

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO



**DIFERENCIAÇÃO PEDAGÓGICA**  
**UM ESTUDO COM ALUNOS DO 9.º ANO DE**  
**ESCOLARIDADE**

Ana Cristina de Abreu Silva de Sousa Tudella

Relatório

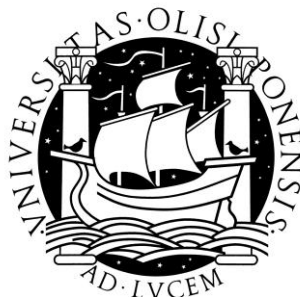
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de especialização em Didática da Matemática

2012

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO



**DIFERENCIAÇÃO PEDAGÓGICA**  
**UM ESTUDO COM ALUNOS DO 9.º ANO DE**  
**ESCOLARIDADE**

Ana Cristina de Abreu Silva de Sousa Tudella

Relatório orientado pela  
Professora Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

2012

## RESUMO

Este estudo visa compreender de que modo uma metodologia de trabalho em sala de aula, promovendo a diferenciação pedagógica simultânea, em grupos de alunos, formados segundo o “tipo de erro” que cometem na realização de uma tarefa, contribui para a aprendizagem dos alunos. Para tal foram formuladas as seguintes questões: “Quais os principais fatores que contribuem para a aprendizagem neste contexto? Quais as principais dificuldades que emergem neste contexto de trabalho? O contributo deste método varia com a tipologia de erros? Como reagem os alunos a esta forma de trabalhar?”

Foi construído um modelo de trabalho, constituído por duas fases, a primeira individual e a segunda em grupo, que foi aplicado numa turma do 9.º ano de escolaridade. Este modelo foi desenvolvido em quatro tarefas, ao longo de um ano letivo. Seguindo uma metodologia de natureza qualitativa, os dados foram recolhidos recorrendo à observação de aulas (gravação áudio do trabalho dos grupos, completada com registos da professora), e à recolha documental (produções dos alunos em ambas as fases). Os erros cometidos pelos alunos, na 1.ª fase foram categorizados e foi feita uma análise da evolução do trabalho dos alunos.

Os resultados obtidos evidenciam que os alunos reagiram bem a esta forma de trabalhar, superando, na grande maioria das vezes, o erro cometido inicialmente. Existiram erros para os quais o modelo implementado teve efeitos mais positivos nas aprendizagens matemáticas dos alunos do que noutros. De facto, os erros cometidos com base nas capacidades transversais – raciocínio e comunicação – foram mais facilmente superados e conduziram a uma maior evolução dos alunos. Nalguns casos, sobretudo naqueles em que a primeira produção estava praticamente em branco, os alunos, na 2.ª fase, acabaram por cair num outro tipo de erros também categorizado neste estudo.

**Palavras chave:** Avaliação formativa em Matemática; Diferenciação pedagógica; Erros dos alunos; Trabalho em grupo.

# ABSTRAT

This study seeks to understand in which way the methodology of the work in the classroom, by promoting the simultaneous differentiation pedagogy, in a group of pupils, assembled in accordance with the “type of error” which they make when accomplish a task, contributes to the apprenticeship of the pupils. For that purpose the following questions were formulated: “Which are the main factors which contribute to the apprenticeship in this context? Which are the main difficulties emerged by this context work? The effectiveness of this method becomes different with the typology of the errors? How pupils react to this method of work?”

It was built a standard work, established in two phases, being the first one individual and the second one in group, which was applied to a 9<sup>th</sup> grade class. This standard was developed in four tasks, extended to one academic year. Following a qualitative methodology, the data were collected by observing the classes (audio recording the groups work, completed with notes by the teacher) and collecting documents (produced by the pupils in both phases). The errors made, by the pupils, during the first phase where categorized and an analysis of the pupils evolution was done.

The results obtained showed clearly that the pupils reacted positively to this method of work, by overcoming, mostly of the time the mistake initially made. There were mistakes to which the implement model were more positive in mathematics learning of the pupils than others. In fact, the errors made under transversal capacities – mathematical reasoning and communication – were easily overcoming and managed to achieve a greater evolution of the pupils. In some cases, especially to those who the first production were in blank, the pupils, on the second phase, made other type of mistakes also categorized in this study.

**Keywords:** Mathematical formative assessment; Pedagogic differentiation; Errors made by the pupils; Group task.

## **Agradecimentos**

À professora doutora Leonor Santos pelo apoio dado na realização deste trabalho, em particular, pela sua inteira disponibilidade, pelo seu incentivo e pelas suas sugestões e críticas pertinentes.

À Direção da Escola e aos Encarregados de Educação dos meus alunos por me permitirem e facilitarem, a realização deste trabalho.

À minha mãe e ao Rui porque sem o seu apoio incondicional não teria sido possível a concretização desta etapa da minha vida profissional.

Ao Zé pela paciência que teve nos momentos difíceis em que lhe “roubei” a minha mãe.

À Lina pelo apoio moral e profissional, numa altura difícil, e sem o qual não teria conseguido concluir este trabalho no prazo estipulado.

À Catarina, por me ter desafiado a inscrever-me neste ciclo de estudos, e com quem partilhei ideias e dificuldades ao longo deste ano.

Às minhas filhas Filipa e Carolina por serem a minha inspiração.

# Índice de conteúdos

|  |    |
|--|----|
| Capítulo I.....  | 1  |
| INTRODUÇÃO.....  | 1  |
| Da motivação do estudo à escolha do tema e do problema a estudar.....                              | 1  |
| Contexto e relevância do estudo .....  | 4  |
| Organização do estudo.....   | 10 |
| Capítulo II.....   | 11 |
| ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO .....  | 11 |
| Orientações curriculares para o ensino da Matemática .....   | 11 |
| A resolução de problemas .....   | 15 |
| O raciocínio matemático.....   | 17 |
| A comunicação matemática.....  | 20 |
| Avaliação das aprendizagens.....   | 22 |
| A avaliação nos documentos normativos e de orientação curricular para o ensino da Matemática ..... | 25 |
| Avaliação formativa .....  | 29 |
| Diferenciação pedagógica.....  | 32 |
| Análise dos erros .....  | 34 |
| Capítulo III .....   | 38 |
| CONCRETIZAÇÃO LETIVA .....   | 38 |
| Proposta Pedagógica.....   | 41 |
| As tarefas .....   | 43 |
| A preparação da 1.ª fase .....   | 43 |
| A preparação da 2.ª fase .....   | 45 |
| A metodologia de trabalho .....  | 46 |
| A constituição dos grupos .....  | 47 |
| A Experiência de ensino-aprendizagem .....   | 49 |
| Tarefa I - “ A corrida da Rita e do Miguel” .....  | 49 |
| Tarefa II - A diagonal de um quadrado .....  | 55 |
| Tarefa III - Percentagens e áreas .....  | 62 |
| Tarefa IV - Probabilidades .....   | 67 |

|   |     |
|---|-----|
| Metodologia de investigação .....                 | 71  |
| Capítulo IV .....                                 | 73  |
| ANÁLISE E REFLEXÃO.....                           | 73  |
| Análise das tarefas .....                         | 73  |
| Tarefa I - “ A corrida da Rita e do Miguel” ..... | 73  |
| Tarefa II - “A diagonal de um quadrado” .....     | 82  |
| Tarefa III - Percentagens e áreas .....           | 92  |
| Tarefa IV - Probabilidades .....                  | 97  |
| Conclusões.....                                   | 111 |
| Reflexão final .....                              | 118 |
| Referências .....                                 | 121 |
| ANEXOS .....                                      | 125 |

## Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| Figura 1. 1 - Classificações dos alunos no ano letivo anterior .....                    | 9  |
| Figura 1. 2 - Classificações dos alunos no teste diagnóstico de Matemática .....        | 9  |
| <br>  |    |
| Figura 2. 1 - Articulação entre os dispositivos de diferenciação (adap. Santos, 2009).. | 34 |
| <br>  |    |
| Figura 3. 1 - Modelo esquemático da estratégia implementada .....                       | 42 |
| Figura 3. 2 - Resolução do Paulo.....   | 51 |
| Figura 3. 3 - Resolução do Raúl .....   | 52 |
| Figura 3. 4 - Resolução da Marta .....  | 52 |
| Figura 3. 5 - Excerto da tarefa A,C e D.....  | 52 |
| Figura 3. 6 - Resolução do Raúl .....   | 53 |
| Figura 3. 7 - Resolução do Simão .....  | 53 |
| Figura 3. 8 - Resolução do Ronaldo .....  | 53 |
| Figura 3. 9 - Questão colocada na tarefa A .....  | 54 |
| Figura 3. 10 - Resolução do Savio.....  | 54 |
| Figura 3. 11 - Excerto da tarefa B .....  | 55 |
| Figura 3. 12 - Resolução do Raul (erro tipo I).....                                     | 57 |
| Figura 3. 13 - Resolução do Lourenço (erro tipo II) .....                               | 57 |
| Figura 3. 14 - Resolução da Catarina (Erro tipo III) .....                              | 58 |
| Figura 3. 15 - Resolução do Ricardo (erro tipo IV).....                                 | 58 |
| Figura 3. 16 - Resolução do César.....  | 60 |
| Figura 3. 17 - Resolução da Rosa.....   | 61 |
| Figura 3. 18 - Resolução da Denise (erro tipo II).....                                  | 63 |
| Figura 3. 19 - Resolução do Afonso (erro tipo III ).....                                | 64 |
| Figura 3. 20 - Resolução da Rosa (erro tipo III).....                                   | 64 |
| Figura 3. 21 - Resolução do Ronaldo (erro tipo IV).....                                 | 65 |
| Figura 3. 22 - Resolução da Rosário (erro tipo IV) .....                                | 66 |
| Figura 3. 23 - Resolução da Caetano (erro tipo IV) .....                                | 66 |
| Figura 3. 24 - Questões retiradas da versão A do teste de avaliação.....                | 68 |
| Figura 3. 25 - Resolução do problema do Rodrigo (erro tipo II).....                     | 69 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 3. 26 - Resolução da Rute (erro tipo IV).....                             | 70 |
| Figura 3. 27 - Resolução da Rosa (erro tipo V).....                              | 71 |
| Figura 4. 1 - Excerto da resolução do grupo (Alexandre, Caetano e Denise).....   | 74 |
| Figura 4. 2 - Excerto da resolução do grupo (Afonso e César).....                | 74 |
| Figura 4. 3 - Excerto da resolução do grupo (Alexandre, Caetano e Denise).....   | 74 |
| Figura 4. 4 - Excerto da resolução do grupo (Hugo, Luísa, Raúl e Ricardo).....   | 74 |
| Figura 4. 5 - Excerto da resolução do grupo (Cristina, Lourenço e Rosário).....  | 75 |
| Figura 4. 6 - Excerto da resolução do grupo (Catarina, Paulo, Rosa e Simão)..... | 75 |
| Figura 4. 7 - Resolução do grupo (Hugo, Luísa, Raúl e Ricardo).....              | 76 |
| Figura 4. 8 - Resolução do grupo (Lucas, Marta, Ronaldo e Rute).....             | 76 |
| Figura 4. 9 - Resolução do grupo (Catarina, Paulo, Rosa e Simão).....            | 76 |
| Figura 4. 10 - Resolução do grupo (Hugo, Luísa, Raúl e Ricardo).....             | 77 |
| Figura 4. 11- Resolução do grupo (Lucas, Marta, Ronaldo e Rute).....             | 77 |
| Figura 4. 12 - Resolução do grupo (Catarina, Paulo, Rosa e Simão).....           | 78 |
| Figura 4. 13 - Excerto da resposta do grupo (Manuel, Rebeca e Rodrigo).....      | 79 |
| Figura 4. 14 - Excerto da resposta 3 do grupo (Manuel, Rebeca e Rodrigo).....    | 80 |
| Figura 4. 15 - Resolução do grupo (Alexandre, Caetano e Denise).....             | 81 |
| Figura 4. 16 - Resolução do grupo (Francisco, João, Renata e Savio).....         | 81 |
| Figura 4. 17 - Excerto da resolução do grupo (Cristina, Ronaldo e Simão).....    | 83 |
| Figura 4. 18 - Resolução do grupo (Hugo, Raúl e Rosário).....                    | 83 |
| Figura 4. 19 - Excerto da resolução do grupo (Lourenço, Rebeca e Rodrigo).....   | 84 |
| Figura 4. 20 - Resolução do grupo (Lucas, Marta e Rute).....                     | 85 |
| Figura 4. 21 - Resolução do grupo (Afonso, Denise e Renata).....                 | 85 |
| Figura 4. 22 - Resolução do grupo (Alexandre, Catarina e Paulo).....             | 85 |
| Figura 4. 23 - Resolução do grupo (Francisco, Luísa e Savio).....                | 86 |
| Figura 4. 24 - Resolução do grupo (Alexandre, Catarina e Paulo).....             | 87 |
| Figura 4. 25 - Resolução do grupo (Afonso, Denise e Renata).....                 | 87 |
| Figura 4. 26 - Resolução do grupo (Lucas, Marta e Rute).....                     | 88 |
| Figura 4. 27 - Resolução da questão 2 da tarefa B - grupo (João e Ricardo).....  | 89 |
| Figura 4. 28 - Resolução do Caetano.....   | 90 |
| Figura 4. 29 - Resolução do João e do Ricardo.....                               | 91 |
| Figura 4. 30 - Resolução do grupo (Alexandre, Cristina e Renata).....            | 93 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 4. 31 - Resolução do grupo (Catarina, Rebeca e Simão) .....                                  | 94  |
| Figura 4. 32 - Resolução do grupo (Denise, Hugo, Francisco e Rute).....                             | 95  |
| Figura 4. 33 - Excerto da resolução do grupo (Afonso, Lourenço e Rosa) (erro tipo IV)<br>.....      | 95  |
| Figura 4. 34 - Resolução do grupo (Luísa, João e Ricardo) .....                                     | 95  |
| Figura 4. 35 - Resolução do grupo (Lucas, Paulo e Ronaldo).....                                     | 95  |
| Figura 4. 36 - Resolução do grupo (Caetano, Rosário, Rodrigo e Savio) .....                         | 96  |
| Figura 4. 37 - Resolução do grupo (Caetano, Rosário, Rodrigo e Savio) .....                         | 96  |
| Figura 4. 38 - Excerto da resolução do grupo da Rosário .....                                       | 98  |
| Figura 4. 39 - Excerto da resolução do grupo do Caetano, João e Manuel).....                        | 98  |
| Figura 4. 40 - Excerto da resolução” ideal” do grupo (Afonso e Rosário) .....                       | 99  |
| Figura 4. 41 - Excerto da resolução do grupo (César, Lucas, Ronaldo e Simão).....                   | 99  |
| Figura 4. 42 - Resolução do grupo (Denise, Paulo, Savio e Rodrigo).....                             | 100 |
| Figura 4. 43 - Transcrição da resolução do grupo (César, Lucas, Ronaldo e Simão) ..                 | 100 |
| Figura 4. 44 - Excerto da resolução do grupo (Lourenço, Marta e Rute).....                          | 101 |
| Figura 4. 45 - Excerto da resolução do grupo (Alexandre e Cristina).....                            | 101 |
| Figura 4. 46 - Excerto da resolução do grupo (Lourenço, Marta e Rute).....                          | 102 |
| Figura 4. 47 - Excerto da resolução do grupo (Afonso e Cristina).....                               | 102 |
| Figura 4. 48 - Excerto da resolução do grupo (Lourenço, Marta e Rute).....                          | 103 |
| Figura 4. 49 - Resolução do grupo (Alexandre e Cristina).....                                       | 104 |
| Figura 4. 50 - Resolução (Alexandre e Cristina) – 1. <sup>a</sup> estratégia. ....                  | 104 |
| Figura 4. 51 - Resolução do grupo (Alexandre e Cristina) – 2. <sup>a</sup> estratégia.....          | 104 |
| Figura 4. 52 - Excerto da resolução do grupo (Catarina, Francisco, Luísa e Rebeca) .                | 105 |
| Figura 4. 53 - Excerto da resolução do grupo (Catarina, Francisco, Luísa e Rebeca) .                | 106 |
| Figura 4. 54 - Excerto da resolução do grupo (Catarina, Francisco, Luísa e Rebeca) .                | 106 |
| Figura 4. 55 - Excerto do grupo (Catarina, Francisco, Luísa e Rebeca) .....                         | 107 |
| Figura 4. 56 - Excerto da resolução do grupo (Rosa e Rute).....                                     | 109 |
| Figura 4. 57 - Reprodução da resolução do grupo (Rosa e Rute) (antes da minha<br>intervenção) ..... | 109 |
| Figura 4. 58 - Reprodução da resolução do grupo (Rosa e Rute) (após a minha<br>intervenção) .....   | 109 |
| Figura 4. 59 - Resolução final da questão 1. c) do grupo (Rosa e Rute).....                         | 110 |
| Figura 4. 60 - Excerto da resolução da questão 2 do grupo (Rosa e Rute).....                        | 110 |

## Índice de quadros

|   |     |
|---|-----|
| Quadro 1. 1 - Distribuição das idades dos alunos da turma no início do ano letivo .....   | 7   |
| Quadro 1. 2 - Expetativas escolares dos alunos da turma .....   | 7   |
| Quadro 1. 3 - Nível de escolaridade dos pais e/ou encarregados de educação.....   | 7   |
| Quadro 1. 4 - Profissão dos pais e/ou encarregados de educação .....  | 8   |
| Quadro 1. 5 - Cultura de origem dos pais e/ou encarregados de educação .....  | 8   |
| Quadro 1. 6 - Distribuição das retenções dos alunos por ciclo de escolaridade.....  | 9   |
| <br>  |     |
| Quadro 2. 1 - Quadro síntese da evolução do significado atribuído à avaliação formativa (adaptado de Santos, 2008).....               | 30  |
| <br>  |     |
| Quadro 3. 1 - Tarefas propostas na 1. <sup>a</sup> fase e seus objetivos.....   | 44  |
| Quadro 3. 2 - Tipos de erros ocorridos na tarefa inicial .....  | 50  |
| Quadro 3. 3 - Distribuição dos alunos que cometeram “erros” do mesmo tipo pelas tarefas da 2. <sup>a</sup> fase .....                 | 51  |
| Quadro 3. 4 - Tipo de erro cometido pelos alunos na 1. <sup>a</sup> fase .....  | 56  |
| Quadro 3. 5 - Distribuição dos alunos e dos grupos pelas tarefas da 2. <sup>a</sup> fase.....   | 59  |
| Quadro 3. 6 - Tipo de erro cometido pelos alunos na 1. <sup>a</sup> fase .....  | 62  |
| Quadro 3. 7 - Distribuição dos alunos e dos grupos pelas tarefas da 2. <sup>a</sup> fase.....   | 67  |
| Quadro 3. 8 - Tipo de erro cometido pelos alunos na 1. <sup>a</sup> fase .....  | 69  |
| Quadro 3. 9 - Distribuição dos alunos e dos grupos pelas tarefas da 2. <sup>a</sup> fase.....   | 71  |
| <br>  |     |
| Quadro 4. 1 - Síntese dos principais resultados desta experiência de aprendizagem – classificação de erros e evolução dos alunos..... | 113 |

## Índice de Anexos

|   |     |
|---|-----|
| Anexo 1 - Teste diagnóstico .....                                     | 126 |
| Anexo 2 – Autorização dos Encarregados de Educação .....              | 128 |
| Anexo 3 – Tarefa inicial – <i>A corrida da Rita e do Miguel</i> ..... | 129 |
| Anexo 4 – Tarefa inicial – <i>A diagonal de um quadrado</i> .....     | 130 |
| Anexo 5 – Tarefa inicial – Percentagens e Áreas .....                 | 131 |
| Anexo 6 – Tarefa inicial – Probabilidades .....                       | 132 |
| <br>  |     |
| Anexo 3 A - Tarefa A – <i>A corrida da Rita e do Miguel</i> .....     | 133 |
| Anexo 3 B - Tarefa B – <i>A corrida da Rita e do Miguel</i> .....     | 134 |
| Anexo 3 C - Tarefa C – <i>A corrida da Rita e do Miguel</i> .....     | 135 |
| Anexo 3 D - Tarefa D – <i>A corrida da Rita e do Miguel</i> .....     | 137 |
| <br>  |     |
| Anexo 4 A - Tarefa A – <i>A diagonal de um quadrado</i> .....         | 138 |
| Anexo 4 B - Tarefa B – <i>A diagonal de um quadrado</i> .....         | 140 |
| Anexo 4 C - Tarefa C – <i>A diagonal de um quadrado</i> .....         | 141 |
| <br>  |     |
| Anexo 5 A - Tarefa A – Percentagens e Áreas .....                     | 142 |
| Anexo 5 B - Tarefa B – Percentagens e Áreas .....                     | 143 |
| Anexo 5 C - Tarefa C – Percentagens e Áreas .....                     | 144 |
| <br>  |     |
| Anexo 6 A - Tarefa A – Probabilidades .....                           | 145 |
| Anexo 6 B - Tarefa B – Probabilidades .....                           | 147 |
| Anexo 6 C - Tarefa C – Probabilidades .....                           | 148 |
| Anexo 6 D - Tarefa D – Probabilidades .....                           | 150 |

# Capítulo I

## INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresento as minhas motivações para a realização deste estudo, salientando a sua pertinência no contexto atual da realidade das escolas do nosso país. Nele apresento o problema em estudo e as questões às quais pretendo responder, bem como, o contexto escolar em que este trabalho se realizou. Por fim, apresento a estrutura deste relatório de mestrado.

### **Da motivação do estudo à escolha do tema e do problema a estudar**

Sou professora, por opção, há quase duas décadas, tendo passado dezoito dos meus anos de ensino na mesma escola, nos arredores de Lisboa. Uma escola do 3.º ciclo e secundário, que evoluiu ao longo destes anos, passando a integrar alunos do 2.º ciclo, constituindo-se como sede de um Agrupamento de escolas. A freguesia onde se insere tem crescido bastante nestes últimos anos, quer com a criação de novas zonas habitacionais e comerciais, quer também com a construção de alguns bairros para alojamento social. Deste modo, a escola tem mantido uma população escolar muito diversificada, a nível social e cultural.

Ao longo dos anos fui sentindo necessidade de me envolver em vários projetos, quer na escola, quer fora dela, que me desafiassem e me proporcionassem momentos de reflexão sobre a minha profissão, fazendo-me “crescer” enquanto professora. E foi nesta procura que me tornei professora acompanhante do Plano da Matemática I (PMI) e, posteriormente, do Plano da Matemática II (PMII) e da implementação do novo Programa da Matemática para o Ensino Básico (PMEB).

Em setembro de 2011, no Instituto de Educação, durante o *Profmat* fui desafiada por uma grande amiga a inscrever-me no mestrado em Educação na área da Didática da Matemática. Inicialmente hesitei, porque tinha uma bebé com sete meses, mas o meu desejo de aprender foi superior ao receio da dificuldade que a minha vida familiar me poderia trazer, ao longo desse ano letivo, e acabei por me candidatar a este ciclo de estudos.

Nesse mesmo Profmat, recebi a revista Educação e Matemática, número 114 (APM), que trazia um *Pense Nisto* da professora e investigadora, Leonor Santos, sobre a avaliação das aprendizagens no PMEB. Neste artigo, a autora apresentou sucintamente algumas conclusões retiradas dos relatórios intercalares do PMII e da implementação do PMEB, nomeadamente os desafios referidos pelos professores: “centrar o ensino na atividade do aluno”; “gerir o programa no tempo letivo atribuído à disciplina de Matemática”, “trabalhar as capacidades transversais” e “a construção de cadeias de tarefas”. Estas dificuldades até seriam espectáveis, mas a surpresa para mim, foi a “quase” ausência de referências à avaliação das aprendizagens:

A avaliação do desempenho dos alunos, seja numa perspectiva formativa, seja sumativa, quase não surge referenciada. Nem nos desafios, nem tão pouco no elencar dos aspectos que decorrem conforme o esperado, nem naqueles cuja concretização não é considerada até ao momento satisfatória. (Santos, 2011, p. 2)

Sendo professora acompanhante dos PMII e da implementação do novo PMEB, este *Pense Nisto* deixou-me, por um lado, preocupada, levando-me a pensar no que poderia eu fazer com o grupo de escolas que acompanhava. Por outro, fez-me pensar na minha própria prática letiva, e de que modo estarei eu a melhorar as minhas práticas avaliativas e a adequá-las a um novo programa para o ensino básico. As questões colocadas pela autora do *Pense Nisto* eram bastante pertinentes. Destaco três:

Será que a avaliação do desempenho dos alunos não faz parte do currículo? Será que é possível mudar objectivos de aprendizagem, sem alterar práticas avaliativas? Será que a avaliação é um aspecto secundário e não traz implicações para as aprendizagens matemáticas dos alunos? (Santos, 2011, p. 2)

A avaliação das aprendizagens é um tema que sempre me interessou. No final da minha licenciatura (1992/93) tive uma cadeira, *Seminário Temático*, lecionada pelo professor

Paulo Abrantes, dedicada a este tema. Foi a primeira vez que tomei contato com formas e instrumentos de avaliação, que desconhecia. Na altura, eu nunca tinha lecionado, sendo que a minha única experiência em avaliação era a experiência que eu tinha enquanto aluna do ensino preparatório e do unificado. A minha experiência apenas me tinha mostrado uma forma de avaliação - a avaliação sumativa - aquela que era realizada cerca de duas vezes por período, e na qual eu obtinha uma classificação. A média desses dois momentos de avaliação seria a classificação obtida no final do período letivo.

Pela primeira vez ouvi falar numa avaliação, que ocorre durante o processo de aprendizagem – a “avaliação reguladora”. E na necessidade de uma “maior diversificação de situações e materiais de aprendizagem e de uma maior aceitação da diversidade em termos da evolução dos alunos” (Guimarães, Leal & Abrantes, 1991, p. 50). Pela primeira vez ouvi falar na necessidade de diversificar as prestações escritas dos alunos, de modo a que, para além dos testes tradicionais, “o professor pudesse dispor de relatórios (individuais e em grupo) e outros textos escritos (justificativos, explicativos, descritivos,...) como instrumentos de avaliação.” (Guimarães, Leal e Abrantes, 1991, p. 51). Pela primeira vez, percebi que os próprios “testes escritos” também poderiam assumir outros “modelos de aplicação”, como por exemplo, os testes em duas fases.

Assim, comecei a ver a avaliação das aprendizagens dos alunos por outra perspetiva, e hoje acredito que os momentos de avaliação que fazem mais sentido para mim, enquanto professora de Matemática, são aqueles que permitem aos alunos aprenderem durante o processo. E que me permitem perceber o que os alunos sabem, ou não, de modo a que possa orientar/reorientar o meu trabalho.

Foi na busca de novas estratégias de trabalho, que surgiu a ideia para realização deste estudo. Procurava formas de trabalhar com os meus alunos em sala de aula, que utilizassem os erros por eles cometidos de uma forma positiva, e que promovessem uma reflexão sobre os mesmos que contribuísse para a aprendizagem. Queria sobretudo que eles percebessem os seus erros, e que sem que eu tivesse que explicitamente os apontar, os descobrissem e fossem uma “rampa” para a realização de novas aprendizagens.

Deste modo, tendo em conta os meus interesses e as minhas preocupações no que diz respeito à avaliação das aprendizagens dos alunos, numa perspectiva formativa e reguladora, decidi definir, como principal objetivo deste estudo, perceber de que modo uma metodologia de trabalho em sala de aula, que promove a diferenciação pedagógica simultânea, em grupos homogêneos, agrupados segundo o “tipo de erro” que cometem na realização de uma tarefa, contribui para a aprendizagem dos alunos. Para atingir este objetivo decidi procurar respostas para as seguintes questões:

- Quais os principais factores que contribuem para a aprendizagem neste contexto?
- Quais as principais dificuldades que emergem neste contexto de trabalho?
- O contributo deste método varia com a tipologia de erros?
- Como reagem os alunos a esta forma de trabalhar?

## **Contexto e relevância do estudo**

Nas nossas turmas, temos cada vez mais uma grande diversidade de alunos. Não só devido às diferenças culturais e/ou sociais, mas sobretudo à forma de pensar, de interpretar, de compreender as ideias, e consequentemente de aprender:

Na verdade, o aluno dá significado às coisas a partir daquilo que sabe, de toda a sua experiência anterior, e não necessariamente a partir da lógica interna dos conteúdos ou do sentido que o professor atribui às mesmas coisas. (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p.24 )

De facto todos nós, professores com alguma experiência, temos recordações de situações de sala de aula em que ficámos convencidos que os nossos alunos tinham compreendido/aprendido, por exemplo, determinado conceito. Posteriormente, quando acedemos novamente ao seu raciocínio, apercebemo-nos que a interpretação que fizeram estava longe daquela que nós tínhamos imaginado.

Geralmente, apesar de termos um grupo de alunos muito diferente pela frente, fazemos sempre uma abordagem para que a “maioria” dos alunos consiga construir o conhecimento que pretendemos. Deixamos deste modo as “franjas” da turma de parte, acabando por não considerar nem aqueles que simplesmente não pensam da mesma

forma que nós, ou não pensam da mesma forma que a maioria dos alunos da turma. E não são só devido a aspetos cognitivos, também há muitos aspetos culturais e psicológicos que influenciam a aprendizagem dos alunos. Mas, não devemos facilitar a aprendizagem de todos?!

Sendo a escola atual orientada por princípios de equidade e de direito de todos à aprendizagem, não mais é possível encarar a escola como um serviço de pronto a comer, em que se come geralmente sozinho, a comida vem empacotada, igual para todos, feita a distância e sem sabor. (Hargreaves & Fink, 2003, in Santos, 2009, p. 8)

As mudanças curriculares dos últimos anos têm potenciado a ideia de que todos os alunos têm capacidade para aprender matemática, e os documentos curriculares têm reforçado a importância da equidade na educação matemática. Podemos ler, por exemplo, nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) que:

A perspectiva da equidade na educação matemática desafia a crença, prevalente na sociedade, de que apenas alguns alunos são capazes de aprender matemática. (p. 12)

Sendo assim, sendo a matemática uma disciplina *para todos*, temos que encontrar formas eficientes de trabalhar com a diversidade de alunos que temos numa turma. O PMEB (ME-DGIDC, 2007) apresenta duas grandes finalidades para o ensino da Matemática. A primeira, referente à aquisição e mobilização de conhecimentos, que tem subjacente a necessidade da compreensão desses mesmos conhecimentos e a segunda respeitante ao desenvolvimento de atitudes positivas face à Matemática e à capacidade de apreciar esta ciência. Este programa contraria a “tradicional” ideia de que os alunos “agora” devem aprender e, mais tarde, quando por exemplo chegarem ao ensino secundário ou às universidades irão compreender esses conhecimentos.

A compreensão das ideias matemáticas por parte dos alunos deve ser procurada no momento da sua aprendizagem e não apenas, eventualmente, em momentos posteriores. (ME-DGIDC, 2007, p. 4)

Pelo que foi dito, torna-se imprescindível aos professores nos dias de hoje, encontrarem formas de trabalhar com os seus alunos, de modo diferenciado, que contribuam para a aprendizagem de *todos*. Pôr em ação uma prática de diferenciação pedagógica é exigente para o professor porque requer um conhecimento profundo dos seus alunos (Santos, 2009), no entanto, como destaca esta autora atualmente "a diferenciação

pedagógica não é uma proposta possível a introduzir na prática letiva, mas antes um imperativo" (2009, p. 8).

## **A turma**

Este estudo foi efetuado numa turma de 9.º ano da escola onde leciono. Sendo a minha única turma não houve hipóteses de escolher, nem o ano, nem o ciclo de escolaridade, nem mesmo, uma turma com alguma particularidade que me interessasse aprofundar.

Já conhecia uma grande parte dos alunos, uma vez que tinham sido meus alunos no 2.º ciclo de escolaridade. No entanto, já tinham passado dois anos, e durante este tempo muitas mudanças ocorreram nestes alunos, muitas das quais não se devem propriamente às aprendizagens específicas de uma disciplina, mas sobretudo a características inerentes à fase da vida pelos quais os alunos desta idade atravessam.

A turma também já não era “a mesma” pois ao longo destes anos tinham sido integrados novos elementos, que na minha opinião, lhe trouxeram uma dinâmica diferente. Alguns alunos trabalhavam bem, mas muitos pareciam ter medo de errar, e por isso, simplesmente, limitavam-se a não fazer nada para que não corressem esse risco. Deste modo, a dinâmica de trabalho na aula de uma grande parte dos alunos, no início do ano, era praticamente inexistente. Foi para mim, um grande desafio, colocar estes alunos a trabalhar nas aulas, sobretudo a discutir ideias, em pequeno e em grande grupo. Para a grande maioria dos elementos da turma o trabalho fora da sala de aula era inexistente, pelo que muitas vezes apesar de terem feito um trabalho interessante nas aulas, com muita pena minha, acabavam por não consolidar os seus conhecimentos.

A turma onde foi realizada esta experiência pedagógica é composta por 27 alunos, dos quais 10 são do sexo feminino e 17 são do sexo masculino. Um dos alunos apresenta necessidades educativas especiais, uma vez que sofre de dislexia. A média de idades dos alunos, no início do ano letivo era de aproximadamente 14 anos, variando entre os 13 e os 17 anos, como podemos observar no quadro seguinte (Quadro 1.1).

Quadro 1. 1 - Distribuição das idades dos alunos da turma no início do ano letivo

| Idade | N.º de alunos |
|-------|---------------|
| 13    | 4             |
| 14    | 16            |
| 15    | 4             |
| 16    | 1             |
| 17    | 2             |

Relativamente às expetativas escolares destes alunos, podemos ver no quadro 1.2 que aproximadamente metade dos alunos da turma pretendem prosseguir os estudos após o término do 12.º ano de escolaridade. No entanto, no início do ano letivo, a maioria dos alunos ainda não sabia qual o curso que gostaria de tirar.

Quadro 1. 2 - Expetativas escolares dos alunos da turma

|   |    |
|---|----|
| Curso superior                              | 14 |
| Curso médio ou profissional                 | 8  |
| 12.º de um curso profissional               | 4  |
| 12.º ano de um curso científico-humanístico | 1  |

Os três quadros seguintes referem-se aos pais e/ou encarregados de educação dos alunos da turma e apresentam-nos a distribuição do seu nível de escolaridade, a profissão e a cultura de origem.

Quadro 1. 3 - Nível de escolaridade dos pais e/ou encarregados de educação

| Nível de escolaridade dos pais/e.e. | N.º de pais | N.º de mães |
|-------------------------------------|-------------|-------------|
| Não sabe ler nem escrever           | 0           | 1           |
| 4º ano                              | 5           | 3           |
| 6º ano                              | 1           | 4           |
| Curso unificado                     | 6           | 5           |
| Curso secundário                    | 3           | 6           |
| Curso superior                      | 3           | 5           |

Quadro 1. 4 - Profissão dos pais e/ou encarregados de educação

| Profissão dos pais/EE                          | N.º de pais | N.º de mães |
|--|-------------|-------------|
| Operários /trabalhadores<br>especializados     | 10          | 4           |
| Industria hoteleira/<br>empregadas de comércio | 1           | 5           |
| Domésticas                                     | 0           | 7           |
| Reformados/<br>Desempregados                   | 2           | 2           |
| Empresários                                    | 3           | 1           |
| Empregados de escritório                       | 1           | 2           |
| Professores                                    | 1           | 2           |
| Profissionais liberais<br>/quadros superiores  | 4           | 0           |

Quadro 1. 5 - Cultura de origem dos pais e/ou encarregados de educação

| Culturas de origem dos<br>pais/EE | N.º pais  | N.º mães |
|-----------------------------------|-----------|----------|
| Angolana                          | 1         | 2        |
| Guineense                         | 1         | 1        |
| Cabo-verde                        | 4         | 2        |
| Brasileira                        | 1         |          |
| Cigana                            |           | 1        |
| Portuguesa                        | restantes |          |

Como podemos constatar pela análise destes três quadros, as habilitações académicas dos pais e/ou encarregados de educação destes alunos são diversificadas. Cerca de 33% têm o 6º ano, ou um ano de escolaridade inferior, cerca de 47% tem o curso unificado ou secundário e apenas 19% têm um curso superior. Quanto à sua cultura de origem, cerca de 26% dos encarregados de educação são de origem africana, havendo ainda um pai de origem brasileira e uma mãe de etnia cigana. Relativamente às suas profissões, podemos observar que também são variadas. Cerca de 31% são operários/trabalhadores especializados, 9% estão desempregados e 30% das mães são domésticas.

Quanto ao passado escolar destes alunos verificou-se que há sete alunos com retenções, dos quais, seis têm apenas uma e um tem duas retenções em ciclos de escolaridade diferentes (Quadro 1.6).

Quadro 1. 6 - Distribuição das retenções dos alunos por ciclo de escolaridade

| Ciclo de escolaridade | N.º de alunos com retenções por ciclo |
|-----------------------|---------------------------------------|
| 1.º ciclo             | 3                                     |
| 2.º ciclo             | 1                                     |
| 3.º ciclo             | 3                                     |

Relativamente ao aproveitamento na disciplina de Matemática, os alunos desta turma apresentaram as seguintes classificações no 3.º período do ano letivo anterior (Figura 1.1).

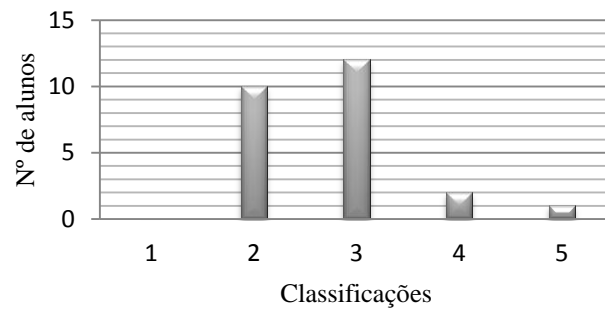


Figura 1. 1- Classificações dos alunos no ano letivo anterior

Da observação deste gráfico constatamos que apesar de heterogénea, a turma no final do ano letivo anterior, apresentava um elevado número de alunos com insucesso em Matemática. Este aspeto parece-me ter sido corroborado pelas classificações obtidas por estes alunos (Figura 1.2) no teste de avaliação diagnóstica (Anexo 1), elaborado pelos professores de Matemática que lecionavam o 9º ano de escolaridade, e realizado por todas as turmas da escola, na primeira semana de aulas.

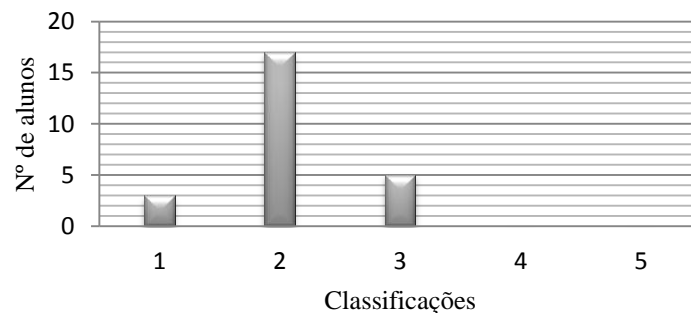


Figura 1. 2- Classificações dos alunos no teste diagnóstico de Matemática

## **Organização do estudo**

Este relatório está organizado em quatro partes. A primeira, a introdução, onde faço uma apresentação global deste trabalho, referindo as minhas motivações para a realização desta investigação, bem como a sua relevância atual, no contexto da educação matemática no nosso país. Apresento também, o problema que pretendo estudar, e as questões formuladas no âmbito do mesmo, para as quais pretendo encontrar respostas. Neste capítulo faço também referência ao contexto escolar, caracterizando a turma onde realizei esta experiência de investigação, quer do ponto de vista pessoal, quer do desempenho dos alunos que a compõem.

A segunda parte, é o capítulo onde faço a fundamentação teórica deste estudo. Nele procedo ao enquadramento curricular e didático do tema, recorrendo a orientações curriculares para o ensino da Matemática e à literatura de referência da área da didática desta disciplina.

A terceira parte é o capítulo da concretização letiva. Nele começo por contextualizar a proposta pedagógica que desenvolvi, justificando as minhas opções e descrevendo como se processou o “modelo” de trabalho, nas aulas que realizei. Posteriormente, apresento a experiência de ensino-aprendizagem que desenvolvi, baseada nos objetivos que pretendia atingir. Nela descrevo as várias aulas onde realizei esta experiência, dando especial atenção ao momento de planificação de cada uma das duas fases que considere. A terminar este capítulo apresento as opções metodológicas que tomei na realização desta investigação.

No último capítulo, apresento uma análise e interpretação da informação recolhida durante a realização desta experiência pedagógica. Nele analiso a 2.<sup>a</sup> fase da proposta pedagógica que desenvolvi, bem como, apresento uma síntese das principais conclusões desta investigação. Por fim, apresento uma reflexão pessoal sobre o desenvolvimento deste trabalho, salientando os aspetos que considere positivos, bem como, as dificuldades sentidas, e os desafios que esta experiência me colocou, quer enquanto professora, quer como investigadora.

## Capítulo II

# ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO

Na primeira parte deste capítulo, irei debruçar-me sobre as orientações curriculares para o ensino e a aprendizagem da Matemática, discutindo o significado e a importância da resolução de problemas, do raciocínio e da comunicação matemática, no estudo desta disciplina. Na segunda parte, destacarei a avaliação das aprendizagens, apresentando uma breve evolução sobre este conceito, dando especial ênfase à avaliação formativa, e em particular, a duas formas (geralmente interdependentes) de levá-la à prática nas salas de aula: a diferenciação pedagógica e a análise dos erros cometidos pelos alunos.

### Orientações curriculares para o ensino da Matemática

Ao longo dos tempos, as mudanças na sociedade têm fortemente influenciado, quer a visão do que é a matemática escolar, quer as orientações curriculares para o ensino desta disciplina. Até meados do século XX, uma Matemática assente na memorização de procedimentos era suficiente para permitir, a alguns, a aquisição de conhecimentos “razoáveis”, sobretudo em aritmética, para que rapidamente se tornassem trabalhadores dos campos, fabris ou de serviços:

Os currículos matemáticos eram relativamente estáveis – e aborrecidos. A maioria dos estudantes limitava-se a memorizar factos e procedimentos, e não compreendia os conceitos ou as técnicas de aplicação. (Schoenfeld, 1996, p. 63)

Os anos 60, com a introdução da *Matemática moderna*, tornaram-se uma década de abstração na instrução matemática. Mas não foi este movimento que levou os alunos a aprenderem mais Matemática, antes pelo contrário:

As crianças não estavam a aprender as abstrações e as suas capacidades básicas tinham-se perdido na mal sucedida pressa de ensinar a crianças

muito jovens, coisas como a nova teoria dos números. (Schoenfeld, 1996, p. 63)

Na década de 70 surge a então chamada *pedagogia por objetivos*, que mantendo um ensino de uma matemática formal, pré-definida, permite ao professor estruturar o ensino a partir de uma taxonomia de objetivos. Assim, os conteúdos programáticos são organizados em pequenas unidades de ensino, ordenadas do mais simples para o mais complexo, sujeitas a pré-requisitos, e onde a aprendizagem dos alunos dá-se quando estes conseguirem atingir os objetivos definidos para cada “etapa”. Nesta forma de trabalhar, o que distingue os diferentes alunos é o ritmo de aprendizagem. Deste modo, alguns alunos precisarão de mais tempo para aprender, tendo para isso que realizar mais vezes o mesmo tipo de tarefa. É assim, através da repetição, em maior ou menor quantidade consoante as necessidades dos alunos, que se espera que aconteça a aprendizagem (Santos, 2009).

Nos anos 80 surgem, tanto a nível internacional como nacional, vários documentos de orientação curricular, como por exemplo, *Uma agenda para a Ação* do NCTM em 1980; *Relatório Crockcroft* em 1982; *Renovação do Currículo de Matemática* em 1988 da APM; e, em 1989 as *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar*, que reforçam a mudança na forma, quer de entender a natureza da matemática, quer do seu ensino e aprendizagem. Há um reconhecimento de que a matemática escolar não se limita a experiências rotineiras que apelam à memória e ao treino.

A matemática é mais do que uma coleção de conceitos e capacidades a adquirir; ela inclui métodos de investigação e de raciocínio, meios de comunicação e noções de contexto. (NCTM, 1991, p. 6)

Ensinar Matemática deixa assim de ser encarado como a transmissão rigorosa de conhecimentos e procedimentos, para passar a ser a criação de situações que permitam ao aluno desenvolver a sua competência matemática. A aprendizagem deixa de ser resultante da reprodução correta de técnicas e procedimentos adquiridos através de uma prática repetitiva de exercícios, para passar a ser decorrente do envolvimento dos alunos em experiências matemáticas ricas e significativas.

Os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e conhecimentos prévios. (NCTM, 2007, p.11)

É nesta perspetiva que se enquadra a ideia de que “saber matemática é fazer matemática” (NCTM, 1991, p. 8). A Matemática deixa assim de ser considerada como a disciplina “de elite”, passando a ser uma disciplina “para todos”, o que implica que todos os alunos têm o direito a aprender matemática com significado, profundidade e compreensão. O ensino da disciplina deixa assim de ser centrado nos conceitos e procedimentos, passando o pensamento crítico, o raciocínio, a resolução de problemas e a comunicação a desempenhar um papel fundamental (NCTM, 2007). Deste modo, pressupõe-se uma “revolução” na sala de aula de Matemática, onde os alunos adquirem um maior protagonismo no processo de ensino-aprendizagem:

Nós vemos as aulas de Matemática como lugares onde problemas interessantes são regularmente explorados, utilizando ideias matemáticas importantes. Partimos da premissa de que aquilo que um aluno aprende depende em alto grau de como o aprendeu. (NCTM, 1991, p. 6)

De um ensino direto, onde numa primeira fase é ensinada a teoria para posteriormente se passar à prática, defende-se um ensino-aprendizagem exploratório. Assume-se então que, o que os alunos aprendem resulta de dois fatores principais: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam (Ponte, 2005).

Aos professores cabe a responsabilidade de proporcionar aos alunos momentos significativos para a realização das aprendizagens desejadas, e é através dessas experiências que os alunos aprendem (NCTM, 2007). Os professores têm aqui um papel fundamental, quer na escolha de tarefas ricas, adequadas aos seus alunos, que proporcionem momentos de aprendizagem significativos, quer na forma de trabalhá-las, de modo a ajudá-los a desenvolverem as suas capacidades, quer incentivando-os a explicarem e justificarem os seus raciocínios. Esta estratégia de ensino-aprendizagem exploratória, para além de pressupor uma escolha cuidada de diferentes tipos de tarefas, valorizará mais os momentos de reflexão e discussão com toda a turma, partindo de um trabalho prático já realizado, bem como de momentos de sistematização, formalização e estabelecimento de conexões (Ponte, 2005).

A natureza das tarefas propostas deverá ser diversificada, englobando a realização de problemas, explorações, investigações, projetos e exercícios. Preconiza-se também o recurso a situações realistas, onde é possível utilizar estratégias diferentes para resolver um mesmo problema (Ponte, 2005; NCTM, 2007).

As metodologias de trabalho em sala de aula também sofrem alterações. De um trabalho exclusivamente individual, passa-se para um trabalho maioritariamente em grupo, onde a comunicação adquire uma grande importância, sendo os alunos encorajados a discutir, com os seus colegas, a sua forma de pensar e posteriormente a partilhar as suas ideias com a turma, numa fase de discussão coletiva.

Em suma, o professor desempenhará um papel muito importante na sala de aula, ao longo deste processo, sendo responsável pela criação de um ambiente intelectual no qual “o raciocínio matemático sério constitui a norma” (NCTM, 2007, p. 19).

São as ações dos professores que encorajam os alunos a pensar, a questionar, a resolver problemas e a discutir as suas ideias, estratégias e soluções. (NCTM, 2007, p. 19)

Desde a fase de acompanhamento do trabalho dos alunos, à fase de discussão e sistematização das ideias importantes, as atitudes do professor contribuem para a construção do ambiente de aprendizagem significativo. As *normas sociais* e as *normas sociomatemáticas* (Yakel e Cobb, 1996) adquirem aqui uma importância notória:

A compreensão normativa do que é considerado matematicamente diferente, matematicamente sofisticado, matematicamente eficaz e matematicamente elegante numa sala de aula são normas sociomatemáticas. Analogamente, o que é considerado como uma explicação e justificação matemática aceitável é uma norma sociomatemática. (Yakel & Cobb, 1996, p. 5)

Estes autores clarificam a distinção entre estes dois “tipos” de normas presentes numa aula de Matemática, apresentando exemplos concretos que ajudam à sua compreensão:

A compreensão de que se espera que os alunos expliquem as suas soluções e os seus modos de pensamento é uma norma social, enquanto a compreensão do que é considerado como uma explicação matemática aceitável é uma norma sociomatemática. Do mesmo modo, a compreensão de que quando se discute um problema os alunos devem apresentar soluções diferentes das já apresentadas é uma norma social, enquanto que a compreensão do que é considerado a diferença matemática é uma norma sociomatemática. (Yakel & Cobb, p. 5)

O PMEB (ME -DGIDC, 2007) segue estas orientações curriculares, sendo notória a importância atribuída às capacidades transversais: resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática que, para além de constituírem objetivos programáticos, têm, à semelhança dos temas da matemática (Números, Geometria,

Álgebra e Organização e tratamento de dados), explicitados objetivos gerais, tópicos e objetivos específicos para cada ciclo de escolaridade.

## **A resolução de problemas**

Na literatura encontramos várias definições para a resolução de problemas. Neste trabalho irei assumir a definição proposta pelo *Currículo nacional para o ensino básico*.

*Competências essenciais* (ME-DEB, 2001) para o qual:

Os problemas são situações não rotineiras que constituem desafios para os alunos e em que frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução. (p. 68)

A resolução de problemas implica o envolvimento dos alunos numa tarefa, cujo método de resolução não é reconhecido antecipadamente. Deste modo, uma dada questão poderá ser um problema ou um exercício, mediante o facto de o aluno dispor, ou não, de um processo imediato de resolução (Ponte, 2005). Se o aluno souber imediatamente o que precisará de utilizar para o resolver, esse “problema” não passará de um simples exercício. Uma consequência desta ideia é que, num determinado momento, uma mesma questão poderá ser um problema para alguns alunos, e um simples exercício de aplicação para outros.

Para que seja considerada um problema, a tarefa será sempre um desafio para o aluno e, como refere Polya (1977), quem o conseguir resolver sentirá, durante o processo maiores ou menores dificuldades, mas no final uma grande satisfação:

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. (Polya, 1977, p. 1)

De facto, um problema, ainda que simples, se desafiar a curiosidade do aluno pode suscitar o gosto pelo trabalho mental e pela descoberta da sua resolução. Polya (1977) sublinha que, se o professor desafiar a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos, e auxiliando-os na sua resolução,

por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio e proporcionar-lhes alguns meios para alcançar esse objectivo.

Neste sentido, a resolução de problemas estimula a curiosidade dos alunos, proporcionando o desenvolvimento de hábitos de persistência e de confiança perante situações desconhecidas (NCTM, 2007), contribuindo deste modo, para que se possam interessar mais pela disciplina, e desenvolvam uma importante capacidade, que com certeza será útil ao longo da sua vida. Deste modo, a atividade de resolução de problemas contribui para “o desenvolvimento de atitudes positivas face à matemática e à capacidade de apreciar esta ciência”, uma das finalidades do atual PMEB (ME-DGIDC, 2007).

Em 1988, a APM, no seu livro, *Renovação do Currículo de Matemática*, afirmava que a resolução de problemas deve estar no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática, em todos os níveis escolares. De facto, ao resolver problemas, o aluno, para além de ampliar o seu conhecimento matemático, desenvolve a sua criatividade e aprimora o seu raciocínio.

No PMEB (ME-DGIDC, 2007), a resolução de problemas é vista como uma capacidade matemática fundamental, considerando-se que os alunos devem adquirir desembaraço a lidar, quer com problemas matemáticos, quer com problemas relativos a contextos do seu dia a dia e de outros domínios do saber. Pretende-se que os alunos sejam capazes de resolver e de formular problemas, de analisar diferentes estratégias de resolução e compreender os efeitos num problema, de alterações no seu enunciado.

A resolução de problemas é assim considerada uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática (NCTM, 2007). No PMEB (ME-DGIDC, 2007), não é só vista como um importante objectivo de aprendizagem, como também constitui uma atividade matemática fundamental para a aprendizagem dos conceitos e procedimentos matemáticos, bem como para o uso e compreensão de diversas representações (ME-DGIDC, 2007).

## O raciocínio matemático

Tradicionalmente, a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de raciocínio está intimamente ligada com a aprendizagem da Matemática faz parte do senso comum na nossa sociedade. No entanto, há que clarificar o que entendemos por *raciocinar*. Ponte e Sousa (2010), partindo do significado desta palavra, encontrado num dicionário de língua Portuguesa, referem que são sobretudo os significados de “encadear pensamentos de forma lógica” e “apresentar razões”, que estão subjacentes à ideia de raciocínio presente no PMEB.

Neste programa, *raciocinar matematicamente*, usando conceitos, representações e procedimentos matemáticos é um dos objetivos gerais para o ensino da Matemática. Salienta-se que os alunos devem aprender a justificar as suas afirmações recorrendo a exemplos específicos:

À medida que os alunos progredem nos diversos ciclos de ensino as suas justificações devem ser mais gerais, distinguindo entre exemplos e argumentos matemáticos gerais para toda uma classe de objectos. (ME-DGIDC, 2007, p. 5)

Para além de ser visto como um objetivo central de aprendizagem, o raciocínio constitui “uma importante orientação metodológica para estruturar as atividades na sala de aula” (ME-DGIDC, 2007, p. 9). Deste modo, o professor deverá dar especial atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, pedindo-lhes que os expliquem com clareza, e que analisem e reajam, aos raciocínios dos colegas.

O PMEB (ME-DGIDC, 2007) destaca ainda o *raciocínio matemático* como uma das três capacidades transversais, fundamentais para o trabalho com os alunos nesta disciplina, salientando que esta capacidade envolve a formulação e teste de conjecturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração. Para além de compreenderem o que é uma generalização, um caso particular e um contra-exemplo, o raciocínio envolve a capacidade dos alunos construir:

Cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos Números, da Álgebra e da Geometria. (ME-DGIDC, 2007, p. 8)

Este documento curricular refere ainda que, no final do 3.º ciclo, os alunos devem ser capazes de distinguir entre raciocínio indutivo e dedutivo e reconhecer diferentes métodos de demonstração. De facto estes dois tipos de raciocínio e a demonstração constituem formas poderosas de desenvolver e expressar intuições:

As pessoas que raciocinam e pensam analiticamente tendem a detetar padrões, estruturas ou regularidades, quer em situações reais, quer em objetos simbólicos; perguntam se esses padrões são acidentais ou se ocorrem por alguma razão específica; e formulam conjeturas e efetuam demonstrações. (NCTM, 2007, p. 61)

Todos reconhecemos a importância do raciocínio dedutivo em matemática, no entanto o raciocínio indutivo, como mostrou Polya (1990) é fundamental na criação matemática. Conhecermos e compreendermos este tipo de raciocínio permite-nos perceber o que se passa antes de se chegar à demonstração. Deste modo, compreender o raciocínio indutivo significa valorizar a matemática não apenas como produto (conhecimento organizado dedutivamente) mas também como processo (como se gera esse conhecimento) (Oliveira, 2008).

É importante que os alunos conheçam as potencialidades e as limitações do raciocínio indutivo, compreendendo que quando exploram as situações, colocando hipóteses, o seu raciocínio é eminentemente conjetural pelo que as conclusões que produzem, em geral, têm uma validade plausível e não necessária (Oliveira, 2008). Este aspeto conduzirá, também, à compreensão do poder da argumentação e da demonstração matemática.

NCTM (2009), coloca o *raciocínio* e o “*sense making*” como uma forma fundamental de abordar o ensino e a aprendizagem da Matemática, independentemente do domínio matemático que se está a ensinar. Apresentam o *raciocínio* como um processo de tirar conclusões com base em evidência ou assunções prévias e o “*sense making*” como um processo de dar significado a uma situação, contexto, ou conceito, relacionando-o com o conhecimento prévio. Defendem que um ensino com ênfase nestas capacidades, quando desenvolvidas no contexto de conceitos matemáticos importantes, assegura que os alunos possam realizar procedimentos matemáticos com precisão, compreender porque esses procedimentos funcionam, e saber como eles podem ser usados e os seus resultados interpretados.

Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) referem que há muitas evidências de que mesmo crianças, num nível muito elementar de escolaridade, conseguem realizar ações, de modo a justificar uma afirmação, tendo por pano de fundo o raciocínio dedutivo. Referem também a existência de vários estudos que mostram que, em ambientes adequados, os alunos são capazes de:

Explicar e justificar os raciocínios usados durante o processo de uma tarefa matemática, de fazer generalizações a partir de casos particulares, de compreender o que significa contra-exemplo, de refletir sobre o que constitui um argumento aceitável e adequado quando se trabalha em matemática e de aplicar resultados gerais a exemplos específicos. (Boavida *et al.*, 2008, p. 81)

Como vemos, o professor desempenhará aqui um importante papel, quer na seleção de tarefas adequadas, quer na criação de um ambiente de sala de aula favorável ao desenvolvimento do raciocínio. Um outro aspeto a salientar é que considerando que o raciocínio matemático é um hábito mental, deverá, como todos os hábitos, ser desenvolvido através de uma utilização consistente numa diversidade de contextos (NCTM, 2007). Ponte e Sousa (2010, p. 32) referem ainda que "aprende-se a raciocinar raciocinando e analisando raciocínios realizados por nós e pelos outros".

Os professores devem, assim, selecionar tarefas matemáticas apropriadas aos seus alunos, suficientemente ricas e desafiantes, que lhes permitam desenvolver as suas capacidades de raciocínio no que concerne à justificação, argumentação, formulação e teste de conjeturas, bem como, no 3.º ciclo, à demonstração. O que vem reforçar a importância do papel dos professores que deverão pedir constantemente, aos seus alunos, que fundamentem as suas afirmações usando conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos ou através de contra-exemplos. Devem ainda aproveitar todas as oportunidades para levar os alunos a identificar casos particulares, formular generalizações e testar e validar essas generalizações (Ponte & Sousa, 2010).

## A comunicação matemática

A comunicação assume, sem dúvida, uma grande importância na aula de Matemática. A forma como se comunica, quem comunica, e sobre o que se comunica, tem influência na aprendizagem da disciplina e, também, na conceção que os alunos fazem da sua natureza. Quer nos estejamos a referir a um ensino direto, quer a um ensino-aprendizagem exploratório, a comunicação está sempre presente na sala de aula, cabendo ao professor geri-la e garantir que ocorra em múltiplas direcções: do professor para o aluno, do aluno para o professor, e do aluno para o aluno (Boavida *et al.*, 2008).

Quando os alunos são estimulados a pensar e a raciocinar sobre a matemática, a comunicação assume um papel fundamental, à medida que estes expressam oralmente, e por escrito, o seu raciocínio (NCTM, 2007). A comunicação assume, assim, uma grande importância nas salas de aula de Matemática “atuais”, e essa relevância é reconhecida em vários documentos curriculares (NCTM, 2000; ME-DEB, 2001; ME-DGIDC, 2007).

O PMEB (ME-DGIDC, 2007) destaca a comunicação matemática como uma importante capacidade transversal, que deverá ter um lugar de relevo na prática letiva do professor:

O desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática por parte do aluno é assim considerado um objetivo curricular importante e a criação de oportunidades de comunicação adequadas é assumida como uma vertente essencial do trabalho que se realiza na aula. (ME-DGIDC, 2007, p. 8)

A comunicação assume assim, neste documento, duas vertentes. Por um lado, é um objetivo curricular, uma vez que se pretende que os alunos aprendam a comunicar, por outro, é encarada como uma metodologia de trabalho, onde se espera que os alunos comuniquem para que possam aprender:

Os alunos devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático. (ME-DGIDC, 2007, p. 5)

O PMEB (ME-DGIDC, 2007) refere ainda que estas capacidades desenvolvem-se comunicando através de uma variedade de formas e proporcionando aos alunos um aperfeiçoamento dos seus processos de comunicação. Deste modo, a comunicação, quer oral, quer escrita, desempenha um papel muito importante na aula de Matemática,

contribuindo para o desenvolvimento de diversos aspetos da sua aprendizagem matemática:

Através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas. Através da escrita de textos, os alunos têm oportunidade de clarificar e elaborar de modo mais aprofundado as suas estratégias e os seus argumentos, desenvolvendo a sua sensibilidade para a importância do rigor no uso da linguagem matemática. (ME-DGIDC, 2007, p. 9)

De facto, comunicar oralmente o nosso pensamento aos outros requer um esforço de organização e clarificação das nossas ideias. Passá-lo ao formato escrito torna-se uma tarefa ainda mais exigente. Boavida *et al.* (2008) salienta que os registos escritos acrescentam uma maior profundidade à reflexão, uma vez que o ato de escrever obriga a refletir sobre o próprio trabalho e, conseqüentemente, a clarificar as ideias desenvolvidas.

Bishop e Goffree (1986) destacam a importância do papel desempenhado pelo professor na gestão da comunicação, pois é através do encorajamento para a comunicação entre todos os participantes da aula que se torna possível uma genuína partilha de significados matemáticos. Boavida *et al.* (2008) sublinham também que, para que a comunicação matemática na sala de aula seja profícua, há que criar condições e hábitos que permitam a todos, não apenas falar, mas também escutar.

Uma comunicação na sala de aula baseada na partilha de ideias matemáticas, permite aos alunos apropriarem-se das ideias apresentadas, quer pelo professor, quer pelos colegas, e aprofundar as suas. Deste modo, a comunicação para além de permitir aos alunos aprenderem, contribui para uma melhor compreensão do próprio pensamento (Boavida *et al.*, 2008). A apresentação e explicação das ideias, por parte dos alunos, permitem também ao professor aceder ao raciocínio dos alunos, contribuindo deste modo para que tenha bons indicadores sobre o processo de ensino-aprendizagem (NCTM, 2007; Boavida *et al.*, 2008).

## Avaliação das aprendizagens

Nos dias de hoje parece ser consensual, entre os elementos da comunidade educativa, que a avaliação deve ser parte integrante do processo de ensino-aprendizagem, acreditando-se que contribuirá, significativamente, para a aprendizagem de todos os alunos. Quer os documentos normativos, quer o PMEB (ME-DGIDC, 2007), atualmente em vigor, explicitam esta ideia. Podemos ler, por exemplo, no Despacho Normativo n.º 14/2011 de 18 de novembro de 2011, que:

A avaliação é um elemento integrante e regulador da prática educativa, permitindo uma recolha sistemática de informações que, uma vez analisadas, apoiam a tomada de decisões adequadas à promoção da qualidade das aprendizagens.

Neste excerto do despacho encontramos assim referências às vertentes, formativa, reguladora e contínua da avaliação. Mas, nem sempre foi assim. Em termos teóricos, o desenvolvimento do significado de avaliação sofreu uma evolução ao longo dos tempos, passando de uma conceção técnica e instrumental da avaliação centrada em produtos, para uma visão mais alargada, centrada nos processos e nos seus significados (Pinto & Santos, 2006). Relativamente à Matemática se, por exemplo, observarmos a evolução das orientações curriculares, vemos que durante muito tempo, uma avaliação centrada no produto final – neste caso nos testes de avaliação e exames – estava de acordo com os objetivos pretendidos no chamado *ensino tradicional*<sup>1</sup>.

Pinto e Santos (2006) e Fernandes (2008) discutem as diferentes perspectivas de avaliação que têm prevalecido nos vários sistemas educativos, quer nacionais, quer internacionais. Estes autores apresentam-nos as quatro gerações de avaliação distinguidas por Guba e Lincon (1989), a *geração da medida*, a *geração da descrição*, a *geração da formulação de juízos*. E, a quarta geração, a *avaliação como negociação e construção*, que rompe epistemologicamente com as anteriores, e a qual pretende responder às dificuldades e limitações encontradas.

Na primeira geração, a chamada *geração da medida*, a avaliação e a medida são entendidas como sinónimos e acredita-se que através de testes bem construídos se consegue medir, com rigor e isenção, as aprendizagens dos alunos. Nesta geração

---

<sup>1</sup> Uma forma de ensino direto.

procura-se, assim, a objetividade, pelo que se privilegia a quantificação de resultados.

Neste paradigma:

Ensinar significa transmitir o saber da forma mais adequada possível.  
Aprender significa reter o saber transmitido, isto é, ser capaz de o reproduzir tal como foi ensinado. (Pinto & Santos, 2006, p.16)

Ao nível da sala de aula, esta perspetiva significa que a avaliação se reduz à realização dos tradicionais testes de avaliação aos quais o professor atribui uma classificação. Pretende-se ainda que a influência do professor, na correção dos mesmos, seja nula. Nesta visão, as funções da avaliação reduzem-se à classificação, seleção e certificação, sendo os conhecimentos o único objeto de avaliação. Os alunos não participam no processo de avaliação, sendo esta, geralmente, descontextualizada (Fernandes, 2008). Nesta perspetiva, ainda com uma grande influência nos dias de hoje, podemos, por exemplo incluir os exames nacionais, bem como, os rankings de escolas que são elaborados após a publicação dos resultados destes exames.

A avaliação é referida a uma norma ou padrão (por exemplo a média) e, por isso, os resultados de cada aluno são comparados com os de outros grupos de alunos. (Fernandes, 2008, p. 57)

A segunda geração vem superar algumas limitações da primeira geração, nomeadamente, a referente ao objeto de avaliação. Os conhecimentos deixam de ser o único objeto de avaliação passando também a serem formulados objetivos comportamentais e a verificar-se se eles são, ou não, atingidos pelos alunos. A medida e a avaliação deixam assim de ser considerado sinónimos, passando a medida a ser um meio ao serviço da avaliação, persistindo, no entanto, todas as outras características da geração anterior (Fernandes, 2008). O diagnóstico e a remediação passam a ser duas componentes fundamentais neste novo paradigma, onde se enquadra a *pedagogia por objetivos* de Bloom (Pinto & Santos, 2006).

A terceira geração aparece, mais uma vez, com o objetivo de superar algumas limitações da geração anterior. Sentiu-se que se deviam fazer esforços para que os intervenientes permitissem formar juízos de valor acerca dos objetos da avaliação, isto é, neste paradigma a avaliação é entendida como um processo que envolve uma tomada de decisão (Pinto & Santos, 2006). É a chamada geração da *formulação de juízos* ou julgamentos.

Os avaliadores, mantendo as funções técnicas e descritivas das gerações anteriores, passariam também a desempenhar o papel de *juízes*. (Fernandes, 2008, p. 58)

É no âmbito desta perspetiva de avaliação que começam a surgir ideias como:

A avaliação deve induzir e/ou facilitar a tomada de decisões que regulem o ensino e as aprendizagens; A recolha de informação deve ir para além dos resultados que os alunos obtêm nos testes; A avaliação tem de envolver os professores, os pais, os alunos e outros intervenientes; Os contextos de ensino e de aprendizagem devem ser tidos em conta no processo de avaliação; a definição de critérios é essencial para que se possa apreciar o mérito e o valor de um dado objeto de avaliação. (Fernandes, 2008, p. 59)

Verifica-se assim um alargamento da noção de avaliação formativa, procurando adaptar-se o ensino ao aluno e não o contrário. Uma lógica de diferenciação vem substituir a lógica de normalização. (Pinto & Santos, 2006)

A avaliação de quarta geração - *avaliação como negociação e construção* - está baseada num conjunto de princípios, ideias e conceções, dos quais, Fernandes (2008), destaca os seguintes: o poder de avaliar os alunos deve ser partilhado, e os professores devem usar uma variedade de estratégias, técnicas e instrumentos de avaliação; a avaliação deve ser integrada no processo de ensino-aprendizagem; a avaliação formativa deve ser a modalidade de avaliação privilegiada, tendo como função principal melhorar e regular as aprendizagens; o feedback é um processo indispensável para que a avaliação se integre no processo de ensino-aprendizagem; a avaliação deve servir mais para que os alunos desenvolvam as suas aprendizagens do que para os classificar; a avaliação é uma construção social; e a avaliação deve usar predominantemente métodos qualitativos, não se pondo, no entanto, de parte os quantitativos.

Neste paradigma, a avaliação é entendida como um processo aberto e negociado entre os vários atores, onde as regras do jogo são conhecidas por todos. Deste modo, o trabalho em redor da explicitação das intenções, dos objetivos e dos meios a utilizar na recolha de informações assume uma importância significativa (Pinto & Santos, 2006).

## **A avaliação nos documentos normativos e de orientação curricular para o ensino da Matemática**

Ao longo dos anos, os documentos de orientação curricular, quer nacionais quer internacionais, têm tido uma forte influência em Portugal. Nos anos 80, do século XX, a avaliação, refletindo uma nova perspetiva de encarar a matemática, e o seu ensino e aprendizagem, começa também a ser discutida no nosso país. Um dos documentos mais relevante é o documento das *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991). Neste documento é definido o principal propósito da avaliação, alterando a visão da avaliação como apenas uma forma de seleção e seriação dos alunos, passando a encará-la também como um “instrumento” ao serviço das aprendizagens:

A avaliação tem como propósito ajudar os professores a conhecerem melhor o que sabem os alunos e a tomarem decisões significativas no seu ensino. (NCTM, 1991, p. 225)

Alterando-se o modo de trabalhar com os alunos, como consequência de uma modificação na ideia do que é o ensino e a aprendizagem da Matemática, tornou-se indispensável mudar as práticas de avaliação e adequá-las aos novos princípios orientadores para o ensino desta disciplina. Surgiram, assim, outros instrumentos de avaliação mais adequados a estas novas práticas:

Num contexto de ensino que exige uma compreensão mais profunda da Matemática, os instrumentos de avaliação que exigem apenas a identificação das respostas corretas já não bastam. Ao contrário, os nossos instrumentos devem refletir o alcance e a intenção do nosso programa de ensino, ou seja que os alunos resolvam problemas, raciocinem e comuniquem. (NCTM, 1991, p. 229)

A avaliação assume ainda um importante destaque, com a publicação em 1995, pelo NCTM, das *Normas para a Avaliação em Matemática escolar*. Estas *Normas*, traduzidas para Português em 1999, foram elaboradas com o objetivo de ampliar e complementar as *Normas para o Currículo e Avaliação da Matemática Escolar*, publicadas anteriormente pelo NCTM. Neste documento surge a distinção entre *avaliação* e *classificação*, sendo a primeira entendida como:

O processo que inclui a recolha de evidência sobre o conhecimento matemático de um aluno, a sua aptidão para o usar, e sua predisposição

para a matemática, e também o estabelecimento de inferências, a partir dessa evidência, para propósitos variados. (NCTM, 1999, p. 4)

Enquanto, a segunda, é entendida como “O processo de determinar ou atribuir o valor a algo, tendo por base uma análise e uma apreciação cuidadosas”. (NCTM, 1999, p. 4)

Neste documento são enunciados seis critérios para apreciar a qualidade das avaliações em Matemática: (1) *Norma para a Matemática*: a avaliação deve refletir a Matemática que todos os alunos devem saber e ser capazes de fazer. O que exige que os professores compreendam a matemática, conheçam o currículo e saibam como os alunos aprendem; (2) *Norma para a aprendizagem*: a avaliação deve melhorar a aprendizagem em Matemática. O seu principal objetivo é promover a aprendizagem dos alunos e informar os professores para a tomada de decisão sobre o ensino; (3) *Norma para a equidade*: a avaliação deve promover a equidade. Tal avaliação valoriza as qualidades e experiências de cada aluno; (4) *Norma para a transparência*: a avaliação deve ser um processo transparente. Um processo público, participativo e dinâmico; (5) *Norma para as inferências*: a avaliação deve promover inferências válidas sobre a aprendizagem da Matemática. O que requer formas de evidência adequadas e válidas; (6) *Norma para a coerência*: a avaliação deve ser um processo coerente desde a planificação até à fase de divulgação e utilização dos resultados (NCTM, 1999).

Este documento apresenta-nos ainda os seguintes propósitos da avaliação: (1) regular o progresso dos alunos face aos objetivos da aprendizagem; (2) tomar decisões sobre o ensino; (3) classificar o aproveitamento dos alunos. O primeiro, regular o progresso dos alunos, por parte do professor, do próprio aluno ou dos seus pares, permitirá promover o desenvolvimento de cada um deles relativamente ao objetivo matemático e fornecer-lhe um feedback útil sobre o seu desempenho, tanto sobre os seus trabalhos, como sobre os seus progressos. O segundo, o professor ao tomar decisões sobre o ensino está com certeza a melhorá-lo. Para tal, será importante que os professores tenham a precisa noção do que os seus alunos sabem e o que são capazes de fazer. E por último, a classificação dos alunos que servirá para reconhecer a aprendizagem (NCTM, 1999). Nesta perspetiva, a avaliação para além de fornecer aos professores dados importantes sobre o desempenho escolar dos seus alunos, dar-lhes-á, igualmente, informações

indispensáveis para ajudar os alunos a aprenderem melhor e, portanto, a construir uma escola com melhor qualidade.

No início dos anos 90, em Portugal, a Associação de Professores de Matemática organizou um seminário sobre o tema da avaliação com o objetivo de proporcionar um espaço de reflexão, problematização e discussão da avaliação em geral, e sobre a avaliação do ensino da matemática em particular. Várias foram as questões debatidas nos dois dias do encontro, e foi salientada a necessidade de que a avaliação, na sua função reguladora, faça parte integrante do processo didático (Guimarães; Leal, & Abrantes, 1991).

Mais recentemente, o Despacho Normativo nº 14/2011 de 18 de novembro de 2011, define finalidades e princípios orientadores da avaliação das aprendizagens no ensino básico que vão ao encontro dos documentos internacionais. Relativamente aos princípios orientadores da avaliação das aprendizagens o despacho enuncia seis:

- a) Consistência entre os processos de avaliação e as aprendizagens e competências pretendidas, de acordo com os contextos em que ocorrem;
- b) Utilização de técnicas e instrumentos de avaliação diversificados;
- c) Primazia da avaliação formativa com valorização dos processos de auto - avaliação regulada e sua articulação com os momentos de avaliação sumativa;
- d) Valorização da evolução do aluno;
- e) Transparência e rigor do processo de avaliação, nomeadamente através da clarificação e da explicitação dos critérios adotados;
- f) Diversificação dos intervenientes no processo de avaliação.

Este documento refere também, a avaliação formativa como a principal modalidade de avaliação do ensino básico, assumindo caráter contínuo e sistemático e visando a regulação do ensino e da aprendizagem. Refere também a utilização de uma variedade de instrumentos de recolha de informação, de acordo com a natureza das aprendizagens e dos contextos em que ocorrem.

O PMEB (ME-DGIDC, 2007), dedica cerca de uma página à avaliação. Começa por clarificar o seu significado, referindo que a avaliação é "um instrumento que faz o balanço entre o estado real das aprendizagens do aluno e aquilo que era esperado, ajudando o professor a tomar decisões ao nível da gestão do programa sempre numa perspetiva de uma melhoria das aprendizagens" (ME-DGIDC, 2007, p. 12). Salienta, a

perspetiva formativa e reguladora da avaliação, destacando ainda que esta deve ser continuada.

Este mesmo documento curricular apresenta ainda seis características que a avaliação deve ter: (1) deve ser congruente com o programa; (2) deve constituir uma parte integrante do processo de ensino-aprendizagem; (3) deve usar uma diversidade de formas e instrumentos de avaliação; (4) deve ter predominantemente um propósito formativo; (5) deve decorrer num clima de confiança em que os erros e as dificuldades dos alunos são encarados por todos de forma natural; (6) deve ser transparente.

O PMEB refere ainda que o professor deve envolver os seus alunos no processo de avaliação, auxiliando-os, quer na análise do trabalho que realizam, quer na tomada de decisões com vista a melhorarem as suas aprendizagens (ME-DGIDC, 2007). Por fim, refere-se à avaliação sumativa, sublinhando a diferença entre as ações de avaliar e classificar:

A classificação atribuída aos alunos é um valor numa escala unidimensional enquanto que a avaliação implica uma interpretação sobre o grau em que os objetivos foram atingidos e uma tomada de decisão com vista ao futuro. (ME-DGIDC, 2007, p. 12)

Como podemos observar, estas orientações estão em consonância com as orientações internacionais para a avaliação em Matemática. Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), propõem que a avaliação dos alunos seja parte integrante do processo de ensino e seja coerente com este. Sugere que sejam usadas múltiplas fontes para a avaliação e que os métodos de avaliação sejam adequados aos propósitos da avaliação. Refere que devem ser avaliados todos os aspetos do conhecimento matemático e as suas conexões.

A terminar, quero destacar duas ideias, presentes nos *Princípios e Normas para a Matemática escolar* (NCTM, 2007) que sublinham a importância atribuída à avaliação nos dias de hoje, incluindo-a no dia a dia das salas de aula: “A avaliação deve ser uma rotina na atividade de sala de aula em vez de uma interrupção da mesma” (p. 24). E atribuindo-lhe um papel formativo: “a avaliação não deverá ser meramente feita aos alunos; pelo contrário, deverá ser feita para os alunos” (p. 23).

## **Avaliação formativa**

### **O conceito de avaliação formativa**

Ao termo *avaliação formativa* poder-se-á atribuir diferentes significados, havendo, no entanto, uma base comum a todos eles. É um tipo de avaliação que tem, sobretudo, uma finalidade pedagógica (Hadji, 1994), pretendendo contribuir para as aprendizagens dos alunos. Este termo foi usado pela primeira vez por Scriven, em 1967, num artigo sobre a avaliação de meios de ensino. Mais tarde, Bloom na sua proposta pedagógica - *pedagogia por objetivos* - usa-o para identificar uma das modalidades de avaliação do seu modelo (Bloom, Hastings & Madaus, in Santos, 2008).

Fernandes, Ferraz, Carvalho, Dantas, Cavaco, Barbosa, Tourais, e Neves, (1994) apresentam um conjunto de características da avaliação formativa: é interna ao processo de ensino-aprendizagem; interessa-se mais pelos processos do que pelos resultados; torna o aluno protagonista da sua aprendizagem; permite diferenciar o ensino; serve ao professor para, através das informações recolhidas, reorientar a sua atividade; serve ao aluno para autorregular as suas aprendizagens, consciencializando-o de que a aprendizagem não é um produto de consumo a construir, e de que ele próprio tem um papel fundamental nessa construção.

Santos (2008) apresenta-nos um enquadramento teórico, onde discute os diferentes significados atribuídos à avaliação formativa ao longo dos tempos. O quadro da página seguinte (Quadro 2.1) foi construído com base na síntese das ideias apresentadas por esta autora e pretende resumir a evolução do significado de avaliação formativa.

Quadro 2. 1 - Quadro síntese da evolução do significado atribuído à avaliação formativa (adaptado de Santos, 2008)

|                                     | <b>Pedagogia por objetivos</b>                    | <b>Avaliação formadora</b>                 | <b>Negociação avaliativa</b>  |
|-------------------------------------|---|--|---|
| <b>Significado de ensinar</b>       | Gerir os tempos e os esforços                     | Facilitar, gerir e orientar                | Facilitar, gerir e orientar   |
| <b>Significado de aprender</b>      | Aproximar-se dos objetivos                        | Mudar de forma estável por ação do próprio | A reflexão antecede a aprendizagem e passa pela atribuição de sentidos e personalização |
| <b>Experiências de aprendizagem</b> | Organizam-se do mais simples para o mais complexo | Organizam-se do complexo para o complexo   | Organizam-se do complexo para o complexo  |
| <b>Papel do Professor</b>           | Perito e decisor das estratégias a tomar          | Interveniente e proponente                 | Interveniente e proponente  |
| <b>Papel do Aluno</b>               | Executor  | Interveniente                              | Interveniente e proponente  |
| <b>Objetivo da avaliação</b>        | Consecução de objetivos                           | Procura atingir uma aprendizagem proposta  | Procura a compreensão   |
| <b>Regulação</b>                    | Pró-ativa ou retroativa                           | Interativa                                 | Interativa  |
| <b>Implicações</b>                  | Normalizada                                       | Diferenciada                               | Diferenciada  |

Como podemos observar da análise deste quadro, a avaliação formativa não foi sempre vista do mesmo modo ao longo dos tempos. No entanto, em todos os momentos foi-lhe sempre atribuída uma função pedagógica com o intuito de desencadear uma intervenção, sobre o ensino e/ou a aprendizagem, não se limitando à simples observação dos desempenhos dos alunos. De facto, a avaliação formativa, nestas perspetivas, destina-se a ajudar os alunos e o professor, fornecendo pistas de retorno através de múltiplas informações (Santos, 2008).

Quero aqui salientar a última coluna deste quadro. A coluna referente à *negociação avaliativa*, que se destaca das restantes ideias presentes neste quadro, bem como das características da avaliação formativa referidas por Fernandes *et al.* (1994). O que as distingue é sobretudo o papel atribuído ao aluno que, na busca pela compreensão, é entendido como coautor do projeto de aprendizagem (Santos, 2008):

Há um sentimento consciente de procura de significado, não para ir ao encontro do professor, mas sim, em primeiro lugar, daquilo que para si tem sentido. (p. 15)

Deste modo, a autoavaliação ganha um papel de destaque nesta forma de avaliação:

A negociação avaliativa mobiliza o aluno sobre a sua relação com o mundo, e sobre a sua relação com o saber, enquanto a avaliação formadora organiza a confrontação com o objeto a adquirir. (Jorro, *in* Santos, 2008, p. 16)

Santos (2008) acrescenta ainda duas características essenciais ao conceito de avaliação formativa: a *intencionalidade* e as *implicações para a aprendizagem*. Para esta autora estas duas características são fundamentais para nos referirmos a avaliação formativa ou reguladora. Por um lado, é esta intencionalidade que lhe dá a natureza formativa, fazendo com que o professor tenha efetivamente a intenção de compreender e apoiar o aluno. Por outro lado, têm que existir implicações para a aprendizagem, caso contrário, não será efetivamente uma avaliação formativa, terá apenas a intenção de ser formativa.

A avaliação adquire assim um importante papel, proporcionando ao aluno uma oportunidade de aprender, e exigindo ao professor a tomada de decisões sobre o que fazer, e em que momentos fazer, com o que observa do desempenho dos seus alunos. Deste modo, a avaliação formativa deverá estar sempre presente nas salas de aula, proporcionando aos alunos não só a aprendizagem como também uma reflexão sobre o ato de aprender:

Se pretendermos que os alunos funcionem como estudantes autónomos, eles devem refletir sobre o seu próprio progresso, compreender o que sabem e são capazes de fazer, ter confiança na sua aprendizagem e perceber o que ainda têm que aprender. (NCTM, 1999, p. 16)

Os professores devem então procurar formas eficazes para trabalhar com os alunos, nesta perspetiva formadora. É esta intencionalidade que dá sentido à procura de estratégias de sala de aula que poderão contribuir para a aprendizagem. E é neste sentido que aparecem as duas estratégias, que a seguir irei referir: a diferenciação pedagógica e a análise dos erros cometidos pelos alunos.

## Diferenciação pedagógica

Com a valorização da vertente formativa e reguladora da avaliação, a criação de momentos de diferenciação pedagógica torna-se uma necessidade nos dias de hoje. Para além disso, a massificação do ensino trouxe ainda uma maior diversidade para as salas de aula, quer a nível social e cultural, quer a nível dos modos de aprender. O ensino e a aprendizagem é assim, cada vez mais, um grande desafio que é colocado aos professores, em particular, aos professores de Matemática. De facto, sabemos que o conhecimento que os alunos têm, e as maneiras de pensar e aprender Matemática, resultam de uma integração complexa entre suas experiências pessoais e as escolares (NCTM, 1999). Podemos também incluir aqui todo um passado escolar dos seus encarregados de educação, bem como a forma como a sociedade, em geral, encara esta disciplina.

Mas o facto do ensino se destinar *a todos* não significa que se deva diminuir o nível de exigência, antes pelo contrário, “a excelência na educação matemática requer equidade: expectativas elevadas e um sólido apoio a todos os alunos” (NCTM, 2007, p. 12). De facto, agindo de acordo com as orientações curriculares internacionais, nomeadamente as *Normas para a Avaliação em Matemática Escolar* do NCTM (1999, 2007) respeitaremos a norma para a equidade, o que significa que se espera que:

Todos os alunos, incluindo aqueles que têm necessidades educativas especiais ou são sobredotados, atinjam elevados níveis de desempenho e que cada aluno tenha a oportunidade e o apoio necessário para atingir esses níveis. (NCTM, 1999, p. 18)

A equidade não significa que cada aluno deva receber um ensino idêntico; pelo contrário, exige a adaptação razoável e adequada, sempre que tal se revele necessário, de modo a promover o acesso e a aquisição dos conteúdos a todos os alunos. (NCTM, 2007, p. 12)

Os próprios documentos normativos portugueses remetem-nos para medidas de diferenciação pedagógica, adequadas às particularidades dos alunos. Podemos assim ler no Despacho Normativo nº 14/2011, de 18 de novembro de 2011 que “a avaliação formativa gera medidas de diferenciação pedagógica adequadas às características dos alunos e às aprendizagens e competências a desenvolver”.

Santos (2009) apresenta-nos uma evolução do conceito de diferenciação pedagógica, salientando o fato de ser um conceito imperativo nos dias de hoje, mas não ser tão recente como se poderia pensar. A partir dos anos 60, do século XX, com a inclusão de uma vertente formativa da avaliação começaram a surgir modelos de diferenciação pedagógica. O próprio modelo pedagógico, em vigor na época, a *pedagogia por objetivos*, incluía uma vertente de diferenciação pedagógica que consistia em proporcionar aos alunos, que ainda não tinham atingido os objetivos pretendidos, mais tarefas do mesmo tipo, enquanto que os outros, por serem mais rápidos a aprender já os teriam atingido e assim realizariam tarefas de enriquecimento.

Neste seu artigo, esta autora apresenta-nos igualmente três níveis de diferenciação pedagógica - *diferenciação institucional, diferenciação externa e diferenciação interna*. Os dois primeiros referem-se a níveis mais amplos do sistema educativo. O primeiro, ao nível, das escolas ou instituições de formação, o segundo, a nível interno das escolas, como é o caso das turmas dos percursos alternativos, apoios pedagógicos acrescidos e outras formas alternativas de organização na escola. O terceiro, a diferenciação pedagógica interna, é aquele que me interessa particularmente neste trabalho, por dizer, respeito ao trabalho a desenvolver na sala de aula e à forma como decorre o processo de ensino e aprendizagem.

Neste mesmo artigo, a autora apresenta-nos, segundo Meirieu (1988), três formas de desenvolver este nível de diferenciação pedagógica interna, a diferenciação pedagógica: *simultânea, sucessiva e variada*. A primeira, centra-se no que os alunos fazem, e é um exemplo disso quando os alunos estão ao mesmo tempo a realizar tarefas distintas. A segunda, é quando se verifica a variação da forma ao longo do tempo, isto é, por exemplo, quando se usa tarefas de natureza diferente, abordagens diferentes, bem como, quando se trabalham com várias representações de um mesmo conceito. A última é uma combinação das duas anteriores.

Santos (2009) salienta ainda o modelo de Prezesmycki (1991) que propõe uma articulação entre dispositivos de diferenciação pedagógica interna - *conteúdos, processos e produtos* - de forma a potencializar a aprendizagem.

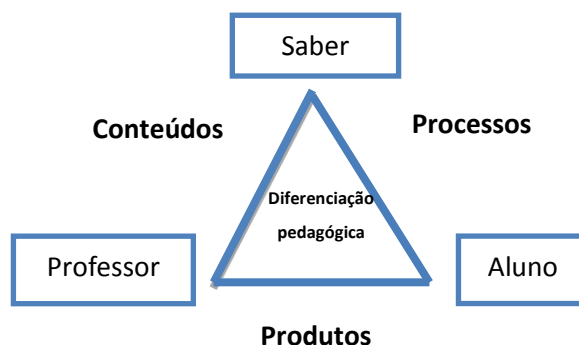


Figura 2. 1- Articulação entre os dispositivos de diferenciação (adap. Santos, 2009)

A escolha do momento adequado para usar cada um destes dispositivos de diferenciação pedagógica caberá ao professor, mediante as necessidades dos seus alunos.

### Análise dos erros

Muitas vezes, nos dias de hoje, um professor ao corrigir uma produção de um aluno assinala o(s) erro(s) cometido(s), sublinhando-o(s), riscando-o(s), marcando-o(s) com uma “cruz”, etc., ou seja, usando simbologias variadas, mas pretendendo identificar o erro e esperando que este seja corrigido pelo aluno.

O erro está bem presente no ensino, em particular, no ensino da Matemática. Já Poincaré, no início do século, no seu artigo, *A invenção matemática* (1996) refere-se ao erro em matemática do seguinte modo:

Como é possível o erro em matemática? Uma boa inteligência não deve cometer erros lógicos e há, sem dúvida, mentes muito subtis que não se enganam em raciocínios curtos semelhantes aos que se nos apresentam nos atos vulgares da nossa vida, mas que são incapazes de seguir, ou de repetir sem erros, as demonstrações matemáticas mais extensas que, ao fim e ao cabo, não são mais que uma soma de pequenos raciocínios em tudo análogos aos que resolvem tão facilmente. Será necessário acrescentar que mesmo os bons matemáticos não são infalíveis? (p.7)

A importância que se tem dado aos *erros* cometidos pelos alunos, também evoluiu ao longo dos tempos, estando diretamente relacionada com a perspectiva do que se entende por avaliação. No ensino da Matemática, o erro tem sido tradicionalmente visto como *um mal a erradicar*, sendo que, quando o professor o deteta, o aluno deverá apagá-lo,

substituindo assim a resolução errada, ou contendo erros, pela resolução correta. Nesta perspectiva, o erro mostra ao professor que o aluno não sabe, sendo que a responsabilidade por essa “asneira” é do próprio aluno. Por este prisma, o *saber* a ensinar é visto como um produto acabado, e o erro representa algo que não está de acordo com esse saber.

Como o dever do professor é ensinar e o do aluno aprender, o erro revela neste quadro a sua não aprendizagem, explicado por razões que se prendem com aspetos da personalidade do próprio aluno, relativas à esfera do interesse e/ou da atenção. (Pinto& Santos, 2006, p. 83)

Nesta forma de encarar o ensino e aprendizagem da Matemática, o erro assume sobretudo uma *função contabilística* (Santos, 2002) no campo da avaliação sumativa, servindo apenas para que, na correção da sua resposta, seja descontada ao aluno uma certa cotação por cada erro cometido.

Pinto e Santos (2006) apresentam também uma outra perspectiva de erro – *o erro enquanto sintoma*. Neste sentido, o erro é visto como revelador de algo que o aluno não aprendeu e que é imperioso agir pedagogicamente no sentido de remediar a falta da aquisição desse conhecimento. A causa do erro pode não ser exclusivamente da responsabilidade do aluno, mas poderão existir outras causas como, por exemplo, o seu contexto familiar.

Atrevo-me a dizer, com base na minha experiência profissional, que muitas vezes é esta a perspectiva que se tem do erro nas nossas escolas. Com frequência, quando as produções escritas dos alunos evidenciam determinados erros, o professor e/ou a escola resolvem este problema através da atribuição de um apoio pedagógico acrescido ao aluno. Neste apoio, um professor trabalhará com o aluno, os conteúdos não adquiridos, com a vantagem que o estará a fazer com um menor número de alunos. São assim encontrados processos normativos de tratamento, que muitas das vezes não são eficazes:

Não é uma questão de trabalhar mais do mesmo de forma individual nos mesmos contextos porque isso é a reprodução do ensino marginal, mas dar antes ao aluno a possibilidade de trabalhar em novas situações de maneira diferente, favorecendo a reconstrução de um novo significado para os saberes do aluno. (Pinto & Santos, 2006, p. 85)

A modernização dos discursos científicos e didáticos vem dar ao erro um outro sentido. (Pinto & Santos, 2006). Estes autores referem que os trabalhos de Bachellard contribuíram largamente para que o erro se libertasse da carga moral que tradicionalmente lhe estava conferida. Estes mesmos autores salientam, ainda, a ideia de Meirieu (1988) em que “o erro é inerente ao próprio ato de conhecer e naturalmente de aprender” (Pinto & Santos, 2006, p.84).

Esta perspetiva do erro enquanto fracasso vem aos poucos, dando espaço à ideia de que o erro é algo natural no processo de aprendizagem, e que pode ser transformado em algo positivo, permitindo que os alunos possam a partir dele construir um novo conhecimento. O erro torna-se assim uma “fonte rica de informação para a compreensão de uma situação. Em vez de ter uma função meramente contabilística passa a ter uma função informativa” (Santos, 2002, p. 80).

Mas como deverá o professor encarar o erro dos alunos? Quem nos garante que o erro evidencia o que o aluno não sabe? E será que, o que fez bem evidencia o que sabe? E que aprendizagem, ainda não conseguida, está subjacente ao erro cometido? Será que a podemos identificar? E se a identificarmos o que poderemos fazer para proporcionar a aprendizagem desejada?

Se pressupormos que um aluno aprende a partir da atividade que realiza e da reflexão que faz sobre essa atividade (Ponte, 2005), então o erro só será ultrapassado se for identificado pelo aluno e se o mesmo fizer uma reflexão sobre a sua ocorrência:

O objetivo é que o aluno seja ele próprio capaz de fazer a sua autocorreção, sendo para isso necessário compreender o erro para criar condições para o ultrapassar. (Hadji, 1997, in Santos, 2002, p. 80)

Quando o aluno conseguir identificar o erro e corrigi-lo acontece aprendizagem (Santos, 2002). O professor tem o difícil papel de interpretar o significado do erro, formulando hipóteses sobre o modo como o aluno pensou e tentando encontrar estratégias que permitam ao aluno superá-lo:

A orientação por parte do professor deve atender a certos aspetos, como seja, não identificar o erro, nem tão pouco corrigi-lo, mas sim questionar ou apresentar pistas de orientação da ação a desenvolver pelo aluno que o leve à identificação e correção do erro. (Santos, 2002, pp. 80-81)

Vale (2010), salienta a importância dos professores promoverem uma cultura de sala de aula na qual o erro tenha um papel formativo na aprendizagem. Esta autora destaca, também, a importância de uma cuidada seleção de tarefas que confrontem os alunos com os erros mais comuns, defendendo que, deste modo, esta forma de trabalhar pode favorecer um salto qualitativo na aprendizagem.

A concluir este capítulo gostaria de salientar que as alterações existentes na aula de Matemática são consequência de uma importante evolução nas orientações curriculares, que têm contribuído para que as nossas salas de aula de Matemática se tornem locais para uma aprendizagem com compreensão. No entanto, quero destacar a avaliação que me parece ainda não estar a acompanhar a evolução das metodologias. É urgente que todos tenhamos consciência de que a avaliação tem de ser consistente com as práticas letivas, pelo que terá, nas suas perspetivas formativa e reguladora, de estar diariamente presente no trabalho que desenvolvemos com os nossos alunos.

## Capítulo III

# CONCRETIZAÇÃO LETIVA

Promover a aprendizagem da matemática é o principal objetivo de qualquer professor desta disciplina, no entanto, parece-me que esta tarefa tem-se tornado cada vez mais difícil para o professor. Nas nossas escolas, as turmas são grandes, e cada vez se torna mais difícil trabalhar com a heterogeneidade existente. Isto não quer dizer que eu considere que seria benéfico trabalhar com turmas homogêneas. Antes pelo contrário, da minha experiência de ensino, considero que a heterogeneidade numa turma é uma característica muito positiva e permite aos alunos aprenderem mais. No entanto nós, professores, temos que encontrar estratégias que nos ajudem a melhorar o ensino e a aprendizagem nestas condições.

Atualmente, o ensino da matemática não é meramente transmissivo. À escola já não é pedido que transmita conteúdos e procedimentos matemáticos ao estilo de “receita”. A compreensão, as capacidades transversais e as conexões assumem um papel muito importante:

A escola tem justamente a função de ajudar os alunos a desenvolver as suas capacidades e de cultivar a sua disposição para usá-las mesmo que (sobretudo quando!) isso envolva algum esforço de pensamento. (Abrantes *et al.*, 1999, p. 22)

Assumimos assim, nas nossas salas de aula, um modo de ensino-aprendizagem a que chamamos, exploratório, onde não nos limitamos a ensinar aos alunos um conjunto de procedimentos, que os alunos terão que reproduzir até os aprenderem. Não se espera que nós, professores, procuremos explicar tudo, mas sim que deixemos uma parte importante desse trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos (Ponte, 2005).

Deste modo, ensinar torna-se uma tarefa ainda mais complexa. Na realidade, um ensino efetivo requer, ao professor, por um lado, um conhecimento e compreensão da matemática, do que os alunos sabem e precisam de aprender, e de diferentes estratégias

pedagógicas facilitadoras dessa aprendizagem. Por outro lado, requer ao professor a capacidade de criação de um ambiente de sala de aula desafiante e apoiado (NCTM, 2007). A compreensão da matemática e das ideias matemáticas tem um lugar de grande destaque no ensino-aprendizagem desta disciplina. E o tipo de experiências, que os professores proporcionam aos alunos, desempenha um papel muito importante na qualidade das aprendizagens. Assim:

Os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios. (NCTM, 2007, p. 21)

Hoje nós, professores, pretendemos ensinar a raciocinar, a resolver problemas, a comunicar matematicamente, a criticar, a ouvir, a relacionar,... a apreciar a matemática.

Isto é, pretendemos que os nossos alunos sejam matematicamente competentes:

Ser-se matematicamente competente na realização de uma determinada tarefa implica ter não só os conhecimentos necessários, como a capacidade de os identificar e mobilizar na situação concreta e ainda a disposição para fazê-lo efetivamente. (Abrantes *et al.*, 1999, pp. 21-22)

E esta tarefa, na minha opinião, para além de ser mais interessante do que o ensino, dito, *tradicional*, é muito mais exigente para o professor. E foi, na busca de novas estratégias que surgiu a ideia para esta experiência de ensino.

Após a realização de um teste de avaliação “tradicional”, no primeiro período letivo, eu pretendia usar “os erros” dos meus alunos, para promover a aprendizagem. Da minha experiência sei que os alunos não atribuem relevância à correção do teste que, quando é feito da forma tradicional, não parece produzir qualquer efeito positivo nas suas aprendizagens. Não basta para isso, que eu explique, o melhor que sei o “afinal como se faz” para que os alunos superem as dificuldades que evidenciaram na realização do teste. Deste modo, decidi experimentar uma estratégia diferente, pondo os alunos a trabalhar em grupo nas questões em que mostraram mais dificuldade neste momento de avaliação sumativa. E foi a partir deste trabalho, que surgiu a ideia para esta minha investigação. Assim, neste estudo pretendo usar o erro de uma forma positiva, quer para a aprendizagem dos alunos, quer para mim, que no futuro, poderei planificar o meu trabalho proporcionando uma abordagem que os tente evitar:

Quando nos colocamos numa perspectiva de avaliação reguladora, o erro não pode deixar de ser entendido como inerente ao processo de aprendizagem, como algo que acontece apenas àqueles que aprendem. (Santos, 2010, p. 62)

Durante este trabalho, o meu objetivo não é assinalar, nem corrigir, os erros cometidos pelos alunos. Pretendo, através de novas questões que proporcionar uma reflexão sobre a tarefa inicial, levando os alunos a descobri-los.

Quero ainda destacar - o *Princípio da Equidade* - um dos seis princípios para a Matemática escolar (NCTM, 2007), que considero ser um dos pilares deste meu trabalho:

A excelência da educação matemática requer equidade: expectativas elevadas e um sólido apoio a todos os alunos. (NCTM, 2007, p.12)

O que pressupõe que todos os alunos são capazes de aprender matemática e que os professores deverão manter expectativas elevadas no trabalho com todos os seus alunos. No entanto, alguns alunos poderão necessitar dum maior apoio para alcançar as expectativas elevadas (NCTM, 2007).

A terminar esta pequena introdução a este capítulo quero apenas destacar três das seis características da avaliação, referidas no PMEB (DGIDC, 2007, p. 12) por considerar que também estão na base deste trabalho que desenvolvi:

- (2) a avaliação é uma parte integrante do processo de ensino-aprendizagem;
- (4) tem predominantemente um propósito formativo;
- (5) decorre num clima de confiança em que os erros e as dificuldades dos alunos são encarados de forma natural sendo um ponto de partida para novas aprendizagens.

Neste capítulo irei apresentar a proposta pedagógica que realizei com a minha turma de 9.º ano de escolaridade, salientando as tarefas realizadas e as minhas opções metodológicas no trabalho dos alunos. Irei também descrever as “quatro aulas”<sup>2</sup> em que decorreu a atividade. A terminar o capítulo apresentarei as opções metodológicas consideradas neste estudo.

---

<sup>2</sup> Não necessariamente aulas de 90 minutos.

## Proposta Pedagógica

Neste estudo pretendo compreender de que modo, uma metodologia de trabalho em sala de aula, que promove a diferenciação pedagógica simultânea, contribui para a aprendizagem dos alunos. Para tal, elaborei um modelo de trabalho que apliquei em todas as aulas em que realizei esta experiência. Este modelo consiste em dois momentos de trabalho diferentes, aos quais chamarei, neste relatório: “1.ª fase” e “2.ª fase”.

Na 1.ª fase, os alunos trabalham individualmente na realização de uma tarefa proposta por mim. Esta tarefa ocupa uma pequena parte da aula, sendo que o seu tempo de duração varia consoante a tarefa. Seguidamente, recolho as produções dos alunos e, posteriormente, já fora da aula, analiso-as, identificando os “tipos de erro”, e procurando hipóteses explicativas das razões da sua existência.

Partindo desta análise, seleciono, adapto e/ou construo tarefas, a propor aos alunos na 2.ª fase, com o objetivo de levá-los à superação de cada uma das dificuldades detetadas na fase anterior. Este segundo momento de trabalho, ao contrário do primeiro, é realizado em grupo. Assim, numa aula seguinte, proponho aos alunos a realização da tarefa que considero adequada ao(s) seu(s) “tipo(s) de erro” e nalguns casos, entrego-lhes também as produções iniciais, individuais, para que eles as possam comparar com o trabalho desenvolvido neste segundo momento. Por fim, recolho as produções de cada grupo de trabalho e volto a analisá-las.

A seguinte figura (Figura 3.1) apresenta um esquema que pretende representar este modelo de trabalho.

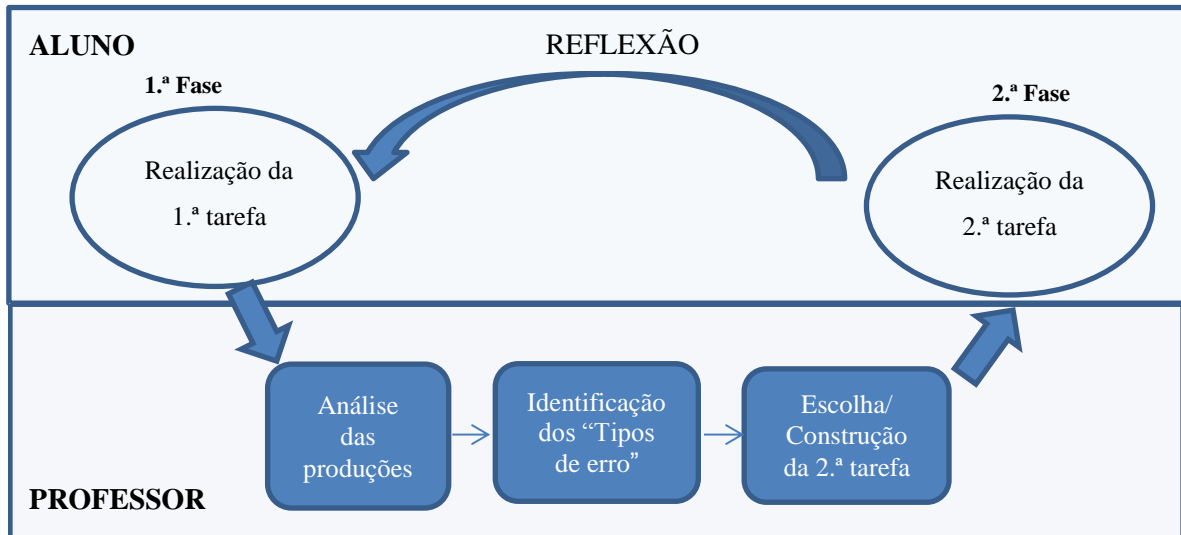


Figura 3. 1 - Modelo esquemático da estratégia implementada

Na 1.ª fase não ajudo os alunos na resolução da tarefa. Pretendo que eles a resolvam individualmente, sem que haja qualquer esclarecimento de dúvidas, nem troca de ideias entre pares. Na 2.ª fase, para além da natural partilha de ideias entre os alunos do respetivo grupo de trabalho, há um acompanhamento diferente da minha parte. Vou monitorizando o trabalho dos grupos, como habitualmente faço, observando as suas ideias e esclarecendo as dúvidas que possam existir.

Faço notar que, neste acompanhamento do trabalho dos grupos, tenho o cuidado de não validar as suas resoluções, nem diminuir o nível cognitivo das tarefas propostas. Stein e Smith (2009) salientam que, por vezes, a natureza das tarefas apresentadas aos alunos com o objetivo de estimular o pensamento em níveis elevados de exigência cognitiva é alterada quando os alunos trabalham sobre elas, na sala de aula. Tendo consciência que isto pode acontecer, tenho bastante cuidado com as intervenções que faço com os alunos nesta fase dos trabalhos. Assim, tento seguir as sugestões dadas por estas autoras para manter o nível elevado de exigência cognitiva das tarefas, das quais destaco: o “apoio ao pensamento e raciocínio do aluno” e a estimulação de “justificações, explicações e significados através de questões, comentários e feedback” (Stein & Smith, 2009, p. 27). Deste modo, quando intervenho durante o trabalho dos grupos tento, em primeiro lugar, compreender o raciocínio do(s) aluno(s) (certificando-me, se for caso disso, que todos os elementos do grupo têm a mesma dúvida). Para tal, vou colocando questões que

promovam uma reflexão sobre as suas ideias, com a intenção de fazer com que sejam eles a descobrir a(s) resposta à(s) sua(s) questão(ões).

Relativamente à metodologia seguida neste estudo, quero salientar que, tentei que o tempo de intervalo entre as duas fases fosse o menor possível. Este aspeto dificultou, em certas ocasiões o desenvolvimento do meu trabalho, pois tive que tomar decisões rápidas acerca das questões a colocar aos alunos na 2.<sup>a</sup> fase. Assim, nalguns casos, essas decisões foram melhores do que noutros.

## **As tarefas**

Ao longo do ano letivo, em que se desenvolveu este estudo, realizei várias tarefas utilizando o modelo apresentado. No entanto, para este estudo selecionei apenas quatro, que apresentarei pela ordem cronológica da sua aplicação aos alunos.

### **A preparação da 1.<sup>a</sup> fase**

As tarefas, selecionadas por mim para o primeiro momento de trabalho - a 1.<sup>a</sup> fase – enquadravam-se nos temas matemáticos que estávamos a trabalhar, e incluíam tópicos e objetivos curriculares do programa de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico. No quadro 3.1 sistematiza as minhas intenções ao proporcionar aos alunos este trabalho.

Quero salientar que, para todas as tarefas, existem tópicos matemáticos ligados aos temas da matemática e também às capacidades transversais que pretendia trabalhar. No entanto, no quadro optei por incluir a minha principal intenção ao trabalhar estas tarefas com os alunos. Por exemplo, a terceira tarefa, inclui tópicos de Geometria e de Números e Operações, que foram trabalhados em anos anteriores. Contudo, a minha intenção ao sugerir esta tarefa aos alunos era levá-los, não só a relembrar esses tópicos matemáticos, mas sobretudo trabalhar a capacidade transversal – raciocínio matemático – da qual explicitarei no quadro os tópicos que pretendia trabalhar.

Quadro 3. 1 - Tarefas propostas na 1.ª fase e seus objetivos

| Capacidades transversais                                    | Tema                | Tópicos /Subtópicos                           | Tarefa proposta                                      | Objetivo da tarefa  | Duração (minutos)  | Momento                              |
|---|---------------------|---|--|---|--|--------------------------------------|
| Resolução de problemas, Raciocínio matemático e Comunicação | Álgebra             | Funções lineares e afins                      | “A corrida da Rita e do Miguel” (Anexo 3)            | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Analisar uma função a partir das suas representações.</li> <li>• Representar gráfica e algebricamente uma função linear e uma função afim.</li> <li>• Relacionar as funções lineares e afim.</li> <li>• Relacionar a função linear com a proporcionalidade directa.</li> </ul> | 30   | Janeiro 2012                         |
|   |                     | Equações do 2.º grau a uma incógnita          | “A diagonal do quadrado” (Anexo 4)                   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolver equações do 2.º grau a uma incógnita.</li> <li>• Resolver problemas envolvendo equações</li> </ul>  | 10   | Fevereiro 2012                       |
|   | Números e Operações | Formulação e teste de conjecturas;<br>Indução | “Áreas e percentagens” (Anexo 5)                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreender, calcular e usar a noção de percentagem.</li> <li>• Formular, testar e demonstrar conjecturas.</li> </ul>  | 25   | Abril 2012                           |
|   |                     | OTD   | Noção e cálculo da Probabilidade de um acontecimento | “Retirando bolas de um saco” (Anexo 6)  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar e determinar todos os resultados possíveis quando se realiza determinada experiência aleatória</li> <li>• Calcular a probabilidade de um acontecimento pela regra de Laplace.</li> <li>• Resolver problemas envolvendo a noção de probabilidade.</li> </ul> | 10 (incluído num teste de avaliação) |

A natureza da maior parte das tarefas escolhidas para a 1.ª fase, foi a resolução de problemas, sendo que uma delas é de natureza mais aberta – “Áreas e percentagens” - tratando-se de uma atividade de exploração/investigação.

Para esta classificação das tarefas baseio-me nas ideias de Ponte (2005), onde as tarefas são classificadas com base nas duas dimensões seguintes: o *grau de desafio matemático* e o *grau de estruturação da tarefa*. Deste modo, as tarefas propostas aos alunos

apresentavam um desafio elevado e, como já referi, uma era mais aberta do que as restantes.

Mais uma vez, esta escolha da natureza das tarefas foi intencional. Optei apenas pela resolução de problemas e por tarefas de investigação, em vez de exercícios, porque com base nas produções escritas dos alunos conseguiria proporcionar um trabalho mais significativo na 2.<sup>a</sup> fase. Saliento aqui que os exercícios, por serem tarefas fechadas, em geral não são geradores de discussão entre os alunos nem potencializam o surgimento de diversas estratégias de resolução. Deste modo, não me parecem ser os mais adequados a esta metodologia de trabalho, uma vez que, na 2.<sup>a</sup> fase os alunos irão trabalhar em grupo.

### **A preparação da 2.<sup>a</sup> fase**

Após o primeiro momento de trabalho individual, recolhi as produções dos alunos e analisei-as com o objetivo de preparar a 2.<sup>a</sup> fase. Nesta etapa do trabalho, o objetivo das novas tarefas a proporcionar aos alunos, poderão não ser os mesmos que eu tinha definido para a 1.<sup>a</sup> fase, uma vez que irão ser centrados nas dificuldades evidenciadas pelos alunos.

Mais uma vez, a resolução de problemas volta a ser o tipo de tarefas proposto nesta 2.<sup>a</sup> fase. Na realidade, tentei conceber questões que, para cada, aluno constituíssem um problema:

A questão fundamental é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato para a resolver. Caso conheça esse processo e seja capaz de o usar, a questão será um exercício. Caso contrário, a questão será antes um problema. (Ponte, 2005, p. 4)

Na realidade, nas diferentes tarefas que coloquei aos alunos, há certas questões que se fossem colocadas a outro(s) grupo(s) de trabalho, não constituiriam um desafio, tornando-se meros exercícios de aplicação de certos conhecimentos.

Uma vez que pretendo usá-los para proporcionar novas aprendizagens, os erros cometidos pelos alunos na 1.<sup>a</sup> fase do trabalho, têm uma importância crucial na preparação desta 2.<sup>a</sup> fase. A minha ideia não era identificar os erros, nem tão pouco

corrigi-los, mas sim questionar os alunos de modo a proporcionar-lhes pistas e momentos de reflexão que os levassem a descobri-los, em conjunto com os colegas do grupo, e, assim, a encontrarem uma forma de superá-los.

Para que isto seja possível, o professor tem um papel extremamente importante, ao selecionar ou construir, para esta 2.<sup>a</sup> fase, tarefas adequadas à consecução deste objetivo. É assim, desafiado a encontrar “boas questões” a colocar aos alunos que os levem a refletir sobre o trabalho desenvolvido.

Ao longo desta experiência, elaborei ou selecionei tarefas que, na altura, considerei serem adequadas a esta 2.<sup>a</sup> fase. Para criar as questões a incluir nestas tarefas, fui buscar inspiração ao tipo de questões que costumo colocar aos alunos, em sala de aula, quando discutimos uma tarefa, ou quando faço a monitorização do trabalho dos grupos. Umas, talvez tenham sido mais adequadas do que outras, mas todas foram baseadas na minha interpretação dos raciocínios dos alunos, e das dificuldades, que no momento detetei.

Saliento aqui, que nem sempre existiram “erros” na realização das tarefas da 1.<sup>a</sup> fase. Por vezes, na 2.<sup>a</sup> fase, apenas pretendi que os alunos melhorassem a sua comunicação matemática. Noutros casos, selecionei uma nova tarefa que propus a esses alunos, relacionada com o tema, mas que de certo modo fosse um prolongamento do trabalho inicialmente desenvolvido.

## **A metodologia de trabalho**

Como referi anteriormente, a primeira tarefa foi realizada individualmente pelos alunos, uma vez que eu pretendia aceder aos conhecimentos e ao raciocínio de cada aluno, em particular. Interessava-me por isso que, nesta fase, não houvesse troca de ideias entre os alunos da turma, para que eu pudesse compreender as dificuldades específicas de cada aluno. Optei pelo trabalho em grupo, na 2.<sup>a</sup> fase, porque considero que a realização das tarefas em conjunto proporcionam momentos de discussão, de partilha de ideias e de reflexão, contribuindo de forma positiva para a aprendizagem. Para além disso,

trabalhar em pequeno grupo permite aos alunos expor as suas ideias, ouvir os seus colegas, colocar questões, discutir estratégias e soluções, argumentar e criticar outros argumentos. Em pequeno grupo, torna-se mais fácil arriscar os seus pontos de vista, avançar com as suas descobertas e exprimir o seu pensamento. (Ponte, & Serrazina, 2000, p. 23)

### **A constituição dos grupos**

Os alunos da turma estão habituados a trabalhar em grupo. No entanto, por questões práticas, e para não demorar muito tempo com a organização dos grupos durante as aulas, normalmente a minha estratégia costuma ser pedir aos alunos, que estão à frente, se voltem para trás para, assim, trabalharem com os colegas que estão geograficamente mais próximos. Costumo só verificar se os grupos constituídos deste modo são heterogéneos, o que costuma acontecer.

Decidi constituir, sempre que possível, grupos de três ou quatro alunos, exceto nos casos em que apenas dois alunos cometeram o mesmo “tipo” de erro. A escolha deste número de alunos prendeu-se com a minha experiência profissional. Ao longo destes anos, e após várias experiências diferentes, tem sido este o número de alunos que me parece ser o mais adequado a esta forma de trabalhar. Abrantes (1994) sugere que:

Na organização dos grupos de trabalho, o professor tem que lidar com questões como a dimensão, o processo de constituição, a composição e a estabilidade dos grupos. Ao refletir sobre estas questões, deve considerar aspetos como a idade e a experiência dos alunos, o tipo de atividade e os objetivos do trabalho de grupo. (Abrantes, 1994, p. 170)

Nas tarefas que envolveram tecnologias, como foi o caso da 2.<sup>a</sup> fase da tarefa - Diagonal de um quadrado - em que alguns grupos usaram o software, *Geogebra*, formei grupos com apenas de três alunos. Na minha experiência de trabalho com computadores, neste caso portáteis, tenho observado que 4 alunos por grupo já é um número excessivo num trabalho com estas características. Um dos quatro alunos acaba por ficar geograficamente longe do computador, o que muitas vezes, faz com que se alheie do trabalho do grupo. E, tendo em conta que, muitos dos alunos estarão possivelmente a trabalhar com estes colegas pela primeira vez, poderá haver uma probabilidade maior desta dificuldade surgir, assim, optei por constituir grupos de três alunos.

Nos casos em que apenas um aluno cometeu certo erro, tentei juntá-lo com outro, cujo erro não fosse muito diferente. Preferi fazê-lo, apesar de alterar um pouco as condições dos grupos de trabalho definidas neste estudo, porque não me pareceu produtivo ter, na 2.<sup>a</sup> fase, alunos a trabalhar individualmente

Questionei-me se grupos construídos por tipologia de erro seriam homogêneos. Esta questão preocupou-me inicialmente quando defini o trabalho que iria desenvolver. Isto porque, como já referi anteriormente, da experiência que tenho tido com alunos, ao longo dos meus anos de ensino, considero que os grupos de trabalho devem ser heterogêneos. De facto, quando há uma efetiva colaboração entre os alunos, esta forma de trabalho conduz a momentos significativos para a aprendizagem:

Ajudar os colegas pode ser útil aos melhores alunos, ao permitir-lhes observar processos conhecidos e refletir sobre eles a um nível superior. Para isso, é preciso que a ajuda não se limite a dar informações mas envolva explicação. A ajuda pode também beneficiar os alunos com dificuldades desde que estes reconheçam a sua necessidade e tenham oportunidade de usar, de facto, as explicações recebidas. (Abrantes, 1994, pp. 169-170)

No entanto, bastou realizar a primeira experiência/aula deste tipo para verificar que, apesar do tipo de erro ser o mesmo, os alunos que o cometem têm a maior parte das vezes níveis diferentes de desempenho em Matemática. E, como consequência, os grupos formados para a 2.<sup>a</sup> fase são heterógenos no seu geral, tendo em comum um certo tipo de dificuldade. De qualquer modo, sempre que o número de alunos que tinha cometido determinado erro, me permitisse formar mais do que um grupo, eu baseando-me no conhecimento que tenho dos alunos, constituía-os de modo a que fossem o mais heterogêneos possível.

## **A Experiência de ensino-aprendizagem**

Como referi anteriormente, neste relatório apresento o trabalho desenvolvido pelos alunos em quatro situações de ensino-aprendizagem com as características anteriormente apresentadas. A opção pela sequência da apresentação das tarefas foi simplesmente cronológica.

Neste relato, e posterior análise, irei sobretudo debruçar-me sobre o que aconteceu na 1.<sup>a</sup> e na 2.<sup>a</sup> fase. No entanto, as aulas em que realizei estas tarefas tiveram outros momentos. Por exemplo, as tarefas foram discutidas após a segunda produção dos alunos, umas, na mesma aula, outras numa aula posterior, pois eu queria fazer uma análise mais profunda das suas produções, durante a 2.<sup>a</sup> fase. No entanto, nem sempre apresentarei dados explícitos relativamente a este momento, uma vez que este estudo centra-se sobretudo no modelo das duas fases, apresentado anteriormente.

### **Tarefa I - “ A corrida da Rita e do Miguel”**

Na primeira fase, os alunos realizaram, individualmente, a tarefa - A corrida da Rita e do Miguel (Anexo 3) - sobre o tema das funções afim e linear, adaptada da Brochura da Álgebra no ensino básico (Ponte *et al.*, 2009). Nesta tarefa, que relaciona a linguagem natural com a representação algébrica, aparece também a representação gráfica de duas funções, correspondentes às distâncias percorridas pelo Miguel e pela Rita. A primeira, uma função linear que traduz uma situação de proporcionalidade direta e a segunda, uma função afim não linear. Assim, partindo da representação gráfica, num contexto real, de duas funções, os alunos vão responder a um conjunto de questões sobre ambas e sobre as relações existentes entre elas.

A primeira alínea desta tarefa pode ser respondida, apenas, pela observação dos gráficos das funções. As alíneas b) e c) proporcionarão um problema aos alunos. Para encontrar a distância percorrida pela Rita e pelo Miguel, ao fim de 50 segundos, (a imagem do valor 50 através das duas funções), os alunos se recorrerem apenas à observação do gráfico, terão dificuldades em encontrar o valor exato destas distâncias. Este facto

poderá sugerir aos alunos a ideia de recorrerem às informações dadas em linguagem natural para resolver esta questão. O mesmo acontecerá ao tentarem descobrir o tempo que a Rita demorou a percorrer os 1400m (descobrir o objeto cuja imagem é o 1400).

O enunciado desta tarefa apresenta questões de linguagem que permitem duas interpretações diferentes da situação, nomeadamente na interpretação do significado de distância percorrida. De facto, ao observarmos o gráfico, atendendo às suas dimensões, vemos que, no instante inicial, a Rita já tinha percorrido 200m. No entanto, em linguagem natural, podemos dizer que no instante inicial a Rita ainda não percorreu nenhuma distância, pois a corrida ainda não se tinha iniciado. Este aspeto poderá ter estado na base de algumas das dificuldades manifestadas pelos alunos.

Nesta tarefa não é pedida uma expressão algébrica para cada uma destas duas funções, no entanto, eu pretendia fazê-lo na discussão da tarefa.

### A 1.<sup>a</sup> fase e a preparação da 2.<sup>a</sup>

O seguinte quadro apresenta os tipos de erros que eu detetei nas produções individuais (1.<sup>a</sup> fase). Alguns são devido a uma ineficaz comunicação das ideias, pois parece-me que os alunos pensaram de modo correto.

Quadro 3. 2 – Tipos de erros ocorridos na tarefa inicial

| Tipo de erro | Característica do “erro”  |
|--------------|---|
| I            | Na alínea a) não justificam corretamente o fato do Miguel ser o vencedor da corrida.  |
| II           | Estes alunos responderam às questões b) e c) fazendo estimativas a partir da observação do gráfico. Não tiveram em conta os dados sobre a velocidade que constavam do enunciado |
| III          | Estes alunos não tiveram em conta que a Rita no início da corrida já tinha percorrido os 200m.  |

Com base nas produções individuais dos alunos, e nos tipos de erros apresentados no quadro anterior, elaborei quatro tarefas (Anexos 3A, 3B, 3C, 3D). Estas tarefas não são completamente distintas, e foram propostas aos alunos na 2.<sup>a</sup> fase.

Assim, organizei os alunos segundo os “tipos de erros” cometidos e atribuí-lhes a tarefa que considerei mais adequada a esse erro. Neste segundo momento de trabalho distribuí a cada grupo não só o enunciado da tarefa que lhe atribuí, mas também, a primeira tarefa que realizaram. Isto porque, em alguns casos, pretendia que eles comparassem as suas resoluções.

O seguinte quadro apresenta a distribuição dos alunos da turma na 2.ª fase dos trabalhos mediante o(s) tipo(s) de erros cometidos na 1.ª fase.

Quadro 3. 3 – Distribuição dos alunos que cometeram “erros” do mesmo tipo pelas tarefas da 2.ª fase

| 1.ª Fase     |                | 2.ª Fase     |                        |        |
|--------------|----------------|--------------|------------------------|--------|
| Nº de alunos | “Tipo de erro” | Nº de grupos | Nº de alunos por grupo | Tarefa |
| 12           | I e II         | 3            | 4                      | A      |
| 4            | III            | 1            | 4                      | B      |
| 9            | I e III        | 3            | 3                      | C      |
| 2            | I              | 1            | 2                      | D      |

❖ **Alunos que efetuaram erros do tipo I na tarefa inicial (Tarefas A, C e D)**

Apenas quatro alunos da turma não efetuaram este “erro”. As duas primeiras questões das tarefas A, C e D têm como objetivo proporcionar aos alunos uma reflexão sobre a resposta que deram na alínea a) da tarefa inicial.

No enunciado da tarefa é referido que o Miguel disse à Rita que a deixaria partir alguns metros à sua frente, afirmando que, mesmo assim, conseguiria vencer. Na alínea a) pergunta-se se o Miguel tem razão e pede-se aos alunos para o justificarem. Perguntando ainda quem é o vencedor.

Estes alunos, na tarefa inicial, à questão “Achas que o Miguel tem razão? Porquê? Quem sai vencedor?”, deram respostas do tipo:

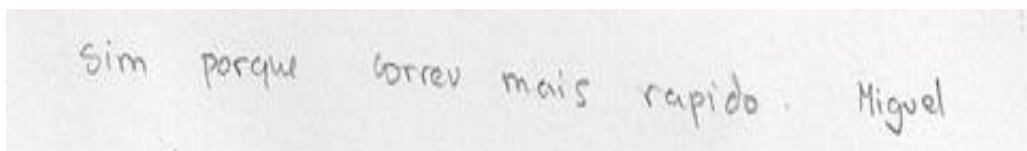


Figura 3. 2 - Resolução do Paulo

Figura 3. 3 – Resolução do Raúl

Figura 3. 4 - Resolução da Marta

Penso que os alunos não tiveram nenhuma dificuldade em concluir, partindo da observação do gráfico, que o Miguel era o vencedor da corrida. No entanto, a justificação que dão é que parece não ser a mais adequada. Em qualquer uma destas resoluções, olhando para as justificações dadas, não temos a certeza que a Rita não venceria a corrida. Mesmo correndo mais rápido do que a Rita, o Miguel poderia perder a corrida se o avanço dado a esta fosse suficientemente grande. Não me parece que o raciocínio que os alunos fizeram esteja claro nas respostas que deram.

Com o objetivo de os fazer refletir, em conjunto, sobre a resposta que deram, resolvi colocar-lhes as duas questões seguintes:

1. *No final de uma corrida de qualquer tipo (atletismo, ciclismo, automobilismo,...) como é que se sabe quem é o vencedor?*

2. *Um dos alunos da turma respondeu à alínea a) da seguinte forma:*

*“Sim. Porque o Miguel vai ser mais rápido que a Rita. Quem vai ser o vencedor é o Miguel”.*

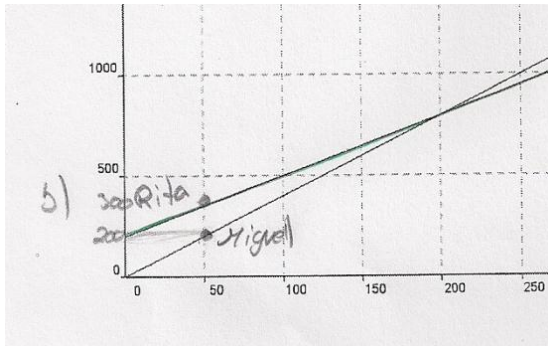
- *Acham que este aluno apresenta uma boa justificação para o fato do Miguel ter ganho a corrida? Porquê?*
- *Qual seria, na vossa opinião, a resposta mais completa?*

Figura 3. 5 – Excerto da tarefa A,C e D

#### ❖ **Alunos que efetuaram erros do tipo II na tarefa inicial (Tarefas A)**

Os três grupos que cometeram este tipo de erro, responderam às questões b) e c) fazendo estimativas a partir da observação do gráfico. Não tiveram em conta os dados sobre a velocidade que constavam no enunciado. Na maior parte das resoluções os

alunos limitam-se a indicar os valores correspondentes às distâncias percorridas pela Rita e pelo Miguel, mas não explicitam como pensaram, com a exceção do Ronaldo (Figura 3.8).



b) Ao fim de 50 segundos que distância percorreu o Miguel? E a Rita? Apresenta o teu raciocínio. o Miguel percorre 200 m e a Rita percorre 300 m.

Figura 3. 6 - Resolução do Raúl

b) Ao fim de 50 segundos que distância percorreu o Miguel? E a Rita? Apresenta o teu raciocínio. Miguel - 100M Rita - 200M

Figura 3. 7 - Resolução do Simão

b) Ao fim de 50 segundos que distância percorreu o Miguel? E a Rita? Apresenta o teu raciocínio. O Miguel PERCORRE CERCA de 200 metros e a RITA 300 metros. O MEU RACIOCÍNIO FOI A OBSERVAÇÃO do gráfico.

Figura 3. 8 - Resolução do Ronaldo

Com base nas respostas dadas pelos alunos da turma construí uma questão que coloquei nesta tarefa A (Figura 3.9) e à qual estes três grupos responderam. Com a sua resolução pretendia que os alunos percebessem que tinham efetuado uma estimativa do valor das distâncias percorridas.

3. Na resolução da questão b) alguns dos alunos da turma responderam:

“Em 50 segundos:

- O Miguel percorre 200m e a Rita 300m;
- O Miguel percorre 100m e a Rita 203m;
- O Miguel percorre 125m e a Rita 325m;
- O Miguel percorre 150m e a Rita 500m.”

Na vossa opinião, o que levou a que vários alunos da turma obtivessem resultados diferentes? Serão todas respostas possíveis, ou algum destes valores é notoriamente incorrecto? Porquê?

Figura 3. 9 – Questão colocada na tarefa A

### ❖ Alunos que efetuaram erros do tipo III na tarefa inicial (Tarefas B e C)

Há quatro grupos formados por alunos que efetuaram este tipo de erro, um realizou a tarefa B e os outros três, a tarefa C.

Estes alunos não tiveram em conta que a Rita, no início da corrida, já tinha percorrido os 200m. Como referi anteriormente, a questão de linguagem, existente neste texto entre a variável dependente representada no gráfico (distância percorrida), e a ideia intuitiva de “distância percorrida”, influenciam a compreensão da questão. Estes treze alunos deram, na primeira tarefa, respostas do tipo:

b) Ao fim de 50 segundos que distância percorreu o Miguel? E a Rita? Apresenta o teu raciocínio.

Miguel  $\begin{array}{r} 1 \text{ — } 4 \\ 50 \text{ — } x \end{array}$   $\frac{50 \times 4}{7} = 200 \text{ m}$

R: Ao fim de 50 segundos o Miguel percorreu 200m.

Rita  $\begin{array}{r} 1 \text{ — } 3 \\ 50 \text{ — } x \end{array}$   $\frac{50 \times 3}{7} = 150 \text{ m}$

R: Ao fim de 50 segundos a Rita percorreu 150m.

Figura 3. 10 - Resolução do Savio

E foi exatamente esta resposta à questão que incluí na tarefa B (Anexo 3B) e que, com base nela coloquei algumas questões aos alunos, com o objetivo de fazê-los refletir sobre os valores que obtiveram e o seu significado no contexto deste problema:

*Com base nesta resolução, respondam às questões seguintes:*

- *Ao fim de 50 segundos qual foi a distância percorrida pelo Miguel? E pela Rita?*
- *Quem vai à frente da corrida? Porquê?*
- *Quanto falta à Rita e ao Miguel para terminarem a corrida?*
- *Comparem estas vossas respostas com o gráfico apresentado na ficha de trabalho. O que podem concluir?*

Figura 3. 11- Excerto da tarefa B

Seguidamente, na tarefa B, pedi aos alunos que resolvessem a questão b) da proposta de trabalho inicial. Na última questão das tarefas B, C e D pretendi que os alunos, agora em grupo, fossem um pouco mais longe e encontrassem uma expressão algébrica que traduzisse a relação entre o tempo e a distância percorrida para o caso do Miguel e da Rita.

Após a 2.<sup>a</sup> fase, e em grande grupo (grupo-turma), discutimos a tarefa inicial (1.<sup>a</sup> fase) tendo-se sintetizado as ideias principais que emergiram da discussão, bem como, as conexões entre as diferentes representações.

## **Tarefa II - A diagonal de um quadrado**

Este problema foi colocado aos alunos no âmbito do trabalho com as equações do 2.<sup>o</sup> grau (Anexo 4). Foi retirado da 4.<sup>a</sup> tarefa, da sequência de tarefas “Equações do 2.<sup>o</sup> grau a uma incógnita”, para o 9.<sup>o</sup> ano disponibilizada no sítio da DGIDC (2009).

Com esta tarefa pretendia promover a resolução de problemas, envolvendo o tópico das equações do 2.<sup>o</sup> grau, estabelecendo conexões com tópicos trabalhados anteriormente,

nos temas da Geometria e dos Números, nomeadamente, o Teorema de Pitágoras e as noções de área e de perímetro.

À semelhança das restantes tarefas desta minha experiência de ensino, este problema foi realizado individualmente na sala de aula. A proposta de trabalho não continha só este problema, no entanto, foi este que, após a recolha das produções dos alunos decidi incluir no conjunto de tarefas desta experiência. Durante esta atividade não esclareci qualquer dúvida aos alunos pelo que eles tiveram que resolver o problema sozinhos e se tiveram dúvidas, tiveram que tomar decisões e implementar a estratégia por si escolhida.

### 1.ª fase e preparação da 2.ª fase

Na primeira fase apenas um aluno resolveu corretamente o problema, tendo todos os outros, cometido um ou mais erros na sua resolução. Parece-me importante salientar que, apesar de ser um problema trabalhado durante o estudo do tópico das equações do 2.º grau, a grande maioria dos alunos não o usou na sua estratégia de resolução.

O seguinte quadro apresentam-nos a distribuição do “tipo de erro” cometido pelos alunos, na 1.ª fase da resolução desta tarefa.

Quadro 3. 4 – Tipo de erro cometido pelos alunos na 1.ª fase

| Tipo de erro | 1.ª Fase     |   |
|--------------|--------------|---|
|              | Nº de alunos | Característica do “erro”  |
| I            | 6            | Apenas fizeram a representação de um quadrado e desenharam a sua diagonal escrevendo também a sua medida.                 |
| II           | 9            | O comprimento do lado do quadrado é igual a metade do comprimento da diagonal.<br><i>Lado = diagonal:2</i>                |
| III          | 6            | Comprimento do lado do quadrado é igual ao comprimento da sua diagonal.<br><i>Lado = diagonal</i>                         |
| IV           | 2            | Aplicaram corretamente o Teorema de Pitágoras, mas depois erraram na utilização da noção potência: “ $C^2 = C+C$ ”        |
| V            | 1            | Resolveu a tarefa usando material de medição e desenho.   |
| VI           | 1            | Resolveu a tarefa usando um conjunto de procedimentos sem que eu tivesse conseguido encontrar alguma lógica na resolução. |
| VII          | 1            | Usou a desigualdade triangular encontrando assim várias soluções possíveis.   |

Como podemos observar da leitura deste quadro há três tipos de erro - V, VI e VII - cometidos por apenas um aluno. Este aspeto vai influenciar a metodologia usada nesta investigação uma vez que na 2.<sup>a</sup> fase não pude agrupar alunos partindo do pressuposto que tinham cometido um erro do mesmo tipo.

Ao analisar as produções dos alunos, desta 1.<sup>a</sup> fase, apercebi-me que todos os alunos conseguiram interpretar o problema, ou parte dele, uma vez que, mesmo aqueles que não o conseguiram resolver, fizeram uma representação pictórica de um quadrado, representando a sua diagonal e respetiva dimensão.

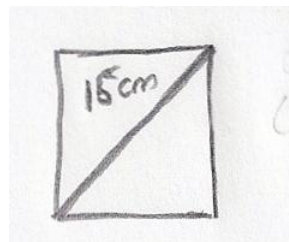


Figura 3. 12 - Resolução do Raul (erro tipo I)

Um grande grupo de alunos da turma cometeu erros no cálculo da dimensão do lado do quadrado, por desconhecimento da relação existente entre o comprimento da diagonal e o comprimento do lado do quadrado. Usaram assim, propriedades que não são válidas. Existem então dois grandes erros deste tipo (erro tipo II e erro tipo III).

O erro mais frequente cometido pelos alunos (erro tipo II) foi o assumirem a ideia de que a medida do comprimento do lado do quadrado é metade da medida do comprimento da diagonal.

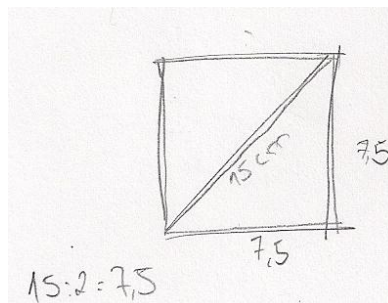


Figura 3. 13 - Resolução do Lourenço (erro tipo II)

Outros alunos assumem que a medida da diagonal do quadrado é igual à medida do comprimento do seu lado.

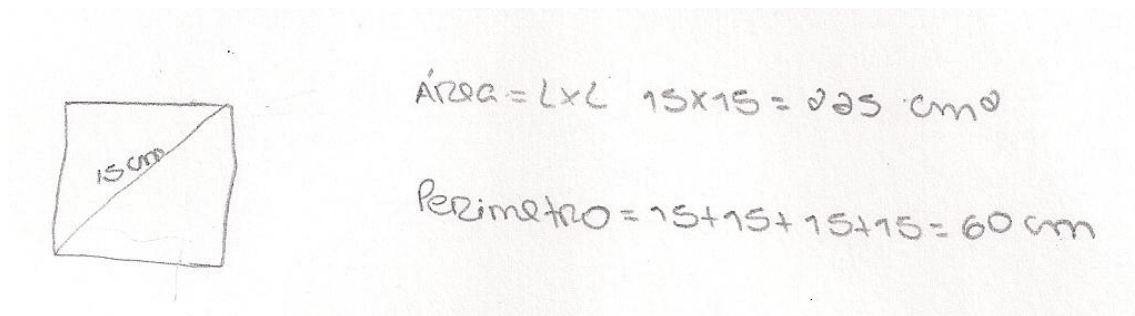


Figura 3. 14 - Resolução da Catarina (erro tipo III)

Dois alunos da turma reconheceram que o Teorema de Pitágoras era útil para a resolução do problema, e aplicaram-no para determinar a medida do lado do quadrado. No entanto, usaram erradamente o conceito de potência de um número (erro tipo IV).

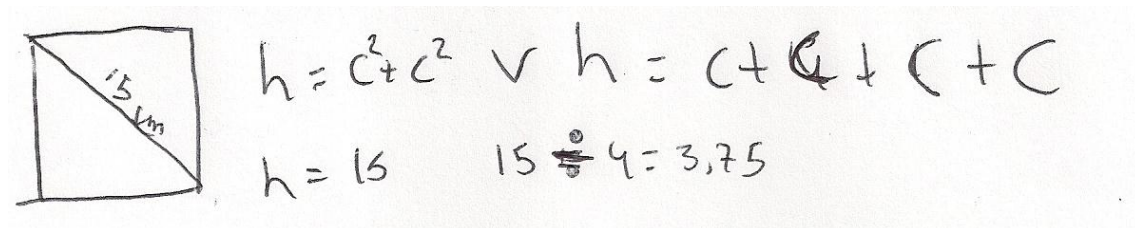


Figura 3. 15 - Resolução do Ricardo (erro tipo IV)

Assim, partindo desta análise, dividi a turma em 10 grupos e construí três tarefas, com a intenção de proporcionar aos alunos a oportunidade de realizarem as aprendizagens que ainda não tinham sido conseguidas. As tarefas A e B foram criadas por mim, com base nas produções dos alunos e no que pretendia que eles aprendessem. A tarefa C foi retirada do projecto do GAVE, *1001 itens*.

O seguinte quadro apresenta a distribuição dos alunos da turma da 2.ª fase do trabalho.

Quadro 3. 5 – Distribuição dos alunos e dos grupos pelas tarefas da 2.ª fase.

| 1.ª Fase       |                                  | 2.ª Fase     |                        |                      |
|----------------|----------------------------------|--------------|------------------------|----------------------|
| Nº de alunos   | “Tipo de erro”                   | Nº de grupos | Nº de alunos por grupo | Proposta de trabalho |
| 6              | I                                | 2            | 3                      | A                    |
| 9              | II                               | 3            | 3                      | A                    |
| 6              | III                              | 2            | 3                      | A                    |
| 2              | IV                               | 1            | 2                      | B                    |
| 1              | VI                               | 1            | 2                      | A                    |
| 1              | VII                              |              |                        |                      |
| 1 <sup>3</sup> | V                                | 1            | 2                      | C                    |
| 1              | Resolveu corretamente o problema |              |                        |                      |

Para os alunos com os erros tipo II e III, construí a tarefa A (Anexo 4A). Na primeira questão peço aos alunos que comparem duas resoluções realizadas pelos alunos da turma. Nestas duas resoluções, que escolhi, apresento exatamente os erros tipo II e III e pretendo que os alunos as comparem. Saliento que uma das resoluções é a do grupo, pelo que serão confrontados com outra, igualmente errada, que espero que os faça refletir sobre o que fizeram.

As questões 2 e 3 desta tarefa são para serem realizadas com o auxílio do computador e do *software* de geometria dinâmica *Geogebra*. Optei pelo uso de tecnologias pois considerei ser mais fácil, e mais significativo, para os alunos a exploração desta situação com este apoio. Este *software* permite-lhes, num curto espaço de tempo, fazer as experiências necessárias à formulação e verificação das suas conjeturas, constituindo assim, um importante suporte para a aprendizagem (Ponte et al, 2009).

Na primeira questão, eu pretendia que os alunos com o auxílio do *Geogebra* percebessem que nenhuma das duas relações apresentadas na tarefa anterior era válida. Na segunda, pretendia que os alunos representassem vários quadrados e respetivas diagonais, explorassem essa situação e encontrassem relações entre os valores das medidas do lado e da diagonal. Esta segunda questão está um pouco fechada, porque eu coloquei as colunas referentes ao quadrado do comprimento do lado e ao quadrado do

<sup>3</sup> Este aluno faltou à segunda aula, não trabalhando assim em grupo, como estava previsto.

comprimento da diagonal. Optei por fazê-lo, pois considerei que seria difícil de outro modo os alunos chegarem à conclusão pretendida, no tempo que tinham para a realização da tarefa.

Para os alunos que classifiquei com erro tipo I, isto é aqueles alunos que deixaram a questão quase em branco, fazendo apenas a representação da situação, apliquei também a tarefa A. Poderia ter construído uma tarefa para eles sem a primeira questão, isto é sem a questão que compara as duas resoluções com os erros I e II. No entanto, pareceu-me que seria positivo colocar estes alunos também a discutir estas resoluções, antes de investigarem o que acontecia às medidas da diagonal usando o *Geogebra*.

Aos alunos que efetuaram os erros tipo VI e VII coloquei-lhes também a tarefa A. Estes dois alunos formaram um grupo, por exclusão de partes, isto é, o erro que cometeram na primeira parte não foi do mesmo tipo, no entanto, mais ninguém fez este erro, ou um erro que eu considerasse semelhante. Portanto, como não queria que ninguém desenvolvesse uma atividade individualmente, optei por juntá-los.

Estes alunos, na 1.ª fase utilizaram duas estratégias diferentes para chegar à solução. A estratégia do César (Figura 3.16) é um conjunto de procedimentos nos quais não encontrei qualquer lógica, parecendo-me que ele apenas utilizou equações do 2.º grau porque era o tópico que se estava a trabalhar. Não me pareceu existir compreensão no que estava a fazer.

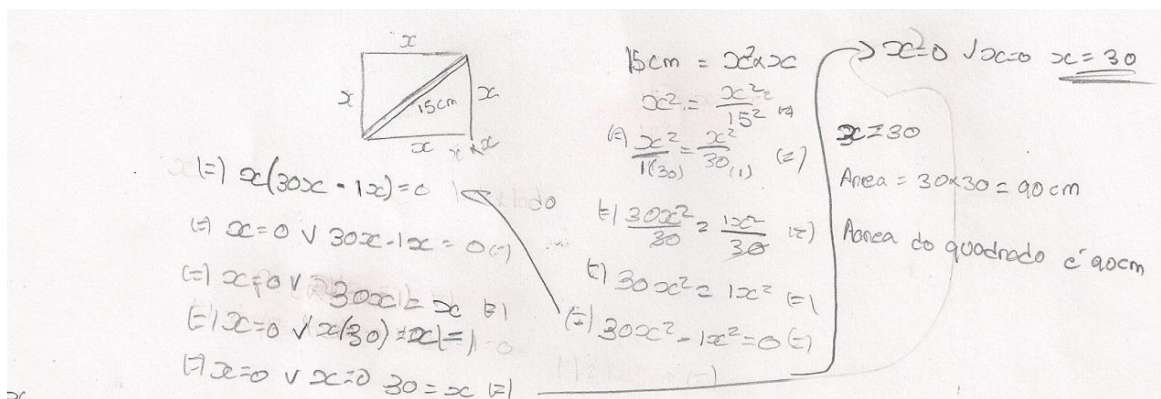


Figura 3. 16 – Resolução do César

A Rosa (Figura 3.14) utilizou a desigualdade triangular para resolver este problema, encontrando várias soluções. Só não garantiu que as diagonais, das soluções que encontrou, mediam 15 cm.

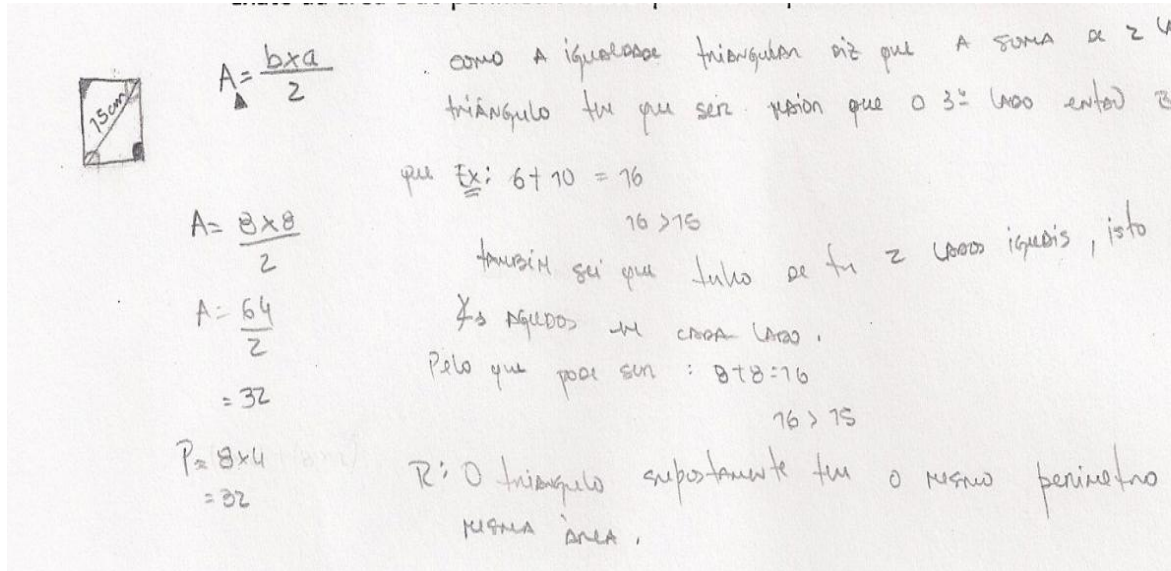


Figura 3. 17 - Resolução da Rosa

Para os alunos que efetuaram o erro tipo IV, isto é, aqueles que não usaram corretamente o conceito de potência de um número, elaborei a tarefa B (Anexo 4B). Com esta proposta pretendia que os alunos clarificassem este conceito. A tarefa está bastante orientada, mas não encontrei outra forma de os levar a relembrar este conceito, e a respectiva notação.

Para o aluno que resolveu corretamente o problema, e para o aluno que o resolveu usando instrumentos de desenho e de medida, propus a tarefa C (Anexo 4C), contendo uma tarefa selecionada do projeto *1001 itens*. Esta tarefa tem um grau de dificuldade superior, pois para além de usar os mesmos conhecimentos trabalhados na tarefa inicial, apresenta uma situação num quadrado cujo lado é representado pela letra  $a$ .

### Tarefa III – Percentagens e áreas

Esta tarefa de investigação/exploração foi colocada aos alunos no 2.º período, no entanto, não se inseriu no âmbito de um trabalho sobre um tema específico (Anexo 5). Optei por colocá-la aos meus alunos pois permitia discutir e rever alguns tópicos matemáticos trabalhados em anos anteriores e proporcionar, sobretudo, um momento para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Tratando-se de uma tarefa de exploração/investigação seria mais adequada a um trabalho em grupo, no entanto, optei por incluí-la nesta experiência de modo a observar o desempenho individual dos meus alunos na sua resolução.

Tomei conhecimento desta tarefa, numa formação para professores acompanhantes do PM I, em Abril de 2009<sup>4</sup>.

#### Preparação da 2.ª fase

O seguinte quadro apresenta-nos a distribuição do “tipo de erro” cometido pelos alunos da turma na 1.ª fase da resolução da tarefa.

Quadro 3. 6 – Tipo de erro cometido pelos alunos na 1.ª fase

| “Tipo de erro” | 1.ª Fase     |  |
|----------------|--------------|--|
|                | Nº de alunos | Caraterísticas do “tipo de erro”   |
| I              | 6            | Estes alunos ou deixaram o problema praticamente em branco ou fizeram um exemplo, mas não calcularam o 10% de cada um dos lados. |
| II             | 11           | Concluem que a área mantém-se.   |
| III            | 3            | Erram o cálculo da percentagem e/ou nas medidas do novo retângulo.   |
| IV             | 3            | Fazem um exemplo, mas não tiram conclusões.  |
| V              | 4            | Generalizam partindo de 1, 2 ou 3 exemplos.  |

Os alunos que cometeram o erro tipo I, isto é, alunos que pouco ou nada fizeram na tarefa, não parecem perceber o significado de percentagem, nem tão pouco a sabem

<sup>4</sup> Esta tarefa foi extraída do *Stockholm Institute of Education, Skolverket*.

calcular. Assim, construí a tarefa A (Anexo 5A) - tarefa adaptada do manual escolar de 6.º ano destes alunos - com o objetivo de lhes proporcionar estas aprendizagens que considero serem essenciais para qualquer cidadão dos dias de hoje.

Como podemos ver na tabela, o erro mais frequente dos alunos (erro tipo II) foi o considerar que não haveria alteração na área do retângulo. A seguinte produção, da Denise é um exemplo desta situação:

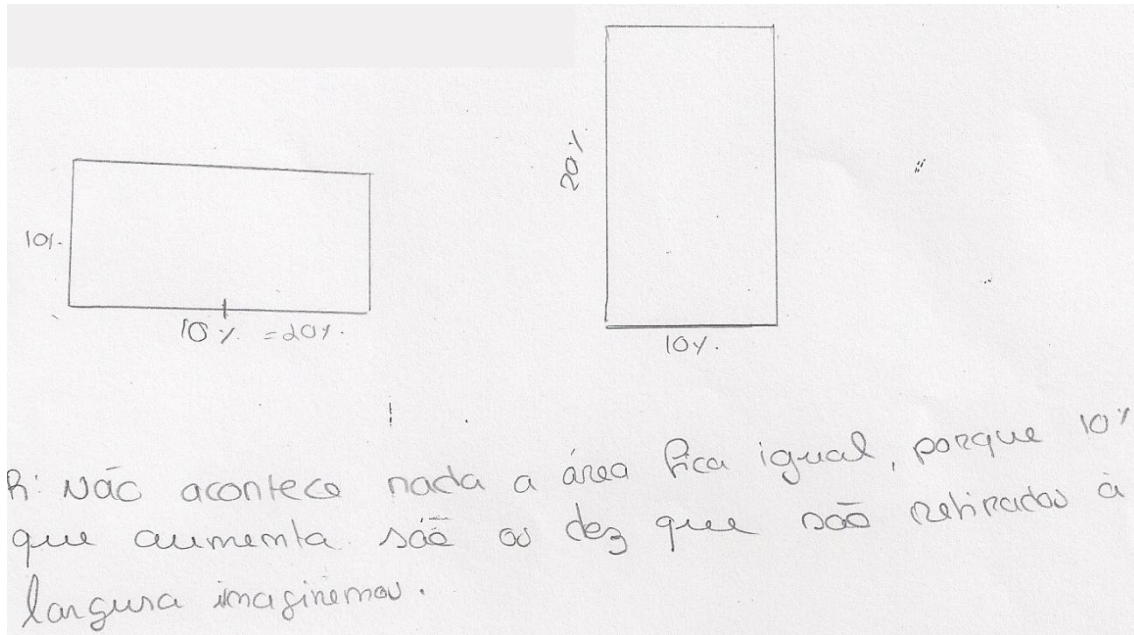


Figura 3. 18 - Resolução da Denise (erro tipo II)

Para os alunos que cometeram este tipo de erro construí a tarefa B (Anexo 5B). Esta é uma tarefa orientada, com o objetivo de levar os alunos a perceber o que acontece à área de um retângulo dado, quando se aumenta 10% ao comprimento e posteriormente se diminui 10% à largura. Na primeira questão, pretendia levar os alunos a resolver o problema, para um caso concreto, mas por etapas. Na segunda, pretendia que eles comentassem uma afirmação, levando-os a refletir sobre o significado de percentagem.

Os alunos que cometeram o erro que classifiquei de “erro tipo III” fizeram vários erros. O erro que me levou a agrupá-los foi o facto de terem calculado a percentagem, mas ao considerarem o novo retângulo usaram o valor que diminuía como sendo a medida do lado do retângulo. O Afonso e o Lourenço cometeram o erro que está explícito na

seguinte produção (Figura 3.19), a única diferença entre as suas produções é que o Lourenço não chegou a tirar nenhuma conclusão.

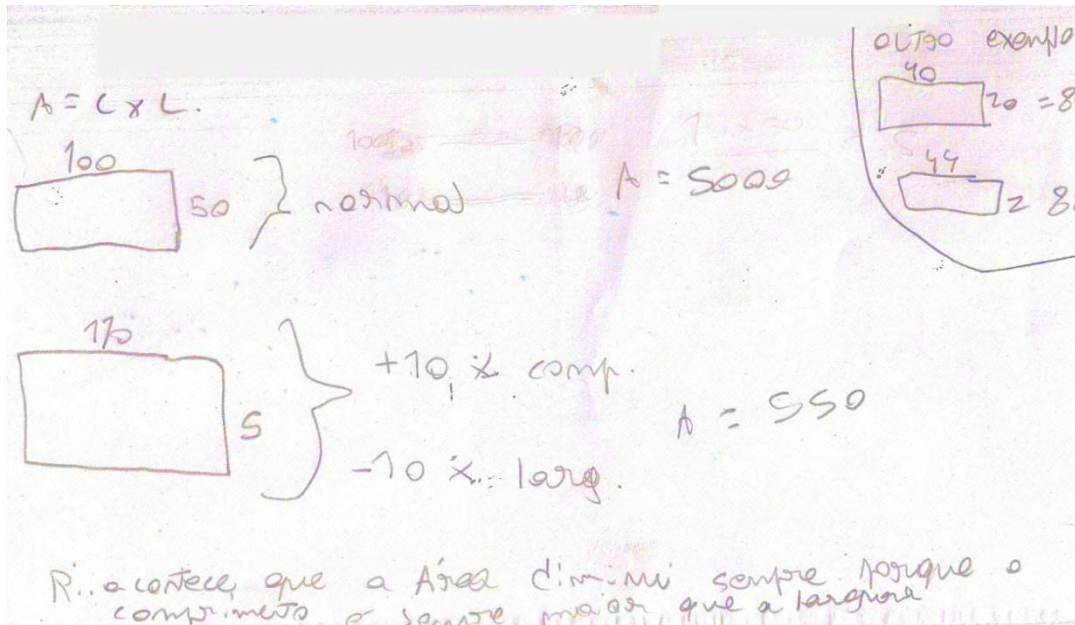


Figura 3. 19 - - Resolução do Afonso (erro tipo III )

No caso da Rosa (Figura 3.20), a outra aluna que também cometeu este mesmo erro, cometeu mais outro, relacionado com o cálculo da percentagem, em especial, com o caso em que a percentagem leva à diminuição da largura.

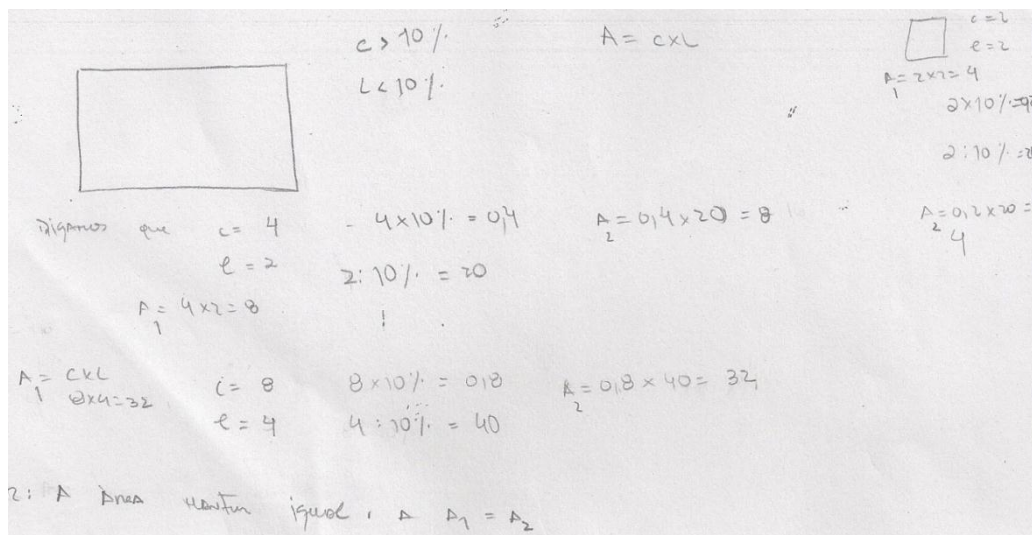


Figura 3. 20 - Resolução da Rosa (erro tipo III)

Para estes três alunos considere que a tarefa B, também seria adequada para os ajudar a superar as dificuldades apresentadas.

Três alunos da turma fizeram um erro do “tipo IV” (Figura 3.21). Como podemos observar na seguinte produção, que é um exemplo deste tipo de erro, os alunos fazem um, ou mais exemplos, mas não tiram nenhuma conclusão porque parecem não ter calculado as respectivas áreas. Para estes alunos também propus a tarefa B (Anexo 5B)

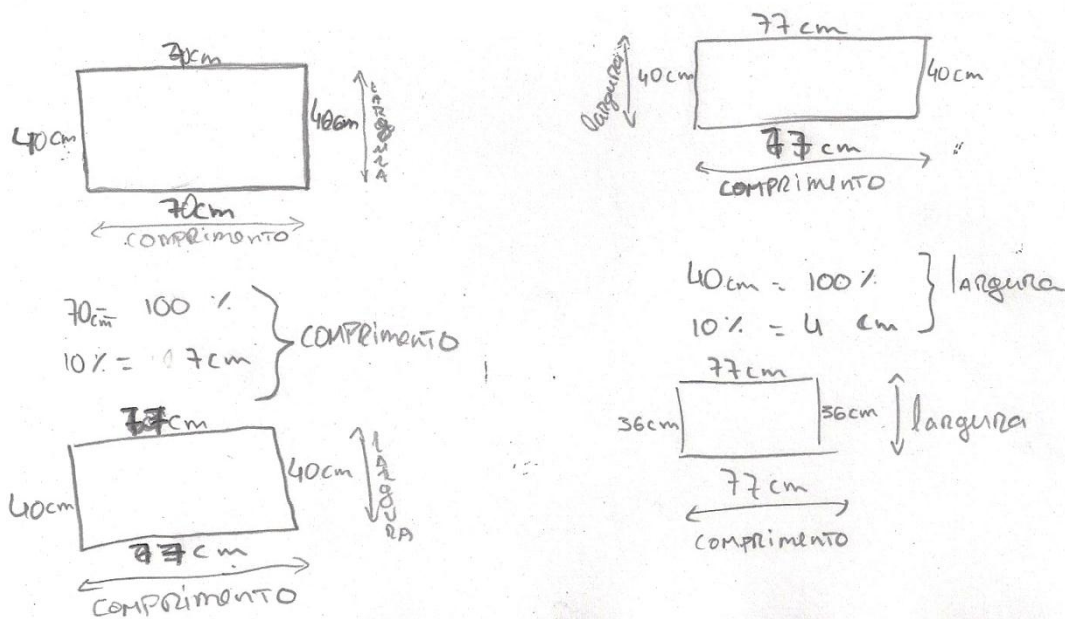


Figura 3. 21 - Resolução do Ronaldo (erro tipo IV)

Os restantes alunos da turma fizeram o erro, que na planificação desta tarefa achei que iria ser o mais frequente. Partindo de um número finito de casos concretos, os alunos generalizaram para todos os retângulos. Como está exemplificado na seguinte produção, da Rosário (Figura 3.22), onde a aluna, partindo de três exemplos generaliza para todos os retângulos. Os outros três alunos generalizam com base num, dois ou três exemplos respetivamente. Esta aluna, encontra ainda uma relação na percentagem de área de diminui.

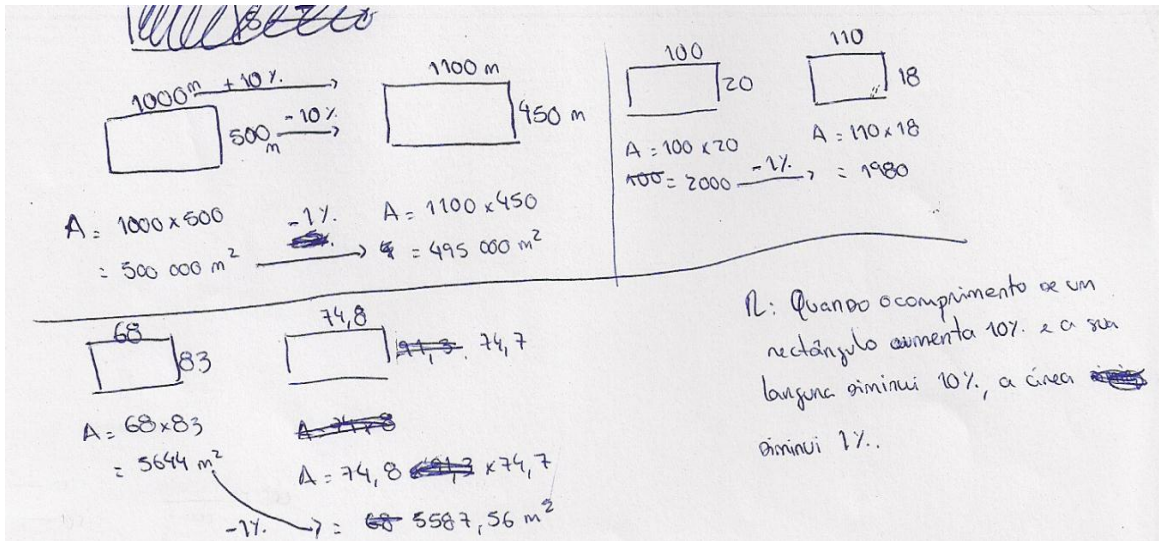


Figura 3. 22 - Resolução da Rosário (erro tipo IV)

O Caetano, que também faz três exemplos (Figura 3.23), encontra também uma relação na área que diminui. No entanto, essa relação está relacionada com a forma como escolhe as medidas dos comprimentos dos lados do retângulo. Facto que o aluno não se apercebe durante a sua resolução. Para estes alunos construí a tarefa C (Anexo 5C).

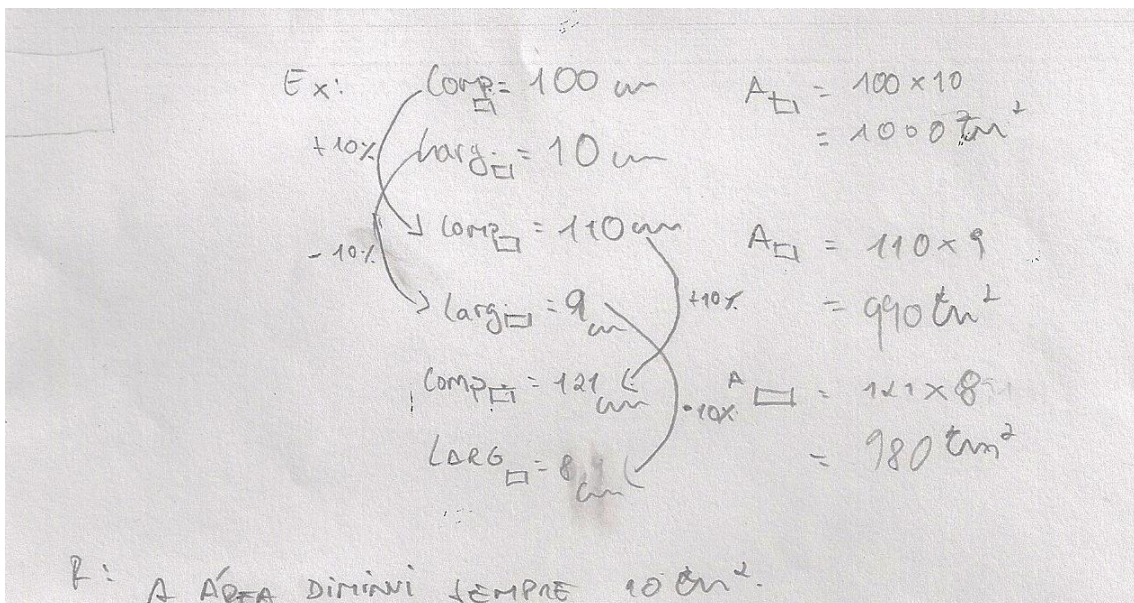


Figura 3. 23 - Resolução da Caetano (erro tipo IV)

O seguinte quadro (Quadro 3.7) apresenta a distribuição dos alunos da turma na segunda fase do trabalho. Esta fase ocupou aproximadamente 60 minutos da aula, e

como habitualmente, os alunos trabalharam, na resolução da tarefa que lhes foi distribuída, e nos grupos indicados por mim

Quadro 3. 7 - Distribuição dos alunos e dos grupos pelas tarefas da 2.<sup>a</sup> fase

| 1. <sup>a</sup> Fase |                | 2. <sup>a</sup> Fase |                        |        |
|----------------------|----------------|----------------------|------------------------|--------|
| Nº de alunos         | “Tipo de erro” | Nº de grupos         | Nº de alunos por grupo | Tarefa |
| 6                    | I              | 2                    | 3                      | A      |
| 11                   | II             | 3                    | 4+4+3                  | B      |
| 3                    | III            | 1                    | 3                      | B      |
| 3                    | IV             | 1                    | 3                      | B      |
| 4                    | V              | 1                    | 4                      | C      |

A discussão da tarefa inicial só foi realizada numa das aulas seguintes, pois eu quis analisar as produções dos alunos na segunda fase. Para a discussão, escolhi algumas resoluções da tarefa inicial, que incluíam os erros que considerei na elaboração das tarefas para a 2.<sup>a</sup> fase. As resoluções foram apresentadas por mim, com o auxílio de alunos da turma (na maior parte dos casos do próprio aluno que tinha cometido o erro) e foram discutidas em grande grupo. A generalização foi feita por mim, com a ajuda dos alunos.

### Tarefa IV - Probabilidades

Este conjunto de “duas aulas” teve características diferentes comparativamente com as restantes aulas em que desenvolvi esta experiência, isto porque, a segunda tarefa realizada pelos alunos resultou de erros cometidos por estes durante um teste de avaliação tradicional. O último teste de avaliação, realizado em maio, continha os tópicos trabalhados ao longo do ano, um dos quais – Probabilidades – tinha sido trabalhado, essencialmente no primeiro período.

Nas aulas que antecederam o teste, apenas resolvemos exercícios e problemas que suscitaram dúvidas aos alunos durante a sua preparação para o teste de avaliação. Coloquei no teste de avaliação, a seguinte questão (Figura 3.24), retirada/adaptada do primeiro teste intermédio do 9.º ano, realizado em fevereiro de 2011 (GAVE). Saliento

que fiz duas versões do teste (A e B) com o mesmo grau de dificuldade e onde praticamente apenas alterei “os números”.

- 1.** O Manuel tem, num saco, três bolas indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 3
- 1.1.** O Manuel retira uma bola do saco, regista o número da bola e repõe a bola no saco.  
O Manuel repete este procedimento doze vezes.  
A sequência 1,1,2,3,2,2,1,1,3,1,2,1 é a sequência dos números registados pelo Manuel.  
Indica a mediana deste conjunto de números.
- 1.2.** Admite agora que o Manuel retira uma bola do saco, regista o número da bola e **não** repõe a bola no saco. Em seguida, retira outra bola do saco e regista também o número desta bola.  
Qual é a probabilidade de o produto dos números que o Manuel registou ser um número par?  
Apresenta a resposta na forma de fracção.  
Mostra como chegaste à tua resposta.

Figura 3. 24 - Questões retiradas da versão A do teste de avaliação

Para esta experiência apenas nos interessa a questão 1.2, uma vez que foi essa questão que trabalhei com os alunos na segunda parte. A única diferença nesta questão, nas duas versões, é que, na versão A é pedida a probabilidade do produto das duas bolas ser par e na versão B, ser ímpar.

Apesar de saber que os alunos pouco estudaram para o teste, fiquei surpreendida, e preocupada, com os erros que manifestaram na resolução de uma questão desta natureza. No final do primeiro período já não cometiam este tipo de erros. Decidi, portanto, realizar mais um conjunto de aulas para melhorar as aprendizagens sobre este tópico.

### Preparação da 2.<sup>a</sup> fase

O seguinte quadro (Quadro 3.8) apresenta-nos a distribuição do “tipo de erro” cometido pelos alunos da turma na 1.<sup>a</sup> fase da resolução da tarefa.

Quadro 3. 8 - Tipo de erro cometido pelos alunos na 1.ª fase

| "Tipo de erro" | 1.ª Fase     |  |
|----------------|--------------|--|
|                | Nº de alunos | Caraterísticas do "tipo de erro"   |
| I              | 5            | Resolveram " corretamente" o problema, mas podem melhorar a forma como comunicam.  |
| II             | 8            | Resolveram o problema como se tratasse de um acontecimento simples.  |
| III            | 4            | Deixaram em branco ou usaram uma estratégia incompreensível  |
| IV             | 5            | Usam os dados da questão anterior (1.1). Não compreendem assim o contexto do problema.<br>Usam também a noção de probabilidade frequencista de um acontecimento. |
| V              | 4            | (Exclusão de partes)<br>Erros que mais ninguém cometeu.  |

Como podemos observar da leitura deste quadro, apenas cinco alunos da turma resolveram corretamente o problema (erro tipo I), no entanto, a forma como explicaram o seu raciocínio pode ainda ser melhorada. Por isso, elaborei a tarefa A (Anexo 6A) com objetivo de lhes proporcionar uma reflexão sobre a melhor forma de comunicar as ideias matemáticas.

Um grupo de oito alunos resolveu o problema como se tratasse de um acontecimento simples (erro tipo II). A seguinte resolução é exemplificativa deste erro.

1.7.  $N^\circ$  de casos favoráveis = 2. Existem 3 bolas, duas delas são "impaired" logo a probabilidade é de  $\frac{2}{3}$ . (bolas "impaired" 1, 3)

Figura 3. 25 - Resolução do problema do Rodrigo (erro tipo II)

A dificuldade manifestada pelos alunos quando efetuaram este erro parece-me ser resultante de não identificarem, corretamente, a experiência aleatória da situação. E, associado a esta dificuldade, não conseguirem determinar corretamente os casos possíveis nesta situação. Assim, para este grupo construí a tarefa B (Anexo 6B), onde pretendia que os alunos percebessem as diferenças entre os espaços de resultados associados a cada uma das experiências aleatórias. Posteriormente, pretendia que analisassem uma resolução de um dos alunos da turma, que cometeu este erro. Por fim,

pretendia que formulassem um problema, que pudesse ser resolvido com recurso a uma tabela de dupla entrada ou a um diagrama em árvore.

Outros alunos fizeram este mesmo erro, no entanto, a este erro ainda acrescentaram outro pois utilizaram os dados da questão 1.1 para resolverem esta segunda questão (erro tipo IV). Ou seja, estes alunos não interpretaram bem o enunciado do problema, não reconhecendo que poderiam usar a Lei de Laplace na sua resolução, e portanto, usaram a noção frequencista de probabilidade, mesmo tratando-se de um pequeno número de repetições. A seguinte produção é exemplificativa desta situação.

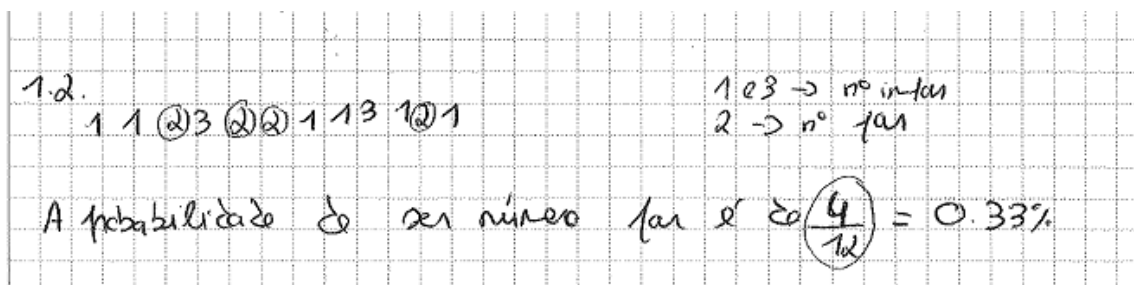


Figura 3. 26 - Resolução da Rute (erro tipo IV)

Para este “tipo de erro” elaborei a tarefa C (Anexo 6C). Para a sua realização, os alunos precisaram de um dado cúbico 8numerado de 1 a 6) e realizaram algumas experiências. Com esta tarefa pretendia que compreendessem a noção de probabilidade como uma medida do grau de possibilidade de um acontecimento se realizar. E que pode ser estimada (usando a noção frequencista) ou calculada (usando a Lei de Laplace). Pretendia ainda que percebessem que para se poder estimar o valor da probabilidade, necessitamos de fazer um número suficientemente grande de experiências.

A tarefa D (Anexo 6D) foi pensada para aqueles alunos que deixaram o problema em branco. No entanto, pareceu-me também ser adequada às duas alunas que resolveram o problema, cometendo erros que mais ninguém cometeu. Como, por exemplo, o erro cometido pela Rosa (Figura 3.27).

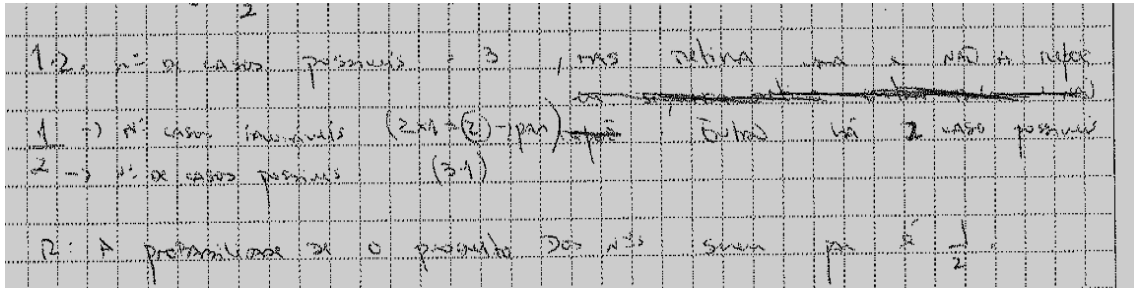


Figura 3. 27 – Resolução da Rosa (erro tipo V)

O seguinte quadro apresenta a distribuição dos alunos da turma na 2.ª fase do trabalho. Esta fase ocupou aproximadamente meio bloco da aula (45m).

Quadro 3. 9 - Distribuição dos alunos e dos grupos pelas tarefas da 2.ª fase

| 1.ª Fase     |                | 2.ª Fase     |                        |        |
|--------------|----------------|--------------|------------------------|--------|
| Nº de alunos | “Tipo de erro” | Nº de grupos | Nº de alunos por grupo | Tarefa |
| 5            | I              | 1            | 4                      | A      |
| 8            | II             | 2            | 4                      | B      |
| 2            | III            | 1            | 4                      | D      |
| 5            | IV             | 2            | 2 e 3                  | C      |
| 4            | V              | 1            | 2                      | D      |

## Metodologia de investigação

Tendo por referência o problema formulado, optei neste estudo por usar uma abordagem de investigação qualitativa. Deste modo, não foram formuladas hipóteses que se pretendessem testar mas antes questões que orientaram a investigação. Segundo Bogdan e Biklen (1994), este paradigma é caracterizado por: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; (2) os dados recolhidos são descritivos; (3) os processos são mais interessantes para o investigador do que os resultados ou produtos; (4) a análise dos dados tende a ser realizada de forma indutiva; (5) o significado é de importância vital nesta abordagem.

Estas características mostraram-se adequadas aos objetivos deste estudo. De facto, sendo eu investigadora e simultaneamente professora da turma onde foi realizada a experiência, os dados foram recolhidos durante a realização de “quatro aulas”, em que

apliquei um modelo de diferenciação pedagógica. Assim, após ter as respectivas autorizações, da Direção da escola e dos encarregados de educação dos alunos (Anexo 2), iniciei este estudo na minha turma do 9.º ano e procedi à recolha dos dados nos 2.º e 3.º períodos.

Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1994) referem três grupos de recolha de dados:

O *inquérito*, que pode tomar uma forma oral (a entrevista) ou escrita (o questionário); a *observação*, que pode assumir uma forma direta sistemática ou uma forma participante, e a *análise documental*. (p.143)

Os dados foram recolhidos através da observação de aulas e da recolha documental. A observação das aulas foi efetuada através de gravações áudio e/ou vídeo do trabalho dos grupos, completada com os meus registos, efetuados quer durante as aulas, quer imediatamente após as mesmas. A recolha documental foi efetuada através das produções dos alunos em ambas as fases, com recurso ao *Projeto Curricular de Turma*, onde acedi à caracterização familiar dos alunos e às minhas *fichas de caderneta*.

A análise dos dados foi feita em duas fases. Na primeira, fiz uma análise aula a aula, onde observei as diversas tarefas e o desempenho dos alunos em cada uma delas. Posteriormente, construí quatro categorias gerais onde incluí os erros cometidos pelos alunos, na 1.ª fase e estudei a sua evolução construindo um quadro que sintetiza as conclusões principais. Por fim, analisei o quadro e apresentei a minha interpretação desses dados.

## Capítulo IV

# ANÁLISE E REFLEXÃO

Com vista a discutir as questões formuladas neste estudo, dividi este capítulo em duas partes. Na primeira, tendo por base a fundamentação teórica que apresentei no capítulo II, analiso as quatro tarefas que realizei com a turma, apresentando os resultados obtidos, no trabalho dos alunos, durante a 2.<sup>a</sup> fase da proposta pedagógica que desenvolvi. Na segunda parte, apresento uma síntese das principais conclusões tiradas em cada uma das tarefas, bem como, as conclusões gerais desta investigação. Apresento ainda, uma reflexão pessoal sobre o trabalho realizado bem como, as implicações do mesmo, na minha prática profissional, e algumas sugestões para possíveis investigações.

### Análise das tarefas

Apresento aqui a análise do trabalho realizado pelos alunos, na 2.<sup>a</sup> fase das quatro tarefas que realizei. A forma como apresento os resultados desta da primeira tarefa – A corrida da Rita e do Miguel - difere ligeiramente das restantes. Esta diferença deve-se ao facto da tarefa inicial possuir três questões, o que não acontece com as outras tarefas que propus aos alunos.

### Tarefa I – “ A corrida da Rita e do Miguel”

- ❖ **Alunos que efetuaram erros do tipo I, isto é, alunos que na alínea a) não justificaram corretamente o fato do Miguel ser o vencedor da corrida.**

Estes alunos resolveram as tarefas A, C e D na 2.<sup>a</sup> fase (Anexos 3A, 3C e 3D respetivamente). Sete grupos de trabalho responderam a estas duas questões. Cinco

grupos deram uma resposta do tipo da apresentada na figura 4.1, onde referem que o vencedor é quem chega primeiro à meta. Dois grupos deram uma resposta do género da apresentada na figura 4.2, na qual destacam a velocidade.

1. No final de uma corrida de qualquer tipo (atletismo, ciclismo, automobilismo,...) como é que se sabe quem é o vencedor? Quem chega primeiro à meta é o vencedor da corrida.

Figura 4. 1 - Excerto da resolução do grupo (Alexandre, Caetano e Denise)

1. No final de uma corrida de qualquer tipo (atletismo, ciclismo, automobilismo,...) como é que se sabe quem é o vencedor? o vencedor de uma corrida é aquele que consegue concluir o percurso com uma maior velocidade.

Figura 4. 2 - Excerto da resolução do grupo (Afonso e César)

À questão 2, estes grupos respondem da seguinte forma: dois dos grupos referem a existência de “outros fatores” que podem interferir na vitória, como por exemplo o avanço dado à Rita (Figura 4.3); os restantes 5 grupos continuam apenas a referir-se à velocidade do Miguel (Figura 4.4).

• Açam que este aluno apresenta uma boa justificação para o fato do Miguel ter ganho a corrida? Porquê? Não. Porque a Rita podia ter ganho devido ao ter um avanço de 200 m.

Figura 4. 3 - Excerto da resolução do grupo (Alexandre, Caetano e Denise)

• Açam que este aluno apresenta uma boa justificação para o fato do Miguel ter ganho a corrida? Porquê? Não, porque o Miguel ao percorrer 4 m/s a Rita ao percorrer 3 m/s. Mas o vencedor é o Miguel.

Figura 4. 4 - Excerto da resolução do grupo (Hugo, Luísa, Raúl e Ricardo)

Quando questionados sobre qual seria a resposta mais completa a esta questão, quatro grupos alteraram a sua resposta inicial, incluindo para além do argumento do Miguel ser

mais rápido, a importância do avanço dado por este à Rita (Figura 4.5). Os outros três grupos mantêm como único argumento do Miguel ser mais rápido (Figura 4.6).

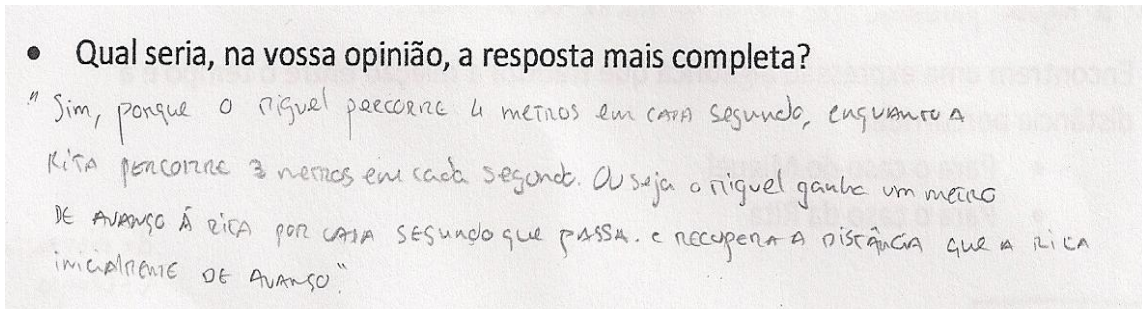


Figura 4. 5 - Excerto da resolução do grupo (Cristina, Lourenço e Rosário)

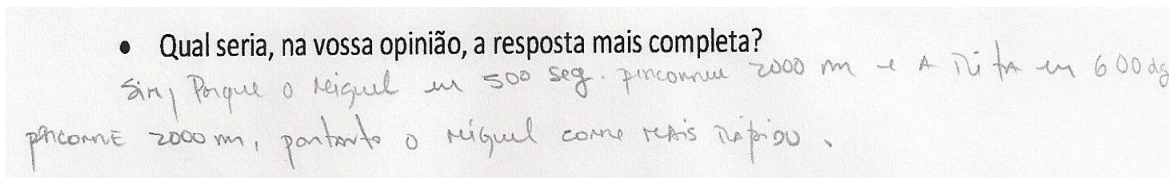


Figura 4. 6 - Excerto da resolução do grupo (Catarina, Paulo, Rosa e Simão)

É interessante salientar que, mesmo após a resposta dada à questão 1 desta 2.<sup>a</sup> fase, nenhum dos grupos usou o argumento de que, ganha quem chega primeiro à meta (aspeto que se vê claramente na observação do gráfico).

- ❖ **Alunos que efetuaram erros tipo II, isto é, alunos que responderam às questões b) e c) fazendo estimativas a partir da observação do gráfico, não tendo em conta os dados sobre a velocidade que constavam no enunciado da tarefa inicial.**

Três grupos responderam à questão 3 que se inclui na tarefa A (anexo 3A). Com a resolução desta questão eu pretendia que os alunos percebessem que tinham efetuado uma estimativa do valor da distância percorrida pela Rita e pelo Miguel.

Nos três grupos houve três tipos de respostas. As figuras 4.7, 4.8 e 4.9 são exemplificativas das mesmas.

Na vossa opinião, o que levou a que vários alunos da turma obtivessem resultados diferentes? Serão todas respostas possíveis, ou algum destes valores é notoriamente incorrecto? Porquê? É o último porque a velocidade em que a Rita ia era impossível que ao fim de 50 segundos a Rita tivesse percorrido os 500 m, ela só chegou aos 500 metros ao fim de 100 segundos.

Figura 4. 7 - Resolução do grupo (Hugo, Luísa, Raúl e Ricardo)

Na vossa opinião, o que levou a que vários alunos da turma obtivessem resultados diferentes? Serão todas respostas possíveis, ou algum destes valores é notoriamente incorrecto? Porquê? Observaram o gráfico e obtiveram um resultado já que o gráfico era de 500 metros em 500 metros. São todos possíveis, porque o gráfico não dá valor exacto.

Figura 4. 8 - Resolução do grupo (Lucas, Marta, Ronaldo e Rute)

Na vossa opinião, o que levou a que vários alunos da turma obtivessem resultados diferentes? Serão todas respostas possíveis, ou algum destes valores é notoriamente incorrecto? Porquê? A opinião da maioria dos membros do grupo é que por serem pessoas diferentes, pensamos diferente. Entrou pela interpretação do gráfico por pessoa a cada um, chegando a conclusões e respostas diferentes. A única resposta aparentemente correcta é a 1ª (Miguel = 200 m; Rita = 300 m) por isso as outras respostas estão erradas, erradas porque foram feitas "à toa" ou sem atenção.

Figura 4. 9 - Resolução do grupo (Catarina, Paulo, Rosa e Simão)

Um dos grupos apenas respondeu a uma destas questões (Figura 4.7). O facto de eu ter colocado várias perguntas na mesma questão, pode ter condicionado a resposta dada por este grupo.

Há dois grupos (Figura 4.7 e Figura 4.9) que afirmam que nem todos os valores são possíveis. O primeiro destes grupos destaca a impossibilidade dos últimos valores apresentados, que diferem bastante dos restantes, em particular os “500m” percorridos pela Rita. O último destes dois grupos, afirma mesmo que as respostas foram dadas “à

toa”, apesar de referirem que pessoas diferentes podem pensar de maneiras diferentes. Este grupo afirma também que a resposta certa é a primeira, a que foi a resposta dada na 1.ª fase por estes elementos do grupo. Para os alunos do grupo que apresenta a resolução da figura 4.9, apesar de não explicitarem que estes valores são estimativas, referem que todos eles são possíveis, porque no gráfico não se consegue ler os valores exatos.

Na questão 4 desta tarefa, pretendia que os alunos encontrassem o valor exato. Mais uma vez, nestes três grupos houve três resoluções diferentes:

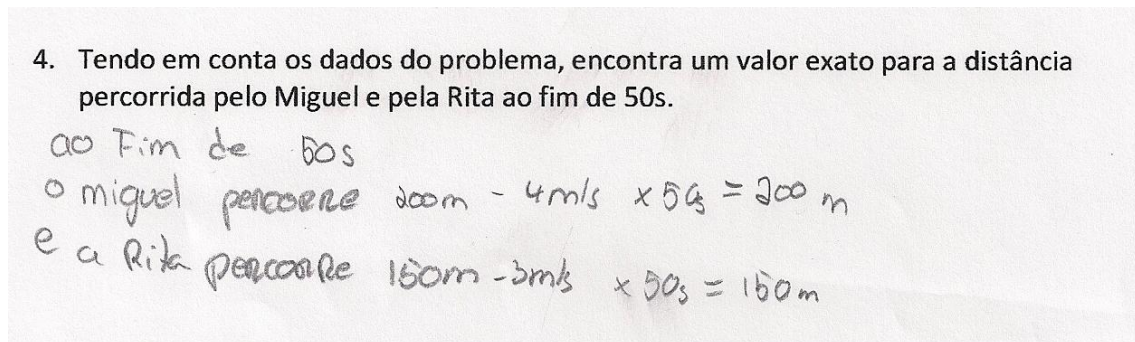


Figura 4. 10 - Resolução do grupo (Hugo, Luísa, Raúl e Ricardo)

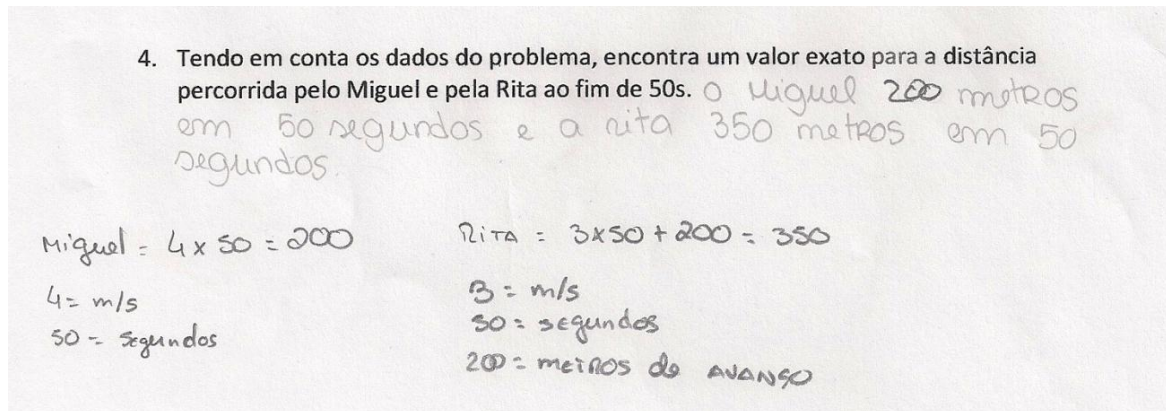


Figura 4. 11- Resolução do grupo (Lucas, Marta, Ronaldo e Rute)

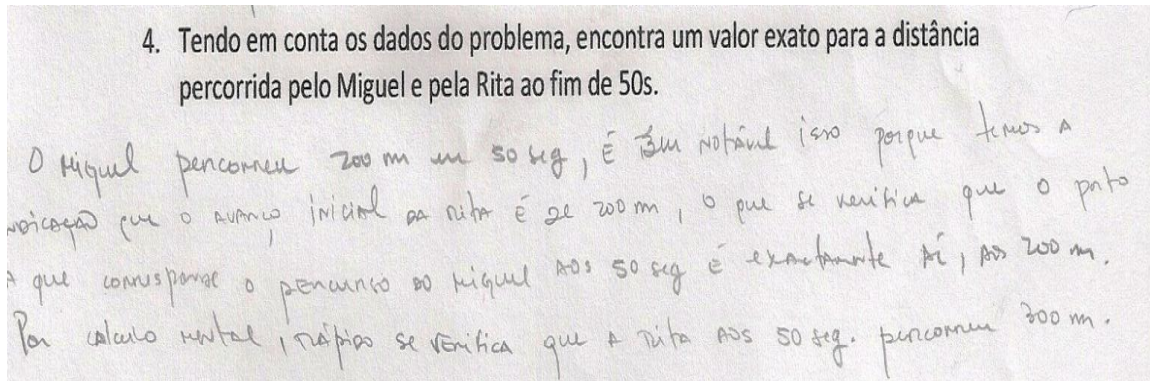


Figura 4. 12 - Resolução do grupo (Catarina, Paulo, Rosa e Simão)

Na produção do grupo da figura 4.10 vemos que os alunos calculam o valor exato, da distância percorrida, com base na velocidade da Rita e do Miguel. É interessante observar que estes alunos agora, acabam por cometer o erro tipo III, que outros seus colegas cometeram na tarefa inicial. Na resolução do grupo, apresentada na figura 4.11, os alunos já têm em atenção, para além da velocidade, a distância que a Rita já tinha percorrido inicialmente.

Na resolução do grupo, apresentada na figura 4.12, ficamos sem perceber que cálculos efetuaram, uma vez que, simplesmente, dizem que usam “cálculo mental rápido”. Nesta produção, este grupo parece manter as ideias que tinham inicialmente.

- ❖ **Alunos que efetuaram erros “tipo III” na tarefa inicial, isto é, alunos que não tiveram em conta que a Rita no início da corrida já tinha percorrido os 200m.**

Estes alunos realizaram as tarefas B e C (Anexos 3B e 3C respetivamente). Durante a realização desta 2.<sup>a</sup> fase, quando me aproximei do grupo do Manuel, do Rodrigo e da Rebeca, que estavam a realizar a tarefa C, apercebi-me que estavam a resolver a quarta questão do mesmo modo que tinham resolvido a questão b) da tarefa inicial, caindo novamente no mesmo tipo de erro.

A seguinte transcrição mostra um pouco do trabalho deste grupo durante, e a seguir, à minha intervenção. Nela podemos ver, que os alunos estavam a responder à questão baseando-se apenas nos resultados que encontraram através dos seus cálculos, não se

preocupando em comparar com a “outra” representação da situação - o gráfico que traduz esta situação - ou seja, os alunos não estavam a discutir a solução encontrada no contexto do problema. E foi esse espírito crítico que eu quis estimular com esta minha intervenção no trabalho do grupo.

*Professora – Vocês não compararam estas vossas respostas com o gráfico!*

*Vejam lá... ao fim de 50 segundos quem vai à frente?*

*Manuel – O Miguel!*

*Professora – Vamos lá a ver... e ali – aponte para o gráfico – Comparem...*

*Manuel – O Miguel!*

*Rodrigo – É a Rita!... Não?!... É a Rita. A Rita é o verde.*

*Professora – Então?! Vocês não olharam para aqui. Vocês estão a dizer aqui o contrário. Comparem...*

*Rodrigo – Ah! Pois é.*

[Afastei-me]

*Manuel – A Rita já tinha 200 m de avanço e esses 150 aí não foi o que ela...*

*Rodrigo – Porque um parte do zero e o outro não.*

*Manuel – Pois, mas este aqui tinha-nos dado... 350... ao fim de 50 segundos.*

*Rodrigo – Porque a Rita parte dos 200m... ou que é...*

*Rebeca – Vamos ter que riscar isto tudo? Eu não vou passar isto!*

*Rodrigo – Quantos metros partiu a Rita?... Ela partiu 200m à frente do Miguel - Então temos que partir dos 200 e adicionar 150.*

Assim, nesta 2ª fase, o grupo apresentou a seguinte resposta a esta questão:

Rita  $\geq 3 \times 50 = 150 + 200 = 350$  → Ela a avança dos 200m

Miguel  $\geq 4 \times 50 = 200 + 0 = 200$   
 ↓  
 início a correr nos 0m

Figura 4. 13 - Excerto da resposta do grupo (Manuel, Rebeca e Rodrigo)

Também na tarefa B, pedi aos alunos que resolvessem, novamente, a questão b) da tarefa inicial. Todos os grupos resolveram-na corretamente, tendo agora em atenção todos os dados do problema.

Quero ainda salientar um dado que observei nas produções dos alunos, neste, e também noutros casos, durante a realização desta experiência de ensino. Em algumas das tarefas que construí para a 2.ª fase, apresentei questões com o objetivo de proporcionar, durante a resposta, algumas reflexões. Posteriormente, na mesma tarefa, coloquei outras

questões que conduzissem os alunos à compreensão do que estava errado na primeira. Muitas vezes os alunos, na produção escrita que me entregam no final da aula, alteram a resposta à questão inicial, de modo a que esta já não contenha nenhum erro. O grupo do Manuel, da Rebeca e do Rodrigo fez exatamente isso, como podemos ver no excerto seguinte:

3. Observa a seguinte resolução de um dos vossos colegas da turma:

“Miguel

$$\begin{array}{r} 1 \text{ — } 4 \\ 50 \text{ — } x \end{array} \quad \frac{50 \times 4}{1} = 200m$$

R: Ao fim de 50 segundos o Miguel percorreu 200m.

Rita

$$\begin{array}{r} 1 \text{ — } 3 \\ 50 \text{ — } x \end{array} \quad \frac{50 \times 3}{1} = 150m$$

R: Ao fim de 50 segundos a Rita percorreu 150m.”

Com base nesta resolução, respondam às questões seguintes:

- Ao fim de 50 segundos qual foi a distância percorrida pelo Miguel? E pela Rita

Miguel 200m / Rita 350  $M - 4 \times 50 = 200$   
 $R - 3 \times 50 = 150 + 200 = 350$

Figura 4. 14 - Excerto da resposta 3 do grupo (Manuel, Rebeca e Rodrigo)

Como podemos ver, esta questão era para ser respondida com base na resolução que apresento. Os alunos tinham resolvido inicialmente assim, respondendo que a Rita tinha percorrido 150m e o Miguel 200m. No entanto, após a minha intervenção no grupo e após terem resolvido a questão 4, os alunos, apercebendo-se que esta resolução do problema não estaria correta, alteraram-na, apresentando assim a resposta que consideravam correta. No entanto, essa resposta não seria a resposta correta a esta questão. Penso que este facto evidêcia a conotação negativa que o erro tradicionalmente tem, e que apesar de eu o valorizar na sala de aula, ainda não foi o suficiente para que os alunos o mantivessem numa produção escrita.

Na última questão das tarefas B, C e D pretendi que os alunos, agora em grupo, fossem um pouco mais longe e encontrassem uma expressão algébrica que traduzisse a relação entre o tempo e a distância percorrida para o caso do Miguel e da Rita. Dos cinco

grupos, apenas um conseguiu encontrar as expressões algébricas para o caso da Rita e do Miguel (Figura 4.15). Dois grupos, encontraram a expressão algébrica que traduz a situação do Miguel, apesar de num caso não a terem registado (Figura 4.16) e dois grupos não conseguiram encontrar nenhuma das expressões.

Para o caso do Miguel:

$$4 \times 50 = 200 = \text{distância percorrida após}$$

duas

$$\text{distância percorrida} = 4 \cdot t$$

Para o caso da Rita:

$$3 \times 50 + 200 = 150 + 200 = 350 = \text{distância percorrida}$$

ou seja

$$\text{distância percorrida} = 3 \cdot t + 200$$

Figura 4. 15 - Resolução do grupo (Alexandre, Caetano e Denise)

Para o Miguel a recta passa na origem. É P. directa.

$4 \text{ m/s}$

$K = \frac{y}{x} = \frac{\text{metros}}{\text{segundos}}$  (velocidade)

Figura 4. 16 - Resolução do grupo (Francisco, João, Renata e Savio)

Analisando o desempenho geral, dos alunos nestas tarefas, podemos concluir que:

- Os alunos aparentam fazer uma distinção entre a realidade e a situação que lhes é apresentada, não usando os seus conhecimentos de senso comum, para justificar uma situação simples que é a vitória do Miguel na corrida;
- Os alunos apresentam algumas dificuldades na interpretação dos enunciados, em especial quando o mesmo contém várias questões;

- Os alunos, em geral, com a realização das tarefas da 2.<sup>a</sup> fase, conseguiram superar as suas dificuldades, nomeadamente, identificando os resultados estimados e os resultados exatos;
- Os alunos demonstram uma grande preocupação com o produto final do seu trabalho, mostrando resistência em deixar registados os erros que foram cometendo, mesmo que os mesmos fizessem parte do seu processo de reflexão;
- As questões colocadas por mim nas novas tarefas nem sempre promoveram, por si só, uma reflexão sobre o trabalho desenvolvido na fase inicial. A minha monitorização do trabalho dos grupos foi essencial para evitar a repetição de certos erros.

## **Tarefa II – “A diagonal de um quadrado”**

A 2.<sup>a</sup> fase desta tarefa partiu das resoluções dos alunos ao primeiro problema – Diagonal de um quadrado (Anexo 2). Foram realizadas três tarefas para a 2.<sup>a</sup> fase – tarefas A, B e C (Anexos 4A, 4B e 4C, respetivamente). Partindo da análise das produções individuais da 1.<sup>a</sup> fase, dividi a turma em dez grupos, atribuindo a cada um, uma destas três tarefas.

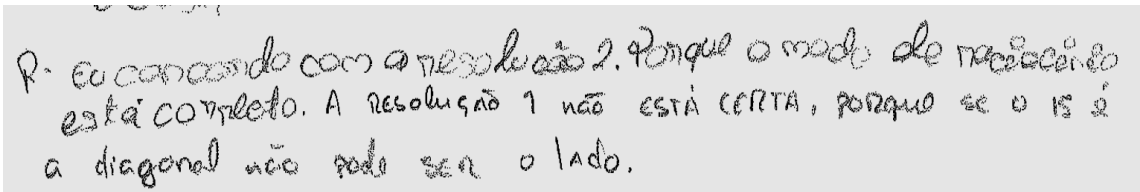
### **Alunos que realizaram a tarefa A**

Como a tarefa A pressupõe a utilização de um ambiente de geometria dinâmica, coloquei os computadores, com o *Geogebra*, à disposição dos alunos. Foram oito os grupos que realizaram esta tarefa.

- ❖ **Tarefa 1 (alunos com erros tipo I, isto é, que apenas fizeram a representação de um quadrado e desenharam a sua diagonal escrevendo também a sua medida)**

Um dos dois grupos, que cometeu este “tipo de erro” e que realizou esta tarefa, concordou com a segunda resolução apresentada, isto é, com a resolução que apresentava a medida do comprimento do lado como sendo metade da medida do

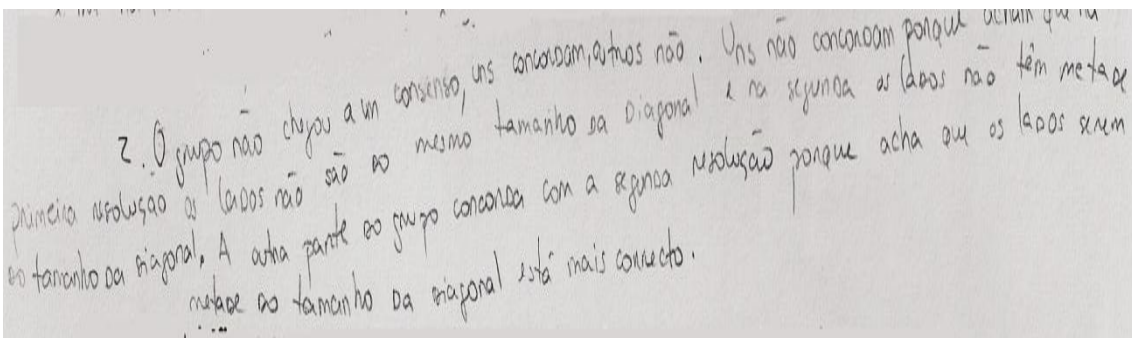
comprimento da diagonal. A justificação que apresentam é que “se o 15 é a diagonal não pode ser o comprimento do lado”.



R- eu concordo com a resolução 2. Porque o modo de raciocínio está completo. A resolução 1 não está certa, porque se o 15 é a diagonal não pode ser o lado.

Figura 4. 17 - Excerto da resolução do grupo (Cristina, Ronaldo e Simão)

O outro grupo, que realizou esta tarefa, não chegou a um consenso relativamente às duas resoluções apresentadas. Houve uma notória divisão de posições dos elementos do grupo, que a explicitaram na sua produção. Alguns elementos concordaram com a resolução 2 ( $D=L^2$ ) enquanto que outros, acharam que nenhuma das duas resoluções apresentadas estaria correta.



2. O grupo não chegou a um consenso, uns concordam, outros não. Uns não concordam porque acham que na primeira resolução os lados não são o mesmo tamanho da diagonal e na segunda os lados não têm metade do tamanho da diagonal. A outra parte do grupo concorda com a segunda resolução porque acha que os lados seriam metade do tamanho da diagonal está mais correcto.

Figura 4. 18 - Resolução do grupo (Hugo, Raúl e Rosário)

❖ **Tarefa 1 (alunos com erros tipo II, isto é, alunos que consideraram que o comprimento do lado do quadrado é igual a metade do comprimento da diagonal)**

Para um dos grupos a resolução 2 continua a ser “a correta” (Figura 4.19). Estes alunos não percebem as resoluções apresentadas, resolvendo esta questão como se de dois problemas distintos se tratasse. Na sua opinião, a resolução 2 tem mais um dado que a resolução 1 não tem – o comprimento do lado do quadrado – dado esse que, na sua opinião, lhes permitiria resolver o problema.

porque na resolução 2 damos o lado do quadrado e permitimos calcular o perímetro e a área, enquanto na resolução 1 dão-nos o comprimento da diagonal e não os lados,

Figura 4. 19 - Excerto da resolução do grupo (Lourenço, Rebeca e Rodrigo)

Apesar de excluírem a *resolução 1*, um outro grupo, à semelhança do grupo do Hugo, do Raúl e da Rosário (Figura 4.18), não chegou a acordo, variando a sua posição entre a *resolução 2* e nenhuma *resolução* correta.

Apenas um dos grupos apresentou uma resposta diferente, na qual não concorda com nenhuma das *resoluções*. O seguinte diálogo ilustra uma parte do trabalho desse grupo. Nele, podemos observar como é que os alunos em conjunto chegam a um consenso relativamente à resposta da questão 1.

Marta – Qual é que concordas?

Lucas – Com as duas! Esta tem uma *resolução*... e esta é outra. Esta é inteira e esta é metade.

Marta – Hum!

Renata – O quê?! (...) vais fazer um quadrado... pega no lápis e faz 3 por 3...

[Lucas lê alto o enunciado da questão 1]

Lucas – A diagonal é maior ou menor?

Marta – Eu acho que têm o mesmo comprimento...

Renata – Eu acho que a diagonal é maior.

Marta – A de baixo pode estar certa e nós não sabemos.

Renata – Olha, se tivermos uma caixa e queremos por uma régua... só entra assim, não assim...

[A aluna simulava uma caixa onde a régua entrava na diagonal, mas não paralelamente a nenhum dos lados]

Lucas – E aí a diagonal é maior.

Marta – Pois é... já não é a 1. A diagonal é sempre maior que os lados!

É interessante observar, que partindo deste diálogo entre os elementos do grupo, os alunos excluem a *resolução 1*, aceitando que a *resolução 2* poderia estar correta. No entanto, na sua produção final não utilizam o argumento referido. Como podemos ver na produção deste grupo (Figura 4.20), os alunos, após a questão 2, alteram a sua resposta à questão 1.

Não concordamos com nenhuma resolução porque com ajuda de geogebra observamos que a diagonal é maior do que o comprimento do lado do quadrado e nunca igual mas também a diagonal não é o dobro do lado.

Figura 4. 20 - Resolução do grupo (Lucas, Marta e Rute)

Um outro grupo, que aceita a questão 2 como correta, também apresenta uma justificção, fundamentando-a, com o que observa no *Geogebra* (Figura 4.21)

Sim, a segunda resolução parece ser válida porque os lados são mais pequenos que a diagonal e na Geogebra também.

Figura 4. 21 - Resolução do grupo (Afonso, Denise e Renata)

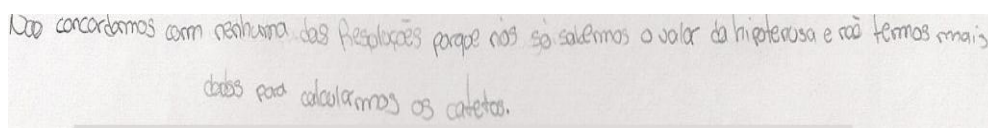
- **Tarefa 1 (alunos com erros tipo III, isto é, alunos que consideram que o comprimento do lado do quadrado é igual ao comprimento da sua diagonal.**

Os dois grupos que consideraram que a medida da diagonal era igual à medida do lado alteraram a sua resolução nesta 2.<sup>a</sup> parte. Um dos grupos passou a considerar que a *resolução 2* estaria correta (figura 4.22).

Na resolução 1, está a fazer a área do quadrado com a diagonal e não pode ser

Figura 4. 22 - Resolução do grupo (Alexandre, Catarina e Paulo)

O outro grupo também mudou a sua posição, passando a considerar que nenhuma das duas resoluções apresentadas estaria correta (Figura 4.23). No entanto, para estes alunos, não há dados suficientes para encontrar os valores dos catetos.



Não concordamos com nenhuma das resoluções porque nós só sabemos o valor da hipotenusa e não temos mais dados para calcularmos os catetos.

Figura 4. 23- Resolução do grupo (Francisco, Luísa e Savio)

A seguinte transcrição é um excerto dos diálogos entre os dois alunos deste grupo, uma vez que a Luísa faltou a esta aula. Nela, percebemos a evolução do trabalho destes alunos até à resposta que escreveram na sua produção (Figura 4.23). Os alunos começam por identificar a sua estratégia de resolução na tarefa apresentada, e tentam perceber o raciocínio da resolução 2.

*Francisco – Esta é a nossa resolução!* [o aluno refere-se à resolução 1]

*Savio – E estes aqui, o que fizeram? (...) Este, está certo! Mas...15:2???! Este também está mal?!*

*Francisco – (inaudível)*

*Savio – Nós calculámos a hipotenusa ao quadrado, e eles calcularam os catetos ao quadrado. Estás a perceber?*

*Francisco – Concordamos com alguma resolução?*

*Savio – Para sabermos a hipotenusa não é cateto ao quadrado, mais cateto ao quadrado?! Mas, cateto ao quadrado não dá isto!*

*Francisco – Quanto é  $7 \times 7$ ?...  $7,5 + 7,5$ ?*

*Savio – Ao quadrado...é "vezes"!*

*Francisco –  $56,25$ ... é o que está aqui.*

*Savio- Fogo! Estou mesmo baralhado!*

*Francisco – (inaudível).... Eu já disse!*

*Savio- Escreve lá então...concordamos com a segunda resolução porque... (inaudível)*

*Savio - Vamos mas é passar à segunda...*

*Francisco – Já sei!*

[Na gravação não se percebe a ideia do Francisco, mas eles desistem e passam à segunda tarefa e ao trabalho com o *Geogebra*]

Analisando este excerto da discussão parece-me que os alunos perceberam que a sua resolução (resolução 1) não estaria correta, e sendo assim, por exclusão de partes, pensaram que a *resolução 2* estaria correta. No entanto, não perceberam o raciocínio e acabaram por ficar baralhados. Parece-me que eles não puseram a hipótese da segunda resolução também não estar correta, daí não terem chegado a nenhuma conclusão e terem desistido desta tarefa, passando à seguinte.

- ❖ **Tarefa 2 e 3 (alunos com erros tipo II e alunos com erro do tipo III, isto é, alunos que consideraram que o comprimento do lado do quadrado é igual a metade do comprimento da diagonal, ou que é igual ao comprimento da sua diagonal.**

As conclusões que os alunos tiraram nestas duas tarefas foram do mesmo tipo, independentemente do erro que tinham inicialmente cometido. Assim, dois grupos (um de cada tipo de erro) apresentaram uma conclusão análoga, identificando que há uma alteração no comprimento da diagonal quando se varia a medida do lado. No entanto, não descobrem nenhuma relação entre esses valores (Figura 4.24).

| Medida do lado do quadrado (L) | Medida da diagonal (D) | $L^2$ | $D^2$ |
|--------------------------------|------------------------|-------|-------|
| 4,04                           | 6                      | 4,48  | 6,34  |
| 4,48                           | 6,34                   | 4,64  | 6,56  |
| 4,64                           | 6,56                   | 4,79  | 6,77  |
| 4,78                           | 6,77                   | 5,16  | 7,3   |
| 5,16                           | 7,3                    | 5,63  | 7,97  |

Observem os valores da tabela. Que relações encontram entre eles?

Quando o valor do lado aumenta, a diagonal também aumenta.

Figura 4. 24 - Resolução do grupo (Alexandre, Catarina e Paulo)

Um outro grupo, que tinha cometido um erro tipo II, apresenta a seguinte conjectura (Figura 4.25):

As medidas dos lados são sempre maiores que a medida da diagonal e o quadrado da medida da diagonal é quase o dobro do quadrado medido do lado do quadrado.

Figura 4. 25 - Resolução do grupo (Afonso, Denise e Renata)

Dois grupos (um do erro tipo I e outro do erro tipo II) apresentam uma conjectura que relaciona o quadrado da diagonal com o dobro do quadrado do lado (Figura 4.26), no

entanto, nenhum dos grupos a tenta demonstrar, nem identifica a aplicação do Teorema de Pitágoras na situação.

com base nos valores da tabela concluímos que a diagonal do quadrado é o dobro do lado do quadrado, ou seja,  $D^2 = L^2 \times 2$

Figura 4. 26 - Resolução do grupo (Lucas, Marta e Rute)

O seguinte diálogo é um excerto do trabalho do grupo do César e da Rosa, na resolução da questão 3 da tarefa A, os dois alunos que inicialmente tinham usado estratégias diferentes para resolver o problema. Eles estão a observar os valores obtidos e a tentar encontrar uma relação entre eles:

*Rosa – Qual é a relação?*

*César – Aqui é os dois ao quadrado. Já está!*

*Rosa – Este aqui é o dobro. Dá para concluir.*

*César – Este é quase o dobro. 1,5 é o dobro.*

*Rosa – Este aqui...84 é aproximadamente 5.*

[A aluna refere-se ao segundo valor do  $L^2$  que encontraram 4.84, o  $D^2$  era 10]

(...)

*César – Se arredondarmos os números, o resultado do lado ao quadrado é o dobro da diagonal ao quadrado.*

*Rosa – Ao contrário...a diagonal!*

Na discussão da tarefa A, em grande grupo, os alunos chegaram facilmente à conclusão de que poderiam usar o Teorema de Pitágoras para resolver o problema inicial, e que a expressão que descobriram,  $D^2=2L^2$ , é um caso particular deste teorema. Podemos aqui conjecturar se não teria sido melhor, em vez que efetuar a estratégia que utilizei nesta experiência de ensino, ter simplesmente mostrado aos alunos que com a aplicação do referido teorema, resolveriam rapidamente o problema (e a maior parte dos alunos sabe resolver este tipo de exercícios de aplicação). Contudo, com essa metodologia perdia uma oportunidade de levar os alunos a “fazer matemática” (NCTM, 2007), não lhes permitindo refletir sobre os diferentes raciocínios apresentados, nem proporcionando a elaboração de conjecturas com base nas suas experiências. Deste modo, penso ter contribuído para que os alunos aprendessem matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da sua experiência (NCTM, 2007).

## Alunos que realizaram a tarefa B

- **Tarefa com erro tipo IV, isto é, alunos que aplicaram corretamente o Teorema de Pitágoras, mas depois erraram na utilização da noção potência: “ $C^2 = C+C$ ”**

Na realização desta tarefa os alunos rapidamente se aperceberam do erro que tinham cometido e até me disseram, durante a aula: “nem sabemos como fizemos este disparate”. Assim, resolveram as duas questões da tarefa B de forma correta, mostrando que conhecem o conceito de potência de um número natural (Figura 4.27).

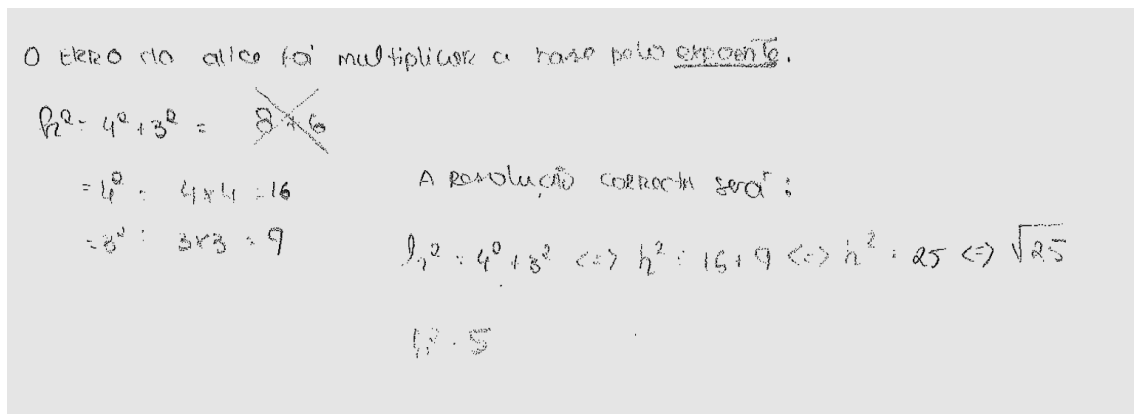


Figura 4. 27 - Resolução da questão 2 da tarefa B - grupo (João e Ricardo)

Como rapidamente realizaram a tarefa proposta, disse-lhes para também realizarem a tarefa C (Anexo 2C). Sugeri que se juntassem ao Caetano, que se encontrava a trabalhar sozinho uma vez que o colega que iria trabalhar com ele tinha faltado a esta aula.

## Alunos que realizaram a Tarefa C

Propus a resolução desta tarefa a dois alunos. Ao Caetano, que resolveu a primeira tarefa corretamente e ao Manuel, que a resolveu com recurso a material de desenho, encontrando um valor aproximado. Infelizmente, o Manuel faltou a esta segunda aula

pelo que o Caetano ficou sem par para trabalhar. Quando o Ricardo e o João terminaram a tarefa B juntaram-se ao Caetano para realizar esta tarefa C.

No entanto, o grupo de trabalho não funcionou e os alunos apresentaram duas resoluções distintas para esta tarefa. O Caetano mostrou alguma resistência em trabalhar com estes dois colegas, apresentando a seguinte resolução individual (Figura 4.28) onde acaba por efetuar um erro que não tinha cometido na questão inicial (erro tipo II):

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{D}{2} \\
 A_{\square} &= a \times a \\
 A_{\square} &= \left(\frac{D}{2}\right) \times \left(\frac{D}{2}\right) \\
 A_{\square} &= \left(\frac{D}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

Figura 4. 28 - Resolução do Caetano

Da minha observação do trabalho dos alunos durante a aula, apercebi-me que o Caetano teve, numa fase inicial, dificuldade em começar a resolver o problema e pediu aos colegas que se encontravam fisicamente mais perto, para ver a tarefa que eles se encontravam a fazer (Tarefa A). Imagino que este facto possa ter influenciado o seu raciocínio. O que, a ter-se concretizado, vem reforçar ainda mais a importância da confiança e da componente afetiva na superação das dificuldades dos alunos.

A resolução da questão 2, do grupo constituído pelo João e pelo Ricardo (Figura 4.29), foi também inesperada. Os alunos efetuaram exatamente o mesmo erro que minutos antes tinham identificado. A única diferença na utilização do conceito de potência, é que, neste problema, o lado do quadrado era representado por uma letra  $a$ , enquanto que na tarefa B, apenas tinham utilizado números naturais. Podemos observar na sua produção, que eles voltam a usar erradamente o conceito de potência.

$$h^2 = a^2 + a^2 = 2a + 2a = 4a = \sqrt{4a}$$

$$A_{\text{quadrado}} = \frac{2a \times 2a}{2} =$$

$$A_{\text{quadrado}} = \frac{4a}{2} = 2a$$

Figura 4. 29 - Resolução do João e do Ricardo

Esta tarefa C tem uma complexidade mais elevada do que a tarefa inicial. Trata-se de um problema, que também pode resolver-se com a aplicação do Teorema de Pitágoras, mas que recorre a *letras* que representam o lado do quadrado e as diagonais do losango. Nesta tarefa, as letras aparecem, assim, aos alunos como representantes de vários números, ou pelo menos, podendo ser substituídas por mais do que um valor, o que representa uma das dificuldades, discutidas por vários autores, na passagem da aritmética para a Álgebra (Ponte et al, 2009), que penso que fica aqui explícita com as resoluções apresentadas, tanto pelo Caetano, como pelo João e Ricardo.

O facto de os alunos terem voltado a cometer o mesmo erro, vem reforçar a ideia de que “a aprendizagem é um processo gradual de compreensão e aperfeiçoamento (Abrantes et al., 1999, p. 26), onde as relações entre o que já se sabe e o novo conhecimento têm um papel fundamental. E é neste sentido, que é importante proporcionar momentos aos alunos para que eles comuniquem os seus raciocínios.

Analisando o desempenho geral, nas várias tarefas podemos concluir que:

- Os alunos que deixaram a questão praticamente em branco (erro tipo I) apesar de não terem descoberto a relação existente entre o lado e a diagonal do quadrado (Teorema de Pitágoras) que lhes permitira resolver o problema, ultrapassaram a sua dificuldade inicial, refletindo sobre as duas estratégias apresentadas e, num dos casos, conseguindo fazer uma conjectura sobre esta relação;
- Um dos grupos de alunos, que consideraram na tarefa inicial que o comprimento da diagonal era metade do comprimento do lado (erro tipo II), não superou a

dificuldade demonstrada na tarefa inicial. Contudo, a sua produção escrita e as minhas observações em sala de aula, mostram-nos que houve pouco empenho no desenvolvimento do seu trabalho. O outro grupo de alunos, que também tinha cometido este erro, superou o erro inicial. No entanto, os alunos não chegaram a um consenso relativamente ao facto da segunda estratégia, apresentada na tarefa, estar certa ou errada. Todavia, na última tarefa apresentam uma conjectura que difere desta segunda estratégia;

- Os alunos que afirmaram, na tarefa inicial, que a medida do comprimento do lado era igual à medida do comprimento da diagonal (erro tipo III) mudaram de ideias, percebendo que tal não era possível. Um dos dois grupos chega mesmo à relação  $D^2=2L^2$ ;
- Os alunos, que na tarefa inicial tinham aplicado o Teorema de Pitágoras, num contexto mais algébrico, cometem novos erros.

### **Tarefa III – Percentagens e áreas**

Para a 2.<sup>a</sup> fase desta tarefa elaborei 3 tarefas diferentes (Anexos 5A, 5B e 5C) sendo que a maior parte dos alunos da turma realizou a tarefa B (Anexo 5B).

#### **❖ Alunos que realizaram a tarefa A**

Os alunos que realizaram esta tarefa foram aqueles que cometeram o erro tipo I, isto é, que deixaram o problema praticamente em branco ou fizeram um exemplo, mas não calcularam o valor 10% de cada um dos lados. Apenas dois grupos realizaram esta tarefa.

O contexto desta tarefa A (Anexo 5A) não é o mesmo do contexto da tarefa inicialmente proposta aos alunos. Esta é uma tarefa diferente, com a intenção de levá-los à

compreensão da noção de porcentagem, recorrendo a um exemplo do dia a dia. Apenas o contexto da última questão desta tarefa é que é o mesmo do da tarefa inicial, no entanto, está muito mais simplificado, podendo ser considerado apenas um exercício de aplicação.

Na questão 1 desta tarefa, os alunos não demonstraram qualquer dificuldade. Ambos os grupos usaram a mesma estratégia – regra de 3 simples – para calcular a quantidade de polpa de fruta existente em cada iogurte. Saliento que não era esta a estratégia que eu antecipei que os alunos usassem na resolução desta questão. Quando a selecionei pensei que eles recorressem, por exemplo, a uma tabela e às relações multiplicativas que se encontram numa relação de proporcionalidade direta.

Na questão 2 a) os grupos apresentaram desempenhos diferentes. Enquanto que, um dos grupos respondeu corretamente à questão interpretando o significado dos 5% no contexto deste problema, o outro não pareceu ter compreendido a pergunta. Este segundo grupo (Figura. 4.30) comete dois erros na resposta a esta questão. Por um lado, usa os dados numéricos da questão anterior, por outro, efetua erradamente uma regra de três simples para descobrir o valor da quantidade de polpa de fruta.

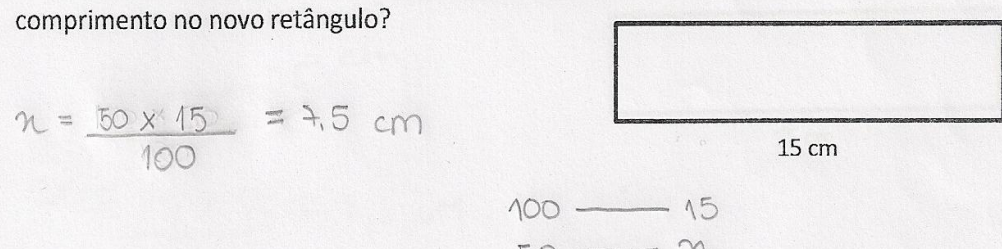
2. Um outro iogurte contém apenas 5% de polpa de fruta.  
 a) Qual é o significado desta informação?

|          |                                  |   |
|----------|----------------------------------|---|
| 100 — 12 | $\frac{5 \times 100}{12} = 41,6$ | 5% equivale a 41,6 g de polpa de fruta. |
| x — 5    |                                  |   |

Figura 4. 30 – Resolução do grupo (Alexandre, Cristina e Renata)

A questão 3 foi resolvida do mesmo modo pelos dois grupos. Os alunos calcularam o valor do aumento, mas não indicaram qual seria o comprimento do novo retângulo aumentado. A seguinte figura (Figura 4.31) é exemplificativa deste tipo de resolução.

3. O comprimento do seguinte retângulo foi aumentado em 50%. Qual é o comprimento no novo retângulo?



$x = \frac{50 \times 15}{100} = 7,5 \text{ cm}$

15 cm

100 — 15  
50 — x

Figura 4. 31 - Resolução do grupo (Catarina, Rebeca e Simão)

Esta tarefa A não me parece ter sido muito eficaz para que os alunos compreendessem melhor o significado de percentagem. Pelo menos, da análise da produção de um dos grupos, fico com a ideia de que se limitaram a aplicar um procedimento de cálculo que já conhecem – a regra de três simples - mas questiono-me se a compreendem.

Na última questão podemos ver que os alunos, de ambos os grupos, calculam o valor da percentagem (que por ser um valor tão simples poderiam ter recorrido ao cálculo mental, mas não o fizeram), e não terminam o exercício parecendo confundir o valor de percentagem com o valor do comprimento aumentado.

#### ❖ Alunos que realizaram a tarefa B

Esta tarefa foi realizada por cinco grupos com três “tipos de erros” diferentes. Estes alunos cometeram um dos seguintes tipos de erros: (II) concluíram que a área se mantinha; (III) erraram no cálculo da percentagem e/ou nas medidas do novo retângulo obtido; (IV) fazem um exemplo da situação, mas não tiram qualquer conclusão.

Todos os grupos apresentaram resoluções corretas e iguais à da questão 1. Há apenas pequenas diferenças ao nível da comunicação matemática. Num dos casos, os alunos colocam erradamente uma unidade de medida (Figura 4.32). Um dos grupos vai um pouco mais longe na comparação das áreas e calcula a razão entre elas (Figura 4.33).

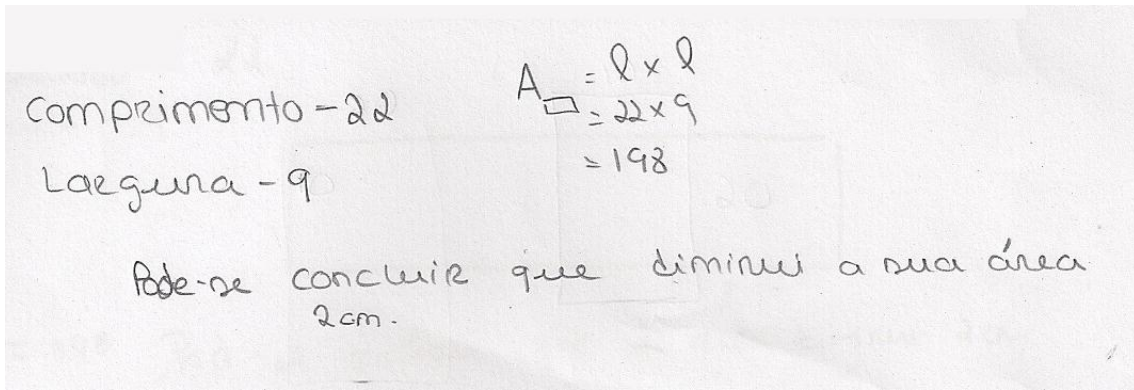


Figura 4. 32 - Resolução do grupo (Denise, Hugo, Francisco e Rute)

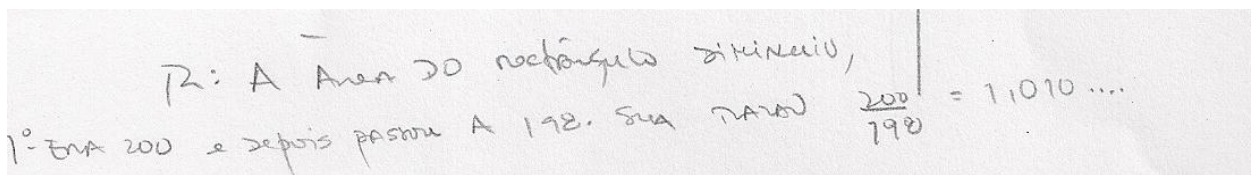


Figura 4. 33 - Excerto da resolução do grupo (Afonso, Lourenço e Rosa) (erro tipo IV)

Há pequenas diferenças na resolução da questão 2 relativamente à comunicação (Figura 4.34 e Figura 4.35). Nenhum dos grupos concorda com a afirmação e todos a justificam com recurso ao exemplo trabalhado na questão anterior.

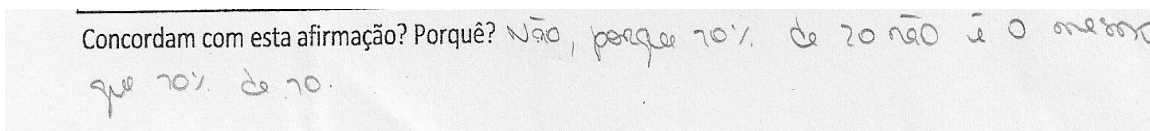


Figura 4. 34 - Resolução do grupo (Luísa, João e Ricardo)

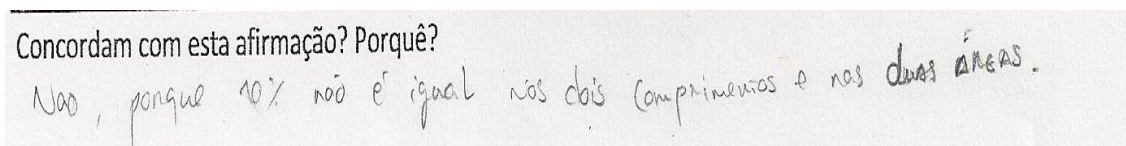


Figura 4. 35 - Resolução do grupo (Lucas, Paulo e Ronaldo)

❖ **Alunos que realizaram a tarefa C**

Os alunos que realizaram esta tarefa (Anexo 5C) foram aqueles que na 1.<sup>a</sup> fase efetuaram uma generalização partindo de apenas 1, 2 ou 3 exemplos. Apenas um grupo realizou esta tarefa. Como a Rosário faltou a esta aula, o grupo ficou apenas constituído por três alunos. Notei, contrariamente ao habitual nestes alunos, pouco empenho na realização desta tarefa.

Os alunos apenas realizaram a questão 1 (Figura 4.36), percebendo perfeitamente o problema em generalizar apenas com um número finito de casos.

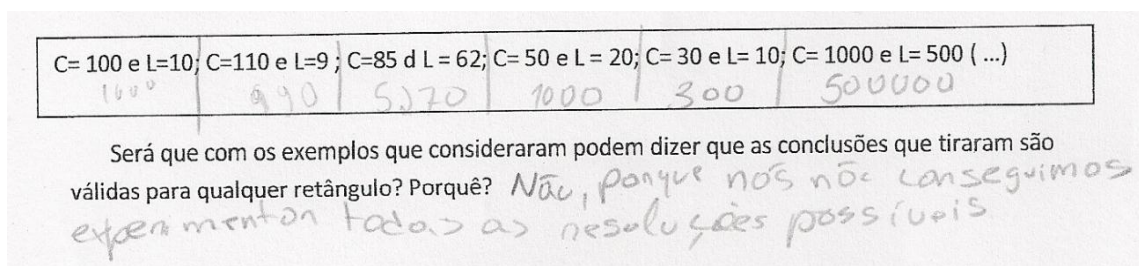


Figura 4. 36 - Resolução do grupo (Caetano, Rosário, Rodrigo e Savio)

Os alunos não conseguiram resolver a questão 2 (Figura 4.37), mesmo com as indicações que lhes dei quando percebi, que não estavam a conseguir fazer nada nesta questão. Mais uma vez, as dificuldades algébricas, ao trabalhar com *letras* que representam diferentes valores, estão presentes no desempenho dos alunos.

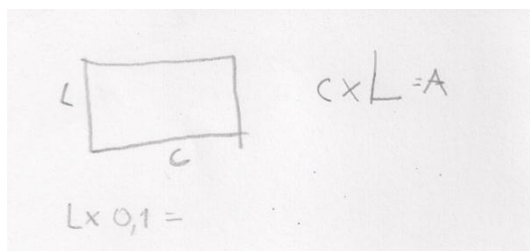


Figura 4. 37 - Resolução do grupo (Caetano, Rosário, Rodrigo e Savio)

Analisando o desempenho geral, dos alunos nas três tarefas, podemos concluir que:

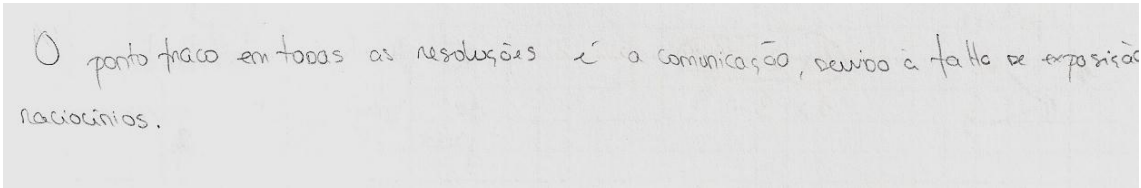
- O desempenho dos grupos de alunos, que presumi que não compreendiam a noção de porcentagem, ficou aquém do desejado por mim. Apesar de terem conseguido calcular uma porcentagem, não conseguiram dar uma resposta completa, a um simples exercício. Um dos grupos mostrou perceber o significado desta importante noção matemática, mas o outro, limitou-se a aplicar um procedimento sem aparente compreensão;
- Os alunos, que realizaram a tarefa B, conseguiram resolver uma questão com um nível de exigência cognitivo inferior ao da questão inicial. Na realidade, os alunos conseguiram resolver o problema para um caso concreto, evidenciando assim, a sua dificuldade na forma de abordar uma tarefa aberta, mostrando dificuldades em aspetos fundamentais da atividade matemática, tais como, explorar, generalizar e conjecturar. No entanto, penso que a resolução que fizeram, juntamente com discussão sobre a tarefa, contribuíram para o desenvolvimento da sua capacidade de raciocínio e resolução de problemas;
- Os alunos que tinham generalizado, com base num pequeno número de casos, perceberam que não o poderiam fazer. No entanto, não conseguiram utilizar eficazmente os conhecimentos, de Álgebra, para justificarem as suas conclusões para um caso geral.

## **Tarefa IV - Probabilidades**

### **❖ Alunos que realizaram a tarefa A**

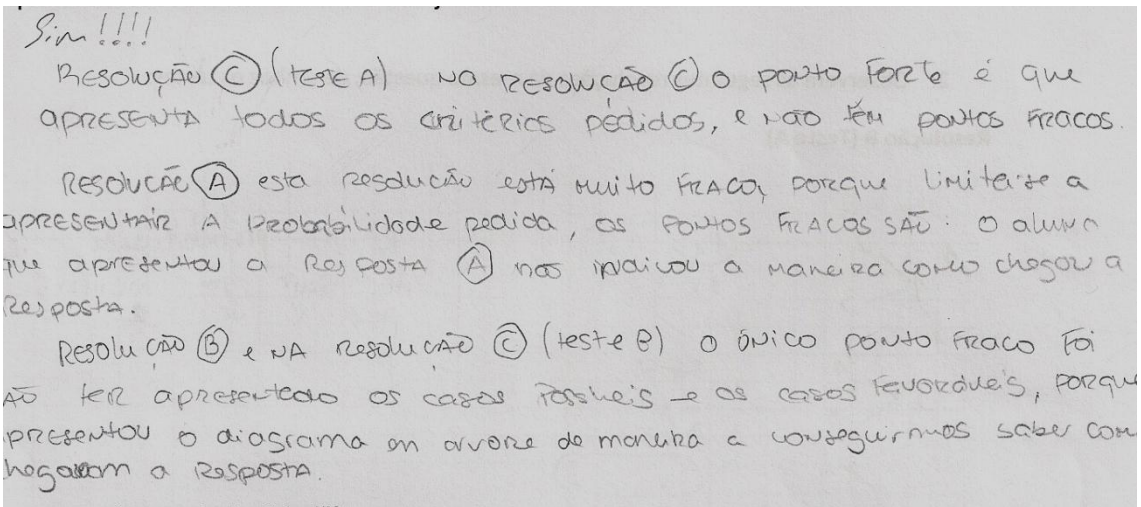
Os alunos que realizaram esta tarefa (Anexo 6A) foram aqueles que cometeram o erro tipo I, isto é, aqueles que resolveram “corretamente” o problema, mas na minha opinião, podiam melhorar a forma como comunicaram os seus raciocínios. Foram dois os grupos

que resolveram esta tarefa e ambos, na sua resolução, manifestaram a importância da comunicação na resolução dos problemas (Figura 4.38 e Figura 4.39).



O ponto fraco em todas as resoluções é a comunicação, devido à falta de exposição raciocínios.

Figura 4. 38 - Excerto da resolução do grupo da Rosário



Sim!!!!  
 RESOLUÇÃO (C) (teste A) NA RESOLUÇÃO (C) O PONTO FORTE É QUE APRESENTA TODOS OS CRITÉRIOS PEDIDOS, E NÃO TEM PONTOS FRACOS.  
 RESOLUÇÃO (A) ESTA RESOLUÇÃO ESTÁ MUITO FRACA, PORQUE LIMITAR-SE A APRESENTAR A PROBABILIDADE PEDIDA, OS PONTOS FRACOS SÃO: O ALUNO QUE APRESENTOU A RESPOSTA (A) NÃO INDICOU A MANEIRA COMO CHEGOU A RESPOSTA.  
 RESOLUÇÃO (B) E NA RESOLUÇÃO (C) (teste B) O ÚNICO PONTO FRACO FOI NÃO TER APRESENTADO OS CASOS FAVORÁVEIS E OS CASOS DESFAVORÁVEIS, PORQUE APRESENTOU O DIAGRAMA EM ÁRVORE DE MANEIRA A CONSEGURMOS SABER COMO CHEGAMOS A RESPOSTA.

Figura 4. 39 - Excerto da resolução do grupo do Caetano, João e Manuel)

Na sua “resolução ideal” ambos os grupos acabaram por explicar a forma como pensaram, chegando a resolver o problema de contagem através de duas formas diferentes (diagrama em árvore e depois a tabela de dupla entrada), como podemos ver na seguinte produção (Figura 4.40):

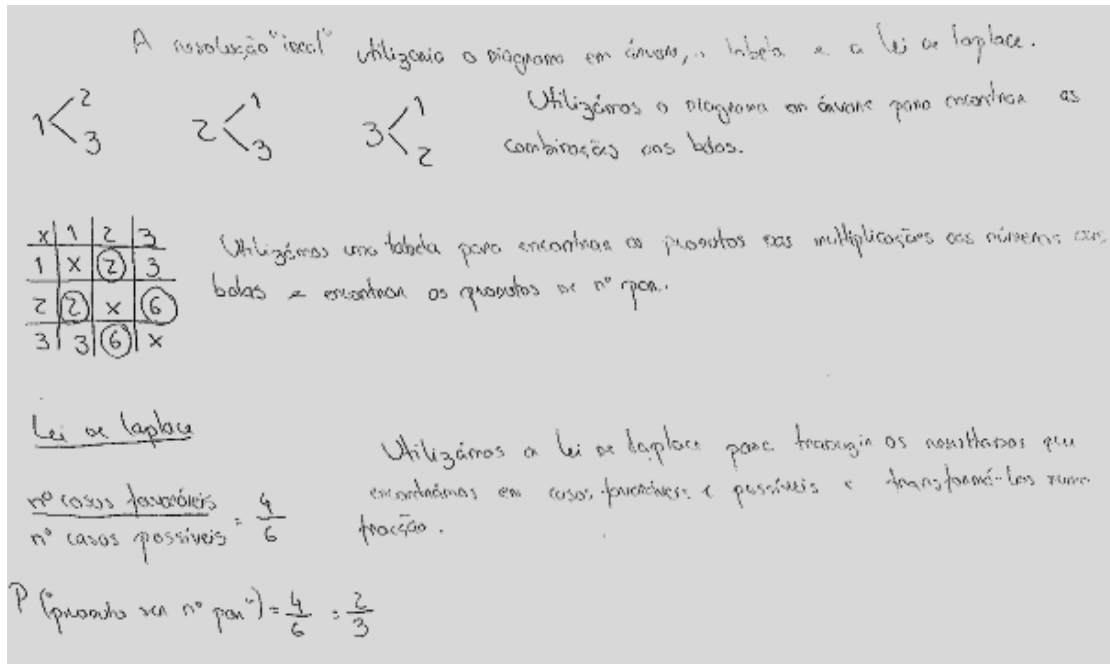


Figura 4. 40 - Excerto da resolução "ideal" do grupo (Afonso e Rosário)

❖ **Alunos que realizaram a tarefa B**

Os alunos que realizaram esta tarefa (Anexo 6B) foram aqueles que cometeram o erro tipo II, isto é, aqueles que resolveram o problema como se a experiência aleatória se tratasse de um acontecimento simples. Foram dois os grupos que realizaram esta tarefa.

É de salientar que, ambos os grupos conseguiram identificar o erro cometido na resolução apresentada na questão 2 (Figura 4.41). Esse erro tinha sido cometido por estes alunos na 1.ª fase do trabalho.

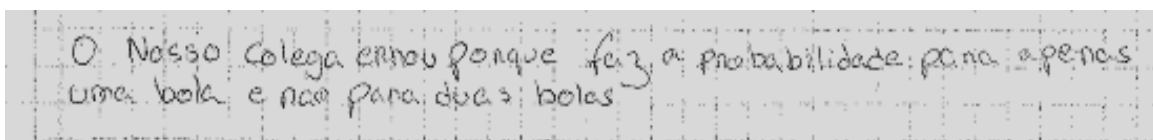


Figura 4. 41 - Excerto da resolução do grupo (César, Lucas, Ronaldo e Simão)

Na segunda questão desta tarefa, pedi aos alunos que fossem criativos e formulassem um problema que pudesse ser resolvido através de um diagrama em árvore ou de uma tabela de dupla entrada. Apesar de não demonstrar uma grande criatividade, um dos

grupos, formulou (e resolveu) um problema com as características que eu pretendia (Figura 4.42), enquanto que o outro grupo acabou por formular um problema com falta de dados, mas que, aparentemente, parece ser uma probabilidade simples (Figura 4.43).

3. Formulem um problema de probabilidades cuja resolução envolva a construção de uma tabela de dupla entrada ou um diagrama em árvore. (Sejam criativos!)



Figura 4. 42 - Resolução do grupo (Denise, Paulo, Savio e Rodrigo)

*“Imagina que a professora tem 5 bolas indistinguíveis ao tato numeradas de 1 a 5. Qual a probabilidade de sair número ímpar?”*

Figura 4. 43 - Transcrição da resolução do grupo (César, Lucas, Ronaldo e Simão)

❖ **Alunos que realizaram a tarefa C**

Os alunos que realizaram esta tarefa (Anexo 6C) foram aqueles que cometeram o erro que considere mais inesperado, o erro tipo IV, isto é, aqueles que usam os dados da questão anterior (1.1) para a resolução do problema. Estes alunos parecem não ter compreendido o contexto dos problemas, misturando ambas as questões.

○ **Questão 1 da tarefa C**

Na primeira questão, ambos os grupos calcularam a probabilidade usando a Lei de Laplace, embora não a tenham explicitado. Na segunda, fizeram a experiência de lançamento de um dado, registraram o número que ficou virado para cima e calcularam a probabilidade como sendo a frequência relativa do “número 4”. Deste modo, os dois grupos calcularam a probabilidade partindo apenas dos dez valores obtidos na sua experiência. Apesar de terem obtido, nas alíneas a) e b) diferentes valores para a probabilidade do acontecimento, um dos grupos aceitou a existência de três resultados diferentes para esse valor (Figura 4.44). O outro grupo, constituído por apenas dois alunos, apresentou uma resposta contraditória (Figura 4.45). Na alínea c) podemos ler, na mesma produção, duas respostas distintas, à mesma questão, escritas por alunos diferentes.

c) Comparem os valores obtidos nas duas alíneas anteriores. Que justificação encontram para o sucedido? A justificação é que na alínea a) só num lançamento a probabilidade de sair o 4 é de  $\frac{1}{6}$ , na alínea b) a probabilidade de sair 4 em 10 lançamentos é de  $\frac{4}{10}$  e na segunda tentativa a probabilidade é de  $\frac{4}{10}$ .

Figura 4. 44 - Excerto da resolução do grupo (Lourenço, Marta e Rute)

c) Comparem os valores obtidos nas duas alíneas anteriores. Que justificação encontram para o sucedido? A probabilidade só pode ser uma constante o número de lançamentos, o número de casos possíveis e casos favoráveis muda.

Figura 4. 45 - Excerto da resolução do grupo (Alexandre e Cristina)

Pelo que podemos observar desta sua produção, os alunos deste grupo (Figura 4.45) não parecem ter conseguido trabalhar eficazmente em equipa, discutindo, partilhando ideias e chegando a um consenso na resolução dos problemas. Durante a aula, apercebi-me de alguma tensão entre os elementos deste grupo de trabalho. Na altura, os alunos estavam a responder à última questão da tarefa e estavam aparentemente zangados. O Alexandre afirmava que já tinha feito a sua parte e agora, a responsabilidade da

resolução da tarefa era da Cristina. Tentei apaziguar os ânimos e levá-los a trabalhar em conjunto, mas pelo que podemos observar da sua produção escrita, não parece que a minha intervenção tenha sortido algum efeito.

Depois do trabalho em pequenos grupos, e uma vez que as respostas dadas me surpreenderam, decidi colocar a questão 1 desta tarefa, que só foi realizada por dois grupos de alunos, a toda a turma. Assim, apresentei a situação - Lançamento do dado cúbico - e perguntei-lhes o valor da probabilidade de sair o número 4. Não houve qualquer dúvida por parte dos alunos em responderem  $1/6$ , nem em referirem que estavam a usar a Lei de Laplace para calcular a probabilidade de um acontecimento. Seguidamente, apresentei-lhes os quadros de registo dos dois grupos que realizaram esta tarefa, (Figura 4.46 e Figura 4.47) bem como, a respetiva probabilidade calculada.

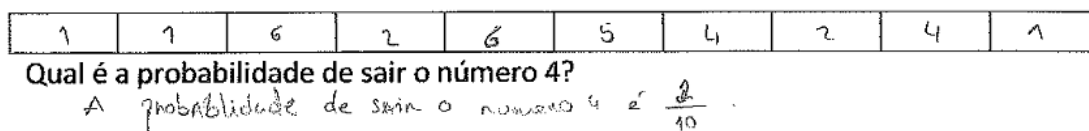


Figura 4. 46 - Excerto da resolução do grupo (Lourenço, Marta e Rute)

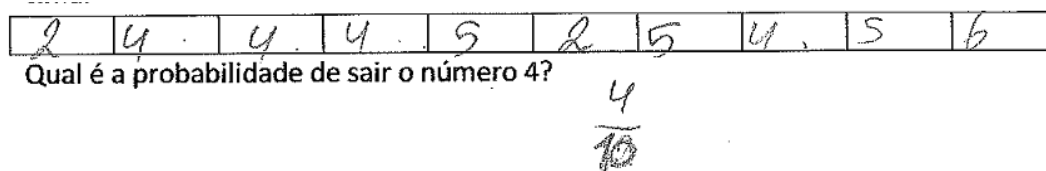


Figura 4. 47 - Excerto da resolução do grupo (Afonso e Cristina)

O seguinte diálogo é um excerto da discussão, em grande grupo, gerada por estas duas respostas.

*Prof.<sup>a</sup> – Temos então aqui... 3 valores da probabilidade de sair 4 no lançamento de um dado –  $1/6$ ;  $2/10$  e  $4/10$ . O que vocês têm a dizer a isto? Pode haver 3 valores diferentes para o mesmo acontecimento?*

*Alguns alunos – Sim!*

*Outros alunos – Não!*

*Prof.<sup>a</sup> – Então, em que ficamos? Porquê sim? E porquê não?*

*(...)*

*Cristina – Aqueles, são valores calculados com experiências.*

João – Foi como no lançamento do euro.

Prof.<sup>a</sup> – Lembra-se? O que fizemos nessa altura?

Rodrigo – Lançámos 50 vezes a moeda.

Prof.<sup>a</sup> – Só 50?

Francisco – Cada grupo... a nós saiu 25 de cada.

Prof.<sup>a</sup> – E depois o que fizemos?

Rosário – Juntámos tudo.

Prof.<sup>a</sup> – Então, qual é a diferença entre essa experiência e esta?

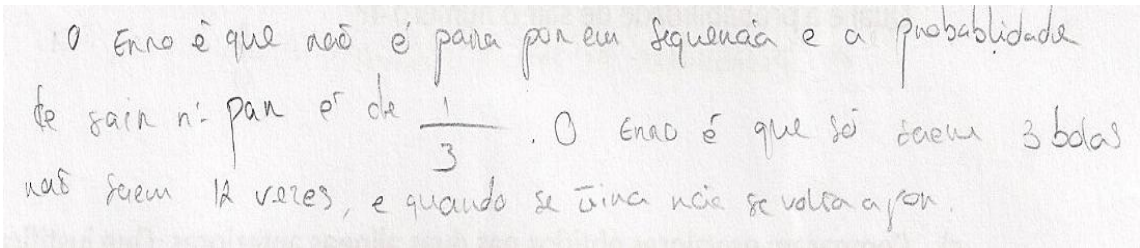
Rodrigo – Foi muito mais vezes.

(...)

Na minha opinião esta discussão foi produtiva, pois permitiu não só aos dois grupos clarificarem a noção de probabilidade de um acontecimento, como também proporcionou aos restantes alunos da turma, que não tinham efetuado este “tipo de erro” uma nova reflexão sobre este conceito. Voltámos também a falar em situações reais onde usamos as duas formas de obter o valor da probabilidade (calculado ou estimado), bem como a referência ao que é, ou não, uma “boa estimativa”.

#### ○ Questão 2 da tarefa C

Nas alíneas a) e b) desta questão, pedi aos alunos para voltarem a ler as questões do teste e identificarem a experiência aleatória, quer na primeira, quer na segunda. O grupo do Lourenço, da Marta e da Rute, conseguiram identificar corretamente as experiências aleatórias e na última questão, alínea c), identificaram o erro (Figura 4. 48)



O Erro é que não é para por em sequência e a probabilidade de sair n-pan é de  $\frac{1}{3}$ . O Erro é que só saem 3 bolas nos saem 12 vezes, e quando se tira não se volta a por.

Figura 4. 48 - Excerto da resolução do grupo (Lourenço, Marta e Rute)

O grupo do Alexandre e da Cristina, continuou a apresentar respostas erradas, onde se percebe que não leram e/ou nem interpretaram as questões que lhes foram colocadas. Como podemos observar na figura seguinte (Figura 4.49), em que os alunos descrevem a experiência aleatória existente no problema inicial.

Retorna-se uma bola registar o seu número e não voltar a colocá-la e em seguida faz-se o mesmo para ver se são par ou ímpar.

Figura 4. 49 - Resolução do grupo (Alexandre e Cristina)

Na alínea c) esta falta de concentração e/ou dificuldade de interpretação do enunciado também está presente na produção deste grupo. Quando cheguei junto dos alunos, e vi a sua resolução (Figura 4.50), pedi-lhes para lerem a questão e explicarem-me o que era pedido. A Cristina leu-a e percebeu o que estava a fazer de errado. Deste modo, riscou a sua resposta e começou a pensar, no entanto, não terminou, ou simplesmente não registou, o seu raciocínio, mas podemos ver pelos registos que estava no “bom” caminho. (Figura 4.51)

~~Sim, os números não estão devidamente ordenados, para o problema estar bem deveriam ter posto os números ordenados.  
(1,1,1,1,2,2,2,2,3,3)~~

Figura 4. 50 - Resolução (Alexandre e Cristina) – 1.ª estratégia.

$$\begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} 2-3 \\ 3-3 \end{array} \right. \\ 2 \left\{ \begin{array}{l} 1-2 \\ 3-3 \end{array} \right. \\ 3 \left\{ \begin{array}{l} 1-3 \\ 2-6 \end{array} \right. \end{array}$$

40º pares  
20º ímpares

Figura 4. 51– Resolução do grupo (Alexandre e Cristina) – 2.ª estratégia.

A capacidade de comunicação é sem dúvida, um ponto fraco destes dois alunos, que no final do 3.º ciclo ainda apresentam grandes dificuldades, “em comunicar as suas ideias e

interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático” (ME-DGIDC, 2007, p.5).

❖ **Grupos que realizaram a tarefa D**

Os alunos que realizaram esta tarefa (Anexo 6D) foram aqueles que cometeram os erros tipo III ou V, isto é, aqueles alunos que tinham deixado a questão em branco ou que tinham feito um raciocínio que para mim foi incompreensível. Foram nove os alunos que cometeram estes tipos de erros, e foram divididos em dois os grupos para a realização desta segunda tarefa.

O grupo dos alunos que tinham deixado a questão em branco conseguiu identificar o espaço de resultados para cada uma das experiências aleatórias apresentadas (A, B e C), no entanto, a forma como os apresentaram, em especial na questão 1C, era de difícil compreensão. Durante o trabalho em grupo questionei-os, mostrando que não conseguia perceber a sua produção escrita e que era importante perceber quais seriam os casos possíveis em cada uma das experiências. Eles tentaram explicar melhor e apresentaram a seguinte resposta à questão 1. c) (Figura 4. 53), onde efetuam uma organização dos dados num esquema, que podemos considerar uma “mistura” entre um diagrama em árvore e uma tabela, complementando-o com uma explicação do mesmo através da linguagem natural. No entanto, não apresentam explicitamente, de forma organizada, o espaço de resultados.

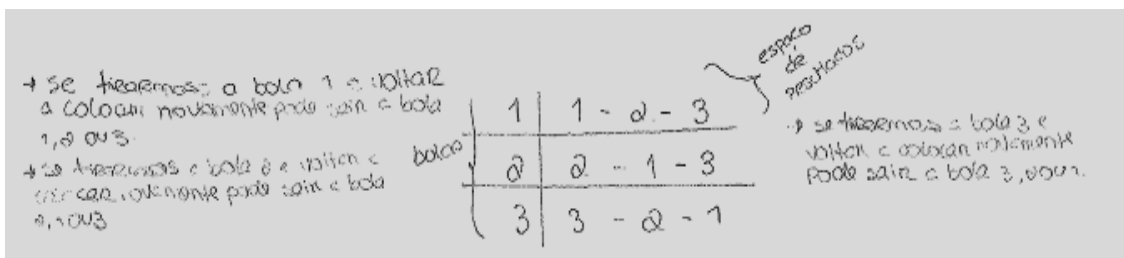


Figura 4. 52 - Excerto da resolução do grupo (Catarina, Francisco, Luísa e Rebeca)

Na segunda questão desta tarefa, estes alunos conseguiram encontrar o espaço de resultados embora não o tenham explicitado (Figura 4.53). Neste caso, efetuam um diagrama em árvore e do mesmo modo que tinham feito na questão anterior,

complementam-no com a explicação através de palavras do significado de cada um dos números apresentados.

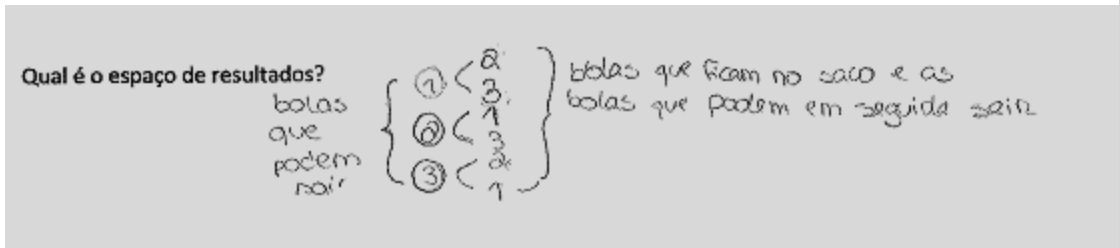


Figura 4. 53 - Excerto da resolução do grupo (Catarina, Francisco, Luísa e Rebeca)

Durante a aula, apercebi-me de alguns erros no trabalho deste grupo e tentei que percebessem o que estavam, erradamente, a fazer. No entanto, a minha intervenção não foi a suficiente para que não calculassem erradamente ambas as probabilidades pedidas. Na seguinte produção (Figura 4.54), podemos ver o primeiro erro de interpretação que cometeram, e o segundo erro, que cometeram na determinação dos casos favoráveis. (pedi para os alunos riscarem a resposta que consideravam errada em vez de apagarem).

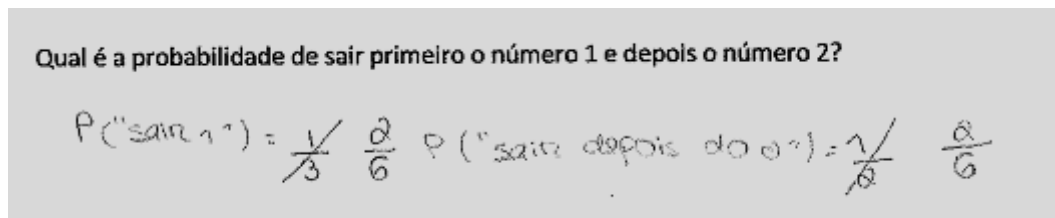


Figura 4. 54 - Excerto da resolução do grupo (Catarina, Francisco, Luísa e Rebeca)

Inicialmente os alunos deste grupo, interpretaram esta questão como se se tratasse de duas questões (ou experiências) distintas - a probabilidade de “sair o número 1” e a probabilidade de sair “o número 2” - e não como a probabilidade de um acontecimento único – “sair primeiro o número 1 e depois o número 2”.

Novamente aqui demonstram que, ou não compreenderam a experiência aleatória em causa, ou não compreenderam o espaço de resultados associados à mesma. Penso que a não explicitação do mesmo, aqui e nas várias questões anteriores, possa ter conduzido aos dois erros cometidos nesta tarefa.

Na segunda questão (Figura 4.55), em que se pedia a probabilidade do produto desses números ser par, e a probabilidade de ser ímpar, este grupo resolveu, inicialmente, como os colegas que tinham cometido o erro tipo II, isto é como se se tratasse duma probabilidade simples.

$$\begin{array}{l}
 P(\text{n}^\circ \text{ ser par}) = \frac{2}{3} \quad \frac{2}{6} \leftarrow \text{par "0"} \\
 P(\text{n}^\circ \text{ ser ímpar}) = \frac{2}{3} \quad \frac{4}{6} \leftarrow \text{ímpar "1 e 3"}
 \end{array}$$

Figura 4. 55 - Excerto do grupo (Catarina, Francisco, Luísa e Rebeca)

Após a minha intervenção no grupo pensaram de outro modo, no entanto, a resposta continua a não estar correta. Inicialmente, na análise desta produção, pensei que os alunos tivessem trocado a probabilidade de ser par com a de ser ímpar. No entanto, numa análise mais profunda e tendo em conta que o raciocínio efetuado nas duas questões é baseado no esquema apresentado na figura 4. 53, penso que os alunos apenas olharam para a última coluna do esquema (onde aparecem seis números possíveis) para darem a sua resposta. Daí, existirem dois números pares (o “2” que eles referem na figura 4. 54) e quatro números ímpares (os “1” e “3” que aparecem nessa mesma coluna na figura 4. 55).

A realização desta tarefa D parece-me ter sido positiva para estes alunos, porque apesar de não a terem resolvido corretamente, permitiu-me perceber onde residiam, na realidade, as suas dificuldades e desenvolver seguidamente um trabalho no sentido de as colmatar. Na realidade, a aptidão para usar processos organizados de contagem na abordagem de problemas combinatórios simples (ME-DEB, 2001) é uma das competências essenciais que os alunos do Ensino Básico deverão desenvolver, e o facto de eles terem deixado a questão em branco não me permitiu perceber a sua dificuldade efetiva.

- **Grupo de alunas que cometeram erros que mais ninguém cometeu**

Este grupo é constituído por duas alunas. Uma das quais é a melhor aluna da turma em todas as disciplinas (é uma aluna muito estudiosa, mas nem sempre com um raciocínio matemático eficiente). Da minha observação do trabalho do grupo, houve nitidamente domínio do trabalho por parte desta aluna, tendo a outra manifestado uma atitude passiva, assumindo que a primeira teria sempre razão. Apesar de eu ter tentado integrá-la no trabalho, do que observei durante a aula, não me parece a minha estratégia tenha sido eficaz.

Estas alunas tiveram dificuldade em compreender a tarefa. A primeira resolução, que apresentaram, ou não estava correta, ou eu simplesmente não a compreendi. Tive de as questionar, para tentar perceber que erro estavam a cometer, mas senti muitas dificuldades na compreensão do seu raciocínio.

Após esta minha primeira intervenção no grupo, apercebi-me que tinham dificuldades na compreensão do enunciado da tarefa. Assim, ajudei-as na compreensão do mesmo, sugerindo a realização de experiências com recurso a materiais físicos concretos. Na realidade, “a construção de intuições a partir de experiências reais é fundamental para um desenvolvimento posterior do raciocínio formal no estudo das probabilidades” (Abrantes et al. 1999, p. 105).

Na seguinte produção (Figura 4. 56) podemos ver as duas resoluções das alunas à questão 1.b). Na primeira, as alunas não consideraram que, ao tirar duas bolas simultaneamente do saco não interessava a ordem pela qual elas saíam. (São as primeiras seis representações “rodeadas” com os números 1,2; 2,3; 2,1;...). Após a minha intervenção junto do grupo, com recurso a material, as alunas alteraram a sua resolução.

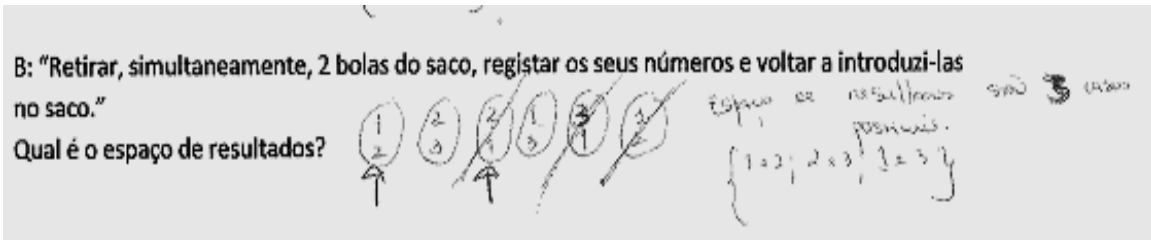


Figura 4. 56 - Excerto da resolução do grupo (Rosa e Rute)

A questão seguinte estava completamente errada, pois as alunas consideraram que se tiravam três bolas do saco. A apresentação desta resolução (quando cheguei ao grupo pela primeira vez) era inadequada (Figura 4. 57). Só a consegui perceber com a sua explicação.

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | Espaço de resultados<br>com 15 casos<br>possíveis |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |   |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |   |

Figura 4. 57 - Reprodução da resolução do grupo (Rosa e Rute) (antes da minha intervenção)

Após a minha intervenção no grupo, as alunas incluíram estas “linhas circulares” no esquema (Figura 4. 58). Donde percebi que estavam a considerar uma experiência em que eram tiradas três bolas, e estavam a fazer a contagem de modo aleatório.

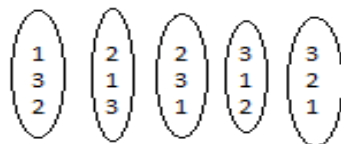


Figura 4. 58– Reprodução da resolução do grupo (Rosa e Rute) (após a minha intervenção)

Na sua produção final (Figura 4.59) as alunas mostram que ainda não conseguem resolver o problema de contagem envolvido nesta questão, uma vez que apresentam como resolução o seguinte esquema que evidencia que ainda não compreenderam a experiência de retirar uma bola, registar o seu número, voltar a introduzi-la no saco e retirar novamente uma bola.

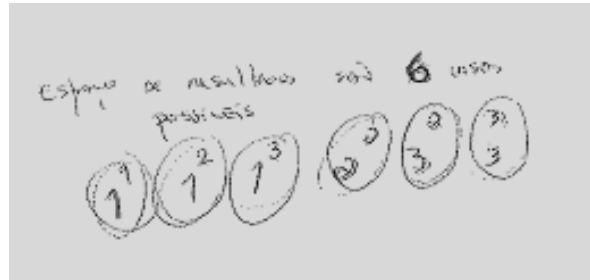


Figura 4. 59 – Resolução final da questão 1. c) do grupo (Rosa e Rute)

A questão 2 da tarefa D foi corretamente realizada por este grupo (Figura 4.60), apesar da forma como realizaram a contagem dos casos possíveis ser pouco usual. Da análise de ambas as resoluções, parece-me que o facto de ser uma experiência com reposição criou dificuldades na compreensão da situação.

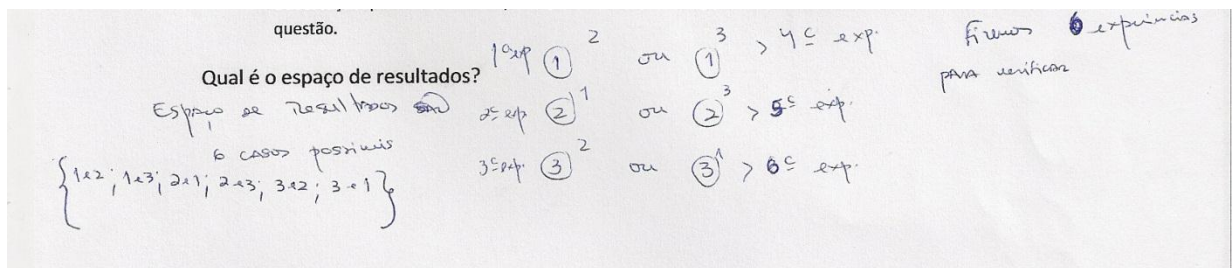


Figura 4. 60 - Excerto da resolução da questão 2 do grupo (Rosa e Rute)

Esta tarefa D, acabou por evidenciar outra dificuldade nestas alunas, que eu não tinha identificado na tarefa inicial da 1.<sup>a</sup> fase. A dificuldade em compreender a experiência aleatória e a identificar o espaço de resultados associado a essa experiência. Apesar de, no 1.º período, termos feito algumas experiências concretas, e só mais tarde as termos formalizado, essas atividades parecem não ter sido suficientes para proporcionar uma aprendizagem efetiva.

Analisando o desempenho geral, dos alunos nestas quatro tarefas, podemos concluir que:

- Os alunos que desempenharam uma tarefa com o objetivo de melhorar a sua capacidade de comunicação escrita conseguiram cumpri-lo;
- Os grupos que tinham resolvido o problema como se de uma probabilidade simples se tratasse também conseguiram superar a sua dificuldade, identificando

o erro cometido na resolução apresentada, apenas pela reflexão conjunta efetuada na primeira questão da tarefa. No entanto, quando lhes pedi que formulassem um problema já mostraram mais dificuldades, sendo que um dos grupos acabou por formular um problema contendo o mesmo erro;

- Os grupos de alunos que não tinham percebido a questão e que tinham misturado as duas alíneas, acabaram por cair num outro erro, que envolve o conceito de probabilidade de um acontecimento. Penso que a tarefa, resolvida em grupo, e a discussão da mesma em grande grupo serviram para refletirem e clarificarem esta ideia;
- Um dos grupos que tinha cometido o erro inicial, que demonstrava dificuldade na interpretação e compreensão da situação, continuou a apresentar respostas erradas, evidenciando não ler e/ou interpretar corretamente os enunciados. Destaco ainda que, este grupo não funcionou como um grupo de trabalho colaborativo;
- A realização da 2.<sup>a</sup> fase permitiu perceber as dificuldades dos alunos, que tinham deixado a questão inicial em branco. Permitiu também, que eu percebesse as dificuldades de outro grupo de trabalho, que tentava resolver o problema sem compreender na realidade a situação concreta.

## **Conclusões**

Com este estudo pretendi perceber de que modo uma metodologia de trabalho em sala de aula, promovendo a diferenciação pedagógica simultânea, em grupos de alunos, formados segundo o “tipo de erro” que cometem na realização de uma tarefa, contribui para a aprendizagem dos alunos. Para tal construí um modelo de trabalho e apliquei-o na realização de “quatro” tarefas com os meus alunos.

Com o objetivo de procurar responder às questões formuladas: Quais os principais fatores que contribuem para a aprendizagem neste contexto? Quais as principais

dificuldades que emergem neste contexto de trabalho? O contributo deste método varia com a tipologia de erros? Como reagem os alunos a esta forma de trabalhar?, analisei os dados recolhidos nesta intervenção pedagógica. Seguidamente, apresento os principais resultados obtidos.

Na tentativa de encontrar algumas respostas às questões do estudo decidi elaborar o seguinte quadro (Quadro 4. 1), onde sintetizo os principais resultados desta experiência, agrupando os erros cometidos pelos alunos, em cada uma das tarefas. Assim, classifiquei os erros cometidos nas tarefas iniciais em cinco categorias: “Questões deixadas em branco, praticamente em branco ou incompreensíveis”; “erros com base na interpretação dos enunciados”; “erros na forma como expressam resultados, processos ou ideias matemáticas”; “erros por desconhecimento de tópicos matemáticos” e por fim, “erros no uso de raciocínios indutivos”.

Analisando este quadro podemos observar que, na maioria dos casos, há uma evolução dos alunos na 2.<sup>a</sup> fase, sendo que, nalguns tipos de erros, essa evolução é mais significativa do que noutros. De qualquer modo, em todas as categorias consideradas, os erros cometidos pelos alunos tiveram uma importância crucial na superação das suas dificuldades.

Partindo de uma leitura geral deste quadro, podemos observar que na grande maioria dos casos, independente da classificação que atribuí ao tipo de erro inicial, os alunos conseguem superá-lo. No entanto, os alunos com frequência, acabam por cair noutros erros, muitos dos quais, pertencentes às outras categorias consideradas, o que vem sublinhar a ideia apresentada por Pinto e Santos (2006) de que: "Não se passa da ignorância ao saber num “salto”, mas através de aproximações sucessivas” (p. 123).

Quadro 4. 1 - Síntese dos principais resultados desta experiência de aprendizagem –  
classificação de erros e evolução dos alunos

| Caraterísticas do “erro”   | Tarefa 1ª Fase                  | “Tipo de erro” | Evolução dos alunos   |
|--|---------------------------------|----------------|---|
| Questões deixadas em branco, praticamente em branco ou incompreensíveis  | “A diagonal do quadrado”        | I              | Há evolução nos 2 grupos, apesar dos alunos não encontrarem a relação entre a diagonal e o lado do quadrado, nem reconhecerem o Teorema de Pitágoras. |
|  | “Percentagens e áreas”          | I              | Um dos grupos supera o erro, mas o outro grupo não.   |
|  | Probabilidades                  | III            | Há evolução, no entanto, os alunos cometem outro tipo de erros.   |
|  |                                 | V              | Há evolução, mas os alunos evidenciam novas dificuldades.   |
| Erros com base na interpretação do enunciado do problema (identificação dos dados, as condições e/ou o objetivo) | “A corrida da Rita e do Miguel” | II             | Os grupos de alunos conseguem superar as suas dificuldades.   |
|  |                                 | III            |   |
|  | Probabilidades                  | II             | Os alunos identificaram o erro que cometeram na resolução da tarefa.  |
|  |                                 | IV             | Há evolução num dos grupos e no outro não. Evidenciaram outro tipo de erros.  |
| Erros com base na forma como expressam resultados, processos e ideias matemáticas                                | “A corrida da Rita e do Miguel” | I              | Os alunos continuam a não usar um argumento “real” para justificar esta “situação matemática”.  |
|  | Probabilidades                  | I              | Os alunos melhoraram a apresentação do seu raciocínio.  |
| Erros por desconhecimento de tópicos matemáticos   | “A diagonal do quadrado”        | II             | Um dos grupos supera a dificuldade. O outro não, no entanto, evidencia a discussão de ideias e na última questão apresenta uma conjectura.            |
|  |                                 | III            | Os alunos reconhecem o erro e mudam as suas ideias. Um dos grupos chega mesmo a conjecturar que $D^2=2L^2$  |
|  |                                 | IV             | Os alunos reconhecem e superam o erro. No entanto, ao passarem do contexto aritmético para o algébrico fazem novamente o mesmo erro.                  |
|  | “Percentagens e áreas”          | II             | Estes alunos conseguem resolver uma tarefa com um menor nível de exigência cognitivo, uma vez que se trata de uma tarefa mais estruturada.            |
|  |                                 | III            |   |
|  |                                 | IV             |   |
| Erros no uso do raciocínio indutivo  | “Percentagens e áreas”          | V              | Os alunos superam o erro pois reconhecem que não podem generalizar com um número finito de casos. No entanto, demonstram nova dificuldade.            |

Da observação do quadro podemos concluir que existiram erros para os quais o modelo implementado teve efeitos mais positivos nas aprendizagens matemáticas dos alunos do que noutros casos. De facto, os erros cometidos com base nas capacidades transversais – raciocínio e comunicação – foram mais facilmente superados e conduziram a uma maior evolução dos alunos.

As ideias iniciais “erradas” (propriedades, conjeturas, generalizações,...) constituíram um ponto de partida para a análise e discussão nos grupos de trabalho, durante a 2.<sup>a</sup> fase, que levaram os alunos a superar a(s) dificuldade(s) demonstrada(s) inicialmente, ou se não o fizeram na totalidade, pelo menos conseguiram identificar e compreender o(s) erro(s) cometido(s). Os alunos que, na tarefa inicial, tinham cometido “erros no uso do raciocínio indutivo”, isto é, que tinham generalizado com base num pequeno número de casos, perceberam que não o poderiam fazer. Contudo, não conseguiram utilizar eficazmente os conhecimentos de Álgebra para justificarem as suas conclusões para um caso geral. De qualquer modo, apesar de não terem conseguido fazer uma demonstração simples, perceberam as limitações do raciocínio indutivo, bem como, a diferença entre o teste de uma conjetura e uma demonstração.

Os alunos que cometeram erros relativos ao desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, também conseguiram, em geral, superar as dificuldades iniciais sentidas, quer os que tiveram problemas de interpretação, quer os que manifestaram dificuldades em expressar o seu pensamento matemático. De facto, os alunos que cometeram “erros com base na interpretação do enunciado do problema (identificação dos dados, as condições e/ou o objetivo)”, por um lado, conseguiram identificá-los e, superando esta dificuldade, conseguiram resolver a tarefa. Por outro lado, penso que o próprio processo de resolução da tarefa da 2.<sup>a</sup> fase contribuiu para o desenvolvimento desta capacidade, nomeadamente analisando e interpretando, agora em grupo, a informação que lhes foi transmitida. Os alunos que cometeram “erros com base na forma como expressam resultados, processos e ideias matemáticas”, acabaram por melhorar a sua comunicação escrita, tornando o seu “texto” mais claro e usando a linguagem matemática para expressar ideias matemáticas com mais precisão.

Para os alunos que cometeram erros relativos ao desconhecimento de conteúdos matemáticos, este modelo pedagógico já não foi eficaz em todos os casos. De facto

houve situações muito positivas em que os alunos conseguiram perceber o(s) erro(s) cometido(s), aprenderam o tópico, e superaram a(s) suas dificuldade(s), mas houve um caso em que a ausência de compreensão do conceito, levou a que os alunos não conseguissem evoluir. Alguns alunos que efetuaram “erros por desconhecimento de tópicos matemáticos”, conseguiram compreender o(s) erro(s) cometido(s). Outros acabaram por conseguir resolver a tarefa, mas agora através de outra com um menor nível de exigência cognitivo, uma vez que se tratava de uma tarefa mais estruturada. Houve casos, como por exemplo, os alunos que desconheciam o conceito de percentagem, para os quais este momento de trabalho autónomo não foi suficiente para a aprendizagem deste conceito, sendo necessário várias tarefas diferentes e vários momentos de discussão, para que construíssem um conceito, que já deveria estar consolidado. Estamos aqui perante um momento de regulação retroativa (Santos, 2002) que cria mais dificuldades na sua implementação, uma vez que a maior parte da turma já dominava este conceito.

Quando, por exemplo, o erro que os alunos cometeram na 1.<sup>a</sup> fase foi do tipo: “Questões deixadas em branco, praticamente em branco ou incompreensíveis” houve uma evolução muito positiva no trabalho dos alunos durante a 2.<sup>a</sup> fase, sendo que a maioria, superou o erro evidenciado no momento inicial. No entanto, a maior parte destes grupos acabou por cometer outro tipo de erros. Para mim, não foi de todo inesperado, nem considero que seja um aspeto negativo na experiência. As questões em branco, praticamente em branco, ou incompreensíveis, não dão informações sobre o que o aluno sabe, nem sobre o que não sabe. De facto, ao vermos este “tipo de respostas”, não sabemos se os alunos as deixaram em branco, porque não compreenderam a questão, porque não têm conhecimentos a nível dos tópicos matemáticos para a resolver, porque não conseguem resolver o problema por não saberem como o começar a abordar, ou por outro motivo qualquer que nós, professores, simplesmente não enunciamos. Nestes casos, a 2.<sup>a</sup> fase permitiu-me aceder ao modo como os alunos estavam a pensar e consequentemente conduziu a que estes explicitassem as suas dificuldades, bem como, algumas formas erradas de raciocinar em matemática ou de comunicar as suas ideias. O facto de eu conseguir aceder aos seus raciocínios foi fundamental para conseguir perceber o que não compreendiam, permitindo-me procurar estratégias para os levar a superar as dificuldades detetadas, quer no desenvolvimento do trabalho, em pequenos

grupos e no grupo-turma, quer posteriormente, nas abordagens que utilizei com a turma nas aulas seguintes.

Um outro aspeto a destacar, é que não houve nenhum aluno que tivesse deixado as tarefas da 1.<sup>a</sup> e da 2.<sup>a</sup> fase, simultaneamente, em branco. Isto contribui, quer para uma melhor relação afetiva dos alunos com a Matemática, quer para um aumento da sua auto-confiança perante os desafios propostos:

O agir pedagógico dos professores pode ir ajudando a construir no aluno imagens positivas de que é capaz de superar as tarefas difíceis através do trabalho, do estudo e reflexão. (Pinto & Santos, 2006, p. 121)

De facto, com esta proposta pedagógica o professor pode, intencionalmente, contribuir para estas “etapas” da construção do conhecimento, uma vez que vai tendo um acesso direto, no momento da aprendizagem, às ideias e aos raciocínios dos alunos. Mais uma vez, a sua interpretação do erro cometido pelo aluno é fundamental para que consiga caminhar na direção das aprendizagens pretendidas.

Este processo de aproximação e de construção do saber tem como pilar a aprendizagem da Matemática com compreensão, assumindo que os alunos vão construindo “ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e conhecimentos prévios” (NCTM, 2007, p. 21). Quando elaborei cada uma das tarefas para a 2.<sup>a</sup> fase, partindo da análise do(s) erro(s) cometido pelos alunos na 1.<sup>a</sup> fase, tentei criar questões que os levassem a refletir sobre o seu desempenho, e que lhes permitissem aprender com compreensão. Penso que nuns casos as tarefas foram mais bem conseguidas do que noutros, o que vem sublinhar a ideia de que não há receitas no ensino da Matemática, e o que contribui para a aprendizagem de um aluno, poderá não ser adequado à aprendizagem de outro. Para além disso, a interpretação que o professor faz das dificuldades dos alunos podem não ser aquelas que correspondem completamente à realidade.

Desta análise, penso poder afirmar que, nesta proposta pedagógica, as minhas intervenções com a turma, pensadas de modo a superar os erros cometidos com cada aluno durante a construção do conhecimento, conduzem a uma aprendizagem mais significativa para os alunos, tal como já afirmado por Santos (2002):

Uma intervenção por parte do professor que acompanhe o próprio processo de aprendizagem, como a regulação interativa, é potencialmente mais promissora porque é uma regulação atempada e se pode tornar mais significativa para o aluno. (p. 78)

Um outro aspeto geral, que merece destaque, são as interações entre os alunos na 2.<sup>a</sup> fase do trabalho. Estas interações, mesmo em grupos homogêneos segundo o mesmo tipo de erro efetuado na tarefa inicial, contribuíram, na maioria dos casos, para que os alunos conseguissem evoluir na construção do conhecimento.

Situações que levem os alunos a apoiar os outros e receber ajuda dos pares constituem experiências ricas na reestruturação dos seus próprios conhecimentos. (Santos, 2002, p. 79)

Nalgumas tarefas que construí para a 2.<sup>a</sup> parte, pressupunha que os alunos fossem, ao longo da resolução dessas tarefas, cometendo vários erros. Nas primeiras questões eram confrontados com o(s) erro(s), no entanto, com a resolução das restantes questões acabavam por reconhecer esses erros. Ora, os alunos demonstraram uma grande preocupação com o produto final do seu trabalho, mostrando resistência em deixar registados os erros que foram cometendo, mesmo que os mesmos fizessem parte do seu processo de reflexão. Esta dificuldade vem sublinhar a ideia de que “o erro como um mal a erradicar” (Pinto & Santos, 2006, p. 83) ainda está muito enraizada nos nossos alunos. Isto fez com que alterassem as primeiras respostas dadas, o que em alguns casos, levou a que essas respostas deixassem de fazer sentido.

Os alunos, em geral, reagiram bem a esta forma de trabalhar. Estiveram na sua grande maioria empenhados na realização das tarefas propostas, quer na fase individual, quer na fase em grupo. Alguns alunos, com atitudes menos empenhadas nas aulas “habituais”, envolveram-se ativamente nas tarefas da 2.<sup>a</sup> fase. O fator motivação, por trabalharem com colegas que cometeram os mesmos erros do que eles, e o facto de verem, nalguns casos, a sua resolução no enunciado da proposta de trabalho, foram dois aspetos que destaco como influenciadores desta sua mudança de atitude. O significado atribuído ao *erro*, não só nesta proposta pedagógica, como também no dia a dia da sala de aula, permitiu que os alunos os aceitassem e começassem a compreender a sua importância. De facto, nesta proposta pedagógica: "O erro não constitui um estigma para quem o produz, mas antes um passo na construção do saber" (Pinto & Santos, 2006, p. 114).

## Reflexão final

Um aspeto que considero bastante positivo nesta experiência é o facto de colocarmos inicialmente, a todos os alunos, tarefas de exigência cognitiva mais elevada. Permite-nos assim ter expectativas elevadas para todos os alunos. A partir daí, caso os alunos não correspondam, podemos simplificar as tarefas ou formular questões que lhes permitam realizar a tarefa proposta, no entanto, tentando sempre que não haja alteração na natureza das tarefas. É aplicar a ideia defendida por Stein e Smith (2009), em que o professor deve dar apoio ao pensamento e raciocínio dos alunos e não transformar aspetos problemáticos das tarefas em simples processos rotineiros. Não correndo assim o risco de, por exemplo:

Os alunos pressionam o professor para reduzir a complexidade da tarefa especificando procedimentos explícitos ou passos para a realizar; o professor “toma conta” do pensamento e raciocínio e diz aos alunos como resolver o problema. (Stein & Smith, 2009, p. 27)

As questões colocadas por mim nas novas tarefas nem sempre promoveram, por si só, uma reflexão sobre o trabalho desenvolvido na fase inicial. A minha monitorização do trabalho dos grupos foi essencial para evitar a repetição de certos erros e, muitas vezes, para ajudar a esclarecer algumas dúvidas que foram surgindo.

Um outro aspeto, que poderia ser visto como uma dificuldade, no entanto eu considero-o uma mais-valia, é o facto das novas tarefas (sendo diferentes) gerarem, por vezes, discussões sobre assuntos que eu pensava que os alunos já tinham conhecimento. Na minha opinião, este facto contribui para uma melhoria das aprendizagens dos alunos na medida em que permite que o professor se aperceba de dificuldades que considerava já estarem ultrapassadas.

Não posso deixar de destacar um dos aspetos desta proposta pedagógica, que valorizo particularmente, que é a importância dada à autonomia dos alunos, na sua aprendizagem. De facto, o professor fornece os meios, mas são os alunos, entre eles, e se necessário com uma pequena intervenção do professor, que conseguem ultrapassar as dificuldades.

A ausência de estabilidade na constituição dos grupos de trabalho é uma dificuldade nesta metodologia. Os alunos, por motivos diversos, nem sempre trabalham bem com os colegas, logo à partida, precisando assim de algum tempo para se adaptarem uns aos outros. Ora, nesta experiência, os grupos mudam com muita regularidade, e nem sempre os posso agrupar do modo como acho que os grupos funcionariam melhor. Deste modo, não posso seguir sempre a ideia de que “ao pensar na composição dos grupos o professor deve atender ao conhecimento que tem de cada um dos alunos e ao tipo de atividade que lhes é proposta” (Abrantes, 1994, p 160). Quando há um grande número de alunos que comete o mesmo erro posso ser mais fácil fazê-lo, no entanto, se isso não acontecer, esta ideia torna-se difícil de pôr em prática.

Enquanto professora, senti algumas dificuldades na realização desta experiência, nomeadamente no tempo de preparação das tarefas da 2.<sup>a</sup> fase. Por vezes, não tinha muito tempo, entre a realização das duas fases, para identificar e agrupar os erros cometidos pelos alunos, e construir as tarefas, que considerava serem as mais adequadas de modo a levar os alunos a superarem dificuldades. Este obstáculo, poderá ser minimizado com a experiência profissional do professor. De facto, por um lado, eu há mais de dez anos que não tinha uma turma do 9.<sup>o</sup> ano, do ensino regular, pelo que já não me recordava das principais dificuldades sentidas pelos alunos. Por outro lado, os alunos também não tinham sido meus nos dois anos anteriores (7.<sup>o</sup> e 8.<sup>o</sup> anos) pelo que não sabia as dificuldades que tinham em conhecimentos, que eu pensava estarem adquiridos.

Assim penso que, tirando partido do conhecimento dos erros típicos dos alunos de, por exemplo, determinado ano de escolaridade ou num determinado tópico matemático, e/ou usando o conhecimento dos alunos, de anos anteriores, poderemos potencializar esta metodologia de trabalho. Podemos assim, antecipar a construção de algumas tarefas para a 2.<sup>a</sup> fase, e com mais tempo para reflexão, podemos construir tarefas mais adequadas.

O duplo papel, de professora e simultaneamente investigadora, apesar de difícil foi muito gratificante. Permitiu-me trabalhar sob duas perspetivas que têm muitos pontos em comum. Em particular, o perceber como podemos melhorar a qualidade das aprendizagens dos alunos.

Enquanto professora, procuro estratégias que acredito poderem melhorar as aprendizagens dos meus alunos, bem como, desenvolver neles um gosto pela aprendizagem da matemática, e um reconhecimento da importância. Para além das leituras que vou fazendo, é com base na experiência e no bom senso, que as vou construindo.

O papel de investigadora, quer durante o período de aulas em que desenvolvi esta proposta pedagógica, quer posteriormente, durante a escrita deste relatório, proporcionou-me não só mais tempo para refletir sobre esta experiência, como permitiu-me fazê-lo de uma forma mais continuada e consistente. Permitiu-me também, aceder a um momento de trabalho dos alunos - o seu trabalho em grupo, quando eu não estou presente – ao qual normalmente não acedo enquanto professora, pois não tenho o hábito de gravar as minhas aulas. Esta informação veio complementar a informação que eu tinha do trabalho dos meus alunos durante estas aulas, contribuindo assim para uma maior compreensão das suas dificuldades.

O desenvolvimento desta experiência de ensino foi o início de um “modelo de trabalho” que penso usar, e melhorar, nos próximos anos. De facto, esta experiência foi para mim bastante positiva e, apesar das dificuldades existentes na implementação deste modelo, considero-o, por um lado, um desafio interessante e com potencialidades para promover as aprendizagens matemáticas dos alunos. Por outro lado, e acreditando que a diferenciação pedagógica é fundamental nos dias de hoje, esta é uma forma para lidar com a diversidade de alunos existente nas nossas, cada vez maiores, turmas.

Será difícil aplicá-la simultaneamente em todas as turmas que leccionamos num ano letivo, mas acredito que não será muito difícil aplicá-la, desfasadamente e, em certos casos onde já antecipamos os erros que os alunos vão cometer. A nossa prática profissional ajudar-nos-á nesta situação.

A terminar, deixo aqui um desafio para outras investigações com base neste modelo pedagógico. Será que se este modelo for aplicado em qualquer outro ano de escolaridade, ou escolhendo um só tema matemático, as conclusões serão as mesmas?

## Referências

- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do Projecto MAT 789* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: DEB, Ministério da Educação.
- Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In A. G. B. Christiansen, *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Coleção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.
- Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.
- Despacho normativo n.º 14/2011, Diário da República, 2.ª série – N.º222, de 18 de novembro de 2011.
- Fernandes, D., Ferraz, M., Carvalho, A., Dantas, C., Cavaco, H., Barbosa, J., Tourais, L. & Neves, N. (1994). *Avaliação formativa: algumas notas. Pensar avaliação, melhorar a aprendizagem*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Fernandes, D. (2008). *Avaliação das aprendizagens: Desafios às teorias, práticas e políticas*. Lisboa: Texto Editores.
- Guba, E. & Lincoln, I. (1989). *Fourth generation of evaluation*. San Francisco: Jossey Bass.
- Guimarães, H. Leal, L.C. & Abrantes, P. (1991). *Avaliação: uma questão a enfrentar*. Atas do seminário sobre avaliação. Lisboa: APM
- Hadji, C. (1994). *A avaliação, regras do jogo. Das intenções aos instrumentos*. Porto, Portugal: Porto Editora.
- Hargreaves, A. & Fink, D. (2003). *The seven principles of sustainable leadership*. (documento distribuído na Conferência Pedagogia, Liderança e Inovação, que realizou na Fundação Aga Khan, em 6 e 7 de Fevereiro de 2006).
- Lessard-Hébert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa – Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.
- ME-DEB. (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: DEB, Ministério da Educação.

- ME-DGIDC. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Obtido em 28 de setembro de 2009, de <http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf>
- ME-DGIDC. (2009). *Equações do 2º grau a uma incógnita- Proposta de sequência de tarefas para o 9.º ano*. Obtido em 14 de setembro de 2011, de [http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/063-cadeia-Equações-2%20ºgrau.pdf](http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/063-cadeia-Equações-2%20ºgrau.pdf)
- Meirieu, P. (1988). *Apprende...oui, mais comment?*. Paris: ESF.
- NCTM. (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE (Original em Inglês, publicado em 1989).
- NCTM. (1999). *Normas para a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM (Original em Inglês publicado em 1995).
- NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM (Original em Inglês, publicado em 2000).
- NCTM. (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making*. Reston, VA: NCTM.
- Nunes, C. C., & Ponte, J. P. (2010). *O professor e o desenvolvimento curricular: Que desafios? Que mudanças?*. In GTI (Ed.), *O Professor e o programa de Matemática do Ensino Básico*. (pp. 61-88). Lisboa: APM.
- Oliveira, P. (2008). *O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia*. *Educação e Matemática*, 100, pp 3-9.
- Pinto & Santos (2006). *Modelos de avaliação das Aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Poincaré, H. (1996). *A invenção matemática*. In P. Abrantes, L. Leal & J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projeto MPT e APM. (Trabalho original publicado em 1908).
- Polya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. I – Induction and analogy in mathematics). Princeton: Princeton University Press. (Trabalho original em Inglês publicado em 1954).
- Pólya, G. (1977). *A arte de resolver problemas* (How to solve it). Rio de Janeiro: Interciência. (Original foi publicado em 1945).
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didática da matemática para o 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J.P., Branco, N., & Matos, A. (2009). Álgebra no ensino básico. Lisboa: DGIDC, Ministério de Educação. Obtido em 6 setembro de 2009, de [http://area.dgdc.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/algebra03brochuras.htm](http://area.dgdc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/algebra03brochuras.htm)
- Ponte J. P. & Sousa H. (2010). O professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico. In GTI (ed.), *Uma oportunidade de mudança na Matemática no Ensino Básico*. (pp.11-41). Lisboa: APM
- Prezemycki, H. (1991). Pédagogie différenciée. Paris: Hachette.
- Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In *Avaliação das aprendizagens: Das concepções às práticas* (pp. 77-84). Lisboa: DEB, Ministério da Educação.
- Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Orgs.), *Educação e matemática: Caminhos e encruzilhadas. Actas do encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 169-187). Lisboa: APM.
- Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Orgs.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação
- Santos, L. (2009). Diferenciação pedagógica: um desafio a enfrentar. *Noesis* 79, ( pp. 52-57). Obtido em 18 de maio de 2011, em: <http://www.dgdc.min-edu.pt/index.php?s=directorio&pid=172>
- Santos, L. (2010). *Avaliar para aprender. Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário*. Porto: Porto Editora.
- Santos, L. (2011). Pense Nisto. *Educação e Matemática*, 114, (p. 2).
- Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. *Educação e Matemática*, 105, (pp. 22-28).
- Vale L. (2010). *O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: um estudo com alunos do 7.º ano do ensino básico*. (Dissertação de mestrado. Universidade de Lisboa).

Yackel, E., & Coob, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), (pp.458–477).

**Endereços electrónicos:**

Projecto 1001 itens – GAVE, <http://www.gave.min-edu.pt/np3/109.html>, acedido em 18 de Fevereiro de 2012.

Stockholm Institute of Education, Skolverket.

[http://www.prim.su.se/matematok/ap\\_9/part\\_a\\_04.pdf](http://www.prim.su.se/matematok/ap_9/part_a_04.pdf) (s. d.)

## **ANEXOS**

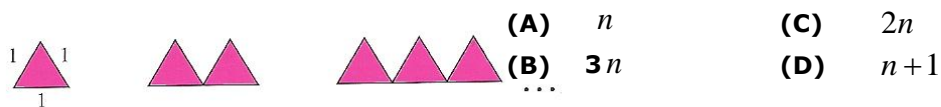
## Anexo 1 - Teste diagnóstico

**I-PARTE** – Para cada uma das seguintes questões escolhe a opção correcta:

1. O valor da expressão  $(-4^2)^0$  é:
- (A) -8                      (B) 16                      (C) 1                      (D) 0

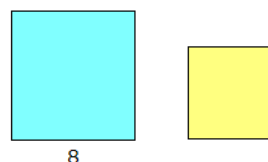
2. O sétimo termo da sequência de números definida por  $2n-1$  é:
- (A) 6                      (B) 13                      (C) 8                      (D) 14

3. O termo geral da sequência que nos dá o perímetro de cada figura é:



4. Sabendo que a razão de semelhança das duas figuras ao lado é  $\frac{3}{4}$  indica o comprimento do lado do quadrado menor:

- (A) 5      (B) 1      (C)  $\frac{11}{4}$       (D) 6

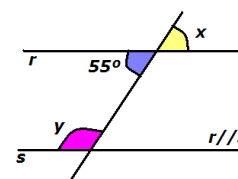


5. De uma função afim sabe-se que  $f(-1) = -10$ , e a imagem de zero é 4. A expressão algébrica que define a função  $f$  é:

- (A)  $f(x) = 2x - 8$       (B)  $f(x) = -2x - 12$       (C)  $f(x) = -x + 4$       (D)  $f(x) = 14x + 4$

6. Atendendo aos dados da figura, os valores das amplitudes dos ângulos  $x$  e  $y$  representados são respectivamente:

- $55^\circ$  e  $125^\circ$         $60^\circ$  e  $130^\circ$         $125^\circ$  e  $55^\circ$         $55^\circ$  e  $135^\circ$

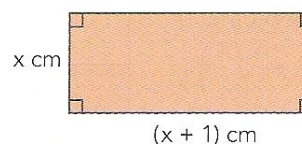


7. A equação  $\frac{7}{4} - x = -\frac{1}{3}$  é equivalente à equação:

- (A)  $25x = 12$       (B)  $x = 12$       (C)  $x = 25$       (D)  $12x = 25$

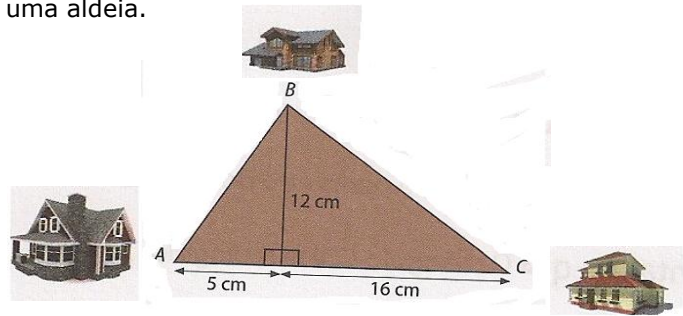
8. Perímetro do rectângulo da figura é:

- (A)  $x^2 + x$                       (C)  $x^2 + 1$   
 (B)  $2x + 1$                       (D)  $4x + 2$



## II-PARTE

1. A figura representa parte do mapa de uma aldeia.



2.1. Calcula a distância da casa B à casa C. Explica como pensaste.

2.2. O triângulo ABC é rectângulo? Justifica a tua resposta.

## Anexo 2 – Autorização dos Encarregados de Educação

Exmo. (a) Sr.(a) Encarregado de Educação

Eu, Ana Cristina Tudella, professora de Matemática da turma A do 9.º ano, venho por este meio informar que, no âmbito do Mestrado em Educação, na área de especialização de Didática da Matemática (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa), irei desenvolver um estudo nesta turma. Este estudo, incidirá sobre o tema da avaliação, numa perspectiva formativa, e pretende compreender como um método de trabalho na sala de aula, que envolva a diferenciação pedagógica, poderá contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem dos alunos nesta disciplina.

Estou convicta que a participação dos alunos neste projeto contribuirá para o desenvolvimento dos seus conhecimentos e capacidades em matemática.

Para a concretização plena deste projeto solicito a sua autorização para que sejam recolhidos dados em vários suportes, incluindo registos em áudio e em vídeo. Assim, solicito o preenchimento da seguinte declaração, assumindo eu o compromisso de manter o anonimato dos alunos.

Agradeço desde já a atenção dispensada.

Os meus cumprimentos.

S. Domingos de Rana, 10 de novembro de 2011

A professora de Matemática

(Ana Cristina Tudella)

Autorização

Eu, \_\_\_\_\_,  
Encarregado de Educação do(a) aluno(a)  
\_\_\_\_\_, n.º \_\_\_\_\_, da turma X do 9.º ano  
declaro que autorizo que, no âmbito do estudo sobre a Diferenciação pedagógica,  
realizado no presente ano lectivo pela professora Ana Cristina Tudella, sejam recolhidos  
dados do meu educando em suporte áudio e vídeo.

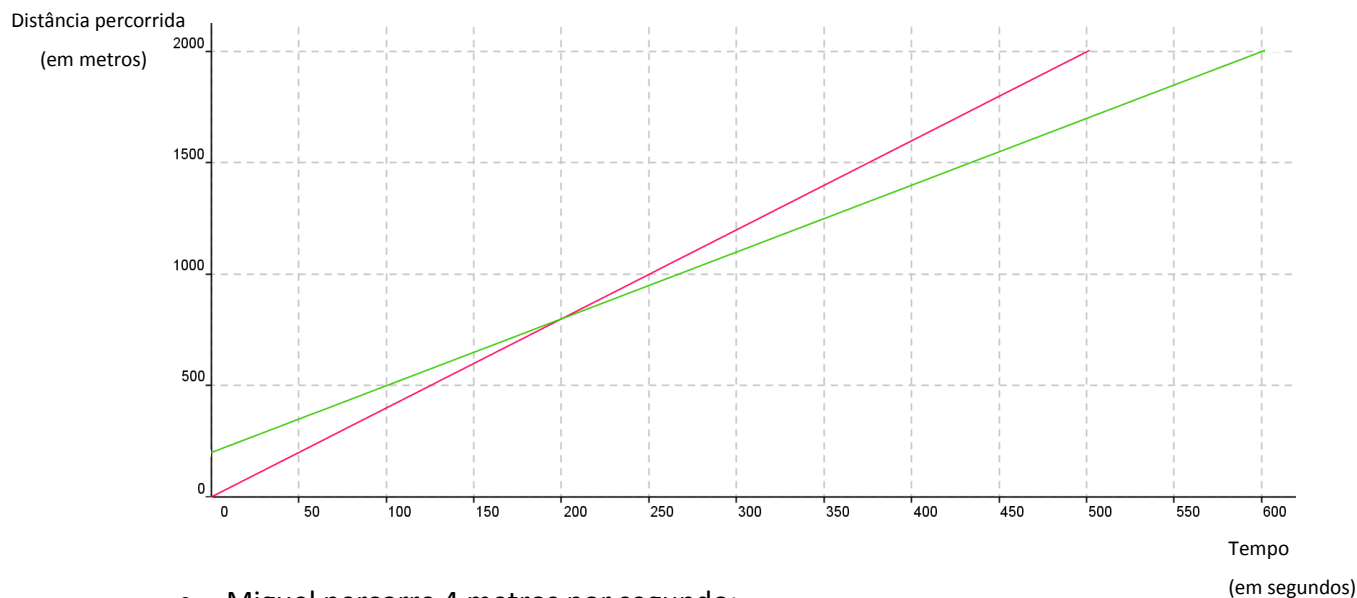
O(a) Encarregado(a) de Educação

---

### Anexo 3 – Tarefa inicial – A corrida da Rita e do Miguel

A Rita e Miguel resolveram fazer uma corrida numa pista de atletismo com 2000 metros. Para tornar a corrida mais justa, Miguel disse a Rita que a deixaria partir alguns metros à sua frente, afirmando que, mesmo assim, conseguiria vencer.

O gráfico abaixo mostra uma previsão sobre o modo como decorre a corrida, supondo que:



- Miguel percorre 4 metros por segundo;
- Rita percorre 3 metros por segundo e parte com um avanço inicial de 200 metros.

Observa o gráfico e responde às questões:

- Achas que Miguel tem razão? Porquê? Quem sai vencedor?
- Ao fim de 50 segundos que distância percorreu o Miguel? E a Rita? Apresenta o teu raciocínio.
- Quanto tempo demorou a Rita a percorrer 1400 metros? Explica como pensaste.

*Tarefa adaptada da Brochura da Álgebra (DGIDC)*



## **Anexo 5 – Tarefa inicial – Percentagens e Áreas**

O comprimento de um retângulo aumenta 10% e a sua largura diminui 10%. Investiga o que acontece à sua área.

## **Anexo 6 – Tarefa inicial – Probabilidades**

### ***Teste de avaliação - Versão A***

**1.** O Manuel tem, num saco, três bolas indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 3

1.1. O Manuel retira uma bola do saco, regista o número da bola e repõe a bola no saco.

O Manuel repete este procedimento doze vezes.

A sequência 1,1,2,3,2,2,1,1,3,1,2,1 é a sequência dos números registados pelo Manuel.

Indica a mediana deste conjunto de números.

**1.2.** Admite agora que o Manuel retira uma bola do saco, regista o número da bola e **não** repõe a bola no saco. Em seguida, retira outra bola do saco e regista também o número desta bola.

Qual é a probabilidade de o produto dos números que o Manuel registou ser um número par?

Apresenta a resposta na forma de fracção.

Mostra como chegaste à tua resposta.

### ***Testes de avaliação - Versão B***

**1.** O Manuel tem, num saco, três bolas indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 3

1.1. O Manuel retira uma bola do saco, regista o número da bola e repõe a bola no saco.

O Manuel repete este procedimento catorze vezes.

A sequência 1,1,2,3,2,2,1,1,3,1,2,1,3,2 é a sequência dos números registados pelo Manuel.

Indica a mediana deste conjunto de números.

**1.2.** Admite agora que o Manuel retira uma bola do saco, regista o número da bola e **não** repõe a bola no saco. Em seguida, retira outra bola do saco e regista também o número desta bola.

Qual é a probabilidade de o produto dos números que o Manuel registou ser um número ímpar?

Apresenta a resposta na forma de fracção.

Mostra como chegaste à tua resposta.

## Anexo 3 A – Tarefa A – A corrida da Rita e do

1. No final de uma corrida de qualquer tipo (atletismo, ciclismo, automobilismo,...) como é que se sabe quem é o vencedor?

2. Um dos alunos da turma respondeu à alínea a) da seguinte forma:

“Sim. Porque o Miguel vai ser mais rápido que a Rita. Quem vai ser o vencedor é o Miguel”.

- Acham que este aluno apresenta uma boa justificação para o fato do Miguel ter ganho a corrida? Porquê?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- Qual seria, na vossa opinião, a resposta mais completa?

3. Na resolução da questão b) alguns dos alunos da turma responderam:

“Em 50 segundos:

- Miguel percorre 200m e a Rita 300m;
- Miguel percorre 100m e a Rita 203m;
- Miguel percorre 125m e a Rita 325m;
- Miguel percorre 150m e a Rita 500m.”

Na vossa opinião, o que levou a que vários alunos da turma obtivessem resultados diferentes? Serão todas respostas possíveis, ou algum destes valores é notoriamente incorrecto? Porquê?

4. Tendo em conta os dados do problema, encontra um valor exato para a distância percorrida pelo Miguel e pela Rita ao fim de 50s.

### Anexo 3 B – Tarefa B – A corrida da Rita e do Miguel

1. Observa a seguinte resolução de um dos vossos colegas da turma:

“Miguel

$$\begin{array}{r} 1 \quad \underline{\quad} \quad 4 \\ 50 \quad \times \end{array} \quad \frac{50 \times 4}{1} = 200m$$

R: Ao fim de 50 segundos o Miguel percorreu 200m.

Rita

$$\begin{array}{r} 1 \quad \underline{\quad} \quad 3 \\ 50 \quad \times \end{array} \quad \frac{50 \times 3}{1} = 150m$$

R: Ao fim de 50 segundos a Rita percorreu 150m.”

Com base nesta resolução, respondam às questões seguintes:

- Ao fim de 50 segundos qual foi a distância percorrida pelo Miguel? E pela Rita?
- Quem vai à frente da corrida? Porquê?
- Quanto falta à Rita e ao Miguel para terminarem a corrida?
- Compara estas vossas respostas com o gráfico apresentado na ficha de trabalho. O que podem concluir?

2. Com base na observação do gráfico e nos dados do problema resolvam novamente a questão b) da ficha de trabalho.

3. Encontrem uma expressão algébrica que traduza a relação entre o tempo e a distância percorrida:
- Para o caso do Miguel
  - Para o caso da Rita

### Anexo 3 C – Tarefa C – A corrida da Rita e do Miguel

1. No final de uma corrida de qualquer tipo (atletismo, ciclismo, automobilismo,...) como é que se sabe quem é o vencedor?

2. Um dos alunos da turma respondeu à alínea a) da seguinte forma:

“Sim. Porque o Miguel vai ser mais rápido que a Rita. Quem vai ser o vencedor é o Miguel”.

- Acham que este aluno apresenta uma boa justificação para o fato do Miguel ter ganho a corrida? Porquê?

- Qual seria, na vossa opinião, a resposta mais completa?

3. Observa a seguinte resolução de um dos vossos colegas da turma:

“Miguel

$$\begin{array}{r} 1 \text{ — } 4 \\ 50 \quad \times \end{array} \quad \frac{50 \times 4}{1} = 200m$$

R: Ao fim de 50 segundos o Miguel percorreu 200m.

Rita

$$\begin{array}{r} 1 \text{ — } 3 \\ 50 \quad \times \end{array} \quad \frac{50 \times 3}{1} = 150m$$

R: Ao fim de 50 segundos a Rita percorreu 150m.”

Com base nesta resolução, respondam às questões seguintes:

- Ao fim de 50 segundos qual foi a distância percorrida pelo Miguel? E pela Rita?
- Quem vai à frente da corrida? Porquê?
- Quanto falta à Rita e ao Miguel para terminarem a corrida?

- Compara estas vossas respostas com o gráfico apresentado na ficha de trabalho. O que podem concluir?
4. Com base na observação do gráfico e nos dados do problema resolvam novamente a questão b) da ficha de trabalho.
5. Encontrem uma expressão algébrica que traduza a relação entre o tempo e a distância percorrida:
- Para o caso do Miguel
  - Para o caso da Rita

## Anexo 3 D – Tarefa D – A corrida da Rita e do Miguel

1. No final de uma corrida de qualquer tipo (atletismo, ciclismo, automobilismo,...) como é que se sabe quem é o vencedor?
  
2. Um dos alunos da turma respondeu à alínea a) da seguinte forma:  
“Sim. Porque o Miguel vai ser mais rápido que a Rita. Quem vai ser o vencedor é o Miguel”.
  - Acham que este aluno apresenta uma boa justificação para o fato do Miguel ter ganho a corrida? Porquê?
  
  - Qual seria, na vossa opinião, a resposta mais completa?
  
3. Comparem as vossas resoluções da questão c). Alguma das duas está correta? Porquê?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
4. Encontrem uma expressão algébrica que traduza a relação entre o tempo e a distância percorrida:
  - Para o caso do Miguel
  - Para o caso da Rita

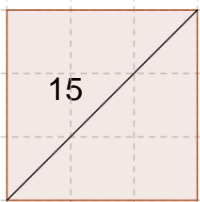
## Anexo 4 A – Tarefa A – A diagonal de um quadrado

### Tarefa 1:

“1. A diagonal de um quadrado tem 15 cm de comprimento. Determina o valor exato da área e do perímetro deste quadrado. Apresenta o teu raciocínio.”

Para resolver este problema alguns alunos da turma usaram as seguintes estratégias:

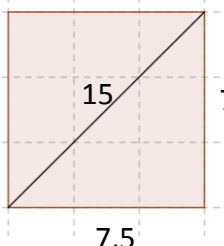
#### Resolução 1:



O lado mede 15 cm, logo

$$A_{\square} = 15 \times 15 = 225$$
$$P_{\square} = 15 + 15 + 15 + 15 = 60$$

#### Resolução 2:



$15 : 2 = 7,5$

$$A_{\square} = 7,5 \times 7,5 = 56,25$$
$$P_{\square} = 7,5 + 7,5 + 7,5 + 7,5 = 7,5 \times 4 = 30$$


- O que há em comum nestas duas resoluções? E de diferente?
- Concordam com alguma delas? Porquê?

### Tarefa 2: (Não se esqueçam de proceder aos registos das vossas experiências/observações)

Com o auxílio do Geogebra:

- Construam um quadrado com as dimensões que quiserem e meçam o comprimento do seu lado;
- Representem uma das suas diagonais e meçam-na;
- Comparem as medidas do lado, e da diagonal do vosso quadrado? O que observam?
- Alguma das relações, entre as medidas do lado e a medidas da diagonal, referidas na tarefa anterior parece-vos ser válida? Porquê?

### Tarefa 3:

Com a opção  do *Geogebra* arrastem um dos vértices do quadrado e observem como variam estas duas medidas. Registem na seguinte tabela as vossas experiências e completem-na.

| Medida do lado do quadrado (L) | Medida da diagonal (D) | $L^2$ | $D^2$ |
|--------------------------------|------------------------|-------|-------|
|                                |                        |       |       |
|                                |                        |       |       |
|                                |                        |       |       |
|                                |                        |       |       |
|                                |                        |       |       |

Observem os valores da tabela. Que relações encontram entre eles?

## Anexo 4 B – Tarefa B – A diagonal de um quadrado

Relembra a definição de potência de um número

**Potência** é um produto de fatores iguais.

O fator que se repete é a **base**. O número de vezes que o fator se repete é o **expoente**.

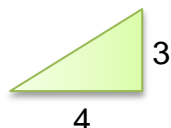
Ex:  $2 \times 2 \times 2 = 2^3$



1. A seguinte afirmação é verdadeira? Justifica.  
“ $a^n = n \times a$ , sendo  $a$  um nº real qualquer e  $n$  um número natural qualquer.”

2. No manual escolar da Alice aparece o seguinte exercício:

Calcula o comprimento da hipotenusa de um triângulo rectângulo cujos catetos medem 3 e 4 cm.



A Alice resolveu-o da seguinte forma:

$$h^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow h^2 = 8 + 6 \Leftrightarrow h^2 = 12 \Leftrightarrow h = \sqrt{12}$$

No entanto quando foi verificar o resultado obtido, viu que sua solução estava errada. Qual foi o erro cometido pela Alice? Qual seria o resultado correto?

## Anexo 4 C – Tarefa C – A diagonal de um quadrado

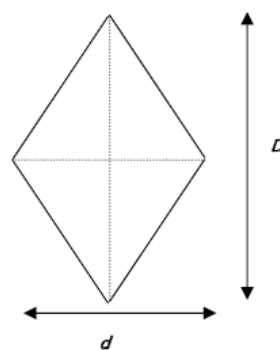
### Quadrados e as suas diagonais

1. Assinala qual das seguintes afirmações é **falsa**:

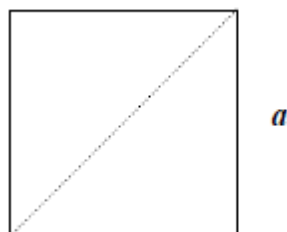
- (A) As diagonais de um quadrado são sempre iguais e perpendiculares.
- (B) A medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede 1 unidade é  $\sqrt{2}$ .
- (C) A medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede  $a$  unidades é  $\sqrt{2}a$ .
- (D) A medida da diagonal de um quadrado é sempre maior do que o seu lado.

2. A área de um losango pode determinar-se a partir da medida das suas diagonais, utilizando a fórmula:

$$A_{\text{Losango}} = \frac{D \times d}{2}$$



Mostra que, para calcular a área de um quadrado de lado  $a$ , se pode utilizar a fórmula anterior.



*Tarefa retirada dos 1001 itens*

## Anexo 5 A – Tarefa A – Percentagens e Áreas

1. A Susana está a estudar a composição dos iogurtes que mais gosta.  
Na lista de ingredientes está escrita a **percentagem** de polpa de fruta contida na embalagem:

“Polpa de fruta 12%”

Isto significa que em cada 100g de iogurte há 12g de polpa de fruta.

a) Qual é a quantidade de polpa de fruta existente em 200g de iogurte? E em 50?  
E em 250g? Explica como pensaste.

b) Qual a quantidade de polpa de fruta existente em 1g de iogurte? E em 340g?  
Justifica.

2. Um outro iogurte contém apenas 5% de polpa de fruta.

a) Qual é o significado desta informação?

b) Qual é a quantidade de polpa de fruta existente em 125g? E em 250? E em  
360? Justifica.

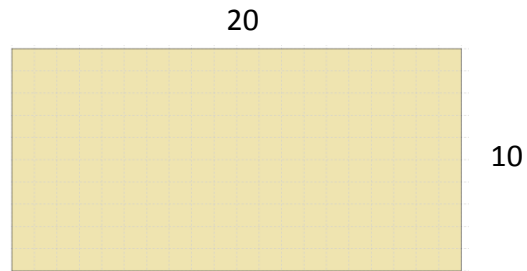
3. O comprimento do seguinte retângulo foi aumentado em 50%. Qual é o  
comprimento no novo retângulo?



15

## Anexo 5 B – Tarefa B – Percentagens e Áreas

1. Considera o seguinte retângulo:



- Calcula a sua área.
- Se aumentarmos 10% o comprimento deste retângulo, iremos obter um novo retângulo. Qual será o seu comprimento?
- Se diminuirmos 10% a largura do retângulo inicial, iremos obter um novo retângulo. Qual será a sua largura?
- Assim, se aumentarmos 10% o comprimento do retângulo inicial e diminuirmos 10% a sua largura, iremos obter um novo retângulo. Quais serão as suas medidas? Calcula a sua área e compara-a com a área do retângulo inicial. O que podes concluir?

2. Um dos vossos colegas de turma deu a seguinte resposta ao problema: *O comprimento de um retângulo aumenta 10% e a sua largura diminui 10%. Investiga o que acontece à sua área.?*

*A sua área fica igual porque tira-se de um lado e mete-se no outro.*

Concordam com esta afirmação? Porquê?

## Anexo 5 C – Tarefa C – Percentagens e Áreas

1. Nas resoluções do vosso grupo consideraram retângulos com diferentes medidas. Por exemplo:

$C= 100$  e  $L=10$ ;  $C=110$  e  $L=9$  ;  $C=85$  e  $L = 62$ ;  $C= 50$  e  $L = 20$ ;  $C= 30$  e  $L= 10$ ;  $C= 1000$  e  $L= 500$  ( ...)

Será que com os exemplos que consideraram podem dizer que as conclusões que tiraram são válidas para qualquer retângulo? Porquê?

2. Conseguem generalizar o vosso raciocínio para um retângulo qualquer, isto é, considerando que o comprimento desse retângulo é  $C$  e a largura  $L$ ?

## Anexo 6 A – Tarefa A – Probabilidades

1. Hoje, vou pedir-vos que façam parte do meu trabalho. Assim, proponho-vos que classifiquem a seguinte resolução (resolução A) da questão 1.2 do teste, usando para tal os seguintes critérios de classificação fornecidos pelo GAVE:

Nota: Estes critérios são da versão A. Na versão B, a probabilidade pedida é  $\frac{1}{3}$  (ou equivalente).

| Resolução A | 1.2 ..... 7 pontos  |
|-------------|---|
|             | <p>A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:</p> <p>Apresentar um diagrama em árvore ou uma tabela de dupla entrada que traduza a experiência, ou indicar os possíveis pares de números registados (1 e 2, 1 e 3, 2 e 3) ..... 3 pontos</p> <p>Indicar o número de casos possíveis ..... 1 ponto</p> <p>Indicar o número de casos favoráveis ..... 1 ponto</p> <p>Indicar a probabilidade pedida (<math>\frac{2}{3}</math> ou equivalente) ..... 2 pontos</p> |

Crítérios de correção do 1º teste intermédio de matemática de 2011

Observem as seguintes resoluções da mesma questão, de ambos os testes:

### Resolução B (Teste A)

### Resolução C (Teste B)

### Resolução C (Teste A)

| X | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | X | 2 | 3 |
| 2 | 2 | X | 6 |
| 3 | 3 | 6 | X |

$P(\text{"produto em } n^{\circ} \text{ par"}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Lei de Laplace

$$\frac{n^{\circ} \text{ casos favoráveis}}{n^{\circ} \text{ casos possíveis}} = \frac{4}{6}$$

Conseguem perceber bem os raciocínios dos vossos colegas? Quais são os pontos fortes e os pontos fracos de cada uma destas resoluções?

Como seria a resolução "ideal"?

## Anexo 6 B – Tarefa B – Probabilidades

1. Um saco tem 3 bolas indistinguíveis aos tato, numeradas de 1 a 3.



Considera as seguintes experiências aleatórias:

A: “Retirar uma bola do saco, registar o número da bola e voltar a colocá-la no saco”

Qual é o espaço de resultados?

B: “Retirar, simultaneamente, 2 bolas do saco, registar os seus números e voltar a introduzi-las no saco.”

Qual é o espaço de resultados?

C: “Retirar uma bola do saco, registar o seu número e voltar a introduzi-la no saco. Em seguida, retirar novamente uma bola do saco, registar o seu número e voltar a colocá-la no saco.

Qual é o espaço de resultados?

2. Um dos alunos da turma resolveu, erradamente, a questão 1.2 do teste B da seguinte forma:

1.2. Admite agora que o Manuel retira uma bola do saco, regista o número da bola e **não** repõe a bola no saco. Em seguida, retira outra bola do saco e regista também o número desta bola.

Qual é a probabilidade de o produto dos números que o Manuel registou ser um número ímpar?

Apresenta a resposta na forma de fracção.

Mostra como chegaste à tua resposta.

R: Se o Manuel retirar as bolas do saco sem as repor existem 2 casos possíveis.

$$\frac{2}{3}$$

Na vossa opinião, qual (ou quais) foi (foram) o(s) erro(s) cometido(s) pelo vosso colega?

Porquê?

2. Formulem um problema de probabilidades cuja resolução envolva a construção de uma tabela de dupla entrada ou um diagrama em árvore. (Sejam criativos!)

1.

## Anexo 6 C – Tarefa C – Probabilidades

1. Considerem a experiência: “Lançar um dado cúbico e registar o número da face que fica voltada para cima.



- a) Qual é a probabilidade de sair o número 4?
- b) Experimenta lançar o dado 10 vezes e registar o número que fica voltado para cima.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Qual é a probabilidade de sair o número 4?

- c) Comparem os valores obtidos nas duas alíneas anteriores. Que justificação encontram para o sucedido?

2. Leiam atentamente as seguintes questões do teste de avaliação e respondam às questões que se seguem.

**1.** O Manuel tem, num saco, três bolas indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 3

**1.1.** O Manuel retira uma bola do saco, regista o número da bola e repõe a bola no saco.

O Manuel repete este procedimento doze vezes.

A sequência 1,1,2,3,2,2,1,1,3,1,2,1 é a sequência dos números registados pelo Manuel.

Indica a mediana deste conjunto de números.

- a) Qual é a experiência aleatória nesta questão? Descrevam-na.

**1.2.** Admite agora que o Manuel retira uma bola do saco, regista o número da bola e **não** repõe a bola no saco. Em seguida, retira outra bola do saco e regista também o número desta bola.

Qual é a probabilidade de o produto dos números que o Manuel registou ser um número par? Apresenta a resposta na forma de fracção.

Mostra como chegaste à tua resposta.

- b) Qual é a experiência aleatória nesta questão? Descrevam-na.



c) Um dos alunos da turma resolveu a questão 1.2 do teste do seguinte modo:

1 1 2 3 2 2 1 1 3 1 2 1

1 e 3  $\rightarrow$  n° ímpar  
2  $\rightarrow$  n° par

A probabilidade de ser número par é de  $\frac{4}{12} = 0.33\%$

- Encontram algum problema nesta resolução? Justifiquem a vossa resposta.

## Anexo 6 D – Tarefa D – Probabilidades

1. Um saco tem 3 bolas indistinguíveis aos tato, numeradas de 1 a 3.



Considera as seguintes experiências aleatórias:

A: “Retirar uma bola do saco, registar o número da bola e voltar a colocá-la no saco”

Qual é o espaço de resultados?

B: “Retirar, simultaneamente, 2 bolas do saco, registar os seus números e voltar a introduzi-las no saco.”

Qual é o espaço de resultados?

C: “Retirar uma bola do saco, registar o seu número e voltar a introduzi-la no saco. Em seguida, retirar novamente uma bola do saco, registar o seu número e voltar a colocá-la no saco.

Qual é o espaço de resultados?

2. Para a seguinte experiência:

“Retirar uma bola do saco, registar o número da bola e **não** repor a bola no saco. Em seguida retirar, novamente, uma bola do saco e registar também o número dessa bola.”

Observação: podes usar um esquema, uma tabela, um diagrama em árvore,... para ajudar-te a resolver a questão.

Qual é o espaço de resultados?

Qual é a probabilidade de sair primeiro o número 1 e depois o número 2?

Qual a probabilidade do produto desses números ser par? E de ser ímpar? Explica como pensaste.