

Universidade de Lisboa



Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Resolução de Problemas em Contexto Geométrico

O Estudo de Triângulos no 7.º Ano

Cristina Alexandra Bárbara Caiado Teixeira

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

2011

Universidade de Lisboa



Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Resolução de Problemas em Contexto Geométrico

O Estudo de Triângulos no 7.º Ano

Cristina Alexandra Bárbara Caiado Teixeira

Orientadora: Professora Doutora Hélia Oliveira

Co-orientadora: Professora Doutora Suzana Nápoles

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

2011

Agradecimentos

À Professora Doutora Hélia Oliveira, minha orientadora, pelo modo como me orientou e me aconselhou, pelas suas valiosas sugestões e críticas pertinentes que me motivaram a seguir e a superar as dificuldades nesta caminhada.

À Professora Doutora Suzana Nápoles, minha co-orientadora, agradeço a simpatia e cordialidade com que sempre me recebeu, o interesse e apoio na orientação deste estudo, assim como as sugestões e críticas pertinentes.

À Professora Teresa Marques, por me abrir as portas das suas aulas, pela disponibilidade total, que me permitiu implementar a minha investigação sem restrições.

À Escola Básica 2,3 Maria Alberta Menéres, que me possibilitou o desenvolvimento da investigação.

Aos alunos da turma envolvida no estudo, pelo interesse, colaboração, esforço e disponibilidade demonstrados.

A todos os Professores e Colegas no meu mundo profissional, pela compreensão e pela amizade, interesse e colaboração demonstrados.

Aos meus pais que sempre me apoiaram e continuam a fazê-lo e sempre souberam que eu era capaz.

Ao Zé Carlos pela compreensão, pela confiança, por ter acreditado em mim, pela cumplicidade, por tudo o que passamos juntos e pelo Amor Incondicional.

À Carolina, que foi por ela que me prestei a este Mestrado, por ter sabido esperar por uma mãe ausente e a ela dedico este trabalho.

Resumo

Esta investigação apresenta um estudo desenvolvido no âmbito da leccionação de triângulos, numa turma do 7.º ano. O objecto deste estudo é a resolução de problemas, relativos à unidade referida. Com este intuito procurei responder a três questões: Como interpretam os alunos o enunciado dos problemas geométricos? Como resolvem os alunos problemas geométricos? Que dificuldades os alunos evidenciam na resolução de problemas?

O estudo segue uma abordagem de investigação qualitativa baseada na leccionação de seis aulas. Os resultados apresentados baseiam-se na análise dos dados obtidos utilizando observação com registo de áudio e recolha documental.

A análise destas produções, no que diz respeito à resolução de problemas geométricos indica que os alunos souberam utilizar os conhecimentos apreendidos nas aulas, distinguindo bem os diferentes ângulos estudados. É, também, perceptível observar que os alunos interpretaram os enunciados compreendendo os problemas e através das imagens geométricas anexadas complementam algum dado menos observável por eles. Por vezes, o sentido visual da imagem, de que se faz acompanhar dos problemas, poderá ser um dificultador na sua resolução.

Neste tipo de tarefas, notei muitas dificuldades, da parte dos alunos, na construção de uma cadeia argumentativa, apesar de mostrarem conhecer os argumentos. Os alunos têm dificuldade em expressar com clareza as justificações das suas fundamentações, impedindo a sua compreensão.

Palavras-chave: Resolução de problemas, Geometria, Ângulos, Triângulos

Abstract

This investigation presents a developed study in the field of teaching triangles in a 7th grade class. The object of this study is the resolution of problems related to the mentioned unit. For this reason I tried to answer three questions: How do the students interpret the question paper of the geometric problems? How do the students solve geometric problems? What kind of difficulties do the students show in solving the problems?

The study follows an approach of qualitative investigation based on the teaching of six lessons. The presented results are founded on analyzing the obtained data using observation with audio register and documental gathering.

The analysis of theses productions concerning to the resolution of the geometric problems indicates the students knew how to use the learned knowledges in classes, distinguishing well the different-studied angles. It is also perceptible to observe the students understood the problems in the question papers and they complement a less observable datum through the geometric-attached images. Sometimes the visual sense of the image associated to the problems can be inconvenient in their resolution.

In this type of tasks, I noticed the students had difficulties in building an argumentative cycle, despite knowing the arguments. The students have the difficulty in expressing justifications for their beliefs in a clearly way which prevents their comprehension.

Key-words: solving problems, Geometry, Angles, Triangles

Índice

1. Introdução	1
1.1. Problemática e questões do estudo	2
1.2. Relevância e pertinência do estudo	3
1.3. Organização do estudo	3
2. Enquadramento da Problemática	5
2.1. Resolução de problemas: Uma capacidade transversal	7
2.1.1. O que são problemas matemáticos	7
2.1.2. Os problemas e a aprendizagem	9
2.2. Sentido Visual	11
2.2.1. A visualização e o ensino	12
2.2.2. Materiais no ensino da Geometria.	14
3. Unidade de Ensino	17
3.1. Caracterização da escola e da turma	18
3.1.1. Caracterização da escola	18
3.1.2. Caracterização da turma	18
3.2. A planificação da unidade de ensino	22
3.2.1. Conceitos e propriedades matemáticas na unidade de ensino	23
3.2.1.1. Geometria: Ângulos e Triângulos	24
3.2.1.2. Elementos Geométricos	25
3.2.1.3. Ângulos	28
3.2.1.4. Medida	32
3.2.1.5. Triângulos	37
3.2.2. A organização da unidade de ensino	40
3.2.3. Estratégias utilizadas no processo de ensino e aprendizagem	42
3.2.3.1. Ficha de Trabalho 1	45
3.2.3.2. Ficha de Trabalho 2	46
3.2.3.3. Ficha de Trabalho 3	46
3.2.3.4. Ficha de trabalho 4	47
3.2.3.5. Ficha de Trabalho 5	47
3.2.3.6. Ficha de Trabalho 6	48
3.2.3.7. Ficha de Trabalho 7 e 8	48
3.3. Síntese das aulas	48
3.3.1. Primeira aula: 27 de Abril de 2011	49

3.3.2. Segunda aula: 29 de Abril de 2011	51
3.3.3. Terceira aula: 3 de Maio de 2011	52
3.3.4. Quarta aula: 4 de Maio de 2011	53
3.3.5. Quinta aula: 10 de Maio de 2011	53
3.3.6. Sexta aula: 13 de Maio de 2011	53
4. Métodos e Procedimento de recolha de dados	55
4.1. Método de investigação	56
4.2. Os participantes	58
4.3. Recolha de dados	59
5. Apresentação e análise de dados	61
5.1. Os alunos	62
5.1.1. Mário e Guilherme	62
5.1.2. Júlia e Isabel	63
5.2. Análise de tarefas contidas nas fichas de trabalho	63
5.2.1. Ficha de trabalho 2	64
5.2.2. Ficha de trabalho 5	70
5.2.3. Ficha de trabalho 7	75
5.2.4. Ficha de trabalho 8	77
5.3. Análise do Mini-teste	83
5.3.1. Os alunos participantes	83
5.3.2. Análise das produções dos alunos	84
6. Conclusão / Reflexão	97
6.1. As questões do estudo	98
6.2. Reflexão final sobre a intervenção	102
Referências	105
Anejos	109
Anexo I	110
Anexo II	143
Anexo III	159

Índice de Quadros

Quadro 1 – Idades dos alunos participantes	19
Quadro 2 – Objectivos específicos dentro de cada subtópico	23
Quadro 3 – Quadro resumo dos planos de aula	41
Quadro 4 – Vantagens e desvantagens de um estudo qualitativo	57

Índice de Figuras

Figura 1- Ilusão a um triângulo.....	12
Figura 2 - Exemplos de triângulos	13
Figura 3 - Exemplos de não-triângulos	13
Figura 4 – Número de alunos com retenções	19
Figura 5 – Avaliação a matemática no 1.º Período	20
Figura 6 – Avaliação a matemática no 2.º Período	21
Figura 7 – Habilitações literárias dos Encarregados de Educação dos alunos em estudo.....	21
Figura 8 – Expectativas de futuro dos alunos em estudo	22
Figura 9 – A Geometria na natureza.....	24
Figura 10 - Página de “Os Elementos” de Euclides traduzida para latim.....	24
Figura 11 - Modelo matemático de um ponto	25
Figura 12 - Modelo matemático para segmento de recta	25
Figura 13 - Modelos matemáticos de recta	26
Figura 14 - Modelo matemático de semi-recta.....	26
Figura 15 – Duas rectas concorrentes.....	27
Figura 16 - Modelo matemático de plano	27
Figura 17 – Intersecção de dois semi-planos.....	28
Figura 18 – Ângulos côncavo e convexo.....	28
Figura 19 – Modelo matemático de ângulo raso.....	29
Figura 20 – Modelo matemático de ângulo recto.....	29
Figura 21 – Modelo matemático de ângulo nulo	30
Figura 22 – Modelo matemático de ângulo giro.....	30
Figura 23 – Representação de um ângulo agudo	30
Figura 24 – Representação de um ângulo obtuso.....	30
Figura 25 – Representação de ângulos adjacentes	31
Figura 26 – Representação de ângulos suplementares.....	31
Figura 27 – Representação de ângulos complementares	32
Figura 28 – Ângulos verticalmente opostos	32
Figura 29 – Conjectura de ângulos verticalmente opostos	33
Figura 30 – Modelo matemático para rectas paralelas	34
Figura 31 – Ângulos alternos internos no quotidiano.....	34
Figura 32 – Modelo matemático de ângulos alternos internos	35
Figura 33 – Conjectura de ângulos alternos internos	36

Figura 34 – Conjectura de ângulos alternos internos em <i>software</i>	36
Figura 35 – Conjectura das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo	39
Figura 36 – Conjectura das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo	39
Figura 37 - Planta da sala de aula.....	49
Figura 38 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 1.1 da ficha de trabalho 2.....	65
Figura 39 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 1.1 da ficha de trabalho 2.....	66
Figura 40 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 1.2 da ficha de trabalho 2.....	66
Figura 41 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 1.2 da ficha de trabalho 2.....	68
Figura 42 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 1.3 da ficha de trabalho 2.....	69
Figura 43 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 1.3 da ficha de trabalho 2.....	70
Figura 44 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 1.4 da ficha de trabalho 5.....	71
Figura 45 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 1.4 da ficha de trabalho 5.....	72
Figura 46 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 1.5 da ficha de trabalho 5.....	73
Figura 47 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 1.5 da ficha de trabalho 5.....	74
Figura 48 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 2.2 da ficha de trabalho 7.....	76
Figura 49 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 2.2 da ficha de trabalho 7.....	77
Figura 50 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 2 da ficha de trabalho 8.....	78
Figura 51 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 2 da ficha de trabalho 8.....	79
Figura 52 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 3 da ficha de trabalho 8.....	80
Figura 53 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 3 da ficha de trabalho 8.....	82
Figura 54 – Enunciado da tarefa 1 do mini-teste	85
Figura 55 – Resolução da Júlia da tarefa 1 do Mini-teste	85
Figura 56 – Resolução do Nicolau da tarefa 1 do Mini-teste	86
Figura 57 – Resolução do Bartolomeu da tarefa 1 do Mini-teste	87
Figura 58 – Resolução do Mário da tarefa 1 do Mini-teste.....	88
Figura 59 – Enunciado da tarefa 2 do mini-teste	89
Figura 60 – Resolução do Bartolomeu da tarefa 2 do Mini-teste	90
Figura 61 – Resolução da Iva da tarefa 2 do Mini-teste	91
Figura 62 – Enunciado da tarefa 3 do mini-teste	92
Figura 63 – Resolução do Mário da tarefa 3 do Mini-teste.....	93
Figura 64 – Resolução da Iva da tarefa 3 do Mini-teste	94
Figura 65 – Resolução do Carlos da tarefa 3 do Mini-teste	95

O estudo da forma tem estado historicamente esmagado debaixo da geometria, a qual durante muito tempo foi dominada pelos postulados, axiomas e teoremas de Euclides. Tal como Shakespeare não é suficiente para a literatura e Copérnico não é suficiente para a astronomia, também Euclides não é suficiente para a geometria.

Marjorie Sénechal, “Shape”, in *On the Shoulder of Giants*, org. por L. A. Steen (Veloso, 1998)

1. Introdução

Este estudo procura, de um modo geral, compreender a forma como os alunos interpretam os problemas geométricos, as estratégias que desenvolvem, como utilizam os seus conhecimentos e as dificuldades que evidenciam nesta capacidade transversal. Foi desenvolvido no âmbito da leccionação do tópico de Triângulos, na unidade curricular de Triângulos e Quadriláteros numa turma do 7.º ano do 3.º ciclo do Ensino Básico, onde procurei realçar a importância da resolução de problemas.

A resolução de problemas é uma das capacidades transversais mais importantes na aprendizagem da Matemática, uma vez que permite que o aluno aplique os conhecimentos que adquiriu anteriormente e, possibilita também, que este desenvolva novas aprendizagens. Trata-se de uma capacidade preconizada no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) como “uma actividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático” (p. 6).

Assim, decidi realizar um trabalho que enveredasse por esta problemática. Deste modo, tenho como expectativa, poder leccionar o subtópico em estudo, numa base de resolução de problemas, onde os alunos terão também a possibilidade de realizar aprendizagens de conceitos e propriedades geométricas no plano.

1.1. Problemática e questões do estudo

Freudenthal defende que a geometria *é a compreensão do espaço, no qual a criança vive, respira e se movimenta*. Trata-se de um espaço onde a criança deve aprender a conhecer, a explorar, a conquistar de modo a conseguir viver, respirar e movimentar-se melhor.

A geometria proporciona um desenvolvimento do pensamento divergente na resolução criativa de problemas e desenvolve competências de raciocínio lógico.

Assim, o meu estudo assenta na resolução de problemas em contextos geométricos, no subtópico Triângulos, dando particular atenção à interpretação de problemas e às estratégias de resolução levadas a cabo pelos alunos de uma turma do 7.º ano. Para tal, formulei três questões, a saber:

- i) Como interpretam os alunos o enunciado dos problemas geométricos propostos?
- ii) Como resolvem os alunos problemas geométricos?
- iii) Que dificuldades os alunos evidenciam na resolução de problemas?

1.2. Relevância e pertinência do estudo

No PMEB (ME, 2007) a Resolução de Problemas surge como uma capacidade transversal por ter um papel fundamental nas aprendizagens dos alunos. Este programa apresenta orientações fundamentais que, no caso da geometria, estabelece “desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão das transformações geométricas no plano e no espaço, a compreensão das transformações geométricas e da noção de demonstração, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos” (ME, 2007, p. 51).

Esta é uma das transcrições, do PMEB, que mais interesse me despertou, assumindo neste meu estudo, um papel de relevância e pertinência. Ao longo da minha carreira como docente, sempre notei, por parte dos alunos, uma grande dificuldade em conseguirem desenvolver o sentido espacial. Para além do facto de a resolução de problemas se apresentar como uma capacidade que o professor deve trabalhar continuamente, motivou-me, essencialmente, a realização de um estudo que me permitisse perceber o envolvimento dos alunos na resolução de problemas, usando, para isso, materiais que os ajudem a visualizar, como por exemplo, um programa de geometria dinâmica.

1.3. Organização do estudo

Para dar resposta às questões do estudo, previ a utilização de diversos métodos de recolha de dados, nomeadamente, a observação de aulas, com registos áudio e vídeo e a análise das produções escritas dos alunos, que engloba Fichas de trabalho e um mini-teste. Por fim, será elaborado um trabalho de análise e interpretação dos dados recolhidos, através do qual se procurará dar resposta às questões em estudo.

No segundo capítulo, encontrar-se-á o enquadramento da problemática, ao nível da resolução de problemas e do sentido visual.

O terceiro capítulo focalizará a apresentação da unidade curricular trabalhada, a caracterização da escola e da turma, a planificação da unidade de ensino e a síntese das aulas. Da secção respeitante à unidade curricular constam, também, os conceitos matemáticos fundamentais para a sua leccionação.

No quarto capítulo serão apresentadas as opções metodológicas, os instrumentos de recolha de dados e o processo de análise desenvolvido.

O quinto capítulo debruçar-se-á sobre a análise dos dados recolhidos, relativos a algumas fichas de trabalho resolvidas pelos alunos e a um mini-teste. No caso das fichas de trabalho serão escolhidas as tarefas mais pertinentes e as quais tiveram por base a problemática definida e as questões do estudo.

No último e sexto capítulo, apresentar-se-á uma reflexão final e pessoal sobre todo o trabalho desenvolvido, onde se debaterão os principais resultados do estudo e as respostas encontradas para as questões formuladas. Ainda, neste capítulo, também procuro fazer uma reflexão crítica sobre o meu desempenho e indicar limitações do estudo e dificuldades enfrentadas.

Com a ajuda da imaginação visual podemos iluminar a variedade dos factos e dos problemas da geometria e, para além disso, é possível em muitos casos descrever os aspectos geométricos dos métodos de investigação e de demonstração, sem entrar necessariamente nos detalhes ligados às definições estritas e aos cálculos efectivos.

David Hilbert e S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination* (Velo, 1998)

2. Enquadramento da Problemática

A matemática é referida no Programa de Matemática do Ensino Básico como, sendo uma ciência que, inicialmente, se preocupava essencialmente com a contagem e a medição, sendo hoje mais abrangente, o que leva a ser designada por actividade matemática. Actualmente, nesta actividade, podemos apreciar a resolução e formulação de problemas, a formulação e teste de conjecturas, a generalização, a demonstração, a elaboração e refinamento de modelos (ME, 2007, p. 2).

A Geometria é um dos quatro temas em que o programa da matemática se divide e está, sempre presente, em todos os ciclos de escolaridade. Trata-se de um tema rico, principalmente, no que concerne ao desenvolvimento do sentido espacial dos alunos. O estudo das figuras geométricas bidimensionais tem um papel importante em geometria, uma vez que obriga os alunos a relacionar propriedades geométricas. Facto este que é reforçado no 3.º ciclo, altura em que surgem as situações de raciocínio dedutivo formulados através de uma hipótese (ME, 2007, p. 7)

O Programa de Matemática do Ensino Básico destaca três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da matemática, são elas: a resolução de problemas, raciocínio matemático e a comunicação matemática.

Sendo, por um lado, a resolução de problemas, é uma das capacidades matemáticas consideradas fundamentais, por desenvolver nos alunos o desembaraço na resolução de problemas matemáticos e de problemas relacionados com o quotidiano, esta é, por outro lado, uma capacidade que se ajusta a outros domínios do saber, tais como a biologia, as ciências físicas e a arquitectura, entre outros.

A resolução de problemas é igualmente importante na formulação e análise de estratégias diversificadas do enunciado de um problema: “A resolução de problemas não só é um importante objectivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos” (ME, 2007, p. 8).

O desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas está associado ao raciocínio e à comunicação matemáticas o que contribui para o cumprimento dos objectivos do programa. Isto porque, Segundo Ponte e Sousa “aprende-se a raciocinar raciocinando e analisando os raciocínios realizados por nós e pelos outros” e “a comunicação, desenvolve-se através da vivência de situações variadas envolvendo a interpretação de enunciados e a representação e expressão de ideias matemáticas” (2010, pp. 32, 33). Mas, para que isso aconteça, o professor deve proporcionar situações frequentes em que os alunos possam resolver problemas, analisar e reflectir sobre as

suas resoluções e as dos colegas. Os raciocínios dos alunos devem ser valorizados, procurando que estes os esclareçam e reajam aos raciocínios dos seus pares. Em sala de aula, é importante haver momentos onde os alunos possam confrontar as suas estratégias de resolução de problemas e identificar os raciocínios produzidos pela restante turma. As estratégias e os argumentos dos alunos devem ser aprofundados através da escrita, desenvolvendo, assim, a sua sensibilidade para a importância do rigor no uso da linguagem matemática (ME, 2007, p. 9).

Sendo assim, este trabalho procura realçar a importância da resolução de problemas na aprendizagem da matemática, não a tornando, no entanto, na única actividade a desenvolver em sala de aula, dado que a aprendizagem da matemática deve envolver outras práticas que apelem à memória e ao treino. O que se pretende com a resolução de problemas é que, sempre que possível, se façam acompanhar em contexto real, de forma a dar uma visão de utilidade da matemática ao aluno.

Este capítulo está dividido em duas partes, a resolução de problemas e o sentido visual.

2.1. Resolução de problemas: Uma capacidade transversal

A resolução de problemas deverá dar origem à aprendizagem da matemática, fazendo com que os alunos aprofundem a sua compreensão dos conceitos matemáticos e a saibam aplicar em diferentes contextos (NCTM, 2007). *Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007, p. 57) referem que “a resolução de problemas constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, como tal, não deverá ser apresentada como uma unidade isolada do programa de matemática”, mas levanta-se-nos a questão: “o que são afinal problemas matemáticos?”.

2.1.1. O que são problemas matemáticos

Os alunos aprendem matemática através das experiências proporcionadas pelos professores. Deste modo, a capacidade que têm em utilizar os seus conhecimentos matemáticos na resolução de problemas, bem como a sua confiança e a sua pré-

disposição para esta disciplina são condicionados pelo tipo de ensino com que se deparam, como é referido por NCTM (2007). Também Polya (2003) refere que:

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no carácter. (Polya, 2003, p. 11)

Esta transcrição de Polya traduz a essência do que é um problema matemático e a importância que esta capacidade trás para quem o resolve. Um aluno, quando está perante esta capacidade transversal, adquire modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade e no seu ego adquire confiança para outras situações. Esta confiança ser-lhe-á útil ao longo de toda a sua vida, uma vez que, quotidianamente, será confrontado com a resolução de problemas diversos.

Os bons problemas matemáticos podem contribuir para uma boa consolidação dos conceitos anteriormente adquiridos, permitindo até ampliar os saberes e assim, estimular a aprendizagem da matemática.

Existem várias definições para o conceito “problemas”. Ponte (2005) define um problema como uma tarefa fechada, isto porque “é claramente dito o que é dado e o que é pedido” (pp. 7, 8). Moreira (2008) acrescenta que um problema “é o que se tem de fazer quando não se sabe o que se tem de fazer”, ou por outras palavras, é “quando conhecemos um estágio da situação, pretendemos atingir um outro e não encontramos forma de o fazer.”. Do mesmo modo, para Pires (2001, p. 141), um problema é “uma tarefa com o objectivo bem definido e um método de resolução desconhecido”. Assim sendo, estas três definições salientam as características de um problema: tem dados iniciais, um objectivo claro e um caminho desconhecido.

Existe, muitas vezes, alguma confusão em distinguir exercícios de problemas matemáticos. Segundo Ponte e Sousa, “uma dada questão constituirá um problema ou um exercício para um dado indivíduo, conforme ele disponha, ou não, de um processo que lhe permita resolver rapidamente essa questão. Por isso, num dado momento, uma certa questão pode constituir um problema para um certo indivíduo, mas, num outro momento, não passar de um simples exercício” (2010, p. 30).

Os contextos dos problemas deverão ser os mais variados possíveis, de forma a envolver todos os alunos. Aqueles, devem apelar às experiências familiares, do dia-a-dia até chegar às aplicações mais científicas, para que os alunos possam, assim, identificar a utilidade da matemática.

Moreira (2008) defende que, na resolução de problemas, existem dois processos que estão sempre presentes: a representação mental da situação e a resolução propriamente dita. No entanto, para haver êxito na resolução de problemas estes dois processos têm que estar interligados no decurso de toda a sua realização.

Para Polya a resolução de problemas apresenta quatro fases: *compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e verificação.*

Cada uma destas fases tem a sua importância. Pode acontecer que a um estudante ocorra uma ideia excepcionalmente brilhante e, saltando por sobre estas preparações, chegue à solução. Estas ideias felizes são, evidentemente, muito desejáveis, mas se o estudante não tiver uma boa ideia, algo de muito inconveniente e desastroso pode acontecer se ele escamotear qualquer uma das quatro fases. Acontecerá o pior se o estudante desatar a fazer cálculos ou figuras sem ter compreendido o problema. É geralmente inútil executar pormenores sem perceber a conexão principal ou sem ter feito uma espécie de plano. Muitos erros podem ser evitados se, na execução do seu plano, o estudante verificar cada passo. Alguns dos melhores efeitos podem perder-se se o estudante não reexaminar e não reconsiderar a resolução completa. (Polya, 2003, p. 27)

Todas as potencialidades da resolução de problemas fazem com que, a sua importância, no ensino da matemática, seja vista como uma capacidade matemática fundamental. Para o Programa de Matemática do Ensino Básico, a resolução de problemas “não só é um importante objectivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos” (2007, p. 8).

2.1.2. Os problemas e a aprendizagem

Para Polya, o professor deve motivar interesse nos alunos, tornando-se assim uma das tarefas mais importantes, porque exige tempo, prática, dedicação e bons princípios.

O estudante deve adquirir tanta experiência de trabalho independente quanta for possível. Mas se for deixado sozinho com um problema, sem

qualquer ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não faça qualquer progresso. Se o professor ajudar de mais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve ajudar, nem de mais nem de menos, mas de tal forma que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (Polya, 2003, p. 23)

Ainda para Polya, ao dirigir uma pergunta, o professor deve visar dois objectivos: ajudar o aluno a resolver o problema; e desenvolver no aluno a capacidade de resolver, sozinho, futuros problemas (2003, p. 25). Estes dois objectivos estão interligados, porque se o aluno conseguir resolver o problema terá certamente, acrescentado alguma coisa à sua capacidade de resolver problemas.

O aluno ao aprender a resolver problemas em matemática está a adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que certamente lhe serão úteis na vida futura, enquanto cidadão activo (NCTM, 2007, p. 57).

Em alunos do Ensino Básico, a resolução de problemas deverá promover a aprendizagem matemática. Para isso, o professor terá de seleccionar problemas que sejam vantajosos ao desenvolvimento ou ao aprofundamento dos conhecimentos. As experiências quotidianas, como a leitura ou a utilização de telemóveis, patins em linha, papagaios ou aviões de papel, podem proporcionar muitos problemas interessantes (NCTM, 2007, p. 302). Nesta faixa etária e, de uma forma geral, quando “não sabem resolver um problema de forma imediata, desistem, o que só contribui para se considerarem incompetentes na resolução de problemas” (NCTM, 2007, p. 306).

Na resolução de problemas é fundamental que o aluno compreenda o problema de forma a haver concepção, aplicação e justificação das estratégias. Por vezes, é importante o professor propor problemas com informação irrelevante ou com dados insuficientes ou até mesmo sem solução, para que o aluno possa identificar os dados, as condições e o objectivo do problema. Os alunos deverão conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando sempre a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados. Para isso poderá optar por desdobrar um problema complexo em questões mais simples, explorar conexões matemáticas para obter múltiplas perspectivas de um problema, resolver um problema análogo mas mais simples, explorar casos particulares e até por vezes resolver o problema admitindo que se conhece uma solução (PMEB, 2007, p. 63).

As estratégias mencionadas no parágrafo anterior incluem a “utilização de esquemas, a identificação de padrões, a listagem de todas as possibilidades, a experimentação com valores ou casos particulares, o trabalho do fim para o princípio, a tentativa erro, a criação de um problema equivalente e a simplificação de um problema” (NCTM, 2007, p. 59).

Os professores deverão proporcionar aos seus alunos experiências que deverão incutir predisposição para a resolução de problemas, como são o caso das novas tecnologias (computadores, máquinas de calcular científicas e gráficas).

...os programas informáticos de fácil utilização permitem aos alunos alternar entre representações de dados distintas e proceder a cálculos com grandes quantidades de dados e com números “difíceis”, sejam grandes ou pequenos, com alguma facilidade. Como consequência, durante estes anos escolares, os problemas podem e devem responder às questões dos alunos e ir ao encontro dos seus interesses. (NCTM, 2007, p. 304)

Um dos principais objectivos dos programas de matemática é estimular a autonomia dos alunos e a compreensão, ou seja, “os alunos aprendem mais e melhor quando controlam a sua aprendizagem através da determinação dos seus próprios objectivos e da avaliação do seu progresso” (NCTM, 2007, p. 22).

Os alunos tornam-se confiantes, na sua capacidade de lidar com problemas difíceis, ansiosos por chegar à resposta certa explorando caminhos alternativos, com vontade e persistência. Aprendem a reflectir com os seus próprios erros.

2.2. Sentido Visual

O estudo da geometria exige pensar e fazer. Enquanto os alunos classificam, criam, desenham, modelam, traçam, medem e constroem, a sua capacidade de visualização das relações geométricas desenvolvem-se. Assim, estão a aprender a raciocinar e a formular, testar e justificar conjecturas. Para haver sucesso nas explorações geométricas é necessário haver uma multiplicidade de ferramentas, tais como papel, régua, transferidores, compasso e geoplanos e será substancialmente melhorada se forem usadas ferramentas tecnológicas que apoiem essa exploração, como, por exemplo, programas de geometria dinâmica (NCTM, 2007, p. 191).

2.2.1. A visualização e o ensino

Há pessoas que apreciam formas geométricas em várias áreas do conhecimento, como por exemplo, na arte, na natureza e na arquitetura, ora, essas pessoas que o conseguem fazer já têm o sentido visual geométrico desenvolvido e conseguem de certa forma apreciar o mundo em que vivemos.

O sentido visual geométrico dos nossos alunos tem que ser trabalhado ao ponto de poderem apreciar o mundo ao seu redor. Por isso, o ensino da geometria é uma chave mestra para adquirirem esta capacidade.

Veloso faz referência a uma imagem, a qual nos dá a ilusão de estarmos a ver um triângulo que não existe.

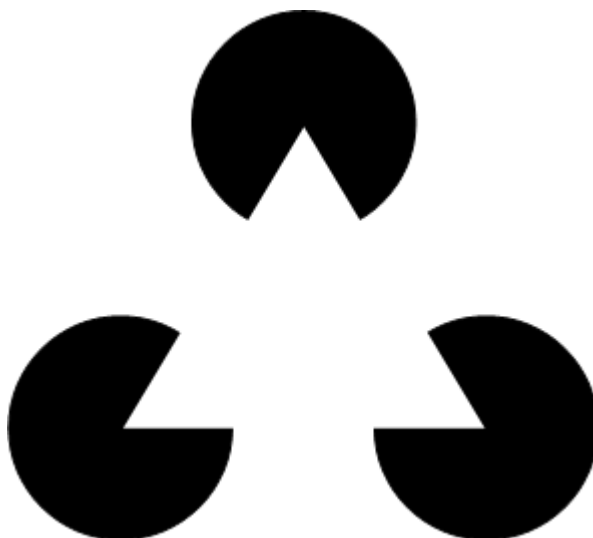


Figura 1- Ilusão a um triângulo

Esta imagem atraiçoa-nos, leva-nos a ver uma figura que não existe, o que “quer dizer que, desta forma, ao não distinguir escrupulosamente entre percepção e pensamento, estamos a introduzir nas nossas argumentações e demonstrações elementos perturbadores, que podem suscitar dúvidas sobre o rigor das nossas conclusões” (Veloso, 1998, p. 125).

Assim, deparamo-nos com um problema que se torna importante na educação matemática, nomeadamente no ensino da geometria.

A solução para os “erros” da percepção visual não é diminuir-lhe o estatuto na educação matemática é “confiar” apenas nas palavras e nos números, com a esperança, de resto infundada, que desta forma o rigor esteja garantido. Numa sociedade em que os aspectos visuais se tornam predominantes, o que é importante é “aprender a ver”, e isso apenas se adquire pela experiência seguida de reflexão. Este deve ser um dos objetivos e práticas do ensino da geometria. (Veloso, 1998, p. 131)

O nosso ensino privilegia o estudo da geometria para que os alunos aprendam as formas e as estruturas geométricas e que saibam analisar as suas características e relações. Como refere o NCTM (2007): “A geometria ensinada do pré-escolar ao 2.º ano tem início com a descrição e designação de figuras geométricas...É necessário que os alunos observem muitos exemplos de figuras correspondentes ao mesmo conceito geométrico, bem como uma variedade de figuras que não seja exemplo desse conceito.” (pp. 113 e 114)

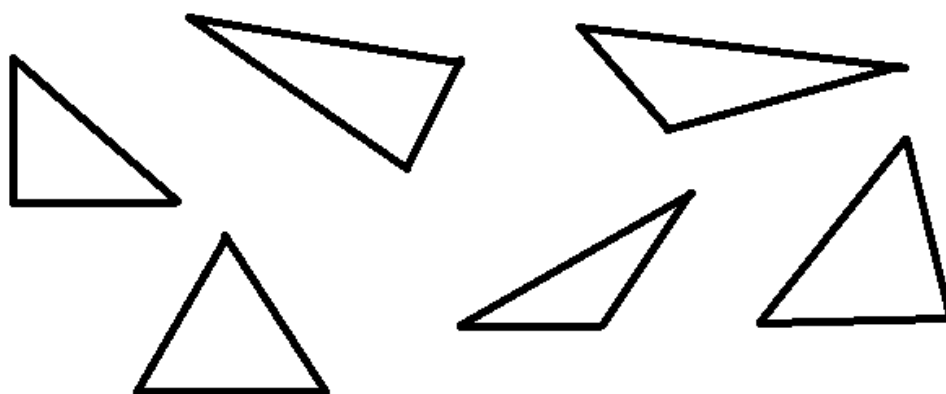


Figura 2 - Exemplos de triângulos

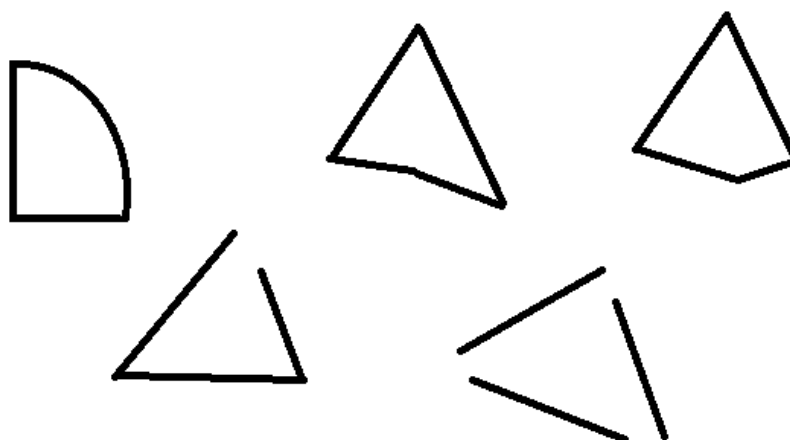


Figura 3 - Exemplos de não-triângulos

É muito importante que os alunos não identifiquem triângulos posicionados na mesma maneira e com amplitudes de ângulos semelhantes em vários exemplos, também é importante que saibam distinguir outras formas que se assemelham a triângulos mas que não o sejam.

Os diferentes tipos de visualização de que os estudantes necessitam, tanto em contextos matemáticos, quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais; de visualizar informação espacial e quantitativa e interpretar visualmente informação que lhes seja apresentada; de rever e analisar situações anteriores com objectos manipuláveis. (Nacarato e Passos, 2003, p. 78)

Para Nacarato e Passos (2003), o uso de desenhos possui um duplo papel no processo de ensino-aprendizagem da matemática, porque pode tornar-se num facilitador ou até mesmo num dificultador na resolução de um problema.

Segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), é necessário que os alunos analisem, construam, componham e decomponham figuras bidimensionais, o que poderão fazer recorrendo a uma diversidade de meios, incluindo desenhos com papel e lápis, modelos geométricos e programas de geometria dinâmica.

2.2.2. Materiais no ensino da Geometria.

O estudo da geometria leva os alunos a aprender formas e estruturas geométricas de modo a analisar as suas características e relações. A visualização (construção e manipulação) constitui um aspecto essencial do raciocínio geométrico e comporta o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos, assim

Através da utilização de modelos concretos, desenhos e programas informáticos de geometria dinâmica, os alunos poderão envolver-se activamente com conceitos geométricos. Com actividades bem concebidas, com ferramentas adequadas e com o apoio do professor, poderão formular e explorar conjecturas e poderão aprender a raciocinar cuidadosamente sobre as noções geométricas, logo desde os primeiros anos de escolaridades. (NCTM, 2007, p.44)

Para Loureiro (2009), há necessidade de realizar actividades de geometria sobre estruturas geométricas diversificadas, com materiais geométricos diversos mas que tenham ligações com essas actividades. O desenvolvimento do raciocínio geométrico

tem de beneficiar de uma diversidade de representações e de acções adaptadas ao raciocínio a desenvolver. Por tudo isto, os materiais geométricos devem ser escolhidos em função das estruturas geométricas que se pretendem trabalhar. Ainda segundo esta autora, a geometria dinâmica, bem como *applets* interactivos também são de extrema importância para os dias de hoje, porque podemos fazer uma ligação com outras estruturas geométricas manipuláveis.

Desenhar e pintar com lápis em papéis diversos, representar no geoplano ou com figuras padrão de diversa natureza (tangran, blocos padrão, polydrons, ...), representar barras articuladas, representar com quadrados ou com cubos, compor e decompor, recortar e dobrar, representar com vistas e em perspectivas, recorrer a espelhos, miras e outros modelos físicos, planificar e montar, são acções inerentes à representação que devem ser vividas pelas crianças ao longo de todo o ensino básico. Passar de uma representação para outra e estabelecer relações entre diversas representações são passos indispensáveis para a construção de imagens mentais. (Loureiro, 2009, pp.62 e 63)

Com a revolução tecnológica, principalmente os programas informáticos de geometria dinâmica, torna-se possível o acesso a uma outra forma de representação, uma vez que permitem aos estudantes visualizar e transformar figuras e sólidos, e até representá-los de várias maneiras através de rotações, translações, dilatações ou secções por planos (Nacarato & Passos, 2003, p. 121).

O uso de um *software* de geometria dinâmica em sala de aula é propício a um ambiente de exploração matemática dando origem à aprendizagem, no qual os alunos constroem ideias e conceitos geométricos.

Segundo Gutiérrez (1996) (in Nacarato & Passos, p. 122) o uso de computadores trás muitas vantagens ao ensino da geometria. Algumas dificuldades podem ser percebidas, pelos estudantes, enquanto estão perante um problema geométrico.

As tecnologias electrónicas, como as calculadoras e computadores, são de extrema importância para o ensino da matemática, porque proporcionam imagens e ideias matemáticas, facilitam a organização e a análise de dados e realizam cálculos de forma eficaz e exacta. Mas a tecnologia não deverá ser usada como uma substituição para a compreensão e intuição elementar, mas sim ser usada para estimular essa compreensão e intuição. A tecnologia deve ser utilizada, com responsabilidade, com a finalidade de enriquecer a aprendizagem matemática dos alunos. A existência, versatilidade e poder

das tecnologias tornam os alunos mais interessados na matemática, podendo assim apreciá-la melhor (NCTM, 2007, p. 26).

A tecnologia não pode ser vista como um tratamento de males, porque, como qualquer ferramenta de ensino, esta pode ser usada de forma adequada ou inadequada.

Os professores deverão usar a tecnologia para melhorar as oportunidades de aprendizagem dos seus alunos, através da selecção ou da criação de tarefas matemáticas que tiram proveito do que a tecnologia permite fazer de forma correcta e eficiente – construção de gráficos, visualização e cálculo. (NCTM, 2007, p. 27)

Os alunos, dispostos das tecnologias, poderão explorar e resolver problemas que envolvam números grandes, ou poderão investigar as propriedades das formas através da utilização de um *software* de geometria dinâmica. Podem também, raciocinar sobre outros temas mais abrangentes, como a mudança de parâmetros que poderão modular e resolver problemas mais complexos que lhes eram incompreensíveis (NCTM, 2007, p. 28).

Para Candeias (2005) um programa de geometria dinâmica tem mais vantagens do que aparenta à primeira vista:

Uma das funções disponibilizada pelos programas de geometria dinâmica, uma das mais estudadas empiricamente, é o arrastamento de pontos ou partes de figuras. Esta função é uma ferramenta poderosa que enfatiza a diferença entre desenhar e construir figuras neste tipo de ambientes, constituindo uma mais valia para a aprendizagem dos conceitos geométricos. (p. 16)

Não posso terminar, este subtema, sem referir um material extremamente importante para o aluno e para o professor – o manual escolar.

Os manuais escolares são considerados materiais curriculares de grande tradição no contexto educativo, sendo por isso considerados como o material central em sala de aula. Material, esse, que influencia o trabalho dos professores e contribui para restringir o conhecimento dos alunos. O manual escolar é visto pelos professores, como uma forma de seleccionar tarefas, organizar o seu trabalho lectivo e para propor trabalho alternativo aos alunos, em casa.

Para Ponte (2010) os manuais escolares são materiais que devem sistematizar e aproveitar da melhor forma o pensamento curricular tornando-se um instrumento de trabalho útil para professores e para alunos.

Geometria é compreender o espaço em que a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar e conquistar de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor.

Hans Freudenthal, “The case of geometry”, in *Mathematics as an Educational Task* (Velo, 1998)

3. Unidade de Ensino

Este estudo foi realizado na sequência da minha intervenção lectiva na unidade Triângulos e Quadriláteros, no 7.º ano de escolaridade.

Neste capítulo apresento a caracterização da escola e da turma, os objectivos programáticos e os conceitos envolvidos, assim como a sequência das aulas e as estratégias de ensino adoptadas em função destas.

3.1. Caracterização da escola e da turma

3.1.1. Caracterização da escola

A Escola Básica 2,3 Maria Alberta Menéres situa-se no concelho de Sintra, distrito de Lisboa. Foi construída como Escola Piloto com o objectivo de realização de novas experiências pedagógicas. Actualmente está já integrada na rede normal e inserida num agrupamento de escolas englobando uma comunidade discente que vai do 1.º ao 9.º Anos de escolaridade (cerca de 1100 alunos) sendo a sua principal preocupação a promoção do saber ser (traduzido em atitudes e valores) que através de direitos e deveres criam as condições para estimular a cidadania, a socialização e a integração comunitária de todos os que nela participam.

Trata-se de uma escola inserida num meio sócio-económico médio/baixo, onde predominam os núcleos familiares pequenos com tendência para famílias monoparentais. Os Encarregados de Educação, na sua maioria, trabalham fora da freguesia ou, até mesmo, fora do concelho, dando pouco apoio aos seus educandos. A escola é ainda caracterizada por uma forte diversidade linguística, cultural e étnica, incluindo uma unidade de ensino estruturado para alunos com Necessidades Educativas Especiais (9 alunos com autismo), onde há a preocupação de respeitar os diferentes ritmos de aprendizagem e da preparação para a transição para a vida activa.

3.1.2. Caracterização da turma

O estudo foi realizado numa turma do 7.º Ano de escolaridade do Ensino Básico. Trata-se de uma turma constituída por 27 alunos, sendo 13 raparigas e 14 rapazes, com idades compreendidas entre os 12 e os 14 anos. É uma turma em que 26 alunos

transitaram do 6.º Ano, embora de diferentes turmas, um aluno é repetente do 7.º Ano e contém dois alunos com Necessidades Educativas Especiais

O quadro 1 mostra a distribuição dos alunos da turma participante no estudo, de acordo com as suas idades.

Quadro 1 – Idades dos alunos participantes

Idades	Nº de alunos
12 anos	22
13 anos	3
14 anos	2

No seguimento do referido acima, o gráfico seguinte caracteriza a turma conforme o número de retenções dos alunos. Assim, observa-se que a maioria dos alunos nunca ficou retido, cinco já obtiveram uma retenção e dois obtiveram duas retenções.

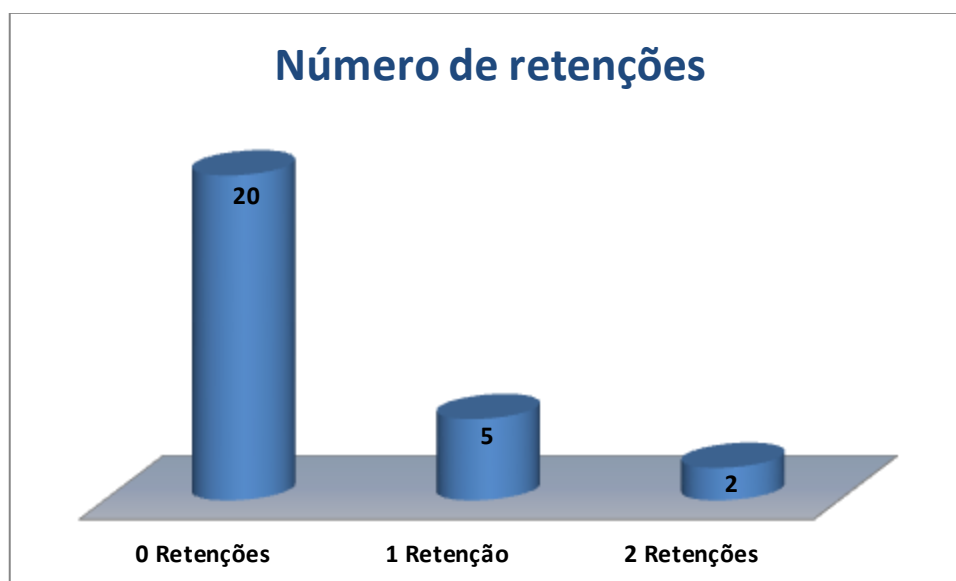


Figura 4 – Número de alunos com retenções

No fim do primeiro período, o aproveitamento da turma foi considerado bom, já que apenas quatro alunos tiveram plano de recuperação, isto é, três ou mais níveis inferiores a dois. No que diz respeito à disciplina de Matemática a professora considera que os alunos apresentam capacidades para virem a conseguir um bom desempenho, no

futuro. Na generalidade, os alunos gostam de trabalhar, embora ainda revelem grande falta de autonomia. Solicitam sistematicamente o apoio e a ajuda da professora. Preferem o trabalho a pares ao trabalho em grupo ou individualmente. Alguns alunos, por exemplo, sempre que lhes é proposto trabalho em grupo, manifestam o seu desagrado e tentam, por norma, realizá-lo com o colega do lado. Durante as aulas realizam com vontade e entusiasmo as tarefas que lhes são propostas, e, embora ainda pouco organizados e ordenados na participação (porque todos querem apresentar a sua resposta), a professora considera que conseguem-se realizar momentos interessantes de discussão e apresentação de ideias. O desenvolvimento das competências de autonomia, de organização e participação tem vindo a ser trabalhado ao longo das aulas.

Assim, a avaliação a matemática no 1.º Período é considerada boa, uma vez que houve 8 alunos com nível 2, onze com nível 3, cinco com nível 4 e três com nível 5.

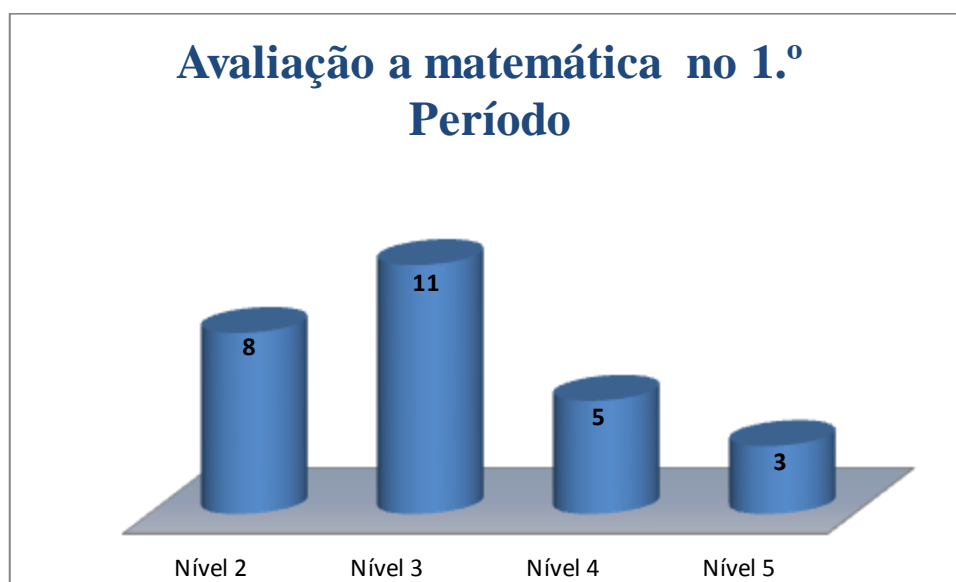


Figura 5 – Avaliação a matemática no 1.º Período

Em relação ao segundo período houve uma melhoria, em relação ao primeiro, uma vez que o nível 2 diminuiu para seis alunos, o nível 3 corresponde a 12 alunos, o nível 4 manteve os cinco alunos e o nível 5 aumentou para quatro alunos.

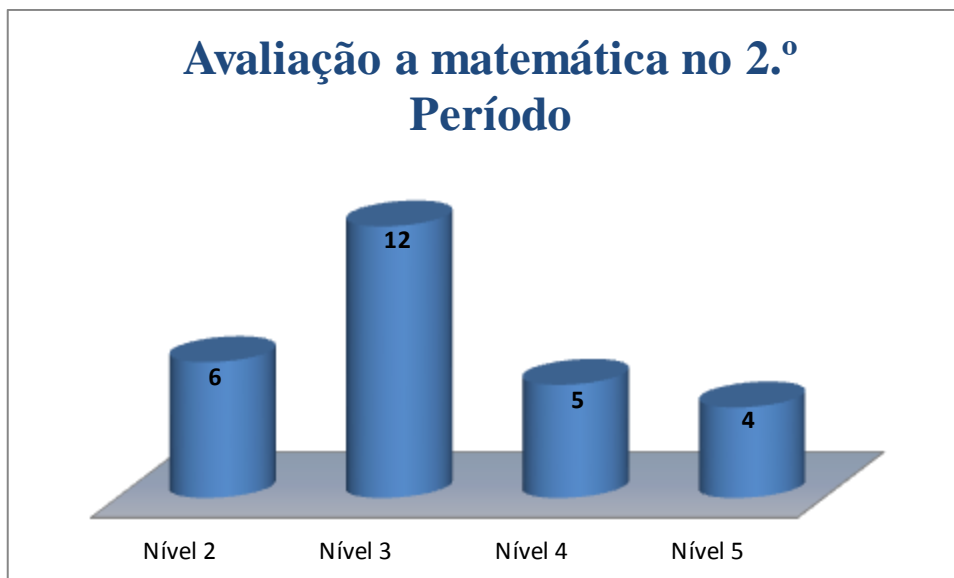


Figura 6 – Avaliação a matemática no 2.º Período

Para compreendermos um pouco melhor o empenho destes alunos, achei importante percebermos a escolaridade dos encarregados de educação e tentar relacionar o esforço académico que estes incutem nos seus educandos. Podemos observar que a maioria dos responsáveis tem como habilitações literárias o secundário, seguindo-se o 3.º ciclo e a licenciatura. Talvez por isso, na reunião de pais referente ao primeiro período, a grande maioria esteve presente e mostrou-se participativa e preocupada com a educação dos seus filhos.

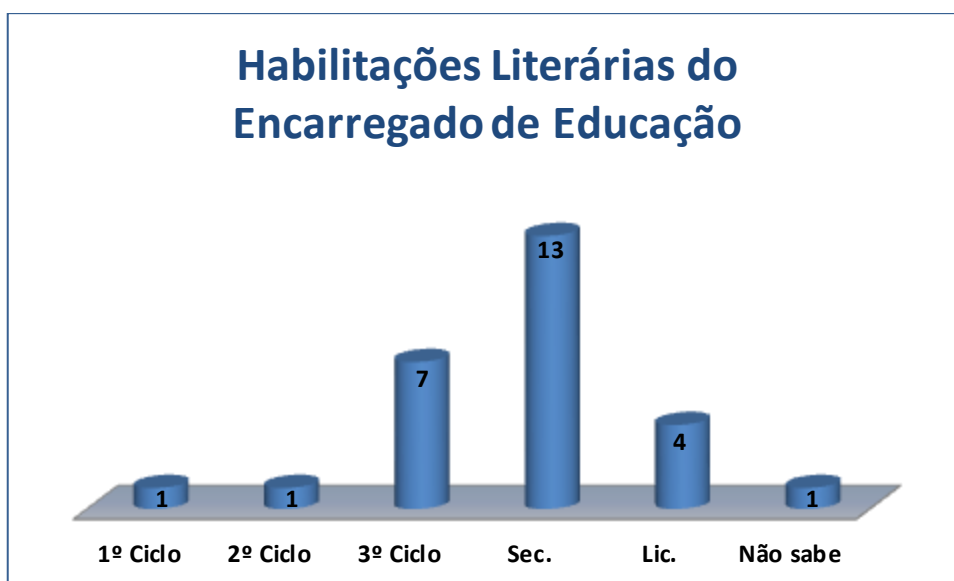


Figura 7 – Habilitações literárias dos Encarregados de Educação dos alunos em estudo.

Como curiosidade, decidi incluir neste estudo as expectativas de futuro dos alunos, ou seja, a profissão que ambicionam ter quando crescidos. A grande parte dos alunos refere profissões que exigem estudo e dedicação académica.



Figura 8 – Expectativas de futuro dos alunos em estudo

Espero contribuir para que os seus sonhos se realizem...

3.2. A planificação da unidade de ensino

A unidade de ensino, em que decorreu o estudo, foi leccionada com base no Programa da Matemática do Ensino Básico (2007). Sendo este o ano em que os alunos tiveram contacto pela primeira vez com o novo Programa do Ensino Básico (2007), optei por incluir o tópico de “Ângulos: amplitude e medição” do 2.º ciclo antes do tópico “Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo” do 3.º ciclo, com o acordo da professora titular da turma. Esta opção foi tomada tendo em conta que, para resolver problemas relativos à soma dos ângulos internos de um triângulo, é necessário estabelecer relações entre ângulos e classificá-los, mas, também, distinguir ângulos complementares, suplementares, ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos.

O subtema “*Soma dos ângulos externos de um triângulo*” não é apresentado neste estudo, por motivos de organização das aulas.

Assim, através de um quadro resumo, pode-se verificar os objectivos e os subtópicos leccionados, relacionando-os com o ciclo de escolaridade.

Quadro 2 – Objectivos específicos dentro de cada subtópico

Ciclo	Subtópicos	Objectivos específicos:
2º	Ângulos: amplitude e medição.	<ul style="list-style-type: none"> • Estabelecer relações entre ângulos e classificar ângulos; • Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos.
3º	Soma dos ângulos internos de um triângulo.	<ul style="list-style-type: none"> • Deduzir o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo.

3.2.1. Conceitos e propriedades matemáticas na unidade de ensino

A Geometria é um dos ramos mais antigos da Matemática. Os Egípcios descobriram e usaram relações geométricas, sempre para resolverem os seus problemas quotidianos. Mais tarde, os Gregos começaram a estruturar as figuras geométricas, sem se preocuparem com aplicações. (Marques e Ferreira, 2010, p. 117)

As formas geométricas estão desde sempre na Natureza: quando se olha para o Sol, vê-se um círculo; na linha do horizonte, imagina-se uma recta; num favo de mel, observam-se hexágonos. A geometria também está presente na simetria das flores, das folhas, do corpo humano, das borboletas, etc.



Figura 9 – A Geometria na natureza

3.2.1.1. Geometria: Ângulos e Triângulos

Euclides, no primeiro livro de “*Os Elementos*”, define como ponto aquilo que não tem partes, recta como um comprimento sem espessura e superfície ou plano como o que tem comprimento e largura.

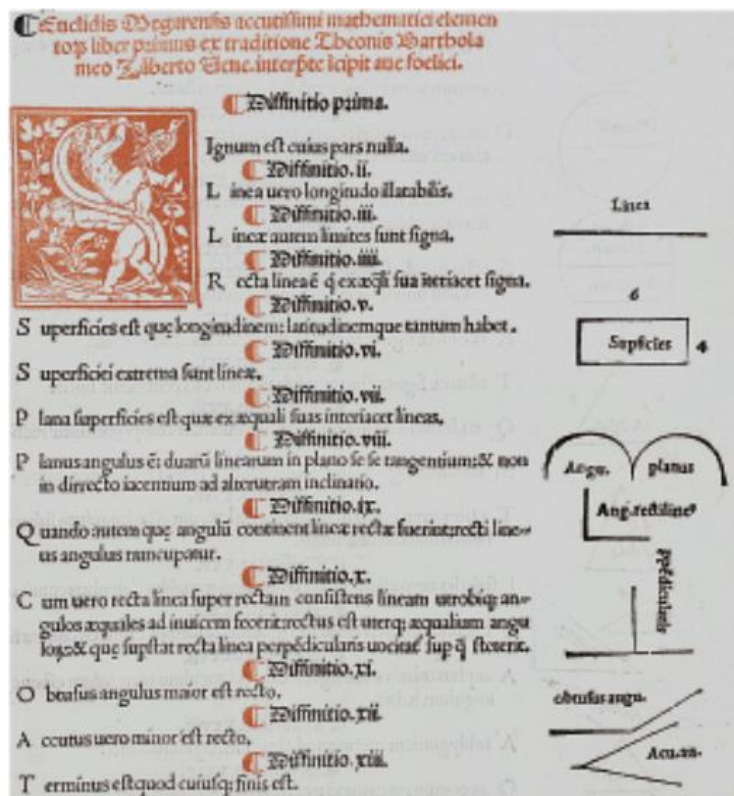


Figura 10 - Página de “Os Elementos” de Euclides traduzida para latim

No final do século XIX e princípio do século XX, alguns matemáticos procederam a uma profunda revisão dos fundamentos da Geometria. Entre esses matemáticos destacou-se Hilbert com o seu tratado *Grundlagen der Geometrie* (1899).

Daí em diante, ponto, recta e plano passaram a ser termos primitivos em geometria, ou seja, termos que, deixaram de necessitar de definição. (Oliveira et al, 2010, p. 66)

3.2.1.2. Elementos Geométricos

Aos pontos, rectas e planos dá-se o nome de elementos geométricos. O que são pontos, rectas e planos? E como se designam?

Ponto

O elemento geométrico mais básico é o ponto. Não tem tamanho, tem um único local e é representado por um “*ponto*” (.) e é definido por uma letra maiúscula. A figura representa o ponto P



Figura 11 - Modelo matemático de um ponto

Rectas

Segmento de recta

A melhor ideia para um segmento de recta é, um fio perfeitamente estendido ou o bordo de uma régua. O segmento de recta é limitado em cada extremidade por um ponto. Os pontos são representados por letras maiúsculas.

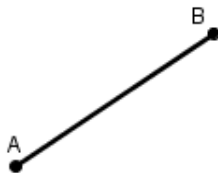


Figura 12 - Modelo matemático para segmento de recta

Para indicar um segmento de recta cujos extremos são os pontos A e B, temos duas maneiras: segmento AB ou \overline{AB}

Linha Recta

Recta é o prolongamento indefinidamente nos dois sentidos de um segmento de recta, de forma que qualquer parte da linha obtida, compreendida entre dois pontos distintos, seja um segmento de recta.

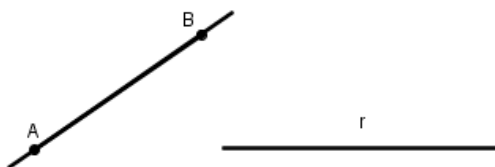


Figura 13 - Modelos matemáticos de recta

É naturalmente impossível representar-se uma recta que contenha todos os seus pontos, por isso é costume representa-la por uma porção, colocando-se por cima as letras correspondentes a dois pontos, para se dar ideia de que é ilimitada. Neste exemplo está representada a recta AB.

Uma recta também pode ser representada por uma letra minúscula e representa-se por recta *r*.

Os pontos existentes sobre a mesma recta dizem-se colineares.

Semi-Recta

Uma semi-recta é uma porção de recta ilimitada num sentido e limitada noutro. Ao ponto que limita a semi-recta chama-se origem.

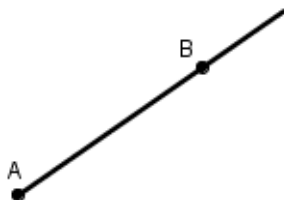


Figura 14 - Modelo matemático de semi-recta

A representação de uma semi-recta faz-se de duas maneiras: semi-recta AB, em que o ponto A, origem, deve figurar em primeiro lugar ou simplesmente $\overset{\bullet}{A}B$, em que o \bullet indica a origem.

Os axiomas ou postulados são proposições que se admitem sem justificação. Assim, duas linhas rectas distintas não podem ter mais que um único ponto comum, a que se chama o ponto de intersecção das duas rectas ou o ponto onde elas se cortam. Duas rectas nestas condições dizem-se concorrentes ou secantes.

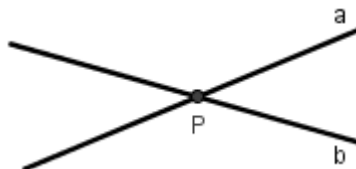


Figura 15 – Duas rectas concorrentes

Nesta figura estão representadas duas rectas **a** e **b**, sendo P o ponto de intersecção. Como $P \in a$ e $P \in b$, então P é o único ponto comum às duas rectas **a** e **b**.

Plano

A superfície de um lago com as águas em repouso ou o tampo de uma mesa, dão-nos a ideia de uma superfície plana que, por ser limitada, tem o nome de segmento de plano.

Se imaginarmos o prolongamento indefinido em todos os sentidos de um segmento de plano e, se tivermos em linha de conta que, qualquer parte fina da superfície obtida seja um segmento de plano, então, obtemos um plano. Como é completamente impossível representar um plano, optou-se por reproduzir uma porção dele.



Figura 16 - Modelo matemático de plano

Os planos costumam ser designados por letras gregas ou por letras maiúsculas manuscritas.

Os pontos existentes no mesmo plano dizem-se coplanares.

3.2.1.3. Ângulos

Consideremos dois semi-planos existentes no mesmo plano e, cujas rectas origens AA' e BB' se intersectam no ponto O . A esta representação dá-se o nome de ângulo convexo à intersecção dos dois semi-planos

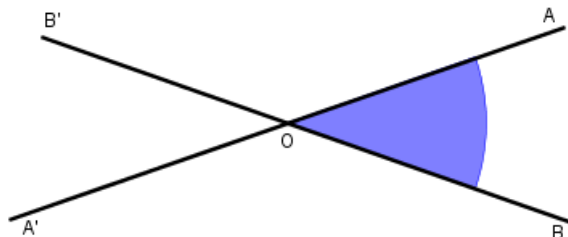


Figura 17 – Intersecção de dois semi-planos.

Nesta figura está inscrita, a cor azul, o ângulo convexo AOB , que é a intersecção dos semi-planos $AA'B$ e $BB'A$. As semi-rectas que limitam um ângulo, designam-se por lados e, à sua origem comum, chama-se vértice. O ângulo a azul na figura tem por lados OB e OA e por vértice o ponto O .

Podemos supor que este ângulo é gerado pela rotação de uma semi-recta partindo da posição inicial OB e movendo-se no plano do ângulo e no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (sentido directo) até coincidir com AO .

Para se designar um ângulo utiliza-se o símbolo \angle , indicando-se o vértice e os lados de modo a ficar em primeiro lugar, a letra correspondente ao lado inicial (neste caso B), seguida da letra correspondente ao vértice (neste caso O) e no fim a letra correspondente ao lado final. Assim $\angle BOA$ representa o ângulo a azul na figura.

Dá-se o nome de ângulo côncavo à união dos dois semi-planos já referidos.

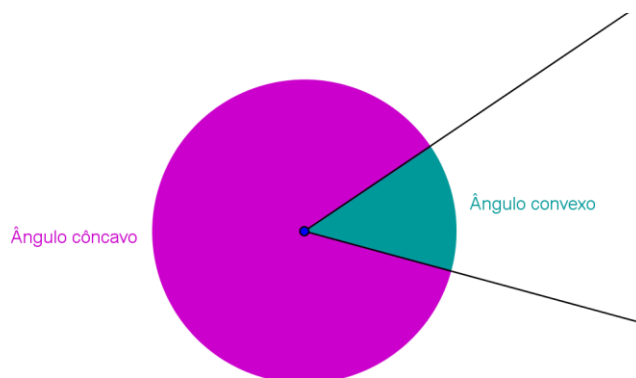


Figura 18 – Ângulos côncavo e convexo

É de notar que, a união de um ângulo convexo com um ângulo côncavo com os mesmos lados e o mesmo vértice é um plano.

Quando nos referimos a ângulo, apenas consideramos os convexos, salvo aviso em contrário.

Duas figuras geométricas dizem-se iguais ou congruentes se coincidem ou se deslocarmos uma delas fazendo-as coincidir uma com a outra. Assim, temos que, dois ângulos dizem-se iguais ou congruentes se coincidem ou deslocando um deles se pode fazer coincidir com o outro.

Dois ângulos iguais, como figuras iguais que são, gozam das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Chama-se ângulo raso, a cada um dos semi-planos cuja origem é a recta formada por duas semi-rectas opostas. As semi-rectas são os lados do ângulo e a sua origem comum é o vértice.

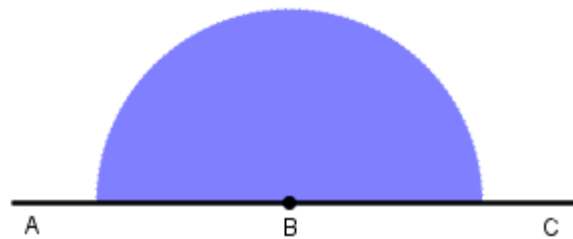


Figura 19 – Modelo matemático de ângulo raso

O ângulo sombreado na figura, $\angle CBA$, é raso porque as semi-rectas BC e BA são opostas. Estas semi-rectas são os lados do ângulo e B o seu vértice.

Um ângulo recto é o que é igual a metade de um ângulo raso.

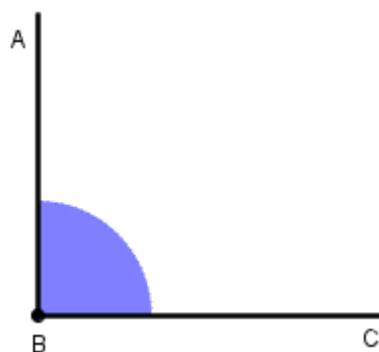


Figura 20 – Modelo matemático de ângulo recto

O ângulo nulo é aquele cujos lados são duas semi-rectas sobrepostas, com a mesma origem, ou seja com o mesmo vértice e que não tem pontos interiores.

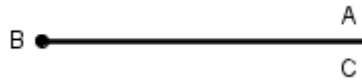


Figura 21 – Modelo matemático de ângulo nulo

Nesta figura está representado o $\angle ABC$ que é nulo.

O ângulo giro é aquele cujos lados são duas semi-rectas sobrepostas, com a mesma origem (vértice), e que ocupa todo o plano.

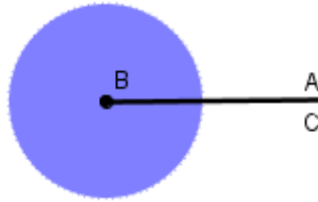


Figura 22 – Modelo matemático de ângulo giro

Desta definição e da de ângulo raso, conclui-se que o ângulo giro é o dobro do ângulo raso. Por conseguinte o ângulo giro é igual a quatro ângulos rectos.

Um **ângulo agudo** é aquele que é menor que um ângulo recto e maior que um ângulo nulo.

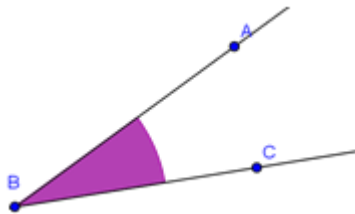


Figura 23 – Representação de um ângulo agudo

Um **ângulo obtuso** é aquele que é maior que um ângulo recto mas menor que um ângulo raso.

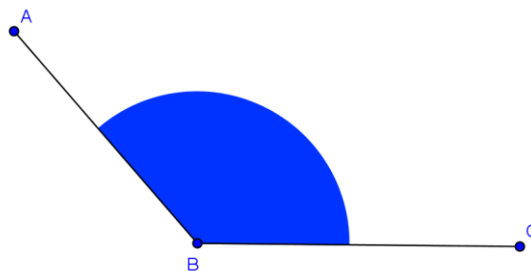


Figura 24 – Representação de um ângulo obtuso

Dois ângulos adjacentes são aqueles que têm o vértice e um lado comum, estando cada um dos outros lados situados nos semi-planos opostos cuja origem é a recta a que pertence o lado comum.

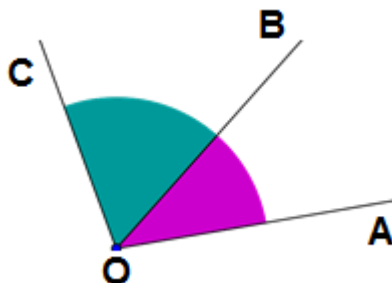


Figura 25 – Representação de ângulos adjacentes

Assim o $\angle AOB$ e o $\angle BOC$, da figura, são adjacentes porque têm o vértice O e o lado OB comum e os lados AO e OC estão situados nos semi-planos opostos OBA e OBC. No entanto, o $\angle AOB$ e o $\angle AOC$ que têm o vértice O e o lado OA comuns não são adjacentes, visto os lados OB e OC estarem ambos no semi-plano OAB ou OAC.

O $\angle AOC$ é igual à soma do $\angle AOB$ com o $\angle BOC$, isto é, $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$, assim, para se obter o ângulo soma de outros dois basta torná-los adjacentes, suprimindo o lado comum.

Dois **ângulos suplementares** são aqueles cuja soma é igual a um ângulo raso.

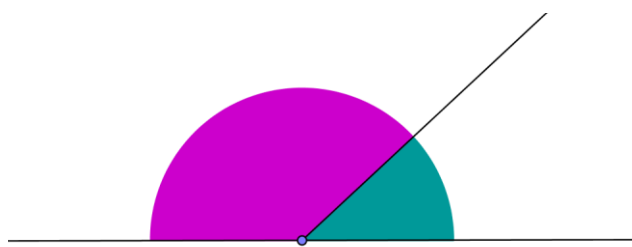


Figura 26 – Representação de ângulos suplementares

Dois **ângulos complementares** são aqueles cuja soma é igual a um ângulo recto.

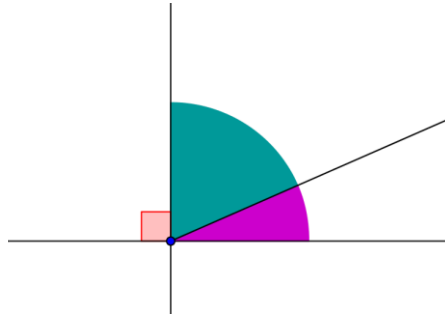


Figura 27 – Representação de ângulos complementares

3.2.1.4. Medida

Existem várias unidades destinadas à medição de ângulos. No contexto deste estudo usa-se o sistema sexagesimal, cujas unidades são o grau, o minuto e o segundo. O grau é o ângulo igual à nonagésima parte de ângulo recto, o minuto é o ângulo igual à sexagésima parte do grau e o segundo é o ângulo igual à sexagésima parte do minuto.

Para se fazer uma medição do comprimento de um segmento de recta, usa-se uma régua graduada. À semelhança desta medição, mas para se obter a medida de um ângulo, usa-se um transferidor. No nosso dia a dia as medições que se fazem, sejam de comprimentos, de ângulos, de capacidade,... são aproximadas e poucas vezes rigorosas, isto porque, o sentido visual leva-nos a cometer erros.

Em geometria, temos que ser rigorosos para podermos tirar conclusões, por isso não podemos fazer medições ou confiar nos nossos sentidos visuais.

Para chegar a conclusões rigorosas, baseamo-nos em factos verdadeiros que, ligados por meio do raciocínio, obtemos conclusões concretas.

Para se provar que não se erra no raciocínio, vai-se dando a justificação de cada passagem da questão tratada: é o que se chama fazer uma demonstração.

Dois ângulos dizem-se verticalmente opostos, se os lados de um estão no prolongamento dos lados do outro.

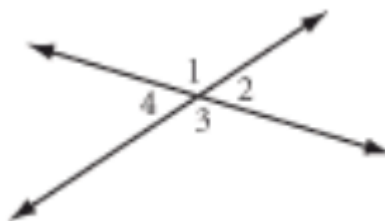


Figura 28 – Ângulos verticalmente opostos

Demonstra-se que dois ângulos verticalmente opostos são iguais.

No âmbito do 7.º Ano de escolaridade é adequado justificar esta igualdade tirando partido da visualização geométrica.

Começamos por desenhar duas linhas que se intersectam num ponto num papel vegetal. Dobramos o papel pelo vértice e verificamos que os ângulos têm a mesma amplitude.



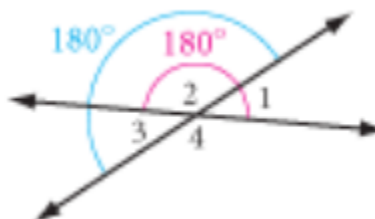
Figura 29 – Conjectura de ângulos verticalmente opostos

Se dobrarmos o papel no sentido contrário, verificamos que se sobrepõem, ou seja, têm a mesma amplitude.

Assim sendo $\angle 4 = \angle 2$ e $\angle 1 = \angle 3$

Podemos ainda verificar que esta conjectura se verifica.

Se somarmos as amplitudes dos ângulos 1 e 2 verificamos que se trata de ângulos suplementares. Se somarmos as amplitudes dos ângulos 2 e 3 verificamos também, que são ângulos suplementares. Isto porque, o ângulo 2, repete-se nas duas verificações, ou seja:



$$\begin{cases} \angle 1 + \angle 2 = \text{ângulo raso} \\ \angle 2 + \angle 3 = \text{ângulo raso} \end{cases} \Leftrightarrow \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 \Leftrightarrow \angle 1 = \angle 3$$

O mesmo se verifica para os ângulos 2 e 4.

Duas rectas dizem-se **paralelas** quando, situadas no mesmo plano, não têm nenhum ponto comum.



Figura 30 – Modelo matemático para rectas paralelas

Se estas duas rectas se juntam, tornam-se coincidentes, nestas condições, verificam-se as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Quando uma recta intersecta duas ou mais rectas, está a criar tipos de pares de ângulos que merecem o nosso estudo. Mais uma vez é interessante ver onde podemos encontrar estas situações no nosso quotidiano.

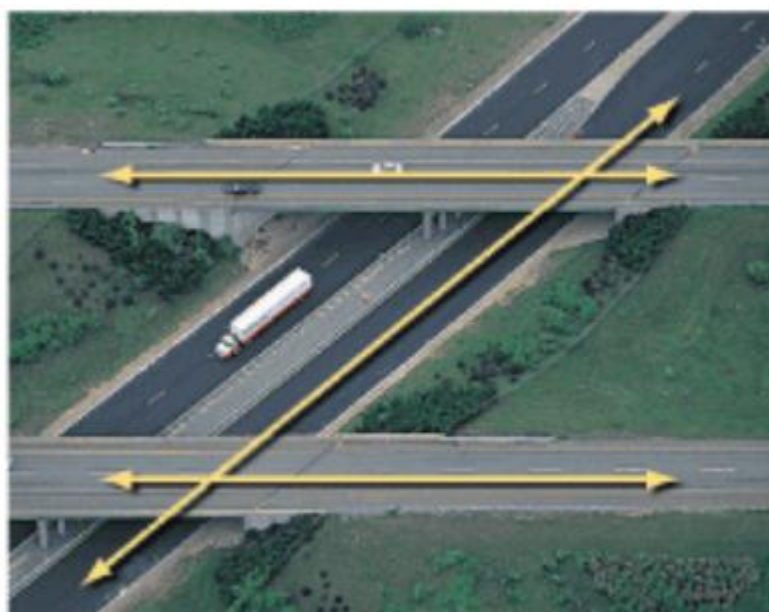


Figura 31 – Ângulos alternos internos no quotidiano

Com a posição destas três rectas podemos criar três tipos de ângulos correspondentes. Para uma melhor comunicação vamos-nos basear no esquema seguinte onde sabemos que as rectas horizontais são paralelas.

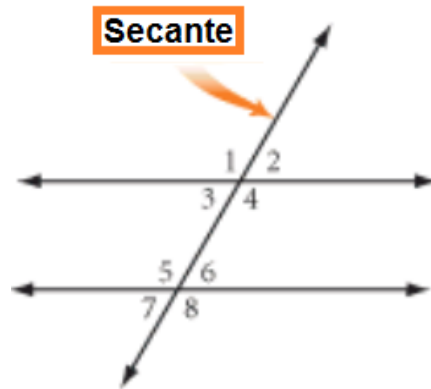
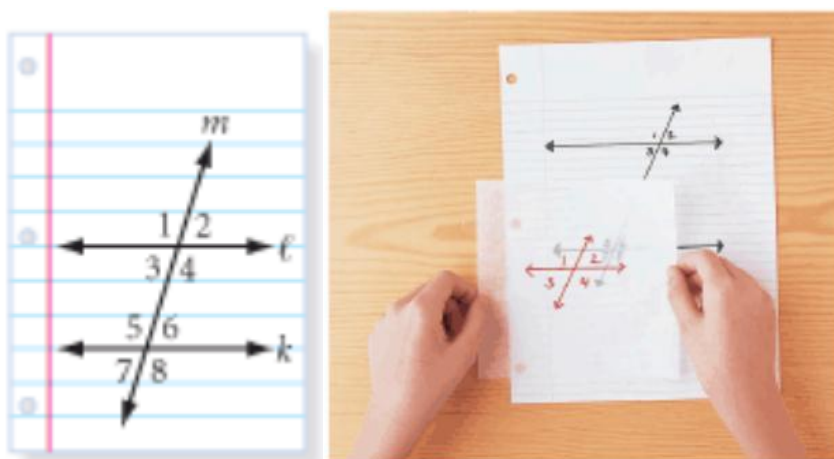


Figura 32 – Modelo matemático de ângulos alternos internos

Neste esquema podemos verificar:

- **Ângulos alternos internos** ($\angle 3$ com $\angle 6$ e $\angle 4$ com $\angle 5$)
- **Ângulos alternos externos** ($\angle 2$ com $\angle 7$ e $\angle 1$ com $\angle 8$)
- **Ângulos correspondentes** ($\angle 1$ com $\angle 5$, $\angle 2$ com $\angle 6$, $\angle 3$ com $\angle 7$ e $\angle 4$ com $\angle 8$)

Para o verificar podemos usar a técnica do papel vegetal de várias formas como se ilustra nas imagens seguintes, ou através de um *software* de geometria dinâmica.



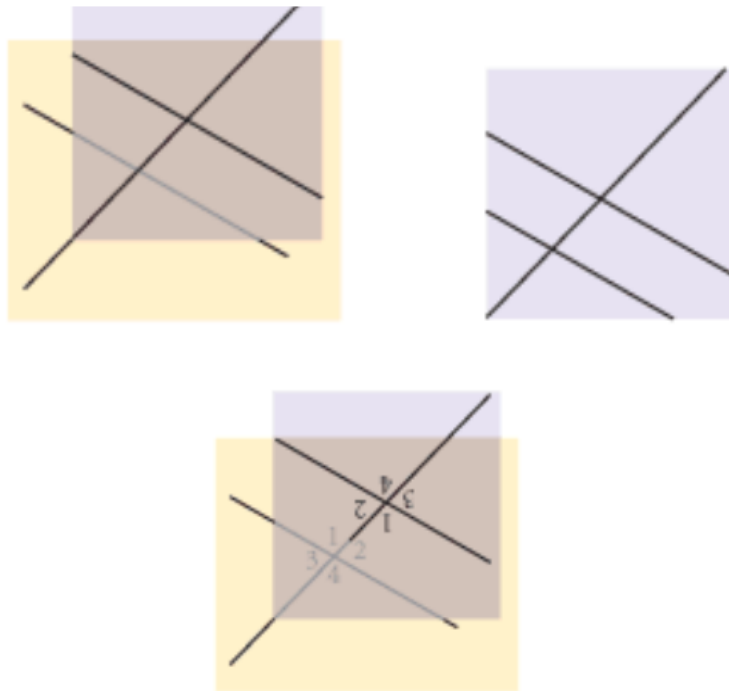


Figura 33 – Conjectura de ângulos alternos internos

Demonstra-se que, nestas condições, os ângulos alternos (internos e externos) e os ângulos correspondentes são iguais.

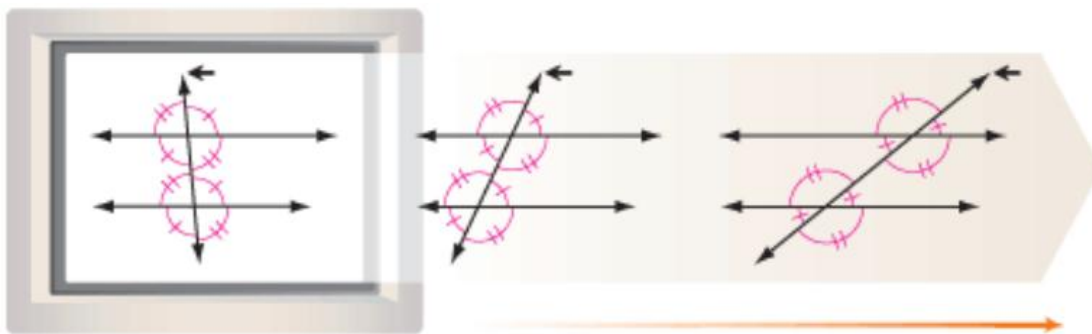


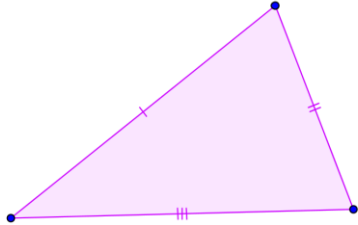
Figura 34 – Conjectura de ângulos alternos internos em *software*

Com a ajuda da figura 33, verificamos que os ângulos 2, 3, 6 e 7 são congruentes e os ângulos 1, 4, 5 e 8 também são congruentes.

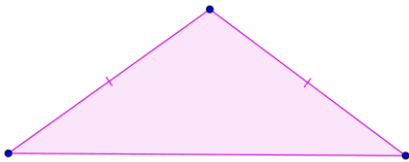
3.2.1.5. Triângulos

Triângulo, é um polígono (conjunto de pontos do plano limitado por uma linha poligonal fechada). Considera-se que os pontos dessa linha também pertencem ao polígono de três lados. Os triângulos podem ser classificados:

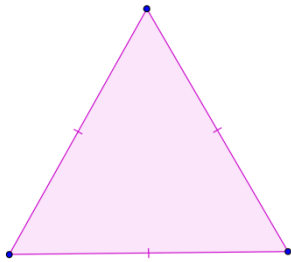
- Quanto ao **comprimento dos lados**:



Escaleno: Três lados diferentes. Não tem eixos de simetria.

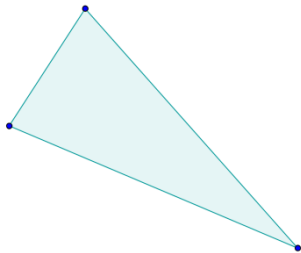


Isósceles: Dois lados iguais. Tem um eixo de simetria.

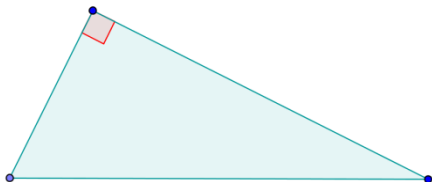


Equilátero: Três lados iguais. Tem três eixos de simetria.

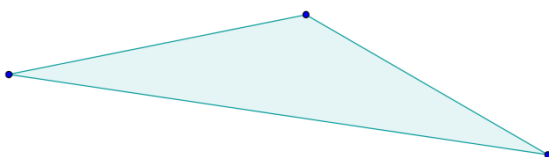
- Quanto à **amplitude dos ângulos**:



Acutângulo: Três ângulos agudos.



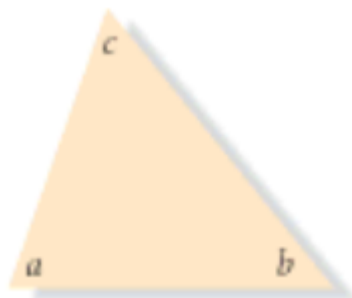
Retângulo: Um ângulo recto.



Obtusângulo: Um ângulo obtuso.

Podemos desenhar uma variedade infinita de triângulos com formas e amplitudes de ângulos diferentes, mas o que existe de comum em cada um deles?

Ao desenhar um triângulo qualquer, medimos a amplitude dos seus ângulos, com um transferidor e com o máximo rigor possível. De seguida somamos as amplitudes encontradas.



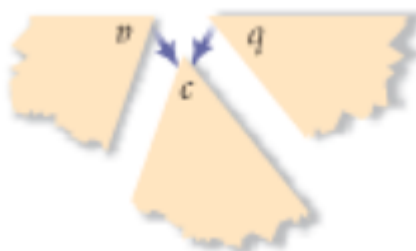
É aconselhável fazer o mesmo a outros triângulos de formas diferentes. O que verificamos? Sempre o mesmo valor? Será coincidência?

Vamos verificar de outra maneira.

Cortamos os vértices do triângulo, como observamos na figura seguinte.



De seguida arrumamos os ângulos de modo a que os seus vértices se encontrem num ponto.



Verificamos que os três ângulos juntos formam um ângulo raso.

Outra estratégia de raciocínio é desenhar uma recta paralela a um dos lados de um triângulo qualquer.

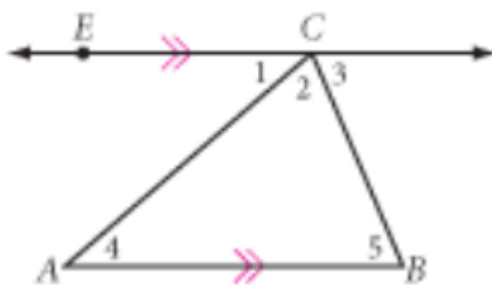


Figura 35 – Conjectura das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo

Para uma melhor exemplificação vamos numerar os ângulos como os da figura em cima. Verificamos que, a recta EC, é paralela ao lado AB do triângulo. O que pretendemos provar com este esquema é que os ângulos 1 e 3 são congruentes aos ângulos 4 e 5 respectivamente.

Vamos então demonstrar a conjectura:

Consideremos os ângulos 1 e 2 juntos, como um único ângulo que, junto ao ângulo 3 se tornam ângulos adjacentes e verificamos que: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \text{ângulo raso}$.

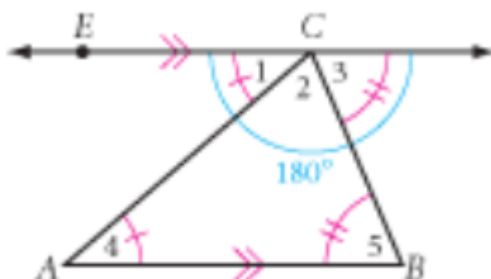


Figura 36 – Conjectura das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo

Por outro lado, verificamos que os lados AC e BC são secantes das duas rectas paralelas. Sendo assim, os ângulos 4 e 1, são ângulos alternos internos e congruentes por estarem entre rectas paralelas. O mesmo podemos afirmar, relativamente aos ângulos 3 e 5. Assim, concluímos que, a amplitude do ângulo 4 é igual à amplitude do ângulo 1. A amplitude do ângulo 5 é igual à amplitude do ângulo 3. Portanto as medidas dos ângulos internos de um triângulo somadas formam um ângulo raso.

3.2.2. A organização da unidade de ensino

A elaboração dos planos de aula procurou dar continuidade à planificação de médio e longo prazo do professor titular da turma. Após ter passado algum tempo em contacto com os alunos, apercebi-me das suas características, pontos fortes e pontos menos fortes e procurei adoptar um plano coerente com todos estes aspectos.

A planificação que serviu de suporte para este estudo centrou-se em seis planos de aula, que decorreram no início do terceiro período, mais propriamente entre os dias 27 de Abril e 13 de Maio. O tema abordado em todas as aulas foi a Geometria, repartida em dois subtópicos.

Todos os planos que elaborei seguiram as indicações que Paulo Abrantes (1985) faz no texto “*Planificação no ensino da Matemática*”. Antes de se fazer um plano de aula é necessário reflectir sobre o que se pretende ensinar, quais os objectivos e quais os procedimentos, ou seja, valorizar a previsão. Num plano de aula o professor deve considerar aspectos como os objectivos e os meios para atingir o seu propósito.

Paulo Abrantes refere ainda que, um plano de aula, não pode ser rígido, porque tem que se ter em conta a imprevisibilidade das situações que, necessariamente, irão surgir e conseqüentemente a resposta ao inesperado. Assim, é necessário reformular estratégias e modos de actuação.

A planificação desenvolvida nestas aulas é sobre a unidade onde a aula está inserida. A diferença entre esta planificação e as de médio e longo prazo reside no número de objectivos que deverá ser menor, a estratégia deverá insistir no pormenor e prever exemplos concretos de propostas de tarefas e sequência de actividades e o tempo reservado a cada uma delas. Quanto à avaliação a planear, esta deverá poder dar informação se os objectivos definidos para a aula foram, ou não, atingidos. A forma como se faz esta avaliação poderá ser variada, como uma simples observação, diálogo com os alunos, resolução de um problema, entre outras formas possíveis. Outro aspecto importante é evitar uma rotina de aula muito centrada no professor. A resolução destas questões poderá ser conseguida pela previsão criteriosa de actividades de abertura e final de aula.

Assim, as planificações realizadas para este estudo não foram rígidas, no sentido de limitar a minha prática, e permitiram que os alunos fossem espontâneos, mas sim um guia dos tempos atribuídos a cada actividade e ajudou a concretizar os objectivos que defini, utilizando as estratégias que previa que iriam acontecer. Ao longo de todo o

processo assumi uma atitude de alerta para que quando surgisse algo inesperado pudesse saber aproveitá-la de forma a haver uma aprendizagem para todos os alunos.

Quadro 3 – Quadro resumo dos planos de aula

Unidade Temática: Triângulos e Quadriláteros						
Data	27 Abril (90 min.) 4ª Feira 10:05	29 Abril (90 min.) 6ª Feira 11:45	3 Maio (90 min.) 3ª Feira 8:15	4 Maio (90 min.) 4ª Feira 10:05	10 Maio (90 min.) 3ª Feira 8:15	13 Maio (90 min.) 6ª Feira 11:45
Tópico	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos: amplitude e Medição 		<ul style="list-style-type: none"> • Soma dos ângulos internos de um triângulo 		<ul style="list-style-type: none"> • Ângulos: amplitude e Medição • Soma dos ângulos internos de um triângulo 	
Obj. Esp.	<ul style="list-style-type: none"> • Estabelecer relações entre ângulos e classificar ângulos; • Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos. 		<ul style="list-style-type: none"> • Deduzir o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo. 		<ul style="list-style-type: none"> • Estabelecer relações entre ângulos e classificar ângulos; • Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos. • Deduzir o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo. 	
Cap. Trans.	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar os dados, as condições e o objectivo de um problema; • Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados; • Discutir resultados, processos e ideias matemáticas; • Resolver problemas. 					
Rec. / Mater.	Ficha de Trabalho 1 GeoGebra.	Fichas de Trabalho 2 e 3	Ficha de Trabalho 4 GeoGebra.	Fichas de Trabalho 5 e 6 Recortes de triângulos	Ficha de Trabalho 7	Ficha de Trabalho 8

3.2.3. Estratégias utilizadas no processo de ensino e aprendizagem

Ensinar matemática é uma tarefa complexa. Não se pode dizer que exista uma regra para os alunos a aprenderem ou dos professores a transmitirem com eficiência, face à heterogeneidade das turmas que leccionam. Mas, actualmente, e devido à grande projecção que se tem dado ao estudo/ensino desta disciplina, existem diversas orientações sobre as formas de a ensinar que parecem ser mais adequadas. Estas devem ser tidas em linha de conta na orientação de certas tomadas de decisão da actividade profissional. Para tal, os professores devem saber e compreender a matemática que ensinam, assim como, devem ser capazes de utilizar os seus conhecimentos de forma flexível no decurso das suas actividades lectivas/didácticas. Por outro lado, devem também conhecer os alunos, ter em conta a sua faixa etária e, por isso, seleccionar muito bem as estratégias pedagógicas e de avaliação (NCTM, 2007, pp. 17, 18).

Os professores estabelecem e alimentam um ambiente que conduz à aprendizagem da matemática através das decisões que tomam, das conversas que moderam e do ambiente físico que criam. São as acções dos professores que encorajam os alunos a pensar, a questionar, a resolver problemas e a discutir as suas ideias, estratégias e soluções. O professor é responsável pela criação de um ambiente intelectual, no qual o raciocínio matemático sério constitui a norma. Sendo mais do que um ambiente físico de mesas, quadros e posters o ambiente da sala de aula transmite mensagens subtis acerca do que é valorizado na aprendizagem e no fazer matemática. São as discussões e a colaboração entre alunos estimuladas? Espera-se que os alunos justifiquem o seu raciocínio? Se aprendem a formular conjecturas, a experimentar várias abordagens de resolução de problemas, a construir argumentos matemáticos e a contra-argumentar torna-se, então, imperativa a criação de um ambiente que alimente este tipo de actividades. (NCTM, 2007, p. 19)

Um dos principais objectivos dos programas de matemática escolar consiste em estimular a autonomia e a aprendizagem dos alunos. A compreensão suporta este objectivo. Assim, ao ensino do tópico triângulos e quadriláteros, deve estar associado um ensino mais virado para a exploração e investigação.

Todas as estratégias utilizadas no processo de ensino/aprendizagem realizadas neste estudo tiveram por base as indicadas por Ponte, Oliveira e Candeias (ME, 2009, pp. 5-8). As tarefas aqui propostas, não são apenas exercícios, em que se aplicaram

conhecimentos previamente apreendidos, mas sim, exercícios para os quais foram formuladas estratégias próprias e, ao mesmo tempo, se mobilizaram conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas.

As tarefas apresentadas neste estudo, são o ponto de partida para o desenvolvimento e formalização de novos conceitos e representações, principalmente o que deve ser levado a efeito pelos alunos.

Cada aula com a ficha de trabalho teve, basicamente, três momentos, a saber: apresentação das tarefas; o trabalho dos alunos a pares; e por fim, a discussão com toda a turma. As aulas foram todas de 90 minutos e divididas em momentos distintos, sendo o trabalho autónomo dos alunos realizado em tempo útil de forma, a reservar tempo para uma proveitosa discussão. A importância de existirem, em aula, uma variabilidade de momentos distintos, está associada à dinâmica que esta deve ter, de modo a não haver, por parte dos alunos, uma quebra da sua actividade, mas sim um maior envolvimento da sua parte, na realização das tarefas propostas.

A fase da apresentação das tarefas deve ser curta e motivadora. Cabe ao professor explicar oralmente aspectos importantes, ou termos que os alunos não conheçam. Deve, também, indicar qual o modo de trabalhar que pretende e o tempo que têm para a realização da tarefa.

No momento em que os alunos trabalham autonomamente, o professor deve circular pela sala, verificando se existem dificuldades na resolução das questões. Nesta fase há uma grande tendência do professor para responder a dúvidas ou a validação de conjecturas feitas pelos alunos, mas se o fizer estará a resolver as tarefas em vez deles. Uma possível estratégia será o professor responder aos alunos com outras perguntas de forma a obrigá-los a pensar um pouco mais. No caso de haver um grande número de alunos a sentir a mesma dúvida, é aconselhável haver uma interrupção no trabalho autónomo para haver uma pequena discussão que os esclareça.

O terceiro momento é a discussão final. Nesta fase os alunos são chamados a apresentar o seu trabalho para que, em grande grupo, se analise a estratégia utilizada por cada colega. Esta dinâmica de aula permite uma análise de situações matematicamente significativas e promove o desenvolvimento das capacidades de comunicar, raciocinar e argumentar.

O momento da discussão é fundamental, porque é com a reflexão feita sobre as resoluções dos alunos que estes confrontam ideias, exercitando assim a argumentação, e aprofundando os seus conhecimentos. Para os alunos que, por qualquer motivo, não tenham concluído a tarefa pedida, este é o momento em que podem participar e assim conseguirem consolidar os seus conhecimentos. É muito importante, no final da discussão, haver uma participação de todos os alunos de forma a promover a sistematização das ideias fundamentais aprendidas nesta aula.

Nas planificações apresentadas constam tarefas que os alunos têm que apresentar, os conhecimentos e capacidades usando, por vezes, recursos em ambiente de geometria dinâmica: o GeoGebra. Esta é uma boa alternativa de resolução de tarefas, porque proporciona aos alunos uma experiência de aprendizagem significativamente enriquecida.

As tarefas propostas nesta unidade, permitem aos alunos observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas, levando-os a operarem, explorar, manipular e experimentar.

A resolução de problemas é o cerne deste estudo, porque acredito que contribui para desenvolver a visualização e o sentido crítico. O uso de instrumentos de desenho, e de programas de geometria dinâmica permite ao aluno realizar explorações de forma a desenvolver o sentido visual.

De acordo com o PMEB (ME, 2007), são Finalidades da Matemática no Ensino Básico:

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;
- Promover o pensamento do aluno, desenvolvendo os conceitos de espaço e plano;
- Desenvolver as capacidades de raciocínio, de resolução de problemas e de comunicação, bem como o espírito crítico;
- Facultar processos de aprender a aprender e condições que despertem o gosto pela aprendizagem permanente;
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Contribuir para que os alunos caminhem em direcção a estas finalidades foi, é e será, naturalmente, a maior preocupação que terei ao leccionar as minhas aulas. Por isso, as fichas de trabalho apresentam uma diversidade de situações que visam a aquisição de conhecimentos e o desenvolvimento de capacidades e de valores, procurando tornar os alunos matematicamente competentes.

Apesar das aulas estarem centradas nas tarefas das fichas de trabalho elaboradas, procurei também que os alunos utilizassem o manual adoptado como apoio à consulta de alguma informação útil à actividade dos alunos ou à resolução de problemas.

Todas as fichas de trabalho que fazem parte da unidade são pensadas numa realização a pares, salvo as fichas que se destinam a trabalho de casa e que se pretende que sejam realizadas individualmente.

3.2.3.1. Ficha de Trabalho 1

O primeiro contacto, de forma conclusiva, dos alunos com o *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra, fez-se através da Ficha de Trabalho 1¹. Esta ficha apresenta tarefas de exploração do GeoGebra para que os alunos compreendam que o computador é uma ferramenta útil para criar evidência que os conduza à formulação de conjecturas.

A ficha foi pensada, de maneira a introduzir algumas definições importantes para o estudo de ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos com rectas paralelas.

Por uma questão de tempo e de funcionalidade da aula, foi entregue um ficheiro da imagem da ficha, a cada grupo, de forma a haver exploração da mesma. No entanto, na ficha são apresentados os comandos para a construção de modo a permitir ao aluno a sua realização, em casa.

A partir da construção e da medição de ângulos, os alunos devem identificar outros ângulos com as mesmas características e daí conseguirem obter conjecturas sobre os ângulos apresentados na ficha.

A ficha apresenta, também, duas tarefas de resolução de problemas, para que os alunos possam descobrir ângulos desconhecidos apenas e exclusivamente com as

¹ Esta ficha foi realizada no primeiro dia de aulas do 3.º período no entanto os alunos tiveram a oportunidade de realizarem explorações no GeoGebra no último dia de aulas do 2.º período. Nesta aula foram apresentados alguns comandos do programa e os alunos tiveram a oportunidade de explorar as características do *software* de forma informal e sem orientação geométrica.

propriedades estudadas anteriormente. Estas tarefas destinam-se ao uso de papel e lápis sem o recurso a materiais de medição.

Estas tarefas permitem que os alunos consolidem conhecimentos que serão fundamentais ao estudo deste subtema. As definições, propriedades e relações, para além, de necessárias, à sua compreensão, desenvolvem o raciocínio e a comunicação matemática, capacidades, essas, úteis ao bom desenvolvimento cognitivo dos alunos.

3.2.3.2. Ficha de Trabalho 2

A Ficha de Trabalho 2 apresenta um conjunto de exercícios e problemas geométricos de modo a se conseguir uma boa consolidação de conhecimentos sobre ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos. Trata-se de uma ficha que apela à interpretação de figuras geométricas, de acordo com os dados apresentados em cada alínea.

A produção escrita das justificações destas tarefas tem como objectivo trabalhar a comunicação de vários argumentos, seguindo um raciocínio lógico, na resolução de problemas.

O desenvolvimento do raciocínio matemático, a construção de uma cadeia argumentativa e a utilização de uma linguagem e argumentos geométricos apreendidos na aula anterior, fazem desta ficha uma mais-valia para o percurso dos alunos, neste estudo.

3.2.3.3. Ficha de Trabalho 3

A Ficha de Trabalho 3 é uma ficha de realização em casa. Comporta os mesmos objectivos da ficha anterior e a mesma metodologia.

Com esta ficha pretende-se que todos os alunos, a nível individual, consigam escrever as justificações e a comunicação de vários argumentos, segundo um raciocínio lógico, na resolução de problemas.

3.2.3.4. Ficha de trabalho 4

A amplitude dos ângulos internos de um triângulo foi estudada, tendo como suporte a Ficha de Trabalho 4. Esta ficha está dividida em duas questões: a primeira obriga a utilização do GeoGebra e a segunda, a demonstrações matemáticas.

Espera-se, com esta ficha, que os alunos cheguem à conjectura da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo e que justifiquem essa conjectura utilizando ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos.

A primeira tarefa propõe a construção de um triângulo qualquer e a determinação das amplitudes dos seus ângulos internos. O aluno deve registar essas amplitudes numa tabela na ficha. Depois de mover os vértices do triângulo de forma a obter outro diferente deve voltar a registar as amplitudes na tabela. É neste processo que os alunos irão verificar a utilidade e simplicidade do GeoGebra. Depois de repetirem este processo em cinco triângulos, irão verificar que a amplitude dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° . Estes dados, depois de registados, irão ser discutidos, em aula, pela turma.

Para que fique claro que esta é uma propriedade, temos que generalizar e não tirar conclusões apenas com alguns triângulos, por isso é proposta uma segunda tarefa. Esta tarefa, de cariz problemático, já exige raciocínio e argumentação matemática a fim de fundamentar a propriedade.

3.2.3.5. Ficha de Trabalho 5

O conjunto de tarefas existentes na Ficha de Trabalho 5 remete para a resolução de problemas geométricos envolvendo conteúdos leccionados nas aulas desta unidade.

A resolução dos problemas propostos, para além da obtenção de uma solução final, tem como objectivo o desenvolvimento do raciocínio matemático, permitindo aos alunos a construção de uma cadeia sustentada por linguagem e argumentos geométricos, revistos e aprendidos nas aulas anteriores. Mais uma vez, também esta ficha pretende a produção escrita das justificações, com vista ao desenvolvimento da comunicação matemática, utilizando argumentos válidos, segundo um raciocínio lógico.

Atingir os objectivos específicos contemplados nesta ficha significa que os alunos tenham conseguido deduzir e determinar o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo.

3.2.3.6. Ficha de Trabalho 6

Esta ficha começa por relembrar aos alunos a classificação dos triângulos quanto ao comprimento dos lados e quanto à amplitude dos ângulos. Está composta por três questões.

A primeira tarefa é de exploração e pretende levar os alunos a classificar os triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos através de eixos de simetria. Com esta tarefa pretende-se fazer uma discussão em grande grupo, para que os alunos cheguem à conjectura das relações existentes entre lados e ângulos de um triângulo.

As questões dois e três consistem na resolução de problemas cujo objectivo é o desenvolvimento do raciocínio matemático. Também esta ficha pretende a produção escrita das justificações, com vista ao desenvolvimento da comunicação matemática, utilizando argumentos válidos.

3.2.3.7. Ficha de Trabalho 7 e 8

As Fichas de Trabalho 7 e 8 são formadas por uma sequência de problemas geométricos para determinar amplitudes de ângulos mediante um esquema ilustrativo e de dados que permitem tirar conclusões.

Com estas fichas, os alunos, devem ser capazes de compreender as relações entre elementos de um triângulo (lados e ângulos) e usá-los, na resolução de problemas, e o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo. Devem também, distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos.

Ao realizar estas fichas foi meu objectivo que os alunos fossem capazes de resolver problemas envolvendo os conteúdos já mencionados, pelo que deveriam: saber identificar os dados, as condições e o objectivo do problema; conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados; e discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

3.3. Síntese das aulas

O conjunto de aulas leccionadas, para obter respostas às questões deste estudo, foi planeado de acordo com o cumprimento dos objectivos específicos. Estes objectivos

foram todos atingidos, no entanto, alguns dos planos não foram cumpridos na sua totalidade, principalmente, no que diz respeito à resolução de tarefas importantes ao desenvolvimento matemático do aluno. Em face deste incumprimento, o plano da aula seguinte foi estruturado de modo a que todas as tarefas fossem concretizadas.

A maioria das aulas decorreu na sala da matemática onde existiam muitos materiais alusivos ao tema, inclusive posters de ângulos e triângulos. Nesta sala havia também 14 computadores.

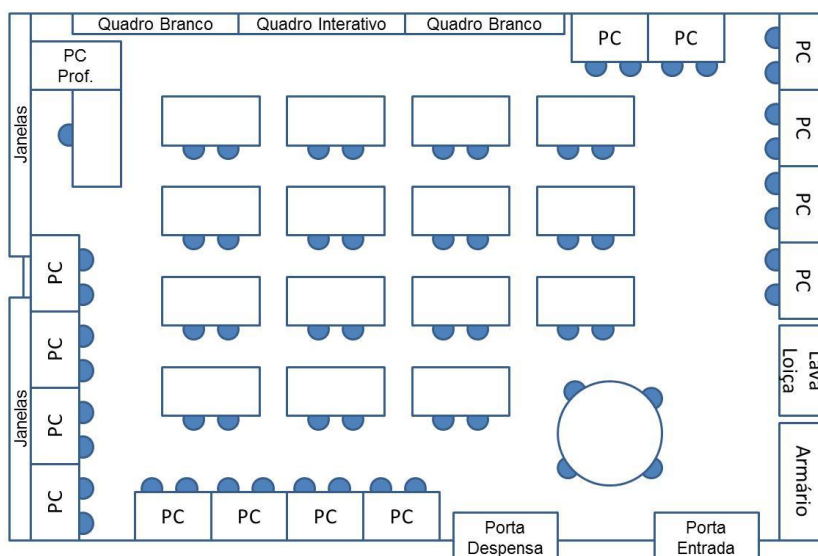


Figura 37 - Planta da sala de aula

3.3.1. Primeira aula: 27 de Abril de 2011

Sendo esta a primeira aula do terceiro período, também foi a primeira aula deste estudo.

Preparei antecipadamente a sala, verificando se os computadores estariam operacionais e se estaria instalado o *software* de geometria dinâmica: GeoGebra. Copiei para cada computador um ficheiro contendo a imagem que pretendia que, os alunos trabalhassem, a fim de dar resposta às questões da ficha. O facto de não pedir aos alunos para que procedessem à sua construção deve-se à falta de tempo, no entanto, incluí na ficha todos os comandos para que em casa o pudessem fazer. Por fim, desliguei apenas os monitores, para não os distrair ou causar-lhes entusiasmo, por irem trabalhar nos computadores.

À medida que os alunos entravam, pedi-lhes que se sentassem, nos respectivos lugares, dois a dois, de acordo com os grupos que já tinha estabelecido.

Depois de devidamente instalados, comecei com uma revisão sobre a classificação de ângulos e sobre o conceito de ângulos congruentes. Para atingir o objectivo das revisões e, porque temia que, para muitos, se iria tornar maçador ouvir tudo de novo decidi que, seria mais aliciante projectar slides em PowerPoint (Anexo I) com a roda dos alimentos ao mesmo tempo que ia fazendo uma breve alusão à classificação de ângulos.

Tendo nesta aula, também a intenção, de introduzir as definições de ângulos verticalmente opostos e de ângulos alternos internos, distribuí a ficha de trabalho 1 e encaminhei os alunos para os lugares onde se encontravam os computadores, de modo a ligarem os monitores e abrirem o ficheiro referente à ficha de trabalho. Pedi, também, que realizassem a ficha até à questão 2 para, posteriormente, fazermos a discussão de ângulos alternos.

Os alunos desenvolveram a actividade sem dificuldades e entenderam o modo de funcionamento do GeoGebra. Aliás, a maioria conseguiu definir ângulos verticalmente opostos, apenas com uma pequena orientação, escrita no quadro, de uma definição para registarem no caderno.

A ficha de trabalho 1 prosseguiu com a realização da questão 3. No entanto, houve necessidade, já prevista por mim, que os alunos soubessem o que eram ângulos alternos internos antes de resolverem a questão 3. Assim, a definição foi registada no quadro. O objectivo desta questão era que os alunos descobrissem se os ângulos alternos internos são congruentes quando as rectas não são paralelas. Para obterem esta definição projectei a imagem de ângulos alternos internos em rectas não paralelas e depois das medições os alunos registaram no caderno diário a congruência de ângulos alternos internos.

Já sentados nos seus lugares, na mesa de trabalho, os alunos realizaram a questão 4 da ficha de trabalho – uma resolução de problema. Realizaram apenas esta questão devido à escassez de tempo e porque pretendia fazer a discussão em grande grupo da questão 4. A questão 5 ficou para terminarem em casa.

Estas tarefas permitiram aos alunos rever conhecimentos que lhes serão fundamentais para a resolução de problemas no estudo de triângulos. As definições, propriedades e relações, para além de necessárias para o estudo dos triângulos, têm a capacidade de poderem ser utilizadas como argumentos úteis na comunicação matemática.

Sendo a primeira aula da unidade Triângulos e Quadriláteros, esta foi planeada com o intuito de introduzir conceitos que serviriam de base no estudo dos triângulos. Por outro lado, era necessário definir o conceito de ângulo, uma vez que este será transversal a todas as aulas.

Desta forma, nesta aula procurei introduzir os conceitos essenciais às aulas seguintes, optando por utilizar um recurso viável à realização das tarefas que pretendia propor e que visavam o cumprimento de alguns dos objectivos previstos para a unidade de Triângulos e Quadriláteros.

3.3.2. Segunda aula: 29 de Abril de 2011

À semelhança da aula anterior, esta decorreu na mesma sala e solicitei aos alunos que mantivessem os grupos da aula anterior para dar continuidade à dinâmica já criada.

Nesta aula optei por mandar fazer uma síntese da aula anterior. Para isso foi representado no quadro uma imagem de ângulos alternos internos onde as rectas não eram paralelas e um aluno foi marcar esses ângulos. Ao lado desta figura foi representado uma outra onde sugeria ângulos alternos internos mas entre rectas paralelas, foi marcado os ângulos pedidos. Os alunos lembraram a congruência dos ângulos justificando acertadamente em qual das figuras se poderia observar.

De forma a consolidar todos estes conceitos foi feito, em grande grupo, uma tarefa do manual onde era apenas facultado a amplitude de um ângulo e teriam que descobrir todos os outros aplicando os conhecimentos de ângulos alternos internos e ângulos opostos.

Seguidamente, foi representada a figura da tarefa 4 da ficha da aula anterior no quadro, que serviria de base para recordar o problema resolvido no final da aula e que senti que os alunos, com a pressa de saírem, não aproveitaram como eu desejaria. Aproveitei a imagem para indicar alguns nomes novos que iriam aprender como ângulos suplementares, complementares e adjacentes.

Logo de seguida os alunos resolveram a ficha de trabalho 2 e foi feita a discussão, chamando um aluno ao quadro por cada tarefa da ficha. Senti que a ficha foi bem sucedida, talvez devido a toda a prática que tivemos antes. No entanto, as justificações que os alunos deram aquando da sua resolução ficaram um pouco aquém do desejado.

Já no final da aula foi distribuído um pequeno apontamento sobre ângulos suplementares, complementares e adjacentes para que colassem no caderno. Não dei

muita importância a estas definições por se tratarem apenas de nomes de ângulos, que os alunos poderão estudar em casa.

Distribuí, também a ficha de trabalho 3, como trabalho de casa.

A produção escrita das justificações nos exercícios e problemas visa trabalhar a comunicação de vários argumentos, de maneira a trabalhar a construção de argumentações.

As resoluções de problemas aqui propostos destinam-se ao desenvolvimento do raciocínio matemático, a construção de uma cadeia argumentativa, utilizando linguagem matemática e geométricos revistos na própria aula e na aula anterior.

Desta forma, previ esta aula como a última de uma síntese sobre ângulos alternos internos e ângulos verticalmente opostos. É claro que estes conceitos vão ser incorporados nas aulas seguintes mas em contexto de triângulos.

3.3.3. Terceira aula: 3 de Maio de 2011

A aula decorreu na sala já mencionada, havendo uma preparação dos computadores antes dos alunos entrarem. Após o momento de entrada dos alunos, na sala, procedeu-se a uma sistematização da aula anterior e através da apresentação de uma figura, onde foram feitas algumas perguntas sobre ângulos complementares, suplementares e adjacentes. Foi ainda, apresentado um contra exemplo de ângulos adjacentes.

Após este momento de sistematização foi entregue a ficha de trabalho 4 com as indicações necessárias para a sua resolução e também foi pedido aos alunos para formarem os pares habituais desde a primeira aula do estudo. Os alunos dirigiram-se aos computadores e abriram o *software* GeoGebra.

A ficha de trabalho 4 foi realizada em duas fases. A primeira questão da ficha foi realizada com o GeoGebra, de seguida, já no lugar, foi feita a discussão em grande grupo para esta questão. Foi dado tempo suficiente para a resolução da segunda parte da ficha e, seguidamente, a discussão em grande grupo da questão 2.

Era importante que os alunos compreendessem que, qualquer conjectura para se tornar válida, para todos os casos, é necessário que exista uma demonstração. Nela utilizaram-se questões que direccionaram as respostas a fim de obterem a generalidade.

3.3.4. Quarta aula: 4 de Maio de 2011

A quarta aula começou com a distribuição da ficha de trabalho 5 e seguiu-se um momento de trabalho autónomo dos alunos a pares e de seguida a sua discussão.

O pretendido na planificação para esta aula seria entregar a ficha de trabalho 6 e fazer a sua discussão, no entanto, tal não foi possível, sendo que os alunos ainda realizaram a tarefa 1 e foi feita a discussão desta mesma tarefa.

A produção escrita das justificações nesta ficha tinha como objectivo trabalhar a comunicação de vários argumentos, de modo a trabalhar a construção de raciocínios.

A resolução de problemas aqui descritos dirige-se ao desenvolvimento do raciocínio matemático, à construção de uma cadeia de raciocínio, utilizando linguagem e argumentos geométricos revistos na própria aula e em aulas anteriores.

3.3.5. Quinta aula: 10 de Maio de 2011

A quinta aula começou de uma forma semelhante às outras, em que os alunos se dirigiram às suas mesas e trabalharam com os pares habituais.

Esta aula começou com a reentrega da ficha de trabalho 6, onde os alunos tiveram a oportunidade de prosseguir com as questões 2 e 3 em trabalho autónomo. Após o tempo estipulado passou-se à discussão destas questões com o grande grupo.

Seguidamente foi entregue a Ficha de trabalho 7 e o procedimento foi semelhante, houve três fases: apresentação da ficha; trabalho autónomo e discussão colectiva.

3.3.6. Sexta aula: 13 de Maio de 2011

A sexta e última aula, tornou-se semelhante à anterior, foi entregue a ficha de trabalho 8, os alunos tiveram o momento autónomo e a discussão. Os objectivos desta ficha eram os mesmos da ficha anterior uma vez que foi retirada da brochura da DGIDC, apenas houve a separação das tarefas para formar duas fichas de forma a não saturar os alunos.

A ficha de trabalho 8 era uma das mais importantes deste estudo. Todas as suas tarefas consistiam na resolução de problemas geométricos e onde era solicitado todas as justificações das afirmações mencionadas.

A resolução de problemas propostos, nesta ficha, tinha como objectivo o desenvolvimento do raciocínio matemático, permitindo a construção de uma cadeia fundamentada em linguagem e argumentos geométricos, revistos e apreendidos nas aulas anteriores. Esta ficha, também, pretendia a produção escrita das justificações, com vista ao desenvolvimento da comunicação matemática, utilizando argumentos válidos, segundo um raciocínio lógico.

Ao atingir, com a concretização desta ficha, os objectivos específicos, deduzi que os alunos conseguiram captar o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo, estabelecer relações entre ângulos, assim como os classificar e, por fim, que conseguissem distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos.

As ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e na resolução de problemas. Para analisar problemas e estudar matemática, os alunos deverão adquirir experiência na utilização de diversos tipos de representações quer visuais quer através de coordenadas.

NCTM (2007).

4. Métodos e Procedimento de recolha de dados

A metodologia utilizada, neste estudo, depende do objectivo que se pretende atingir, da natureza dos dados recolhidos e da forma como vão ser analisados e que possam obter resultados que respondam às questões enunciadas.

Neste capítulo são apresentadas as opções metodológicas tomadas e os instrumentos utilizados de forma a proceder à recolha de dados. Para tal foram utilizados dois métodos: observação com registo de áudio e recolha documental.

4.1. Método de investigação

A investigação usada neste trabalho é de natureza qualitativa e descritiva. Para Yin (1994) (in Araújo, Pinto, Lopes e Nogueira) é a estratégia mais utilizada quando queremos respostas cujas perguntas questionam o “como?” e o “porquê?”.

Para Coutinho e Chaves (2002) (in Araújo, Pinto, Lopes e Nogueira), a investigação educativa comporta estudos de natureza interpretativa / qualitativa. Quando um investigador está pessoalmente implicado na investigação confere aos planos qualitativos um forte cariz descritivo, por isso grande parte dos investigadores consideram o método de investigação uma modalidade de plano qualitativo.

Um estudo qualitativo comporta características próprias:

- Tem como objectivo de estudo uma entidade bem definida: um programa; uma instituição; um sistema educativo; uma turma; uma pessoa; ou uma entidade social.
- Pretende responder aos “comos” e aos “porquês” que caracterizam o objecto do estudo.
- Utiliza uma variedade de instrumentos e estratégias de recolha de dados (observações directas e indirectas, entrevistas, questionários, registos de áudio e vídeo, diários, cartas, entre outros).
- Tem um forte cunho descritivo que conduz a uma análise.
- Procura identificar padrões, não testa hipóteses.
- Gera novas hipóteses, novas teorias e novas questões para futura investigação.
- Baseia-se no trabalho de campo.
- O investigador é o principal instrumento de recolha de dados.

O objectivo de um estudo qualitativo é o investigador compreender o acontecimento em estudo e ao mesmo tempo desenvolver teorias mais genéricas do fenómeno observado, ou seja, o investigador explora, descreve ou explica os factos como sucederam proporcionando conhecimento acerca do fenómeno estudado de forma a comprovar ou contrastar efeitos e relações presentes no caso. Ponte (1994) afirma que o objectivo é descrever e analisar. Merriam (1998) (in Araújo, Pinto, Lopes e Nogueira) acrescenta outro objectivo que é a avaliação.

Assim, Gomez, Flores e Jimenez (1996, p. 99) (in Araújo, Pinto, Lopes e Nogueira) referem que o objectivo geral de um estudo qualitativo é “explorar, descrever, explicar, avaliar e/ou transformar”.

Um estudo qualitativo, tal como outros tipos de estudo, tem vantagens e desvantagens. No quadro seguinte podemos observar a síntese das vantagens e desvantagens existentes neste tipo de estudo.

Quadro 4 – Vantagens e desvantagens de um estudo qualitativo

Vantagens	Desvantagens
<ul style="list-style-type: none"> • Produz informação de fácil entendimento, o que facilita a compreensão e comunicação entre os pares. • Foca pontos únicos que se perderiam num estudo de larga escala, o que pode sustentar a chave para compreender a situação em estudo. • Relatam com muito pormenor, a situação em estudo, o que proporciona uma maior compreensão da realidade. • O conhecimento que origina pode ser aplicado em outros casos similares, podendo servir de suporte à interpretação dos mesmos. • Pode ser implementado por um único investigador. 	<ul style="list-style-type: none"> • Falta de objectividade (perspectiva do investigador). • Alongamento no tempo o que nem sempre é exequível em termos práticos ou financeiros. • Manipulação inconsciente de dados (observador / observados). • Os resultados não são generalizáveis. • Assegurar a validade interna constitui um problema a que o investigador tem de estar sempre atento.

Para que este estudo faça sentido foi necessário estabelecer o problema e os objectivos, assim, houve uma base teórica onde tudo é fundamentado. O investigador traçou um modelo geral para a sua investigação onde seleccionou os participantes. Foi

elaborada uma estratégia de recolha de dados, técnicas de análise dos dados e por fim é necessário apresentar conclusões.

Estando perante um estudo qualitativo, este trabalho descreve a forma como os alunos utilizam os seus conhecimentos geométricos na resolução de problemas e que estratégias desenvolvem na resolução de problemas; é interpretativo porque procura compreender a forma como os alunos interpretam o enunciado dos problemas geométricos e as dificuldades que sentiram na resolução dos problemas. Ou seja, este trabalho desenvolve-se em torno de uma descrição interpretativa, que o investigador previu e aplicou de forma a responder à importância da resolução de problemas.

4.2. Os participantes

Num estudo qualitativo a escolha dos participantes é fundamental, porque constitui o cerne da investigação. Este estudo foi realizado numa turma do 7.º ano de escolaridade em que o universo é constituído por 27 alunos.

Todos os alunos participaram na investigação, no entanto, para a análise das resoluções das fichas de trabalho foram seleccionados apenas quatro, não como uma amostra da turma, mas por estes alunos constituírem características diferentes entre si.

O facto de conhecer os alunos desde o início do ano lectivo, permitiu-me seleccionar os dois pares que poderiam contribuir com dados mais interessantes. Os quatro alunos que foram alvo de registo têm níveis de desempenho diferentes.

Os alunos Mário e Guilherme, são críticos e perspicazes a analisar as tarefas, são curiosos o que me levou a pensar que me poderiam dar as respostas pretendidas neste estudo.

Por sua vez, Júlia e Isabel, demonstram ter algumas dificuldades, no entanto são alunas muito interessadas e trabalhadoras. Este grupo foi seleccionado porque existe um grande interesse por parte da Júlia em ensinar a Isabel e esta em aprender com a sua colega, o que torna este grupo aliciante para esta investigação devido ao seu diálogo constante.

O objectivo deste estudo foi explicado a todos os Encarregados de Educação aos quais foi solicitada uma autorização para a participação dos seus educandos (Anexo III).

4.3. Recolha de dados

No processo de recolha de dados, este estudo apela a técnicas próprias para uma investigação qualitativa. As técnicas utilizadas normalmente são: diário de bordo, o relatório, a entrevista/questionário e a observação. Há que os distinguir, porque cada um fornece dados diferentes.

Diário de bordo: Trata-se de um dos principais instrumentos do estudo qualitativo, porque consiste em obter notas de observações do trabalho de campo.

Entrevista/ Questionário: É outro documento importante, porque o investigador com este processo, percebe a forma como os alunos interpretam o assunto a ser estudado.

Relatórios: Convém que ao longo do estudo se façam relatórios descritivos ou reflexivos como ferramenta de recolha de dados. Estes relatórios podem constar no diário de bordo ou simplesmente numa fase final onde é registado todas as conclusões sobre os dados obtidos.

Observação: O investigador deverá estar constantemente a observar os seus participantes, pode usar o seu diário de bordo e ir registando o que observa, ou então fazer-se valer de gravadores de áudio e de vídeo.

Neste estudo, a recolha de dados fez-se com base na minha observação e nos registos das aulas, onde foram feitas gravações de áudio e vídeo. Outra fonte de recolha de dados extremamente útil para o meu estudo foi as fichas de trabalho em que os alunos tiveram a oportunidade de resolver problemas geométricos.

Neste estudo decidi dividir as produções dos alunos em dois tipos: a resolução de problemas escritos envolvendo a oralidade reproduzidas através das gravações áudio/vídeo e um mini-teste que avalia 10% da nota final do período.

A recolha documental teve, pois, como suporte as fichas de trabalho e o mini-teste. A análise das resoluções das fichas de trabalho permitiu-me compreender como os alunos interpretaram os enunciados, as estratégias que usaram, como utilizaram os conhecimentos anteriormente adquiridos e, por fim, as dificuldades que sentiram em resolver problemas matemáticos. O mini-teste percebeu o que cada aluno individualmente apreendeu com as aulas deste estudo.

As gravações de vídeo realizadas nas aulas foram utilizadas, apenas, para ver os momentos de discussão das resoluções e confrontá-las com a percepção que tive da aula.

A observação com registo áudio do trabalho realizado por dois grupos de alunos foi seleccionada como um dos métodos de recolha de dados mais importantes para o meu estudo, uma vez que, trabalhando a pares, os alunos teriam oportunidade de discutir os conceitos aprendidos, as dificuldades apresentadas e as opções tomadas relativamente às estratégias, fornecendo, assim, dados que não são perceptíveis através da análise das resoluções escritas.

Nas resoluções das tarefas por escrito pretendi analisar e identificar os conhecimentos de geometria, as estratégias utilizadas e as dificuldades sentidas pelos alunos. Assim, nesta análise, o meu interesse enquanto investigadora centrou-se mais nos processos do que nos resultados ou produtos conseguidos pelos alunos, ou seja, na forma como resolveram os problemas geométricos. Com os registos vídeo e áudio procurei, por sua vez, analisar as estratégias mencionadas nas produções escritas e saber como interpretam os alunos o enunciado dos problemas geométricos.

A análise dos dados assim conseguidos foi realizada de uma forma descritiva, procurando compreender também o significado que os alunos atribuem às propriedades, conceitos e relações na resolução de problemas.

Enquanto os alunos classificam, criam, desenham. Modelam, traçam, medem e constroem, a sua capacidade de visualização das relações geométricas desenvolve-se.

Princípios e Normas para a Matemática Escolar

5. Apresentação e análise de dados

Com o objectivo de obter as respostas às questões formuladas neste estudo, foram analisadas algumas tarefas contidas nas fichas de trabalho e um mini-teste.

As tarefas contidas nas fichas de trabalho foram resolvidas em díade, de forma a promover a comunicação matemática, assim como a utilização de notação, simbologia e vocabulário próprios. A análise do mini-teste, resolvido individualmente, permitiu compreender se o aluno adquiriu os conhecimentos esperados.

Para um entendimento mais aprofundado da evolução dos alunos no tema em estudo, centrei-me em dois pares, com os seguintes nomes fictícios: o par Mário e Guilherme e o par Júlia e Isabel.

5.1. Os alunos

5.1.1. Mário e Guilherme

Mário é um rapaz de 12 anos, pouco interventivo e pouco participativo, apresenta bom comportamento dentro da sala de aula. O seu nível a matemática é de 5 e ambiciona ser médico.

Guilherme tem 12 anos, é bastante participativo e interventivo, apresenta bom comportamento dentro da sala de aula. As suas intervenções são praticamente de alto nível, utiliza raciocínios brilhantes e avançados para a sua idade. A sua avaliação a matemática é de 4 apenas pela sua distração na leitura dos enunciados, acabando por responder erradamente às tarefas propostas. O seu sonho é um dia ser futebolista.

Este grupo funcionou bastante bem, uma vez que nenhum dos dois alunos tira conclusões sem a opinião do outro elemento do grupo. Todas as fichas de trabalho realizadas em conjunto foram preenchidas pelo aluno Mário, uma vez que, segundo eles, o Guilherme não possui uma letra legível. Através da gravação áudio consegui ter uma percepção do trabalho cooperativo realizado por este grupo. Quando trabalham em conjunto, percebe-se que o Mário é mais atento e está constantemente a chamar a atenção do colega, que é muito distraído não lendo atentamente o enunciado. Individualmente, o Mário sobressai em relação ao Guilherme, devido, apenas, ao nível de concentração deste.

5.1.2. Júlia e Isabel

Júlia é uma aluna de 12 anos, bastante atenta e participativa na sala de aula. Apresenta com orgulho o seu caderno por estar com aspecto limpo e organizado, costuma estudar e realizar todos os trabalhos que lhe são pedidos. Mostra ter algumas dificuldades a matemática, no entanto tem gosto pela disciplina questionando e esclarecendo sempre as suas dúvidas. O seu nível a matemática é 3 e ambiciona ser atriz.

Isabel, mais introvertida, tem 12 anos e é pouco participativa na sala de aula. Apresenta estar à vontade com a matemática, pois tem gosto e paciência em explicar tudo o que sabe aos colegas com mais dificuldades. O seu nível a matemática é de 5 e quer, um dia, ser advogada.

A Júlia e a Isabel trabalham bastante bem em grupo. Uma completa a outra, pois enquanto Isabel ensina o que sabe à Júlia, esta questiona a sua colega em diversas ocasiões. Foi bastante interessante ouvir as suas discussões, porque trabalham essencialmente pela lógica, isto é, se aprenderam ângulos alternos internos, por exemplo, esperam que este assunto seja abordado na tarefa que têm à frente. Na gravação de áudio é recorrente ouvir-se frases do género: *“Não estou a ver, mas tem que haver um ângulo alterno interno por aqui”*, ou seja, tentam aplicar os assuntos recentemente abordados na aula.

5.2. *Análise de tarefas contidas nas fichas de trabalho*

Com as fichas de trabalho que surgiram ao longo das aulas da unidade de ensino, procurei que os alunos adquirissem conhecimentos, soubessem pensar matematicamente e comunicar os seus raciocínios de forma lógica, para que se compreendessem mutuamente usando a linguagem matemática.

Assim, parece-me adequado apresentar resoluções de algumas tarefas que constituíram para os alunos problemas matemáticos e perceber a evolução que houve no decorrer das seis aulas da unidade. As tarefas aqui apresentadas seguem uma ordem

cronológica, nunca se tendo passado para a ficha de trabalho seguinte sem antes se fazer uma discussão, da anterior, com toda a turma.

Para esta análise selecionei algumas tarefas das fichas de trabalho 2, 5, 7 e 8, uma vez que incluem tarefas que considere representarem problemas matemáticos para os alunos.

5.2.1. Ficha de trabalho 2

Sendo esta ficha resolvida no segundo dia das aulas da unidade, apresenta um conjunto de problemas geométricos com o objectivo de consolidar conhecimentos sobre ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos, aprendidos na aula anterior.

As tarefas apresentadas aos alunos visavam também o trabalho em torno da comunicação de vários argumentos, segundo um raciocínio lógico, na resolução de problemas.

O desenvolvimento do raciocínio matemático, a construção de uma cadeia argumentativa, utilizando linguagem e argumentos geométricos aprendidos na aula anterior, pretendia-se que constituíssem uma mais-valia para o percurso dos estudantes, nesta unidade de ensino.

Nas tarefas apresentadas nesta ficha pretendia-se que os alunos determinassem o valor das amplitudes dos vários ângulos assinalados por letras nas figuras.

Tarefa 1.1.

Para a resolução deste problema, os alunos tinham que identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos suplementares. Nas gravações de áudio está registado que o primeiro comentário feito pelos alunos, Mário e Guilherme, acerca desta tarefa refere-se à possibilidade de medição, com o transferidor, das amplitudes dos ângulos pedidos. Depressa verificaram que na ficha está mencionado a não utilização deste instrumento, centrando então a sua discussão na figura e nos dados desta:

Mário: Isto tudo é 360. Estes dois dá 180.

Guilherme: E sabemos que este é igual a este.

Mário: Como vamos chamar este ângulo?

Guilherme: Põe azul.

Assim sendo, os alunos procuraram estabelecer relações entre os ângulos com base nos conhecimentos adquiridos. Para além disso, preocuparam-se com a forma

como deveriam designar os ângulos cujas amplitudes eram conhecidas, o que se reflectiu na sua resolução.

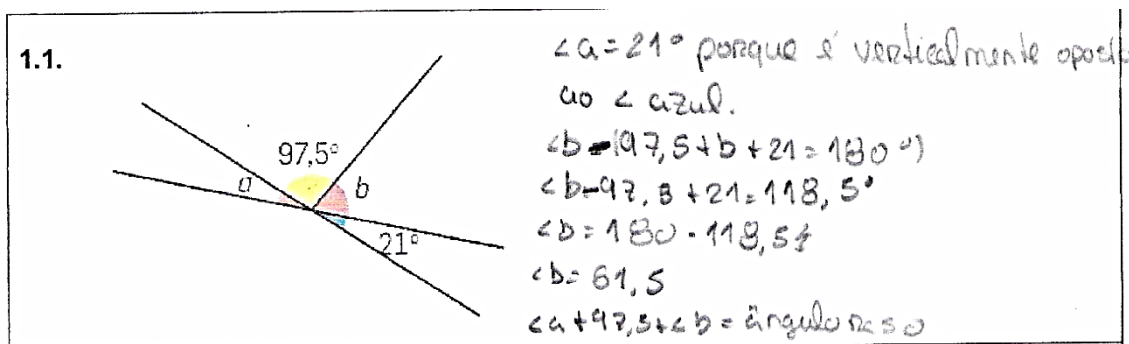


Figura 38 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 1.1 da ficha de trabalho 2

Desta resolução constata-se que Mário e Guilherme determinaram correctamente os ângulos a e b , pois perceberam que o ângulo a é verticalmente oposto ao ângulo azul (21°) e que a soma dos ângulos amarelo, vermelho e azul formam um ângulo raso. Apesar de o registo de como obtêm a amplitude do ângulo b não ser totalmente claro os alunos procuraram indicar entre parênteses o cálculo da amplitude do ângulo b , antecedido por $\angle b$ – o que me leva a pensar que pretendiam mostrar que aquela expressão entre parênteses se referia ao cálculo da amplitude desse ângulo. Na linha imediatamente abaixo, usam os mesmos símbolos para a subtracção, calculando assim o valor correcto do $\angle b$.

Na última linha da resolução desta tarefa, os alunos focam-se numa outra relação existente entre os ângulos da figura, tendo em conta que os ângulos a , b e o de $97,5^\circ$ formam um ângulo raso, pelo que, de certo modo, acabaram por abrir caminho a uma verificação dos resultados obtidos.

O grupo da Júlia e Isabel, não apresentou dificuldade em resolver o problema, começando a sua abordagem do seguinte modo:

Isabel: Há aqui alguma coisa verticalmente oposta?

Júlia: Há este aqui. Logo o a também é 21°

Isabel: Depois fazemos 180 menos 21 menos $97,5$ e já está.

Júlia: 180 ? Tens a certeza?

Isabel: Sim isto é um ângulo raso.

Este comentário demonstra que as alunas estabeleceram um plano, começando por procurar um tipo de ângulos conhecidos, neste caso, os ângulos verticalmente opostos. Através da observação da figura verificaram que poderiam chegar ao valor de b através

de um cálculo numérico uma vez que que identificaram a existência de um angulo raso. Ao mesmo tempo, as alunas evidenciam que compreenderam a relação existente entre os ângulos verticalmente opostos.

Na resolução exposta verifica-se que os alunos identificam os ângulos apresentados, por meio de letras.

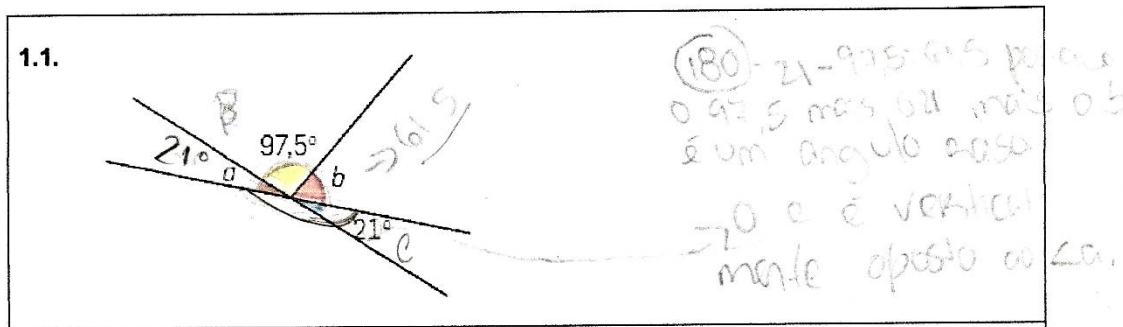


Figura 39 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 1.1 da ficha de trabalho 2

A determinação da amplitude dos ângulos pedidos foi correctamente efectuada e bem justificada, no entanto, não são completamente claras na indicação de que estão a determinar o ângulo b. É de salientar também que este grupo faz-se valer de setas para completar os seus argumentos.

Tarefa 1.2.

Para os alunos Mário e Guilherme esta tarefa não apresentou grandes dificuldades.

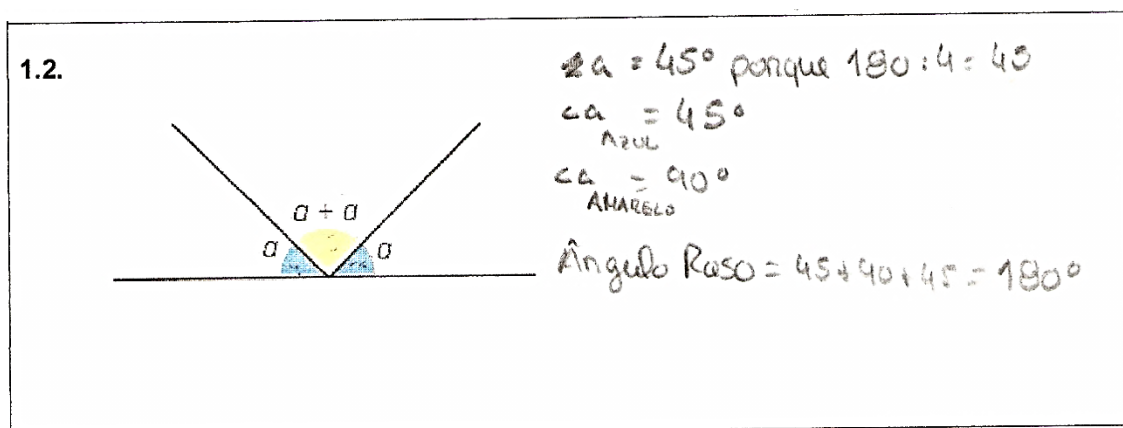


Figura 40 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 1.2 da ficha de trabalho 2

Este grupo identificou os dados do enunciado e rapidamente delineou o caminho a percorrer para responder à questão. Reconheceu que os ângulos da figura formavam um ângulo raso, dividiram 180 por 4, mas não apresentaram a justificação. Embora o enunciado peça a amplitude do ângulo a , estes alunos optaram por indicar a amplitude do ângulo azul e do ângulo amarelo. No final da resolução, confirmaram se os resultados originavam um ângulo raso, ou seja, fizeram a verificação dos resultados obtidos.

Em relação ao grupo da Júlia e da Isabel, constatei que existiu alguma dificuldade em interpretar os dados do problema, tenho solicitado a ajuda à professora. Através das gravações de áudio, consegue-se compreender as dificuldades existentes:

Júlia: Não percebo. O $a + a$ é o a ?

Isabel: Isto aqui é verticalmente oposto a este [refere-se aos ângulos azuis]. Stora? Estes dois ângulos são verticalmente opostos, não são?

Professora: O que são ângulos verticalmente opostos?

Isabel: São ângulos que têm o mesmo vértice.

Professora: E mais. É só isso que os define?

Isabel: Os lados têm que ser prolongados.

Professora: Então? São verticalmente opostos?

Júlia e Isabel: Não. Não são verticalmente opostos.

Professora: Mas há uma coisa que sabem desde já, o que é?

Isabel: Isto aqui tudo é 180.

Neste extracto de diálogo, nota-se que as alunas, contrariamente ao que tinham evidenciado na tarefa anterior, ainda não aprenderam verdadeiramente o conceito de ângulo verticalmente oposto, uma vez que associaram os ângulos azuis como sendo verticalmente opostos.

A resolução que apresentam baseia-se no método de tentativa e erro. Começaram por atribuir a cada amplitude, 30° e somando os três ângulos obtiveram 128° , constatando assim, que não formavam um ângulo raso. De seguida fizeram o mesmo raciocínio mas para a amplitude de 45° , obtendo assim a amplitude pretendida.

1.2.

$45 + 45 = 90$
 $90 + 45 + 45 = 180^\circ$
 Temos que
 justificar...
 $30 + 30 + 60 = 120$
 $180 : 4 = 45 \checkmark$
 $45 + 45 + 90 = 180$

Figura 41 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 1.2 da ficha de trabalho 2

Tarefa 1.3.

Mário e Guilherme conseguiram identificar todos os dados do problema e tiraram as suas conclusões. Através do seguinte diálogo verifica-se que resolveram com facilidade o problema, sendo de realçar a sua necessidade de justificar o seu raciocínio.

Guilherme: Se este aqui é 46, este também é 46. [o ângulo alterno interno ao verticalmente oposto a este]

Mário: Porquê? Temos que justificar.

Guilherme: Porque as linhas são paralelas e como estão entre estas linhas os ângulos são congruentes.

Com este pequeno diálogo é perceptível constatar que Guilherme referia-se ao ângulo verticalmente oposto ao ângulo de amplitude 46° e este por sua vez é congruente ao ângulo a por serem ângulos alternos internos e porque as rectas d e e serem paralelas.

Em relação à reprodução escrita, verifica-se que os alunos justificam o valor da amplitude do ângulo a , no entanto, não mencionam que os ângulos são congruentes devido às rectas serem paralelas, apesar de o terem referido no diálogo entre eles.

1.3.
d//e

$\angle a = 46^\circ$ porque existe um ângulo que é verticalmente oposto ao \angle azul (46°) que é alterno interno ao ca .
 $\angle b = 180 - \angle a (46^\circ) =$
 $\angle b = 134^\circ$
 $\angle c = 180 - 41 =$
 $\angle c = 139^\circ$
 $a + 41 + c + b = \text{Ângulo giro} = 360^\circ$
 $a + b = c + 41$

Figura 42 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 1.3 da ficha de trabalho 2

O cálculo da amplitude do ângulo b foi obtido pelos alunos fazendo a diferença entre 180° e a amplitude do ângulo a , obtendo assim o valor de 134° . Na indicação do ângulo b , verifica-se que houve uma preocupação em referir de onde surgiu o valor de 46° , uma vez que os alunos indicam este valor entre parênteses. Em relação ao cálculo da amplitude do ângulo c , os alunos realizaram um raciocínio idêntico ao anterior.

Mais uma vez, os alunos chamam a atenção para uma outra relação existente entre os ângulos da figura tendo em conta que os ângulos a , b , c e o de 41° formam um ângulo giro, pelo que, de certo modo, acabaram por abrir caminho a uma verificação dos resultados obtidos. Além disso, relacionam os ângulos suplementares como sendo uma igualdade.

O grupo da Júlia e Isabel teve dificuldades em interpretar os dados do problema, foi necessário a ajuda da professora para que percebessem que o aspecto visual da figura poderia induzir em erro:

Isabel: o a e o 41 são iguais, não é?

Júlia: É, parece

Isabel: Stora?, Estes dois são iguais?

Professora: Não sei. Porquê que são iguais?

Isabel: Porque parecem.

Professora: Tenham cuidado com isso. Só podem usar os dados que o enunciado vos dá. Quais os dados que o enunciado nos dá?

Isabel: Então, estes valores.

Professora: Só?

Isabel: Que estas duas rectas são paralelas.

Professora: E o que podem saber com toda esta informação?

Júlia: Que são ângulos alternos internos.

Através deste pequeno diálogo, verifica-se que as alunas inicialmente referiram que o ângulo de 41° e o ângulo a são iguais por alusão à figura, no entanto, apresentam alguma insegurança e optam por pedir ajuda. Depois de um pequeno “empurrão” da professora para que interpretassem o enunciado, as alunas repararam no paralelismo das rectas, levando-as a reconhecer a existência de ângulos alternos internos. Assim a resolução fez-se sem dificuldade.

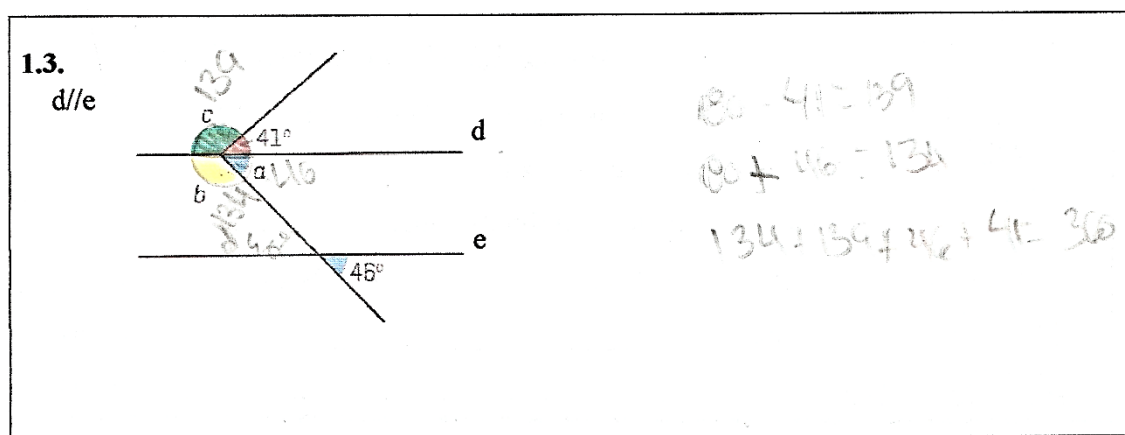


Figura 43 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 1.3 da ficha de trabalho 2

Através da resolução escrita verifiquei que identificaram o ângulo c e o ângulo de amplitude 41° como sendo um ângulo suplementar, embora não o tivessem justificado. A comunicação matemática, mais uma vez, assenta no uso da figura, na qual indicam directamente as amplitudes dos ângulos porque nos cálculos auxiliares que apresentam ao lado, não indicam quais os ângulos que estão a calcular. Um olhar mais atento da figura, permite perceber que estas alunas marcaram o ângulo verticalmente oposto ao de amplitude 46° e assim indicam, correctamente a amplitude do ângulo a , mas não houve qualquer tipo de justificação para este facto.

A amplitude do ângulo b foi calculada da mesma forma que o ângulo c , embora se veja na resolução escrita o sinal de adição, mas certamente foi um engano porque o que efectivamente realizaram foi uma subtracção.

É bastante interessante verificar que este grupo teve a preocupação de fazer uma verificação, quanto a se, as amplitudes dos quatro ângulos formavam um ângulo giro.

5.2.2. Ficha de trabalho 5

A ficha de trabalho 5 foi realizada na quarta aula desta unidade e teve como objectivo o desenvolvimento do raciocínio matemático, possibilitando que os alunos, já

nesta fase, soubessem construir uma cadeia argumentativa com linguagem e argumentos geométricos, revistos e aprendidos nas aulas anteriores. É importante que os alunos durante a realização desta ficha percorram as quatro fases mencionadas por Polya.

Cada elemento do grupo recebeu um exemplar da ficha e a pedido da professora, resolveram-na a lápis. Aquando da discussão com a turma, cada elemento acrescentou o que faltava na sua resolução, com uma esferográfica, de forma que cada um ficasse com a correcção na própria ficha.

Nas tarefas apresentadas nesta ficha pretendia-se que os alunos determinassem o valor das amplitudes dos vários ângulos assinalados com as letras nas figuras.

Tarefa 1.4.

Para a resolução deste problema, os alunos têm que identificar ângulos verticalmente opostos, ângulos suplementares e saberem que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

A resolução escrita do grupo formado pelos alunos, Mário e Guilherme, revela que estes perceberam o enunciado, estabeleceram um plano, executaram-no mas não verificaram os resultados, no final.

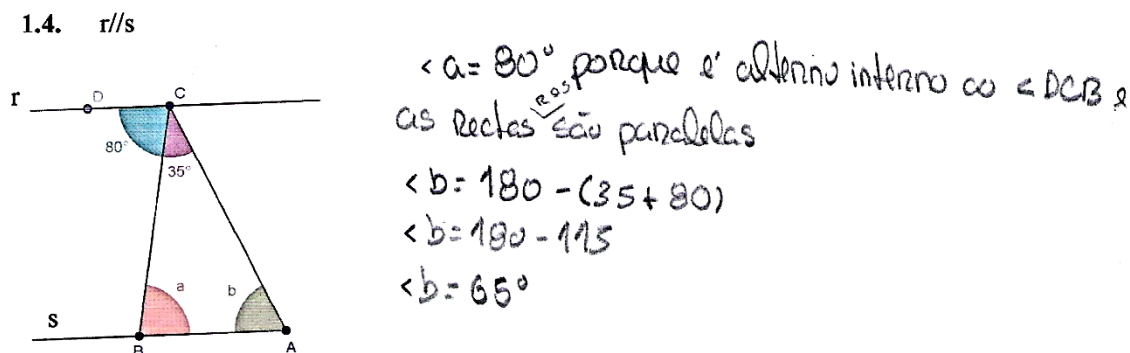


Figura 44 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 1.4 da ficha de trabalho 5

Os alunos justificam a amplitude do ângulo a através do seu ângulo alterno interno, porque as rectas r e s são paralelas, demonstrando terem compreendido os dados do problema. A amplitude do ângulo b está correctamente calculada e indicada. No cálculo da amplitude do ângulo b regista-se, uma preocupação, por parte dos alunos, em indicarem que 180° é subtraído à soma dos outros dois ângulos internos usando correctamente os parênteses. Falta-lhes justificar a origem do 180° que mencionam nos cálculos, porque poderá ser a amplitude dos ângulos internos do triângulo ou a soma dos

três ângulos formando um ângulo raso. Através da gravação áudio não é possível esclarecer esta dúvida.

Verifica-se, também uma melhoria significativa na escrita das justificações de um consequente desenvolvimento da comunicação matemática, no entanto ainda se constata que não usaram o símbolo de ângulo, colocando-o posteriormente aquando da resolução da ficha em grande grupo.

O grupo da Júlia e Isabel, demonstra boa compreensão dos dados do problema, estabelecem um plano, executam-no e não apresentam verificação dos resultados.

Através de um pequeno excerto do diálogo do grupo apercebi-me que as alunas traçaram oralmente de imediato, a sua estratégia de resolução.

Isabel: Este é alterno interno com este, logo também é 80

Júlia: Sim, e agora fazemos 180 menos 80 menos 35 que dá qualquer coisa

Isabel: E que é alterno interno daquele.

No entanto, a resolução escrita deste problema apresenta falhas quanto à comunicação matemática.

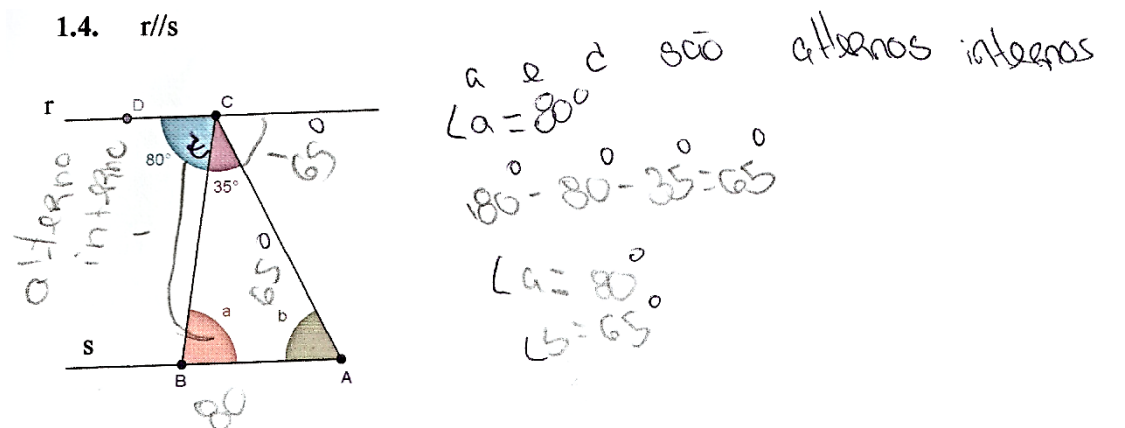


Figura 45 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 1.4 da ficha de trabalho 5

Estas alunas tiveram necessidade de nomear o ângulo DCB por ângulo d , para poderem afirmar que os ângulos a e d são alternos internos, referindo que a amplitude do ângulo a é 80° , no entanto, não referem que estes ângulos são congruentes devido ao facto de as rectas serem paralelas. Este cálculo encontra-se escrito a esferográfica o que indica que provavelmente o acrescentaram após a discussão em turma.

Através do diálogo transcrito anteriormente, constata-se que o valor de 180° refere-se ao ângulo raso e assim calculam o ângulo em falta mencionando, no diálogo, que é alterno interno ao ângulo b , logo tendo a mesma amplitude.

Há dois métodos de resolução para este problema. Um deles exige apenas conhecimentos sobre ângulos alternos internos, o outro método já poderá levar os alunos a resolverem através do que conhecem acerca da soma dos ângulos internos do triângulo. Verifica-se assim, que os dois grupos usaram diferentes métodos de resolução.

Tarefa 1.5

Para a resolução deste problema 1.5. os alunos terão que identificar ângulos suplementares e saberem que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Com os dois grupos de alunos em estudo, verificam-se dois métodos de resolução.

Assim o Mário e o Guilherme apresentaram a seguinte resolução escrita:

1.5.

$$\angle d = 180 - 120$$

$$\angle d = 60^\circ$$

$$\angle e = 180 - (80 + 60)$$

$$\angle c = 180 - 140$$

$$\angle c = 40^\circ$$

$$\angle b = 180 - 40^\circ$$

$$\angle b = 140^\circ$$

$$\angle a = 360 - (50 + 140 + 120)$$

$$\angle a = 360 - 310$$

$$\angle a = 50^\circ$$

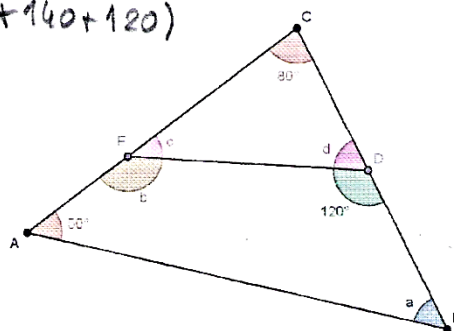


Figura 46 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 1.5 da ficha de trabalho 5

Observa-se que estes alunos compreenderam bastante bem o enunciado do problema, estabeleceram um plano, executaram-no e não apresentam verificação.

Este grupo optou por calcular primeiro a amplitude do ângulo d fazendo a diferença de 180° e 120° , prosseguindo para outro valor aproveitando a antiga descoberta e assim calcularam a amplitude do ângulo c fazendo a diferença entre a soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo e a soma das amplitudes dos outros

ângulos do triângulo. O passo seguinte foi o cálculo do ângulo b beneficiando da amplitude encontrada do ângulo c , fazendo a diferença entre 180° e 40° . Por fim, o cálculo da amplitude do ângulo a , tornando-se curiosa pelo modo como pensaram. O diálogo seguinte transcreve o excerto desse raciocínio:

Mário: O ângulo a é 360 menos...

Guilherme: 360?

Mário: Sim, se um triângulo tem 180 um quadrado mede 360

É de notar que estes alunos não tiveram contacto com o subtópico seguinte que são os quadriláteros e subentende-se que o Mário não se referia propriamente a um quadrado, mas sim a um quadrilátero.

Já o grupo da Júlia e Isabel, apresenta ter algumas dificuldades em compreender os dados do problema, optando por estabelecer um plano de descoberta de ângulos que lhes sejam fáceis de determinar.

Júlia: Estas não são paralelas, pois não?

Isabel: Não, vamos começar com o triângulo mais pequeno, com o d .

1.5.

$$\begin{aligned}
 180^\circ - 120^\circ &= 60^\circ \\
 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ &= 40^\circ \\
 180^\circ - 40^\circ &= 140^\circ \\
 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ &= 50^\circ
 \end{aligned}$$

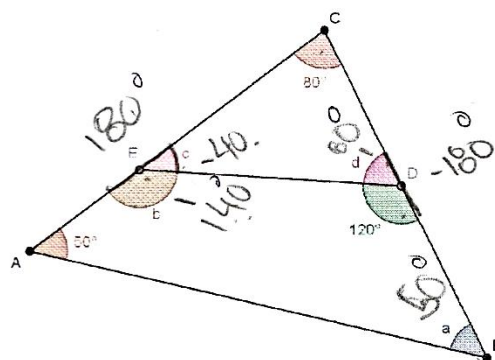


Figura 47 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 1.5 da ficha de trabalho 5

Através da representação escrita observei que começaram por calcular em primeiro lugar a amplitude do ângulo d fazendo a diferença entre um ângulo raso e 120° , passando a calcular a amplitude do ângulo c , por saberem ser a única amplitude em falta do triângulo EDC. Facilmente calcularam a amplitude do ângulo b da mesma forma que calcularam d . Para determinar a amplitude do ângulo a depararam-se com um problema:

Isabel: Só falta o a . Como calculamos este? Stora! Pode ajudar-nos a calcular este ângulo?

Professora: Então? Esse ângulo encontra-se onde?

Isabel: É um dos ângulos do triângulo.

Professora: E então?

Isabel: Já sei, faz-se 180 menos estes dois.

Júlia: Não pode ser. Este triângulo tem um risco no meio

Este último comentário da Júlia fez-me pensar que para esta aluna o triângulo ABC não foi visto como uma única figura, mas duas juntas (o triângulo FDC e o quadrilátero ABED). Assim, Júlia não conseguiu ter o mesmo raciocínio que teve para calcular a amplitude do ângulo c . Após uma breve advertência da professora em relação à localização do ângulo, o grupo calculou a amplitude de a sem dificuldades.

Ainda é notável que este grupo se faz valer da figura para justificar o seu raciocínio, ou seja, estas alunas não identificam o ângulo que estão a calcular, indicando a sua amplitude na figura.

5.2.3. Ficha de trabalho 7

Sendo esta ficha, resolvida no quinto dia das aulas do estudo, apresenta um conjunto de exercícios e problemas geométricos globais do tema de ângulos e soma dos ângulos internos de um triângulo, de forma a haver consolidação de conhecimentos sobre os conteúdos aprendidos nas aulas anteriores.

As reproduções das tarefas seleccionadas têm como objectivo compreender se os alunos são capazes de resolver problemas envolvendo os conteúdos já aprendidos, para isso devem, identificar os dados, as condições e o objectivo do problema; conceber e por em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados; e discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Tarefa 2.2.

Nesta tarefa, os alunos deparam-se com uma figura que ostenta um eixo de simetria e têm que determinar a amplitude de um ângulo.

Para a resolução deste problema, é necessário identificar ângulos suplementares, perceberem que ângulos correspondentes têm a mesma amplitude e saberem que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

O grupo formado pelos alunos Mário e Guilherme apresentam a seguinte resolução escrita:

$$\begin{aligned} \angle ABF &= 150^\circ \\ \angle DBF &= 150^\circ > 300^\circ (\angle ABF + \angle DBF) \\ \angle CBA &= 180^\circ - 150^\circ \\ \angle CBA &= 30^\circ \\ \angle CBD &= \angle CBA \\ \angle CBD &= 30^\circ \\ \angle CDB &= 30^\circ \text{ porque é simétrico ao } \angle CAB. \\ \angle DCB &= 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ \\ \angle DCB &= 120^\circ \\ \angle ECD &= 180^\circ - 120^\circ \\ \angle ECD &= 60^\circ \end{aligned}$$

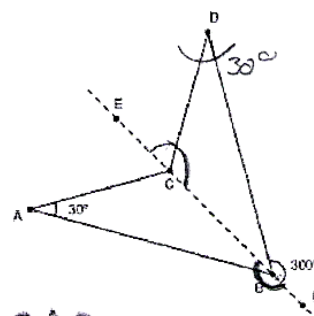


Figura 48 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 2.2 da ficha de trabalho 7

Verifica-se que os alunos identificaram os dados do problema e delinearam uma estratégia de resolução. Compreenderam que o eixo de simetria funciona como espelho, logo bastaria calcular as amplitudes de um dos lados do eixo. Para isso dividiram 300° por 2 para obter a amplitude de um dos ângulos exteriores do triângulo, fazendo a diferença entre 180° e 150° descobrindo assim a amplitude do ângulo interno. Para calcular a amplitude do terceiro ângulo interno, os alunos calcularam a diferença sucessiva entre 180° e os outros dois ângulos, concluindo assim que a amplitude do ângulo BDC é igual à amplitude do seu ângulo simétrico. Através da definição de ângulos suplementares, calcularam a amplitude do ângulo pedido.

Em relação ao grupo formado pela Júlia e Isabel, verifica-se que compreenderam os dados do problema, estabeleceram um plano, executaram-no, no entanto, não verificaram os resultados obtidos.

Existe uma preocupação por parte das alunas em justificar todos os seus raciocínios, nem que para isso tenham que escrever através texto corrido os seus argumentos.

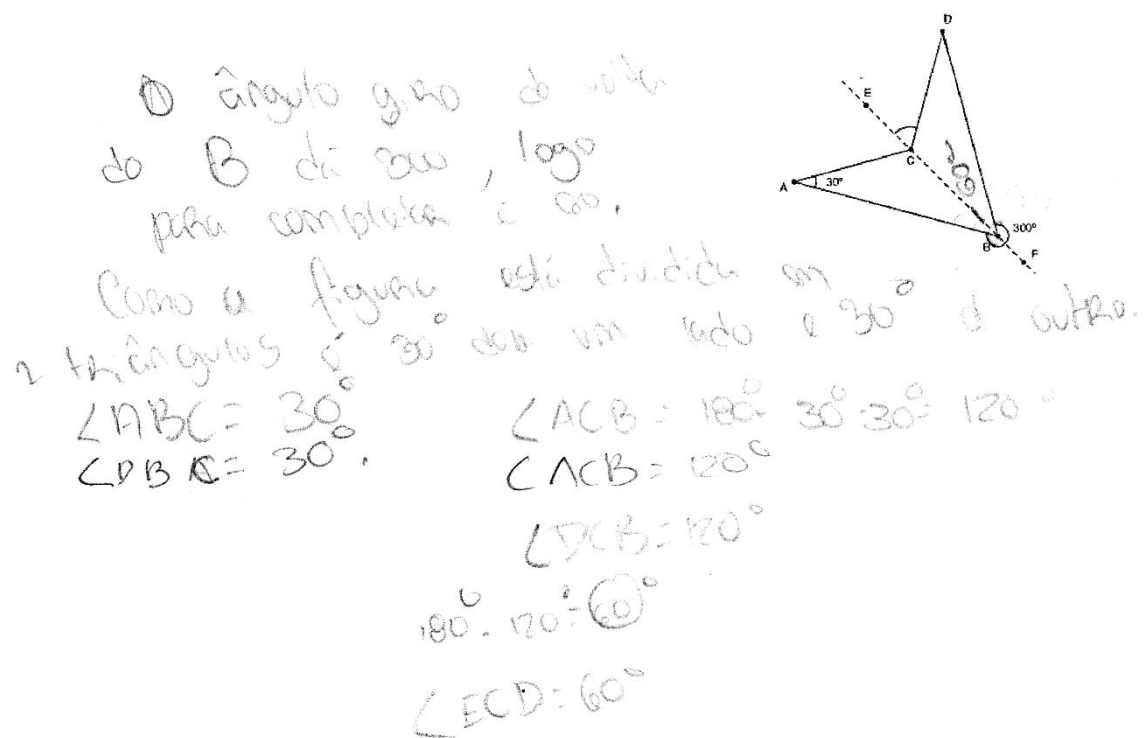


Figura 49 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 2.2 da ficha de trabalho 7

Começam por justificar que o ângulo em torno do ponto B, para originar um ângulo giro, falta-lhe 60° e também compreenderam o significado do eixo de simetria, porque dividem a amplitude de 60° em dois ângulos congruentes. É notório a evolução do grupo em relação à simbologia matemática, após uma descrição textual, as alunas simbolizam matematicamente qual o valor da amplitude do ângulo encontrado. Também identificam ângulos suplementares e verifica-se, mais uma vez a correcta simbologia inerente ao cálculo, faltando apenas justificar a origem do valor 180° .

5.2.4. Ficha de trabalho 8

A ficha de trabalho 8 foi o remate final antes de uma pequena avaliação, assim foi resolvida no último dia das aulas do estudo, e apresenta um conjunto de problemas geométricos globais do tema de ângulos e soma dos ângulos internos de um triângulo, de forma a haver consolidação de conhecimentos, sobre os conteúdos aprendidos nas aulas anteriores.

As resoluções das tarefas seleccionadas têm o propósito da ficha de trabalho 7: compreender se os alunos são capazes de resolver problemas, envolvendo os conteúdos já aprendidos.

Tarefa 2

Com este problema, o aluno terá de determinar a amplitude de um ângulo desconhecido, para isso é necessário delinearem uma estratégia de resolução de forma a não se dispersarem, pois existem dados irrelevantes para o cálculo do ângulo pedido.

Mário e Guilherme compreenderam os dados do problema, no entanto, não estabeleceram uma estratégia de resolução, executaram-na e também não verificaram os resultados obtidos.

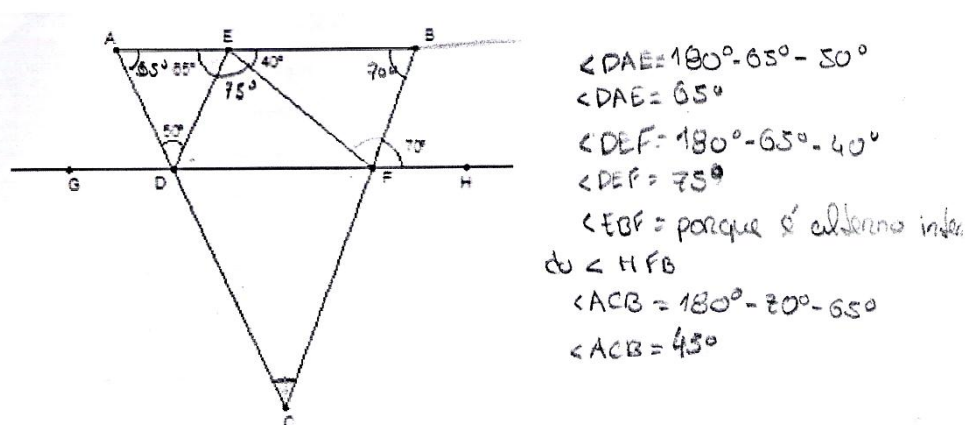


Figura 50 – Resolução do Mário e Guilherme da tarefa 2 da ficha de trabalho 8

Através da resolução escrita, verifiquei que este grupo, apesar de saber o que é pedido, dispersou-se na medida em que calculou valores desnecessários para responder à questão. Os alunos determinam correctamente a amplitude do ângulo EAD, sabendo que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° . De seguida houve uma quebra na linha de estratégia porque calculam um ângulo que não lhes vai ajudar a dar resposta ao pedido no problema, mas facilmente encontram a linha condutora e justificam que o ângulo EBF é alternos interno ao ângulo HFB, logo são congruentes, faltando justificar esta afirmação através das rectas serem paralelas. Facilmente reparam que o ângulo pedido é o terceiro ângulo em falta do triângulo ABC.

O grupo das alunas Júlia e Isabel dispersaram-se mais em relação ao grupo do Mário e Guilherme. Através do seguinte diálogo conseguimos perceber que o grupo estava completamente à deriva na resolução do problema, iam calculando dados que lhes era possível de calcular sem terem uma visão global.

Isabel: Vamos começar pelo ângulo DAE.

Júlia: Sim, que é 180 menos 50 menos 65 que é igual a... 65.

Isabel: Agora que temos este, falta este que é 180, porque é um ângulo raso então fazemos menos 65 menos 40.

Júlia: Dá 75°. Agora falta saber este. Como vamos descobrir este?

Isabel: Falta aqui alguma coisa de alternos internos e não estou a ver onde.

Júlia: Este e este.

Isabel: O ângulo AED é alterno interno do ângulo EDF. Logo é 65°. Agora temos que saber este.

Júlia: Temos que descobrir um para descobrir outro e depois outro.

Isabel: Assim o ângulo EFB é 180 menos 70 menos 40 que é 70°.

Júlia: Agora já conseguimos saber o EBF que é 180 menos 40 menos 70 que dá... 70.

Isabel: Agora o que podemos saber mais...? Este. Olha, já está feito. Isto é um triângulo!!

Júlia: ACB é 180 menos 65 menos 70 que é igual a ... 45°.

É notável, com este excerto, que as alunas não delinearão uma estratégia de resolução e foram encontrando respostas admissíveis ou não para a resolução e quando não sabiam o que fazer lembraram-se dos ângulos alternos internos. É notório, também que não se aperceberam do final do problema.

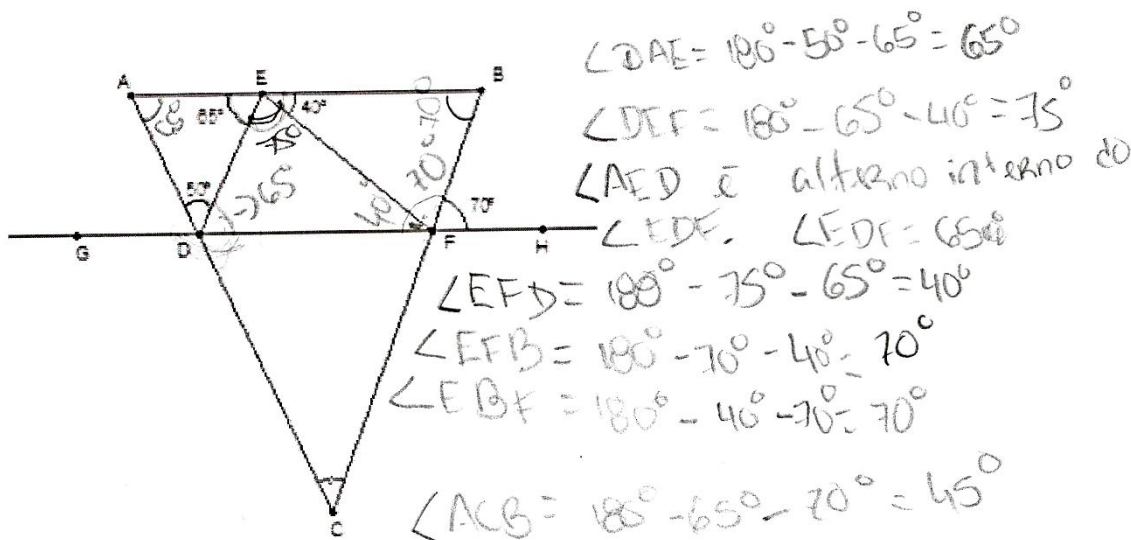


Figura 51 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 2 da ficha de trabalho 8

Através da resolução escrita apercebi-me que os alunos não sabiam que caminho tomar para responder à pergunta do problema. Assim optaram por calcular um valor para a amplitude de um ângulo da figura sem saberem se esse valor seria pertinente para a resposta, ou seja, não estabeleceram um plano. A primeira amplitude calculada foi a do ângulo GFC, ao visualizarem o triângulo formado pelos pontos referidos. O método mencionado pelos alunos foi a subtracção das amplitudes dos três ângulos pelos outros dois conhecidos. Através do cálculo seguinte compreende-se que os alunos não interpretaram a semi-recta BG como um eixo de simetria, voltando a fazer o mesmo raciocínio para o ângulo GFA. A amplitude encontrada após esta última foi feita sem indicação nem justificações, portanto pressuponho que $180^\circ - 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$ refere-se ao triângulo ACE, conseguindo, assim determinar a sua amplitude, logo de seguida os alunos fazem a diferença do ângulo ACE com o ângulo ACD. Neste cálculo podemos observar que a designação não está correcta porque, efectivamente, os alunos estão a calcular a amplitude do ângulo ECD. Repara-se também que o valor da amplitude deste ângulo é 43° , no entanto, houve uma emenda para 40° tornando o valor errado. O raciocínio prossegue do mesmo modo para o outro lado da semi-recta ocorrendo erros de indicação do ângulo e sobre o valor da amplitude do ângulo CAE.

Mário e Guilherme voltam a adicionar as amplitudes de forma a obterem o valor total dos ângulos CAB e ACB não reparando que estas amplitudes já foram determinadas por eles. Mas devido à distracção, penso eu, emendaram os resultados para valores errados o que originou um resultado final incorrecto.

As alunas Júlia e Isabel demonstram ter compreendido o problema, no entanto, não conseguem estabelecer um plano e executam de forma aleatória o cálculo das amplitudes de ângulos observáveis na figura. Consegue-se distinguir uma verificação para a amplitude do ângulo ABC, mas tenho dúvidas se as alunas o fizeram intencionalmente.

3. Na seguinte figura está representado o triângulo ABC, que respeita as seguintes condições:

DF é perpendicular a AB ($DF \perp AB$)

GF é perpendicular a AC ($GF \perp AC$)

EF é perpendicular a BC ($EF \perp BC$)

Qual é a amplitude do ângulo ABC?

$\angle DBF = 180^\circ - 65^\circ - 90^\circ = 25^\circ$
 $\angle FBE = 180^\circ - 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$
 $\angle ECF = 180^\circ - 90^\circ - 67^\circ = 43^\circ$
 $\angle FCG = 25^\circ + 43^\circ = 68^\circ$
 $\angle CAB = 180^\circ - 47^\circ - 68^\circ = 65^\circ$
R. $\angle ABC = 47^\circ$

Figura 53 – Resolução da Júlia e Isabel da tarefa 3 da ficha de trabalho 8

Através desta resolução, verifiquei que as alunas tiveram muita dificuldade em estruturar o caminho a percorrer para obter a resposta ao problema. Começaram por calcular as amplitudes, para elas mais fáceis, com os dados que tinham, assim, o triângulo AFG estaria completo com a amplitude do terceiro ângulo em falta, o mesmo para o triângulo FGC. Verificaram que estes ângulos são verticalmente opostos a outros e indicaram a sua amplitude. Calcularam a amplitude do terceiro ângulo do triângulo DFB e fizeram o mesmo raciocínio para determinar a amplitude do ângulo EBF.

Chegando a este ponto da resolução, este grupo já tem conhecimento da resposta ao problema, mas ainda não deram por isso continuando a calcular amplitudes de ângulos. Assim determinaram as amplitudes dos ângulos FEC, EFC, ECF, ECG e CAB sem necessidade.

5.3. Análise do Mini-teste

No final da minha intervenção foram, principalmente, dois os propósitos da aplicação deste mini-teste. Com efeito, pretendia averiguar, por um lado, até que ponto as aprendizagens realizadas pelos alunos eram sólidas e, por outro, como é que os alunos mobilizavam essas aprendizagens, ou outras, na resolução dos problemas apresentados. Assim, decidi colocar neste mini-teste três problemas de grau de dificuldade crescente de modo a perceber, em cada situação, como é que os alunos identificavam os dados, as condições e o objectivo do problema de forma a pôr em prática estratégias adequadas à resolução dos mesmos e, por fim, a verificação da adequação dos resultados obtidos, ao contexto do problema.

O mini-teste foi realizado individualmente pelos alunos da turma. Em cada uma das questões pretendia-se que: (i) os alunos determinassem as amplitudes dos ângulos desconhecidos após análise do problema; (ii) identificassem dos dados do mesmo; (iii) definissem uma estratégia e a levassem até ao fim; e finalmente, (iv) fizessem uma análise crítica das respostas obtidas. Da análise que fiz, constatei que, embora com algumas dificuldades no que concerne às justificações dadas e à forma como pensaram, a maioria dos alunos da turma conseguiu realizar com sucesso as tarefas propostas. Salienta-se, contudo, as dificuldades que manifestaram na questão 3, visto que poucos foram os alunos que a conseguiram resolver.

5.3.1. Os alunos participantes

Participaram neste estudo seis alunos, dos quais dois já são conhecidos: a Júlia e o Mário.

O Nicolau é um aluno que participa activamente nas aulas. Costuma fazer todos os trabalhos que são pedidos e gosta de Matemática. Pode dizer-se que é um aluno muito bom nesta disciplina obtendo o nível cinco. O Nicolau tem 12 anos e quer um dia ser médico.

O Bartolomeu tem 13 anos e apresenta uma retenção no 6.º ano. Este aluno é muito inteligente mas o seu comportamento em sala de aula não é o melhor. O seu nível a matemática é 3 e ambiciona ser advogado.

A Iva é bastante participativa, o seu comportamento em sala de aula é muito bom mas, a matemática não é a sua disciplina preferida. Tem 12 anos e quer um dia ser médica pediátrica.

O Carlos tem 12 anos e é bastante extrovertido. Para ele a matemática é uma brincadeira, encarando-a como um jogo em que acerta ou perde. O seu nível a esta disciplina é de cinco e quer vir a ser polícia.

5.3.2. Análise das produções dos alunos

Todas as questões exigiam dos alunos a distinção de ângulos complementares e suplementares e a identificação de ângulos verticalmente opostos, bem como de ângulos alternos internos. Para que a resolução destes problemas fosse conseguida com êxito, era necessário que os alunos compreendessem e utilizassem as relações entre elementos de um triângulo e determinassem que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° . O grau de dificuldade que as distinguiu, estava no esquema apresentado, nos dados do problema e na necessidade de definir um caminho mais ou menos complexo para chegar ao resultado correcto.

Assim, no problema da questão 1 são dadas duas rectas paralelas (s e t), cortadas por duas secantes, formando entre elas um triângulo. Deste triângulo conhecem-se dois ângulos e pede-se para determinar a amplitude de três ângulos desconhecidos.

1. Na figura seguinte as rectas s e t são estritamente paralelas

Determina a amplitude dos ângulos representados pelas letras a , b e c .

Explica como obtiveste a tua resposta.

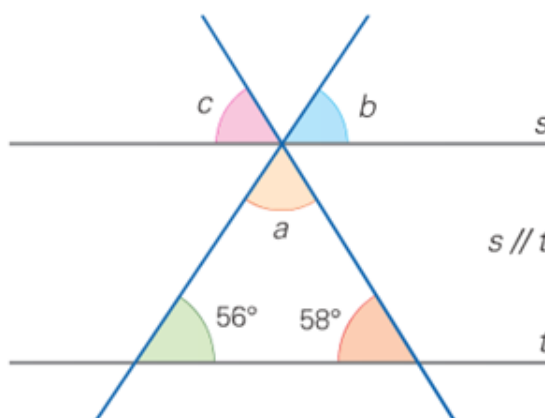


Figura 54 – Enunciado da tarefa 1 do mini-teste

Para a resolução deste problema, os alunos poderiam ter escolhido vários caminhos, sendo que, em todos eles, teriam de estabelecer relações entre ângulos, distinguir ângulos verticalmente opostos, alternos internos e as suas propriedades, e ainda reconhecer que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

O enunciado deste problema foi interpretado, por muitos alunos, pelo aspecto visual, sem realizar uma análise crítica dos dados do problema. Assim, a aluna Júlia apresentou a seguinte resolução:

$$\begin{aligned} \angle a &= 180 - 56 - 58 = 66^\circ \\ \angle a &= 66 \\ 180 : 3 &= 60^\circ \quad \angle b = 60^\circ \\ 180^\circ - 66^\circ &= 114^\circ \\ 114^\circ : 2 &= 57^\circ \end{aligned}$$

$$\angle c = 60^\circ$$

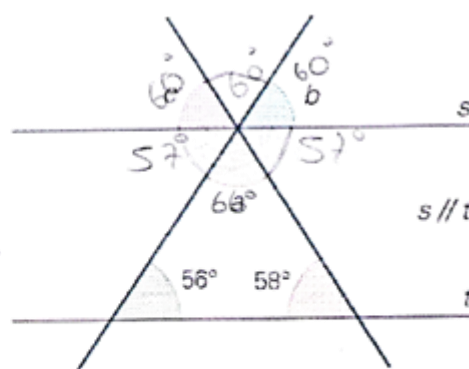


Figura 55 – Resolução da Júlia da tarefa 1 do Mini-teste

Desta resolução constata-se que Júlia determinou correctamente o ângulo a , pois percebeu que se tratava do terceiro ângulo interno de um triângulo e, portanto, o seu valor teria de ser a diferença entre 180° e a soma dos dois ângulos conhecidos do triângulo. Contudo, descurou completamente o dado de as rectas s e t serem paralelas e as relações entre os ângulos da figura. Embora reconhecendo que a soma dos três ângulos acima da recta s constituía um ângulo raso, Júlia considerou que esses três ângulos eram congruentes e, portanto, iguais a 60° ($180^\circ : 3 = 60^\circ$). O mesmo ponto de partida foi considerado para os três ângulos abaixo da recta s . Deste modo, observa-se que esta aluna não conseguiu mobilizar todos os conhecimentos e conceitos necessários à resolução correcta deste problema, nomeadamente as relações entre ângulos e a identificação de ângulos verticalmente opostos e alternos internos e as suas propriedades.

É curioso compreender a estratégia utilizada pelo Nicolau aquando da resolução desta questão, senão vejamos:

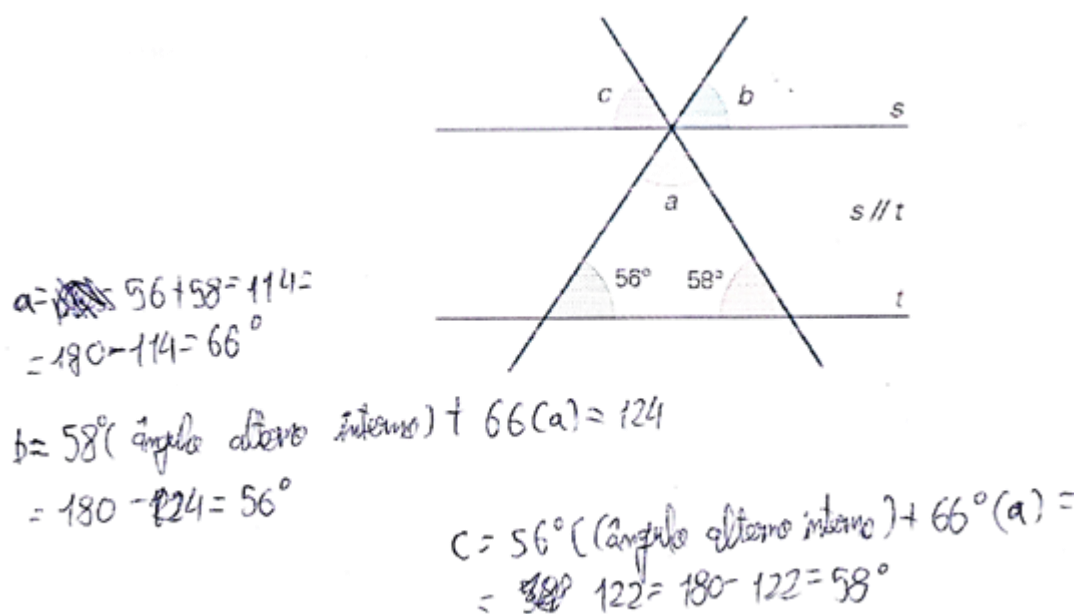


Figura 56 – Resolução do Nicolau da tarefa 1 do Mini-teste

Apesar de Nicolau apresentar uma formalização errada dos procedimentos e expressões matemáticas, determinou correctamente a amplitude do ângulo a , pois sabe que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° . Da resolução apresentada, pode

depreender-se que Nicolau relaciona a amplitude do ângulo de 58° com a do ângulo compreendido entre a e b por se tratar de ângulos alternos internos, compreendidos entre rectas paralelas e, portanto, são congruentes. De seguida, determina a amplitude de b pela definição de ângulos suplementares ($\angle b = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$). A estratégia aplicada para determinar o ângulo c é similar a esta, sendo que relaciona a amplitude do ângulo de 56° com a do ângulo compreendido entre a e c . Assim, nesta situação, parece que a maior dificuldade sentida pelo Nicolau é a representação matemática optando por colocar a justificação entre parênteses no próprio cálculo. A explicação do pensamento matemático associado às estratégias de resolução e às necessárias justificações parece constituir uma dificuldade para o Nicolau.

Outro aluno, o Bartolomeu, que indicou correctamente as amplitudes dos ângulos pedidos. Contudo, justificar e explicar o modo de pensar, parecem ser, de facto, as maiores dificuldades sentidas por este aluno.

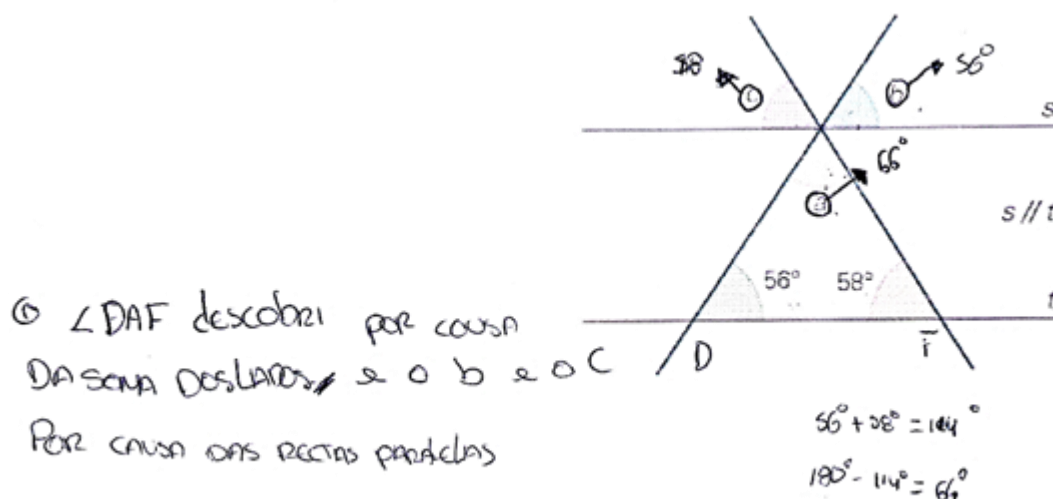


Figura 57 – Resolução do Bartolomeu da tarefa 1 do Mini-teste

Para a mesma questão, outro aluno respondeu da seguinte forma:

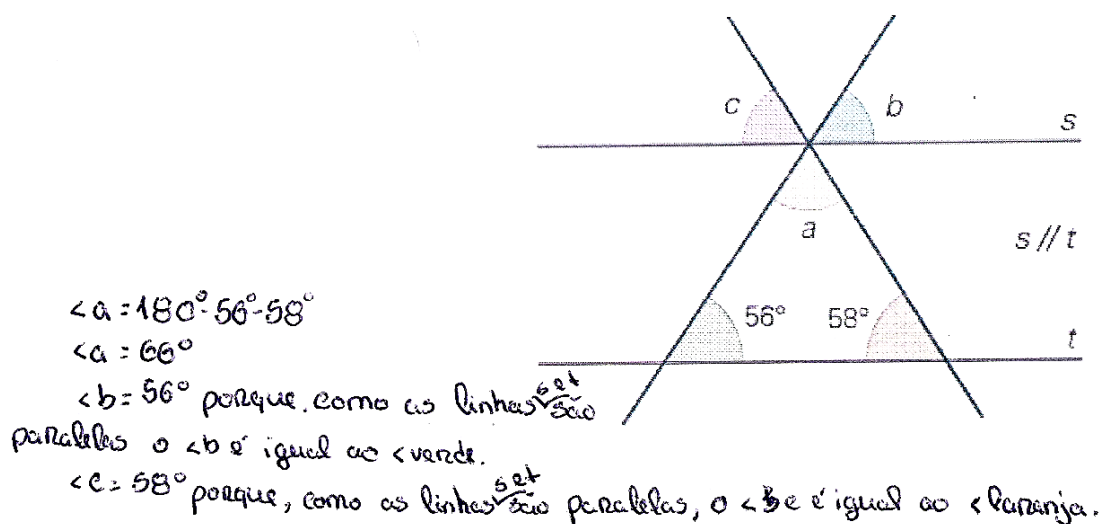
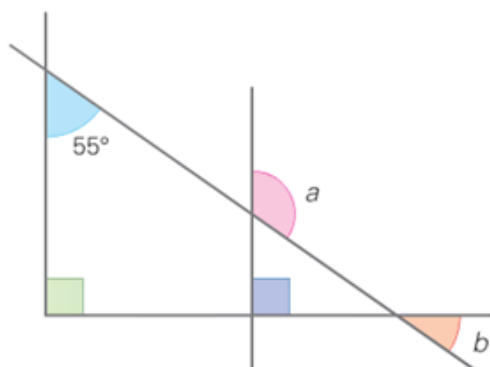


Figura 58 – Resolução do Mário da tarefa 1 do Mini-teste

O Mário apresenta correctamente a resolução deste problema. Determina a amplitude do ângulo a fazendo a diferença entre 180° com a soma dos outros dois ângulos internos do triângulo. Este aluno teve a preocupação de utilizar simbologia e justificação adequadas e parece ter compreendido os dados do problema. Aplica o conceito de congruência embora não utilize este termo.

Em relação à questão 2, são apresentados dois triângulos semelhantes, sendo que dois dos lados são paralelos. Esse paralelismo não é expressamente indicado mas pressupõe que os alunos tirem as suas conclusões ao ser indicado, na figura, que estas rectas formam com a base um ângulo recto. Nesta figura apenas se conhece um ângulo sendo indicada a simbologia para os ângulos rectos. Por outro lado, pede-se que sejam determinados dois ângulos desconhecidos.

2. Observa a figura seguinte.



2.1. Qual é a amplitude do ângulo representado pela letra **a**?

Explica como obtiveste a tua resposta.

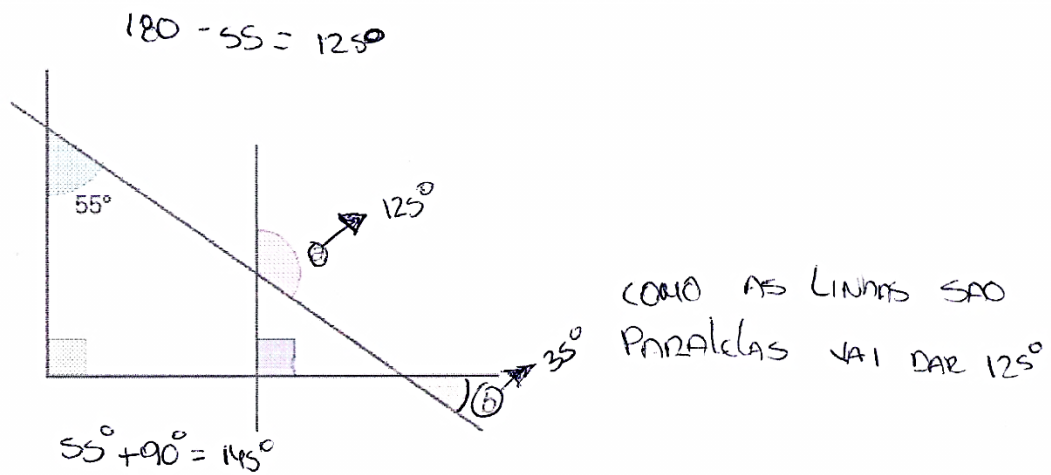
2.2. Qual é a amplitude do ângulo representado pela letra **b**? Explica como obtiveste a tua resposta.

Figura 59 – Enunciado da tarefa 2 do mini-teste

Para a resolução deste problema, existem várias estratégias que os alunos podem seguir, mas em todos eles têm de estabelecer relações entre ângulos, distinguir ângulos verticalmente opostos e alternos internos assim como as suas propriedades, e saber que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Esta foi uma questão, onde a maioria dos alunos não apresentou dificuldades.

Na resolução do Bartolomeu pode-se verificar que compreendeu do enunciado, no entanto existe a lacuna da comunicação matemática ao justificar os seus cálculos.

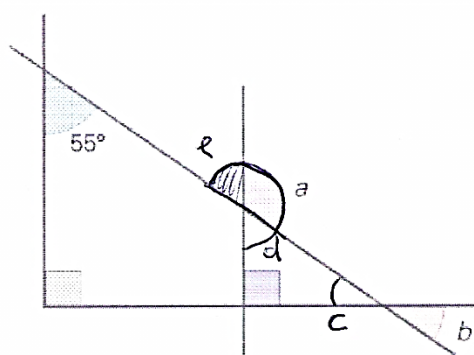


NA LETRA b é IGUAL A 35 GRAUS porque os ângulos são suplementares

Figura 60 – Resolução do Bartolomeu da tarefa 2 do Mini-teste

Este aluno afirma que as rectas são paralelas, mas não justifica esta afirmação, evidenciando deficiências ao nível da falta de justificação dos raciocínios efectuados. Apresenta cálculos que levam às respostas dos ângulos desconhecidos, no entanto, recorre à imagem para dar as respostas da amplitude do ângulo. O Bartolomeu demonstra conhecimentos sobre os ângulos alternos internos, ângulos opostos e sabe que a soma dos ângulos internos de um triângulo são de 180° , caso contrário não teria chegado às amplitudes pedidas. Através desta resolução, conseguimos apercebermo-nos que o aluno pensou em calcular o ângulo suplementar ao de 55° determinando a diferença deste com 180° e daí concluí que o ângulo a é 125° . Apercebemo-nos, também que para calcular a amplitude do ângulo b , o aluno recorre à soma das amplitudes dos ângulos internos, porque ainda apresenta a soma de 90° com 55° que obtém 145° , supomos que o aluno fez a diferença para os 180° a fim de determinar a amplitude desejada.

A Iva apresenta uma resolução onde surge uma estratégia diferente da anterior.



R: 125°

$$\begin{aligned}
 c &= 55 + 90 = 145 \\
 180 - 145 &= 35 \\
 b &= 35 \text{ pois } \underline{\text{verticalmente}} \\
 &\text{oposto a } c. \\
 d &= 35 + 90 = 125 \\
 180 - 125 &= 55 \\
 e &= 55 \text{ pois } \underline{\text{verticalmente}} \\
 &\text{oposto a } d. \\
 a &= 180 - 55 = \underline{125} \quad 1
 \end{aligned}$$

Figura 61 – Resolução da Iva da tarefa 2 do Mini-teste

A aluna começa por calcular o terceiro ângulo interno do triângulo, no entanto apresenta falhas na comunicação escrita, na medida em que começa por igualar a amplitude do ângulo c a 145° e só depois faz a diferença entre 180° e 145° sem mencionar qual o ângulo que tem de amplitude 35° . Mostra saber identificar ângulos verticalmente opostos. A Iva, neste caso, apresenta um pouco de insegurança e não está a encontrar o caminho para a sua resolução, optando por, a partir da amplitude anterior, chegar ao cálculo de outras amplitudes, a aluna não relacionou esta imagem aos ângulos alternos internos, apenas visualizou o triângulo menor e optou por calcular o seu terceiro ângulo interno. Ainda antes de determinar a amplitude do ângulo pedido, a aluna, justifica a amplitude do ângulo verticalmente oposto a este e só depois é que faz a diferença para calcular o ângulo desejado.

A terceira questão implica seleccionar uma estratégia entre várias e levá-la até ao fim. Esta tarefa será bem resolvida se os alunos não apelarem à visualização da figura e aplicarem, apenas os seus conhecimentos sobre ângulos verticalmente opostos, alternos internos e a soma dos ângulos internos de um triângulo.

3. Na figura seguinte as rectas r e s são estritamente paralelas.

Determina a amplitude do ângulo representado pela letra a . Explica o teu raciocínio.

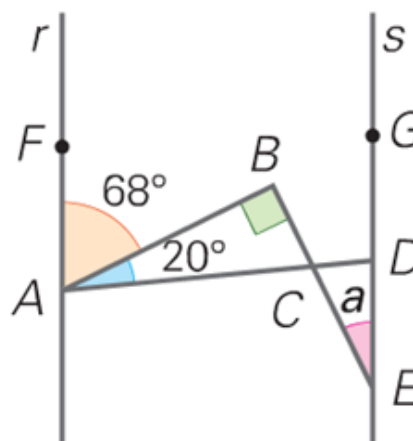


Figura 62 – Enunciado da tarefa 3 do mini-teste

Assim, no problema da questão 3, são dadas duas rectas paralelas, r e s , cortadas por uma secante e entre as rectas paralelas há a formação de dois triângulos. Nesta figura conhecem-se dois ângulos e existe a indicação de outro como sendo ângulo recto. Pede-se para determinar a amplitude de um ângulo desconhecido.

Para a resolução deste problema, os alunos podem optar por vários caminhos, sendo, mais uma vez, necessário estabelecer relações entre ângulos, distinguir ângulos verticalmente opostos, alternos internos e as suas propriedades e, reconhecer que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Neste problema, poucos foram os alunos que o conseguiram resolver com sucesso, aliás, alguns deles, não o conseguiram resolver de todo e outros apresentaram erros de estratégia.

O enunciado deste problema foi interpretado, pela maioria da turma, pelo seu aspecto visual. Grande parte das produções realizadas denota que os alunos não fizeram uma análise crítica dos dados do problema.

O Mário resolveu esta questão do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \angle x &= 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ \\ \angle x &= 70^\circ \\ \angle H &= 70^\circ \text{ porque é verticalmente oposto ao } \angle x. \\ \angle i &= 90^\circ \text{ porque é um ângulo recto.} \\ \angle a &= 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ \\ \angle a &= 20^\circ \end{aligned}$$

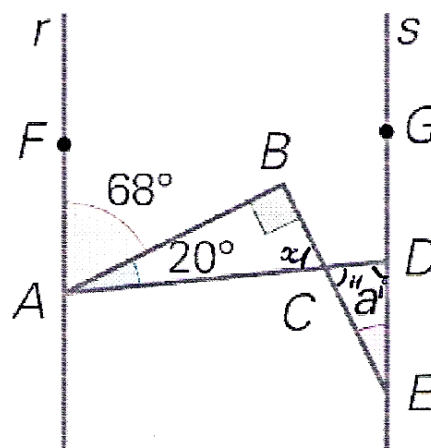


Figura 63 – Resolução do Mário da tarefa 3 do Mini-teste

Desta resolução constata-se que o Mário determinou correctamente a amplitude do terceiro ângulo do triângulo maior, fazendo subtracções sucessivas à soma dos ângulos internos de um triângulo, obtendo assim os 70° . Determinou facilmente a amplitude do ângulo verticalmente oposto, como sendo congruente ao calculado anteriormente. É de notar que houve, por parte do Mário, a preocupação em fundamentar e atribuir identificação aos ângulos que achou necessário calcular. Contudo, negligenciou completamente os dados do problema, das rectas r e s serem paralelas e justificou que a amplitude do segundo ângulo interno do triângulo menor era de 90° . Assim, calculou rapidamente o ângulo pedido, através da soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo, o qual devia de corresponder a 180° , errando apenas pelo aspecto visual.

dois e, assim, determina a amplitude do segundo ângulo interno do triângulo. O ângulo a é calculado correctamente utilizando o conhecimento de que a soma das amplitudes internas de um triângulo é de 180° . É de salientar que não perdeu de vista o objectivo do problema embora tenha optado por um caminho mais longo.

O Carlos é outro aluno que se faz valer da imagem para justificar os seus cálculos.

$$\begin{aligned}
 90^\circ + 20^\circ &= 110^\circ \\
 180^\circ - 110^\circ &= 70^\circ \\
 180^\circ - 70^\circ &= 110^\circ \\
 68^\circ + 20^\circ &= 88^\circ \\
 \cancel{180^\circ - 88^\circ} &= \cancel{92^\circ} \\
 70^\circ + 88^\circ &= 158^\circ \\
 180^\circ - 158^\circ &= 22^\circ
 \end{aligned}$$

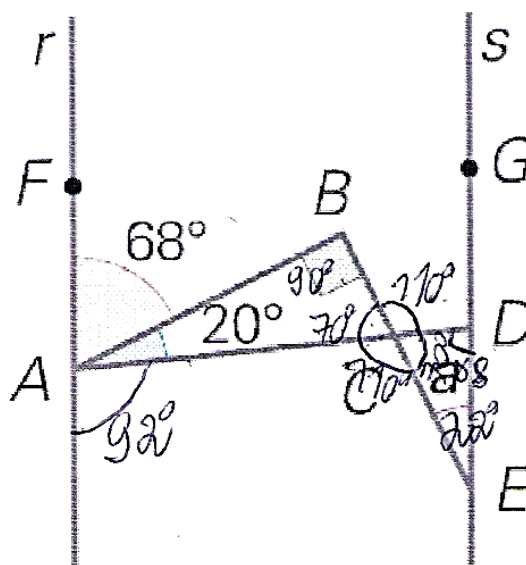


Figura 65 – Resolução do Carlos da tarefa 3 do Mini-teste

Este aluno resolveu o problema correctamente, apresentou uma boa estratégia, interpretou bem o enunciado utilizando bem os seus conhecimentos mas a maior dificuldade, mais uma vez, foi a comunicação. O Carlos não indica qual o ângulo que está a calcular nem justifica o seu raciocínio. Faz-se valer da imagem para indicar a amplitude do ângulo que está a calcular. A estratégia utilizada pelo Carlos é começar a calcular a amplitude do terceiro ângulo interno do triângulo maior, mas opta por aproveitar esta informação para calcular a amplitude do ângulo suplementar a este. Através da figura percebe-se que o aluno deduziu a amplitude de todos os ângulos verticalmente opostos em torno do ponto C. Os cálculos indicam que o Carlos conseguiu visualizar o ângulo alterno interno ao segundo ângulo do triângulo menor, porque calculou $68^\circ + 20^\circ = 88^\circ$ e justificou, assim, a sua amplitude. Por fim, calculou a

amplitude do terceiro ângulo interno do triângulo menor porque sabia que a soma teria que dar 180° . É visível que o aluno ainda esteve um pouco desorientado no caminho a seguir, isto porque depois de calcular a soma das amplitudes de 68° com 20° , ainda foi determinar o seu ângulo suplementar, riscando-o de seguida.

A geometria, tanto hoje como no futuro, deve ser abordada a partir de múltiplas perspectivas, para permitir ao utilizador dominar a maioria dos conteúdos e utilizações e além disso expandir-se para zonas até à data ignoradas da ciência e da natureza.

Arthur F. Coxford, Jr. et al, *Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas* (Veloso, 1998)

6. Conclusão / Reflexão

Neste capítulo pretendo, a partir da análise dos dados efectuada, apresentar os resultados obtidos, procurando dar resposta às questões formuladas, reflectindo sobre se, serão ou não, suficientes para dar uma resposta final às questões que me propus responder. Também pretendo aqui apresentar uma reflexão sobre o meu desempenho ao longo do subtema leccionado, as aprendizagens que realizei e o modo como poderão influenciar o meu desempenho futuro como profissional.

6.1. As questões do estudo

De acordo com a problemática definida, centrando-me na resolução de problemas, com este estudo procurei perceber como os alunos interpretavam os enunciados dos problemas, como os resolviam e que dificuldades apresentavam.

i) Como interpretam os alunos o enunciado dos problemas geométricos propostos?

No que diz respeito à interpretação nos enunciados aos problemas geométricos e, tratando-se precisamente de geometria, é fundamental que um problema se faça acompanhar de uma figura geométrica. Ora, a visualização de uma imagem pode ser considerada como facilitador na resolução de um problema geométrico. A visualização corresponde a transformar conceitos abstractos em imagens reais ou mentalmente visíveis. Tratando-se de situações do ensino da geometria a preocupação com a visualização é fundamental, visto ser um dos elementos envolvidos no processo de representação. (Nacarato e Passos, 2003, p. 78).

Neste estudo verificou-se que muitas imagens inseridas no problema, poderão ser vistas pelo aluno, como o próprio enunciado e, por isso, na maior parte dos casos, tiram daí as conclusões para as suas respostas. Este argumento foi frequentemente usado pelos alunos para justificarem as suas resoluções. Alguns alunos optaram, apenas, pela visualização da imagem agregada ao problema e não leram as condições no enunciado.

Algumas conjecturas formuladas basearam-se naquilo que visualizavam à primeira vista e as suas justificações fundamentadas com o que lhes era “visível a olho nu”.

É interessante verificar que a forma como os alunos visualizam a figura leva-os, por vezes, por caminhos diferentes. Assim por exemplo, na tarefa 1.5. da Ficha de Trabalho 5, os dois grupos (Mário e Guilherme; Júlia e Isabel) focaram-se em visualizações distintas da mesma figura. O primeiro par observou que a figura se repartia em dois polígonos: triângulo e quadrilátero, concluindo assim que as amplitudes internas de um quadrilátero é o dobro das amplitudes internas de um triângulo. No entanto, Júlia teve dificuldade em aplicar os conhecimentos sobre as amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, devido a este estar dividido em dois polígonos. Ou seja, não conseguiram identificar o triângulo da figura por estar repartido e assim não visualizou como um único triângulo.

No mini-teste é notório a influência do aspecto visual da figura anexa ao problema 3, no desempenho dos alunos. Alguns alunos não leram as condições do problema, optando pelo aspecto visual da figura. É de salientar que mesmo Mário, um dos alunos mais cuidadosos na leitura dos enunciados, neste caso, deixou-se levar pelo aspecto visual desta.

ii) Como resolvem os alunos problemas geométricos?

A realização das tarefas demonstrou que os alunos procuravam utilizar os conhecimentos que adquiriram em sala de aula. Isto é, os alunos compreenderam e identificaram bastante bem, ângulos suplementares, complementares, adjacentes, verticalmente opostos e ângulos alternos internos. Se, a isto, associarmos o conhecimento adquirido relativamente à soma das amplitudes internas de um triângulo, verificamos que os conhecimentos adquiridos permitiram a resolução das tarefas com razoável sucesso.

Mesmo perante problemas, em que não era muito evidente a estratégia a adoptar, verifiquei que os alunos procuravam deliberadamente aplicar os conhecimentos adquiridos. Por exemplo, através da gravação áudio, pude registar que, numa dessas situações, um aluno comentou: “*deve haver aqui algum ângulo alterno interno, mas não estou a vê-lo*”. Portanto perante um problema geométrico do subtema em estudo, os

alunos conseguiam identificar e determinar os ângulos pedidos através dos conceitos recentemente apreendidos.

Verifiquei, também, que, por vezes, os alunos não estabeleciam um caminho, antes de resolver o problema. Ou seja, não estabelecem um plano, e sendo esta a etapa de resolução de problemas mais importante, segundo Polya (2003), isso pode dificultar a sua resolução. Constatou-se que muitos alunos, com a ambição de resolverem rapidamente a tarefa, optaram por calcular valores que a imagem induzia e que, por vezes, eram desnecessários para a resolução do problema. Na Ficha de Trabalho 8 é visível nos dois grupos que não houve um estabelecimento de um plano para o caminho a tomar e verifica-se que os alunos calcularam valores desnecessários e nem se apercebendo que o problema já estava resolvido.

Para Polya (2003) a resolução de problemas passa por quatro fases fundamentais: *compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e verificação*. Ora, os alunos ao resolverem os problemas geométricos, de forma geral, compreendem o problema e sabem interpretar os dados do enunciado em relação ao pedido, o que se verificou é que o enunciado não era lido, optando, antes, pelo aspecto visual pela figura, o que condicionava o restante processo de resolução.

O estabelecimento de um plano, embora não muito presente, observa-se, por vezes, no trabalho em díade, quando um dos elementos explica ao outro como poderão resolver o problema. Já a execução do plano é, naturalmente, a etapa mais visível através dos dados analisados, e onde se verifica alguma diversidade de estratégias, embora pouco expressiva. A verificação dos resultados é pouco frequente e, curiosamente, foram feitas verificações, apenas, nas primeiras fichas de trabalho. Isto leva-me a pensar que à medida que o tipo de problemas apresentado começa a ser habitual, os alunos sentem-se mais seguros nas suas resoluções.

iii) Que dificuldades evidenciam os alunos na resolução de problemas?

Grande parte das dificuldades reveladas pelos alunos diz respeito ao *estabelecimento de um plano* e à *execução do plano*, principalmente, no que concerne à forma como organizam a comunicação dos seus argumentos, sendo que muito poucos fazem a *verificação* dos resultados.

Na tarefa 3 da ficha de trabalho 8, o não estabelecimento de um plano dificultou-lhes chegar à resposta solicitada. Acredito que soubessem como executar um plano, no entanto, a ambição de começarem de imediato a resolver o problema fez com que seguissem o caminho mais cómodo: *o ir calculando e ver o que dá*. No caso da Júlia e da Isabel, a solução do problema foi encontrada, embora não tendo seguido o caminho mais fácil e directo.

A resolução do problema trouxe dificuldades aos alunos, também, no que diz respeito à exposição das suas fundamentações. Com as reproduções das suas resoluções ilustradas neste trabalho, observa-se que os alunos revelam não ter hábitos de apresentação de justificações ou argumentos em matemática, mesmo nos casos mais simples. Perante a necessidade de uma cadeia de argumentos, os alunos não conseguem, ainda, construir, uma sequência lógica, e de forma organizada, o que de alguma forma é natural, dado que é a primeira vez, no seu percurso escolar, que trabalham o raciocínio dedutivo. Ao longo das aulas, todos mostraram uma evolução significativa, na comunicação dos seus raciocínios, no entanto, é necessário haver mais tempo para que superassem esta dificuldade, em particular, no que diz respeito à apresentação de uma cadeia de argumentos.

A verificação dos resultados, outra fase importante na resolução de problemas, só era feita quando o próprio aluno sentia necessidade de verificar se os cálculos estariam correctos, como se pode constatar na análise da tarefa 1.2. da Ficha de Trabalho 2.

Assim, penso que, perante um problema de geometria, com as características dos que foram apresentados, a origem da maioria das dificuldades dos alunos é concluir que a compreensão do problema se pode limitar o aspecto visual da figura. Outras dificuldades têm a ver com o estabelecimento e a execução de um plano, porque em problemas cuja imagem contém muita informação, os alunos perdem-se se não estabelecerem um plano. A verificação dos resultados, foi outra das dificuldades encontradas, porque os alunos ao não percorrerem esta etapa, não identificam os seus erros e, conseqüentemente, não os corrigem.

6.2. Reflexão final sobre a intervenção

Analisados os dados é, agora, importante reflectir sobre todo o trabalho conjunto realizado, no qual se enquadra, também, uma análise da minha evolução enquanto professora.

A utilização do GeoGebra foi uma novidade para os alunos deste estudo e provou ser um *software* de fácil utilização. Os alunos aprenderam facilmente a manipulá-lo e a construir as figuras geométricas, utilizando as suas potencialidades educativas. Outra novidade para eles, foi o facto de todas as fichas de trabalho terem sido realizadas a pares. Estes foram dois “*pontos*” a meu favor. Na sua generalidade, todos gostaram bastante do método de ensino colocado em prática nestas aulas.

Considero, também, que a investigação qualitativa realizada, de carácter descritivo e interpretativo, mostrou-se adequada para este trabalho, uma vez que foi adaptada à natureza das questões e dos objectivos em estudo. No entanto, senti dificuldade em seleccionar dados perante o volume elevado de materiais recolhidos, optando por escolher apenas os dados que poderiam descrever e analisar a forma como os alunos utilizam os seus conhecimentos geométricos e a estratégia utilizada na resolução de problemas.

Quanto ao meu desempenho durante a leccionação, senti que os momentos de discussão foram bastante frutíferos, no entanto, senti que podia ter aplicado uma dinâmica diferente. As produções desenvolvidas pelos alunos poderiam ter sido melhor exploradas de forma a enriquecer o trabalho investigativo. É verdade que não tive muito tempo e que pretendia trabalhar a resolução de problemas geométricos de um modo diferente, visto ser esse, verdadeiramente, o tema desta investigação.

A problemática desenvolvida centrou-se na resolução de problemas, pelo que, procurei que as tarefas propostas ao longo da minha intervenção fossem o mais diversificado possível. Será que foram?

Em relação aos planos de aula, notei que foram de uma grande e preciosa ajuda. Estes foram elaborados de acordo com os objectivos do estudo, mas, tratando-se de planos de aula, foram ajustados continuamente, aula após aula. A minha maior dificuldade foi realizar uma gestão do tempo plausível para cada momento.

Enquanto professora senti-me satisfeita com a realização deste estudo e com os resultados obtidos. Foi bastante gratificante ter podido realizá-lo com alunos que, de certa forma, me fizeram sentir o que é ser professora e concretizar um trabalho que, espero eu, os faça recordar e ter outra ideia sobre a geometria. Não só os ensinei como também aprendi e inferi que a geometria está sempre presente. É intuitiva.

Foi muito importante, para mim, ter feito esta análise do trabalho dos alunos, porque me permitiu estar com mais atenção ao que eles diziam e faziam em sala de aula. Registei os diálogos mais importantes para as respostas da minha problemática, mas, devo confessar, fi-lo porque me aconselharam a gravar mas não via, inicialmente, utilidade no seu uso. É claro que agora penso de maneira diferente. Se não o tivesse feito não conseguiria perceber através dos diálogos a forma como os alunos pensam e abordam os problemas e também não teria ouvido o seguinte comentário: “*Gosto de fazer estas fichas, dão-me pica*”.

Nem tudo foi simples e deparei-me com algumas limitações, já atrás citadas, como por exemplo, a escassez de aulas leccionadas. A existência de um maior número de aulas nesta unidade poderia ter permitido obter respostas mais significativas para o estudo em causa. O número de aulas foi, também, insuficiente para explorar situações que me permitissem reconhecer os contributos de problemas geométricos envolvendo materiais diversos. Assim, seria interessante perceber a relação de materiais manipuláveis com a realização de problemas geométricos.

Seria igualmente interessante utilizar outras áreas, como astronomia, arte, biologia, entre outras, para justificar o uso da geometria e atribuir uma explicação lógica ao mundo que nos rodeia.

Referências

- Abrantes, P., (1985). *Planificação no ensino da Matemática*. Texto de apoio à disciplina de Didáctica da Matemática II no ano lectivo de 2009/2010
- Araújo, C., Pinto, E., Lopes, J., Nogueira, L., Pinto, R. (2007). *Estudo de caso*. Universidade do Minho. Recuperado a 19 de Maio de 2011 de <http://grupo4te.com.sapo.pt>
- Brito, L. (2008). Ler e resolver Problemas. *Educação e Matemática*. 99, 40 - 44
- Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica* (8.º ano). (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa)
- Conceição, A., Almeida, M. (2010). *Matematicamente Falando*. Porto: Areal Editores
- Conceição, A., Almeida, M., Conceição, C. & Costa, R. (2010). *MSI 5 – Matemática sob investigação – Parte I*. Porto: Areal Editores
- Esteves, A. (2010). *Resolução de problemas no tema Lugares Geométricos: O papel dos recursos na actividade matemática dos alunos*. (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada, Universidade de Lisboa)
- Fernandes, P. (1964). *Elementos de geometria – para o 2.º ciclo dos liceus*. (2.ª ed.). Lisboa: Livraria didáctica. Braga: Livraria Cruz e ME.
- Lavrador, C. (2010). *Resolução de tarefas envolvendo áreas e perímetros – Um estudo com alunos do Curso de Educação e Formação*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa)
- Lopes, J. (2010). *O contributo do software de geometria dinâmica GeoGebra no desenvolvimento da argumentação matemática de alunos do 9.º ano, na aprendizagem da circunferência e dos polígonos*. (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada, Universidade de Lisboa)
- Loureiro, C. (2009). Geometria no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico: Contributos para uma gestão curricular reflexiva. *Educação e Matemática*. 105, 61 - 66
- Magro, F., Fidalgo, F., Louçano, P., (2010). *Pi Matemática 7.º ano – Volume 2*. Edições ASA

- Marques, M., Ferreira, P., (2010). *Matemática 7.º ano – Volume 1*. Carnaxide: Santillana Constância
- Moreira, L. (2008). Resolvo problemas, logo penso. *Educação e Matemática*, 100, 11-15.
- Nacarato, A. & Passos, C. (2003). *A Geometria nas Séries Iniciais: Uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores*. São Carlos: EdUFSCar.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Neves, M., Leite, A., Silva, A. & Silva, J. (2010). *Matemática 7. (Parte 2)*. Porto: Porto Editora.
- Oliveira, C., Magro, F., Fidalgo, F., Louçano, P. (2010). *Pi Matemática 5.º ano – Volume 1*. Edições ASA
- Polya, G. (2003). Como resolver problemas – Um aspecto novo do método matemático (Trad.). Lisboa: Gradiva (Obra original publicada em 1945).
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (GTI). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34) (1ª ed.). Lisboa: APM – GTI
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. A. (2007). *Novo Programa de Matemática do Ensino Básico 3.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação – DEB.
- Regulamento interno da Escola 2,3 Básica Maria Alberta Menéres
- Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

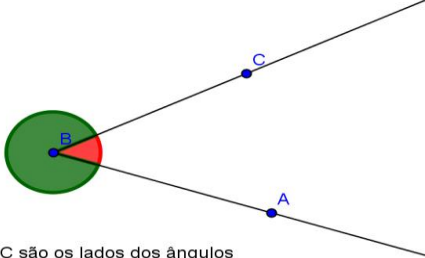
Anexos

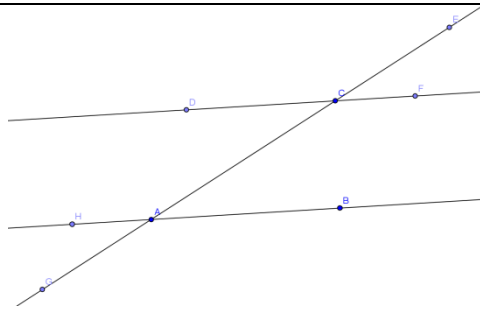
Anexo I

Primeira Aula – Dia 27 de Abril de 2011

Tema: Geometria Unidade Temática: Triângulos e Quadriláteros Tópico: Figuras no plano Sub-tópico: Ângulos: Amplitude e Medição.	Lições Números: 99 e 100 Data: 27.4.2011 Dia da Semana: 4ª F Hora: 10:05 Sala: 12
Sumário: Ângulos verticalmente opostos e Ângulos alternos internos. Resolução de uma ficha de trabalho.	
Capacidades Transversais: Resolução de problemas <ul style="list-style-type: none">• Identificar os dados, as condições e o objectivo do problema.• Discutir resultados, processos e ideias matemáticas.• Conceber e por em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados.	
Recursos/Materiais: <ul style="list-style-type: none">• Manual, Quadro e Canetas;• Apresentação em PowerPoint• Ficha de Trabalho 1 (30 cópias)• GeoGebra	Avaliação Avaliar a intervenção dos alunos ao longo da aula através de recolha de informação da Ficha de Trabalho 1 e qualidade da participação oral através de gravação de vídeo e áudio.

Mom.	Desenvolvimento da aula	Tempo (min.)
0	Ligar os computadores e abrir o programa GeoGebra antes da aula começar. Desligar apenas os monitores.	
1	Entrada dos alunos e abertura da lição. Transcrição do sumário por parte dos alunos	10 (10:15)

<p style="font-size: 2em; color: blue; text-align: center;">2</p>	<p style="color: red; text-align: center;">Revisão sobre a classificação de ângulos e o conceito de congruência.</p> <p>Começar a aula questionando os alunos, sobre:</p> <ul style="list-style-type: none"> • O que é um ângulo? Como o podemos definir? O que será a amplitude de um ângulo? • Colocar um exemplo no quadro. <div style="text-align: center;">  <p style="color: red; text-align: right;">e ângulos quanto à</p> </div> <p style="font-size: 0.8em;">As semi-rectas BA e BC são os lados dos ângulos O ponto B é o vértice dos ângulos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dar alguns exemplos e esclarecer os alunos sobre a notação a utilizar (ângulo ABC é o ângulo; para a amplitude escreve-se, simbolicamente, $\angle ABC$) • Qual a unidade de medida que utilizamos para medir os ângulos? • Questionar os alunos sobre o termo “congruência” e referir que dois ângulos congruentes são ângulos que têm a mesma amplitude. 	<p style="color: blue; font-size: 1.2em;">20</p> <p style="color: black; font-weight: bold;">(10:35)</p>
<p style="font-size: 2em; color: blue; text-align: center;">3</p>	<p style="color: red; text-align: center;">Realização da primeira parte-da Ficha de Trabalho 1</p> <p style="color: red; text-align: center;">(questões 1 e 2)</p> <p>Distribuir da ficha de trabalho 1, indicando que esta deve ser realizada a pares no computador com o <i>software</i> GeoGebra, apenas até ao final da questão 2</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pedir aos alunos que registem na ficha de trabalho todas as estratégias e raciocínios que utilizam. 	<p style="color: blue; font-size: 1.2em;">15</p> <p style="color: black; font-weight: bold;">(10:50)</p>
<p style="font-size: 2em; color: blue; text-align: center;">4</p>	<p style="color: red; text-align: center;">Correcção e Discussão da primeira parte da Ficha de trabalho 1</p> <p>Ao fim do tempo estipulado para a resolução da questão 2, sobre ângulos verticalmente opostos, proceder à discussão:</p> <p>(Abrir GeoGebra – Ficheiro 1.1.)</p>	<p style="color: blue; font-size: 1.2em;">10</p> <p style="color: black; font-weight: bold;">(11:00)</p>



Questões a fazer aos alunos:

- Chegámos ao conceito de ângulos verticalmente opostos.

Então o que são?

⇒ São ângulos em que os lados de um são opostos aos do outro.

- Na figura que vos dei, são capazes de indicar outros ângulos verticalmente opostos? Porque escolheram esses?

⇒ HAG e BAC; DCA e FCE; DCE e ACF

- Como podemos, então, definir ângulos verticalmente opostos? (ouvir as respostas dos alunos e ir registando no quadro até a definição seguinte estar concluída). Ter atenção:

⇒ Ao vértice – é comum

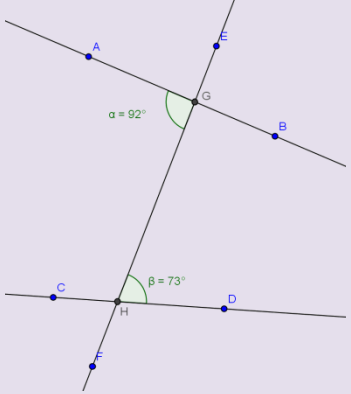
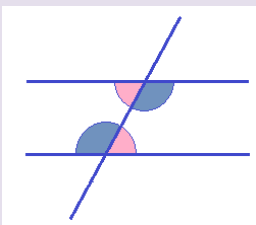
⇒ Aos lados – são o prolongamento dos lados do outro

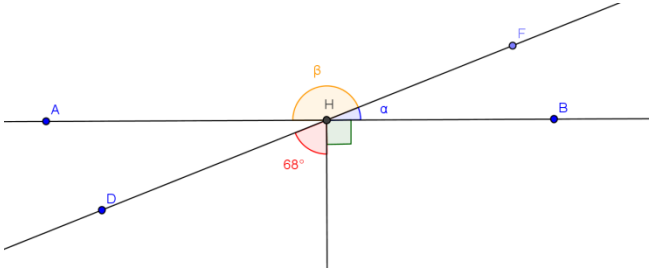
<p>Dois ângulos dizem-se verticalmente opostos se têm o vértice comum e os lados de um são o prolongamento dos lados do outro.</p>	
---	--

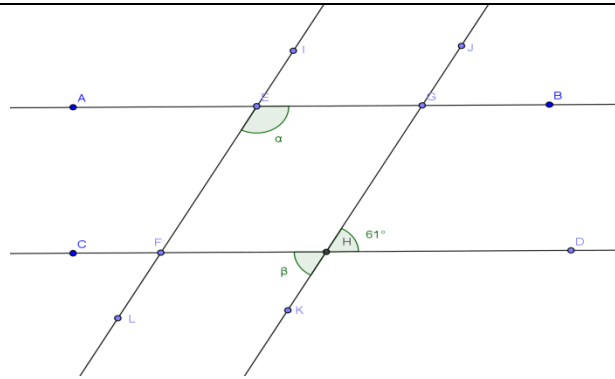
- O que podemos dizer das suas amplitudes?

São iguais (congruentes)

<h1 style="color: blue;">5</h1>	<p style="color: red; text-align: center;">Ângulos Alternos Internos</p> <p>Vamos agora conhecer outros ângulos: Ângulos Alternos Internos (Abrir o GeoGebra – Ficheiro 1.2)</p>	<h1 style="color: blue;">5</h1> (11:05)
---------------------------------	--	--

	 <p>Estes dois ângulos, assinalados, são ângulos alternos internos, porque será?</p> <p>⇒ São ângulos que estão entre duas rectas.</p> <p>⇒ Alternos, porque estão posicionados em lados opostos da recta secante (é uma recta que intersecta outra ou outras).</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Ângulos Alternos Internos estão em lados diferentes da recta que intersecta duas rectas e situam-se na região compreendida entre essas rectas.</p> </div> 	
<p>6</p>	<p>Realização da segunda parte da Ficha de Trabalho 1</p> <p>(Questão 3)</p> <p>Pedir aos alunos para continuarem a resolver a ficha até ao fim, indicando que esta deve ser realizada a pares no computador com o <i>software</i> GeoGebra, à semelhança da primeira parte.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pedir aos alunos que registem na ficha de trabalho todas as estratégias e raciocínios que utilizam. 	<p>10</p> <p>(11:15)</p>
<p>7</p>	<p>Discussão da segunda parte da Ficha de trabalho 1</p> <p>Ao fim do tempo estipulado para a resolução da questão 3, sobre ângulos alternos internos, proceder à discussão:</p> <p>Questões a fazer aos alunos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • A questão 3 da vossa ficha é um caso particular de Ângulos Alternos Internos. <p>Porquê que digo isto?</p> <p>⇒ Porque as rectas são paralelas.</p>	<p>10</p> <p>(11:25)</p>

	<ul style="list-style-type: none"> • Na figura da ficha quais são outros ângulos alternos internos que encontram? \Rightarrow HAC e ACF • Em relação às amplitudes destes ângulos o que podemos dizer? \Rightarrow Têm a mesma amplitude. São iguais. São congruentes. <p>Então vamos escrever no caderno: Se os ângulos alternos internos são congruentes, então as rectas são paralelas.</p>	
<p style="text-align: center;">8</p>	<p style="text-align: center;">Resolução de Problemas (Questões 4 e 5)</p> <p>Realização das questões 4 e 5 da ficha de trabalho 1, juntamente com os alunos. (Abrir o GeoGebra – Ficheiro 1.3)</p> <p>4. Observa atentamente a figura seguinte e determina, justificando, a amplitude dos ângulos α e β</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Pretendemos determinar a amplitude dos ângulos α e β.</p> <p>O que podemos determinar? ($\angle DHA$)</p> <p>Como? ($68^\circ + \angle DHA = 90^\circ$, logo $\angle DHA = 22^\circ$).</p> <p>E porquê que precisamos calcular a amplitude do ângulo DHA? (para sabermos o α)</p> <p>Porquê? (porque α também tem de amplitude 22° por serem ângulos verticalmente opostos).</p> <p>E o ângulo β? ($\alpha + \beta = 180^\circ$, assim sendo, $\beta = 180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$).</p> <p>5. Na situação seguinte, determina a amplitude dos ângulos α e β, sabendo que $AB \parallel CD$ e $LI \parallel KJ$. (Abrir o GeoGebra – Ficheiro 1.4)</p>	<p style="text-align: center;">10</p> <p style="text-align: center;">(11:35)</p>



Pretendemos determinar a amplitude dos ângulos α e β .

Qual o ângulo que podemos dizer já a sua amplitude? (é o ângulo β é porque é verticalmente oposto ao $\angle DHG$)

Com os conhecimentos que temos da aula de hoje, qual é o ângulo alterno interno do ângulo α ? (É o $\angle CFE$)

Como vamos saber a sua amplitude? (É congruente com o $\angle FHG$, porque são ângulos obtusos de lados paralelos, logo são iguais)

Então qual a sua amplitude? ($180^\circ - 61^\circ = 119^\circ$)

Logo a amplitude do ângulo α também é 119° .

Total

90

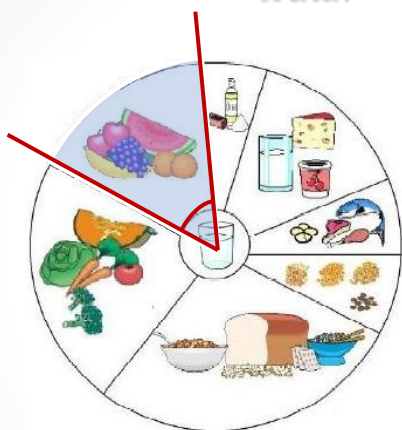
Revisões

Classificação de Ângulos

Cristina Teixeira

Ângulo, é uma região do plano limitada por duas semi-rectas com a mesma origem. As semi-rectas são os lados do ângulo e a origem dessas semi-rectas é o vértice do ângulo.

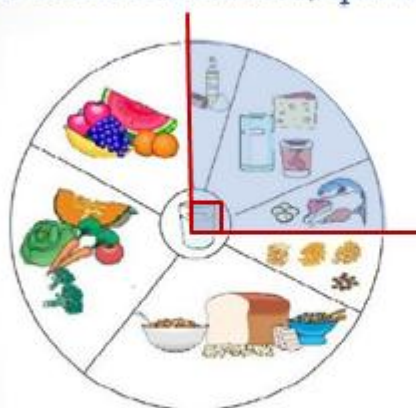
Que ângulo se forma se considerarmos apenas a fruta?



Ângulo
Agudo

A sua amplitude está compreendida entre 0° e 90°

Se comer apenas peixe, temperado com azeite e um iogurte como sobremesa, que ângulo obtenho?



Ângulo
Recto

A amplitude é de 90°

Se o meu almoço for constituído só por legumes e fruta, que ângulo obtenho?



**Ângulo
Obtuso**

A sua amplitude está compreendida entre 90° e 180°

Que ângulo formo quando me alimento de legumes e pão?



**Ângulo
Raso**

A sua amplitude é de 180°

Se pretender incluir um alimento de cada sector no meu almoço, que ângulo obtenho?



**Ângulo
Giro**

A sua amplitude é de 360°






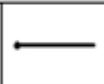
Não tenho fome. Não quero comer. Que ângulo associas a esta ideia?



**Ângulo
Nulo**

A sua amplitude é de 0°

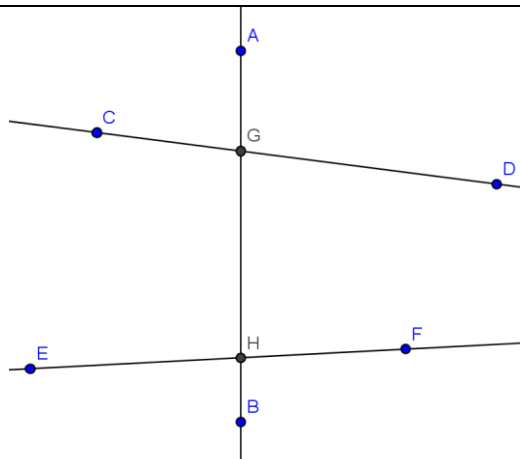
Em síntese:

					
Agudo	Recto	Obtuso	Raso	Giro	Nulo
Entre 0° e 90°	90°	Entre 90° e 180°	180°	360°	0°

Segunda Aula – Dia 29 de Abril de 2011

<p>Tema: Geometria</p> <p>Unidade Temática: Triângulos e Quadriláteros</p> <p>Tópico: Figuras no plano</p> <p>Sub-tópico: Ângulos: Amplitude e Medição.</p>	<p>Lições Números: 101 e 102</p> <p>Data: 29.4.2011</p> <p>Dia da Semana: 6ª F</p> <p>Hora: 11:45</p> <p>Sala: 12</p>
<p>Sumário:</p> <p>Pares de ângulos. Resolução de actividades do manual e de uma ficha de trabalho.</p> <p>Apresentação e discussão dos resultados.</p>	
<p>Capacidades Transversais:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolver problemas; • Identificar os dados, as condições e o objectivo de um problema; • Conceber e por em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados. • Discutir resultados, processos e ideias matemáticos. 	
<p style="text-align: center;">Recursos/Materiais:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Manual, Quadro, Canetas e Calculadora; • Ficha de Trabalho 2 (15 cópias) • Ficha de Trabalho 3 (30 cópias) 	<p style="text-align: center;">Avaliação</p> <p>Avaliar a intervenção dos alunos ao longo da aula através da concretização da Ficha de Trabalho 2 e qualidade da participação oral através de gravação de vídeo e áudio assim como cooperação no trabalho.</p>

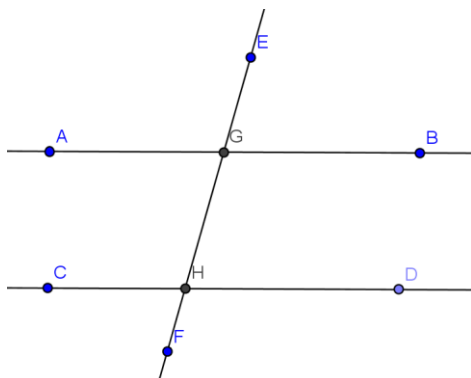
Mom.	Desenvolvimento da aula	Tempo (min.)
1	<p style="color: red;">Entrada dos alunos e abertura da lição.</p> <p>Transcrição do sumário por parte dos alunos.</p> <p>Pedir para colocarem a ficha de trabalho 1 em cima da mesa a fim de ser recolhida.</p>	<p>10</p> <p>(11:55)</p>
2	<p style="color: red;">Em síntese</p> <p>Desenhar no quadro a imagem:</p>	<p>10</p> <p>(12:05)</p>



Questionar os alunos:

- Nesta imagem existe ângulos verticalmente opostos? Quais? (DGH e AGC) (AGD e CGH) (EHB e GHF) e (EHG e FHB)
- Existem ângulos alternos internos, nesta imagem? (DGH e EHG) (CGH e GHF)
- As amplitudes dos ângulos mencionados serão iguais? (Não porque as rectas CD e EF não são paralelas)

Desenhar no quadro a imagem:



Questionar os alunos:

- Quais são os ângulos alternos internos desta figura? (AGH e GHD) e (BGH e CHG).
- E as amplitudes destes ângulos serão iguais? (Sim porque as rectas AB e CD são paralelas)

3

Exemplo para consolidar

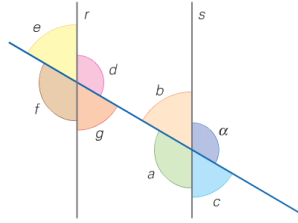
Pedir aos alunos para abrirem o manual na página 38 e resolverem a tarefa 5. (dar 5 minutos para que pensem na tarefa)

10

(12:15)

5 Valores representados pelas letras

Na figura seguinte as rectas r e s são estritamente paralelas.
 A amplitude do ângulo α é 120° .
 Determina a amplitude dos ângulos representados pelas letras a, b, c, d, e e f .
 Justifica a tua resposta.



Pedir a um aluno para ir ao quadro resolver a tarefa:

Questionar os alunos acerca dos dados do problema. (o enunciado dá-nos o valor do ângulo α e diz-nos que as rectas r e s são paralelas).

Que tipo de ângulos temos aqui? (ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos)

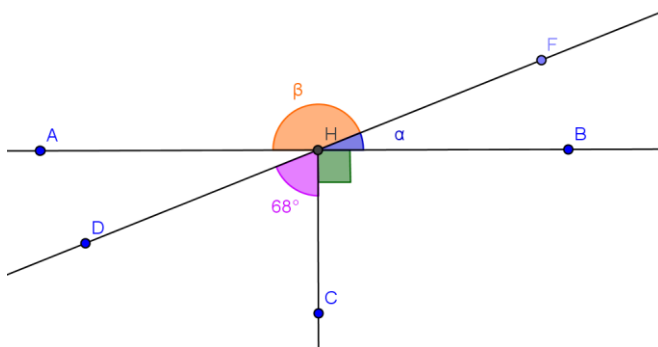
Que informação nos dá o enunciado a dizer que as rectas r e s são paralelas? (que os ângulos alternos internos têm a mesma amplitude)

Quais são os ângulos alternos internos? (b com g e a com d)

Quais são os ângulos verticalmente opostos? (α com a , b com c , d com f e g com e)

Revisão do Problema iniciado na aula anterior

Desenhar no quadro a imagem seguinte:



4

(Não apagar a imagem do quadro)

Questionar os alunos sobre os dados do problema e o que é pedido.

(pedir a um aluno para ir ao quadro calcular as amplitudes dos ângulos α e β .)

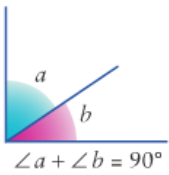

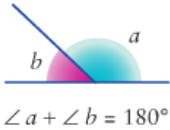
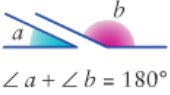
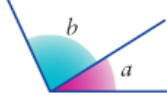
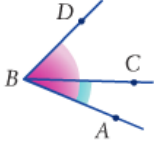
O que podemos determinar? ($\angle DHA$)

Como? ($68^\circ + \angle DHA = 90^\circ$, logo $\angle DHA = 22^\circ$).

10

(12:25)

	<p>E porquê que precisamos calcular a amplitude do ângulo DHA? (para sabermos o α)</p> <p>Porquê? (porque α também tem de amplitude 22° por serem ângulos verticalmente opostos).</p> <p>E o ângulo β? ($\alpha + \beta = 180^\circ$, assim sendo, $\beta = 180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$).</p>	
<p style="font-size: 2em; color: blue; text-align: center;">5</p>	<p style="color: red; text-align: center;">Introdução de novos conceitos</p> <p>Voltando à imagem do problema:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Nesta imagem podemos ver Ângulos Adjacentes, o que acham que são ângulos adjacentes? (São ângulos que são seguidos, têm um vértice comum). • Podem dar exemplos? (FHB com BHC) (AHD com DHC)... • Vou fazer um desenho no quadro e quero que me digam se são ângulos adjacentes (Não, porque não têm o mesmo vértice) <div style="text-align: center;"> </div> <ul style="list-style-type: none"> • Voltando à figura do problema, há ângulos que se somarmos as suas amplitudes dão 180°. Quais são? (BHF com FHA) (BHC com CHD com DHA) • A estes ângulos chamamos ângulos Suplementares. • E há outros ângulos que se chamam Complementares, que são AHD e DHC, sabem porquê? (porque a soma das suas amplitudes é 90°) • Como síntese e para vocês não estarem a escrever tudo isto, vou entregar estas definições e vocês vão colar no caderno (ler com os alunos depois de distribuir) 	<p style="text-align: center; color: blue; font-size: 1.5em;">15</p> <p style="text-align: center;">(12:40)</p>

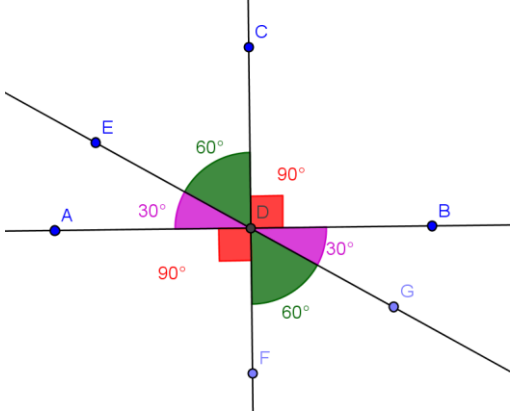
	<p>Ângulos complementares</p>  <p>$\angle a + \angle b = 90^\circ$</p> <p>São ângulos cuja soma das amplitudes é 90°.</p>  <p>$\angle a + \angle b = 90^\circ$</p>	<p>Ângulos suplementares</p>  <p>$\angle a + \angle b = 180^\circ$</p> <p>São ângulos cuja soma das amplitudes é 180°.</p>  <p>$\angle a + \angle b = 180^\circ$</p>	<p>Ângulos adjacentes</p>  <p>São ângulos que têm um lado comum que os separa. a e b são ângulos adjacentes. Considera a seguinte figura:</p>  <p>Repara que os ângulos ABD e ABC não são adjacentes. Porquê?</p>	
<p>6</p>	<p>Distribuição da ficha de trabalho 2.</p> <p>Distribuir um exemplar da Ficha de Trabalho 2 por grupo (par). Informar os alunos que esta ficha será entregue à professora e para que possam fazer a correcção será distribuída outra a cada aluno.</p>	<p>5 (12:45)</p>		
<p>7</p>	<p>Realização da ficha de trabalho.</p> <p>Realização da Ficha de Trabalho 2 a pares.</p>	<p>15 (13:00)</p>		
<p>8</p>	<p>Correcção e discussão da ficha de trabalho (em caso de haver tempo).</p> <p>Correcção e discussão da Ficha de Trabalho 2</p> <p>Distribuir uma cópia da Ficha de Trabalho 2 por cada aluno e pedir para não escreverem na cópia anterior, mesmo que a resposta esteja errada.</p> <p>(1) Questionar em grande grupo as respostas a esta questão. Relembrar o significado das palavras complementar e suplementar.</p> <ul style="list-style-type: none"> Para dois ângulos serem complementares quanto tem quer as suas amplitudes somadas? Então se um desses ângulos tiver 0° quanto terá o outro? <p>(2) Pedir a um aluno para a resolver no quadro e questionar a turma acerca da resolução realizada.</p> <p>2.1. Se necessário ajudar os alunos com algumas questões que os levem à resposta:</p>	<p>15 (13:15)</p>		

	<ul style="list-style-type: none"> • Será que neste problema existem ângulos verticalmente opostos? • Saber esta informação permite-nos conhecer alguma amplitude? • Haverá ângulos suplementares? <p>2.2. Se necessário ajudar os alunos com algumas questões que os levem à resposta:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Estes ângulos todos somados têm um nome. Qual é? E esse nome não vos dá informações úteis? • Que relação existe entre os ângulos $a + a$ e um ângulo a? • Poderá ser mais fácil dividir 180° por...? E assim descobrimos apenas a amplitude do ângulo a. <p>2.3. Se necessário ajudar os alunos com algumas questões que os levem à resposta:</p> <ul style="list-style-type: none"> • O facto das rectas $d // e$, dá-nos que informações? • Há aqui ângulos que estudámos e tem características próprias por estarem compreendidas entre duas rectas paralelas e um ângulo estar de um lado da secante e o outro do outro lado da mesma secante. <p>2.4. Se necessário ajudar os alunos com algumas questões que os levem à resposta:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Haverá ângulos complementares? Como sabemos isso? • Haverá ângulos verticalmente opostos? Onde e porquê? • Haverá ângulos suplementares? Onde e porquê? 	
9	<p>Trabalho para casa.</p> <p>Distribuir a ficha de Trabalho 3 para a realizarem em casa. Relembrar que esta ficha é para entregarem na aula seguinte, identificada.</p>	
Total	90	

Terceira Aula – Dia 3 de Maio de 2011

<p>Tema: Geometria</p> <p>Tópico: Triângulos e Quadriláteros</p> <p>Sub-tópico: Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.</p>	<p>Lições Números:</p> <p>Data: 03.5.2011</p> <p>Dia da Semana: 3ª F</p> <p>Hora: 8:15</p> <p>Sala: 12</p>
<p>Sumário:</p> <p>Dedução da soma dos ângulos internos de um triângulo.</p> <p>Resolução de uma ficha de trabalho. Apresentação e discussão dos resultados.</p>	
<p>Capacidades Transversais:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Discutir resultados, processos e ideias matemáticos; • Conceber e por em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados; • Resolver problemas; • Identificar os dados, as condições e o objectivo de um problema 	
<p style="text-align: center;">Recursos/Materiais:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Manual, Quadro e Canetas; • Ficha de Trabalho 4 (45 cópias) • Ficha de trabalho 5. (15 cópias) • GeoGebra 	<p style="text-align: center;">Avaliação</p> <p>Avaliar a intervenção dos alunos ao longo da aula através da concretização da Ficha de Trabalho 3, Ficha de Trabalho 3.1. e qualidade da participação oral através de gravação de vídeo e áudio assim como cooperação no trabalho.</p>

Mom.	Desenvolvimento da aula	Tempo (min.)
0	<p>Preparação dos computadores.</p> <p>Ligar os computadores e abrir no GeoGebra antes da aula começar.</p> <p>Desligar apenas os monitores.</p>	

<p>1</p>	<p>Entrada dos alunos e abertura da lição.</p> <p>Transcrição do sumário por parte dos alunos</p> <p>Recolher os Trabalhos de casa (Ficha de Trabalho 2.1).</p>	<p>10</p> <p>(8:25)</p>
<p>2</p>	<p>Ângulos adjacentes, suplementares e complementares.</p> <p>Questionar os alunos se leram as definições solicitadas na última aula, enquanto desenha a figura abaixo no quadro.</p>  <p>Pedir a um aluno para dizer o que são ângulos adjacentes e depois ir ao quadro identificar na figura dois ângulos adjacentes.</p> <p>Pedir a outro aluno para dizer o que são ângulos suplementares e de seguida identificar na figura dois ângulos suplementares. (O aluno deverá indicar dois ângulos suplementares adjacentes)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Perguntar se dois ângulos para serem suplementares têm que ser adjacentes? (Não) • Então pedir para identificar dois ângulos suplementares não adjacentes. <p>Pedir a outro aluno a definição de ângulos complementares e de seguida identificar na figura dois ângulos complementares. (O aluno deverá indicar dois ângulos complementares adjacentes)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Perguntar se dois ângulos para serem complementares têm que ser adjacentes? (Não) • Então pedir para indicar dois ângulos complementares não adjacentes. 	<p>10</p> <p>(8:35)</p>
<p>3</p>	<p>Distribuição da Ficha de Trabalho 4.</p> <p>Distribuir um exemplar da ficha de trabalho 4, por grupo (par) e fazer a</p>	<p>5</p> <p>(8:40)</p>

	<p>leitura e interpretação com os alunos. Informar os alunos que esta ficha é para ser entregue à professora e para que possam fazer a correcção será distribuída outra a cada aluno.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pedir aos alunos que registem na Ficha de Trabalho 4, todas as estratégias e raciocínios que utilizarem <p>Informar que fazem apenas a questão 1 no computador enquanto que a questão 2 deverá ser feita no lugar. Pedir aos alunos para se dirigirem, por grupo, a cada computador e ligarem apenas o monitor.</p>	
4	<p>Realização da Ficha de Trabalho 4.</p> <p>Realização da Ficha de Trabalho 4, a pares, apenas a primeira parte.</p>	<p>20</p> <p>(9:00)</p>
5	<p>Discussão e correcção da Ficha de Trabalho 4 (questão 1).</p> <p>Correcção e discussão da Ficha de Trabalho 4 - Parte 1</p> <p>Distribuir uma cópia da Ficha de Trabalho 4 por cada aluno e pedir para não escreverem na cópia anterior, mesmo que a resposta esteja errada.</p> <p>Abrir o ficheiro “Ficha 3a”</p> <p>(1.3) Indicar na tabela valores possíveis e questionar os alunos sobre a soma das amplitudes. “Vou alterar a forma do triângulo. Reparem nas amplitudes dos ângulos do triângulo. Qual será a soma das amplitudes dos ângulos do triângulo?”</p> <p>(1.4) Questionar o grande grupo sobre esta questão e conduzir os alunos para a conjectura da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo qualquer. “Será que 180° é válido apenas para estes triângulos ou pode-se generalizar para qualquer triângulo?”</p> <p>Como conclusão desta ficha de trabalho, escrever no quadro e pedir aos alunos para passarem para o caderno</p>	<p>15</p> <p>(9:15)</p>
6	<p>Realização da Ficha de Trabalho 4.</p> <p>Realização da Ficha de Trabalho 4, a pares, sendo agora a segunda parte.</p>	<p>15</p> <p>(9:30)</p>
7	<p>Discussão e correcção da Ficha de Trabalho 4 (questão 2).</p> <p>Desenhar, no quadro, a figura da ficha.</p> <p>(2.1) Perguntar aos alunos qual o nome deste tipo de ângulos (alternos</p>	<p>15</p> <p>(9:45)</p>

internos) e por isso são ângulos congruentes.

(2.2) Perguntar aos alunos qual o nome deste tipo de ângulos alternos internos) e por isso são ângulos congruentes.

(2.3) Tratando-se de ângulos suplementares sua soma é 180° .

(2.4) Os ângulos CAB é alterno interno do ângulo DCA logo tem a mesma amplitude. O ângulo CBA é alterno interno do ângulo ECB que também tem a mesma amplitude. Assim o triângulo pode variar de tamanho e de forma que a soma dos ângulos internos é sempre 180°

Num triângulo, a soma das amplitudes dos seus ângulos internos é 180°

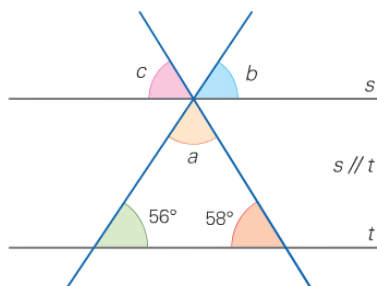
Tarefas do Manual

Caso os alunos terminem a ficha de trabalho mais cedo podem começar a resolver o trabalho de casa: pág. 39 tarefas 6 e 7 do manual.

Os outros alunos farão como trabalho de casa.

6 Valores representados pelas letras

Na figura seguinte as rectas s e t são estritamente paralelas.



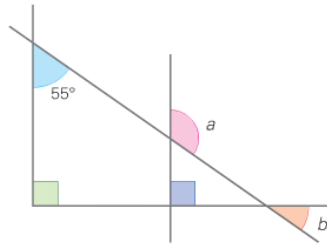
Determina a amplitude dos ângulos representados pelas letras a , b e c .

Explica como obtiveste a tua resposta.

8

7 Valores representados pelas letras

Observa a figura seguinte.



7.1 Qual é a amplitude do ângulo representado pela letra **a**?

Explica como obtiveste a tua resposta.

7.2 Qual é a amplitude do ângulo representado pela letra **b**?

Explica como obtiveste a tua resposta.

ACTIVAR © Paulo Silveira

Total

90

Quarta Aula – Dia 4 de Maio de 2011

<p>Tema: Geometria</p> <p>Tópico: Triângulos e Quadriláteros</p> <p>Sub-tópico: Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.</p>	<p>Lições Números:</p> <p>Data: 04.5.2011</p> <p>Dia da Semana: 4ª F</p> <p>Hora: 10:05</p> <p>Sala: 12</p>
<p>Sumário:</p> <p>Realização de uma ficha de trabalho. Lados e ângulos de um triângulo.</p>	
<p>Capacidades Transversais:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Discutir resultados, processos e ideias matemáticos; • Conceber e por em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados; • Resolver problemas; • Identificar os dados, as condições e o objectivo de um problema 	
<p style="text-align: center;">Recursos/Materiais:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Manual, Quadro e Canetas; • Ficha de trabalho 5 • Ficha de trabalho 6 	<p style="text-align: center;">Avaliação</p> <p>A ficha de trabalho 5 e 6 será entregue para, posteriormente, ser avaliada e analisada as produções e desempenho dos alunos.</p>

Mom.	Desenvolvimento da aula	Tempo (min.)
1	<p style="color: red;">Entrada dos alunos e abertura da lição.</p> <p>Transcrição do sumário por parte dos alunos</p> <p>Pedir os trabalhos de casa Ficha de trabalho 3.</p>	<p>10</p> <p>(10:15)</p>
2	<p style="color: red;">Entrega e realização da Ficha de trabalho 5</p> <p>Realização da Ficha de Trabalho 5, a pares</p>	<p>20</p> <p>(10:35)</p>

Discussão e correcção da Ficha de trabalho 5

(1) **Em grupo turma.** Quanto é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo? (180°)

Então qual é o valor que está em falta? (107°)

(2) **Chamar um aluno ao quadro.** Que relação existe entre o ângulo de 75° com o ângulo a ? (São ângulos verticalmente opostos, logo $\angle a = 75^\circ$)

Precisamos saber outra amplitude para calcular b . (É o $\angle CBA$, que é $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$)

Qual a amplitude do $\angle b$? (A soma dos ângulos internos do triângulo é 180° , logo $\angle b = 35^\circ$)

(3) **Em grupo turma.** Qual a amplitude do $\angle a$? (É 50° por ser ângulo suplementar do 130°)

Então qual a amplitude do $\angle b$? (É 70° porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°)

(4) **Chamar um aluno ao quadro.** Quais os dados do nosso problema e o que queremos? (os dados são as amplitudes de dois ângulos e sabe-se que as rectas r e s são paralelas. Queremos saber a amplitude do $\angle a$ e $\angle b$)

Que informação nos dá o facto de $r//s$? (quer dizer que os ângulos alternos internos tem a mesma amplitude)

Qual é o ângulo alterno interno do $\angle a$? (É o 80° , o que significa que o $\angle a = 80^\circ$)

E qual a amplitude do $\angle b$? (É 65° porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°)

(5) **Chamar um aluno ao quadro.** O que conseguimos ver no esquema deste problema? (Dois triângulos)

Qual a informação que um triângulo nos dá em relação à amplitude dos seus ângulos internos? (Que a sua soma é 180° , logo descobrimos o $\angle a = 50^\circ$)

Qual o outro ângulo que podemos já calcular? (é o $\angle d$ por ser suplementar ao 120° , logo $\angle d = 60^\circ$)

Outra amplitude fácil de calcular com a informação já dada? (É o $\angle c$)

3

15

(10:50)

	<p>porque as amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180, logo $\angle c = 40^\circ$)</p> <p>Assim o $\angle b$ é? (É suplementar ao $\angle c$ logo é 140°)</p> <p>(6) Chamar um aluno ao quadro. Quais os dados do problema? (Temos amplitudes de dois ângulos e é-nos dito que as rectas AB//DE)</p> <p>Então vamos à procura de quê? (De ângulos alternos internos os ângulos de amplitude dada, que é o $\angle a = 40^\circ$)</p> <p>Assim já se consegue descobrir outra amplitude, qual é? (É o ângulo b por ser o terceiro ângulo desconhecido do triângulo, a sua amplitude é 80°)</p> <p>O que podemos saber mais? (Sabemos que o $\angle b$ é verticalmente oposto ao $\angle c$ logo $\angle c=80^\circ$)</p> <p>E o $\angle d$? (É $180^\circ-80^\circ-40^\circ=60^\circ$)</p>	
<p>4</p>	<p>Entrega e realização da Ficha de trabalho 6</p> <p>Realização da Ficha de Trabalho 6, a pares</p> <p>Informar que vai ser dado triângulos semelhantes aos das fichas mas em dimensão maior para que possam manipulá-los (dobrar).</p> <p>Fazer apenas a primeira questão.</p>	<p>10 (11:00)</p>
<p>5</p>	<p>Discussão e correcção da Ficha de trabalho 6</p> <p>1.1. Em grande grupo. Em quantos triângulos conseguimos encontrar eixos de simetria? (Nos triângulos rosa e laranja)</p> <p>Quantos eixos de simetria encontraram no triângulo rosa? (Três, porque os seus ângulos são todos de igual amplitude)</p> <p>Quantos eixos de simetria encontraram no triângulo laranja? (Dois, porque este triângulo tem apenas dois ângulos de igual amplitude)</p> <p>O que se pode dizer do triângulo azul? (Não tem eixos de simetria porque não tem ângulos de igual amplitude)</p> <p>1.2. Observando o Recorda do mocho podemos classificar estes triângulos.</p> <p>(O triângulo rosa é equilátero porque tem os três lados de igual comprimento e é um triângulo acutângulo porque os três ângulos internos são agudos)</p> <p>(O triângulo laranja, é isósceles porque tem dois lados de iguais</p>	<p>10 (11:10)</p>

	<p>comprimentos e quanto aos ângulos também é acutângulo)</p> <p>(O triângulo azul é escaleno porque tem os três lados de comprimentos diferentes e quanto aos ângulos é obtusângulo)</p> <p>Então podemos concluir que:</p> <p>Lados e ângulos de um triângulo</p> <p>Propriedades</p> <ul style="list-style-type: none"> • Em qualquer triângulo, a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes. • Em qualquer triângulo, a ângulos congruentes opõem-se lados congruentes. • Em qualquer triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo. • Em qualquer triângulo, ao maior ângulo opõe-se o maior lado. • Em qualquer triângulo, ao menor lado opõe-se o menor ângulo. • Em qualquer triângulo, ao menor ângulo opõe-se o menor lado. 	
6	<p>Realização das questões 2 e 3 da Ficha de Trabalho 6</p> <p>Informar os alunos que podem continuar a resolver, a pares, as questões em falta. Registrando sempre os raciocínios que tiverem.</p>	<p>15 (11:25)</p>
	<p>Discussão e correcção da Ficha de trabalho 6 (Tarefas 2 e 3)</p> <p>2. Chamar um aluno ao quadro. Quais os dados do nosso problema? (Sabemos a amplitude de dois ângulos e ainda nos diz que o lado CB = BD)</p> <p>E o que nos dá essa informação? (Dá-nos que as amplitudes dos ângulos opostos a estes lados são de igual amplitude)</p> <p>Quais são esses ângulos? (São os ângulos a e d)</p> <p>Mas ainda não podemos calcular essas amplitudes, o que falta primeiro? (Calcular a amplitude do ângulo c que é suplementar ao 105°, logo $\angle c = 75^\circ$)</p> <p>Agora o que podemos calcular? (Como $\angle a$ e $\angle d$ são iguais fazemos $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$; $105^\circ : 2 = 52,5^\circ$)</p> <p>O que falta? (o $\angle b = 180^\circ - 40^\circ - 105^\circ = 35^\circ$)</p> <p>3. Quais os dados do problema?</p>	<p>10 (11:35)</p>

	<p>3.1. (Como o triângulo é equilátero tem os ângulos todos iguais, assim $180^\circ:3=60^\circ$. O ângulo $ABE=60^\circ$)</p> <p>3.2. $(180^\circ-32^\circ-58^\circ= 90^\circ$</p> <p>3.3. $EF<AF<EA$ porque os ângulos opostos a estes lados têm amplitudes crescentes)</p> <p>3.4. $\angle BCE=180^\circ-78^\circ-86^\circ=16^\circ$ é um triângulo escaleno porque as amplitudes dos seus ângulos internos são diferentes</p>	
Total		90

Quinta Aula – Dia 10 de Maio de 2011

Tema: Geometria Tópico: Triângulos e Quadriláteros Sub-tópico: Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.	Lições Números: Data: 10.5.2011 Dia da Semana: 3ª F Hora: 08:15 Sala: 4
Sumário: Realização, correcção e discussão de problemas matemáticos.	
Capacidades Transversais: <ul style="list-style-type: none"> • Resolver problemas; • Identificar os dados, as condições e o objectivo de um problema • Conceber e por em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados; • Discutir resultados, processos e ideias matemáticos; 	
Recursos/Materiais: <ul style="list-style-type: none"> • Manual, Quadro e Canetas; • Ficha de trabalho 4.2. • Ficha de trabalho 5.1. 	Avaliação As fichas de trabalho 4.2. e 5.1 serão entregues para, posteriormente, serem avaliadas e analisadas as produções e desempenho dos alunos.

Mom.	Desenvolvimento da aula	Tempo (min.)
1	Entrada dos alunos e abertura da lição. Transcrição do sumário por parte dos alunos	10 (8:25)
2	Entrega e realização da Ficha de trabalho 6 Realização da segunda parte da Ficha de Trabalho 6, a pares	15 (8:40)
3	Discussão e correcção da Ficha de trabalho 6 (Tarefas 2 e 3) 4. Chamar um aluno ao quadro. <i>Quais os dados do nosso problema?</i> (Do triângulo ABC sabemos a amplitude de dois ângulos e do triângulo BCD, sabemos que o lado $CB = BD$). Se, no triângulo BCD, os lados CB e BD são iguais (congruentes),	15 (8:55)

	<p>então as amplitudes dos ângulos opostos a estes lados são iguais.</p> <p><u>Quais são esses ângulos?</u> (São os ângulos a e d).</p> <p><u>Como podemos então calcular as amplitudes desses dois ângulos?</u> (Calcular a amplitude do ângulo c, que é suplementar do ângulo de 105°, logo $\angle c = 75^\circ$)</p> <p><u>Agora o que podemos calcular?</u> (Como a soma dos três ângulos internos do triângulo é 180°, fazemos $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ e como $\angle a$ e $\angle d$ são iguais e, fazemos $105^\circ : 2 = 52,5^\circ$; logo $\angle a = 52,5^\circ$ e $\angle d = 52,5^\circ$).</p> <p><u>O que falta?</u> (o $\angle b = 180^\circ - 40^\circ - 105^\circ = 35^\circ$) porque a soma dos três ângulos internos do triângulo ABC é 180°.</p> <p>5. <u>Quais os dados do problema?</u></p> <p>5.1. (Como o triângulo ABE é equilátero tem os ângulos todos congruentes, pois num triângulo a lados congruentes, opõem-se ângulos congruentes, assim $180^\circ : 3 = 60^\circ$. O ângulo ABE = 60°)</p> <p>5.2. ($180^\circ - 32^\circ - 58^\circ = 90^\circ$) Logo F = 90°,</p> <p>5.3. $EF < AF < EA$ porque os ângulos opostos a estes lados têm amplitudes crescentes)</p> <p>5.4. $\angle BCE = 180^\circ - 78^\circ - 86^\circ = 16^\circ$, Então como os três ângulos internos do triângulo são diferentes, os três lados também são diferentes, logo o triângulo é escaleno.</p>	
4	<p>Entrega e realização da Ficha de Trabalho 7</p> <p>Realização da Ficha de Trabalho 7, a pares</p>	<p>30</p> <p>(9:25)</p>
5	<p>Discussão e correcção da Ficha de trabalho 7</p> <p>(1) Chamar um aluno ao quadro.</p> <p><u>Quais os dados do problema?</u> (sabemos que DE e AC são paralelas)</p> <p><u>Que informação nos dá estas rectas serem paralelas?</u> (Indica-nos que a amplitude de ângulos de lados paralelos são iguais)</p> <ul style="list-style-type: none"> <u>O que podemos calcular?</u> ($\angle BCA$, porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°) <p><u>Como calculamos?</u> ($\angle BCA = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$)</p> <p><u>Como calculamos o $\angle DEB$?</u> ($\angle DEB = \angle BCA$, porque são</p>	<p>20</p> <p>(9:45)</p>

	<p>ângulos correspondentes, logo $\angle DEB = 80^\circ$)</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>O que podemos calcular?</u> ($\angle EDB$, porque são ângulos correspondentes, logo $\angle EDB = 60^\circ$) <p><u>Como calculamos o $\angle DEB$?</u> ($\angle DEB = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$, porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°)</p> <p>(2.1.) Chamar outro aluno ao quadro.</p> <p><u>Quais os dados do problema?</u> (A recta EF é um eixo de simetria)</p> <p><u>E o que isso quer dizer?</u> (Quer dizer que numa figura com um eixo de simetria, ângulos correspondentes têm a mesma amplitude)</p> <p><u>O que podemos calcular?</u> (Que $\angle BCD = 120^\circ$)</p> <p><u>Porque precisamos de calcular este ângulo?</u> (Para calcular $\angle DBC = 180^\circ - 120^\circ - 20^\circ = 40^\circ$, porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°)</p> <p><u>Como calculamos o ângulo pedido?</u> (Como a soma das amplitudes de ângulos suplementares é 180° logo $\angle EBC = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$)</p> <p>(2.2.) Chamar outro aluno ao quadro.</p> <p><u>Quais os dados do problema?</u> (A recta EF é um eixo de simetria)</p> <p><u>E o que isso quer dizer?</u> (Quer dizer que numa figura com um eixo de simetria, ângulos correspondentes têm a mesma amplitude)</p> <p><u>Então que amplitude podemos saber?</u> ($\angle BDC = 30^\circ$)</p> <p><u>De acordo com os dados do problema o que podemos saber mais?</u> ($\angle ABD = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$, por ser um ângulo giro)</p> <p><u>Porquê precisamos saber $\angle ABD$?</u> (Porque sabemos que a recta EF é o eixo de simetria, logo divide o $\angle ABD$ ao meio. Assim $\angle CBD = 60^\circ : 2 = 30^\circ$)</p> <p><u>Com toda esta informação o que podemos saber mais?</u> ($\angle BCD = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°)</p> <p><u>E como calculamos o ângulo pedido?</u> ($\angle ECD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, porque são ângulos suplementares)</p>	
	Total	90

Sexta Aula – Dia 13 de Maio de 2011

<p>Tema: Geometria</p> <p>Tópico: Triângulos e Quadriláteros</p> <p>Sub-tópico: Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.</p>	<p>Lições Números:</p> <p>Data: 13.5.2011</p> <p>Dia da Semana: 6ª F</p> <p>Hora: 11:45</p> <p>Sala: 12</p>
<p>Sumário:</p> <p>Resolução de uma ficha de trabalho.</p>	
<p>Capacidades Transversais:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolver problemas; • Identificar os dados, as condições e o objectivo de um problema • Conceber e por em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados; <p>Discutir resultados, processos e ideias matemáticas;</p>	
<p style="text-align: center;">Recursos/Materiais:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Manual, Quadro e Canetas; • Ficha de Trabalho 8 (30 cópias) 	<p style="text-align: center;">Avaliação</p> <p>A ficha de trabalho 8 será entregue para, posteriormente, ser avaliada e analisada as produções e desempenho dos alunos.</p>

Mom.	Desenvolvimento da aula	Tempo (min.)
1	<p>Entrada dos alunos e abertura da lição.</p> <p>Transcrição do sumário por parte dos alunos</p>	<p>10</p> <p>(11:55)</p>
2	<p>Continuação da correcção e discussão da ficha de trabalho 8</p> <p>Distribuir um exemplar da ficha de trabalho 8</p> <p>(2.1.) Resolução em grande grupo.</p>	<p>15</p> <p>(12:10)</p>

	<p><u>Quais os dados do problema?</u> (A recta EF é um eixo de simetria)</p> <p><u>E o que isso quer dizer?</u> (Quer dizer que numa figura com um eixo de simetria, ângulos correspondentes têm a mesma amplitude)</p> <p><u>O que podemos calcular?</u> (Que $\angle BCD = 120^\circ$)</p> <p><u>Porque precisamos de calcular este ângulo?</u> (Para calcular $\angle DBC = 180^\circ - 120^\circ - 20^\circ = 40^\circ$, porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°)</p> <p><u>Como calculamos o ângulo pedido?</u> (Como a soma das amplitudes de ângulos suplementares é 180° logo $\angle EBC = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$)</p> <p>(2.2.) Resolução em grande grupo.</p> <p><u>Quais os dados do problema?</u> (A recta EF é um eixo de simetria)</p> <p><u>E o que isso quer dizer?</u> (Quer dizer que numa figura com um eixo de simetria, ângulos correspondentes têm a mesma amplitude)</p> <p><u>Então que amplitude podemos saber?</u> ($\angle BDC = 30^\circ$)</p> <p><u>De acordo com os dados do problema o que podemos saber mais?</u> ($\angle ABD = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$, por ser um ângulo giro)</p> <p><u>Porquê precisamos saber $\angle ABD$?</u> (Porque sabemos que a recta EF é o eixo de simetria, logo divide o $\angle ABD$ ao meio. Assim $\angle CBD = 60^\circ : 2 = 30^\circ$)</p> <p><u>Com toda esta informação o que podemos saber mais?</u> ($\angle BCD = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°)</p>	
3	<p>Realização da Ficha de Trabalho 8</p> <p>Realização da Ficha de Trabalho 8, a pares.</p>	<p>35 (12:45)</p>
4	<p>Discussão da Ficha de Trabalho 8</p> <p>Correcção e discussão da Ficha de Trabalho 8</p> <p>Pedir para não emendarem nada na ficha.</p> <p>(1.) Pedir a um aluno para ir ao quadro resolver esta questão.</p> <p>Chamar a atenção para os dados do problema (AC//DE; triângulo DBE; amplitude do ângulo DEB e ACB);</p>	<p>30 (13:15)</p>

	<p>As rectas paralelas dão-nos algumas informações muito úteis, quais são? (ângulos alternos internos e daí tiram-se algumas respostas)</p> <p>Qual é o objectivo deste problema? Descobrir as amplitudes dos ângulos ABC e FDE. Para isso poderá ser útil descobrir outros valores.</p> <p>Qual será a soma das amplitudes dos ângulos externos deste triângulo? Será que noutros triângulos também se verifica esta soma?</p> <p>(2) Pedir a outro aluno para ir ao quadro resolver esta questão.</p> <p>Referir que nos enunciados de um problema poderá haver informação menos importante que poderá ajudar ou não (por exemplo $\angle BEF = 40^\circ$)</p> <p>(3) Pedir a outro aluno para ir ao quadro resolver esta questão.</p> <p>Se algum aluno referir que a recta BG é um eixo de simetria, lembrar que se não está mencionado no enunciado não podemos tomá-la como um dado do problema.</p> <p>Questionar os alunos se algum resolveu de maneira diferente.</p>	
Total	90	

Anexo II

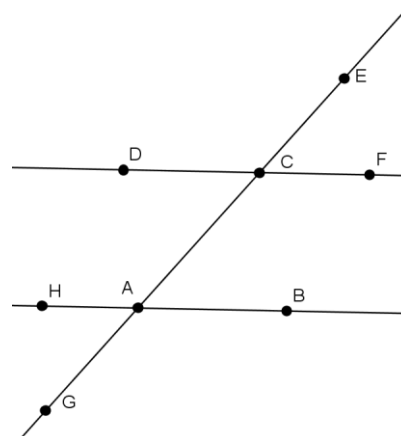
Ficha de Trabalho 1

- Para realizares esta ficha de trabalho necessitas do software GeoGebra



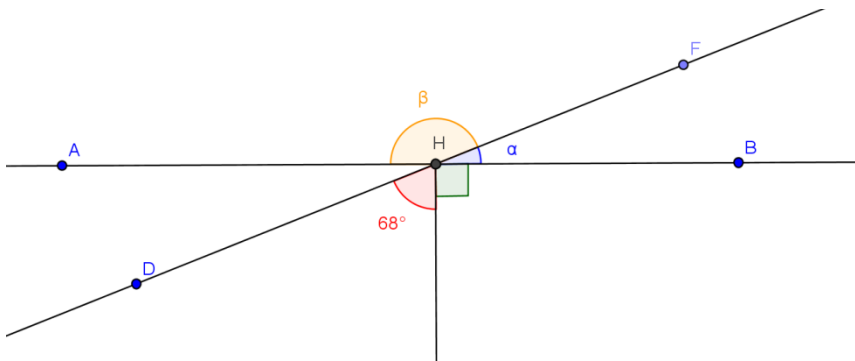
1. Usando o GeoGebra, constrói de acordo com as etapas abaixo indicadas, duas rectas paralelas e uma terceira recta de modo que as interseccione.

- i) Constrói a recta AB
- ii) Marca o ponto C de modo a que não pertença a AB
- iii) Constrói a recta paralela à recta AB e que passa por C
- iv) Constrói a recta AC
- v) Marca os pontos D, E, F, G e H, de acordo com a figura.

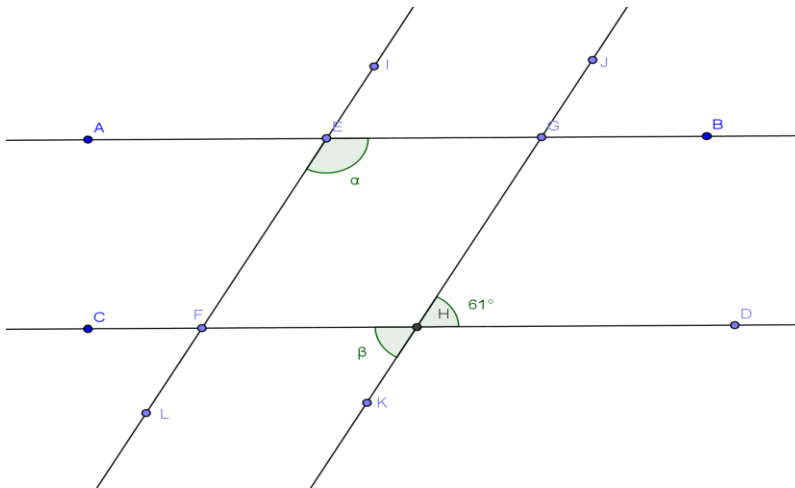


2. Mede os ângulos CAH e GAB da figura.
 - 2.1. O que observas?
 - 2.2. Move o ponto A utilizando a ferramenta “Mover”. O que podes concluir relativamente à amplitude dos ângulos CAH e GAB?
 - 2.3. O par de ângulos considerados dizem-se ângulos verticalmente opostos. Regista outros pares de ângulos verticalmente opostos. O que verificas relativamente à sua amplitude?
3. Considera os ângulos DCA e BAC da figura.

- 3.1. Meça as suas amplitudes e regista-as aqui.
- 3.2. Move o ponto A utilizando a ferramenta “Mover”. O que podes concluir relativamente à amplitude dos ângulos DCA e BAC?
- 3.3. Os ângulos considerados dizem-se ângulos alternos internos. Regista outros pares de ângulos alternos internos. O que verificas?
4. Observa atentamente a figura seguinte e determina, justificando, a amplitude dos ângulos α e β



5. Na situação seguinte, determina a amplitude dos ângulos α e β , sabendo que $AB \parallel CD$ e $LI \parallel KJ$.



Bom Trabalho!

Ficha de Trabalho 2

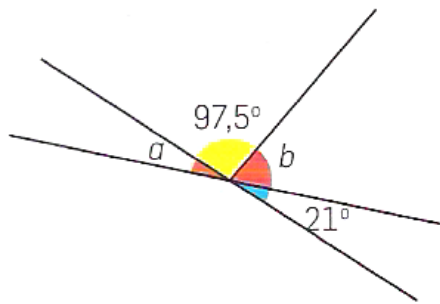
Responde às questões seguintes sem usares o transferidor.

Regista todas as estratégias que utilizes.

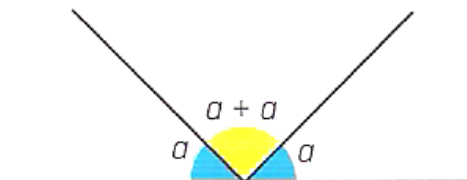


6. Em cada uma das seguintes situações, determina a amplitude dos ângulos **a**, **b** e **c**. Explica o teu raciocínio.

6.1.

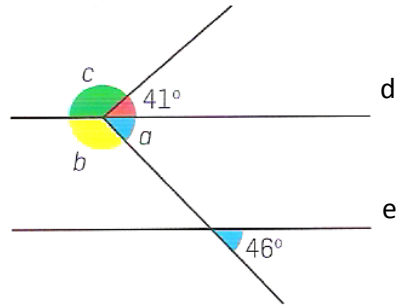


6.2.

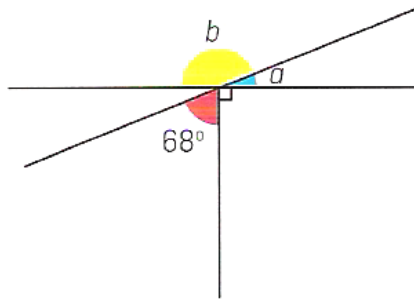


6.3.

$d \parallel e$



6.4.



Bom Trabalho!

Ficha de Trabalho 3

Responde as questões seguintes sem usares o transferidor.

Regista todas as estratégias que utilizares.



7. Na casa da Carolina existe uma estante que foi feita por medida de forma a ocupar uma parede, como mostra a figura 1. A figura 2 representa um modelo de uma parte da estante em que todas as prateleiras são todas paralelas e além disso $[AC] \parallel [EF] \parallel [BD]$ e $[EC] \parallel [BF]$



Figura 1

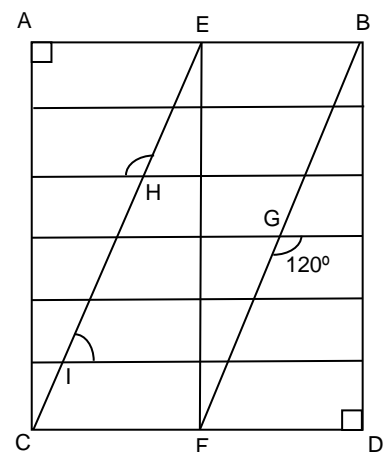
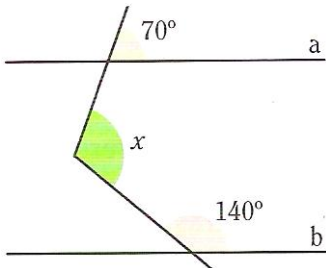


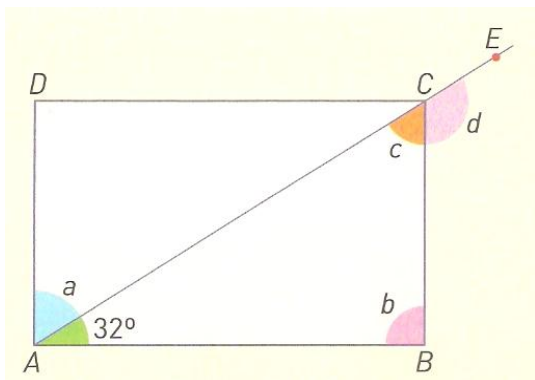
Figura 2

- 7.1. Observando a figura 2, determina a amplitude dos ângulos H e I assinalados e classifica-os. Explica o teu raciocínio.
- 7.2. Calcula $\angle CEF$.

8. A Carolina traçou duas rectas estritamente paralelas, a e b e o ângulo de medida de amplitude x . Mediu os outros dois ângulos assinalados e escreveu as medidas indicadas. Sem usar o transferidor, determina o valor de x ?



9. Na figura está representado um rectângulo ABCD. Sabe-se que $\angle BAC = 32^\circ$. Determina as amplitudes a, b, c e d assinaladas na figura.



Ficha de Trabalho 4

Responde as questões seguintes, registando todas as estratégias e raciocínios que utilizes.



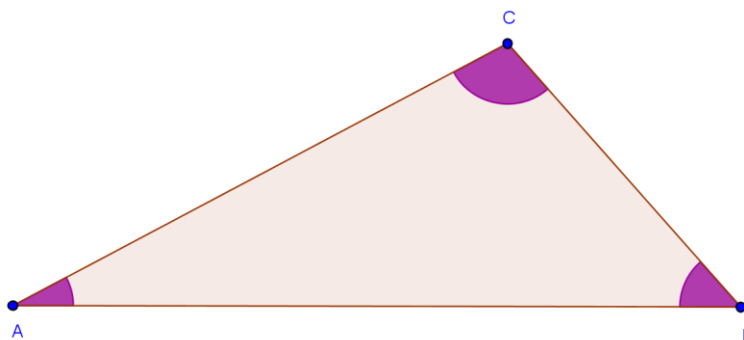
10. Usando o software *GeoGebra*, constrói um triângulo ABC qualquer.
- 10.1. Mede as amplitudes dos ângulos internos do triângulo ABC. (Utiliza o sentido positivo, isto é, o sentido contrário aos ponteiros do relógio)
- 10.2. Move um vértice do triângulo à tua escolha de modo a obteres um novo triângulo e regista as alterações, na tabela seguinte:

	Amplitude dos ângulos internos			Soma das amplitudes
Triângulo 1				
Triângulo 2				
Triângulo 3				
Triângulo 4				
Triângulo 5				

- 10.3. O valor obtido para a soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo depende do seu tamanho ou da sua forma? Formula uma conjectura sobre o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

11. Para demonstrares que a conjectura apresentada na questão anterior é verdadeira, vais percorrer os seguintes passos, que deverás justificar cuidadosamente.

- Na figura, traça uma recta paralela ao lado AB que passe em C.
- Nessa recta, marca os pontos D e E em lados opostos a C.

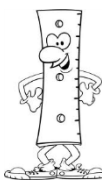


11.1. Que relação existe entre os ângulos DCA e BAC? Justifica a tua resposta.

11.2. Que relação existe entre os ângulos BCE e CBA? Porquê?

11.3. Qual é o valor da soma das amplitudes dos ângulos DCA, BCE e ACB? Justifica a tua resposta.

11.4. O que podes concluir sobre a conjectura formulada em 1.3.?



Bom Trabalho!

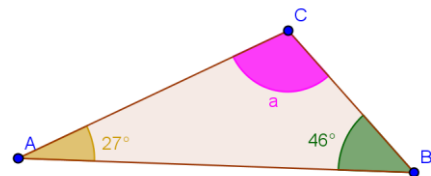
Ficha de Trabalho 5

Responde às seguintes questões apresentando os cálculos que efectuares.

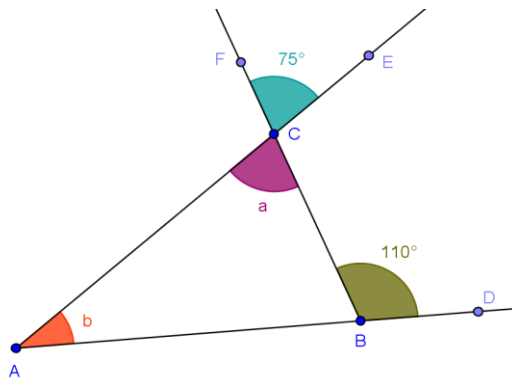


12. Determina as amplitudes dos ângulos desconhecidos:

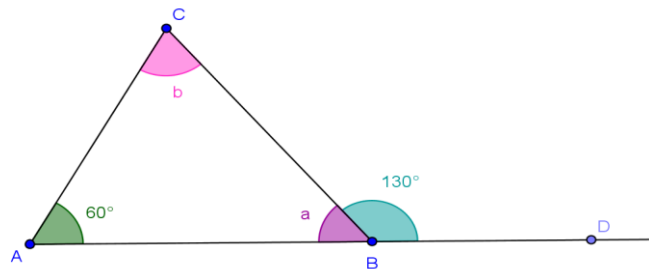
12.1.



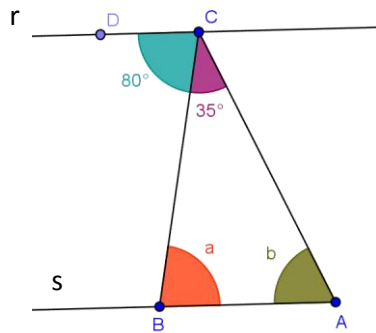
12.2.



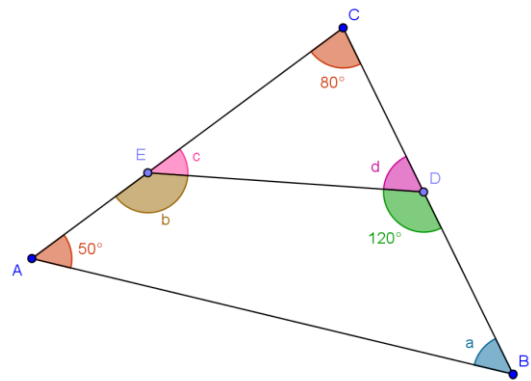
12.3.



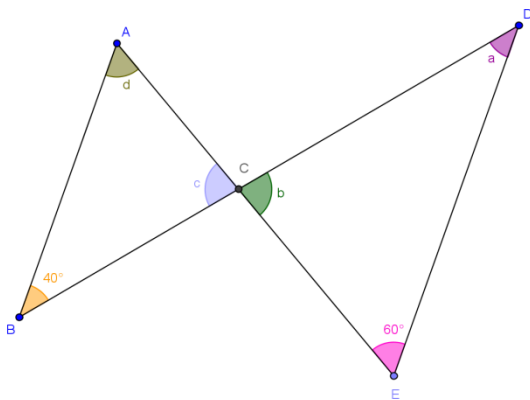
12.4. $r//s$



12.5.



12.6. AB e DE são estritamente paralelas.



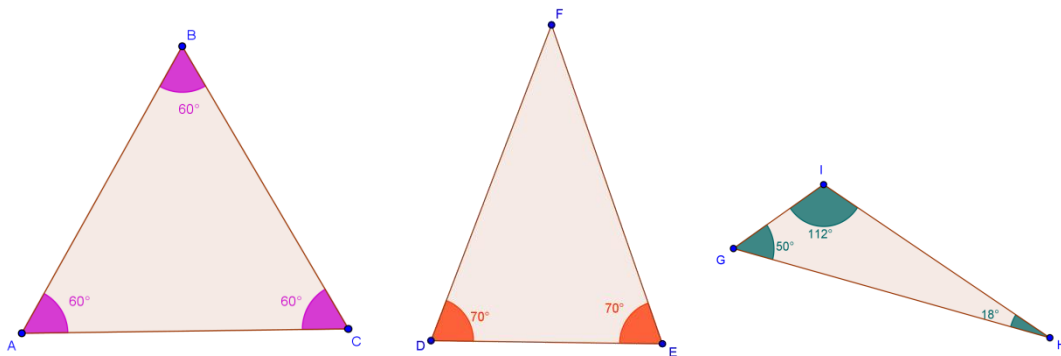
Bom Trabalho!

Ficha de Trabalho 6

Classificação quanto ao comprimento dos lados.		
Triângulo equilátero (Triângulo com três lados de igual comprimento)	Triângulo isósceles (Triângulo com dois lados de igual comprimento)	Triângulo escaleno (Triângulo com três lados de comprimentos diferentes)
Classificação quanto à amplitude dos ângulos.		
Triângulo rectângulo (Triângulo com um ângulo interno recto)	Triângulo acutângulo (Triângulo com três ângulos internos agudos)	Triângulo obtusângulo (Triângulo com um ângulo interno obtuso)

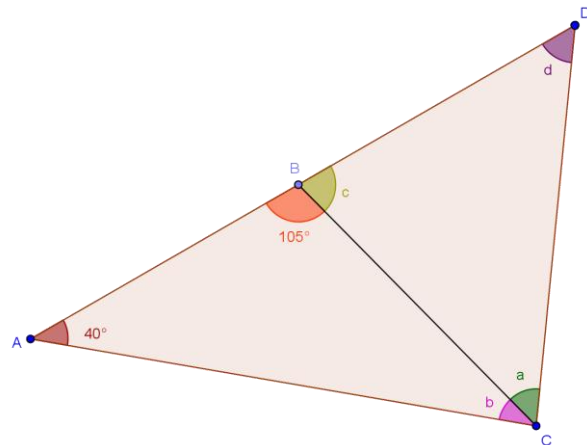


13. Considera os três triângulos seguintes:



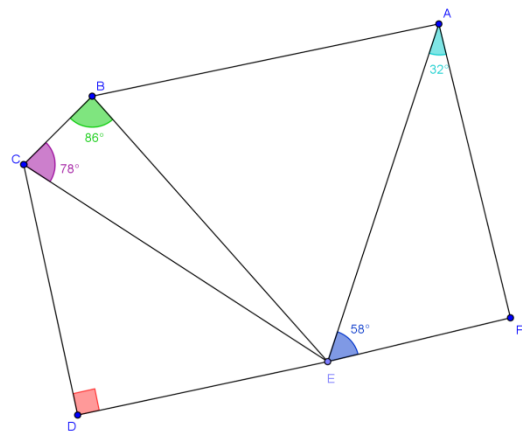
- 13.1. Associa os eixos de simetria em cada um dos triângulos dados.
- 13.2. Classifica os triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos.

14. Sabe-se que $\overline{CB} = \overline{BD}$. Determina as amplitudes dos ângulos desconhecidos.



15. Observa a construção feita pela Joana. A intenção dela é que $\overline{BA} = \overline{EA} = \overline{BE}$ e $\overline{CD} = \overline{DE}$

15.1. Qual a amplitude do ângulo ABE?



15.2. Calcula a amplitude do ângulo F.

15.3. Considera o triângulo AFE. Coloca por ordem crescente as medidas dos lados do triângulo. Porquê a tua escolha.

15.4. Considera agora o triângulo BCE. Como será a sua classificação quanto aos lados? Porquê?



Bom Trabalho!

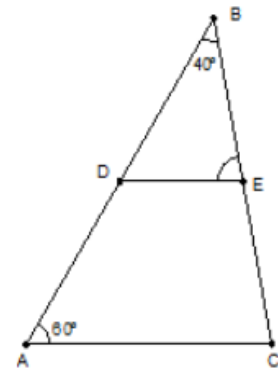
Ficha de Trabalho 7

Responde às seguintes questões apresentando os cálculos que efectuares.



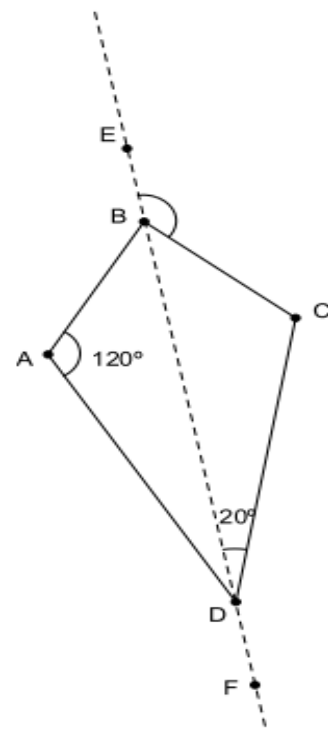
16. Na questão seguinte está representado o triângulo ABC, em que os lados AC e DE são paralelos.

Qual é a amplitude do ângulo DEB?

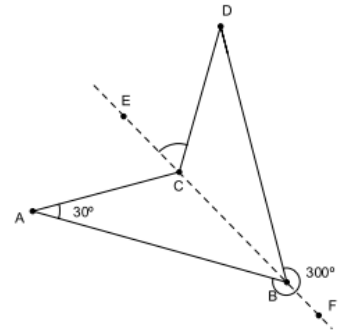


17. Nas seguintes figuras a recta EF é um eixo de simetria do quadrilátero ABCD.

17.1. Qual é a amplitude do ângulo EBC?



17.2. Qual é a amplitude do ângulo ECD?



Bom Trabalho!

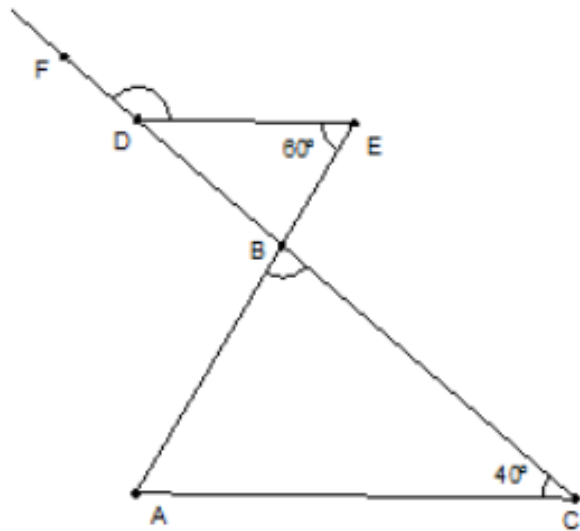
Ficha de Trabalho 8

Responde às seguintes questões apresentando os cálculos que efectuares.

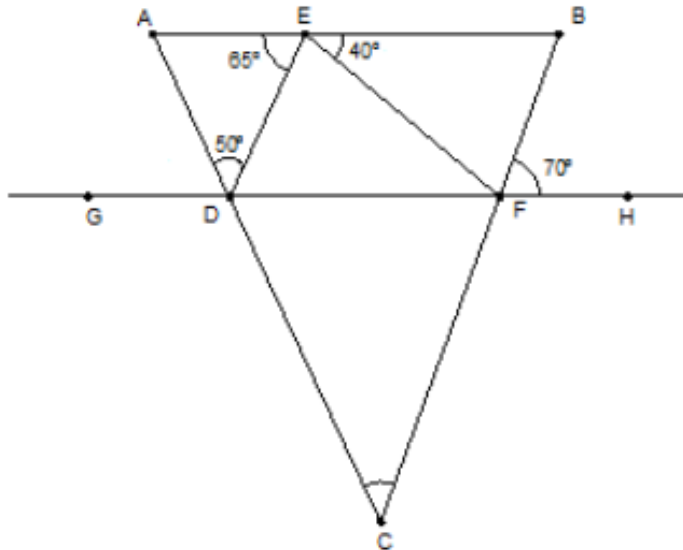


18. Na questão seguinte está representado o triângulo DBE, em que os lados AC e DE são paralelos.

Qual é a amplitude do ângulo ABC e do ângulo EDF?



19. Na seguinte figura estão representados os triângulos ABC e DEF. A recta GH é paralela ao lado AB. Qual é a amplitude do ângulo ACB?



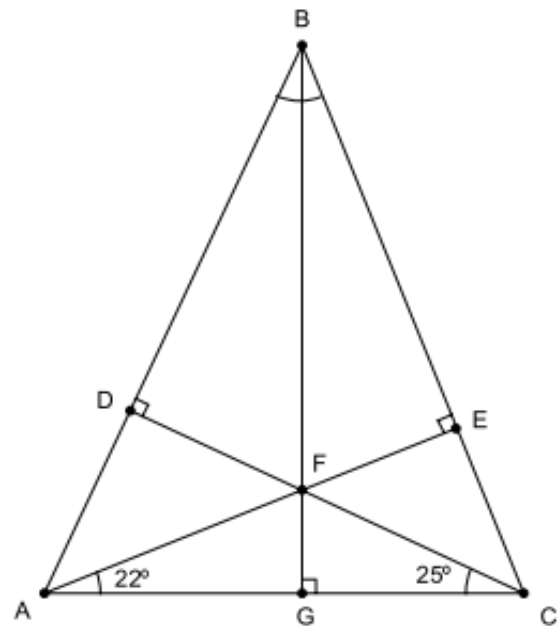
20. Na seguinte figura está representado o triângulo ABC, que respeita as seguintes condições:

DF é perpendicular a AB ($DF \perp AB$)

GF é perpendicular a AC ($GF \perp AC$)

EF é perpendicular a BC ($EF \perp BC$)

Qual é a amplitude do ângulo ABC?



Bom Trabalho!

Anexo III

Ex^{ma}. Sra.

Directora da Escola Básica 2, 3 Maria Alberta Menéres

Informo que, no âmbito de um trabalho de investigação orientado pela professora Hélia Oliveira (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa), no presente ano lectivo estou a desenvolver um estudo relacionado com a minha prática lectiva. Para isso, entre o início de Março e o fim de Maio de 2011 as aulas de Matemática da turma A do 7.º ano serão por mim leccionadas, com orientação da professora Teresa Marques.

Para a realização deste trabalho pretendo obter gravações em vídeo e em áudio de algumas das aulas por mim leccionadas, assim como gravações áudio de entrevistas que serão feitas a alguns dos alunos da turma. Fica desde já garantida a privacidade dos alunos. Em qualquer situação de apresentação pública ou de publicação serão usados nomes fictícios para identificação dos diferentes intervenientes.

Alunos e respectivos Encarregados de Educação foram informados destes procedimentos.guardo a sua permissão para solicitar a autorização dos Encarregados de Educação para proceder às referidas gravações. Tenho inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento.

Com os melhores cumprimentos

Cristina Caiado Teixeira

Tapada das Mercês, 5 de Janeiro de 2011

Ex^{mo}. Sr. Encarregado de Educação

Informo que, no âmbito de um trabalho de investigação orientado pela professora Hélia Oliveira (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa), no presente ano lectivo estou a desenvolver um estudo relacionado com a minha prática lectiva. Para isso, entre o início de Março e o fim de Maio de 2011 as aulas de Matemática da turma A do 7.º ano serão por mim leccionadas, com orientação da professora Teresa Marques.

Para a realização deste trabalho pretendo obter gravações em vídeo e em áudio de algumas das aulas por mim leccionadas, assim como gravações áudio de entrevistas que serão feitas a alguns dos alunos da turma. Fica desde já garantida a privacidade do seu educando. Em qualquer situação de apresentação pública ou de publicação serão usados nomes fictícios para identificação dos diferentes intervenientes. A Direcção da Escola foi informada deste trabalho e dos procedimentos necessários relativos às gravações.

Para o efeito, solicito a sua autorização para proceder às gravações, manifestando inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário.

Agradeço a sua atenção

Cristina Caiado Teixeira

Tapada das Mercês, 5 de Janeiro de 2011

Autorização

Autorizo que o meu educando participe nas gravações vídeo e áudio necessárias para a realização do trabalho acima referido.

O Encarregado de Educação do aluno

..... N.º, 7ºA

.....
(Assinatura do Encarregado de Educação)