

Universidade de Lisboa



**O ensino-aprendizagem da Estatística
baseado numa investigação estatística em contexto real e o
desenvolvimento do raciocínio estatístico de
alunos do 11.º ano**

Orlando Jorge Couto Neto da Silva

Mestrado em Ensino de Matemática

**Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pelos
Professor Doutor João Pedro Ponte
Professor Doutor Carlos Manuel Ribeiro Albuquerque**

2020

RESUMO

O presente trabalho de cariz investigativo teve como objetivo principal compreender como a aplicação dos conhecimentos estatísticos a um trabalho concreto e em contexto real podem contribuir para a aprendizagem da Estatística e para o desenvolvimento de raciocínio estatístico dos alunos do 11.º ano. Debruça-se em particular sobre o raciocínio estatístico, assunto que foi central na minha lecionação de uma unidade de ensino, ligado ao ensino-aprendizagem de Estatística e enquadrado na correspondente unidade didática do ensino secundário.

A metodologia que adotei segue um paradigma interpretativo com uma abordagem qualitativa e integra processos e práticas de ensino adaptadas da metodologia de investigação estatística. Deste modo, procurei que os alunos tivessem oportunidade de realizar aprendizagens através de trabalho em investigação estatística desenvolvida em contexto real e, a partir daí, desenvolver o presente estudo.

A totalidade dos alunos da turma B1 do 11.º ano de Matemática do Colégio Pedro Arrupe participaram neste estudo, no âmbito da unidade curricular de ensino Estatística. Os dados recolhidos para o estudo foram seleccionados a partir de duas tarefas de resolução autónoma realizadas pelos alunos, de uma avaliação-aula realizada no final das 12 aulas de 60 minutos, de um questionário aos alunos e dos registos feitos por mim em diário de bordo ao longo das aulas.

Os resultados obtidos permitem concluir que, mesmo com as limitações relacionadas com a gestão do tempo, (1) evidenciam-se sinais de aprendizagem realizada pelos alunos como resultado da realização da investigação estatística, (2) o ensino-aprendizagem de Estatística realizado com base num trabalho em contexto real é potenciador do desenvolvimento do raciocínio estatístico pelos alunos, e (3) a aplicação de investigação estatística como metodologia de ensino-aprendizagem da Estatística é acolhida de modo positivo pelos alunos.

Palavras-chave: Estatística; Aprendizagem; Raciocínio Estatístico; Investigação Estatística; Contexto Real.

ABSTRACT

The present investigative work had as main goal to understand how the application of statistical knowledge to a concrete real-life context can contribute to the learning of statistics and to the development of statistical reasoning of 11th grade students. It focuses, in particular, on statistical reasoning, a subject that was central to my teaching, linked to the teaching and learning of statistics and framed in the corresponding teaching unit of secondary education.

The research methodology adopted follows an interpretive paradigm with a qualitative approach and integrates teaching processes and practices adapted from the statistical investigation methodology. In this way, I sought that students had the opportunity to learn through the work in statistical investigations developed in a real context and, from there, to develop the present study.

All students in class B1 of the 11th grade of Mathematics at Colégio Pedro Arrupe participated in this study, within the scope of the statistics teaching unit. The data collected for the study were selected from two tasks carried out in autonomous way by the students, an evaluation undertaken at the end of twelve 60-minute classes, a questionnaire to the students, and the records made by me in the logbook throughout the classes.

The results obtained allow to conclude that, even with the limitations related to time management, (1) there are signs of learning carried out by students as a result of carrying out a statistical investigation, (2) the teaching and learning of statistics carried out based on real context work enhances the development of students' statistical reasoning, and (3) the application of statistical investigation as a teaching and learning methodology in statistics is positively welcomed by students.

Keywords: Statistics; Learning; Statistic Reasoning; Statistic Investigation; Real Context.

AGRADECIMENTOS

Começo por agradecer a todos os professores que me acompanharam nesta caminhada, ao longo de um vasto conjunto de aprendizagens e novas experiências que constituiu para mim o Mestrado em Ensino de Matemática.

Recordo também, agradecido, todos os meus professores e pessoas que contribuíram para a minha educação, desde que comecei a aprender os primeiros números e depois as letras.

De um modo particular, agradeço ao Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte, não apenas a disponibilidade e apoio que sempre senti da sua parte, mas, principalmente, a fundamental e eficaz orientação que me deu ao longo da Prática de Ensino Supervisionada e da escrita do presente relatório.

Agradecido estou também ao Professor Doutor Carlos Manuel Ribeiro Albuquerque pela sua presença como coorientador e a sua disponibilidade, que sempre senti.

Agradeço de forma especial ao meu professor cooperante, Dr. Nuno Miguel Faria dos Santos, a forma como me integrou no dia-a-dia da turma onde decorreu o meu estágio e como me introduziu na vida do Colégio Pedro Arrupe em geral e da sala dos professores de matemática em particular. Tantas coisas aprendi com o Dr. Nuno Santos, e muitas delas ele não sabia que me estava a ensinar.

Agradeço a todos e cada um dos 23 alunos da turma 11.º B1, que me acolheram na sua sala no seu percurso de ensino-aprendizagem, durante todo o ano letivo.

Ao Colégio Pedro Arrupe, agradeço na pessoa da sua diretora Dr.^a Ana Mira Vaz e dos seus professores.

Um agradecimento muito sentido a todas as minhas colegas do Instituto de Educação, com quem caminhei ao longo destes dois anos de mestrado, pelo ânimo e amizade que sempre senti na “nossa” turma e nos pequenos grupos de trabalho. Caminhando juntos, chegamos mais longe.

À minha família, em especial à Teresa e ao Tomás, as duas estrelas maiores da minha galáxia, agradeço com Amor.

A todos estou agradecido.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1. PROBLEMÁTICA.....	1
2. OBJETIVO	1
3. QUESTÕES	1
4. MOTIVAÇÕES PESSOAIS	2
5. CONTEXTO	2
6. CONDIÇÕES ESPECIAIS	3
2. ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO	5
3. UNIDADE DIDÁTICA	11
1. CONTEXTO ESCOLAR	11
1. CARACTERIZAÇÃO DA ESCOLA.....	11
2. CARACTERIZAÇÃO DA TURMA.....	12
2. ANCORAGEM DA UNIDADE DIDÁTICA NO PROGRAMA DE MATEMÁTICA E NAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS NO DOMÍNIO ESTATÍSTICA	13
3. ESTRATÉGIA DE ENSINO	15
1. O ESTUDO DE INVESTIGAÇÃO ESTATÍSTICA A REALIZAR PELA TURMA	16
4. TAREFAS E MATERIAIS UTILIZADOS.....	17
1. DESENVOLVIMENTO DAS AULAS / GRUPOS DE TAREFAS	17
2. MATERIAIS E RECURSOS USADOS.....	24
3. AULAS LECIONADAS – DIÁRIO DE BORDO	24
4. TAREFAS REALIZADAS EM TRABALHO AUTÓNOMO	25
TAREFA AUTÓNOMA 1: Trabalho Plataforma 1.....	25
TAREFA AUTÓNOMA 2: Tarefa de Aplicação	26
4. PROCEDIMENTOS DE RECOLHA DE DADOS.....	27
1. PARTICIPANTES DO ESTUDO	28
1. A TURMA.....	28
2. OS GRUPOS DE TRABALHO	29
2. RECOLHA DE DADOS: CONDICIONANTES E OPÇÕES.....	30
3. MÉTODOS E RECOLHA DE DADOS	31
1. RECOLHA DOCUMENTAL	31
2. QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS	31
3. DIÁRIO DE BORDO	31

4.	ANÁLISE DE DADOS	31
5.	QUESTÕES DE NATUREZA ÉTICA.....	33
5.	APRESENTAÇÃO E DESCRIÇÃO DO ESTUDO.....	34
1.	A INVESTIGAÇÃO ESTATÍSTICA	34
2.	O ESTUDO DE CARIZ INVESTIGATIVO.....	36
1.	APRENDIZAGEM	36
2.	RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO.....	37
3.	REAÇÃO DOS ALUNOS	38
6.	ANÁLISE DE DADOS E RESULTADOS	40
1.	TRABALHO PLATAFORMA 1.....	40
	QUESTÃO 5	42
	MANUELA – Questão 5	42
	RUTE – Questão 5	45
	ARMANDO – Questão 5	47
	MAFALDA – Questões 1 e 2	50
	NOTAS SOBRE TRABALHO PLATAFORMA 1.....	51
2.	TAREFA APLICAÇÃO.....	53
	TELMA – Questões 1, 2 e 3	54
	ISABEL – Questões 1, 2 e 3.....	55
	ILDA – Questões 1, 2 e 3	57
	ARMANDO – Questão 4	58
	MATEUS – Questão 4.....	60
	MANUELA – Questão 4	61
	ARMANDO – Questão 4	63
	ISABEL – Questão 4	63
	NOTAS SOBRE TAREFA APLICAÇÃO.....	66
3.	AVALIAÇÃO AULA	66
	BRUNO – Questão 3.....	68
	MANUELA – Questão 3	68
	GONÇALO – Questão 3.....	69
	ILDA – Questão 3	70
	MATEUS – Questão 3	71
	MAFALDA – Questão 3.....	72
4.	QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS	73
5.	DIÁRIO DE BORDO	79
7.	CONCLUSÕES	83
1.	SÍNTESE DO ESTUDO	83
2.	PRINCIPAIS CONCLUSÕES.....	85

1.	<i>APRENDIZAGEM</i>	85
2.	<i>RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO</i>	86
3.	<i>REAÇÃO DOS ALUNOS</i>	88
3.	<i>REFLEXÃO FINAL</i>	89
1.	<i>O IMPACTO DA PANDEMIA COVID-19 NO ESTUDO</i>	89
2.	<i>SER PROFESSOR: APRENDIZAGENS ESPECIAIS</i>	91
REFERÊNCIAS		94
ANEXOS		96
A.	<i>APRESENTAÇÃO DA UD-ESTATÍSTICA À TURMA</i>	97
B.	<i>PLANO CONCRETIZADO DAS 12 AULAS</i>	99
C.	<i>DIÁRIO DE BORDO</i>	126
D.	<i>QUESTIONÁRIO DA INVESTIGAÇÃO ESTATÍSTICA</i>	136
E.	<i>TAREFA AUTÓNOMA 1: Trabalho Plataforma 1</i>	137
F.	<i>TAREFA AUTÓNOMA 2: Tarefa de Aplicação</i>	139
G.	<i>AA - AVALIAÇÃO AULA : Dia 22 de abril de 2020</i>	140
H.	<i>QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS DO 11.º B1</i>	142
I.	<i>GUIÃO CALCULADORAS</i>	145
J.	<i>FLIPCHARTS DAS AULAS (Exemplos das aulas 108 e 112)</i>	153

Índice de Tabelas

Tabela 1: Esquema geral da planificação inicial.....	18
Tabela 2: Esquema geral da planificação concretizada.....	19
Tabela 3: Fontes de dados e questões do estudo	28
Tabela 4: Tarefa 1- Questões, conteúdos e classificações	41
Tabela 5: Tarefa 2- Conteúdos das questões e classificações	54
Tabela 6: Matriz de relação entre perguntas no questionário aos alunos e categorias do estudo	74
Tabela 7: Reação “Metodologia Contexto real” - Dois tópicos: Aspetos e Razões apresentadas como positivas.	75
Tabela 8: Reação “Metodologia Contexto real”-Dificuldades no trabalho realizado	76
Tabela 9: Aprendizagem “Conteúdos”	77
Tabela 10: Aprendizagem “Tecnologia”.....	77
Tabela 11: Aspetos Específicos da Estatística (potencial relação com Raciocínio Estatístico).....	78

Índice de Figuras

Figura 1: Uso da calculadora gráfica TI Inspire CX, na resolução da questão 6.....	52
--	----

Índice de Quadros

Quadro 1: Horário semanal da Turma 11.º B1	13
--	----

Índice de Gráficos

Gráfico 1 : Classificações individuais / 10.º ano.....	12
Gráfico 2: Classificações individuais no 10.º ano e 2.º período do 11.º ano	89

1. INTRODUÇÃO

1. PROBLEMÁTICA

A dificuldade que se verifica no ensino-aprendizagem da Estatística no ensino secundário em Portugal, é uma problemática que engloba vários tipos de problemas, de dificuldades específicas e de modelos de análise e passa, certamente, por soluções diversificadas e complexas. Neste trabalho de cariz investigativo sobre a prática letiva, vou focar-me numa das componentes desta problemática: O ensino-aprendizagem da Estatística, suportado por práticas destinadas a promover o raciocínio estatístico dos alunos. Como ponto de partida para este trabalho são proporcionadas aos alunos situações de aprendizagem de Estatística, baseadas na realização de uma investigação estatística em contexto real.

2. OBJETIVO

Compreender como a aprendizagem e a aplicação dos conhecimentos estatísticos a um trabalho concreto e em contexto “real”, podem contribuir para a aprendizagem da Estatística e para o desenvolvimento de raciocínio estatístico dos alunos do 11.º ano.

3. QUESTÕES

Considerando a utilização de uma metodologia de ensino-aprendizagem baseada em trabalho prático que envolve os alunos do 11.º ano numa investigação estatística concreta em contexto real, procuro responder a três questões principais:

1. Em que medida estes alunos aprendem Estatística em ambiente de investigação estatística?
2. Como se desenvolve o raciocínio estatístico dos alunos usando um trabalho em contexto real?
3. Quais as reações dos alunos face a esta metodologia?

4. MOTIVAÇÕES PESSOAIS

Ao longo da minha vida profissional, desempenhei funções variadas, em geral com grande proximidade e contato com diversos tipos de pessoas. Relacionei-me com várias pessoas em que identificava algumas dificuldades, ou falta de prática, em utilizar formas de raciocínio científico, raciocínio matemático ou raciocínio estatístico. Várias dessas pessoas mostravam possuir uma fraca literacia estatística.

Ao ter a possibilidade de trabalhar a Unidade Curricular ‘Estatística’ na minha Prática Letiva, no Colégio Pedro Arrupe, considerei que esta pode ser uma oportunidade para aprofundar o tema da atitude dos alunos perante a aprendizagem da Estatística e da promoção do raciocínio estatístico em alunos do ensino secundário.

Em particular, pensei que pode ser útil perceber se, numa turma de alunos do 11.º ano do curso de Ciências Socioeconómicas, usar uma metodologia com uma grande componente prática pode ajudar a entender a Estatística como uma forma de melhor compreender os fenómenos da vida concreta, quer na vertente de cidadania quer na atividade da Economia.

5. CONTEXTO

Os 23 alunos da turma 11.º B1, optaram pela área das Ciências Socioeconómicas para prosseguir os seus estudos do ensino secundário. Para vários deles a Matemática é uma disciplina difícil e em que lacunas de conhecimento anterior se tornam um peso crescente. Percebe-se que preferem focar-se noutras disciplinas, por vezes não percebendo que a Matemática é exigente quanto ao tempo de estudo sistemático que se lhe deve dedicar.

É também importante, para estes alunos, uma abordagem concreta e prática quanto ao ensino-aprendizagem da Matemática. Deste modo, será positivo promover uma forma agradável de praticar Matemática, de praticar Estatística, usando situações de aplicação “fora da sala de aula”.

A turma 11.º B1 não tem um percurso escolar brilhante no que diz respeito à Matemática, mas também não revela problemas muito graves. É uma turma onde pode ser positivo desenvolver algum trabalho de ensino-aprendizagem na Unidade de

Estatística, diferente do habitual, e procurar investigar essa forma de organizar as aulas, avaliando resultados ou sinais de evolução, tanto ao nível da aprendizagem como da atitude dos alunos ou ainda da promoção do raciocínio estatístico.

6. CONDIÇÕES ESPECIAIS

O estágio que realizei no Colégio Pedro Arrupe no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, em colaboração e com a coordenação do professor Nuno Santos, decorreu com normalidade, sem perturbações especiais durante o 1.º período, ao longo do qual lecionei três aulas alvo de observação, integradas na unidade curricular de IPP III. De acordo com o programa e o plano de aulas de Matemática estabelecido para a turma do 11.º B1 que acompanhei como professor estagiário, foi definido que as aulas relativas à Prática de Ensino Supervisionada que eu iria lecionar, corresponderiam à Unidade Didática Estatística (UD-Estatística) e decorreriam ao longo de 12 aulas de 60 minutos, com início no dia 2 de março e fim em 20 de março do corrente ano. O Plano de Trabalho de Cariz Investigativo foi feito tendo em conta esta agenda letiva. O plano de detalhe das correspondentes 12 aulas foi concretizado e cuidadosamente preparado e aprovado pelos orientadores. Todos os recursos previstos foram organizados para a sua adequada execução.

A meio do 2.º período letivo, surge a crise sanitária designada por COVID-19 e que rapidamente tomou dimensão mundial e características de pandemia. Portugal foi fortemente atingido pelos impactos desta pandemia e desde o início do mês de março as entidades responsáveis nos vários níveis envolvidos nas estruturas da educação focaram as atenções nos impactos da pandemia no normal funcionamento dos estabelecimentos de ensino e nas próprias aulas. No dia 11 de março a direção do Colégio Pedro Arrupe anunciou a suspensão das atividades presenciais no Colégio a partir de dia 12. No dia 13 de março o governo anunciou a suspensão das aulas presenciais em todos os estabelecimentos de ensino a partir do dia 16 de março.

Assim, **as primeiras 6 aulas da UD-Estatística foram lecionadas normalmente, em ensino presencial, enquanto as segundas 6 aulas foram realizadas em pleno confinamento social**, com alunos e professores em suas casas, utilizando a Plataforma CPA OnLine para manter a atividade letiva e o ensino-aprendizagem com o mínimo possível de impactos negativos para os alunos. Esta Plataforma é baseada em software

suportado pela Web e pela Internet, equivalente ao software Moodle usado na Universidade de Lisboa, orientado para comunicação e troca de recursos didáticos entre alunos e professores. É uma potente plataforma de apoio ao ensino, mas tem como característica de raiz, suportar principalmente aulas em modo assíncrono. Assim, as restantes aulas da UD-Estatística, desenrolaram-se com o suporte tecnológico desta plataforma, não beneficiando ainda dos recursos de apoio síncrono às aulas, que posteriormente se veio a generalizar como ferramenta de apoio às aulas no início do 3.º período letivo.

A fase de crescimento do fenómeno sanitário associado à pandemia, incluindo declaração governamental de estado de emergência e depois de calamidade, aconteceu exatamente durante os meses de março, abril e maio atravessando marcadamente o núcleo dos trabalhos que desenvolvi no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada e respetiva elaboração do correspondente Relatório.

Estes acontecimentos, a meio das aulas da UD-Estatística, obrigaram à introdução de um conjunto de adaptações, alterações e limitações na realização da Prática de Ensino Supervisionada que implicaram criatividade e flexibilidade da parte de todos os intervenientes no processo de ensino-aprendizagem. Alunos e respetivas famílias, professores e as estruturas do Colégio, procuraram reduzir ao mínimo as componentes negativas e aumentar ao máximo os aspetos positivos da situação. Esta realidade está fortemente presente neste Relatório em diversas das suas vertentes.

2. ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO

Muito adultos, na sociedade atual, demonstram dificuldade em compreender e analisar determinado tipo de informação e a partir daí tomar decisões informadas e esclarecidas. Este tipo de dificuldades também se verifica, de modo geral, entre os alunos (Batanero, Godino, Green, Holmes & Vallecillos, 1994). Este assunto tem vindo a ser alvo de diversos estudos e várias têm sido as considerações que nos ajudam a compreender como “pensar estatisticamente sobre questões importantes que afetam as nossas vidas” (Ben-Zvi & Garfield, 2004, p. 3).

A Estatística é uma ferramenta para a organização, representação e tratamento de dados relativos a situações reais, que dota os alunos de capacidade de apreciar de forma esclarecida e crítica os seus usos em diversos domínios da vida em sociedade (NCTM, 2007). Nos documentos curriculares, em relação ao ensino da Estatística, é assumida a importância de se adotarem abordagens que desenvolvam o raciocínio e o pensamento estatístico, indo além do simples ensino de processos baseados na aplicação de fórmulas com cálculos repetitivos e frequentemente sem significado para os alunos (ME, 2007; NCTM 2007).

Embora não haja consenso claro entre os investigadores e os estudiosos sobre os principais objetivos do ensino-aprendizagem da Estatística, é vulgar considerarem-se três componentes relevantes: literacia estatística, pensamento estatístico e raciocínio estatístico. Estas três componentes estão interrelacionadas e podem ser consideradas o núcleo de algo mais abrangente que pode ser designado por competência estatística ou como sendo as bases que lhe estão subjacentes (Rumsey, 2002).

Ao longo do tempo estas dinâmicas em torno do entendimento do ensino-aprendizagem da estatística, têm evoluído, como nos referem Martins e Ponte (2010):

O ensino da Estatística a nível pré-universitário começou por dar especial atenção ao raciocínio estatístico, isto é, aos modos de raciocinar e resolver problemas próprios da Estatística, enfatizando técnicas, representações e processos de inferência. Posteriormente, percebeu-se a necessidade de atender à natureza dos dados estatísticos, valorizando de modo determinante o papel do contexto, pelo que se alargou a atenção a processos de pensamento mais amplos e variados. Finalmente, as considerações sobre as finalidades do ensino da Estatística na sociedade atual trouxeram para primeiro plano as preocupações com a literacia estatística.

Estes três conceitos estão estreitamente relacionados porque a literacia estatística apoia-se no pensamento estatístico e este, por sua vez, tem como núcleo fundamental o raciocínio estatístico. (p. 9)

Na Estatística, os dados assumem um papel fundamental e a sua diversidade e variabilidade são um dos mais relevantes fatores de diferenciação entre a Matemática e a Estatística. Os dados são vistos como números em contexto. Esse contexto determina os procedimentos a usar e é a base para a interpretação dos resultados. Em Estatística a variabilidade dos dados é a sua principal característica.

O fundamental nos problemas estatísticos é que, pela sua natureza, não têm uma solução única e não podem ser avaliados como totalmente errados ou certos, devendo ser avaliados em termos da qualidade do raciocínio e da adequação dos métodos utilizados à natureza dos dados existentes (Gal & Garfield, 1997).

Tal como para a literacia estatística e para o pensamento estatístico, não existe consenso claro sobre o que é o raciocínio estatístico. Mas é hoje pacífico que não se confunde raciocínio matemático com raciocínio estatístico.

Algumas características básicas serão comuns aos dois tipos de raciocínio, mas podemos identificar algumas diferenças importantes entre raciocínio matemático e raciocínio estatístico: o raciocínio matemático é eminentemente lógico, lida fundamentalmente com situações de ‘verdadeiro-falso’ e as suas conclusões não dependem dos dados, enquanto o raciocínio estatístico lida fundamentalmente com situações que envolvem incerteza e as suas conclusões são estreitamente dependentes dos dados, dos contextos e das inferências estatísticas que permitem estabelecer.

Podemos considerar uma boa aproximação à definição do conceito de raciocínio estatístico “A forma como as pessoas raciocinam com ideias ou conceitos estatísticos e dão sentido à informação estatística, é o raciocínio estatístico” (Ben-Zvi e Garfield, 2004).

O raciocínio estatístico está associado a ideias e conceitos estatísticos importantes: variação, distribuição, centro, dispersão, associação e amostragem. Pode também estar

associado a combinação de ideias sobre dados e sobre incerteza, que conduz à realização de inferências estatísticas. (Garfield, 2002)

Podemos reconhecer processos de raciocínio estatístico no aluno por exemplo, quando se evidenciam situações de inferência estatísticas que permitem alargar as conclusões sobre a amostra para um grupo maior de dados ou para toda a população, quando se estimam grandezas ou medidas estatísticas a partir de amostras analisadas a partir de um conjunto de dados recolhidos para o efeito, quando se trabalham e analisam os dados e o contexto recorrendo a inferências e relações entre medidas como média, mediana, desvio-padrão da amostra, desvio-padrão da população, extremos, quartis e correlação linear. Nestes casos, estamos em pleno ambiente de desenvolvimento de raciocínio estatístico, em que se recorre a processos de inferências e conclusões. Pensando nos alunos, podemos caracterizar o raciocínio estatístico como sendo o que o aluno é capaz de fazer com os conteúdos estatísticos e a destreza que mostra ao usar conceitos estatísticos na resolução de problemas (Garfield, 2002).

Ponte e Noll (2017) referem que em universidades e escolas de todo o mundo, cada vez mais se identifica a necessidade de cursos com requisitos básicos de raciocínio estatístico, acompanhando a evolução das competências de literacia estatística e o crescimento da tecnologia, como instrumento de relevo na economia global orientada por conceitos de tratamento estatístico de dados em grande quantidade.

Podemos, deste modo, considerar que o ensino-aprendizagem da Estatística deve estar orientado para o raciocínio estatístico em ligação estreita aos dados, fornecendo oportunidades aos alunos para planearem e formularem questões de investigação, recolherem dados, descreverem e analisarem conjuntos de dados e com eles elaborarem conjecturas, retirarem e justificarem conclusões e fazerem inferências estatísticas baseadas nesses dados e nos respetivos contextos. Como referem Ben-Zvi e Garfield (2004) “Ser capaz de lidar com dados em diversos contextos significativos e ter uma atitude crítica sobre a análise e interpretação de dados”.

O *GAISE College Report* enuncia recomendações que refletem preocupação com a metodologia a usar no ensino-aprendizagem de Estatística, nomeadamente quanto à resolução de problemas estatísticos como um processo de investigação, das quais se podem identificar quatro componentes:

- Formular questões;
- Recolher dados;
- Analisar dados;
- Interpretar resultados; (Franklin et al., 2005) (p. 11)

A visão contemporânea da aprendizagem de acordo com a teoria construtivista é que novos conhecimentos e compreensão são baseados em conhecimento existente e crenças que já temos e estão apoiados nas nossas experiências (e.g., Cobb 1994; Piaget 1978; Vygotsky 1978). Aprendemos fazendo. E quando aprendemos, os nossos conhecimentos prévios não desaparecem, são integrados com os novos conhecimentos (Garfield & Ben-zvi, 2009, p. 72)

Como refere Ponte (2011), “a aprendizagem de Estatística depende muito da atividade que os alunos desenvolvem na sala de aula e esta atividade depende em grande medida das tarefas propostas pelo professor” (p. 4). Frequentemente essas tarefas são escolhidas pelo seu potencial de transmissão de conceito e conhecimentos, selecionadas e compiladas a partir de textos, livros ou manuais onde os dados e os exemplos já estão preparados e formatados para serem usados pelos alunos na aprendizagem de processos estatísticos muito relacionados com o cálculo de determinadas grandezas e parâmetros com significado estatístico. Muitas vezes, essas tarefas não aproveitam a disponibilidade dos alunos para aprenderem através do seu envolvimento no processo, desde o início. Aprender com a prática é uma das melhores formas de consolidar as aprendizagens. Esta metodologia de aprender Estatística com a prática, através da realização pelos alunos de investigações estatísticas com objetivos e questões selecionadas pelos alunos e abordando temas que lhe sejam próximos, integra-se num dos estilos de prática de ensino de Estatística identificados por Ponte (2011), e designado por “*exploratory learning*”. Neste estilo pode identificar-se a presença de (a) um conjunto variado de tarefas como explorações, investigações, problemas, projetos e exercícios; (b) as situações são realísticas e frequentemente existem várias estratégias para lidar com a tarefa; (c) os alunos recebem as tarefas de modo aberto e são incentivados a apresentarem os seus raciocínios de modo a participarem nas discussões com a sua própria força e autoridade dadas pelos seus argumentos e processos de raciocínio; (e) os alunos são encorajados a trabalhar em pequenos grupos e discutir com os colegas; e (f) é normal haver discussões em que

participa a totalidade da turma num processo de comunicação e negociação frequentes (Ponte, 2011).

A metodologia que usei na UD-Estatística é inspirada nos seis princípios descritos por Cobb e McClain (2004): (1) foco no desenvolvimento de ideias estatísticas centrais, (2) uso de dados reais e motivadores para envolver os alunos, (3) uso de atividades em sala de aula para suportar o desenvolvimento de raciocínio estatístico, (4) integração de tecnologia adequada, (5) promoção de discussão em sala de aula como argumentação estatística e (6) avaliação dos planos e do progresso. A metodologia que segui integra processos e práticas adaptadas da metodologia de investigação estatística. Deste modo procurei que os alunos tivessem oportunidade de realizar aprendizagens a partir de trabalho em investigação estatística desenvolvida em contexto real.

Segundo Ponte e Noll (2017), as investigações estatísticas são também um caminho adequado para ensinar aos alunos os conceitos específicos, representações, processos e procedimentos que constituem o curriculum de Estatística, do ensino primário ao ensino universitário.

É necessário, ao adotar a investigação estatística como aproximação ao ensino-aprendizagem de Estatística em ambiente de contexto real, ter atenção a algumas potenciais condicionantes. São vários os desafios relacionados com o tempo que se requer para uma eficaz transposição da aprendizagem prática para o ambiente da sala de aula.

Esta visão tem sido alvo de alertas por parte de pesquisas conduzidas sobre este tema. Penso que é especialmente relevante a referência e chamada de atenção feita por Ponte e Noll (2017):

Mesmo quando as condições são favoráveis, restam dúvidas sobre se as investigações são o caminho mais eficiente para ensinar todos os processos e ideias estatísticas. Por exemplo, as investigações estatísticas levam um tempo significativo para serem implementadas em programas de educação de professores (tal como na sala de aulas), e portanto o tempo que pode ser dedicado a desenvolver uma profunda e interligada compreensão de ideias para formular questões de pesquisa importantes, desenhar métodos apropriados para recolha de dados, aprender abordagens robustas para análise de dados, e dedicar tempo para o importante trabalho de interpretar resultados, é limitado. (p. 440)

Para o trabalho a desenvolver pelos alunos em contexto real, em ‘ambiente estatístico’, segui um modelo simples de investigação estatística em quatro fases:

1. Identificação do objeto de estudo;
2. Recolha de dados;
3. Organização e apresentação de dados;
4. Análise e interpretação de resultados.

Como a comunicação é um aspeto importante também em Estatística, estava previsto inicialmente que nas últimas aulas da UD, os vários grupos de alunos formados para a realização da investigação estatística, apresentassem os seus resultados à turma, de modo organizado e formal. Deste modo, pensava poder obter respostas ou contributos importantes para as duas primeiras questões identificadas no início deste Plano. No entanto o contexto em que se realizaram as últimas aulas desta UD, inviabilizaram estas apresentações.

Especialmente planeada a pensar na terceira questão, estava uma sessão de debate em “*focus group*”, a realizar no final das 12 aulas da UD. Deste modo procurava compreender se esta metodologia de ensino-aprendizagem da Estatística, a partir de uma investigação estatística baseada em dados obtidos em contexto real, tem boa aceitação por parte dos alunos. De novo, não foi possível manter este plano, pelo que substituí o debate em “*focus group*” por um questionário feito aos alunos para obter as suas opiniões sobre aspetos da metodologia que seguimos na UD-Estatística.

3. UNIDADE DIDÁTICA

1. CONTEXTO ESCOLAR

1. CARACTERIZAÇÃO DA ESCOLA

O Colégio Pedro Arrupe é um estabelecimento de ensino situado na freguesia do Parque da Nações, concelho de Lisboa. Foi inaugurado em 14 de Novembro de 2010, é iniciativa e propriedade do Grupo Alves Ribeiro e conta com a colaboração da Companhia de Jesus (Colégio Pedro Arrupe, 2017).

Do projeto educativo do Colégio Pedro Arrupe, que assenta no legado da pedagogia Inaciana, realça-se a sua missão e visão:

Ajudar a fazer desabrochar a personalidade única de cada aluno, segundo um ideal de formação integral e um harmonioso desenvolvimento físico, intelectual, afetivo, moral e espiritual. Deseja formar homens e mulheres que se distingam pela preparação intelectual e o saber, mas ainda mais pelo ser, um ser feito de conhecimento e aceitação pessoal, reconhecimento dos dons próprios, e responsabilização por os fazer render ao serviço dos outros em compromissos de construção dum mundo mais justo. Procura ajudar cada aluno e cada aluna a assumir progressivamente a responsabilidade primeira pela sua própria formação e esforça-se por incutir hábitos que estimulem a criatividade e a adaptabilidade e permitam a aprendizagem ao longo da vida. Valoriza especialmente o papel da família na educação da cada criança e jovem. (site do Colégio Pedro Arrupe <https://www.colegiopedroarrupe.pt/o-colegio/missao-e-visao/3>)

O Colégio Pedro Arrupe (CPA) tem uma oferta educativa desde o pré-escolar até ao ensino secundário onde disponibiliza todas as opções de ensino. O CPA exerce a sua atividade em instalações que foram concebidas e construídas especialmente para o efeito e que apresentam condições muito adequadas (Colégio Pedro Arrupe, 2017).

As suas instalações estão inseridas numa área de cerca de 72.000 m^2 e compreendem 10 edifícios. No total tem cerca de 55 salas de aula, a maioria equipadas com computador, projetor e quadro interativo. Para além destas salas, o CPA tem ainda uma papelaria, um refeitório, duas bibliotecas, laboratórios, salas de informática, salas de artes, um bar, uma capela, um ginásio, uma piscina, um auditório para 500 pessoas, vários espaços para a prática desportiva. (Colégio Pedro Arrupe, 2017).

Dos espaços verdes, podemos destacar duas zonas de prado e 3 anfiteatros ao ar livre. Os espaços exteriores destinados ao Pré-escolar e ao 1.º e 2.º CEB contam ainda com um pequeno pomar e uma horta pedagógica (Colégio Pedro Arrupe, 2017).

Existem campos desportivos para a prática de desportos coletivos, pista de atletismo, campos de ténis e um campo de relvado sintético, com dimensões oficiais, para a prática do futebol ou do rãguebi, com balneários.

No presente ano letivo, o CPA contou com a inscrição de 1710 alunos originários de uma vasta área geográfica, que vai muito além da sua localização, na zona do Parque das Nações.

2. CARACTERIZAÇÃO DA TURMA

A turma 11.º B1, é uma turma do 11.º ano, constituída por alunos que optaram por Economia, no âmbito da qual frequentam a disciplina de Matemática A. Dos 23 alunos da turma, 9 (39%) são raparigas e 14 (61%) são rapazes, não se identificando significativas diferenças culturais. A maior parte destes alunos tem feito um percurso escolar em conjunto, já se conhecendo bem, o que pode contribuir para o bom ambiente de trabalho em sala de aula que se percebe nesta turma. O professor de Matemática da turma é o Dr. Nuno Santos, professor cooperante no âmbito do estágio do mestrando do Mestrado Ensino de Matemática do IE.

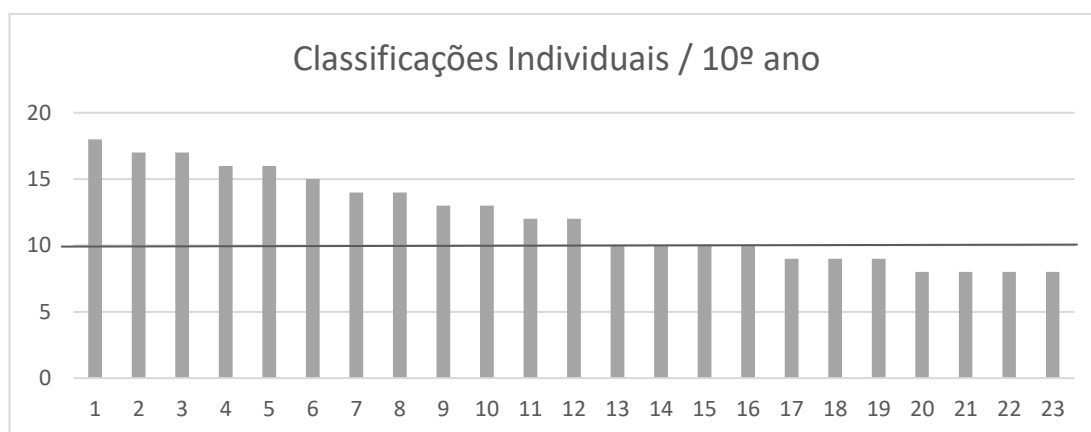


Gráfico 1 : Classificações individuais / 10.º ano

No gráfico anterior, estão representadas as notas na disciplina de matemática dos alunos desta turma no 3º período do 10º ano (ano letivo 2017/18). Podemos constatar que 11 dos 23 alunos tiveram 10 ou menos valores, o que representa um desafio para uma turma de alunos que optaram pela área das Ciências Socioeconómicas.

Os alunos desta turma mostram estar habituados a fazer trabalho em sala de aula, mas nem todos dão mostras de trabalho individual sistemático “em casa”.

A carga horária semanal na disciplina de Matemática A desta turma é de 5 horas, como se pode verificar pelo quadro seguinte (Horário semanal da Turma 11.º B1)

Quadro 1: Horário semanal da Turma 11.º B1

TURMA 11.ºB1	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
08h15 - 09h15					Matemática
09h25 - 10h25				Matemática	Matemática
10h50 - 11h50	Matemática				
12h00 - 13h00					
14h30 - 15h30			Matemática		

2. ANCORAGEM DA UNIDADE DIDÁTICA NO PROGRAMA DE MATEMÁTICA E NAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS NO DOMÍNIO ESTATÍSTICA

A Unidade Didática (UD) que lecionei – “Estatística” – está ancorada no programa de Matemática nos Domínios EST10 e EST11 (Ministério da Educação, 2014), estando nele previsto um total de 18 aulas para trabalhar os respetivos conteúdos do 10º ano (Características amostrais) e 8 aulas para os do 11.º ano (Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação).

De acordo com o Programa e Metas, no 10.º ano e no 11.º ano, é feita uma abordagem aos conteúdos que foca de modo especial as expressões matemáticas que suportam os conceitos estatísticos com que estão relacionados:

No domínio Estatística, começa-se por introduzir o sinal de somatório e algumas das suas regras operatórias, que serão úteis em diversas ocasiões ao longo do Ensino Secundário... Para além das definições de variável estatística, amostra, média, variância, desvio-padrão e percentil, analisam-se as propriedades básicas destes conceitos e as respetivas interpretações em exemplos concretos.” (Ministério da Educação, 2014).

“estudam-se as retas de mínimos quadrados associadas a uma sequência de pontos do plano. As coordenadas destes pontos podem em particular representar os valores de uma amostra bivariada, o que permite a aplicação deste conceito ao estudo da correlação de duas variáveis estatísticas definidas numa mesma população (Ministério da Educação, 2014, p. 16).

Tendo em consideração a forte vertente prática que segui na metodologia de ensino-aprendizagem nas aulas da UD que lecionei, o Plano da Prática Letiva foi feito tendo em conta, de modo mais marcante, o definido nas Aprendizagens Essenciais (Ministério Educação, 2018, p. 2): “O papel relevante da Estatística na sociedade atual justifica a integração de alguns dos seus conteúdos essenciais e a extensão do programa e metas motiva a sua abordagem apenas no 11.º ano”

Assim, trabalhei os conteúdos que no Programa e Metas estão estruturados para o 10.º e 11.º anos, nas 12 aulas que planeei para esta UD no 11.º ano e procurei fazer uma Gestão Curricular adaptada a esta orientação. Os conteúdos foram trabalhados segundo uma metodologia e seguindo uma estratégia que estão totalmente alinhados com as orientações das Aprendizagens Essenciais (Ministério Educação, 2018), como segue:

Recorrendo a situações e contextos variados, incluindo a utilização de materiais diversificados e tecnologia, os alunos devem resolver tarefas que requeiram a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemáticos, para que sejam capazes de:

- Reconhecer o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento abordando nomeadamente os conceitos de Recenseamento e Sondagem (população e amostra);
- Organizar e interpretar dados de natureza quantitativa e qualitativa, variáveis discretas e contínuas;
- Interpretar medidas de localização de uma amostra: moda, média, mediana, quartis e percentis; medidas de dispersão: amplitude interquartil, variância, desvio-padrão;
- Abordar gráfica e intuitivamente distribuições bidimensionais, nomeadamente o diagrama de dispersão, o coeficiente de correlação e reta de regressão. (Ministério Educação, 2018, p. 9).

3. ESTRATÉGIA DE ENSINO

Esta UD-Estatística, desenrolou-se de uma forma mista. Incluiu aulas com alguns momentos de pendor expositivo para o ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos e estatísticos. Algumas aulas foram orientadas para a discussão e desenvolvimento de ideias estatísticas, para a clarificação e interpretação do conjunto de dados reais a utilizar, para a realização de conjeturas, para atividades de desenvolvimento de raciocínio estatístico dos alunos. Estas aulas foram, no entanto, prejudicadas pela necessidade de recorrer ao uso da Plataforma CPA OnLine, onde não foi possível manter o nível de discussão e as dinâmicas entre os alunos que estava originalmente planeado.

Estas aulas foram precedidas de forma intercalada com aulas de trabalho prático com dados reais obtidos através de inquéritos, realizados pelos alunos em trabalho de campo efetuado junto de outras turmas do ensino secundário do Colégio Pedro Arrupe. Na fase final da UD, a argumentação estatística evidenciada pelos alunos esteve presente nas ideias estatísticas resultantes das várias tarefas desenvolvidas ao longo do trabalho. Os alunos foram organizados em pequenos grupos de quatro e trabalharam seguindo uma abordagem de pequenos trabalhos de investigação estatística com dados reais.

A Estatística foi trabalhada com os alunos, com base em conceitos de construção de conhecimento a partir do envolvimento dos alunos em atividades práticas. Foi usada tecnologia (calculadora gráfica, folha de cálculo) aplicada a uma investigação estatística comum, com dados reais e de forma a permitir a compreensão do processo estatístico e o desenvolvimento de análise crítica baseada no entendimento múltiplo de ideias, dados e informações estatísticas semelhantes aquelas com que os alunos são confrontados no dia-a-dia. Procurei promover oportunidades de desenvolvimento de raciocínio estatístico por parte dos alunos.

Nas últimas aulas, em modo Plataforma CPA OnLine, os grupos de alunos realizaram duas tarefas orientadas para resultados e conclusões dos seus trabalhos com os dados recolhidos junto das turmas-alvo.

A avaliação foi realizada a partir das tarefas realizadas por cada aluno. Os critérios de avaliação foram definidos tendo em conta, entre outros, aspetos relacionados com a evidência da presença de conhecimentos, ideias e raciocínio estatísticos.

Esta estratégia de ensino permitiu criar um ambiente de aprendizagem propício ao envolvimento motivado dos alunos, ao trabalharem com dados reais preparados e recolhidos por eles próprios, numa temática e segundo uma metodologia que pode vir a ser de grande utilidade para quem escolheu um curso na área das Ciências Socioeconómicas.

Procurei com esta estratégia, promover oportunidades para o desenvolvimento de raciocínio estatístico e também conseguir que depois do “estudo da Estatística” os alunos tenham podido melhorar a sua literacia estatística e a sua capacidade de intervenção como cidadãos esclarecidos na realidade do dia-a-dia.

1. O ESTUDO DE INVESTIGAÇÃO ESTATÍSTICA A REALIZAR PELA TURMA

No âmbito da UD, os 23 alunos da turma 11.º B1, do 11.º ano, foram organizados em 6 grupos e procuraram aplicar conceitos e conhecimentos estatísticos alvo da aprendizagem da UD, de um estudo concreto, a um caso prático em que os alunos participaram e se envolveram pessoalmente.

O principal objetivo desse estudo estatístico consistia em, recorrendo a metodologias, ferramentas e procedimentos de base estatística, **compreender se existe relação estatística entre a quantidade de horas de estudo da Matemática fora da escola reportadas pelos alunos e as respetivas classificações obtidas no período anterior.**

Os alunos que participaram neste estudo pertencem a seis turmas de Matemática do ensino secundário do Colégio Pedro Arrupe: duas turmas do 10.º, duas do 11.º (não foi incluída a turma 11.º B1) e duas do 12.º ano. Em cada turma, para a amostra a usar neste estudo, foram selecionados 10 alunos mais 2 alunos suplentes, de forma aleatória, a partir dos seus números de alunos.

Cada um dos 6 grupos realizou o seu estudo concreto, utilizando os dados recolhidos por si junto da turma que lhe foi atribuída. Estes dados foram recolhidos e tratados de modo a poderem ser consolidados e analisados em conjunto, constituindo uma amostra

da população dos alunos das 6 turmas do 11.º ano do ensino secundário do Colégio Pedro Arrupe inscritos em Matemática, que participaram na investigação estatística.

4. TAREFAS E MATERIAIS UTILIZADOS

1. DESENVOLVIMENTO DAS AULAS / GRUPOS DE TAREFAS

O Plano de aulas que estava previsto para a UD, foi impactado pela crise sanitária COVID-19 tendo sido necessário alterá-lo e adaptá-lo à nova realidade a partir do dia 12 de março, dia em que a Direção do Colégio Pedro Arrupe suspendeu todas as aulas presenciais. Este novo plano é identificado como Plano Concretizado.

Apresento em seguida, na Tabela 1, o esquema geral da planificação inicial. Este esquema de Plano Inicial serve de base de leitura do Plano Concretizado que se apresenta seguidamente, na Tabela 2.

As aulas da UD foram estruturadas para se desenvolverem ao longo de 12 aulas de 60 minutos cada. Estava previsto que a 1.^a aula fosse no dia 2 de março e a 12.^a no dia 20 de março de 2020, sendo que a numeração usada corresponde a cada aula desta UD (Ver tabela 1).

Devido às alterações motivadas pelo ajustamento das aulas à crise do COVID-19, a 1.^a aula realizou-se no dia 2 de março, a 11.^a realizou-se no dia 24 de março e a 12.^a aula, onde se fez a Avaliação-Aula, realizou-se no dia 22 de abril, imediatamente a seguir ao recomeço do 3.º período.

Tabela 1: Esquema geral da planificação inicial

Aulas	Tópico
1	Introdução e apresentação da UD/Estatística (a investigação estatística). Constituição dos 6 grupos de alunos.
2	Inquéritos. Desenhar o inquérito a usar na investigação estatística. Tarefas.
3	Variável estatística qualitativa e quantitativa, amostra, população, sondagem, censos.
4	Média de uma amostra de uma variável. Variância e desvio-padrão de uma amostra. Amostragem.
5	Mediana, Quartis. Percentil de ordem k . Gráfico de Extremos e Quartis.
6	Análise e interpretação dos dados univariados recolhidos.
7	Amostra de dados bivariados quantitativos de dimensão n . Nuvem de pontos. Variável resposta e variável explicativa. Reta de mínimos quadrados. Coeficiente de correlação.
8	Análise dos dados bivariados recolhidos e conclusões.
9	Apresentação sintética de resultados pelos Grupos e Avaliação – I.
10	Apresentação sintética de resultados pelos Grupos e Avaliação – II.
11	Apresentação de um resumo dos resultados do Global da Turma (as 6 turmas) e Conclusões.
12	Avaliação.

Tabela 2: Esquema geral da planificação concretizada

Aulas	Tópico
1	Apresentação da Unidade Didática Estatística. investigação estatística.
2	Investigação estatística. Inquéritos e questionários. Grupos de trabalho.
3	Média e desvio-padrão de uma amostra. Amostragem.
4	Amostra ordenada. Mediana, Quartis. Diagrama de Extremos e Quartis.
5	Organização e tratamento dos dados recolhidos. Aplicação prática à investigação estatística em curso.
6	Análise e interpretação dos resultados. Aplicação prática à investigação estatística em curso. Trabalho Autónomo “a fazer em casa”; Avaliação-I.
7	Dados bivariados quantitativos. Nuvem de pontos. Reta de mínimos quadrados. Coeficiente de correlação. Trabalho autónomo.
8	Dados bivariados quantitativos. Nuvem de pontos. Reta de mínimos quadrados. Coeficiente de correlação. Trabalho autónomo. (Continuação).
9	Dados bivariados quantitativos. Coeficiente de correlação. Uso da Calculador Gráfica na Análise dos dados bivariados recolhidos. Conclusões.
10	Dados bivariados quantitativos. Coeficiente de correlação. Uso da Calculador Gráfica na Análise dos dados bivariados recolhidos. Conclusões. (Continuação)
11	Dados bivariados. Tarefa de Aplicação com os dados da investigação estatística; Avaliação-II.
12	Avaliação Aula; Avaliação – III.

O detalhe dos conteúdos das aulas realizadas, de acordo com a planificação concretizada (Anexo B: Plano Concretizado das 12 aulas), foi o que se apresenta em seguida, para cada uma das 12 aulas, numeradas:

1. Apresentação da Unidade Didática Estatística. Investigação estatística.
 - a. Apresentar o modo como a UD se vai desenrolar: Apresentar a investigação estatística a realizar pelos grupos como forma de promover as aprendizagens; Apresentar o modo de avaliação adotado (apresentações do trabalho desenvolvido por cada grupo, autoavaliação individual e avaliação aula); Apresentar o modo como a UD se vai desenrolar e o modo de avaliação qualitativa adotado (apresentações do trabalho desenvolvido por cada grupo e autoavaliação individual).
 - b. Introdução ao estudo da Estatística: Estatística Descritiva e Inferencial. Dados e Contexto; População e Amostra. Dimensão da amostra. Sondagem e Censos; Variável Estatística (qualitativa e quantitativa).
 - c. Introdução à investigação estatística: Lançar questões que motivem o debate sobre ideias estatísticas; Questão estatística pressupõe variabilidade dos dados; Representações gráficas e medidas estatísticas ajudam a interpretação dos dados; Lançar questões sobre o tema da investigação estatística “O tempo de estudo e os resultados, em Matemática”.
2. Investigação estatística. Inquéritos e questionários. Grupos de trabalho.
 - a. As 4 fases de uma investigação estatística. Debater detalhes sobre o inquérito: Formular o problema, na forma de questões que se procuram responder através de dados; Planeamento adequado para recolha de dados apropriados; Organizar e tratar os dados recolhidos, através de tabelas, gráficos e algumas medidas e realizar a análise de dados; Interpretação dos resultados obtidos e formulação de conclusões.
 - b. Desenhar um plano da investigação estatística.
 - c. Introdução do conceito de Inquérito: Apresentação dos detalhes sobre o inquérito a efetuar. Questionário.

- d. Organização de Dados: Utilização do Excel/Sheets para registo dos dados.
- e. Constituição de 6 grupos de alunos: Definir o modo de funcionamento dos grupos no âmbito da investigação.
- f. Organização da recolha de dados pelos grupos: Atribuição das turmas do 10.º, 11.º e 12.º a inquirir pelos grupos; Fazer a seleção aleatória pelo número de aluno, dos 10 a 12 alunos de cada turma (10 mais 2 suplentes) a serem inquiridos por cada grupo; Os grupos realizam os levantamentos dos dados de campo junto das turmas através de formulário a preencher pelos inquiridos, registam e organizam esses dados em folha/quadros previamente construídos; Estabelecer prazos e momentos intermédios de execução.

3. Média e desvio-padrão de uma amostra. Amostragem.

- a. Média de uma amostra. Desvio em relação à média: Conceito e Cálculo da média; Lançar questões sobre variabilidade; Características da média como medida estatística de localização; Desvio em relação à média.
- b. Variância e Desvio-padrão de uma amostra: A variância e o Desvio-padrão; Medidas de dispersão.
- c. Propriedades da média, variância e desvio-padrão: Lançar questões sobre as medidas de localização e de dispersão.
- d. Amostragem: Promover o debate sobre as medidas estatísticas como característica de cada conjunto de dados; A estimativa; Debater o conceito e a importância da amostragem.

Amostragens: Aleatória Simples, Estratificada, Sistemática.

4. Amostra ordenada. Mediana, Quartis. Diagrama de Extremos e Quartis

- a. Amostra Ordenada: Amostra com dados qualitativos ou discretos; Amostra com dados quantitativos organizados em classes; Lançar questões sobre as medidas de localização e de dispersão.
- b. Mediana, Quartis, Amplitude: Mediana; Quartis; Mediana e Amplitude interquartis.

- c. Gráfico/Diagrama de Extremos e Quartis: Construção do gráfico; Interpretações a partir do gráfico.
- 5. Organização e tratamento dos dados recolhidos. Aplicação prática à investigação estatística em curso
 - a. Organização e tratamento dos dados: Utilização de folhas de cálculo; Utilização de calculadora gráfica; Gráficos de Barras.
 - b. Gráfico de Extremos e Quartis: Utilização de folhas de cálculo; Utilização de calculadora gráfica.
 - c. Exemplos de organização e tratamento de dados, com os dados da investigação: Utilização de folhas de cálculo; Utilização de calculadora gráfica.
- 6. Análise e interpretação dos resultados. Aplicação prática à investigação estatística em curso. Trabalho Autónomo “a fazer em casa”. Avaliação-I.
 - a. Trabalho autónomo feito em casa, com os dados da investigação, focado em: Organização de dados em folha de cálculo, validação de erros grosseiros; Classificação de variáveis; Tabelas de frequência, gráficos circulares, gráficos de barras, moda; Amostras ordenadas; Mediana, Quartil 1, Quartil 3; Diagramas de Extremos e Quartis; Amplitude Interquartis; Interpretações e Inferências; comentários; Dados agrupados, Tabela de frequências; Uso da Calculadora Gráfica, determinação de medidas estatísticas: média, desvio-padrão da amostra, mediana, quartil 1 e quartil 3, extremos; Construção de Diagrama de Extremos e Quartis; Interpretações e inferências; comentários.
- 7. Dados bivariados quantitativos. Nuvem de pontos. Reta de mínimos quadrados. Coeficiente de correlação. Trabalho autónomo.
 - a. Regressão e Correlação.
 - b. Amostra de Dados bivariados: Lançar questões que permitam introduzir e trabalhar estes conceitos.
 - c. Nuvem de pontos ou Diagrama de dispersão.

- d. Variável explicativa e variável resposta.
8. Dados bivariados quantitativos. Nuvem de pontos. Reta de mínimos quadrados. Coeficiente de correlação. Trabalho autónomo. (Continuação)
- a. Desvios verticais.
 - b. Reta de mínimos quadrados: Utilizar a calculadora gráfica para a obtenção da reta dos mínimos quadrados e do gráfico de dispersão dos dados.
 - c. EXTRA: Como determinar reta dos mínimos quadrados usando tabelas e cálculo sem calculadora gráfica.
 - d. Trabalho Autónomo dos Grupos.
9. Dados bivariados quantitativos. Coeficiente de correlação. Uso da Calculadora Gráfica na Análise dos dados bivariados recolhidos. Conclusões.
- a. Coeficiente de correlação linear.
 - b. Coeficiente de correlação linear: Associação linear positiva e negativa entre variáveis e suas representações gráficas; Associação linear forte e fraca.
 - c. Utilizar a calculadora gráfica para o cálculo do coeficiente de correlação: Trabalhar com os gráficos em simulações; Interpretação de resultados a partir dos dados da investigação Estatística.
10. Dados bivariados quantitativos. Coeficiente de correlação. Uso da Calculadora Gráfica na Análise dos dados bivariados recolhidos. Conclusões (Continuação).
- a. Trabalho autónomo “em casa”: Variáveis explicativa e resposta; correlação linear entre variáveis; média das amostras; nuvem de pontos e reta dos mínimos quadrados; inferências.
11. Dados bivariados. Tarefa de Aplicação com os dados da investigação estatística; Avaliação-II.

- a. Apresentação da Tarefa a realizar por cada elemento de cada grupo.
- b. Trabalho autónomo: Tarefa Aplicação.

12. Avaliação Aula; Avaliação – III.

- a. Apresentação e realização da Avaliação Aula.
- b. Comentários e observações.

2. MATERIAIS E RECURSOS USADOS

- a. Inquéritos impressos em papel.
- b. Folhas “tipo Excel” impressas para organização de dados.
- c. Calculadora Gráfica.
- d. Quadro Interativo.
- e. Guiões para utilização de Calculadoras Gráficas.
- f. Recursos diversos de software para organização e tratamento de dados: Excel, Word.
- g. Telemóveis para gravação vídeo, som e fotográfica.
- h. Plataforma CPA OnLine.
- i. Aplicações para comunicação e envio de materiais: Whatsapp, e-mail.

3. AULAS LECIONADAS – DIÁRIO DE BORDO

O período em que decorreu a Prática de Ensino Supervisionada, foi marcado pela suspensão das aulas presenciais e a adoção de tecnologia de comunicação e de aplicações de apoio a aprendizagem a distância. Foi desenvolvido um processo baseado em soluções criativas para levar a cabo as aulas e respetivo plano de ensino-aprendizagem.

Ao longo de todo o período em que decorreu a UD-Estatística fui mantendo, tal como estava planeado, um Diário de Bordo (onde registei notas, comentários e observações) que se mostrou ser um bom repositório de memórias sobre detalhes e acontecimentos que estiveram presente na realidade educativa com que tive que trabalhar.

Assim, para a descrição do detalhe da concretização das 12 aulas, recorri ao Diário de Bordo, para melhor se compreender a adaptação que foi necessário efetuar “a meio da UD” de modo a manter elevada qualidade no ensino-aprendizagem praticado e se cumprissem os objetivos da Prática de Ensino Supervisionada.

O Diário de Bordo pode ser consultado na íntegra no Anexo C.

As aulas que estão indicadas como tendo decorrido em mais que um dia, foram aulas lecionadas através da Plataforma CPA OnLine, e decorreram ao longo de um período mais vasto do que apenas um tempo letivo presencial.

4. TAREFAS REALIZADAS EM TRABALHO AUTÓNOMO

TAREFA AUTÓNOMA 1: Trabalho Plataforma 1

Desenvolvimento de um pequeno trabalho a partir dos dados recolhidos na investigação estatística

Na tarefa Trabalho Plataforma 1 (enunciado em Anexo E), os alunos usaram os dados recolhidos pelo seu grupo na investigação estatística, a partir dos quais lhes foram apresentadas questões relacionados com características amostrais que tinham sido trabalhadas nas aulas anteriores, nomeadamente:

- Organização e validação dos dados;
- Classificação de variáveis;
- Construção de tabelas de frequências;
- Tabelas de frequência com dados agrupados;
- Construção de gráficos circulares e de barras;
- Determinação de características amostrais e medidas estatísticas como moda, mediana, quartis, amplitude interquartis,
- Construção de diagramas de extremos e quartis;
- Uso de calculadora gráfica para determinação de média, desvio-padrão, mediana, quartis, extremos.

Para cada questão apresentada foi pedido aos alunos que apresentassem um breve comentário, com o objetivo de poder vir a ser evidenciado a presença de algum raciocínio estatístico.

Foi pedido aos alunos que apresentassem as suas respostas num ficheiro de texto, tipo “Word” onde, para além das suas respostas escritas, incluíam listas, tabelas, gráficos e imagens que julgassem adequado para completar a tarefa.

As respostas foram enviadas por e-mail até ao dia 18-03-2020, de acordo como prazo estabelecido.

TAREFA AUTÓNOMA 2: Tarefa de Aplicação

Trabalho com dados bivariados e coeficientes de correlação, considerando os Dados Recolhidos na Investigação Estatística e usando a Calculadora Gráfica, para efetuares os teus cálculos:

Nesta tarefa (enunciado em Anexo F) foi lançada uma questão para investigação e lançadas perguntas para guiar os alunos em alguns passos intermédios, como apoio para chegarem a conclusões quanto à questão de investigação proposta.

Questão para a Investigação: Tendo em conta a turma que foi alvo do questionário que realizaste e os alunos da respetiva amostra, pretende-se perceber se o tempo de estudo de Matemática, pode ter relação com as notas que os alunos obtiveram a Matemática no 1.º período.

Na tarefa, utilizando a calculadora gráfica como ferramenta base, foram sendo trabalhados os seguintes conteúdos:

- Adequação de medida estatística a um caso concreto;
- Construção de tabelas com amostras bivariadas;
- Variável explicativa e variável resposta;
- Determinação de média e desvio-padrão;
- Diagrama de dispersão e nuvem de pontos;
- Equação da reta dos mínimos quadrados;
- Coeficiente de correlação linear da amostra bivariada;
- Classificação da associação linear entre as duas variáveis;

Foi pedido aos alunos que, num comentário breve, apresentassem as conclusões a que chegassem quanto à questão de investigação colocada. Foi ainda pedido que apresentassem as suas respostas num ficheiro de texto, como um pequeno relatório em “Word” onde, para além das suas respostas escritas, incluíssem as fotografias dos principais ecrãs da calculadora gráfica e outras tabelas usadas nos cálculos. As respostas foram enviadas por e-mail até ao dia 26-03-2020, de acordo como prazo estabelecido.

4. PROCEDIMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

Como referido no início deste Relatório de Prática de Ensino Supervisionada, defini como objetivo:

Compreender como a aprendizagem e a aplicação dos conhecimentos estatísticos a um trabalho concreto, em simultâneo, e em contexto “real”, podem contribuir para a aprendizagem da Estatística e para o desenvolvimento de raciocínio estatístico dos alunos do 11.º ano.

A presente investigação adota uma abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e os dados são recolhidos em ambiente natural no decorrer das aulas em interação com os alunos. Não sendo objetivo obter conclusões generalizáveis, a representatividade dos alunos participantes em relação a uma população mais ampla não é relevante.

Uma das formas de conseguir a compreensão referida no objetivo está certamente relacionada com o modo como os alunos se envolvem na realização da investigação estatística e com o feedback dado diretamente por eles. Deste modo, no final da UD, os alunos da turma foram convidados a responder a um **Questionário** realizado com o objetivo de conhecer a sua reação à metodologia seguida na UD. O questionário foi enviado aos alunos no dia 28 de março, imediatamente após o fim do 2.º período. Recebi respostas de 11 alunos, cerca de metade dos alunos da turma. Desta forma se substituiu a prevista sessão de **focus group** que não foi possível realizar no final da UD. Embora este questionário seja uma forma apropriada para recolher determinado tipo de dados para a investigação, a restante recolha de dados foi efetuada ao longo do desenrolar de toda a UD, recorrendo a outros instrumentos que permitem obter outros tipos de dados.

No Plano inicial, estava previsto que a **observação** seria uma das principais formas de obter dados para a investigação, nomeadamente os registos efetuados em **gravação de vídeo e outras imagens**, nos momentos das apresentações finais dos grupos. Dadas as condicionantes resultantes do COVID-19, não foi possível realizar estas apresentações, pelo que este método de recolha de dados ficou inviabilizado.

Os principais procedimentos usados na recolha de dados para a investigação, foram os **documentos e trabalhos** elaborados pelos alunos no âmbito das tarefas que lhes foram propostas no decorrer da UD. Assim, estes documentos de trabalho (incluindo

pequenos vídeos e fotografias), produzidos pelos alunos e grupos ao longo da realização da investigação estatística, permitiram acompanhar a evolução do raciocínio estatístico e da aprendizagem dos alunos.

Ainda como forma de registar a observação ao longo das 12 aulas e respetivo desenvolvimento dos trabalhos, foi mantido um registo diário, tipo **Diário de Bordo**. Nele registei não só situações que observei, mas também notas sobre aspetos que me pareceram relevantes no momento.

A **Avaliação Aula** realizada na Aula 12, foi também uma importante fonte de dados para a compreensão de como a aprendizagem através de investigação estatística com dados de contexto real, contribuiu para a aprendizagem da Estatística pelos alunos da turma.

A relação entre estes instrumentos de recolha de dados e as questões a que procurei responder a partir da análise desses dados, está indicada na Tabela 3.

Tabela 3: Fontes de dados e questões do estudo

	Questão 1 (Aprendizagem)	Questão 2 (Raciocínio Estatístico)	Questão 3 (Reações)
Questionário aos alunos - Para procurar saber a opinião do grupo sobre a metodologia seguida na UD.			X
Recolha documental AA: Documentos de trabalho produzidos no âmbito da Avaliação Aula.	X	X	
Recolha documental: Fotografias, documentos e relatórios elaborados no âmbito da Tarefas propostas.	X	X	
Diário de bordo: Registo de ocorrências, notas e pensamentos, feito no final de cada aula ou de cada momento relevante para o desenrolar da investigação estatística	X	X	X

1. PARTICIPANTES DO ESTUDO

1. A TURMA

A turma em que o presente trabalho de cariz investigativo foi realizado, não foi escolhida por alguma característica particular. Foi a turma escolhida para a minha atividade de estágio por ser a mais conveniente, tendo em conta as turmas do professor

cooperante, o Dr. Nuno Santos, e a minha disponibilidade de horários do IE. Foi, portanto, nela que desenvolvi a investigação. Os alunos participantes na investigação, integram a turma B1 do 11.º ano, não tendo sido necessário verificar outros requisitos para além de ser aluno da turma. Como já foi referido, a turma é constituída por 23 alunos (9 raparigas e 14 rapazes) e pode ser considerada uma turma sem problemas que precisem de atenção especial.

2. OS GRUPOS DE TRABALHO

A partir dos 23 alunos da turma, foram constituídos 6 grupos de trabalho com a finalidade de desenvolverem trabalho autónomo em grupos formados por quatro ou três elementos. Cada um destes grupos, trabalhou numa investigação estatística que teve como alvo uma turma do ensino secundário do Colégio Pedro Arrupe. Deste modo foi possível proporcionar aos alunos situações de ensino-aprendizagem de Estatística baseadas em contexto real.

Estava planeado que cada grupo efetuasse a sua investigação estatística e no final da UD, realizasse uma apresentação dos resultados e conclusões a que chegaria, em aula, para toda a turma. Seria também possível fazer comparações de resultados dos diferentes grupos, permitindo também, deste modo, desenvolver algumas das vertentes do raciocínio estatístico e evidenciar processos de inferência estatística.

A constituição dos grupos de trabalho teve, portanto, finalidades operacionais e os grupos foram formados através de uma seleção feita pelo professor Nuno Santos e por mim, com base no conhecimento que temos dos alunos, de modo que os grupos ficassem com uma constituição equilibrada do ponto de vista da diversidade de personalidades e de postura previsível perante o trabalho a realizar. Não se teve em consideração necessidades especiais de aprendizagem, por não existirem nesta turma, ou outros fatores como género ou nível de classificações anteriores dos alunos, por não serem relevantes para a investigação.

Os grupos formados, e as respetivas turmas-alvo de cada grupo, foram os seguintes:

Grupo 1: Bruno + Isabel + Pedro + Telma	Turma 10.º A1
Grupo 2: Bernarda + Carina + José + Mário	Turma 10.º B

Grupo 3: Costa + Gonçalves + Manuela + Tomé	Turma 11.º A1
Grupo 4: Carlos + Diogo + Mafalda + Rui	Turma 11.º A2
Grupo 5: Ilda + Mateus + Rute + Constantino	Turma 12.º A1
Grupo 6: Armando + Gonçalo + Liliana	Turma 12.º B1

2. RECOLHA DE DADOS: CONDICIONANTES E OPÇÕES

Como já foi referido, a recolha de dados para o presente trabalho de cariz investigativo, foi muito condicionada pelo efeito COVID-19, pois parte significativa da recolha estava planeada ser feita por métodos de observação direta dos alunos, nomeadamente recorrendo a gravação vídeo das apresentações a realizar pelos grupos no final da UD, o que não foi possível por terem sido suspensas as aulas presenciais e não ter sido possível substituir as apresentações presenciais por outras em modo OnLine.

O próprio trabalho de investigação estatística que seria realizado, na totalidade, por cada grupo de alunos em trabalho autónomo, ficou limitado. A recolha dos dados junto das turmas-alvo, com amostras predefinidas, foi efetuada por cada grupo, mas sem que depois houvesse continuidade na análise de resultados em grupo em modo autónomo. Essa parte do trabalho de análise em modo autónomo foi realizado individualmente, por cada aluno, se bem que usando os dados recolhidos pelo grupo. Esta alteração deveu-se ao facto de as aulas terem sido suspensas a meio da realização do previsto para a UD, já depois da recolha de dados, mas antes das atividades de análise de dados, inferência estatística e apresentação de conclusões. Esta segunda parte do trabalho de investigação estatística feita pelos alunos, seria a principal fonte de recolha de dados para o presente trabalho de cariz investigativo.

Também não me foi possível concretizar a reunião de **focus group** que estava planeada inicialmente, tendo substituído esta reunião pelo **Questionário aos alunos**.

3. MÉTODOS E RECOLHA DE DADOS

1. RECOLHA DOCUMENTAL

Optei por recolher os dados para a presente investigação, principalmente com base em documentos, trabalhos realizados no âmbito de tarefas propostas, pequenos vídeos ou fotografias feitas pelos alunos na execução das referidas tarefas.

2. QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS

Outra fonte de dados, foi o conjunto de respostas dos alunos ao Questionário aos alunos que enviei no final da UD, para compreender as suas reações à metodologia de ensino-aprendizagem seguido.

3. DIÁRIO DE BORDO

Por fim, realço a relevância do Diário de Bordo que fui mantendo ao longo do período em que decorreu a UD, pois esta foi uma forma consistente de ir registando informação sobre o trabalho realizado nos vários momentos e sobre o desenvolvimento das atividades de ensino-aprendizagem da Estatística.

4. ANÁLISE DE DADOS

A análise de dados contempla um processo de trabalho com os dados que visa a sua organização e síntese, a procura de padrões e de aspetos de particular importância, de forma a decidir aquilo que deve ser transmitido a outros; pretende organizar, compreender e interpretar todos os dados recolhidos durante a investigação, visando apresentar respostas às questões formuladas inicialmente (Bogdan & Biklen, 1994)

Neste processo, defini categorias a considerar na análise de acordo com as questões de investigação. Desta forma, considereirei três categorias:

- (i) **Aprendizagem** de Estatística em ambiente de investigação estatística;
- (ii) Desenvolvimento de **Raciocínio Estatístico** usando trabalho em contexto real;
- (iii) **Reações** dos alunos face a esta metodologia.

Na primeira categoria, Aprendizagem, a partir da produção escrita pelos alunos como resultado da Tarefa Autónoma 1: Trabalho Plataforma 1, da Tarefa Autónoma 2:

Tarefa Aplicação e da Avaliação Aula, procurei identificar e analisar aspetos que revelem evidências da presença de Aprendizagem Estatística em ambiente de investigação estatística em contexto real, como foi concebido para esta UD. Procurei dar especial atenção à aprendizagem da utilização das calculadoras gráfica no âmbito da Estatística, pois essa era uma área onde os alunos não tinham qualquer tipo de prática ou conhecimento prévio do ano anterior, mas também a outras vertentes da utilização de tecnologia na resolução de problemas de aplicação em Estatística, como o caso da utilização de folhas de cálculo (software tipo Excel) para organizar, tratar e representar graficamente os dados e as suas características amostrais.

Na segunda categoria, Raciocínio Estatístico, a partir das produções escritas nas respostas dadas pelos alunos na resolução da Tarefa Autónoma 1: Trabalho Plataforma 1, na Tarefa Autónoma 2: Tarefa Aplicação e na Avaliação Aula, procurei identificar e analisar evidências de que os alunos usaram raciocínio estatístico para chegar a conclusões, produziram processos de inferência estatística. Esta análise pretendeu estudar se os alunos desenvolveram raciocínio estatístico. Estes alunos da turma 11.º B1 não estudaram Estatística no 10.º ano, sendo a aprendizagem destes dois anos fruto do trabalho efetuado ao longo da UD-Estatística que lecionei.

Na terceira categoria, Reações, a partir das respostas dos alunos ao questionário que lhes enviei no final da UD, procurei focar-me nas reações de agrado ou desagrado, que permitam tirar conclusões sobre a aceitação da metodologia seguida no ensino-aprendizagem da Estatística tal como realizada nesta UD.

De modo transversal a estas três categorias, recorri ao Diário de Bordo, como fonte de dados que me ajudaram a dar consistência e frescura às análises que realizei a partir dos restantes métodos de recolha de dados.

Tendo em consideração o ambiente de ensino-aprendizagem concreto, adequado à realidade da turma 11.º B1, selecionei tarefas pertinentes para responder às questões de investigação, que permitam análises sustentadas em evidências e nas resoluções que os alunos produziram.

5. QUESTÕES DE NATUREZA ÉTICA

A presente investigação seguiu o guia para investigadores e doutorandos divulgado pelo IE através do documento “Investigação e ética no IE” e não foi necessário pedir um parecer à CdE, estando de acordo com o definido na Carta de Ética do IE (IEUL, 2016).

Segundo Bogdan e Biklen (1994) há duas questões de relevo em relação à ética, quando se trata de uma investigação envolvendo pessoas: “o consentimento informado e a proteção dos sujeitos contra qualquer espécie de danos” (p. 75). Esta investigação envolve pessoas que são menores de idade, pelo que é necessário dar atenção especial às questões de natureza ética.

Os participantes foram devidamente informados sobre o estudo no decorrer de uma aula anterior ao início da UD, no dia 21 de fevereiro, em que fiz uma breve apresentação da UD à turma, com indicação detalhada de todos os processos de recolha de dados, incluído a possibilidade de filmagens vídeo e fotografia (para o que previamente obtive autorização escrita de encarregados de educação e alunos, que acabaram por não serem necessárias pois não cheguei a fazer filmagens com alunos presentes). Foi dado conhecimento do âmbito em que este estudo ia ser realizado, dos seus propósitos, dos dados a recolher e das características da sua participação (Anexo A: Apresentação da UD-Estatística à Turma). Relativamente à confidencialidade e privacidade, toda a informação que recolhi foi armazenada de forma segura, tendo sido utilizada apenas para a elaboração deste relatório e destruída no final.

Os nomes dos alunos referidos no presente relatório são fictícios, não havendo relação entre estes e os nomes reais.

5. APRESENTAÇÃO E DESCRIÇÃO DO ESTUDO

Como referi, considerei três categorias a analisar, em função das questões principais a que procuro responder neste estudo e que identifico como Aprendizagem, Raciocínio Estatístico e Reações dos Alunos.

O objetivo estabelecido para o presente estudo foi “compreender como a aprendizagem e a aplicação dos conhecimentos estatísticos a um trabalho concreto e em contexto “real”, podem contribuir para a aprendizagem da Estatística e para o desenvolvimento de raciocínio estatístico dos alunos do 11.º ano”. Tendo em consideração este objetivo, foi concebida uma forma de basear o ensino-aprendizagem num trabalho concreto, desenvolvido em simultâneo com a aprendizagem e em contexto “real”. Assim, foi planeada uma investigação estatística a realizar pelos alunos da turma.

Ao longo do decorrer da UD, recorrendo a exemplos e dados relacionados com a própria investigação estatística que os alunos estavam a realizar, foram sendo trabalhados os conteúdos da Estatística procurando promover a respetiva aprendizagem motivada pelo próprio trabalho de investigação estatística que, em simultâneo, os alunos estavam concretizar. Esta investigação estatística foi pedra angular da metodologia usada no ensino-aprendizagem da UD-Estatística. A forma como ela decorreu, articuladamente com o desenvolvimento dos conteúdos da UD, teve grande impacto no presente estudo, pelo que apresento em seguida uma breve descrição de como foi planeada e concretizada.

1. A INVESTIGAÇÃO ESTATÍSTICA

Dado o objetivo estabelecido para o presente estudo, optei por configurar um ambiente de ensino-aprendizagem baseado em trabalho realizado pelos alunos em contexto real, com dados significativos, para se conseguir um bom envolvimento da turma ao longo das aulas e uma adequada motivação para a aprendizagem da Estatística. A investigação estatística proposta aos alunos tinha como objetivo **compreender se existe relação estatística entre a quantidade de horas de estudo da Matemática fora da escola reportadas pelos alunos e as respetivas classificações obtidas no período anterior.**

Foi concebido um plano compreendendo os seguintes aspetos principais:

- i. Os 23 alunos da turma 11.º B1 foram organizados em seis grupos (cinco grupos de quatro alunos e um grupo de três alunos). Foram definidos vários aspetos de cariz operacional e organizativo para o funcionamento dos grupos (coordenação, recursos, formas de comunicação, prazos de execução das tarefas, processos a realizar, expectativas)
- ii. O universo a estudar foi constituído por 6 turmas do ensino secundário do Colégio Pedro Arrupe (duas de cada um dos três anos: 10.º A1, 10.º B, 11.º A1, 11.º A2, 12.º A1, 12.º B1).
- iii. A cada um dos seis grupos de alunos foi atribuída uma das seis turmas-alvo da investigação estatística.
- iv. Com a participação dos alunos, em aula, foi definido um questionário a realizar por todos os grupos às suas respetivas turmas-alvo.
- v. Cada grupo selecionou, de forma aleatória, por sorteio feito a partir das listas de números dos alunos de cada turma, uma amostra constituída por 10 alunos da “sua” turma, mais dois suplentes.
- vi. Foi realizada a recolha e registo dos dados, usando o questionário, recorrendo a conversa direta com cada um dos alunos das amostras à saída das suas aulas.
- vii. Os dados recolhidos foram organizados recorrendo a software de manipulação de folhas de cálculo, tipo Excel.
- viii. Foi feito o respetivo tratamento estatístico de dados recolhidos e organizados.
- ix. Os dados recolhidos e organizados por cada grupo, foram em seguida analisados recorrendo aos conhecimentos estatísticos que, em simultâneo com o desenrolar da investigação estatística, os alunos foram adquirindo.
- x. Na generalidade dos exemplos, exercícios, tarefas e trabalhos realizados pelos alunos no desenvolvimento das aulas da UD, foram usados os dados recolhidos por cada um dos grupos.
- xi. A fase mais orientada para o desenvolvimento do raciocínio estatístico, de processos de inferência estatística e de conclusões, onde a discussão direta e dinâmica entre os alunos e orientada pelo professor se esperava ser muito proveitosa, foi significativamente penalizada pela suspensão das aulas presenciais.
- xii. Procurou-se que nos trabalhos finais se evidenciassem processos de inferência estatística e que as conclusões feitas pelos alunos fossem reveladoras das aprendizagens efetuadas ao longo da UD-Estatística.

- xiii. Estava previsto, no plano inicial, que nas últimas aulas da UD, cada grupo efetuasse uma apresentação do seu trabalho em cerca de 10 minutos. Estas apresentações seriam um dos momentos de avaliação dos alunos. Devido a situação da COVID-19, esta fase não foi concretizada.
- xiv. Na última aula foi feita uma Avaliação Aula, constituída por duas questões de escolha múltipla e uma questão aberta, com duas alíneas.

2. O ESTUDO DE CARIZ INVESTIGATIVO

Tendo em conta o objetivo e as três questões a que o presente estudo de cariz investigativo procura dar resposta, organizo os processos integrantes do estudo nas três categorias, que designo abreviadamente por Aprendizagem, Raciocínio Estatístico e Reação dos Alunos.

1. APRENDIZAGEM

Em relação à Aprendizagem, a recolha de dados foi efetuada em duas fases distintas. Na primeira metade da UD, quase exclusivamente a partir dos registos de participação dos alunos na aula que manteve através do Diário de Bordo. Nesta fase foi lançada a investigação estatística a desenvolver pelos alunos, foi trabalhada a respetiva organização e foram trabalhados em aula os conteúdos estatísticos relacionados com as características amostrais. Estes conteúdos foram desenvolvidos seguindo uma metodologia maioritariamente expositiva, em diálogo com os alunos e com participação de alguns deles na resolução de exercícios no quadro.

A partir da aula 7, estava inicialmente planeado começar-se a desenvolver trabalho autónomo em grupos na aula e em casa. Esta fase iria permitir a recolha de dados através dos documentos produzidos pelos alunos nesse trabalho autónomo em sala. Por coincidência, foi a partir da aula 7 que as aulas passaram a ser realizadas com os alunos em casa e usando-se a Plataforma CPA OnLine. Assim, a recolha de dados documentais para análise da Aprendizagem, foi feita a partir de duas tarefas propostas aos alunos para realização em trabalho autónomo em casa, no âmbito da sua investigação estatística e de uma Avaliação Aula realizada na última aula da UD.

A primeira tarefa foi designada como “**Trabalho Plataforma 1**” e nela os alunos responderam a questões relacionadas com as características amostrais aplicadas aos

dados obtidos por eles através do questionário que realizaram junto das turmas-alvo dos seus grupos. Neste trabalho foi pedido aos alunos a utilização da calculadora gráfica para a resolução de alguns exercícios específicos de aplicação à Estatística. A utilização da calculadora gráfica em questões de Estatística tinha sido uma das aprendizagens realizadas já em modo ensino via Plataforma CPA OnLine, o que poderia revelar dificuldades adicionais de aprendizagem.

A segunda tarefa foi designada por **“Tarefa Aplicação”** e procurava que os alunos aplicassem os conhecimentos de Estatística adquiridos nas aulas, com base nos dados de contexto real da sua investigação estatística, e que utilizassem com propósito a calculadora gráfica na resolução das questões colocadas na “Tarefa Aplicação”. Para realizar esta tarefa, além de enviarem os textos com as respostas às questões colocadas, os alunos tiveram que enviar também fotografias de alguns dos passos que deram nos cálculos com calculadora gráfica.

Um terceiro momento de recolha de dados para a análise da Aprendizagem, foi a **“Avaliação Aula”** que se realizou na última aula da UD-Estatística e que foi realizada em modo teleconferência, com a presença online de todos os alunos da turma via aplicação Zoom. Durante cerca de 45 minutos do tempo da aula (que teve uma duração total de cerca de 60 minutos) os alunos responderam por escrito a duas questões de escolha múltipla e uma questão aberta com duas alíneas. Estas questões procuraram avaliar os conhecimentos dos alunos quanto aos conteúdos da UD-Estatística e também as competências no uso da calculadora gráfica neste âmbito. Para além das respostas escritas às questões colocadas, os alunos tiveram que fazer pequenos vídeos onde explicaram a forma de obter os valores obtidos recorrendo à calculadora gráfica. Nesses vídeos, os alunos “filmaram” a manipulação que fizeram da calculadora gráfica na resolução das questões colocadas na avaliação. Esta Avaliação Aula foi efetuada por cada aluno, em sua casa, no decorrer da sessão de Zoom, estando todos os alunos a ser “vistos” em simultâneo pelo professor enquanto realizavam a sua Avaliação Aula.

2. RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO

A recolha de dados para análise na categoria Raciocínio Estatístico, foi realizada através dos mesmos processos que para a Aprendizagem e que acabei de descrever. Em relação às particularidades dos dados que contribuem para a categoria Raciocínio

Estatístico, algumas das questões colocadas nas duas tarefas e na Avaliação-Aula estavam concebidas de modo mais focado na componente raciocínio estatístico demonstrado pelos alunos do que outras que foram mais orientadas para a componente Aprendizagem.

A recolha de dados para a análise relacionada com o raciocínio estatístico estava pensada para ser feita de modo muito especial nas apresentações que os grupos fariam nas últimas duas aulas. Por não ser possível seguir esse modelo, passei a orientar esta recolha de dados apenas a partir dos documentos produzidos pelos alunos nos trabalhos e na Avaliação Aula. Esta alteração introduziu alguma dificuldade adicional na análise, pois os alunos são muito mais sucintos a explicar os seus raciocínios quando o fazem por escrito do que quando o fazem em modo apresentação oral apoiada por ferramentas tipo “Powerpoint”.

3. REAÇÃO DOS ALUNOS

Para a recolha de dados para analisar a Reação dos Alunos face à metodologia seguida na UD-Estatística, foi feito um breve questionário aos alunos, com sete questões orientadas para recolher as suas opiniões sobre alguns aspetos particulares do ensino-aprendizagem seguido na UD.

No plano inicial, para este fim, estava previsto realizar uma sessão de “focus group” com seis alunos, escolhidos de modo a serem uma boa representação da turma. Não tendo sido possível a abordagem “focus group” para a recolha de dados quanto à Reação dos Alunos, penso que a opção pelo Questionário aos Alunos foi uma alternativa que considerei adequada.

Este **“Questionário aos Alunos”** foi enviado aos alunos no último dia de aulas do 2.º período, no início das suas férias e em pleno período de confinamento social sanitário. Nos três dias seguintes, recebi as respostas de 11 dos 23 alunos da turma. Depois do regresso às aulas ainda voltei a relembrar os restantes alunos para que respondessem ao questionário, mas já não obtive mais respostas. Dadas as circunstâncias relacionadas com o retomar das aulas sem ensino presencial, recorrendo a ambientes de ensino a distância com ferramentas de teleconferência, optei por não insistir e assumir que a análise sobre as Reações dos Alunos teve fundamentalmente por base os dados recolhidos a partir das respostas dos 11 alunos referidos.

De realçar o facto de não ter obtido as respostas de todos os alunos, o que pode conduzir a uma análise não representativa das respostas da turma, pois os alunos que responderam ao questionário são, na sua maioria, alunos que normalmente mostram um bom acompanhamento das aulas e que geralmente atingem boas classificações nas avaliações sumativas realizadas ao longo do ano. Mesmo assim, estas 11 respostas podem dar uma ideia geral das reações dos alunos que responderam à metodologia seguida na UD-Estatística.

6. ANÁLISE DE DADOS E RESULTADOS

Na análise dos dados recolhidos para este estudo tive em consideração as três questões de investigação que, como referi, nomeei como categorias Aprendizagem, Raciocínio Estatístico e Reação dos Alunos. Deste modo, para estudar em que medida os alunos do 11.º B1 aprendem Estatística em ambiente de investigação estatística, analisei as suas respostas às duas tarefas realizadas, à avaliação aula e ao questionário aos alunos; incorporei ainda na análise notas que registei no Diário de Bordo. Para conhecer o desenvolvimento do raciocínio estatístico destes alunos usando um trabalho em contexto real, analisei também as suas respostas às duas tarefas realizadas, à avaliação aula e ao questionário aos alunos; além disso, os registos do Diário de Bordo, contribuíram com dados que analisei no âmbito desta questão de investigação. Para ter ideia de como os alunos reagiram a esta metodologia, recorri especialmente à análise das respostas ao questionário aos alunos. Como não há uma relação direta entre os instrumentos de recolha de dados e as questões do estudo, para cada questão é possível identificar dados recolhidos em mais que um instrumento de recolha desses dados.

Numa primeira abordagem, comecei por identificar aspetos vertidos nas respostas e nas produções escritas dos alunos que possam contribuir para a análise respeitante a cada uma das categorias. Em seguida, procurei fazer a leitura dessas respostas de modo independente dos instrumentos usados para a recolha dos dados, focada essencialmente numa análise enquadrada pelas categorias Aprendizagem, Raciocínio Estatístico e Reação dos Alunos.

1. TRABALHO PLATAFORMA 1

A Tarefa 1: Trabalho Plataforma 1, consistiu num pequeno trabalho realizado a partir dos dados que cada grupo recolheu no âmbito da sua investigação estatística. Assim, partindo do questionário que foi definido na aula e dos respetivos dados recolhidos pelos grupos, os alunos trabalharam em contexto real. Nesta primeira tarefa, os alunos desenvolveram atividades e responderam a questões de Estatística que procuravam mobilizar as aprendizagens efetuadas. Procurei também, perceber se se encontravam evidências da presença de raciocínio estatístico nesta primeira metade de UD.

Nesta Tarefa 1 os conteúdos abordados estavam relacionados principalmente com a organização de dados e as características amostrais. Os alunos responderam a seis grupos de questões que implicavam conhecimentos dos conteúdos, conhecimento da forma de tratar a informação estatística através de quadros, tabelas, gráficos e diagramas, conhecimento e prática de uso de software e calculadora gráfica na resolução de problemas de Estatística.

Para analisar os dados que recolhi por meio desta Tarefa, procurando concluir sobre a aprendizagem dos alunos neste ambiente de investigação estatística, vou considerar de modo especial a questão 5 da Tarefa 1, pois ela aborda as diferentes componentes da aprendizagem expectável nesta fase dos trabalhos. De notar que os alunos trabalharam com os dados que recolheram nas suas respetivas turmas-alvo, pelo que os valores que são apresentados nas diversas resoluções são diferentes por corresponderem a turmas e amostras diferentes. Outras questões são também analisadas para ilustrar aspetos relevantes relacionados com a aprendizagem em investigação estatística e desenvolvimento de raciocínio estatístico em contexto real. O enunciado da Tarefa 1, pode ser consultado no Anexo E: Tarefa Autónoma 1: Trabalho Plataforma 1

Tabela 4: Tarefa 1- Questões, conteúdos e classificações

Questões e Conteúdos	Percentagem das classificações obtidas (média para 20 alunos)
1 Organização de Dados.	60.0%
2 Tabelas de frequência e gráficos	85.8%
3 Tabelas, gráficos e moda	84.0%
4 Amostra ordenada, mediana, quartis, diagrama de extremos e quartis, amplitude interquartis	81.1%
5 Dados agrupados em categorias, tabelas de frequências, média, desvio-padrão, mediana, quartis, diagrama extremos e quartis, uso da calculadora gráfica,	80.4%
6 Uso de listas de dados em calculadora gráfica, média, desvio-padrão, mediana, quartis, extremos	72.1%

QUESTÃO 5

Pelos resultados globais resumidos na tabela 4 podemos constatar que os conteúdos estatísticos e respetivos processos trabalhados por meio da investigação estatística, permitiram aos alunos mostrar conhecimentos na resolução da Tarefa proposta. Vamos começar por analisar com maior detalhe a questão 5 e a forma como alguns alunos a resolveram, após o que apresentamos também elementos da resposta de uma aluna às questões 1 e 2.

Questão 5- Variável "Nota Matemática":

- Classificar a variável quanto ao tipo
- Agrupar os dados por categorias
- Construir a tabela de frequências
- Usar a calculadora gráfica e, seguindo o Guião das Calculadoras, fazer o Exercício 1 do Guião
- Aplicar o exemplo do Exercício 1 do Guião à variável "Nota Matemática" e calcular: Média, Desvio-padrão, Mediana, Quartil 1 e Quartil 2, Extremos (Mínimo e Máximo)
- Construir o Diagrama de Extremos e Quartis
- Numa ou duas frases, fazer um breve comentário

Nos casos da recolha de dados baseadas nas resoluções dos alunos apresentadas em seguida, é feita uma pequena introdução, seguida da resolução feita pelo aluno, enquadrada pelos separadores RESOLUÇÃO__ e FIM DE RESOLUÇÃO__ e um curto comentário e síntese adequado. Os dados e formatação entre os dois separadores de Resolução, são os que os alunos apresentaram, sem preocupação de edição posterior.

MANUELA – Questão 5

Manuela trabalhou na primeira parte da investigação estatística integrada num dos 6 grupos de alunos, tendo mostrado uma atenção particular para as questões relacionadas com a organização dos dados recolhidos pelo questionário à turma. Mostrou ainda aprendizagem e raciocínio estatístico, sendo esta Questão 5 uma boa ilustração dessa situação. Por exemplo, na aula foram feitos exercícios de aplicação de diagramas de extremos e quartis com orientação horizontal e Manuela apresenta corretamente o seu diagrama com orientação vertical, mostrando ainda raciocínio estatístico no relacionamento de medidas estatísticas.

RESOLUÇÃO _____

5 – A variável “nota de matemática” é uma variável quantitativa discreta.

Agrupar dados por categorias:

$]11;14] = 1$

$]14;17] = 5$

$]17;20] = 3$

Nota Mat 1ºP	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequências absolutas acumuladas	Frequências relativas acumuladas
$]11;14]$	1	$1/9 = 0,11$	1	11%
$]14;17]$	5	$5/9 = 0,56$	6	67%
$]17;20]$	3	$3/9 = 0,33$	9	100%
Total	9	1	9	100%

Exercício 1 do guião:

Média: 19,8 folhas

Soma dos quadrados dos desvios em relação à média: 283,7

Desvio-padrão: 1,38

Variância: 1,9

Aplicação do exemplo do exercício 1 do guião à variável “nota de matemática”:

Nota 13 : 1 aluno

Nota 15 : 4 alunos

Nota 16 : 1 aluno

Nota 18 : 2 alunos

Nota 20 : 1 aluno

Média: 16,1 valores

Desvio-padrão: 2,02

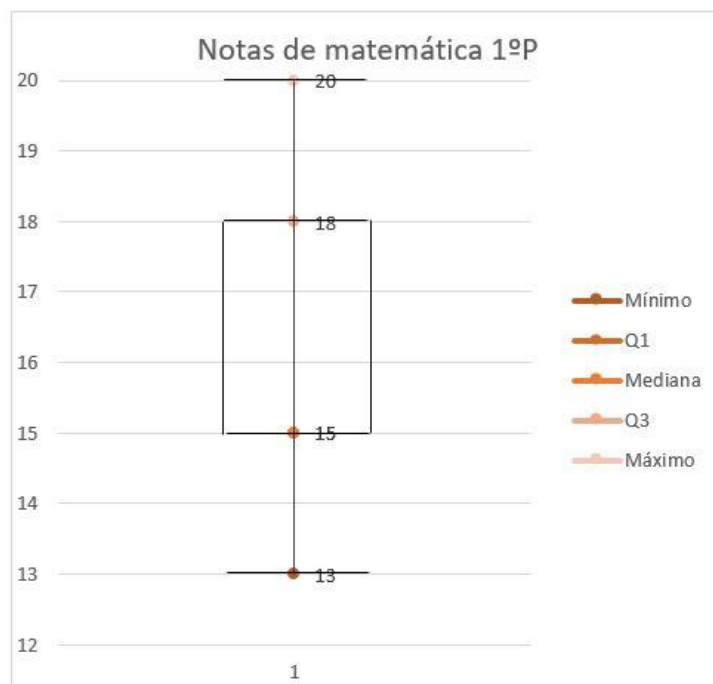
Mediana = Quartil 2: 15

Quartil 1: 15

Quartil 3: 18

Extremo máximo: 20

Extremo mínimo: 13



Como se pode ver no diagrama de extremos e quartis sobre as notas de matemática do 1ºPeríodo dos alunos entrevistados, o primeiro quartil é o mesmo valor do que a mediana, o que significa que pelo menos 25% dos alunos da amostra tiveram 15 valores, outros 25% tiveram entre 13 e 15 valores, outros 25% tiveram entre 15 e 18 e os restantes 25% tiveram entre 18 e 20 valores. Além disto, é ainda possível perceber que 50% teve entre 15 e 18 no primeiro período.

FIM DE RESOLUÇÃO _____

Como se constata pela sua resolução, Manuela mostra ter realizado **aprendizagem** estatística, compreendeu os conceitos, fez uma correta aplicação dos processos de cálculo e representou adequadamente os dados na forma de tabelas. A aluna constrói corretamente o diagrama de extremos e quartis onde se pode identificar a presença de **raciocínio estatístico** na forma como a aluna determina e relaciona diversas medidas

estatísticas pelo diagrama de extremos e quartis. Por fim, fez um pequeno comentário explicativo quanto à variável em estudo (nota de matemática).

RUTE – Questão 5

Rute é uma aluna metódica e que dá atenção aos detalhes e estava integrada num grupo em que esta sua característica a diferenciava dos restantes elementos do grupo. A forma como a aluna resolveu a tarefa reflete a aprendizagem que realizou no decorrer da primeira parte da investigação estatística.

RESOLUÇÃO _____

Variável “Nota Matemática”:

- ✓ Classificar a variável quanto ao tipo: variável quantitativa discreta
- ✓ Agrupar os dados por categorias

Nota Matemática	Nº de alunos com essa nota na amostra selecionada
10	2
11	1
15	1
16	1
17	1
18	2
19	2

- ✓ Construir tabela de frequências

Nota Matemática	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequências absolutas acumuladas	Frequências relativas acumuladas
10	2	$2/10 = 0.2$	2	0.2
11	1	$1/10 = 0.1$	3	0.3
15	1	$1/10 = 0.1$	4	0.4
16	1	$1/10 = 0.1$	5	0.5
17	1	$1/10 = 0.1$	6	0.6
18	2	$2/10 = 0.2$	8	0.7
19	2	$2/10 = 0.2$	10	1
Total	10	1	10	1

- ✓ Usar a calculadora gráfica e, seguindo o Guião das Calculadoras, fazer o Exercício 1 do Guião
- ✓ Aplicar o exemplo de Exercício 1 do Guião à variável “Nota Matemática” e calcular: Média, Desvio-padrão, Mediana, Quartil 1 e Quartil 2, Extremos (Mínimo e Máximo)

Média: 15.3

Desvio-padrão: 3.46554

Mediana: 16.5

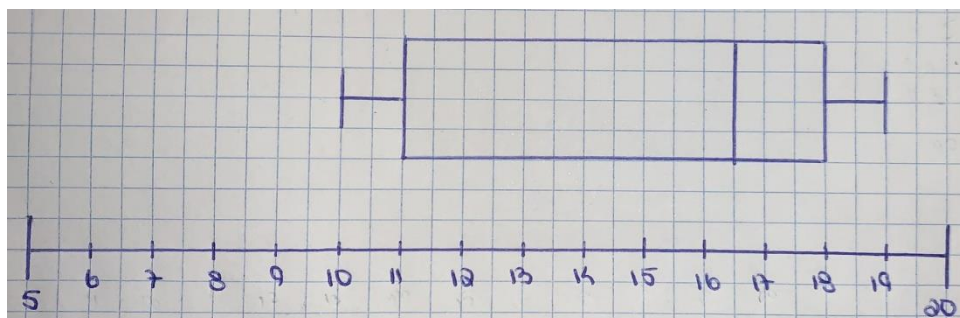
Quartil 1: 11

Quartil 3: 18

Extremo Mínimo: 10

Extremo Máximo: 19

- ✓ Construir o diagrama de extremos e quartis



- ✓ Numa ou duas frases, fazer um breve comentário: Podemos concluir que a média da minha amostra (10 alunos, do 12ºA1, do Colégio Pedro Arrupe) é 15.3 valores a matemática no final do 1º período.

FIM DE RESOLUÇÃO _____

Nesta resolução, Rute reflete **aprendizagens** efetuadas quanto a organização e tratamento de dados estatísticos em tabelas, bem como em relação à utilização da calculadora gráfica para a determinação de medidas estatísticas. Esta situação permitiu-lhe fazer inferências e **raciocínio estatístico** com base nas relações entre essas medidas e nas representações gráficas como o diagrama de extremos e quartis. Na resolução apresentada, a aluna optou por desenhar o diagrama de extremos e quartis de forma manual, em vez de o fazer recorrendo a uma ferramenta tecnológica. Embora o diagrama pudesse ter sido completado com mais elementos gráficos que permitissem melhor leitura, evidenciou que adquiriu conhecimentos que lhe permitem, em situações deste tipo, não usar a tecnologia.

ARMANDO – Questão 5

Armando fazia parte de um grupo de alunos composto por três elementos. Era um grupo homogêneo quanto às suas características de trabalho e também quanto ao nível de conhecimentos estatísticos previamente adquiridos. Trata-se de um aluno que frequentemente dá mostras de facilidade em evoluir a partir de aprendizagens realizadas com base em novos conteúdos. No caso da construção do diagrama de extremos e quartis, apresenta uma solução gráfica apoiada em tecnologia, mas em que adota um desenvolvimento gráfico “na vertical” que, não tendo sido explicado em aula, mostra que a **aprendizagem** realizada e aplicada na investigação estatística, permitiu-lhe evoluir na forma como encontrou a solução para as questões colocadas na tarefa.

RESOLUÇÃO _____

Nota Matemática: variável quantitativa discreta

Categorias	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Frequência Acumulada
[10-12[	3	30%	30%
[12-14[	1	10%	40%
[14-16[	2	20%	60%
[16-18[	1	10%	70%
[18-20]	3	30%	100%
Total:	10	100%	100%

Média: 14.3

Desvio-padrão: 3.28

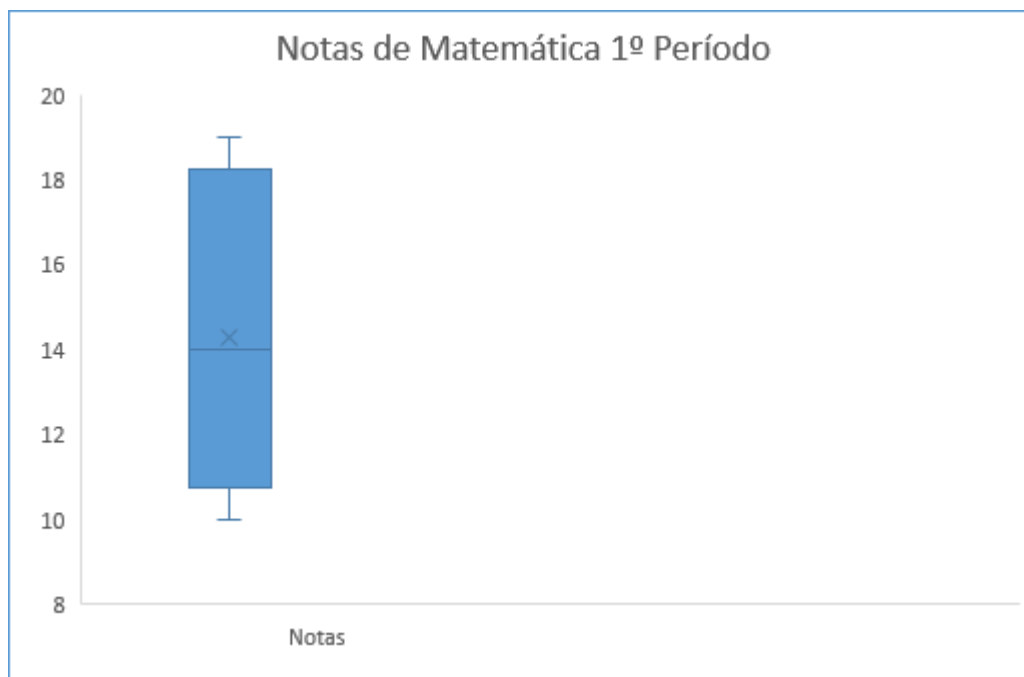
Mediana: 14

Quartil 1: 11

Quartil 3: 18

Extremo Mínimo: 10

Extremo Máximo: 19



Comentário: A amplitude interquartis é muito grande, logo existe uma grande dispersão das notas, podemos também observar que não há negativas e que a média é normal

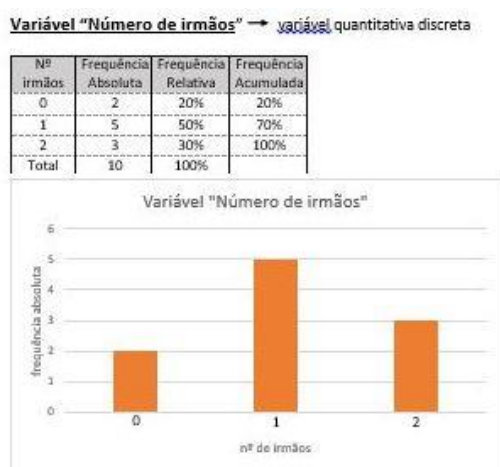
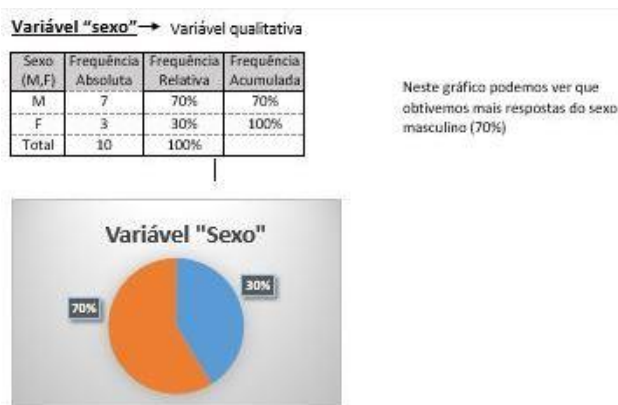
FIM DE RESOLUÇÃO _____

Armando apresenta uma resolução bem estruturada e onde evidencia os conhecimentos sobre estes conteúdos, embora, tal como as suas colegas Manuela e Rute, não acompanhe as diversas passagens da resolução com explicações ou justificações. Esta característica foi comum a todos os alunos nesta tarefa. Em conversa de feedback posterior com os alunos, percebi que estiveram mais focados em encontrar os valores pedidos no enunciado da tarefa do que em incluir justificações na resolução. O aluno mostra facilidade em determinar as medidas estatística e, a partir delas, desenvolver processos de **raciocínio estatístico** e produzir induções de base estatística relacionando média e mediana com desvio-padrão, com a amplitude interquartis com e dispersão dos dados. Nesse sentido, Armando apresenta um breve comentário com a interpretação que faz sobre a amplitude interquartis, que determina a partir da amostra da sua turma-alvo. Apresenta ainda alguma dificuldade no uso rigoroso da linguagem que usa em relação à média das notas, que considera “normal”.

MAFALDA – Questões 1 e 2

Apresento em seguida a forma como Mafalda resolveu as duas primeiras questões, nas quais se trabalhou com variáveis qualitativas e quantitativas discretas, tabelas de frequências, gráficos circulares e de barras e identificação da moda da amostra. Trata-se de uma aluna muito empenhada e trabalhadora. Procura sempre concluir as tarefas que são propostas com justificações que clarificam a forma como desenvolveu o seu raciocínio para encontrar as soluções. Integrada num grupo pouco homogéneo, foi a impulsionadora da realização do inquérito aos colegas da turma-alvo da investigação estatística do seu grupo.

RESOLUÇÃO _____



A moda desta amostra é 1.

FIM DE RESOLUÇÃO _____

Alguns dos conceitos trabalhados por Mafalda nestas duas questões foram alvo de aprendizagem em anos anteriores. Na UD-Estatística que lecionei, foram explorados como partes integrantes da organização e tratamentos de dados da amostra. Nestas duas questões, a aluna mostra ter realizado uma adequada **aprendizagem** quanto à forma de utilizar as representações gráficas e a organização de dados em tabelas, suportada por uma correta aprendizagem das características amostrais e das medidas estatísticas correspondentes.

NOTAS SOBRE TRABALHO PLATAFORMA 1

Nas três resoluções da questão 5 apresentadas, tal como nas de outros alunos, verifica-se uma incorreção na leitura feita pelos alunos dos valores obtidos através da calculadora gráfica quanto ao desvio-padrão. No conjunto de valores para as medidas estatísticas obtidas a partir das listas introduzidas, a calculadora apresenta os valores do desvio-padrão da população e do desvio-padrão da amostra. Foi comum os alunos utilizarem o valor do desvio-padrão da população, σ_x , em vez do valor correto do desvio-padrão da amostra S_x . Esta incorreção, foi depois alvo de uma explicação mais clara da minha parte, não apenas quanto à diferença estatística entre os dois conceitos, mas também quanto à forma de os identificar nos ecrãs das calculadoras gráficas. Posteriormente, na Avaliação Aula, inclui uma questão semelhante para avaliar se houve uma adequada aprendizagem destes conceitos, tendo verificado (ver dados recolhidos na Avaliação Aula) evidências de que a maioria dos alunos já não cometeram este erro aqui detetado.

Embora os alunos tenham utilizado a calculadora gráfica, nem todos evidenciaram essa utilização na forma como apresentaram a resolução das questões da tarefa. Nesta fase da UD, a utilização da calculadora gráfica para questões estatísticas ainda não fora trabalhada de modo a que os alunos se sentissem confiantes na sua utilização, pelo que alguns terão evitado mostrar evidências do seu uso (fotografias da calculadora) com receio de não o estarem a fazer corretamente. Não foi o caso de Bernarda que mostrando já alguma compreensão da vantagem de usar a calculadora gráfica, incluiu imagens ilustrativas desse uso, na resolução da questão 6 da tarefa, como se vê na figura 1. Este ambiente de trabalho em investigação estatística motivou alguns alunos, como foi o caso da Bernarda, a aprenderem a usar a calculadora gráfica como forma

de trabalhar os dados que recolheram e para, de forma mais rápida, obterem uma primeira análise de resultados

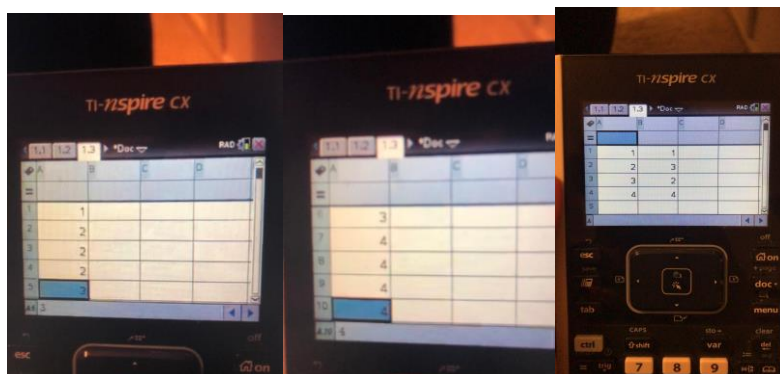


Figura 1: Uso da calculadora gráfica TI Inspire CX, na resolução da questão 6, por Bernarda.

Nesta Tarefa 1, foi ainda possível recolher evidências, a partir das resoluções apresentadas acima, de que os alunos realizaram **aprendizagens de Estatística** neste ambiente de investigação estatística, nomeadamente ao relacionar conteúdos diversos, usar ferramentas tecnológicas para determinação de medidas estatísticas e recorrer a representações variadas de modo a realizarem análises com os dados recolhidos.

Em todas as 6 questões incluídas nesta Tarefa 1, foi pedido que os alunos fizessem um breve comentário aos resultados a que chegaram. Procurava perceber nesta primeira tarefa, evidências da presença de raciocínio estatístico. A maioria dos alunos fizeram comentários, como solicitado. Estes foram muito factuais, baseados em afirmações relacionadas com os valores das respostas a que chegaram e mostraram a presença de inferências e de **raciocínio estatístico** relacionando medidas de localização com medidas de dispersão e extremos da amostra bem como interpretação no contexto da investigação estatística realizada.

Apresento em seguida alguns desses comentários:

“Conseguimos ver, a partir desta amostra, que 60% dos inquiridos são raparigas, e 40% são rapazes.” – Questão 2 – Telma

“Apenas 20% da amostra teve uma nota abaixo de 15, sendo que a nota mais alta foi 18.” – Questão 5 – Telma

“A amplitude interquartil é bastante pequena (10 cm).” – Questão 4 – Isabel

“A mediana é 173.5cm, o Q1 é 170 e o Q3 é 181.” – Questão 4 - Liliana

“Comentário: a amplitude interquartis não é muito grande, tal como o desvio-padrão.” – Questão 6 – Armando

“Comentário: A amplitude interquartis é muito grande, logo existe uma grande dispersão das notas, podemos também observar que não há negativas e que a média é normal.” – Questão 5 - Armando

Este tipo de prática de raciocínio estatístico foi alvo de atenção com trabalho específico na segunda metade da UD. No entanto, como já se estava a praticar ensino através da Plataforma CPA OnLine, sem o contacto presencial entre professor e alunos, esta vertente do ensino-aprendizagem planeada para esta fase ficou prejudicada pelas circunstâncias.

2. TAREFA APLICAÇÃO

A Tarefa 2: Tarefa Aplicação, consistiu num breve trabalho de aplicação com os dados recolhidos por cada um dos grupos. Partindo destes dados, os alunos continuaram a trabalhar nas suas investigações estatísticas, em contexto real. Nesta tarefa, os alunos desenvolveram atividades e responderam a questões de Estatística que procuravam mobilizar as aprendizagens efetuadas por aplicação concreta, recorrendo a ferramentas que são importantes na aplicação da Estatística a estudos em contexto real, como, por exemplo, as calculadoras gráficas. Também na Tarefa 2, procurei encontrar evidências da presença de raciocínio estatístico nesta segunda metade de UD.

Nesta tarefa os conteúdos abordados estavam relacionados principalmente com amostras bivariadas e o estudo da correlação linear entre variáveis. Para dar resposta às quatro questões incluídas na tarefa, os alunos recorreram à aprendizagem de Estatística realizada e ao conhecimento e uso de software e da calculadora gráfica na resolução deste tipo de problemas. Procurei ainda encontrar evidências da presença de

desenvolvimento de processos de raciocínio estatístico adequados. O enunciado desta Tarefa 2, pode ser consultado no Anexo F: Tarefa Autónoma 2: Trabalho Aplicação. Na tabela 5 apresento os tópicos das questões, e respetivos conteúdos, integrados na tarefa e as respetivas percentagens das classificações obtidas pelos 19 alunos que entregaram a resolução da tarefa em tempo útil.

Tabela 5: Tarefa 2- Conteúdos das questões e classificações

Conteúdos das questões	Percentagem das classificações obtidas (média para 19 alunos)
1 Medida estatística adequada.	91.1%
2 Organização da amostra bivariada	92.1%
3 Variáveis explicativa e resposta	92.1%
4 a) Média e desvio-padrão das variáveis	73.7%
4 b) Diagrama de dispersão e Nuvem de pontos	67.1%
4 c) Equação da reta de mínimos quadrados	79.2%
4 d) Coeficiente de correlação linear da amostra bivariada	81.1%
4 e) Caracterização da associação linear e justificação	78.0%
4f) Conclusões sobre a Questão para investigação apresentada no início da tarefa	68.8%

Apresento em seguida algumas resoluções de questões incluídas na Tarefa 2, onde a aprendizagem realizada pelos alunos se evidencia nas suas respostas.

TELMA – Questões 1, 2 e 3

Telma estava integrada num grupo que, desde o início, mostrou muito cuidado com o processo relacionado com a investigação estatística e que percebeu a vantagem da

utilização da calculadora gráfica no âmbito dos problemas de Estatística. A aluna mostrou uma correta compreensão do conceito de correlação em amostras bivariadas.

RESOLUÇÃO _____

1. Correlação
2. Amostra Bivariada

Nota a Matemática no 1º Período 19/20	Tempo Total de Estudo Semanal (incluindo explicações)
11	5h
15	7h
17	2h
16	2h
15	5h
10	7h
18	1h
16	10h
17	10h
16	10h

3. Variável Explicativa: Tempo Total
Variável Resposta: Nota a Matemática

FIM DE RESOLUÇÃO _____

Neste conjunto de 3 questões, Telma mostra ter feito boa **aprendizagem** relacionada com a identificação da medida estatística correlação, como se podem representar as amostras bivariadas por meio de tabelas e como caracterizar cada uma das variáveis em relação à dependência em relação à outra, no contexto em que se estava a trabalhar essas variáveis. Na tabela das variáveis, a aluna indica na primeira coluna a variável “Nota a Matemática” e, na segunda, a variável “Tempo Total”. Ao classificar as variáveis como “Explicativa ou Resposta” não se engana com a sequência das referidas colunas e faz uma correta classificação, o que evidencia uma sólida aprendizagem destes conceitos.

ISABEL – Questões 1, 2 e 3

Isabel faz parte do mesmo grupo que Telma e trabalharam em conjunto durante a recolha de dados junto da sua turma-alvo. No entanto a atividade que desenvolveu para a resolução desta Tarefa 2, foi desenvolvida de modo individual, como podemos constatar pela forma como cada uma respondeu à questão 2, em que cada uma delas apresenta a tabela da amostra bivariada com a sua ordem.

RESOLUÇÃO _____

1- Qual é a medida estatística mais adequada?

R: A medida estatística mais adequada é o coeficiente de correlação linear entre as variáveis, para verificar se as notas de matemática dependem ou não do número de horas de estudo.

2- Gráfico de análise bivariada.

Tempo de estudo (em horas)	Notas de matemática
5	11
7	15
2	17
2	16
5	15
7	10
1	18
10	16
10	17
10	16

3-

Variável explicativa: tempo de estudo (em horas)

Variável resposta: notas de matemática

FIM DE RESOLUÇÃO _____

A questão 1 estava formulada de modo a que os alunos apresentassem uma resposta direta, no entanto Isabel na sua resposta procura dar uma pequena justificação, o que indicia uma **aprendizagem** mais aprofundada do conceito de correlação, para além da simples identificação da medida estatística em causa. Na questão 2, apresenta uma resposta correta com a tabela construída com os valores corretos, embora cometendo um erro de identificação, designando a tabela por “Gráfico de análise bivariada”. Ao fazer a leitura das duas respostas às questões 2 e 3, é de notar que a aluna ordenou as duas colunas da tabela de modo a estarem alinhadas com a classificação que

apresentou na questão 3. Esta forma interligada de responder às duas questões, mostra uma **aprendizagem** que não se fica pelo repetir de procedimentos fixados.

ILDA – Questões 1, 2 e 3

Ilda pertencia a um grupo que, mesmo depois de terminadas as aulas presenciais, continuou a trocar informação entre os seus elementos. Algumas das respostas apresentadas pela aluna são resultado de trabalho realizado em conjunto.

RESOLUÇÃO _____

1- A medida estatística mais adequada para este tipo de análise é a correlação

2-

Notas	Tempo estudo
10	4
10	5
11	6
15	2
16	4
17	10
18	4
18	5
19	3
19	5

3-

Variável explicativa / independente – estudo

Variável resposta / dependente - nota de matemática

FIM DE RESOLUÇÃO _____

Na resolução de Ilda, podemos constatar que a aluna procurou completar a resposta com informação adicional mostrando ter aprendido os conceitos de variável explicativa e variável resposta também do ponto de vista da sua independência e dependência evidenciando uma **aprendizagem de conceitos estatísticos** relacionados com os dados da investigação estatística. Na construção da tabela de questão 2, não é rigorosa na designação que dá às variáveis, quando comparada com a designação que

usa na questão 3. No entanto, no conjunto das 3 questões mostra conhecer a ideia de correlação.

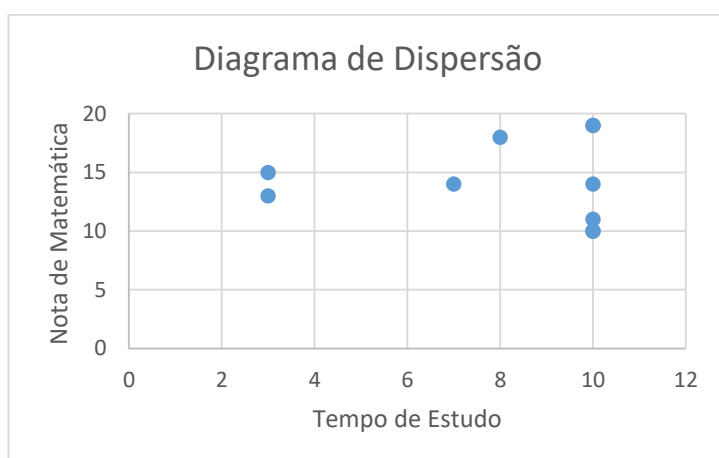
ARMANDO – Questão 4

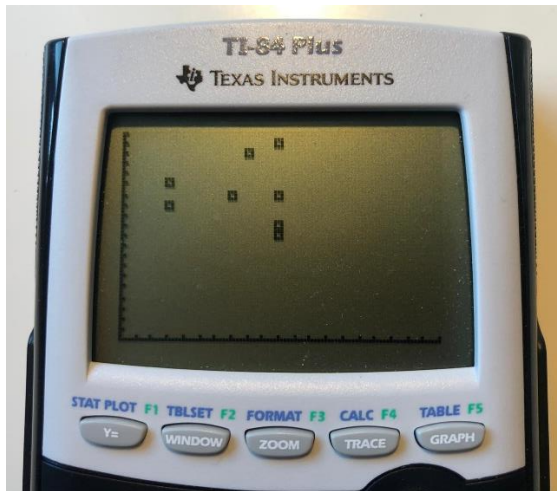
Armando é um aluno que ao longo do ano sempre demonstrou facilidade no uso da calculadora gráfica e que rapidamente a começou a utilizar na determinação das medidas estatísticas e no âmbito da análise de correlação. Mostrou desde o início ser dinamizador do grupo em que estava incluído, que beneficiou da facilidade com que lidou com as representações gráficas das medidas estatísticas bem como da compreensão que mostra dos conceitos e procedimentos próprios da investigação estatística.

RESOLUÇÃO _____

4.

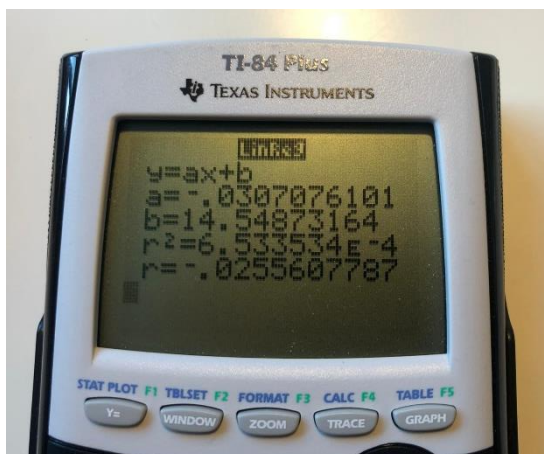
B)





Na minha opinião os números estão demasiado dispersos para haver uma relação linear entre as duas variáveis, logo presumo a hipótese de, neste caso, as variáveis serem independentes.

C)



Equação Reduzida da reta do Mínimos Quadrados: $Y = - 0.0307 X + 14.54$

Declive: $- 0.0307$

D)

Coefficiente da Correlação Linear: $- 0.0255$

E)

Variáveis Independentes, porque os pontos estão espalhados sem qualquer alinhamento e o coeficiente da correlação linear está muito perto do 0.

FIM DE RESOLUÇÃO _____

Na alínea b) desta questão 4, Armando mostra ter realizado **aprendizagem** estatística relacionada com os conteúdos da correlação linear. Além do correto uso da tecnologia na representação gráfica da nuvem de pontos, mostra também que usa a calculadora gráfica de modo a representar as variáveis na nuvem de pontos e a determinar os parâmetros da reta dos mínimos quadrados. Mostra também uma boa capacidade de relacionar as medidas e os resultados que encontra de modo a fazer inferências e a presumir conclusões, como no caso em que, nesta alínea b), Armando presume que as variáveis serão independentes, a partir da interpretação da dispersão de pontos na nuvem. Este **raciocínio estatístico** baseado na representação da nuvem de pontos, é depois complementada e validada com o cálculo e interpretação dos parâmetros da reta dos mínimos quadrados nas alíneas c), d) e e). Nas respostas a estas alíneas a presença de raciocínio estatístico é muito evidente e é interessante como o aluno mostra ter adquirido corretos conhecimentos tanto em termos de aprendizagem de novos conceitos estatísticos, como na utilização da tecnologia para resolver as questões da investigação estatística, como ainda na forma adequada como elaborou pressupostos, estimativas e conclusões de forma a evidenciar a presença de **raciocínio estatístico** de bom nível.

MATEUS – Questão 4

Mateus é um aluno que nas unidades de ensino anteriores, deu sinais de alguma dificuldade em compreender conteúdos como trigonometria ou determinação de limites de funções reais de variável real. Mas desde o início das aulas da UD-Estatística mostrou que estava a realizar o trabalho de investigação estatística com entusiasmo, a compreender os conteúdos, os procedimentos e a forma de aplicar as aprendizagens relacionadas com a tecnologia às práticas da Estatística.

RESOLUÇÃO _____

4. A)

	A nota	B ocorre...	C	D
=				=OneVar(
1	10	2	Título	Estatísti...
2	11	1	$\bar{x}$	15.3
3	15	1	Σx	153.
4	16	1	Σx^2	2461.
5	17	1	$s_x := s_n - \dots$	3.653
A1	10			

Média das notas= 15,3

Desvio-padrão= 3,46

FIM DE RESOLUÇÃO _____

	A tempo	B ocorre...	C	D
=				=OneVar(
2	3	1	$\bar{x}$	4.8
3	4	3	Σx	48.
4	5	3	Σx^2	272.
5	6	1	$s_x := s_n - \dots$	2.14994
6	10	1	$\sigma_x := \sigma_n - \dots$	2.03961

Média do tempo de estudo=4,8

Desvio-padrão= 2,03

Mateus evidencia uma boa **aprendizagem** no uso da calculadora gráfica e uma boa relação dos resultados a que chega através dela, com os conteúdos estatísticos em análise. Mostra ainda a presença de inferências e **raciocínio estatístico** ao determinar a média e relacioná-la com os valores determinados para desvio-padrão. No entanto, embora tenha feito uma correta aprendizagem do uso da calculadora gráfica, ao identificar os resultados obtidos, trocou os valores do desvio-padrão da população com o desvio-padrão da amostra.

MANUELA – Questão 4

Manuela começou por trabalhar integrada no seu grupo, mas depois continuou sem ligação ao grupo. Na forma como resolve a tarefa 2, dá mostras de ter feito uma boa aprendizagem dos conteúdos, da prática do uso da calculadora gráfica e também de raciocínio estatístico e de fazer inferências com justificações claras.

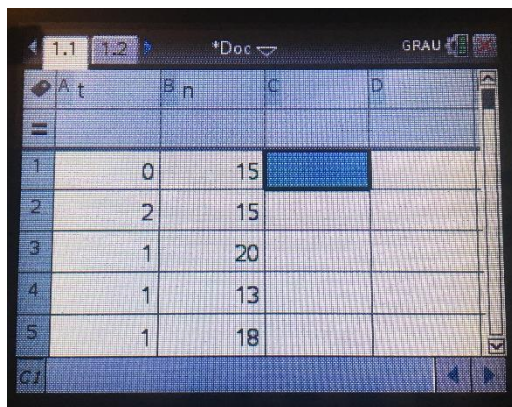
RESOLUÇÃO _____

4 - c) A partir da calculadora gráfica fui calcular a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados. Primeiro inseri os dados numa página “listas e folha de cálculo” e depois numa página “dados e estatística” cheguei à equação reduzida como mostra nas fotografias.

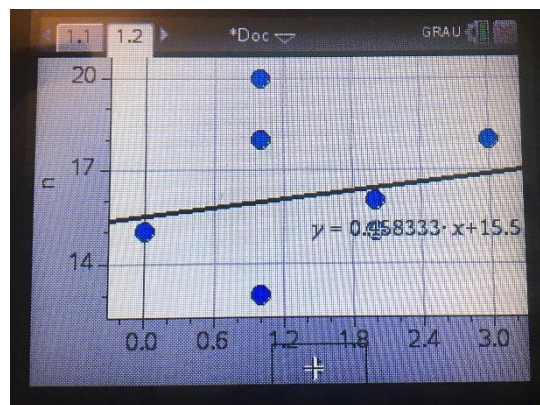
A equação reduzida é $y = 0.46x + 15.5$

logo o declive é 0.46.

d) O coeficiente de correlação linear é $r=0,21$



	A	B	C	D
1	0	15		
2	2	15		
3	1	20		
4	1	13		
5	1	18		



e) O tipo de associação linear é de variáveis independentes (existe reduzida correlação entre X e Y)

f) Aos alunos que foram alvo do meu estudo realizado, as horas de estudo não tiveram relação com as notas tiradas no 1º Período, concluo isto pois tal como é possível verificar no diagrama de dispersão “os pontos estão afastados” da reta dos mínimos quadrados e o coeficiente de correlação linear é 0,21 (módulo próximo de zero)

FIM DE RESOLUÇÃO _____

Manuela nestas alíneas c), d), e) e f) mostra que realizou **aprendizagem** em relação aos conceitos e conteúdos da UD-Estatística, incluindo o uso correto da calculadora gráfica na resolução de problemas de Estatística. Acompanha a resolução com a calculadora com explicações sobre os vários passos e de uma forma clara apresenta as conclusões, como a equação da reta dos mínimos quadrados, declive da reta, valor do coeficiente de correlação e respetivos significados. Procura interpretar as representações gráficas e relacioná-las com as medidas estatísticas que determina no âmbito da tarefa. A presença de **raciocínio estatístico** está aqui em evidência nas inferências que produz quanto à correlação entre as variáveis independentes, mas também nas justificações que apresenta na alínea f) onde, a partir dos resultados obtidos do estudo da correlação entre as variáveis da amostra bivariada, conclui por

processo indutivo, que as notas obtidas a Matemática não são dependentes do número de horas de estudo dos alunos da amostra.

ARMANDO – Questão 4

Anteriormente analisámos parte da resolução da questão 4 feita por Armando. Outra evidência da **aprendizagem** em contexto real e da presença de **raciocínio estatístico**, pode ser observada na resolução das alíneas d), e) e f) da questão 4, apresentada por Armando.

RESOLUÇÃO _____

4.

D) Coeficiente da Correlação Linear: - 0.0255

E) Variáveis Independentes, porque os pontos estão espalhados sem qualquer alinhamento e o coeficiente da correlação linear está muito perto do 0.

F) Com esta investigação estatística, e tendo em conta o coeficiente de correlação linear cujo módulo é muito próximo de zero, cheguei à conclusão que o tempo de estudo de matemática semanal nesta turma, com base na amostra analisada, não têm qualquer correlação com os resultados obtidos

FIM DE RESOLUÇÃO _____

Armando, além de fazer uma correta determinação do coeficiente de correlação entre as duas variáveis em estudo, produz inferências estatísticas relacionadas com a representação gráfica da nuvem de pontos na alínea e) e chega a conclusões na alínea f) a partir de estimativas e interpretação das medidas estatísticas determinadas nas várias alíneas desta questão. Esta resolução do aluno, é uma evidência da realização de **aprendizagem** e de **raciocínio estatístico** aplicado ao caso especial estudado na investigação estatística.

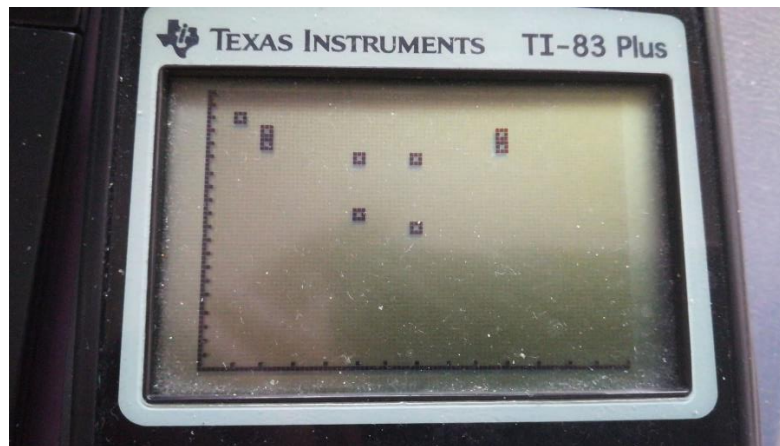
ISABEL – Questão 4

Apresento agora a resolução da questão 4 feita por Isabel, onde se pode identificar que aconteceu aprendizagem de conteúdos estatísticos e de uso da calculadora na resolução

de problemas estatísticos. Mostrou-se, também, que a aluna desenvolveu processos de raciocínio estatístico.

RESOLUÇÃO _____

4. b) Diagrama de dispersão:



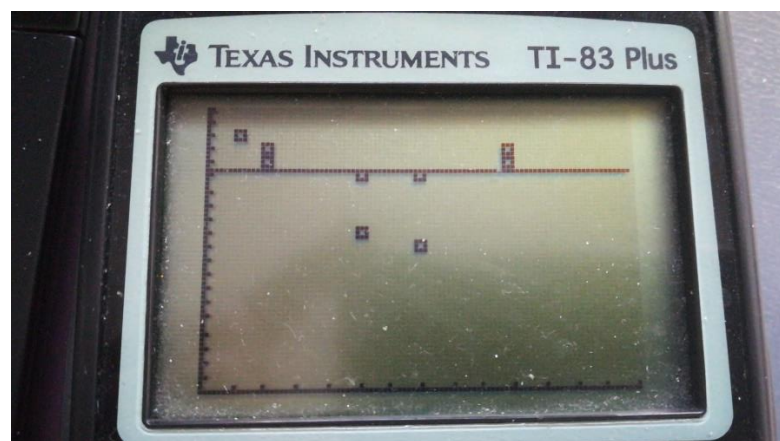
Resposta:

Tendo em conta a dispersão dos pontos não me parece ser razoável existir tal relação entre os pontos. Os pontos estão muito dispersos entre si e não se aproximam de uma reta.

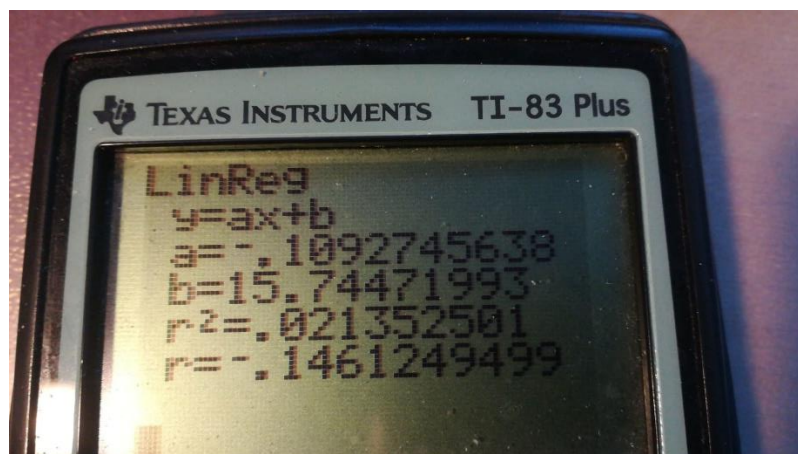
c)

declive= -0,1092745

equação reduzida da reta $y = -0,1092745x + 15,744995408$



d) $r = -0,1461249$



e) O coeficiente de correlação linear é próximo de 0, logo podemos concluir que os pontos não se aproximam de uma reta. Quando o coeficiente é perto de 0 não existe correlação linear entre as variáveis em estudo e nada se pode concluir sobre as mesmas.

Desta forma não se pode concluir que as notas dos alunos se devem ao tempo atribuído ao estudo.

f) Tendo em conta a análise dos resultados nada podemos concluir em relação à correlação entre estas duas variáveis (tempo em horas e notas) visto nos dados recolhidos existem alguns pontos que são outliers, como por exemplo existe um aluno que tem 18 valores a matemática e apenas estuda 1 hora. Existem também mais 2 alunos que têm 17 e 16 valores e que estudam respetivamente duas horas. Dado que, segundo a média calculada, cada aluno deveria estudar aproximadamente 6 horas, e como estas 3 alunos estudam apenas 1 a 2 horas podemos observar que se afastam muito do espetável que seria 6 horas.

FIM DE RESOLUÇÃO _____

Isabel, a partir da determinação de medidas estatísticas e da interpretação das representações gráficas que obtém através do uso da calculadora gráfica, chega a conclusões em que pressupõe não haver relação estatística entre as duas variáveis. Procura em seguida ilustrar com alguns exemplos concretos, embora demonstre aqui algumas dificuldades na explicação que dá da sua interpretação. No entanto, é evidente a presença de **aprendizagem** de estatística aplicada a amostras bivariadas, utilização

da tecnologia a casos concretos e o desenvolvimento de **raciocínio estatístico** em torno do conhecimento do coeficiente de correlação linear.

NOTAS SOBRE TAREFA APLICAÇÃO

Nas resoluções apresentadas acima, surgem evidências da aprendizagem realizada pelos alunos no que respeita à utilização da calculadora gráfica na resolução de problemas de análise estatística com amostras bivariadas. De notar que estes alunos nunca tinham usado a calculadora gráfica em trabalho com conteúdos de Estatística. Esta foi uma das aprendizagens em que os alunos mostraram uma evolução significativa onde, para além da vertente da manipulação da calculadora, foi possível identificar bons níveis de interpretação de resultados e gráficos. Em alguns casos, na interpretação, os alunos usam uma linguagem que precisa de ser corrigida, mas onde se observam razoáveis níveis de **aprendizagem sobre os conteúdos de Estatística**. Os alunos conseguiram adquirir novos conhecimentos estatísticos ao trabalhar num contexto real que lhes era familiar. As aprendizagens nesta situação foram sustentadas em casos que, por serem próximos dos próprios alunos e da sua realidade como estudantes, se mostraram facilitadores do estabelecimento de conclusões e de processos de **raciocínio estatístico**, baseado nos dados e no contexto que esses dados refletem. Não se manifestaram grandes dificuldades quanto ao entendimento e caracterização da situação indicada na tarefa. Os alunos mostraram ter aprendido as características principais das amostras bivariadas e como definir estratégias de resolução. Neste conjunto de resoluções foi-me possível recolher dados que confirmam que os alunos estabelecem corretamente as relações entre as variáveis da amostra bivariada e fazem uma adequada organização dos dados em lista de valores para uso com a calculadora.

3. AVALIAÇÃO AULA

A Avaliação Aula (AA), foi realizada em modo teleconferência, tendo os alunos realizado a AA em 45 minutos a partir do enunciado que estava inserido na Plataforma CPA OnLine. Cada aluno colocou as suas respostas na plataforma para depois ser corrigida e avaliada.

A AA (em Anexo G: AA – Avaliação Aula. Dia 22 de abril de 2020) compreendia uma questão de escolha múltipla sobre determinação do quartil 3 de uma amostra, uma

segunda questão também de escolha múltipla para determinação do desvio-padrão usando calculadora gráfica e uma terceira questão de texto livre sobre reta de regressão e coeficiente de correlação igualmente com utilização de calculadora gráfica.

A resposta à terceira questão incluiria uma pequena explicação que os alunos tinham que dar sobre o uso da calculadora gráfica. Esta explicação ficou registada nos pequenos vídeos que os alunos inseriram na plataforma como parte da resposta.

A primeira questão teve 100% de respostas certas.

A segunda questão teve 63% de respostas certas. De notar que nesta questão se poderia avaliar se houve evolução e aprendizagem em relação às dificuldades que a maioria dos alunos deram mostras na Tarefa 1, ao confundir o desvio-padrão da população com o desvio-padrão da amostra. Nesta questão, em 63% das respostas já foi evidente que os alunos aprenderam a diferenciar σ_x (desvio-padrão da população) de S_x (desvio-padrão da amostra).

Na terceira questão, 70% dos alunos que realizaram a AA, obtiveram mais de 75% da pontuação desta questão.

Apresento em seguida dados recolhidos dos trabalhos realizados por alguns alunos na Avaliação Aula, onde além das respostas escritas, se incluem algumas capturas de ecrã obtidas a partir dos pequenos vídeos que os alunos realizaram para explicar como chegaram aos resultados apresentados por meio da utilização da calculadora gráfica.

Como referi anteriormente, esta Avaliação Aula foi realizada via teleconferência e as respostas dos alunos foram introduzidas na Plataforma CPA OnLine. Foi da plataforma que posteriormente extraí os dados que selecionei e agora apresento.

Por não julgar adequado, não fiz a transcrição das palavras dos alunos nos vídeos, onde em geral eles acompanham com as suas explicações os processos operativos que estão a seguir com a calculadora e também os resultados a que vão chegando e que é possível ver nos ecrãs capturados.

Como se constata dos dados recolhidos, as respostas que apresento permitem observar evidências de aprendizagens estatísticas. A facilidade com que os alunos usaram a calculadora gráfica na resolução da Avaliação Aula está relacionada com o facto de terem praticado a sua utilização durante os trabalhos realizados no âmbito da

investigação estatística. Este aspeto foi, por um lado motivador dos alunos e, por outro, também por via dessa motivação, importante para concretizar as aprendizagens estatísticas da UD.

BRUNO – Questão 3

Bruno revelou durante as aulas presenciais à vontade com a interpretação de representações gráficas e alguma facilidade para lidar com questões de geometria. Mostrou na resolução desta questão compreensão sobre a relação entre a representação gráfica e a medida estatística correlação.

RESOLUÇÃO _____

a) $m = -0,32$

$b = 7,98$

$r = -0,82$

b)

A associação entre as variáveis é forte e negativa, negativa pois faz uma reta descendente, que é característica de uma associação linear negativa, e, por outro lado, a associação é forte pois o módulo do coeficiente de correlação é um número perto de 1.

FIM DE RESOLUÇÃO _____

Nesta resolução, Bruno revela as **aprendizagens** efetuadas em relação à Estatística, em particular na determinação dos parâmetros da reta de mínimos quadrados e da medida estatística de correlação, através da calculadora gráfica. Mostra ainda evidências da realização de inferências e conclusões, estando presente na alínea b) um exemplo de **raciocínio estatístico**. Entende-se que o aluno refere a reta de mínimos quadrados como descendente quando a forma correta de o fazer seria reta de declive negativo, mas percebe-se que compreendeu o conceito associado à correlação negativa.

MANUELA – Questão 3

Tal como foi indicado no texto da AA, Manuela acompanha a resolução com dois vídeos onde explica os passos que vai dando ao usar a calculadora gráfica na

determinação dos valores das medidas estatísticas pedidas. A aluna adota uma forma de resolução pouco baseada na interpretação geométrica da reta de mínimos quadrados, fazendo, no entanto, a uma correta interpretação analítica dos valores a que chegou através do cálculo.

RESOLUÇÃO _____

a). (em anexo estão dois vídeos, o primeiro é o que tem o nome "1")

$$b = 7,978$$

$$m = -0,323$$

$$r = -0,826$$

b).

A partir do r conseguimos perceber que a associação entre as variáveis "distância" e "nº de atrasos" é forte pois o r é próximo de $|1|$, e que se trata de uma associação negativa uma vez que o valor do r também é negativo ($-0,826$)

FIM DE RESOLUÇÃO _____

Na resolução apresentada, Manuela mostra ter realizado **aprendizagem** de conceitos, procedimentos e processos estatísticos de inferência. Quer na alínea a) quer na alínea b) é evidente a utilização de processo de inferência a partir da reta de mínimos quadrados e da medida estatística de correlação. A justificação que a aluna apresenta na alínea b) evidencia **raciocínio estatístico**.

GONÇALO – Questão 3

Gonçalo procura justificar as suas conclusões com base no significado conhecido dos parâmetros que determinou através da reta de mínimos quadrados, sem fazer uma abordagem geométrica dos conceitos. Mostra, no entanto, conhecimento estatístico aplicado à resolução desta questão.

RESOLUÇÃO _____

$$a) m = -0.324$$

$$b = 7.979$$

$$r = -0.826$$

b) Podemos ver que a associação entre as variáveis "distância" e "nº de atrasos" é uma associação forte, pois está perto do número (-1) e é negativa pois o coeficiente da correlação linear é negativa.

FIM DE RESOLUÇÃO _____

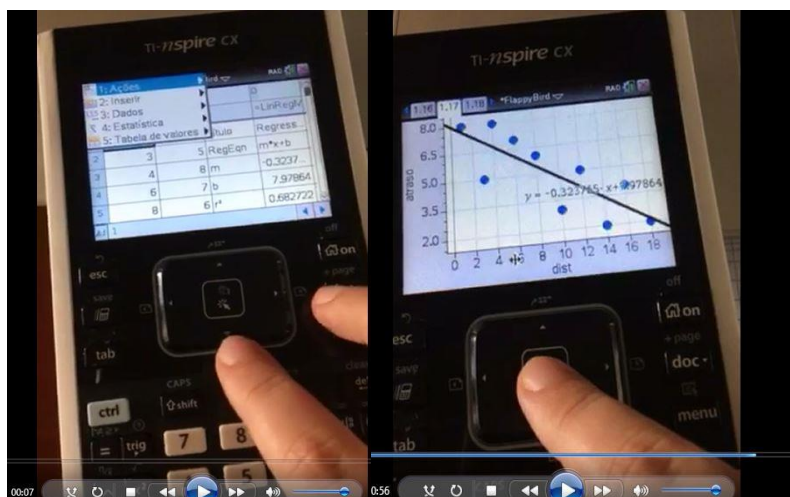
A determinação do coeficiente de correlação bem como a justificação apresentada na alínea b), mostram **aprendizagem** dos conteúdos estatísticos e a presença de **raciocínio estatístico**. Para suportar as conclusões, Gonçalo deveria usar de forma mais rigorosa o módulo de r ao justificar a associação forte entre as variáveis, no entanto é evidente a compreensão dos significados e dos conceitos.

ILDA – Questão 3

Na sua resolução, Ilda adota uma abordagem apoiada na sua compreensão geométrica dos conceitos e na representação gráfica da nuvem de pontos. A utilização que faz da calculadora para determinação dos valores dos parâmetros da reta de mínimos quadrados é correta e bem explicada.

RESOLUÇÃO _____

b). Devido à forma da nuvem de pontos e por estarem próximos da reta de regressão, eu diria que a associação entre as variáveis é forte pois o r tem um módulo próximo de 1.



FIM DE RESOLUÇÃO _____

A aprendizagem que Ilda revela ter efetuado quanto à utilização da calculadora no âmbito da Estatística, está associado não apenas ao domínio da tecnologia, mas também à própria **aprendizagem** dos conceitos de Estatística, envolvidos na UD. A

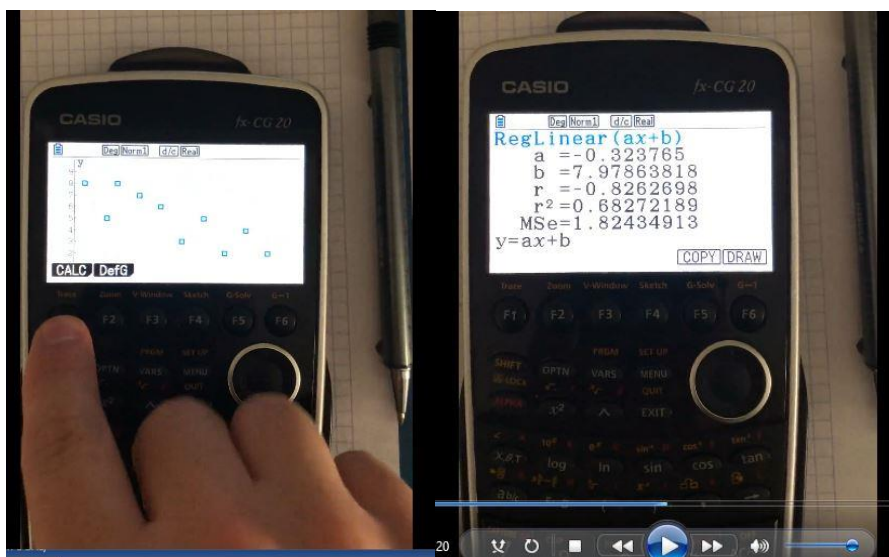
maneira com lida com os resultados obtidos com a calculadora para justificar induções e as conclusões a que chega, revela a presença de **raciocínio estatístico**. Ao usar a expressão “... eu diria que a associação entre as variáveis é forte pois...”, Ilda mostra entender, ou pelo menos intuir, que o raciocínio estatístico inclui uma vertente indutiva e de estimativa que é diferenciador do raciocínio matemático.

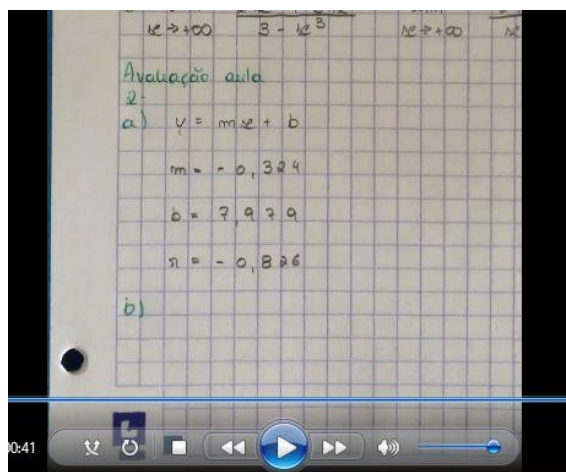
MATEUS – Questão 3

Mateus é um aluno que não é muito evoluído no uso de linguagem matemática, procurando habitualmente encontrar respostas com um nível reduzido de justificações fazendo uso de linguagem comum. No entanto mostra compreensão dos conceitos e procedimentos relacionados com a Estatística.

RESOLUÇÃO _____

- a) Valores no ecrã e no caderno.
- b) É forte pois os valores estão alinhados e é negativa pois o coeficiente de correlação é negativo.





FIM DE RESOLUÇÃO _____

Mateus revela ter realizado adequada **aprendizagem** dos conceitos estatístico e da utilização da calculadora na resolução das questões colocadas na tarefa em causa. De uma forma muito concentrada, mas correta, Mateus resolve as alíneas a) e b) utilizando diversos recursos – representação gráfica, cálculo numérico de valores, apresentação registada no caderno – e produzindo conclusões associadas a **raciocínio estatístico** aplicado à interpretação da correlação entre as duas variáveis em análise.

MAFALDA – Questão 3

Mafalda é uma aluna que demonstra desde o início da UD-Estatística interesse pelas diversas formas de representação usadas em Estatística e pelos processos e procedimentos variados que podem ser usados como recurso para resolução de problemas em investigação estatística.

RESOLUÇÃO _____

a)

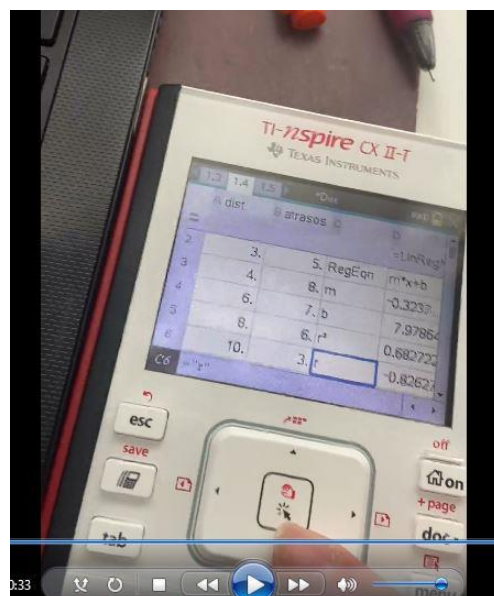
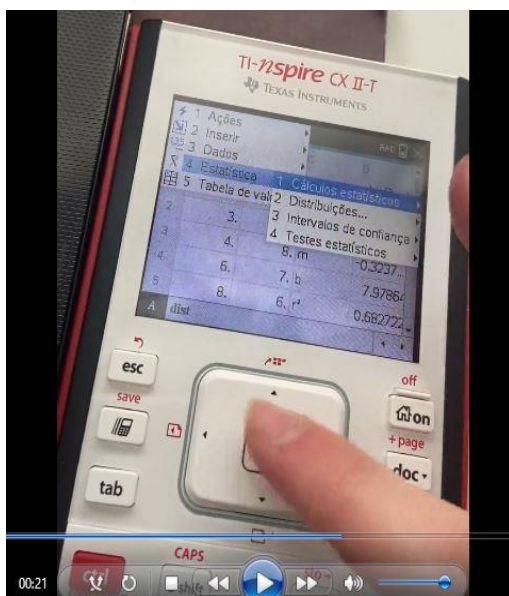
$$m = -0,32$$

$$b = 7,98$$

$$r = -0,82$$

b)

A associação entre as variáveis é forte e negativa, negativa pois faz uma reta descendente (declive negativo), que é característica de uma associação linear negativa, e, por outro lado, a associação é forte pois o módulo do coeficiente de correlação é um número perto de 1.



FIM DE RESOLUÇÃO _____

Mafalda apresenta uma resolução correta e completa em que mostra que realizou uma boa **aprendizagem** dos conteúdos da UD-Estatística trabalhados nas aulas. Evidencia ainda a correta utilização da calculadora gráfica, como se pode verificar pela ilustração que faz dos passos seguidos para o cálculo dos valores estatísticos. É também claro nas suas respostas, em ambas as alíneas, a presença de processos de **raciocínio estatístico**, justificações das conclusões a que chega e uma boa relação entre a abordagem mais geométrica e o seu significado estatístico (por exemplo: “uma reta descendente (declive negativo), que é característica de uma associação linear negativa”).

4. QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS

No Anexo H: Questionário aos alunos do 11.º B1, é apresentada uma matriz com as perguntas feitas n aos alunos e as respostas dadas pelos 11 alunos que responderam. Apresento em seguida a tabela 6 que permite ter uma visão de uma forma de classificar as respostas às questões colocadas, numa aproximação às categorias em estudo. Na primeira coluna desta tabela, apresento uma frase que identifica a pergunta feita no questionário; na primeira linha identifico a classe (que contribui para a categoria das questões em estudo) em que coloquei as respostas a cada questão.

Tabela 6: Matriz de relação entre perguntas no questionário aos alunos e categorias do estudo

Perguntas \ Categorias	Aprendizagem “Conteúdos”	Aprendizagem “Tecnologia”	Especificidades “Estatística”	Reação “Metodologia”
1. A aprendizagem acrescentou conhecimentos novos?	X			
2. Melhorou o desempenho no uso da calculadora gráfica em Estatística?		X		
3.Dificuldades no trabalho realizado em Estatística?				X
4. Aspetos que te pareçam específicos da Estatística.			X	
5.O que aprendeste pode ser útil no futuro?				X
6.Que te parece o uso do contexto real para as tarefas e exercícios práticos?				X
7.Para continuar a trabalhar conteúdos de Estatística, o que sugerias?				X

Verificamos que todos os 11 alunos que responderam ao questionário manifestaram explicitamente reação positiva face à metodologia adotada para a UD-Estatística. Todos responderam positivamente quanto à sua opinião sobre as aprendizagens realizadas.

Para fazer uma análise mais detalhada da reação que os alunos manifestaram, organizei as respostas em várias tabelas, de acordo com aspetos que referiram nas suas respostas e também as razões ou justificações que apresentaram para as suas opiniões. Embora estas tabelas incluam as quantidades de aspetos e razões apresentadas, a sua leitura não deve ser feita principalmente a partir dessa vertente quantitativa, mas sim da vertente qualitativa, ou seja, da ideia que se realça do tipo de respostas dos alunos. Por exemplo,

há alunos que numa só resposta apresentam mais que uma referência ou razão, pelo que a soma das referências ou razões, não tem outro significado que não seja de interpretação qualitativa e de tendência de opinião.

Tabela 7: Reação “Metodologia Contexto real” -Dois tópicos: Aspetos e Razões apresentadas como positivas.

Metodologia – Contexto real			
Aspetos referidos	Quantidade de referências feitas	Razões	Quantidade
Interessante	4	Proximidade, dados de pessoas como nós	4
Bem, bom, melhor	4	Realidade e relação com a vida, o dia-a-dia, útil	5
Importante, criativo	7	Motivação. Recolher os dados para o próprio trabalho e interpretação	8
Gostar, cativante	2	Aprender descontraidamente, com a participação de todos, ajuda a entender melhor	4
Útil, prático, uso de novas ferramentas	8		
Sugestões de aprofundar e continuar a trabalhar com dados reais, em investigação estatística em ambiente de turma	6		
Total	31	Total	21

Nos Aspetos referidos pelos alunos como positivos, realço os que referem como características da metodologia adotada a **utilidade**, o **ser prático** e o **uso de novas ferramentas**, bem como a **importância** e **criatividade** ou as sugestões para se

prolongar o trabalho com dados reais (em ambiente de contexto real). São ainda dadas respostas que referem que para estes alunos a metodologia seguida é **interessante**, é **melhor** ou **boa**. Alguns alunos referem explicitamente que **gostam** e que é **cativante**. De entre as razões apresentadas, destaco a **motivação** e a relação com a **realidade** dos alunos e a **proximidade**.

Registei as opiniões dos alunos quanto às dificuldades específicas que pudessem ter sentido na UD-Estatística, de modo a analisar que tipo de dificuldades foram ou poderiam ter sido introduzidas pela metodologia seguida na UD (Tabela 8). Considerei essas dificuldades como uma forma indireta de reação à metodologia.

Tabela 8: Reação “Metodologia Contexto real”- Dificuldades no trabalho realizado

Aspetos referidos	Quantidade de referências feitas
Não sentiu dificuldade	3
Sim, nos conteúdos	3
Sim, nas ferramentas (calculadora, Excel)	4
Sim, no uso da Plataforma	2

Dos aspetos referidos nas respostas dadas, não se identificam dificuldades que possam ser atribuídas especialmente à metodologia seguida no ensino-aprendizagem da UD-Estatística. As dificuldades apontadas não estão relacionadas com aspetos de processo ou abordagem, mas sim com os conteúdos, as tecnologias ou até a necessidade de usar a Plataforma CPA OnLine na segunda parte da UD.

Nas duas Tabelas 9 e 10, relativas a dados recolhidos a partir deste questionário quanto à aprendizagem, devemos ter em consideração que estes dados não permitem “medir” de algum modo essa aprendizagem, apenas refletem a própria opinião dos alunos quanto às aprendizagens que consideram ter realizado. É, contudo, uma forma de

perceber qual a visão que os alunos têm dessa aprendizagem em relação aos conteúdos da Estatística e à tecnologia que está relacionada com esses conteúdos na UD.

Tabela 9: Aprendizagem “Conteúdos”

Aspetos referidos	Quantidade de referências feitas
Relação entre os dados e a experiência (problema)	1
Tipos de variáveis, desvio-padrão, variância, outliers	6
Amostras bivariadas, Nuvem de pontos, Reta mínimos quadrados, Correlação linear	11
Relembrar conhecimentos	1

Tabela 10: Aprendizagem “Tecnologia”

Aspetos referidos	Quantidade de referências feitas
Conhecimento de novas formas de usar a calculadora gráfica	7
Tabelas e gráficos com calculadora	2
Diagramas de nuvens com calculadora	3
Experimentar e ganhar confiança	2
Pensar e compreender para usar	1

As referências explicitadas apontam para a aprendizagem de utilização da tecnologia para responder a questões de Estatística. Nas respostas sobre as aprendizagens

relacionadas com a tecnologia, são feitas três referências que apontam para o papel que esta pode ter em processos relacionados com a compreensão e o raciocínio.

A tabela 11 resume as respostas dadas quanto a aspetos que os alunos identificaram como específicos da Estatística. Podemos identificar dois grandes grupos de respostas: as que se focam nos aspetos mais utilitários (fazer gráficos ou usar a calculadora gráfica) e as que apontam para aspetos mais abrangentes (trabalho com amostras, previsões e estimativas).

Tabela 11: Aspetos Específicos da Estatística (potencial relação com Raciocínio Estatístico)

Aspetos referidos	Quantidade de referências feitas
Tratamento de dados	1
Trabalho com amostras	4
Linguagem Específica	1
Previsões e estimativas	2
Construção de gráficos, diagramas, medidas estatísticas, nuvens de pontos, uso da calculadora gráfica para assuntos de estatística	5

Embora a pergunta que deu origem a estas respostas não estivesse especialmente orientada para identificar processos de raciocínio estatístico, é possível reconhecer nas respostas dadas que alguns alunos sentiram que aspetos como as previsões e estimativas, o trabalhar com dados e amostras e até a linguagem são específicos da Estatística. Percebe-se a presença de um conjunto de aspetos que se podem associar a processos de raciocínio estatístico, como inferências realizadas a partir de amostras e que permitem estimar valores e tirar conclusões em relação a um grupo maior de dados ou da população, a interpretação das relações entre as medidas estatísticas de localização e dispersão ou ainda a representação gráfica de nuvens de pontos e respetivas retas de mínimos quadrados e coeficientes de correlação em amostras

bivariadas. Daí ter considerado que podem ser indiciadores de algum potencial de relação com o raciocínio estatístico.

5. DIÁRIO DE BORDO

O Diário de Bordo foi um instrumento que usei para efetuar recolha de dados para este estudo. O Diário de Bordo mostra claramente as duas fases distintas em que decorreu a prática letiva ao longo da UD-Estatística – na primeira fase, com aulas com a turma em sala de aula, em modo presencial tradicional e, na segunda fase, já sem a presença física da turma em sala de aula, mas em interação via Plataforma CPA OnLine. Nesta segunda fase, os registos feitos em Diário de Bordo, refletem mais os aspetos de gestão e organização dos processos de ensino-aprendizagem adotados, em colaboração, por mim e pelo professor Nuno Santos, do que a intervenção direta dos alunos, que ficou limitada pelas circunstâncias.

Através desta forma de recolha de dados foi possível registar alguns momentos e intervenções de alunos em sala de aula, que de outro modo se perderiam. Apresento em seguida alguns desses registos (a numeração que uso serve apenas para mais facilmente referenciar esses registos), que evidenciam contributos para a análise sobre as categorias anteriormente referidas Aprendizagem e Raciocínio Estatístico.

Nos registos 1 e 2 seguintes, é possível perceber que o envolvimento dos alunos na investigação estatística contribuiu positivamente para a aprendizagem de conteúdos estatísticos. Neste caso, Gonçalo e Bruno associaram claramente os tipos de amostragem que se estavam a aprender nas aulas 3 e 4, com o processo que se usou para a seleção aleatória dos elementos para as amostras definidas para as turma-alvo.

1 - No dia 04/03/2020, na aula 2: “Distribuí as pequenas caixas de madeira com os números dos alunos de cada turma pelos grupos, para fazerem a seleção aleatória dos alunos a questionar nas turmas-alvo. A utilização das caixinhas de madeira foi muito bem aceite, os alunos quiseram ficar com as caixas e todo o processo decorreu com dinamismo. Não houve problemas e cada grupo entregou-me a lista com os 10 + 2 alunos a inquirir.”

2 – No dia 06/03/2020, na aula 3 e 4: “Gonçalo e Bruno fizeram comentários relacionando as técnicas de amostragem com a forma aleatória como

selecionaram os 10+2 alunos de cada turma-alvo e lembraram a utilização das pequenas caixas de madeira com que fizeram as extrações dos números dos alunos para as amostras.”

Como preparação dos grupos em relação aos dados de contexto real a recolher por eles junto das turmas-alvo, usei exemplos para explicar os conceitos de população e amostra. Esta abordagem de usar dados de contexto real mostrou ser bem aceite pelos alunos, permitindo evidenciar aprendizagem e também maior facilidade em formular raciocínio estatístico. É o que se pode verificar no registo 3:

3 - No dia 06/03/2020, nas aulas 3 e 4: “Foram feitos dois exercícios no quadro que tiveram uma reação positiva dos alunos. Foram depois usados exemplos com dados de notas de Matemática para ilustrar Média e Desvio-padrão da amostra. Os alunos reagiram bem, tendo sugerido e feito logo os cálculos para as notas da população Turma e amostras que eles definiram como sendo cada uma das filas de alunos na sala. Foi útil para a compreensão das diferenças entre População e Amostra e que os valores obtidos para as amostras são diferentes entre si e diferentes da População. Pelas intervenções de Rui, Mafalda, Constantino, Ilda, Bruno, Carina e Rute, percebi que estavam a entender as diferenças e os conceitos.”

Durante a aula 6, em que se estava a trabalhar a construção de diagramas de extremos e quartis e respetiva interpretação, usei os dados que os grupos recolheram nas suas investigações estatísticas, tendo a turma reagido com fluidez aos exemplos baseados nas turmas 12.º A1 e 12.º B1. Construídos os diagramas, rapidamente alguns alunos começaram a dar mostras da presença de processos de raciocínio estatístico, ou pelo menos a sugerir conclusões sobre as duas turmas partindo da interpretação dos respetivos diagramas de extremos e quartis, como se pode observar nos registos 4 e 5:

4 - No dia 11/03/2020, na aula 6: “Comecei por recordar a construção do Diagrama de Extremos e Quartis usando o exemplo com que acabámos a aula anterior, com as notas do 1.º período de Matemática nas duas turmas 12.º A1 e 12.º B1. Pedi um voluntário para ir ao quadro desenhar o Diagrama e Gonçalves ofereceu-se. Começou por determinar para a turma 12.º B1 os valores Min, Max, Mediana, Q1 e Q3. Vários alunos foram colaborando com sugestões e

Gonçalves completou bem o diagrama. Depois pedi a Carina para ir fazer o diagrama correspondente à Turma 12.º A1. De novo com alguns alunos a fazerem sugestões, Carina fez a determinação das medidas estatísticas respetivas e desenhou, “ao lado” do diagrama da outra turma, o diagrama da turma 12.º A1. Com os dois diagramas em “paralelo”, os alunos começaram a identificar características e a fazer algumas inferências: os mínimos e os máximos nas duas turmas são iguais; as notas da turma B1 estão mais concentradas que as da A1 que estão mais dispersas.”

5 - No dia 11/03/2020, na aula 6:” Pedi então aos alunos para fazerem afirmações que considerassem verdadeiras, com base no que já se sabe das duas turmas representadas. Houve uma boa participação de vários alunos (Mateus, Tomé, Pedro, Constantino, Gonçalves, Gonçalo, Mafalda, Rute, Bruno, Carina, Bernarda, e outros) que fizeram comentários: Amplitudes Interquartil diferentes; Grande diferença nas medianas; Possibilidade ou não de afirmar claramente que uma turma é melhor que a outra; Possibilidade de comparar as medidas das duas turmas através do diagrama, mesmo tendo em conta que a dimensão de cada turma é diferente; Foi referido as percentagens de notas abaixo de Q1 ou acima de Q3; Foi referido que 50% das notas, entre Q1 e Q3 são muito diferentes nas duas turmas; Gonçalves referiu que mais de 75% das notas da B1 são inferiores à mediana da A1; Foi referido que na A1 há uma maior concentração de notas com valores superiores a 15.”

Usando os dados recolhidos pelo grupo 4 junto da turma 11.º A2, os alunos aprenderam alguns detalhes relacionados com a organização e o tratamento dos dados recolhidos, tendo percebido como é importante ter em conta os dados e o contexto quando se realizam investigações ou trabalhos estatísticos. Os registos 6 e 7 seguintes, refletem esses entendimentos dos alunos:

6 - No dia 11/03/2020, na aula 6: “Em seguida, utilizando diretamente o Excel, usei os dados da amostra do Grupo 4 (turma 11.º A2) para exemplificar como organizar e tratar os dados recolhidos. Em diálogo com os alunos, identificaram-se alguns erros grosseiros e como proceder para os corrigir no caso de isso ser correto e perceber que em vários casos não se pode corrigir, apenas eliminar. Foram abordados casos diferentes que se identificaram na

amostra, nalguns era adequado corrigir erros evidentemente grosseiros (erros de digitalização de números) noutros, por não termos a certeza, a opção pode passar por eliminar a resposta ao questionário.”

7 - No dia 11/03/2020, na aula 6: “Diversos alunos deram mostras de entender que as inferências a realizar a partir dos dados recolhidos devem ter em conta diversos aspetos relacionados com os próprios dados, com o contexto e com as questões a que se procura dar resposta.”

7. CONCLUSÕES

No presente capítulo, realizo uma breve síntese do estudo, parto da análise dos dados recolhidos e apresento os principais resultados obtidos. Procuro responder às questões formuladas para o trabalho de cariz investigativo. Termino com uma reflexão global em que refiro o impacto da pandemia COVID-19 no estudo e no trabalho realizado, bem como as aprendizagens especiais que realizei, algumas das quais proporcionadas por esse acontecimento excecional.

1. SÍNTESE DO ESTUDO

Este estudo foi baseado na prática de ensino supervisionada que realizei com uma turma de 11.º ano de escolaridade do Colégio Pedro Arrupe. O seu objetivo foi compreender como a aprendizagem e a aplicação dos conhecimentos estatísticos a um trabalho concreto e em contexto “real”, podem contribuir para a aprendizagem da Estatística e para o desenvolvimento do raciocínio estatístico de alunos do 11.º ano. Para melhor atingir este objetivo, organizei a investigação em torno de três questões:

1. Em que medida estes alunos aprendem Estatística em ambiente de investigação estatística?
2. Como se desenvolve o raciocínio estatístico dos alunos usando um trabalho em contexto real?
3. Quais as reações dos alunos face a esta metodologia?

Optei por seguir uma metodologia interpretativa para melhor poder analisar e compreender os dados e os resultados do estudo. A recolha de dados foi feita essencialmente a partir de documentos produzidos pelos alunos nas tarefas que lhes foram propostas e da Avaliação-Aula, realizada no final das aulas da UD, que coincidiram com o final do 2.º período letivo. A recolha de dados, não tendo podido beneficiar da recolha de imagens vídeo, tirou ainda partido de um detalhado registo feito em diário de bordo que permitiu registar dados relevantes para a análise efetuada e respetivas conclusões. Foi ainda analisado o conjunto de respostas que 11 alunos

deram a um questionário feito à turma, para saber as opiniões dos alunos sobre as questões em estudo. Este questionário, embora não tenha recolhido a opinião de todos os alunos da turma, permitiu conhecer as ideias mais marcantes e perceber a importância que os alunos atribuem à aprendizagem realizada em contexto real.

A análise das produções escritas dos alunos permitiu identificar exemplos de situações que evidenciam aprendizagem estatística por eles realizada, bem como alguns exemplos onde se encontra presente raciocínio estatístico, mesmo que em níveis que em alguns casos devemos considerar como embrionários.

Para a minha intervenção letiva, optei por uma abordagem de ensino baseado na prática de investigação estatística realizada pelos alunos, organizados em grupos, junto de outras turmas do ensino secundário do Colégio Pedro Arrupe, procurando colocar os alunos em ambiente de trabalho colaborativo, em contexto real e de modo que pudessem participar ativamente no processo de ensino-aprendizagem.

Procurei, ainda, que as aulas fossem organizadas em torno de três grandes linhas orientadoras: (1) introdução de conteúdos e das tarefas, (2) trabalho autónomo de investigação estatística dos alunos, e (3) discussão em grande grupo. As diferentes configurações de trabalho, previamente pensadas por mim, alteraram-se na sequência do surgimento da crise COVID-19 pelo que a fase de discussão em grupo dos resultados das investigações estatísticas dos grupos, foi muito prejudicada pela falta da vertente presencial em sala de aula. Essa discussão não foi possível manter na segunda metade da UD, em que o trabalho foi exclusivamente apoiado pela Plataforma CPA OnLine. Nos últimos dias em que decorreu a UD-Estatística, após o encerramento das atividades no Colégio Pedro Arrupe, foi possível avançar de imediato para a utilização da Plataforma CPA OnLine para a realização de aulas assíncronas, dado ela já ser usada normalmente como veículo de comunicação com os alunos. Não foi possível operacionalizar o uso de aplicações de teleconferência para aula síncronas, a tempo de serem consideradas para a realização destas aulas. A operacionalização de aulas síncronas, aconteceu durante o período de férias que se seguiu. Esta condicionante prejudicou o trabalho mais focado em raciocínio estatístico que estava planeado para a segunda metade da UD.

2. PRINCIPAIS CONCLUSÕES

1. APRENDIZAGEM

A primeira questão que identifiquei neste estudo está relacionada com a aprendizagem da Estatística pelos alunos desta turma do 11.º ano. Não se limitava a procurar perceber se os alunos aprenderam Estatística, mas sim se o fizeram em ambiente de realização de uma investigação estatística, segundo uma abordagem organizada, com processos específicos e sequências de passos que permitem concluir a investigação e com ela evoluir na aprendizagem da Estatística.

Esta relação entre os conteúdos aprendidos e a prática que a turma desenvolveu junto das outras turmas-alvo das suas investigações, esteve sempre presente e foi relevante para o processo de aprendizagem. Da análise dos dados recolhidos apresentada no capítulo anterior, é possível concluir que os alunos integraram os conteúdos e aprendizagens resultantes do trabalho feito em sala de aula com os dados recolhidos pelos grupos junto das suas turmas-alvo, no decorrer da fase de recolha de dados. Esta integração, em sala com o trabalho realizado autonomamente pelos grupos, foi muito útil para a compreensão e aprendizagem de Estatística. Podemos também concluir da análise de dados apresentada, que um dos aspetos onde foi evidente a aprendizagem concreta, relacionada com a investigação estatística, foi na utilização da calculadora gráfica para resolução de questões práticas de cálculos estatísticos. Foi, aliás, este um dos pontos em que os alunos mais se mostraram confiantes e onde se podem verificar afirmações e produções escritas que revelam novas aprendizagens. O uso da calculadora gráfica associada à prática da investigação estatística mostrou ser um processo adequado para elevar a compreensão da Estatística, para além do bom conhecimento da base matemática em que se suporta.

Os dados recolhidos neste estudo mostram que o ensino-aprendizagem em ambiente de investigação estatística é relevante e contribui de forma positiva para a evolução dos alunos em Estatística, não apenas por promover a efetiva aprendizagem, mas também por introduzir fatores de proximidade que acrescentam motivação. Este aspeto foi muito evidenciado nas respostas dadas pelos alunos no questionário.

Devo também concluir que esta abordagem inclui alguns desafios que devem ser tidos em consideração, em particular relacionados com o tempo que é necessário para a

realização dos processos estatísticos, com o tempo indispensável para o amadurecimento dos conhecimentos adquiridos ao longo da investigação estatística, com o tempo que está envolvido no planeamento e preparação por parte do professor e relacionados também com a integridade que de todo o processo estatístico.

A conclusão que tiro do presente estudo, a partir das tarefas realizadas pelos alunos e alvo de análise efetuada com os dados recolhidos, é que, mesmo não sendo a situação ideal (Ponte & Noll, 2017, p. 440), são evidentes os sinais de aprendizagem realizada pelos alunos como resultado da aplicação da investigação estatística ao processo de ensino-aprendizagem.

2. RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO

O contexto familiar e de proximidade em que a investigação estatística decorreu foi um dos aspetos realçado pelos alunos como positivo. Puderam assim, focar-se nas questões que lhes sugiram, partindo logo de um nível de entendimento dos problemas próximo da problemática associada à Estatística. A compreensão do assunto a estudar é facilitada pela proximidade que os alunos sentem em relação ao tema alvo do estudo. As notas de Matemática, em turmas do ensino secundário constituídas por colegas que eles conhecem bem, que têm problemas globais semelhantes aos deles, são assuntos que os alunos da turma 11.º B1 compreendem bem. Com este contexto de grande proximidade, evidenciou-se uma boa capacidade de pensar no tema por parte dos alunos, seguindo processos de cariz estatístico para suporte ao raciocínio que foram procurando realizar, com base nos dados por si recolhidos. Devo, no entanto, realçar que o estudo desta questão, acabou por ser penalizado pela alteração do plano inicial, motivado pela passagem das aulas presenciais para aulas em Plataforma CPA OnLine. O trabalho específico a realizar em sala de aula, recorrendo a discussão aberta entre os grupos, com orientação do professor, era fundamental para ajudar a desenvolver processos de raciocínio estatístico nos alunos, a partir dos seus trabalhos de investigação estatística. Este trabalho não foi realizado deste modo e os recursos usados através da Plataforma CPA OnLine, não são os mais adequados para este trabalho conjunto de professor e alunos. Mesmo assim, os dados recolhidos permitem identificar evidências de raciocínio estatístico.

Considerando a Tarefa Autônoma 1: Trabalho Plataforma 1, os dados recolhidos das resoluções apresentadas pelos alunos Manuela, Rute e Armando, evidenciam a realização de processos de raciocínio estatístico. Manuela determina e relaciona pelo diagrama de extremos e quartis medidas estatísticas como a mediana, o desvio-padrão e os extremos da amostra. Rute, produz inferências e raciocínio estatístico com base nas relações entre as medidas estatísticas calculadas e na representação gráfica – diagrama de extremos e quartis. Armando determina as medidas estatísticas e a partir delas desenvolve e produz induções de base estatística relacionando média e mediana com o desvio-padrão, com a amplitude interquartis e com a dispersão dos dados. Na resolução desta tarefa, registo a presença de inferências e de raciocínio estatístico, relacionando medidas de localização com medidas de dispersão e extremos da amostra, bem como interpretação no contexto da investigação estatística realizada.

Tendo em conta a Tarefa Autônoma 2: Tarefa Aplicação e as resoluções recolhidas dos trabalhos produzidos por Armando, Mateus, Manuela e Isabel, encontramos evidências de raciocínio estatístico. Armando, partindo da amostra trabalhada, elaborou pressupostos, estimativas, conclusões e inferências para dados relativos a um grupo mais alargado. Além de fazer uma correta determinação do coeficiente de correlação entre as duas variáveis em estudo, produziu inferências estatísticas relacionadas com a representação gráfica da nuvem de pontos na alínea e) e chegou a conclusões na alínea f) a partir de estimativas e interpretação das medidas estatísticas determinadas nas várias alíneas desta questão 4. Mateus mostrou a presença de processos de inferência e raciocínio estatístico após determinar a média, ao relacioná-la com os valores determinados para desvio-padrão. Por outro lado, Manuela revelou a presença de raciocínio estatístico nas inferências que produziu quanto à correlação entre as variáveis independentes, mas também nas justificações que apresentou na alínea f) onde, a partir dos resultados obtidos do estudo da correlação entre as variáveis da amostra bivariada, concluiu por processo indutivo, que as notas obtidas a Matemática não são dependentes do número de horas de estudo dos alunos da amostra. Isabel, a partir da determinação de medidas estatísticas e da interpretação das representações gráficas que obtém através do uso da calculadora gráfica, através de um claro processo de inferência estatística, presumiu não haver relação estatística entre as duas variáveis.

A recolha de dados efetuada através da Avaliação-Aula do dia 22, permite identificar o recurso a processo de raciocínio estatístico por parte de alguns alunos (Bruno, Manuela, Gonçalo, Ilda, Mateus e Mafalda), nomeadamente nas justificações que apresentaram na Questão 3, relacionando a reta de mínimos quadrados, a sua representação gráfica, o coeficiente de correlação e as suas características (forte e negativa).

Alguns alunos identificaram como aspetos específicos da Estatística as estimativas, as amostras, a linguagem específica e o tratamento de dados. Estes aspetos, embora não evidenciem, por si só, a presença de raciocínio estatístico, permitem entender que algumas das suas componentes estão presentes na mente dos alunos como integrantes dos processos em Estatística.

Os dados recolhidos e que analisei tendo em consideração o desenvolvimento do raciocínio estatístico em trabalho feito pelos alunos em contexto real, levam a considerar que os alunos conseguiram interpretar as situações estatísticas que estavam a ser trabalhadas e permitem concluir que o ensino-aprendizagem de Estatística realizado com base num trabalho em contexto real é potenciador do desenvolvimento de raciocínio estatístico pelos alunos.

3. REAÇÃO DOS ALUNOS

A terceira questão a que procurei responder no presente estudo, parecia-me aquela em as evidências seriam mais difíceis de identificar. No entanto, isso não aconteceu. O questionário final aos alunos, forneceu dados muito claros sobre a reação dos alunos à metodologia adotada, baseada no ensino-aprendizagem de Estatística apoiado por ambiente de investigação estatística desenvolvida em trabalho realizado em contexto real. É certo que o questionário foi respondido apenas por uma parte dos alunos da turma, não podendo ser visto como a opinião global da turma, mas nos 11 alunos que responderam ao questionário encontramos muitas ideias que vários alunos da turma foram manifestando ao longo da UD.

Dos dados recolhidos e da análise efetuada e apresentada no capítulo anterior, posso concluir que os alunos que responderam, gostaram de trabalhar dados reais que eles próprios recolheram, se sentiram motivados e, desse modo, lhes foi mais agradável e eficaz aprender Estatística, nomeadamente a utilizar a calculadora gráfica para resolver

questões concretas, não tendo sentido dificuldades na aprendizagem destes conteúdos. A aprendizagem da aplicação e uso da tecnologia foi um dos aspetos que os alunos referiram como importantes nesta UD.

Embora não se possam tirar conclusões com base numa relação direta entre a reação dos alunos a esta metodologia que se seguiu na UD-Estatística e as classificações que os alunos obtiveram, apresento no Gráfico 2, as classificações obtidas pelos alunos da turma 11.º B1 no final do 2.º período do 11.º ano a Matemática e as respetivas notas no final do 10.º ano. A leitura deste gráfico deve ter também em consideração que as classificações nos conteúdos Estatística têm um peso reduzido na nota do 2.º período, pelo que apenas se deve fazer uma leitura informativa.

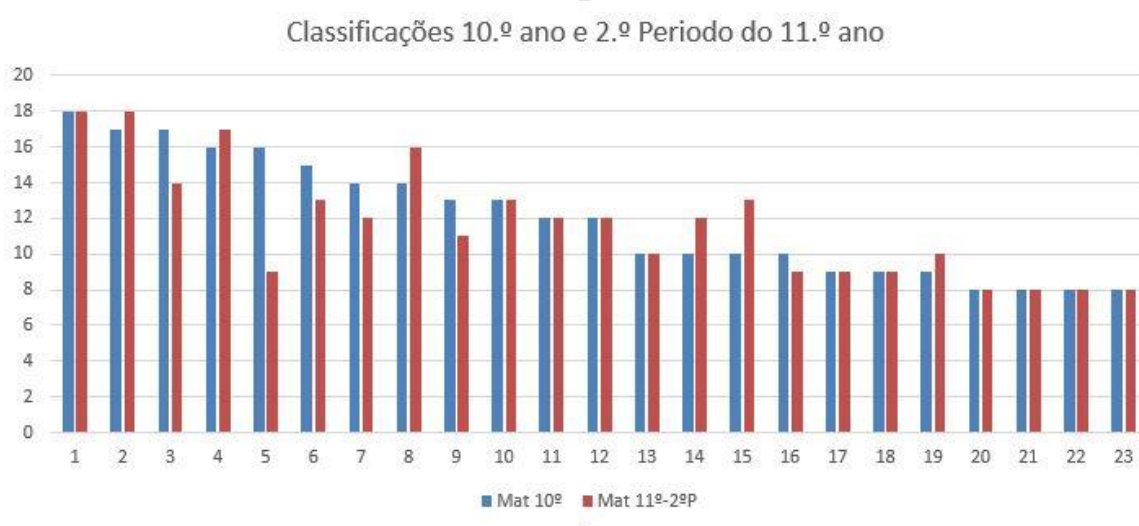


Gráfico 2: Classificações individuais no 10.º ano e 2.º período do 11.º ano

3. REFLEXÃO FINAL

1. O IMPACTO DA PANDEMIA COVID-19 NO ESTUDO

O plano que defini para a Prática de Ensino Supervisionada, a concretizar no 2.º semestre do 2.º ano do Mestrado em Ensino da Matemática, foi concebido para incluir algumas alterações e adaptações em função da realidade, tendo em conta algumas dinâmicas que são próprias da evolução de cada aula. Um bom plano tem sempre em conta os possíveis imprevistos. Mesmo que não explicitamente, foram pensados os

riscos de não ser possível concretizar determinado aspeto, que acontecesse este ou aquele outro desvio ao plano. O plano que delineei, estava aberto a surpresas. Mas devo admitir que não foi feito a pensar que das doze aulas da UD, seis seriam com os alunos em sala e as outras seis em pleno confinamento social motivado por uma pandemia.

As primeiras seis aulas foram “tradicionais”, com os alunos presentes em aula, com tarefas a serem realizadas em sala de aula, a partir de trabalhos feitos pelos alunos em modo “trabalhos de recolha de dados de campo” junto de outras turmas. As restantes seis aulas decorreram com o Colégio Pedro Arrupe fechado e os alunos e os professores em casa, a desenvolver trabalho conjuntamente através da Plataforma CPA OnLine e recorrendo a formas de comunicação via internet. O confinamento provocado pela crise do COVID-19 teve o seu início exatamente a meio da UD-Estatística e, naturalmente, veio a ter um relevante impacto no estudo de cariz investigativo que me propus realizar.

Ao longo do presente relatório faço diversas referências a aspetos específicos que foram afetados pela crise do COVID-19, mas posso identificar os seguintes pontos do plano como sendo aqueles onde os impactos foram mais relevantes:

- i. Aulas presenciais interrompidas e início de aulas a distância e respetiva gestão curricular;
- ii. Interrupção dos trabalhos de investigação estatística feita em grupo, tendo prosseguido de forma individual com adaptações;
- iii. Não concretização de discussões entre os grupos em sala de aula, que teriam como objetivo, trabalhar de modo especial aspetos de raciocínio estatístico;
- iv. Ausência de compilação dos dados das seis turmas-alvo pelo que não se analisou o conjunto das amostras, procurando desse modo alargar o âmbito dos trabalhos realizados por cada grupo e ganhar uma visão de conjunto;
- v. Não foi possível que cada grupo preparasse e fizesse a apresentação da sua investigação estatística à turma, trabalhando assim as suas competências de comunicação em contexto de Estatística;
- vi. A recolha de dados para o estudo ficou limitada, pois não foi possível recolher dados (filmar) a partir das apresentações dos grupos e da realização de trabalho autónomo em grupo na sala de aula;

- vii. Não foi possível concretizar a sessão de *focus group* que, estando inicialmente prevista, acabou por ser substituída por um questionário aos alunos;

O impacto da crise COVID-19 no presente estudo, pode ser também identificado na fase posterior à realização das aulas da UD-Estatística. Na verdade, todo o trabalho de compilação de dados, análise, conclusões, reflexão, escrita e edição do presente Relatório de Prática de Ensino Supervisionada foi realizado em pleno período de confinamento provocado pela crise sanitária.

2. SER PROFESSOR: APRENDIZAGENS ESPECIAIS

Quero concluir com uma reflexão sobre o trabalho desenvolvido, sobre a experiência de leção da unidade didática, contemplando as minhas aprendizagens e as dificuldades sentidas, como professor em formação.

A educação de professores de Matemática é vasta e exigente num conjunto alargado de características, competências e conhecimentos. Quando nos focamos na formação em Estatística como componente importante da educação de um professor de Matemática, podemos centrar as atenções em várias áreas e seguir diversas abordagens. Pode ser uma educação mais centrada em (a) conhecimento de conceitos e procedimentos, cálculo de medidas estatísticas e representação de dados através de exercícios rotineiros; (b) manuseamento de dados, recolha, representação e interpretação de dados previamente preparados e organizados pelo professor, nos livros e manuais ou na internet; ou (c) realização de investigações estatísticas, que envolvam o ciclo completo de questionar, recolher dados, analisar, interpretar criticar dados e argumentação (Ponte, 2011).

Se para mim era clara a relevância dos dois primeiros aspetos, ao concluir o processo envolvente da Prática de Ensino Supervisionada e da Unidade Didática que lecionei, posso afirmar que a abordagem que segui, baseada na prática de investigações estatísticas no processo de ensino-aprendizagem, foi muito motivador e deu bons frutos, tanto em relação às aprendizagens realizadas pelos alunos da turma em que lecionei, como em relação às minhas aprendizagens como professor em formação. É para mim claro que o ensino-aprendizagem é mais eficaz se for integrado em processos de marcada vertente prática e tanto quanto possível relacionados com ambientes de

trabalho em contexto real, que seja significativo para a comunidade educativa, para os alunos, o professor e para a própria escola.

Para além do conhecimento do curriculum, é fundamental o conhecimento que o professor tem da turma, para uma adequada preparação do trabalho a realizar com os alunos dessa turma. Por isso, considero de extrema relevância o facto de ter acompanhado esta turma, em estreita colaboração com o meu professor cooperante, desde o início do ano letivo. Tive oportunidade de aprender as dinâmicas próprias da turma, a partir do seu exemplo vivo de professor. Conhecer os alunos e as suas particularidades permite adequar propostas e estratégias aos diferentes alunos. Permitiu também aprender a colocar-me no lugar do aluno. Percebi que é fundamental que o professor saiba sempre colocar-se na posição do aluno e compreender qual a forma mais adequada de comunicar e conduzir a aula, sem deixar nunca a sua posição de professor.

É importante aprender a preparar a intervenção letiva, não apenas do ponto de vista da organização dos conteúdos e das sequências curriculares das aulas, mas também contribuir com criatividade e inovação para se encontrar estratégias que possam ajudar a que o processo de ensino-aprendizagem seja eficaz e resulte em verdadeiros momentos de construção com, e para, os alunos. Conceber o plano da UD com base em trabalhos de investigação estatística a realizar pelos alunos e, a partir daí, contruir processos de aprendizagem que sejam realmente fatores de desenvolvimento, foi uma das aprendizagens especiais que considero terem sido importantes nesta fase da minha preparação como professor.

Ponte (2011) refere-se ao conhecimento profissional necessário para se ensinar Estatística como estando suportado claramente em três pilares: conhecimento dos alunos, conhecimento do curriculum e conhecimento das práticas de ensino. Inclui neste último, o planeamento da atividade de instrução, a condução das atividades em sala de aula e a reflexão sobre a prática do professor. Uma das aprendizagens que realizei ao preparar e executar a UD-Estatística, como descrito neste relatório, é que a caracterização destes três pilares é perfeitamente extensível para além do âmbito da Estatística. A própria elaboração deste relatório veio confirmar-me a importância do terceiro pilar: reflexão sobre a prática do professor.

Uma das características que podem dificultar a minha ação como professor está relacionada com a gestão do tempo durante a aula. Penso que esta é uma situação que se poderá encontrar entre os professores, em particular os professores de Matemática, mas é uma das áreas onde certamente vou ter de pôr empenho especial para melhorar.

Claro que não posso deixar de dar grande relevo às aprendizagens especiais que realizei na adaptação à realidade provocada pela crise COVID-19. Neste aspeto, eis alguns pontos a realçar: o trabalho de equipa desenvolvido pelos professores de Matemática do Colégio Pedro Arrupe para rapidamente estabelecer um plano alternativo para os alunos; a utilização das Plataformas Web com recursos de grande valia na atividade formativa, em particular nos processos de ensino-aprendizagem a distância; adaptação dos planos de aula à nova realidade sem perda de objetivos, com qualidade, em tempo útil, com adesão dos alunos e com permanente acompanhamento da sua evolução; a importância das ações orientadoras dos professores junto dos alunos em situações especiais e de grande perturbação na escola.

Foi uma grande oportunidade poder acompanhar esta fase de evolução desta turma 11.º B1 e um verdadeiro privilégio fazê-lo num momento de tão grande dificuldade social e educativa, com a orientação e apoio do professor Nuno Santos. Foi uma intensa aprendizagem a que realizei nestes meses, em que a profissão de professor assumiu aspetos para além de tudo o que era previsível. Uma aprendizagem única sobre o que pode implicar a vontade verdadeira de ser professor.

REFERÊNCIAS

- Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P., & Vallecillos, A. (1994). Errors and difficulties in understanding statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: Goals definitions and challenges. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht: Kluwer.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, 23(7), 13-20.
- Cobb, P., & McClain, K. (2004). Principles of instructional design for supporting the development of students' statistical reasoning. In Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics*, 31(3), 72-77.
- Colégio Pedro Arrupe. (2017). *Projeto Educativo do Colégio Pedro Arrupe: Uma carta de marear para o século XXI*. Lisboa, Colégio Pedro Arrupe. Disponível em <https://www.colegiopedroarrupe.pt/o-colegio/missao-e-visao/3>. Acedido em 18.12.2019
- Franklin, C. A., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-k-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Gal, I., & Garfield, J. (1997). *The assessment challenge in statistics education*. Amsterdam: IOS Press.
- Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning *Journal of Statistics Education*, 10(3), DOI:10.1080/10691898.2002.11910676
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics*, 31(3), 72-77
- IEUL (2016). *Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Diário da República, 2.ª série - N.º 52 - 15 março 2016. Disponível em <http://www.ie.ulisboa.pt/investigacao/comissao-de-etica>
- Martins, M. E. G., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e Tratamento de Dados*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.
- ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC
- Ministério da Educação (2014). *Programa e Metas Curriculares de Matemática A Ensino Secundário*. Lisboa: MEC
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais. Ensino básico e secundário*. Acedido de https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/11_matematica_a.pdf

- NCTM (2007). Princípios e normas para a Matemática escolar. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa do original de 2000).
- Ponte, J. P. (2011). Preparing teachers to meet the challenges of statistics education. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education* (pp. 299-309). NewYork, NY: Springer.
- Ponte, J. P., & Noll, J. (2017). Building capacity in statistics teacher education. In D. Ben-Zvi (Ed.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 433-455). Heidelberg: Springer Nature
- Rumsey, D.J. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistical courses. *Journal of Statistics Education* [On Line], 10(3). Disponível em: <http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/rumsey2.html>

ANEXOS

A. APRESENTAÇÃO DA UD-ESTATÍSTICA À TURMA

Estatística

12 Aulas

2 de março a 20 março

Integrado num trabalho do Instituto de Educação ULisboa

- Conteúdos

- População e Amostra

- Medidas estatísticas de localização e dispersão de dados

- Organização e apresentação de dados

- Amostras bivariadas e coeficientes de correlação

- Investigação Estatística

- Verifica-se uma relação estatística entre a variável A e a variável B?

- Aprendizagem através da Investigação Estatística

- Inquérito com questões a alguns alunos de 6 turmas do Secundário

- 6 grupos de trabalho na turma (5 grupos de 4 alunos + 1 grupo de 3 alunos)

- Aprendizagem baseada em dados de contexto real

- Recolher, Organizar e Analisar os dados

- Conclusões

- Apresentação dos trabalhos, em duas aulas

- Recursos

- Calculadora Gráfica

- Disco Partilhado por cada grupo via Google Drive

- Sheets/Excel, Slides/PowerPoint

- Acesso via Portátil, Tablet ou Telemóvel

- Alguns momentos serão filmados, para minha documentação

- Avaliação

- Apresentação dos grupos

- Avaliação Aula

- Auto-avaliação

B. PLANO CONCRETIZADO DAS 12 AULAS

PLANO CONCRETIZADO DAS 12 AULAS
ORLANDO NETO DA SILVA

AULA 1 - APRESENTAÇÃO DA UNIDADE DIDÁTICA ESTATÍSTICA. INVESTIGAÇÃO ESTATÍSTICA

Data	Duração	Domínio	Unidades	Aula/Conteúdos
02 MAR 2020 2ª f	60 minutos Lição 105	ESTATÍSTICA	EST10	Introdução e apresentação da UD/Estatística. Introdução ao estudo da Estatística. Amostra e População. Variável Estatística. Investigação Estatística.

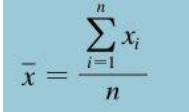
OBJETIVO	SUMÁRIO
Recordar conceitos e aprendizagens anteriores	Apresentação da Unidade Didática Estatística. Investigação Estatística

ESTRUTURA DA AULA	DURAÇÃO
1. Sumário e Introdução da aula	5'
2. Apresentação da UD/Estatística	5'
3. Introdução ao estudo da Estatística	20'
4. Introdução da Investigação Estatística	30'

RECURSOS GERAIS A USAR
Apresentação em Quadro Interactivo Ficheiros Excel/Sheets com notas a Matemática 1ºP do 11 B1 Gráficos

A1- Desenvolvimentos da Aula 1

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
5 min	1. Registo do Sumário		
5 min	2. Apresentar o modo como a UD se vai desenrolar a) Apresentar a Investigação Estatística a realizar pelos grupos como forma de promover as aprendizagens b) Apresentar o modo de avaliação adotado (apresentações do trabalho desenvolvido por cada grupo, autoavaliação individual e avaliação aula)	O professor terá como principal papel, motivar e acompanhar o debate e facilitar conclusões - Apresentação feita em ppt pelo prof. - Turmas envolvidas: 10 A1 +10 B1 + 11 A1 + 11 A2 + 12 A1 + 12 B1 - 10 alunos por Turma/Grupo (mais dois suplentes) - Grupos pré-definidos, com os alunos que não querem ser filmados a ficar juntos - Uso do Google Drive com partilha por grupo, Sheets, Apresentações - Guião das Apresentações dos grupos - Guiões para uso das calculadoras gráficas/sheets - Avaliação Aula, Apresentação e Auto-avaliação	
20 min	3. Introdução ao estudo da Estatística a) Estatística Descritiva e Inferencial. Dados e Contexto b) População e Amostra. Dimensão da amostra. Sondagem e Censos c) Variável Estatística (qualitativa e quantitativa)	a. - Estatística Descritiva e Estatística Inferencial b. - População: Alunos das “6 Turmas” Matemática do Ensino Secundário no CPA Amostra 60 alunos das “6 Turmas” de Matemática.	a- Max10 Pg.178

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
		c. - População: Alunos de cada ano 10º, 11º 12º Amostra 20 alunos de cada ano d. - Unidade estatística: cada elemento da população e. - Amostra de dimensão n: $x=(x_1,x_2,...x_n)$ f. - Variável Qualitativa e Quantitativa (Discreta ou Contínua)	f- Max10 Pg.179 Ex: Qualitativa-Meio de Transporte; Q Discreta-Nota a Matemática; Q Contínua-Altura do aluno
30 min	4. Introdução à Investigação Estatística a) Lançar questões que motivem o debate sobre ideias estatísticas i. Questão estatística pressupõe variabilidade dos dados ii. Representações gráficas e medidas estatísticas ajudam a interpretação dos dados b) Lançar questões sobre o tema da investigação estatística “ O tempo de estudo e os resultados, em matemática”	a. - A partir de um subconjunto de notas de Matemática de 20 alunos do 11º obteve-se uma média de 14 valores. Podemos afirmar que as notas dos alunos do 11º ano são em média 14 ? b. - Para outro subconjunto os resultados seriam os mesmos ou variam? c. - Exemplos de medidas estatísticas: Moda, Média, Mediana, Quartis, Amplitude, Desvio-padrão(só esta é Nova) d. - Estimativas para a população variam de amostra para amostra. e. - Inferência Estatística f. - Exemplos de representações gráficas: tabelas, gráficos de	$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ $\bar{x} = \frac{\sum}{n}$  c- Exemplo: preparar as notas dos alunos da turma 11B1 para apresentar e recordar a Moda, Média, Mediana, Amplitude d- Se usarmos a 11 B1 e a 11 A1 para estimar a média das notas do 11ºano no CPA obtemos os mesmos valores?

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
		barras e histogramas, gráfico de extremos e quartis, etc.	f- Apresentar alguns exemplos de gráficos mais usados. Recorrer ao Excel e Geogebra para mostrar gráficos feitos-

AULA 2 - Inquéritos.

Data	Duração	Domínio	Unidades	Aula/Conteúdos
04 MAR 2020 4ª f	60 minutos Lição 106	ESTATÍSTICA	EST10	Inquéritos. Desenhar o questionário a usar na investigação estatística. Recolha de Dados. Constituição de 6 grupos de alunos. Organização do trabalho dos grupos.

OBJETIVO	SUMÁRIO
Preparar e organizar o trabalho de recolha e organização de dados da Investigação Estatística a realizar pelos alunos	Investigação Estatística. Inquéritos e questionários. Grupos de trabalho

ESTRUTURA DA AULA	DURAÇÃO
1. Sumário e Apresentação da aula	2'
2. As 4 fases da Investigação Estatística. Inquéritos	20'
3. Recolha de Dados	13'
4. Constituição de 6 grupos de alunos	10'
5. Organização da Recolha de Dados pelos grupos	15'

RECURSOS A USAR
Projetar e apresentar os Questionários Arquivos Google Drive para serem partilhados pelos Grupos Folhas com os nº dos alunos e caixas de madeira para seleção aleatória para inquérito Computador, Tablet ou Telemóvel para aceder aos dados no Drive Partilhado

A2- Desenvolvimento da Aula 2

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
2 min	1. Registo do Sumário		
20 min	2. As 4 fases de uma Investigação Estatística a) Formular o problema, na forma de questões que se procuram responder através de dados b) Planeamento adequado para recolha de dados apropriados c) Organizar e tratar os dados recolhidos, através de tabelas, gráficos e algumas medidas e realizar a análise de dados d) Interpretação dos resultados obtidos e formulação de conclusões	a. - Envolvendo os alunos, procurar fixar o esboço/plano para a investigação estatística	
	3. Desenhar um esboço/plano da investigação estatística 4. Introdução do conceito de Inquérito a) Apresentação dos detalhes sobre o inquérito a efetuar. Questionário	a. - O inquérito como uma das possíveis formas de recolha de dados para a investigação estatística b. - Apresentar uma sugestão de questionário c. – Considerar fazer ajustamentos de detalhe ao questionário apresentado d. - Plano de questionário em Anexo 1	b- Apresentar o questionário pré-definido, como sugestão já próxima do final, mas admitir alguma discussão d- Distribuir aos grupos as folhas com os inquéritos na aula seguinte

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
13 min	5. Organização de Dados a) Utilização do Excel/Sheets para registo dos dados	a. - Exemplificar a utilização do Excel/Sheets a partir dos dados recolhido em papel nos inquéritos	
10 min	6. Constituição de 6 grupos de alunos a) Definir o modo de funcionamento dos grupos no âmbito da investigação	a. - Devem ser formados 5 grupos de 4 e 1 grupo de 3 b. - Os alunos que não querem ser filmados devem ficar juntos, num grupo c. - Explicar que cada dois grupos trabalham os dados de um ano (10º, 11º ou 12º)	a- Preparar previamente os arquivos em Google Drive partilhados para cada um dos grupos, que se identificarão por um numero de ordem (Grupo 1, 2, etc.) e distribuir os acessos pelos grupos. Um acesso por Grupo.
15 min	7. Organização da recolha de dados pelos grupos a) Atribuição das turmas do 10º, 11.º e 12º a inquirir pelos grupos b) Fazer a seleção aleatória pelo números, dos 10 a 12 alunos de cada turma (10 mais 2 suplentes) a serem inquiridos por cada grupo c) Os grupos realizam os levantamentos dos dados de campo junto das turmas através de formulário a preencher pelos inquiridos, registam e organizam esses dados em folha/quadros previamente construídos. d) Estabelecer prazos e momentos intermédios de execução.	a. – Preparar previamente os números dos alunos das turmas a inquirir para fazer seleção aleatória de alunos a inquirir b. – Cada grupo extrai 12 números e regista-os para uso posterior, procurar que cada grupo reúna 10 questionários, com dois suplentes c. – Prazo: Os dados recolhidos pelos Grupos, devem estar registados em Sheets no Drive partilhado, até às 18h do dia 09.03 2ª feira , para poderem ser usados como exemplos nas aulas seguintes	a- Levar os nº dos alunos das turmas amostra em folhas de papel para realizar a seleção aleatória de alunos a inquirir, a incluir na amostra

AULA 3 - Média e desvio-padrão de uma amostra. Amostragem.

Data	Duração	Domínio	Unidades	Aula/Conteúdos
06 MAR 2020 6ª f	60 minutos + Lição 108	ESTATÍSTICA	EST10	Média de uma amostra de uma variável. Variância e desvio-padrão de uma amostra. Medidas de localização e de dispersão. Amostragem.

OBJETIVO	SUMÁRIO
Usando vários exemplos e gráficos explicar os conteúdos da aula de modo a que os alunos entendam a ligação com a investigação estatística em que vão trabalhar.	Média e desvio-padrão de uma amostra. Amostragem.

ESTRUTURA DA AULA	DURAÇÃO
1. Sumário e Apresentação da aula	2'
2. Média de uma amostra. Desvio em relação à média	20'
3. Variância e Desvio-padrão de uma amostra	20'
4. Propriedades da média, variância e desvio-padrão	10'
5. Amostragem	8'

RECURSOS A USAR
Projetar exercícios e exemplos Calculadora Gráfica

A3- Desenvolvimento da Aula 3

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
2 min	1. Registo do Sumário		
20 min	2. Média de uma amostra. Desvio em relação à média a) Conceito e Cálculo da média b) Lançar questões sobre variabilidade c) Características da média como medida estatística de localização d) Desvio em relação à média	a. - Média: $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$ b. - Exemplos de médias de duas amostras da mesma população c. Será a média sempre uma medida representativa dos dados? d. - Exemplos de pouca “resistência” da média a “outliers” (salário numa empresa com administradores incluídos) e. - Exemplos de desvios em relação à média f. - Usar os dados da população “secundário” nos exemplos em que for adequado	b- Dim10 p 186 Ex 18 Média aritmética em duas turmas e depois juntas c- OTD Exemplo p 122 d- OTD Exemplo p 140 e- Exemplo com amostra de 7 notas da 11 B1 para os desvios em relação à média
20 min	3. Variância e Desvio-padrão de uma amostra a) A variância e o Desvio-padrão. b) Medidas de dispersão	a. - Exemplos de aplicação b. - Variância: S^2x c. - Desvio-padrão: Sx d. - Dados agrupados e. - Interpretações	a-Exemplo: Tabela com notas de uma amostra da turma, cálculo de SS_x , S^2x e Sx da amostra c- Exemplo Adaptado de Dim10 p 187 Ex 24 Médias, desvio-padrão em duas Turmas e- Dim10 p 193 Ex 7

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
			Comparação de desvio-padrão de distribuições com unidades de medida diferentes
10 min	4. Propriedades da média, variância e desvio-padrão a) Lançar questões sobre as medidas de localização e de dispersão	a. - Exemplos de aplicação das propriedades principais	a- Exemplo com aumento das medidas a cinco irmãos
8 min	5. Amostragem a) Promover o debate sobre as medidas estatísticas como característica de cada conjunto de dados b) A estimativa c) Debater o conceito e a importância da amostragem Amostragens: Aleatória Simples Estratificada Sistemática	a. - A média da amostra é uma estimativa do valor médio da população b. - A variância e o desvio-padrão da amostra são estimativas da variância e desvio-padrão da população c. - É importante trabalhar bem a amostra para se poder ter boas estimativas da população e assim tirar conclusões estatísticas adequadas d. - É preciso estudar bem a População, a Amostra, a relação aleatória entre as duas e ter precisão nas medidas estatísticas usadas	

AULA 4 - Amostra ordenada. Mediana, Quartis. Diagrama de Extremos e Quartis

Data	Duração	Domínio	Unidades	Aula/Conteúdos
09 MAR 2020 2ª f	60 minutos Lição 109	ESTATÍSTICA	EST10	Amostra Ordenada. Mediana, Quartis. Mediana e Amplitude Interquartis como medidas de localização e dispersão. Diagrama de Extremos e Quartis

OBJETIVO	SUMÁRIO
Trabalhar com os alunos, que irão ao quadro para resolverem exercícios e para poderem clarificar conceitos e dúvidas associadas.	Amostra ordenada. Mediana, Quartis. Diagrama de Extremos e Quartis

ESTRUTURA DA AULA	DURAÇÃO
1. Sumário e Apresentação da aula	2'
2. Amostra Ordenada	20'
3. Mediana, Quartis, Percentil de ordem K	20'
4. Diagrama de Extremos e Quartis	18'

RECURSOS A USAR
Quadro para projetar exercícios e exemplos Calculadora Gráfica

A4- Desenvolvimento da Aula 4

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
2 min	1. Registo do Sumário		
20 min	2. Amostra Ordenada a) Amostra com dados qualitativos ou discretos b) Amostra com dados quantitativos organizados em classes	a. - Utilizar exemplos baseados nos dados recolhidos pelos grupos b. – Amostra com dados agrupados, frequência absoluta e relativa	a- Ordenar a variável Tempos de Viagem na amostra de um dos Grupos e usar variável Meio de Transporte para mostrar que não se ordenam variável qualitativas b- Mat10 p 163-4 Ex Amostra com idades de irmãos de 30 alunos, dados agrupados, frequência relativa e absoluta
20 min	3. Mediana, Quartis, Amplitudes a) Mediana b) Quartis c) Mediana e Amplitude interquartis	a. - Cálculo e exemplos a partir dos dados dos grupos b. - n par e n impar c. - Dispersos, agrupados e contínuos em classes d. - A mediana como medida de localização central e. - Amplitude Interquartis ($3^{\circ}Q - 1^{\circ}Q$) como medida de dispersão (50% dos dados centrais)	a- Exemplo com dados recolhido: Ordenar amostra de tempos de viagem e calcular medidas e- Exemplo Amplitude Interquartil em notas de alunos
18 min	4. Gráfico/Diagrama de Extremos e Quartis a) Construção do gráfico b) Interpretações a partir do gráfico	a. - Cálculo e exemplos a partir dos dados dos grupos b. -Comparar o gráfico de extremos e quartis de dois grupos do mesmo ano	b- Exemplo com peso para trabalhar histogramas e quartis com variáveis continuas

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
		c. - Gráfico de extremos e quartis é muito fácil de obter com o Geogebra. Mas antes treinar sem sw. d. - Interpretação de resultados	c- Usar dados semelhantes aos dos grupos e fazer Diagrama Extremos e Quartis

AULA 5 - Organização e tratamento dos dados univariados recolhidos. Aplicação prática à investigação estatística em curso

Data	Duração	Domínio	Unidades	Aula/Conteúdos
11 MAR 2020 4ª f	60 minutos Lição 110	ESTATÍSTICA	EST10	Organização e tratamento dos dados univariados recolhidos. Aplicação dos conceitos estatísticos à investigação estatística em curso.

OBJETIVO	SUMÁRIO
Utilização de folhas de cálculo e calculadoras gráficas. Treino com os alunos em trabalho autónomo. Dados obtidos pelos grupos no questionário.	Organização e tratamento dos dados recolhidos. Aplicação prática à investigação estatística em curso

ESTRUTURA DA AULA	DURAÇÃO
1. Sumário e Apresentação da aula	2'
2. Organização e tratamento dos dados	20'
3. Gráfico de Extremos e Quartis	5'
4. Trabalho dos grupos com os dados da investigação	32'

RECURSOS A USAR
Projetar exercícios e exemplos Excel para organização e tratamento de dados e gráficos Calculadora Gráfica

A5- Desenvolvimento da Aula 5

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
2 min	1. Registo do Sumário		
20 min	2. Organização e tratamento dos dados a) Utilização de folhas de cálculo b) Utilização de calculadora gráfica c) Gráficos de Barras	a. - A folha de cálculo para detetar erros nos dados b. - Média, mediana, quartis, mínimo e máximo, desvio-padrão da amostra e da população, com dados agrupados c calculadora gráfica	b- Ex com Calculadora a partir da amostrar recolhida no questionário: Média, mediana, quartis, mínimo e máximo, desvio-padrão da amostra e da população, com dados agrupados c calculadora gráfica
5 min	3. Gráfico de Extremos e Quartis a) Utilização de folhas de cálculo b) Utilização de calculadora gráfica	a. - Gráficos de extremos e quartis com dados agrupados notas Turma, com calculadora gráfica	a- Exemplo Com dados agrupados notas Turma, com calculadora gráfica
32 min	4. Exemplos de organização e tratamento de dados, com os dados da investigação a) Utilização de folhas de cálculo b) Utilização de calculadora gráfica	a. - Trabalho autónomo dos grupos	a- Alunos usam Computador, Tablet ou Telemóvel para aceder aos dados no Drive Partilhado

AULA 6 - Análise e interpretação dos resultados. Aplicação prática à investigação estatística em curso

Data	Duração	Domínio	Unidades	Aula/Conteúdos
13 MAR 2020 6ª f	60 minutos Lição 111	ESTATÍSTICA	EST10	Análise e interpretação dos resultados. Aplicação dos conceitos estatísticos à investigação estatística em curso.

OBJETIVO	SUMÁRIO
Realizar trabalho autónomo “para ser feito em casa”	Análise e interpretação dos resultados. Aplicação prática à investigação estatística em curso. Trabalho Autónomo “para ser feito em casa”; Avaliação-I

ESTRUTURA DA AULA	DURAÇÃO
1. Sumário e Apresentação da aula	-
2. Realização do Trabalho Plataforma 1	-
Interpretação de resultados com base nos dados da investigação	-

RECURSOS A USAR
Plataforma CPA OnLine Computador, Tablet ou Telemóvel para aceder aos dados Excel para organização e tratamento de dados Word para apresentação do trabalho Calculadora Gráfica

A6- Desenvolvimento da Aula 6

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
-	1. Registo do Sumário		AULA ONLINE RECORRENDO À PLATAFORMA CPA ONLINE
-	2. Trabalho autónomo feito em casa, com os dados da investigação, focado em: a) Organização de dados em folha de cálculo, validação de erros grosseiros; Classificação da variáveis b) Tabelas de frequência; gráficos circulares; gráficos de barras; moda; c) Amostras ordenadas; Mediana, Quartil 1, Quartil 3; Diagramas de Extremos e Quartis; Amplitude Interquartis d) Interpretações e Inferências; comentários e) Dados agrupados, Tabela de frequências f) Uso da Calculadora Gráfica, determinação de medidas estatísticas: média, desvio-padrão da amostra, mediana, quartil 1 e quartil 3, extremos; g) Construção de Diagrama de Extremos e Quartis h) Interpretações e inferências; comentários	a. – Trabalho feito com base nos dados e medidas estatísticas dos dados recolhidos por cada um dos 6 grupos b. – Dúvidas que os alunos têm, são esclarecidas na Plataforma ou via e-mail c. – O trabalho são enviados por e-mail e para a Plataforma CPS OnLine d. – Prazo para envio dos trabalhos: 18-03 às 12h	a- Trabalhar com as variáveis: Sexo, Número de irmãos, Altura, Nota Matemática e Tempo de Estudo

AULA 7 e 8 - Dados bivariados quantitativos. Reta de mínimos quadrados. Trabalho Autónomo

Data	Duração	Domínio	Unidades	Aula/Conteúdos
19 MAR 2020 5ª f	60 minutos x 2 Lição 112	ESTATÍSTICA	EST11	Amostra de dados bivariados quantitativos de dimensão n. Nuvem de pontos. Variável resposta e variável explicativa. Reta de mínimos quadrados.

OBJETIVO	SUMÁRIO
	Dados bivariados quantitativos. Nuvem de pontos. Reta de mínimos quadrados. Coeficiente de correlação. Trabalho autónomo.

ESTRUTURA DA AULA	DURAÇÃO
1. Sumário	2'
2. Regressão e Correlação	5'
3. Dados bivariados	5'
4. Nuvem de pontos ou Diagrama de dispersão	10'
5. Variável explicativa e variável resposta	13'
6. Desvios verticais	5'
7. Reta de Mínimos Quadrados	15'
8. Extra: Reta de mínimos quadrados	5'
9. Trabalho autónomo	60'

RECURSOS A USAR
Plataforma CPA OnLine Computador, Tablet ou Telemóvel para aceder aos dados Software do Quadro interativo Calculadora Gráfica

A7 e 8 - Desenvolvimento da Aula 7 e 8

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
2 min	1. Registo do Sumário		AULA ONLINE RECORRENDO À PLATAFORMA CPA ONLINE
5 min	2. Regressão e Correlação	a. – Como usar na Investigação Estatística	
5 min	3. Amostra de Dados bivariados a) Lançar questões que permitam introduzir e trabalhar estes conceitos	a. - Dimensão da amostra	
10 min	4. Nuvem de pontos ou Diagrama de dispersão	a. - Gráficos de dispersão b. - Centro de gravidade $(\bar{x}, \bar{y})$	a. Usar exemplo da Turma 12ª1
13 min	5. Variável explicativa e variável resposta	a. - Variável explicativa e variável resposta (ou independente e dependente)	a- Dim11 p 205 Ex 4 Variável explicativa e resposta. Interpretações b- Mat11 p 179 Ex 6 e Calculadoras pg 202 209 Centro de gravidade de dados bivariados com Calculadora
5 min	6. Desvios verticais	a. Interpretar o alinhamento dos pontos	
15 min	7. Reta de mínimos quadrados a) Utilizar a calculadora gráfica para a obtenção da reta dos mínimos quadrados e do gráfico de dispersão dos dados	a. - Guião para cálculo com calculadora gráfica b. - Guião para cálculo com Excel/Sheets c. -Exemplos com utilização da calculadora d. - Utilizar os dados da investigação	a- Correlação entre altura e peso numa amostra de 10 alunos de uma turma. Determinar Reta mínimos quadrados e coeficiente de correlação. Estimar uma situação

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
			b- Mat11 p 175 Ex Amostra e Calculadoras pg 202 209 Introduzir dados bivariados em listas, nuvem de pontos e reta mínimos quadrados com Calculadora c- Mat11 p 183 Ex Amostra e Calculadoras pg 202 209 Determinar a e b da reta mínimos quadrados com Calculadora
5 min	8. EXTRA: Como determinar reta dos mínimos quadrados usando tabelas e cálculo sem calculadora gráfica	a. Fazer o cálculo “manual”	a- Correlação entre altura e peso numa amostra de 10 alunos de uma turma. Determinar Reta mínimos quadrados.
60 min	9. Trabalho Autónomo “em casa”	a. Os alunos trabalham em casa os dados da Investigação Estatística	

AULA 9 e 10- Dados bivariados quantitativos. Coeficiente de Correlação.

Data	Duração	Domínio	Unidades	Aula/Conteúdos
20 MAR 2020 6ª f	60 minutos x 2 Lição 113	ESTATÍSTICA	EST11	Análise dos dados bivariados e interpretação dos resultados. Coeficiente de Correlação. Aplicação dos conceitos estatísticos à investigação estatística em curso. Exemplos com uso de Calculadora Gráfica

OBJETIVO	SUMÁRIO
	Dados bivariados quantitativos. Coeficiente de correlação. Uso da Calculadora Gráfica na Análise dos dados bivariados recolhidos. Conclusões

ESTRUTURA DA AULA	DURAÇÃO
1. Sumário	2'
2. Coeficiente de Correlação Linear	13'
3. Coeficiente de Correlação Linear – Associação linear	15'
4. Uso da Calculadora Gráfica para cálculo do coeficiente de correlação linear. Interpretação de resultados	30'
5. Trabalho autónomo em casa	60'

RECURSOS A USAR
Plataforma CPA OnLine Computador, Tablet ou Telemóvel para aceder aos dados Software do Quadro interativo Calculadora Gráfica

A9 e 10 - Desenvolvimento da Aula 9 e 10

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
2 min	1. Registo do Sumário		AULA ONLINE RECORRENDO À PLATAFORMA CPA ONLINE
13 min	a. Coeficiente de correlação linear	a. Propriedades	
15 min	b. Coeficiente de correlação linear a) Associação linear positiva e negativa entre variáveis e suas representações gráficas b) Associação linear forte e fraca	a. Interpretação dos diagramas de dispersão e reta mínimos quadrados	
30 min	c. Utilizar a calculadora gráfica para o cálculo do coeficiente de correlação a) Trabalhar com os gráficos em simulações b) Interpretação de resultados a partir dos dados da investigação Estatística	a. - Usar guião para cálculo com calculadora gráfica b. -Exemplos com utilização da calculadora c. - Utilizar os dados da investigação d. - Questionar sobre possíveis interpretações e. - Fazer simulações f. - r varia entre -1 e 1 g. - Calcular r com a calculadora gráfica	b- Mat11 p 185 Ex Amostra e Calculadoras pg 202 209 Determinar o coeficiente de correlação linear com Calculadora c- Usar dados investigação. Variável explicativa e resposta. Nuvem de pontos. Cálculo das médias das bivariadas. Reta dos mínimos quadrados e declive. Fluxos de águas solo erodido.
60 min	d. Trabalho autónomo “em casa” a) Variáveis explicativa e resposta; correlação linear entre variáveis; média das amostras; nuvem de pontos e reta dos mínimos quadrados; inferências	a. TPC usando tempos após corrida e pulsações de alunos atletas b. Tal como o TPC, também as dúvidas são colocadas na Plataforma para esclarecimento	a. Exercício colocado na Plataforma para treino de uso com calculadoras

AULA 11 – Tarefa de Aplicação: resultados dos Grupos

Data	Duração	Domínio	Unidades	Aula/Conteúdos
24 MAR 2020 3ª f	60 minutos Lição 114	ESTATÍSTICA	EST10 e EST11	Tarefa de aplicação; Resultados da Investigação Estatística realizada pelos Grupos. Avaliação-I.

OBJETIVO	SUMÁRIO
Aplicar as aprendizagens efetuadas à Investigação Estatística	Dados bivariados. Tarefa de Aplicação com os dados da Investigação Estatística ; Avaliação-I

ESTRUTURA DA AULA	DURAÇÃO
1. Sumário e Apresentação da aula	2'
2. Apresentação da Tarefa a realizar por cada elemento de cada grupo	15'
3. Trabalho autónomo para realização da Tarefa	43'

RECURSOS A USAR
Plataforma CPA OnLine Computador, Tablet ou Telemóvel para aceder aos dados Software do Quadro interativo Calculadora Gráfica

A11- Desenvolvimento da Aula 11

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
2 min	1. Registo do Sumário		AULA ONLINE RECORRENDO À PLATAFORMA CPA ONLINE
15 min	2. Apresentação da Tarefa a realizar por cada elemento de cada grupo	a. “Considera os dados recolhidos pelo teu grupo na Investigação Estatística em curso e completa seguinte tarefa, usando a Calculadora Gráfica para efetuares os cálculos ...” b. Prazo para entrega do trabalho: 18h do dia 26 de Março c. Cada aluno envia o seu trabalho em ficheiro Word para a Plataforma CPA OnLine ou por e-mail	
43 min	3. Trabalho autónomo: Tarefa Aplicação	Tarefa Aplicação será considerada para Avaliação	

AULA 12 – Avaliação Aula

Data	Duração	Domínio	Unidades	Aula/Conteúdos
22 MAR 2020 4ª f	60 minutos Lição 115	ESTATÍSTICA	EST10 e EST11	Avaliação - II

OBJETIVO	SUMÁRIO
Avaliação de aprendizagens individuais	Avaliação Aula; Avaliação - II

ESTRUTURA DA AULA	DURAÇÃO
1. Sumário e Apresentação da aula	2'
2. Avaliação Aula	45'
3. Comentários e observações	13'

RECURSOS A USAR
Plataforma CPA OnLine Software de Teleconferência Zoom Computador, Tablet ou Telemóvel para aceder aos dados Software do Quadro interativo Calculadora Gráfica

A12- Desenvolvimento da Aula 12

Duração	Indicações	Aspetos a Ter em Atenção	Recursos Aula
2 min	1. Registo do Sumário		AULA ONLINE RECORRENDO À PLATAFORMA CPA ONLINE, TELECONFERÊNCIA
45 min	2. Apresentação e realização da Avaliação Aula	a. A Avaliação Aula é constituída por duas questões de resposta múltipla e uma questão aberta, com duas alíneas b. A Avaliação Aula é realizada durante a sessão de Zoom e conduzida pelo professor	a. As respostas dos alunos são dadas diretamente na Plataforma
13 min	3. Comentários e observações	- Fazer comentário as trabalhos apresentados	

C. DIÁRIO DE BORDO

Aula 1: 02/03/2020

A aula começou com a apresentação das linhas gerais da investigação estatística a realizar ao longo das aulas seguintes. Fiz algumas revisões de conceitos estatísticos importantes para o desenvolvimento dos conceitos da UD e para a investigação estatística. Fui usando exemplos relacionados com a turma, como as notas que os alunos tiveram no 1.º período. As reações às questões que coloquei foram positivas. Não foram apresentadas muitas questões ao longo da exposição dos conteúdos. Comecei a apresentar algumas das medidas estatísticas que vão ser usadas na investigação estatística. Não tive tempo para abordar alguns tipos de representações gráficas e tabelas para usar com os dados. Talvez precisasse de mais 5 a 10 minutos para cumprir com o que tinha planeado. Voltei a lembrar os alunos que ainda não apresentaram os formulários de autorização para serem filmados. A aula terminou às 11h 55m. O professor Nuno Santos fez uma intervenção curta quando se estava a falar de População, Amostras, Census e Sondagens, para reforçar o exemplo dado sobre as sondagens e o erro das sondagens. Na fase final da aula, alguns alunos davam mostra de alguma impaciência ou cansaço (Armando, Gonçalves, Diogo ...). Talvez fosse porque já tínhamos chegado à hora do intervalo e eu não tinha notado.

Aula 2: 04/03/2020

Como na aula anterior ficaram por apresentar os gráficos que se podem usar em Estatística, nos primeiros cinco minutos da aula foi abordado esse assunto. Sem entrar em grandes detalhes, fiz a revisão da matéria lecionada. Os alunos estavam agitados por causa do teste que vão ter na próxima sexta-feira e os seus desejos de adiar o teste. Comecei a aula e os alunos acalmaram. Introduzi o tema da investigação estatística bem como as suas quatro fases e depois apresentei o esboço do trabalho que os alunos vão efetuar. A adesão ao trabalho foi boa e os alunos estiveram com atenção à

explicação dada. Apresentei a sugestão de questionário a usar na investigação estatística e após algumas questões relacionadas com as variáveis que não pareciam diretamente ligadas à questão principal da investigação estatística os alunos concordaram com a sugestão de Questionário. O questionário individual e a folha com a estrutura para a folha de cálculo a usar na recolha de dados foram depois distribuídas (uma a cada grupo). Dois alunos não perceberam logo para que serviam estes dois formulários. Apresentei a constituição dos 6 grupos de alunos e a atribuição das respetivas turmas a inquirir (previamente elaborados com o professor Nuno Santos, para haver equilíbrio nos grupos). A princípio os alunos procuraram reagir à constituição dos grupos, mas eu não dei muita abertura para isso. Dei indicação que os elementos pertencentes a cada grupo tinham sido bem pensados por mim e pelo professor Nuno Santos e os alunos ficaram mais tranquilos. Distribuí as pequenas caixas de madeira com os números dos alunos de cada turma pelos grupos, para fazerem a seleção aleatória dos alunos a questionar nas turmas-alvo. A utilização das caixinhas de madeira foi muito bem aceite, os alunos quiseram ficar com as caixas e todo o processo decorreu com dinamismo. Não houve problemas e cada grupo entregou-me a lista com os 10 + 2 alunos a inquirir. Estabeleci prazos para entrega dos primeiros dados e esclareci o procedimento de comunicação entre cada grupo e o professor. Dei o meu e-mail para eles mandarem o nome de contacto do grupo para depois criar os discos partilhados no Google Drive. No fim da aula os alunos combinaram com o professor Nuno Santos, com o meu acordo, a alteração das próximas aulas, de modo a não terem o teste de Matemática na próxima 6.ª feira dia 6-3-20. Assim, as próximas aulas de Estatística são: 6.ª dia 6-3, 2h (a 2.ª pode ser de recolha de dados) + 2.ª dia 9-3, 1h + 4.ª dia 11-3, 1 h + 5ª dia 12-3, 1h (supervisionada) + 6.ª dia 13-3, 2h. Tive que adaptar as aulas para começar a usar os dados dos questionários na 2.ª ou 4.ª (dias 9-3 ou 11-3). Esta alteração foi provocada pelo cancelamento da Peregrinação a Compostela, por causa do COVID-19, na última semana de março, dando assim mais folga para as aulas. Alunos com participação mais ativa e evidente nesta aula foram: Gonçalves, Gonçalo, Mafalda, Diogo, Armando, Bernarda, Ilda, Telma, Manuela. Entreguei a primeira parte do guião para uso das Calculadoras Gráficas (um por grupo) e dei indicação que vai estar na Plataforma CPA Online. Indiquei que este material e os pdf das aulas vão ficar disponíveis na Plataforma CPA Online e também no Google Drive partilhado de cada grupo.

Aulas 3 e 4: 06/03/2020

A aula teve início com breve revisão dos conteúdos dados na aula anterior. Foram feitos dois exercícios no quadro que tiveram uma reação positiva dos alunos. Foram depois usados exemplos com dados de notas de Matemática para ilustrar Média e Desvio-padrão da amostra. Os alunos reagiram bem, tendo sugerido e feito logo os cálculos para as notas da população Turma e amostras que eles definiram como sendo cada uma das filas de alunos na sala. Foi útil para a compreensão das diferenças entre População e Amostra e que os valores obtidos para as amostras são diferentes entre si e diferentes da População. Pelas intervenções de Rui, Mafalda, Constantino, Ilda, Bruno, Carina e Rute, percebi que estavam a entender as diferenças e os conceitos. Fui chamando a atenção dos alunos para a necessidade de trazerem sempre a calculadora gráfica pois o tipo de tarefas que agora iríamos fazer, iria ganhar muito com o seu uso. Seria, aliás, indispensável, pois sem calculadora não é possível trabalhar. Existiram algumas perguntas sobre a forma algébrica de calcular o Desvio-padrão, mas depois os alunos deram mostras, pelas suas intervenções ou respostas, de perceberem o principal da medida de dispersão “ S_x ” Desvio-padrão da Amostra. Foi evidente quando trabalhámos o exemplo das propriedades da Média e Desvio-padrão com o exemplo do aumento das mesadas de cinco irmãos ($média + 10€$ e $média \times 1.15$). Também deram sinais (Mateus, Bruno, Armando, Mafalda e outros) de perceber bem o exemplo dos “outliers” em relação aos salários na empresa com 160 empregados e 2 administradores a ganhar muito mais. Reagiram muito bem ao exemplo em que usámos Diagramas de Extremos e Quartis para comparar as notas de duas turmas e também o aumento das mesadas (Rute, Bernarda, Pedro, Costa e outros). Quando tratámos a questão das Amostragens e principais tipos de amostragens, houve várias intervenções com comentários e sugestões de aplicação dos conceitos às sondagens pré- e pós-eleições, às diversas formas de estatísticas possíveis. Alguns alunos perceberam logo, que é possível usar diversos tipos de técnicas de amostragem em conjunto (Bruno, Mateus, Gonçalo, Constantino, e outros). Gonçalo e Bruno fizeram comentários relacionando as técnicas de amostragem com a forma aleatória como selecionaram os 10+2 alunos de cada turma-alvo e lembraram a utilização das pequenas caixas de madeira com que fizeram as extrações dos números dos alunos para as amostras. Voltei a lembrar algumas ações importantes para os seus trabalhos de investigação estatística e sugeri que os grupos fossem de imediato (aproveitando a

aula terminar mais cedo) procurar fazer a recolha de dados, para apanharem os colegas à saída das salas de aula. De novo pedi para que os alunos que são os contactos de cada grupo, mandem os seus e-mails, para eu criar os discos Google Drive partilhados. Embora a aula tenha tido uma forma marcadamente expositiva, foi possível contar com reações e respostas dos alunos, que davam mostras de estar a acompanhar o desenrolar da aula. Houve um par de momentos, perto do fim da 1.^a hora de aula em que alguns alunos deram mostra de alguma distração. A segunda hora da aula terminou 15' - 20' mais cedo. Os alunos, organizados em grupos, foram logo inquirir as suas turmas-alvo, mostrando entusiasmo com esta atividade.

Aula 5: 09/03/2020

Esta aula teve a presença do Professor Carlos Albuquerque, que ficou sentado ao lado do professor Nuno Santos numa secretária dos alunos, ao fundo da sala. A aula começou com avisos aos grupos para não se esquecerem de enviar os contactos de e-mail e também para não se descuidarem com os questionários. Começou-se por fazer um exercício de classificação de variáveis estatísticas. Pedi ajuda à turma para as respostas às questões que colocava, sobre o tipo de variáveis do exemplo: Qualitativa e Quantitativa Discreta. Em modo dialogado, os alunos participaram na exploração das situações diferenciadoras das duas variáveis "meio de transporte" e "tempo habitual de viagem". No exemplo seguinte (Amostra com dados discretos – construir uma tabela de frequências), Mateus ofereceu-se para ir resolver no quadro. Resolveu bem. O exemplo foi explorado nas suas vertentes "frequências" absolutas e relativas, com a turma a reagir bem às perguntas que fui fazendo (frequências, mediana, agrupamento de valores, etc.). O exemplo seguinte foi sobre variável Quantitativa Contínua com os dados organizados em classes. Perguntei quem queria ir ao quadro e dos 3 ou 4 que se ofereceram, escolhi Armando, que foi o primeiro a oferecer-se. Expliquei o exemplo, para sintonizar a turma. Armando começou a usar tabelas em linha, mas depois, com as sugestões que lhe dei e o diálogo com a turma, optou pela tabela com as frequências em coluna. Depois todos perceberam como o aluno foi definindo as classes dos dados, com os respetivos intervalos aberto e fechados e pedi a Armando para se sentar e prossegui eu com o exemplo. Construímos (mostrei como fazer) o histograma e, em diálogo com a turma, que me foram dando respostas às questões intermédias que eu fazia, trabalhámos o histograma, a importância das áreas. Nestes casos vimos a

possibilidade de usar histogramas para dados contínuos em que só conhecemos as frequências das classes, mas não os dados individualizados e assim estimar os valores como Mediana, Quartis e Percentis (apenas referi o que é o conceito). Poderia ter sido interessante usar este exemplo, mas com frequências relativas, mas acho que foi adequado, por ser mais intuitivo, usar frequências absolutas. Neste exemplo vários alunos deram o seu contributo com sugestões (Carina, Bernarda, Mafalda, Bruno, Gonçalves, Telma, Armando, Ilda, Mateus e outros) mas há alguns alunos que continuaram sem participar (Mário, Costa, Tomé, Pedro, Isabel, Carlos, Diogo, Liliana). No exemplo seguinte, para trabalhar a Amplitude Interquartis e a comparação entre duas amostras de turmas do 12.º ano, com as sugestões dos alunos, determinámos as medidas estatísticas: mediana, quartis, etc. Explorámos a interpretação das diferentes amplitudes interquartis das amostras, relacionando como medida de dispersão dos dados. Alguns alunos descobriram facilmente que a amplitude interquartis dá uma boa informação quanto à dispersão. Existiram várias respostas corretas quando perguntei a percentagem de ocorrências interquartis e $> Q3$ ou $< Q1$ (Mafalda, Mateus, Armando, Constantino, Rute, Carina). O fim do exercício incluía desenhar os dois diagramas de Extremos e Quartis, mas já não foi possível acabar. Fiquei de começar a próxima aula com estes diagramas. Terminei a aula voltando a pedir aos alunos para mandarem os dados dos questionários para eu os poder incluir nos exemplos a trabalhar nas aulas. O uso de calculadoras iria ser regular e forte nas próximas aulas, já com os dados de contexto real, recolhidos pelos grupos. Depois da aula, eu, o professor Nuno Santos e Professor Carlos Albuquerque reunimos durante cerca de 20 minutos para avaliação e feedback da aula.

Aula 6: 11/03/2020

Comecei a aula a recordar os alunos que ainda não enviaram o ficheiro com os dados do questionário feito à sua turma-alvo. Ainda faltam três grupos. Voltei a explicar a fluxo do trabalho que se está a seguir no ensino-aprendizagem da Estatística. Apelei ao envolvimento de todos. Comecei por recordar a construção do Diagrama de Extremos e Quartis usando o exemplo com que acabámos a aula anterior, com as notas do 1.º período de Matemática nas duas turmas 12.º A1 e 12.º B1. Pedi um voluntário para ir ao quadro desenhar o Diagrama e Gonçalves ofereceu-se. Começou por determinar para a turma 12.º B1 os valores Min, Max, Mediana, Q1 e Q3. Vários

alunos foram colaborando com sugestões e Gonçalves completou bem o diagrama. Depois pedi a Carina para ir fazer o diagrama correspondente à Turma 12.º A1. De novo com alguns alunos a fazerem sugestões, Carina fez a determinação das medidas estatísticas respetivas e desenhou, "ao lado" do diagrama da outra turma, o diagrama da turma 12.º A1. Com os dois diagramas em "paralelo" os alunos começaram a identificar características e a fazer algumas inferências: os mínimos e os máximos nas duas turmas são iguais; as notas da turma B1 estão mais concentradas que as da A1 que estão mais dispersas, etc. Pedi então aos alunos para fazerem afirmações que considerassem verdadeiras, com base no que já se sabe das duas turmas representadas. Houve uma boa participação de vários alunos (Mateus, Tomé, Pedro, Constantino, Gonçalves, Gonçalo, Mafalda, Rute, Bruno, Carina, Bernarda, e outros) que fizeram comentários: Amplitudes Interquartil diferentes; Grande diferença nas medianas; Possibilidade ou não de afirmar claramente que uma turma é melhor que a outra; Possibilidade de comparar as medidas das duas turmas através do diagrama, mesmo tendo em conta que a dimensão de cada turma é diferente; Foi referido as percentagens de notas abaixo de Q1 ou acima de Q3; Foi referido que 50% das notas, entre Q1 e Q3 são muito diferentes nas duas turmas; Gonçalves referiu que mais de 75% das notas da B1 são inferiores à mediana da A1; Foi referido que na A1 há uma maior concentração de notas com valores superiores a 15; Mafalda procurou introduzir na inferência que se estava a fazer, a análise de média, mas eu optei por não acrescentar esta componente para não desfocar. No entanto, fiz referência à forma de se poder incluir a média e desvio-padrão nas conclusões. Em seguida, utilizando diretamente o Excel, usei os dados da amostra do Grupo 4 (turma 11.º A2) para exemplificar como organizar e tratar os dados recolhidos. Em diálogo com os alunos, identificaram-se alguns erros grosseiros e como proceder para os corrigir no caso de isso ser correto e perceber que em vários casos não se pode corrigir, apenas eliminar. Foram abordados casos diferentes que se identificaram na amostra, nalguns era adequado corrigir erros evidentemente grosseiros (erros de digitalização de números) noutros, por não termos a certeza, a opção pode passar por eliminar a resposta ao questionário. Percebi que a maioria dos alunos tem familiaridade com o Excel e exemplifiquei como construir tabelas de frequências, gráficos de barras, gráficos circulares, como ordenar a amostra, etc. Foram trabalhadas as variáveis "Irmãos" e "Peso" com algumas ferramentas do Excel. Ao terminar a aula sugeri aos alunos que procurassem seguir o Exercício 1 do Guião das Calculadoras para na próxima aula se fazer Trabalho Autónomo em grupos

com os dados que cada grupo recolheu no seu inquérito às turmas-alvo. A aula decorreu com boa participação de vários alunos. Diversos alunos deram mostras de entender que as inferências a realizar a partir dos dados recolhidos devem ter em conta diversos aspetos relacionados com os próprios dados, com o contexto e com as questões a que se procura dar resposta. No início e no fim da aula percebeu-se alguma perturbação motivada pela questão da COVID-19, mas isso não afetou a normalidade da aula. No final da tarde, a Direção do Colégio Pedro Arrupe, enviou e-mail à Comunidade Educativa a informar que o Colégio ia suspender as atividades a partir do dia 12-03-2020.

Aula 7: 13/03/2020 a 19/03/2020

Esta foi a primeira aula após o Colégio Pedro Arrupe ter suspenso as aulas presenciais.

O trabalho decorreu na sala dos professores no CPA. Construí um *flipchart* com as orientações e sugestões para os alunos poderem realizar o trabalho de investigação estatística em casa, via Plataforma CPA OnLine, com base nos dados recolhidos, com recurso a Excel e a Calculadoras Gráficas (usar Guião das Calculadoras). Assim, os alunos poderiam ir preparando os seus trabalhos com o apoio que lhe dei através da Plataforma CPA OnLine. Foram sugeridas diversas questões e análises baseadas em algumas (cinco ou seis) variáveis do questionário e estabelecido um prazo até 4.^a feira dia 18 às 12h, para me enviarem um documento *word* com as respostas e os seus comentários relacionados com as variáveis indicadas no exercício/trabalho. Na próxima 2.^a feira, dia 16, voltaria a estar no CPA a preparar os materiais para a próxima "aula" pela plataforma, mas, em contacto com o professor Nuno Santos, decidimos que não é preciso ir ao CPA. Foi anunciado que a partir de 2.^a feira, dia 16, as escolas estão todas com as aulas suspensas. Os alunos já têm na Plataforma a "Aula 6-Trabalho Plataforma 1" para prática com os dados da investigação estatística. Os trabalhos dos alunos são para ser enviados para a Plataforma até 4.^a feira às 12h (dia 18). Desde 3.^a feira, à tarde, os alunos começaram a mandar os trabalhos via e-mail. Algumas dúvidas que eles mandaram foram relacionadas com o formato dos ficheiros a enviar e não com os conteúdos dos trabalhos. Até à hora definida (12h do dia 18) houve 15 alunos que mandaram os trabalhos (entretanto chegaram mais 2 até dia 19 às 14h). O professor Nuno Santos pediu à PRT (Professora Responsável pela Turma) para alertar os pais

dos alunos em falta. À tarde estive a preparar a publicação da Lição 112. Nesta aula, incluí no *flipchart* a explicação e exemplos sobre Dados Bivariados, Nuvem de Pontos e Diagrama de Dispersão e Reta de Mínimos Quadrados. A aula terminou com a indicação que na próxima aula se vai aprender a usar as calculadoras para determinar a Nuvem de Pontos, a Reta dos Mínimos Quadrados e o Coeficiente de Correlação. Introduzi duas correções, para não incluir as fórmulas da Reta de Mínimos Quadrados calculadas a partir dos dados em tabelas, mas apenas com a calculadora. O professor Nuno Santos esclareceu que nas AE não vem este tipo de cálculo tradicional. Terminei a "Aula 7- Lição 112" e publiquei na Plataforma, com um anúncio feito aos alunos. Corresponde à Aula 7-8 do Plano. Coloquei todos os trabalhos recebido (17) no Google Drive partilhado com o professor Nuno Santos para ele ver e depois falarmos sobre a correção e como aproveitar os trabalhos para fazer avaliação.

Aula 8: 20/03/2020

Terminei a Aula 8 - Lição 113 e tive a concordância do professor Nuno Santos já ao fim da tarde, pelo que publiquei na Plataforma no dia 21/sábado de manhã. Enviei um e-mail aos alunos a pedir que estudem a Aula 8 e façam o TPC que está indicado no último slide. Nesta aula, os alunos aprendem a Correlação e a calcular os Coeficientes de Correlação e o Declive da Reta de Mínimos Quadrados usando a Calculadora Gráfica. Pedi para fazerem o TPC até 3.^a feira dia 24 e me enviarem dúvidas que tivessem.

Aula 9: 23/03/2020

Correção e avaliação dos Trabalhos Autónomos 1, lançados aos alunos no dia 13 de Março na "Aula 6 - Trabalho Prático com Dados da Investigação Estatística". Defini a Grelha de Avaliação e enviei ao professor Nuno Santos, que achou bem. Acordámos os próximos passos.

Aula 10: 23/03/2020 a 24/03/2020

Os próximos passos programados eram: (1) 3.^a (dia 24) ou 4.^a (dia 25) difundir aos alunos, pela Plataforma, o trabalho final da Investigação (2) 5.^a (dia 26) ao fim do dia: prazo para os alunos enviarem os trabalhos e respetiva correção feita por mim (3) 6.^a (dia 27) completar a avaliação e enviar à PRT (4) Na 6.^a enviar questionário aos alunos

para RPES. Corrigi os 19 de 23 trabalhos recebido e enviei ao professor Nuno Santos o ficheiro com as notas discriminadas com detalhe. Como inicialmente os trabalhos eram para ser feitos em aula, pelos grupos em trabalho autónomo, os alunos acabaram por mandar os seus trabalhos individualmente, mas em cada grupo os trabalhos eram em geral muito parecidos, ou mesmo iguais. Embora a PRT tenha contactado os pais dos alunos, quatro alunos não chegaram a mandar os seus trabalhos: Mário, José, Diogo e Gonçalves. Em geral, os trabalhos recebidos tiveram um bom nível em relação às expectativas que tinha, tendo em conta as condicionantes (em casa, com pouco apoio direto e com ferramentas de Office que não são dominadas facilmente por todos os alunos). Percebe-se que deve ter havido apoio de explicadores a alguns alunos, por exemplo na forma como alguns alunos executaram os Diagramas de Extremos e Quartis com o Excel, na vertical, de uma forma que não tinha sido referida na aula. Fui recebendo os trabalhos dos alunos e fazendo a classificação de acordo com a Grelha de Avaliação acordada com o professor Nuno Santos. Foram avaliados 20 dos 23 alunos. Fui dando nota de receção dos trabalhos aos alunos, tanto pela Plataforma como por e-mails diretos aos alunos. Enviei o ficheiro com as avaliações ao professor Nuno Santos.

Aula 11: 24/03/2020 a 26/03/2020

Preparei a "Aula 9 - Lição 114" com o lançamento da Tarefa Aplicação para avaliar as aprendizagens da Amostras Bivariadas e Correlação Linear. Tive a concordância do professor Nuno Santos para a "Aula 9 - Lição 114". Às 21h40 do dia 24 (3.^a feira) publiquei a Tarefa Aplicação na Plataforma e por e-mail direto aos alunos. Uma aluna (Ilda) quis saber em que moldes os trabalhos de Estatística contribuem para a nota do 2.º período. Depois de receber os critérios enviados pelo professor Nuno Santos (10% AA + 70% A Domínio Sucessões + 10% 1.º Trab Est. + 10% 2.º Trab Est.) informei a aluna e considerei esta informação adequada também para mim. Durante o dia 25 e a manhã de 26 recebi e fui corrigindo (e registando a informação) trabalhos de 10 alunos. Enviei folha de critérios de avaliação para revisão pelo professor Nuno Santos. Tirei dúvidas a três alunos (Manuela, Mário e Gonçalo) principalmente relacionadas com o uso das Calculadoras. Enviei pela Plataforma e e-mail, um lembrete a todos os alunos, para enviarem o Trabalho Aplicação. Os alunos continuaram a enviar os trabalhos e eu a corrigir. Voltei a enviar grelha de critérios ao professor Nuno Santos com as

alterações de detalhe feitas. Conversei com o professor Nuno Santos sobre as notas finais, que foram consideradas dentro do perfil habitual de notas dos alunos. O Trabalho 2: Tarefa Aplicação foi realizado por 19 dos 23 alunos e a sua classificação foi usada na avaliação do 2.º período.

Aula 12: 20/04/2020 a 22/04/2020

Em telefonema com o professor Nuno Santos decidimos que vamos fazer uma Avaliação Aula sobre Estatística no retomar das aulas, no início do 3.º período. Fiquei de preparar esta aula. Para lhe enviar no dia 13.04 para ele depois integrar nos trabalhos da turma. Fiz a aula com duas questões 1 e 2 de escolha múltipla e uma questão 3 a) e b) de resposta aberta. Questões 2 e 3 seriam feitas com uso de calculadora gráfica. O início do 3º período seria no dia 20/04/2020. Aula foi dada em WebEx + Zoom pelo professor Nuno Santos. Foi feita a preparação e sintonia dos alunos com as ferramentas OnLine da Plataforma CPA. Avaliação Aula foi feita OnLine com a Plataforma CPA. Os alunos completaram a Avaliação Aula, mas houve várias situações de dificuldade no uso da Plataforma. A aula foi dada em Zoom e WebEx em simultâneo.

D. QUESTIONÁRIO DA INVESTIGAÇÃO ESTATÍSTICA

Tipo de variável	VARIÁVEIS	Resposta
Qual	Ano	
Qual	Turma	
Qt Discr	Nº Aluno	
Qt Discr	Idade (anos)	
Qual	Sexo (M,F)	
Qt Cont	Altura (em cm)	
Qt Cont	Peso (em Kg)	
Qt Discr	Nº de irmãos	
Qt Discr	Nota a Matemática no 1ºP de 19/20	
Qt Cont	Tempo total estudo "individual" - semanal	
Qt Cont	Tempo total estudo em "Explicações" - semanal	
Qual	Meio de transporte habitual para ir para o CPA	
Qt Cont	Tempo habitual de viagem para o CPA (minutos)	
Qual	Desporto preferido	
Qual	Atividade desportiva que pratica mais	
	Obs:	

E. TAREFA AUTÓNOMA 1: Trabalho Plataforma 1

Desenvolver o seguinte trabalho a partir dos dados recolhidos na investigação estatística

O resultado do pequeno estudo que se segue, deve ser registado num ficheiro Word. Nesse ficheiro colocar as tabelas, as lista, os gráficos e os textos que forem adequados para apresentares os teus resultados.

Esta pequena apresentação dos resultados em Word, deve ser enviado por cada aluno para o meu e-mail: onetodasilva@gmail.com - Prazo: **Até quarta-feira dia 18 às 12h**

1- Organização de Dados

- Organizar os dados na folha de cálculo (Excel ou outra)
- Validar e corrigir erros grosseiros evidentes
- Caso tenha sido feita alguma correção, fazer um pequeno comentário sobre o que foi feito (não mais que uma ou duas linhas)

2- Variável "Sexo":

- Classificar a variável quanto ao tipo
- Construir tabela de frequências.
- Apresentar as percentagens de ocorrências na forma de um gráfico circular
- Numa ou duas frases, fazer um breve comentário

3- Variável "Número de irmãos"

- Classificar a variável quanto ao tipo
- Construir a tabela de frequências
- Apresentar um gráfico de barras
- Determinar a moda da amostra para esta variável
- Numa ou duas frases, fazer um breve comentário

4- Variável "Altura"

- Classificar a variável quanto ao tipo
- Ordenar a amostra
- Determinar a Mediana, o Quartil 1 e o Quartil 3
- Construir o diagrama de extremos e quartis
- Indicar a amplitude interquartis
- Numa ou duas frases, fazer um breve comentário

5- Variável "Nota Matemática":

- Classificar a variável quanto ao tipo
- Agrupar os dados por categorias
- Construir a tabela de frequências
- Usar a calculadora gráfica e, seguindo o Guião das Calculadoras, fazer o Exercício 1 do Guião

- Aplicar o exemplo do Exercício 1 do Guião à variável "Nota Matemática" e calcular: Média, Desvio-padrão, Mediana, Quartil 1 e Quartil 2, Extremos (Mínimo e Máximo)
- Construir o Diagrama de Extremos e Quartis
- Numa ou duas frases, fazer um breve comentário

6- Variável "Tempo Estudo"

- Recorrendo à calculadora gráfica
- Inserir os valores da amostra, em relação ao "Tempo Estudo", numa Lista (apenas numa coluna)
- Em relação à variável "Tempo Estudo" calcular: Média, Desvio-padrão, Mediana, Quartil 1 e Quartil 2, Extremos (Mínimo e Máximo)
- Numa ou duas frases, fazer um breve comentário

F. TAREFA AUTÓNOMA 2: Tarefa de Aplicação

Considera os Dados Recolhidos pelo teu grupo na Investigação Estatística em curso e completa a seguinte tarefa, usando a Calculadora Gráfica para efetuares os teus cálculos:

Questão para a Investigação: Tendo em conta a turma que foi alvo do questionário que realizaste e os alunos da respetiva amostra, pretende-se perceber se o tempo de estudo de Matemática, pode ter relação com as notas que os alunos obtiveram a Matemática no 1º período.

- 1- Qual é a medida estatística mais adequada para este tipo de análise?
- 2- Apresenta a amostra bivariada formada pelas variáveis "Nota a Matemática" e "Tempo de Estudo", numa tabela com duas colunas.
- 3- Qual deve ser a variável explicativa e a variável resposta?
- 4- Usa a **Calculadora Gráfica** para responder às seguintes questões (apresenta os resultados utilizando fotografias do ecrã da calculadora e depois organizando-as no ficheiro *word* com as respostas da tarefa):
 - a)- Determina a média e o desvio-padrão dos valores de cada uma das duas amostras representadas.
 - b)- Representa os dados na forma de diagrama de dispersão. Pelo aspeto da nuvem de pontos, parece-te razoável a existência de uma relação linear entre as duas variáveis? Justifica a tua resposta.
 - c)- Determina a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos e indica o seu declive.
 - d)- Indica o correspondente coeficiente de correlação linear da amostra bivariada.
 - e)- Classifica, justificando, o tipo de associação linear entre as duas variáveis em estudo.
 - f)- Apresenta, na forma de um comentário breve, as conclusões a que podes chegar quanto à Questão apresentada no início da tarefa

G. AA - AVALIAÇÃO AULA : Dia 22 de abril de 2020

1- Escolha Múltipla (uma resposta certa):

Selecionaram-se oito alunos do 10.º ano, aos quais se perguntou a respetiva altura. Os dados obtidos foram os seguintes (alturas em cm):

(160 ; 162 ; 165 ; 170 ; 171 ; 172 ; 175 ; 180)

Determine e indique o 3º Quartil da respetiva amostra.

A) 162 B) 172 C) 173,5 D) 163,5

2- Escolha Múltipla (uma resposta certa):

Fez-se um estudo acerca do número de mensagens enviadas diariamente por telemóvel por parte dos alunos do 11.º ano. A partir de uma amostra de 20 desses alunos, escolhidos ao acaso, construiu-se a seguinte tabela de frequências absolutas dos valores da variável.

Mensagens enviadas	0	1	2	3	4	5
Nº de alunos	1	5	4	5	3	2

Usando a calculadora gráfica determine e indique o desvio-padrão da amostra:

A) $S_x = 1,64$ B) $\sigma_x = 1,396$ C) $\sigma_x = 2,5$ D) $S_x = 1,433$

3- Com o objetivo de estudar a relação entre o número de vezes que os alunos de uma turma do 10.º ano chegavam atrasados à primeira aula da manhã e a distância a que vivem do colégio, recolheu-se uma amostra cujos dados se apresentam na seguinte tabela.

Distância (Km)	1	3	4	6	8	10	12	14	14	18
Nº de atrasos	8	5	8	7	6	3	5	2	4	2

Utilize a calculadora gráfica para responder às seguintes questões:

- a) Determine os parâmetros **m** e **b** da reta de regressão $y = mx + b$ e o correspondente coeficiente de correlação **r**, desta amostra bivariada.
- b) Indique, justificando, se a associação entre as variáveis “distância” e “nº de atrasos” é forte ou fraca e se é positiva ou negativa

H. QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS DO 11.º B1

Para o trabalho que estou a desenvolver na Universidade, no âmbito do estágio, preciso de recolher a opinião dos alunos do 11.º B1, em relação ao ensino-aprendizagem realizado nas aulas de Estatística.

Considera as **aulas e o trabalho/tarefas** desenvolvidas em Estatística, as **aprendizagens** que achas que realizaste e a **forma** como decorreram as aulas.

Peço-te que me dês as tuas opiniões, respondendo às questões seguintes com um **comentário breve**, de uma ou duas linhas no máximo.

1. - A aprendizagem realizada este ano em Estatística acrescentou conhecimentos novos ao que já conhecias sobre Organização e Tratamento de Dados? Se sim, dá alguns exemplos.
-
-
2. - Os trabalhos realizados contribuíram para melhorares o teu desempenho no uso da calculadora gráfica na resolução de tarefas, em particular na aplicação a problemas de Estatística? Porquê?
-
-
3. - Sentiste dificuldades no trabalho realizado em Estatística? Se sim, quais?
-
-
4. - Identifica um ou dois aspetos que te pareçam específicos da Estatística em relação a outros domínios da Matemática.
-
-

5. - O que aprendeste nas aulas de Estatística pode ser útil para ti no futuro? Porquê?
- -
6. - As aulas decorreram segundo dois formatos bem diferentes, mas os conteúdos estatísticos foram trabalhados com base nos dados recolhidos junto de outras turmas do 10.º, 11.º e 12.º. Que te parece do uso deste contexto real para as tarefas e exercícios práticos? Porquê?
- -
7. - Se fosse possível usar mais 3 aulas para continuar a trabalhar conteúdos de Estatística, o que sugerias que se fizesse?
- -

Podes dar as tuas respostas nos espaços em branco a seguir a cada questão.

Em seguida envia-me estas tuas opiniões diretamente para o meu e-mail (onetodasilva@gmail.com) ou para a Plataforma CPA OnLine.

Agradeço que respondas com brevidade ... para depois “ires” de férias. Boas Férias.

Obrigado.

Saúde.

Orlando Neto da Silva

	Aprendizagem "Conteúdos"	Aprendizagem "Tecnologia"	Reação "Metodologia"	Especificidades da Estatística	Reação "Metodologia"	Reação "Metodologia"	Reação "Metodologia"
Alunos	1. - A aprendizagem realizada este ano em Estatística acrescentou conhecimentos novos ao que já conhecia sobre Organização e Tratamento de Dados? Se sim, dá alguns exemplos.	2. - Os trabalhos realizados contribuíram para melhorares o teu desempenho no uso da calculadora gráfica na resolução de tarefas, em particular na aplicação a problemas de Estatística? Porquê?	3. - Sentiste dificuldades no trabalho realizado em Estatística? Se sim, quais?	4. - Identifica um ou dois aspetos que te pareçam específicos da Estatística em relação a outros domínios da Matemática.	5. - O que aprendeste nas aulas de Estatística pode ser útil para ti no futuro? Porquê?	6. - As aulas decorreram segundo dois formatos bem diferentes, mas os conteúdos estatísticos foram trabalhados com base nos dados recolhidos junto de outras turmas do 10.º, 11.º e 12.º. Que te parece do uso deste contexto real para as tarefas e exercícios práticos? Porquê?	7. - Se fosse possível usar mais 3 aulas para continuar a trabalhar conteúdos de Estatística, o que sugerias que se fizesse?
Manuela	Nas aulas de estatísticas aprendi bastantes coisas novas que não tinha conhecimento sobre, por exemplo, as nuvens de pontos, a reta dos mínimos quadrados, o desvio padrão e a usar tão eficientemente as potencialidades da calculadora gráfica.	Sem dúvida, fiquei a conhecer novas formas de utilizar a calculadora gráfica que desconhecia.	Em geral, não senti grandes dificuldades em realizar os trabalhos pedidos, mas, mesmo assim, onde senti mais foi na realização do diagrama de extremos e quartis no excel.	Tratamento de dados	Na minha opinião tudo o que aprendemos é importante e pertinente para o meu futuro, desde a recolha de informação até à interpretação dos gráficos e diagramas	É, de facto, muito mais interessante trabalharmos com dados reais, dá-nos mais motivação saber que não estamos a trabalhar com dados inventados, na minha opinião.	nr
Telma	Reta dos Mínimos Quadrados Nuvem de Pontos	Eu acho que sim, que ajudou, porque eu antes não sabia como fazer aquelas tabelas e gráficos de estatística, e agora já percebi como é que faz!	Não senti muitas dificuldades, porque grande parte da matéria estava bem explicada, ou já sabia.	Construção de tabelas e Gráficos.	A mexer melhor com a calculadora, eu ainda não sei para que área vou, mas provavelmente vou para uma em que vai ser necessário saber manusear com uma calculadora gráfica.	Acho que é melhor, acho que dá mais interesse ao trabalho, e assim é nos mais próximo de certa forma, porque grande parte das pessoas que responderam aos questionários eram conhecidas.	Fazer mais exercícios.
Liliana	Sim, por exemplo o diagrama de nuvens e pontos.	Sim, porque aprendi a fazer diagramas de nuvens e pontos na calculadora.	Não senti dificuldades no trabalho, mas sim a trabalhar no excel.	Trabalhamos com amostras e diagramas.	Sim, pois consegui trabalhar melhor no excel.	Acho bom, porque estamos a trabalhar com dados de pessoas com a mesma idade que nós.	Nada a sugerir
Mafalda	Sim, por exemplo, o diagrama de nuvens e pontos e a medida estatística da correlação	Sim, porque aprendi a fazer diagramas de nuvens e pontos.	No trabalho em si não mas no excel tive dúvidas e no uso da calculadora também tive algumas.	Trabalhamos com amostras e diagramas	O que aprendi a trabalhar no Excel vai me ser muito útil no futuro	Eu gostei porque estamos a trabalhar com dados de pessoas que nos são próximas	Não tenho nada para sugerir
Gonçalo	Sim, como por exemplo o coeficiente da correlação colinear e como trabalhar com estatística na calculadora	Sim bastante, porque com base nos materiais de apoio que tínhamos disponíveis, sinto-me mais confiante a manusear a calculadora	Não muito graças aos materiais de apoio que tínhamos disponíveis	O uso de calculadora para resolver exercícios, e alguns termos específicos de estatística (média, desvio padrão etc...)	Como trabalhar com os dados que nos são dados porque um dia vou precisar de saber fazer isso.	Acho que é mais interessante este contexto real porque, ao ser real, está mais próximo da realidade e mais próximo do nosso dia a dia	Trabalhar com dados de empresas
Armando	Sim, este ano aprendi conceitos novos de estatística como as amostras de dados bivariados, a nuvem de pontos e o coeficiente de correlação linear.	Os trabalhos efetuados obrigaram-me a treinar e a trabalhar com a calculadora, agora já conheço novas funções e botões da calculadora que me vão ajudar nos trabalhos de estatística no futuro.	Senti algumas dificuldades no último trabalho de estatísticas, mas só tive esta dificuldade porque as aulas eram à distância e era claramente mais difícil de aprender os conceitos.	A estatística, ao contrário dos outros domínios da matemática, uma forma de fazer previsões, estimativas e um domínio mas analítico.	Conceitos como a média podem ser importantes para calcular em que universidade é que posso entrar e a nuvem de ponto é uma boa forma de perceber a relações entre duas coisas.	O uso deste contexto real é uma ótima forma de nos tornar interessados nas tarefas e de entendermos como podemos aplicar a estatísticas à nossa vida.	Sugeria se comparassem os resultados que se entendesse e estudasse a diferença entre as turmas inquiridas e se ainda houvesse tempo que fizemos um trabalho de estatística na própria turma sobre algo mais pessoal como um desporto ou algo que a turma goste
Mateus	Sim, porque aprendi a mexer na calculadora.	Sim, porque não o sabia fazer antes.	Sim, porque há certas coisas que não sei pois não tivemos aulas presenciais que neste domínio daria muito jeito.	Muito direto e lógico.	Sim, porque acho que estatística é o domínio que me vai ser mais útil para o futuro.	Gostei de recolher os dados e trabalhá-los de seguida.	Nada, porque acho que fizemos o essencial.
Carina	Sim, esta aprendizagem acrescentou conhecimentos novos, como por exemplo, o desvio padrão e a variância.	Sim, pois permitiram-me ter novos conhecimentos em relação ao que se pode fazer com a calculadora e treinar o seu uso.	Inicialmente apenas senti dificuldades a fazer os gráficos no excel e a perceber a correlação linear.	O facto de podermos utilizar amostras qualitativas.	Aprendi a trabalhar melhor no excel e a trabalhar com vários dados de maneira diferente, com a média, mediana, moda, desvio padrão, variância, distribuí-los em gráficos e tabelas, coisas que vão me servir para o futuro, pois é fácil de se relacionar com o dia-a-dia e relaciona-se bastante com Economia.	Acho que o uso deste contexto real para as tarefas foi muito importante para percebermos que realmente é importante saber esta matéria porque é muito útil e também porque foi uma maneira mais descontraída de aprender que, pelo menos para mim, resultou muito bem.	Acho que poderíamos analisar e comparar todos os dados das diferentes turmas e fazer uma conclusão geral.
Ilda	Sim, como por exemplo identificar outliers e trabalhar com dados estatística na calculadora gráfico.	Sim tive a oportunidade de conhecer novas fórmulas e aplicá-las na calculadora como uma nuvem de pontos e gráficos.	Apenas na em determinar a equação da reta do gráfico	quartis, diagramas, nuvens de pontos...	é sem dúvida a matéria mais importante visto que gostava de seguir comunicação e marketing e é importante saber o público alvo, etc..	Não gosto de realizar os trabalhos através de plataforma pois é mais difícil entender a matéria e a resolução das tarefas fica dificultada. No que toca a utilizar os dados de pessoas do colegio acho criativo e ajuda o entendimento da matéria.	uma vídeo conferência em vez de trabalhos de grupo para facilitar o entendimento.
Mário	Sim sem dúvida que não só me lembrou de bastantes coisas a cerca de organização estatística, como também aprendi que existem tipos de variáveis e que as nossas experiências estatísticas estão sempre relacionadas com o que usamos nessa mesma experiência com uma amostra, sondagem, etc.	Sim, porque não só tive de experienciar por mim mesmo a utilização da calculadora gráfica como também tive de pensar e compreender os diversos passos apresentados na plataforma	Sim, por serem tarefas com matérias novas. Nomeadamente as tarefas da calculadora gráfica e a da apresentação de gráficos em word	A existência do estudo de uma pequena ou grande porção de uma determinada variável que, depois de estudada, é apresentado um resultado que pode representar uma previsão, estimativa, etc.	É útil, mas dependerá da utilidade tendo em conta o curso que vou seguir.	Parece que a utilização de estatística no contexto real cativou toda a gente a participar e a aprender a organização na estatística.	Aprofundar os conhecimentos adquiridos. Analisar problemas mais complexos. A revisão das matérias seria essencial.
Bruno	Sim. Como por exemplo, o desvio padrão e também trabalhar estatística no excel e na calculadora	Sim. Nunca tínhamos trabalhado utilizando estas funções da calculadora, que fez com que aprendêssemos imensas funções da calculadora.	Não.	Tem aplicações óbvias no mundo real que os outros não têm. Implica um maior uso da calculadora gráfica que os outros domínios.	Especialmente a parte da análise estatística, pois uma grande parte dos trabalhos envolvem isso pelo menos um pouco.	Para mim foi bom, pois traz um certo realismo ao exercício, e como fomos nós que recolhemos os dados sentimos ainda mais esse realismo.	Comparar os dados de todos os grupos. Todos os grupos fazem apresentação oral sobre os dados que recolheram.

I. GUIÃO CALCULADORAS

Estatística

Exercícios resolvidos

Exercício 1

Contou-se o número de folhas em cada uma de 150 plantas do tabaco (Havano). Os resultados estão registados na tabela a seguir apresentada.

Número de folhas	17	18	19	20	21	22	23	24
Número de plantas	3	22	44	42	22	10	6	1

Recorrendo à calculadora, calcule os valores da média, da soma dos quadrados dos desvios em relação à média, da variância e do desvio-padrão do número de folhas destas plantas.

Adaptado do Caderno de Apoio, 10.º ano



Casio FX-CG20

1 Introdução de dados:

Escolher **menu** e a opção **Statistics** (Figura 1).

Na lista 1 (List 1), introduzir os valores correspondentes ao número de folhas, e os relativos ao número de plantas na lista 2 (List 2) (Figura 2).



Figura 1

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	17	3		
2	18	22		
3	19	44		
4	20	42		

Figura 2

2 Obter os valores da média, da soma dos quadrados dos desvios em relação à média, da variância e do desvio-padrão:

Pressionar **2** (CALC), a seguir **3** (SET) (Figura 3) para definir a variável (List 1) e a frequência dos valores da variável (List 2), premindo **EXIT** após efetuar a escolha. Premir **3** (1-VAR) para obter o valor da média ($\bar{x}$) e do desvio-padrão (sx) (Figura 4).

NOTAS:

1. Para alterar a lista (quando necessário) que define a variável, pressionar **F1** e indicar o número da lista. Para alterar a lista relativa à frequência, pressionar **F2** e indicar o número da lista.
2. A soma dos quadrados dos desvios obtém-se calculando $\sum x^2 - n\bar{x}^2$; e a variância, efetuando sx^2 com os valores da Figura 4.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	17	3		
2	18	22		
3	18	44		
4	20	42		

Figura 3

	List 1	List 2
1-Variable		
$\bar{x}$	=19.78	
Σx	=2967	
Σx^2	=58971	
σx	=1.37535449	
sx	=1.37996206	
n	=150	

Figura 4

Texas TI-84 Plus

1 Introdução de dados:

Pressionar a tecla **STAT** e escolher a opção 1: Edit (Figura 5).

Introduzir os valores de x_i em L1 e os valores de y_i em L2 (Figura 6).

	1
1:Edit	
2:SortA	
3:SortD	
4:C1rList	
5:SetUpEditor	

Figura 5

	L1	L2	L3	L4	L5
17	3				
18	22				
18	44				
20	42				
21	22				
22	18				
23	8				
24	1				

Figura 6

2 Obter os valores da média, da soma dos quadrados dos desvios em relação à média, da variância e do desvio-padrão:

Pressionar **STAT**, escolher **CALC** e 1: 1-Var Stats (Figura 7). Em seguida, colocar L1 em List (pressionando **2ND** seguida de **1**); em FreqList, L2 (pressionando **2ND** seguida de **2**) e escolher **Calculate** seguida de **ENTER** (Figura 8), obtendo-se assim os parâmetros pretendidos (Figura 9).

NOTA: A soma dos quadrados dos desvios obtém-se calculando $\sum x^2 - n\bar{x}^2$; e a variância, efetuando sx^2 com os valores da Figura 9.



Figura 7



Figura 8



Figura 9

Texas TI-Nspire™ CX

1 Introdução de dados:

Escolher o ícone Listas e Folha de Cálculo seguido de **ENTER** (Figura 10).

Colocar o cursor na célula com a letra A e escrever, por exemplo, as iniciais: **nf** (número de folhas), carregando de seguida em **ENTER**; depois, posicionar-se na célula B e digitar: **np** (número de plantas), seguindo-se novamente **ENTER**.

Introduzir os valores de x_i em **nf** (lista A) e os valores de n_i em **np** (lista B) (Figura 11).



Figura 10



Figura 11

2 Obter os valores da média, da soma dos quadrados dos desvios em relação à média, da variância e do desvio-padrão

Pressionar a tecla **2ND**, seguida de 4: Estatística, 1: Cálculos estatísticos e 1: Estatísticas de uma variável. Em seguida, indicar que o número de listas é 1 e, no ecrã seguinte, escolher para Lista X1: **nf** (depois de colocar o cursor na célula e carregar no ícone com a «mão»), seguido de **1**, e escolher para Lista de frequências: **np** (depois de colocar o cursor na célula e carregar novamente no ícone com a «mão»), seguido de **1**. Escolher como 1.ª col de resultados **c1** e, por fim, seleccionar OK (pressionando **2ND**) (Figuras 12, 13 e 14).



Figura 12



Figura 13



Figura 14

NOTA: O valor da variância obtém-se efetuando $\cdot x^2$.

Exercício 2

Numa zona agrícola com um determinado declive foi realizado um estudo acerca da influência da taxa do fluxo das águas (em litros por segundo) na erosão dos solos através da quantidade de massa de solo transportado (em quilogramas). Foram feitas cinco medições, das quais resultaram os dados da tabela apresentada.

Utilizando a calculadora gráfica e considerando a taxa de fluxo como variável resposta, resolva os itens seguintes:

- 2.1** Represente a nuvem de pontos num referencial ortogonal.
- 2.2** Determine a equação reduzida da reta de mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos.
- 2.3** Indique o valor do coeficiente de correlação linear.

Adaptado do Caderno de Apoio, 11.º ano



Taxa de fluxo	Solo erodido
0,31	0,82
0,85	1,95
1,26	2,18
2,47	3,01
3,75	6,07

Resoluções

Casio FX-CG20

Introdução de dados:

Escolher o menu **STAT** e na lista 1 (List 1) introduzir os valores de x_i , e os de y_i na lista 2 (List 2) (Figura 15).

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0.31	0.82		
2	0.85	1.95		
3	1.26	2.18		
4	2.47	3.01		

Figura 15

2.1

Obter a nuvem de pontos:

Pressionar duas vezes a tecla **2D**.

No primeiro clique está a seleccionar a opção **GRPH**, no segundo a opção **GPH1** (Figura 16).



Figura 16

2.2 e 2.3

Obter os parâmetros a e b da equação da reta de mínimos quadrados e o valor de r , coeficiente de correlação linear:

Pressionar a tecla 2ND (CALC) seguida de 7 (x) para obter os parâmetros a e b (Figura 17).

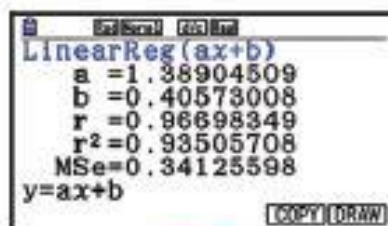


Figura 17

Pressionar 2ND (COPY) — copia para o editor de funções a equação da reta de mínimos quadrados).

Pressionar a tecla 2ND para obter a reta de regressão e a nuvem de pontos no mesmo ecrã (Figura 18).



Figura 18

Texas TI-84 Plus

Introdução de dados:

Pressionar a tecla 2ND (STAT) e escolher a opção 1: Edit (Figura 19).

Introduzir os valores de x_i em L1 (lista 1) e os valores de y_i em L2 (lista 2) (Figura 20).



Figura 19



Figura 20

2.1

Obter a nuvem de pontos:

Pressionar a tecla **2ND** seguida da tecla **Y=** (STAT PLOT), escolher a opção 1, selecionar On, escolher o gráfico de pontos e indicar que L1 é a lista correspondente ao x e L2 ao y , e, por fim, selecionar o tipo de marca para representar os pontos (Figura 21).

Pressionar a tecla **WINDOW** e adequar os limites da janela de forma a visualizar os pontos (Figura 22).



Figura 21



Figura 22

Clicar na tecla **GRAPH** para obter a nuvem de pontos (Figura 23).

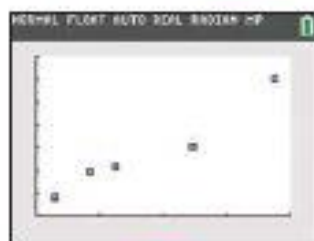


Figura 23

2.2 e 2.3

Obter os parâmetros a e b da equação da reta de mínimos quadrados e o valor de r , coeficiente de correlação linear:

Pressionar a tecla **STAT**, escolher o menu **CALC** e selecionar a opção 4: **LinReg(ax+b)**, em Xlist: colocar L1, em Ylist: L2; em Store RegEQ: colocar Y1 (pressionar a tecla **VAR**): escolher **Y-VARS** e, em seguida, **Y1**). Escolher **Calculate** e pressionar **ENTER** para obter os parâmetros a e b (Figura 24) e, de seguida, escolher **GRAPH** para obter a reta de mínimos quadrados (Figura 25).



Figura 24

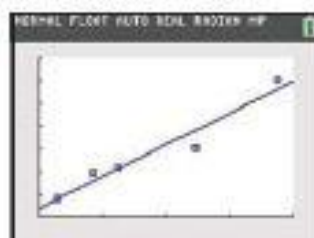


Figura 25

NOTA: No caso de, ao efetuar os procedimentos referidos para obter os parâmetros da equação da reta, não se obter o valor de r , deve-se proceder do seguinte modo: Pressionar a tecla **2ND** seguida da tecla **0** (accede ao catálogo) e, de seguida, deslocar o cursor para baixo até seleccionar **DiagnosticOn** (Figura 26); depois, pressionar **ENTER** duas vezes.

Repetindo os procedimentos para obter os parâmetros da equação da reta de mínimos quadrados, obtém-se o valor do coeficiente de correlação.

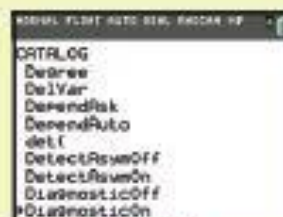


Figura 26

Texas TI-Nspire™ CX

Introdução de dados:

Escolher o ícone **Listas e Folha de Cálculo** seguido de **ENTER** (Figura 27).

Colocar o cursor na célula com a letra A e escrever, por exemplo, as iniciais: **tf** (taxa de fluxo) e, a seguir, **ENTER**; situar depois o cursor na célula B e digitar: **se** (solo emendido) e novamente **ENTER**. Introduzir os valores de x_i em **tf** (lista A) e os valores de y_i em **se** (lista B) (Figura 28).



Figura 27



Figura 28

2.1

Obter a nuvem de pontos:

Pressionar a tecla **2ND** e seleccionar o ícone **Dados e Estatística** seguido de **ENTER** (Figura 29).

Posicionar o cursor sobre a frase na horizontal: **clicar para adicionar variável**, e pressionar a tecla com a «mão», escolhendo **tf**. Em seguida, repetir o procedimento para a frase na vertical **clicar para adicionar variável**, e pressionar a tecla com a «mão», escolhendo **se** e visualizando os pontos (Figura 30).



Figura 29

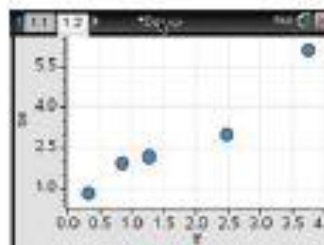


Figura 30

2.2 e 2.3

Obter os parâmetros a e b da equação da reta de mínimos quadrados e o valor de r , coeficiente de correlação linear:

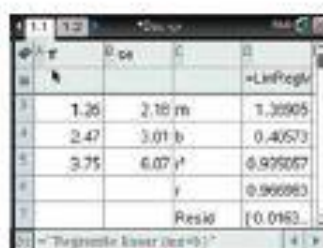
Premir a tecla **2ND** e com as teclas de cursor deslocar o cursor para a esquerda (**←**), de forma a entrar no documento 1.1.

Pressionar a tecla **2ND** e escolher a opção **4: Estatística** e, em seguida, a opção **1: Cálculos estatísticos**; selecionar **3: regressão linear (mx+b)** e escolher para **Lista X:** **tf** (depois de carregar no ícone com a «mão»), seguido de **2ND**; escolher para **Lista Y:** **se** (depois de carregar novamente no ícone com a «mão»), seguido de **2ND**. Guardar **RegEqn** em: **f1**, por exemplo, escolher como **1.ª col de resultados c[]** e, por fim, selecionar **OK** (pressionando sucessivamente **↵**) (Figuras 31 e 32).



	X	Y	
1	0.31	0.82	Trubo
2	0.85	1.95	RegEqn
3	1.26	2.18	m
4	2.47	3.01	b
5	3.75	6.07	y²

Figura 31



	X	Y	
3	1.26	2.18	m
4	2.47	3.01	b
5	3.75	6.07	y²
6			r
7			Resid

Figura 32

Premir a tecla **2ND** e com as teclas de cursor deslocar o cursor para a direita (**→**), de forma a entrar no documento 1.2.

Para obter a reta de mínimos quadrados, pressionar a tecla **2ND**, escolhendo a opção **4: analisar**, seguida de **6: Regressão** e finalmente **1: Mostrar linear (mx+b)** (Figura 33).

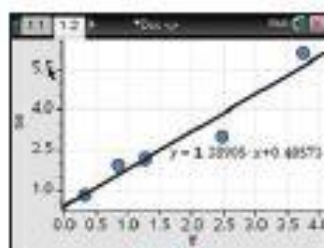


Figura 33

J. FLIPCHARTS DAS AULAS (Exemplos das aulas 108 e 112)

108 - AULA do dia 6-03-2020

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA A

COLÉGIO PEDRO ARRUPE

Lição nº 108

Data 06/3/2020

Sumário

Média e Desvio Padrão de uma amostra.
Amostragem

"NO LIMITS"

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

Média de uma amostra

COLÉGIO PEDRO ARRUPE

20

• Média de uma amostra

Média: $= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$

$x = (7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 13, 13, 14, 15, 15, 16, 16, 18, 18, 18)$

$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 283$ Média = $283/23 = 12.3$ Soma = $12.3 \times 23 = 283$

Média de uma amostra

- Médias de amostras diferentes de uma mesma população. Variabilidade da amostra

18

A média aritmética obtida por 23 alunos da turma do 10.º A, no último teste de Matemática A do ano letivo, foi de 12 valores, e a obtida no mesmo teste pelos 27 alunos da turma do 10.º B foi de 9 valores.

- 18.1** Qual é a média aritmética obtida no conjunto das duas turmas?
- 18.2** Sabendo que a turma do 10.º C tem 22 alunos e que a média conjunta entre as três turmas foi de 11 valores, qual foi a turma que obteve melhor média no último teste? Justifique.

18.1

$$\bar{z} = (12 \times 23 + 9 \times 27) / (23 + 27) = 10.38$$

18.2

$\bar{c}$ a média obtida no 10.º.

$$11 = (10.38 \times 50 + \bar{c} \times 22) / (50 + 22)$$

$$\bar{c} = 12.409 \text{ (aproximadamente)}$$

Média de uma amostra

$$\text{Média: } = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$$

- A média é uma boa medida para representar, localizar, dos dados ?
- Sim, mas em Estatística temos sempre que perceber os dados, o contexto e o problema

Suponha um aluno que ao longo do ano fez 6 testes, em que teve negativa em 5 deles e uma positiva, no primeiro teste, que era muito simples:

19 8,9 7,8 9,4 8,6 9,3

Pois este aluno teve uma média positiva, igual a 10,5, ou seja 11!

- ... e tendo em conta ... os diversos pontos de vista !
- A **Média é uma das mais importantes medidas estatísticas** e permite desenvolvimentos matemáticos muito relevantes.

Média de uma amostra

20

$$\text{Média: } = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$$

- A média resiste pouco a dados "outliers"

Salários	Frequência (Nº Empregados)	Frequência Relativa	Frequência Acumulada
400€	23	14.4%	14.4%
450€	58	36.3%	50.6%
600€	50	31.3%	81.9%
700€	20	12.5%	94.4%
1,000€	7	4.4%	98.8%
5,000€	2	1.3%	100.0%
Total	160	100%	

Cálculo da média:

$$\bar{x} = \frac{400 \times 23 + 450 \times 58 + 600 \times 50 + 700 \times 20 + 1000 \times 7 + 5000 \times 2}{160}$$

$$\bar{x} \approx 602 \text{ euros}$$

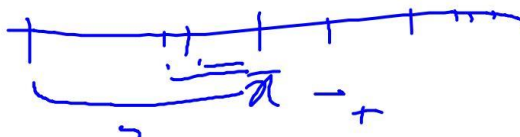
Média de uma amostra

20

$$\text{Média: } = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$$

- Desvios em relação à média

Notas Matemática 11B1	
Amostra Aleatória	Desvio da Média ($x_i - \bar{x}$)
13	1.6
11	-0.4
9	-2.4
11	-0.4
9	-2.4
16	4.6
11	-0.4
11.4	0.0
Média	Soma dos Desvios



Desvios em relação à média

Dada uma amostra $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, representa-se por d_i e designa-se por **desvio de x_i em relação à média**, a quantidade

$$d_i = x_i - \bar{x}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Variância e Desvio Padrão de uma amostra

Notas Matemática 11B1		
Amostra Aleatória	Desvio da Média (xi-x média)	Quadrado do Desvio (xi-x média) ²
13	1.6	2.47
11	-0.4	0.18
9	-2.4	5.90
11	-0.4	0.18
9	-2.4	5.90
16	4.6	20.90
11	-0.4	0.18
11.4	0.0	35.7
Média	Soma dos Desvios	SSx - Soma dos Quadrados dos Desvios

• Variância

$$S_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$$

$$\text{Variância} = 35.7 / 6 = 5.95$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$$

Variância e Desvio Padrão de uma amostra

Notas Matemática 11B1		
Amostra Aleatória	Desvio da Média (xi-x média)	Quadrado do Desvio (xi-x média) ²
13	1.6	2.47
11	-0.4	0.18
9	-2.4	5.90
11	-0.4	0.18
9	-2.4	5.90
16	4.6	20.90
11	-0.4	0.18
11.4	0.0	35.7
Média	Soma dos Desvios	SSx - Soma dos Quadrados dos Desvios

• Variância

$$S_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$$

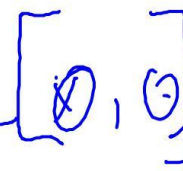
$$\text{Variância} = 35.7 / 6 = 5.95$$

• Desvio Padrão

$$S_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$$

$$\text{Desvio Padrão} = \sqrt{5.95} = 2.44$$

Dada uma amostra A de dimensão n da variável de interesse x , prova-se que não há mais de 25 % das unidades estatísticas da amostra com valores fora do intervalo $[\bar{x} - 2S_x, \bar{x} + 2S_x]$.



Variância e Desvio Padrão de uma amostra

Variância e Desvio Padrão de uma amostra

Notas Matemática 11B1		
Amostra	Desvio da Média (xi - x média)	Quadrado do Desvio (xi - x média) ²
Aleatória		
13	1.6	2.47
11	-0.4	0.18
9	-2.4	5.90
11	-0.4	0.18
9	-2.4	5.90
16	4.6	20.90
11	-0.4	0.18
11.4	0.0	35.7
Média	Soma dos Desvios	SS _x - Soma dos Quadrados dos Desvios

• Variância

$$S_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$$

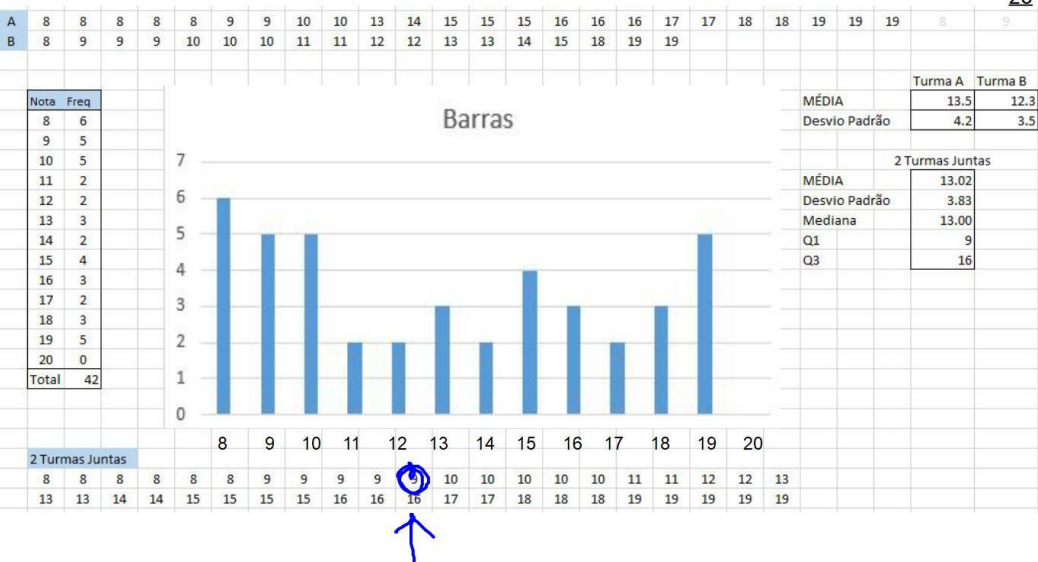
• Desvio Padrão

$$S_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$$

Variância e desvio-padrão de uma amostra

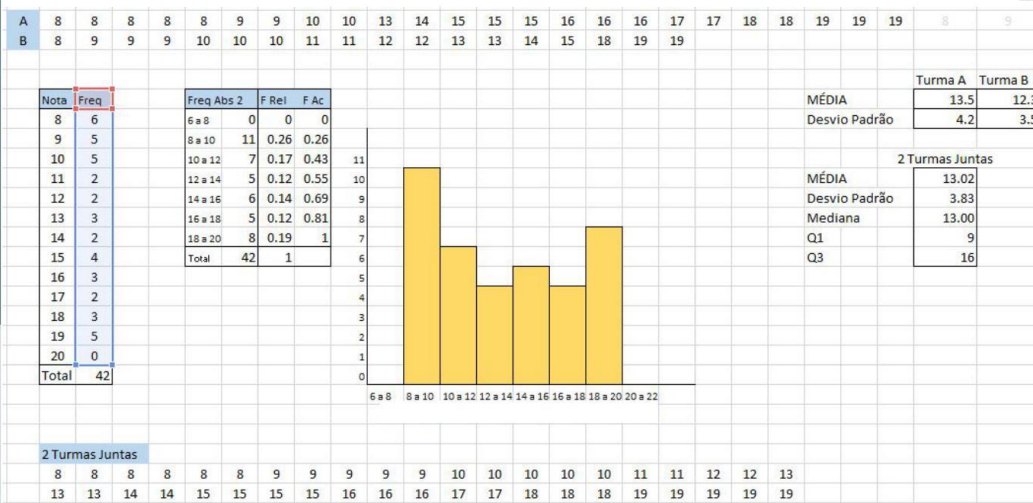
Dados $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, designam-se por **variância** e por **desvio-padrão** as medidas de dispersão $S_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$ e $S_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$, respetivamente.

Variância e Desvio Padrão de uma amostra



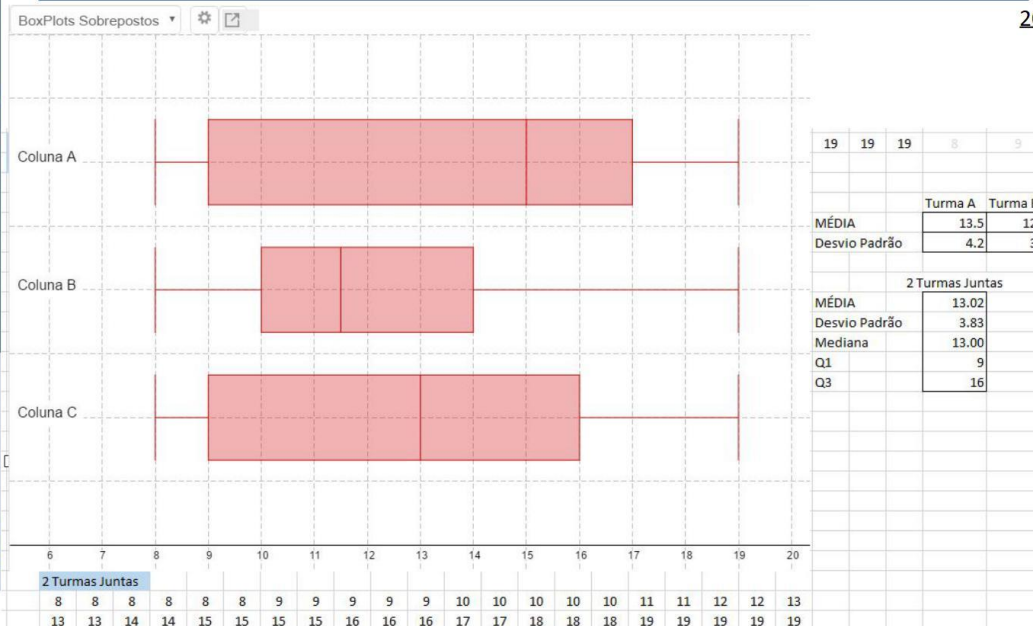
Variância e Desvio Padrão de uma amostra

20



Variância e Desvio Padrão de uma amostra

20



Propriedades da Média , Variância e Desvio Padrão

20

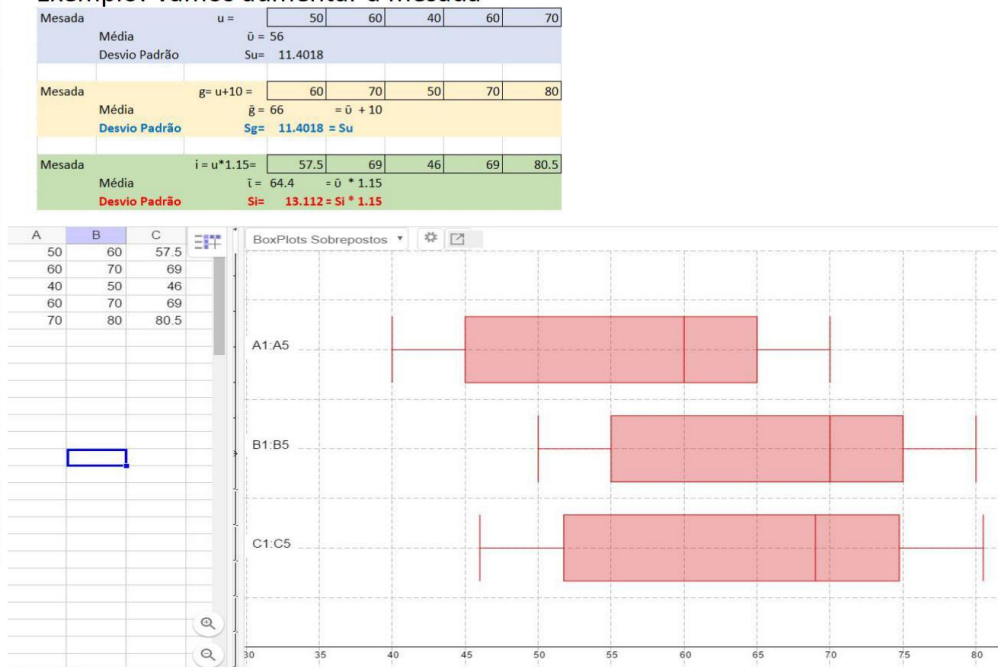
Exemplo: Vamos aumentar a mesada

Mesada	$u =$	50	60	40	60	70
Média	$\bar{u} =$	56				
Desvio Padrão	$S_u =$	11.4018				
Mesada	$g = u + 10 =$	60	70	50	70	80
Média	$\bar{g} =$	66				
Desvio Padrão	$S_g =$	11.4018 = S_u				
Mesada	$i = u * 1.15 =$	57.5	69	46	69	80.5
Média	$\bar{i} =$	64.4				
Desvio Padrão	$S_i =$	13.112 = $S_i * 1.15$				

Propriedades da Média , Variância e Desvio Padrão

20

Exemplo: Vamos aumentar a mesada



Propriedades da Média, Variância e Desvio Padrão

Mesada	u =	50	60	40	60	70
Média	$\bar{u} =$	56				
Desvio Padrão	$S_u =$	11.4018				
Mesada	$g = u + 10 =$	60	70	50	70	80
Média	$\bar{g} =$	66				
Desvio Padrão	$S_g =$	11.4018 = S_u				
Mesada	$i = u * 1.15 =$	57.5	69	46	69	80.5
Média	$\bar{i} =$	64.4				
Desvio Padrão	$S_i =$	13.112 = $S_i * 1.15$				

Média

Proposição

Dados $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais a e h , a amostra $\underline{y} = (ax_1 + h, ax_2 + h, \dots, ax_n + h)$ representa-se por $a\underline{x} + h$ e tem média $\bar{y} = a\bar{x} + h$.

Também se utiliza a notação $a\underline{x} + h$.

Soma dos Quadrados dos Desvios

Dados $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e α , se $\underline{y} = \underline{x} + h$ (respetivamente, $\underline{y} = \alpha\underline{x}$), então, $SS_y = SS_x$ (respetivamente, $SS_y = \alpha^2 SS_x$).

Desvio Padrão

Dados $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e α , se $\underline{y} = \underline{x} + h$ (respetivamente, $\underline{y} = \alpha\underline{x}$), então, $S_x = S_y$ (respetivamente, $S_y = |\alpha|S_x$).

Dados $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $S_x = 0$ se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Amostragem

- A **média da amostra** é uma estimativa do **valor médio da população**
 - A **variância e o desvio padrão da amostra** são estimativas da **variância e desvio padrão da população**
 - É importante trabalhar bem a amostra para se poder ter boas estimativas da população e assim tirar conclusões estatísticas adequadas
 - É preciso estudar bem a População, a Amostra, a relação aleatória entre as duas e ter precisão nas medidas estatísticas usadas
- Amostragens:
 - Aleatória Simples
 - Estratificada
 - Sistemática

MATEMÁTICA
DIV

MATEMÁTICA A



Lição nº 112

Data 19/3/2020

Sumário

Dados bivariados quantitativos. Nuvem de pontos.
Reta dos mínimos quadrados.

MATEMÁTICA
DIV

Dados Bivariados



Regressão e Correlação

Já estudámos Funções e percebemos que nas relações funcionais o valor de uma variável fica exatamente determinado a partir de outra.
Por exemplo, a medida da área de um quadrado fica exatamente definida a partir do seu lado. A expressão que define essa relação pode ser escrita desta forma: $y = x^2$

Em estatística, frequentemente o grau de relação entre variáveis é menos precisa.
Por exemplo, a relação entre a altura de uma pessoa e o seu peso (ou, outro exemplo, a sua massa corporal). Esta relação não pode ser descrita por uma função. Não tem essa "força".

Para saber qual a "força" da relação, em estatística usam-se duas medidas que se chamam Regressão e Correlação e nos ajudam a analisar os dados das amostras e das populações.

Já conhecemos medidas estatísticas que nos ajudam a perceber os dados, como a mediana, os quartis, a média e o desvio padrão, etc

Vamos ver o que são a Regressão e a Correlação e como usá-las na Investigação Estatística

Dados Bivariados

Amostra de Dados Bivariados (Bivariados = Duas variáveis)

Se tomarmos os dados da nossa Investigação Estatística e considerarmos a Altura e o Peso dos alunos, podemos chamar x à variável Altura e y à variável Peso.

Se para cada aluno, juntarmos a sua altura e peso, como se fossem coordenadas a marcar num referencial cartesiano, ficamos com pares de (altura,peso) ou (x,y) .

Se juntarmos todos os pares, correspondentes a toda a amostra, ficamos com uma amostra com duas variáveis; por exemplo:

$$(x,y) = ((174,63), (181,70), (168,51), \dots, (173,62)) \quad (\text{retirado dos dados da Turma 11 A1})$$

Chamamos a esta amostra, uma Amostra de Dados Bivariados, de dimensão 10, pois eram 10 alunos.

Amostra de dados bivariados

Considerem-se duas variáveis estatísticas quantitativas, x e y , em determinada população, e uma amostra, A , de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população, cujos elementos estão numerados de 1 a n . Designa-se por **amostra bivariada das variáveis estatísticas x e y** — ou, simplesmente, por **amostra de dados bivariados quantitativos** —, a sequência

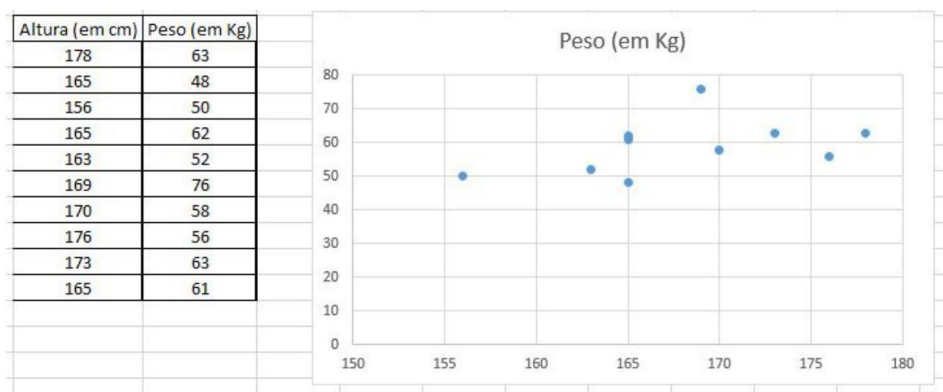
$$((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)),$$

que se representa por (x, y) e tem dimensão n .

Dados Bivariados - Nuvem de Pontos

Nuvem de Pontos ou Diagrama de Dispersão

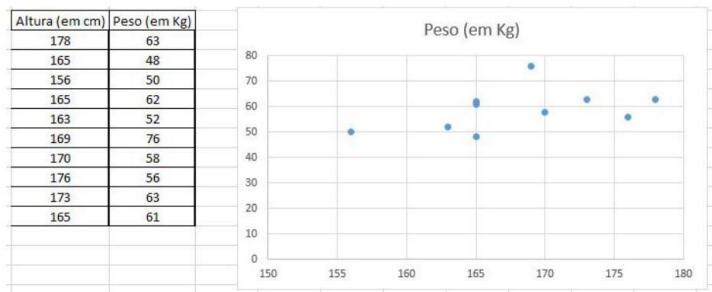
Se tomarmos agora a amostra bivariada (altura,peso) da turma 12 A1 e marcarmos os "pontos" correspondentes a cada aluno, ficamos com o seguinte gráfico:



Ao conjunto dos pontos azuis, chama-se "**Nuvem de Pontos**" e ao gráfico em que as coordenadas são as variáveis $(x,y)=(\text{altura,peso})$ de cada aluno, chama-se "**Diagrama de Dispersão**" desta amostra bivariada.

Dados Bivariados - Nuvem de Pontos

Nuvem de Pontos ou Diagrama de Dispersão

**Nuvem de pontos ou diagrama de dispersão**

Fixados um referencial ortogonal num plano, um número natural n e uma amostra de dados bivariados

$$(x, y) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)),$$

o conjunto dos pontos $\{P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)\}$ designa-se por **nuvem de pontos ou diagrama de dispersão**.

Dados Bivariados - Reta de Mínimos Quadrados

Variável Explicativa e Variável Resposta

Consideremos agora os seguinte exemplo:

Alguns alunos da turma 11 B1, resolveram criar uma empresa "startup" de venda de chapéus de chuva na Baixa de Lisboa.

Já em pleno funcionamento, resolveram perceber se há alguma relação entre a vendas dos chapéus de chuva e a pluviosidade na Baixa de Lisboa.

Durante uma semana, registaram as vendas e o nível de pluviosidade (em mm) em cada um dos dias.

A pergunta para a qual procuraram explicação era:

"A chuva tem implicação nas vendas?" ou de outro modo

"A chuva explica porque vendemos mais chapéus?"

Se considerarmos que a variável chuva é a que explica os valores da variável vendas de chapéus, podemos chamar à primeira, Variável Explicativa ou independente e à outra Variável Resposta, ou dependente.

(A venda depende da chuva. A chuva é independente da venda !)

Vamos em seguida considerar um exemplo e fazer a Nuvem de Pontos ou Diagrama de Dispersão correspondentes.

Dados Bivariados - Reta de Mínimos Quadrados

Variável Explicativa e Variável Resposta

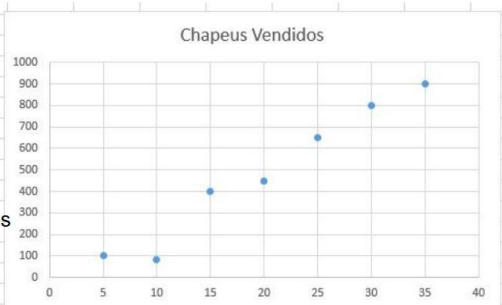
Consideremos o nosso exemplo da "startup":

Alguns alunos da turma 11 B1, resolveram criar uma empresa "startup" de venda de chapéus de chuva na Baixa de Lisboa. Já em pleno funcionamento, resolveram perceber se há alguma relação entre a vendas dos chapéus de chuva e a pluviosidade na Baixa de Lisboa.

Durante uma semana, registaram as vendas e o nível de pluviosidade (em mm) em cada um dos dias.

Pluviosidade(mm)	Chapeus Vendidos
5	100
10	80
15	400
20	450
25	650
30	800
35	900

A Variável Resposta nas ordenadas



A Variável Explicativa nas abcissas

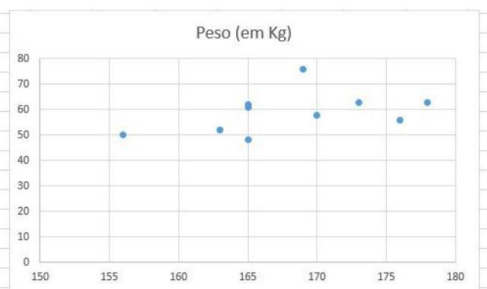
Variável explicativa e variável resposta

Dada uma amostra de dados bivariados, a variável considerada dependente designa-se por **variável resposta** e a variável considerada independente, por **variável explicativa**.

Dados Bivariados - Reta de Mínimos Quadrados

Variável Explicativa e Variável Resposta

Altura (em cm)	Peso (em Kg)
178	63
165	48
156	50
165	62
163	52
169	76
170	58
176	56
173	63
165	61



No exemplo que vimos da Turma 12 A1, (nuvem de pontos, acima) estamos a considerar que a variável explicativa é a altura e a variável resposta é o peso.

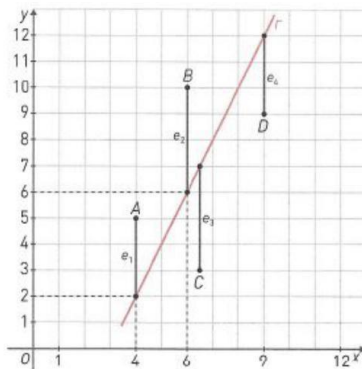
Ou seja, que a altura dos alunos poderá explicar o seu peso.

A escolha de qual é a variável explicativa e qual a variável resposta, deve ser feita tendo em conta o conhecimento empírico da situação em estudo.

Dados Bivariados - Reta de Mínimos Quadrados

Desvios Verticais

No referencial ortogonal da figura seguinte foram representados os pontos A , B , C e D e a reta r de equação $y = 2x - 6$.



e_1 , e_2 , e_3 e e_4 são as diferenças entre as ordenadas dos pontos A , B , C e D e as ordenadas dos pontos da reta r com a mesma abscissa, respetivamente.

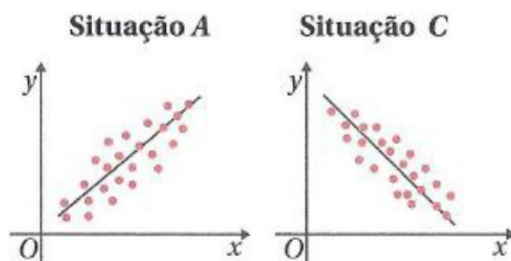
- $e_1 = 5 - 2 = 3$
- $e_2 = 10 - 6 = 4$
- $e_3 = 3 - 7 = -4$
- $e_4 = 9 - 12 = -3$

Estas diferenças designam-se por **desvios verticais** dos pontos A , B , C e D em relação à reta de equação $y = 2x - 6$.

Dados Bivariados - Reta de Mínimos Quadrados

Desvios Verticais

No exemplo anterior, tínhamos uma reta, na sua forma reduzida $y = ax + b$ e percebemos o que são os desvios verticais dos pontos em relação à reta.



Vamos agora pensar que temos uma nuvem de pontos, como nas Situações A ou C, e procuramos encontrar uma reta que se ajuste o melhor possível ao conjunto dos pontos, ou seja, uma reta tal que os desvios verticais dos pontos em relação à reta, sejam mínimos.

Essa reta, por ser uma reta, terá uma equação reduzida do tipo $y = ax + b$ e por ser a reta que torna mínimos os desvios, chama-se **Reta dos Mínimos Quadrados**.

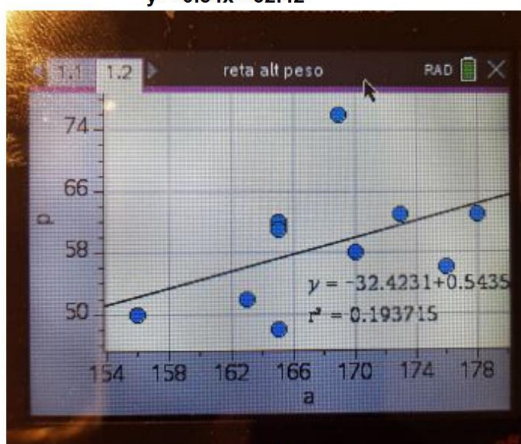
Dados Bivariados - Reta de Mínimos Quadrados

Reta dos Mínimos Quadrados

Na próxima aula vams aprender a determinar a reta dos mínimos quadrados usando a calculadora gráfica, sem ter necessidade de efectuar estes cálculos que aqui fizemos com a tabela. Vai ser MESMO muito importante saber usar a calculadora gráfica.

Equação reduzida da Reta Mínimos Quadrados

$$y = 0.54x - 32.42$$



	Altura (em cm)		Peso (em Kg)		
i	x	y	x.y	x²	
1	178	63	11214	31684	
2	165	48	7920	27225	
3	156	50	7800	24336	
4	165	62	10230	27225	
5	163	52	8476	26569	
6	169	76	12844	28561	
7	170	58	9860	28900	
8	176	56	9856	30976	
9	173	63	10899	29929	
10	165	61	10065	27225	
Soma ou Σ	1680	589	99164	282630	
Média x =	168				
Média y =		58.9			
SSx =	390		a =	0.54359	
			b =	-32.4231	

EXTRA - Reta de Mínimos Quadrados

Reta dos Mínimos Quadrados

Apenas como informação extra, para quem tiver curiosidade na forma como se define e calculam, sem calculadora gráfica, os valores que definem a Reta de Mínimos Quadrados, apresentam-se a seguir, dois "slides" com mais conteúdos teóricos.

Repito: é **informação Extra**, apenas para quem quiser saber um bocadinho mais sobre o que está "por trás" da calculadora gráfica.

EXTRA , EXTRA !!!

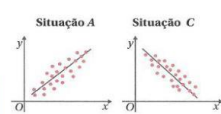
EXTRA - Reta de Mínimos Quadrados

Reta dos mínimos quadrados

A equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é dada por

$y = ax + b$, onde

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{SS_x} \quad \text{e} \quad b = \bar{y} - a \bar{x}.$$



$a = \frac{\text{(Soma dos } n \text{ produtos do } x \text{ pelo } y \text{ de cada ponto)} - (n \text{ vezes a Média de } x \text{ vezes a Média de } y)}{\text{Soma dos Quadrados dos Desvios}}$

$b = \text{Média de } y - a \text{ vezes Média de } x$

O ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta dos mínimos quadrados

EXTRA - Reta de Mínimos Quadrados

Reta dos Mínimos Quadrados

Vamos de novo usar os dados da Turma 12 A1, organizados numa tabela com variáveis x = Altura e y =Peso para determinar a Reta dos Mínimos Quadrados

Reta dos mínimos quadrados

A equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é dada por

$y = ax + b$, onde

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{SS_x} \quad \text{e} \quad b = \bar{y} - a \bar{x}.$$

Equação reduzida da Reta Mínimos Quadrados

$$y = 0.54359 x - 32.4231$$

ou

$$y = 0.54x - 32.42$$

	Altura (em cm)	Peso (em Kg)		
i	x	y	x.y	x ²
1	178	63	11214	31684
2	165	48	7920	27225
3	156	50	7800	24336
4	165	62	10230	27225
5	163	52	8476	26569
6	169	76	12844	28561
7	170	58	9860	28900
8	176	56	9856	30976
9	173	63	10899	29929
10	165	61	10065	27225
Soma ou Σ	1680	589	99164	282630
Média x =	168			
Média y =		58.9		
SSx =	390		a =	0.54359
			b =	-32.4231

SSx - Soma dos Quadrados dos Desvios

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2$$

