5,516	6	6	6	5	5	5
Oregon	2853733	4,985	5	5	5	5	5	5
Iowa	2787424	4,869	5	5	5	5	5	5
Mississippi	2586443	4,518	5	5	5	5	4	4
Kansas	2485600	4,342	5	4	4	4	4	4
Arkansas	2362239	4,126	4	4	4	4	4	4
West Virginia	1801625	3,147	3	3	3	3	3	3
Utah	1727784	3,018	3	3	3	3	3	3
Nebraska	1584617	2,768	3	3	3	3	2	3
New Mexico	1521779	2,658	3	3	3	3	2	3
Maine	1233223	2,154	3	2	2	2	2	2
Nevada	1206152	2,107	2	2	2	2	2	2
Hawaii	1115274	1,948	2	2	2	2	2	2
New Hampshire	1113915	1,946	2	2	2	2	2	2
Idaho	1011986	1,768	2	2	2	2	1	2
Rhode Island	1005984	1,757	2	2	2	2	1	2
Montana	803655	1,404	2	2	1	1	1	1
South Dakota	699999	1,223	2	1	1	1	1	1
Delaware	668696	1,168	2	1	1	1	1	1
North Dakota	641364	1,120	2	1	1	1	1	1
Vermont	564964	0,987	1	1	1	1	1	1
Alaska	551947	0,964	1	1	1	1	1	1
Wyoming	455975	0,797	1	1	1	1	1	1
Total	**249022783**	**435,000**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**

Ano: 2000; 435 lugares.

Estado	População	Quota	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson	Hamilton
Califórnia	33930798	52,447	50	52	53	53	55	52
Texas	20903994	32,312	31	32	32	32	33	32
New York	19004973	29,376	28	29	29	29	30	29
Florida	16028890	24,776	24	25	25	25	26	25
Illinois	12439042	19,227	19	19	19	19	20	19
Pennsylvania	12300670	19,013	19	19	19	19	19	19
Ohio	11374540	17,582	17	18	18	18	18	18
Michigan	9955829	15,389	15	15	15	15	16	15
New Jersey	8424354	13,022	13	13	13	13	13	13
Georgia	8206975	12,686	13	13	13	13	13	13
North Carolina	8067673	12,470	12	12	13	13	13	13
Virginia	7100702	10,976	11	11	11	11	11	11
Massachusetts	6355568	9,824	10	10	10	10	10	10
Indiana	6090782	9,415	9	9	9	9	9	9
Washington	5908684	9,133	9	9	9	9	9	9
Tennessee	5700037	8,811	9	9	9	9	9	9
Missouri	5606260	8,666	9	9	9	9	9	9
Wisconsin	5371210	8,302	8	8	8	8	8	8
Maryland	5307886	8,204	8	8	8	8	8	8
Arizona	5140683	7,946	8	8	8	8	8	8
Minnesota	4925670	7,614	8	8	8	8	7	8
Louisiana	4480271	6,925	7	7	7	7	7	7
Alabama	4461130	6,896	7	7	7	7	7	7
Colorado	4311882	6,665	7	7	7	7	7	7
Kentucky	4049431	6,259	6	6	6	6	6	6
South Carolina	4025061	6,222	6	6	6	6	6	6
Oklahoma	3458819	5,346	6	5	5	5	5	5
Oregon	3428543	5,300	6	5	5	5	5	5
Connecticut	3409535	5,270	6	5	5	5	5	5
Iowa	2931923	4,532	5	5	5	5	4	5
Mississippi	2852927	4,410	5	4	4	4	4	4
Kansas	2693824	4,164	4	4	4	4	4	4
Arkansas	2679733	4,142	4	4	4	4	4	4
Utah	2236714	3,457	4	4	3	3	3	4
Nevada	2002032	3,095	3	3	3	3	3	3
New Mexico	1823821	2,819	3	3	3	3	2	3
West Virginia	1813077	2,802	3	3	3	3	2	3
Nebraska	1715369	2,651	3	3	3	3	2	3
Idaho	1297274	2,005	2	2	2	2	2	2
Maine	1277731	1,975	2	2	2	2	2	2
New Hampshire	1238415	1,914	2	2	2	2	2	2
Hawaii	1216642	1,881	2	2	2	2	1	2
Rhode Island	1049662	1,622	2	2	2	2	1	2
Montana	905316	1,399	2	2	1	1	1	1
Delaware	785068	1,213	2	1	1	1	1	1
South Dakota	756874	1,170	2	1	1	1	1	1
North Dakota	643756	0,995	1	1	1	1	1	1
Alaska	628933	0,972	1	1	1	1	1	1
Vermont	609890	0,943	1	1	1	1	1	1
Wyoming	495304	0,766	1	1	1	1	1	1
Total	**281424177**	**435,000**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**	**435**

XI – Borda e Condorcet, um apontamento histórico

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Condorcet, conhecido como Marquês de Condorcet, nasceu em Ribemont, França, a 17 de Setembro de 1743. Condorcet era um matemático e mantinha contacto com algumas personalidades norte-americanas. Conhecia Thomas Paine, Benjamin Franklin e Thomas Jefferson. Em 1785, Condorcet foi nomeado cidadão honorário de Nova Iorque, tendo publicado, depois disso, alguns artigos anónimos como "un citoyen des Etatas-Units" ou "un bourgeois de New-Haven".

Para Condorcet, a América era apenas uma experiência imaginada, uma vez que apenas viajara para fora de Paris quando visitou Voltaire perto de Genebra. Condorcet era um defensor dos direitos dos indivíduos, acreditava que a pessoa comum devia ter os mesmos direitos que a realeza, que as mulheres deviam ter os mesmos direitos que os homens, que os negros deviam ter os mesmos direitos que os brancos, e que a escravatura e a pena de morte deveriam ser abolidas. Condorcet defendia também uma postura intolerante relativamente à Igreja Católica: dizia que sonhava com o dia em que padres e escravos apenas existissem nos palcos dos teatros, enquanto personagens de um passado obscuro.

Três anos após o seu casamento, quando tinha quarenta e seis anos, deu-se a Revolução Francesa; Condorcet apoiava a causa republicana. Tornou-se Secretário da Assembleia, redigindo uma parte da Constituição Francesa. Defendia, no entanto, que fossem poupadas as vidas de Louis XVI e Marie Antoinette. Porém, Maximilien Robespierre sobe ao poder enviando o casal de monarcas para a guilhotina. Nessa mesma altura, foi posto de parte o documento que Condorcet havia elaborado para a Constituição – quando Condorcet demonstrou o seu repúdio foi considerado um inimigo da Revolução; passou, então, à clandestinidade.

Condorcet acabaria por falecer em circunstâncias misteriosas, numa prisão de província em Bourg-la-Reine, a 29 de Março de 1794; alguns dizem que terá sido envenenado.

Condorcet e Jean Charles de Borda (1733 – 1799) eram rivais. Num documento de 1775, Condorcet descreve Borda como:

"Aquilo a que chamam «un bon académicien», pois ele fala na Academia e o que mais gosta de fazer é gastar o seu tempo a desenhar prospectos ou examinar máquinas; e, sobretudo, porque, apercebendo-se que foi ultrapassado por outros matemáticos, abandonou a matemática para realizar pequenas experiências… Alguns dos seus artigos mostram talento, apesar de não terem qualquer consequência relevante, e ninguém falar sobre eles."

Talvez Condorcet invejasse Borda, pois este havia conhecido a sua terra prometida, a América. Borda, um pequeno herói da Revolução Americana, comandou os navios franceses *La Seine e La Solitaire* nas Caraíbas e na Costa Americana. Os britânicos capturaram Borda em 1782; após a sua libertação, pouco tempo depois da captura, regressou a França.

Em França encetou uma carreira de matemático e sobrevivente. Uma parte da sua fama reside no papel que desempenhou na construção do sistema métrico. Borda pertencia ao Comité des poids et mesures, ao lado de grandes cientistas como Condorcet, Antoine Lavoisier ou Pierre Simon Laplace.

O ilustre grupo pensava definir a unidade fundamental, o metro, como o comprimento de um pêndulo que completaria precisamente um movimento pendular por segundo. Mas Borda rejeitava essa ideia, não lhe agradava a ideia de fazer depender o metro do segundo, pois esta unidade de tempo não era decimal mas sexagesimal ("Babilónica", como dizia Borda em tom pejorativo). Borda insistia em que o metro fosse definido como a décima milionésima parte da distância do Pólo-norte ao Equador (ou seja, do quarto de meridiano terrestre). Mas na altura ninguém havia estado no Pólo-norte, não era conhecida uma medida tão específica do globo terrestre.

Optou-se por medir o meridiano de Dunkirk a Barcelona e, após tal jornada, construiu-se uma barra de platina com a medida exacta de um metro, que ficou arquivada em Paris. Assim, todos os que quisessem saber quanto media exactamente um metro, deviam fazer uma peregrinação à capital francesa. Sobretudo por esta razão, os Estados Unidos da América não adoptaram o sistema métrico. A recente nação apenas se limitou a importar o sistema decimal da moeda, dividindo a unidade, dólar, em cem cêntimos.

Borda pretendia fazer com os métodos eleitorais o que havia feito com o sistema métrico: torná-los científicos. Chegou, então, a uma conclusão surpreendente: a democracia nem sempre é justa. A 16 de Junho de 1779, Borda revelou este facto ao mundo num discurso na Royal Academy of Sciences. Tal registo escrito perdeu-se; no entanto, catorze anos depois, Borda voltou a falar sobre o assunto, tendo sido publicado um artigo no jornal da Academia, editado por Condorcet. Nesse artigo, Borda defendia claramente que numa eleição com dois candidatos, sendo os votantes chamados a assinalar a sua preferência, ganhará o candidato que realmente for preferido pelos votantes. No entanto, se a eleição se disputar entre três ou mais candidatos, não é linear que vença aquele que reúna maior apoio dos votantes.

Borda explicava aquilo a que actualmente se chama dispersão de votos ("vote splitting") – dois candidatos disputando posições muito próximas podem dividir entre si os votos, permitindo que um terceiro candidato, menos popular, vença.

Identificado o problema, Borda avançou para a tentativa de resolução, apresentando, assim, o método que actualmente se denomina contagem de Borda. No entanto, havia algo de problemático com este método que Borda não constatou; também a Académie Française des Sciences não encontrou qualquer inconveniente, e adoptou a contagem de Borda em 1784.

No ano seguinte, o Marquês de Condorcet publicou a sua própria teoria sobre eleições como parte do tratado *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Esta obra tornou-se conhecida por ser uma das mais confusas, pretensiosas e difíceis de ler, jamais escritas na língua francesa. Condorcet constata que, de facto, não existe qualquer problema numa eleição disputada apenas entre dois candidatos; no seguimento desta ideia, propõe que se efectuem comparações a pares entre todos os candidatos – surgem assim as comparações de Condorcet, e as noções de vencedor de Condorcet, perdedor de Condorcet e também os ciclos… É também nesta altura que Condorcet desenvolve um exemplo histórico, na tentativa de descredibilizar a contagem de Borda, que se resume na tabela 7.7.

No entanto, foi outra a razão de eliminação da contagem de Borda. O marquês de Laplace, famoso pelo desenvolvimento do cálculo, das probabilidades e da astronomia, fez notar que a contagem de Borda era facilmente manipulável.

Imagine-se uma disputa renhida entre D e R. Mediante a contagem de Borda, devem ordenar-se todos os candidatos em concurso, inclusivamente aqueles que não têm reais possibilidades de vencer. Nesta eleição, existe um desses candidatos: X. Suponha-se que a preferência de um votante é: DRX. Existe uma forma de ajudar D: mover R para último lugar; em vez do "boletim verdadeiro" pode votar-se, estrategicamente, DXR. Ao mover R para último lugar, este é penalizado na contagem de Borda, pois perde um ponto. Não parece haver nada a perder: embora o votante prefira R a X, como X não tem possibilidades reais de ganhar, aquele que sai verdadeiramente beneficiado é D, que aumenta a sua distância em relação a R.

Laplace fez notar que esta situação é uma falha séria. No limite, imagine-se que todos os apoiantes de D fazem o mesmo: colocam X acima de R, e que todos os simpatizantes de R colocam X acima de D; neste cenário, o pequeno grupo que realmente apoia X, colocando-o em primeiro lugar, pode ver o seu candidato vencer as eleições. Esta situação só não tem um final terrível porque alguns votantes manterão as suas reais preferências nos boletins de voto, o que impossibilitará X de ganhar. Mas, então, quem ganhará? Provavelmente o candidato forte (D ou R) cujos apoiantes sejam mais estratégicos (ou menos honestos…).

Confrontado com esta falha apontada por Laplace, Borda respondeu que o seu método foi desenvolvido a pensar em pessoas honestas. Este comentário valeu-lhe o rótulo de sonhador.

Mas, em sua defesa, o método que havia desenvolvido fora pensado para a Académie Française des Sciences, um grupo de ilustres cavalheiros que não votava secretamente.

Hoje sabe-se que nenhum método impede o voto estratégico, pelo que este facto não é um defeito a apontar especificamente à contagem de Borda (é isto que nos dizem os estudos de Allan Gibbard e Mark Satterthwaite).

Nem Borda, nem Condorcet, foram os primeiros a descrever os métodos que actualmente se associam aos seus nomes. A contagem de Borda foi usada pelo Senado Romano no século II d. C.; um milénio depois, tanto a contagem de Borda como o método de Condorcet aparecem registados pela mão de Ramon Llull (1235-1315), um lógico, místico e alquimista espanhol. A sua obra *Ars electionis* (1299) defende a adopção das comparações de Condorcet pela Igreja Católica.

Llull influenciou um pensador medieval, Nicholas de Cusa (1401-1464). Na sua obra, *De concordantia catholica,* Nicholas propõe a contagem de Borda como forma de eleger o Sagrado Imperador Romano. Teóricos ocidentais descobriram que a contagem de Borda foi usada na nação de Kiribati, no Pacífico Sul, aparentemente desenvolvida de forma independente.

Em Março de 1800, a Académie Française des Sciences recebeu um novo membro – Napoleão Bonaparte, o primeiro Cônsul de França. Um dos seus primeiros actos foi pedir a abolição da contagem de Borda. Napoleão pôde aperceber-se que a possibilidade de manipulação mediante o voto estratégico trazia problemas inaceitáveis. A Academia abandonou a contagem de Borda substituindo-a pelo voto plural com recurso a maioria absoluta, ou seja, só era admitido um novo membro se a decisão eleitoral tivesse mais de metade dos votos favoráveis, caso contrário, não se tomava qualquer decisão.

Foi deste modo que a contagem de Borda empreendeu o estado de coma eleitoral em que se encontra. Um destino igualmente obscuro teve o método de Condorcet, fruto de um livro que poucos conseguem ler.

XII – Bibliografia

Balinski, L.. Michel e Young, H. Peyton, *Fair Representation, Meeting the Ideal of One Man, One Vote,* Brookings Institution Press, Washington D. C., 2nd edition, 2001.

Brams, Steven; Kilgour, D. Marc e Zwicker, William, *Voting on Referenda: The Separability problem and possible solutions*, Electoral Studies, 16(3): 359-377, 1997.

Geanakoplos, John, *Three Brief Proofs of Arrow's Theorem*, 2001, Cowles Foundation Discussion Paper 1123RRR, Yale University, New Haven, Connecticut.

http://cowles.econ.yale.edu/P/cd/d11a/d1123-r3.pdf

Hodge, K. Jonathan e Klima, E. Richard, *The Mathematics of Voting and Elections: A Hands-On Approach*, American Mathematical Society, 2005.

Jameson, Marie K; Minton, Gregory e Ornison, Michael, E., *Borda meets Pascal*, Math Horizons, 8-21, September 2008.

Lacy, Dean e Niou, Emerson M. S., *A Problem with Referendums*, Journal of Theoretical Politics, 12(1): 5-31, 2000.

Poundstone, William, *Gaming the vote. Why elections aren't fair (and what we can do about it),* Hill and Wang, 1st edition, 2008.

Saari, Donald G., *Decisions and Elections; Explaining the Unexpected*, Cambridge University Press, 2001, New York.

Saari, Donald G., *Chaotic Elections! A Mathematician Looks at Voting*, American Mathematical Society, 2001.

Sen, Amartya, *The impossibility of a paretian liberal*, Journal of Political Economy 78 (1970), 152-157.

Taylor, Alan D. e Pacelli, Allison M., *Mathematics and Politics; Strategy, Voting, Power and Proof,* Springer, 2nd edition, 2008.