

X961116152

Reservado



**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO**

MESTRADO EM: Matemática Aplicada à Economia e Gestão

**SOBRE O EFEITO DA CORRELAÇÃO ENTRE RENDIBILIDADE E
VOLATILIDADE DO ACTIVO SUBJACENTE
NA VALORIZAÇÃO DE OPÇÕES**

APLICAÇÕES AOS MERCADOS ACCIONISTAS EUROPEU E NORTE-AMERICANO

RAQUEL MARIA MEDEIROS GASPAR

Orientação: Professor Doutor João Luís Correia Duque
Professor Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível

Júri:

Presidente: Professor Doutor Carlos da Silva Ribeiro
Vogais: Professor Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível
Professor Doutor João Luís Correia Duque
Professor Doutor Miguel Luís Sousa de Almeida Ferreira

JULHO 2001



Prefácio

Ao abrigo do programa Sócrates/Erasmus, durante o quarto ano da minha licenciatura, frequentei na Faculdade de Economia da Universidade Erasmus de Roterdão, uma cadeira sobre Derivados. Nasceu aí o meu interesse sobre futuros e opções e sobre a sua valorização através de modelos matemáticos. Após a conclusão da licenciatura, tive ocasião de realizar um estágio na então Bolsa de Derivados do Porto, bem como de frequentar vários seminários e uma pós-graduação sobre a matéria.

A consciência da necessidade de melhorar os meus conhecimentos em matemática financeira, para poder realizar investigações sobre derivados, trouxe-me ao Mestrado em Matemática Aplicada à Economia e Gestão. Na parte escolar, tive ocasião de adquirir várias das “ferramentas” que buscava e que vim a complementar, mais tarde, com a frequência de algumas das cadeiras de uma outra pós-graduação. Ao realizar a investigação que esteve na base desta dissertação, procurei dar uso a essas “ferramentas”.

Os juízos que venham a recair sobre este trabalho dir-me-ão em que medida é uma boa base para ir mais longe no caminho escolhido. Mais do que teses definitivas, o que se apresenta para discussão são métodos de análise. Isso resulta não apenas do ponto do percurso em que me encontro, mas sobretudo do tema escolhido – que, pela sua novidade, apenas propicia análises experimentais.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer aos Professores João Duque e Manuel Esquível por terem aceitado orientar esta investigação e em especial, no que toca ao Professor João Duque, pela sugestão da qual veio a resultar o tema e, no que toca ao Professor Manuel Esquível, pelo apoio constante durante toda a investigação, particularmente no que se refere aos primeiros testes feitos à consistência das conclusões obtidas.

Apesar do perigo das omissões, deixo ainda registados outros agradecimentos específicos: ao Professor Vorst, que regeu a cadeira de Derivados que frequentei na Faculdade de Economia da Universidade Erasmus de Roterdão, não apenas por o seu ensino ter sido o primeiro factor do meu interesse sobre a matéria, mas também pelas prontas indicações que me deu quando o contactei a propósito deste trabalho; ao Dr. Alves Monteiro, Administrador Delegado da então BDP, na qual tive ocasião de ter o primeiro contacto real com os derivados e que, desde então, foi um apoio permanente na minha evolução académica e profissional; ao Professor Rodrigues da Costa e à Professora Celma Ribeiro pelo interesse que manifestaram em diversos períodos da elaboração da dissertação; ao Professor Bjork, por valiosas indicação que me deu quando o abordei sobre o assunto que aqui trato e pelo estímulo que recebi para a conclusão deste trabalho e para o futuro; aos colegas Carlos Veiga, Jorge Guimarães, e João Faria pelos apoios técnicos que não regatearam; à minha Família e ao Nuno que me incentivaram e, com a nítida consciência da inevitabilidade, me ouviram nas horas em que me parecia não haver progresso.

Estou também muito agradecida a todos os meus amigos pelo apoio que sempre me deram durante todo este período.

À minha Mãe,

RESUMO:

Hoje em dia já não se discute a “estocasticidade” da volatilidade, mas mesmo os mais sofisticados modelos de volatilidade estocástica parecem errar de forma sistemática a valorização de opções que incidem sobre subjacentes de mercados accionistas. Uma das causas apontadas como possivelmente explicativa desses erros é a existência de uma eventual correlação entre a rendibilidade e a volatilidade nos activos desses mercados. Esta dissertação procura ser um contributo para o estudo dessa correlação, através da apresentação de uma proposta de explicação teórica sobre o efeito que uma correlação constante entre rendibilidade e volatilidade do activo subjacente aparenta ter na distribuição do preço dos activos financeiros e, conseqüentemente, na valorização das opções que sobre eles incidam – contrariando ideias defendidas nalguns dos estudos anteriormente realizados.

O estudo sobre a existência e sobre estrutura dessa correlação, para os índices Eurostoxx50 e Standard&Poors500, constitui a segunda vertente – a de cariz empírico desta dissertação.

PALAVRAS-CHAVE: Opções; Modelo de Black-Scholes; Volatilidade; Correlação; Processos Estocásticos; Simulação de Monte Carlo.

Índice

	Páginas
Lista de Símbolos, abreviaturas e termos em inglês	8
Lista de Figuras	12
Lista de Quadros	15
1 – Introdução	18
Parte I	
2 – Modelização Matemática para Valorização de Opções	
2.1 Antes de Black-Scholes	25
2.2 O Modelo de Black-Scholes	28
2.2.1 O princípio da cobertura de risco	29
2.2.2 O argumento da neutralidade face ao risco	31
2.2.3 A fórmula de Black-Scholes e as suas propriedades	33
2.3 Limitações e “enviesamentos” do modelo de Black-Scholes	35
2.4 Conclusão	36
2.5 Apêndice	37
3 – Modelo de Volatilidade Estocástica	41
3.1 Modelos de Volatilidade Estocástica	42
3.1.1 Sem introdução de ruído adicional	42
3.1.2 Com introdução de ruído adicional	43
3.1.3 Sistematização dos principais modelos	45
3.2 O Modelo	46
3.3 Conclusão	50
3.4 Apêndice	51
4 – Impacto da Correlação na Valorização de Opções	
4.1 Intuição sobre os efeitos de uma correlação constante	54
4.2 A metodologia de análise – simulação de Monte Carlo	61
4.2.1 Os valores de referência dos parâmetros	62
4.2.2 Estratégias de simulação	66
4.3 Conclusão	68
5 – Valor das Opções para Diferentes Valores de ρ , τ , \sqrt{V} e δ - Resultados das Simulações de Monte Carlo	69
5.1 Diferentes correlações : ρ	70

5.2 Diferentes vencimentos : τ	76
5.3 Diferentes volatilidades de longo prazo : $\sqrt{\hat{V}}$	80
5.4 Diferentes volatilidades de volatilidade : δ	83
5.5 Conclusões	86
Parte II	
6 – Os Dados	
6.1 Activo subjacente e <i>dividend yield</i>	88
6.2 Taxa de juro sem risco	90
6.3 Volatilidade	92
6.3.1 Volatilidade histórica	93
6.3.2 Volatilidade implícita	94
6.4 <i>Moneyness</i>	94
6.5 A amostra utilizada	95
6.6 Conclusões	97
6.7 Apêndice	98
7 – Estudo Empírico da Correlação	
7.1 Estudos sobre a correlação entre rendibilidade e volatilidade	101
7.2 Análise gráfica da relação entre as variáveis dos preços de volatilidade	103
7.3 Uma primeira abordagem para a estimação da correlação	107
7.4 Conclusão	111
8 – Estudo Empírico das Volatilidades Implícitas	
8.1 Padrões de volatilidade implícita	112
8.2 Conclusões	117
9 – Breves Considerações para Investigação Futura	
	119
10 – Conclusões	
	121
Anexos	
Anexo 1: Conceitos	124
Anexo 2: Métodos numéricos para equações diferenciais estocásticas	134
Anexo 3: Programas	142
Bibliografia	
	155

Listas de símbolos, termos em inglês e abreviaturas

Símbolos

- B : activo sem risco
 S : valor do activo subjacente à opção (activo de risco)
 μ : rendibilidade esperada do activo subjacente
 σ : volatilidade do activo subjacente
 r : taxa de juro sem risco
 q : *dividend yield*
 W : processo de Wiener
 σ_{imp} : volatilidade implícita segundo o modelo de Black-Scholes

$V = \sigma^2$: variância do activo subjacente

- a : variância de longo prazo
 b : coeficiente de reversão à média da variância
 a^* : variância de longo prazo neutra face ao risco
 b^* : coeficiente de reversão à média da variância neutro face ao risco
 δ : volatilidade da volatilidade

I : valor de um qualquer derivado

F, G : valores de derivados com o mesmo activo subjacente

w : valor esperado para o *payoff* de um derivado

α : rendibilidade esperada de um qualquer derivado

θ : coeficiente de difusão, de um qualquer derivado, associado a W_1

γ : coeficiente de difusão, de um qualquer derivado, associado a W_2

W_1, W_2 : processos de Wiener independentes

W_1^*, W_2^* : processos de Wiener correlacionados

ρ : correlação entre W_1^* e W_2^*

Π : carteira de activos

π : peso (em percentagem) dos activos que constituem a carteira

λ : “preço” do risco

c : valor de uma opção *call*

p : valor de uma opção *put*

X : preço de exercício da opção

η : *moneyness*

Δ : *delta* de uma opção

τ : tempo de vida

0 : momento inicial

t : momento de tempo t

T : vencimento

Δt : instante de tempo

$E()$: valor esperado

E^* : valor esperado num mundo neutro face ao risco

$\text{Pr}()$: probabilidade de determinado acontecimento

$N()$: valor da função de distribuição normal

$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$: variáveis aleatórias normais padronizadas

ϕ : função de densidade normal padronizada

$\zeta()$: função de Dirac

Termos em Inglês

- Call:** opção de compra; contrato mediante o qual o comprador tem o direito (não a obrigação) de adquirir em dada data (ou até dada data), um determinado activo (dito activo subjacente) em quantidade e qualidade pré-estabelecida e a um preço pré-acordado (preço de exercício).
- Delta, Theta e Vega:** alguns dos chamados “gregos” de uma opção; medidas do impacto, no valor do derivado, de variações infinitesimais nos parâmetros S , τ e σ , respectivamente.
- Dividend yield:** taxa de dividendo; percentagem que o valor do dividendo representa do valor do activo.
- Drift:** tendência.
- Feedback:** efeito de ricochete.
- In/At/Out-of-the-money:** uma opção diz-se *in-the-money* quando o exercício permite um ganho ao comprador; diz-se estar *at-the-money* sempre que o ganho é nulo; diz-se *out-of-the-money* quando o exercício redundaria num prejuízo para o comprador (a escolha do comprador é o não exercício).
- Kurtosis:** medida do achatamento de uma distribuição.
- Moneyness:** grau de *in-*, *at-*, ou *out-of-the-money* de uma opção.
- Payoff:** ganho obtido, no vencimento, pelo exercício de uma opção.
- Plain vanilla:** forma mais simples de um instrumento financeiro. Uma opção *plain vanilla* é uma opção que pertence a um dos tipos básicos *call* ou *put* e que é europeia, i.e., que só permita o exercício no vencimento da opção.
- Put:** opção de venda; contrato mediante o qual o comprador tem o direito (não a obrigação) de venda em dada data (ou até dada data), de um determinado activo (dito activo subjacente) em quantidade e qualidade pré-estabelecida e a um preço pré-acordado (preço de exercício).
- Skewness:** medida do enviesamento ou assimetria de uma distribuição.

A opção pela utilização destes termos em inglês deve-se a três tipos de motivos.

Por um lado, alguns dos termos utilizados não têm tradução prática em português, i.e., são utilizados apenas os termos em inglês, quer no mercado quer na literatura (caso dos termos *delta*, *dividend yield*, *in/at/out-of-the-money* e *moneyness*, *payoff*, *plain vanilla*).

Por outro, mesmo quando existe tradução em português (caso dos termos *call*, *drift*, *feedback* e *put*) a sua utilização não garantiria maior facilidade de exposição de ideias.

No caso dos termos *kurtosis* e *skewness*, por nesta dissertação se utilizar o termo “enviesamento” para traduzir *bias*, nomeadamente no caso dos “enviesamentos” do modelo de Black-Scholes; tendo-se optado, por não traduzir *skewness*, por uma questão de coerência, optou-se também não traduzir *kurtosis*.

Abreviaturas

BS:	Black- Scholes (1973)
CEV:	<i>Constant elasticity of variance</i>
DDM:	<i>Displaced diffusion model</i>
HW:	Hull e White (1987)
Ht:	Heston (1993)
DM:	Dissertação de Mestrado
ITM:	<i>in-the-money</i>
ATM:	<i>at-the-money</i>
OTM:	<i>out-of-the-money</i>
S&P:	Índice accionista Standard&Poor 500
Eurostoxx:	Índice Accionista Eurostoxx 50



Lista de Figuras

	Páginas
n°1 – Gráfico do valor de uma opção <i>call</i> europeia vs. preço do activo subjacente quando falta um dado tempo, τ , para a expiração da opção. (Reprodução de uma imagem de Hull (1989)).	34
n°2 – Gráfico do valor de uma opção <i>put</i> europeia vs. preço do activo subjacente quando falta um dado tempo, τ , para a expiração da opção. (Reprodução de uma imagem de Hull (1989)).	34
n°3 – Efeito que se espera que a correlação negativa tenha na distribuição de rendibilidades, de acordo com as ideias defendidas na presente dissertação.	56
n°4 – Efeito que Heston espera que a correlação negativa tenha na distribuição de rendibilidades (reprodução da figura 1 de Heston (1993)).	56
n°5 – Fases do estudo de simulação de Monte Carlo realizado	67
n°6 – Volatilidades implícitas, para opções <i>call</i> , quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade é -0.5, -0.25, 0, 0.25 ou 0.5.	72
n°7 – Volatilidades implícitas, para opções <i>call</i> , quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade é 0.	73
n°8 – Volatilidades implícitas, para opções <i>call</i> , quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade é -0.25.	73
n°9 – Volatilidades implícitas, para opções <i>call</i> , quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade é 0.25.	73
n°10 e 11 – Comparação das distribuições dos preços no vencimento da opção para diferentes ρ .	74
n°12 e 13 – Volatilidades implícitas, para opções <i>call</i> , quando o tempo de vida de uma opção é de 15 dias, 1, 3, 6, e 12 meses. a) $\rho = -0.25$ e b) $\rho = 0.25$	78

n°14 – <i>Theta</i> de <i>calls</i> com diferentes graus de <i>moneyness</i> e tempos de vida (reprodução de uma imagem de Hull (1989)).	78
n°15 – <i>Delta</i> de <i>calls</i> , com diferentes graus de <i>moneyness</i> e tempos de vida (reprodução de uma imagem de Hull (1989)).	79
n°16 – <i>Vega</i> de <i>calls</i> , com diferentes graus de <i>moneyness</i> e volatilidades (reprodução de uma imagem de Natenberg (1994)).	80
n°17 e 18 – Volatilidades implícitas, para opções <i>call</i> , quando a volatilidade de longo prazo é de 15%, 20%, 25%, 30% e 35%. a) $\rho = -0.25$ e b) $\rho = 0.25$	82
n°19 e 20 – Volatilidades implícitas, para opções <i>call</i> , quando a volatilidade da volatilidade é de 10%, 15%, 20%, 25% e 30%. a) $\rho = -0.25$ e b) $\rho = 0.25$	85
n°21 – Níveis de concentração da amostra das opções <i>call</i> a) sobre o Eurostoxx e b) sobre o S&P500.	97
n°22 – Relação entre preços e volatilidade do Eurostoxx entre Junho de 1998 e Março de 2000.	103
n°23 – Relação entre preços e volatilidade do S&P500 entre Janeiro de 1998 e Março de 2000.	104
n°24 – Relação entre rendibilidade e volatilidade do Eurostoxx entre Junho de 1998 e Março de 2000.	104
n°25 – Relação entre rendibilidade e volatilidade do S&P500 entre Janeiro de 1998 e Março de 2000.	105
n°26 – Relação entre rendibilidade e variações de volatilidade do Eurostoxx entre Junho de 1998 e Março de 2000.	105
n°27 – Relação entre rendibilidade e variações de volatilidade do S&P500 entre Janeiro de 1998 e Março de 2000.	105

nº28 – Correlações entre rendibilidade e volatilidade do Eurostoxx considerando períodos de 5, 30, 60 e 90 dias.	106
nº29 – Correlações entre rendibilidade e volatilidade do St&P500 considerando períodos de 5, 30, 60 e 90 dias.	106
nº30 – “ <i>Scatter Plot</i> ” rendibilidades vs. variações da volatilidade a) Eurostoxx e b) S&P500.	108
nº31 – Volatilidade implícita média para diferentes níveis de <i>moneyness</i> – mercado norte-americano.	112
nº32 – Volatilidade implícita média em opções com diferentes tempos de vida e graus de <i>moneyness</i> – mercado norte-americano.	113
nº33 – Volatilidade implícita média para diferentes níveis de <i>moneyness</i> – mercado europeu.	114
nº34 – Volatilidade implícita média em opções com diferentes tempos de vida e graus de <i>moneyness</i> – mercado europeu.	116
nº35 – Passeio Aleatório.	126
nº36 – Distribuição Normal	128

Lista de Quadros

	Páginas
nº1 – Alguns estudos sobre modelos de volatilidade estocástica.	45
nº2 – Efeitos de uma correlação entre rendibilidade e volatilidade do activo subjacente. Análise comparativa das ideias de Hull e White (1987) – HW, Heston (1993) – Ht e das ideias defendidas nesta dissertação de mestrado – DM.	60
nº3 – Cenários alternativos para as simulação.	64
nº4 – Parâmetros de referência para as simulações de preços de opções.	65
nº5 – Preços simulados para opções <i>call</i> , quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade é -0.5, -0.25, 0, 0.25 ou 0.5.	70
nº6 – “Enviesamento” percentual dos preços de Black-Scholes para opções <i>call</i> quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade é -0.5, -0.25, 0, 0.25 ou 0.5.	70
nº7 – Volatilidades implícitas, para opções <i>call</i> , quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade é -0.5, -0.25, 0, 0.25 ou 0.5.	71
nº8 – Estatísticas descritivas, das distribuições de preço no vencimento, obtidas pelo modelo de Black-Scholes e por modelos de volatilidade estocástica com diferentes valores de ρ	74
nº9 – Distribuição dos preços, no vencimento, dos 10 000 percursos. Comparação entre as distribuições de preço obtidas pelo modelo de Black-Scholes e por modelos de volatilidade estocástica com diferentes valores de ρ .	75
nº10– Preços simulados para opções <i>call</i> , quando o tempo de vida, τ , é de 15 dias, 1, 3, 6 ou 12 meses. a) $\rho = -0.25$ e b) $\rho = 0.25$	76
nº11 – “Enviesamento” percentual dos preços de Black-Scholes para opções <i>call</i> quando o tempo de vida de uma opção, τ , é de 15 dias, 1, 3, 6 ou 12 meses.	77

nº12 – Volatilidades implícitas, para opções <i>call</i> , quando o tempo de vida de uma opção, τ , é de 15 dias, 1, 3, 6 ou 12 meses. a) $\rho = -0.25$ e b) $\rho = 0.25$	79
nº13– Preços simulados para opções <i>call</i> , quando a volatilidade de longo prazo, $\sqrt{V_0}$, é de 15%, 20%, 25%, 30% e 35%. a) $\rho = -0.25$ e b) $\rho = 0.25$	81
nº14 – “Enviesamento” percentual dos preços de Black-Scholes para opções <i>call</i> quando a volatilidade de longo prazo, $\sqrt{V_0}$, é de 15%, 20%, 25%, 30% e 35%.	81
nº15 – Volatilidades implícitas, para opções <i>call</i> , quando a volatilidade de longo prazo, $\sqrt{V_0}$, é de 15%, 20%, 25%, 30% e 35%. a) $\rho = -0.25$ e b) $\rho = 0.25$	83
nº16– Preços simulados para opções <i>call</i> , quando a volatilidade da volatilidade, δ , é de 10%, 15%, 20%, 25% e 30%. a) $\rho = -0.25$ e b) $\rho = 0.25$	83
nº17 – “Enviesamento” percentual dos preços de Black-Scholes para opções <i>call</i> quando a volatilidade da volatilidade, δ , é de 15%, 20%, 25%, 30% e 35%.	84
nº18 – Volatilidades implícitas, para opções <i>call</i> , quando a volatilidade da volatilidade, δ , é de 15%, 20%, 25%, 30% e 35%. a) $\rho = -0.25$ e b) $\rho = 0.25$	84
nº19 – Número de observações, sobre opções, excluídas da amostra para cada subjacente.	96
nº20 – S&P500 – Estatísticas gerais sobre as séries .	108
nº21 – S&P500 – Matriz de Covariâncias.	108
nº22 – S&P500 – Teste ANOVA	108
nº23 – S&P500 – Estatísticas da Correlação	108

nº24 – S&P500 – Testes à Correlação	109
nº25 – S&P500 – Resultados da Regressão	109
nº26 – Eurostoxx – Estatísticas gerais sobre as séries .	109
nº27 – Eurostoxx – Matriz de Covariâncias.	110
nº28 – Eurostoxx – Teste ANOVA	110
nº29 – Eurostoxx – Estatísticas da Correlação	110
nº30 – Eurostoxx – Testes à Correlação	110
nº31 – Eurostoxx – Resultados da Regressão	110
nº 32 – Volatilidade implícita média em opções com diferentes tempos de vida e graus de <i>moneyness</i> – mercado norte-americano.	114
nº 33 – Volatilidade implícita média em opções com diferentes tempos de vida e graus de <i>moneyness</i> – mercado europeu.	115

1 Introdução

As últimas três décadas têm sido um autêntico período de revolução para a negociação de produtos derivados em mercados financeiros, verificando-se, por um lado, o aumento do volume e diversidade de produtos transaccionados (veja-se, por exemplo, o sucesso dos produtos derivados, exóticos ou não, incluídos por muitos bancos em carteiras vendidas a clientes – os chamados “produtos estruturados”) e, por outro, o desenvolvimento da actividade de investigação nas áreas da valorização e cobertura do risco deste tipo de instrumentos financeiros.

Bancos e empresas da área financeira socorrem-se cada vez mais de todo o tipo de cientistas com elevada capacidade analítica (muitas vezes matemáticos¹ e físicos) para poderem desenvolver modelos de avaliação de derivados (quando não somente compreender os existentes...), ou para gerir o risco das suas carteiras. Em Wall Street estes especialistas matemáticos adquiriram já o nome de *Rocket Scientists*.

Estas circunstâncias têm propiciado, ainda, o aparecimento de um número cada vez maior de cursos, pós-graduações, mestrados e doutoramentos na área da matemática e da programação financeiras, um pouco por toda a América do Norte, Europa e Ásia.

Na área da valorização de opções, o trabalho de Black e Scholes (1973) é, e será sempre, uma referência extremamente importante, já que representa o desenvolvimento mais antigo com significado estruturante, até à data, na referida área.

Talvez por isso mesmo, o modelo de Black-Scholes continue ainda hoje a ser objecto de frequentes estudos teóricos e práticos (empíricos), que procuram testar a sua capacidade nas mais variadas situações. Os pressupostos do modelo mais frequentemente postos em causa são dois: o da normalidade das rendibilidades dos activos financeiros e o da constância da volatilidade, sendo qualquer deles extremamente importante, dada a previsível elevada sensibilidade do valor de uma opção às características da distribuição da rendibilidade do activo subjacente no vencimento da opção.

¹ “*Financial Mathematics is one of the fastest growing research fields in applied mathematics*”, Kwok (1998).

Desde muito cedo, vários autores tentaram desenvolver modelos que se apresentassem como alternativos ao de Black-Scholes, partindo de pressupostos alternativos. São disso exemplo os modelos de Merton (1976), Cox e Ross (1976), Oldfield, Rogalski e Jarrow (1977), Rosenfeld (1980), Jones (1983), Jarrow e Rosenfeld (1984), Ball e Torous (1985), Bates (1991) e (1996), Ahn (1992), Amin (1993), e Das e Foresi (1996), que permitiram a introdução de processos de Poisson nos processos seguidos pelas rendibilidades dos activos financeiros e estimaram modelos que misturam, no processo das rendibilidades, processos contínuos e de “saltos”.

Numa perspectiva mais empírica, já Mandelbrot (1963), Fama (1965) e Blattberg e Gonedes (1974) tinham concluído que uma distribuição normal estacionária seria desadequada para descrever o comportamento das rendibilidades, sugerindo várias distribuições alternativas. Posteriormente, Hsu, Miller e Wichern (1974), Westerfield (1977) e Kon (1984) concluíram que uma mistura de distribuições normais permite uma melhor descrição do comportamento leptocúrtico das distribuição das rendibilidades.

A volatilidade do activo subjacente a uma opção é, sem dúvida, um dos mais importantes elementos da valorização e da gestão do risco dessa opção. Importante quer por ser um elemento difícil de analisar (ou de “obter”), quer por os prémios das opções lhe serem, em geral, muito sensíveis. Um modelo de valorização de opções que não consiga captar a evolução da volatilidade originará valores para os prémios das opções que não serão compatíveis com os preços de mercado, deteriorando a capacidade dos agentes em reconhecer e, por isso, cobrir os riscos a ela associados.

Desde sempre que os estudos empíricos, para todos os tipos de mercados, e para qualquer classe de activos – acções, obrigações, câmbios e mercadorias – apontam, claramente, para alterações de volatilidade ao longo do tempo, alterações essas, em geral, não possíveis de descrever de forma determinística. Lembre-se, nomeadamente, o estudo de Bollerslev, Chou e Kroner (1992), que procura agregar os principais resultados empíricos recolhidos até essa data.

Uma das correntes de investigação para eliminar a hipótese da volatilidade no modelo de Black-Scholes (1973) parte do pressuposto de que a volatilidade de um qualquer activo financeiro segue, ela própria, um processo (não determinístico) independente e de que as inovações que condicionam a evolução da volatilidade são diferentes das inovações que condicionam o processo de evolução dos rendimentos gerados por esse activo, ainda que tal

corrente admita poder existir, nalguns casos, uma correlação constante entre as inovações. Estes modelos são aqueles a que é habitual chamar modelos de volatilidade estocástica e têm sido principalmente desenvolvidos em ambiente de “tempo contínuo”.

Por outro lado, surgiu também outro tipo de modelos, modelos esses que ficaram conhecidos por modelos GARCH (ou da família ARCH), cujas principais características são o seu desenvolvimento em “tempo discreto” e a consideração de que as inovações que gerem o processo da volatilidade não são distintas das que gerem o processo das rendibilidades. Os modelos GARCH têm sido estudados por Amin e Ng (1993), Duan (1995), Engle and Mustafa (1992) e Engle, Kane e Noh (1994,1997). Nos estudos de Nelson (1990) e de Foster e Nelson (1994) ficou demonstrado, ainda, que os modelos discretos GARCH convergem em “tempo contínuo” para os modelos de volatilidade estocástica, o que permite estabelecer, desde logo, uma relação interessante entre os dois tipos de modelos.

Os modelos de volatilidade estocástica e o impacto dessa “estocasticidade” na valorização de opções têm sido objecto de uma vasta investigação, que teve o seu início nos trabalhos de Jonhson e Shanno (1987), Hull e White (1987 e 1988), Scott (1987), Wiggins (1987), Chesney e Scott (1989) e Melino e Turnbull (1990). Nestes estudos os autores recorrem habitualmente a simulações de Monte Carlo ou a métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais estocásticas, o que os torna bastante exigentes em termos computacionais. Stein e Stein (1991) desenvolveram técnicas mais eficientes, recorrendo a iterações numéricas bivariadas. Heston (1993) iniciou uma abordagem diferente, ao determinar uma fórmula “fechada” para a valorização de opções europeias para modelos cuja volatilidade é estocástica. Bates (1996) e Scott (1997) ampliaram o trabalho de Heston, explicando a evolução das taxas de juro também como um processo estocástico e permitindo que as rendibilidades pudessem registar “saltos”.

Apesar de toda a investigação na área, os modelos existentes de valorização de opções não conseguem incorporar todas as características da distribuição das rendibilidades ou do comportamento da volatilidade, analisados empiricamente.

De um modo geral, os contributos dos modelos posteriores a Black-Scholes são demasiado reduzidos e a sua complexidade demasiado elevada, para que, junto dos agentes de mercado, possam substituir a elegância e maleabilidade do modelo de Black-Scholes. Assim, a aplicação prática destes outros modelos é bastante reduzida, tendo, no entanto, a investigação permitido discriminar os diferentes impactos, no valor de uma opção, de

hipóteses cada vez mais realistas. Essa aplicação tem possibilitado, nalguns casos, a conclusão de que a consideração dessas hipóteses, em futuros modelos, seria proveitosa, ou que, pelo contrário, não levaria a avanços, tendo em conta o que se conhece dos “enviesamentos” do modelo de Black-Scholes.

Em todos estes modelos, que se podem classificar em tipos, sendo uns de volatilidade estocástica, outros de “saltos” e outros mistos, é rara a consideração da correlação entre a rendibilidade de um dado activo e a sua volatilidade. Com efeito, mesmo aqueles autores que optam por estender o seu estudo a situações de correlação não nula, fazem-no de forma marginal (considerando uma qualquer correlação constante) e, por vezes, obtendo resultados pouco correspondentes à intuição económica. É o que sucede, por exemplo, com Hull e White(1988), Heston (1993) e Das e Sundaram (1999).

Este facto é tanto mais surpreendente quanto é certo que, logo três anos depois da formulação do modelo que leva o seu nome, Black (1976) apontava para a existência de uma eventual correlação negativa entre preços e volatilidade, justificando-a pelo facto de a diminuição da cotação originar aumentos nos níveis de “alavancagem” das empresas cotadas e, conseqüentemente, um aumento do seu risco. Para além deste efeito de “alavancagem”, pode também justificar-se uma correlação negativa pelo menos por um outro: o efeito de *feedback* da volatilidade. Apologistas desta segunda teoria são, por exemplo, Pindyck (1984), French, Schwert e Stambaugh (1987) e Campbell e Hentschel (1992).

Rubinstein(1994) estabeleceu aquilo que considerou ser uma clara correlação negativa entre a volatilidade (implícita, resultante de prémios de opções) de índices accionistas com o seu valor, defendendo que o “efeito sorriso” da volatilidade implícita podia resultar do impacto dessa mesma correlação na distribuição da rendibilidade neutra face ao risco.

Importa, a respeito do tema da dissertação, e dos termos nela utilizados, fazer um esclarecimento sobre o objecto de estudo: sempre que nos referirmos à correlação entre rendibilidade e volatilidade, estamos, de facto, a referir-nos à correlação entre rendibilidade e variações de variância (variáveis que, efectivamente, são modelizadas). O motivo desta troca de termos entre variações de variância e volatilidade (que não são, inclusive, idênticos) foi uma questão de simplicidade de exposição de ideias, estratégia que, aliás, é seguida por outros autores, nomeadamente Hull e White (1987, 1988) e Heston (1993)².

² De forma alternativa, poderemos referir-nos ao objecto de estudo também como a correlação entre os processos seguidos pelos preços e pela volatilidade.

O contributo que esta dissertação pretender dar é, primordialmente, o de ajudar a clarificar o impacto que uma correlação entre rendibilidade e volatilidade terá na valorização de opções. Por outro lado, pretende-se também, pela análise de cotações reais dos índices accionistas Eurostoxx50 e Standard&Poor500 e das opções europeias que sobre eles incidem, procurar indícios sobre a existência, de uma correlação entre rendibilidade e volatilidade.

Com o objectivo principal em mente, e por as nossas ideias sobre o efeito que uma correlação entre rendibilidade e volatilidade teria na distribuição final de preços de um activo (e consequentemente no valor das opções que sobre ele incidissem) não serem exactamente coincidentes com as defendidas por Hull e White (1987) e Heston (1993), desenvolveu-se, no âmbito dos modelos de volatilidade estocástica, um modelo que, simulado, permitisse verificar qual o real efeito da correlação.

A par deste estudo mais “teórico”, e independentemente dele, procurou-se, ainda que de forma rudimentar, por um lado, analisar a real existência de correlação e, por outro, estudar em que medida essa correlação pode ajudar a explicar alguns dos “enviesamentos” do modelo de Black-Scholes (verificados empiricamente nos mercados de opções em análise).

Foi a “suspeita” de correlação entre rendibilidade e volatilidade que motivou o desenvolvimento de um modelo que permitisse estudar o impacto que essa correlação teria na valorização de opções. Também foi, porém, o facto de a correlação poder ter efeitos significativos na valorização de opções, que levou a querer apurar se essa correlação existe de facto.

As duas componentes, uma mais “teórica” e outra mais “prática” (empírica), desta dissertação encontram-se, pois, ligadas na medida em que uma motiva a outra, sendo, no entanto, análises praticamente independentes.

Por não existir uma relação de causa-efeito entre as componentes da investigação, cada uma delas válida *per se*, optou-se por dividir a estrutura da dissertação em duas partes: I – “sobre o impacto da correlação na valorização de opções” e II – “sobre a real existência da correlação nos mercados accionistas europeu e norte-americano”.

A maior parte da investigação a que se procedeu para esta dissertação de mestrado foi na área da primeira das partes, e, quer pela complexidade das metodologias utilizadas, quer pela relevância dos resultados obtidos, constitui o seu ponto fulcral e dá-lhe o nome. A segunda parte não procura ser mais do que um primeiro estudo sobre a existência de correlação, entre

a rendibilidade e volatilidade, complementando a primeira por permitir alcançar uma noção da relevância dos resultados aí obtidos na valorização de opções (daí o sub-título “aplicações aos mercados accionistas europeu e norte-americano”).

Clarificando, agora, a estrutura dos capítulos e anexos do trabalho, dir-se-á que o capítulo 2 resume a evolução, em termos de modelização matemática, do comportamento das rendibilidades e faz a ponte para o modelo de volatilidade estocástica, proposto no capítulo 3. O capítulo 4 caracteriza o impacto que se espera que uma correlação entre rendibilidade e volatilidade tenha na distribuição final dos preços e, conseqüentemente, na valorização de opções (comparando as ideias aqui defendidas com as de outros autores), e apresenta a metodologia de simulação utilizada para aferir esse impacto. Os resultados das simulações de Monte Carlo são apresentados no capítulo 5.

Os capítulos 6, 7 e 8 são a parte empírica da dissertação, em que se procura estudar a existência da correlação com base em dados reais. No capítulo 6 são explicadas as decisões quanto à recolha e tratamento dos dados utilizados. No capítulo 7 procura-se estimar a correlação entre rendibilidade e volatilidade e no capítulo 8 analisam-se os reais “enviesamentos” do modelo de Black-Scholes nestes mercados, procurando verificar se alguns deles podem ser explicados pela correlação.

Os capítulos 9 e 10 são dedicados, respectivamente, a pistas para investigação futura e conclusões. Os cálculos matemáticos mais elaborados são apresentados em apêndice a cada capítulo. Três anexos à dissertação completam-na, sendo o primeiro um apanhado dos conceitos matemáticos fundamentais da área da matemática financeira. No segundo expõem-se de forma mais detalhada os métodos numéricos de resolução de equações diferenciais estocásticas (de que o método utilizado para a obtenção dos resultados da dissertação é um exemplo). Por último, no terceiro, são fornecidos todos os programas em GAUSS e macros de Excel utilizados para a obtenção dos resultados.

Parte I

Sobre o Impacto da Correlação na Valorização de Opções

2 Modelização Matemática para Valorização de Opções

2.1 Antes de Black-Scholes

A primeira tentativa de descrever matematicamente o processo seguido pelo preço de uma acção, tendo por base conceitos probabilísticos, deveu-se a Louis Bachelier (1870-1946), que, na sua tese "Théorie de la spéculation", defendida na Sorbone a 29 de Março de 1900 e publicada nos Annales Scientifiques de L'École Normale Supérieure, propôs um processo aleatório (estocástico)³.

Ao analisar os "dados experimentais" sobre preços, Bachelier verificou que as diferenças de preços, num dado intervalo de tempo Δt , tinham média nula (em termos estatísticos) e flutuações da ordem da $\sqrt{\Delta t}$ ⁴. As mesmas propriedades de um passeio aleatório $S_t^{(\Delta t)}$, $t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$, com

$$S_t^{(\Delta t)} = S_0 + \sum_{k \leq \left[\frac{t}{\Delta t} \right]} \xi_k^{(\Delta t)} \quad 2.1$$

onde os $\xi_k^{(\Delta t)}$ são variáveis aleatórias identicamente distribuídas e que podem assumir dois valores, $\pm \sigma\sqrt{\Delta t}$, com probabilidade $\frac{1}{2}$.

Com a passagem ao limite, quando $\Delta t \rightarrow 0$ (no correspondente sentido probabilístico), obtém-se o processo aleatório

$$S_t = S_0 + \sigma W_t, \quad t \geq 0, \quad 2.2$$

³ "The date of March 29, 1900, should be considered as the birth date of mathematical finance." Bru, Crépel e Kabanov (2000).

O reconhecimento de Bachelier como o Pai da matemática financeira levou à criação, nas comemorações do centenário da discussão da sua tese, da *Internatinonal Bachelier Finance Society* e à publicação de inúmeros escritos comemorativos, entre os quais, o de Taquq (2001), que se mostra particularmente interessante por se tratar de uma entrevista a Bernard Bru e ilustrar bem o ambiente científico e as condições em que Bachelier fez as suas descobertas.

⁴ Designa-se diferenças de preços $S_t - S_{t-\Delta t}$ e são flutuações de preços $|S_t - S_{t-\Delta t}|$.

onde $W = (W_t)_{t \geq 0}$ é o movimento browniano⁵ utilizado por Bachelier⁶ (e a que também se veio a chamar processo de Wiener, depois de N. Wiener ter desenvolvido a teoria matemática correspondente a este tipo de movimento).

Foi com base no movimento browniano que Bachelier desenvolveu a primeira fórmula de valorização de opções, considerando que o valor de uma opção *call* seria o valor esperado dos possíveis *payoffs*⁷:

$$C_t = E f_T \quad f_T = (S_T - X)^+ \quad 2.3$$

A fórmula de Bachelier⁸, considerando uma taxa de juro nula, é

$$C_{t,T} = (S_t - X) \Phi\left(\frac{S_t - X}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \sigma\sqrt{\tau} \phi\left(\frac{S_t - X}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad 2.4$$

onde

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(y) dy, \quad 2.5$$

Poderá dizer-se que esta fórmula é como que uma primeira “versão” da famosa fórmula de Black-Scholes. O preço que resulta da fórmula de Black-Scholes, em oposição ao que resulta da fórmula de Bachelier, poder-se-ia chamar um preço “racional”, já que nele o processo

⁵ O nome “movimento browniano” tem a sua origem em Robert Brown (1928), botânico escocês, que, num estudo, verificou que os grãos de pólen quando submersos num líquido se movimentavam de forma oscilatória e muito rápida.

⁶ Bachelier utilizou os incrementos do movimento Browniano para descrever o comportamento das flutuações de preço. Hoje em dia, e desde Samuelson (1965), os mesmos incrementos são utilizados para descrever as rendibilidades, i.e., as alterações relativas de preço.

⁷ Sempre que, no vencimento, o valor do activo subjacente é inferior ao preço de exercício, a opção *call* não é exercida, registando o comprador uma perda igual ao montante capitalizado do prémio pago inicialmente (C_T). Se, pelo contrário, no vencimento, o valor do activo subjacente é superior ao preço de exercício o ganho para o comprador é $(S_T - K) - C_T$. Chamaremos *payoff* apenas ao montante a receber pelo comprador no momento do exercício da opção, que será 0 ou $(S_T - K)$, consoante os casos.

⁸ Os maiores problemas da fórmula de Bachelier poderiam ser resumidos da seguinte forma (Smith, 1976):

- (i) O modelo permite a existência de preços negativos de acções e que o valor de uma opção possa ser superior ao do seu subjacente.
- (ii) A hipótese de média nula nas variações do preço pressupõe taxa de juro nula.

seguido pelos preços das acções é um movimento browniano geométrico⁹ (ou, como diria Samuelson (1965), “económico”) do tipo:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t \quad 2.6$$

logo,

$$S_t = S e^{\sigma W_t + \mu t - \frac{\sigma^2 t}{2}}, \quad 2.7$$

sendo $W = (W_t)_{t \geq 0}$, mais uma vez, o movimento browniano simples. Partindo do pressuposto de que a taxa de juro r é 0 (para que seja comparável à fórmula 2.4 de Bachelier), a fórmula de Black-Scholes para uma opção *call plain vanilla* seria simplesmente,

$$c_t = S \Phi(d_1) - X \Phi(d_2), \quad \text{onde} \quad d_1 = \frac{\left[\ln \frac{S}{X} + \frac{\sigma^2 \tau}{2} \right]}{\sigma \sqrt{\tau}} \\ d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau} \quad 2.8$$

É importante referir que na equação acima, se $X = S_0$, o valor da opção *call* vem

$$c_t = \sigma \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}, \quad 2.9$$

o que dá uma ideia do crescimento “racional” dos preços com o aumento de τ , ou seja, com o aumento do tempo até ao vencimento.

⁹ É a utilização do movimento browniano para modelizar as rendibilidades (e não as flutuações de preço como Bachelier propôs) que leva a que os preços sigam um processo do tipo movimento browniano geométrico. O movimento browniano geométrico tem a propriedade de originar:

- (i) Rendimentos independentes e
- (ii) distribuição associada aos rendimentos independente do nível de preço.

Os detalhes matemáticos que caracterizam o movimento browniano geométrico são tratados no anexo 1.

2.2 O modelo de Black-Scholes

Foi em 1973, no mesmo ano em que se iniciou a transacção de produtos derivados na *Chicago Board of Options Exchange*, que Black, Scholes e Merton publicaram os, porventura até hoje, mais importantes *papers* da história da valorização de opções. Desde aí, o desenvolvimento sobre estas matérias, quer em termos dos mercados, quer em termos dos estudos académicos, não tem parado.

O modelo de Black-Scholes é particularmente atractivo por dele resultar uma fórmula fechada, que permite valorizar opções com base em poucos parâmetros observáveis (excepção feita à volatilidade), podendo, por isso, ser testado empiricamente através de dados do mercado¹⁰. Nesta área, vários estudos demonstraram que a capacidade do modelo de Black-Scholes para prever os preços das opções é elevadíssima, sendo muitas vezes a área de valorização de opções apontada como uma das áreas de maior sucesso da teoria, não só das finanças, mas até de toda a economia. A importância do trabalho elaborado por Black, Scholes e Merton foi, com toda a justiça, reconhecida pela atribuição do prémio Nobel da Economia em 1997¹¹.

O desenvolvimento do modelo de Black-Scholes é feito com base no conceito fundamental da cobertura de risco, entendendo-se que, se é possível estabelecer uma carteira isenta de risco que englobe uma posição em opções e noutros activos financeiros que se saiba valorizar, então pode saber-se que o rendimento dessa carteira deve ser a taxa de juro sem risco, sendo possível obter o preço da opção que torna isso verdade.¹²

É este princípio de cobertura isenta de risco¹³ que dá origem à equação às derivadas parciais, que descreve o comportamento de qualquer produto derivado e de que a fórmula de Black-Scholes é solução, no caso de uma opção *call* europeia *plain vanilla*.

¹⁰ O preço da opção, seja ela *call* ou *put*, segundo o modelo de Black-Scholes depende de cinco parâmetros: S, τ, X, r e σ .

¹¹ O prémio Nobel foi atribuído a Scholes e Merton, pois que Black já havia falecido.

¹² Num artigo de 1989, Black explica a forma como surgiu a ideia de valorização de uma opção através de uma carteira isenta de risco.

¹³ Entre os agentes do mercado é habitual a não tradução do termo em inglês "*hedging*", sendo a estratégia de cobertura isenta de risco conhecida como "*riskless hedging principle*".

2.2.1 O princípio da cobertura de risco

Seguindo o método utilizado no artigo de Black e Scholes (1973), parte-se dos seguintes pressupostos quanto ao funcionamento do mercado financeiro: (i) as transacções ocorrem de forma contínua; (ii) existe e é conhecida a taxa de juro sem risco; (iii) não existem custos de transacção na compra e venda da opção ou do subjacente e não existem impostos; (iv) não existe o pagamento de dividendos; (v) os activos são perfeitamente divisíveis; (vi) não existem limitações ao *short selling* e (vii) não existem oportunidades de arbitragem.

Supõe-se, ainda, que o preço do activo subjacente à opção, S , segue um movimento browniano geométrico $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$, onde μ é a taxa de rendibilidade esperada, σ é a volatilidade e dW é um processo de Wiener padrão¹⁴. Quer μ , quer σ são tidos como constantes.

Se tivermos uma carteira constituída pela venda de uma opção *call* e a compra de Δ unidades do activo subjacente, então o seu valor será: $\Pi = -c + \Delta S$, onde c representa o valor da opção *call*. O valor da opção é função do valor do activo subjacente e do tempo, $c = c(S, t)$. Uma vez que, quer o valor da opção, c , quer o valor da carteira, Π , são variáveis aleatórias, estão verificadas as condições para a utilização do lema de Itô¹⁵ para obter os diferenciais estocásticos, que se seguem:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$$

2. 10

e assim

$$\begin{aligned} d\Pi &= -dc + \Delta dS \\ &= \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right) dt + \left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S} \right) dS \\ &= \left[-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S} \right) \mu S \right] dt + \left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S} \right) \sigma S dW. \end{aligned}$$

2. 11

A componente estocástica da carteira aparece apenas no último termo:

¹⁴ A denominação "processo de Wiener" resulta, como referido, do facto de ter sido N. Wiener a desenvolver a teoria matemática associada ao movimento browniano.

¹⁵ Para maior detalhe sobre o lema de Itô, ver anexo 1 e os cálculos apresentados no apêndice deste capítulo.

$$\left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S}\right)\sigma S dW.$$

2. 12

Se se escolher o parâmetro Δ (unidades de activo subjacente na carteira) de molde a que

$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$, a carteira Π deixa de ter uma componente aleatória, passando a ser isenta de

risco¹⁶. Assim sendo, em equilíbrio, a rendibilidade de uma carteira Π assim constituída deve traduzir-se, como já foi dito, em taxa de juro sem risco, logo,

$$\left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\right) = r\Pi \Leftrightarrow \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\right) = r\left(-c + S \frac{\partial c}{\partial S}\right).$$

2. 13

bastando ordenar para termos,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0.$$

2. 14

A equação diferencial parabólica acima é a equação diferencial de Black-Scholes (1973)¹⁷.

Para terminar a formalização do modelo de Black-Scholes basta estabelecer as condições limite que tornam possível a sua resolução. Para o caso da opção *call* europeia a condição é descrita como: $c(S, T) = \max(S - X; 0)$, sendo T a data de vencimento da opção e X o seu preço de exercício. Visto que, quer a condição limite, quer a equação diferencial não dependem de μ , pode concluir-se que as preferências dos investidores quanto ao risco não alteram o preço da opção.

Esta neutralidade face ao risco é uma das principais “conquistas” na teoria de valorização de opções conseguida por Black e Scholes¹⁸.

¹⁶ É de notar, no entanto, que $\frac{\partial c}{\partial S}$ varia continuamente ao longo do tempo, pelo que, para que a carteira Π se mantenha isenta de risco, é necessário um ajuste contínuo.

¹⁷ Note-se que o parâmetro μ , que representa a rendibilidade esperada do activo subjacente à opção, não aparece na equação.

¹⁸ A equação diferencial de Black-Scholes é deduzida de forma alternativa por Cox e Ross (1976) e essa dedução é apresentada no apêndice deste capítulo por ser semelhante à por nós seguida no estudo do modelo do capítulo 3.

2.2.2 O argumento de neutralidade face ao risco

Qualquer que seja o tipo de preferência (face ao risco), o valor da opção que se obtém é sempre o mesmo. Assim sendo, e por simplicidade, é habitual partir-se da hipótese de neutralidade. Num mundo neutro face ao risco¹⁹, a rendibilidade esperada, quer para a opção, quer para o activo subjacente é a taxa de juro sem risco²⁰. Em termos matemáticos isso pode ser descrito como

$$E^* \left(\frac{S_T}{S} \middle| S \right) = e^{r(T-t)} \quad 2.15$$

$$E^* \left(\frac{c_T}{c} \middle| S \right) = e^{r(T-t)} \quad 2.16$$

onde S_T e c_T são as variáveis aleatórias do preço do activo subjacente e da opção no vencimento T . Uma vez que temos como condição limite que $c_T = \max(S_T - X, 0)$, a equação 2.16 pode ser reescrita como

$$\frac{1}{c} E^*(c_T | S) = \frac{1}{c} E^*(\max(S_T - X, 0)) = e^{r(T-t)} \quad 2.17$$

$$c(S, t) = e^{-r(T-t)} E^*(\max(S_T - X, 0)) \quad 2.18$$

Nas equações 2.15 a 2.18, o símbolo E^* representa o mesmo tipo de expectativa. É, em qualquer dos casos, uma expectativa calculada segundo uma função de distribuição neutra face ao risco (ou ajustada para que seja neutra) do valor do activo subjacente. Esta distribuição é lognormal com *drift* igual à taxa de juro sem risco.

¹⁹ Quando um investidor é considerado neutro face ao risco, a escolha entre dois investimentos alternativos com o mesmo valor esperado é indiferente, ainda que a variância (risco) de um deles seja bastante superior à do outro – isto é, não existe prémio de risco. Num mundo neutro ao risco, este não se encontra de forma alguma remunerado, pelo que deverá ser idêntico à taxa de juro sem risco.

²⁰ Desde que não existam oportunidades de arbitragem e os mercados sejam completos.

Assim sendo, a equação 2.15 diz-nos que o valor de uma opção *call* pode ser visto como o valor actualizado do *payoff* no vencimento, num mundo neutro face ao risco²¹.

Se considerarmos que $\varphi(S_T; S)$ é a função densidade do preço do activo subjacente no vencimento S_T , dado o valor actual desse mesmo activo S , segundo uma função de distribuição neutra face ao risco, então a equação 2.15 pode ser descrita por

$$c(S, t) = e^{-r(T-t)} \int_0^{+\infty} \max(S_T - X, 0) \varphi(S_T; S) dS_T.$$

2. 19

²¹ Chama-se a atenção para o facto de:

1. A avaliação neutra face ao risco ser possível por o risco associado a uma opção poder ser eliminado recorrendo ao activo subjacente, criando uma carteira isenta de risco.
2. Sem o conhecimento da neutralidade face ao risco, o valor de uma opção dependeria sempre de uma estimação da rendibilidade esperada do activo subjacente à opção. Era esse, aliás, um dos problemas associados ao modelo de valorização proposto por Samuelson (1965) em que

$$c(S, t) = e^{-\mu_c(T-t)} \int_0^{+\infty} \max(S_T - X, 0) \varphi(S_T; S, \mu) dS_T,$$

e onde $\varphi(S_T; S, \mu)$ é a função de densidade que corresponde a uma rendibilidade esperada μ para o activo subjacente a uma opção. O preço de uma opção *call* é, de igual forma, o valor actualizado dos *payoffs* futuros, mas descontados a uma taxa μ_c . Sempre que nos encontramos num ambiente neutro face ao risco temos que $\mu = \mu_c = r$.

3. Num ambiente de neutralidade face ao risco, temos ainda que $E^* \left(e^{-r(T-t)} S_T \mid S \right) = S$. Assim, podemos concluir que o processo seguido por $e^{-r(T-t)} S_T$ é um *martingale*.

Harrison e Kreps (1979) e ainda Harrison e Pliska (1981) mostram, de forma rigorosa, porque é que a função de distribuição ajustada (face ao risco) é precisamente a distribuição segundo a qual o preço descontado do activo é um *martingale*.

Pela forte ligação existente entre a noção de *martingale* e a valorização neutra face ao risco, esta última é muitas vezes conhecida por *martingale pricing technique*.

2.2.3 A fórmula de Black-Scholes e as suas propriedades

Black e Scholes resolveram a equação diferencial estocástica 2.14 para o caso de uma opção *call plain vanilla*²²:

$$c(S, \tau) = e^{-r\tau} \left[e^{r\tau} SN \left(\frac{\ln \frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) - XN \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right)}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) \right]$$

$$= SN(d_1) - Xe^{-r\tau} N(d_2)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}.$$

2. 20

Esta fórmula tem uma interpretação probabilística. $N(d_2)$ é a probabilidade, num mundo neutro ao risco, de a opção *call* estar *in-the-money*²³ no vencimento, e, assim, $XN(d_2)$ pode ser interpretado como a expectativa do montante que será pago pelo detentor da opção no vencimento. Por outro lado, $Se^{r\tau}N(d_1)$ é a expectativa para o valor do activo subjacente, quando a opção *call* expira *in-the-money*. Assim sendo, o valor esperado para a *call* no vencimento não é mais do que $Se^{r\tau}N(d_1) - XN(d_2)$, valor esse que é descontado, à taxa de juro sem risco, pelo factor $e^{-r\tau}$, para se obter o valor da *call*.

O valor da *call* dado pela equação 2.17 encontra-se delimitado do seguinte modo (ver figura 1):

$$\max(S - Xe^{-r\tau}, 0) \leq c(S, \tau) \leq S, \quad S \geq 0, \tau \geq 0$$

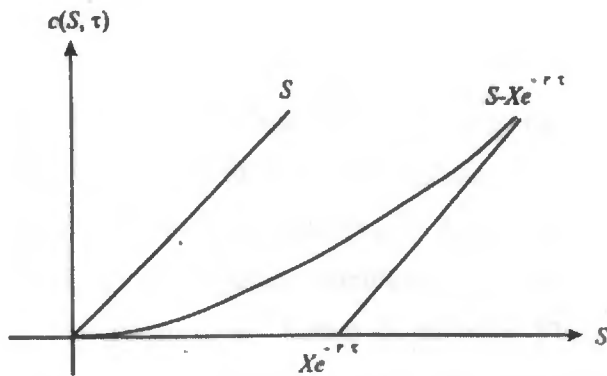
2. 21

Ao longo do processo de derivação do valor da *call* apenas foi utilizada a condição inicial e, para testar essa mesma condição, basta reparar que, quer $N(d_1)$, quer $N(d_2)$ são ou 0 ou 1 quando $\tau \rightarrow 0^+$. O valor de uma opção *call* é uma função convexa decrescente em S .

²² A resolução da equação diferencial 2.14 encontra-se em apêndice ao capítulo.

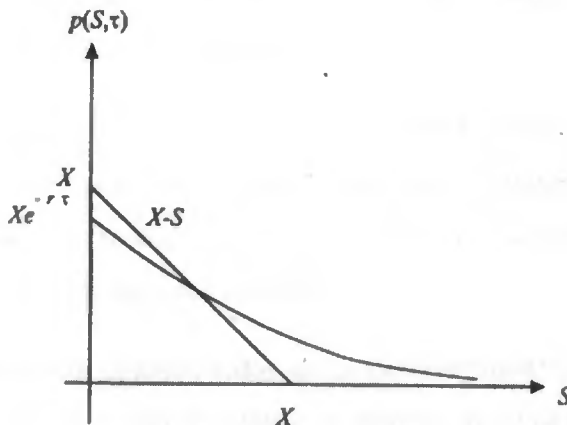
²³ Uma opção *call* diz-se *in-the-money* sempre que o seu valor intrínseco, i.e., $S_t - X$, é positivo. No vencimento apenas são exercidas as opções *in-the-money*.

Figura 1: Gráfico do valor de uma opção *call* europeia vs. preço do activo subjacente quando falta um dado tempo, τ , para a expiração da opção (reprodução de uma imagem de Hull (1989)).



Utilizando a relação de paridade entre *call* e *put*, é simples chegar à conclusão de que o valor da opção *put* é dado por $p(S, \tau) = Xe^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1)$, onde d_1 e d_2 são os apresentados na equação 2.17.

Figura 2: Gráfico do valor de uma opção *put* europeia vs. preço do activo subjacente quando falta um dado tempo, τ , para a expiração da opção (reprodução de uma imagem de Hull (1989)).



Como condição limite suficiente, quando o activo subjacente assume o menor valor possível, quando $S \rightarrow 0^+$, temos que $p(S, \tau) \approx Xe^{-r\tau}$, o que é abaixo do valor intrínseco da *put*. Por outro lado, para o caso do maior valor do activo subjacente, temos que $\lim_{S \rightarrow +\infty} p(S, \tau) = 0$, o que não é surpreendente, já que a *put* terminará certamente *out-of-the-money* quando $S \rightarrow +\infty$. O preço de uma opção *put* é uma função convexa crescente em S .

2.3 Limitações e “Enviesamentos” do Modelo de Black-Scholes

Desde que surgiu o modelo de Black-Scholes foram realizados muitos estudos, fundamentalmente empíricos, com o objectivo de analisar a capacidade do modelo para replicar as cotações das opções das principais praças de derivados, tendo sido, quase de imediato, identificadas algumas anomalias sistemáticas de valorização, que o mercado passou a conhecer por “enviesamentos”. Foram os próprios Black e Scholes (1972) os primeiros a referir tais “enviesamentos”, tendo sido seguidos de muitos outros, nomeadamente, Black (1975), Macbeth e Merville (1979), Rubinstein (1985) e (1994), Shastri e Wethyavivorn (1987), Canina e Figlewski (1993), Heynen (1994), Duque e Paxson (1994), Gemmill (1996) e Peña, Serna e Rubio (1999).

Pensa-se que tais “enviesamentos” estejam relacionados com o facto de: i) a distribuição empírica da rendibilidade estar significativamente afastada da normalidade, apresentando nomeadamente abas muito mais pesadas do que seria de esperar (um elevado nível de *kurtosis*); e ii) a volatilidade não ser constante²⁴.

Na tentativa de superar Black e Scholes, e de criarem modelos compatíveis com tais “enviesamentos”, muitos investigadores, como já referido no capítulo anterior, têm vindo a tentar relaxar as hipóteses que se mostram mais irrealistas, nomeadamente a da normalidade da rendibilidade e a de a volatilidade ser constante.

Os principais tipos de modelos desenvolvidos são os de volatilidade estocástica e os modelos de “saltos”. Entre os primeiros são de referir os estudos de Hull e White (1987, 1988), Wiggins (1987), Melino e Turnbull (1990), Stein e Stein (1991), Amin e Ng (1993), Heston (1993) e Nandi (1998), entre os segundos os de Jarrow e Rosenfeld (1984), Merton (1984), Ball e Torous (1985), Bates (1991), Ahn (1992), Amin (1993), Das e Foresi (1996).

²⁴ São, neste particular, famosos os estudos sobre as volatilidades implícitas nas cotações reais (quando aplicado o modelo de Black-Scholes) que apresentam volatilidades que variam em função do preço de exercício e do tempo de vida de uma opção. A estes “enviesamentos” é habitual chamar “sorrisos” (*smiles*) ou “esgares” (*smirks*). Este tipo de estudo será realizado para o caso das opções *call* sobre o Eurostoxx e S&P no capítulo 8 desta dissertação.

Referem-se ainda os estudos comparativos entre os dois tipos de modelos feitos por Bates (1996) e Das e Sundaram (1999), tendo ambos concluído que nenhuma das categorias *per se* poderia explicar os “enviesamentos” verificados empiricamente e que apenas modelos mistos (de volatilidade estocástica e “saltos”) o poderiam, eventualmente, fazer.

Tendo em conta o objectivo desta dissertação, que é o de estudar o efeito da correlação eventualmente existente entre rendibilidade e volatilidade, situar-nos-emos no âmbito do primeiro tipo de modelos: os de volatilidade estocástica, já que os modelos de “saltos” não consideram a volatilidade como um processo estocástico e os modelos mistos seriam, necessariamente, pouco parcimoniosos.

2.4 Conclusão

Alguns dos desenvolvimentos ao modelo de Black-Scholes têm sido os modelos que consideram que a volatilidade não é constante e, em alguns casos, entendem mesmo, que segue um processo estocástico. A grande maioria, destes últimos, consideram tal processo independente do da rendibilidade. Apenas Hull e White (1987), e Heston (1993), ainda que tal não seja o objectivo principal dos seus estudos, consideram a possibilidade de uma correlação constante entre os dois processos.

No próximo capítulo, a par de uma revisão da bibliografia existente sobre volatilidade, desenvolve-se um modelo de volatilidade estocástica com aspectos semelhantes aos de Hull e White e Heston, mas que considera de forma mais explícita o parâmetro da correlação cuja importância se irá aferir nos capítulos seguintes.

2.5 Apêndice

1. Derivação do Modelo de Black-Scholes apresentada por Cox e Ross (1976):

Suponha-se que o processo seguido pelo derivado é dado por :

$$\frac{dI}{I} = \alpha_1 dt + \theta_1 dW \quad 2.22$$

sendo α_1 a rendibilidade esperado do derivado e θ_1 o coeficiente de difusão (volatilidade) associado a esse derivado. Sabendo que o derivado, I , depende quer do valor do activo subjacente S (cujo comportamento pode ser descrito pelo movimento browniano geométrico $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$) quer do tempo t , da aplicação do lema de Itô resulta a seguinte dinâmica para o derivado I :

$$dI = \left(\frac{\partial I}{\partial t} + \mu S \frac{\partial I}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 I}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial I}{\partial S} dW, \quad 2.23$$

logo, basta comparar a equação 2.22 e 2.23 para concluir que:

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\partial I}{\partial t} + \mu S \frac{\partial I}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 I}{\partial S^2}}{I} \quad 2.24$$

e

$$\theta_1 = \frac{\sigma S \frac{\partial I}{\partial S}}{I}. \quad 2.25$$

Se construirmos uma carteira, Π , com base no activo subjacente S e no derivado I temos:

$$\Pi = \pi_S S + \pi_I I \quad 2.26$$

com π_S e π_I os pesos (em percentagem, logo, $\pi_S + \pi_I = 1$), na carteira, do activo subjacente ao derivado e do próprio derivado, respectivamente. Então a dinâmica da carteira Π é dada por:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \pi_S dS + \pi_I dI \\ &= [\mu \pi_S S + \alpha_1 \pi_I I] dt + [\sigma \pi_S S + \theta_1 \pi_I I] dW. \end{aligned} \quad 2.27$$

Essa dinâmica pode ser isenta de risco se se verificar a primeira das condições do sistema . Os pesos que resultam do sistema 2.28 garantem pois que rendibilidade da carteira Π terá que ser necessariamente a taxa de juro sem risco r .

$$\begin{cases} \sigma\pi_s S + \theta_1 \pi_1 I = 0 \\ \pi_s + \pi_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_s = \frac{-\theta_1 I}{\sigma S - \theta_1 I} \\ \pi_1 = \frac{\sigma S}{\sigma S - \theta_1 I} \end{cases}$$

2. 28

Como referido, com os pesos que resultam do sistema 2.28, é condição de não arbitragem que

$$[\mu\pi_s S + \alpha_1 \pi_1 I] = r\Pi .$$

2. 29

Substituindo, os pesos π_s e π_1 pelo resultado do sistema 2.28 e, α_1 e θ_1 , pelas expressões 2.24 e 2.25 e rearranjando obtém-se a equação diferencial 2.30 que tem que ser verificada por qualquer derivado e de que a expressão 2.14 é o caso particular da *call* europeia.

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 I}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - Ic = 0 .$$

2. 30

2. Da equação diferencial à fórmula de Black-Scholes:

Dedução da fórmula de Black-Scholes:

Através da substituição $y = \ln S$ (e da transformação $\tau = T - t$) e da aplicando o lema de Itô, a equação diferencial de Black e Scholes 2.14 pode ser transformada na equação parabólica de parâmetros constantes

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial c}{\partial y} - rc, \quad -\infty < y < +\infty, \tau > 0.$$

2. 31

Com $c(y, \tau) = e^{-r\tau} w(y, \tau)$ a equação acima vem $\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y}$ e a condição

limite torna-se $w(y, 0) = \max(e^y - X, 0)$.

A solução para este problema é conhecida (ver anexo 1) e vem dada por :

$$\phi(y, \tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\left[y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right).$$

2.32

É de lembrar que $\phi(y, \tau)$ satisfaz a condição limite porque $\lim_{\tau \rightarrow 0} w(y, \tau) = \zeta(y)$, onde $\zeta(y)$ é a conhecida função de Dirac. Das propriedades da função de Dirac, a condição limite vem,

$$w(y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\xi, 0) \zeta(y - \xi) d\xi.$$

2.33

Uma vez que a equação diferencial de $\frac{\partial w}{\partial \tau}$ é linear, a resposta para $\tau > 0$ e posição y , devido a um impulso de magnitude $w(\xi, 0)$ na posição limite, é dada por $w(\xi, 0)\phi(y - \xi, \tau)$. Pelo princípio da sobreposição de uma equação diferencial linear, a solução para o problema proposto nas equações diferenciais iniciais é conseguida pela “soma” das diversas respostas aos impulsos. A “soma” não é mais do que a integração de $\xi \rightarrow -\infty$ a $\xi \rightarrow +\infty$. Assim, a solução do modelo da opção vem

$$\begin{aligned} w(y, \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(\xi, 0) \phi(y - \xi, \tau) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \max(e^\xi - X, 0) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\left[y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\xi \\ &= \int_{\ln X}^{+\infty} (e^\xi - X) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\left[y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\xi. \end{aligned}$$

2.34

Da fórmula da média condicionada (ver anexo 1) sabemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\ln X}^{+\infty} e^{\xi} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\left[y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\xi \\ &= \exp\left(y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right) N\left(\frac{y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \ln X + \sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ &= e^{r\tau} SN\left(\frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad y = \ln S; \end{aligned}$$

2. 35

temos ainda que

$$\begin{aligned} & \int_{\ln X}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\left[y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\xi \\ &= N\left(\frac{y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \ln X}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) = N\left(\frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad y = \ln S. \end{aligned}$$

2. 36

Utilizando os resultados 2.35 e 2.36 para a resolução 2.34 resulta

$$c(S, \tau) = e^{-r\tau} \left[e^{r\tau} SN\left(\frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - XN\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right]$$

que é a fórmula de Black-Scholes para a opção *call* europeia apresentada na equação 2.20.

3 Modelo de Volatilidade Estocástica

O modelo de Black-Scholes baseia-se no pressuposto de que a rendibilidade segue um processo gaussiano com incrementos independentes e estacionários:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

3. 1

Segundo o modelo de Black-Scholes, quer μ , quer mesmo σ são constantes. No entanto, o pressuposto de que a volatilidade é constante cedo se mostrou irrealista, sendo disso exemplos os estudos de Blattberg e Gonedes (1974) e Scott (1987), e de outros por eles citados, sobre o processo de preços de activos financeiros (sejam do mercado accionista, de taxa de juro ou cambial).

Da análise dos próprios mercados de derivados, porém e, nomeadamente, das cotações de opções, também se pode concluir serem essas cotações inconsistentes com o pressuposto de uma volatilidade constante²⁵. Nesses estudos a metodologia é quase sempre semelhante, passando pela inversão da fórmula de Black-Scholes (através de métodos numéricos) para extracção das volatilidades implícitas consistentes com as cotações de mercado, descobrindo valores que diferem com o preço de exercício (os famosos “sorrisos”), ou com o tempo de vida da opção (as estruturas temporais da volatilidade²⁶). Entre esses estudos, é de referir os de Rubinstein (1985), Fung e Hsieh (1991), Clewlow e Xu (1995), Derman e Kani (1994a, 1994b) e Dumas, Fleming e Whaley (1995).

Para explicar os “enviesamentos” do modelo de Black-Scholes, exceptuando os já referidos modelos de “salto”, e algumas referências a problemas relacionados com custos de transacção, liquidez ou distribuições de preços, a bibliografia existente tem-se centrado nos aspectos de modelização de volatilidade. É o caso de Hobson e Roger (1994), Renault e Touzi (1996) e, ainda, Taylor e Xu (1993).

²⁵ “I sometimes wonder why people still use the Black-Scholes formula since it is based on such simple assumptions – unrealistic simple assumptions!” Black (1990)

²⁶ Se as cotações de mercado fossem consistentes com o modelo de Black-Scholes a volatilidade implícita seria uma função constante, logo, independente de preços de exercício ou tempo de vida de uma opção.

Entre as investigações sobre a aleatoriedade da volatilidade, podem identificar-se três tipos principais de preocupações:

1. o impacto da aleatoriedade da volatilidade na valorização de opções;
2. estimação da volatilidade;
3. persistência das alterações da volatilidade e reversão à média.

Estas três preocupações têm sido tratadas por diferentes modelos e metodologias. A primeira, primordialmente pelos modelos de volatilidade estocástica. A segunda e terceira, de cariz mais econométrico, pelos modelos de tipo ARCH²⁷.

Pelo tema desta dissertação é fácil adivinhar que o modelo aqui desenvolvido estará entre os primeiros modelos: os de volatilidade estocástica.

3.1 Modelos de Volatilidade Estocástica

3.1.1 Sem introdução de ruído adicional²⁸

O primeiro grupo de modelos descreve o processo de preços por uma equação genérica do tipo:

$$\frac{dS}{S} = \mu(S, t, \sigma)dt + \sigma(S, t, \sigma)dW$$

3. 2

sendo $\mu(S, t, \sigma)$ e $\sigma(S, t, \sigma)$ funções adaptadas relativamente à filtração gerada por W .

Entre este grupo de modelos é de referir o de variância com elasticidade constante, CEV²⁹, de Cox e Ross (1976), também estudado por Beckers (1980) e os modelos de Rubinstein (1983) – DDM³⁰, ou, mais recentemente, de Hobson e Rogers (1994).

A grande vantagem destes modelos é o facto de serem do tipo completo, i.e., existe a garantia de preço único na valorização dos derivados com base apenas em condições de não

²⁷ Estimativas de máxima verosimilhança para os modelos de tipo ARCH têm permitido tratar o aspecto de reversão à média da volatilidade.

²⁸ São os chamados *One-factor Model*.

²⁹ *Constant Elasticity of Variance*.

³⁰ *Displaced Diffusion Model*.

arbitragem. Hobson e Rogers (1994) mostram ainda que perante uma escolha adequada das funções $\mu(S, t, \sigma)$ e $\sigma(S, t, \sigma)$ do processo 3.2, os valores para as opções *call* assim obtidos podem incorporar alguns aspectos dos “sorrisos” verificados empiricamente.

Outro tipo de estudos que se podem incluir neste grupo são os de Derman e Kani (1994a, e 1994b) e Dupire (1994), ainda que a abordagem seja completamente distinta da anterior. Com base numa equação diferencial estocástica do tipo,

$$\frac{dS}{S} = \sigma(S, X) dW,$$

3.3

procuram determinar, de forma única, a função $\sigma(S, X)$ que permite que os preços de não arbitragem do modelo 3.3 coincidam, por exemplo, com os das opções *call* do mercado³¹. Posteriormente a função $\sigma(S, X)$ pode ser utilizada para valorizar outro tipo de derivados, de forma consistente com o “sorriso” das referidas opções *call*.

Este método tem, no entanto, pelo menos um problema, de cariz teórico, já que não procura explicar os “sorrisos”, mas tão só incorporá-los.

3.1.2 Com introdução de ruído adicional³²

Um segundo grupo de modelos utiliza um outro processo estocástico adicional para modelizar o comportamento da volatilidade, o que leva, regra geral, à introdução de um ruído adicional, W_2 , ainda que possivelmente correlacionado com o ruído, W_1 , que condiciona o processo de preços.

Neste grupo de modelos mantém-se o movimento browniano geométrico para descrever a dinâmica das rendibilidades,

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_1,$$

3.4

mas existe grande variedade quanto à dinâmica da volatilidade (ou da variância).

³¹ Este método é semelhante aos métodos de extracção da estrutura temporal da taxa de juro.

³² Os chamados *multiple-factor models*, sendo o mais utilizado o *two-factor model*.

Por exemplo, Scott (1987,1992), Wiggins (1987) e Chesney e Scott (1989) supõem que o logaritmo da volatilidade segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU) do tipo:

$$d(\ln \sigma) = b(a - \ln \sigma)dt + \delta dW_2, \quad 3.5$$

onde μ , a , b e δ são constantes.

No entanto, pelo menos mais quatro processos³³ foram sugeridos para a dinâmica da volatilidade:

$$d\sigma = b(a - \sigma)dt + \delta dW_2 \quad 3.6$$

$$d\sigma = b\sigma(a - \sigma)dt + \delta\sigma dW_2 \quad 3.7$$

$$d\sigma = b\sigma dt + \delta\sigma dW_2 \quad 3.8$$

e

$$dV = b(a - V)dt + \delta\sqrt{V}dW_2 \quad \text{com } V = \sigma^2 \quad 3.9$$

Stein e Stein (1991) e Heston (1993) desenvolveram soluções “fechadas” de valorização de opções quando a dinâmica da volatilidade é a dada pelas equações 3.6 e 3.9. Hull e White (1987) forneceram resultados de simulação para os casos das equações 3.7 e 3.8; Johnson e Shanno (1987) estudaram também o processo da equação 3.8 e Hull e White (1988) analisaram os “enviesamentos” que se verificariam nos preços de Black-Scholes se o verdadeiro processo da variância fosse o descrito pela equação 3.9. A última equação foi ainda objecto de estudo de Bailey e Sultz (1989), Scott (1992), Bates (1996) e de Das e Sundaram (1999).

Hull e White (1987, 1988) e Heston (1993) entendiam, ainda, como possível a existência de correlação entre os ruídos dos processos de preços e volatilidade, substituindo nalguns casos, W_1 e W_2 , independentes, por W_1^* e W_2^* , sendo que entre dW_1^* e dW_2^* se verificava a seguinte relação de correlação:

$$E[dW_1^* dW_2^*] = \rho dt. \quad 3.10$$

³³ A arbitrariedade na escolha dos processos estocásticos que descrevem o comportamento da volatilidade neste modelos é uma das características frequentemente referidas: “It is notable that these models [continuous time stochastic volatility models] have been motivated by convenience and intuition rather than by studies of observed prices” Taylor (1994).

3.1.3 Sistematização dos principais modelos

Quadro 1 Alguns estudos sobre Volatilidade Estocástica.

Metodologia	Autores (datas)	Modelo/Mercado	Resultados
<p>S/ novo ruído</p> <p>Processo das rendibilidades:</p> $\frac{dS}{S} = \mu(\cdot)dt + \sigma(\cdot)dW$	Cox e Ross (1976)	<p>CEV (Constant Elasticity of Variance)</p> $\sigma(S, t, \sigma) = \bar{\sigma}S^{-(1-\alpha)}$ <p>com $\bar{\sigma}$ e α constantes</p>	Sugerem o modelo CEV como alternativa ao modelo de BS, por ser mais realista.
	Geske (1979)		<p>Sugere uma interpretação para o modelo, segundo a qual o preço de uma acção é uma opção sobre a dívida da empresa.</p>
	Rubinstein (1985)		
	Bensoussan, Crouhy e Galai (1994)		
	Beckers (1980)		
	Schroder (1989)		
	Rubinstein (1983)	<p>DDM (Displacement Diffusion model)</p>	Estuda o caso especial em que $\alpha = \frac{2}{3}$, definindo o valor das opções call em termos de distribuições normais.
	Hobson e Rogers (1994)	$\frac{dS}{S} = \mu(\cdot)dt + \sigma(\cdot)dW$	Considera que os activos de uma empresa se dividem em: aqueles que têm volatilidade constante e aqueles que são isentos de risco. Este modelo origina uma correlação positiva entre preços e volatilidade a que, portanto, deixa de ser constante.
	Dupire (1993, 1994)	$\frac{dS}{S} = \sigma(S, X)dW$	Com uma escolha adequada das funções $\mu(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ é possível explicar alguns dos aspectos dos "sorrisos" de mercado
	Platen e Schweizer (1994)		Utiliza valores de opções para extrair a função da volatilidade.
<p>C/ novo ruído</p> <p>Processo das rendibilidades:</p> $\frac{dS}{S} = \mu dt + \alpha dW_1$	Wiggins (1987)	$d(\ln \sigma) = b(a - \ln \sigma)dt + \delta dW_2$	Desenvolvem este tipo de modelo, considerando o impacto que a cobertura do risco de forma dinâmica tem nas opções.
	Scott (1987, 1991)		
	Chesney e Scott (1989)		Derivam a equação diferencial estocástica associada a este tipo de modelo, procurando ainda identificar a sua capacidade para explicar os "sorrisos" de BS.
	Stein e Stein (1991)	$d\sigma = b(a - \sigma)dt + \delta dW_2$	Deduzem fórmula fechada.
	Hull e White (1987)	$d\sigma = b\sigma(a - \sigma)dt + \delta\alpha dW_2$	Analizam o efeito da volatilidade estocástica na valorização de opções
	Johnson e Shanno (1987)	$d\sigma = b\alpha dt + \delta\alpha dW_2$	Determinam, por simulação, valores para os "eviesamentos" de BS.
	Hull e White (1987)		
	Hull e White (1988)	$dV = b(a - V)dt + \delta\sqrt{V}dW_2$	Através de aproximações em fórmula de Taylor apresentam o valor e estratégias de cobertura do risco em opções call.
	Bailey e Sultz (1989)		Apresentam resultados de equilíbrio geral com μ estocástico no processo de preços
	Scott (1992)		3.4
Heston (1993)	Deduz formula fechada através da inversão de funções características		

3.2 O modelo

O modelo que será desenvolvido e estudado ao longo deste trabalho segue a lógica dos anteriores, incorporando apenas de forma mais explícita o parâmetro da correlação ρ :

$$dS = \mu S dt + \sqrt{V} S dW_1^*$$

$$dB = rB dt$$

$$dV = b(a - V) dt + \delta \sqrt{V} dW_2^*$$

com

$$dW_1^* = dW_1$$

$$dW_2^* = [\rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2],$$

μ, δ, a, b constantes

e W_1 e W_2 independentes.

3.11

A escolha, para a variância, V , de um processo do tipo 3.9 – com reversão à média e termo de difusão dependente da \sqrt{V} – prendeu-se, em primeiro lugar, com o facto de ser um processo bastante utilizado por outros autores, principalmente por aqueles que procuraram incorporar alguma correlação, e, em segundo lugar, por, no caso de inexistência de correlação entre rendibilidade e volatilidade, ser um processo que tem um valor esperado conhecido *a priori* (e igual ao seu valor de longo prazo, a)³⁴.

Os termos dW_1^* e dW_2^* resultaram da decomposição de Cholesky³⁵ e garantem uma correlação constante, ρ , entre as componentes aleatórias dos processos da rendibilidade e da volatilidade.

Este modelo, bem como os demais modelos de volatilidade estocástica, são modelos ditos incompletos já que o número de fontes de aleatoriedade (duas) é superior ao número de

³⁴ Outros processos, como são por exemplo os processos com termos de difusão dependentes de $|V|$, não apresentam esta propriedade. Stein e Stein (1991), utilizando um processo de difusão dependente do módulo da variância, chegaram a conclusões erradas, mais tarde corrigidas por Ball e Roma (1994) (correções essas que chamam, justamente, a atenção para o facto de o processo com $|V|$ levar a valores médios para V superiores aos de longo prazo).

³⁵
$$\begin{bmatrix} dW_1^* \\ dW_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{bmatrix}, \text{ assim } dW_1^* = dW_1, \quad dW_2^* = \rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2 \quad \text{e}$$

$$E[dW_1^* dW_2^*] = \rho dt.$$

activos subjacentes transaccionáveis envolvidos (um³⁶).

Como acontece em qualquer modelo deste tipo, não é possível determinar um preço único para um determinado derivado, mas é possível estabelecer relações de não-arbitragem entre os preços de quaisquer dois derivados com o mesmo subjacente; i.e., com base no activo subjacente S e num “derivado base” é possível determinar um valor único para qualquer outro derivado sobre o mesmo subjacente S .

Um qualquer derivado, I , cujo subjacente seja o activo S , segue o seguinte processo estocástico³⁷:

$$dI = \left[\frac{\partial I}{\partial t} + \mu S \frac{\partial I}{\partial S} + b(a - V) \frac{\partial I}{\partial V} + \frac{1}{2} VS^2 \frac{\partial^2 I}{\partial S^2} + \frac{1}{2} V \delta^2 \frac{\partial^2 I}{\partial V^2} + VS \delta \rho \frac{\partial^2 I}{\partial S \partial V} \right] dt + \left[\sqrt{V} S \frac{\partial I}{\partial S} + \sqrt{V} \delta \rho \frac{\partial I}{\partial V} \right] dW_1 + \left[\delta \sqrt{V} \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial I}{\partial V} \right] dW_2 \quad 3.12$$

Neste modelo, a dinâmica do derivado depende não só do activo subjacente, como também da volatilidade desse mesmo activo.

Por a volatilidade não ser transaccionável³⁸ e estarmos numa situação de mercado incompleto, para a formação de uma carteira Π isenta de risco será necessário o uso de dois derivados distintos sobre o mesmo subjacente.

Considere-se então uma carteira constituída pelos seguintes três activos: o activo subjacente S e dois derivados distintos sobre esse activo, F e G :

$$\Pi = \pi_S S + \pi_F F + \pi_G G$$

onde $\pi_S + \pi_F + \pi_G = 1$

3.13

A dinâmica da carteira Π é, então:

$$d\Pi = \pi_S dS + \pi_F dF + \pi_G dG$$

$$d\Pi = [\mu \pi_S S + \alpha_F \pi_F F + \alpha_G \pi_G G] dt + [\sqrt{V} \pi_S S + \theta_F \pi_F F + \theta_G \pi_G G] dW_1 + [\gamma_F \pi_F F + \gamma_G \pi_G G] dW_2$$

³⁶ Em qualquer modelo de volatilidade estocástica pode sempre considerar-se que os activos subjacentes a um qualquer derivado são dois: o subjacente S e a própria volatilidade σ de S .

³⁷ Ver aplicação do lema de Itô em apêndice ao capítulo.

³⁸ A volatilidade, σ , não é um activo transaccionável por não ser possível adquirir ou vender $x\%$ de volatilidade.

3. 14

onde

$$\alpha_I = \frac{\frac{\partial I}{\partial t} + \mu S \frac{\partial I}{\partial S} + b(a - V) \frac{\partial I}{\partial V} + \frac{1}{2} V S^2 \frac{\partial^2 I}{\partial S^2} + \frac{1}{2} V \delta^2 \frac{\partial^2 I}{\partial V^2} + V S \delta \rho \frac{\partial^2 I}{\partial S \partial V}}{I}$$

$$\theta_I = \frac{\sqrt{V} S \frac{\partial I}{\partial S} + \sqrt{V} \delta \rho \frac{\partial I}{\partial V}}{I}$$

$$\gamma_I = \frac{\delta \sqrt{V} \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial I}{\partial V}}{I}$$

 $I = F, G$

3. 15

Para que a carteira seja isenta de risco, os termos em dW_1 e dW_2 terão que ser ambos nulos. Estas restrições, e o facto de os diferentes pesos π terem que somar 1, podem ser resumidas no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \sqrt{V} \pi_S S + \theta_F \pi_F F + \theta_G \pi_G G = 0 \\ \gamma_F \pi_F F + \gamma_G \pi_G G = 0 \\ \pi_S + \pi_F + \pi_G = 1 \end{cases}$$

3. 16

A resolução do sistema³⁹ permite determinar os diferentes pesos que o activo subjacente e os dois derivados têm que ter na carteira Π :

$$\begin{aligned} \pi_S &= \frac{\theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F}{S \sqrt{V} (\gamma_F F - \gamma_G G) + \theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F} \\ \pi_F &= - \frac{S \sqrt{V} \gamma_G G}{S \sqrt{V} (\gamma_F F - \gamma_G G) + \theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F} \\ \pi_G &= \frac{S \sqrt{V} \gamma_F F}{S \sqrt{V} (\gamma_F F - \gamma_G G) + \theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F} \end{aligned}$$

3. 17

Se π_S , π_F e π_G forem os acima indicados, a dinâmica da carteira resume-se a:

$$\begin{aligned} d\Pi &= [\mu \pi_S S + \alpha_F \pi_F F + \alpha_G \pi_G G] dt \\ d\Pi &= \left(\mu S \frac{\theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F}{S \sqrt{V} (\gamma_F F - \gamma_G G) + \theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F} - \alpha_F F \frac{S \sqrt{V} \gamma_G G}{S \sqrt{V} (\gamma_F F - \gamma_G G) + \theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_G G \frac{S \sqrt{V} \gamma_F F}{S \sqrt{V} (\gamma_F F - \gamma_G G) + \theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F} \right) dt \end{aligned} \quad 3. 18$$

Dado que a carteira é isenta de risco, e para que não existam oportunidades de arbitragem,

³⁹ Ver síntese dos cálculos no apêndice ao capítulo.

terá que existir a seguinte relação de não arbitragem:

$$\left(\mu S \frac{\theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F}{S\sqrt{V}(\gamma_F F - \gamma_G G) + \theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F} - \alpha_F F \frac{S\sqrt{V}\gamma_G G}{S\sqrt{V}(\gamma_F F - \gamma_G G) + \theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F} \right. \\ \left. + \alpha_G G \frac{S\sqrt{V}\gamma_F F}{S\sqrt{V}(\gamma_F F - \gamma_G G) + \theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F} \right) = r\Pi \quad 3.19$$

Após algumas simplificações⁴⁰, é possível verificar que existe a seguinte relação de igualdade entre os três activos em carteira:

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sqrt{V}} = \frac{\alpha_F - r}{\theta_F} = \frac{\alpha_G - r}{\theta_G} \quad 3.20$$

Uma vez que λ (o “preço” do risco associado a W_1) é constante, independentemente do activo que estiver a ser considerado, sabemos que o derivado I tem que obedecer à relação:

$$\alpha_I - \theta_I \lambda = r \quad 3.21$$

Aplicar-se-á exactamente o mesmo raciocínio ao activo subjacente, sendo que, aliás, o activo subjacente pode sempre ser visto como um derivado sobre ele mesmo, derivado esse, que ao fim de determinado tempo tem como *payoff* o valor do activo subjacente S .

$$\mu - \sqrt{V}\lambda = r$$

Substituindo, em 3.21, α_I e θ_I pelas suas expressões às derivadas parciais, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + rS \frac{\partial I}{\partial S} + (b(a - V) - \lambda\sqrt{V}\delta) \frac{\partial I}{\partial V} + \frac{1}{2}VS^2 \frac{\partial^2 I}{\partial S^2} + \frac{1}{2}V\delta^2 \frac{\partial^2 I}{\partial V^2} + VS\delta\rho \frac{\partial^2 I}{\partial S\partial V} = rI \quad 3.22$$

sendo os processos risco neutrais a ela associados,

$$dS = rSdt + \sqrt{V}SdW_1^*$$

$$dV = b^*(a^* - V_t)dt + \delta\sqrt{V_t} \left[\rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2 \right]$$

sendo

$$a^* = b + \lambda \quad \text{e} \quad b^* = \frac{ba}{b + \lambda}$$

3.23

com b^* e a^* , a variância de longo-prazo e o coeficiente de reversão à média respectivamente, mundo risco neutral.

⁴⁰ Ver dedução no apêndice ao capítulo.

O problema desta equação diferencial estocástica, 3.22 e dos processos risco neutrais 3.23 prende-se com o facto de o processo (risco neutral) da variância, depender do parâmetro λ ("preço do risco"). Este parâmetro pode, no entanto, ser estimado empiricamente, utilizando para isso qualquer activo cujo valor seja dependente da volatilidade⁴¹. Lamoureux e Lastrapes (1993) provaram que este parâmetro, pelo menos em opções sobre acções, tende a ser diferente de zero.

3.3 Conclusão

Ao longo deste capítulo, e fazendo apelo a estudos semelhantes anteriores, desenvolveu-se um modelo de volatilidade estocástica, que apresenta de forma explícita o parâmetro da correlação, ρ .

É justamente essa correlação que será objecto de análise no próximo capítulo. Aí procura determinar-se, em termos teóricos, qual o impacto que se espera que essa correlação venha a ter na valorização de opções e apresenta-se o método para aferir a veracidade das hipóteses anteriores, cujos resultados serão apresentados no capítulo 5.

⁴¹ A estimação destes parâmetros pode ser levada a cabo directamente, estimando, por exemplo a^* com base nas volatilidades implícitas em preços de opções (é de notar que a^* não é necessariamente igual a a por causa do efeito do "preço do risco"), ou, em alternativa, estimando os verdadeiros a , b (com base no processo dos preços do activo subjacente) e λ (utilizando, por exemplo, as rendibilidades de carteiras imunizadas face a alterações do preço do activo subjacente) e procurando calcular a^* e b^* com base nos valores estimados. É um processo, de certa forma, análogo ao da extracção de volatilidades implícitas no modelo de Black-Scholes.

3.4 Apêndice

1. Aplicação do lema de Itô a um modelo de volatilidade estocástica

Considere-se o modelo apresentado:

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sqrt{V} S dW_1^* \\ dB &= rB dt \\ dV &= b(a - V) dt + \delta \sqrt{V} dW_2^* \\ \text{com} \\ dW_1^* &= dW_1 \\ dW_2^* &= [\rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2], \\ \mu, \delta, a, e b &\text{ constantes} \\ \text{e } W_1 \text{ e } W_2 &\text{ independentes.} \end{aligned}$$

Seja I um qualquer derivado com subjacente S . Segundo o lema de Itô, a dinâmica associada a esse derivado pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\partial I}{\partial t} dt + \frac{\partial I}{\partial S} dS + \frac{\partial I}{\partial V} dV + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial S^2} (dS)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial V^2} (dV)^2 + \frac{\partial^2 I}{\partial S \partial V} (dS)(dV) \\ dI &= \frac{\partial I}{\partial t} dt + \frac{\partial I}{\partial S} [\mu S dt + \sqrt{V} S dW_1^*] + \frac{\partial I}{\partial V} [b(a - V) dt + \delta \sqrt{V} dW_2^*] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial S^2} [\mu S dt + \sqrt{V} S dW_1^*]^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial V^2} [b(a - V) dt + \delta \sqrt{V} dW_2^*]^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 I}{\partial S \partial V} [\mu S dt + \sqrt{V} S dW_1^*] [b(a - V) dt + \delta \sqrt{V} dW_2^*] \end{aligned}$$

como $dW_1^* = dW_1$ e $dW_2^* = \rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2$ vem,

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\partial I}{\partial t} dt + \frac{\partial I}{\partial S} [\mu S dt + \sqrt{V} S dW_1] + \frac{\partial I}{\partial V} [b(a - V) dt + \delta \sqrt{V} (\rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2)] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial S^2} [V S^2 dt] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial V^2} [\delta^2 V dt] + \frac{\partial^2 I}{\partial S \partial V} [\delta S V \rho dt] \end{aligned}$$

Agrupando os termos em dt , dW_1 e dW_2 obtém-se:

$$dI = \left[\frac{\partial I}{\partial t} + \mu S \frac{\partial I}{\partial S} + b(a - V) \frac{\partial I}{\partial V} + \frac{1}{2} VS^2 \frac{\partial^2 I}{\partial S^2} + \frac{1}{2} V \delta^2 \frac{\partial^2 I}{\partial V^2} + VS \delta \rho \frac{\partial^2 I}{\partial S \partial V} \right] dt + \left[\sqrt{V} S \frac{\partial I}{\partial S} + \sqrt{V} \delta \rho \frac{\partial I}{\partial V} \right] dW_1 + \left[\delta \sqrt{V} \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial I}{\partial V} \right] dW_2$$

3. 24

2. Determinação dos “pesos” na carteira isenta de risco:

Como

$$d\Pi = \pi_S dS + \pi_F dF + \pi_G dG$$

$$d\Pi = [\mu \pi_S S + \theta_F \pi_F F + \theta_G \pi_G G] dt + [\sqrt{V} \pi_S S + \delta_F \pi_F F + \delta_G \pi_G G] dW_1 + [\gamma_F \pi_F F + \gamma_G \pi_G G] dW_2$$

3. 25

para que se eliminem todas as fontes de incerteza, temos que ter:

$$\begin{cases} \sqrt{V} \pi_S S + \theta_F \pi_F F + \theta_G \pi_G G = 0 \\ \gamma_F \pi_F F + \gamma_G \pi_G G = 0 \\ \pi_S + \pi_F + \pi_G = 1 \end{cases}$$

assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_F = -\frac{\gamma_G G \pi_G}{\gamma_F F} \\ \pi_S = 1 - \pi_G \left(1 - \frac{\gamma_G G}{\gamma_F F} \right) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[1 - \pi_G \left(1 - \frac{\gamma_G G}{\gamma_F F} \right) \right] S \sqrt{V} + \left(-\frac{\gamma_G G \pi_G}{\gamma_F F} \right) \gamma_F F + \pi_G \gamma_G G = 0 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_G = \frac{S \sqrt{V}}{S \sqrt{V} \left(1 - \frac{\gamma_G G}{\gamma_F F} \right) + \frac{\gamma_G G \theta_F F}{\gamma_F F} - \theta_G G} \\ \pi_F = -\frac{\gamma_G G S \sqrt{V}}{S \sqrt{V} (\gamma_F F - \gamma_G G) + \gamma_G G \theta_F F - \gamma_F F \theta_G G} \\ \pi_S = \frac{\gamma_G G \theta_F F - \gamma_F F \theta_G G}{S \sqrt{V} (\gamma_F F - \gamma_G G) + \gamma_G G \theta_F F - \gamma_F F \theta_G G} \end{array} \right.$$

3. 26

3. Determinação da equação diferencial do modelo de volatilidade estocástica:

Para que não existam oportunidades de arbitragem, o *drift* da carteira Π tem que ser igual à taxa de juro sem risco:

$$\left(\mu S \frac{\theta \delta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F}{S \sqrt{V} (\gamma_F F - \gamma_G G) + \theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F} - \alpha_F F \frac{S \sqrt{V} \gamma_G G}{S \sqrt{V} (\gamma_F F - \gamma_G G) + \theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F} + \alpha_G G \frac{S \sqrt{V} \gamma_F F}{S \sqrt{V} (\gamma_F F - \gamma_G G) + \theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F} \right) = r (\pi_S S + \pi_F F + \pi_G G) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma_G G (\theta_F F \mu S - S \sqrt{V} \theta_F F) - \gamma_F F (\theta_G G \mu S - S \sqrt{V} \theta_G G) = r [(\theta_F F \gamma_G G - \theta_G G \gamma_F F) S + S \sqrt{V} (\gamma_F F G - \gamma_G G F)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma_G G (\theta \delta_F F \mu S - S \sqrt{V} \theta_F F) - \gamma_F F (\theta_G G \mu S - S \sqrt{V} \theta_G G) = \gamma_G G (r \theta_F F S - r S \sqrt{V} F) - \gamma_F F (r \theta_G G S - r S \sqrt{V} G) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r \theta_F S - r S \sqrt{V} = \theta_F \mu S - S \sqrt{V} \alpha_F \\ r \theta_G S - r S \sqrt{V} = \theta_G \mu S - S \sqrt{V} \alpha_G \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\mu - r}{\sqrt{V}} = \frac{\alpha_F - r}{\theta_F} = \frac{\alpha_G - r}{\theta_G}$$

logo temos que $\mu - \sqrt{V} \lambda = r$ e assim,

$$\alpha_i - \theta_i \lambda = r$$

3. 27

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mu S \frac{\partial I}{\partial S} + b(a - V) \frac{\partial I}{\partial V} + \frac{1}{2} V S^2 \frac{\partial^2 I}{\partial S^2} + \frac{1}{2} V \delta^2 \frac{\partial^2 I}{\partial V^2} + V S \delta \rho \frac{\partial^2 I}{\partial S \partial V} - \lambda \left(\sqrt{V} S \frac{\partial I}{\partial S} + \sqrt{V} \delta \rho \frac{\partial I}{\partial V} \right) = r I$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + r S \frac{\partial I}{\partial S} + (b(a - V) - \lambda \sqrt{V} \delta) \frac{\partial I}{\partial V} + \frac{1}{2} V S^2 \frac{\partial^2 I}{\partial S^2} + \frac{1}{2} V \delta^2 \frac{\partial^2 I}{\partial V^2} + V S \delta \rho \frac{\partial^2 I}{\partial S \partial V} = r I$$

3. 28

4 Impacto da Correlação na Valorização de Opções

Na grande maioria dos estudos feitos sobre modelos de volatilidade estocástica, os desenvolvimentos são feitos considerando $\rho = 0$, sendo os trabalhos de Hull e White (1987) e Heston (1993)⁴² as duas principais excepções. É nestes estudos que aparecem as primeiras interpretações sobre os efeitos que seria de esperar que uma correlação entre a rendibilidade e a volatilidade pudesse ter na distribuição preços (ao fim determinado tempo, τ , e com base no valor actual S_0) e, conseqüentemente na valorização de opções. Em qualquer dos estudos, no entanto, a investigação sobre a correlação foi feita de forma marginal, certamente, por não ser esse o objectivo principal da investigação.

Neste capítulo pretende-se desenvolver, de forma tanto quanto possível independente, pensamentos sobre a matéria e compará-los com os de Hull, White e Heston.

Uma vez por as ideias a que se chegou nesta dissertação não são exactamente coincidentes, apresenta-se, igualmente, a metodologia pela qual se tentará aferir os reais efeitos.

4.1 Intuição sobre os efeitos de uma correlação constante

Admitamos como possível a existência de uma correlação negativa, $\rho < 0$, entre os processos dos preços e da volatilidade. Se assim fosse, os aumentos de preço do subjacente seriam acompanhados por diminuições de volatilidade que, por essa via, fariam com que preços bastante elevados fossem relativamente menos prováveis; ao invés os preços pouco acima do valor actual relativamente mais prováveis (do que numa situação de volatilidade constante, como no modelo de Black-Scholes, e mesmo do que quando a volatilidade é estocástica, mas $\rho = 0$). Por outro lado, as descidas de preço acompanhadas por aumentos de volatilidade, tornariam relativamente mais prováveis as descidas acentuadas, já que as próprias descidas provocariam novo aumento de volatilidade.

As opiniões de Hull e White são semelhantes às de Heston quando consideram que a probabilidade de preços relativamente altos diminui, mas Hull e White acham que, como as

⁴² Das e Sundaram (1999) também consideram o modelo de Heston (1993) com $\rho \neq 0$.

descidas de preço são acompanhadas por aumentos de volatilidade, a probabilidade de preços muito baixos é relativamente menor⁴³. Ora, se as descidas de preço levam a aumentos de volatilidade, verifica-se um aumento e não uma diminuição da probabilidade de se atingirem preços cada vez mais reduzidos. Por outro lado, poder-se-ia pensar, como argumentam Hull e White, que esse aumento de volatilidade (gerado pela descida de preço) levaria também a um aumento da probabilidade de preços altos; no entanto, este argumento não pode estar certo, já que esses aumentos levariam, eles próprios, a uma diminuição da própria volatilidade.

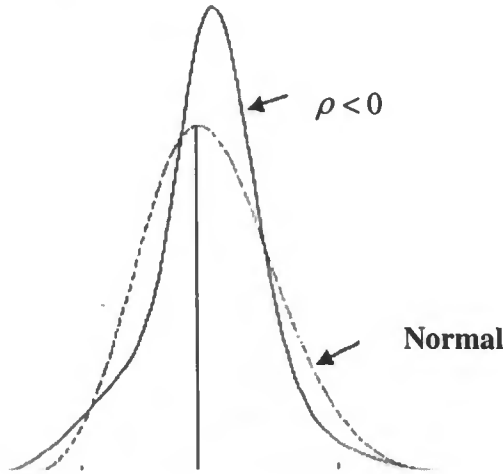
Assim, e ao contrário do defendido por Hull e White, acredita-se que o efeito da existência de uma correlação negativa na distribuição final de preços não seja tão linear como um simples aumento da concentração em torno do valor actual⁴⁴. Aliás, a existência de uma correlação entre rendibilidade e volatilidade vem aumentar bastante a complexidade dos modelos. Note-se que a existência de uma correlação negativa leva a que os aumentos de preço sejam acompanhados de uma diminuição da volatilidade, mas isso mesmo – por a volatilidade ser um dos parâmetros da distribuição dos preços – leva a uma alteração contínua da distribuição dos preços.

A distribuição final de preços pode, por isso, não ser tão bem comportada como se poderia pensar à primeira vista, já que levará a ter preços pouco acima do nível actual, S_0 , relativamente mais prováveis, mas muito abaixo do nível actual, relativamente menos prováveis e, por outro lado, pouco abaixo do nível actual, relativamente menos prováveis e muito abaixo do nível actual relativamente mais prováveis. É de esperar, assim, uma distribuição com aba esquerda mais pesada, mas direita menos pesada, sendo difícil extrapolar sobre se o nível de *kurtosis* será ou não superior ao da lognormal, embora seja previsível um *skewness* negativo acentuado. De igual forma, em termos da distribuição das rendibilidades, e para efeitos comparativos com as ideias de Heston, apresentadas em seguida, seria de esperar uma maior concentração em torno das rendibilidades pouco positivas, um *skewness* negativo e uma aba esquerda significativamente mais pesada do que a da distribuição normal. Ver figura 3, ilustrativa do efeito descrito.

⁴³ "... as prices decreases increase volatility, increasing the chance of large positive price changes; very low prices become less likely". Hull e White (1987), pág.296

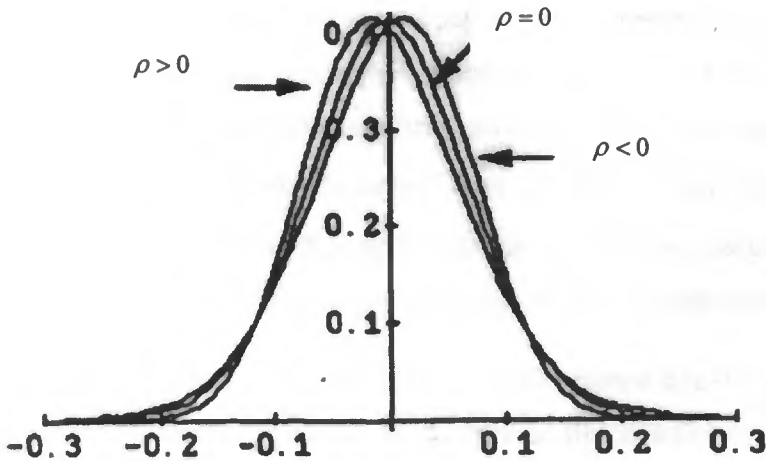
⁴⁴ "The net effect [of a negative correlation] is that the terminal stock price is more peaked than the usual lognormal distribution." Hull e White (1987) pág.296

Figura 3: Efeito que se espera que a correlação negativa tenha na distribuição de rendibilidades, de acordo com as ideias defendidas na presente dissertação.



Heston (1993) faz uma análise ainda mais sintética que a de Hull e White (1987), acreditando que o efeito, na distribuição das rendibilidades, é apenas o de originar um *skewness* negativo, não se assistindo a nenhuma concentração específica em torno dos valores ligeiramente acima da média. Ver figura ilustrativa 4.

Figura 4: Efeito que Heston espera que correlação negativa tenha na distribuição de rendibilidades (reprodução de uma figura de Heston (1993)).



Os resultados obtidos por Heston (1993) resultam de uma fórmula “fechada”, deduzida para os modelos de volatilidade estocástica, recorrendo a inversões de funções características. Se

bem que de um ponto de vista matemático seja um trabalho bastante complexo e interessante, poderão surgir, no entanto, algumas dúvidas sobre a capacidade que tal tipo de modelo tem para incorporar a complexidade das distribuições finais, já que um $\rho \neq 0$ tem impactos sucessivos na distribuição das rendibilidades.

Tendo extrapolado as diferenças que se esperam entre a distribuição final de preços, quando $\rho < 0$, e a distribuição lognormal, é possível deduzir que tipo de “enviesamentos” do modelo de Black-Scholes seriam explicáveis pela existência de tal correlação.

Aqui, tal como sobre os efeitos na distribuição final de preços, as ideias que se defendem nesta dissertação são diferentes das de Hull e White e das de Heston. Tal distinção não será surpreendente, já que existe uma relação quase imediata entre a distribuição final do preço do activo subjacente e a valorização das opções que sobre ele incidam. Talvez já surpreenda, porém, a total concordância entre Hull e White (1987) e Heston (1993) quanto ao efeito de $\rho < 0$ na valorização de opções, mas não na distribuição final de preços!

Analisemos, em primeiro lugar, o caso de uma opção *call out-of-the-money*. Tenhamos em mente que, se o preço do activo subjacente hoje é S_0 e a *call* está *out-of-the-money*, $X > S_0$, i.e., permite adquirir o activo subjacente a um preço superior ao actual.

Numa situação de $\rho < 0$, em que as subidas de preço originam descidas de volatilidade, estas opções têm, por um lado, uma probabilidade de não-exercício relativamente superior, quer por diminuições de preço originarem aumentos de volatilidade (e possibilitarem afastamentos – descidas – ainda mais significativos do valor actual), quer por o preço de exercício, X , superior a S_0 , ser relativamente mais difícil de atingir (por a volatilidade diminuir com as subidas de preços). Por outro lado, mesmo quando exercida a *call* o *payoff* esperado será menor, já que os preços se concentrarão em níveis relativamente mais baixos.

O valor “justo” para as *call out-of-the-money* seria, então, menor que o proposto por Black-Scholes, ou, de outro modo, a aplicação do modelo de Black-Scholes, verificando-se um $\rho < 0$, levaria a uma sobreavaliação das *call out-of-the-money*.

No caso das opções *call in-the-money* (que, mantendo-se os preços aos níveis actuais, seriam exercidas) a situação é mais complexa por serem eventualmente possíveis quer aumentos quer diminuições de preço, mantendo-se o exercício (pois $S > X$). Ainda assim, como os aumentos de preço originam uma maior probabilidade de exercício, mas com menor *payoff*

(por a volatilidade ir diminuindo), e as diminuições de preço (com aumentos da volatilidade) levam a aumento da probabilidade de não-exercício. O valor “justo” deste tipo de opções é, mais uma vez, inferior ao da fórmula de Black-Scholes.

As opções *call at-the-money* terão no valor um impacto algo híbrido, com aspectos das *out-of-the-money* e das *in-the-money*, mas serão também sobreavaliadas pela fórmula de Black-Scholes⁴⁵.

Se todos estes factores se comportarem como ficou descrito acima, é de prever, por parte do modelo de Black-Scholes, uma sobreavaliação das *call* e, pela relação de paridade, uma subavaliação das *put*. O maior valor das *put*, quando temos $\rho < 0$ é, aliás, justificável por argumentos idênticos aos apresentados para as *call* (descidas de preço lhes serem favoráveis e essas descidas serem relativamente mais prováveis quando acompanhadas por aumentos de volatilidade, tornando maior a probabilidade de exercício e o *payoff* esperado em caso de exercício).

Hull e White (1987) e Heston (1993), como adiantado, defendem antes que, perante um $\rho < 0$, o modelo de Black-Scholes subavalia as *call* suficientemente *in-the-money*, mas sobreavalia as *out-of-the-money* verificando-se uma valorização “justa” por parte do modelo de BS para as opções ligeiramente *in-the-money*.

Quando a correlação é positiva, $\rho > 0$, todos os efeitos se revertem. Como as subidas de preço são acompanhadas por aumentos de volatilidade e as descidas de preço por diminuições de volatilidade, os preços elevados tornam-se relativamente mais prováveis, enquanto que as quedas acentuadas são relativamente menos prováveis, por as descidas de preço serem acompanhadas por diminuições de volatilidade. A distribuição de preços apresentará uma distribuição com elevada concentração em níveis de preços ligeiramente abaixo no nível actual, S_0 , e apresentará acentuado *skewness* positivo. A distribuição das rendibilidades será, pois, simétrica à da figura 3 com eixo de simetria em S_0 .

Hull e White (1987) e Heston (1993) defendem também um *skewness* mais positivo da distribuição, mas não uma concentração em torno de um valor (ou conjunto de valores) em

⁴⁵ Na explicação apresentada os argumentos para as *call in-the-money* e *out-of-the-money* são válidos apenas para preços de exercício suficientemente afastados do nível actual. A justificação das *at-the-money* aplica-se, pois, também aos casos de opções ligeiramente *in-the-money* ou *out-of-the-money*.

particular (ver figura 4). Hull e White consideram, aliás, que, para além de os preços elevados serem relativamente mais prováveis, os preços baixos funcionariam como estados absorventes⁴⁶. Ora, este parece-nos ser um argumento algo falacioso, já que um $\rho > 0$, estabelece um efeito dinâmico (não o estático, que poderia levar a um estado absorvente), logo, se uma descida de preços (com a consequente diminuição da volatilidade que origina uma maior concentração da distribuição instantânea em torno de um nível baixo), for seguida de uma subida que, para $\rho > 0$, leva a um aumento de volatilidade, assiste-se também a um aumento da probabilidade de saída do nível baixo de preços⁴⁷.

Uma das críticas que se pode, justamente, apontar quer ao estudo de Hull e White, quer ao de Heston, é o facto de considerarem a distribuição final de preços como se fosse independente do percurso. Quando existe uma correlação constante ρ , e se assiste, por exemplo, a uma subida continuada de preços ou, pelo contrário, a uma descida continuada dos mesmos, as distribuições finais serão substancialmente diferentes. Tanto quanto se sabe, o primeiro alerta para este tipo de problemas nos modelos de volatilidade estocástica, com $\rho \neq 0$, foi feito por Ait-Sahalia, Wang e Yared (2001)⁴⁸.

Procurando analisar, neste ambiente de correlação positiva, o valor “justo” das opções, pensemos, por exemplo, no caso de uma *call in-the-money*: os aumentos de cotação são acompanhados por aumentos de volatilidade, o que torna relativamente mais provável a existência de *payoffs* elevados se exercida, enquanto que a diminuição da cotação, por vir acompanhada de diminuição de volatilidade, garante que a probabilidade de não exercício é relativamente reduzida face à situação de volatilidade constante (modelo de BS) ou mesmo em que $\rho = 0$. Ora, Hull e White concluem exactamente o contrário!

O quadro 2, abaixo, sintetiza as ideias de Hull e White (1987, 1988) e Heston (1993) e

⁴⁶ “... if stock prices fall, it becomes less likely that large changes take place. Low stock prices become like absorbing states, and it becomes more likely that the terminal stock price will be low. The net effect is that terminal stock price distribution is more positively skewed than the lognormal.” Hull e White (1987), pág. 296

⁴⁷ Para que os níveis baixos de preços pudessem ser considerados estados absorventes teria que se verificar que, uma vez atingidos esses níveis baixos, fosse muito reduzida a probabilidade de saída.

⁴⁸ Trata-se de um estudo sobre a comparação entre os processos risco neutrais passíveis de existir nas cotações reais de opções sobre S&P500, e as distribuições risco neutrais de diferentes tipos de modelos de valorização de opções. São tratados, de forma genérica, os modelos do tipo *one-factor* e ainda os modelos de “saltos”, deixando para investigação futura os de volatilidade estocástica e alertando para o facto de o método utilizado só poder ser aplicado a modelos com $\rho = 0$, dada a dependência que a distribuição final tem do percurso realizado quando $\rho \neq 0$.

compara-as com as apresentadas nesta dissertação.

Quadro 2: Efeitos da correlação entre rendibilidades e volatilidade do activo subjacente. Análise comparativa das ideias de Hull e White (1987) – HW, Heston (1993) – Ht e das ideias defendidas nesta dissertação de mestrado – DM.

		$\rho < 0$	$\rho > 0$		
Efeito nos movimentos de preço	HW, Ht & DM	Subidas de preço são acompanhadas por diminuições de volatilidade. Descidas de preço por aumentos de volatilidade.	Subidas de preço são acompanhadas por aumentos de volatilidade. Descidas de preço por diminuições de volatilidade.		
Efeito da distribuição final do preço	HW, Ht & DM	Preços bastante reduzidos são mais prováveis. Preços bastante elevados são menos prováveis.	Preços bastante elevados são mais prováveis. Preços bastante reduzidos são menos prováveis.		
	DM	Preços pouco acima do actual são mais prováveis.	Preços pouco abaixo do actual são mais prováveis.		
	HW	<i>"price decreases increase volatility, increasing the chance of large positive price changes; very low prices become less likely"</i> ↓ <i>"the distribution is more peaked than the usual lognormal"</i>	<i>"low stock prices become like absorbing states"</i> ↓ <i>"the distribution is more positively skewed than the lognormal"</i>		
	Ht	<i>"a negative correlation has completely opposite effects"</i>	<i>"the correlation parameter affects the skewness of the distribution,...it spreads the right tail, ...(but) left tail is not spread out"</i>		
	DM	O efeito não é linear. A distribuição apresentará grande concentração em preços pouco acima do inicial, uma aba esquerda mais pesada que a distribuição lognormal e uma aba direita menos pesada.	O efeito é o oposto.		
Efeito no valor das Opções (*)		HW & Ht	DM	HW & Ht	DM
	ATM calls	<i>"the crossing point is slightly ITM"</i>	diminui	<i>"the crossing point is slightly OTM"</i>	aumenta
	ITM calls	diminui		aumenta	
	OTM calls	aumenta		diminui	
	ATM puts	<i>"the crossing point is slightly OTM"</i>	aumenta	<i>"the crossing point is slightly ITM"</i>	diminui
	ITM puts	aumenta		diminui	
OTM puts	diminui	aumenta			

(*) Efeito relativo face aos valores de BS, i.e., "diminui"=> o modelo BS sobreavalia, o verdadeiro valor seria menor; "aumenta"=> o modelo de BS subavalia, o verdadeiro valor seria maior.

Para esclarecer estas e outras dúvidas sobre o efeito real de uma correlação, seja ela negativa ou positiva, optou-se por fazer um estudo de simulação do tipo Monte Carlo, com base no modelo desenvolvido no capítulo 3.

4.2 A metodologia de análise – simulação de Monte Carlo

Por o modelo de volatilidade estocástica deste trabalho ser um modelo que depende de dois processos de difusão e por a equação diferencial estocástica

$$\frac{\partial I}{\partial t} + rS \frac{\partial I}{\partial S} + (b(a - V) - \lambda\sqrt{V}\delta) \frac{\partial I}{\partial V} + \frac{1}{2}VS^2 \frac{\partial^2 I}{\partial S^2} + \frac{1}{2}V\delta^2 \frac{\partial^2 I}{\partial V^2} + VS\delta\rho \frac{\partial^2 I}{\partial S\partial V} = rI$$

4. 1

não ter solução conhecida, a valorização de opções, ou qualquer estudo sobre os processos de preços ou volatilidade, terá sempre que ser feito recorrendo a métodos numéricos.

Os métodos numéricos podem-se subdividir em métodos de árvores (binomiais, trinomiais, etc), métodos de diferenças finitas e métodos de simulação de Monte Carlo. Os métodos de árvores e de diferenças finitas são utilizados, fundamentalmente, no caso de modelos com apenas um processo de difusão (*one-factor models*), têm a vantagem de serem simples e mais rápidos e, por isso, computacionalmente mais eficientes que os de Monte Carlo. As vantagens dos primeiros dois tipos de métodos, quer em termos de simplicidade, quer em termos de tempo de computação, desaparecem quando o modelo inclui mais do que um processo de difusão. Nesses casos, o método de simulação de Monte Carlo, dada a sua grande flexibilidade, continua a ser a principal ferramenta de que os investigadores dispõem.

A ideia subjacente ao método é bastante intuitiva e baseia-se na lei do grandes números: não se pode conhecer a evolução futura de uma variável aleatória, mas se se conhecer o seu comportamento, ou, dito de outra forma, o processo estocástico que a rege, é possível fazer simulações e, se forem feitas em grande número, consegue-se determinar os possíveis valores futuros dessa variável aleatória e a probabilidade da sua ocorrência⁴⁹.

O método de Monte Carlo foi, pois, o escolhido para simular os comportamentos do preço de volatilidade descritos pelo modelo do capítulo 3, quer por ser um modelo que considera dois processos de difusão, quer por ser um método capaz de incorporar facilmente a interligação ρ que se impõe entre as duas variáveis.

⁴⁹ A primeira utilização conhecida de métodos de Monte Carlo foi em 1942, em investigações relacionadas com o desenvolvimento da bomba atómica em Los Álamos.



No nosso caso este método foi utilizado para conseguir uma aproximação do tipo “forte”, i.e., uma aproximação em que se pretende simular todo o percurso temporal dos preços e volatilidade, e não apenas o seu comportamento (distribuição) em determinado momento do tempo (caso das aproximações ditas “fracas”)⁵⁰. Sempre que um modelo de volatilidade estocástica considerar $\rho \neq 0$, a aproximação tem que ser “forte”, por os comportamentos dos processos de preços e volatilidade estarem interligados.

4.2.1 Os valores de referência dos parâmetros

Uma das primeiras decisões a tomar para simular um processo, risco neutral, do tipo⁵¹

$$\begin{aligned} dS &= rSdt + \sqrt{V}SdW_1^* \\ dV &= b^*(a^* - V_t)dt + \delta\sqrt{V_t}[\rho dW_1 + \sqrt{1-\rho^2}dW_2] \end{aligned}$$

4. 2

é o valor a atribuir, quer aos parâmetros, r , a^* , b^* , δ e ρ , quer às variáveis S_0 e V_0 .

No estudo de simulação desenvolvido nesta dissertação foram simulados 35 cenários alternativos, procurando-se, assim, por um lado, isolar os efeitos que cada uma das variáveis tem no valor da opções, e, por outro, tornar os resultados obtidos mais robustos, por se verificarem para diferentes valores dos parâmetros e da variável V_0 ⁵² (ver quadro 3 que sintetiza os cenários estudados).

Ainda assim, procedeu-se à escolha de valores de referência para os parâmetros, sendo esses os valores utilizados sempre que não exista indicação em contrário (ver quadro 4).

⁵⁰ Para uma análise resumida dos métodos habitualmente utilizados para aproximações a equações diferenciais estocásticas, por simulação de Monte Carlo, ver anexo 2.

⁵¹ O processo rico neutral aqui apresentado é o deduzido no capítulo 3.

⁵² Não se fizeram simulações para diferentes valores de S_0 por a escolha do valor inicial do subjacente não tem qualquer importância para as conclusões que se pretendem retirar dos resultados.

Escolheu-se para valor inicial do activo subjacente, S_0 , o valor 100 e para a variância, V_0 , o valor 0.0625 (que equivale a uma volatilidade de 25%)⁵³.

Considerou-se como credível uma taxa de juro sem risco⁵⁴ de 5%, e o tempo de vida (τ) escolhido para referência foi de 3 meses⁵⁵.

Para os caso dos parâmetros a^* e b^* a escolha de um valor de base poderia ser feita de três formas alternativas. Como

$$a^* = b + \lambda \quad \text{e} \quad b^* = \frac{ba}{b + \lambda}$$

4.3

poder-se-ia:

1. considerar $\lambda = 0$, sem grandes preocupações sobre as limitações que isso acarreta, já que considerar um “preço de risco” nulo é considerar que nos encontramos, de facto, num mundo neutro face ao risco e assim, $a^* = a$ e $b^* = b$, pelo que se escolheria para a^* e b^* valores que se considerassem adequados, respectivamente, para a volatilidade de longo prazo e para o coeficiente de reversão à média, ou
2. atribuir valores a a , b e λ e condicionar, assim, os valores se a^* e b^* (a utilizar nas simulações), pelas expressões 4.3 acima; ou ainda
3. atribuir directamente valores a a^* e b^* , sem grande preocupação quanto ao valor de λ .

Nesta dissertação optou-se por atribuir valores apenas a a^* e b^* . Foi também esta a escolha feita, quer por Hull e White (1988) quer por Heston (1993). Chama-se, contudo, a atenção para o facto de esta decisão não implicar qualquer pressuposto sobre o perfil de risco dos investidores, já que não se fixaram os valores de a e b .

Escolheu-se para a^* o valor de V_0 , ou seja, $a^* = 0.0625$ e para b^* o valor 2.

⁵³ A escolha dos valores do 100 e dos 25% para os valores iniciais do subjacente e volatilidade não foi feita com base em qualquer tipo de estimação, quer pela dificuldade em encontrar literatura de suporte, nomeadamente sobre a forma de estimação do ρ num modelo do tipo do do capítulo 3, quer por não se desejar associar o estudo a nenhum mercado em particular (e os valores de um mercado poderem não “servir” a outro). O valor 100 escolhido para iniciar o processo dos preços já foi escolhido antes por outros autores (por ser um valor “redondo” e sobre o qual as cálculos das variações percentuais é imediato), nomeadamente, por Hull e White (1987, 1988) e Heston (1993). No que toca à volatilidade, o valor de referência, não é tão baixo quanto os 10% ou 15% considerados por Hull e White (1987, 1988), Heston (1993) ou Das e Sundaram (1999), nem tão elevado quanto os 40% de Johnson e Shano, mas nos vários cenários oscila entre os 15% e os 35%.

⁵⁴ A taxa de juro sem risco tem um impacto quase desprezível no valor das opções sobre mercados accionistas e de curto-prazo (menos de um ano).

Hull e White (1988) escolheram, para parâmetros equivalentes a a^* e b^* , os valores pertencentes aos intervalos $[0.0225, 0.3]$ e $[0.075 \text{ e } 0.01]$, respectivamente, Heston escolheu para b^* o valor 2 e para a^* o valor 0.01.

Para o parâmetro ρ , principal objecto de estudo, todas as simulações foram feitas para, pelo menos, dois valores alternativos: $\rho = -0.25$ e $\rho = 0.25$.

Quadro 3: Cenários alternativos para as simulações.

	Cenário 1: $\rho = -0.5$	Cenário 2: $\rho = -0.25$
Diferentes Correlações	Cenário 3: $\rho = 0$	
	Cenário 4: $\rho = 0.25$	Cenário 5: $\rho = 0.5$
Correlações Base	$\rho = -0.25$	$\rho = 0.25$
Diferentes	Cenário 6: $\tau = 1$	Cenário 11: $\tau = 1$
Vencimentos	Cenário 7: $\tau = 0.5$	Cenário 12: $\tau = 0.5$
τ	Cenário 8: $\tau = 0.25$	Cenário 13: $\tau = 0.25$
	Cenário 9: $\tau = 0.08(3)$	Cenário 14: $\tau = 0.08(3)$
	Cenário 10: $\tau = 0.041(6)$	Cenário 15: $\tau = 0.041(6)$
Diferentes	Cenário 16: $\sqrt{V_0} = 0.15$	Cenário 21: $\sqrt{V_0} = 0.15$
Volatilidades Iniciais	Cenário 17: $\sqrt{V_0} = 0.2$	Cenário 22: $\sqrt{V_0} = 0.2$
$\sqrt{V_0}$	Cenário 18: $\sqrt{V_0} = 0.25$	Cenário 23: $\sqrt{V_0} = 0.25$
	Cenário 19: $\sqrt{V_0} = 0.3$	Cenário 24: $\sqrt{V_0} = 0.3$
	Cenário 20: $\sqrt{V_0} = 0.35$	Cenário 25: $\sqrt{V_0} = 0.35$
Diferentes	Cenário 26: $\delta = 0.1$	Cenário 31: $\delta = 0.1$
Volatilidades de volatilidade	Cenário 27: $\delta = 0.15$	Cenário 32: $\delta = 0.15$
δ	Cenário 28: $\delta = 0.2$	Cenário 33: $\delta = 0.2$
	Cenário 29: $\delta = 0.25$	Cenário 34: $\delta = 0.25$
	Cenário 30: $\delta = 0.3$	Cenário 35: $\delta = 0.3$

⁵⁵ O estudo de sensibilidade sobre o efeito de τ fez-se para valores entre um mês e um ano.

Por se desejar aferir o impacto, na valorização de opções, de todos os parâmetros mas principalmente da correlação, fossem elas do tipo *in*, *at*, ou *out-of-the-money* consideraram-se também sempre sete preços de exercício: $X=80$, $X=85$, $X=90$, $X=95$, $X=100$, $X=105$, $X=110$ e $X=115$.

O quadro 4, abaixo, apresenta os parâmetros referência do estudo de simulação.

Quadro 4: Parâmetros de referência para as simulações de preços de opções.

Cotação inicial do subjacente	$S_0 = 100$
Variância de longo prazo e Variância Inicial	$\alpha^* = V_0 = 0.0625$
Reversão à média	$b^* = 2$
Correlação	$\rho = -0.25$ ou $\rho = 0.25$
Taxa de Juro	$r = 0.05$
Volatilidade da volatilidade	$\delta = 0.2$
Preços de Exercício	$X = 80, 85, 90, 95, 100, 110, 120$
Tempo até ao vencimento	$\tau = 0.25$ (3 meses)

4.2.2 Estratégias de simulação

Foram simulados 10.000 percursos para cada cenário, tendo-se mantido o número de “passos” fixo e igual a 250, sendo pois, a dimensão do “passo” dada por

$$\Delta t = \tau / 250. \quad 4.4$$

Para cada um dos percursos, determinou-se o *payoff* das diferentes opções *call*: $\max(0, S_T - X)$. O valor esperado descontado dos 10000 *payoffs* alternativos é o valor (obtido por simulação) das opções *call*: \tilde{c} .

A discretização adoptada para o processo de preços e variância descritos em 4.2 foi a de Euler:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t + rS_t \Delta t + \sqrt{V_t} S_t \sqrt{\Delta t} \varepsilon_1 \\ V_{t+1} &= V_t + b * (a * -V_t) \Delta t + \delta \sqrt{V_t} \sqrt{\Delta t} [\rho \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_2] \end{aligned} \quad 4.5$$

Para reduzir a amplitude dos intervalos de confiança para os valores das *call* obtidos por simulação (\tilde{c}_{DM}), utilizaram-se os mesmos ruídos ε_1 e simularam-se também percursos para o processo de preços quando $\delta = 0$, ou seja quando o processo de preços evolui da forma prevista no modelo de Black-Scholes (\tilde{c}_{BS})⁵⁶:

$$S_{t+1} = S_t + rS_t \Delta t + \sqrt{V_0} S_t \sqrt{\Delta t} \varepsilon_1, \quad 4.6$$

aplicando-se às estimativas \tilde{c}_{DM} técnicas de redução de variância do tipo *controle variate*. As estimativas corrigidas, \bar{c}_{DM} , apresentavam intervalos de confiança com amplitudes 3 a 5 vezes menores⁵⁷. A expressão 4.7, abaixo, explicita a correcção realizada, sendo c_{BS} o valor exacto dado pela fórmula de Black-Scholes e *ENV* o erro de aproximação cometido:

$$\bar{c}_{DM} = \tilde{c}_{DM} + \underbrace{[c_{BS} - \tilde{c}_{BS}]}_{ENV}. \quad 4.7$$

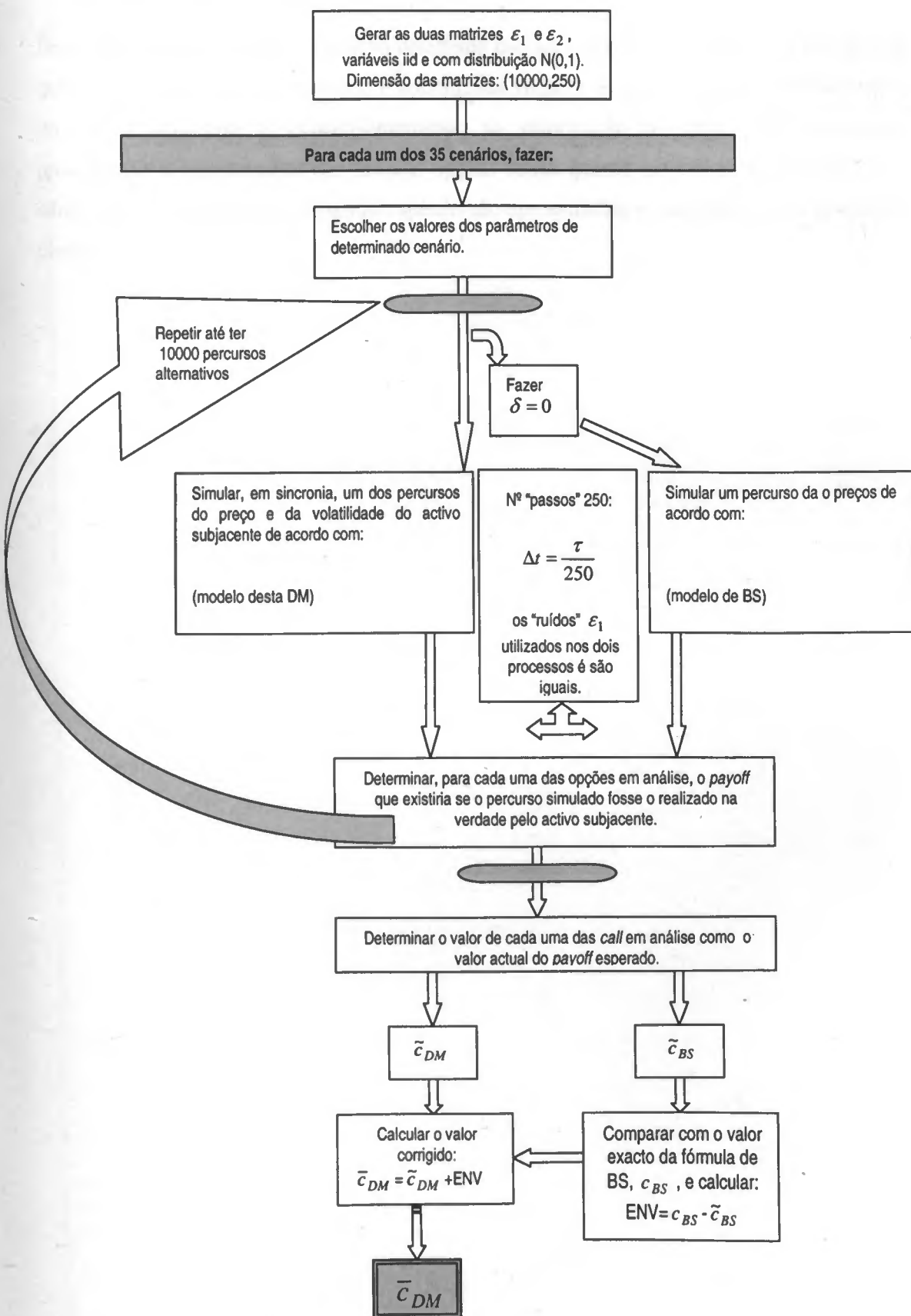
Na simulação de qualquer dos cenários do quadro foram sempre utilizados os mesmos ruídos ε_1 e ε_2 , o que garante uma comparação fiável entre os valores dos diversos cenários.

A figura 5, da página seguinte, resume as fases do estudo de simulação.

⁵⁶ Repare-se que quando $\delta = 0$, o processo da volatilidade em 4.6 torna-se determinístico e o termo $(a * -V_t) = 0$, pelo que $V_t = V_0 \forall t$.

⁵⁷ O programa feito em GAUSS é disponibilizado no anexo 3.

Figura 5: Fases do estudo de simulação de Monte Carlo realizado.



4.3 Conclusão

Fez-se, neste capítulo, uma descrição detalhada daqueles que são os efeitos que se esperam que a correlação entre rendibilidade e volatilidade venha a ter na distribuição final de preços do activo subjacente e, conseqüentemente, na valorização de opções e, em seguida, procedeu-se à apresentação das fases e opções feitas quanto ao estudo de simulação de Monte Carlo realizado. No próximo capítulo são apresentados e interpretados os resultados obtidos.

5 Valor das Opções para vários valores de $\rho, \tau, \sqrt{V_0}$ e δ - Resultados das Simulações de Monte Carlo

Neste capítulo são apresentados os resultados do estudo de simulação de Monte Carlo realizado.

Os resultados obtidos permitiram reafirmar os efeitos de uma volatilidade estocástica numa situação de correlação nula ($\rho = 0$) entre os processos de preço de volatilidade, por serem idênticos aos estudos de Jonhson e Shanno (1987), Hull e White (1987 e 1988), Heston (1993), Baillie e Ramon (1990), Ball e Roma (1994), Nandi (1998) e Das e Sundaram (1999).

No entanto, para situações de $\rho \neq 0$, os resultados vieram, de alguma forma, confirmar as ideias expostas no capítulo 4 e contrariar estudos anteriores, nomeadamente, os já muito referidos de Hull e White (1987) e de Heston (1993).

Ao interpretar os resultados obtidos desenvolvem-se, com maior detalhe, as ideias apresentadas no capítulo anterior sobre o efeito da correlação.

O capítulo encontra-se dividido em cinco partes, sendo a última a conclusão e as anteriores quatro dedicadas ao impacto, no valor das opções, respectivamente, dos parâmetros ρ , τ , $\sqrt{V_0}$ e δ .

Foi dada especial atenção ao parâmetro ρ , não só pela análise cuidadosa os seu efeitos (no ponto 5.1), mas também pelo facto de a análise dos outros parâmetros ter sido sempre feita para situações de $\rho = -0.25$ e $\rho = 0.25$.

É de lembrar que os valores apresentados para as *call* são já os valores corrigidos \bar{c}_{DM} - daí os níveis baixos seus desvios-padrão. Para determinar o valor de Black-Scholes utilizou-se sempre uma volatilidade idêntica a $\sqrt{V_0}$ (que resulta de considerar $\delta = 0$ no modelo do capítulo 3)⁵⁸.

⁵⁸ O valor, $\sqrt{V_0}$, tende, aliás a ser o desvio-padrão médio dos percursos, pelo que parece ser o valor mais "justo" para considerar no modelo de Black-Scholes.

5.1 Diferentes correlações - ρ

Os quadros 5, 6 e 7 apresentam os resultados das simulações de Monte Carlo, considerando diferentes valores para ρ .

Quadro 5: Preços simulados para opções *call* (com preços de exercício X entre 80 e 120), quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade, ρ , é -0.5, -0.25, 0, 0.25 ou 0.5.

$$S_0 = 100, \sqrt{V_0} = 0.25, \tau = 0.25, r = 0.05, \delta = 0.2$$

ρ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
-0.5	20.02166	15.48384	11.31547	7.750784	4.915337	2.867387	1.531416	0.749809	0.333195
stdv	0.06	0.06	0.05	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.01
-0.25	20.57201	15.98033	11.76508	8.143254	5.25295	3.155722	1.762862	0.919456	0.445984
stdv	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01
0	21.13652	16.49202	12.21704	8.528909	5.589823	3.440121	1.991786	1.095389	0.57749
stdv	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.25	21.7201	17.0244	12.67865	8.916861	5.918206	3.717535	2.218452	1.28204	0.708565
stdv	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02
0.5	22.31804	17.57769	13.16071	9.32377	6.24865	3.984324	2.438646	1.453943	0.836672
stdv	0.07	0.07	0.07	0.06	0.06	0.05	0.04	0.04	0.03

Os preços obtidos (ver quadro 5) são, pelo menos numa análise preliminar, razoáveis, já que respeitam os padrões essenciais do comportamento dos preços, i.e., as opções têm sempre valor superior ou igual ao valor intrínseco ($S_T - X$) e o seu valor temporal é máximo para o nível *at-the-money*, decrescendo para as que têm preços de exercício afastados do valor actual, quer estejam *in-the-money* ou *out-of-the-money*.

Quadro 6: "Enviesamento"⁵⁹ percentual dos preços de Black-Scholes para opções *call* (com preços de exercício X entre 80 e 120), quando a correlação, ρ , entre a rendibilidade e a volatilidade é -0.5, -0.25, 0, 0.25 ou 0.5.

$$S_0 = 100, \sqrt{V_0} = 0.25, \tau = 0.25, r = 0.05, \delta = 0.2$$

ρ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
Preços BS	21.12122	16.47511	12.21004	8.534165	5.5984	3.439895	1.980506	1.070809	0.545531
-0.5	5.5%	6.4%	7.9%	10.1%	13.9%	20.0%	29.3%	42.8%	63.7%
-0.25	2.7%	3.1%	3.8%	4.8%	6.6%	9.0%	12.3%	16.5%	22.3%
0	-0.1%	-0.1%	-0.1%	0.1%	0.2%	0.0%	-0.6%	-2.2%	-5.5%
0.25	-2.8%	-3.2%	-3.7%	-4.3%	-5.4%	-7.5%	-10.7%	-16.5%	-23.0%
0.5	-5.4%	-6.3%	-7.2%	-8.5%	-10.4%	-13.7%	-18.8%	-26.4%	-34.8%

⁵⁹ O "enviesamento" percentual é calculado de acordo com a seguinte fórmula: $\frac{c_{BS} - \bar{c}_{DM}}{\bar{c}_{DM}}$, onde c_{BS} e

\bar{c}_{BS} são, respectivamente, os preços de Black-Scholes e os preços corrigidos obtidos por simulação.

A comparação dos preços obtidos por simulação com os do modelo de Black-Scholes é feita no quadro 6. O comportamento apresentado quando $\rho = 0$ vem confirmar os resultados dos estudos de Jonhson e Shanno(1987), Hull e White (1987 e 1988), Heston (1993), Baillie e Ramon (1990), Ball e Roma (1994), Nandi (1998) e Das e Sundaram (1999). A existência de uma volatilidade estocástica leva a que o modelo de Black-Scholes subavalie as opções com preços de exercício afastados do valor actual do subjacente (i.e., suficientemente *in-the-money* ou *out-of-the-money*) e sobreavale os preços das opções *at-the-money*, valorizando de forma praticamente perfeita as opções ligeiramente *in-the-money* (no quadro as opções com $X = 105$). Em todo o caso, os desvios são, em termos percentuais, relativamente reduzidos, registando-se os maiores para as opções *out-of-the-money*.

Quando $\rho < 0$ o comportamento que se observou foi o esperado, tendo em conta o raciocínio descrito no capítulo anterior, mas contraria os resultados de algumas investigações anteriores. Verifica-se que os preços de Black-Scholes sobreavaliam o valor das opções *call*, para qualquer nível de preços de exercício. Quando $\rho > 0$, verifica-se o inverso, assistindo-se a uma subavaliação sistemática das opções *call* por parte do modelo de Black-Scholes.

Em termos percentuais, e não em termos absolutos, os “enviesamentos” dos preços de Black-Scholes para $\rho \neq 0$ são tanto maiores quanto maiores são os preços de exercício. Este facto não surpreende quando se espera que aumentos de volatilidade façam aumentar proporcionalmente mais o valor da opção do que as diminuições de volatilidade o façam diminuir. Em termos absolutos verifica-se o inverso, por as opções de menor preço de exercício serem, naturalmente, as de maior valor.

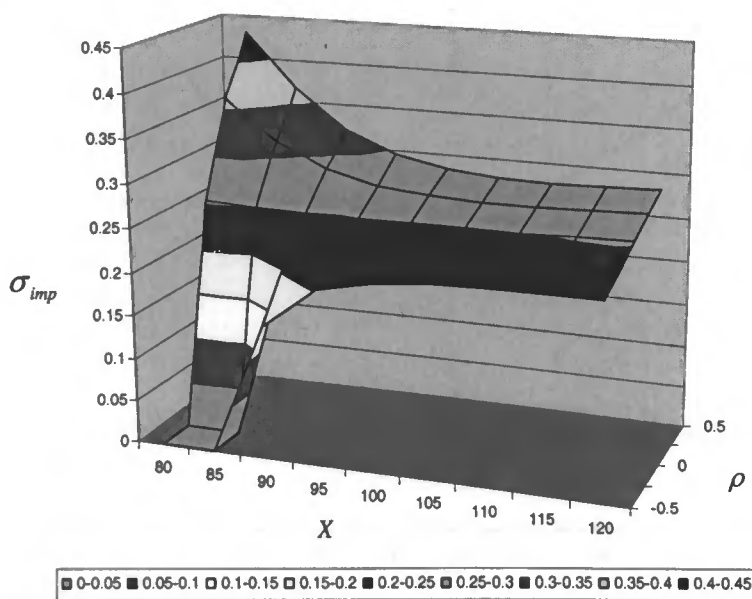
Quadro 7: Volatilidades implícitas, para opções *call* (com preços de exercício X entre 80 e 120), quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade é -0.5, -0.25, 0, 0.25 ou 0.5.

$$S_0 = 100, \sqrt{V_0} = 0.25, \tau = 0.25, r = 0.05, \delta = 0.2$$

ρ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
-0.5	n.a	n.a	0.153872	0.202308	0.215282	0.220383	0.222309	0.222973	0.22243
-0.25	n.a	n.a	0.209805	0.226601	0.232447	0.235342	0.236778	0.237699	0.237891
0	0.254936	0.252446	0.250581	0.249689	0.249564	0.250012	0.250677	0.251938	0.253662
0.25	0.361852	0.315211	0.286778	0.27237	0.266243	0.264254	0.264116	0.266198	0.267797
0.5	0.430781	0.366774	0.321519	0.295728	0.283021	0.277899	0.276921	0.278739	0.280537

O quadro 7 e a figura 6 procuram representar, à semelhança do que é habitual na literatura, as volatilidades que teriam que ser consideradas para que o modelo de Black-Scholes valorizasse de forma correcta as opções (volatilidades implícitas).

Figura 6: Volatilidades implícitas, para uma opção *call*, quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade é -0.5, -0.25, 0, 0.25 ou 0.5.



Chama-se particularmente a atenção para o facto de, na figura 6, quando $\rho < 0$, as *call* com preços de exercício 80 e 85 apresentarem volatilidades que, num mundo de Black-Scholes seriam infinitesimais, tornando impossível⁶⁰ o seu cálculo.

Para $\rho > 0$ o problema não se coloca, visto que nestes casos os preços obtidos por simulação serem superiores aos de Black-Scholes. As volatilidades implícitas são sempre superiores a 25%, com a maior diferença a ocorrer nas *call* mais *in-the-money* (veja-se, quando $\rho = 0.5$, o caso da *call* com $X = 80$, em que a volatilidade implícita é quase 20 pontos percentuais acima dos 25%).

As figuras 7, 8 e 9 são “cortes” da figura 6 e permitem isolar os “sorrisos” ou “esgares” explicáveis pela correlação entre rendibilidade e volatilidade quando $\rho = 0$, $\rho = -0.25$ e $\rho = 0.25$, respectivamente.

Os resultados que as figuras 8 e 9 evidenciam são, como já referido, diferentes dos obtidos em anteriores investigações na área.

⁶⁰ O método de cálculo das volatilidades implícitas foi o método de Newton-Raphson, cujo programa (“volimp”) se encontra no anexo 3. As dificuldades na identificação de algumas das volatilidades implícitas estão relacionadas com o facto de, neste método, como aliás em qualquer método numérico, ser necessária a escolha de um ϵ (melhoria face à iteração anterior), que se pensa suficientemente pequeno para ser desprezável qualquer impacto nos resultados e que permite parar o processo iterativo. No caso de algumas das *call in-the-money*, por mais pequeno que fosse esse ϵ , a paragem do programa ocorreria sempre em situação em que o preço de Black-Scholes era ainda “caro”, quando comparado com o preço simulado.

Figura 7: Volatilidades implícitas, para uma opção *call*, quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade é 0.

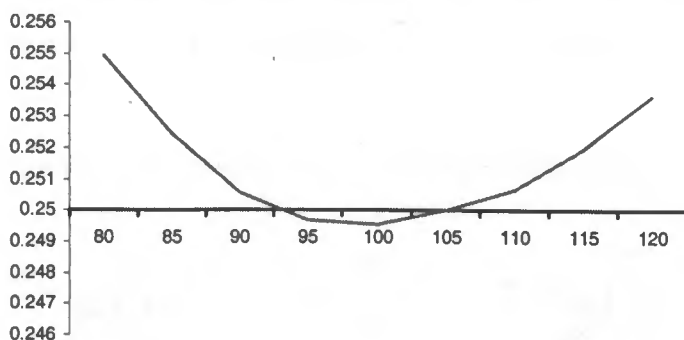


Figura 8: Volatilidades implícitas, para uma opção *call*, quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade é - 0.25.

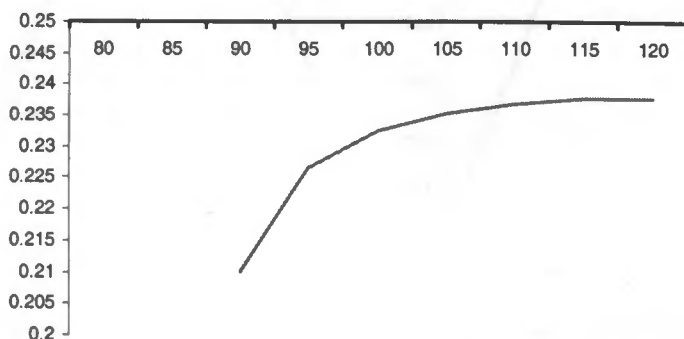
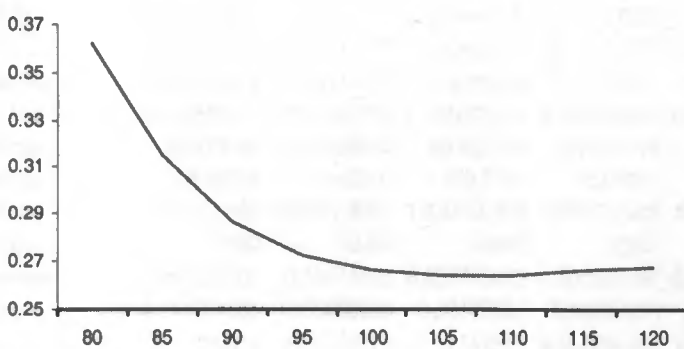


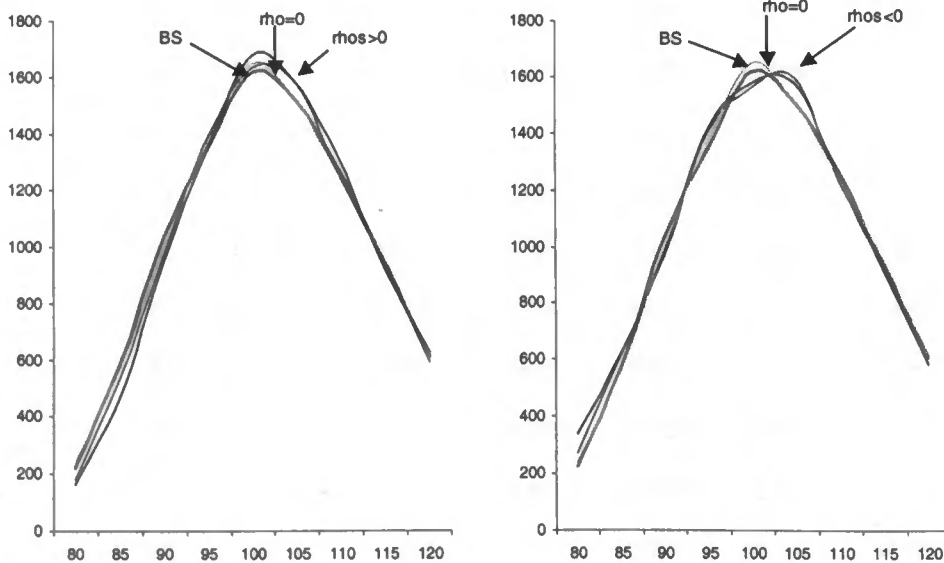
Figura 9: Volatilidades implícitas, para uma opção *call*, quando a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade é 0.25.



É de referir, no entanto, que também os efeitos de um $\rho \neq 0$, na distribuição dos preços no vencimento (figuras 10 e 11), são os por nós apontados, e não os esperados, nem por Hull e White (1987) em que $\rho < 0$ leva simplesmente a uma distribuição com maior concentração em torno do valor actual, e um $\rho > 0$ origina só um efeito no *skewness* da distribuição -, nem por Heston (1993) - que considera efeitos de *skewness* contrários para $\rho < 0$ e $\rho > 0$.

Na realidade, os efeitos na distribuição final de preços são bastante mais complexos, resultando de uma mistura de distribuições instantâneas que variam consoante a rendibilidade do subjacente aumente ou diminua ao longo da vida da opção (ver dados dos quadros 8 e 9).

Figuras 10 e 11: Comparação das distribuições dos preços no vencimento da opção para diferentes ρ



Quadro 8: Estatísticas descritivas das distribuições de preço no vencimento obtidas pelo modelo de Black-Scholes e por modelos de volatilidade estocástica com diferentes valores de ρ

	BS	$\rho = -0.5$	$\rho = -0.25$	$\rho = 0$	$\rho = 0.25$	$\rho = 0.5$
Média	101.0700365	99.85375915	100.4587468	101.0772384	101.7082569	102.3533735
S.E.M.	0.126629043	0.123901338	0.125648958	0.127197222	0.128534937	0.129652932
S.D.	12.66290426	12.39013377	12.56489576	12.71972219	12.85349374	12.96529315
Variância	160.3491444	153.5154149	157.8766056	161.7913327	165.2123014	168.0988263
Coef. Var.	0.125288411	0.124082798	0.125075179	0.125841608	0.126376109	0.126671869
Mínimo	59.879046	50.538626	50.925109	53.625128	58.756524	65.915262
Máximo	158.85015	150.42801	159.7731	163.9657	171.78151	176.88613
Soma	1010700.365	998537.5915	1004587.468	1010772.384	1017082.569	1023533.735
Nº obs	10000	10000	10000	10000	10000	10000
Skewness	0.364095365	0.11671299	0.257745693	0.401638797	0.547038908	0.694426491
Kurtosis	0.244694665	0.055065829	0.23163381	0.44762095	0.70708218	1.050512559
Mu3	739.1796011	221.963739	511.2142361	826.4248906	1161.493118	1513.24119
Mu4	83410.41181	71984.28431	80532.43679	90228.37845	101164.9596	114433.3158
Desvio Médio	10.06284454	9.871701421	9.959566378	10.04189836	10.07838142	10.10414308
Mediana	100.217445	99.645604	100.02391	100.18149	100.60535	100.96907
Range	98.971104	99.889384	108.847991	110.340572	113.024986	110.970868
Confidence Level(0.95)	0.248218402	0.242871553	0.24629724	0.24933216	0.251954347	0.254145831
Low Confidence Limit	100.9434075	99.72985781	100.3330978	100.9500412	101.579722	102.2237205
Up Confidence Limit	101.1966656	99.97766048	100.5843957	101.2044356	101.8367918	102.4830264

Quadro 9: Distribuição dos preços, no vencimento, dos 10.000 percursos. Comparação entre as distribuições obtidas pelo modelo de Black-Scholes e por modelos de volatilidade estocástica com diferentes valores de ρ

S_T	BS	$\rho = -0.5$	$\rho = -0.25$	$\rho = 0$	$\rho = 0.25$	$\rho = 0.5$
<50	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
55	0.00%	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%
60	0.01%	0.02%	0.02%	0.00%	0.01%	0.00%
65	0.02%	0.10%	0.07%	0.04%	0.01%	0.00%
70	0.24%	0.43%	0.27%	0.21%	0.15%	0.06%
75	0.85%	1.26%	1.18%	0.88%	0.67%	0.37%
80	2.24%	3.38%	2.75%	2.42%	1.83%	1.65%
85	5.82%	6.25%	6.23%	5.66%	5.31%	4.66%
90	10.35%	9.78%	9.65%	9.98%	9.75%	9.49%
95	13.49%	14.21%	14.10%	13.73%	13.93%	13.53%
100	16.19%	15.79%	15.65%	16.49%	16.36%	16.83%
105	15.14%	15.80%	16.00%	15.14%	15.78%	15.79%
110	12.65%	12.51%	12.27%	12.43%	12.44%	13.01%
115	9.43%	9.20%	9.32%	9.55%	9.39%	9.18%
120	6.12%	5.88%	6.05%	6.12%	5.95%	6.27%
125	3.66%	3.06%	3.34%	3.26%	3.66%	3.79%
130	1.97%	1.27%	1.70%	2.12%	2.18%	2.25%
135	1.00%	0.69%	0.82%	1.07%	1.27%	1.49%
140	0.42%	0.25%	0.27%	0.42%	0.62%	0.73%
145	0.24%	0.04%	0.18%	0.27%	0.33%	0.30%
150	0.11%	0.05%	0.07%	0.09%	0.21%	0.30%
>150	0.05%	0.01%	0.05%	0.11%	0.15%	0.30%

5.2 Diferentes Vencimentos - τ

No ponto anterior analisou-se o efeito que diferentes valores de ρ teriam no valor de opções *call*; importa agora verificar se esses efeitos, para os casos menos estudados na literatura (de $\rho < 0$ e $\rho > 0$), se mantêm à medida que o tempo de vida das opções se altera ou, pelo contrário, se modificam.

Foram consideradas opções com tempos de vida de 15 dias, 1, 3, 6 e 12 meses. Os quadros 10, 11 e 12 apresentam os resultados obtidos e ilustrados, em termos de volatilidades implícitas, nas figuras 12 e 13.

A conclusão mais imediata é a de que, quando se consideram diferentes tempos de vida de uma *call*, se verifica um acentuar do efeito “sorriso” para tempos de vida menores – efeito claramente visível nas figuras 12 e 13.

Quadro 10: Preços simulados para opções *call* (com preços de exercício X entre 80 e 120), quando o tempo de vida de uma opção, τ , é de 15 dias, 1, 3, 6 ou 12 meses.

$$S_0 = 100, \sqrt{V_0} = 0.25, r = 0.05, \delta = 0.2$$

a) $\rho = -0.25$

τ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
1	23.45305	19.74418	16.39877	13.43297	10.84128	8.636833	6.815949	5.309761	4.08955
stdv	0.06	0.06	0.06	0.05	0.05	0.04	0.04	0.04	0.03
0.5	21.52848	17.34896	13.5626	10.28549	7.538971	5.354594	3.693498	2.470627	1.613755
stdv	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02
0.25	20.57201	15.98033	11.76508	8.143254	5.25295	3.155722	1.762862	0.919456	0.445984
stdv	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01
0.083333	20.13557	15.18332	10.39975	6.150646	2.97814	1.133332	0.32952	0.076763	0.013183
stdv	0.0184	0.0182	0.0172	0.0148	0.0113	0.0074	0.0041	0.0021	0.0009
0.041667	20.06681	15.07893	10.12291	5.506099	2.088107	0.481108	0.063288	0.004749	0.000154
stdv	0.0129	0.0129	0.0126	0.0112	0.0081	0.0043	0.0016	0.0004	0.0001

b) $\rho = 0.25$

τ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
1	27.57631	23.6078	19.97913	16.71592	13.85112	11.37332	9.28164	7.532157	6.075927
stdv	0.09	0.09	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.07
0.5	23.66949	19.31201	15.33818	11.86105	8.945357	6.593011	4.768216	3.388954	2.389817
stdv	0.06	0.06	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.04	0.04
0.25	21.7201	17.0244	12.67865	8.916861	5.918206	3.717535	2.218452	1.28204	0.708565
stdv	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02
0.083333	20.54386	15.58176	10.75048	6.423481	3.183697	1.287689	0.432582	0.12011	0.026951
stdv	0.019	0.019	0.019	0.018	0.016	0.013	0.009	0.005	0.003
0.041667	20.27234	15.28319	10.31847	5.655617	2.185847	0.547268	0.08736	0.008896	0.000524
stdv	0.0131	0.0131	0.0131	0.0126	0.0105	0.0068	0.0034	0.0011	0.0002

Quadro 11: “Enviesamento” percentual dos preços de Black-Scholes para opções *call* (com preços de exercício X entre 80 e 120), quando o tempo de vida de uma opção, τ , é de 15 dias, 1, 3, 6 ou 12 meses. $S_0 = 100$, $\sqrt{V_0} = 0.25$, $r = 0.05$, $\delta = 0.2$

τ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
1	25.41251	21.60571	18.14076	15.04705	12.336	10.0022	8.026385	6.379249	5.025414
$\rho = -0.25$	8.4%	9.4%	10.6%	12.0%	13.8%	15.8%	17.8%	20.1%	22.9%
$\rho = 0.25$	-7.8%	-8.5%	-9.2%	-10.0%	-10.9%	-12.1%	-13.5%	-15.3%	-17.3%
0.5	22.54155	18.28852	14.43712	11.07752	8.260015	5.98849	4.225782	2.906469	1.951671
$\rho = -0.25$	4.7%	5.4%	6.4%	7.7%	9.6%	11.8%	14.4%	17.6%	20.9%
$\rho = 0.25$	-4.8%	-5.3%	-5.9%	-6.6%	-7.7%	-9.2%	-11.4%	-14.2%	-18.3%
0.25	21.12122	16.47511	12.21004	8.534165	5.5984	3.439895	1.980506	1.070809	0.545531
$\rho = -0.25$	2.7%	3.1%	3.8%	4.8%	6.6%	9.0%	12.3%	16.5%	22.3%
$\rho = 0.25$	-2.8%	-3.2%	-3.7%	-4.3%	-5.4%	-7.5%	-10.7%	-16.5%	-23.0%
0.083333	20.33408	15.37705	10.56644	6.286366	3.085193	1.207659	0.371739	0.090131	0.017411
$\rho = -0.25$	1.0%	1.3%	1.6%	2.2%	3.6%	6.6%	12.8%	17.4%	32.1%
$\rho = 0.25$	-1.0%	-1.3%	-1.7%	-2.1%	-3.1%	-6.2%	-14.1%	-25.0%	-35.4%
0.041667	20.1665	15.17769	10.21811	5.576618	2.139257	0.510004	0.071297	0.005833	0.000287
$\rho = -0.25$	0.5%	0.7%	0.9%	1.3%	2.4%	6.0%	12.7%	22.8%	86.2%
$\rho = 0.25$	-0.5%	-0.7%	-1.0%	-1.4%	-2.1%	-6.8%	-18.4%	-34.4%	-45.1%

Uma medida da sensibilidade do valor de uma opção⁶¹ ao tempo é o chamado *theta* que mede o impacto da passagem do tempo no valor da opção $\frac{\partial c}{\partial \tau}$.

Como se pode ver na figura 14, esse impacto acentua-se à medida que nos aproximamos do vencimento, sendo, em qualquer caso, muito superior (em termos absolutos) para as *call at* ou *in-the-money* do que para as *out-the-money*.

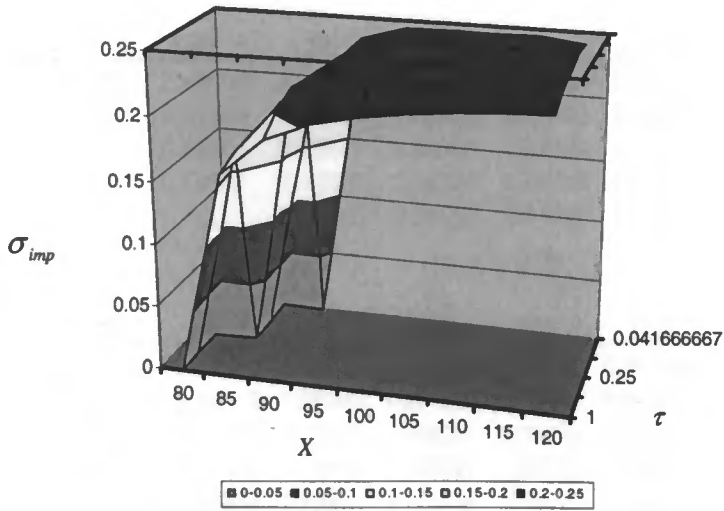
De acordo com a “intuição” por nós apresentada no capítulo anterior, este efeito é bastante plausível, dado que, quando o tempo de que se dispõe é pouco, há pouca “esperança” para as opções que estão *out-of-the-money*, mesmo se, como quando $\rho > 0$, os aumentos de preço são acompanhados por aumentos de volatilidade⁶². Para as *call in-the-money*, um $\rho < 0$ leva a valores temporais reduzidos relativamente aos de Black-Scholes (a volatilidade diminui em caso de aumento de preço, logo é “quase certo” que o ganho é muito próximo do valor intrínseco) e um $\rho > 0$ conduz a valores temporais elevados.

⁶¹ As medidas de sensibilidade do valor da opção aos parâmetros de que depende são chamados os “gregos” de uma opção.

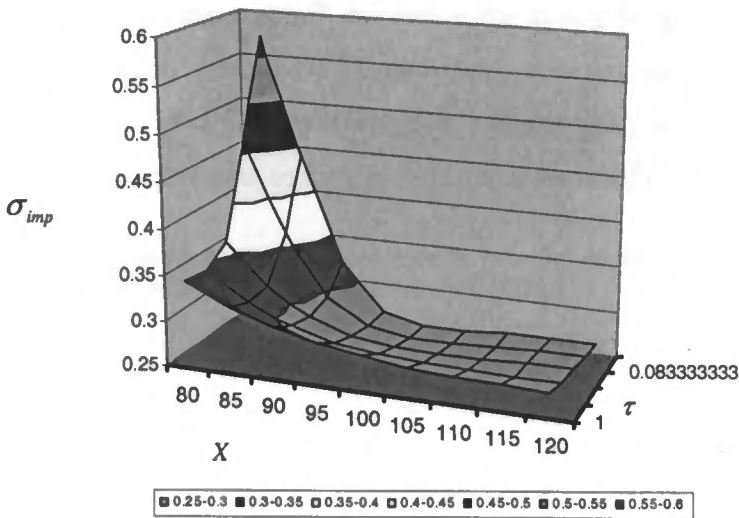
⁶² O valor temporal de uma opção diminui à medida que o seu tempo de vida se reduz. Assim, é natural que as diferenças entre modelos de valorização distintos se atenuem para opções cujo valor intrínseco é zero (*out-of-the-money*).



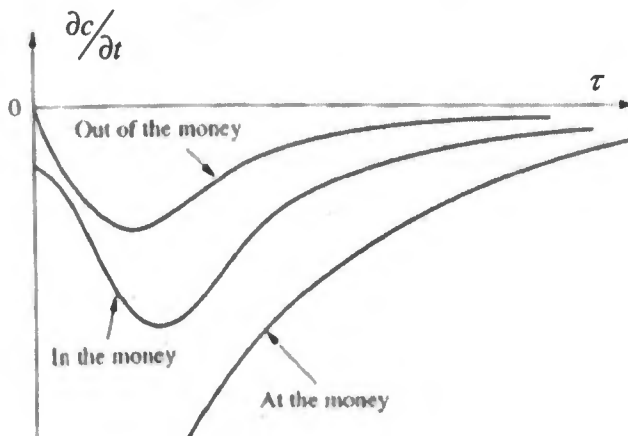
Figuras 12 e 13: Volatilidades implícitas, para uma opção *call*, quando o tempo de vida de uma opção τ é de 15 dias, 1, 3, 6 ou 12 meses. a) $\rho = -0.25$



b) $\rho = 0.25$



Figuras 14 : *Theta* de *calls* com diferentes graus de *moneyness* e tempos de vida (reprodução de uma imagem de Hull (1989)).



Quadro 12: Volatilidades implícitas, para opções *call* (com preços de exercício X entre 80 e 120), quando o tempo de vida de uma opção, τ , é de 15 dias, 1, 3, 6 ou 12 meses.

$S = 100, \sqrt{V} = 0.25, r = 0.05, \delta = 0.2$ a) $\rho = -0.25$

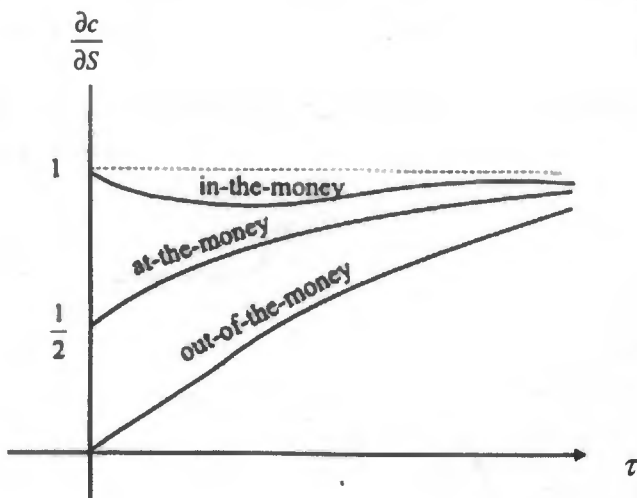
τ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
1	n.a	0.158871	0.188733	0.202602	0.210399	0.215521	0.219569	0.222248	0.224151
0.5	n.a	0.166107	0.203689	0.217424	0.223735	0.227493	0.230076	0.23162	0.233006
0.25	n.a	n.a	0.209805	0.226601	0.232447	0.235342	0.236778	0.237699	0.237891
0.083333	n.a	n.a	0.174957	0.233367	0.240663	0.242308	0.242013	0.243349	0.242211
0.041667	n.a	n.a	n.a	0.234045	0.243705	0.24468	0.244841	0.244902	0.240233

b) $\rho = 0.25$

τ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
1	0.346426	0.324436	0.308794	0.297591	0.28998	0.284699	0.281489	0.279528	0.278197
0.5	0.342629	0.312691	0.293179	0.281482	0.274932	0.271445	0.270059	0.269716	0.270779
0.25	0.361852	0.315211	0.286778	0.27237	0.266243	0.264254	0.264116	0.266198	0.267797
0.083333	0.460406	0.362834	0.294685	0.266164	0.258591	0.258183	0.260846	0.263015	0.26359
0.041667	0.571174	0.438311	0.320944	0.266642	0.255734	0.256724	0.2594	0.26137	0.2605

De forma mais simples: como o *delta*⁶³ das *call in-the-money* se aproxima de 1 à medida que o tempo de vida da opção diminui e o das *out-of-the-money* se aproxima de 0, é natural que as segundas deixem de ser sensíveis ao facto de a distribuição de preços não ser a prevista por Black-Scholes e as primeiras se tornem cada vez mais sensíveis (ver figura 15).

Figura 15: Variações no valor de uma *call*, que resultam de variações do subjacente (*delta*) e do tempo de vida de uma opção (reprodução de uma imagem de Hull (1989)).



⁶³ O *delta* é outro dos chamados “gregos” de uma opção, medindo a sensibilidade, no valor da opção, de oscilações de preço do subjacente. É o mesmo *delta* que nos capítulos 2 e 3 foi utilizado para determinar a carteira isenta de risco e constitui, por isso, uma ferramenta fundamental, cujo comportamento deve ser seguido com atenção quando o objectivo é cobrir o risco.

5.3 Diferentes volatilidades de longo prazo - $\sqrt{V_0}$

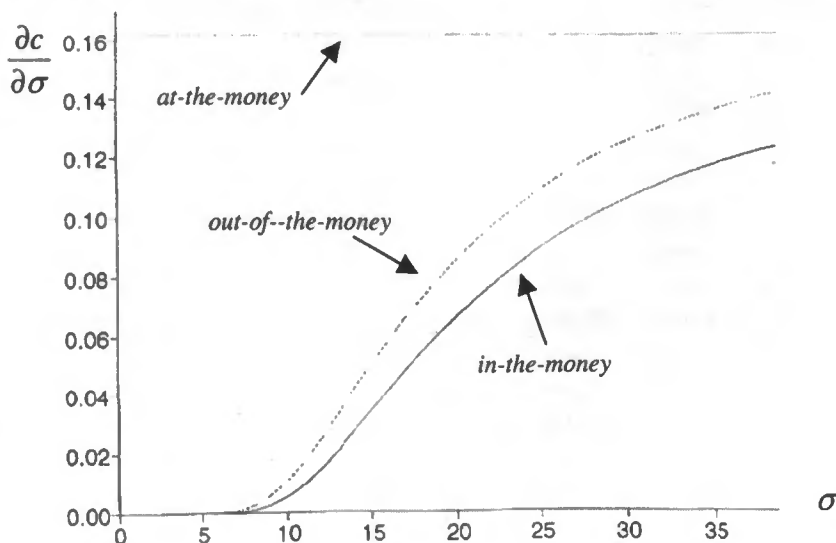
Quando se deixa variar a volatilidade de longo prazo (considerando valores para essa volatilidade $\sqrt{V_0}$ entre 15% e 35%), os resultados que se obtêm, nas situações em que $\rho = -0.25$ e $\rho = 0.25$, são os apresentados nos quadros 13, 14 e 15 e ilustrados nas figuras 17 e 18.

O padrão de “enviesamento” da fórmula de Black-Scholes é sempre o mesmo, agravando-se, em termos percentuais, para os casos em que a volatilidade de longo prazo é menor e para os casos das *call* com preços de exercício mais *out-of-the-money*.

Uma explicação que apontamos como possível para tal facto é a seguinte: se $\rho < 0$ e a opção estiver *out-of-the-money*, o seu valor resulta exclusivamente da possibilidade de subida do activo subjacente e dos valores que esse activo possa atingir (possibilidade de exercício e *payoff*). Ora, a redução de uma volatilidade alta é “menos gravosa” (para o valor da *call*) do que a redução de uma volatilidade já de si baixa.

Poderá, igualmente, explicar-se tal facto recorrendo aos “gregos” da *call*, já que os aumentos de valor nas *call*, devido a acréscimos de volatilidade, são muito mais acentuados para volatilidades baixas do que para volatilidades altas – o *vega* das opções *call* é crescente com a volatilidade, mas é uma função convexa (ver figura 16, abaixo).

Figura 16: Vega de *calls* com diferentes graus de *moneyness* e de volatilidade (reprodução de uma imagem de Natenberg (1994)).



Quadro 13: Preços simulados para opções *call* (com preços de exercício *X* entre 80 e 120), quando a volatilidade de longo prazo, $\sqrt{V_0}$, é de 15%, 20%, 25%, 30% e 35%.

$$S_0 = 100, \tau = 0.25, r = 0.05, \delta = 0.2$$

a) $\rho = -0.25$

$\sqrt{V_0}/X$	80	85	90	95	100	105	110	115	120
15%	20.39609	15.50328	10.78319	6.541437	3.272628	1.29827	0.411228	0.106484	0.02529
stdv	0.023	0.022	0.021	0.017	0.013	0.009	0.006	0.004	0.002
20%	20.44111	15.6696	11.20506	7.303243	4.264095	2.206472	1.009972	0.410865	0.15111
stdv	0.027	0.026	0.024	0.020	0.016	0.012	0.009	0.006	0.004
25%	20.57201	15.98033	11.76508	8.143254	5.25295	3.155722	1.762862	0.919456	0.445984
stdv	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01
30%	20.80617	16.41387	12.42908	9.021596	6.239311	4.124821	2.604032	1.574427	0.907197
stdv	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01
35%	21.14371	16.93625	13.16419	9.918525	7.22412	5.105206	3.496321	2.326066	1.50523
stdv	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01

b) $\rho = 0.25$

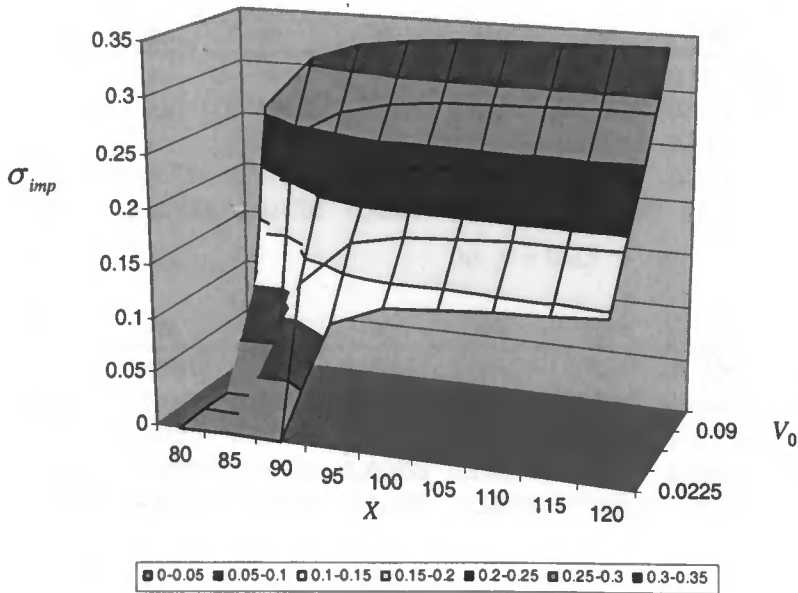
$\sqrt{V_0}/X$	80	85	90	95	100	105	110	115	120
15%	21.62343	16.69806	11.86885	7.426553	3.94771	1.784814	0.716946	0.261375	0.087234
stdv	0.025	0.025	0.025	0.024	0.023	0.020	0.015	0.011	0.007
20%	21.64003	16.79337	12.18756	8.120538	4.931425	2.739534	1.408581	0.684112	0.313861
stdv	0.030	0.030	0.030	0.029	0.027	0.025	0.021	0.017	0.013
25%	21.7201	17.0244	12.67865	8.916861	5.918206	3.717535	2.218452	1.28204	0.708565
stdv	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02
30%	21.89534	17.39637	13.29817	9.769406	6.905678	4.707036	3.101463	1.991584	1.25169
stdv	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02
35%	22.17792	17.87305	13.99764	10.65299	7.893106	5.703467	4.026305	2.783747	1.907195
stdv	0.05	0.05	0.05	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03

Quadro 14: “Enviesamento” percentual dos preços de Black-Scholes, para opções *call* (com preços de exercício *X* entre 80 e 120), quando a volatilidade de longo prazo, $\sqrt{V_0}$, é de 15%, 20%, 25%, 30% e 35%.

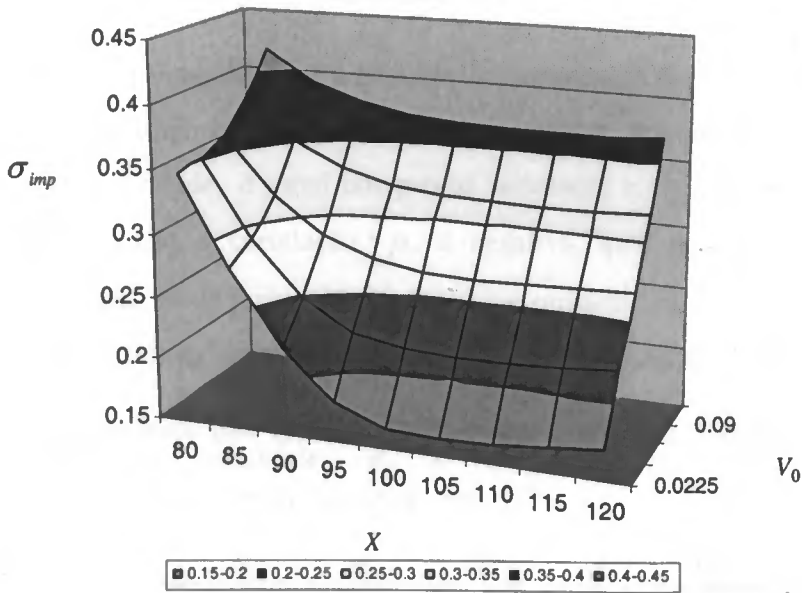
$$S_0 = 100, \tau = 0.25, r = 0.05, \delta = 0.2$$

$\sqrt{V_0}/X$	80	85	90	95	100	105	110	115	120
15%	20.99531	16.07867	11.29362	6.977838	3.63507	1.54845	0.531786	0.147226	0.033155
$\rho = -0.25$	2.9%	3.7%	4.7%	6.7%	11.1%	19.3%	29.3%	38.3%	31.1%
$\rho = 0.25$	-2.9%	-3.7%	-4.8%	-6.0%	-7.9%	-13.2%	-25.8%	-43.7%	-62.0%
20%	21.0213	16.20386	11.67009	7.714369	4.614997	2.477902	1.191132	0.513689	0.199764
$\rho = -0.25$	2.8%	3.4%	4.2%	5.6%	8.2%	12.3%	17.9%	25.0%	32.2%
$\rho = 0.25$	-2.9%	-3.5%	-4.2%	-5.0%	-6.4%	-9.6%	-15.4%	-24.9%	-36.4%
25%	21.12122	16.47511	12.21004	8.534165	5.5984	3.439895	1.980506	1.070809	0.545531
$\rho = -0.25$	2.7%	3.1%	3.8%	4.8%	6.6%	9.0%	12.3%	16.5%	22.3%
$\rho = 0.25$	-2.8%	-3.2%	-3.7%	-4.3%	-5.4%	-7.5%	-10.7%	-16.5%	-23.0%
30%	21.32483	16.87937	12.8582	9.398864	6.583085	4.418149	2.844406	1.759993	1.049163
$\rho = -0.25$	2.5%	2.8%	3.5%	4.2%	5.5%	7.1%	9.2%	11.8%	15.6%
$\rho = 0.25$	-2.6%	-3.0%	-3.3%	-3.8%	-4.7%	-6.1%	-8.3%	-11.6%	-16.2%
35%	21.63301	17.38822	13.57769	10.28992	7.568018	5.405338	3.753683	2.538449	1.674675
$\rho = -0.25$	2.3%	2.7%	3.1%	3.7%	4.8%	5.9%	7.4%	9.1%	11.3%
$\rho = 0.25$	-2.5%	-2.7%	-3.0%	-3.4%	-4.1%	-5.2%	-6.8%	-8.8%	-12.2%

Figuras 17 e 18: Volatilidades implícitas, para uma opção *call*, quando a volatilidade de longo prazo é de 15%, 20%, 25%, 30% e 35%. a) $\rho = -0.25$



b) $\rho = 0.25$



Em termos dos padrões de volatilidades implícitas (figuras acima e quadro 14) é possível verificar que, enquanto para volatilidades de longo prazo elevadas (30% ou 35%), as diferenças entre as volatilidades obtidas para preços de exercício diferentes são pequenas – não ultrapassando os 8% –, para volatilidades de longo prazo reduzidas existem diferenças próximas dos 20%.

Quadro 15: Volatilidades implícitas, para opções *call* (com preços de exercício X entre 80 e 120), quando a volatilidade de longo prazo, $\sqrt{V_0}$, é de 15%, 20%, 25%, 30% e 35%.
 $S_0 = 100, \tau = 0.25, r = 0.05, \delta = 0.2$ a) $\rho = -0.25$

$\sqrt{V_0}/X$	80	85	90	95	100	105	110	115	120
15%	n.a	n.a	n.a	0.113682	0.131412	0.135977	0.138792	0.141158	0.144854
20%	n.a	n.a	0.130678	0.173056	0.182125	0.185638	0.187423	0.188574	0.189756
25%	n.a	n.a	0.209805	0.226601	0.232447	0.235342	0.236778	0.237699	0.237891
30%	n.a	0.240708	0.267676	0.278419	0.282548	0.285067	0.286401	0.287254	0.287198
35%	0.257147	0.306082	0.321763	0.329296	0.332541	0.334833	0.336039	0.336801	0.337233

b) $\rho = 0.25$

$\sqrt{V_0}/X$	80	85	90	95	100	105	110	115	120
15%	0.348652	0.279348	0.219896	0.181335	0.165983	0.16297	0.16548	0.169183	0.17272
20%	0.350981	0.290471	0.248126	0.225219	0.2161	0.213717	0.214419	0.216927	0.219524
25%	0.361852	0.315211	0.286778	0.27237	0.266243	0.264254	0.264116	0.266198	0.267797
30%	0.383922	0.350738	0.33104	0.320933	0.316376	0.314668	0.314342	0.315387	0.317148
35%	0.416012	0.391639	0.377667	0.370091	0.366506	0.365043	0.364659	0.364929	0.366847

5.4 Diferentes volatilidades de volatilidade (δ)

A “aleatoriedade” da volatilidade é a principal característica dos modelos de volatilidade estocástica, pelo que importa, pois, analisar ainda o impacto que diminuições e aumentos da volatilidade da volatilidade, δ , têm nos preços simulados e nos padrões de volatilidades implícitas, quer quando a correlação, ρ , é negativa, quer quando é positiva. Foram considerados valores de δ entre 10% e 35%; os quadros 16, 17 e 18 apresentam os resultados obtidos e ilustrados, em termos de volatilidades implícitas, nas figuras 19 e 20.

Quadro 16: Preços simulados para opções *call* (com preços de exercício X entre 80 e 120), quando a volatilidade da volatilidade, δ , é de 10%, 15%, 20%, 25%, e 30%.
 $S_0 = 100, \tau = 0.25, r = 0.05, \sqrt{V_0} = 0.25$ a) $\rho = -0.25$

δ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
10%	20.84521	16.22782	11.99116	8.349194	5.43457	3.304093	1.87309	0.990739	0.485465
stdv	0.031	0.029	0.027	0.024	0.021	0.017	0.014	0.010	0.007
15%	20.70777	16.10348	11.87821	8.247115	5.34498	3.230763	1.818524	0.954457	0.464154
stdv	0.031	0.030	0.027	0.024	0.020	0.016	0.013	0.009	0.007
20%	20.57201	15.98033	11.76508	8.143254	5.25295	3.155722	1.762862	0.919456	0.445984
stdv	0.032	0.030	0.027	0.024	0.020	0.016	0.012	0.009	0.007
25%	20.43705	15.85807	11.65176	8.037937	5.158288	3.079544	1.707194	0.886285	0.430609
stdv	0.033	0.031	0.028	0.024	0.020	0.016	0.012	0.010	0.007
30%	20.30334	15.7363	11.53779	7.930695	5.061089	3.001581	1.651704	0.854555	0.417161
stdv	0.035	0.032	0.029	0.025	0.020	0.017	0.013	0.011	0.008

Quadro 16 (cont.) : Preços simulados para opções *call* (com preços de exercício X entre 80 e 120), quando a volatilidade da volatilidade, δ , é de 10%, 15%, 20%, 25%, e 30%.
 $S_0 = 100, \tau = 0.25, r = 0.05, \sqrt{V_0} = 0.25$ b) $\rho = 0.25$

δ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
10%	21.41938	16.74826	12.44098	8.717157	5.754508	3.580286	2.101416	1.183392	0.63048
stdv	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01
15%	21.5687	16.88515	12.5597	8.817367	5.837425	3.650205	2.160607	1.232706	0.669093
stdv	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02
20%	21.7201	17.0244	12.67865	8.916861	5.918206	3.717535	2.218452	1.28204	0.708565
stdv	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02
25%	21.87299	17.16638	12.79921	9.015658	5.996735	3.782269	2.274738	1.330866	0.74841
stdv	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02
30%	22.02744	17.3107	12.92264	9.114495	6.072985	3.844451	2.329501	1.379045	0.789119
stdv	0.041	0.041	0.040	0.039	0.037	0.035	0.031	0.027	0.023

Quadro 17: "Enviesamento" percentual dos preços de Black-Scholes para opções *call* (com preços de exercício X entre 80 e 120), quando a volatilidade da volatilidade, δ , é de 10%, 15%, 20%, 25%, e 30%. $S_0 = 100, \tau = 0.25, r = 0.05, \sqrt{V_0} = 0.25$

δ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
Preços BS	21.12122	16.47511	12.21004	8.534165	5.5984	3.439895	1.980506	1.070809	0.545531
	a) $\rho = -0.25$								
10%	1.3%	1.5%	1.8%	2.2%	3.0%	4.1%	5.7%	8.1%	12.4%
20%	2.0%	2.3%	2.8%	3.5%	4.7%	6.5%	8.9%	12.2%	17.5%
25%	2.7%	3.1%	3.8%	4.8%	6.6%	9.0%	12.3%	16.5%	22.3%
30%	3.3%	3.9%	4.8%	6.2%	8.5%	11.7%	16.0%	20.8%	26.7%
35%	4.0%	4.7%	5.8%	7.6%	10.6%	14.6%	19.9%	25.3%	30.8%
	b) $\rho = 0.25$								
10%	-1.4%	-1.6%	-1.9%	-2.1%	-2.7%	-3.9%	-5.8%	-9.5%	-13.5%
20%	-2.1%	-2.4%	-2.8%	-3.2%	-4.1%	-5.8%	-8.3%	-13.1%	-18.5%
25%	-2.8%	-3.2%	-3.7%	-4.3%	-5.4%	-7.5%	-10.7%	-16.5%	-23.0%
30%	-3.4%	-4.0%	-4.6%	-5.3%	-6.6%	-9.1%	-12.9%	-19.5%	-27.1%
35%	-4.1%	-4.8%	-5.5%	-6.4%	-7.8%	-10.5%	-15.0%	-22.4%	-30.9%

Quanto maior for o δ , mais aleatório, ou menos constante, é o comportamento da volatilidade e, em consequência, maiores os erros cometidos pelo modelo de Black-Scholes..

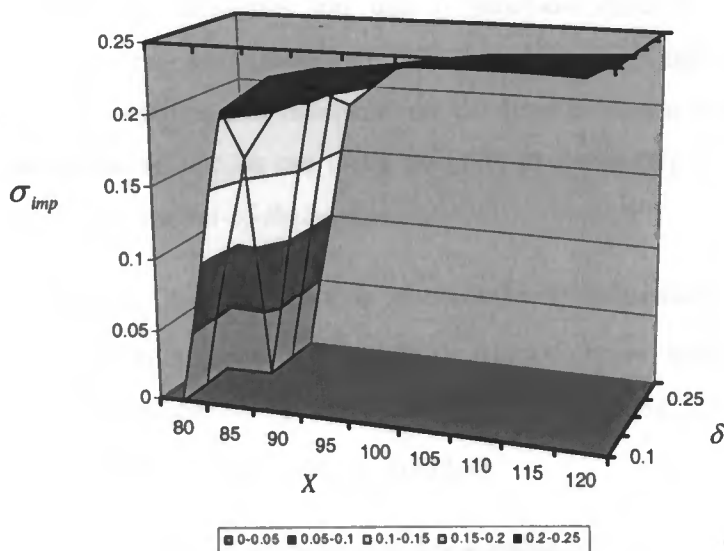
Quadro 18: Volatilidades implícitas, para opções *call* (com preços de exercício X entre 80 e 120), quando a volatilidade da volatilidade, δ , é de 10%, 15%, 20%, 25%, e 30%.
 $S_0 = 100, \tau = 0.25, r = 0.05, \sqrt{V_0} = 0.25$ a) $\rho = -0.25$

δ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
10%	n.a	0.205812	0.231146	0.239009	0.241677	0.243005	0.243516	0.243576	0.242834
15%	n.a	0.165797	0.220779	0.232883	0.237124	0.23922	0.240191	0.240605	0.240191
20%	n.a	n.a	0.209805	0.226601	0.232447	0.235342	0.236778	0.237699	0.237891
25%	n.a	n.a	0.198032	0.220174	0.227636	0.231399	0.23334	0.234906	0.235909
30%	n.a	n.a	0.185091	0.213565	0.222694	0.227357	0.229888	0.232199	0.234146

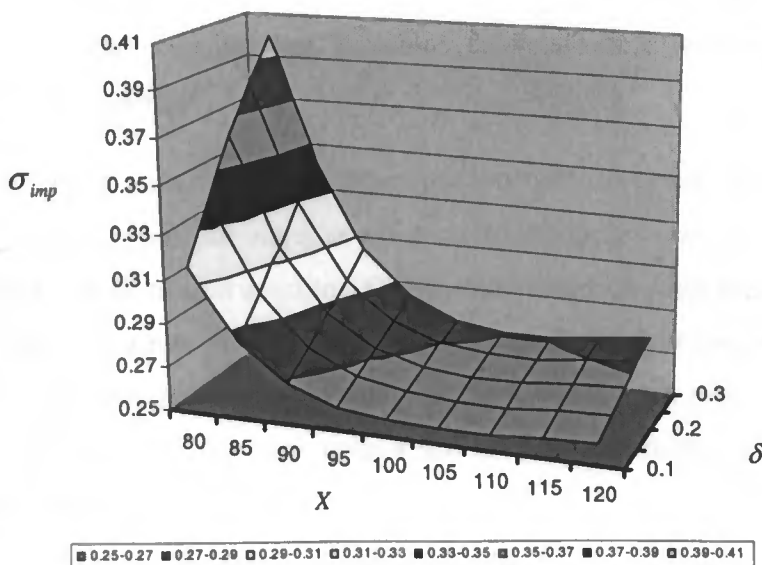
Quadro 18 (cont.): Volatilidades implícitas, para opções *call* (com preços de exercício X entre 80 e 120), quando a volatilidade da volatilidade, δ , é de 10%, 15%, 20%, 25%, e 30%.
 $S_0 = 100, \tau = 0.25, r = 0.05, \sqrt{V_0} = 0.25$ b) $\rho = 0.25$

δ/X	80	85	90	95	100	105	110	115	120
10%	0.317171	0.285287	0.26861	0.260752	0.25793	0.257215	0.257213	0.258756	0.259534
15%	0.340763	0.300626	0.277791	0.266596	0.262141	0.260803	0.260713	0.262501	0.263673
20%	0.361852	0.315211	0.286778	0.27237	0.266243	0.264254	0.264116	0.266198	0.267797
25%	0.381218	0.329274	0.295698	0.278076	0.270231	0.267569	0.267411	0.269812	0.271858
30%	0.399367	0.342907	0.304657	0.283762	0.274103	0.270751	0.270601	0.273337	0.275912

Figuras 19 e 20: Volatilidades implícitas, para uma opção *call*, quando a volatilidade da volatilidade é de 10%, 15%, 20%, 25%, e 30%. a) $\rho = -0.25$



b) $\rho = 0.25$



5.5 Conclusões

Este capítulo permitiu identificar padrões de volatilidade implícita (no modelo de Black-Scholes), que são passíveis de ser explicados por diferentes valores de correlação entre rendibilidade e volatilidade. Como esperado da análise feita no capítulo 4, o modelo de Black-Scholes sobreavalia as opções *call* quando $\rho < 0$ e subavalia-as quando $\rho > 0$. Além da confirmação destes efeitos, foi possível, igualmente, identificar os “sorrisos” explicáveis por diferentes valores de ρ .

Constatou-se que, quando a correlação entre a rendibilidade e volatilidade é nula, o modelo do capítulo 3 tem um comportamento esperado e já identificado anteriormente por outros autores, mesmo em situações em que o processo descritivo do comportamento da volatilidade não era semelhante ao aqui considerado. Confirmou-se que, quando a volatilidade é estocástica, mas independente das rendibilidades, o modelo de Black-Scholes tende a subavaliar as opções em torno do nível *at-the-money* e a sobreavaliar as opções suficientemente *in-* ou *out-of-the-money*.

Para as situações de $\rho < 0$, o “sorriso” mostrou-se crescente com o preço de exercício mas sempre abaixo da volatilidade do modelo de Black-Scholes, verificando-se exactamente o inverso para as situações de $\rho > 0$ (“sorrisos” decrescentes com o preço de exercício e sempre acima da volatilidade de Black-Scholes).

Foi ainda possível observar um acentuar dos sorrisos, quer com a diminuição do tempo de vida da opção (τ), quer com o aumento da estocasticidade da volatilidade (δ). Pelo contrário, as variações no nível de volatilidade inicial ($\sqrt{V_0}$) (considerada igual à de longo-prazo) permitiram concluir que aumentos da volatilidade de longo prazo levam a um “atenuar” dos “sorrisos”.

Parece ter agora todo o interesse saber, por um lado, se existe, de facto, correlação entre essas duas variáveis e, por outro, se nas cotações de opções reais se verificam os padrões de volatilidade implícita aqui descritos. O contributo empírico desta dissertação será justamente uma abordagem, ainda que necessariamente breve, destas duas questões. Esse estudo vai ser feito ao longo dos próximos três capítulos, com dados reais sobre o Standard&Poors 500 (índice accionista do mercado norte-americano) e o Eurostoxx50 (índice accionista do mercado europeu).

Parte II

Sobre a real existência da correlação
nos Mercados Accionistas
Europeu e Norte-americano

6 Os Dados

Qualquer modelo de valorização de opções dependerá, necessariamente, pelo menos, de: o valor do activo subjacente (S), o preço de exercício (X), o tempo até ao vencimento (τ), a volatilidade (σ) e o custo líquido de financiamento (dependendo, pois, regra geral, da taxa de juro sem risco (r) e do *dividend yield* (q)).

É bastante comum dizer-se que todas estas variáveis, à excepção da volatilidade, são observáveis (logo, conhecidas). A verdade, porém, é que tal só se verifica em termos teóricos, já que assim que se procura realizar um trabalho empírico sobre opções, são várias as dúvidas que se levantam, sendo necessárias certas decisões prévias de investigação⁶⁴. Apenas para exemplificar: será que existe uma taxa de juro sem risco?

Neste capítulo, além de uma descrição pormenorizada dos dados utilizados nos estudos do capítulo 6, tenta-se explicar a razão de ser das decisões tomadas na recolha e tratamento dos dados considerados “conhecidos”.

6.1 Activo subjacente e *dividend yield*⁽⁶⁵⁾

A escolha dos activos subjacentes às opções resultou da verificação simultânea de alguns critérios-base. Antes de mais, e uma vez que a cotação do activo subjacente deve ser obtida em simultâneo com a das opções, apenas foram consideradas praças cujos mercados a contado e a prazo têm a mesma hora de fecho⁶⁶.

Na tentativa de ultrapassar os problemas (nomeadamente de “enviesamentos” na estimação de volatilidades, recorrendo às volatilidades implícitas) da não simultaneidade da informação, alguns autores chegaram a sugerir que se obtivesse o próprio valor do activo

⁶⁴ A este propósito ver também Duque (1994), capítulo 3.

⁶⁵ Optou-se por não traduzir o termo inglês “*dividend yield*”, atenta a dificuldade de tradução exacta.

⁶⁶ Segundo Harvey e Whaley (1991), o enviesamento que resultaria da utilização de dados não simultâneos no estudo de volatilidades implícitas é significativo. Veja-se ainda, a este respeito, Latané e Rendlman (1976), Chiras e Manaster (1978), Heaton (1986), Brenner e Galai (1986), Day e Lewis (1988), Canina e Figlewski (1991) e Harvey e Whaley (1992).

subjacente de forma implícita, sempre que cotações simultâneas sejam impossíveis de obter. No nosso caso, a consideração das cotações de fecho do activo subjacente e da média das ofertas de compra e venda (*bid* e *ask*)⁶⁷ para as opções, permite-nos assumir, sem grande risco, que existe simultaneidade na obtenção da informação.

Para além deste problema de simultaneidade, levantava-se ainda o problema da escolha do subjacente. A escolha dos índices de acções S&P500 e EuroStoxx50 deveu-se ao facto de serem índices sobre os quais incidem opções europeias e que, na sua composição, possuem empresas que distribuem dividendos em diferentes alturas do ano, tornando mais realista a hipótese de um *dividend yield* contínuo. A escolha de dois mercados diferentes permitiu dar uma maior amplitude aos resultados obtidos, sendo que o mercado norte-americano não poderia deixar de ser escolhido, já que é sobre esse mercado que incide o “grosso” dos estudos na área. Por outro lado, também o mercado europeu teria que ser considerado, já que é aquele em que nos inserimos, tendo, aliás, o Eurostoxx vindo sempre a crescer de importância junto dos agentes do mercado português .

As opções de tipo americano (para além de serem uma realidade mais complexa e sobre a qual a teoria se encontra muito mais atrasada) não são relevantes para esta dissertação, porque muitos dos modelos desenvolvidos no cenário de volatilidade estocástica são sobre opções europeias.

O pagamento de dividendos de forma continuada pelas empresas que constituem os índices referidos permitiu, ainda, minimizar os perigos de utilização de um *dividend yield*, quando a realidade é discreta.

Os dados das opções (média de *bid* e *ask* no fecho) foram recolhidos junto da *Bloomberg*.

Os dados sobre os activos subjacentes (preços de fecho) e os *dividend yield* do S&P500 foram recolhidos junto da *Datastream*. Os *dividend yield* do índice EuroStoxx50 ainda não estão disponíveis na *DataStream* (ou noutra qualquer das bases de dados consultadas).

O cálculo do *dividend yield* para este índice fez-se recorrendo à relação de paridade entre *call* e *put*. Assim, no caso das opções sobre o EuroStoxx50, foram também recolhidos dados relativos às opções *put* .

⁶⁷ No mercado é comum utilizar o termo inglês *mid price* para referir a média entre as melhores ofertas de compra e de venda pendentes no sistema aquando do fecho da sessão de bolsa.

Resulta da relação de paridade⁶⁸, um estimador para o *dividend yield*, q , que é o abaixo (ver anexo 3, programa “divy”):

$$\hat{q} = -\frac{\ln\left(\frac{c - p + Xe^{-r\tau}}{S_0}\right)}{\tau}$$

6.1

6.2 Taxa de Juro sem Risco

Outras das variáveis fundamentais para a valorização de opções é a chamada “taxa de juro sem risco”. Muito embora seja comum o uso deste termo, particularmente entre os economistas, não deixa de se tratar de uma situação utópica⁶⁹, sem correspondência exacta na realidade. Ainda assim, e já que exactamente é impossível a obtenção do seu valor, o que representará menos mal a chamada “taxa de juro sem risco”? As taxas implícitas nas obrigações do Estado? As taxas de juro de curto ou longo prazo?

Infelizmente, pode surgir um problema ainda maior se, como no caso do modelo de Black-Scholes (1973), se considerar que a “taxa de juro sem risco” é um parâmetro (logo, um valor único, constante ao longo do tempo), cujo significado não é exactamente o “económico”⁷⁰, mas a taxa à qual é possível pedir emprestado qualquer fracção do activo⁷¹. No seu artigo de 1972, Black e Scholes entendiam que a taxa de juro a utilizar deveria ser (constante) igual à taxa a que os agentes de mercado podem emprestar e pedir emprestado⁷². Três anos mais tarde Black (1975) redefiniu, em termos algo “mais práticos”, que a taxa a ser utilizada seria a de uma obrigação de risco reduzido (por exemplo do Estado) e que tenha vencimento

⁶⁸ O estimador 6.1 resulta da relação de paridade, para o caso dos activos com *dividend yield*, $c + Xe^{-r\tau} = p + S_0e^{-q\tau}$.

⁶⁹ Por menor que seja, existe sempre algum risco!

⁷⁰ Entenda-se o habitualmente utilizado entre os economistas.

⁷¹ “(...)the rate at which it is possible to borrow any fraction of the security to buy it or to hold it(...)”.

⁷² “borrowing and lending rate for market participants”.

Levantava-se, então, a difícil questão de saber quem são os agentes de mercado a considerar, já que as taxas de financiamento são diferentes e diferentes de agente para agente (uma instituição bancária tem acesso a taxas não disponíveis para os particulares...).

idêntico ao da opção⁷³. No entanto, fica ainda a questão de saber o que se passa quando o vencimento de tais títulos de risco reduzido não coincide exactamente com o vencimento das opções.

Nos estudos empíricos já realizados sobre opções, as escolhas para a “taxa de juro sem risco” têm sido várias: Black e Scholes (1973) utilizaram uma taxa única para todos os vencimentos, Black (1975) recomenda a utilização de taxas diferentes para opções de diferentes vencimentos (a ser escolhidas entre as taxas atribuíveis a depósitos ou obrigações com *rating* elevado), Trippi (1977) utilizou taxas de depósitos, Schmalensee e Trippi (1978) utilizaram as taxas implícitas nas obrigações do Estado, Galai (1977) utilizou uma única taxa constante baseada em obrigações (quer de empresas, quer do Estado), Gemmill e Dickins (1986) e Nisbet (1992) utilizaram as taxas interbancárias de depósitos, mas na maioria dos estudos empíricos optou-se por títulos do tesouro⁷⁴, nomeadamente em Latané e Rendleman (1976), Chiras e Manaster (1978), Macbeth e Merville (1979), Patell e Wolfson (1979), Whaley (1982), Manaster e Rendleman (1982), Park e Sears (1985), Heaton (1986), Day e Lewis (1988), Choi e Shastri (1989), Kumar e Shastri (1990) e Harvey e Whaley (1991 e 1992).

A escolha das taxas de juro, no nosso caso, prendeu-se, não só com a liquidez e volume dos possíveis mercados, como com a existência de dados disponíveis. Por exemplo, os dados (com base na *Datastream* ou na *Bloomberg*) sobre os títulos de tesouro apenas diziam respeito a prazos de 1 mês ou de 3 meses, sendo assim, manifestamente insuficientes para cobrir a vasta gama de vencimentos das opções em estudo, cujo tempo de vida chega a ser de um ano.

A escolha recaiu, por isso, sobre o mercado interbancário, com liquidez bastante elevada e com grande variedade de dados, que vão desde a taxas com prazos reduzidos (por exemplo 1 semana) até 12 meses, estando disponível em intervalos mensais na *Datastream*. Duque (1994) conclui, através da comparação das taxas interbancárias no mercado inglês com as

⁷³ “(...) *the rate on a very low risk note, that matures at the time the option expires*”. Apesar de ser evidente a necessidade de recurso a uma taxa de juro de risco reduzido, é também óbvio que, para que a teoria na base do modelo de Black-Scholes (a constituição de uma carteira isenta de risco através da eliminação da componente estocástica do valor dessa carteira) não falhe, a taxa utilizada tem que ser uma boa aproximação da “taxa sem risco”.

⁷⁴ Chamamos “títulos do tesouro” aos títulos de dívida do Estado de curto prazo.

implícitas nos títulos do tesouro inglês, que a diferença não é significativa, podendo o mercado interbancário ser utilizado como um bom exemplo.

Escolhido o mercado, havia ainda que estabelecer os critérios na utilização dessas taxas, uma vez que poderia considerar-se apenas um dado vencimento como representativo do mercado; poderia considerar-se a taxa com vencimento mais próximo do vencimento da opção; poderia realizar-se qualquer tipo de interpolação (linear ou não) ou, finalmente, poderia procurar-se estimar a estrutura temporal das taxas de juro por forma a possuir taxas (consistentes com as disponíveis) para todo e qualquer vencimento.

A importância da escolha de critérios, intimamente ligada à escolha do rigor desejado, encontra-se relacionada com o impacto que os diferentes valores da taxa de juro têm no valor final da opção, verificando-se que para opções com tempos de vida inferiores a um ano esse impacto é bastante reduzido. Talvez por isso se tenha assistido, em termos históricos, primeiro a um acentuar do rigor no cálculo da “taxa de juro sem risco” a utilizar, logo seguido de um crescente uso de métodos simples para determinação das mesmas taxas.

Neste estudo, decidimos considerar as taxas de juro interbancárias LIBOR e EURIBOR (como os dados sobre a Euribor só se encontravam disponíveis a partir de 31 de Dezembro de 1998, considerou-se a taxa alemã para datas anteriores), respectivamente para as opções sobre os índices S&P500 e EuroStoxx50.

Os dados foram recolhidos na *Datastream* (existindo dados para 1 semana e de 1 a 12 meses) e o critério utilizado foi o da interpolação linear⁷⁵, considerando-se desnecessária a estimação de estruturas temporais de taxa de juro, tendo em conta o período de vida das opções em estudo e o objecto da dissertação.

6.3 Volatilidade

Dos cinco parâmetros referidos como necessários à valorização de contratos de opção, a volatilidade é o único não “observável”, o que é fácil de entender, já que o que se pretende obter é a volatilidade futura, isto é, a variação do activo subjacente durante o tempo de vida da opção.

⁷⁵ Ver, no anexo 3, o programa de Visual Basic utilizado para o efeito (*Interest*).

O método mais imediato para determinar este parâmetro seria a utilização de desvios-padrão com base em séries *ex-post* de rendibilidade do activo subjacente, mas, de um ponto de vista prático, tal método é irrealista. Assim, os métodos de estimação de volatilidades mais utilizados são, em alternativa, os históricos (sempre que se faz uso de séries de dados passadas) e os implícitos (quando, recorrendo a um determinado modelo de valorização de opções – normalmente o de Black-Scholes –, se determina o valor para o parâmetro da volatilidade que faria com que os preços do modelo fossem iguais aos verificados no mercado⁷⁶).

6.3.1 Volatilidade histórica

Nos primeiros testes empíricos que realizaram sobre o seu modelo, Black e Scholes (1972) verificaram que, quando a volatilidade é calculada com base no desvio-padrão de rendibilidades passadas, o modelo sistematicamente sobreavaliava opções com volatilidades históricas elevadas e subavaliava opções com volatilidades históricas reduzidas, o que fez com que reparassem, desde logo, no facto de a utilidade do modelo estar intimamente ligada à capacidade de estimação (por parte dos agentes no mercado) da volatilidade.

Muito embora o cálculo de desvios-padrão históricos seja evidente, não deixam de existir decisões importantes a ser tomadas. Em primeiro lugar, para reduzir o risco de amostragem associado à estimação da volatilidade, seria natural tentar aumentar a sua dimensão, recorrendo, por exemplo, a séries históricas mais longas, ou aumentando a frequência das observações. Infelizmente, o facto de a variância não ser estacionária faz com que o aumento de dimensão leve a resultados ainda menos fiáveis. A frequência dos dados tem também a forte limitação de, muitas vezes, a frequência máxima disponível ser a diária, limitando o número de observações em curto espaço de tempo. Finalmente, há que não esquecer que o valor de uma opção depende da volatilidade de forma não linear, pelo que um estimador não enviesado para a volatilidade não produz, necessariamente, uma estimativa não enviesada para o valor da opção. Em síntese, a volatilidade é instável ao longo do tempo e relaciona-se de forma não linear com o valor da opção, pelo que dos métodos históricos do tipo *naïve* (por exemplo, o desvio-padrão-amostral) resultam estimadores que tendem a produzir, em termos de volatilidade futura, resultados maus e enviesados.

⁷⁶ “Implied volatility can be defined as the wrong number to put on the wrong formula to get the right answer” Rebonato (1999))

6.3.2 Volatilidade Implícita

Os métodos implícitos procuram captar mais informação do mercado sobre a volatilidade futura esperada. No entanto, a utilização de métodos implícitos com o modelo de Black-Scholes leva muitas vezes a volatilidades diferentes para opções que diferem apenas no preço de exercício, o que se torna extremamente difícil de fundamentar economicamente e vem contradizer o próprio modelo. Apesar disso, os estudos empíricos efectuados indicam que estimadores que ponderam as várias volatilidades implícitas tendem a superar os históricos, em termos de previsão da volatilidade futura⁷⁷, estando mesmo entre as mais usados como *proxy* da volatilidade em muitos estudos sobre volatilidade estocástica⁷⁸.

A determinação de volatilidades implícitas passa, muitas vezes⁷⁹, pela utilização de métodos numéricos; no nosso caso, o método escolhido foi o de Newton-Raphson (ver anexo 3, programa “volimp”⁸⁰).

Durante o estudo preparatório da dissertação, foram utilizadas, não só estimativas de volatilidade históricas, como também implícitas.

6.4 Moneyness

Para ser possível comparar os níveis *in-the-money* das opções de toda a amostra, foi necessário utilizar uma medida que fosse “imune” às alterações de preço e aos diferentes preços de exercício, sem deixar de representar o quanto *in-the-money*, *at-the-money* ou *out-of-the-money* uma opção se encontra, para o que é habitual o uso da estatística de *moneyness* (η) dada por:

$$\eta = \frac{Se^{-q\tau}}{Xe^{-r\tau}}$$

6. 2

⁷⁷ Nos seus estudos Day e Lewis (1992) e Lamoureux e Lastrapes (1993) concluíram que a volatilidade implícita contribui, de forma significativa, com informação relevante na previsão da volatilidade futura.

⁷⁸ São disso exemplo, os estudos de Patell e Wolfson (1979, 1981) ou Poterba e Summers (1986).

⁷⁹ Ver apêndice ao capítulo sobre métodos “explícitos” de determinação de volatilidades implícitas.

⁸⁰ A escolha do valor inicial baseou-se nas sugestões de Manaster e Koehler (1982) e nos valores aproximados de Corrado e Miller (1996) – ver anexo 3, programa “volimp”. O método de Newton Raphson é explicado no apêndice ao capítulo.

Uma opção que se encontre *at-the-money*, apresentará um valor de *moneyness* muito próximo da unidade, já que $S = X$. Uma opção *call in-the-money*, em que $S > X$, terá um valor de *moneyness* superior à unidade e mede, de forma aproximada, a proporção entre o valor do activo subjacente e o que por ele é devido por exercício da opção. Por exemplo, uma *call* com $\eta = 2$ permite ao comprador comprar o subjacente por quase metade do preço. Uma opção *call out-of-the-money*, em que $S < X$, apresentará valores de *moneyness* inferiores à unidade e que, no limite, se podem aproximar de zero, quando o activo subjacente à opção tem um valor nulo. Quando uma *call* tem $\eta = 0.4$ isso significa que ela atribui o direito de adquirir o activo subjacente pagando por ele duas vezes e meia ($\frac{1}{0.4}$) o seu valor. É habitual considerar-se como intervalo de variação razoável (por já incluir opções bastante *in e out-of-the-money*) valores entre 0.5 e 2.

6.5 A amostra utilizada

Os dados recolhidos sobre o activo subjacente e o mercado monetário (preço, *dividend yield*, taxa de juro) dizem respeito ao período entre Janeiro 1998 e Março de 2000. No caso do mercado de opções, foram consideradas todas as cotações de opções *call* com os vencimentos de Janeiro 1999 a Dezembro 2000⁸¹.

Para expurgar a amostra de observações extremas, que poderiam distorcer os resultados, consideraram-se “anormais” foram excluídas da amostra as cotações das opções em que se verificasse qualquer uma das condições abaixo indicadas:

1. possuísem cotação inferior ao seu valor intrínseco;
2. para as quais o grau de *moneyness* fosse inferior a 0.5 ou superior a 1.9;
3. apresentassem volatilidades implícitas superiores a 100%;
4. tivessem tempo de vida superior a 1 ano (são raras e pouco líquidas as opções de vencimentos superiores a 1 ano em mercados de bolsa).

O quadro 19 abaixo indica, para os dois subjacentes, o número de exclusões feita por cada

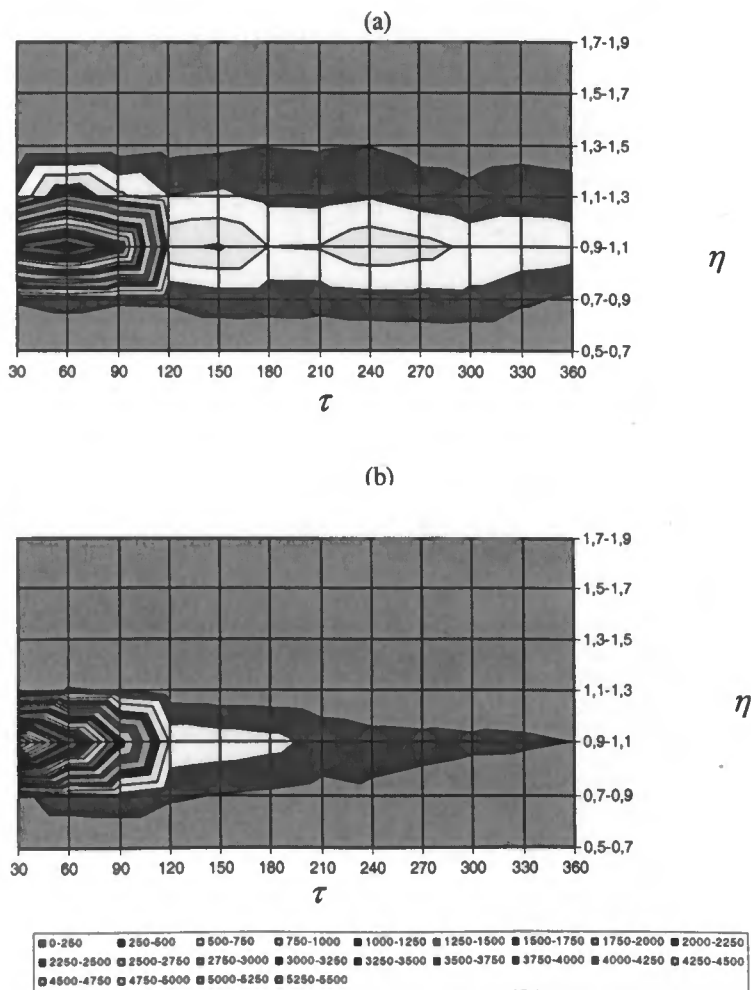
⁸¹ É de referir que as *call* sobre o SPX, com vencimento em Março de 1999, tiveram como primeiro dia de negociação a 3 de Abril de 1998. Daí a importância de todos os dados sobre o activo subjacente e sobre o mercado monetário serem recolhidos desde o início de 1998. É ainda de referir que, para o caso dos vencimentos entre Abril de 2000 e Dezembro de 2000, foram apenas consideradas as cotações até 31 de Março de 2000, por esse ter sido o último dia de recolha da informação.

um dos critérios; o número total de observações após aplicação dos critérios foi de 19 639 para as *call* sobre o S&P500 e de 31 268 para as *call* sobre o EuroStoxx . O “grosso” das observações recai sobre opções em torno do nível *at-the-money* e com vencimentos inferiores a 3 meses. A figura 17 mostra a distribuição das observações das *call* sobre os dois índices .

Quadro 19: Número de observações, sobre opções, excluídas da amostra para cada subjacente.

Critérios	SPX	Eurotox
1	1092	2464
2	27	88
3	1880	4078
4	645	3663
Total	3644	10293

Figura 21: Níveis de concentração da amostra das opções *call* sobre o Eurostoxx (a) e S&P500 (b).



Foi elaborada uma base de dados de opções, que permite associar a cada cotação outros dados relevantes⁸².

6.6 Conclusões

Os dados aqui apresentados permitem que, nos próximos dois capítulos, se procure, não só identificar a existência de uma correlação entre os processos de preços e volatilidade, como também, analisar em que medida é que os “sorrisos” existentes nos mercados de opções podem ser explicados por essa correlação.

⁸² Ver em apêndice as cotações de opções *call* sobre o S&P500 obtidas no dia 8 de Agosto de 1999.

6.7 Apêndice

1. Forma explícita (aproximada) de determinação de volatilidades implícitas:

Brenner e Subrahmanyam (1988) e, mais tarde, Corrado e Miller (1996) desenvolveram um método explícito para determinação de volatilidades implícitas num ambiente de Black-Scholes. Para a derivação das fórmulas sugeridas por Corrado e Miller, é necessário partir da expansão da função de distribuição de probabilidade normal (Stuart e Ord (1987), p. 184):

$$N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^5}{40} + \dots \right) \quad 6.3$$

Se substituirmos esta expansão na fórmula de Black-Scholes (nesta derivação vão ser ignorados os termos de ordem 3 e superiores, sendo, no entanto, a generalização para ordens de maior rigor imediata) obtém-se:

$$C \approx Se^{-q\tau} \left(\frac{1}{2} + \frac{d_1(S, \tau)}{2\sqrt{\pi}} \right) - Xe^{-r\tau} \left(\frac{1}{2} + \frac{d_2(S, \tau)}{2\sqrt{\pi}} \right) \quad 6.4$$

onde d_1 e d_2 são os presentes na fórmula de Black-Scholes. Após manipulações é possível chegar à seguinte equação quadrática em $\tilde{\sigma} = \sigma\sqrt{\tau}$:

$$\tilde{\sigma}^2(\tilde{S} + \tilde{X}) - \tilde{\sigma}\sqrt{8\pi} \left(c - \frac{1}{2}(\tilde{S} - \tilde{X}) \right) + 2(\tilde{S} - \tilde{X}) \ln \left(\frac{\tilde{S}}{\tilde{X}} \right) = 0 \quad 6.5$$

onde $\tilde{S} = Se^{-q\tau}$ e $\tilde{X} = Xe^{-r\tau}$. A maior solução da equação acima vem

$$\tilde{s} = \sqrt{2\pi} \left(\frac{c - \frac{1}{2}(\tilde{S} - \tilde{X})}{\tilde{S} + \tilde{X}} \right) + \sqrt{2\pi \left(\frac{c - \frac{1}{2}(\tilde{S} - \tilde{X})}{\tilde{S} + \tilde{X}} \right)^2 - \alpha \left(\frac{\tilde{S} - \tilde{X}}{\tilde{S} + \tilde{X}} \right)^2} \quad 6.6$$

Uma escolha correcta para o valor de α permite melhorar a estimativa de opções *out* ou *in-the-money*, sem afectar a das *at-the-money*. Aparentemente, $\alpha = 2$ é muitas vezes uma escolha adequada (para mais pormenores, veja-se Corrado e Miller (1996)).

2. Organização dos dados relevantes para o estudo das opções:

Data	Prémio	Subj	Venc	T	K	S	UDN	Tau	R	q	Vol.impl.	Money
08-09-99	2,375	SPX	Set-99	C	1380	1344,15	17-09-99	10	0,053652	0,0124	0,1431	0,98
08-09-99	2,375	SPX	Set-99	C	1385	1344,15	17-09-99	10	0,053652	0,0124	0,1567	0,97
08-09-99	1,625	SPX	Set-99	C	1390	1344,15	17-09-99	10	0,053652	0,0124	0,1525	0,97
08-09-99	2,5	SPX	Set-99	C	1395	1344,15	17-09-99	10	0,053652	0,0124	0,1857	0,96
08-09-99	1	SPX	Set-99	C	1400	1344,15	17-09-99	10	0,053652	0,0124	0,1573	0,96
08-09-99	0,25	SPX	Set-99	C	1405	1344,15	17-09-99	10	0,053652	0,0124	0,1302	0,96
08-09-99	0,25	SPX	Set-99	C	1415	1344,15	17-09-99	10	0,053652	0,0124	0,1480	0,95
08-09-99	0,25	SPX	Set-99	C	1425	1344,15	17-09-99	10	0,053652	0,0124	0,1654	0,94
08-09-99	0,1875	SPX	Set-99	C	1450	1344,15	17-09-99	10	0,053652	0,0124	0,1993	0,93
08-09-99	0,0625	SPX	Set-99	C	1475	1344,15	17-09-99	10	0,053652	0,0124	0,2098	0,91
08-09-99	0,0625	SPX	Set-99	C	1500	1344,15	17-09-99	10	0,053652	0,0124	0,2456	0,90
08-09-99	107,5	SPX	Out-99	C	1250	1344,15	15-10-99	38	0,053949	0,0124	0,2366	1,08
08-09-99	88	SPX	Out-99	C	1275	1344,15	15-10-99	38	0,053949	0,0124	0,2394	1,06
08-09-99	69	SPX	Out-99	C	1300	1344,15	15-10-99	38	0,053949	0,0124	0,2315	1,04
08-09-99	49	SPX	Out-99	C	1325	1344,15	15-10-99	38	0,053949	0,0124	0,2057	1,02
08-09-99	34	SPX	Out-99	C	1350	1344,15	15-10-99	38	0,053949	0,0124	0,1969	1,00
08-09-99	23,5	SPX	Out-99	C	1375	1344,15	15-10-99	38	0,053949	0,0124	0,1980	0,98
08-09-99	14,75	SPX	Out-99	C	1390	1344,15	15-10-99	38	0,053949	0,0124	0,1747	0,97
08-09-99	11	SPX	Out-99	C	1400	1344,15	15-10-99	38	0,053949	0,0124	0,1672	0,96
08-09-99	5,875	SPX	Out-99	C	1425	1344,15	15-10-99	38	0,053949	0,0124	0,1645	0,95
08-09-99	2	SPX	Out-99	C	1450	1344,15	15-10-99	38	0,053949	0,0124	0,1487	0,93
08-09-99	0,9375	SPX	Out-99	C	1475	1344,15	15-10-99	38	0,053949	0,0124	0,1511	0,92
08-09-99	0,5	SPX	Out-99	C	1550	1344,15	15-10-99	38	0,053949	0,0124	0,1981	0,87
08-09-99	58,25	SPX	Nov-99	C	1350	1344,15	19-11-99	73	0,054738	0,0124	0,2324	1,00
08-09-99	43	SPX	Nov-99	C	1375	1344,15	19-11-99	73	0,054738	0,0124	0,2161	0,99
08-09-99	30	SPX	Nov-99	C	1400	1344,15	19-11-99	73	0,054738	0,0124	0,2010	0,97
08-09-99	22	SPX	Nov-99	C	1425	1344,15	19-11-99	73	0,054738	0,0124	0,1992	0,95
08-09-99	13,75	SPX	Nov-99	C	1450	1344,15	19-11-99	73	0,054738	0,0124	0,1867	0,93
08-09-99	7	SPX	Nov-99	C	1475	1344,15	19-11-99	73	0,054738	0,0124	0,1689	0,92
08-09-99	44	SPX	Dez-99	C	1700	1344,15	17-12-99	101	0,056708	0,0124	0,5029	0,80
08-09-99	126	SPX	Jan-00	C	1300	1344,15	21-01-00	136	0,059663	0,0124	0,2798	1,05
08-09-99	102,5	SPX	Jan-00	C	1325	1344,15	21-01-00	136	0,059663	0,0124	0,2487	1,03
08-09-99	84	SPX	Jan-00	C	1350	1344,15	21-01-00	136	0,059663	0,0124	0,2314	1,01
08-09-99	49,5	SPX	Jan-00	C	1425	1344,15	21-01-00	136	0,059663	0,0124	0,2228	0,96

3. Método de Newton Raphson:

O método numérico de Newton Raphson procura os zeros de uma dada função através de aproximações sucessivas. Por se desejar igualar o valor da fórmula de Black-Scholes para a *call* aos valores observados no mercado (c^{obs}), pretendem-se os zeros da função:

$$g(\sigma) = c^{obs} - c^{BS}$$

com

$$c^{BS} = Se^{-q\tau} N(d_1) + Xe^{-r\tau} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

6.7

O processo iterativo de Newton-Raphson ajusta sucessivamente o valor da volatilidade, sendo

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{c^{BS}(\sigma_n) - c^{obs}}{\frac{\partial c^{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)}$$

6.8

A paragem do processo dá-se quando c^{BS} e c^{obs} têm uma diferença percentual, em termos absolutos, menor que um dado ε :

$$\left| \frac{c^{obs} - c^{BS}(\sigma)}{c^{obs}} \right| < \varepsilon$$

6.9

7 Estudo Empírico da Correlação

Há unanimidade na pouca bibliografia sobre a relação entre os preços e volatilidade no sentido de ser provável uma correlação negativa.

No presente capítulo, a par de uma revisão bibliográfica sobre a matéria, procura-se determinar a credibilidade dessa hipótese para o caso dos mercados europeu e norte-americano.

7.1 Estudos sobre a correlação entre preços e volatilidade

Em termos empíricos (tal como em termos teóricos, ver capítulo 3), uma das características que mais surpreende os mercados, e fascina a investigação, é a “aleatoriedade” da volatilidade. As estimativas de volatilidade obtidas nos estudos de French, Schwert e Stambaugh (1987) e de Schwert (1989) mostram que a volatilidade, no mercado accionista norte-americano, sempre apresentou grande instabilidade, fosse ela calculada numa perspectiva de longo prazo (o valor médio era de 20% nos anos 30, mas de 2% no início dos anos 60) ou numa perspectiva diária (pensa-se que a volatilidade diária aumentou de 1% para 7% nos dias que se seguiram ao *crash* de Outubro de 1987).

Dada a existência de variações de volatilidade é de esperar algum tipo de repercussão em termos da rendibilidade esperada exigida pelos agentes, que, dado o acréscimo de risco, devem descontar o valor dos seus activos a taxas mais elevadas, levando a uma diminuição do seu valor de mercado. Este os defensores destas ideias, conhecidas como o efeito *feedback* da volatilidade, encontra-se Pindyck (1984) e French, Schwert e Stambaugh (1987).

O efeito de *feedback* da volatilidade é, aliás, uma ideia particularmente interessante por permitir explicar outro tipo de resultados empíricos dos mercados accionistas, nomeadamente que as descidas acentuadas são muito mais prováveis que as subidas (efeito *skewness*⁸³) ou que a distribuição da rendibilidade tem abas muito mais pesadas do que seria

⁸³ “... of the five largest one-day movements in the S&P500 index since World War II, four are declines in the index and only one is an increase; of the ten largest movements, eight are declines and only two are increases” Cutler, Poterba e Summers (1989).

de prever através de uma distribuição normal (efeito *kurtosis*⁸⁴). A mais completa verificação empírica dos efeitos de *skewness* e *kurtosis* foi feita por Corrado e Su (1996), que além disso, fizeram um apanhado da bibliografia existente sobre os efeitos em causa.

Uma última característica dos mercados accionista, a de que a volatilidade tende a ser mais elevada durante as quedas do mercado do que durante as subidas, aponta para uma correlação negativa entre preços e volatilidade. Black (1976) foi o primeiro a justificar essa correlação pelo aumento da “alavancagem” (e consequentemente do risco) de uma empresa sempre que existe uma descida no valor dos activos de uma dada empresa. O argumento de Black é válido para explicar uma possível correlação, entre preço e volatilidade, de uma emissão em particular⁸⁵, mas não do mercado como um todo. O mercado não é influenciável pela “alavancagem” de uma empresa individual, pelo que o risco sistemático seria imune a este tipo de argumento.

O efeito de *feedback* pode, no entanto, ser utilizado para explicar também esta propriedade, através de justificações sobre a chegada de informações ao mercado⁸⁶. Um número considerável de autores tem procurado explorar estas ideias: Brown, Harlow e Tinic (1988), Poterba e Summers (1986), French, Schwert e Stambaugh (1987), Haugen, Talmor e Torous (1992) e Platen e Schweizer (1988).

Do que ficou exposto, parece poder concluir-se que, apesar do reduzido número de estudos teóricos sobre os efeitos da correlação entre rendibilidade e volatilidade, em termos empíricos não parece existir grande dúvida de que existe e é negativa.

Os passos seguintes, a tomar neste capítulo, são o da identificação dessa correlação nos mercados accionistas europeu e norte-americano e o da realização de uma primeira tentativa de estimação do seu valor para esses mercados.

“... in daily stock returns since 1885: six of the largest movements in this period are declines and four are increases” Schwert (1990).

⁸⁴ Bollerslev (1987) alerta para o facto de o excesso de *kurtosis* verificado empiricamente não poder ser apenas resultado da “aleatoriedade” da volatilidade, mas, possivelmente, também de alguma relação entre rendibilidade e volatilidade.

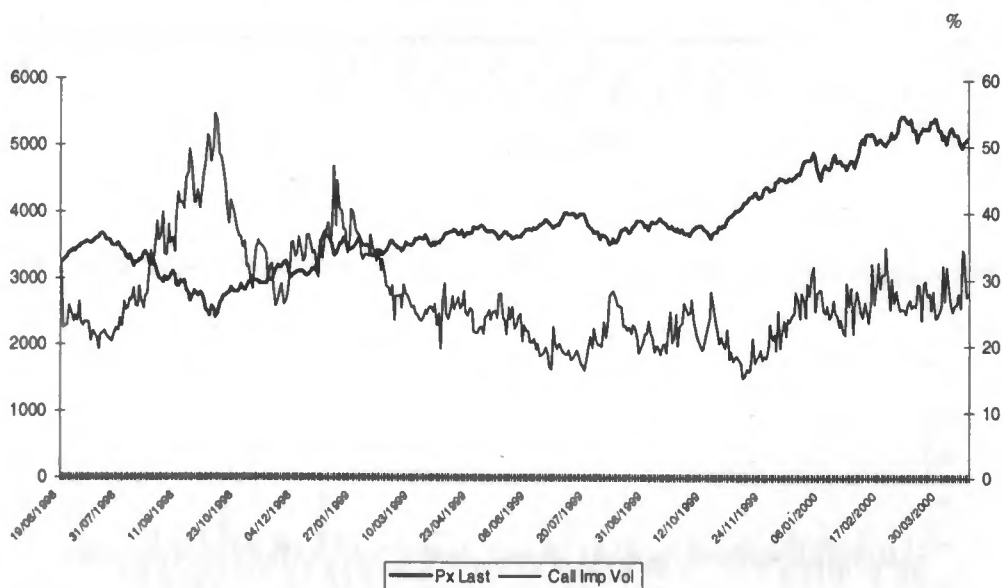
⁸⁵ Mesmo para o caso das emissões individuais, os estudos de Christie (1982) e Schwert (1989) chamam a atenção para o facto de os efeitos de “alavancagem”, *per se*, serem demasiado reduzidos para explicarem o fenómeno.

⁸⁶ “Large pieces of news tend to be followed by other large pieces of news (volatility is persistent), so pieces of news increases the required rate of stock return and lowers the stock price. (...) In the extreme case in which no news arrive, the market rises because ‘no news is good news’ about future volatility” Campbell e Hentschel (1992).

7.2 Análise gráfica de algumas relações entre variáveis dos processos dos preços e da volatilidade.

A sobreposição das séries de preços e da volatilidade⁸⁷ do S&P e do Eurostoxx, constantes das figuras 22 e 23, vêm de alguma forma, reforçar a ideia de uma possível correlação negativa, já que as descidas de preço aparentam ser acompanhadas por aumentos de volatilidade e as subidas de preço por diminuições de volatilidade. Por exemplo no caso do Eurostoxx, as quedas de preço de Outubro de 1998 e 1999 ocorreram em períodos de elevada volatilidade. Quando se sobrepõem as séries da rendibilidade e da volatilidade (figuras 24 e 25), ou as séries das variações de volatilidade e da rendibilidade— que é o que se modeliza capítulo 3 (figuras 26 e 27), as conclusões a que se pode chegar são semelhantes, sendo, contudo, mais óbvias para o mercado norte-americano que para o europeu.

Figura 22: Relação entre preços e volatilidade do Eurostoxx entre Junho de 1998 e Março de 2000.



Nas figuras 28 e 29 estão representadas as correlações (entre rendibilidade e variações de volatilidade) calculadas com base em intervalos de tempo de 5, 15, 30 e 60 dias.

⁸⁷ A série da volatilidade foi determinada com base nas volatilidades implícitas das opções *call* sobre os índices. Esse estimador considerava apenas as volatilidades implícitas nos três preços de exercício mais próximos do nível *at-the-money* e nos três vencimentos mais próximos da data actual. A escolha de volatilidades implícitas deveu-se ao facto de o processo da volatilidade ser simulado num mundo risco neutral e estas volatilidades já incorporarem, de alguma forma, o “preço do risco”. Contudo, e por uma questão de coerência, foi feita também uma análise com base em estimadores “históricos” de volatilidade, o que, no entanto, não altera as conclusões a que se chegou neste capítulo.



Com base em estimadores históricos de volatilidade diária e também com exclusão do efeito de *overlapping*, conseguiu-se idêntica estrutura de correlação.

Figura 23: Relação entre preços e volatilidade do S&P500 entre Janeiro de 1998 e Março de 2000.

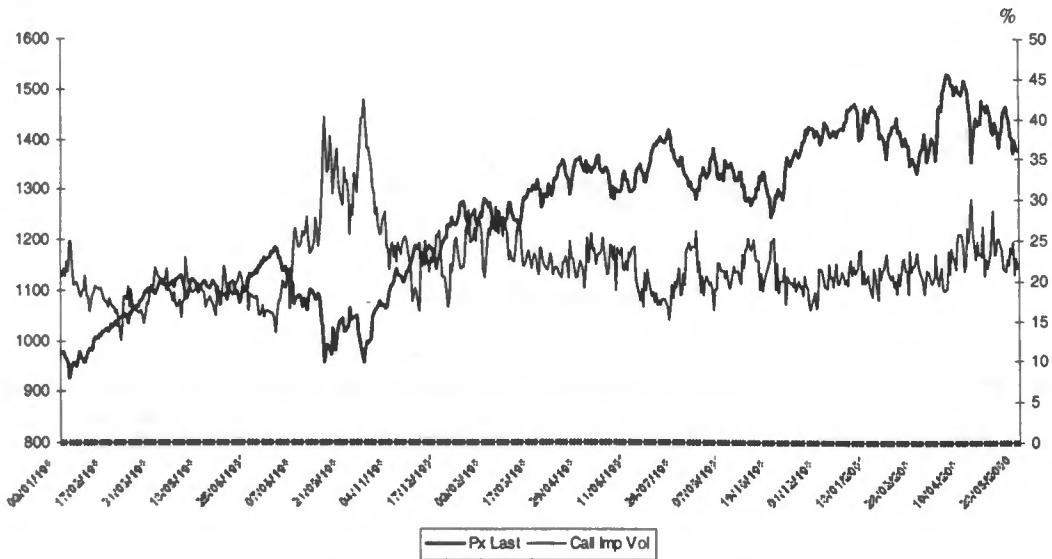


Figura 24: Relação entre rendibilidade e volatilidade do Eurostoxx entre Junho de 1998 e Março de 2000.

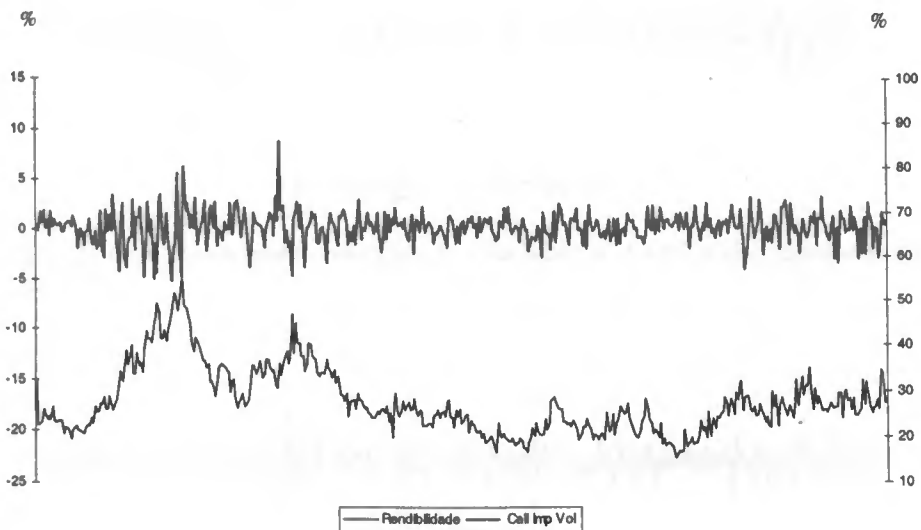


Figura 25: Relação entre rendibilidade e volatilidade do S&P500 entre Janeiro de 1998 e Março de 2000.

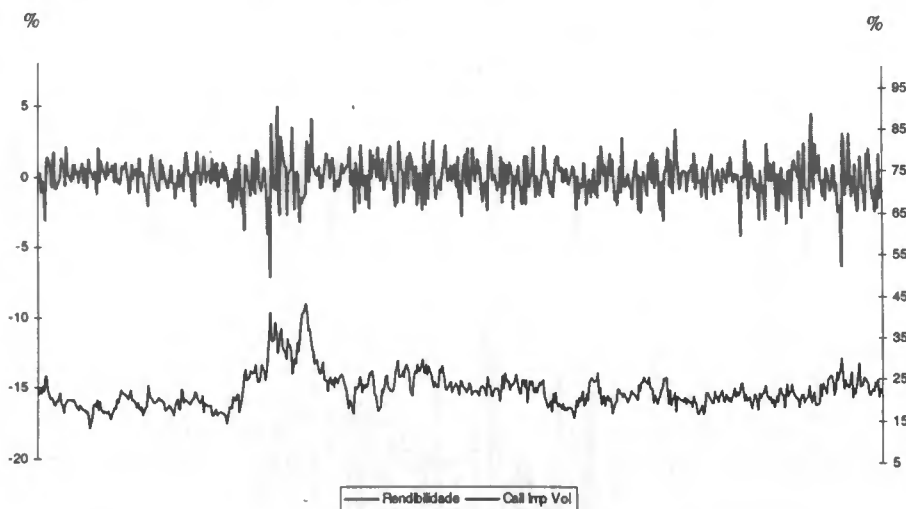


Figura 26: Relação entre rendibilidade e variações de volatilidade do Eurostoxx entre Junho de 1998 e Março de 2000.

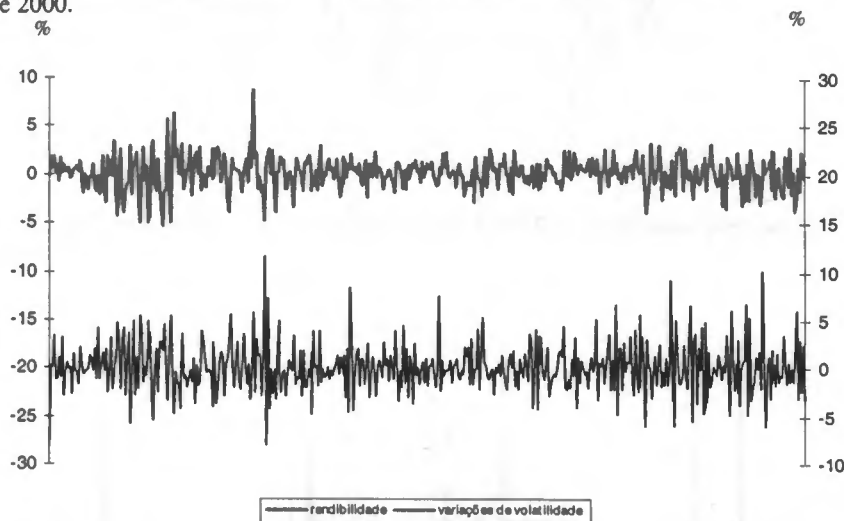


Figura 27: Relação entre rendibilidade e variações de volatilidade do S&P500 entre Janeiro de 1998 e Março de 2000.

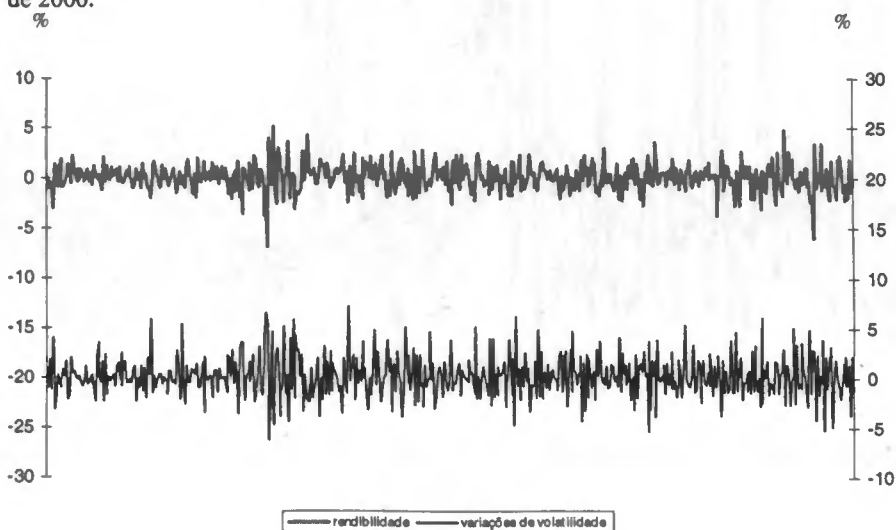


Figura 28: Correlações entre rendibilidade e volatilidade do Eurostoxx considerando períodos de 5, 30, 60 e 90 dias⁸⁸.

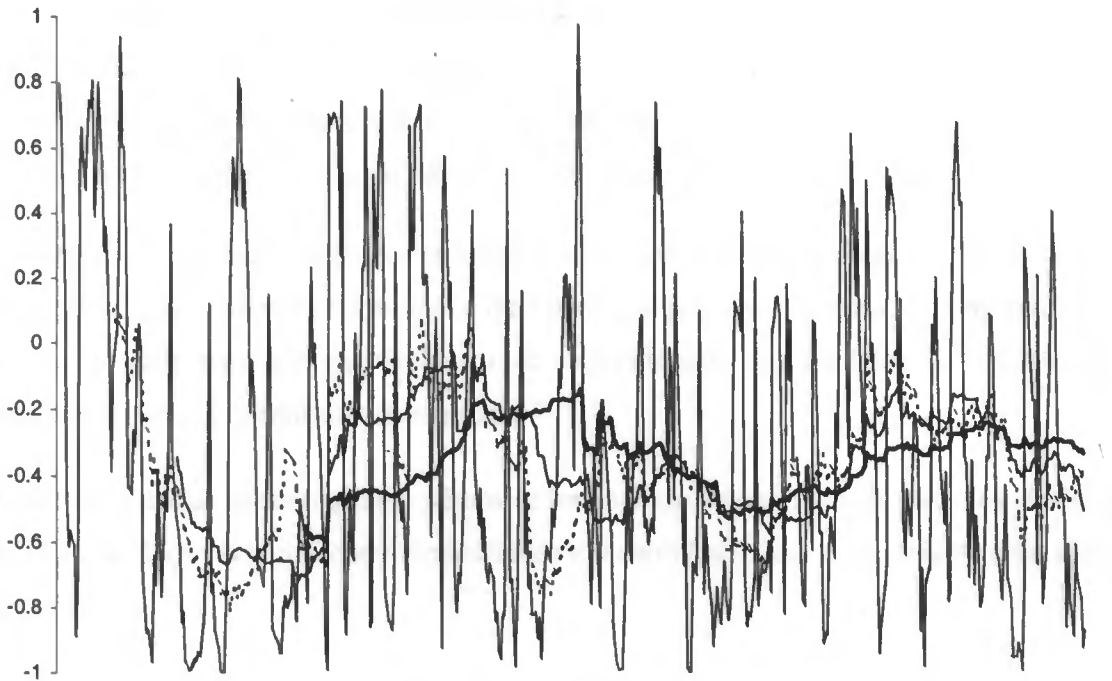
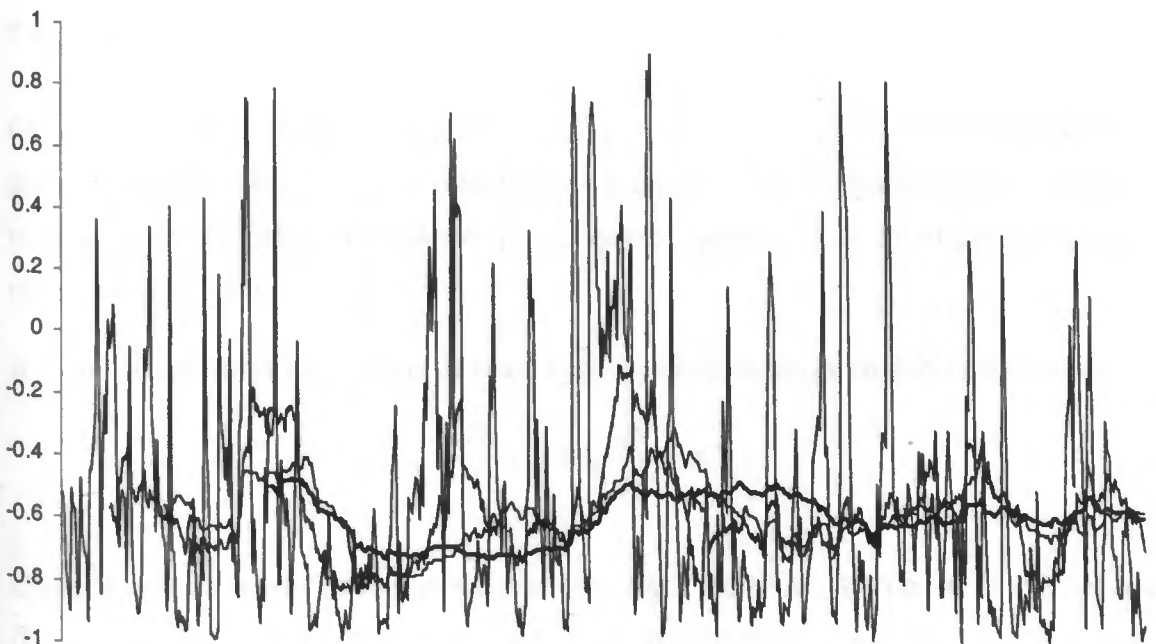


Figura 29: Correlações entre rendibilidade e volatilidade do S&P500 considerando períodos de 5, 30, 60 e 90 dias⁸⁸.



⁸⁸ Nas figuras 28 e 29 as correlações para períodos de 5, 30, 60 e 90 dias são representados com linhas cada vez mais grossas.

Em ambos os mercados, a correlação em períodos curtos é muito instável (variando em quase todo o intervalo $[-1,1]$); contudo, à medida que são considerados períodos de tempo superiores (30 dias ou mais), esta correlação torna-se claramente negativa, de certa forma confirmando as expectativas (económicas) iniciais. É, aliás, visível que no caso do Eurostoxx se assiste a uma concentração em torno de valores da ordem de -0.4 , enquanto que essa concentração, no caso do S&P500, se faz para valores perto de -0.6 .

No entanto, o carácter (aparentemente) aleatório da correlação, especialmente em períodos de tempo curtos, serve também de alerta, quer para uma possível dificuldade de estimação do seu valor, quer para um possível erro de especificação nos modelos de volatilidade estocástica onde ρ é considerado constante.

A isto acresce que, mesmo que em termos de longo prazo se verifique, de facto, a existência de uma correlação negativa entre rendibilidade e volatilidade, nada se poderá garantir sobre

o que acontecerá a curto prazo e, desde modo, nada permitirá concluir que modelos com $\rho = 0$ (correlação instantânea nula) tenham pior *performance* que modelos com $\rho < 0$.

7.3 Uma primeira abordagem para estimação da correlação

Os quadros 20 a 31 apresentam os resultados dos estudos de regressão feitos entre as séries da rendibilidade e da variação da volatilidade. Os quadros 20 a 25 dizem respeito ao estudo realizado sobre o índice S&P500, enquanto que os quadros 26 a 31 dizem respeito ao realizado sobre o Eurostoxx.

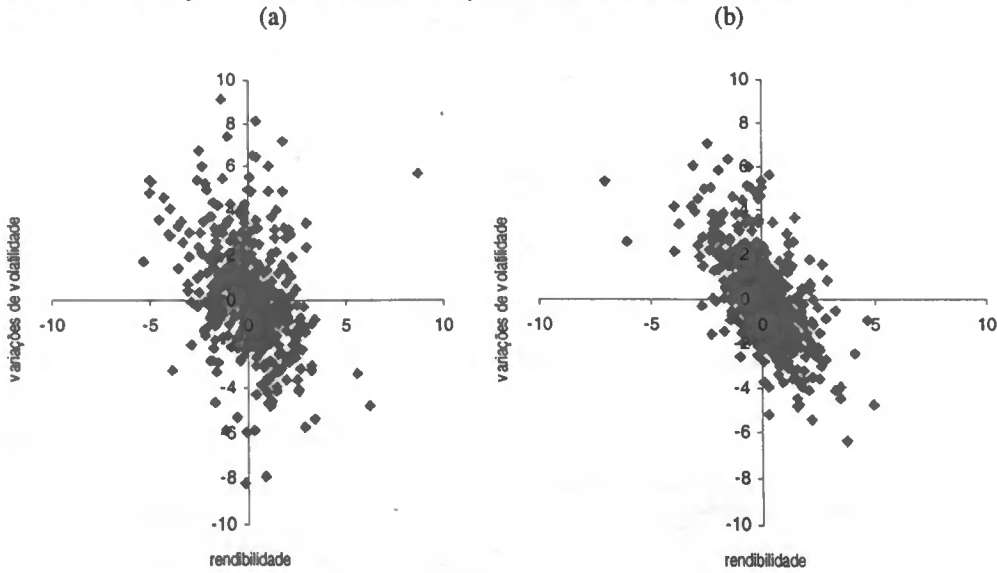
A figura 30 apresenta sob a forma de *scatter plot* a relação entre as variáveis da regressão:

$$\frac{dS}{S} = b_0 + b_1 \frac{dV}{\sqrt{V}} + \varepsilon$$

7.1

Como já era de esperar, dado o comportamento algo “aleatório” da correlação (visível nas figuras 28 e 29), a estimação, pelo método dos mínimos quadrados ordinários, da relação entre as variações da rendibilidade e da volatilidade teve resultados com reduzida credibilidade estatística: veja-se que o valor para o R^2 ajustado é 0.37 e 0.13, para o S&P500 e Eurostoxx, respectivamente (dados dos quadros 23 e 29).

Figura 30: "Scatter plot" rendibilidade vs. variações de volatilidade (a) Eurostoxx (b) S&P500.



Quadro 20: S&P500 – Estatísticas gerais sobre as séries

SPX	X	Y
Média	0.0573672420	0.086156996
S.E.M.	0.0524874940	0.080067037
Desvio-padrão.(unbiased)	1.2888859611	0.966130839
Variância (unbiased)	1.6612270193	0.865670476
Soma	34.5924469451	0.95266875
N	603	603
Soma(x^2)	1002.0431392331	0.609713
Soma(x)^2/N	1.9844732754	0.476085888
SS	1000.0586662327	0.133627

Quadro 21: S&P500 – Matriz de Covariâncias

	X	Y
X	1.661227019	
Y	-1.554915	3.865670476

Quadro 22: S&P500 – Teste ANOVA

Factores	SS	Df	Ms	F(cal)	P(F<=F(cal))	F(0.05)
Regressão	876.1547278	1	876.1547278	362.9060297***	(P<=0.001) 1.18E-63	3.8569779
Resíduos	1450.978899	601	2.414274374			
Total	2327.133627	602				

Quadro 23: S&P500 – Estatísticas de Correlação

R^2 (Coefficient of Determination)	0.376495238
R (Correlation Coefficient)	-0.613592078
R^2 (Adjusted R^2)	0.375457792

Quadro 24: S&P500 – Testes à Correlação

t-test (R = 0)	
<i>t</i> Statistic	19.05009264*** (P<=0.001)
Df	601
P-Value	1.18E-63

z test (R = R0)	
R0 (Expected R)	0
<i>z</i> Statistic	17.50557816*** (P<=0.001)
P-Value	1.30E-68
Lower 95%	-0.661050634
Upper 95%	-0.561243765

Quadros 25: S&P500 – Resultados da regressão

Coeficientes				t(N-P-1;0.05)	1.963919017		
	Estimativa	SE	t(cal)	P(T<=t(cal))	Lower 95%	Upper 95%	
B0	0.139852959	0.063338114	2.208037953* (P<=0.05)	0.027618461	0.015462033	0.264243886	
B1:X	-0.93600392	0.049133825	-19.05009264*** (P<=0.001)	1.18E-63	-1.032498769	-0.839509063	

Coefficiente da regressão sem constante

	Estimativa	SE
b1:X	-0.61359208	0.032209401

Durbin-Watson Ratio

2.656958209

Não deixa de ser interessante, contudo, verificar que os valores para os coeficientes de correlação que se conseguiram obter, andam muito próximo daqueles que se poderiam esperar, tendo em conta a análise feita em termos gráficos no ponto 7.2: -0.61 para o caso do S&P500 e -0.36 para o caso do Eurostoxx, sendo para qualquer dos índices sido sempre rejeitada a hipótese de correlação nula (ver valores dos testes *t* e *z* apresentados nos quadros 24 e 30).

Quadro 26: Eurostoxx – Estatísticas gerais sobre as séries

Eurostoxx	X	Y
Média	0.091017	0.097609652
S.E.M.	0.073171	0.114031974
Desvio-padrão.(unbiased)	1.618058	2.521628315
Variância (unbiased)	2.618112	6.358609357
Soma	44.50714	47.73111983
N	489	489
Soma(x ²)	1281.689	3107.660384
Soma(x)/2/N	4.050891	4.659017996
SS	1277.639	3103.001366

Quadro 27: Eurostoxx – Matriz de Covariâncias

	X	Y
X	2.618112	
Y	-1.48085	6.358609357

Quadro 28: Eurostoxx – Teste ANOVA

Factor	SS	Df	Ms	F(cal)	P(F<=F(cal))	F(0.05)
Regression	408.7446	1	408.7445904	73.88257*** (P<=0.001)	1.14E-16	3.860624
Residual	2694.257	487	5.532354776			
Total	3103.001	488				

Quadro 29: Eurostoxx – Estatísticas de Correlação

R ² (Coefficient of Determination)	0.131725559
R (Correlation Coefficient)	-0.362940159
R ² (Adjusted R ²)	0.129942655

Quadro 30: Eurostoxx – Testes à Correlação

t-test (R = 0)	
t Statistic	8.595497*** (P<=0.001)
Df	487
P-Value	1.14E-16

z test (R = R0)	
R0 (Expected R)	0
z Statistic	8.383162*** (P<=0.001)
P-Value	5.15E-17
Lower 95%	-0.43753
Upper 95%	-0.28339

Quadros 31: Eurostoxx – Resultados da Regressão

Coeficientes	Estimativa	SE	t(cal)	t(N-P-1;0.05)	1.964847101		
					P(T<=t(cal))	Lower 95%	Upper 95%
b0	0.14909	0.106533936	1.399461694	N.S. (P>0.05)	0.162311207	-0.06023273	0.358413
b1:X	-0.56562	0.065803804	-8.595497092	*** (P<=0.001)	1.14E-16	-0.69491082	-0.43632

Coefficiente da regressão sem constante

	Estimate	SE
b1:X	-0.36294	0.042224453

Durbin-Watson Ratio	2.706848721
----------------------------	-------------

Em qualquer dos casos, a constante da restrição assume um valor muito próximo de zero, podendo manter-se mesmo a hipótese da nulidade no caso do Eurostoxx. O coeficiente associado à variável explicativa apresenta sempre valores negativos e significativamente

diferentes de zero, mesmo quando o grau de exigência do teste é elevado (consultar valores dos quadros 25 e 31), tendo-se estabelecido intervalos de confiança a 95% de reduzida amplitude (ver quadros 24 e 30).

É ainda de referir que os valores apresentados da estatística de Durbin-Watson permitem, em qualquer dos casos, manter a hipótese de resíduos não autocorrelacionados⁸⁹.

7.4 Conclusão

A análise aqui feita é, por certo, muito limitada, podendo, no entanto, e segundo se espera, ser entendida como um ponto de partida para investigação futura.

Ainda assim, os resultados aqui apresentados não contrariam os estudos anteriores sobre a eventual correlação entre os preços e a volatilidade que têm sempre apontado para uma correlação negativa; antes pelo contrário, foi mesmo possível obter valores com -0.6 e -0.36 , respectivamente, para os casos do mercado norte-americano e europeu.

No próximo capítulo, vamos atentar nos mercados de opções e procurar-se-ão identificar os “sorrisos” existentes, procurando avaliar se poderão ser explicados por uma correlação negativa entre rendibilidade e volatilidade, ou se, pelo contrário, resultarão de outras influências no processo de preços e/ou volatilidade.

⁸⁹ Para um nível de significância de 5%, $d^*_u = 1.778$, sendo qualquer dos valores apresentados nos quadros 25 e 31 claramente superiores.

8 Estudo Empírico das Volatilidades Implícitas

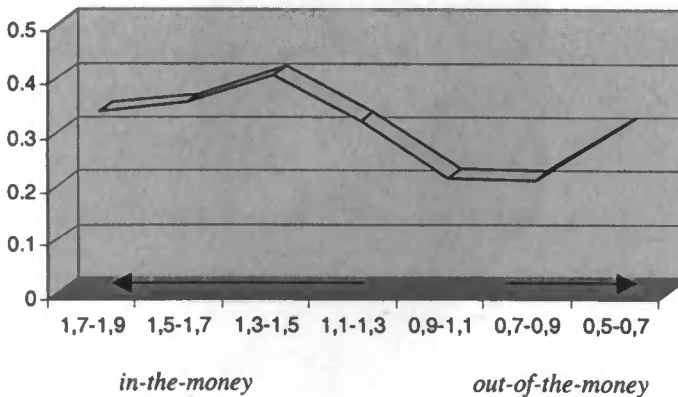
Um método diferente de algum modo complementar ao explorado no capítulo 7, para analisar a possível existência de um $\rho \neq 0$, traduz-se no estudo das cotações das opções de forma directa, identificando padrões de volatilidade implícita existentes na realidade e comparando-os com os obtidos por simulação (que, no presente trabalho, foram analisados no capítulo 5).

Este tipo de análise tem sido, aliás, um dos mais utilizados na determinação da capacidade de explicação de grande parte dos modelos desenvolvidos (vejam-se, nomeadamente, os recentes estudos de Ghysels, Harvey e Renault (1996), Nandi (1998) e de Das e Sundaram (1999)).

8.1 Padrões de Volatilidade Implícita

A divisão das opções em diferentes níveis de *moneyness* permitiu constatar que as volatilidades implícitas⁹⁰ médias variam, tomando valores relativamente reduzidos para os níveis em torno do *at-the-money* e aumentando para os níveis *out-of-the-money*, e para os níveis *in-the-money* (ver figura 31 para o caso das *call* sobre o S&P500 e figura 33 para o caso das *call* sobre o Eurostoxx).

Figura 31: Volatilidade implícita média para diferentes graus de *moneyness*- mercado norte-americano

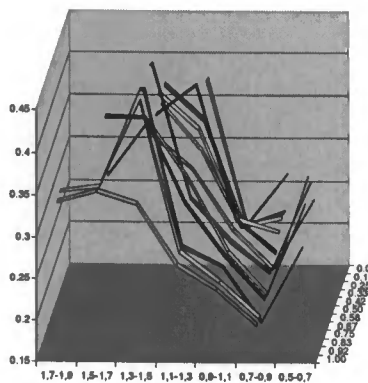
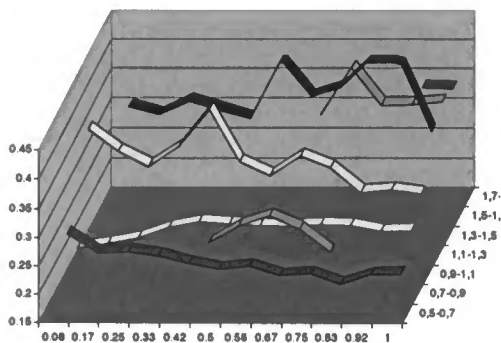


⁹⁰ As volatilidades implícitas foram calculadas utilizando o método de Newton-Rahpson, já exposto no apêndice ao capítulo 5.

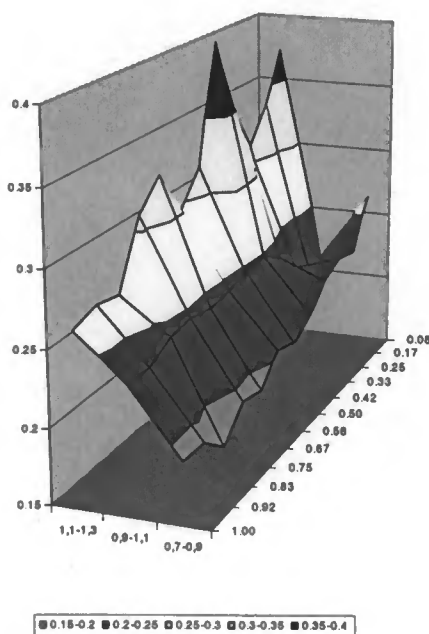
No quadro 32 e na figura 32 procuram-se analisar os “sorrisos” em opções com diferentes tempo de vida, para o caso do mercado norte-americano. O gráfico (b) da figura 32 vem confirmar o acentuar do “sorriso” à medida que o vencimento se aproxima, tese que é defendida por Lopes (1999) na sua dissertação de mestrado e, em estudos anteriores, por Rubinstein (1985), Clewlow e Xu (1993) e ainda Derman e Kani (1994). No gráfico (c) da figura 32 foram apenas consideradas as opções com $0.7 < moneyness < 1.3$ por serem as mais líquidas e por terem *moneyness* comparável às dos estudos de simulação tratados no capítulo 5.

Figura 32: Volatilidade implícita média em opções com diferentes graus de *moneyness* e tempos de vida – mercado norte-americano

(a), (b) e (c) são diferentes perspectivas da mesma realidade.



(c)

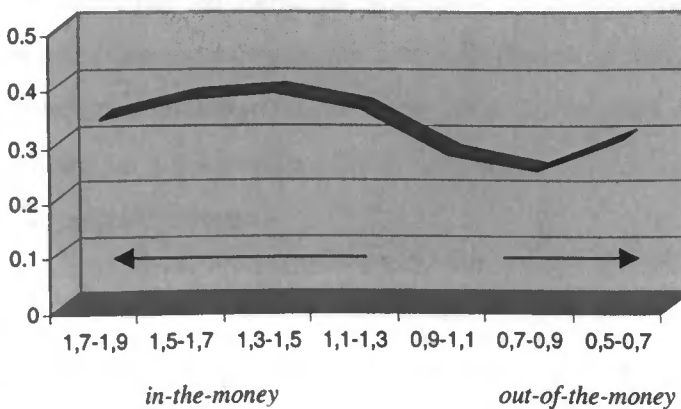


Quadro 32: Volatilidade implícita média em opções com diferentes tempos de vida e graus de *moneyness* – mercado norte-americano

τ / <i>moneyness</i>	0,5-0,7	0,7-0,9	0,9-1,1	1,1-1,3	1,3-1,5	1,5-1,7	1,7-1,9
< 1 mês		0.262289	0.203283	0.373064			
1 a 2 meses		0.227914	0.210791	0.335919	0.377193		
2 a 3 meses		0.230988	0.220803	0.310787	0.364623		
3 a 4 meses		0.224352	0.238704	0.345064	0.386379		
4 a 5 meses		0.209655	0.248811	0.406056	0.371579		
5 a 6 meses	0.280131	0.19981	0.246087	0.317623	0.357072		
6 a 7 meses	0.311296	0.204824	0.243021	0.294642	0.454827		
7 a 8 meses	0.327739	0.188372	0.240495	0.328027	0.393553	0.330442	
8 a 9 meses	0.30502	0.192009	0.244305	0.30869	0.408251	0.408679	
9 a 10 meses	0.26388	0.174289	0.242089	0.265995	0.457488	0.34561	
10 a 11 meses		0.190365	0.233254	0.27018	0.447506	0.347055	0.340737
11 a 12 meses		0.191172	0.233582	0.2639	0.336197	0.350996	0.338635

Os padrões ilustrados pela figura 32 são bastante mais complexos do que aqueles que são passíveis de ser explicados pelo modelo de volatilidade estocástica (desenvolvido no capítulo 3), apresentados no capítulo 5. Essa incapacidade é, no entanto, geral, já que se aplica a todos os modelos de volatilidade estocástica e também aos de “saltos”⁹¹.

Não obstante essa realidade, é indiscutível que enquanto uma correlação negativa seria capaz de explicar “sorrisos” crescentes com o preço de exercício, ou de forma idêntica, decrescentes com o grau de *moneyness*, em todos os “sorrisos” das figuras 31 e 32 eles são predominantemente decrescentes com o preço de exercício (crescentes com o grau de *moneyness*).

Figura 33: Volatilidade implícita média para diferentes graus de *moneyness* – mercado europeu

Parece, assim, que a superfície de volatilidade implícita existente na realidade dificilmente poderia ser explicada por um ρ constante, mas, a sê-lo, não o seria por um $\rho < 0$.

O “sorriso” do mercado europeu (figura 33) é semelhante ao do mercado norte-americano, mas menos acentuado; contudo, é arriscado, ainda que tentador, procurar associar esta diferença ao facto de a correlação entre rendibilidade e volatilidade ser mais evidente no mercado norte-americano que no europeu. Com efeito, mais uma vez, os padrões encontrados (ver figura 34) não poderiam ser explicados por uma correlação negativa *per se*; aliás, no caso do Eurostoxx, o padrão, é bastante semelhante ao do S&P500, sendo possível que se verifique também para outros tipos de opções e para outros mercados de derivados.

Quadro 33: Volatilidade implícita média em opções com diferentes tempos de vida e graus de *moneyness* – mercado europeu

τ / <i>moneyness</i>	0,5-0,7	0,7-0,9	0,9-1,1	1,1-1,3	1,3-1,5	1,5-1,7	1,7-1,9
< 1 mês		0.263045	0.264515	0.406554			
1 a 2 meses		0.218883	0.26781	0.369467	0.500426		
2 a 3 meses		0.231046	0.276714	0.34873	0.401132		
3 a 4 meses		0.23277	0.265733	0.344413	0.378576	0.408944	
4 a 5 meses		0.243935	0.277821	0.349184	0.395426	0.374987	
5 a 6 meses	0.331242	0.278862	0.295924	0.346871	0.375553	0.367178	
6 a 7 meses		0.24833	0.286192	0.341172	0.373539	0.363981	
7 a 8 meses		0.243349	0.285417	0.344995	0.386253	0.359615	
8 a 9 meses	0.283435	0.257237	0.290207	0.353171	0.40277	0.369906	0.321712
9 a 10 meses		0.251733	0.291228	0.348854	0.386123	0.373847	0.355877
10 a 11 meses		0.238294	0.299309	0.357476	0.392716	0.394101	0.348594
11 a 12 meses		0.230363	0.299377	0.342309	0.373793	0.386422	0.330982

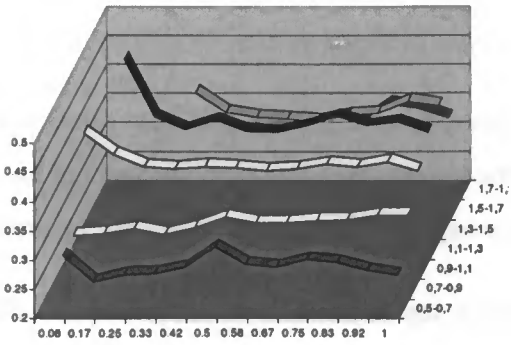
Importa ainda chamar a atenção para o facto de ser surpreendente que, com o mero uso de algo tão rudimentar como a média simples entre várias volatilidades implícitas (ocorridas em cotações de dias diferentes ao longo de dois anos aproximadamente), se consiga obter valores tão “coerentes” como os constantes do quadro 33. As volatilidades implícitas para os diferentes vencimentos e com *moneyness* entre 0.9 e 1.1 oscilam entre 26% e 29%; já as com *moneyness* entre 1.1 e 1.3 e entre 1.3 e 1.5 são quase sempre da ordem dos 34% a 36% e dos 37% a 40%, respectivamente.

⁹¹ “(...) neither class of models [jump diffusion and stochastic volatility models] constitute an adequate explanation of the empirical evidence (...)”. Das e Sundaram (1999).

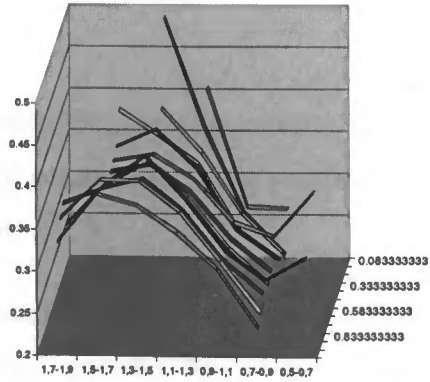
Figura 34: Volatilidade implícita média em opções com diferentes graus de *moneyness* e tempos de vida. – mercado europeu

(a), (b) e (c) são diferentes perspectivas da mesma realidade.

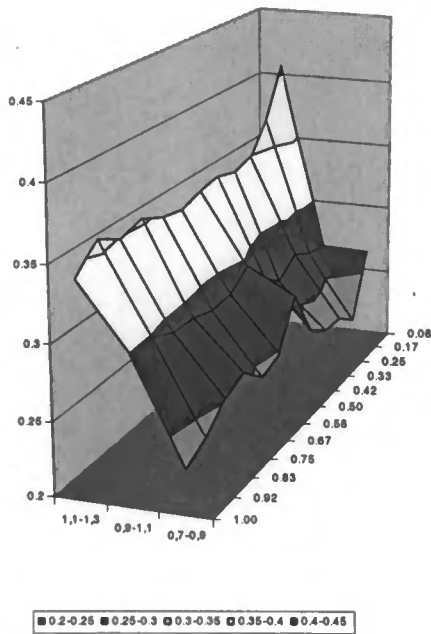
(a)



(b)



(c)



8.2 Conclusões

Através de uma breve análise dos “sorrisos” dos mercados europeu e norte-americano foi possível concluir, desde logo, que os padrões de volatilidade implícita reais são bastante mais complexos que os possíveis de explicar por um qualquer modelo de volatilidade estocástica (entre os quais se inclui o modelo do capítulo 3), apontando para uma eventual má especificação que poderá, inclusive, estar relacionada com a “aleatoriedade” da correlação identificada no capítulo anterior.

Por outro lado, concluiu-se não ser possível identificar, pelo menos através de cotações das *call* em análise, qualquer sintoma de correlação negativa, já que os padrões são mesmo algo simétricos face ao que se poderia esperar de um $\rho < 0$.

Parece poder, assim, concluir-se que o breve estudo empírico realizado nos últimos capítulos suscitou novas questões, que, certamente, não poderão deixar de ser apontadas para investigação futura.

9 Breves Considerações para Investigação Futura

A reduzida bibliografia existente sobre a correlação entre rendibilidade e volatilidade e os muitos caminhos ainda por explorar na área da valorização de opções levam a que sejam várias as possibilidades de investigação futura.

As análises realizadas nesta dissertação e os resultados nela obtidos ajudam, no entanto, a indicar algumas direcções mais específicas.

Da análise feita na primeira parte e dos resultados obtidos, quer por simulação, quer em termos empíricos, surgem questões que não podem deixar de ser colocadas:

1. Será que a correlação entre rendibilidade e volatilidade é constante?
2. Qual a estrutura dessa correlação?
3. Quais as razões que poderão explicar que exista uma correlação entre rendibilidade e volatilidade maior no mercados accionista norte-americano que no europeu?
4. Será que essa correlação é negativa e significativamente diferente de zero também noutros mercados?
5. Como se poderá estimar, a partir de séries de dados reais e, portanto, discretas, o parâmetro ρ a introduzir num modelo (contínuo) de volatilidade estocástica?
6. O facto de a correlação existente, em períodos longos, aparentar ser negativa implicará que a correlação instantânea ρ também o seja?
7. Tendo em conta o impacto que uma correlação ρ , constante, tem na valorização de opções, poder-se-á dizer que os modelos de volatilidade estocástica que consideram $\rho \neq 0$ são melhores, em termos da capacidade de previsão dos preços reais, que aqueles que consideram $\rho = 0$?
8. Qual será o comportamento de modelos que considerem a correlação como um processo estocástico?

9. Admitindo que a correlação tem um comportamento estocástico, qual o processo adequado para o descrever?
10. Em que medida outros factores, nomeadamente custos de transacção e problemas de liquidez, poderão ajudar a explicar os “sorrisos” existentes nos mercados de opções?

Com base em séries de dados mais longas (que permitam cobrir um maior espectro temporal) e, porventura, até de maior frequência (nomeadamente através da recolha de informação *intra-day*), seria interessante analisar as propriedades da correlação, que aparenta não ser constante, podendo essa análise fazer uso de modelos do tipo ARCH. “Inspiração” para uma análise deste tipo poderia ser conseguida através dos estudos de Karolyi e Sultz (1996), Longin e Solnik (1998), Ramachand e Susmel (1998) ou Kroner e Ng (1998), que têm procurado aplicar este tipo de métodos à correlação existente entre os mercados accionistas internacionais. A aplicação dos modelos que fosse possível obter a diferentes praças mundiais permitiria avaliar da globalização do fenómeno e, tendo em conta as especificidade de cada mercado, talvez explicar as diferenças no grau da correlação, que parecem existir de praça para praça.

Outras vertentes de investigação que resultam do presente trabalho, são a da análise da ligação entre a realidade discreta e os modelos em tempo contínuo e a do desenvolvimento de métodos que permitam estimar o parâmetro ρ a introduzir em modelos de volatilidade estocástica do tipo do do capítulo 3⁹². Uma abordagem possível na estimação seria a adaptação a esse tipo de modelos dos métodos existentes de estimação por simulação. A respeito dos métodos de estimação para este tipo de modelos indicam-se os estudos de Kim, Shepard e Chib (1998), Jacquier, Polson e Rossi (1984), Fridman e Harris (1998) e Danielson (1994).

Na área da modelização o desenvolvimento que decorre natural, dos resultados obtidos nesta dissertação, é o da extensão dos modelos de volatilidade estocástica ao caso em que a própria correlação ρ segue um processo estocástico. A escolha desse processo estocástico, a determinação do processo risco neutral a ele associado e a obtenção de resultados nesse

⁹² As dificuldades de estimação dos parâmetros, dos modelos de volatilidade estocástica, continuam a ser um dos principais entraves à sua utilização em estudos empíricos: “(...) despite their intuitive appeal, stochastic volatility models have been used less frequently than ARCH models in empirical applications. This is due to the difficulties associated with the estimation of stochastic volatility models” Sundaram e Koopman (1998).

ambiente poderia ajudar a esclarecer o verdadeiro papel que a correlação tem na explicação dos “enviesamentos” do modelo de Black-Scholes.

Finalmente, e independentemente dos estudos sobre a correlação entre rendibilidade e volatilidade, ou das extensões nos modelos existentes para que possam incorporar o verdadeiro comportamento dessa correlação, seria, sem dúvida, interessante que fossem desenvolvidos estudos semelhantes ao desta dissertação para outras variáveis frequentemente apontadas como possivelmente causadoras dos “sorrisos” nos mercados accionistas. São exemplo de variáveis de interesse os custos de transacção e os problemas de liquidez dos mercados, indicadas, aliás num estudo recente de Pena, Rubio e Serna (1999), como variáveis importantes para explicar os “sorrisos” no mercado accionista espanhol⁹³.

⁹³ *“Transaction costs, proxied by the bid-ask spread, seem to be a key determinant of the curvature of the volatility smile. Moreover, time to expiration, the uncertainty associated with the market and the relative market momentum are also important variables in explaining the smile”*. Pena, Rubio e Serna (1999).

10 Conclusões

O modelo de Black-Scholes (1973), que é e será sempre uma referência na área da valorização de opções, parte do pressuposto de que a volatilidade dos activos subjacentes a opções é constante.

Este pressuposto, ainda que atraente, por levar a uma fórmula elegante e extremamente maleável de valorização, cedo foi posto em causa, quer por estudos empíricos que provavam a existência de várias volatilidades implícitas em opções sobre um mesmo subjacente – os estudos sobre a forma e a estrutura temporal dos “sorrisos” –, quer por estudos mais teóricos que modelizavam a volatilidade com base em modelos do tipo ARCH ou com base em processos contínuos, fossem eles determinísticos ou estocásticos.

Hoje em dia já não se discute a “estocasticidade” da volatilidade, mas mesmo os mais sofisticados modelos de volatilidade estocástica parecem errar de forma sistemática a valorização de opções que incidem sobre subjacentes de mercados accionistas. Uma das causas apontadas como possivelmente explicativa desses erros é a existência de uma eventual correlação entre a rendibilidade e a volatilidade nos activos desses mercados. Esta dissertação procura ser um contributo para o estudo dessa correlação, através do desenvolvimento de ideias sobre o efeito que uma correlação constante entre rendibilidade e volatilidade do activo subjacente tem na distribuição do preço dos activos financeiros e, conseqüentemente, na valorização das opções que sobre eles incidam – contrárias às defendidas nalguns dos estudos anteriormente realizados. Defende-se que numa situação de correlação negativa entre a rendibilidade e a volatilidade o prémio das opções deveria ser inferior ao que resulta do modelo de Black-Scholes para as *call* e superior para as *put*. A base para tal reside no facto de acréscimos significativos do valor do subjacente serem, nestas circunstâncias, menos prováveis, já que as subidas de preço são acompanhadas por uma menor volatilidade e as diminuições acentuadas mais prováveis, por a volatilidade aumentar com a queda do preço. Assim, para as opções *call* os *payoffs* esperados devem ser menores e a probabilidade de não exercício maior do que a prevista por Black e Scholes.

O estudo, por simulação, das superfícies de volatilidades implícitas num modelo de volatilidade estocástica, que se apresenta e que considera a correlação entre a rendibilidade e a volatilidade como constante, dá credibilidade às ideias aqui defendidas e permite

caracterizar “sorrisos”. Os “sorrisos” simulados apresentam, nos casos de correlação negativa, volatilidades implícitas que decrescem com os aumentos do nível de *moneyness* e que, quando a correlação é positiva, pelo contrário, crescem. Verifica-se ainda que os “sorrisos” simulados se acentuam para as opções com vencimento mais próximo.

Procurou-se, ainda, confirmar empiricamente a existência de uma correlação entre a rendibilidade e a volatilidade. O estudo, para os índices Eurostoxx50 e Standard&Poors500, da sua estrutura constitui a segunda vertente desta dissertação. A esse respeito foi possível concluir que tal correlação aparenta existir de facto, é negativa, mas, eventualmente, não constante, podendo mesmo, o seu comportamento, ser associado ao de um processo estocástico. A instabilidade da correlação, que se verificou particularmente evidente para períodos de tempo reduzido, alerta para uma provável má especificação dos modelos de volatilidade estocástica.

Os padrões de volatilidade implícita explicáveis por uma correlação negativa e constante entre rendibilidade e volatilidade obtidos por simulação não são, aliás, semelhantes aos “enviesamentos” verificados empiricamente para os casos dos mercados europeu e norte-americano, apontando, novamente, ou para uma má especificação do modelo (eventualmente, pela não constância da correlação), ou para a necessidade de consideração de outros factores importantes como os custos de transacção ou os problemas de liquidez.

Os passos seguintes da investigação que serviu de suporte a esta dissertação parecem ser, por um lado, a incorporação da “estocasticidade” da correlação em modelos de volatilidade estocástica e o desenvolvimento de técnicas mais sofisticadas de estimação da correlação instantânea a introduzir nesses modelos, e, por outro, um estudo mais pormenorizado da própria correlação.

As notas que aqui se deixam a esse respeito são os “desafios” para futuras investigações.

Anexos

Anexo 1 – Conceitos

Propriedades da Distribuição Normal e Lognormal

A função densidade de probabilidade de uma distribuição normal de média μ e variância σ^2 é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Ao caso particular em que a média é considerada nula e em que a variância é 1, chama-se a normal padrão, cujas funções de densidade, de probabilidade e de distribuição são as abaixo descritas:

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

A1.1

A soma de variáveis normais independentes, $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ é ainda uma distribuição normal, sendo a sua média $E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$ e a sua variância $\text{var}(Y) = \text{var}(X_1) + \text{var}(X_2) + \dots + \text{var}(X_n)$.

Se x segue uma distribuição normal com média μ_x e variância σ_x^2 , então $z = e^x$ tem uma distribuição lognormal descrita pela função densidade de probabilidade:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z}} \exp\left(-\frac{(\ln z - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

A1.2

A média “truncada” de z , que se define como $E(z; z > a)$, é muito utilizada em modelos de valorização de opções e é descrita como:

$$\begin{aligned}
 E(z; z > a) &= \int_a^{+\infty} z g(z) dz = \int_{\ln a}^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) dx \\
 &\quad z = e^x \\
 &= \int_{\ln a}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{[x - (\mu_x + \sigma_x^2)]^2 + 2\mu_x\sigma_x^2 + \sigma_x^4}{2\sigma_x^2}\right) dx \\
 &= \exp\left(\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}\right) \int_{\ln a}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_x} n\left(\frac{x - \mu_x + \sigma_x^2}{\sigma_x}\right) dx \\
 &= \exp\left(\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}\right) N\left(\frac{\mu_x - \ln a}{\sigma_x} + \sigma_x\right)
 \end{aligned}$$

A1.3

Quando $a \rightarrow 0$, a média “truncada” tende para a média habitual. A média da distribuição lognormal é assim:

$$\mu_z = \exp\left(\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}\right).$$

A1.4

A variância de z também pode ser deduzida vindo:

$$\begin{aligned}
 \sigma_z^2 &= \int_a^{+\infty} z^2 g(z) dz = \int_{\ln a}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{[x - (\mu_x + 2\sigma_x^2)]^2 - 4\mu_x\sigma_x^2 - 4\sigma_x^4}{2\sigma_x^2}\right) dx - \mu_z^2 \\
 &\quad z = e^x \\
 &= \exp(2\mu_x + 2\sigma_x^2) - \exp(2\mu_x + \sigma_x^2) = \exp(2\mu_x + \sigma_x^2) [\exp(\sigma_x^2) - 1]
 \end{aligned}$$

A1.5

O Passeio Aleatório e o Movimento Browniano

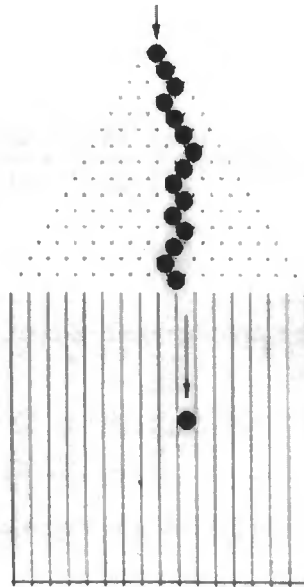
O movimento Browniano é a passagem ao limite do passeio aleatório em termos discretos.

Consideremos o caso de uma partícula que parte da origem no eixo dos xx e que, em cada momento do tempo, pode assumir os valores ϖ e $-\varpi$ consoante se movimenta ou para a direita, ou para a esquerda, respectivamente. Consideremos, ainda, que as probabilidades de movimentos para a direita ou para a esquerda são estacionárias (ou seja, constantes ao longo do tempo) e podem ser descritas por $\Pr(x_i = \varpi) = p$, $\Pr(x_i = -\varpi) = q$, $p + q = 1$ sendo p e q independentes de i . Os movimentos individuais são independentes uns dos outros pelo que

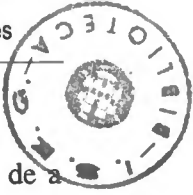
as variáveis aleatórias x_i também o são.

O passeio aleatório discreto é um processo de Markov discreto. Se definirmos a variável aleatória $X_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ que nos dá a posição da partícula no momento n , temos que o valor esperado de x_i é $E(x_i) = \varpi p - \varpi q = (p - q)\varpi$, $i = 1, 2, \dots, n$ e o de X_n vem ϖ . A variância de x_i é $\text{var}(x_i) = [\varpi^2 p + (-\varpi)^2 q] - [E(x_i)]^2 = \varpi^2 - (p - q)^2 \varpi^2 = 4pq\varpi^2$, pelo que $\text{var}(X_n) = 4pq\varpi^2 n$.

Figura A1.1: Passeio Aleatório.



Ao passar ao limite, considerando “movimentos” infinitesimais, o passeio aleatório discreto é o movimento Browniano. A descoberta deste movimento deve-se a R. Brown que, em 1827, observou que o comportamento de partículas quando imersas num líquido ou gás era algo irregular. O fenómeno pode ser explicado pelas eternas colisões das partículas com as moléculas do meio envolvente. Quando existem l colisões por unidade de tempo, a posição média da partícula μ vem dada por $(p - q)\varpi l$ e a variância em torno da posição média por unidade de tempo, σ^2 é $4pq\varpi^2 l$.



Sendo $\Delta t = \frac{1}{l}$, o intervalo de tempo entre duas colisões, e $u(x, t)$ a probabilidade de a partícula assumir o valor x no tempo t , podemos escrever $X_n = x$, $n\Delta t = t$ e $u(x, t) = \Pr(X_n = x)$ quando $t = n\Delta t$. A função probabilidade satisfaz a fórmula recorrente

$$u(x, t + \Delta t) = pu(x - \varpi, t) + qu(x + \varpi, t) \quad \text{A1.6}$$

Se fizermos um desenvolvimento em fórmula de Taylor da equação A1.6 obtemos

$$\begin{aligned} u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + O(\Delta t^2) &= p \left[u(x, t) - \varpi \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\varpi^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O(\varpi^3) \right] + \\ &+ q \left[u(x, t) + \varpi \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\varpi^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O(\varpi^3) \right] \end{aligned} \quad \text{A1.7}$$

Após simplificações fica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[(q - p) \frac{\varpi}{\Delta t} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varpi^2}{\Delta t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t) + O\left((q - p) \frac{\varpi^3}{\Delta t} \right). \quad \text{A1.8}$$

O movimento médio e a variância média, mesmo nos casos limites $\varpi, \Delta t \rightarrow 0$ são dadas pelas expressões $\mu = \frac{\varpi}{\Delta t} (p - q)$ e $\sigma^2 = 4pq \frac{\varpi^2}{\Delta t}$, respectivamente⁹⁴.

O desenvolvimento, em termos assintóticos, das expansões de p e q até $O(\varpi)$ são da forma $p \approx \frac{1}{2}(1 + k\varpi)$ e $q \approx \frac{1}{2}(1 - k\varpi)$ para um dado k .

Então $4pq \approx 1$ e, por isso, temos que $\lim_{\varpi, \Delta t \rightarrow 0} \frac{\varpi^2}{\Delta t} = \sigma^2$. Por fim, através deste limite e da condição $(p - q) \frac{\varpi}{\Delta t} = \mu$ sabemos que $p - q \approx \frac{\mu}{\sigma^2} \varpi$ e assim $k = \frac{\mu}{\sigma^2}$. Em termos assintóticos p e q são

$$p \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma^2} \varpi \right) \quad \text{e} \quad q \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\sigma^2} \varpi \right) \quad \text{A1.9}$$

⁹⁴ Na teoria assintótica resulta que p e q não são quantidades infinitesimais, sendo $p = O(1)$ e $q = O(1)$.

Assim, deduz-se de $4pq \frac{\varpi^2}{\Delta t}$ que $\frac{\varpi^2}{\Delta t} = O(1)$ e $\frac{\varpi}{\Delta t} = O\left(\frac{1}{\varpi}\right)$.

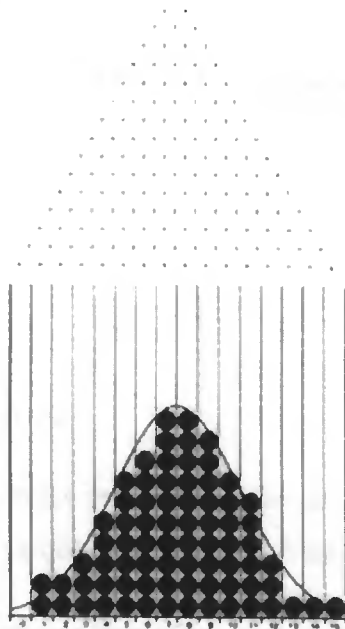
Uma vez que $\frac{\varpi^3}{\Delta t} = O(1)$, o último termo da equação A1.18 é $O\left((q-p)\frac{\varpi^3}{\Delta t}\right) = O(\Delta t)$.

Assim, quando $\varpi, \Delta t \rightarrow 0$ para a função densidade de probabilidade $u(x,t)$ de um movimento Browniano com *drift* (conhecida como *forward Kolmogorov equation*):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{A1.10}$$

Com um *drift* μ e uma difusão de σ^2 , no momento t , o movimento esperado é μt e a variabilidade em torno da média (variância) $\sigma^2 t$. Veja-se que $p \rightarrow \frac{1}{2}$ e $q \rightarrow \frac{1}{2}$ no limite assintótico $\varpi \rightarrow 0$; de outro modo, ter-se-ia um *drift* infinito.

Figura A1.2 : Distribuição Normal.



Facilmente se verifica que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória normal x com média μt e variância $\sigma^2 t$ satisfaz a equação *forward de Kolmogorov*, o que ilustra bem a relação existente entre a distribuição normal e um movimento Browniano com *drift*⁹⁵.

⁹⁵ De facto, $f(x,t)$ é a solução fundamental para $\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, quando $-\infty < x < +\infty, t > 0$ com a condição inicial $u(x,0^+) = \zeta(x)$, onde $u(x,0^+)$ significa $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x,t)$. Aqui $\zeta(x)$ representa a função de *Dirac*.

Movimento Browniano com drift

O movimento Browniano com *drift* é um processo estocástico $\{X(t); t \geq 0\}$ com as seguintes propriedades:

- (i) os incrementos $X(t+s) - X(s)$ são normalmente distribuídos com média μt e variância $\sigma^2 t$; μ e σ são constantes.
- (ii) Para todo o $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, os incrementos $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição dada em (i).
- (iii) $X(0) = 0$ e os percursos amostrais de $X(t)$ são contínuos.

No caso em que se tem $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, o movimento Browniano chama-se movimento Browniano padrão, sendo a correspondente função de distribuição:

$$\Pr(W(t)|W(t_0)) = \Pr(W(t) - W(t_0) \leq w - w_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{w-w_0} \exp\left(-\frac{s^2}{2(t-t_0)}\right) ds$$

A1. 11

sendo $\{Z(t) : t \geq 0\}$ um processo Browniano padrão.

O Movimento Browniano Geométrico

A famosa fórmula de Black-Scholes para valorização de opções, considera que o processo seguido pelo activo subjacente (acções, índices, etc.) é um processo Browniano geométrico .

Se considerarmos $X(t)$ o movimento Browniano com *drift* $\mu \geq 0$ e variância σ^2 , chama-se movimento Browniano Geométrico ao processo estocástico definido como

$$Y(t) = e^{X(t)}, \quad t \geq 0.$$

A1. 12

Da expressão acima descrita resulta evidente que $Y(t)$ assume sempre valores não-negativos. Dada a equação A1.4 a média de $Y(t)$ pode ser obtida e vem

$$E(Y(t)|Y(0) = y_0) = y_0 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right),$$

A1. 13

de igual modo, da equação A1.5 resulta que a variância de $Y(t)$ vem dada por

$$\text{var}(Y(t)|Y(0) = y_0) = y_0^2 \exp(2\mu t + \sigma^2 t) [\exp(\sigma^2 t) - 1].$$

A1. 14

$Y(t)$ tem uma distribuição lognormal de média e variância dadas pelas equações A1.23 e A1.24 respectivamente. A função densidade de probabilidade de $Y(t)$ vem dada por

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma y}} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right), \quad y > 0.$$

A1. 15

Verifica-se, ainda, que para todos os $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, os rácios sucessivos $Y(t_2)/Y(t_1), \dots, Y(t_n)/Y(t_{n-1})$, são variáveis aleatórias independentes; ou, dito de outra forma, as variações percentuais entre períodos não sobrepostos são independentes.

O cálculo estocástico e o lema de Itô

Consideremos $W(t)$ um movimento Browniano padrão sem *drift*, ou seja: $\sigma^2 = 1$ e $\mu = 0$.

$\Delta W(t)$ representa a variação em $W(t)$ num intervalo de tempo Δt .

Da primeira propriedade do movimento Browniano vem que

$$\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t) = \tilde{x} \sqrt{\Delta t}$$

A1. 16

onde \tilde{x} é uma variável aleatória normal padrão. No limite diferencial, $\Delta t \rightarrow 0$, a equação

A1.26 pode ser descrita pela seguinte equação diferencial:

$$dW(t) = \tilde{x}\sqrt{dt} \tag{A1.17}$$

Pode verificar-se que $E(dW) = 0$ e $\text{var}(W) = dt$. São, ainda, relevantes para o famoso lema de Itô as propriedades, em termos de média e de variância de ΔW^2 e de $\Delta t \Delta W$:

$$\begin{aligned} E((\Delta W)^2) &= \text{var}(\Delta W) + [E(\Delta W)]^2 = \Delta t, \\ \text{var}((\Delta W)^2) &= E([W(t + \Delta t) - W(t)]^4) - [E((\Delta W)^2)]^2 = o(\Delta t) \end{aligned} \tag{A1.18}$$

e

$$\begin{aligned} E(\Delta t \Delta W) &= E(\Delta t [W(t + \Delta t) - W(t)]) = 0 \\ \text{var}(\Delta t \Delta W) &= E(\Delta t^2 [W(t + \Delta t) - W(t)]^2) - [E(\Delta t (W(t + \Delta t) - W(t)))]^2 = o(\Delta t) \end{aligned} \tag{A1.19}$$

As formas diferenciais das equações acima descritas, são:

$$\begin{aligned} E((dW)^2) &= dt, & \text{var}((dW)^2) &= o(dt) \\ E(dtdW) &= 0, & \text{var}(dtdW) &= o(dt) \end{aligned} \tag{A1.20}$$

Se considerarmos os termos $o(t)$ como essencialmente nulos, então podemos observar que (dW^2) e $dtdW$ são termos não estocásticos, já que as suas variâncias são essencialmente zero. Assim, $(dW)^2 = dt$ e $dtdW = 0$.

O movimento Browniano com *drift* (processo de Wiener generalizado) pode ser descrito da seguinte forma diferencial:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t) \tag{A1.21}$$

onde μ é o *drift* e σ^2 a taxa de variação do processo. Utilizando os resultados obtidos em na equação A1.30 pode observar-se que $(dX(t))^2 = \sigma^2 dt$, ou seja, embora dX seja uma variável aleatória, $(dX)^2$ não o é.

Lema de Itô

Seja $u(X, t)$ uma função contínua e não aleatória com derivadas parciais contínuas e seja $X(t)$ um processo estocástico definido por

$$dX(t) = a(X, t)dt + b(X, t)dW(t) \tag{A1.22}$$

onde $W(t)$ é o movimento Browniano padrão definido na equação A.17. O processo estocástico seguido por $Y(t) = u(X, t)$ pode representar-se na forma diferencial por⁹⁶:

$$dY(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a(X, t) \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} b(X, t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right) dt + b(X, t) \frac{\partial u}{\partial X} dW(t)$$

A1. 23

Quando estamos perante um movimento Browniano geométrico, $Y(t)$, podemos aplicar o lema de Itô, para deduzir as equações diferenciais que o descrevem, já que temos $Y(t) = \exp(X(t))$ ⁹⁷.

Da aplicação resulta que

$$dY = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) Y dt + \sigma Y dW$$

ou seja,

$$\frac{dY}{Y} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW$$

A1. 24

⁹⁶ Demonstração (intuição):

O lema de Itô pode ser considerado como uma extensão das regras do cálculo diferencial habitual ao cálculo estocástico. Desenvolve-se ΔY em série de Taylor até à segunda ordem:

$$\Delta Y = \frac{\partial u}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \Delta X^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial t} \Delta X \Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 \right) + \text{termos de ordem superior a } \Delta t$$

Note-se que $\Delta X^2 = b(X, t)^2 \tilde{x}^2 \Delta t + \text{termos de ordem superior a } \Delta t$, e, por isso, o termo de ΔX^2 não pode ser ignorado na derivação do diferencial já que é de ordem Δt .

O valor esperado de $\tilde{x}^2 \Delta t$ é Δt e a variância de $\tilde{x}^2 \Delta t$ é $o(\Delta t)$; então, $\tilde{x}^2 \Delta t$ é não estocástico e igual a Δt .

Se tomarmos os limites $\Delta X \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, quer $\Delta X \Delta t$, quer Δt^2 desaparecem no diferencial, ficando

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial X} dX + \frac{1}{2} b(X, t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} dt \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a(X, t) \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} b(X, t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right) dt + b(X, t) \frac{\partial u}{\partial X} dW(t) \end{aligned}$$

⁹⁷ Quando $Y(t) = \exp(X(t))$ e $X(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$ (movimento Browniano padrão), temos

$a(X, t) = \mu$ e $b(X, t) = \sigma$. Neste caso $u(X, t) = e^X$, logo $\frac{\partial u}{\partial X} = e^X$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = e^X$ e $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

$$dY = \left(0 + \mu \exp(X) + \frac{1}{2} \sigma^2 \exp(X) \right) dt + \sigma Y dW$$

Da aplicação directa da fórmula acima vem,

$$= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) Y dt + \sigma Y dW.$$

A Dinâmica do Preço das Acções

O modelo mais aceite para descrever a dinâmica do preço das acções é o famoso movimento Browniano geométrico (em que o logaritmo do preço das acções segue um processo de Wiener típico), que pode ser representado por uma equação diferencial semelhante à apresentada em A1.24:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ,$$

A1.25

em que μ é a rendibilidade esperada e σ é a volatilidade associada aos preços do subjacente. Se definirmos $G = \ln S$, pelo lema de Itô,

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW$$

A1.26

assim, $G = \ln S$ segue um movimento Browniano padrão com *drift* $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ e variância

σ^2 . Alternativamente, é equivalente dizer que $\ln S_T - \ln S_t = \frac{\ln S_T}{\ln S_t}$ tem uma distribuição

normal de média $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)$ e variância $\sigma^2 (T - t)$.

Martingala

Este anexo termina com a definição de martingala. Esta noção e a de não-arbitragem estão intimamente ligadas⁹⁸, daí a sua importância⁹⁹.

Considere-se $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ um processo estocástico que toma valores reais tendo um conjunto discreto de parâmetros. É uma martingala se:

(i) $E(|X_n|) < \infty$;

(ii) $E(X_{n+1} | X_0, \dots, X_n) = X_n$.

⁹⁸ "If the asset price process admits an equivalent martingale probability measure, then there is absence of arbitrage". Harisson and Kreps (1979).

⁹⁹ O objectivo aqui é, apenas, o de dar uma definição intuitiva e não entrar em detalhes quanto à metodologia de valorização de activos e de derivados através desta técnica.

Anexo 2 – Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Estocásticas

O clássico modelo de Black-Scholes constitui um dos raros casos em que é conhecida uma forma explícita para a solução de uma equação diferencial estocástica. Em modelos que procurem ser mais realistas (habitualmente mais complexos), geralmente não existe essa sorte, sendo corrente o uso de aproximações através de métodos numéricos.

O modelo desenvolvido ao longo desta dissertação encontra-se, infelizmente, neste último caso, pelo que, ao longo deste anexo serão apresentados os principais métodos numéricos habitualmente utilizados nas equações diferenciais estocásticas.

Métodos Numéricos

Para uma apresentação genérica dos métodos numéricos será considerado o seguinte processo vectorial genérico (com m activos) apresentado nas equações A2.1 e A2.2 nas suas formas diferencial e integral, respectivamente:

$$dS(t) = a(t, S(t))dt + \sum_{j=1}^n b^j(t, S(t))dW^j(t) \quad \text{A2.1}$$

$$S(t) = S(0) + \int_0^t a(u, S(u))du + \sum_{j=1}^n \int_0^t b^j(u, S(u))dW^j(u) \quad \text{A2.2}$$

Antes de resolver a equação A2.2 numericamente, há que analisar o objectivo da aproximação, nomeadamente saber se se deseja uma aproximação dita “forte” ou se basta uma aproximação do tipo “fraco”. Se se pretende simular o percursos possíveis Y^Δ para S , será necessária uma *aproximação forte*, que convirja para cada instante com uma dada ordem $\gamma > 0$ à medida que a dimensão do passo de discretização do tempo Δ tenda para zero¹⁰⁰.

¹⁰⁰ Ou seja, existem constantes K e $\delta_0 < T$ independentes de Δ que permitem, para qualquer $\Delta \in (0, \delta_0)$, estimar $E\|S_T - Y^\Delta(T)\| \leq K\Delta^\gamma$.

Milstein (1974) foi dos primeiros autores a desenvolver este tipo de aproximações; Platen (1981) e Wagner e Platen (1978) demonstraram resultados que permitem aproximações para qualquer ordem $\gamma > 0$ que se pretenda. Para além destes autores muitos outros têm desenvolvido estudos na área das aproximações fortes a equações diferenciais estocásticas: Clark (1982), Newton (1986), Pardoux e Talay (1985), Rumelin (1982) e Talay (1983).

A aproximação feita, para as simulações do capítulo 4, foi do tipo forte, pois os processos da rendibilidade e volatilidade eram interdependentes, dependendo do percurso realizado em cada simulação.

Uma situação relativamente menos exigente do ponto de vista das aproximações é o caso da determinação do valor de um derivado do tipo $\Phi(S(T))$, em que o que se pretende é avaliar um funcional de um processo estocástico e não o próprio processo. No caso de uma opção *call* europeia, não é necessária a aproximação de percursos, bastando determinar um modelo estocástico que permita obter o valor esperado do $\max(S(t) - X; 0)$. Ou, por outras palavras, apenas se torna necessário aproximar a lei de probabilidade da difusão, e esta aproximação, dita *fraca*, é consideravelmente mais simples do que a aproximação de percursos, convergindo com ordem $\beta > 0$ à medida que $\Delta \rightarrow 0$ ¹⁰¹.

Os métodos de aproximação fraca foram inicialmente desenvolvidos, entre outros, por Milstein (1978, 1988), Pardoux e Talay (1985), Platen (1984) e Talay (1984).

Aproximações Fortes

Considere-se a seguinte repartição equidistante do tempo:

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N = T$$

no intervalo $[0, T]$ com a dimensão do passo $\Delta = T/N$, e $N = 1, 2, \dots$

¹⁰¹ Diz-se que uma aproximação Y^Δ converge fracamente com $\beta > 0$ à medida que $\Delta \rightarrow 0$ se existirem constantes $K > 0$ e $\delta_0 < T$ para qualquer função $\Phi : R^{m+1} \rightarrow R$ de uma dada classe C_p de funções teste de forma a que para qualquer $\Delta \in (0, \delta_0)$ se tenha $|E[\Phi(S(T))] - E[\Phi(Y_N^\Delta)]| \leq K\Delta^\beta$.

A generalização estocástica da heurística de Euler é o exemplo mais simples de aproximação forte:

$$Y_{k+1}^\Delta = Y_k^\Delta + a(\tau_k, Y_k^\Delta)\Delta + \sum_{j=1}^n b^j(\tau_k, Y_k^\Delta)\Delta W_k^j$$

$$Y_0^\Delta = S(0) \quad \Delta W_k^j = W^j(\tau_{k+a}) - W^j(\tau_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

A2.3

Os ΔW_k^j são, pois, variáveis aleatórias normais com média 0 e variância Δ .

Para a aplicação do método de Euler aos processos estocásticos basta pois, pelos métodos tradicionais simular números aleatórios com distribuição normal. Este método tem uma ordem forte $\gamma = 0.5$, o que muitas vezes é demasiado baixo para efeitos de investigação. Apesar disso, com base neste método é possível usar os desenvolvimentos em série de Taylor para processos estocásticos e obter aproximações bastante melhores utilizando, nomeadamente, uma aproximação em séries de Taylor até à segunda ordem:

$$Y_{k+1}^\Delta = Y_k^\Delta + a(\tau_k, Y_k^\Delta)\Delta + \sum_{j=1}^n b^j(\tau_k, Y_k^\Delta)\Delta W_k^j + \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \sum_{i=0}^m b^{i, j_1}(\tau_k, Y_k^\Delta) \frac{\partial b^{j_2}}{\partial S^i}(\tau_k, Y_k^\Delta) I_{(j_1, j_2)}$$

com

$$I_{(j_1, j_2)} := \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} dW^{j_1}(u_1) dW^{j_2}(u_2)$$

A2.4

Este método, supondo algumas condições de regularidade quanto a a e b , converge com $\gamma = 1.0$. O único problema por resolver no método da equação .4 é o duplo integral para $j_1 \neq j_2$. Kloeden, Platen e Wright (1991) sugerem como aproximações:

Para o caso de $j_1 = j_2$,

$$I_{(j_1, j_2)} = \frac{1}{2} \left((\Delta W_k^{j_1})^2 - \Delta \right)$$

A2.5

quando $j_1 \neq j_2$,

$$I^P_{(j_1, j_2)} = \left(\frac{1}{2} \xi_{j_1} \xi_{j_2} + \sqrt{\rho} (\varepsilon_{j_1, p} \xi_{j_2} - \varepsilon_{j_2} \xi_{j_1}) \right) \Delta + \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r} \left(\zeta_{j_1, r} (\sqrt{2} \xi_{j_2} + \eta_{j_2, r}) - \zeta_{j_2, r} (\sqrt{2} \xi_{j_1} + \eta_{j_1, r}) \right)$$

A2.6

com,

$$\rho_P = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^P \frac{1}{r^2}$$

sendo, $\varepsilon_{j,p}$, $\eta_{j,r}$ e $\zeta_{j,r}$ têm que se obter de forma a que $\xi_j = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \Delta W_k^j$ e $\varepsilon_{j,p}$, $\eta_{j,r}$ e $\zeta_{j,r}$ são variáveis aleatórias independentes e $N(0,1)$ para $j=1, \dots, n$. Para um $\gamma=1.0$, $P = P(\Delta) \geq \frac{K'}{\Delta}$ para uma constante K' .

Outro método alternativo, também com $\gamma=1.0$, mas com uma implementação mais simples, porque evita o cálculo das derivadas de b , é:

$$Y_{k+1}^\Delta = Y_k^\Delta + a(\tau_k, Y_k^\Delta)\Delta + \sum_{j=1}^n b^j(\tau_k, Y_k^\Delta)\Delta W_k^j + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j_1, j_2=1}^n (b^{j_2}(\tau_k, \bar{Y}_k^{j_1}) - b^{j_2}(\tau_k, Y_k^\Delta)) \varepsilon_{(j_1, j_2)} \quad \text{A2.7}$$

com os seguintes pontos de suporte

$$\bar{Y}_k^j = Y_k^\Delta + a(\tau_k, Y_k^\Delta)\Delta + b^j(\tau_k, Y_k^\Delta)\sqrt{\Delta}. \quad \text{A2.8}$$

Para a aproximação dos integrais estocásticos I utilizam-se as aproximações acima descritas.

Aproximações Fracas

O método de Euler da equação A2.3 converge com uma ordem fraca $\beta=1.0$, mesmo se na expressão se substituir ΔW_k^j por uma variável aleatória muito mais simples, nomeadamente uma variável binária, $\Delta \hat{W}_k^j$, que pode assumir os valores $+\sqrt{\Delta}$ ou $-\sqrt{\Delta}$ com:

$$P[\Delta \hat{W}_k^j = \pm\sqrt{\Delta}] = \frac{1}{2} \quad \text{A2.9}$$

Para uma aproximação fraca de ordem superior pode, mais uma vez, considerar-se uma expansão em série de Taylor de ordem superior:

$$\begin{aligned}
 Y_{k+1}^\Delta &= Y_k^\Delta + a(\tau_k, Y_k^\Delta)\Delta + \frac{1}{2}L^0 a(\tau_k, Y_k^\Delta)\Delta^2 + \\
 &+ \sum_{j=1}^n (b^j(\tau_k, Y_k^\Delta)\Delta W_k^j + L^0 b^j(\tau_k, Y_k^\Delta)I_{(j_1, j_2)} + L^j a(\tau_k, Y_k^\Delta)I_{(j, 0)}) + \\
 &+ \sum_{j_1, j_2=1}^n L^{j_1} b^{j_2}(\tau_k, Y_k^\Delta)I_{(j_1, j_2)}
 \end{aligned}$$

A2. 10

com

$$L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=0}^m a^i \frac{\partial}{\partial S^i} + \frac{1}{2} \sum_{i,l=0}^m \sum_{j=1}^n b^{i,j} b^{l,j} \frac{\partial^2}{\partial S^i \partial S^l} \quad \text{e} \quad L^j = \sum_{l=0}^m b^{l,j} \frac{\partial}{\partial S^l} \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

A2. 11

e

$$I_{(j_1, j_2)} = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} dW_{u_1}^{j_1} dW_{u_2}^{j_2}, \quad j_1, j_2 = 1, \dots, n; \quad \text{utilizando a notação } dW_u^0 \text{ para } du.$$

A2. 12

Este método é devido a Milstein (1978) e Talay (1984). Converte com $\beta = 2.0$, mantendo-se este grau de convergência mesmo que algumas das expressões mais complicadas sejam substituídas por simplificações. Por exemplo poderá utilizar-se $\Delta \hat{W}_k^j$, em substituição de ΔW_k^j , sendo $\Delta \hat{W}_k^j$ uma variável aleatória que pode tomar três valores possíveis com as seguintes probabilidades:

$$P[\Delta \hat{W}_k^j = \pm \sqrt{3}\Delta] = \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad P[\Delta \hat{W}_k^j = 0] = \frac{2}{3}$$

A2. 13

Os integrais estocásticos múltiplos podem também, ser substituídos por:

$$\hat{I}_{(j, 0)} = \hat{I}_{(0, j)} = \frac{1}{2} \Delta \Delta \hat{W}_k^j$$

A2. 14

e

$$\hat{I}_{(j_1, j_2)} = \frac{1}{2} (\Delta W_k^{j_1} \Delta W_k^{j_2} + V_{j_1, j_2}) \quad j_1, j_2 = 1, \dots, n$$

A2. 15

onde V_{j_1, j_2} é uma variável binomial com

$$P[V_{j_1, j_2} = \pm \Delta] = \frac{1}{2} \quad \text{para } j_2 = 1, \dots, j_1 - 1$$

$$V_{j_1, j_1} = -\Delta$$

$$V_{j_1, j_2} = -V_{j_2, j_1} \quad \text{para } j_2 = j_1 + 1, \dots, n$$

A2. 16

e todas as variáveis aleatórias são independentes tendo, variáveis aleatórias simplificadas, $\Delta\hat{W}_k^j$ e \hat{I} , que possuir apenas alguns dos momentos de ΔW_k^j e I^{102} .

Infelizmente, na prática, a implementação de uma esquema do tipo da equação A2.10 torna-se complicado dada a quantidade derivadas parciais envolvidas. Platen (1984) propôs um modelo alternativo que não faz uso das derivadas parciais e é, ainda assim, de ordem fraca equivalente $\beta = 2.0$:

$$\begin{aligned}
 Y_{k+1}^\Delta = Y_k^\Delta + \frac{1}{2}(a(\bar{Y}) + a(Y_k^\Delta))\Delta + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n & \left[(b^j(\bar{R}_+^j) + b^j(\bar{R}_-^j) + 2b^j(Y_k^\Delta))\Delta\hat{W}_k^j + \right. \\
 & \left. + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n (b^j(\bar{U}_+^r) + b^j(\bar{U}_-^r) - 2b^j(Y_k^\Delta))\Delta\hat{W}_k^j\Delta^{-1/2} \right] + \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \left[(b^j(\bar{R}_+^j) - b^j(\bar{R}_-^j))((\Delta\hat{W}_k^j)^2 - \Delta) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n (b^j(\bar{U}_+^r) - b^j(\bar{U}_-^r))(\Delta\hat{W}_k^j\Delta\hat{W}_k^r + V_{r,j}) \right] \Delta^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{A2.17}$$

com os seguintes pontos de suporte

$$\begin{aligned}
 \bar{Y} &= Y_k^\Delta + a(Y_k^\Delta)\Delta + \sum_{j=1}^n b^j(Y_k^\Delta)\Delta\hat{W}_k^j \\
 \bar{R}_\pm^j &= Y_k^\Delta + a(Y_k^\Delta)\Delta \pm b^j(Y_k^\Delta)\sqrt{\Delta} \\
 \bar{U}_\pm^j &= Y_k^\Delta \pm b^j(Y_k^\Delta)\sqrt{\Delta},
 \end{aligned} \tag{A2.18}$$

sendo as variáveis aleatórias $\Delta\hat{W}_k^j$ e $V_{r,j}$ as definidas nas equações A2.13 a A2.16.

A equação A2.17 representa a versão autónoma do processo de difusão apresentado nas A2.1 e A2.2, mas pode ser facilmente convertido num esquema não autónomo, se se interpretar uma das componentes de difusão como o tempo t^{103} .

¹⁰² A ordem até à qual os momentos têm que ser iguais depende de $\beta = 2.0$.

¹⁰³ Para outros métodos de Taylor de convergência fraca e esquemas alternativos de Runge-Kutta, que não fazem uso de derivadas parciais, indica-se Kloeden e Platen (1991).

Técnica de Redução de Variância

É bastante habitual que se verifiquem grandes variâncias para a variável aleatória $\Phi(S(T))$ e conseqüentemente, para a variável aleatória de aproximação $\Phi(Y_N^\Delta)$, quando se utilizam os métodos apresentados nas equações A2.10 e A2.17 para simular funcionais do tipo $E[\Phi(S(T))]$ necessários ao cálculo do valor de uma opção. Nestas circunstâncias seria necessária uma grande quantidade de tempo computacional para a obtenção de resultados fiáveis.

Milstein (1988), através de uma transformação de medida (passando a considerar um processo estocástico alternativo, \tilde{S}), produz um funcional com o mesmo valor esperado que $\Phi(S(T))$, mas com muito menor variância, pelo que se mostra mais eficiente a simulação deste processo transformado e a sua utilização para a obtenção de $E[\Phi(S(T))]$.

De forma mais rigorosa, consideremos $(S_u^{t,s})_{t \leq u \leq T}$ o processo estocástico descrito pelas equações A2.1 e A2.2 que se inicia com $s \in R^{m+1}$ com $t \in [0, T]$. O nosso objectivo é aproximar o funcional:

$$F(t, s) = E[\Phi(S_T^{t,s})] \quad \text{A2. 19}$$

para um dado $\Phi : R^{m+1} \rightarrow R$ e $t = 0$. Se F for uma função suficientemente bem comportada, então é solução da equação *backward* de Kolmogorov:

$$L^0 F(t, s) = 0 \quad \text{A2. 20}$$

para $(t, s) \in (0, T) \times R^{m+1}$, com $F(T, y) = \Phi(y)$ para qualquer $y \in R^{m+1}$ e sendo a definição de L^0 a da equação A2.11.

Considere-se ainda a seguinte transformação de S :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(t) = S(0) + \int \left(a(u, \tilde{S}(u)) du - \sum_{j=1}^n b^j(u, \tilde{S}(u)) h^j(u, \tilde{S}(u)) du + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n \int b^j(u, \tilde{S}(u)) dW^j(u) \right) \end{aligned}$$

A2. 21

com o processo de correcção:

$$\Theta_t = 1 + \sum_{j=1}^n \int_0^t \Theta_u h^j(u, \tilde{S}(u)) dW_u^j$$

A2. 22

onde $h^j : [0, T] \times R^{m+1} \rightarrow R$ ($j = 1, \dots, n$) são funções suficientemente regulares. Utilizando as propriedades das transformações de Girsanov, independentemente das funções h^j escolhidas, obtém-se:

$$E[\Phi(S(T))] = E[\Phi(\tilde{S}(T))\Theta_T]$$

A2. 23

A escolha das funções h^j , que permitem, de facto, uma diminuição significativa da variância de $\Phi(\tilde{S}(T)\Theta_T)$ relativamente à de $\Phi(S(T))$, é uma questão de tentativas, mas se fosse possível conhecer F a priori, a escolha ideal seria:

$$h^j(t, s) = -\frac{1}{F(t, s)} \sum_{i=0}^m b^{i,j}(t, s) \frac{\partial F}{\partial S^i}(t, s)$$

A2. 24

o que levaria a que $\Phi(\tilde{S}(T))\Theta_T = F(0, s)$, que tem uma variância nula. De uma forma geral, mesmo não conhecendo F é possível fazer aproximações \tilde{F} e, socorrendo-nos delas utilizar ainda as funções $h^j(t, s)$ propostas pela equação A2.24.

Por fim torna-se necessário simular através de aproximações fracas o processo (\tilde{S}, Θ) para estimar o funcional A2.23.

Anexo 3 – Programas

Macros em Excel para tratamento dos Dados

Associação dos prémios das opções às datas de transacção, preços de exercício e vencimentos:

```

Sub Option()
Dim result_sheet As Worksheet
Dim ws As Worksheet
Dim col, linha, l As Long
Set result_sheet = Worksheets.Add(after:=Worksheets(Worksheets.Count))
result_sheet.Name = "Opt"
linha = 1
nome = 1
For Each ws In Worksheets
  If InStr(1, ws.Name, "Opt", 1) = 0 And ws.Name <> "Manager" Then
    For col = 1 To 256 Step 2
      For l = 3 To 800 'ver em todas as sheets qual e o numero máximo de linhas
        If linha > 65536 Then
          nome = nome + 1
          Set result_sheet = Worksheets.Add(after:=Worksheets(Worksheets.Count))
          result_sheet.Name = "Opt" & nome
          linha = 1
        End If
        If ws.Cells(l, col) <> "" And ws.Cells(l, col + 1) <> "" Then
          result_sheet.Cells(linha, 1) = ws.Cells(l, col)
          result_sheet.Cells(linha, 2) = ws.Cells(l, col + 1)
          result_sheet.Cells(linha, 3) = ws.Cells(1, col)
          linha = linha + 1
        End If
      Next
    Next
  End If
Next
End Sub

```

Associação do valor do activo subjacente às datas de transacção das opções:

```

Sub Underlying()
Dim ws As Worksheet
Dim spot
Dim i, j As Long
For Each ws In Worksheets
  If InStr(1, ws.Name, "spot", 1) <> 0 Then
    Set spot = ws
  End If
Next
For Each ws In Worksheets
  If InStr(1, ws.Name, "Opt", 1) <> 0 Then
    For i = 1 To 4210 'numero maximo de linhas das sheets "Opt"
      For j = 3 To 800 'numero de linhas da sheet "spot"
        If CDate(ws.Cells(i, 1)) = CDate(spot.Cells(j, 1)) Then
          ws.Cells(i, 8) = spot.Cells(j, 2)
        Exit For
      End If
    Next
  Next
End If
Next
End Sub

```

Identificação da data de vencimento associada a cada opção transaccionada:

```

Sub Maturity()
Dim ws As Worksheet
Dim venc
Dim i, j As Long
For Each ws In Worksheets
    If InStr(1, ws.Name, "venc", 1) <> 0 Then
        Set venc = ws
    End If
Next
For Each ws In Worksheets
    If InStr(1, ws.Name, "Opt", 1) <> 0 Then
        For i = 1 To 4210 'numero maximo de linhas das sheets "Opt"
            For j = 3 To 74 'numero de linhas da sheet "venc"
                If CDate(ws.Cells(i, 4)) = CDate(venc.Cells(j, 1)) Then
                    ws.Cells(i, 11) = venc.Cells(j, 2)
                Exit For
            End If
        Next
    Next
End If
Next
End Sub

```

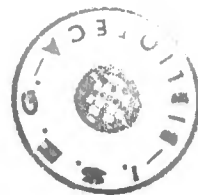
Interpolação das taxas de juro existentes por forma a determinar a taxa a associar aos diversos τ (tempo para o vencimento) existentes:

```

Sub Interest()
Dim ws As Worksheet
Dim col, l_Interest, l As Long
Dim opt As Worksheet
Dim Interest As Worksheet
Dim option As String
Set opt = Worksheets(14)
Set taxa = Worksheets(17)
For l = 1 To 4209 'ver na sheet opt qual e o numero máximo de linhas
    data = opt.Cells(l, 1)
    tau = opt.Cells(l, 12)

    For l_taxa = 5 To 1351 'ver na sheet txj qual e o numero máximo de linhas
        taxa_juro = -1
        If data = taxa.Cells(l_taxa, 1) Then
            If tau <= 7 Then
                taxa_juro = taxa.Cells(l_taxa, 2)
            Exit For
            ElseIf tau >= 360 Then
                taxa_juro = taxa.Cells(l_taxa, 14)
            Exit For
            Else
                For col = 2 To 13
                    If tau > taxa.Cells(4, col) And tau < taxa.Cells(4, col + 1) Then
                        If IsNumeric(taxa.Cells(l_taxa, col)) And IsNumeric(taxa.Cells(l_taxa, col + 1)) Then
                            taxa_juro = ((taxa.Cells(4, col + 1) - tau) * taxa.Cells(l_taxa, col) + (tau - taxa.Cells(4, col)) *
taxa.Cells(l_taxa, col + 1)) / (taxa.Cells(4, col + 1) - taxa.Cells(4, col))
                        Exit For
                    End If
                    ElseIf tau = taxa.Cells(4, col) Then
                        If IsNumeric(taxa.Cells(l_taxa, col)) Then
                            taxa_juro = taxa.Cells(l_taxa, col)
                        End If
                    End If
                Next
            End If
        Next
    End For
Next
End Sub

```



```

Exit For
End If
End If
Next
End If
End If
If IsNumeric(taxa_juro) Then
    If taxa_juro <> -1 Then
        Exit For
    End If
End If
Next
opt.Cells(l, 13) = taxa_juro
Next
End Sub
    
```

Associação do valor da taxa de dividendo (do activo subjacente) às datas de transacção das opções:

```

Sub dividyleid()
Dim ws As Worksheet
Dim divy
Dim i, j As Long

For Each ws In Worksheets
    If InStr(1, ws.Name, "divy", 1) <> 0 Then
        Set divy = ws
    End If
Next
For Each ws In Worksheets
    If InStr(1, ws.Name, "Opt", 1) <> 0 Then
        For i = 1 To 4209 'numero maximo de linhas das sheets "Opt"
            For j = 4 To 1350 'numero de linhas da sheet "divy"
                If CDate(ws.Cells(i, 1)) = CDate(divy.Cells(j, 1)) Then
                    ws.Cells(i, 14) = divy.Cells(j, 2)
                End If
            Exit For
        End If
    Next
Next
End If
Next
End Sub
    
```

Associação de calls e puts idênticos.

```

Sub CallPut()
Dim ws_puts, ws_calls, ws_divy As Worksheet
Dim l_puts, l_calls As Integer
Set ws_puts = Worksheets(2)
Set ws_calls = Worksheets(1)
Set ws_divy = Worksheets(3)
For l_calls = 2 To 603
    For l_puts = 2 To 593
        If (CDate(ws_puts.Cells(l_puts, 1)) = CDate(ws_calls.Cells(l_calls, 1))) And (CDate(ws_puts.Cells(l_puts, 4)) = CDate(ws_calls.Cells(l_calls, 4))) And (ws_puts.Cells(l_puts, 6) = ws_calls.Cells(l_calls, 6)) Then
            ws_divy.Cells(l_calls, 1) = ws_puts.Cells(l_puts, 1)
            ws_divy.Cells(l_calls, 2) = ws_calls.Cells(l_calls, 2)
            ws_divy.Cells(l_calls, 3) = ws_puts.Cells(l_puts, 2)
        End If
    Next
Next
End Sub
    
```

```
ws_divy.Cells(l_calls, 4) = ws_puts.Cells(l_puts, 4)
ws_divy.Cells(l_calls, 5) = ws_puts.Cells(l_puts, 6)
ws_divy.Cells(l_calls, 6) = ws_puts.Cells(l_puts, 8)
ws_divy.Cells(l_calls, 7) = ws_puts.Cells(l_puts, 9)
ws_divy.Cells(l_calls, 8) = ws_puts.Cells(l_puts, 10)
ws_divy.Cells(l_calls, 9) = ws_puts.Cells(l_puts, 11)
Exit For
End If
Next
Next
End Sub
```

Programas em GAUSS

/* Criação de uma base de dados para opções. Última revisão 25/8/2000 Raquel M. Gaspar.

```

*/

new;
cls;
ts=hsec;
output file = d:\tese\gaussfls\output\crtdata.txt reset;
outwidth 132;

print "CRTDATA run on:" datestr(0) "at" timestr(0);
print " _____";

/*****/
/*MAIN BODY OF THE PROGRAM*/

i=700; /* número de opções a considerar*/

load tesedata[ i,14 ] = d:\tese\gaussfls\data\spx99.csv;
print "matrix nikkei loaded." ;
format /rz 4,4;
print "The matrix nikkei has dimension: " rows(tesedata) " by " cols(tesedata); print " ";

format /m1 /rzt 10,6;
print "creattig data set";
data=tesedata;
dataset="Mydata";
vnames = { DATE PREMIUM "INDEX" "MATUR" "CLASS" STRIKE "CODE" SPOT MONEYN INOUT LASTD
TAU IR DIV };

print "saving dataset...";
call saved(data,dataset,vnames);

print $getname("mydata");

/*****/
print " "; runtime=hsec-ts; print "Run Time=" runtime/100 "seconds";

output off;
end;

/*****END CRTDATA*****/

```

```

/* VOLIMP . Última revisão a 25/9/2000 Raquel M. Gaspar. */

new;
cls;
ts = hsec;
output file = d:/tese/gaussfls/output/volimp.txt reset;
outwidth 132;

print "Volimp run on:" datestr(0) "at" timestr(0);
print "_____";

/*****/
/*MAIN BODY OF THE PROGRAM*/

open f1= Mydata;
i= 5; /* number of options to be considered*/
X=readr(f1,5);
print "X=" X;

/* Implied volatility calculations*/

      cp=X[ ., 2 ];
      K=X[ .,6 ];
      s0= X[ ., 8 ];
      T=X[ .,12 ]/360 ;
      print "T=" T;
      tau=T;
      rfr=X[ .,13];
      divy=X[ .,14 ];
      Z=rfr-divy;
      Print "Z= " Z;
      coc=Z;

      niters = 5000;

disable;
Vi = euriv(cp,k,s0,tau,rfr,coc,niters);

      print "volimp=" vi;
enable;

/*****/
print " ";
runtime=hsec-ts;
print "RunTime=" runtime/100 "seconds";

output off;
end;

/*****END VOLIMP*****/

/*****New Procedures Used in this Program*****/

```

/* EURIV.G

Procedimento para determinar as volatilidades implícitas utilizando o método de Newton Raphson

Format: iv=EURIV(cp,k,s0,tau,rfr,coc,niters)

Where: iv is a Nx1 vector or scaler of implied volatilities

cp is a Nx1 vector or scaler of call prices (or put prices)

k is a Nx1 vector or scaler of strike prices (negative of strike for puts)

s0 is a Nx1 vector or scaler for current level of the underlying asset

tau is a Nx1 vector or scaler of time to exp. in yrs

rfr is a Nx1 vector or scaler for the continuously compounded annualized risk free rate

Note: if you have an effective annual yield (annyield) simply pass $\ln(1+annyield)$ to the procedure.coc is the annualized rate for cost-to-carry
for non-div. paying stock this is simply the rfr
for div paying stock this is rfr-divrate
for currency options this is rdom-rfor

niters is a scaler indicating the number Newton-Raphson iterations to conduct

*/

```

proc euriv(cp,k,s0,tau,rfr,coc,niters);
local rcp,rs0,rs,rt,rr,rc,rowvec,n;
local curiv,ep,ep2,iter,cfit,cfit2,vega;
rcp=rows(cp); rs0=rows(s0);
rs=rows(k); rt=rows(tau); rr=rows(rfr); rc=rows(coc);
rowvec=(rcp|rs0|rs|rt|rr|rc);
n=maxc(rowvec);
if n>1 and minc(rowvec) ne n;
  if rs0==1;
    s0=s0.*ones(n,1);
  endif;
  if rs==1;
    k=k.*ones(n,1);
  endif;
  if rt==1;
    tau=tau.*ones(n,1);
  endif;
  if rr==1;
    rfr=rfr.*ones(n,1);
  endif;
  if rc==1;
    coc=coc.*ones(n,1);
  endif;
  if rcp==1;
    cp=cp.*ones(n,1);
  endif;
endif;
curiv=0.2.*ones(rows(cp),1); /* initial guess */
ep=10^(-10); ep2=10^(-200);
iter=1;

```

```

do while iter le niters;
{cfit}=bsval(curiv,k,s0,tau,rfr,coc);
{cfit2}=bsval(curiv+ep,k,s0,tau,rfr,coc);
vega=(cfit2-cfit)/ep;
curiv=curiv+(cp-cfit)/(vega+ep2);
iter=iter+1;
endo;
retp(curiv);
endp;

```

/* BSVAL.G

Calcula os valores da Fórmula de Black-Scholes

Format: value=bsval(iv,k,s0,tau,rfr,coc)

Where: value is a Nx1 vector of Black Scholes European prices

iv is a Nx1 vector of volatilities

k is a Nx1 vector of strike prices (negative for puts)

tau is a 1x1 scaler or Nx1 vector of time to exp. in yrs

rfr is the continuously compounded annual risk free rate

coc is the cost to carry

coc=rfr-anndivyield for dividend paying stock

*/

```

proc bsval(iv,k,s0,tau,rfr,coc);
local n,scvec,rowind,mat,relrows,callp,strike,dep,beta,ind,sighat;
local d1,d2,cs,calldum,ep;
n=maxc(rows(iv)|rows(k)|rows(s0)|rows(tau)|rows(rfr)|rows(coc));
if rows(s0)==1;
s0=s0.*ones(n,1);
endif;
if rows(iv)==1;
iv=iv.*ones(n,1);
endif;
if rows(tau)==1;
tau=tau.*ones(n,1);
endif;
if rows(rfr)==1;
rfr=rfr.*ones(n,1);
endif;
if rows(coc)==1;
coc=coc.*ones(n,1);
endif;
calldum=k.>0;
ep=10^(-10);
d1=(ln(abs((s0+ep)/(abs(k)+ep)+ep)))+(coc+(iv.^2)/2).*tau./
(iv.*sqrt(tau)+ep);
d2=d1-iv.*sqrt(tau);
cs=calldum.*(s0.*exp((coc-rfr).*tau).*cdfn(real(d1))-
(k).*(exp(-rfr.*tau)).*cdfn(real(d2)))));
cs=cs+(1-calldum).*((abs(k)).*exp(-rfr.*tau).*cdfn(-real(d2))-
s0.*exp((coc-rfr).*tau).*cdfn(-real(d1)));
retp(cs);
endp;

```

/ Rw. Simulação de matrizes de variáveis normais padronizadas. Raquel Gaspar */*

```

new;
cls;
ts = hsec;
output file = d:/tese/gaussfls/output/rw.txt reset;
outwidth 255;

/*print "Rw run on:" datestr(0) "at" timestr(0);*/
/*print "_____";*/

/*****/
/*MAIN BODY OF THE PROGRAM*/

/* Creation of 3 (10000,250) matrix*/

rw1=rndn(10000,250);
rw2=rndn(10000,250);
rw3=rndn(10000,250);
/*****prints para output*****/

/*print "program concluded";*/

print rw1;
/*****/
/*print " ";*/
/*runtime=hsec-ts;*/
/*print "RunTime=" runtime/100 "seconds";*/
output off;
end;

/*****END Rw*****/

```

```

/* Simulação de Monte Carlo. Última revisão 11/12/2000. by Raquel M. Gaspar.
   Este programa permite elaborar estudos de simulação com base em:
   Modelos de Volatilidade estocástica (com correlação constante)
   Modelos de Volatilidade estocástica (com correlação nula)
   Modelos de Black-Scholes

*/
new;
cls;
ts=hsec;
output file = d:\tese\gaussfls\output\simulM1.txt reset;
outwidth 132;

print "Simulation run on:" datestr(0) "at" timestr(0);
print "_____";

/* Carregar os ruídos normais (0,1) independentes*/

i=7500;      /* número de simulações*/
j=250;      /* número de "passos" por percurso simulado*/

load rw1[ i,j ] = d:\tese\gaussfls\data\rw1.bt;
print "rw1 carregado";
print rw1[1:2,j];
print "The matrix rw1 has dimension:" rows(rw1) "by" cols(rw1); print " ";

load rw2[ i,j ] = d:\tese\gaussfls\data\rw2.txt;
print "rw2 carregado";
print "The matrix rw2 has dimension:" rows(rw2) "by" cols(rw2); print " ";

/* Atribuição de valores aos parâmetros do modelo*/
S=100;
r=0.05;
a=0.25^2;
b=0.75;
d=0.75;
delta=0.2;
beta=0.2;
c=-0.25;
tau=0.25;
dt=tau/j;
print "S=" S;
print "r=" r;
print "a=" a;
print "b=" b;
print "c=" c;
print "d=" d;
print "delta=" delta;
print "beta=" beta;
print "tau=" tau;
print "dt=" dt;

/* Construção dos percursos de Sub, Var e Cor*/

```

```

SubB=zeros(i,j+1);
VarB=zeros(i,j+1);
SubC=zeros(i,j+1);
VarC=zeros(i,j+1);
SubD=zeros(i,j+1);

/*Atribuição do valor no momento inicial "0"*/
z=1;
Do while z<=i;
    SubB[z,1]=S;
    SubC[z,1]=S;
    SubD[z,1]=S;
    VarB[z,1]=a;
    VarC[z,1]=a;
    z=z+1;
endo;

/* simulação dos diversos percursos segundo os diferentes modelos*/
p=1;
Do while p<=i;
    q=2;
    do while q<=j+1;

        /* modelo de volatilidade estocástica com rho constante*/
        VarB[p,q]=varB[p,q-1]+b*(a-varB[p,q-1])*dt+sqrt(varB[p,q-1])*delta*sqrt(dt)*(c*rw1[p,q-1]+sqrt(1-(c)^2)*rw2[p,q-1]);
        SubB[p,q]=SubB[p,q-1]+SubB[p,q-1]*r*dt+sqrt(varB[p,q])*SubB[p,q-1]*sqrt(dt)*rw1[p,q-1];

        /* modelo de volatilidade estocástica com rho=0*/
        VarC[p,q]=varC[p,q-1]+b*(a-varC[p,q-1])*dt+sqrt(varC[p,q-1])*delta*sqrt(dt)*rw2[p,q-1];
        SubC[p,q]=SubC[p,q-1]+SubC[p,q-1]*r*dt+sqrt(varC[p,q])*SubC[p,q-1]*sqrt(dt)*rw1[p,q-1];

        /* modelo de Black-Scholes*/
        SubD[p,q]=SubD[p,q-1]+SubD[p,q-1]*r*dt+sqrt(a)*SubD[p,q-1]*sqrt(dt)*rw1[p,q-1];

        q=q+1;
    endo;
    p=p+1;
endo;

print " fim simulação percursos";

/* Criação da matrix dos preços de exercício com Xs de 80 a 120 */
v=7; /* número de preços diferentes a considerar*/
vmin=80; /*preço de exercício para baixo*/
dv=5; /* diferença entre os preços de exercício*/

X=zeros (i,v);
n=1;
Do while n<=i;

    X[n,1]=vmin;
    k=2;

```

```

    Do while k<=v;
        X[n,k]=X[n,k-1]+dv;
        k=k+1;
    endo;
n=n+1;
endo;

print "matrix dos preços de exercício determinada";

/* Cálculo dos payoffs já descontados max{0; valor instrínseco}*exp(-r*tau) */

intB=zeros(i,v);
payB=zeros(i,v);
intC=zeros(i,v);
payC=zeros(i,v);
intD=zeros(i,v);
payD=zeros(i,v);
errosB=zeros(i,v);
errosC=zeros(i,v);

l=1;
do while l<=i;
    m=1;
    do while m<=v;

/* Aplicação da técnica "control variate" para redução de variância usando a fórmula de Black-Scholes*/

        /* verdadeiros valores de Black-Scholes*/
        bs1=bsval(sqrt(a),X[1,.,],S,tau,r,r);

        intD[l,m]=SubD[l,j+1]-X[l,m];
        if intD[l,m]>0;
            payD[l,m]=intD[l,m].*exp(-r*tau);
        endif;

/* determinação dos payoffs descontados ( e corrigidos) dos modelos B e C*/
/* Modelo B*/
        intB[l,m]=SubB[l,j+1]-X[l,m];
        if intB[l,m]>0;
            payB[l,m]=intB[l,m].*exp(-r*tau);
        endif;
        errosB[l,m]=payB[l,m]-payD[l,m];
/* Modelo C*/
        intC[l,m]=SubC[l,j+1]-X[l,m];
        if intC[l,m]>0;
            payC[l,m]=intC[l,m].*exp(-r*tau);
        endif;
        errosC[l,m]=payC[l,m]-payD[l,m];

        m=m+1;
    endo;
    l=l+1;
endo;

```

```
print "determinação dos payoffs ajustados descontados terminada";

/* RESULTADOS: prémios das calls e respectivos desvios-padrão */

    print "BS1=" bs1;

print "valores simulação simples modelo de volatilidade estocástica e correlação constante";
    callB=meanc(payB);
    print "callB" callB;
    stdB=stdc(payB)/sqrt(i);
    print "stdB=" stdB;
print "valores simulação simples modelo de volatilidade estocásticas s/ correlação";
    callC=meanc(payC);
    print "callC" callC;
    stdC=stdc(payC)/sqrt(i);
    print "stdC=" stdC;
print "valores simulação simples BS";
    callD=meanc(payD);
    print "callD" callD;
    stdD=stdc(payD)/sqrt(i);
    print "stdD=" stdD;

print "valores com redução de variância";
    callsB=meanc(erosB+bs1);
    print "callsB" callsB;
    stdsB=stdc(erosB+bs1)/sqrt(i);
    print "stdsB=" stdsB;
    callsC=meanc(erosC+bs1);
    print "callsC" callsC;
    stdsC=stdc(erosC+bs1)/sqrt(i);
    print "stdsC=" stdsC;

/* _____ */
print " ";
runtime=hsec-ts;
print "RunTime=" runtime/100 "seconds";
output off;
end;
```

Bibliografia

- Ahn, C.M. (1992) Option pricing when jump risk is systematic. *Mathematical Finance* 2, 299-308.
- Aït-Sahalia, Y., Wang, Y. e Yared, F. (2001) Do options markets correctly price the probabilities of movement of the underlying asset? *Journal of Econometrics* 102, 67-110.
- Amin, K. e Ng, V. (1993) ARCH processes and option valuation. *Working paper. University of Michigan*.
- Amin, K.I. (1993) Jump diffusion option valuation in discrete time. *The Journal of Finance* XLVIII, 1833-1863.
- Bachelier, L. (1900) Theorie de la speculation. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* 3 3,
- Bailey, W. e Stulz, R.M. (1989) The pricing of stock index options in a general equilibrium model. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24, 1-12.
- Baillie, R.T. e DeGennaro, R.P. (1990) Stock return and volatility. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25, 203-214.
- Ball, C.A. e Torous, W.N. (2000) Stochastic correlation across international stock markets. *Journal of Empirical Finance* 7, 373-388.
- Ball, C.A. e Roma, A. (1994) Stochastic volatility option pricing. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 29, 589-607.
- Ball, C.A. e Torous, W.N. (1985) On jumps in common stock prices and their impact on call option pricing. *The Journal of Finance* 40, 155-174.
- Bates, D.S. (1991) The crash of '87: Was it expected? The evidence from option Markets. *The Journal of Finance* XLVI, 1009-1044.
- Bates, D.S. (1996) Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in Deutsche Mark options. *The Review of Financial Studies* 9, 69-107.
- Beckers, S. (1980) The constant elasticity of variance model and its implications for options pricing. *The Journal of Finance* XXXV, 661-673.
- Bellamy, N. e JeanBlanc, M. (2000) Incompleteness of markets driven by a mixed diffusion. *Finance and Stochastics* 4, 209-222.
- Bensoussan, A., Crouhy, M. e Galai, D. (1994) Stochastic equity volatility and the capital structure of the firm. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 449-598.
- Björk, T. (1998) *Arbitrage theory in continuous time*, edn. Oxford: Oxford University Press.
- Black, F. (1975) Fact and fantasy in the use of options. *Financial Analysts Journal* 36-41.
- Black, F. (1989) How we came up with the option formula. *Journal of Portfolio Management* 81, 637-659.
- Black, F. (1976) The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics* 3, 167-179.

- Black, F. e Scholes, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 637-654.
- Black, F. e Scholes, M. (1972) The valuation of option contracts and a test of market efficiency. *The Journal of Finance* XXVII, 399-417.
- Blattberg, R. e Gonedes, N. (1974) A comparison of stable student distribution of statistical models for stock prices. *Journal of Business* 47, 244-280.
- Bollerslev, T. (1987) A conditionally heteroskedastic time series model of security prices and rates of return data. *Review of Economics and Statistics* 59, 542-547.
- Bollerslev, T., Chou, R.Y. e Kroner, K.F. (1992) ARCH modeling in finance. *Journal of Econometrics* 52, 5-59.
- Brenner, M. e Galai, D. (1986) Estimation of errors in the implied standard deviation. *Working Paper. New York University*
- Brenner, M. e Subrahmanyam, M.G. (1988) A simple formula to compute the implied standard deviation. *Financial Analysts Journal* 44, 80-83.
- Brigo, D. e Mercurio, F. (2000) Option pricing impact of alternative continuous-time dynamics for discretely-observed stock prices. *Finance and Stochastics* 4, 147-159.
- Brown, K.C., Harlow, W.V. e Tinic, S.M. (1988) Risk aversion, uncertain information, and market efficiency. *Journal of Financial Economics* 22, 355-385.
- Brown, R. (1828) A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particle contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine* 4, 161-173.
- Bru, B., Crépel, P. e Kabanov, Y. (2000) Louis Bachelier on the centenary of *Théorie de la Spéculation*. *Mathematical Finance* 10, 341-353.
- Campbell, J.Y. e Hentschel, L. (1992) No news is good news - an asymmetric model of changing volatility in stock returns. *Journal of Financial Economics* 281-318.
- Canina, L. e Figlewski, S. (1993) The informational content of implied volatility. *The Review of Financial Studies* 6, 659-681.
- Chesney, M. e Scott, L.O. (1989) Pricing European currency options: a comparison of the modified Black-Scholes model and a random variance model. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24, 267-284.
- Chiras, D.P. e Manaster, S. (1978) The information content of option prices and a test of market efficiency. *Journal of Financial Economics* 6, 213-234.
- Choi, J.Y. e Shastri, K. (1989) Bid-ask spreads and volatility estimates. *Journal of Banking & Finance* 13, 207-219.
- Christie, A.A. (1982) The stochastic behavior of common stock variances - value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics* 407-432.
- Clark, J.M.C. (1982) An efficient approximation scheme for a class of stochastic differential equations. *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 42, 69-78.

- Clewlou, L. e Xu, X. (1992) A review of option pricing with stochastic volatility. *Working Paper-University of warick*
- Corrado, C. e Su, T. (1996) Skewness and kurtosis in S&P500 index returns implied by option prices. *Journal of Financial Research* 19, 175-192.
- Cox, J.C. e Ross, S. (1976) A survey of some new results in financial option pricing theory. *The Journal of Finance* XXXI, 383-402.
- Cutler, D.M., Poterba, J.M. e Summers, L.H. (1989) What moves stock prices? *Journal of Portfolio Management* 15, 4-12.
- Danielsson, J. (1994) Stochastic volatility in asset prices: estimation with simulated maximum likelihood. *Journal of Econometrics* 61, 375-400.
- Das, S.R. e Foresi, S. (1996) Exact prices for bond and option prices with systematic jump risk. *Review of Derivatives Research* 1, 7-24.
- Das, S.R. e Sundaram, R.K. (1999) Of smiles and smirks: a term structure perspective. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 34, 211-239.
- Day, T. e Lewis, C.M. (1988) The behaviour of the volatility implicit in the prices of stock index options. *Journal of Financial Economics* 22, 103-122.
- Day, T. e Lewis, C.M. (1992) Stock market volatility and the information content of stock index options. *Journal of Econometrics* 52, 267-287.
- Derman, E. e Kani, I. (1994) Riding on a Smile. *Risk* 7, 32-39.
- Derman, E. e Kani, I. (1994) *The volatility smile and its implied tree*, edn. Goldman Sachs, Qualitative Strategies Research Notes.
- Duan, J. (1995) The GARCH option pricing model. *Mathematical Finance* 5, 13-32.
- Dumas, B., Fleming, J. e Whaley, R.E. (1996) Implied volatility functions: empirical tests. *Center of Economic Policy Research*
- Dupire, B. (1993) Model Art. *Risk* 6, 118-124.
- Dupire, B. (1994) Pricing with a smile. *Risk* 7, 18-20.
- Duque, J. (1994) The meaning of implied volatility in pricing stock options traded in option markets. *University fo Manchester (Tese de Doutoramento)*
- Duque, J. e Paxson, D. (1994) Dynamic hedging of equity call options. *Estudos de Gestão* I, 83-92.
- El aroudi, N., JeanBlanc-Picqué Monique e Shreve, S.E. (1998) Robustness of the Black and Scholes Formula. *Mathematical Finance* 8, 93-126.
- Engle, R., Kane, A. e Noh, J. (1994) Forecasting volatility and option prices of the S&P500 index. *The Journal of Derivatives* 2, 17-30.
- Engle, R., Kane, A. e Noh, J. (1997) Index option pricing with stochastoic volatility and the value of accurate variance forecasts. *Review of Derivatives Research* 1, 139-157.

- Engle, R.F. e Mustafa, C. (1992) Implied ARCH models from option prices. *Journal of Econometrics* 52, 289-311.
- Fama, E. (1965) The behavior of stock prices. *Journal of Business* 38, 34-105.
- Foster, D. e Nelson, D. (1994) Asymptotic filtering theory for univariate ARCH models. *Econometrica* 62, 1-41.
- French, K.R., Schwert, G.W. e Stambaugh, R. (1987) Expected stock returns and volatility. *Journal of Financial Economics* 19, 3-29.
- Fridman, M. e Harris, L. (1998) A maximum likelihood approach for non-gaussian stochastic volatility models. *Journal of Business & Economic Statistics* 16, 284-291.
- Fung, J.K.W. e Fung, A.K.W. (1997) Mispricing of index futures contracts: a study of index futures versus index options. *The Journal of Derivatives* 37-45.
- Galai, D. (1977) Tests of market efficiency of the Chicago board options exchange. *Journal of Business* 50, 167-197.
- Gemmill, G. e Dickins, P. (1986) An Examination of the efficiency of the London traded options market. *Applied Economics* 18, 995-1010.
- Gemmill, G. (1996) Did option traders anticipate the crash? *The Journal of Futures Markets* 16, 881-897.
- Geske, R. (1979) The valuation of compound options. *Journal of Financial Economics* 63-81.
- Ghysels, E., Harvey, A. e Renault, E. (1996) Stochastic volatility. In: Rao, C.R. and Maddala, G.S., (Eds.) *Statistical Methods in Finance*, Amsterdam: North-Holland]
- Harrison, J.M. e Pliska, S.R. (1983) A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets. *Stochastic Processes and their Applications* 15, 313-316.
- Harrison, J.M. e Kreps, D.M. (1979) Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory* 381-408.
- Hartvig, N.V., Jensen, J.L. e Pedersen, J. (2001) A class of risk neutral densities with heavy tails. *Finance and Stochastics* 5, 115-128.
- Harvey, C.R. e Whaley, R.E. (1992) Market volatility prediction and efficiency of the S&P100 index option market. *Journal of Financial Economics* 43-73.
- Harvey, C.R. e Whaley, R.E. (1991) S&P 100 index option volatility. *The Journal of Finance* XLVI, 1551-1561.
- Haugen, R.A., Talmor, E. e Torous, W.N. (1991) The Effect of volatility changes on the level of stock prices and subsequent expected returns. *The Journal of Finance* XLVI, 985-1007.
- Heaton, H. (1986) Volatilities implied by options premia: a test of market efficiency. *The Financial Review* 21, 37-49.
- Heston, S.L. (1993) A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies* 6, 327-343.

- Heynen, R. (1994) An empirical investigation of observed smile patterns. *The Review of Futures Markets* **13**, 317-353.
- Hobson, D.G. e Rogers, L.C.G. (1998) Complete models with stochastic volatility. *Mathematical Finance* **8**, 27-48.
- Hofmann, N., Platen, E. e Schweizer, M. (1992) Option pricing under incompleteness and stochastic volatility. *Mathematical Finance* **2**, 153-187.
- Hsu, D.A., Miller, R. e Wichern, D. (1974) On the stable Paretian behaviour of stock market prices. *Journal of the American Statistical Association* **69**, 108-113.
- Hull, J. e White, A. (1987) The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance* **XLII**, 281-300.
- Hull, J. e White, A. (1988) The use of control variate technique in option pricing. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* **23**, 237-251.
- Hull, J.C. (2000) *Options, futures & other derivatives*, edn. International: Prebttice-Hall.
- Jackwerth, J.C. e Rubinstein, M. (1996) Recovering probability distributions from option prices. *The Journal of Finance* **LI**, 1611-1631.
- Jacquier, E., Polson, N.G. e Rossi, P.E. (1994) Bayesian analysis of stochastic volatility models. *Journal of Business & Economic Statistics* **12**, 371-417.
Notes: with discussion
- Jarrow, R.A. e Rosenfeld, E. (1984) Jump risks and the intertemporal capital asset pricing model. *Journal of Business* **57**, 337-352.
- Johnson, H. e Shanno, D. (1987) Option pricing when the variance is changing. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* **22**, 143-151.
- Jondeau, E. e Rockinger, M. (2000) Reading the smile: the message conveyed by methods which infer risk neutral densities. *Journal of International Money and Finance* **19**, 885-915.
- Jones, E.P. (1983) Option arbitrage and strategy with large price changes. *Journal of Financial Economics* **13**, 91-113.
- Karolyi, A. e Stulz, R. (1996) Why do markets move together? An analysis of US-Japan stock return comovements. *The Journal of Finance* **LI**, 951-986.
- Kim, S., Shephard, N. e Chib, S. (1998) Stochastic Volatility: likelihood inference and comparison with ARCH Models. *Review of Economic Studies* 361-393.
- Kon, S.J. (1984) Models of Stock Returns - a comparison. *The Journal of Finance* **XXXIX**, 147-165.
- Kroner, K. e Ng, V. (1998) Modeling asymmetric comovements of asset returns. *The Review of Financial Studies* **11**, 817-844.
- Kumar, R. e Shastri, K. (1990) The predictive ability of stock prices implied in option premia. *Advances in Futures and Options Research* **4**, 165-176.
- Kwok, Y.-K. (1998) *Mathematical models of financial derivatives*, edn. New York: Springer.

- Lamoureux, C.G. e Lastrapes, W.D. (1993) Forecasting Stock-return variance: toward an understanding of stochastic implied volatilities. *The Review of Financial Studies* 6, 293-326.
- Latané, H.A. e Rendleman, R.J. (1976) Standard deviations of stock price ratios implied in option prices. *The Journal of Finance* XXXI, 369-381.
- Liu, M. (2000) Modeling long memory in stock market volatility. *Journal of Econometrics* 99, 139-171.
- Login, F. e Solnik, B. (1995) Is correlation in international equity returns constant: 1960-1990? *Journal of International Money and Finance* 3-26.
- Lopes, P.T. (1999) O efeito "sorriso" da volatilidade implícita de opções financeiras. Faculdade de Economia do Porto (Dissertação de Mestrado).
- Macbeth, J.D. e Merville, L.J. (1979) An empirical examination of Black-Scholes call option pricing model. *The Journal of Finance* XXXIV, 1173-1186.
- Manaster, S. e Koehler, G. (1982) The calculation of implied variances from the Black-Scholes model: a note. *The Journal of Finance* XXXVII, 227-230.
- Manaster, S. e Rendleman, R.J.j. (1982) Option prices as predictors of equilibrium stock prices. *The Journal of Finance* XXXVII, 1043-1057.
- Mandelbrot, B. (1963) The variation of certain speculative prices. *Journal of Business* 36, 394-419.
- Melino, A. e Turnbull, S.M. (1990) Pricing foreign currency options with stochastic volatility. *Journal of Econometrics* 239-265.
- Merton, R.C. (1976) Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3, 125-144.
- Merville, L.J. e Piepeta, D.R. (1989) Stock price volatility, mean-reverting diffusion, and noise. *Journal of Financial Economics* 24, 193-214.
- Milstein, G.N. (1974) Approximate Integration of stochastic differential equations. *Theory Probab. Appl.* 19, 557-562.
- Milstein, G.N. (1978) A method of second order accuracy integration fo stochastic diffrencial equations. *Theory Probab. Appl.* 23, 396-401.
- Nandi, S. (1998) How important is the correlation between returns and volatility in a stochastic volatility model? Empirical evidence from pricing and hedging in the S&P 500 index options market. *Journal of Banking & Finance* 589-610.
- Natenberg, S. (1994) *Option volatility and pricing*, edn. New York: MacGraw-Hill.
- Nelson, D. (1990) ARCH models as diffusion approximations. *Journal of Econometrics* 45, 7-38.
- Newton, N. (1986) An asymptotically efficient difference formula for solving stochastic differential equations. *Stochastics* 19, 175-206.
- Nisbet, M. (1992) Put-call parity theory and an empirical test of efficiency of the London traded options market. *Journal of Banking & Finance* 16, 381-403.



- Oldfield, G.S.Jr., Rogalski, R.J. e Jarrow, R.A. (1977) As autoregressive jump process for common stock returns. *Journal of Financial Economics* 5, 389-418.
- Pagan, A. e Schwert, G. (1990) Alternative Models for Conditional stock volatility. *Journal of Econometrics* 45, 267-290.
- Patell, J.M. e Wolfson, M.A. (1979) Anticipated information releases reflected in call option prices. *Journal of Accounting and Economics* 1, 117-140.
- Patell, J.M. e Wolfson, M.A. (1981) The ex ante and ex post price effects of quarterly earnings announcements reflected in option and stock prices. *Journal of Accounting Research* 2, 434-458.
- Paxson, D.A. (1994) "Wipe the smile off " implied volatilities. *Working Paper*
- Peña, I., Serna, G. e Rubio, G. (1999) Why do we smile? On the determinants of the implied volatility function. *Journal of Banking & Finance* 23, 1151-1179.
- Pindyck, R.S. (1984) Risk, inflation and stock market. *American Economic Review* 74, 335-351.
- Platen, E. (1981) An approximation method for a class of Itô processes. *Lietuvos Mat. Rinkiny* 21, 121-133.
- Platen, E. e Schweizer, M. (1994) On smile and skewness. *Working Paper*
- Platen, E. e Schweizer, M. (1998) On feedback effects from hedging derivatives. *Mathematical Finance* 8, 67-84.
- Poterba, J.M. e Summers, L.H. (1986) The persistence of volatility and stock market fluctuations. *American Economic Review* 76, 1142-1151.
- Ramchand, L. e Susmel, R. (1998) Volatility and cross-correlation across major stock markets. *Journal of Empirical Finance* 5, 397-416.
- Rebonato, R. (1999) *Volatility and correlation*, edn. New York: John Wiley & Sons.
- Renault, E. e Touzi, N. (1996) Option hedging and implied volatilities in a stochastic volatility model. *Mathematical Finance* 6, 279-302.
- Rosenfeld, E. (1980) Stochastic processes of common stock returns: and empirical investigation. *Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (Tese de Doutoramento)*
- Rubinstein, M. (1994) Implied Binomial Trees. *The Journal of Finance* LXIX, 771-818.
- Rubinstein, M. (1985) Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades e quotes on the 30 most active CBOE option classes from August 23, 1976 through August 31, 1978. *The Journal of Finance* XL, 455-480.
- Samuelson, P.A. (1965) Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review* Spring, 41-49.
- Sandmann, G. e Koopman, S.J. (1998) Estimation of stochastic volatility models via Monte Carlo maximum likelihood. *Journal of Econometrics* 87, 271-301.
- Schmalensee, R. e Trippi, R.R. (1978) Common stock volatility expectations implied by option premia. *The Journal of Finance* XXXIII, 129-147.

- Schroder, M. (1989) Computing the constant elasticity of variance option pricing formula. *The Journal of Finance* **XLIV**, 211-219.
- Schwert, G.W. (1990) Stock volatility and the crash of '87. *The Review of Financial Studies* **3**, 77-102.
- Schwert, G.W. (1989) Why does stock market volatility change over time? *The Journal of Finance* **XLIV**, 1115-1153.
- Schwert, W. (1991) Review of market volatility by Robert J. Shiller. *Journal of Portfolio Management* **17**, 74-78.
- Scott, L.O. (1987) Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimation, and an application. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* **22**, 419-438.
- Scott, L.O. (1997) Pricing stock options in a Jump-diffusion model with stochastic volatility and interest rates: applications of Fourier inversion methods. *Mathematical Finance* **7**, 413-426.
- Scott, L.O. (1991) Random variance option pricing: empirical tests of the model and delta-sigma hedging. *Advances in Futures and Options Research* **5**, 113-135.
- Scott, L.O. (1992) Stock market volatility and the pricing of index options: an analysis of implied volatilities and the volatility risk premium in a model with stochastic interest rates and volatility. *Working Paper. University of Georgia*
- Shastri, K. e Wethyavivorn, K. (1987) The valuation of currency options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Research* **10**, 283-293.
- Shephard, N. (1996) Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility. In: Cox, D.R., Hinkley, D.V. e Barndorff-Nielsen, O.E., (Eds.) *Time Series Models*, London: Chapman and Hall]
- Smith, C.W.Jr. (1976) Option pricing - a review. *Journal of Financial Economics* **3**, 3-51.
- Stein, E.M. e Stein, J.C. (1991) Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. *The Review of Financial Studies* **4**, 727-752.
- Stein, J.C. (1989) Overreactions in the options market. *The Journal of Finance* **XLIV**, 1011-1023.
- Sundaram, R.K. (1997) Equivalent martingale measures and risk-neutral pricing: an expository note. *The Journal of Derivatives* 85-98.
- Talay, D. (1984) Efficient numerical schemes for the application of expectations of functionals of the solution of a SDE and applications. *Lecture Notes in Control and Information Sciences* **61**, 294-313.
- Talay, D. (1983) Résolution trajectorielle at analyse numérique des equations différentielles stochastiques. *Stochastics* **9**, 275-306.
- Taqqu, M.S. (2001) Bachelier and his times: a conversation with Bernard Bru. *Finance and Stochastics* **5**, 3-32.
- Taylor, S. e Xu, X. (1994) The term structure of volatility implied by foreign exchange options. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* **29**, 57-74.
- Taylor, S.J. (1994) Modeling stochastic volatility: a review and comparative study. *Mathematical Finance* **4**, 183-204.

- Trippi, R.R. (1977) A test of option market efficiency using a random-walk valuation model. *Journal of Economics and Business* **29**, 93-98.
- Westerfield, R. (1977) The distribution of common stock price changes: an application of transactions time and subordinated stochastic models. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* **12**, 743-765.
- Wiggins, J. (1987) Option values under stochastic volatility: theory and empirical estimates. *Journal of Financial Economics* **19**, 351-372.
- Zhu, Y. e Avellaneda, M. (1999) A risk-neutral stochastic volatility model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*