UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PORTEFÓLIO REFLEXIVO DE MATEMÁTICA ENQUANTO INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO REGULADORA DA APRENDIZAGEM DE ALUNOS DO 11.º ANO NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA A

Célia Maria da Conceição Dias

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Didática da Matemática

2012

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PORTEFÓLIO REFLEXIVO DE MATEMÁTICA ENQUANTO INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO REGULADORA DA APRENDIZAGEM DE ALUNOS DO 11.º ANO NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA A

Célia Maria da Conceição Dias

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Didática da Matemática

Orientado pela Professora Doutora Mª Leonor de Almeida Domingues dos Santos

2012

Resumo

O presente estudo teve por objetivo analisar aspetos da aprendizagem da Matemática de alunos do ensino secundário em situações mediadas por um dispositivo de avaliação reguladora da aprendizagem a que se deu o nome de *portefólio reflexivo de Matemática*. Concretamente, foram estudados os processos e os recursos que os alunos usam quando elaboram um portefólio de matemática, e o balanço final que eles fazem sobre o trabalho desenvolvido.

Este estudo seguiu uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo, tendo como pano de fundo a teoria da atividade. Foram estudados três alunos do ensino secundário (estudos de caso). Os dados foram recolhidos através de um questionário, entrevistas semiestruturadas e recolha documental de onde sobressaem todas as versões das entradas feitas pelos alunos e um *diário de bordo*. No processo analítico dos dados, cada estudo de caso foi analisado separadamente, depois confrontaram-se os três estudos de caso de forma a salientar elementos de homogeneidade e de heterogeneidade e, por fim, feita uma interpretação desses dados a partir dos conceitos teóricos estudados.

Ao longo do desenvolvimento do portefólio, são identificados diversos processos dos quais se destacam: processos de orientação e de organização aquando da escolha da tarefa; processos de interpretação, de tradução e de interiorização, através das produções escritas por palavras dos próprios; processos de seleção de estratégias, associados a processos de estabelecimento de analogias e de ancorar; processos de ziguezaguear com o refazer de parte do trabalho, e de aprofundamento de versões anteriores. Ao nível da autorregulação, o processo de automonitorização, aliado ao processo de reflexão, é despoletado e incentivado através de *feedback*, ao longo da realização do portefólio, até se tornarem uma rotina no ato de aprender do aluno.

Ao nível dos recursos, destaca-se o *feedback* escrito, fornecido pela professora, a cada versão das entradas do portefólio, e o estabelecimento de diálogos internos transpostos para a forma escrita, visível ao aluno e ao professor, promotores da compreensão matemática e estimuladores da reorganização e da clarificação de ideias.

Entre as vantagens do portefólio reflexivo de Matemática identificadas pelos alunos, destacam-se a existência de um acompanhamento diferenciado, que os ajudou a estudar com regularidade e a aprender com compreensão, de forma consciente, com oportunidade de voltar atrás, refazer e refletir sobre o trabalho desenvolvido, e o permitir dar visibilidade e reconhecer o seu trabalho e esforço.

Palavras-chave: portefólio de Matemática, avaliação reguladora, autorregulação, aprendizagem matemática, reflexão.

Summary

The purpose of this study is to analyze aspects of high school students learning of math by means of a device designed to assess learning named *reflective math portfolio*. Processes and resources used by students when they formulate a math portfolio were studied as well as their own assessment about the work performed.

This study followed a qualitative approach mostly of interpretative nature, based on the activity theory. Three high school students were studied (case studies). Data were collected by means of a questionnaire, semi-structured interviews and gathering of documents, from where highlights every version of the entries made by the students as well as a logbook. In the analytical data processing, each case study was analyzed separately, then the three case studies were compared to highlight elements of homogeneity and heterogeneity and, finally, an interpretation of the data from the theoretical concepts studied was made.

Throughout the development of the portfolio, several processes are identified and among them, stand out: guidance and organization processes when the task was chosen; interpretation processes, translation and reflection, by means of reports written by the students themselves; selection of processes associated with establishment of analogies and anchors; zigzag processes, the students being able to redo part of the work, and deepening of earlier versions. At self-regulation level, the self-monitoring process, coupled with the process of reflection, was prompted and encouraged through feedback during the portfolio achievement, until the act of learning became a routine for the student.

At the level of the resources, written feedback provided by the teacher, at each version of the portfolio entries, and the establishment of internal dialogues displayed in the written form, visible to the student and the teacher, promoters of mathematical understanding and stimulators of reorganization and clarification of ideas.

Among the advantages of *the reflective math portfolio* identified by students include the existence of a differentiated follow-up, which helped them to study with regularity and learning with understanding, consciously, with opportunity to step back, redo and reflect on the work and enable visibility and recognize their work and effort.

Keywords: math portfolio, formative assessment, self-regulation, mathematics learning, reflection.

Agradecimentos

A dois professores a quem eu devo respeito e agradecimento: ao professor, colega e amigo José Manuel Varandas, que me deu a conhecer o projeto AREA, e à Professora Doutora Leonor Santos que me acolheu nesse projeto. Foi no seio da equipa do projeto AREA que conheci pessoas empreendedoras, que estimularam o meu crescimento na pesquisa e me apoiaram, partilhando também as suas práticas e reflexões.

À professor Leonor Santos, novamente, porque aceitou e acreditou na minha proposta de trabalho e durante a qual foi o meu guia e também um horizonte a alcançar.

À minha querida Mãe, Emilia, a quem tanto amo e que é exemplo de força, perseverança, coragem e fé.

Ao meu companheiro, Bruno, pelo incentivo e apoio durante a realização deste trabalho, e à minha filha, Inês, pelo tempo que não tive para ela. Obrigada pelo amor e por estarem sempre do meu lado, transmitindo apoio e carinho.

Aos meus alunos, Francisca, Lara e Francisco pela disponibilidade em participarem neste estudo.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, me ajudaram durante a realização deste trabalho.

Índice

Capítulo I – Introdução 1

Motivação, problema e questões de investigação 1

Pertinência e significância do estudo 6

Estrutura e organização do estudo 8

Capítulo II – A Aprendizagem em Contexto Escolar 11

Enquadramento na teoria da atividade 12

Componentes e estrutura hierárquica da atividade humana 12

Sistema de atividade 14

Internalização e externalização 17

A linguagem 19

Zona de desenvolvimento proximal (ZDP) 21

Autorregulação 23

Fases e processos da autorregulação 25

Componentes da autorregulação 28

Componente metacognitiva 29

Componente motivacional 32

Componente comportamental 33

Síntese do capítulo 34

Capítulo III – A Aprendizagem da Matemática 36

Evolução da Matemática escolar sob o ponto de vista do ensino e da aprendizagem 36

O conhecimento matemático escolar no ensino secundário 50

Processos matemáticos 52

Raciocínio matemático 57

Problemas e Resolução de problemas 59

Comunicação matemática 65

Aplicações e modelação matemática 69

Síntese do capítulo 71

Capítulo IV – Avaliação das aprendizagens 73

Evolução do conceito de avaliação ao longo dos últimos 30 anos 73

Avaliação reguladora das aprendizagens – Uma nova forma de avaliação formativa 79

O dizer avaliativo – *feedback* escrito 82

Portefólio 86

Características de um portefólio 86

O desenvolvimento de um portefólio 91

Planificação 91

Implementação 92

Avaliação 93

Potencialidades 96

Constrangimentos e dificuldades 99

Síntese do capítulo 100

Capítulo V – Metodologia de investigação 102

Opções metodológicas 102

Design do estudo 103

Apresentação da turma de pertença dos alunos participantes neste estudo 104

Participantes 105

Características do portefólio pedido aos alunos 106

Recolha de dados 109

Questionário 110

Entrevistas semiestruturadas 110

Recolha documental 113

Análise de dados 114

Capítulo VI – Apresentação e discussão de dados – Francisca 118

Apresentação 118

O portefólio da Francisca 122

Razões das escolhas para as entradas 122

Processos para melhorar as suas produções 125

Recursos usados na elaboração do portefólio 137

Vantagens e limitações 141

Síntese do capítulo 148

Capítulo VII – Apresentação e discussão de dados - Lara 150

Apresentação 150

O portefólio da Lara 152

Razões das escolhas para as entradas 152

Processos para melhorar as suas produções 157

Recursos usados na elaboração do portefólio 168

Vantagens e limitações 172

Síntese do capítulo 178

Capítulo VIII – Apresentação e discussão de dados - Francisco 181

Apresentação 181

O portefólio do Francisco 184

Razões das escolhas para as entradas 184

Processos para melhorar as suas produções 185

Recursos usados na elaboração do portefólio 194

Vantagens e limitações 197

Síntese do capítulo 203

Capítulo IX – Conclusões 206

Síntese do estudo 206

Apresentação e discussão dos resultados 208

A atividade do aluno na elaboração do portefólio 208

Processos para melhorar as produções 212

Recursos usados na elaboração do portefólio 218

Vantagens e limitações do portefólio 221

Questões para futuros estudos 225

Referências bibliográficas 229

Legislação 243

Anexos

Anexo I – Pedido de autorização à direção do agrupamento de escolas

Anexo II – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Anexo III – Lista dos possíveis itens a incluir e calendarização – 1ª versão

Anexo IV – Lista dos possíveis itens a incluir e calendarização – 2ª versão

Anexo V – Cartão de comentário

Anexo VI – Apoio para reflexão final de período ou de ano

Anexo VII – Exemplo de uma entrada de um aluno

Anexo VIII – Critérios de avaliação do portefólio e descritores – 1ª versão

Anexo IX – Critérios de avaliação do portefólio e descritores – 2ª versão

Anexo X – *Powerpoint* de apresentação do portefólio aos alunos

Anexo XI – Questionário

Anexo XII – Guião para a primeira entrevista

Anexo XIII – Guião para a segunda entrevista

Anexo XIV – Tarefas escolhidas pela Francisca

Anexo XV – Tarefas escolhidas pela Lara

Anexo XVI – Tarefas escolhidas pelo Francisco

Índice de figuras

Figura 1 – Representação esquemática da estrutura hierárquica da atividade humana 14

Figura 2 – Esquema representativo de um sistema de atividade 14

Figura 3 – Interpretação do esquema de Engeström representativo de um sistema de atividade 209

Siglas

APM: Associação de Professores de Matemática

GAVE: Gabinete de Avaliação Educacional

DES: Departamento do Ensino Secundário

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

ZDP: Zona de Desenvolvimento Proximal

Capítulo I

Introdução

Nos últimos anos tem-se vindo a assistir, tanto no ensino básico, como no ensino secundário, à preconização de um ensino dirigido ao desenvolvimento de competências e para uma forte componente reguladora da avaliação (Santos, 2004). É suposto que se recorra a uma variedade de instrumentos e estratégias de avaliação de forma a respeitar estilos de aprendizagem diferenciados e que se dê aos alunos oportunidades para mostrarem as suas aprendizagens e as suas competências aos vários níveis dos conhecimentos, das capacidades e das atitudes e valores. Tais objetivos só serão passíveis de serem alcançados se integrarmos a avaliação no processo de ensino e aprendizagem de forma formativa, contínua e sistemática (Almeida *et al*., 2004).

A investigação a que se refere o presente trabalho insere-se no tema da avaliação reguladora, ou seja, "a avaliação que é pensada e posta em prática com o principal propósito de contribuir para a aprendizagem dos alunos" (Santos *Org*., 2010). Em particular, este estudo realiza-se em torno da utilização do portefólio de aprendizagem que se pretende que seja reflexivo e mostre a todos os intervenientes do processo educativo, nomeadamente ao próprio aluno, o que se *pensa* e *faz* no quotidiano escolar, em relação à disciplina de Matemática. Considera-se que a reflexão, a avaliação, a aprendizagem e o uso do portefólio podem estar intimamente relacionados a fim de promover o aperfeiçoamento contínuo da aprendizagem do aluno, do ensino do professor, criando uma cultura de autoavaliação permanente.

Motivação, problema e questões de investigação

Pelo princípio da diversificação dos intervenientes na avaliação, estabelecido na portaria n.º550-D/2004, artigo 6.º, a avaliação não deve ser essencialmente um "assunto do professor", mas deve ser construtivamente partilhada com os alunos e, se possível, com os pais e outros intervenientes na educação, sem prejuízo do papel fundamental do professor. Além disso, uma avaliação aplicada somente como forma de verificar se determinados objetivos foram ou não atingidos é extremamente redutora (Abruscato,

1993), para além de não ir ao encontro do enquadramento que lhe é dado no Despacho Normativo n.º6/2010, no qual a avaliação é tida como "um elemento integrante e regulador" (p. 7464). De facto, uma avaliação que considera uma só modalidade (a sumativa), uma só situação (a controlada) e uma só técnica (os exames) não determina a qualidade da educação e formação dos alunos e, portanto, do sistema educativo (Almeida, Almeida & Morais, 2004). As classificações dadas aos alunos com poucas ou nenhumas orientações para melhorar, tendenciosamente coloca os alunos em comparação uns com os outros, levando-os a crer que o principal propósito da aprendizagem é a competição em vez do aperfeiçoamento pessoal. Assim, além de ter um impacto particularmente negativo em alunos com baixo aproveitamento escolar, reforçando as suas baixas expectativas e a sua desmotivação (Silva *et al*., 2004), leva-os tendencialmente a reduzir o seu nível de aprendizagem (Klenowski, 2002; Fernandes, 2009). Deste modo, é necessário que a avaliação seja reguladora (Santos, 2008), ocorra de forma contínua e sistemática, e não seja privilegiadamente baseada nas classificações obtidas em fichas de avaliação sumativas.

É sabido que não existe um único instrumento de avaliação (formativo ou sumativo) que abarque todos os outros. Daí que a escolha do instrumento a usar em cada momento, deve ser pensado, em primeiro lugar, em função dos propósitos que se pretendem atingir. Começo então por enunciar os motivos específicos, que me levaram a investir no *portefólio reflexivo de matemática* para procurar tornar possível uma avaliação efetivamente reguladora da aprendizagem.

Desde sempre senti que faltava nos meus alunos o ato de refletir sobre o trabalho desenvolvido (muito para além do cálculo de médias aritméticas, percentagens, ou a mera comparação com as notas dos colegas), estando afastados da "primazia da avaliação formativa com valorização dos processos de autoavaliação regulada" (Desp. Norm. N.º6/2010., p. 7464). Como professora, o portefólio também seria um meio de conhecer melhor cada aluno uma vez que permitia ficar com mais registos acerca deste – não é que não os tomasse, mas em alguns casos considerava-os diminutos ou pouco estruturados. Assim, o portefólio também constituiria uma ajuda num dos aspetos em que sentia que precisava melhorar, com particular necessidade, nos alunos poucos participativos e pouco comunicativos. Além disso, o portefólio, pelas suas características, também parecia ser uma boa solução para o respeito da diversidade e individualidade dos alunos, permitindo fazer de forma prática diferentes adaptações de

modo a ajudar todos os alunos na aprendizagem da matemática, sendo este um dos aspetos contemplados no princípio da equidade (NCTM, 2007). Da mesma forma, o portefólio também seria um bom meio para trabalhar as crenças dos alunos em relação a si próprios enquanto aprendentes o que, de facto, também está contemplado no mesmo princípio, nas normas do NCTM (2007) quando refere que "a matemática pode e deve ser aprendida por todos (…) alguns alunos poderão necessitar de apoio para alcançar expectativas elevadas" (p. 13). Com efeito, as expressões mais frequentes utilizadas por alunos com pouco sucesso nesta disciplina são "não sou capaz" ou "não sei nada". Ora, considero que todos os alunos que chegam ao 10.º ano de escolaridade sabem qualquer coisa e são capazes de fazer alguma matemática.

O *portefólio reflexivo* parecia assim ser uma boa ferramenta para lhes mostrar isso, pois constituiria uma evidência de que, de facto tais alunos sabem alguma coisa. Depois seria pegar no que sabiam (pouco ou muito) e ajudá-los na sua progressão. O facto de ser escrito seria uma forma de ficarmos com evidências deste processo. O portefólio seria sempre usado como reforço positivo e simultaneamente desafiante, contrariando a crença de que apenas alguns alunos são capazes de aprender matemática. Além disso, considero que se um aluno consegue expor por palavras suas um raciocínio, seja oralmente ou por escrito, então, de facto, aprendeu aquela matéria. O que o aluno não consegue explicar seria um indicador do que ainda é necessário trabalhar com ele. Assim, em relação à minha prática profissional, a explicitação escrita dos raciocínios por parte dos alunos, seria mais um meio para lidar melhor com a diversidade existente numa turma e dar resposta mais eficaz à individualidade de cada aluno (porque as dúvidas e vicissitudes de um aluno não são sempre iguais às de outro por mais idênticos que sejam os seus percursos escolares).

Reportando-me a outra dimensão da aprendizagem e da avaliação, considero que para haver uma avaliação mais útil e verdadeira é necessário que os alunos também reflitam no sentido de tomarem consciência de onde partiram e até onde chegaram (em termos de aprendizagem, claro); as dificuldades que tiveram de ultrapassar, se as ultrapassaram, como as ultrapassaram, etc. Acredito que esta metacognição não só os ajudará a fazerem uma autoavaliação mais útil e ajustada, mas também, numa perspetiva transversal os ajudará na sua formação integral como pessoa/cidadão.

No ano letivo 2006/07 tomei a iniciativa de pesquisar sobre o tema da avaliação através de portefólios com mais seriedade e realizar as primeiras leituras. Com base nas

informações recolhidas, conceptualizei um portefólio que fosse, no meu entender, exequível para ambas as partes (professor e alunos), que desse resposta às necessidades acima identificadas e procurei aplicá-lo no ano letivo 2007/08 numa turma do décimo ano do curso científico-humanístico. No entanto, a sua aplicação revelou lacunas na conceptualização e operacionalização desta ferramenta. Verifiquei que não estava suficientemente desperta para certos cuidados que se deviam ter, nem para os riscos que poderia evitar. No entanto, foi uma experiência que me alertou para certos aspetos descurados, e me incutiu o sentimento da necessidade de obter mais conhecimento nesta área e a consciência de que desenvolver uma prática avaliativa com intencionalidade reguladora não é tão trivial quanto possa parecer.

Na procura de ajuda, partilhei as minhas vicissitudes com alguns colegas mais experientes, de entre os quais um colega de matemática e meu antigo professor da Faculdade de Ciências. Foi através dele que conheci o Projeto AREA – Avaliação Reguladora do Ensino e Aprendizagem, coordenado pela Professora Doutora Leonor Santos, no qual obtive o apoio de que necessitava, não só pelo esclarecimento de dúvidas, como também na indicação de caminhos/leituras e através de questões que aí me eram colocadas e que me obrigavam a refletir e avaliar a minha prática na implementação deste instrumento.

O projeto AREA, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) de 2006 a 2011, era constituído por investigadores do ensino universitário e politécnico e professores dos diferentes ciclos de escolaridade. Cada sessão tinha uma temática principal proposta por um elemento da equipa, mediante os seus principais interesses e preocupações profissionais, no âmbito da avaliação reguladora. O tema era discutido entre todos com base nas suas experiências e na literatura previamente sugerida pela coordenadora ou pelos restantes elementos do grupo. Desta forma, o projeto proporcionou a partilha de experiências desenvolvidas, sustentada num referencial teórico, orientador do trabalho, visando contribuir para a implementação efetiva de práticas avaliativas ao serviço da aprendizagem dos alunos. Foi no seguimento do trabalho desenvolvido no projeto AREA, com aplicação direta no terreno, e da reflexão sobre as minhas práticas profissionais no âmbito da avaliação reguladora, que foi efetuada uma comunicação no encontro anual de professores de Matemática, ProfMat (Dias & Santos, 2009).

Estava assim dado o pontapé de saída para o desenvolvimento de um estudo com características mais estruturadas. Tendo entretanto entrado no curso de mestrado, tomei a decisão de desenvolver a minha dissertação neste tema. Em suma, tendo como objetivo dar resposta à reduzida prática reflexiva por parte dos alunos, ao desejo de criar contextos potenciadores do desenvolvimento das aprendizagens e realizar uma avaliação mais justa e fundamentada, propus-me desenvolver uma investigação no âmbito da avaliação reguladora com suporte no *portefólio reflexivo de Matemática*. Contudo, este trabalho tem apenas como objeto de estudo o aluno. Por outras palavras, procura estudar de que modo este instrumento contribui para a aprendizagem matemática de alunos do 11.º Ano de um Curso Científico Humanístico. Mais especificamente, pretendi investigar uma prática de avaliação reguladora, que se serve do *portefólio reflexivo de matemática* como um instrumento mediador da aprendizagem, para que, a partir da sua compreensão, possa analisar a sua relação com:

- as aprendizagens dos alunos;
- com os processos de autorregulação que os alunos utilizam, nomeadamente na forma como estruturam e organizam as suas ações aquando da implementação desta ferramenta de avaliação formativa.

Sendo o objeto do presente estudo o aluno e o objetivo primordial saber em que medida o *portefólio reflexivo* pode contribuir para a sua aprendizagem matemática, é natural que as questões orientadoras sejam direcionadas para aspetos que são necessários observar de forma a se poder inferir se houve ou não aprendizagem, e em que medida este instrumento contribuiu para essa aprendizagem. Deste modo, foram definidas as seguintes questões de investigação:

- Que processos são postos em prática pelos alunos para melhorar as suas produções?
- Que recursos são usados pelos alunos quando envolvidos na realização do *portefólio reflexivo de Matemática*?
- Como os alunos autoavaliam o desenvolvimento do *portefólio reflexivo de matemática*? Que vantagens identificam neste instrumento de avaliação?

Pertinência e significância do estudo

A avaliação sempre foi e continua a ser uma questão problemática que tem ganho diferentes contornos conceptuais ao longo dos anos, resultantes da evolução dos significados que se foram atribuindo ao termo, naturalmente associados aos contextos históricos e sociais, à evolução das teorias de ensino e aprendizagem e aos propósitos que se pretendem atingir emergentes dos currículos (Alves, 2006; Fernandes, 2008).

Em Portugal, desde o último quarto do século XX, tem-se tem verificado um aumento da insatisfação geral com os métodos quantitativos e tradicionais de avaliação (APM, 1998). A falência da medida e da objetividade na avaliação originou muitas críticas à abordagem quantitativa, das quais Alves (2006) ressalta que os testes sumativos não fornecem informação adequada aos professores para tomar decisões, nem informam os alunos das suas falhas; os exames condicionam a seleção e as formas de abordagem dos conteúdos, empobrecendo o currículo (os professores ensinam para os testes e exames); os exames centram as aprendizagens no domínio cognitivo, ignorando os propósitos educativos sociais e afetivos.

Além disso, as transformações sociais rápidas, que se têm vindo a verificar, tornam difícil a identificação exata do que a sociedade vai precisar no futuro. "A incerteza e imprevisibilidade passam a caracterizar os contextos de trabalho e de vida" (Idália Sá-Chaves, 2005, pág. 7). As escolas não poderão ensinar tudo aquilo de que os alunos necessitarão durante a sua vida adulta; contudo, podem garantir a aquisição dos pré-requisitos para a aprendizagem, com sucesso, no futuro. Para Alves (2006), estes pré-requisitos cognitivos e motivacionais incluem, entre outras, a capacidade para organizar, a capacidade para a autorregulação das próprias aprendizagens, a capacidade para ser autónomo nas aprendizagens e a capacidade de aprender com sucesso em grupo. Todos os alunos precisarão certamente de adquirir destrezas em autogestão, autorregulação, aprendizagem contínua, autoavaliação e planeamento do trabalho. Assim, as realidades sociais do milénio colocam novos desafios ao desenvolvimento curricular e à avaliação (Reis, 2005, in Alves, 2006).

A formação matemática escolar pode ter neste âmbito, um papel extremamente relevante na resposta a esta necessidade social que se impõe à escola. Porquê? Por um lado, a Matemática é uma disciplina de base para a arte, ciência e tecnologia (Brown,

2008). De facto, um dos aspetos favoráveis é a variedade de conexões e aplicações que é possível estabelecer com outras áreas do saber: a) com a arte: utilização da simetria, perspetiva, representações espaciais e padrões (incluindo os fractais) para a criação de trabalhos artísticos originais; b) com a biologia: utilização de variações de escalas para identificar fatores limitativos no crescimento de vários organismos; c) com os negócios: otimização de uma rede de comunicação; d) com a indústria: utilização do programa CAD (Computer Aided Desing) para produção de desenhos à escala ou de modelos de objetos tridimensionais (edifícios, por exemplo); e) com a medicina: realização de um modelo de um plano de inoculação para erradicar uma doença infeciosa; f) com a física: utilização de vetores para abordar problemas que envolvam forças; g) com as ciências sociais: utilização de técnicas estatísticas para prever e analisar resultados de eleições (NCTM, 89/91).

Por outro lado, outro aspeto, que associado ao primeiro pode dar um impressionante poder na formação integral do sujeito, é a possibilidade de experienciar, na resolução de problemas da disciplina, formas eficazes de resolver problemas futuros, fora do círculo escolar, nomeadamente através da aprendizagem de autorregulação.

Se afirmamos que a aprendizagem deve continuar ao longo da vida, é então necessário ajudar os alunos a desenvolver estratégias efetivas que lhes permitam saber fazê-lo. É necessário que a prática educativa e avaliativa dos professores contribua para que os alunos aprendam a regular as suas aprendizagens com maior sucesso e eficácia, capazes de aprender de forma motivada e crítica, dentro e fora da escola.

Em resposta a este panorama, surgem métodos alternativos de avaliação. É assim que, apesar das dificuldades, a avaliação formativa vai ganhando terreno, despoletada e impulsionada em parte pela modernização do discurso sobre a escola, por uma consciência crescente de que a avaliação é um processo de comunicação (Pinto & Santos, 2006), e por se crer que a avaliação pode ser um instrumento poderoso ao serviço das aprendizagens dos alunos. Também a legislação mais recente (por exemplo, o Despacho Normativo nº 30/2001) exige uma clara explicitação dos critérios de avaliação e determina que o aluno seja mais interveniente no seu processo de avaliação através da autoavaliação regulada, ou seja, exige uma maior ação dos intervenientes diretos, o que se aproxima das ideias da avaliação formativa.

Para Pinto & Santos (2006), todos os instrumentos têm potencialidades e limitações pelo que nenhum, por si só, é capaz de dar resposta a todas a exigências educacionais.

Daí a recomendação da utilização de modos e instrumentos diversificados que estejam de acordo com a natureza das aprendizagens e dos contextos desenvolvidos. Para além dos relatórios escritos e dos testes em duas fases, o portefólio surge como mais um instrumento alternativo que se pode complementar com outros. Trata-se de mais uma forma de proporcionar coerência entre aquilo que se pretende que se ensine e aprenda; e o que se valoriza e avalia.

Para Alves & Gomes (2007), a utilização de portefólios de aprendizagem e de avaliação no contexto escolar português e, em particular, na disciplina de Matemática, é ainda muito escassa. De facto, para estes autores, conhecem-se poucos estudos ou relatos de experiências que envolvam a aplicação dos portefólios como instrumento de avaliação e de aprendizagem nesta disciplina, quer ao nível do ensino básico, quer ao nível do ensino secundário.

Assim, face às exigências atuais que se impõem à escola e aos seus atores, à dificuldade de implementação eficaz de práticas avaliativas que dêem resposta efetiva a essas exigências, e à escassez de investigação portuguesa na conceptualização, implementação e avaliação do portefólio de aprendizagem em Matemática no ensino secundário, proponho levar a cabo um estudo nesta área.

Estrutura e organização do estudo

Os sistemas educativos, e em particular no que respeita à avaliação, confrontaram-se, e ainda hoje se confrontam com múltiplos desafios. Uma resposta efetiva exige, de facto, práticas e instrumentos de avaliação apropriados. Tal como os relatórios escritos e os testes em duas fases, o portefólio surge como mais um instrumento alternativo "que permite construir de forma mais consciente uma visão holística do aluno" (Pinto & Santos, 2006 p.131). Trata-se de mais uma forma de proporcionar coerência entre aquilo que se pretende que se ensine e aprenda; e o que se valoriza e avalia. E portanto, uma maior coerência entre o currículo prescrito e o currículo aplicado.

Neste domínio, é aqui apresentado e discutido um modelo de avaliação centrado mais no processo do que sobre o produto, focalizado mais sobre aspetos qualitativos do que quantitativos, e que procura explicar como é possível ao aluno desenvolver um conjunto de ações que visam provocar mudanças no comportamento enquanto aprendente.

Teoricamente pretende-se que este comportamento se inicie com o estabelecimento de objetivos que pretende alcançar, que continue com a preparação de um plano, onde as expectativas, as crenças e as cognições têm um papel importante na sua elaboração, que execute as ações planeadas em interação com o meio, onde as motivações se transformam em incentivos que ajudam a manter a persistência e a direção do comportamento e, finalmente, que avalie os resultados e os compare com os pretendidos. Em todas estas fórmulas, que interagem entre si, estão presentes as ideias de tomada de consciência e de reflexibilidade, indispensáveis à reutilização das competências construídas em contextos diferentes dos da aprendizagem escolar.

O objeto do presente estudo é o aluno e o objetivo primordial é saber em que medida o *portefólio reflexivo* pode contribuir para a sua aprendizagem, nomeadamente para a aprendizagem autorregulada. Assim, começarei por fazer um enquadramento teórico sobre "como se aprende", apoiando-me na teoria da atividade, no âmbito da perspetiva de Vygotsky, explorando conceitos como o de *sistema de atividade* e de *zona de desenvolvimento proximal* (ZDP). Além disso, considero que ensinar o aluno a verbalizar o seu pensamento é levá-lo a parar antes de agir, favorecer a concentração na tarefa, estimular o uso de estratégias cognitivas e metacognitivas, incutir a monitorização da realização de cada um dos passos necessários a uma boa execução da atividade em curso e a melhor se avaliar nos sucessos e fracassos. Neste sentido, ainda no primeiro capítulo, abordarei o tema da linguagem como instrumento mediador da aprendizagem que permite à pessoa melhor representar os problemas e melhor agir sobre eles.

Cada vez mais se considera importante estimular e desenvolver no aluno as competências que lhe permitem desempenhar um papel ativo e construtivo nos processos e produtos da aprendizagem, assim, o foco da atenção estará centrado no desenvolvimento das capacidades dos alunos para regular a sua própria aprendizagem. Assim, a segunda parte do primeiro capítulo incidirá sobre o tema da autorregulação. Uma vez que existe uma profusão de formulações sobre o que se entende por autorregulação começaremos por explicitar o sentido que lhe atribuímos. Depois explorar-se-ão as fases, os processos e as componentes sobre as quais este constructo teórico incide.

Depois de, no primeiro capítulo, abordar o tema da aprendizagem em contexto escolar, incidir-se-á, no capítulo seguinte, na aprendizagem da Matemática. Começar-se-á por

observar a evolução da Matemática escolar sob o ponto de vista do ensino e da aprendizagem e, de seguida, centrar-se-á a atenção no conhecimento matemático escolar no ensino secundário. Sendo importante aprender a pensar matematicamente (e sendo um dos objetivos subjacentes à implementação do portefólio) e admitindo que essa aprendizagem tem por base um conjunto de processos mentais fundamentais, torna-se pertinente a sua abordagem teórica. Assim, a segunda parte do segundo capítulo, dará atenção à compreensão dos processos envolvidos na aprendizagem autorregulada da Matemática, que tornam possível ao aluno dirigir a sua própria aprendizagem em função das metas e aspirações pessoais e das exigências do meio. Também se observarão alguns dos principais aspetos envolvidos nos temas transversais ao programa de Matemática A, nomeadamente no que respeita ao raciocínio matemático, à resolução de problemas, à comunicação matemática e às aplicações e modelação matemática.

Da mesma forma, ou seja, do geral para o particular, é analisada a evolução do conceito de avaliação ao longo dos últimos trinta anos, para depois olharmos com mais profundidade para o conceito de avaliação reguladora das aprendizagens e, de seguida, para certas dimensões inerentes à prática desta modalidade.

Na secção *Metodologia de Investigação* são explanadas as opções metodológicas seguidas e as relativas à recolha e análise de dados, com as respetivas justificações. Sendo necessário ter em conta os processos usados pelos alunos na resposta às dificuldades com que se confrontam na concretização desta forma de avaliação que se pretende reguladora e para tornar mais clara e ágil a leitura, procedeu-se a uma listagem processo(s)/autor(es) no capítulo da metodologia.

Seguem-se os três estudos de caso: a Francisca, a Laura e o Francisco. O presente trabalho termina com o capítulo das conclusões do estudo, onde serão também apresentadas algumas sugestões para futuras investigações.

Capítulo II

A Aprendizagem no Contexto Escolar

Uma das condições mais importantes de um estudo não é tanto os instrumentos que se utilizam, mas os quadros conceptuais que o conduzem e permitem a sua interpretação (Pinto & Santos, 2006b). Considerando que a atividade humana está estreitamente ligada aos papéis vividos em sociedade e que o sujeito realiza atividades num processo contínuo de interação com o meio social, neste trabalho considera-se que os aspetos principais da *teoria da atividade* abrem possibilidades de investigação que permitem analisar uma prática educativa realizada com suporte no portefólio. Trata-se de conceptualizar a atividade do aluno num sistema de atividade para que a multiplicidade de relações entre os seus elementos (e.g. alunos, professor, artefatos, regras) possam ser compreendidas de forma sistémica e completa. Assim sendo, a *teoria da atividade*, integrada numa perspetiva vygotskiana é tida como referencial teórico-metodológico para o estudo que se pretende fazer, dando-se início a este capítulo com uma sua abordagem.

Depois, também na linha de Vygotsky, será desenvolvido o tema da autorregulação em termos do sujeito individual procurando, no entanto, não descurar o facto de que, na perspetiva vigotskiana, a progressão evolutiva é um processo interpessoal, social e culturalmente determinado, e que depois se torna interiorizado pelo sujeito como função intrapsicológica (Moll, 1996; Oliveira, 1993; Wertsch, 1985). Esta opção deveu-se ao facto de vários estudos terem evidenciado que os alunos que recorrem a processos de autorregulação conseguem conferir um significado pessoal ao ato de aprender e aprendem melhor, uma vez que, ao serem mentalmente ativos durante a aprendizagem, conseguem exercer um controlo sobre os processos cognitivos, metacognitivos e motivacionais, conducentes à aquisição, organização e transformação da informação (Silva *et al*., 2004).

Note-se que seria pretensioso explanar neste capítulo toda a contribuição de Vygotsky para a educação. O objetivo deste capítulo é mais modesto no sentido de que se apenas se procurará destacar alguns dos aspetos que dela sobressaem de forma a esclarecer a

perspetiva adotada e as interpretações de certos conceitos uma vez que não existem nem definições, nem perspetivas, únicas e bem "delimitadas".

Enquadramento na teoria da atividade

A teoria da atividade, tendo fundamentos na filosofia marxista, surgiu no campo da psicologia com os trabalhos de Vygotsky, Leontiev e Luria. Embora a denominação *teoria da atividade* tenha surgido mais especificamente a partir dos trabalhos de Leontiev, essa denominação acabou por ser adotada por muitos autores ao se referirem a trabalhos de Vygotsky e outros integrantes dessa escola da psicologia. Atualmente, esta teoria apresenta um caráter multidisciplinar, abrangendo diversas áreas, nomeadamente a da educação (Duarte, 2002).

Componentes e estrutura hierárquica da atividade humana

O conceito de atividade humana é um dos elementos nucleares na abordagem da teoria da atividade onde necessidade, objeto e motivo constituem as suas componentes estruturais. Exemplificaremos as relações entre esses elementos numa situação dada por Leontiev (1978): um indivíduo está com fome (necessidade de comer) e pode satisfazer essa necessidade se buscar comida (objecto). Encontra-se motivado para a atividade de buscar comida quando sente a necessidade de comer e quando idealiza um objeto que possa satisfazê-lo. A atividade dominante em crianças e jovens em idade escolar é a aprendizagem escolar, sendo que esta depende do interesse do estudante no que está a ser feito, do motivo que o impulsiona a participar e até mesmo do que ele espera ao passar por esse processo (Libâneo & Freitas, 2006; Pontelo & Moreira, 2008).

Por motivo, Leontiev define como sendo aquilo que se refletindo no cérebro do homem o excita a atuar em direção à satisfação de uma determinada necessidade (Leontiev, 1960 in Duarte & Eidt, 2007). A necessidade (física ou psicológica), por si só, não é capaz de provocar nenhuma atividade de modo definido, mas é o que dirige e regula a atividade concreta do sujeito. Uma necessidade só pode ser satisfeita quando encontra um objeto. O motivo articula uma necessidade ao objeto da atividade (Asbahr, 2005).

As ações do sujeito conduzem não apenas à produção de objetos, mas também à produção e reprodução do sujeito, que vai confirmando determinada prática cultural ou se vai confrontando com ela (Asbahr, 2005; Roth, 2004).

> No decorrer da história da humanidade, os homens construíram infindáveis objetos para satisfazerem as suas necessidades. Ao fazê-lo, produziram não só objetos, mas também novas necessidades e, com isso, novas atividades. Superaram as necessidades biológicas, características do reino animal, e construíram a humanidade, reino das necessidades espirituais, humano-genéricas (Asbahr, 2005, p. 109).

Assim, as necessidades, os motivos e interesses humanos não são dados *a priori* desde a nascença, mas são históricos e sociais, ou seja, são desenvolvidos no sujeito pela sociedade, a partir das condições de vida e da educação. Da mesma forma, os interesses dos alunos não devem ser entendidos como algo natural e imutável. Pelo contrário, eles podem ser modificados e podem ser criadas novas necessidades ao longo do processo de escolarização (Leontiev, 1960 in Duarte e Eidt, 2007). Vygotsky também salienta que se ignorarmos as necessidades da criança e aquilo que efetivanente a incentiva a agir (motivo), nunca seremos capazes de entender o seu avanço de um nível evolutivo para o outro, porque cada avanço está ligado com uma mudança notável nos motivos, inclinações e incentivos (Vygotsky, 1978).

Segundo Leontiev (1981), qualquer atividade acontece através de ações, sendo que cada ação tem o seu objectivo próprio. O agir humano dirige-se sempre para um fim. As ações de uma atividade são estimuladas pelo motivo da mesma, mas estão dirigidas aos seus objetivos próprios. Portanto, toda atividade tem uma necessidade a satisfazer, assim como toda ação tem um objetivo a alcançar.

Cada ação pode ser realizada de diversas maneiras. A essas maneiras é dado o nome de operações (Leontiev, 1981). Assim, para alcançar um determinado objetivo, o sujeito realizará uma ação através de várias operações. Asbahr (2005, p. 110) alega que "a operação é a tecnificação da ação e, em geral, realiza-se automaticamente". Deste modo, além do lado intencional, as ações apresentam o lado operacional, relacionado com a forma como se realizam. Cada ação pode incluir diferentes operações, operações estas que dependem das condições de execução da ação. Assim como as ações estão relacionadas com seus objetivos, as operações estão relacionadas com as condições de realização dessa ação (Asbahr, 2005; Leontiev, 1981; Wertsch, 1985). A figura seguinte (Fig. 1) mostra uma representação da estrutura hierárquica da atividade.

Fig. 1. Representação esquemática da estrutura hierárquica da atividade humana

Neste esquema, a atividade, sendo constituída a partir de um motivo, gera ações, sendo que cada ação seguirá um objetivo próprio. Cada ação será concretizada através de operações, que dependerão das condições de realização da atividade oferecidos pelo ambiente no qual esta está inserida (Wertsch, 1985).

Sistema de atividade

Toda a atividade humana é desenvolvida num sistema de atividade. Para destacar a natureza coletiva e social desta, Engeström (1999), propõe analisar a relação sujeito-objeto com base nos elementos de um sistema de atividade, que a seguir se representam:

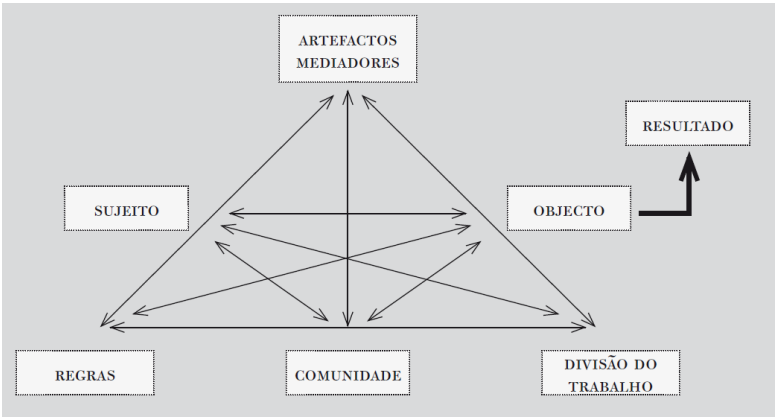


Fig. 2. Esquema representativo de um sistema de atividade (adaptada de Engeström,1999, p. 66)

O *objecto*, seja ele material ou ideal, constitui o elemento em relação ao qual se dirige a atividade humana e que se transforma em resultados (Cole & Engeström, 1993; Fernandes, 2009). A atividade humana tem como característica principal o seu caráter objetal. De facto, Leontiev alega que uma atividade sem objeto é, na verdade, uma

atividade que tem um objeto oculto, sendo necessário à investigação da atividade determinar esse objeto (Leontiev, 1981). O objeto de uma atividade pode aparecer de duas formas: na sua própria existência, independente de qualquer outro elemento, transformando a atividade do sujeito; ou como imagem de objeto, criada pelo sujeito a partir da sua atividade, como reflexão sobre as propriedades do objeto. De facto, o objeto modifica a atividade do ser humano e este cria então uma imagem psíquica desse objeto, que contém as características do objeto notadas pelo sujeito. Este passa então a interagir com o objeto a partir dessa imagem (Pontelo & Moreira, 2008). Por exemplo, um aluno ao construir um gráfico de uma função, executa um processo matemático seguindo certas regras que podem ser postas em linguagem matemática; ao mesmo tempo está provavelmente a gerar uma imagem visual desse gráfico, imagem essa que é o que o vai ajudar a raciocinar sobre essa função.

O *sujeito* é o indivíduo, ou grupo de indivíduos, que agem sobre os objetos, embora não necessariamente de forma direta, como já foi acima exposto. As *regras* referem-se a todo o tipo de normas e convenções, explícitas e implícitas, mais ou menos flexíveis, que, no fundo, condicionam, limitam e regulam todas as ações e interações que ocorrem no interior do sistema de atividade para que o objeto se possa projetar nos resultados (Cole & Engeström, 1993; Fernandes, 2009). As regras são desenvolvidas historicamente para responder às necessidades do ambiente físico e social, e evoluem de acordo com a sua própria dinâmica. Estas regras, que ajudam a organizar a vida social, são interiorizadas individualmente pelos sujeitos e governam o comportamento de cada um em situações específicas (Moll, 1996).

A *comunidade* é o elemento que reúne um número alargado e variado de indivíduos mais ou menos organizados, mais ou menos enquadrados, mais ou menos unidos, que partilham ou estão interessados no mesmo objeto. A *divisão do trabalho* consiste na organização explícita e implícita de uma comunidade, em que as tarefas são distribuídas entre os seus membros, por forma a assegurar que estes compreendem os seus papéis e o seu campo de ação (particularmente nas suas relações com os outros, com os artefatos e com o objeto). A divisão do trabalho é necessária ao processo de transformação do objeto no resultado. Toda a atividade que se desenvolve num sistema de atividade é motivada pelo facto de se pretender projetar o objeto para o resultado, dando assim significado às ações de cada um e de todos os sujeitos. O resultado pode traduzir-se, por exemplo, em novas aprendizagens que, sendo mais ou menos transferíveis, consolidadas

ou permanentes, permitem ao sujeito criar e transformar as realidades (Fernandes, 2009).

Os *artefatos mediadores* podem ser conceptuais (e.g. conceitos científicos), formas simbólicas (e.g. sistemas de numeração), ou materiais (e.g. material de desenho, *polidrons*). São considerados relevantes para as atividades a desenvolver no sentido de transformar o objeto. O indivíduo nunca age diretamente sobre o objeto no sentido de que a relação entre ele e o objeto é sempre mediada por vários artefatos. Note-se que a expressão *artefato mediador* não é empregue no sentido de *algo* que está entre o sujeito e o objeto, mas sim, *algo* no qual ele pensa e que torna o processo de transformação do objeto significativo (Cole & Engeström, 1993).

Vygotsky trabalha com a noção de que a relação do homem com o mundo não é uma relação direta. É sim, fundamentalmente, uma relação mediada. As funções psicológicas superiores apresentam uma estrutura tal que entre o homem e o mundo real existem mediadores, ferramentas auxiliares da atividade humana. Este autor distinguiu dois tipos de elementos mediadores: os instrumentos e os signos. Embora exista uma analogia entre esses dois tipos de mediadores, eles têm diferentes características (Vygotsky, 1978).

O instrumento é um elemento mediador externo ao indivíduo, voltado para fora dele. Tem como função provocar mudanças nos objetos, controlar processos da natureza. O instrumento carrega consigo a função para a qual foi criado e o modo de utilização desenvolvido durante a história do trabalho coletivo. Por exemplo, a batedeira amassa melhor a massa do que a mão humana, a garrafa permite o armazenamento de água. O instrumento é feito ou procurado especialmente para um certo objetivo. Já os signos são orientados para o próprio sujeito, para dentro do indivíduo; dirigem-se ao controlo de ações psicológicas, seja do próprio indivíduo, seja de outras pessoas. Os signos podem ser definidos como elementos que representam ou expressam outros objetos, eventos, situações. Na sua forma mais elementar, o signo é uma marca externa, que auxilia o homem em tarefas que exigem memória ou atenção. Por exemplo, a palavra cadeira é um signo que representa o objeto cadeira; o símbolo 5 é um signo para a quantidade cinco (Vygotsky, 1978). Assim, os signos são ferramentas que auxiliam nos processos psicológicos e não nas ações concretas, como os instrumentos. A invenção e o uso de signos como meios auxiliares para solucionar um dado problema psicológico (lembrar, comparar coisas, relatar, escolher, etc.) é análoga à invenção e uso de instrumentos, só

que no campo psicológico. O signo age como um instrumento da atividade psicológica de maneira análoga ao papel de um instrumento no trabalho (Oliveira, 1993).

Internalização e externalização

Ao longo da evolução da espécie humana e do desenvolvimento de cada indivíduo, ocorrem, entretanto, duas mudanças qualitativas fundamentais no uso de signos (Oliveira, 1993). Por um lado, a utilização de marcas externas vai-se transformar em processos internos de mediação. Esse mecanismo é chamado, por Vygotsky, de processo de internalização. Por outro lado, são desenvolvidos sistemas simbólicos, que organizam os signos em estruturas complexas e articuladas. O sistema simbólico básico de todos os grupos humanos é a linguagem, que exerce um papel fundamental na comunicação entre os indivíduos e no estabelecimento de significados partilhados que permitem interpretações dos objetos, eventos e situações do mundo real (Oliveira, 1993). Tanto o processo de internalização como a utilização de sistemas simbólicos são essenciais para o desenvolvimento dos processos mentais superiores e evidenciam a importância das relações sociais entre os indivíduos na construção dos processos psicológicos.

Como explica Asbahr (2005, p. 110),

> Para Leontiev, tanto as atividades externas, quanto as internas, apresentam a mesma estrutura geral. A atividade interna é constituída a partir da atividade prática sensorial externa, ou seja, a forma primária fundamental da atividade é a forma externa, sensórioprática, não apenas individual, mas fundamentalmente social. A transformação da atividade externa em interna acontece por meio do processo de internalização.

De facto, num sistema de atividade, a fase inicial é fundamentalmente baseada na internalização (Cole & Engeström, 1993). Nesta fase, o pensamento construído pelo sujeito parte da observação, perceção e interpretação, que dependem da experiência passada, de aspetos específicos da sua cultura (Cole & Engeström, 1993; Fernandes, 2009). É como se, ao longo do seu desenvolvimento, o indivíduo, "tomasse posse" das formas de comportamento fornecidas pela cultura, num processo em que as atividades externas e as funções interpessoais transformam-se em atividades internas, intrapsicológicas. Ou seja, primeiro o indivíduo realiza ações externas, que serão

interpretadas pelas pessoas a seu redor, de acordo com os significados culturalmente estabelecidos. A partir dessa interpretação é que será possível para o indivíduo atribuir significados às suas próprias ações e desenvolver processos psicológicos internos que podem ser interpretados por ele próprio a partir dos mecanismos estabelecidos pelo grupo cultural e compreendidos por meio dos códigos partilhados pelos membros desse grupo (Oliveira, 1993).

Ao longo do processo de desenvolvimento, o indivíduo deixa de necessitar de marcas externas e passa a utilizar signos internos, ou seja, representações mentais construídas pelo indivíduo, ao interpretar e descodificar uma dada realidade, e que substituem os objetos do mundo real. Os signos internalizados são, como as marcas exteriores, elementos que representam objetos, eventos, situações (Cole & Engeström, 1993; Oliveira, 1993). Por exemplo, quando pensamos num gato, não temos na mente, obviamente, o próprio gato; trabalhamos com uma ideia, um conceito, uma imagem, uma palavra, enfim, algum tipo de representação, de signo, que substitui o gato real sobre o qual pensamos (Oliveira, 1993).

Esta capacidade de lidar com representações que substituem o próprio real é que permite ao sujeito libertar-se do espaço e do tempo presentes, fazer relações mentais na ausência das próprias coisas, imaginar, fazer planos e ter intenções (Oliveira, 1993). Estas possibilidades de operação mental não constituem uma relação direta com o mundo real fisicamente presente. A relação é mediada pelos signos internalizados que representam os elementos do mundo, libertando o homem da necessidade de interação concreta com os objetos do seu pensamento. As representações mentais da realidade exterior são, na verdade, os principais mediadores a serem considerados na relação do homem com o mundo (Oliveira, 1993).

À medida que as tensões, contradições e rupturas da atividade se tornam mais evidentes e exigentes, a internalização começa a tomar a forma de auto-reflexão crítica e a externalização começa a surgir com inovações pontuais de iniciativa individual, como por exemplo, na procura individual de soluções para um determinado problema. A externalização está ligada ao processo pelo qual as representações mentais se exteriorizam, à comunicação e disseminação de ideias e à construção de argumentação. O processo de externalização atinge o seu auge quando surge e é posto em prática um novo sistema de atividade. Uma vez estabilizado este novo sistema, o processo de internalização das suas formas e meios, volta a ser a forma predominante de

aprendizagem e, posteriormente, de desenvolvimento (Cole & Engeström, 1993; Fernandes, 2009). Em suma, enquanto que através da internalização, as pessoas se limitam a reproduzir a cultura, a externalização permite-lhes criar e transformar as realidades (Fernandes, 2009).

A linguagem

O uso da linguagem como instrumento do pensamento supõe um processo de internalização desta, ou seja, o sujeito, ao falar com outras pessoas, desenvolve também, gradualmente, o chamado "discurso interior", que é uma espécie de diálogo consigo mesmo, uma forma interna de linguagem, dirigida ao próprio indivíduo, voltada para o pensamento, com o objetivo de o auxiliar nas suas operações psicológicas (Oliveira, 1993; Wertsch, 1985). A linguagem, usada no discurso interno, vista como artefato mediador, transforma a estrutura da atividade. Com efeito, o uso da linguagem no discurso interno, tem três consequências principais: primeiro, as operações cognitivas ganham maior flexibilidade, liberdade e independência do campo de estímulos concretos. Por exemplo, com o uso deste discurso, o indivíduo pode incluir na resolução de um problema elementos que não estão imediatamente presentes. Pode também estruturar o seu campo perceptivo e reestruturar as suas perceções nos termos dos seus próprios objetivos e intenções. Segundo, pelo uso deste discurso, as operações e ações do sujeito tornam-se menos impulsivas, ou seja, permitem que o indivíduo aja flexivelmente de acordo com um plano, em vez de responder de forma imediata às propriedades objetivas do estímulo mais próximo. Finalmente, o discurso não permite apenas um controlo do campo do estímulo, mas também um domínio crescente sobre o próprio comportamento do sujeito. Em suma, a linguagem possibilita o fornecimento de instrumentos auxiliares na solução de tarefas difíceis, a superação da ação impulsiva, o planeamento da solução de um problema, antes da sua execução, e o domínio do seu próprio comportamento (Vygotsky, 1978).

Para Vygotsky, a linguagem é um sistema semiótico de representação (Healy & Fernandes, 2004). Para a semiótica, o ato de comunicar é a materialização do pensamento/sentimento em relação aos signos conhecidos pelas partes envolvidas. De

facto, a linguagem coloca em foco o uso de signos, que passam a adquirir significado e sentido (Vygotsky, 1984).

O homem apropria-se dos significados sociais expressos pela linguagem e confere-lhes um sentido próprio, um sentido pessoal vinculado à sua vida concreta, às suas necessidades, motivos e sentimentos. Por exemplo, para o trabalhador, embora o significado social do seu trabalho seja produzir determinados produtos, o sentido de trabalhar é outro – o de obter um salário. Há portanto, uma ruptura entre o significado da ação do trabalhador e o sentido que essa ação tem para ele, ou seja, uma ruptura entre o conteúdo da ação do trabalhador e o motivo pelo qual ele age (Asbahr, 2005; Duarte, 2002, Roth, 2004). Daí ser possível que o sentido adquira total independência em relação ao conteúdo da atividade de trabalho (Duarte, 2002). O mesmo se pode aplicar ao significado matemático produzido pelos alunos, produto de um processo social, situado em atividades/tarefas em que a questão da linguagem é fundamental para o aluno numa situação de aprendizagem (Piteira & Matos, 1999). Por sua vez, o sentido pessoal e motivo também estão intimamente relacionados, pois para que possamos encontrar o sentido devemos descobrir seu motivo correspondente (Asbahr, 2005).

Quando nasce, o sujeito encontra um sistema de significados pronto. Depois, estes passam a ser apropriados pelo sujeito, passando a fazer parte da sua consciência individual. Mas a construção de um significado não pode ocorrer automaticamente. É necessário um processo de ensino que construa conexões entre conceitos quotidianos e conceitos científicos. Vygotsky considerou que os conceitos quotidianos são aqueles que os indivíduos aprendem no seu dia-a-dia a partir das suas experiências pessoais, desenvolvidas sem a necessidade de uma escolarização formal. Os conceitos científicos são os sistematizados e transmitidos de forma intencional e consciente, segundo uma metodologia específica, nomeadamente através da instrução (Moll, 1996). Pela instrução, os conceitos científicos relacionam-se com o dia-a-dia e tornam-se conceitos quotidianos (Moll, 1996). Este processo de ensino envolve um diálogo de instrução, do qual podemos destacar a posição central dos pseudoconceitos (Healy & Fernandes, 2004). Pseudoconceitos, na visão de Vygotsky (1934), situam-se entre os conceitos imaturos e uma forma mais madura de conceitos, e essa posição intermediária cria a possibilidade de diálogo de instrução entre professor e aluno, onde paradoxalmente um desequilíbrio na estrutura cognitiva do aprendiz pode produzir uma mudança conceitual

ou um "mal-entendimento produtivo" (*productive misunderstanding*) (Newman, Griffin & Cole, 1989 in Healy & Fernandes, 2004).

Explorando esse paradoxo que ocorre durante a interação com o professor, o aluno começa a usar palavras de modo parecido ao usado pelo professor, mas, na realidade, o professor entende as palavras de maneira mais geral e abstracta que o aluno, ou seja, o professor fala a "voz matemática" que pode ser gradualmente apropriada pelo aluno (Healy & Fernandes, 2004). Note-se, no entanto, que o facto de o aluno empregar a linguagem correta do seu professor, não significa necessariamente que o aluno tenha desenvolvido completamente um novo conceito, podendo ainda estar a fazer uso de um pseudoconceito (Healy & Fernandes, 2004).

Zona de desenvolvimento proximal (ZDP)

Moll (1996) refere que, para Leontiev, o ponto em que a criança domina os conceitos quotidianos revela o seu nível de desenvolvimento, ao passo que o ponto em que adquire conceitos científicos mostra a zona de desenvolvimento proximal (ZDP). Desta forma, pode-se apontar o papel do pseudoconceito na produção da ZDP, definida por Vygotsky, como

> a distância entre o nível evolutivo real, determinado por meio da resolução independente do problema e o nível evolutivo potencial, determinado através da resolução do problema sob direção adulta ou em colaboração com parceiros mais capazes (1978, p. 86).

É precisamente nesta ZDP que a aprendizagem ocorre.

Vygotsky atribui ao nível de desenvolvimento real, a capacidade de realização de tarefas de forma independente e é caracterizado pelo desenvolvimento de forma retrospetiva, ou seja, que se refere às etapas já alcançadas e consolidadas pelo sujeito. O nível de desenvolvimento potencial é a capacidade de desempenhar tarefas com a ajuda de alguém mais capaz, que lhe pode dar instruções, fornecer pistas ou dar assistência durante a atividade (Vygotsky, 1978). É aqui que entra o trabalho do professor.

O professor terá de ter em atenção a diferença entre o nível das tarefas que podem ser realizadas com o auxílio de outrem e o nível das tarefas que podem ser resolvidas com a atividade independente pois é aí que se define a ZDP do indivíduo (Oliveira, 1993;

Moll, , 1996). O papel do professor é, então, o de favorecer a aprendizagem trabalhando com estimativas das potencialidades do aluno a fim de que estas se tornem em desenvolvimento efetivo, através de mediadores devidamente selecionados e usados num ambiente adequado (Rabello e Passos, s/ data, Moll, 1996).

Meira e Lerman (2001), salienta que uma ZDP não é algo pré-existente no sujeito, nem corresponde um espaço físico que o educador deve encontrar, mas sim um espaço simbólico de interação e comunicação, onde a ZDP pode surgir ou não dependendo da forma como os participantes da situação de aprendizagem interagem e comunicam. A ZDP é, ao mesmo tempo, um resultado (da interação e da comunicação) e uma ferramenta que pode ser usada para elevar o nível potencial dos aprendizes (Healy e Fernandes, 2004).

Segundo Meira (2004), ZDP´s são campos semióticos constituídos na linguagem e no discurso, cujo surgimento depende essencialmente da produção discursiva em contextos dialogais nos quais se podem incluir diálogos propriamente ditos (interação face-a-face) ou discursos "solitários" com sujeitos internalizados ou imaginários. Assim, concebendo a ZDP como um fenómeno emergente e estabelecido dialogalmente, depende dos sujeitos, das suas práticas e das circunstâncias da sua atividade.

Ainda segundo este autor, através da linguagem "o campo experimental do indivíduo é marcado por relações temporais entre o passado, o presente e o futuro" (Meira, 2004, p. 3), ou seja, há uma integração de ações passadas (que podem ser factuais ou construídas imaginariamente, podendo prender-se com a motivação), o campo experimental da ação (presente), e a prospeção da sua direção (que se prende com os objetivos da ação, as realidades projetadas). Nesta perspectiva, o surgimento e manutenção das ZDP's é possível "através da identificação de marcações linguísticas do contexto temporal dos eventos no discurso dos indivíduos em interação" (Meira, 2004, p. 4). Tais marcações são reveladoras de relações entre acontecimentos ocorridos no passado, a realidade atual, e cenários futuros possíveis ou planeados.

Tal como o processo pelo qual o indivíduo internaliza a matéria prima fornecida pela cultura não é um processo de absorção passiva, mas de transformação, de síntese (Oliveira, 1993), também Moll (1996) reforça que, na ideia de Vygotsky, na ZDP, o aluno não é meramente um recipiente passivo dos ensinamentos do professor, mas sim, aluno e professor empenham-se numa atividade conjunta da resolução de problemas, onde ambos partilham o conhecimento e a responsabilidade da tarefa, onde o professor

deve criar um nível de *intersubjetividade* no qual o aluno redefine a situação-problema nos termos da perspetiva do professor. Uma vez partilhados os objetivos e da perspetiva do professor e redefinida a situação-problema, o professor deve gradual e progressivamente transferir a responsabilidade da tarefa para o aluno.

O mesmo discurso, no palco da ZDP, que medeia a interação social é usado como o principal mediador da atividade cognitiva, num processo que se pretende que seja de crescente autorregulação.

Autorregulação

Segundo Demetriou (2000), com as diversas investigações que se têm feito ao longo do tempo, o conceito de autorregulação e os seus termos, processos e relações inerentes são cada vez mais precisos. No entanto, a autorregulação continua ainda a ser um construto de difícil definição teórica, existindo múltiplos sentidos e linhas de investigação (Demetriou 2000; Moll, 1996). Por essa razão, este trabalho não tem a pretensão de fazer uma abordagem exaustiva do tema, mas investigar o suficiente de forma a permitir fazer uma leitura fundamentada e tanto quanto possível esclarecedora dos dados da investigação.

A teoria de Vygotsky sugere que as funções psicológicas mais elevadas tais como a memorização ativa, a memória seletiva, a atenção, a lembrança voluntária, a imaginação, o planeamento, o estabelecimento de relações, ações intencionais, a elaboração conceitual, o raciocínio dedutivo, o pensamento abstrato, entre outros (Joenk, s/ data; Moll, 1996); podem ser distinguidas de processos básicos de quatro maneiras diferentes. Diferentemente dos processos básicos, as funções superiores são: a) sociais ou culturais em vez de originalmente biológicas; b) autorreguladas, em vez de limitadas ao campo de estímulo imediato; c) objeto de uma atenção consciente, em vez de automáticas ou inconscientes; e d) mediadas através do uso de artefatos mediadores (Wertsch, 1985).

Moll (1996), destaca três fatores principais que devem ser tidos em conta no que diz respeito às origens sociais da autorregulação. Primeiro, a atividade cognitiva ou de resolução de problemas do aluno é inicialmente regulada socialmente pelo professor num processo de interação conjunta. Segundo, o papel regulador desempenhado pelo

aluno, quando é bem sucedido, envolve uma redefinição ativa da situação-problema nos termos dos objetivos e da perspetiva do professor, com um aumento gradual da responsabilidade assumida pelo aluno sobre a tarefa executada. Terceiro, o processo de passagem da regulação externa até à autorregulação, da resolução conjunta até à resolução independente, não acontece por acaso ou de forma automática, mas envolve o professor em interações de ensino específicas.

De facto, as funções psicológicas superiores têm origens sociais no sentido de que os processos básicos são substancialmente transformados no contexto da socialização e da educação, nomeadamente por meio do uso da linguagem, de modo a constituírem as funções psicológicas superiores. Na educação, as palavras, os sinais e os gestos daqueles que instruem regulam o comportamento do aluno, por exemplo, no direcionamento da atenção deste para longe das características percetivamente proeminentes, e reorganizando socialmente o campo perceptivo deste de uma maneira culturalmente relevante (Joenk, s/ data; Moll,1996).

Os escritos de Vygotsky sugerem que as capacidades autorreguladoras desenvolvem-se no contexto de interações instrutor-jovem, em especial, quando o adulto se vai retirando gradualmente da atividade em conjunto, para permitir, promover e recompensar a tomada do papel regulador pelo aprendiz. Originalmente, a criança atende a qualquer coisa que se destaque percetivamente do ambiente. Mais tarde, a criança torna-se capaz de reorganizar o campo percetivo de acordo com um plano, um objetivo ou uma tarefa específica, de responder às características específicas de um estímulo, sem levar em consideração a proeminência perceptiva de tais características. Apesar dos trabalhos de Vygotsky se ocuparem principalmente com crianças, processos idênticos de assistência externa na ZDP e na autorregulação podem ser observados na aprendizagem adulta, sendo que estas mudanças que vão dos processos inatos regulados externamente às capacidades autorreguladas podem ser observadas na memória, na atenção e na resolução de problemas (Moll, 1996).

Kopp (1982) salienta a diferença entre autocontrolo e autorregulação como dois níveis qualitativamente distintos de organização comportamental. O comportamento autocontrolado ainda é uma resposta de alguma forma rígida a uma indicação dada, externamente determinada, que está interiorizada e é emitida pelo jovem. Trata-se de uma componente natural da ação, é tácita e espontânea (Santos, 2002, p. 2). Na autorregulação, o plano de ação que guia a atividade do jovem é autoformulado, em vez

de um comando interiorizado. A capacidade de autorregulação é a capacidade do jovem para, interiormente, planear, guiar e monitorar o seu próprio comportamento, adaptando-o, conforme as circunstâncias mutáveis. Ao contrário do comportamento rigidamente organizado, o comportamento autorregulado é guiado e flexivelmente ajustado de acordo com um plano ou objetivo autoformulado (Kopp, 1982). Assim, um ponto central na distinção entre autocontrolo e autorregulação é que nesta o jovem não interiorizou apenas os comandos do adulto, mas tomou efetivamente para si o papel regulador deste.

Fases e processos da autorregulação

Em 1974, Mahoney e Thoresen (in Silva *et al*., 2004) consideravam que na autorregulação atuam três processos básicos: a) a auto-observação e a automonitorização, que servem para estabelecer os objetivos da ação a desenvolver e para avaliar os progressos conseguidos; b) a autorreflexão ou autoavaliação, que estabelecem uma comparação entre os objetivos conseguidos e os idealizados e analisam os processos utilizados e, finalmente; c) a autorreação e o autoreforço, que agem quando nos alegramos ou nos entristecemos com os resultados alcançados.

Autores que se têm dedicado a estudos sobre a aprendizagem autorregulada pelos alunos, distinguem diferentes fases no curso da autorregulação, cada uma apelando a diferentes processos psicológicos e outras variáveis que poderão influenciar o percurso da autorregulação. Para Zimmerman (2000), existem três fases que perfazem um *ciclo de ação* na autorregulação, sendo que os processos nelas envolvidos agem interativamente e de forma continuamente aberta a novos desenvolvimentos, com avanços e recuos, e enriquecidos por experiências anteriores e de acordo com os resultados que se vão alcançando: a) fase de antecipação e preparação; b) fase da execução e controlo; c) fase da autorreflexão e autorreação. Para cada fase no curso da autorregulação, salientamos, incluindo também outros autores que comungam das mesmas fases, os processos psicológicos mais relevantes e outras variáveis que poderão influenciar o percurso da autorregulação.

A fase de antecipação e preparação é influenciada por: a) crenças de auto-eficácia, isto é, crenças sobre as competências pessoais para executar bem a tarefa), b) crenças sobre

os resultados (positivos ou negativos) que pode alcançar, e c) percepções de sucesso. Para além destas crenças motivacionais que determinam o grau de empenho manifestado pelo aluno numa tarefa, existem outras variáveis que influenciam este grau de envolvimento, como por exemplo, a importância e o valor que o aluno atribui à situação de aprendizagem. Todos estes pensamentos e motivações vão ter influência sobre os processos psicológicos que conduzem ao estabelecimento dos objetivos pedagógicos (tais como saber a matéria, evitar ter uma má nota, agradar aos familiares) e à elaboração de um plano estratégico, como por exemplo, determinar métodos de estudo e selecionar estratégias.

Note-se que, como refere Bandura (1986), o sistema pessoal de crenças é um aspeto crucial na adoção de uma ação autorregulada. Se um aluno não acredita que consegue agir de forma a ir ao encontro das suas aspirações pessoais, dificilmente fará alguma coisa para alterar o rumo dos acontecimentos.

Rosário (2002) refere que nesta fase (a que apelida simplesmente de fase de planificação), o aluno analisa a tarefa dentro dos seus recursos pessoais e ambientais, estabelece objetivos face a esta e traça um plano de ação para atingir esses fins. Em suma, o aluno decide o que vai fazer e como o vai fazer na situação proposta.

Durante a segunda fase da autorregulação – fase da execução e controlo, o aluno põe em ação os processos ou estratégias que acompanham a concretização do plano delineado anteriormente. Rosário (2002) refere que nesta fase (a que simplesmente designa de fase de execução), o aluno põe em prática o seu plano, controlando continuamente o curso da ação, fazendo intencionalmnete mudanças, como por exemplo fazendo a substituição de um procedimento por outro, de forma a ser eficaz no alcance dos objetivos a que se propôs.

Um dos processos mais importantes nesta fase é o da automonitorização que aqui é entendido como uma atenção deliberada aos aspetos externos (reações dos outros, condições do meio) e internos (pensamentos, estratégias, sentimentos) que ocorrem durante a ação em curso (Silva *et al*., 2004). A automonitorização implica uma atenção do próprio ao que está a ocorrer no momento presente, a uma tomada de consciência das ações que está a realizar, dos procedimentos que está a adotar, dos progressos que estão a ser obtidos, ao esforço e tempo que estão a ser gastos na aplicação das estratégias selecionadas (Schunk, 1996). Nesta fase, estratégias envolvidas na automonitorização

são, por exemplo, o controlo da atenção, o controlo emocional ou o controlo do ambiente de aprendizagem.

A automonitorização é um processo necessário para implementar as estratégias de forma adequada, para identificar e controlar fatores pessoais e sociais que possam interferir na execução da tarefa e para detetar as diferenças entre o realizado e o idealizado. A ausência ou deficiente uso deste processo pode conduzir o aluno a produzir respostas impulsivas e, consequentemente, dar origem a insucessos (Silva *et al*., 2004).

Note-se que a automonitorização também é influenciada pelos padrões e valores que servem de guias para a apreciação da ação em curso, e por concepções que o aluno tem de si mesmo, que vão desde ele se ver como um agente ativo e empreendedor de mudanças, até ao outro extremo, como agente passivo ou vítima das contingências do meio (Silva *et al*., 2004). Também Grangeat (coord. 1999) afirma que os alunos com baixo aproveitamento escolar não percebem um sentido para a sua atividade e têm tendência a lançarem-se nesta sem recuo, sem antecipação e sem esforço de planificação; gerem-na então ao acaso ou repetindo processos estereotipados, não sabem tomar a distância necessária quer para as tomadas de consciência da atividade, quer para a sua automonitorização. Perante o fracasso desistem muito depressa e ficam muito dependente da ajuda exterior, ou seja, não são autónomos na resolução de um problema e nas suas aprendizagens, ao contrário do que acontece àqueles que têm êxito. Dada a ausência de controlo e a sua gestão ao acaso, esses alunos não atribuem sentido àquilo que fizeram e, por isso, não podem recorrer-se disso para efetuar uma boa integração nas redes da memória a longo prazo, os que as torna pouco ou nada reutilizáveis. Assim, estes alunos não são "autorregulados" nem "transferidores".

Na terceira fase – a de autorreflexão e autorreação sobressaem processos de autoavaliação dos resultados alcançados e da eficácia percebida e que vão influenciar processos de adaptação. Segundo Rosário (2002), nesta fase (que apelida simplesmente de fase de avaliação), a avaliação não se centra apenas na constatação de eventuais discrepâncias, mas também na análise da sua própria ação de forma a identificar as decisões cognitivas inapropriadas ou ineficazes no sentido de as corrigir em posteriors ocasiões.

A autoavaliação é influenciada por variáveis metacognitivas como as concepções sobre o próprio, sobre a tarefa ou sobre as estratégias; variáveis motivacionais como as

expetativas de eficácia e as atribuições causais (internas – inteligência, esforço; externas – sorte, favorecimento), variáveis volitivas como a gestão do tempo e a persistência; e também pelo *feedback* recebido onde pode estar incluído a comparação social com familiares, colegas ou professores (Weiner, 1985). Por sua vez, os processos adaptativos, em consequência da função autoavaliativa, vão permitir que haja um ajustamento dos processos utilizados aos resultados obtidos, ora aceitando-os ou reorientando-os. Podem resultar na manutenção do percurso previamente delineado ou na sua correção, que pressupõe uma reflexão sobre as causas dos sucessos ou dos fracassos; ou pode resultar numa inatividade ou numa rejeição do confronto com a situação problemática, face a resultados indesejáveis, não ocorrendo um empenho na mudança ou na procura de outros caminhos mais eficazes. Estas últimas reações negativas provocam desinvestimento nos processos de autorregulação face a tarefas idênticas e têm a ver com uma forma de proteção pessoal que conduz à desistência, apatia, procrastinação ou ao pessimismo defensivo (Garcia & Pintrich, 1994)

Note-se que a relação entre as diferentes fases da autorregulação acima apresentadas, pode processar-se em diferentes direções. Por exemplo, um reação negativa ou positiva pode não só agir nos processos de observação, obrigando a uma atenção adicional a outros aspetos; como também pode agir nos processos de autoavaliação através da alteração de juízos sobre a ação realizada. Além disso, o exercício destes processos também interage com o sistema pessoal de crenças, o qual influencia o grau com que o próprio se considera capaz de dirigir a sua ação. Quer-se com isto dizer que em qualquer momento do processo, uma alteração pessoal, situacional ou social pode desencadear alterações adaptativas, de forma a que a ação seja reconduzida para os objetivos que se tem em mente (Zimmerman, 2000).

Componentes da autorregulação

Para Zimmerman (2000), a autorregulação na aprendizagem é um constructo multidimencional que engloba as componentes metacognitiva, motivacional e comportamental**,** e se refere ao grau em que os indivíduos atuam sobre os seus próprios processos e produtos de aprendizagem, no conjunto destas dimensões. Portanto, este autor considera que os alunos podem ser descritos como autorregulados, tendo em conta

o grau em que são metacognitivo, motivacional e comportamentalmente ativos nos seus próprios processos de aprendizagem. Por esta razão se dará enfoque a essas três componentes da auto-regulação.

Componente metacognitiva

O conceito de metacognição surgiu nos Estados Unidos no início dos anos sessenta, em trabalhos sobre a memória, mas investigações ulteriores mostraram o papel essencial que a metacognição desempenha no contexto escolar (Grangeat coord., 1999). Na área da educação, a investigação sobre as intervenções metacognitivas, apela a duas vertentes da atividade metacognitiva. Por um lado, o conhecimento sobre o conhecimento, o qual tem por alvo o estímulo e o desenvolvimento dos processos que proporcionam aos alunos perceber o que sabem, como sabem e a que produtos conseguem chegar, relacionando objetivos, meios e resultados já atingidos. Por outro lado, a monitorização da ação cognitiva, que encoraja os alunos a observar, testar e avaliar os processos e fins atingidos, mantendo os procedimentos que tornam mais eficaz a realização das tarefas e eliminando ou alterando os que dificultam o seu êxito (Silva *et al*. 2004).

Também Yussen (1985), refere que os conhecimentos metacognitivos incidem sobre, por um lado, "produtos cognitivos" como, por exemplo, saber se eu possuo ou não conhecimentos sobre as razões trignométricas e, de uma forma geral, saber aquilo que eu sei; por outro lado, sobre "processos cognitivos", ou seja, saber como funcionam o pensamento e as funções mentais como a memória, o raciocínio, a atenção, a compreensão, etc., na resolução de um problema; ou seja ter estratégias para atenuar o fracasso, reduzir a má memória, permanecer atento, compreender aquilo que é lido, etc.

Numa frase podemos definir metacognição como sendo o conhecimento que alguém tem sobre a sua própria cognição e também o controlo e monitorização desta (Flavell, 1979), ou por outras palavras, a consciência e monitorização dos processos e produtos cognitivos empreendida pelos indivíduos; "um olhar crítico consciente sobre o que se faz, enquanto se faz" (Santos, 2002, p. 2). Exemplos de ações metacognitivas são a reflexão pessoal sobre as exigências da tarefa e sobre as competências e estratégias pessoais que devem ser usadas na resolução de uma situação problemática; a

planificação de ações, a utilização integrada de diferentes estrátégias, a testagem de resultados obtidos, a revisão do trabalho já realizado (Flavell, 1979).

Estão bem presentes em todas estas considerações as ideias de tomada de consciência e de reflexibilidade que fazem do indivíduo um espectador atento às suas próprias formas de pensamento e aos seus procedimentos na resolução de problemas para melhor os dominar e controlar (Grangeat coord., 1999). De facto, a metacognição inclui a tomada de consciência e o conhecimento dos processos cognitivos usados pelo próprio e pelos outros e parece ser uma componente crucial para o exercício da aprendizagem autorregulada (Flavell, 1979). A tomada de consciência é indispensável à reutilização das competências construídas em contextos diferentes dos da aprendizagem, ou seja, à sua transferência (Grangeat coord., 1999). Um aluno, ao desenvolver o seu conhecimento metacognitivo, vai construindo representações mentais internas de si próprio e dos outros, vai-se dando conta dos seus pontos fortes, fracos e das estratégias que lhe são mais favoráveis, vai delineando objetivos e antecipando resultados que determinada ação o pode levar, vai perceber melhor as razões que o leva a selecionar as estratégias, vai acreditar que o seu sucesso escolar está dependente do seu esforço pessoal, vai exercer um controlo mais esclarecido sobre as ações que realiza de forma a ser mais eficaz e, portanto, mais bem sucedido (Flavell, 1979).

Trabalhos sobre a metacognição dão conta da capacidade que ela desenvolve para facilitar o domínio e a transferência dos conhecimentos e do papel que ela tem no sucesso escolar. De facto, vários estudos comparativos entre crianças com êxito e crianças em situação de fracasso escolar, constataram que a ineficácia do esforço das crianças sem êxito escolar se devia a uma deficiência de tipo mais metacognitivo que cognitivo. Por exemplo, apesar de terem conhecimentos e competências, não sabem utilizá-las nem transferi-las. Os alunos em situação de fracasso não sabem pôr em ação os processos de controlo por meio dos quais o indivíduo guia a sua própria atividade em direção ao seu fim, de forma autónoma, o que precisamente caracteriza os alunos com sucesso escolar que são simultaneamente autónomos e "transferidores" (Grangeat coord., 1999).

Flavell (1985 in Grangeat coord., 1999), diferencia os conhecimentos metacognitivos em quarto categorias, consoante os objetos sobre os quais eles incidem. Uma das categorias incide sobre as pessoas e o próprio indivíduo, que corresponde às representações que o sujeito pode ter sobre: a) o pensamento humano (ex. saber que a

memória a curto prazo é limitada, que para aprender não basta ler, que a atenção é indispensável,…), b) sobre os outros aprendentes com os quais se compara (ex. a Sofia aprende melhor Matemática do que eu), c) sobre si próprio, enquanto aprendente (ex. saber que tenho necessidade de escrever para aprender, aprendo melhor de manhã do que à noite, que tenho tendência a dar determinados erros de ortografia – de uma forma geral, conhecer os seus pontos fortes e fracos, de modo a utilizá-los de forma estratégica). É esta perceção de si que é muito importante na construção do *autoconceito* enquanto aluno e essencial à motivação deste na gestão das suas tarefas e na aprendizagem.

Outra categoria incide sobre as tarefas. Por exemplo, saber que um texto de problemas de Matemática não se lê da mesma maneira que um texto narrativo. São conhecimentos metacognitivos que se adquirem ao longo de várias experiências cognitivas e com a comparação que se vai fazendo entre elas. Uma terceira categoria incide sobre as estratégias, ou seja, sobre as maneiras mais eficazes de conduzir uma atividade a bom termo e sobre os métodos de trabalho. Por exemplo, saber como ler mais depressa um texto ou fazer um resumo, saber como dar menos erros de cálculo, saber como aprender uma lição. Tratam-se de conhecimentos metacognitivos particularmente importantes para a autonomia. Finalmente, a quarta categoria incide sobre a interação entre estes três objetos (pessoa(s), tarefas e estratégias).

Note-se que para Grangeat coord. (1999), estes conhecimentos metacognitivos, indispensáveis à realização de um processo de resolução de problemas devem ser compreendidos mais como intuições que o indivíduo possui sobre ele próprio, sobre os seus saberes, competências, estratégias e tarefas, do que como verdadeiros conhecimentos ensinados e avaliados no momento das atividades de aprendizagem.

Em síntese, em termos metacognitivos, podemos dizer que para um aluno ser bem sucedido na aprendizagem é necessário que esteja: a) consciente dos seus recursos e dos seus limites cognitivos, dos seus interesses, da sua motivação (conhecimentos sobre a pessoa); b) consciente das exigências da tarefa (conhecimentos sobre a atividade); c) consciente das estratégias úteis para resolver um problema ou para dar resposta a uma atividade (conhecimento sobre as estratégias) (Flavell, 1979). Mas para além desta componente da metacognição que diz respeito ao conhecimento do aluno sobre os seus próprios recursos cognitivos e sobre a compatibilidade existente entre recursos e a situação de aprendizagem em que se encontra, é necessário equacionar a componente

que incide sobre a aptidão de utilizar processos de autorregulação, nos quais Brown (1980) destaca quatro aspetos diferentes de gestão: a) saber quando se aprende e quando não se aprende; b) saber o que se aprende e o que não se aprende; c) saber o que é preciso para aprender e, d) saber que se pode fazer alguma coisa quando não se aprendeu.

Componente motivacional

A motivação detém um papel importante na aprendizagem autorregulada. De facto, a ação para ser autorregulada exige a definição de um objetivo a atingir: tem de haver um motivo que a incite e a sustenha e que prolongue o esforço até se atingir o resultado desejado. As crenças que influenciam a motivação de um aluno para aprender, construídas ao longo da escolarização, são sobre as suas próprias competências, sobre as suas expetativas, sobre as atribuições do seu sucesso ou fracasso, sobre o valor que tem para si a aprendizagem e a escola, entre outros. Os sentimentos positivos ou negativos que resultam dos seus processos de autoavaliação também têm influência na sua motivação para aprender (Silva *et al*., 2004).

Garcia & Pintrich (1994) identificaram quatro tipos de estratégias motivacionais, utilizadas pelos alunos, pouco adequadas a uma autorregulação, ativa e bem sucedida da motivação, mas que procuram proteger a imagem positiva que o aluno tem de si próprio. A saber: estratégias de autodesvantagem (*self-handicapping*) em que o aluno cria obstáculos comportamentais, afetivos ou sociais à realização atempada da tarefa; estratégias de pessimismo defensivo em que o aluno ao antecipar maus resultados, despende um grande esforço na realização da tarefa; estratégias de auto-afirmação em que, face a uma situação de insucesso, o aluno procura valorizar-se a si mesmo noutros domínios em que se sinta mais competente (como ser bom a Português, mas não ser a Matemática); finalmente estratégias atribucionais, relativas ao fracasso escolar, que levam o aluno a atribuir as causas do seu insucesso a incapacidades pessoais sobre as quais não considera ser responsável (como esquecer facilmente as coisas, ser muito nervoso, não ter jeito para o desenho).

Silva *et al*. (2004) sublinha que para um aluno estar motivado intrinsecamente para aprender é necessário não ter medo de falhar, atribuir um significado pessoal e relevante

ao assunto que está a estudar e que a escola respeite as suas necessidades de autonomia e de competência. A nível motivacional, o aluno deve ser envolvido numa disputa sobre crenças de forma a que seja incitado a adotar aquelas que influenciam a assunção de uma atitude ativa e positiva face à aprendizagem. É necessário ajudar o aluno a compreender as razões que o move nos seus esforços para aprender ou as razões pelas quais não é capaz de atribuir interesse e valor às aprendizagem que deveria estar a ocorrer, de forma a que a situação mude e seja capaz de conceder um significado pessoal positivo aos esforços inerentes ao ato de aprender.

Componente comportamental

Como não importa apenas saber o que fazer e como fazer, é preciso executar as tarefas, estabelecer os procedimentos apropriados e corrigir os que não produzem os resultados esperados, às duas dimensões já referidas, junta-se a dimensão comportamental na autorregulação. A autorregulação de uma ação exige que o aluno experimente os procedimentos disponíveis, selecione os mais eficazes, conjugue recursos pessoais, materiais e sociais na execução do plano que estabeleceu, e ainda desenvolva alterações ou correções quando os resultados não forem os desejados. Sabe-se, no entanto, que muitas vezes não é fácil alterar o próprio comportamento, mesmo que isso tenha consequências consideradas negativas para o próprio. Ao nível comportamental, os alunos devem ser ensinados a controlar o seu tempo de estudo, a organizar o seu meio ambiente de forma a que este favoreça uma melhor concentração e aproveitamento; a tirar melhor proveito dos materiais de estudo e de outros recursos internos ou externos à escola, a pedir ajuda aos colegas, professores ou pais, conforme as circunstâncias (Silva *et al*.,2004).

Numerosas experiências evidenciam que estes comportamentos podem ser modificados através de treinos de competência metacognitivos de gestão consciente de tarefas (Grangeat coord., 1999). De facto, uma das tarefas fundamentais da escola, mais que a transmissão de conhecimentos e informações, é dotar os alunos de estratégias autorreguladoras que lhes permitam contrastar, transformar e reconstruir criticamente os conhecimentos que vão adquirindo.

Importa salientar a diferença entre estratégias autorreguladoras e técnicas de estudo. As técnicas de estudo podem ser utilizadas de forma mais ou menos mecânica sem que, para a sua aplicação, exista um objetivo de aprendizagem por parte de quem as utiliza. Já uma estratégia de aprendizagem é sempre consciente e intencional, dirigida para um objetivo relacionado com a aprendizagem. Através das estratégias, o aluno pode processar, organizar, reter e recuperar conteúdos informativos e processos, cada vez que planifica, regula e avalia esses mesmos processos em função dos seus objetivos (Silva *et al*., 2004).

Tratam-se pois de estratégias para as quais muito contribui a tomada de consciência e a reflexão, por parte de cada um, dos seus próprios processos mentais. De facto, a utilização de estratégias autorreguladoras exige um sistema de autorregulação que se alicerça na reflexão consciente que o aluno faz ao explicar o significado e a possível resolução dos problemas numa espécie de diálogo consigo mesmo. Assim, quando um aluno emprega uma estratégia está sempre consciente dos seus propósitos e, quando se desvia deles, é capaz de reorientar e regular a sua ação (Zimmerman, 2000).

Síntese do capítulo

Não é demais sublinhar que uma das grandes prioridades da escola deve ser, sem dúvida, a de promover a competência dos alunos em gerir os seus processos de aprendizagem, adotar uma autonomia crescente no seu percurso escolar e dispor de ferramentas intelectuais e sociais que lhes permitam uma aprendizagem contínua ao longo de toda a sua vida.

A principal atividade de um estudante é a aprendizagem que é aqui vista como uma unidade de análise num sistema de atividade, que inclui, naturalmente, o sujeito que procura projetar o objeto para um resultado (que, por exemplo, podem ser novas aprendizagens), recorrendo-se de artefatos mediadores, sob a alçada de regras e divisões do trabalho estabelecidas social e culturalmente. Neste sistema, os motivos articulam necessidades a objetos da atividade, em cuja ação, direcionada para um objeto, é concretizada através de operações que estão subjugadas às condições do meio.

O segundo aspeto relevante na construção da teoria da atividade é a relação entre o desenvolvimento da atividade e o desenvolvimento da consciência humana. Esta

influência mútua é explanada pelo conceito de internalização, onde a complexidade da atividade humana passa do plano interpsíquico para o plano intrapsíquico, e o conceito de externalização, pelo qual o sujeito modifica o mundo. Nos processos de internalização e externalização, a mediação da linguagem é fundamental. As palavras, que dão significado e sentido aos signos, permitem a introdução dos conceitos científicos na esfera individual do aluno. No estabelecimento de um conceito científico há lugar à formação de pseudo-conceitos, que devem ser trabalhados numa ZDP até se tornarem científicos.

Vygotsky apontou que a principal característica da instrução é que ela cria a ZDP, estimulando uma série de processos de desenvolvimento intelectual, os quais seriam de forma alguma possível sem a instrução. O trabalho na ZDP deve ser realizado de forma a que haja lugar a uma crescente autorregulação por parte do aluno para que tais conceitos possam ser efetivamente aprendidos e "transferíveis". Há pois que olhar para a autorregulação na aprendizagem de forma mais atenta e pormenorizada já que os seus processos subjacentes mesmo que pareçam simples, estão longe de serem automáticos e só passam a ser íntimos do aluno depois de uma atenção específica e persistente (Mason, Burton & Stacey, 1982). Enquanto o aluno não tomar consciência dos processos de pensamento matemático, os examinar e discutir, a sua aplicação, se surgir, será impensada e ocasional (Burton, 1984).

Distinguimos fases e processos básicos na autorregulação, dando especial relevo ao processo de automonitorização, e explorámos as suas componentes metacognitiva, motivacional e comportamental.

Capítulo III

A Aprendizagem da Matemática

Temos décadas de história que questionam o ensino da Matemática e consequentemente as orientações curriculares. Todas as épocas foram marcadas por objetivos diferentes de aprendizagem, em consonância com as finalidades da educação existentes na altura. Assim sendo, de seguida apresentam-se as principais tendências curriculares que, desde os finais dos anos cinquenta do século XX até à data, tiveram influência na matemática escolar. Termino analisando as suas implicações no ensino secundário da Matemática em Portugal.

Evolução da Matemática escolar sob o ponto de vista do ensino e da aprendizagem

Por razões de natureza social, cultural, formativa e política, a Matemática sempre foi reconhecida como uma disciplina de grande importância (Guimarães, 2003; Silva *et al*., 1999). De facto, entre outros aspetos, sempre foi uma disciplina necessária em muitas atividades profissionais; ajuda a desenvolver valores estéticos; faz parte do património cultural da sociedade, sendo obrigatória a sua transmissão às novas gerações; e também nos "ensina a raciocinar", tornando-nos mais aptos, por exemplo, a pensar de forma abstrata (Ponte *et al*., 1997).

Desde meados do século passado que se experiênciam mudanças profundas e cada vez mais céleres na sociedade, que passou de uma disposição industrial para uma era cada vez mais informatizada (NCTM, 1989/91). A evolução tecnológica e as crescentes aplicações da matemática a diferentes áreas, têm implicações na Matemática a ser transmitida aos alunos, com o intuito destes se tornarem cidadãos produtivos e realizados (NCTM, 1989/91). Assim, os desafios impostos à escola por uma sociedade em constante mutação têm inevitavelmente repercussões nos currículos de Matemática, que se vão adaptando para dar resposta às novas exigências:

> Um currículo pode vigorar durante mais ao menos tempo, conforme se revele mais ao menos adequado às suas funções e ao jogo das forças políticas e sociais a que se encontra submetido. Com a transformação acelerada da sociedade, característica deste final de século XX, é natural que os currículos passem a ter uma vida útil cada vez menor. (Ponte *et al*., 1997, p. 45)

Desde o início do século passado até aos anos cinquenta, os currículos de Matemática eram relativamente estáveis, cingindo-se à memorização de factos e procedimentos em detrimento da compreensão dos conceitos e técnicas de aplicação (Schoenfeld, 1996). A evolução das condições sócio-económicas e da tecnologia, no período que se seguiu à segunda guerra mundial e aquando do lançamento, pelos russos, do primeiro satélite artificial *Sputnik*, teve uma influência decisiva na mudança que ocorreu no ensino da Matemática nos finais dos anos 50 (Ponte *et al*., 1997). Em diversos países surgiu o movimento da *Matemática Moderna* também designada por Nova Matemática. (APM, 1988), com alterações não só nos conteúdos a lecionar, mas também nos métodos de ensino a usar. Tratava-se de uma Matemática de abstração e estudo das estruturas unificadoras, com relevo no "ensino por descoberta" (Ponte *et al*., 1997).

Quando o ensino mecanicista da Matemática começou a ser substituído pela perspectiva estruturalista da *Matemática Moderna*, a situação da Matemática escolar era de crise. A falta de motivação dos alunos, o baixo rendimento escolar, mesmo em técnicas matemáticas elementares e a falta de preparação que este ensino da Matemática proporcionava para estudos superiores eram fatores referidos em vários documentos da época (APM, 1988). No entanto, o movimento curricular da *Matemática Moderna* não produziu os efeitos desejados, muito pelo contrário. Verificou-se que os alunos não estavam a aprender as abstrações, e até as capacidades básicas da aritmética e da álgebra se tinham perdido (APM, 1988; Guimarães, 2003; Schoenfeld, 1996; Ponte *et al*., 1997). Segundo Ponte (1992), embora no período da *Matemática Moderna*, a Matemática escolar se tenha tentado aproximar das características da matemática como ciência, o facto de a atenção ter sido dirigida para a introdução de estruturas de natureza algébrica, apenas permitiu o tratamento de situações abstractas e académicas, não favorecendo o desenvolvimento de processos de pensamento mais complexos.

As reações contra a *nova* Matemática escolar fizeram-se sentir no início dos anos setenta, primeiro nos Estados Unidos e Inglaterra, depois em França e noutros países. Surgiram, então diversos movimentos, sendo um deles conhecido por *back to* basics, com pouca expressão em Portugal, com recomendações expressas no sentido do reforço dos exercícios de cálculo e prática sobre o básico, na rota do papel-e-lápis e do algoritmo (APM, 1988; Ponte *et al*., 1997). No entanto, os resultados ainda foram piores dos que aqueles que se tinham obtido com a *Matemática Moderna* (Schoenfeld, 1996). Schoenfeld (1992) alega que, no início da década de 80, os estudos realizados evidenciaram que cerca de metade dos estudantes inquiridos concordavam que aprender Matemática era sobretudo memorizar; três quartos dos alunos alegaram que fazer matemática exigia muita prática em seguir regras, e nove em cada dez alunos consideraram que há sempre uma regra a seguir na resolução de problemas de matemática.

A Associação de Professores de Matemática afirma que o fracasso observado tanto na *Matemática Moderna*, como na perspectiva mecanicista tiveram, na sua génese, a ideia comum de que a aprendizagem se desenvolvia por *transmissão* e *absorção* (APM, 1988). Além disso, não tiveram devidamente em conta as situações naturalmente decorrentes da explosão escolar, da democratização do ensino, da necessidade de estabelecer uma *Matemática para todos* (APM, 1988). No mesmo sentido, Schoenfeld (1992) salienta que a aprendizagem da Matemática na escola envolve, simultaneamente, fenómenos cognitivos e culturais. De facto, a aprendizagem da Matemática é inerentemente social e não apenas um processo cognitivo e de absorção. Nas aulas, a aprendizagem matemática dos alunos é amplamente cultural e estende-se muito para além do alcance dos factos e procedimentos matemáticos (o currículo explícito) que os alunos estudam (Schoenfeld, 1992). Além disso, o mesmo autor acrescenta que a componente cultural na aprendizagem matemática não se desenvolve simplesmente porque o professor domina procedimentos matemáticos formais, mas sim porque vive numa cultura em que estes valores estão refletidos nas práticas diárias. De facto, as concepções do professor sobre a matemática determinam o modo como ele decide abordar um problema, as técnicas que usa ou evita, o tempo e o esforço que dedica ao problema, etc. A prática letiva encarada e analisada sob a perspetiva do seu modelo - centrado no professor e nas suas cognições – crenças, conhecimentos, objetivos; permite

obter um maior entendimento sobre o que ocorreu no processo de ensino e aprendizagem.

Nesta conjuntura, os anos oitenta assistiram novamente a um intenso movimento de reforma do ensino da Matemática, assinalado pelo surgimento de diversas publicações, das quais destacamos duas. Uma, originalmente publicada em 1980, é a *Agenda for action* elaborada e publicada por um organismo dos E.U.A – The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM); a outra é o relatório *Mathematics counts*, elaborado por uma comissão designada por Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools, criada por iniciativa do Ministério de Educação inglês, coordenado por W. H. Cockcroft e publicada em 1982.

Na *Agenda para a Acção* (NCTM, 1980) são inseridos, nos objetivos programáticos, a capacidade de resolução de problemas e os seus processos subjacentes como o foco da matemática escolar. Com efeito, neste documento pode ler-se que "a definição e a linguagem de resolução de problemas devem ser desenvolvidas e expandidas de modo a incluírem uma vasta gama de estratégias, processos e modos de apresentação que incluam todo o potencial das aplicações da Matemática" (p. 7), que "os professores de Matemática devem criar ambiente na sala de aula no qual possa florescer a resolução de problemas" (p. 7) e ainda que "os investigadores e instituições financiadoras devem dar prioridade às investigações sobre a natureza da resolução de problemas e as formas eficazes de formar solucionadores de problemas" (p. 9). A resolução de problemas surgiu então como o centro do ensino da Matemática, associada à aprendizagem de estratégias e ao desenvolvimento de atitudes. No entanto, não há uma clarificação adequada do que é resolver problemas, nem o porquê da necessidade de os resolver, embora seja assumida, no documento, a crença de que a resolução de problemas, nas aulas de Matemática, está diretamente relacionado com a resolução de problemas noutras áreas da vida do estudante (Stanic & Kilpatrick, 1989).

Também no relatório *Mathematics counts* (Cockcroft, 1982) é dada grande importância à resolução dos problemas, nomeadamente a problemas da vida real. Além da resolução de problemas, as atividades de investigação são igualmente apontadas como um elemento essencial da matemática escolar. Neste documento já se pode observar que é conferida importância às interações de alunos entre si e com o professor e podemos encontrar esboços da componente reguladora da avaliação, no sentido de se ir mais além do que a mera sinalização do erro (Cockcroft, 1982). Posteriormente, surgiram muitos

outros documentos, relatórios, conferências e projetos nos quais a resolução de problemas ocupa, invariavelmente, um lugar de destaque.

Só no final da década de oitenta do século XX é que estes movimentos reformadores se fizeram sentir em Portugal. A nível nacional, em 1986, com a última grande reforma educativa em Portugal, é publicada a Lei de Bases do Sistema Educativo (Lei nº 46/86). Neste documento, já se podia ler, no artigo 9º da subsecção II, que um dos objetivos para o ensino secundário é o desenvolvimento do raciocínio, de atitudes de reflexão metódica, a par da formação para a sensibilização e resolução de problemas com que os alunos se venham a deparar na vida adulta. Também a escolaridade obrigatória passou a ser alargada até aos nove anos de escolaridade e, portanto, a abranger um público mais alargado de jovens.

> O ensino secundário tem por objetivos: a) Assegurar o desenvolvimento do raciocínio, da reflexão e da curiosidade científica e o aprofundamento dos elementos fundamentais de uma cultura humanística, artística, científica e técnica que constituam suporte cognitivo e metodológico apropriado para o eventual prosseguimento de estudos e para a inserção na vida ativa (...) favorecer o desenvolvimento de atitudes de reflexão metódica" (Lei nº 46/86, Lei de Bases do Sistema Educativo)

Em consequência do alargamento da escolaridade obrigatória – que já tinha passado de quatro para seis, e que agora passava para nove, associada ao aumento da procura da escolarização (Sebastião & Correia, 2007), há a necessidade de promover uma formação matemática para todos, democratizando o ensino (APM, 1988). Desta forma, esta nova lei implicou uma renovação dos Currículos e dos Programas do Ensino Básico. Este processo de renovação já tinha sido iniciado pela comunidade educativa que tinha ideias, teorias, iniciativas e experiências, não existindo, no entanto, uma comunicação frutífera e uma articulação proveitosa destas iniciativas individuais ou em pequeno grupo. Foi nesta conjuntura que o seminário de Milfontes viria a constituir um espaço de reflexão, partilha e busca de caminhos que dessem outro sentido e consistência à prática do ensino da Matemática que se sentia estar a passar uma crise profunda.

Deste seminário resulta a *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988), livro em que também se propõe que a resolução de problemas esteja no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática, em todos os níveis escolares, e que, dentro deste

"chapéu" as aplicações e explorações matemáticas tenham um lugar relevante no sentido de proporcionar a todos os alunos experiências frequentes com situações variadas que envolvam processos e atividades como interpretar, organizar e representar dados, analisar, construir e criticar modelos matemáticos, planear, executar e avaliar projetos (incluir uma citação). São apontados como exemplos de instrumentos de avaliação, testes de "ensaio" total ou parcialmente com consulta e sem tempo limitado, relatórios escritos e discussões orais individuais ou em grupo (APM, 1988).

Os anos oitenta foram testemunha do princípio de uma mudança notória no modo de conceber o ensino e a aprendizagem da Matemática relacionada com quatro tendências centrais: a) a natureza das capacidades matemáticas que passaram a ir para além do cálculo e da memorização. Passam a merecer especial atenção o desenvolvimento de capacidades como a comunicação, o espírito crítico, a modelação, a capacidade de analisar dados e situações complexas, de realizar demonstrações, de planear, gerir e avaliar o seu próprio trabalho, através da resolução de problemas e investigações; b) o impacto das novas tecnologias que desencadeiam mudanças na Matemática escolar e nas capacidades e saberes a que se passou a dar maior importância; c) a evolução da própria Matemática, com a emergência de novos domínios, tais como a Matemática discreta, as Probabilidades e as ciências da computação; d) o aprofundamento da investigação sobre o processo de aprendizagem (Ponte *et al*., 1997).

Esta perspetiva da prática do ensino da Matemática implica necessariamente uma reorganização do ensino e da aprendizagem. Por exemplo, a linguagem matemática deixaria de ser um fim em si mesma e passaria a ser um meio de expressão de ideias e de raciocínios matemáticos. Os alunos passariam a ter de explorar, investigar e analisar situações, expor entre si e com o professor as várias estratégias, redigir resultados, generalizar, defender conclusões. E depois, procurar saber se as descobertas se podem aplicar a outros casos, numa perspetiva de generalização, encontrar modos de alargar enunciados ou reformular o problema, etc.

Um ano após o seminário de Milfontes, é publicado, nos Estados Unidos da América e traduzido em Portugal em 1991, a versão final do influente documento *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 89/91)**.** Este documento contém um conjunto de normas para o currículo de Matemática e para a avaliação da qualidade, tanto do próprio currículo, como da aprendizagem dos alunos. Um dos

aspetos subjacentes às Normas de 1989/91, é que *saber matemática é fazer matemática*, na medida em que se deve privilegiar o *fazer* em detrimento (mas não eliminação) do *saber que*. A intenção dos objetivos que constam neste documento é a de que os alunos desenvolvam o seu *poder matemático*, isto é, desenvolvam capacidades para "explorar, conjeturar e raciocinar logicamente, bem como a sua aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros" (NCTM, 1989/91, p. 6). Trata-se de uma mudança orientada para a compreensão dos conceitos e das técnicas; para o recurso a aptidões e conceitos matemáticos na resolução de problemas; para a comunicação de estratégias e de raciocínios; e para a confiança na utilização da matemática para dar sentido a situações reais. Na prática, estes objectivos implicam que os alunos devem participar em numerosas e variadas experiências relacionadas entre si; ser encorajados a explorar, a fazer tentativas, a cometer erros e a corrigi-los de modo a ganharem confiança na sua capacidade de resolver problemas complexos; ler, escrever e discutir matemática; conjeturar, testar e construir argumentos sobre a validade da conjetura; de tal modo que se tornem lugares comuns na vida dos alunos (NCTM, 1989/91).

Estas ideias influenciaram de forma expressiva os programas portugueses da década de noventa, que apresentaram uma evolução significativa em relação aos programas anteriores, ainda fortemente influenciados pela *Matemática Moderna* (Semana, 2008). De facto, em 1991, pela primeira vez os programas de todos os ciclos de ensino (incluindo o ensino secundário) apontam como objectivos principais a atingir, capacidades e aptidões, atitudes e valores, para além da aquisição de conhecimentos (Ministério da Educação, 1991a, 1991b, 1991c). Além disso, há uma revalorização da Geometria e das Probabilidades e Estatística e uma desformalização da abordagem dos conceitos, a "ligação ao mundo real" ganha importância, são recomendadas metodologias como o trabalho de grupo, o uso de calculadoras, computadores e o recurso à História da Matemática (Santos *et al*., 2000).

Entretanto, ainda em 1991, são publicadas as *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática* (NCTM, 1991/94) e traduzidas para português quatro anos depois. Estas normas surgiram dado o reconhecimento da importância do papel do professor em todo o processo de ensino e aprendizagem da Matemática:

> O professor acabou por emergir como a figura-chave do processo de implementação das necessárias mudanças (…) Durante muito tempo

> ele foi sistematicamente colocado em segundo plano (…) Reconhece-se que o professor tem de ter um papel essencial em todos os processos de mudança curricular, não só para os interpretar correctamente mas também para lhes validar o respetivo conteúdo. (NCTM, 1991/94, p. v)

Estas *Normas* apontam objetivos gerais para todos os níveis de ensino e para todos os alunos. Pretende-se que os alunos: (1) aprendam a dar valor à Matemática, (2) adquiram confiança nas suas próprias capacidades de fazer Matemática, (3) se tornem aptos a resolver problemas matemáticos, (4) aprendam a comunicar e (5) aprendam a raciocinar matematicamente (NCTM, 1991/94). Este documento vem reforçar a ideia de que o ensino da Matemática deve visar o desenvolvimento do *poder matemático* do aluno e uma aprendizagem baseada na compreensão. Dá ênfase às capacidades de ordem superior, e à integração dos aspetos cognitivos e não cognitivos na aprendizagem. Tais orientações implicam que sejam proporcionados aos alunos as mais variadas experiências, como explorar, experimentar, argumentar, formular e validar conjeturas. Foi a valorização destas experiências que contribuiu para a integração de atividades de investigação nos currículos de Matemática.

Em 1997 é editado, em Portugal, o novo reajustamento do programa do ensino secundário (Ministério da Educação, 1997), que não é mais do que um novo programa (Santos *et al*., 2000) que mantém os temas do programa anterior, mas faz corresponder cada um a um período letivo. Neste programa são reforçados todos os objetivos anteriores, mas dá-se uma maior importância ao uso das calculadoras gráficas que se torna obrigatório, pela primeira vez; e salienta-se a importância da modelação, da exploração e da investigação na aprendizagem dos alunos (Ministério da Educação, 1997).

Um ano antes, em 1996, a APM criou um grupo, designado por Matemática 2001, com o intuito de fazer um estudo a partir do qual fosse possível elaborar um diagnóstico e um conjunto de recomendações sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Este estudo abrangeu o ensino básico e o secundário e incidiu em três aspetos: as práticas pedagógicas no ensino da Matemática; as necessidades de formação e desenvolvimento profissional dos professores e as condições de apoio ao ensino e à aprendizagem dentro e fora das escolas (APM, 1998). Deste trabalho resulta o relatório: *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática* (APM,

1998). As indicações nele constante seguem na mesma linha da valorização de tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, nomeadamente no que respeita à resolução de problemas e às tarefas de cunho investigativo; na criação de oportunidades de discussão entre os alunos, de trabalho de grupo e de trabalho de projeto. Além disso, sugere-se que os contextos das situações de trabalho incluam situações da realidade e da História da Matemática, e que sejam utilizados materiais manipuláveis, calculadoras e computadores com vista a proporcionar um maior envolvimento dos alunos na aprendizagem (APM, 1998).

No entanto, tanto o Relatório Matemática 2001 (APM, 1998), como as Normas profissionais (NCTM, 1991/94), ao recomendarem que o professor diversifique as tarefas a propor aos alunos, não dão indicações claras sobre que tarefas selecionar de forma a que a combinação destas seja a mais adequada ao desenvolvimento da aprendizagem matemática por parte dos alunos (Ponte, 2005).

De uma perspectiva global identificam-se, na década de noventa, três tendências principais: uma é a de que passa a haver um grande foco no processo e não no conteúdo matemático. A segunda tendência principal é a de que se passa a empregar a observação, a simulação, e mesmo a experimentação como um meio de "descobrir a verdade", refletindo uma crescente compreensão da matemática como uma disciplina empírica na qual os matemáticos recolhem "dados" da mesma forma que os cientistas o fazem. A terceira tendência é a de que a matemática passa a ser cada vez mais próxima de ser vista como um ato social e colaborativo (Schoenfeld, 1992).

Entretanto, em 1995, são publicadas as *Normas para a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 95/99) documento exclusivamente dedicado à avaliação, traduzido pela APM quatro anos depois. O que se pretende é integrar a avaliação com a aprendizagem, de forma a que esta represente uma componente que a favoreça uma vez que, como processo seletivo e certificativo, a avaliação em nada contribui, nem para o ensino, nem para a aprendizagem.

Em 2000 é editado o livro *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2000/07) que retoma e aprofunda as ideias e orientações propostas nas edições anteriores do NCTM, mas apresenta também algumas diferenças significativas, tanto na estrutura, como no conteúdo apresentado. Com efeito, nos *Princípios e Normas* de 2000/07 as Normas são, pela primeira vez, precedidas de um conjunto de seis Princípios: Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia; que

constituem um enquadramento e fundamentação de todo o documento. Estes princípios pretendem caraterizar uma educação matemática considerada de elevada qualidade. As Normas, que descrevem os conteúdos e processos matemáticos que os alunos deverão aprender, são dez e comuns a todos os níveis de escolaridade, sendo as cinco primeiras dedicadas a conteúdos matemáticos e as restantes dedicadas a processos. São estes os dois grandes domínios, que este documento defende, onde deve incidir a aprendizagem da Matemática e, de entre estes, o núcleo de ideias matemáticas consideradas mais importantes.

Em relação às Normas de Processo, a Resolução de Problemas, a Comunicação e as Conexões matemáticas continuam a existir e a ter a importância que lhes era dada nas Normas anteriores. A Representação matemática e a Demonstração ganham um maior destaque relativamente às edições anteriores, sendo à primeira dada uma Norma por inteiro e, à segunda, uma visibilidade explícita na Norma Raciocínio e Demonstração.

A expressão *Matemática para todos* ganhou uma nova dimensão – *Matemática para todos e Matemática com compreensão*: "no século vinte e um, deverá esperar-se que todos os alunos compreendam e sejam capazes de aplicar os seus conhecimentos de Matemática" (NCTM, 2000/07, p. 21). "Aprender Matemática com compreensão" é a ideia unificadora dos *Princípios e Normas* de 2000/07. A compreensão na aprendizagem tem especial atenção logo no segundo princípio e permeia todo o documento. Aprender Matemática é "aprender conceitos e processos matemáticos com compreensão" (NCTM, 2000/07, p. vx) e a "capacidade de aplicar procedimentos, conceitos e processos" (NCTM, 2000/07, p. 21). Considera-se que a compreensão é facilitadora da aprendizagem, do desenvolvimento da autonomia e da capacidade dos alunos para, mais tarde, utilizarem adequadamente a Matemática em contextos variados. Esta capacidade de usar a Matemática em novas situações ou problemas, para além de associada à compreensão dos conceitos, é também compartilhada pelo conhecimento fatual e pelo domínio dos procedimentos matemáticos. São estas as três componentes da aprendizagem matemática que os *Princípios e Normas* defendem e que, uma vez associadas, se tornam *meios poderosos* para os alunos porem em prática. Associadas à compreensão, são defendidas mais duas componentes da aprendizagem matemática: o conhecimento factual e o domínio de procedimentos matemáticos.

No nosso país, em 2001, o Ministério da Educação emite um novo documento curricular oficial, o *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais* (Ministério

da Educação, 2001a), que pretende definir o conjunto de competências consideradas essenciais e estruturantes no âmbito do desenvolvimento do currículo nacional do Ensino Básico, e também os tipos de experiências educativas que devem ser proporcionadas a todos os alunos. Propõe-se uma passagem dos programas definidos por disciplina e por anos de escolaridade, que se baseavam nos objectivos de ensino e respetivas indicações metodológicas, para as competências a desenvolver e tipos de experiências educativas por área disciplinar e por ciclo, numa lógica holística de ensino básico. As competências específicas da Matemática inseridas neste documento incluem, entre outras, a predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, "para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, formular e testar conjecturas, fazer generalizações, pensar de maneira lógica" (Ministério da Educação, 2001a, p. 57), apontando claramente para a utilização de atividades de caráter não rotineiro, nomeadamente de atividades de investigação, realização de projetos e jogos. No entanto, é aos docentes que cabe decidir a forma de operacionalizar e concretizar tais aspetos da competência matemática no campo específico do seu saber e no contexto de aprendizagem de cada aluno.

Mais tarde, em 2007, foi homologado o novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte *et al*., 2007) que introduz atualizações em relação aos programas anteriores (Ministério da Educação, 1991a, 1991b), incluindo também uma reformulação do programa do 1.º ciclo, de forma a acompanhar as propostas advogadas no *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais* (Ministério da Educação, 2001a). Os dois aspetos inovadores prendem-se com uma perspetivação por ciclos e não por anos de escolaridade e, de forma explícita, é considerada uma articulação vertical.

As finalidades deste novo programa (Ponte *et al*., 2007), prendem-se essencialmente com três aspetos fundamentais a serem vistos de forma indissociável: a) a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática por parte do aluno, b) o desenvolvimento da capacidade integração e mobilização desse conhecimento em contextos diversificados, e c) o desenvolvimento de atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência. Estas finalidades são depois concretizadas através de nove objectivos gerais do ensino da Matemática. O programa salienta ainda a importância do desenvolvimento de três capacidades transversais, a saber: resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática. Pretende-se assim que os

alunos compreendam os objetivos e as condições de um problema, formulem estratégias para a sua resolução e desenvolvam a sua capacidade reflexiva crítica em relação aos resultados obtidos. Também é esperado que os alunos desenvolvam a sua capacidade de raciocínio, estabelecendo relações entre objetos matemáticos, justificando as suas respostas e construam cadeias argumentativas. Por último, mas não menos importante, é desejado que os alunos desenvolvam a sua capacidade de comunicação oral e escrita, para serem capazes de produzir informação, de ouvir e de interpretar a informação que lhes é apresentada, além de participar de forma crítica e construtiva numa discussão. O *Programa de Matemática* (Ponte *et al*., 2007) exprime ainda várias orientações metodológicas gerais, das quais destaco: a diversificação de tarefas, dando ênfase às de caráter desafiante e às situações contextualizadas; a exploração de representações e conexões matemáticas, a proposta de trabalhos de grupo e de momentos de discussão coletiva na sala de aula; o uso apropriado de tecnologias e de outros materiais; a incorporação adequada da História da Matemática e valorização do papel desta na sociedade atual.

Ainda a nível nacional, mas relativamente ao ensino secundário, nos anos 2001 e 2002 são homologados os programas do ensino secundário de Matemática A (DES, 2001a; 2002a; 2002b) dirigido aos alunos dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, que relativamente ao programa de 1997 apresenta um maior relevo na resolução de problemas. De facto, nestes programas pode ler-se:

> A criação de um ambiente propício à resolução de problemas deve constituir um objetivo central nas práticas dos professores já que a resolução de problemas é um método fundamental e é considerado no programa não só como indicação metodológica mas também como tema. (Ministério da Educação, 2001-02a, p. 6-7)

No que respeita às atividades intelectuais privilegiadas, para além da formulação e resolução de problemas, os programas do ensino secundário de 2001- 02 também fazem referência à comunicação, à memória, ao rigor, ao espírito crítico e à criatividade (Santos *et al*, 2007). A Matemática é projetada como instrumento de interpretação e intervenção no real, promotora do desenvolvimento de uma cultura que permita o prosseguimento de estudos, do desenvolvimento de uma atitude positiva face à Ciência,

de atitudes de autonomia e de solidariedade; e que dê uma formação que permita uma cidadania ativa e participativa (Ministério da Educação, 2001-02a).

Os "objetivos e competências gerais", estão explanados numa tabela de três colunas: (1) Valores/atitudes; (2) Capacidades/Aptidões; (3) Conhecimentos. O termo "competências", acrescentado ao termo "objetivos" é apenas esclarecido no programa de Matemática B (Ministério da Educação, 2001-02b, p. 7): "Entende-se aqui que cada competência implica um corpo coerente de conhecimentos, atitudes ou capacidades (e habilidades na escolha e depois no manejo das ferramentas, quaisquer que elas sejam), que só os resultados operados na ação autónoma dos estudantes pode permitir esperar que tenham sido desenvolvidas para serem úteis na vida".

Nos atuais programas do ensino secundário podemos identificar dois grandes tipos de temas. Para um dos tipos não foi atribuída qualquer adjetivação e corresponde aos grandes temas matemáticos que se pretende que os alunos aprendam ao longo do ensino secundário (Cálculo Diferencial; Geometria – plano e espaço; Funções e Sucessões; Probabilidades e Estatística). Os "temas transversais" são o outro grande tipo e correspondem a aspetos da atividade matemática que são independentes de qualquer conteúdo ou tema específico. Os temas transversais são entendidos como conceitos, técnicas, métodos e estratégias a serem apropriadas pelos estudantes ao longo do ensino secundário e dividem-se em: Comunicação Matemática; Aplicações e Modelação Matemática; História da Matemática; Lógica e Raciocínio Matemático; Tecnologia e Matemática.

A nível internacional, em 2006 é publicado um novo documento que procura ajudar a operacionalizar o conteúdo de *Princípios e Normas* de 2000 de forma eficaz. Esta obra, intitulada *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence* (NCTM, 2006), reconhece que os professores, tendo de lidar com uma longa lista de tópicos matemáticos e expectativas de aprendizagem, que se repetem de nível para nível de escolaridade, muitas vezes têm dificuldade em encontrar os momentos certos para apresentar e/ou desenvolver com mais profundidade os temas matemáticos de forma eficaz. Assim, esta publicação propõe ser um ponto de partida no estabelecimento de prioridades e focos consistentes, que ajudem o professor a encontrar o momento mais adequado para apresentar importantes temas matemáticos e o que é mais importante em cada nível particular de ensino. Neste documento, a incidência no processo, ou seja, no raciocínio, na comunicação, nas representações, nas conexões e na

resolução de problemas, é evidente. É um documento que tem como principal propósito ser mais uma ferramenta na construção de um currículo mais coerente e vigoroso.

A nível nacional encontrou-se em desenvolvimento o Projeto "Metas de Aprendizagem" delineada pelo Ministério da Educação em Dezembro de 2009, através de um contrato assegurado entre o Ministério da Educação, através da Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC) e o Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. O objetivo deste projeto foi conceber referentes de gestão curricular para cada disciplina ou área disciplinar, em cada ciclo de ensino, desenvolvidos na sua sequência por anos de escolaridade. As Metas de Aprendizagem, não sendo documentos normativos, constituíam instrumentos de apoio à gestão do currículo, e traduziam-se na identificação das competências e desempenhos esperados dos alunos, no entendimento que tais competências e desempenhos evidenciavam a efetiva concretização das aprendizagens em cada área ou disciplina e também as aprendizagens transversais preconizadas nos documentos curriculares de referência. Pretendia-se que as Metas de Aprendizagem permitissem e incentivassem a consideração de uma visão vertical da progressão da aprendizagem dos alunos ao longo do currículo. No entanto, as Metas de Aprendizagem, que estiveram apenas publicadas online do primeiro até ao terceiro ciclos do Ensino Básico em http://www.min-edu.pt/outerFrame.jsp?link=http://www.metasdeaprendizagem.min-edu.pt, já estão inoperacionais por suspensão do projeto.

Em suma, os anos 40 e 50 do séc. XX, marcados pela memorização e mecanização com fracos resultados matemáticos dos alunos e com o crescente descontentamento dos matemáticos com a preparação dos jovens que chegavam então às faculdades, deram lugar ao movimento internacional da *Matemática Moderna* nos anos sessenta que, ainda assim, não produziu o efeito desejado. No final dos anos oitenta, surge então uma reforma geral dos planos curriculares e consequentemente dos programas, no âmbito da reforma introduzida pela Lei de Bases do Sistema Educativo. Contudo, esta mudança também não melhorou as aprendizagens dos alunos, pois as orientações ainda estavam muito veiculadas à *Matemática Moderna*, posta em prática no período anterior (Ponte, 2003). A década de noventa assistiu, e este início do século XXI continua a assistir, a

novas reformulações curriculares em prol da inovação das práticas de ensino e aprendizagem que se imperavam.

A acompanhar todas estas mudanças esteve o significado que se foi dando à própria matemática. De uma perspectiva que confere ao conhecimento matemático um conjunto de factos e procedimentos relacionados com as quantidades, grandezas e formas e as relações entre elas e em que, portanto, saber matemática é visto como tendo "dominado" estes factos e procedimentos; passa-se a uma matemática perspectivada como a "ciência dos padrões", uma (quase) disciplina empírica estreitamente semelhante às ciências naturais, com ênfase na busca de padrões com base em evidências empíricas e onde se fazem tentativas sistemáticas, com base na observação, estudo e experimentação, para determinar a natureza ou os princípios de regularidades em sistemas definidos axiomaticamente ou teoricamente ("matemática pura") ou nos modelos de sistemas captados a partir de objetos do mundo real ("matemática aplicada").

O conhecimento matemático escolar no ensino secundário

O pensamento matemático é um processo dinâmico que não se resume à exploração de conteúdos matemáticos mas que envolve aspetos de caráter mais geral. Pensar matematicamente é um modo de proceder pertinente em qualquer conteúdo a que seja aplicado, no entanto, fica mais exposto quando aplicado a questões de natureza matemática (Burton, 1984). É através do pensamento matemático que podemos ter uma visão mais coerente e profunda de nós próprios e do que nos rodeia, a efetuar investigações mais eficazes sobre aquilo que procuramos saber, e a fazer uma avaliação mais crítica do nosso percurso (Mason, Burton & Stacy, 1982).

Segundo Schoenfeld (1992) pensar matematicamente significa valorizar processos de matematização e de abstração, tendo preferência por aplicá-los, e usar as ferramentas matemáticas ao serviço da estrutura de compreensão, ou seja, de forma a fazerem matematicamente sentido. No entanto, este autor chama a atenção para o facto de que um aluno treinado a usar as ferramentas matemáticas como a abstração ou a representação e manipulação, na quer dizer que consiga ou esteja a pensar matematicamente, tal como alguém que, sabendo usar ferramentas manuais, seja automaticamente um artesão. Assim, tal como também Tanner & Jones (1997)

defendem, ensinar um aluno a pensar matematicamente é mais do que simplesmente ensinar a usar ferramentas matemáticas, embora seja necessário que também se desenvolva a capacidade de as utilizar. Isto implica um esforço renovado na procura de soluções, e não apenas na memorização de procedimentos; na exploração de padrões, e não apenas na memorização de fórmulas; na formulação de conjeturas, e não apenas na realização de exercícios (Schoenfeld, 1992). Em suma, um esforço na autorregulação ao invés do autocontrolo (Kopp, 1982).

Mason, Burton & Stacy (1982), destacam ainda a necessidade de consciência dos processos envolvidos no pensamento matemático para que este não seja fortuito. Consciência e reflexibilidade, que já foram notadas no capítulo anterior como desempenhando um papel crucial na aprendizagem autorreguladora. Contudo, para estes autores, apesar de conteúdos e processos não existirem uns sem os outros, numa fase inicial, eles devem ser vistos mais isoladamente fazendo-se mais ênfase nuns do que nos outros. Numa fase posterior, é que se conseguirá estar ciente da sua interação e estabelecer pontes que ligam as diferentes áreas do saber. É nesta articulação dialética – conteúdo *versus* processo que Burton (1984) considera que a escola deverá procurar dar um desenvolvimento equilibrado uma vez que considera ser o cerne de muitas das dificuldades dos alunos em matemática e na iliteracia matemática, ou seja, na ausência de competências que promovam os modos de pensar e raciocinar em matemática.

Podemos então nos debruçar sobre as formas de desenvolver nos alunos essa capacidade de pensar matematicamente tendo em conta a literatura nacional e internacional disponível, as orientações curriculares portuguesas em vigor e tendo em conta que, como realça Burton (1984), a aprendizagem não surge pelo facto de o professor dizer e o aluno reproduzir, mas que depende duma reflexão simultânea sobre o que está a ser feito e porquê[1].

O Decreto-Lei nº 74/2004, que estabelece os princípios orientadores da organização e da gestão curricular, bem como da avaliação das aprendizagens, no nível secundário de educação, refere no artigo dois do primeiro capítulo que as aprendizagens a desenvolver pelos alunos têm como referência os programas. O Programa de Matemática A (Ministério da Educação, 2001-02a), de entre as finalidades desta disciplina no ensino secundário há a destacar o desenvolvimento da capacidade de usar a Matemática como

[1] Este aspeto também foi notado no capítulo I, por autores como Oliveira (1993), Moll (1996) ou Vygotsky (1978), aquando do processo de internalização e do conceito de ZDP.

instrumento de interpretação e intervenção no real; o desenvolvimento das capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade; a promoção do desenvolvimento de atitudes de autonomia e de uma consciência crítica e interventiva. As finalidades e objetivos enunciados determinam que o professor, ao aplicar este programa, contemple equilibradamente o desenvolvimento de atitudes, o desenvolvimento de capacidades, e a aquisição de conhecimentos e técnicas para a sua mobilização.

Dos temas que atravessam o programa de Matemática A (Ministério da Educação, 2001-02a) de forma transversal e que através dos quais se pretende atingir os objetivos acima referidos, saliento a Resolução de Problemas, o Raciocínio Matemático, a Comunicação Matemática e as Aplicações e Modelação Matemática. Ao longo do ensino secundário, o aluno deve ser solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjeturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas – ingredientes do raciocínio matemático. Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e a linguagem, é absolutamente necessário que as atividades tenham em conta a correção da comunicação oral e escrita. O papel da matemática como instrumento de modelação da realidade é incontornável visto que um modelo matemático é uma descrição matemática do mundo real (Ministério da Educação, 2001-02a).

Processos matemáticos

A natureza do pensamento matemático está intrinsecamente ligada aos processos que dão origem ao conhecimento matemático. Segundo Frobisher (1994) processos "são os meios através dos quais os alunos põem a funcionar conceitos, conhecimentos e capacidades" (p. 161). O pensamento matemático envolve diferentes processos de pensamento sendo que o conjunto desses processos também pode ser considerado um processo (Frobisher, 1994).

Os processos matemáticos apresentados na literatura são diversos e não existe uma lista exaustiva de todos eles. Uns são destacados mais por uns autores e outros por outros de acordo com a importância e significado que lhes são atribuídos. Além disso, Frobisher (1994), salienta que todos os processos podem estar inter-relacionados e surgir

ciclicamente quando se investiga ou explora uma situação matemática, sendo que todos eles põem em movimento conhecimentos e capacidades do aluno.

Para Mason, Burton & Stacey (1982), existem quatro processos matemáticos que consideram estar no cerne do pensamento matemático: especialização, generalização, formulação de conjeturas e justificação. O processo de especialização, referido por estes autores e também por Burton (1984), Holding (1991) e Pirie (1987) é o que permite que um aluno se inicie ou se envolva na atividade através da manipulação de aspetos particulares escolhidos de um enunciado ou situação geral, tendo como objetivo a compreensão da situação e a clarificação de ideias. Como referem Mason, Burton & Stacey (1982), a melhor maneira de começar é trabalhando na questão. Este processo pode ser usado de forma informal no qual o aluno experimenta várias estratégias ou pega em exemplos e vê o que acontece. Ainda assim, note-se que quando a especialização é intencionalmente direcionada e feita com mais ênfase no *porquê* em vez de no *o quê* – isto é, autorregulada (Kopp, 1982), é um meio poderoso de abordagem de um problema. Desta forma, para Burton (1984), a especialização pode ser uma garantia de êxito na abordagem indutiva de um problema. Se a atividade consistir na procura de regularidades, o processo de especialização faculta uma procura mais sistemática, aumentando a probabilidade de sucesso e uma posterior generalização.

Neste âmbito, podemos enquadrar o que Paulo Dias (2005) apelida de processos de interpretação a propósito das investigações matemáticas. São eles: traduzir, experimentar inicial, interiorizar e ancorar. A tradução serve para o aluno compreender melhor a proposta e é identificável por ações como leituras sucessivas desta; enunciação por outras palavras ou rescrição. São processos que conduzem à compreensão do trabalho a realizar. O experimentar inicial é o processo que conduz ao estabelecimento de um percurso de investigação e que se traduz pelo emprego sistemático da experiência de modo a procurar regularidades e assim definir um percurso a seguir. Também Pirie (1987), nesta fase de arranque, salienta o processo de seleção de uma estratégia, fundamental na resolução de problemas nomeadamente numa fase inicial, que pode incluir estratégias de tentativa e erro, organização sistemática, representações através de desenhos, tabelas ou diagramas, entre outros, e que, quando usado numa fase inicial, dá ao aluno a possibilidade de começar a fazer algum trabalho específico na tarefa. Estas experiências são realizadas com base nas sugestões e figuras apresentadas e também na intuição, intuição esta que Frobisher (1994) apelida de *adivinhação* e Holding (1991) de

pensamento intuitivo. Podem também ter por base materiais de suporte ou interações, por exemplo, com o professor ou colegas (Dias, 2005).

O interiorizar usado por Dias (2005), é um processo que se prende com a compreensão do significado de algumas palavras, de comentários, de resultados ou de indicações do enunciado. O aluno lê a proposta e avança e recua em torno de um significante que não compreende até tornar interno o significado e poder avançar na tarefa. Trata-se de um processo que se verifica através do estabelecimento de interações ou através da pesquisa. Ancorar é um processo que relaciona a nova proposta com os conhecimentos anteriores já adquiridos anteriormente e concretiza-se pela identificação de semelhanças entre a nova situação e aquilo que o aluno já realizou. O estabelecimento destas analogias também é referido por Holding (1991).

O processo de generalização que para além de Mason, Burton & Stacey (1982), também é referido por Pirie (1987), Frobisher (1994), Burton (1984) e Holding (1991), inicia-se quando surge uma perceção de uma regularidade ou seja, quando características comuns surgem a muitos exemplos particulares, sendo a especialização reciproca da generalização no sentido de que a primeira é usada para obter evidências na base das quais será feita uma generalização. Nesta reciprocidade encontramos o processo de formulação de conjeturas, ou seja, a perceção ou suposição de que uma determinada ideia é verdadeira mas cuja verdade não está demonstrada ou convenientemente justificada. Surge pelo reconhecimento de um regularidade ou analogia, ou seja, por um processo de generalização (Mason, Burton e Stacey, 1982; Pirie 1987; Frobisher 1994; Burton 1984; Holding, 1991). O processo de justificação (Mason, Burton e Stacey, 1982; Burton 1984; Pirie 1987; Pugalee, 2004; Holding, 1991) consiste na procura de uma estrutura que ligue o que se sabe àquilo que se conjeturou e deve ser devidamente fundamentada. O processo de provar (Pirie 1987; Frobisher 1994; Burton 1984; Holding, 1991), tal como o processo de justificar, são pouco usados pelos alunos uma vez que estes muitas vezes não sentem a sua necessidade. Burton (1984) define a *prova* como sendo uma dedução lógica elaborada independentemente da experiência, a partir de um conjunto de axiomas e que permite assim distinguir a matemática das ciências experimentais.

Dias (2005) agrupa os processos de conjeturar, experimentar e solucionar. Neste caso, há uma suposição de partida ou possíveis conclusões acerca do resultado final; depois o aluno faz experiências e finalmente aceita o que não foi refutado, mas não há uma

preocupação em fazer uma generalização global. O mesmo autor, também agrupa os processos de conjeturar, experimentar e generalizar que se assemelha ao agrupamento anterior com a diferença de que o aluno no fim procura generalizar ou provar a afirmação. Ainda no grupo de processos de desenvolvimento, Dias (2005) salienta o aprofundar, e o ziguezaguear. O processo de aprofundar é caracterizado por um evoluir sucessivo, a exploração do avanço conseguido na etapa anterior e a eliminação ou abandono dos casos que não lhe interessam, por conterem erros ou dificuldades, o aproveitamento do que lhe poderá vir a ser útil. O processo de ziguezaguear é observável pelos avanços e recuos dando lugar a um refazer do trabalho.

Para Mason, Burtom & Stacey (1982) o conhecimento matemático é uma mais valia no processos acima referidos pois pode fazer com que a situação a trabalhar seja mais familiar e que se tire melhor partido de técnicas matemáticas ou outros aspetos já anteriormente desenvolvidos em outras situações não diretamente relacionadas com a situação que se está a estudar.

Aos processos que se prendem estritamente com a matemática acima referidos, há outros que são independentes dos conteúdos matemáticos mas que se aplicam a estes aquando da resolução de problemas (Frobisher, 1994). Destes, Frobisher (1994) salienta os processos de comunicação (e.g. explicar, falar, concordar, questionar), os processos de raciocínio (e.g. recolher, clarificar, analisar, compreender), os processos operacionais que os alunos usam para operar sobre os dados (e.g. recolher, classificar, ordenar, mudar); e os processos de registo (e.g. desenhar, escrever, listar, traçar gráficos). Numa fase de exploração da situação problemática, também Pirie (2004) salienta o processo de registar, por ser relevante no sentido de que ajuda o aluno a não esquecer o que já sucedeu em experiências anteriores e o conduz na reconstrução das suas ações e do seu pensamento pois terá de rever e organizar o que foi feito e comunicá-lo o mais claramente possível (Frobisher, 1994; Pirie, 1987; Kilpatrick, 1991). Para Pirie (1987) este processo é importante pois através dele o aluno compreende a matemática sendo pois fulcral pôr os alunos a escrever por palavras próprias e usar os seus próprios símbolos.

Também Pugalee (2004) define quatro grupos de processos metacognitivos usados na resolução de problemas que têm pontos em comum com os acima referidos. A saber: orientação, organização, execução e verificação. No grupo de processos de orientação, este autor refere a avaliação da familiaridade, da dificuldade e da probabilidade de

sucesso perante a situação proposta (neste caso escolhida). Neste grupo encontramos comportamentos metacognitivos como leitura/releitura; representações iniciais; análise de informações/condições, também já referidos por outros autores como Dias (2005).

No grupo dos processos de organização**,** Pugalee (2004) salienta a identificação de metas e o planeamento e organização de dados, processos estes também salientados por Pirie (1987). Segundo Pirie (1987), o processo de organização é o que permitirá tirar partido das informações recolhidas e/ou das estratégias utilizadas e também à descoberta de regularidades.

No grupo dos processos de execução refere desempenho de ações locais (ex. cálculos), monitoração do progresso e eventuais mudanças de decisão. Esta monitorização do progresso está intrinsecamente relacionada com o processo de reflexão já referido por Pirie (1987). Na compreensão da matemática, o processo de refletir sobre o trabalho realizado, em particular, sobre a forma como as ideias foram relacionadas, os raciocínios que foram usados, as limitações das abordagens utilizadas,... pode ajudar o aluno a perceber melhor aquilo que foi feito e a ir mais além, por exemplo, na formulação de novas questões (Pirie, 1987). Finalmente Pugalee (2004) refere como o último grupo de processos cognitivos a verificação, identificável pela avaliação das decisões e dos resultados dos planos.

Todos estes processos mesmo que pareçam simples, não são automáticos e só se tornam "rotineiros" para o aluno depois de lhes ter sido dada atenção específica e perseverante no sentido de uma tomada de consciência destes (Masosn, Burton & Stacey, 1982). Até lá a sua aplicação será furtuita, inopinada e casual (Burton, 1984). Assim sendo, cabe ao professor desenvolver meios de tornar explícitos esses processos e de os integrar na formação das atitudes do aluno (Pirie, 1987). Acrescenta-se ainda que, Frobisher (1994) defende que para além da necessidade de o aluno aprender a usar determinados processos, é necessário que ele seja capaz de, numa situação específica, saber escolher os mais adequados, o que só será possível se o aluno for exposto a frequentes experiências variadas de uso dos processos e conhecer as relações existentes entre eles.

Raciocínio matemático

Os processos de raciocínio como recolher, clarificar, analisar e compreender, são explicitamente referidos por Frobisher (1994) e estão na base do pensamento matemático. Desenvolver o raciocínio matemático é outro dos objetivos centrais do programa de Matemática A (Ministério da Educação, 2001-02a). Também os Princípios e Normas (NCTM, 2000/07) defendem que o raciocínio e a demonstração devem ser aspetos fundamentais da Matemática pois "ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática" (p. 61). Goldenberg (1998) vai mais além alegando que a matemática não é acerca de conteúdos, mas sim acerca do raciocínio que descobre, reúne e dá sentido a esses, pelo que a Matemática é (em parte) uma forma de pensar. Segundo o NCTM (2000/07), os indivíduos que raciocinam e pensam de forma analítica tendem a detetar padrões, regularidades ou estruturas, tanto numa situação do dia-a-dia, como trabalhando "em laboratório", com objetos simbólicos. A título de exemplo, refira-se a Álgebra enquanto campo favorável ao desenvolvimento do raciocínio simbólico. No que respeita à geometria bi e tridimensional, há a destacar o raciocínio espacial que permite, nomeadamente, compreender resultados geométricos. O raciocínio probabilístico é útil na análise da probabilidade de acontecimentos. O raciocínio estatístico permite aos alunos avaliar riscos e fazerem generalizações acerca de uma população (NCTM, 2000/07).

Dewey (1910/1997) afirma que o ato de raciocinar pode incluir um dos seguintes movimentos (ou ambos): um movimento que, a partir de dados parciais, confusos ou isolados, sugere uma ideia mais abrangente que os integra e completa; e o movimento que a partir de uma sugestão ou hipótese (ideia englobante), se passa para factos particulares, de modo a ligá-los entre si e, se necessário, com outros factos adicionais. De grosso modo, o primeiro destes movimentos é indutivo, o segundo, dedutivo. O movimento indutivo é o de descoberta de um princípio de ligação, o dedutivo é o de análise e interpretação de detalhes isolados em uma experiência unificada.

Em Matemática, em todos os níveis de ensino, os alunos devem raciocinar indutivamente a partir de padrões e de casos específicos. À medida que progridem na escolaridade, os alunos deverão, também, aprender a construir argumentos dedutivos eficazes baseados nas verdades matemáticas que vão estabelecendo nas aulas (NCTM, 2000/07).

Cuoco (2003) afirma que o raciocínio matemático transcende a compreensão de ideias matemáticas importantes e a aplicação de métodos e procedimentos. O desenvolvimento do raciocínio matemático é acompanhado de processos de reflexão, na resolução de problemas de todos os tipos, fazendo e usando abstrações, e construindo e aplicando teorias matemáticas.

O raciocínio matemático envolve processos de fazer matemática como experimentar/explorar, identificar padrões, formular e testar conjeturas, generalizar e demonstrar (Ministério da Educação, 2001-02a; NCTM, 2000/07; Silva *et al*., 1999). A fim de desenvolver a capacidade de raciocinar matematicamente, os alunos devem começar (logo no início da escolaridade) a justificar passos e operações utilizadas na resolução das tarefas, e ir evoluindo para argumentações mais complexas até à apresentação de generalizações, casos particulares, contra exemplos e demonstrações (NCTM, 2000/07; Ponte *et al*, 1997). Assim, espera-se que os alunos do ensino secundário "construam cadeias relativamente complexas de raciocínio lógico e apresentem justificações matemáticas" (NCTM, 2000/07, p. 63).

O raciocínio matemático é um hábito mental baseado em suposições e regras específicas e que, como qualquer hábito, deve ser desenvolvido através de uma utilização regular, consistente e numa diversidade de contextos, tanto puramente matemáticos, como contextos de aplicação (NCTM, 2000/07). Por um lado, a par do desenvolvimento deste hábito, o programa de Matemática A (Ministério da Educação, 2001-02a) recomenda que seja desenvolvido o hábito da argumentação oral e escrita – entrelaçando-se, desta forma, com a comunicação matemática, de que se fala mais adiante. Também Ponte *et al* (1997, p. 6) cita Sebastião e Silva nesse sentido: "a par da intuição e da imaginação criadora, há que desenvolver ao máximo no espírito dos alunos o poder de análise e o sentido crítico. Isto consegue-se, principalmente, ao tratar da definição dos conceitos e da demonstração dos teoremas, em que a participação do aluno deve ser umas vezes parcial (em diálogo com o professor) e outras vezes total (encarregando cada aluno de expor um assunto, após preparação prévia em trabalho de casa)". Ao avaliarem a validade das justificações ou explicações apresentadas por outros, os alunos desenvolvem confiança nas suas próprias capacidades de raciocínio e questionam os seus próprios argumentos matemáticos (NCTM, 2000/07).

Por outro lado, no raciocínio matemático também devem ser valorizados aspetos intuitivos da matemática (Couco 2003; Silva *et al*., 1999). Os alunos devem ser

encorajados a desenvolver o hábito de, de uma forma fundamentada, tentar adivinhar soluções, para os ajudar a compreender melhor o problema e avançar para uma solução. O raciocínio informal e os exemplos que apoiam a intuição dos alunos (que se refletirão em conjeturas) constituem um ponto de partida importante para o raciocínio matemático (NCTM 2000/07).

Tal como Schoenfeld (2005) e Pólya (1945/1977) defendem, só se aprende a resolver problemas vendo resolver e resolvendo. Também Cuoco (2003) afirma que só é possível aprender a raciocinar matematicamente através da explicitação objetiva dos "hábitos da mente" aquando da resolução de problemas (incluindo investigações). Vão neste sentido os programas de Matemática A (Ministério da Educação, 1997; Ministério da Educação, 2001-02a), que incluem o raciocínio matemático como orientação metodológica e onde se pode ler: "destaca-se a importância das atividades a selecionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação" (p. 10).

Problemas e resolução de problemas

Como no plano histórico, os conceitos e as teorias estão quase sempre associados à solução de um problema, desde a antiguidade que os problemas ocupam um lugar importante nos currículos, mas a resolução de problemas não (Stanic & Kilpatrick, 1989). No entanto, a partir da década de oitenta do século XX, o termo resolução de problemas transformou-se num *slogan* envolvendo, desde então, diferentes pontos de vista sobre a educação, a escolaridade, a Matemática e sobre as razões apontadas para defender que a resolução de problemas deve ser ensinada nas escolas. Independentemente das diferenças nas concepções e formas de concretização na prática, sendo transversal no tempo o objetivo primordial de colocar a resolução de problemas no centro do ensino e da aprendizagem há que, em primeiro lugar, salientar o que se entende por problema e por resolução de problemas.

Na *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988) um problema pode ser uma questão para a qual o aluno não tem um processo ou algoritmo imediato para o resolver,

ou, de uma forma mais simplista e mais lata, uma situação na qual uma ou mais estratégias têm que ser desenvolvidas.

Para Pólya (1945/1977), se estivermos perante um problema, há sempre uma pitada de descoberta na sua resolução. Portanto, um problema tem que ser sempre algo intelectualmente desafiante. É evidente que, uma mesma tarefa matemática pode constituir um problema para uns e um exercício para outros (Ponte, 2005), daí ser necessário atender ao seu grau de dificuldade. Um problema demasiado fácil passa a ser um exercício. Um problema demasiado difícil pode levar o aluno a desistir rapidamente (Ponte, 2005). Do mesmo modo, deve ser dada atenção à ajuda dada pelo professor na resolução de um problema. Pólya (1945/1977) alega que se o aluno for deixado sozinho, ou com uma ajuda insuficiente, é provável que não faça qualquer progresso, não experimente qualquer estratégia, em suma, não haja lugar à resolução do problema; se o aluno for demasiadamente auxiliado, o problema passará a ser um mero exercício. Em ambos os casos, não há lugar nem ao desafio, nem à descoberta, que caracteriza um problema.

Ponte (2005) propõe um quadro organizador dos diferentes tipos de tarefas segundo o grau de desafio matemático e o grau de estrutura que estas podem ter. O grau de desafio matemático prende-se com a percepção do grau de dificuldade da tarefa, que pode variar entre os pólos de desafio "reduzido" e "elevado". O grau de estrutura, varia entre os pólos "aberto" e "fechado", entendendo-se por tarefa fechada, aquela onde é totalmente explícito o que é dado e o que é pedido; e por tarefa aberta, aquela que contém um grau de indeterminação no que é dado ou no que é pedido, ou em ambas as coisas.

Nesta conceptualização, os exercícios, que servem essencialmente para consolidar conhecimentos ou pô-los em prática, quando já adquiridos, são tarefas fechadas e de desafio reduzido; os problemas também são tarefas fechadas, mas com desafio elevado. As tarefas de exploração e as investigações, sendo ambas tarefas abertas, apenas diferem no grau de desafio.

Outra dimensão considerada por este autor na caraterização das diferentes tarefas é o contexto, que varia entre os pólos "realidade" e "matemática pura", havendo entre os dois pólos a situação de "semi-realidade". No entanto, esta dimensão não é determinante na diferenciação entre exercício ou problema. Podem existir problemas e exercícios em todas estas situações. A dimensão "contexto" também é referida por Stanic e Kilpatrick (1989), com dois propósitos: como motivação, no sentido de atrair o interesse dos

alunos para aprender; e como justificação, com o intuito de convencer professores e alunos do valor da Matemática.

Tal como Ponte (2005), estes autores também percecionam os problemas como uma atividade lúdica. Neste caso, as tarefas matemáticas correspondem a jogos, que, usualmente não tendo qualquer ligação com o mundo real, podem ser muito apropriados para potenciar a aprendizagem, especialmente se o professor valorizar os aspetos matemáticos inerentes ao jogo, explorar as estratégias ganhadoras ou a recolha ou organização de dados para exploração do jogo. O jogo é visto por Ponte (2005) como sendo um problema com regras bem definidas e com o objectivo claro de vencer o jogo.

Pelo exposto, parece claro distinguir um problema de outro tipo de tarefa matemática. No entanto, Schoenfeld (1992) refere alguns resultados desconcertantes acerca do entendimento que os estudantes usualmente têm acerca da matemática, em geral, e dos problemas matemáticos, em particular. Com efeito, em 1992, este autor alega que as crenças de um estudante típico são as de que um problema tem uma única resposta certa; existe uma e uma só forma de ser resolvido (e geralmente essa forma é a que o professor utilizou recentemente nas aulas); é normal que os estudantes comuns não entendam matemática pelo que têm apenas de memorizá-la e aplicá-la mecanicamente sem a entender; e quem percebe matemática resolve sempre os problemas em cinco minutos ou menos; a matemática é uma atividade solitária, feita por indivíduos isoladamente; e a matemática ensinada na escola não tem a ver com o mundo real. Relativamente à génese, Shoenfeld (1992) defende que estes pressupostos são moldados pela experiência escolar, em que fazer matemática significa seguir as regras estabelecidas pelo professor, recordar e aplicar a regra correta quando o professor faz uma pergunta e a verdade matemática é determinada quando a resposta é ratificada pelo professor. Este facto sugere algum "desentendimento" acerca do que é resolver um problema. De facto, Shoenfeld (1996, p. 1) refere que "se pedires a sete educadores matemáticos para definir resolução de problemas será muito provável que obtenhas, pelo menos, nove opiniões diferentes".

Para Schoenfeld (1996), um bom problema é aquele onde se verificam quatro propriedades: a) é relativamente acessível, mas não trivial; b) pode ser resolvido por mais de uma maneira – não só para os alunos não pensarem que existe um só caminho na resolução de um problema, mas também pela importância dos aluno estabelecerem relações entre diferentes resoluções; c) serve como introdução a importantes ideias

matemáticas; d) serve como ponto de partida para outras explorações matemáticas, que é o caso dos problemas extensíveis ou generalizáveis – "bons problemas conduzem a mais problemas" (p. 9). Cuoco (2003) defende que os problemas não devem ser todos difíceis, mas todos devem fazer sentido e todos devem desafiar os alunos a pensar.

Nos EUA, o National Council of Teachers of Mathematics, ao declarar, na década de oitenta, a resolução de problemas como o foco da Matemática escolar, abriu portas a um movimento favorável à resolução de problemas, no qual é redescoberto e posto em prática o trabalho de Pólya. O impacto do trabalho deste matemático húngaro nos currículos escolares deve-se ao facto de Pólya ter reformulado, estendido e ilustrado diversas ideias acerca da descoberta matemática de modo que os professores a pudessem compreender e usar (Stanic & Kilpatrick, 1989).

O *How to Solve It* de Pólya (1945/1977) foi um dos trabalhos que constituíram uma ajuda importante para clarificar, entre outras coisas, o papel dos problemas no ensino da Matemática. Nesta obra, Pólya afirma que os problemas devem servir para os alunos perceberem a verdadeira natureza da Matemática e desenvolverem o seu gosto por esta disciplina, uma vez que um problema constitui um desafio das capacidades matemáticas e, consequentemente, uma experimentação do gosto pela descoberta.

Nos Princípios e Normas de 2000/07 (NCTM, 2000/07) pode ler-se que é através da resolução de problemas que os alunos adquirem formas de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, o que lhes poderá trazer muitas vantagens fora da escola e das aulas de Matemática. Já em oitenta, na Agenda para a Ação (NCTM, 1980), era assumida a crença na relação direta entre a resolução de problemas de Matemática e a resolução de problemas na vida quotidiana e no trabalho.

Por isso não é de estranhar que os atuais programas de Matemática A (Ministério da Educação, 2001-02a) destaquem a resolução de problemas não só como um objetivo de aprendizagem central, mas também como um tema transversal a todo o ensino secundário e, além disso, como uma orientação metodológica importante na estruturação das atividades letivas:

> A criação de um ambiente propício à resolução de problemas deve constituir um objectivo central (…) já que a resolução de problemas é um método fundamental e é considerada no programa não só como

> indicação metodológica mas também como tema. (Ministério da Educação, 2001-02a, p. 6/7)

Já a resolução de problemas, nos Princípios e Normas (NCTM, 2000/07), não é apresentada como devendo ser a principal incidência da matemática escolar, como vinha sendo costume desde os anos oitenta, embora deva ser considerada como "uma parte integrante de toda a aprendizagem" (NCTM, 2000/07, p. 57), constituindo um dos objectivos da aprendizagem matemática e um importante meio pelo qual os alunos devem aprender Matemática.

Note-se no entanto que, como salientam Mason, Burton & Stacy (1982), há que ter consciência dos processos envolvidos no pensamento matemático para que este não seja fortuito. Também nos Princípios e Normas (NCTM, 2000/07), pode ler-se que o insucesso dos alunos, aquando da resolução de problemas, não é devida à falta de conhecimentos matemáticos, mas sim à sua deficiente utilização. Também Schoenfeld (1992) corrobora o que está escrito neste documento e contrasta a atitude típica de um estudante numa tentativa de resolver um problema não padrão, com a atitude de um matemático que trabalha num problema difícil. Enquanto que a maioria dos alunos numa tentativa de resolver um "verdadeiro problema de resolução de problemas" optam por "ler, tomar rapidamente uma decisão e seguir nessa direção" (p. 61), persistindo obstinadamente numa direção errada; o matemático gasta mais de metade do seu tempo a tentar dar sentido ao problema, ou seja, antes de se comprometer com qualquer direção particular, lê-o cuidadosamente e faz perguntas a si próprio até se assegurar de que o compreendeu e faz uma quantidade significativa de análises e explorações estruturadas até ter a certeza de que encontrou a direção certa. Além disso, ao concretizar o plano que estabeleceu, vai periodicamente avaliando a sua concretização e tomando decisões em função dessas avaliações – perseguindo os caminhos que se revelam com interesse, e abandonando os caminhos que não parecem dar frutos. O matemático consegue resolver o problema, enquanto a grande maioria dos alunos não o fazem. Coloca-se naturalmente a questão de como é possível, perante uma situação de resolução de problemas, aproximar o trabalho dos alunos ao trabalho dos matemáticos, ou seja, ao dos indivíduos que resolvem problemas eficazmente.

Para Pólya (1945/1977), a resolução de problemas é uma competência prática, tal como a natação, que se aprende por imitação e prática. Deste modo, as técnicas de resolução de problemas precisam de ser ilustradas pelo professor, discutidas com os alunos e

postas em prática de uma maneira compreendida e não rotineira, e com muitas oportunidades para imitar e praticar.

Segundo Cuoco (2003), Pólya (1945/1977) e Schoenfeld (1992), a instrução para a resolução de problemas deve ser explícita e incidir sobre aspetos metacognitivos do pensamento matemático. Trata-se de uma instrução que toma a forma de "coaching", com intervenções ativas no trabalho dos alunos sobre o problema. O professor deve circular pela sala como um "consultor itinerante". À medida que se move na sala, ele reserva-se o direito de solicitar a qualquer momento três questões: a) O que é que estás (exatamente) a fazer? (consegues descrever isso pormenorizadamente?); b) Porque é que estás a fazer isso? (como é que isso encaixa na solução?); Como é que isso te ajuda? (o que é que vais fazer com o resultado quando o obtiveres?). O professor começa a fazer estas perguntas, por exemplo no início do ano letivo. Quando ele as faz, geralmente, os alunos acham uma perda de tempo mas, apesar do desconforto, como vêem que o professor vai continuar a fazer essas perguntas ao longo do tempo, eles começam a defender-se delas discutindo as respostas com antecedência. À medida que o tempo passa, esse comportamento vai-se tornando um hábito nos alunos e assim o seu trabalho já começa a assemelhar-se ao de um matemático. Também Polya (1945/1977) acredita que perante a mesma questão, frequentemente repetida, dificilmente o aluno deixará de anotar e será induzido a formular, ele próprio, essa questão em situações semelhantes. Também nos Princípios e Normas (NCTM, 2000/07), os professores desempenham, de facto, um papel importante para o desenvolvimento destes hábitos de reflexão mental, imprescindíveis numa resolução eficaz de qualquer problema não rotineiro.

Para terminar, saliento um aspeto associado à resolução de problemas: Vygotsky (1934), via a escrita como uma ação analítica deliberada, que requer um discurso interior, de modo que seja plenamente compreensível para quem escreve; portanto, as palavras escritas requerem uma estruturação deliberada de uma teia de significados. Além disso, Pugalee (2004) refere que a investigação também mostra que a escrita suporta a metacognição, no sentido de que inclui comportamentos tais como a previsão, planeamento, revisão, seleção, classificação e a verificação. Nesses estudos, a escrita é posta como o fornecimento de um nível de reflexão que promove a consciência sobre os processos matemáticos e a autorregulação, permitindo que os alunos sejam bem

sucedidos em situações de resolução de problemas, contribuindo para a sua capacidade de identificar e trabalhar estrategicamente.

Comunicação matemática

Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, os programas de Matemática (Ministério da Educação, 2001-02a) defendem que é absolutamente necessário que as atividades tenham em conta a correção da comunicação oral e escrita, sendo a *Comunicação* um dos seis temas transversais no ensino secundário. No NCTM (2000/07, p. 66) pode ler-se que "a comunicação é uma parte essencial da matemática e da educação matemática". De facto, a comunicação é uma das cinco normas de processo enfatizada pelo NCTM (2000/07) e justificada pelo facto de nos locais de trabalho ser cada vez mais acentuada a importância da capacidade para estruturar cadeias lógicas de raciocínio, expressar-se de forma coerente e clara, ouvir as ideias de terceiros, e pensar no seu público quando se escreve ou fala. Em suma, é de importância crescente trabalhar em equipa, colaborar e comunicar ideias com clareza, oralmente e por escrito. De uma forma "mais imediata" a comunicação constitui um elemento fundamental da aprendizagem matemática, pois proporciona oportunidades para a troca de ideias e reflexão sobre as mesmas (NCTM (2000/07). Também Pugalee (2004) defende que os alunos que tenham oportunidades de comunicar matematicamente, como falar, ler, escrever e ouvir, recebem um duplo benefício: o de comunicar para aprender matemática e o de aprender a comunicar matematicamente. Assim, no final do ensino secundário, é esperado que os alunos tenham assimilado normas de diálogo e argumentação, de modo a procurarem sempre apresentar argumentos claros e completos e esforçar-se para clarificá-los e completá-los quando estes se revelam imperfeitos (NCTM, 2000/07). A comunicação permite partilhar imagens mentais pessoais e providencia a comparação das representações (Uptegrove & Maher, 2005). Tanto a a discussão oral, como escrita, são vistas como parte integrante da comunicação, sendo promotoras da compreensão matemática (Kosko & Wilkins, 2010).

A discussão oral entre alunos é uma forma de aprofundar a compreensão de conceitos através da interação social (Cooke & Buchholz, 2005; Uptegrove & Maher, 2005). Com

efeito, numa discussão, há oportunidades para clarificar e reorganizar ideias; para uma compreensão mais profunda das semelhanças e diferenças que surgem das ideias individuais. "Os momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento" (Ponte, 2005, p. 16). Os alunos aprendem a pensar matematicamente argumentando, colocando questões e antecipando feedback (Uptegrove & Maher, 2005). Para além do contributo para a clarificação da compreensão matemática, os alunos envolvidos em discussões são "obrigados" a procurar acompanhar o raciocínio de "quem explica" e, por outro lado, tentar convencer os seus pares acerca dos seus próprios pontos de vista, principalmente quando há discordância. Desta forma, os alunos têm de aprender a ouvir os métodos e ideias dos outros, de modo a determinarem os seus pontos fortes e as suas limitações e, portanto, a ser críticos responsáveis no contexto da matemática, com a dupla vantagem: "comunicam para aprender matemática e aprendem a comunicar matematicamente" (NCTM, 2000/07, p. 66). Assim, não é de estranhar que no programa de Matemática A (DES, 2001a, p. 12) se possa ler que "o estudante deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica e recorrer, sempre que tal for aconselhável, à linguagem simbólica da Matemática, à sua precisão e ao seu poder de síntese". Da mesma forma, APM (1988, p. 47) defende que "a capacidade de convencer outros da validade das nossas asserções e conjecturas deve ser desenvolvida de forma permanente".

Outra vantagem da discussão oral prende-se com o facto de a linguagem utilizada ser mais informal, podendo facilitar a compreensão dos conceitos ou dos raciocínios. A linguagem típica dos livros didáticos, ou a utilizada pelo professor, por vezes podem agir como uma barreira para o entendimento do aluno (Kosko & Wilkins, 2010).

Para Kosko & Wilkins (2010), a escrita é vista como uma forma de reflexão individual e de exposição de ideias matemáticas. Também Pugalee (2004) alega que as palavras escritas fornecem um veículo para os estudantes comunicarem consigo mesmo e com os outros. Os alunos que escrevem para explicar ou descrever estratégias ou conceitos experimentam uma melhoria na capacidade de resolver problemas (Pugalee, 2004; Kosko & Wilkins, 2010). A escrita também pode ser posteriormente incorporada numa discussão entre o aluno e os seus pares ou entre o aluno e o professor, para aprofundar a compreensão, pois a escrita matemática de um aluno pode servir, por um lado, para o professor identificar métodos para melhorar a compreensão ou, por outro lado, os

alunos, em pequenos grupos, compararem as estratégias de resolução e as explicações com os outros. Tanto num caso, como noutro, a tentativa de colocar o pensamento em palavras, ajuda os alunos a estruturar e a clarificar o seu raciocínio (Kosko & Wilkins, 2010).

Quando falamos sobre conceitos matemáticos, estamos a comunicá-los aos outros; quando escrevemos sobre Matemática, estamos a comunicar connosco próprios (Kosko & Wilkins, 2010). Quando um aluno apresenta, oralmente ou por escrito, o seu método de resolver um problema, justifica um procedimento ou resultado; ou formula uma pergunta, está a construir um significado, a consolidar e a organizar ideias, uma vez que esta atividade obriga o aluno a refletir sobre o seu trabalho e a clarificar as suas ideias acerca das noções envolvidas. A comunicação estimula a reflexão – comunicação e reflexão são processos intimamente relacionados na aprendizagem matemática. Através da comunicação as ideias tornam-se objecto de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correção (NCTM, 2000/07; Pugalee, 2004).

Dadas as vantagens acima explanadas, o NCTM (2000/07) defende que, da mesma forma que para um resultado matemático ser reconhecido como válido a demonstração apresentada tem de ser aceite pela comunidade dos matemáticos profissionais, também os alunos devem por "à prova" as suas ideias ou, pelo menos partilhá-las na comunidade matemática da sala de aula, sendo então necessário fazerem-se compreender e serem suficientemente convincentes. A todos é exigido que melhorem aspetos como saber ouvir, parafrasear, questionar e interpretar as ideias dos outros. No percurso da escolaridade, os alunos deverão passar a especificar, cada vez mais, na sua argumentação as propriedades matemáticas que utilizam. Deverão usar a linguagem e os símbolos matemáticos de forma correta e apropriada, quer se estejam a exprimir utilizando folhas de cálculo, desenhos, objetos, diagramas, etc. A demonstração deverá constituir, também, um método de comunicação.

Da mesma forma, a escrita deverá também tornar-se cada vez mais direcionada. As relações que os alunos pretendem expressar simbólica e graficamente, bem como as notações e representações necessárias para o fazerem, deverão tornar-se cada vez mais sofisticadas (NCTM, 2000/07). Também o programa de Matemática A (Ministério da Educação, 2001-02a) defende que o grau de formalismo deve sempre ter em conta o nível de maturidade matemática dos estudantes e deve surgir, se possível, como

necessidade, sendo absolutamente necessário que as atividades tenham em conta a correção da comunicação oral e escrita.

A Matemática é frequentemente traduzida através de símbolos. À medida que os alunos progridem ao longo da sua escolaridade, a Matemática que comunicam deve ser cada vez mais complexa e abstrata. Com a experiência, os alunos devem ganhar competência na organização e no registo do seu pensamento, tornarem-se mais precisos na matemática escrita e aprenderem a ler textos cada vez mais técnicos. Mesmo que os alunos considerem mais apropriado descrever as suas ideias informalmente através da linguagem comum e de esboços, no final do ensino básico e início do ensino secundário, deverão também ser capazes de escrever argumentos matemáticos bem elaborados utilizando vocabulário formal. A linguagem familiar do dia-a-dia fornece a base para a construção de elos com a linguagem matemática formal. Palavras tais como semelhante, fator, área ou função, são usadas em Matemática com significados diferentes ou mais precisos. É preponderante que os alunos do ensino secundário compreendam o papel das definições matemáticas e as utilizem no decurso do seu trabalho e a sua comunicação escrita deverá reflectir uma crescente estruturação das formas de justificar os procedimentos e os resultados (NCTM, 2000/07).

O NCTM (2000/07) também destaca o papel da tecnologia na comunicação matemática. D'Ambrosio e Tunç-Pekkan (2008/09) realizaram um estudo com professores estagiários e alunos do 6.º ano de escolaridade sobre uma "atividade autêntica de troca de *e-mail*" (p. 4) subordinado ao tema frações. Este estudo revelou que o *e-mail* pode ser uma importante ferramenta de ensino porque, entre outros aspetos, pode ajudar o professor a ter mais oportunidades para comunicar matematicamente; a ter uma maior disposição (abertura) ao pensamento dos alunos e aprender mais acerca do pensamento matemático deles, e ganhar experiência em colocar questões. Como os alunos não conversam naturalmente sobre Matemática, é preciso que o professor os ajude a fazê-lo. A justificação de respostas, a descrição de estratégias, a colocação de questões pertinentes, a solicitação de redações matemáticas, entre outros, tem de ser alvo de planeamento explícito por parte do professor (DES, 2001a; NCTM, 2000/07).

Aplicações e modelação matemática

É peremptório, na Matemática escolar, o estabelecimento de ligações entre os diversos temas matemáticos do currículo, com as outras disciplinas ou ciências e com a vida real. Isto porque, quando os alunos conseguem identificar e estabelecer conexões entre diferentes áreas e conteúdos matemáticos, não só aprendem Matemática, como também a passam a ver como um todo integrado e aprendem a reconhecer a sua utilidade (Ministério da Educação, 2001-02a; NCTM, 2000/07). Além disso, como afirmam Quinn e Berry (2006), é uma forma de dar resposta ao questionamento frequente dos alunos acerca da relevância do tema matemático que estão a ser obrigados a compreender e a estudar. A longo prazo, a Matemática, nas suas conexões, constitui uma contribuição na criação de condições para a consciência da necessidade de formação ao longo da vida, "com vista a enfrentar mudanças profissionais e as incontornáveis adaptações às inovações científicas e tecnológicas" (Ministério da Educação, 2001-02a, p. 6). É por isso que a capacidade para compreender, explorar, construir e analisar modelos matemáticos simples, assim como o conhecimento do alcance e das limitações de um modelo matemático, constituem importantes objectivos da educação matemática escolar (Ponte, 1992).

Também Green e Emerson (2010) defendem um currículo centrado em problemas de modelação matemática, pois a construção de um modelo matemático de uma situação real (estes autores apenas concebem a modelação matemática de situações reais), envolve uma análise do problema, tarefas de abstração e de simplificação, construção de suposições, sendo necessário recorrer a ferramentas e técnicas. Depois, o aluno tem de "transitar novamente" para o mundo real através da avaliação, interpretação e comunicação do seu modelo matemático. Estes autores acrescentam que este processo pode ser repetido por vários ciclos, em que cada ciclo fornece informações ao seguinte.

Também Quinn e Berry (2006), referem que o processo de modelagem pode ser visto como uma sequência iterativa de estágios (não necessariamente claramente delineados) que convertem uma situação física numa formulação matemática, através do estabelecimento de relações, manipulação de variáveis, sendo os resultados assim obtidos, interpretados e verificados quanto à sua precisão. O processo é iterativo, pois muitas vezes, é neste ponto, que as limitações, imprecisões e/ou suposições inválidas

são identificadas, o que exige um refinamento do modelo, ou talvez até uma reavaliação da questão para a qual estamos à procura de uma resposta.

Desta forma, a modelação proporciona uma atividade intelectual mais próxima do mundo real do trabalho, pelo que Green & Emerson (2010) defendem que, em contexto escolar, o mundo real seja uma fonte de problemas realistas, considerando como contexto realista aquele que é mal definido, requer o uso e interpretação de informações sob diversas formas, tanto em termos qualitativos como quantitativos, e uma necessidade de comunicação dos resultados a um público autêntico adequado. Deste modo, é exequível o ensino de conceitos específicos, enquanto se continua a fornecer algumas ambiguidades de dados reais.

Gainsburg (2008), focando-se também apenas nas conexões matemáticas com o mundo real, elabora um estudo no qual adopta o seguinte levantamento de tipos de conexões matemáticas passíveis de serem realizadas no ensino da Matemática: a) analogias simples (por exemplo, os números negativos associados a temperaturas abaixo de zero); b) problemas clássicos "reais" (por exemplo, "Dois comboios saem da estação mesmo..."); c) análise de dados reais (por exemplo, encontrar a altura média e a mediana dos colegas); d) discussões da Matemática na sociedade (por exemplo, os *média* abusam das estatísticas para influenciar a opinião pública); e) "mãos" sobre as representações de conceitos matemáticos (por exemplo, modelos de sólidos regulares, dados); f) modelar matematicamente fenómenos reais (por exemplo, escrever uma fórmula para expressar a temperatura como uma função de aproximação do dia do ano).

Ponte (1992) concebe a modelação matemática de uma forma mais abrangente pois inclui a hipótese de modelação de uma situação que poderá ser fictícia. Com efeito, para este autor, um modelo é uma descrição simplificada duma situação, real ou imaginária. No caso de se estar a trabalhar com uma situação real, estará sempre explícito ou implícito um modelo dessa situação. Os modelos matemáticos têm como base a linguagem e os conceitos da Matemática. Já Carreira (2005) sugere que a essência da modelação matemática é a da metáfora. Com efeito, uma metáfora exige que se estabeleçam conexões, sugere significados, e evidencia determinados aspetos em detrimento de outros. Também um modelo matemático, na sua "matriz metafórica" (Carreira, 2005, p. 137) propicia uma perspetiva do fenómeno real, com repercussões, quer na compreensão deste, quer dos conceitos e objetos matemáticos que nele intervêm.

Ponte (2005) afirma que as chamadas tarefas de modelação são, no fundo, tarefas que se apresentam num contexto de realidade. Esta realidade pode estar circunscrita na ciência, nas ciências sociais, na medicina e no comércio (NCTM, 2000/07). As tarefas de modelação revestem-se, de um modo geral, de natureza problemática e desafiante, constituindo problemas ou investigações, conforme o grau de estruturação do respectivo enunciado, sendo também frequente falar-se em aplicações da Matemática. Estas, conforme a sua natureza, são, na maior parte dos casos, exercícios ou problemas de aplicação de conceitos e ideias Matemáticas (Ponte, 2005).

Síntese do capítulo

Imersos numa mudança social contínua é necessário alterar os nossos quotidianos escolares, bem como as metodologias que promovam um ensino reflexivo e com significado. Na concretização das metodologias propostas no programa de Matemática A (Ministério da Educação, 2001-02a) cabe ao professor ser simultaneamente dinamizador e regulador do processo de ensino-aprendizagem, criando situações motivadoras e adotando uma estratégia que implique o aluno na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa.

"O ensino da Matemática não deve limitar-se a desenvolver a capacidade de usar as ferramentas do ofício: símbolos, regras lógicas e cálculos. Se é legítima a preocupação em ensinar a manejar as ferramentas, ela não pode prejudicar o essencial da aprendizagem da Matemática que deve ser procurado ao nível das ideias (…) o uso das ferramentas é ensinado e aprendido no contexto das ideias e da resolução de problemas interessantes, enfim em situações que exijam o seu manejo e em que seja clara a vantagem do seu conhecimento" (Ministério da Educação, 2001-02a, p. 5). Os valores formativos desta disciplina incluem as capacidades de raciocinar matematicamente, relacionar conceitos, usar definições, fazer demonstrações e resolver problemas, mas também construir e aperfeiçoar modelos matemáticos e discutir a aplicação desta ciência a situações de outras ciências ou da vida quotidiana. Incluem, igualmente, a capacidade de comunicar e interpretar ideias matemáticas expressas oralmente e por escrito. Incluem ainda o desenvolvimento no aluno do seu próprio autocontrolo e

autoconceito como pessoa capaz de usar com desembaraço as ferramentas e ideias Matemáticas, estabelecendo uma relação positiva com esta disciplina.

Alguns autores como Frobisher (1994), Holding (1991) ou Pirie (1987), apesar das produções destes usadas para fundamentar teoricamente os temas aqui tratados, nomeadamente no que se refere a processos matemáticos foram usados porque, pela forma como este portefólio foi conceptualizado, o trabalho do aluno pode ser assemelhado ao trabalho deste numa investigação matemática no sentido de que o aluno se encontra na procura de soluções para as suas dificuldades e que lhe são conferidos poder de decisão tanto na escolha das tarefas como durante o desenvolvimento destas (pelo menos foi isso que se pretendeu), desempenhando o papel central da atividade, onde o professor desempenha apenas um papel de mediador.

Capítulo IV

Avaliação das Aprendizagens

Neste capítulo procura-se fazer um enquadramento conceptual do termo avaliação, em contexto escolar. Para isso, começa-se por fazer uma breve abordagem por ordem cronológica dos documentos nacionais e internacionais que mais marcaram o desenvolvimento curricular português em Matemática, sob o ponto de vista da avaliação, desde o último quarto do século XX até aos nossos dias. De seguida, a avaliação numa perspetiva reguladora da aprendizagem, onde o *feedback* desempenha uma papel primordial, será abordada de forma mais atenta. Para terminar, o capítulo incide sobre uma das formas de preconizar uma forma avaliativa reguladora e que também acaba por ser objeto de estudo do presente trabalho – o portefólio.

Evolução do conceito de avaliação ao longo dos últimos 30 anos

Santos (2003) refere que do National Advisory Committee on Mathematical Education (NACOME), foi publicado: *Overview and Analyses of School Mathematics*.*Grades k–12*, em 1975, no qual há evidência de que a avaliação devia estar estritamente associada à medição das aprendizagens e a sua implementação ser realizada através de testes. Estes eram apenas usados para classificar sendo a principal preocupação da avaliação assegurar a validade e fidelidade desses testes, apesar de se reconhecerem fatores que podiam enviesar os resultados deste instrumento de avaliação, como a limitação do tempo, a diversidade cultural ou as condições físicas desfavoráveis. Os principais intervenientes dos processos avaliativos eram apenas os professores e os responsáveis educacionais.

As primeiras normas do NCTM, em *Agenda para a Acção*, de 1980, ainda incidiam fundamentalmente sobre a avaliação sumativa apesar de já se afirmar que o primeiro objetivo de uma "avaliação significativa é o aperfeiçoamento do ensino e dos materiais" (Santos, 2003, p. 8) e que esta não se devia limitar aos testes, mas também devia recolher e interpretar dados através de outros instrumentos de avaliação. Segundo estas

normas, a inserção da capacidade de resolução de problemas e dos seus processos subjacentes nos objetivos programáticos implicavam uma necessidade de modificação nos instrumentos avaliativos. Aos principais intervenientes na avaliação são acrescentados os Encarregados de Educação.

É com o relatório *Crockcroft – Mathematics Counts*, em 1982, que a componente reguladora da avaliação ganha forma. Segundo Santos (2003) neste documento foram identificadas formas informais de avaliação a desenvolver aquando da resolução das tarefas na sala de aula, como a observação, o questionamento individual ou em grupo e o *feedback*. Formalmente, a avaliação devia passar por trabalhos escritos, complementados por uma parte oral para que os alunos tivessem a possibilidade de expor os seus raciocínios. Nestas avaliações considerava-se inútil apenas assinalar o erro, pelo que o trabalho dos alunos devia ser acompanhado por apreciações do professor, sendo o aluno responsável pela sua própria correção quando os enganos estivessem inseridos em situações rotineiras. Havia uma valorização do aluno como interveniente no seu próprio processo avaliativo, para além dos já assinalados nos documentos anteriormente referidos. É defendida a continuidade pedagógica e, caso esta não fosse possível, no processo do aluno deveria constar registos que assinalassem aspetos como a perseverança na resolução de problemas, a capacidade para empregar os conhecimentos ou para abordar oralmente assuntos matemáticos. Nestes poderiam também constar amostras de trabalhos dos alunos (Santos, 2003).

O documento *Renovação do Currículo de Matemática*, de 1988, defendia que fossem incluídos na avaliação, para além de objetivos cognitivos como memorização e aplicação de algoritmos (capacidades de nível inferior), outras componentes do currículo como as capacidades de nível elevado do domínio cognitivo, afetivo e social.

O que se propunha era que a resolução de problemas estivesse no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática, em todos os níveis escolares, e que, dentro deste "chapéu" as aplicações e explorações matemáticas tivessem um lugar relevante no sentido de proporcionar a todos os alunos experiências frequentes com situações variadas que envolvessem processos e atividades como interpretar, organizar e representar dados, analisar, construir e criticar modelos matemáticos, planear, executar e avaliar projetos. Foram apontados testes de "ensaio" total ou parcialmente com consulta e sem tempo limitado, relatórios escritos e discussões orais individuais ou em grupo.

Esta perspetiva da prática do ensino da matemática implicava necessariamente uma reorganização das atividades de aprendizagem e uma forma diferente de intervenção do professor nas aulas (o professor passava a desempenhar um novo papel). Por exemplo, a linguagem da matemática deixaria de ser um fim em si mesmo e passaria a ser um meio de expressão de ideias e dos raciocínios matemáticos. Os alunos passariam a ter de explorar, investigar e analisar situações, expor entre si e com o professor as várias estratégias, redigir resultados, defender conclusões. E depois, procurar saber se as descobertas se podiam aplicar a outros casos, encontrar modos de alargar enunciados ou reformular o problema, etc. Ainda neste contexto, as atividades de investigação surgiam com naturalidade pois também se encaixavam atividades exploratórias como recolha de dados, deteção de diferenças, repetições ou analogias, reconhecimento de regularidades e padrões.

Mas à natureza das atividades propostas deveriam estar associadas mudanças nas práticas educacionais. Ao professor, que pretendesse caminhar nesta direção, exigir-se-ia uma mudança de atitudes, pois este deixaria de ter meramente o papel de fornecedor da informação para passar a ser também um gestor de atividades e um dinamizador do trabalho. Desta forma ser-lhe-iam exigidas qualidades acrescidas de iniciativa, trabalho, imaginação e organização. O espectro de instrumentos de avaliação teria naturalmente de sofrer uma ampliação/diversificação pois estes não fariam sentido se não estivessem de acordo com os objetivos e os tipos de atividades de aprendizagem desenvolvidas.

Nas *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*, do NCTM de 1989, a avaliação era vista como parte integrante do processo de ensino e tinha como principal objetivo ajudar o professor a conhecer melhor o que os alunos sabiam (e não só aquilo que não sabiam) e a tomar decisões significativas no seu ensino. Recomendava ainda que a avaliação assentasse numa análise global e num entendimento geral daquilo que acontecia na aula enquanto professores e alunos interagiam, em detrimento de um entendimento da Matemática como um somatório de objetivos comportamentais. Neste documento, defendia-se que a avaliação devia incidir não só nos diferentes campos do conhecimento matemático, mas também nas suas conexões. Com efeito, para além dos conteúdos programáticos, este documento identificava outros aspetos do conhecimento matemático a serem tidos em conta no processo avaliativo, consoante o objetivo a que se destinavam, tais como a comunicação, o raciocínio e as conexões matemáticas.

Este documento defendia que a avaliação devia analisar até que ponto os alunos integravam e davam sentido à informação, se conseguiam aplicá-la em situações que requeressem raciocínio e pensamento criativo e se fossem capazes de utilizar a matemática para comunicar as suas ideias. Para além disso, a avaliação devia analisar a predisposição dos alunos face a esta ciência, em particular a sua confiança em fazer matemática e o modo como a valorizavam (NCTM, 1991). Tal implicava uma maior diversidade de instrumentos de avaliação que passariam então a incluir, tanto na sua componente escrita, como oral, a demonstração e a utilização de materiais como a calculadora, computador e materiais manipuláveis.

As *Normas para a avaliação em matemática escolar*, de 1995, foram totalmente dedicadas à avaliação. Neste documento, há o desejo de uma mudança no papel do aluno para o tornar participante ativo no seu próprio processo de avaliação. Os responsáveis pelas decisões na avaliação passariam a ser, para além do professor, o próprio aluno, os seus pares e outros responsáveis educacionais, dependendo da finalidade para a qual a avaliação foi realizada. Do professor esperava-se que fosse capaz de observar, ouvir, questionar e informar de forma clara e continuada sobre os critérios de avaliação e os progressos efetuados. Foram identificados seis critérios de análise da qualidade das práticas de avaliação: normas para a Matemática; normas para a aprendizagem; normas para a equidade; normas para a transparência; normas para as inferências e normas para a coerência. Os instrumentos de avaliação deviam incluir, para além dos mencionados nos documentos anteriores, projetos e portefólios.

Mais tarde, em 1998, a Associação de Professores de Matemática, edita *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*, com o principal objetivo de dar a conhecer a realidade portuguesa, nomeadamente, no que respeita aos instrumentos de avaliação usados e ao seu peso para a atribuição da classificação no final dos períodos letivos. Neste documento constava que as formas de recolha de dados mais usadas eram a observação do trabalho na aula, os testes escritos e as questões orais; as menos usadas eram os trabalhos escritos/relatórios e os projetos. Nas recomendações, foi referida a necessidade de os professores desenvolverem formas adequadas de registo da informação resultante da aplicação de instrumentos diversificados de avaliação, nomeadamente no que respeita aos dados relativos à observação do trabalho dos alunos na sala de aula.

Em 2000, o NCTM edita *Principles and Standards for School Mathematics*, onde se evidenciou a necessidade de colocar a avaliação ao serviço da aprendizagem do aluno, em particular no que respeita ao desenvolvimento de capacidades relativas à resolução de problemas, à comunicação, ao raciocínio, à demonstração e às conexões e representações matemáticas. Esta avaliação, que deveria incluir a auto-avaliação e a co-avaliação, tinha de servir dois propósitos: aumentar a aprendizagem e ajudar a tomar decisões sobre o ensino. Recomendava-se que a escolha do instrumento de avaliação a usar, devia ser, em cada momento, pensado em função dos objetivos que se pretendiam atingir e deveria também ter em conta a idade, a experiência e as necessidades dos alunos, de forma que todos tivessem oportunidade de mostrar o que sabiam fazer. A avaliação devia ser uma parte integrante das atividades letivas de forma a ser aplicada sem as interromper, mas fazendo parte destas. Recomendava-se o recurso a tarefas com qualidade, à discussão pública dos critérios de avaliação, ao questionamento e ao *feedback* sobre as produções dos alunos para que se construísse um ambiente favorável à autonomia e responsabilidade dos alunos pela sua própria aprendizagem.

O breve percurso sobre estes documentos leva a crer que a componente sumativa da avaliação, vista como uma medida, foi aos poucos dando lugar à componente formativa passando esta a ocupar um lugar central nas orientações curriculares, não só referentes à avaliação, mas também ao ensino e à aprendizagem. É uma outra forma de pensar a avaliação, agora associada à ação, desenvolvida no dia-a-dia e com o objetivo de ajudar o aluno a aprender e o professor a tomar decisões sobre o seu ensino. Por outro lado, uma avaliação que destacava essencialmente o que o aluno ainda não sabia fazer, foi dando lugar a uma avaliação de carácter positivo. Além disso, passou-se a desmistificar os processos avaliativos tornando-os claros para todos e, através da diversificação de instrumentos de avaliação oferecidos ao aluno pretendia-se proporcionar a igualdade de oportunidades para todos.

De uma avaliação cuja certificação e credibilidade era da responsabilidade exclusiva dos agentes educacionais exteriores à escola e exercida através de avaliações externas a esta, passou-se aos poucos a um reconhecimento da qualidade profissional do professor para exercer esse papel e, mais recentemente, a incluir também os alunos e os seus pares como intervenientes ativos no processo avaliativo.

A diversidade de formas e instrumentos de avaliação é uma orientação comum em todos os documentos acima citados e cuja recomendação de diversidade aumenta de tom à

medida que avançamos no tempo. Tais instrumentos envolvem diversos graus de formalidade, cobrem a escrita e a oralidade, o trabalho individual e de grupo, realizado numa só aula ou continuadas no tempo, simples como pequenas apresentações orais ou mais complexas como projetos.

Em suma, no passado, predominava uma avaliação sumativa, porque o ensino era entendido como um processo de transmissão de saberes em que o professor era o detentor do saber e o aluno um mero receptor passivo. Aprender significava pois, ser capaz de reproduzir o que o professor tinha transmitido. Neste contexto, a avaliação tinha como principal objectivo, medir o que o aluno tinha aprendido, tendo lugar em momentos formais, que interrompiam a normal atividade da sala de aula, ou eram feitas em avaliações externas. Entretanto foram surgindo novas teorias de ensino-aprendizagem e o ensino foi passando a ser visto como um processo social, de inter-relação entre todos os sujeitos presentes direta ou indiretamente. Assim, ensinar passou a ser gerir, orientar, construir situações favorecedoras da aprendizagem, orientar o aluno na correção dos seus erros, ajudar o aluno a entender o que se espera dele e o que deve aprender. O professor passa a ser visto como um profissional que reflete sobre a sua prática e a reajusta de uma forma fundamentada e, em relação à aprendizagem, a auto-avaliação passa a ter um papel fundamental. Assim, a avaliação ao serviço da aprendizagem passou a ter uma expressão cada vez mais forte. Além disso, com a *teoria da atividade* do construtivismo social, passou-se a reconhecer igualmente a co-avaliação como mais um contributo para a aprendizagem. Mas apenas em 2000, a auto-avaliação e a co-avaliação, que atribuem ao aluno um papel central, são visivelmente reconhecidas como partes essenciais da avaliação reguladora da aprendizagem (Santos, 2003). Assim, a avaliação que anteriormente se restringia a uma simples recolha de dados, passa a ter um nível elevado de complexidade, uma vez que passa a incidir sobre o processo de aprendizagem e não apenas sobre um produto final e em que cada aluno desempenha um papel ativo, reflexivo e responsável.

Avaliação reguladora das aprendizagens – Uma nova forma de avaliação formativa

Tanto nos documentos curriculares oficiais, como na legislação, encontramos fundamentalmente duas modalidades de avaliação: a sumativa e a formativa. A primeira não tem sofrido alterações conceptuais ao longo dos anos e sempre foi concebida para hierarquizar, selecionar e certificar. Já a segunda modalidade foi evoluindo ao longo do tempo (Santos *et al*., 2010). De facto, a avaliação formativa foi inicialmente concebida para identificar qual o grau de consecução dos objetivos por parte do aluno. Trata-se de uma avaliação focalizada em objetivos comportamentais e nos resultados obtidos pelos alunos, normalmente feita após a lecionação de um domínio do currículo num dado período de tempo, sob a forma de testes diagnósticos, testes formativos ou das chamadas *revisões da matéria dada* (Santos, 2008; Fernandes, 2006). Para os alunos que ainda não tivessem atingido tais objetivos, era proposto realizarem mais tarefas do mesmo tipo, abrandar o ritmo de ensino, ou simplificar os objetivos a atingir. Portanto, no passado, dado que todo o processo avaliativo se centrava fundamentalmente no professor, também na avaliação formativa cabia a este conhecer os critérios de avaliação para ajuizar e tomar as decisões necessárias. Desta forma, a avaliação formativa mantinha os tradicionais papéis do professor (perito e decisor) e do aluno (executor), sendo o ensino normalizado e a avaliação formativa de natureza retroativa (Santos, 2008; Santos *et al*., 2010).

A partir dos anos noventa do século XX a avaliação formativa começou a deixar de ser vista desta forma (Fernandes, 2006). Sem ignorar os produtos, passou a estar focada no processo de aprendizagem e a estar integrada neste. Além disso, passou-se a esperar que o aluno desenvolvesse a capacidade de intervir de forma fundamentada e intencional na regulação das suas aprendizagens (Archbald, 1991; Klenowski, 2002).

O conceito de avaliação formativa ganhou então uma nova identidade passando "a ser vista como um processo de acompanhamento do ensino e da aprendizagem" (Santos, 2008, p. 4), de uma forma mais integrada, mais contextualizada e na qual o aluno passa a ter um papel relevante (Fernandes, 2006). Do professor, exige-se que tenha em consideração o desenrolar das tarefas de aprendizagem (e não apenas o seu produto), que envolva o aluno no seu próprio processo de aprendizagem. O aluno deve passar a refletir sobre o seu trabalho, a rever os processos que utilizou, a detetar os pontos fortes

e os pontos mais fracos desses mesmos processos, a monitorizar e controlar o seu próprio percurso e, portanto, a desenvolver o seu sentido crítico, consciente e sistemático em relação ao seu trabalho (Almeida, 2008).

É evidente que esta forma de trabalho exige do aluno, competências que "permitam planificar, pensar criticamente, reformular, avaliar, reinventar, arriscar, aceitar o erro, aceitar críticas, aprender a ter sucesso e persistir" (Almeida, 2008, p. 120). Tratam-se de competências transversais contempladas em qualquer documento oficial nacional ou internacional e que, de facto, são fundamentais para que qualquer estudante seja, no futuro, um cidadão livre, responsável e confiante. Na atualidade, esta nova forma de concepção da avaliação formativa faz mais sentido uma vez que hoje não se pode saber ao certo qual o conhecimento que preparará melhor os alunos para o futuro. O que se pode fazer, porém, é saber o que é que eles precisarão para se tornarem aprendizes ao longo da vida, capazes de se adaptarem a mudanças futuras (Seitz & Bartholomew, 2008).

Para realçar esta mudança surgem expressões tais como "avaliação alternativa" (Fernandes, 2006), "avaliação autêntica" (Allal, 2002; Archbald, 1991) ou "avaliação reguladora" (Santos *et al*., 2010) cuja função é a mesma da avaliação formativa – contribuir para melhorar a aprendizagem dos alunos. Neste trabalho, optei por utilizar a última expressão para me referir ao significado atual de avaliação formativa. Trata-se de uma opção consciente, de subordinação a uma perspectiva teórica de avaliação formativa francófona, na qual a avaliação formativa é "como uma fonte de regulação dos processos de aprendizagem", ao invés, por exemplo, de uma teoria anglo-saxónica em que a avaliação formativa é quase confundida com *feedback* (Fernandes, 2006, p. 26). Não quero com isto dizer que o *feedback* não seja tido em consideração, mas não desempenhará um papel tão primordial, como o que ocupa na tradição anglo-saxónica. Na perspectiva francófona, o *feedback* tem um enquadramento teórico mais amplo, pois é considerado que este, por si só, não garante o desenvolvimento da aprendizagem; há que ter em conta as relações do *feedback* com os processos de ensino, com o desenvolvimento dos processos cognitivos e sócio-afectivos dos alunos, ou com a interação dos alunos com as tarefas (Fernandes, 2006).

O conceito de avaliação reguladora tem por base as teorias da aprendizagem mais recentes, que colocam o aluno, não no papel de executor, mas do de interveniente e proponente, tendo o professor esse mesmo papel. Desta forma, o aluno passa a ter um

papel central, não demitindo, no entanto, o professor de ter um papel essencial. Com efeito, este passa a ter um papel mais exigente e complexo: o de preparar e oferecer contextos favoráveis e apropriados de aprendizagem e de gerir e orientar os alunos no desenvolvimento desses contextos (Santos, 2008; Black & Wiliam, 2009). A função do aluno é o de ir evoluindo e autorregulando a sua própria ação.

Nesta perspetiva, numa avaliação reguladora, a prática avaliativa deixa de estar cingida a momentos formais de avaliação, passando a ser aplicada no dia-a-dia, incorporada nas atividades da sala de aula, em contraponto com uma avaliação que as interrompa (Perrenoud, 2004; Pinto & Santos, 2006b; Santos, 2005). Cabe ao professor estar regularmente atento às informações que vão sendo dadas pelos alunos, interpretar esses sinais no próprio momento e agir de seguida em conformidade, de forma a continuar a proporcionar contextos favoráveis para que se vá desenvolvendo no aluno uma atividade reguladora, de forma a ser cada vez mais autónomo na sua autorregulação. De facto, a avaliação reguladora exige que, durante o processo de ensino e aprendizagem, a avaliação seja orientada para a regulação (Perrenoud 1986 in Dias, 2005) e, por conseguinte, se destaquem processos cognitivos e metacognitivos tais como a automonitorização, a auto-avaliação ou a autorregulação, que, por natureza, são internos ao aluno (Fernandes, 2006).

Com forma de concretizar o conceito de autorregulação, Schoenfeld (1992) considerou a título de exemplo, que, estando no meio de uma atividade intelectual de resolução de problemas, se as coisas parecem estar a correr bem, o indivíduo continua no mesmo caminho; se não, faz um balanço e considera outras opções, mantendo assim um controlo sobre a forma como as coisas vão indo. Este acompanhamento e avaliação "on line" dos progressos realizados e agir no mesmo instante em conformidade com essa avaliação, são as principais componentes da autorregulação.

A tarefa de criar o contexto instrucional apropriado, e fornecer modos adequados de orientação, é desafiador e subtil para o professor. Também implica que o próprio professor reflita sobre estas questões e requer uma conceptualização substancial e uma engenharia pedagógica (Schoenfeld, 1992). Também é necessário encontrar instrumentos de avaliação das aprendizagens que ajudem os alunos a tornarem-se mais auto-dirigidos (autónomos) e mais responsáveis pelas suas próprias aprendizagens, e disponibilize estruturas que ajudem os professores a elaborarem um paradigma de mudança do *decisor* para o *facilitador da aprendizagem* (Seitz & Bartholomew, 2008).

Assim, desenvolver competências de autorregulação é difícil e requer modificações de comportamento em ambas as partes (dimensão comportamental) (Schoenfeld, 1992; Zimmerman, 2000).

Questões incluídas nos testes com ênfase em conhecimentos objetivos, e pouco tempo para os alunos pensarem e responderem, não são uma solução. Uma avaliação que considera o primeiro trabalho que o aluno faz como definitivo, não lhe permitindo momentos de reflexão onde possa reinventar, reformular e melhorar, impede que este julgue, pense e reflita sobre o seu próprio trabalho. Neste caso, a avaliação aparece frequentemente, como algo extrínseco ao próprio aluno, não o envolvendo e não o responsabilizando (Almeida, 2008). Para Almeida (2008), para que a avaliação seja reguladora há que ter em consideração o desenrolar das tarefas da aprendizagem, sem constrangimentos de tempo, durante as quais os alunos tenham oportunidade de evidenciar as suas capacidades e os professores possam acompanhar todo o processo, identificando os aspetos onde os discentes revelem mais limitações" (p. 121). Para Bryant & Timmins (2002) e Almeida (2008), o uso de portefólios de avaliação é um exemplo deste tipo de boas práticas. Na construção de um portefólio de aprendizagem, os alunos criam, pensam sobre o que criaram, refazem e assim sucessivamente até à apresentação do produto acabado. Trata-se de um trabalho que exige, por parte do aluno, capacidades e competências que permitam pensar criticamente, reformular, avaliar, aceitar os erros, aceitar críticas, arriscar e persistir.

O dizer avaliativo – *feedback* escrito

O *feedback* ou escrita avaliativa é um requisito obrigatório para que a avaliação assuma a sua natureza reguladora (Black & Wiliam, 1998; Fernandes, 2008; Santos, 2008). Note-se que, no entanto, que nem todo o *dizer avaliativo* pode ser considerado *feedback* para alguns autores. Por exemplo, para Moll (1996), fornecer, simplesmente, informações a respeito do desempenho não é *feedback* no sentido de que essas informações, só por si, não são capazes de desencadear ação no aluno, não lhe dá motivação, que é o elemento impulsionador da atividade (Leontiev, 1960 *in* Duarte e Eidt, 2007). Também Ramaprasad (1983, *in* Black e Wiliam, 1998) defende que só é possível dizer que houve *feedback* se a informação sobre a diferença entre o que o aluno

fez e o que seria desejável se for utilizada pelo aluno para diminuir essa diferença. A ação, ou conjunto de ações, que é suposto um *feedback* suscitar, só ocorrem se este *feedback* orientar clara e inequivocamente o aluno e ativar neste os processos cognitivos e metacognitivos que o ajudarão ultrapassar as suas eventuais dificuldades (Fernandes, 2008). Sadler (1989 *in* Dias 2008) ainda vai mais longe, alegando que se o aluno se limitar a seguir as indicações dadas pelo professor, então o *feedback* não cumpriu a sua função reguladora, o que vem ao encontro da diferença entre autocontrolo e autorregulação notada por Kopp (1982) e esclarecida no primeiro capítulo. Debrucemo-nos então um pouco sobre a natureza deste conceito.

O termo *feedback* aparece na literatura dividido em diferentes categorias que, no entanto, têm pontos em comum nas formas, conteúdos ou nos processos. Por exemplo, Fernandes (2008) divide o conceito de *feedback* em três categorias: a) o que incide sobre os resultados alcançados pelo aluno, e que pode levar, por exemplo, a tarefas de remediação; b) o que incide sobre os processos utilizados, que dá informação sobre as estratégias cognitivas e/ou metacognitivas que o aluno precisa de desenvolver para aprender com compreensão; c) finalmente, o *feedback* associado ao reconhecimento do esforço, à auto-estima do aluno. Já Black & Wiliam (1998), numa revisão de literatura sobre o tema, salientam dois grupos de *feedback*: aquele que é dirigido à tarefa, e aquele que é dirigido ao *self* e à motivação. O primeiro grupo abarca as duas primeiras categorias de Fernandes (2008), o segundo grupo, a última categoria. Gipps (1999, *in* Santos 2008) divide o *feedback* em *avaliativo* e *descritivo*. O primeiro acaba por ser um juízo de valor, com poucos efeitos de natureza reguladora. O segundo, que se foca no trabalho do aluno e na tarefa, subdivide-se em dois tipos: o de responsabilidade única do professor, que indica o caminho que o aluno tem de seguir para melhorar a sua produção; e o de responsabilidade partilhada, desenvolvido em colaboração com o aluno, de forma a que o aluno construa, ele próprio, o caminho a seguir. É sobre este último tipo de *feedback* que Gipps acredita que conduz o aluno a uma compreensão efetiva das tarefas, a uma reflexão e avaliação conscientes sobre o trabalho desenvolvido. O primeiro tipo de Gipps enquadra-se naquilo que Jorro (2000, *in* Santos 2008) apelida de *anotação como transmissão de informação*, o segundo tipo enquadra-se na *anotação como diálogo*.

Quanto à forma que o *feedback* pode assumir, Dias (2008) salienta que este tem de ser adequado ao perfil de cada aluno uma vez que um mesmo *feedback* a produções

semelhantes, não serve da mesma maneira qualquer aluno. Por exemplo, assinalar um erro através de um símbolo pode ser suficiente para um aluno com elevado desempenho o compreender e dar resposta; mas dificilmente será suficiente para um aluno com mais dificuldades. Para este, será importante incluir também de pistas explícitas de como melhorar (Santos & Dias, 2006).

Como cada indivíduo é único e o *feedback* deve ser adequado aos perfis de cada um, não pode existir uma *receita* única acerca das formas como o *feedback* deve ser dado. No entanto, é possível apresentar alguns resultados de estudos já efetuados. Por exemplo, estudos desenvolvidos no âmbito do projeto AREA, indicam que aos alunos com desempenho médio na disciplina de Matemática é mais favorável um *feedback* mais descritivo e menos simbólico (Santos & Dias, 2006). Black & Wiliam (1998) referindo-se a estudos efetuados por Turnstall & Gipps, dizem que o *feedback* dirigido essencialmente à auto-estima ou auto-imagem do aluno tende a não gerar os efeitos esperados neste. Os mesmos autores, referindo-se ao trabalho de Butler, referem que o *feedback* sob a forma de comentário pode produzir efeitos, enquanto que o *feedback* sob a forma de classificação, elogio ou nenhum comentário não motiva os alunos para a ação desejada. O comentário sob a forma de classificação dará ao aluno a ideia de algo já acabado, sem que faça então sentido o reformular. Santos (2008) acrescenta que um *feedback* telegráfico, culpabilizante ou preditivo em relação ao resultado, também não produz efeitos positivos no aluno. Já um *feedback* que estimule a reflexão, através, por exemplo, da colocação de uma questão que apele à melhoria da produção, é mais eficaz (Santos, 2008).

Um dos objetivos necessários para que o *feedback* seja útil é que o aluno o compreenda. Assim, o *feedback* deve ser dado numa linguagem acessível, concreta, contextualizada, e diretamente relacionada com a produção do aluno (Bruno, 2006 *in* Santos, 2008). Também para Pinto & Santos (2006b), uma escrita avaliativa capaz de ajudar o aluno na regulação da sua aprendizagem deve ser clara para que o aluno a consiga interpretar sozinho.

À clareza e objetividade do *feedback* para que seja autonomamente compreendido pelo aluno, Santos (2003c) junta as seguintes características que uma escrita avaliativa deve ter: a) dar pistas de forma que o aluno consiga prosseguir; b) incentivar o aluno a voltar a analisar o seu trabalho; d) dar relevância ao que o aluno conseguiu fazer bem para incentivar a autoconfiança e o reconhecimento consciente do saber; e d) não corrigir o

erro, mas dar ao próprio a possibilidade de o identificar e alterar. Santos (2008) reforça ainda que se deve evitar *feedback* com juízos de valor, simbólicos, normativos ou afirmativos. Deve-se sim, procurar dar *feedback* na forma interrogativa e de forma a ser um incentivo à reflexão por parte do aluno.

A quantidade de informação a dar é também um aspeto do *feedback* que se deve ter em conta. Não existe uma proporcionalidade direta entre a quantidade de *feedback* e o seu aproveitamento pelo aluno. Assim este deve ser doseado de forma a que seja dada apenas a informação necessária para o aluno avançar, e, de preferência de forma a dar a possibilidade de ser o aluno a identificar o seu erro, a corrigi-lo e chegar ele próprio à resposta correta (Wiliam, 1999 in Santos, 2008). A altura certa para dar *feedback* também deve merecer atenção por parte do professor. Este não deve surgir antes do aluno ter pensado e trabalhado na tarefa, o que pode acontecer quando, por exemplo, o aluno obtém a resposta da situação problemática antes da procurar resolver (Wiliam, 1999 *in* Santos, 2008). O *feedback* deve ser dado de forma a acompanhar o desenrolar da atividade para que, aos olhos do aluno, este lhe seja útil.

Para além destas considerações, Black & Wiliam (1998) salienta que há ainda que ter em conta dois aspetos que podem influenciar negativamente o uso do *feedback* por parte do aluno. Por um lado, o aluno pode não reconhecer a importância e utilidade, tendendo a não confiar nas reais intenções do professor. Por outro lado, o aluno pode nem sempre sentir confortável em pedir o auxílio do professor. Uma forma de prevenir estes *perigos*, passa por providenciar *feedback* de forma regular e sistemática, de forma a que o aluno possa começar a desenvolver competências de autorregulação da sua aprendizagem *durante*, e não apenas no *final*, de um determinado período de ensino e aprendizagem (Fernandes, 2008). Na mesma linha, NCTM (95/99) defende que o desenvolvimento da autonomia do aluno está intimamente relacionada com a regularidade com que este recebe *feedback*. As vantagens da aplicação regular do *feedback* podem ser notadas em diferentes níveis. Em primeiro lugar, o aluno passa a compreender de que forma o *feedback* o pode ajudar a aprender. Depois a comunicação entre professor e aluno melhora pois o aluno vai compreendendo melhor aquilo que é escrito ou dito pelo professor e o que este pretende que faça e, da parte do professor, há uma compreensão da forma de comentário que é mais eficaz para esse aluno, permitindo-lhe aperfeiçoar o seu *feedback*. Em terceiro lugar, há uma abordagem mais compreensiva do erro, que passa a ser visto como algo natural e próprio do processo de aprender. Por último, há

um aumento do conhecimento das especificidades de cada aluno, dos seus pontos fortes e pontos a aperfeiçoar, permitindo que os dizeres avaliativos futuros sejam cada vez mais adequados.

Receber *feedback* é um "direito" (NCTM, 95/99, p. 4) que cada aluno tem e do qual deve usufruir "em múltiplas ocasiões e em diferentes tipos de tarefas" (p. 39) pois é através dele que "os alunos encontram estruturas que os guiam no sentido de superar erros e conseguir aprendizagens significativas" (Menino, 2004, p. 221). As observações e os resultados que os alunos apresentam devem ser recebidos pelo professor, quer estejam certos ou errados, ao qual caberá dar *feedback* apropriado e de forma a que muitas das decisões de aprendizagem sejam transferidas para eles (Holding, 1991; Frobisher, 1994)

Portefólio

São muitas as profissões que exigem o desenvolvimento de projetos em que se faz, se pensa sobre o que se faz, se refaz e assim sucessivamente até ao produto final. Tais trabalhos exigem capacidades para planificar, pensar criticamente, reformular, arriscar, aceitar os erros e as críticas, aprender a ter sucesso, e persistir (Fernandes (Org.), 1994). Tratam-se de capacidades que nos dias que correm são fundamentais num cidadão livre, responsável e confiante, mas que não são tidas em conta quando na avaliação as questões colocadas têm ênfase em conhecimentos *objetivos* ou os primeiros trabalhos dos alunos são considerados definitivos, não havendo lugar para a reflexão e, consequentemente, para a reformulação. Torna-se então necessário investigar práticas alternativas ou suplementos da avaliação tradicional das quais o portefólio é um sério candidato (Abruscato, 1993).

Características de um portefólio

A ideia do portefólio em educação vem da ideia de portefólio já existente no mundo artístico e profissional, como forma de "transportar em folha" os melhores trabalhos que um indivíduo já realizou. *Portare* (transportar) + *Foglio* (folha). Trata-se de uma forma

de poder mostrar aos outros o que de melhor o indivíduo já fez (Sá-Chaves, 2005; Almeida, 2008). No entanto, no contexto educativo, o portefólio tem vindo a ser adotado e aprofundado nacional e internacionalmente nos diferentes níveis de escolaridade, extravasando muito a ideia que lhe dá origem, mas cuja definição e caraterização são também função dos objetivos e do modo como é utilizado, nunca se tratando apenas de uma compilação de trabalhos realizados (Sá-Chaves, 2005).

Existem diversos tipos de portefólios em prol da formação do aluno e do desenvolvimento de competências que a escola e o sistema educativo defendem. Bernardes & Miranda (2003) salientam dois tipos fundamentais: o portefólio de apresentação (ou de evidências) e o portefólio de aprendizagem. Em ambos constam reflexões e auto-avaliações do aluno sobre as suas produções, no entanto, no portefólio de apresentação constam apenas os melhores trabalhos do aluno e o porquê das suas escolhas, ao passo que no de aprendizagem é possível encontrar não só trabalhos terminados, mas também trabalhos em desenvolvimento, sendo as escolhas determinadas pelo aluno, após negociação com o professor, e não têm necessariamente de corresponder aos melhores produtos do aluno. No portefólio de apresentação pretende-se essencialmente ilustrar as competências que o aluno adquiriu e o que de melhor ele já consegue fazer; no de aprendizagem pretende-se essencialmente ilustrar o desenvolvimento do aluno, co-responsabilizá-lo pela sua aprendizagem e avaliação. Para Bernardes & Miranda (2003), a utilidade do portefólio de apresentação está em encorajar o aluno a esforçar-se por realizar um trabalho de qualidade, em poder mostrar ao professor e encarregado de educação aquilo que ele valoriza e mostrar as suas melhores produções. A utilidade do portefólio de aprendizagem está em incentivar o aluno a refletir sobre o seu percurso escolar, tomar consciência das suas aprendizagens, de forma a geri-las mais eficazmente e fixar os seus objectivos individuais. Para o professor, a utilidade do portefólio de aprendizagem está em ajudá-lo a conhecer melhor o aluno e as suas necessidades, a ajustar as suas estratégias de ensino, a recolher um maior e mais consistente conjunto de evidencias acerca do percurso do aluno, o que, por conseguinte, permite informar com mais clareza o encarregado de educação e a escola permitindo também a eles acompanhar e compreender melhor o desenvolvimento do aluno.

Consoante os propósitos que o professor tem em mente para a utilização do portefólio e a articulação destes aos seus alunos e à escola, assim podem existir várias

conceptualizações de portefólio, sendo pois conveniente clarificar o tipo de portefólio que está na base do presente estudo. O sentido que aqui lhe é atribuído é o adoptado por Santos *et al*. (2010) e Fernandes *et al*. (1994): "uma coleção de produções feitas pelo aluno, individualmente ou em grupo, na sala de aula ou fora dela, consciente e criteriosamente selecionadas, e justificadas através de reflexões que devem acompanhar cada produção" (Santos *et al*., 2010, p. 18), "de forma a poder proporcionar uma visão tão alargada e pormenorizada quanto possível das diferentes componentes do seu desenvolvimento (e.g., cognitivo, metacognitivo, afectivo, moral)" (Fernandes *et al*., 1994, pp. 2-3). Na mesma perspetiva, Klenowski (2002) acrescenta que o portefólio documenta as realizações durante um período de tempo alargado. Trata-se de uma coleção que ilustra conquistas e demonstra aprendizagens feitas para objetivos particulares e que serve tanto para a avaliação sumativa como para a avaliação formativa. As auto-avaliações são uma parte integrante do processo e envolvem julgamentos sobre a qualidade do desempenho e das estratégias de aprendizagem envolvidas. É portanto, muito mais do que uma coleção de tarefas.

O portefólio é então visto como uma coleção de produções feita pelo aluno em que cada seleção deve ser justificada através de uma reflexão que a acompanha. A própria seleção de trabalhos realizados implica que o aluno tenha de refletir sobre o que fez, atribuir um significado às diversas experiências de aprendizagem que vivenciou, em particular naquelas que decidiu escolher (Santos *et al*., 2010). Os trabalhos a inserir não são, necessariamente, os melhores que o aluno fez (isso até perverteria a essência/razão de ser do portefólio), mas todos os que constituem marcas importantes do percurso de aprendizagem do aluno. Por outro lado, o facto de o aluno ter de passar as suas reflexões para a forma escrita faz com que tenha de clarificar as suas ideias, reorganizá-las e estruturá-las (Pinto & Santos, 2006). Na construção de um portefólio o processo sistemático de reflexão e auto-avaliação implica fortemente o aluno nas tarefas de aprendizagem e é desta forma que vão construindo o conhecimento (Almeida, 2008). Os elementos escolhidos são sempre datados. Para além disso, o portefólio é um documento de avaliação em constante reformulação e nunca um produto acabado. Com efeito, em qualquer altura o aluno pode reformular, melhorar ou substituir alguns dos trabalhos já escolhidos (Santos *et al*., 2010). Qualquer portefólio de aprendizagem é, desta forma, caraterizado pela autenticidade e capacidade de documentar a aprendizagem do aluno durante um determinado período de tempo (Wing, 2006).

Na opinião de Bernardes & Miranda (2003), aspetos como os acima referidos, é que distinguem um portefólio de uma compilação tradicional de trabalhos, a que usualmente apelidamos de dossiê. Num dossiê, os trabalhos não têm de ser datados nem serem representativos do trabalho desenvolvido, o aluno não faz reflexões, não estabelece objetivos nem estratégias para a sua própria aprendizagem. Trata-se de um arquivo morto que, uma vez guardado, facilmente se menospreza ou esquece.

Também o que distingue o portefólio dos outros instrumentos de avaliação reguladora (teste em duas fases, relatório escrito) é a obrigação de ter de selecionar e, associado a isso, a reflexão. A capacidade de reflexão e o progresso é o que de mais importante o portefólio tem. Não deve ser considerado como critério de avaliação a qualidade das tarefas porque isso perverte a essência do portefólio. Não é necessário recolher essa informação no portefólio, para isso são usados outros instrumentos de avaliação. Naturalmente que o portefólio também vai ser usado para avaliação sumativa caso contrário não seria valorizado pelo aluno, mas o que vai ser avaliado é a evolução que o aluno revelou ter. Por esta razão, o portefólio não deve ser feito na véspera de uma ficha de avaliação sumativa ou de qualquer outro momento formal de avaliação, nem apenas no fim de um período letivo pois enviesaria o propósito do portefólio e retirar-lhe-ia todas as vantagens da avaliação reguladora potenciada por este (Santos *et al*., 2010).

Costa *et al*. (2006) alegam que, independentemente das diferentes concepções, objetivos específicos e formatos por que se opte, os portefólios têm todos certas dimensões ou focos em comum, que se destacam de uma forma mais ou menos explícita. São eles: (i) a reflexão – qualquer portefólio tem como foco estimular e ativar o pensamento reflexivo pelo que é esperado encontrar num portefólio evidências de auto-reflexão; (ii) a evolução – estimular e realçar o esforço e o progresso, e portanto a evolução na aquisição e integração pessoal, não só de conhecimentos, mas também de competências; (iii) a comunicação – que é fomentada entre todos os intervenientes do processo educativo; (iv) a visualização – o portefólio é uma forma de registar e documentar a própria aprendizagem, tornando visíveis as aquisições feitas; (v) a decisão – ao facilitar a participação do aluno na seleção do conteúdo e nos critérios de avaliação, dá ao aluno um certo poder de decisão; (vi) a estruturação – não só a estruturação do pensamento, como também a forma como as informações são dadas e recolhidas; (vii) a motivação – uma vez que implica o aluno no processo de aprendizagem, promove a sua autonomia, que é a forma mais eficaz de motivação; (viii) a participação – envolve ativamente todos

os participantes na aprendizagem e na avaliação, num processo de interação contínuo e dinâmico.

Costa *et al*. (2006) afirmam que cada uma destas dimensões está interligada com as outras, cada uma se desenvolve de acordo com o desenvolvimento das outras. Seitz & Bartholomew (2008), corroboram a ideia anterior. Assim, a título de exemplo, estas autoras definem o processo de reflexão como sendo "o momento de revisitação e revisão do trabalho, pensar sobre os pontos fortes e fracos e definir metas para futuras oportunidades" (Seitz & Bartholomew, 2008, p.6). Desta forma, o processo de reflexão ajuda os alunos a desenvolver a capacidade de saber como pensaram e a estruturar o seu pensamento (dimensão da estruturação). Isso torna-os mais confiantes em si mesmos; dá-lhes o incentivo necessário para assumir riscos no futuro (dimensão da motivação).

Com efeito interativo, o portefólio pode constituir um importante contributo para a aprendizagem, desenvolvida através da auto-avaliação, do *feedback* dado externamente, da reflexão sobre o que se aprendeu e como se aprendeu, da identificação dos pontos fortes e fracos, a necessitar de desenvolvimento (Pinto & Santos, 2006). Seitz & Bartholomew (2008), para além do apoio ao aluno na sua própria aprendizagem, também referem o apoio ao seu ser emocional. Com efeito retroativo, através da obtenção de uma imagem, tão nítida quanto possível, das aprendizagens que o aluno desenvolveu ao longo de um dado período de tempo, das suas experiências, dificuldades e progressos (Fernandes, 2008). O portefólio produz um retrato fiel e integral do aluno (Klenowski, 2002), e pode ser usado para fornecer evidências e demonstrar a responsabilidade no cumprimento de normas e de medidas de referência (Seitz & Bartholomew, 2008). Por estas razões, o portefólio de aprendizagem é considerado por Bryant & Timmins (2002) como uma das formas mais holísticas de avaliação.

Costa *et al*. (2006) também consideram que o portefólio pode constituir um "meio poderoso ao serviço da renovação das práticas educativas se entendido como estratégia metacognitiva sobre o ensino" (Costa *et al*., 2006, p. 109). Além disso, para Seitz & Bartholomew (2008), o portefólio pode ter interesse para o professor, diretores e encarregados de educação pois, pondo em evidência o cumprimento dos objetivos, permite avaliar o cumprimento do currículo.

O desenvolvimento de um portefólio

A parte mais crítica do portefólio de aprendizagem é a fase da conceptualização e planeamento das fases de implementação e avaliação. Trata-se de uma fase que se torna permanente, focando a melhoria contínua. Mesmo depois de se dar início à fase de implementação, o planeamento não é uma fase terminada e estática, mas sim flexível, emergente de melhoramentos e adaptações contínuos (Bryant & Timmins, 2002). Acerca desta ideia, Klenowski (2002) refere o termo "reciclagem" sempre que seja necessário.

Planificação

Alves & Gomes (2007) defendem que quando se pretende implementar o portefólio em contexto escolar, a primeira questão é saber o que se pretende com este instrumento. Trata-se de uma clarificação dos objetivos iniciais, determinante para dar início a toda a estratégia de implementação. Tais objectivos podem passar, por exemplo, por fomentar a reflexão por parte dos alunos; proporcionar uma melhor observação e avaliação da aprendizagem dos alunos no decorrer de um período ou ano lectivo; permitir observar o desenvolvimento de competências e aprendizagens que são difíceis de avaliar através das tradicionais fichas de avaliação sumativas, as atitudes face aos problemas, o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática, entre outros.

Depois de decidir quais são os objectivos, é necessário refletir sobre as evidências que serão necessárias para os conhecimentos e competências exigidas, decidir a estrutura do portefólio, recolher opiniões sobre o que devem ser os critérios, escrever os respetivos descritores, e depois decidir como o professor e os alunos irão avaliar o portefólio, tanto como processo, como produto final – que inclui uma calendarização e estabelecimento dos momentos informais e formais de avaliação (Bryant & Timmins, 2002).

Dado se tratar de uma forma de avaliação cuja prática é pouco generalizada na disciplina de Matemática no ensino secundário (Santos *et al*., 2010) e que terá impato sobre a cultura escolar do aluno, sobre as suas expectativas e motivação, é necessário planear a introdução do portefólio junto dos alunos e de outros intervenientes na

educação, nomeadamente clarificar os alunos e os seus encarregados de educação sobre o que se entende por portefólio, quais as suas potencialidades pedagógicas e todas as componentes e processos inerentes à fase de execução do portefólio (Bryant & Timmins, 2002). Só desta forma esta informação junto do encarregado de educação é essencial para evitar que a ação deste, junto do seu educando, não seja desvalorizada ou contrária à do professor (Allal, 2002; Santos (Org.), 2010), e todos os intervenientes podem responder às exigências da situação em tempo útil, atender às expetativas das partes interessadas, e orientar a reforma no sentido acordado (Bryant & Timmins, 2002).

Uma sugestão dada por Santos *et al*. (2010) para ajudar este processo informativo passa por elaborar um pequeno texto de apoio, que inclua os objetivos e a estrutura do portefólio pretendidos. Bryant & Timmins (2002), referem um leque variado de sugestões, a salientar: a) a apresentação de vídeos ou de um *powerpoint* para traçar o plano de fundo, a teoria, os processos e procedimentos envolvidos na utilização do portefólio; b) conceder aos alunos amostras/exemplos de portefólios para ajudá-los a entender o formato, as provas e normas exigidas; c) proporcionar linhas orientadoras que torne explícito o que é esperado com o portefólio – o *design* do portefólio, as competências que são exigidas que o aluno demonstre e os indicadores de realização que o aluno pode optar por incluir no seu portefólio; d) partilhar o processo de avaliação com os alunos, discutindo os critérios que serão utilizados, esclarecer os descritores e dar exemplos de diferentes graus de consecução para ajudar os alunos a compreender as normas exigidas; e) estabelecer mapas de progresso para indicar claramente quando os alunos devem demonstrar competências e quando eles precisam desenvolver competências.

Implementação

Se para o professor é realmente importante a elaboração do portefólio justifica-se que este dedique algumas aulas ou partes destas para apoiar os alunos na elaboração desta ferramenta. Caso contrário, a prática não corroboraria o discurso que valoriza o portefólio (Santos *et al*., 2010). É natural que este apoio seja mais frequente e moroso no início do processo, podendo, à medida que o portefólio for sendo mais familiar aos

alunos, ser aligeirado. Esta ajuda tem particular cuidado no que concerne à escrita das reflexões e auto-avaliações, uma vez que se tratam de atividades de ordem superior (Santos *et al*., 2010; Klenowski, 2002). Para ajudar os alunos nestes processos metacognitivos Santos *et al*. (2010) sugere que o professor construa um guião de apoio no qual pode colocar questões que orientem o aluno, tais como: "o que aprendeste?"; "De que modo esta tarefa te ajudou a aprender?"; "Quais as principais dificuldades com que te deparaste?"; "como conseguiste ultrapassar as dificuldades?; "Como poderias melhorar o que fizeste?". Bryant & Timmins (2002) e Wing (2006) acrescentam que, para além de os alunos terem de ser ensinados a desenvolver a prática reflexiva, também terão de ser ajudados a fazer uma seleção válida, confiável e que seja susceptível de facultar provas suficientes para sustentar a aquisição das competências.

No processo de construção do portefólio, a interação professor e aluno é indispensável e até potencializada (Seitz & Bartholomew, 2008), Através desta interação, o professor passa a ter muitas oportunidades para conhecer melhor o aluno através do acesso aos seus pontos de vista e impressões sobre as propostas de aprendizagem por si feitas. Por outro lado, o aluno pode aprender com os comentários e perguntas colocadas pelo professor. O professor também é levado a sentir uma maior necessidade de explicitação do que pretende do aluno, em particular dos critérios de avaliação (Santos *et al*., 2010).

Write (2004) usa o termo *scaffolding* (andaime) para caraterizar o seu papel como professora na construção do portefólio de aprendizagem dos seus alunos. Muitos não sabem como prosseguir numa tarefa ou conteúdo específico. Nestes casos, em cada entrada do portefólio, o professor através da sua apreciação do trabalho, pode orientar o aluno no processo de compreensão da tarefa ou conteúdo. Tal orientação equivale ao fornecimento de um *scaffold* no sentido de que o indivíduo mais experiente sustenta ou fornece um andaime ao indivíduo menos conhecedor de forma a que este último possa melhorar o seu desempenho.

Avaliação

Ao contrário da maioria das formas tradicionais de avaliação, em relação ao portefólio não existem respostas certas ou erradas. Em vez disso, existem graus de consecução que indicam se uma pessoa está bem ou mal sucedida. Assim, é preciso avaliar o

desempenho de forma a que se permita que sejam tomados esses graus em consideração. Isto pode ser conseguido através da criação de descritores para cada um dos critérios e para cada nível de desempenho (Bryant & Timmins, 2002).

Os critérios de avaliação constituem uma forma de explicitar os aspetos que vão ser alvo de análise, em detrimento de outros considerados menos importantes. Para Santos (Org.) (2010) tais critérios podem tomar contornos distintos em função do significado ou da função que lhe atribuímos. Com efeito, se a referência for a avaliação enquanto medida, os critérios têm como referência normas que permitem obter uma certa medida, pelo que são quantificáveis e incidem sobre o produto final esperado. Os critérios são prescritivos e não negociáveis e geralmente se confundem com as próprias normas (ou estas estão dissimuladas com os critérios). Se a avaliação for tomada numa perspetiva reguladora, terá como referência objetivos que podem ser redefinidos, no sentido de que, tendo consciência de que não é possível trabalhar tudo simultaneamente, são feitas escolhas a ser concretizáveis durante um determinado período de tempo e que, uma vez trabalhadas, deixam de ter importância (porque o aluno já aprendeu) e dão lugar a outros objetivos. Assim, nesta perspectiva os critérios destacam características de qualidades que se esperam que acompanhem o desenvolvimento de certas ações, mas que permitem a cada um a escolha do percurso.

No presente estudo consideram-se descritores como o referido por Klenowski (2002): "níveis de excelência ou qualidade" aplicáveis ao longo de uma escala de desenvolvimento para cada critério. Bryant & Timmins (2002) salientam que bons descritores levam tempo a ser desenvolvidos, tanto quanto o próprio processo de avaliação de portfólio. Além disso, é importante que o professor aprenda com a experiência: depois de vários ciclos de portefólio, o professor vai aprimorando estes aspetos e também se vai tornando mais fácil para ele projetar tarefas que representam com precisão a aprendizagem necessária para o aluno. E no final do processo, o professor e o aluno aprenderam muito mais do que com exames ou testes.

Tal como acontece com o desenvolvimento dos critérios, também aqui é útil envolver os alunos no processo de construção dos descritores, pois pode ser uma boa experiência de aprendizagem para eles. Uma forma de o fazer é mostrar-lhes exemplos de uma mesma tarefa realizada a vários níveis, e em seguida, discutir em que medida os diferentes elementos dos critérios foram exibidos. No entanto, se não houver oportunidade de os alunos ajudarem a criar os diferentes descritores, é preciso compartilhar esses

descritores com os alunos logo no início do processo, pois só um completo entendimento de cada competência pode ajudar o aluno a organizar o seu portefólio com eficácia e demonstrar a realização dos requisitos do módulo ou no período de tempo a que se reporta o portefólio. Convém que os descritores, que definem os diferentes níveis de proficiência para cada critério, sejam justos, simples e reflitam exatamente o critério correspondente (Bryant & Timmins, 2002).

No decorrer do processo de elaboração do portefólio, deve haver discussões regulares entre professor e aluno, como parte da avaliação formativa. Assim, quando no final do período a que se reporta o portefólio, o professor e o aluno terão uma visão mais clara do que precisa estar no portefólio e do progresso de aprendizagem que o aluno fez. Depois o portefólio pode ser finalmente apresentado na data designada para a avaliação sumativa. Além disso, esta explicitação/negociação dos critérios, intrinsecamente presente no conceito de avaliação reguladora, também é indispensável por questões de ordem ética e pelas orientações curriculares em vigor. Com efeito, para Santos (Org.) (2010), não seria eticamente justo envolver o aluno num processo sem o informar de forma explícita de quais são as regras, ou seja, sem lhe dizer de forma clara o que se espera e o que vai ser valorizado. Também, e a título de exemplo, o critério da transparência que consta no Despacho Normativo n.º 1/2005 , em vigor, estabelece que a transparência e o rigor do processo avaliativo deve ser efectuado através da clarificação e explicitação dos critérios escolhidos; também se pode ler que "o órgão de direção executiva da escola ou agrupamento deve garantir a divulgação dos critérios (…) junto dos diversos intervenientes, nomeadamente os alunos" (p.17).

Não é suficiente comunicar aos alunos os critérios para que, automaticamente, estes se apropriem deles. Há necessidade de um trabalho com continuidade no tempo para que a compreensão e apropriação destes se vá desenvolvendo. No sentido de facilitar esta adaptação Santos *et al*. (2010) propõe algumas estratégias como: (i) negociar os critérios com os alunos e não apenas informá-los; (ii) usar trabalhos de alunos de anos anteriores para ilustrar o que se espera dos alunos; (iii) comentar trabalhos dos alunos tomando por referência os critérios; (iv) recorrer à co-avaliação entre pares; e (v) levar os alunos a autoavaliarem-se, confinando o seu trabalho com as apreciações feitas.

Write (2004) define critérios de avaliação e, para cada critério, o desempenho do aluno é classificado como exemplar, bom, suficiente ou inadequado. Incentiva o aluno a prestar *feedback* acerca da percepção da sua própria aprendizagem, ocorrida na

realização de cada tarefa (entrada) do portefólio. Depois coleciona este tipo de avaliações da aprendizagem do aluno até ao fim de cada semestre (na nossa cultura pode ser até ao fim de cada período e/ou ano letivo) e usa essa informação para ajustar as tarefas do portefólio no semestre seguinte e para averiguar sobre o que funcionou bem e o que poderia ser melhorado. A avaliação sumativa final é o meio pelo qual esta professora atribui uma classificação final ao portefólio do aluno e fornece-lhe informação acerca da adequação do seu trabalho para o portefólio final. Já Bryant & Timmins (2002), sugerem que, para cada competência, o aluno deva apresentar uma reflexão, suportada com evidências da sua aprendizagem e/ou experiências de aprendizagem. A reflexão constitui uma oportunidade para o aluno analisar e ilustrar a forma como ele alcançou determinada competência para o módulo ou no período de tempo a que se reporta o portefólio.

Potencialidades

Os aspetos mais importantes na avaliação em Matemática escolar, referenciados nos principais documentos nacionais e internacionais podem ser enumerados da seguinte forma: a) a avaliação é parte integrante da aprendizagem; b) as diferentes aprendizagens de cada aluno devem ser avaliadas; c) a avaliação deve ser um processo transparente; e d) a avaliação deve basear-se em fontes de informação diversificadas (Alves & Gomes, 2007). O portefólio, desenvolvido simultaneamente numa perspetiva de aprendizagem e de avaliação, configura-se como uma abordagem compatível com os princípios acima citados pelas razões que a seguir se enumeram.

O portefólio é uma via possível de fazer com que a avaliação constitua uma parte integrante da aprendizagem dando lugar a diversos elementos e momentos de avaliação, em vez de momentos pontuais que na sua maioria são exclusivamente focados na avaliação (Alves & Gomes, 2007). Aliás, como já foi referido, tratando-se de uma forma de avaliação reguladora, está incutida nas atividades matemáticas da disciplina, não requerendo a interrupção destas para que se proceda à avaliação (Perrenoud, 2004; Pinto & Santos, 2006b; Santos, 2005).

Permite regular o ensino do professor e a aprendizagem dos alunos (Alves e Gomes, 2007) pois, por um lado, favorece uma melhor tomada de decisões do professor no que

se refere à orientação do processo de ensino-aprendizagem, de forma a melhor acompanhar, promover e regular o progresso dos seus alunos (Alves & Gomes, 2007). Por outro lado, Almeida (2008) e Bryant & Timmins (2002) afirmam que os alunos desenvolvem uma maior compreensão do seu estilo particular de aprendizagem quando se auto-avaliam e refletem sobre os elementos que selecionaram para incluir no portefólio. Os alunos tornam-se mais capazes de autorregulação, ganham controlo pessoal e independência na sua aprendizagem. Autores como Walther (1986), Bishop & Goffree (1986) e Christiansen & Walther (1986), defendem que os dois fatores principais que resultam na aprendizagem do aluno são a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela fazem. Ora, como defende Klenowski (2002), os processos e práticas pedagógicas associadas ao portefólio promovem o desenvolvimento da metacognição que envolve saber *como*, *quando*, *onde* e *porquê* se aprende. De facto, Pinto e Santos, (2006), alegam que o aluno, ao ter de fazer uma seleção de trabalhos, leva a que este tenha de refletir sobre o que fez, sobre o significado que teve para ele próprio as diferentes experiências de aprendizagem, em particular aquelas que decidiu selecionar, as suas necessidades e dificuldades. O ter de passar para a forma escrita esta análise, faz com que ele tenha de reorganizar as suas ideias, clarificá-las e estruturá-las (NCTM, 2000/07; Pinto & Santos, 2006).

As tradicionais fichas de avaliação, apesar da sua grande aceitação social, apenas visam avaliar determinados aspetos do currículo dos alunos. O portefólio permite uma visão mais holística do trabalho do aluno e da sua evolução, não só em relação a aspetos de natureza cognitiva – em particular aos processos a que os alunos recorrem para obter os seus resultados, a capacidade de raciocinar, de resolver problemas, etc.; mas também de natureza afetiva – nomeadamente, os seus temas preferidos, os seus pontos de vista e sentimentos em relação à Matemática (Alves & Gomes, 2007; Almeida, 2008).

A realização do portefólio implica a existência de variados momentos personalizados de interação entre professor e aluno (Alves & Gomes, 2007; Santos, 1997). O professor terá inevitavelmente necessidade de explicitar de forma mais pormenorizada e clara os seus critérios de avaliação. O aluno compreenderá melhor o que é relevante para o professor na sua aprendizagem e terá oportunidade de ir aumentando progressivamente o seu nível de intervenção e de responsabilização pessoal na sua própria avaliação e no seu processo de aprendizagem, desenvolvendo competências que lhe serão úteis para a sua vida futura (Santos, 1997). O aluno é continuamente incentivado a desenvolver o

seu poder matemático através de estratégias de *feedback* do professor. Por sua vez, o aluno faculta informações ao professor através das suas reflexões individuais e desempenho. No caso dos encarregados de educação serem incentivados a consultarem o portefólio e o diálogo for estimulado, este instrumento pode constituir um meio facilitador do envolvimento da família nas atividades escolares dos alunos.

A avaliação sumativa atribuída no final de um período ou de um ano letivo é pouco informativa e ambígua. Basta pensar na informação que um professor poderá extrair de uma classificação dada por outro professor no ano transacto. Além disso, a mesma classificação atribuída a dois alunos, não quererá dizer que eles saibam o mesmo e que tenham as mesmas capacidades. O portefólio apresenta-se como uma forma de contornar esta ausência de informação pois torna possível dar conhecimento a outros daquilo que o aluno foi capaz de fazer num certo período de tempo, que pode ser um ano letivo ou uma sequência de anos letivos (Santos, 1997).

O portefólio torna a avaliação mais transparente uma vez que a desmistifica e a desdramatiza. A avaliação através do portefólio coloca o professor e o aluno como colaboradores na avaliação, ao invés de estarem em lados opostos, um como juiz, outro como acusado, com os inevitáveis receios e ansiedades (Santos, 1997).

Como a construção de um portefólio pressupõe decisões por parte do aluno, valoriza o seu sentido de autonomia e sentido de responsabilidade relativamente à sua aprendizagem e à sua avaliação (Alves e Gomes, 2007). Bryant e Timmins (2002) alegam que os alunos ganham uma maior clareza sobre as suas obrigações e que o portefólio também tem a vantagem de fornecer aos pais e/ou outros membros da comunidade escolar produtos e provas diretamente observáveis e compreensíveis sobre o desempenho dos alunos.

Em suma, o portefólio é uma forma de promover a mudança da praxis educativa que, pelas razões acima explanadas, aparece inerente à própria utilização do portefólio (Alves & Gomes, 2007).

Constrangimentos e dificuldades

A implementação de portefólios está geralmente associada a uma sobrecarga de trabalho por parte do professor, nomeadamente para os que têm turmas muito grandes e/ou muitas turmas de alunos; e surge também o fator tempo (Alves & Gomes, 2007; Menino, 2004; Seitz & Bartholomew, 2008; Wing, 2006). Uma forma de contornar estes constrangimentos passa por uma boa planificação prévia, com uma definição clara dos objetivos, da estrutura, dos tipos de materiais a incluir, dos princípios e critérios de avaliação do portefólio, e uma sistematização e organização de rotinas por parte do professor (Alves & Gomes, 2007, Seitz & Bartholomew 2008), alegam que quando os professores vêem o valor que o portefólio pode ter, não só para a aprendizagem, mas também para a obtenção de uma verdadeira fonte de evidências do conhecimento e apropriação dos objetivos, muitos professores mudam de ideias.

Na perspetiva do aluno, Alves & Gomes (2007), e Bryant & Timmins (2002) referem o tempo de adaptação dos alunos ao portefólio como sendo uma das dificuldades na implementação do portefólio. A participação e envolvimento dos alunos não é imediata. Só passado algum tempo é que os alunos conseguem estabelecer rotinas de trabalho e constroem o portefólio de forma natural, com benefícios para a sua aprendizagem. Além disso, há que estabelecer algumas orientações aos alunos para que não surjam situações como a organização apressada do portefólio, a preocupação exagerada no aspeto gráfico em detrimento do seu conteúdo, a colocação de materiais irrelevantes para a aprendizagem, ou ainda, e não menos importante, reflexões cingidas a frases curtas, pré-definidas e sem correlação com a atividade em si (Alves, 2006a; Alves & Gomes, 2007). Também Wing (2006) alerta para as dificuldades que o portefólio traz aos aluno na escrita das reflexões, na seleção de elementos de prova do alcance de determinada competência e ainda acrescenta a dificuldade na classificação (alguns alunos tendem a sobrestimar as suas capacidades e outros a subestimá-las). Para este autor, quando os alunos não estão habituados a auto-avaliarem as suas capacidades, vão ter dificuldades na seleção de elementos de prova de uma certa competência. Confrontados com a escolha, vão querer incluir muitos mais elementos do que aqueles que são necessários ou tentam a sua sorte escolhendo intuitivamente. Assim, auto-avaliações imprecisas e escolhas inadequadas para as provas podem posteriormente afectar as suas declarações

reflexivas, pelo que não deverá surpreender que os alunos incluam provas que não justifiquem (condigam) com o que eles escrevem nas suas reflexões.

A fim de contornar estes constrangimentos Alves & Gomes (2007) mencionam a necessidade de dar aos alunos indicações expressas em relação à estrutura que o portefólio deve ter, ao tipo de material que lá devem colocar e como proceder na escrita das reflexões. É importante que o aluno também receba *feedback* formativo do docente na fase inicial de desenvolvimento. Esse *feedback* ajudará a definir o que o aluno sabe e pode fazer, e vai facilitar o planeamento para continuar a aprender (Bryant & Timmins, 2002). Refletir é uma atividade que pode demorar tempo a desenvolver-se nos alunos, particularmente naqueles que não estão habituados a escrever acerca das suas realizações. Tais ajudas podem ser dadas, por exemplo, através de guiões (Alves & Gomes, 2007).

Síntese do capítulo

É importante certificarmo-nos de que a avaliação mede verdadeiramente o desempenho e capacidade real de aprendizagem dentro de um curriculum relevante a fim de proporcionar uma melhor compreensão das metas atingidas pelos alunos e de fazer uso significativo dos resultados. Acrescenta-se ainda que, o tipo e os instrumentos de avaliação que o professor usa vai ter um papel importante na determinação das atitudes e estratégias de aprendizagem que os alunos adoptam (Bryant e Timmins, 2002).

As avaliações normalizadas tomam relativamente pouco tempo e não requerem uma considerável quantidade de esforço por parte dos professores, diretores e decisores políticos. Os resultados são fáceis de entender, podem ser comparados entre os sistemas e são muitas vezes considerados como objetivos pela população em geral (Seitz & Bartholomew, 2008). No entanto, no Despacho Normativo n.º6/2010, um dos princípios orientadores da avaliação das aprendizagens é a "primazia da avaliação formativa com valorização dos processos de auto-avaliação regulada" (p. 7464), para os quais as avaliações normativas pouco contribuem. Para Ozogul & Sullivan (2009), a auto-avaliação como prática avaliativa permite aos alunos ter um papel mais ativo na sua própria aprendizagem e pode ajudá-los a adquirir essa prática como, a longo prazo, uma "forma de estar na vida". A curto prazo, estes autores fazem notar que em estudos já

realizados, os alunos que são treinados na auto-avaliação obtêm resultados significativamente melhores nas tradicionais provas escritas.

Uma vez que a avaliação reguladora assenta no pressuposto de que o aluno é o principal agente da aprendizagem e esta está integrada na própria avaliação, o professor terá necessariamente também de se preocupar em desenvolver nos alunos a capacidade de se auto-avaliarem, sendo que esta capacidade não lhes é inata (Santos *et al*., 2010). A avaliação reguladora não existe sem a utilização deliberada, sistemática, didática e pedagógica de um sistema de *feedback* que apoie, regule e melhore os processos de aprendizagem e de ensino. É com a utilização do *feedback* que o aluno se torna mais autónomo e responsável pela sua aprendizagem, mais capaz de regular e avaliar o eu trabalho e mais ágil na utilização das suas competências metacognitivas (Fernandes, 2008).

A utilização de portefólios em contexto escolar, poderá favorecer a autorregulação, por parte dos alunos, dos seus processos de construção das suas aprendizagens, uma vez que se promove a reflexão e a auto-avaliação nos estudantes Almeida (2008). O portefólio promove a auto-avaliação do aluno, a reflexão e o pensamento crítico e capacita os alunos para tomar a responsabilidade pelas suas aprendizagens de forma autêntica, uma vez que incentiva e exige pensamentos de ordem superior (Bryant e Timmins, 2002; Seitz e Bartholomew, 2008). O produto final do portefólio seria usado para fornecer evidências e demonstrar a responsabilidade no cumprimento de normas e de medidas de referência. Também Write (2004) afirma que depois da aplicação do portefólio, os alunos tornaram-se mais responsáveis pela sua aprendizagem e a autora mais apta os avaliar e determinar se os resultados da aprendizagem dos seus alunos tinham sido alcançados. Almeida (2008), refere que a implementação do portefólio "permite *fotografar* as várias dimensões do processo de ensino – aprendizagem (conceptual, processual e atitudinal), fomentando a atividade reflexiva, por parte de alunos e professores, em relação ao trabalho que é realizado ao longo do ano letivo" (p. 124).

Trata-se pois de uma ferramenta que ajuda a direcionar e a documentar como os alunos cumprem os objectivos em diversos períodos de tempo. Além disso, os portefólios dão ao professor uma oportunidade para fazer uma avaliação interativa, ou seja, pensar acerca dos objectivos estabelecidos e onde professor e aluno se relacionam em função desses mesmos objetivos.

Capítulo V

Metodologia de Investigação

A opção metodológica de uma investigação não é só um conjunto de técnicas de recolha e análise de dados, mas o desenvolvimento de processos que orientam a investigação e o pensamento e nos reposiciona face ao conhecimento.

O presente estudo teve como objeto de investigação o aluno, na sua atividade na construção do seu portefólio reflexivo de Matemática. Pretendeu-se analisar quais foram os contributos deste instrumento para a aquisição de conhecimentos e competências reguladoras na aprendizagem matemática dos alunos, em particular, que processos põem em ação e a que recursos se socorrem para dar resposta a esta exigência.

Tendo em conta os objetivos do estudo, foi escolhido o tipo de abordagem de investigação, o seu design, os critérios para selecionar os participantes, e as especificidades do portefólio que lhes foi pedido. Finalmente, é apresentada a forma como os dados foram recolhidos e analisados.

Opções metodológicas

Segundo Ponte (2006), a ideia central da perspetiva interpretativa é a de que "a atividade humana é fundamentalmente uma experiência social em que cada um vai constantemente elaborando significado" (Ponte, 2006, p. 14). Esta orientação teórica considera que os significados são resultado da interação social entre os indivíduos e mediados pela interpretação das pessoas que partilham uma experiência, ou seja, os objetos, as situações e os acontecimentos só por si não têm qualquer significado, mas este é-lhes atribuído pelos indivíduos (Yin, 2002; Ponte, 2004).

Assim, a perspetiva teórica interpretativa como investigação assenta nas seguintes características: a) interessa-se essencialmente pelos processos e dinâmicas; b) baseia-se na descrição que vai para além dos factos e das aparências, sendo também necessário apresentar com bastante pormenor o contexto, as emoções e as interações sociais que unem os diversos participantes; c) funciona por indução porque se vai sujeitando, ao

longo do desenvolvimento do estudo, à reformulação dos seus objetivos, problemáticas e instrumentos (Ponte, 2006).

Sendo os processos de autorregulação utilizados por alunos, quando da elaboração do *portefólio reflexivo de matemática*, alvo de especial atenção neste estudo, faz sentido afirmar que há um interesse fulcral pela ação e pelos significados, em detrimento dos procedimentos ou técnicas de que o estudo se socorre. Estes significados são captados em interação e são o produto de um processo de interpretação por parte dos intervenientes (neste caso, por parte da investigadora e dos alunos). Estes processos, pela sua natureza, não são diretamente observáveis e nem sempre estão facilmente perceptíveis ou claramente evidenciados. Tratam-se de aspetos implícitos, subentendidos na ação (Burns, 2000). Por tudo isto, considero que a opção metodológica mais adequada se integra na abordagem qualitativa, enquadrada no paradigma interpretativo da investigação.

Neste estudo desempenho o duplo papel de professora – investigadora. Permite-me recolher diretamente material empírico, não havendo assim intermediários e consequentemente, "interpretações intermediárias" da experiência, o que parece ser mais vantajoso para uma análise de resultados mais fidedigna. Também Serrazina e Oliveira (2001, p. 286) defendem esta perspetiva:

> Os professores estão na melhor posição para colocar questões acerca da aprendizagem, para recolher dados e interpretá-los e tomar decisões relativamente ao ensino. (…) Os professores ao agirem como investigadores não só realizam o seu trabalho mas também se observam a si próprios, param, e distanciam-se dos conflitos imediatos, são capazes de alargar as suas perspectivas sobre o que acontece.

Design do estudo

Para Burns (2000), um estudo de caso é caraterizado por incidir numa entidade bem definida como seja uma pessoa, uma disciplina, um curso, uma instituição, um sistema educativo ou qualquer outra unidade social, e tem como objetivo conhecer e compreender em profundidade essa identidade pondo em evidência o que nela há de mais essencial e característico, em particular nos aspectos que interessam ao investigador. Assim, é natural que esta modalidade tenha um forte cunho descritivo,

visando contar uma história tanto quanto possível pormenorizada e iluminativa, e que acrescente algo de significativo ao conhecimento já existente (Ponte, 2006). No entanto, Ponte (2006) salienta que, se um estudo de caso for meramente descritivo, o seu valor é muito reduzido. É desejável que esta modalidade também tenha uma vertente exploratória, sensível à descoberta de aspectos novos; e uma vertente analítica, procurando construir ou desenvolver uma nova teoria ou confrontá-la com teorias já existentes.

Assim sendo, justifica-se que a modalidade escolhida seja o estudo de caso uma vez que o objeto de estudo são alunos, com as suas particularidades e singularidades, com base nas quais decorre naturalmente a ação e sobre a qual não pretendo ter qualquer controlo. Um estudo de caso, não tem um cunho experimental no sentido de que o investigador não pretende modificar a situação, mas apenas compreendê-la tal como ela é (Burns, 2000; Ponte, 2006).

Além disso, considero esta modalidade de investigação apropriada para este estudo porque pretendo compreender a especificidade de uma dada situação, para estudar os processos e as dinâmicas de uma prática avaliativa que se serve do portefólio reflexivo de matemática como instrumento de avaliação reguladora. Também desta forma, em termos de resultados, não pretendo com este estudo formular conclusões sob forma de proposições gerais, mas sim, quando muito, formular "hipóteses de trabalho" a trabalhar em novas investigações.

Também há a salientar que, em qualquer estudo de caso, é necessário dar atenção ao seu contexto, ou seja, aos elementos exteriores que mais o influenciam e/ou influenciaram, e à sua história, ou seja, o modo como o estudo se desenvolveu (Pontes, 2006). Por este motivo fará parte da dissertação um item dedicado à contextualização dos casos.

Apresentação da turma de pertença dos alunos participantes neste estudo

A turma do 11.º ano de escolaridade, envolvida nesta investigação, pertenceu ao Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias de um agrupamento de escolas situado no concelho de Vila Franca de Xira, distrito de Lisboa. Tratou-se de uma turma na qual já tinha sido professora titular no ano letivo transato. A turma é constituída por vinte e dois alunos, dez rapazes e doze raparigas, com idades compreendidas entre os

quinze e os dezassete anos. Todos se encontram pela primeira vez a frequentar o 11.º ano de escolaridade. Trata-se de uma turma maioritariamente trabalhadora nas aulas, não colocando, no entanto, de parte as coisas de que gostam, nomeadamente *facebook*, certos programas televisivos (incluindo futebol) ou atividades como dança, escutismo, etc., manifestando com alguma regularidade comentários entusiastas, que denunciavam tais interesses.

Participantes

Optei por estudar três estudos de caso no sentido de diligenciar uma diversidade de desempenhos, significados e perspetivas no que concerne ao portefólio enquanto instrumento de avaliação reguladora para que, no seu confronto surjissem possibilidades de maior inteligibilidade desses casos, bem como a identificação de aspetos comuns ou semelhantes (elementos de homogeneidade) ou aspectos singulares, de divergência (elementos de heterogeneidade) (Guimarães, 2003). Com vista à seleção dos participantes foram tidos em consideração os seguintes critérios:

- Predisposição para participar no estudo e autorização dos respetivos encarregados de educação;
- Disponibilidade em reunir com a investigadora fora das aulas uma vez que estava prevista a realização de entrevistas;
- Facilidade de expressão oral para que os alunos possam constituir bons informantes relativamente à sua posição face ao portefólio e ao papel desempenhado pelas estratégias reguladoras no processo de elaboração do deste (NCTM, 1991/94);
- Terem evidenciado níveis de desempenho diferente na disciplina de Matemática (fraco, médio e bom).

Uma das primeiras tarefas foi pedir autorização à direção do agrupamento de escolas e, de seguida aos encarregados de educação de todos os alunos da turma dando-lhes conhecimento dos trâmites do trabalho que se pretendia desenvolver (Anexos I e II). Do universo das respostas com consentimento, foram selecionados os três casos com base nos dados obtidos desde o ano lectivo transato, em particular no que se refere ao critério de seleção diferenciador (desempenho a Matemática). Os três alunos selecionados, cujos

nomes são fictícios para salvaguardar questões de ordem ética, foram a Francisca, a Lara e o Francisco.

Características do portefólio pedido aos alunos

Mason, Burton & Stacy (1982) destacam a necessidade de consciência dos processos envolvidos no pensamento matemático para que este não seja fortuito, muito em particular, a consciência e a reflexibilidade, que desempenham um papel crucial na aprendizagem autorreguladora. Para estes autores, apesar de conteúdos e processos não existirem uns sem os outros, numa fase inicial, eles devem ser vistos mais isoladamente, atribuindo-se maior ênfase nuns do que nos outros. Numa fase posterior, é que se conseguirá estar ciente da sua interação e estabelecer pontes que ligam as diferentes áreas do saber. É nesta articulação dialética – conteúdo *versus* processo – que Burton (1984) considera que a escola deverá procurar dar um desenvolvimento equilibrado uma vez que considera ser o cerne de muitas das dificuldades dos alunos em Matemática e na iliteracia matemática, ou seja, na ausência de competências que promovam os modos de pensar e raciocinar em Matemática. Podemos então nos debruçar sobre as formas de desenvolver nos alunos essa capacidade de pensar matematicamente tendo em conta que, como realça Burton (1984), a aprendizagem não surge pelo facto de o professor dizer e o aluno reproduzir, mas depende duma reflexão simultânea sobre o que está a ser feito e porquê.

Após alguns anos de leituras, experiências com as minhas turmas e reflexão sobre ambas as vertentes (teórica e prática), o portefólio para o ano letivo 2010/11 foi conceptualizado da seguinte forma: mais ou menos uma vez por mês, cada aluno escolhe pelo menos uma tarefa que não sabe resolver ou tem dificuldades de compreensão nos conteúdos e/ou nos processos envolvidos. O tema sobre o qual cada tarefa deve incidir foi previamente definido e facultado aos alunos, em papel e por *e-mail*, no início do processo de realização do portefólio através de um documento elaborado para o efeito e que mais tarde sofreu um pequeno reajustamento (Anexos III e IV). Na seleção e distribuição dos temas teve-se o cuidado de abranger todas as unidades temáticas específicas do 11.º ano do programa de Matemática A em vigor. Num mesmo tema, o aluno pode decidir fazer mais do que uma tarefa, para além da que

lhe é exigida. Note-se, neste ponto, que as tarefas escolhidas para as entradas podem não verificar os critérios definidos por Ponte (2005) para se considerar um verdadeiro problema de Matemática. No entanto, para o aluno, os exercícios por ele escolhidos constituíram verdadeiros problemas no sentido de que lhe ofereciam dificuldades e incompreensões que não estavam a conseguir resolver.

Depois de escolhido o problema ou situação, o aluno procura resolvê-lo da *forma como acha que é*, independentemente de estar certo ou errado, mas com a particularidade da resolução ter de estar sempre acompanhada pela explicitação sob a forma escrita do seu raciocínios e da justificação das suas decisões, como se o aluno estivesse a pensar em voz alta. Feito isto, o aluno envia então por e-*mail* a sua 1.ª versão. A professora observa o que o aluno tinha feito e pensado (tem acesso ao seu pensamento porque o seu raciocínio está descrito) e dá dicas, faz sugestões, indica caminhos, etc. O aluno recebe este *feedback* da professora e, com base nele, elabora e envia a 2.ª versão. O processo itera-se, até o aluno chegar a uma versão final.

Todo este processo é realizado através de ficheiros que são enviados e recebidos por e-*e-mail*. A professora ao dar *feedback* de um ficheiro (entrada) faz dois tipos de anotações nesse mesmo ficheiro: uma, que está sublinhada a cor verde, é para o aluno observar e, de seguida, eliminar apenas o sublinhado. Geralmente trata-se de correções ao nível da língua portuguesa ou dos símbolos matemáticos utilizados, também como aperfeiçoamento da forma como o aluno transmitiu certa ideia matemática. No início do processo, os aspetos sublinhados a cor verde também se prenderam com a escrita de frases ao nível do raciocínio como forma de exemplificar o que se pretende com a elaboração do portefólio, em particular com a realização de uma entrada. Trata-se de uma forma de o aluno percepcionar facilmente as alterações que são para ficar.

O que, num *feedback*, a professora acrescenta sublinhado com cor amarela é para o aluno ler, refletir e trabalhar sobre essas indicações de forma a progredir na realização da entrada e depois apagar (ao contrário da cor verde que, em termos práticos, se deixa ficar, eliminando apenas o sublinhado). O que a professora regista com sublinhado a amarelo são sugestões, questões, indicação de caminhos para o aluno superar uma dificuldade concreta, etc.

Com base nestes dois tipos de anotações, o aluno elabora uma nova versão da mesma entrada, que volta a enviar à professora. Depois, este ciclo repete-se as vezes necessárias até a entrada ser dada como satisfatória (evitou-se propositadamente a palavra concluída

pois o aluno pode em qualquer altura alterá-la e voltar a enviá-la à professora, se assim o entender).

Para além do desenvolvimento da tarefa em si (que já era suposto ser acompanhada pela escrita dos raciocínios por palavras próprias), cada entrada é acompanhada por uma reflexão (que pode ser, por opção do aluno, construída no fim ou ao longo do processo de construção da entrada). Pretende-se que esta seja um balanço de cariz metacognitivo do trabalho desenvolvido na realização dessa entrada. Como referem Flavell (1979) ou Yussen (1985), não é fácil para o aluno fazer isso, logo para o ajudar na elaboração dessa reflexão, foi elaborada uma lista de possíveis itens aos quais o aluno pode dar resposta. Esse documento auxiliar foi apelidado de cartão de comentário (Anexo V). No fim de cada período, o aluno tem ainda de fazer uma reflexão final, a incluir no fim do portefólio. Tal como no cartão de comentário, foi elaborado e disponibilizado aos alunos um documento auxiliar para esta reflexão (Anexo VI).

Ao conjunto do desenvolvimento da tarefa com o registo datado das versões e a reflexão foi dado o nome de entrada. Para que seja mais perceptível a noção de entrada, inclui-se um exemplo de uma no anexo VII.

No que respeita à calendarização, para cada entrada existiu uma data (mais ou menos uma em cada mês) até à qual o aluno devia entregar a primeira versão de uma dada entrada (sempre um sábado). A professora tinha uma semana (ou seja, até ao sábado seguinte) para dar o *feedback* escrito à primeira produção do aluno. Este voltava a ter uma semana para, com base no *feedback* dado pela professora, elaborar a segunda versão. Para as versões seguintes não havia uma calendarização estipulada *a priori*, sendo esta construída individualmente, no seu contexto específico, mas geralmente com prazos mais curtos (porque, em princípio, os progressos que havia a fazer numa fase mais avançada da entrada já não são tão abrangentes, mas sim, mais pontuais ou mais simples de solucionar).

Como complemento à avaliação do portefólio foi elaborado um documento onde constam os critérios de avaliação e respetivos descritores (Anexo VIII) que, depois de uma primeira utilização pelos alunos e por mim, revelou-se ser necessário fazer alguns reajustamentos (Anexo IX) numa tentativa de o tornar mais fidedigno ao trabalho desenvolvido pelo aluno.

Na fase de arranque deste instrumento de avaliação, através de uma sessão de esclarecimento suportada por um *powerpoint* (Anexo X), foram dados a conhecer aos alunos todos estes trâmites inerentes à realização do portefólio e disponibilizados aos alunos todos os documentos auxiliares nos anexos acima referidos, em papel e por *e-mail*. Apesar de os alunos não terem participado na elaboração, por exemplo, dos critérios de avaliação (como seria desejável), foi-lhes dada a oportunidade de em qualquer altura manifestarem os seus pontos de vista e solicitarem alterações ao que tinha sido planificado.

Pretendeu-se com a implementação deste trabalho fazer com que o professor deixasse de ser o agente centralizador do processo de ensino e aprendizagem e passasse a ser visto predominantemente como um conselheiro e um coordenador, ou seja, um *coacher*. Para isso, foram recebidas as observações e os resultados que os alunos apresentaram (versões das entradas), independentemente da sua correção ou clareza, e, com base nelas, procurei devolver ao aluno o seu próprio pensamento e a dar-lhe poder de decisão no sentido de aproximar a atividade de desenvolvimento da entrada numa atividade investigativa para o aluno. Tal como numa investigação matemática foi importante que o aluno tivesse sido incentivado a fazer os seus próprios registos (Holding, 1991), também no portefólio estes desempenharam um papel fulcral, tanto para o aluno, como para o professor. Para o aluno, porque se pretende que estes constituam uma porta de acesso e um incentivo à autorregulação da sua atividade; para o professor, porque é por via do acesso aos pensamentos e sentimentos do aluno, que o procura ajudar no caminho à autorregulação e aos seus processos inerentes.

Recolha de dados

A recolha de dados consiste numa operação de obtenção e reunião, de forma concreta, de determinadas informações junto das pessoas ou das unidades de observação (Quivy & Campenhoudt, 1992). A recolha de dados decorreu durante o segundo e terceiro períodos letivos. Os dispositivos específicos de recolha de dados foram: um questionário, duas entrevistas e recolha documental.

Questionário

Com o objetivo de ajudar a fazer uma caraterização da turma e na preparação do guião da primeira entrevista, procedeu-se à elaboração e aplicação de um questionário (Anexo XI). Este teve como finalidade obter informação acerca do modo como os alunos vêem a matemática (em que é que ela incide e para que é que serve), a sua atitude face às aulas de Matemática (qual é o seu papel e como encaram os erros em Matemática); e a sua perspectiva em relação à avaliação (também na incidência e utilidade).

Este questionário foi aplicado em papel a todos os alunos da turma no início do segundo período e após a autorização dos encarregados de educação para a participação no estudo. Trata-se de um instrumento em que as respostas estão pré-codificadas (Quivy & Campenhoudt, 1992), de maneira que, em cada questão, o aluno indagado escolhe obrigatoriamente uma resposta de entre as que lhe são formalmente propostas. Em apenas duas questões é facultada a opção de acrescentar algo diferente do que já consta nas várias hipóteses de resposta. A identificação do aluno no questionário foi opcional uma vez que que se considerou que a obrigação de se identificar poderia ser um fator condicionador das respostas. Os alunos que são alvo de estudo de caso, identificaram-se espontaneamente. Caso, não o tivessem feito, a professora pedir-lhes-ia *à posteriori* para identificarem os seus questionários.

Entrevistas semiestruturadas

De uma forma muito genérica, uma entrevista consiste numa conversa intencional, dirigida por uma pessoa, com o objetivo de levar o interlocutor a exprimir a sua vivência ou a percepção que têm de um problema que interessa ao investigador (Quivy & Campenhoudt, 1992). Uma boa entrevista é uma das formas de recolha de dados mais próxima da realidade, producente de uma riqueza de informação, recheada de palavras que revelam as perspetivas dos entrevistados e as transcrições ficam repletas de detalhes e exemplos. Na situação, como é o caso, do investigador qualitativo, a entrevista surge com um formato próprio e é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio entrevistado, permitindo ao investigador desenvolver uma ideia sobre a forma como o entrevistado interpreta o mundo (Bogdan & Biklen, 2007).

Uma entrevista é muito mais do que uma conversa interessante no sentido de que há uma diligência por parte do entrevistador para obter uma informação específica o que faz com que este estipule métodos para a obter (Bell, 1997). Não existem regras que se possam aplicar constantemente a todas as situações de entrevista (Bogdan & Biklen, 2007). O sucesso de uma entrevista depende em larga medida do modo como é preparada e do modo como é conduzida, sendo "vital fecundar as entrevistas com leituras, e vice-versa" (Quivy & Campenhoudt, 1992). A preparação de uma entrevista implica a seleção prévia dos tópicos a serem abordados, a elaboração das questões, a definição dos métodos de análise a considerar e um plano preparado e testado (Bell, 1997). Para tal, torna-se imprescindível que o problema, os objectivos e as questões do estudo estejam bem claros e definidos antes da preparação de qualquer entrevista.

Uma vez que se pretende perceber quais os processos envolvidos quando da realização de um portefólio e os significados que os alunos atribuem a esta experiência, a entrevista semiestruturada surge como um método de recolha de dados apropriado dada uma das suas grandes vantagens ser a sua adaptabilidade. Com efeito, uma resposta numa entrevista pode sempre ser desenvolvida e clarificada; é possível sondar determinadas ideias, testar respostas, perscrutar motivos e sentimentos. A forma como uma resposta é dada (o tom de voz, a expressão facial, a hesitação, etc.) cede informações que uma resposta escrita nunca denunciaria (Bell, 1997). No entanto, há sempre o perigo de sermos imparciais nas entrevistas, ou seja, a nossa maneira de ser poder influenciar os entrevistados, principalmente se estes já são nossos conhecidos antes da realização das entrevistas. Por exemplo, o entrevistado intencionalmente querer agradar ao entrevistador, ou o entrevistador ter tendência para procurar fundamentar as suas noções pré-concebidas/expetativas (Bell, 1997). Numa entrevista não é fácil encontrar um equilíbrio entre a objetividade total e a tentativa de colocar o entrevistado à vontade. Para Bell (1997), a melhor forma de transpor estes vicissitudes é "a honestidade quanto ao objetivo do trabalho, a integridade na sua condução e na reprodução das entrevistas e a promessa de que os entrevistados poderão ver a transcrição ou a primeira versão do trabalho" (p. 145).

Na entrevista não estruturada, o entrevistador encoraja o sujeito a falar sobre uma área de interesse (neste caso sobre o portefólio como instrumento de avaliação reguladora) e, em seguida, explora-a mais aprofundadamente, retomando os tópicos e temas que o entrevistado iniciou. Portanto, neste tipo de entrevista, o entrevistado desempenha um

papel crucial na definição do conteúdo da entrevista e na condução da investigação (Bogdan & Biklen, 2007). No presente estudo, as entrevistas são semiestruturadas. Nestas, mesmo sendo conduzidas com base em guiões ou questões pré-estabelecidas, são geridas de forma flexível de forma a permitir a integração de "variantes" motivadas pelas intervenções do(s) entrevistado(s), mesmo que essas questões sejam apenas para obter maior esclarecimento ou pormenor das respostas. Para Bogdan & Biklen (2007), nas entrevistas semiestruturadas fica-se com a certeza de se obter dados comparáveis entre os vários sujeitos, embora se perca a oportunidade de compreender como é que os próprios sujeitos estruturam o tópico em questão.

Note-se que as entrevistas foram marcadas para datas que não prejudicassem de forma alguma os alunos que geralmente se encontravam com bastante trabalho das diversas disciplinas e com um horário cujos tempos livres, em dias úteis, se limitavam a quatro manhãs. Esta opção foi exequível visto que a investigação que se pretendeu fazer não seria prejudicada. A primeira entrevista foi então agendada para os dias quinze e dezasseis de Março (véspera da interrupção lectiva da Páscoa) sendo que no guião da primeira entrevista foram incorporadas questões acerca das vivências dos alunos após dois meses e meio de prática do portefólio. A última entrevista foi feita no fim do ano lectivo, após a realização de todas a fichas de avaliação sumativa, também de forma a não prejudicar em termos de tempo o aluno.

A primeira entrevista, tratando-se de uma entrevista semiestruturada, foi apoiada num guião orientador (Anexo XII) construído tendo por base inicial os mesmos aspetos contemplados no questionário, no sentido de esclarecer eventuais circunstâncias emergentes das respostas dos alunos. Assim, esta entrevista visou, em linhas gerais, as concepções que o aluno tinha acerca da Matemática como disciplina e como ciência, a forma como ele se via a si próprio como aluno de Matemática, a forma como estuda para a disciplina e como lida com as dificuldades e os erros. Depois o aluno foi questionado acerca do que pensa acerca da avaliação na disciplina de Matemática. Finalmente, as questões focaram-se mais sobre as vivências do aluno na realização do portefólio e o balanço que fez.

A segunda e última entrevista foi, como já foi referido, realizada no final do ano letivo, após o término do processo de realização do portefólio. Estas entrevistas foram realizadas após a análise das entradas pela professora-investigadora e tiveram como objetivo esclarecer aspetos emergentes das mesmas e dar resposta às questões de

investigação, ou seja, à contribuição deste trabalho para a aprendizagem do aluno, os processos e os recursos que este utilizou, nomeadamente na forma como estruturou e organizou as suas ações, e saber quais as vantagens e as dificuldades sentidas na elaboração das entradas. À semelhança da primeira, também foi elaborado um guião para a segunda entrevista (Anexo XIII).

Em suma, foram previstas e realizadas na escola de pertença dos alunos, duas entrevistas individuais semiestruturadas, cada uma com recurso a um guião orientador, previamente construído. Estas entrevistas, que tiveram a duração de sensivelmente quarenta minutos cada, foram registadas em áudio e transcritas integralmente. Nas transcrições procurei reproduzir literalmente o discurso dialógico entre mim e o entrevistado, do qual procurei estar o mais próximo possível. Tratou-se de uma reconstrução descritiva dos factos, onde procurei que a interpretação não ultrapasse a que é estritamente necessária no que se refere à pontuação, sem a qual a transcrição seria de difícil compreensão, senão mesmo ininteligível (Guimarães, 2003). A pontuação foi deduzida a partir da audição das pausas, entoações ou de outros recursos rítmicos e melódicos da língua falada sendo a sua elaboração inevitavelmente mediada pela minha interpretação.

Recolha documental

"A maioria dos projetos de ciências da educação exige a análise documental. Nalguns casos servirá para completar a informação obtida por outros métodos; noutros constituirá o método de pesquisa central ou mesmo exclusivo"(Bell, 1997, p. 101). Na recolha documental, no que diz respeito a documentos de forma textual, a atenção foca-se na sua autenticidade, na exatidão das informações que contêm, bem como na correspondência entre o campo coberto pelos documentos disponíveis e o campo de análise da investigação (Quivy & Campenhoudt, 1992).

Uma parte da recolha documental que é utilizada neste estudo foi constituída por todas as versões das entradas feitas pelos alunos, com as respetivas datas de envio dos ficheiros, e por todos os ficheiros de *feedback* por mim enviados, também respetivamente datados. O portefólio final foi, naturalmente, também objeto de análise.

O envio de um ficheiro (entrada) via *e-mail* geralmente é acompanhado de um texto redigido pelo próprio aluno e dirigido à professora. Também eu, ao enviar o meu *feedback* via *e-mail*, o fiz acompanhar por um texto. Considero que estes escritos, que nao estão sujeitos a restrições de qualquer ordem, ajudam a contextualizar o processo de construção vivenciado por ambas as partes envolvidas, em particular no que se refere às vivências do aluno. Assim, ao longo do processo de construção do portefólio, a professora elaborou um "relatório" no qual consta o rol de "cartas" enviadas e recebidas referente a cada aluno. Neste relatório sobressaem sentimentos e emoções vivenciadas pelo aluno ao longo de todo o processo de construção do portefólio, pelo que este funcionou como um diário de bordo. Tratou-se de um complemento às versões e entradas do portefólio e às entrevistas, que pode permitir captar aspetos eventualmente relevantes e que poderiam passar despercebidos nas outras formas de recolha de dados (Bogdan & Biklen, 2007).

Análise de dados

Para Bryant & Timmins (2002), quando se pretende implementar um portefólio de avaliação, um dos aspetos importantes que se deve ter em consideração é a filosofia da aprendizagem a que se adere. Neste estudo, que tem como finalidade analisar os processos e os recursos envolvidos no desenvolvimento do portefólio reflexivo de Matemática, foi adoptado um quadro da teoria da atividade na vertente sócio-histórica.

A análise de dados é um processo que pode ser dividido em várias fases. Por exemplo, organização dos dados, divisão destes em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta de aspetos de semelhança e de diferença e decisão sobre o que vai ser comunicado aos outros (Bogdan & Biklen, 2007). Neste estudo procurou-se seguir o modelo de Merriam (1988) na análise de dados: redução de dados, apresentação e interpretação/verificação das conclusões. O processo de redução de dados teve início na seleção dos participantes e culminou na seleção dos aspetos mais relevantes das transcrições das entrevistas, dos conteúdos dos *e-mail* enviados e recebidos, nas várias versões das entradas e no portefólio final. A apresentação foi com base no estabelecimento de um conjunto de categorias que foram sobressaindo da fase anterior do processo de análise de forma a que a informação obtida ficasse mais organizada

mesmo sendo obtida por diferentes instrumentos de recolha. Na interpretação dos dados pretendeu-se, não descrever factos, mas entendê-los a partir dos conceitos teóricos estudados, num vaivém entre reflexão, observação e interpretação, à medida que a análise foi progredindo.

Neste processo analítico estabeleceram-se três fases: na primeira, cada estudo de caso foi analisado separadamente pois o foco de análise é a unidade dialética sujeito-objeto; na segunda, confrontaram-se os três casos em que procurei salientar os elementos de homogeneidade e de heterogeneidade. Na terceira fase, foi feito um esforço de síntese que visou a formulação de proposições interpretativas. Em todas estas fases se recorreu com frequência a trechos de dados obtidos "em bruto" nas transcrições das entrevistas e nos conteúdos dos *e-mail* e nas produções dos alunos no portefólio.

O objectivo inicial era o de a análise ser concomitante com a recolha dos dados. No entanto, não foi possível concretizar esse intuito, pois as categorias de observação não se vislumbravam de forma clara nem definitiva. A falta de experiência em análise de dados também contribuiu para que esta se atrasasse no tempo. Assim, a minha abordagem envolveu a recolha de dados, antes da realização da análise. No entanto, foram feitas análises parciais e menos formais necessárias à elaboração dos guiões das entrevistas.

Da mesma forma que é pouco viável conseguirmos obter a posição de uma partícula tendo em conta um único objecto de referência (por exemplo, a latitude), também nas ciências sociais, o estabelecimento de um facto requer mais do que uma fonte de informação. É neste contexto que surge a palavra triangulação nas ciências sociais e mais tarde na investigação educacional (Bogdan & Biklen, 2007). A triangulação consiste na utilização de diferentes técnicas de recolha de dados para explicar determinado fenómeno de forma penetrante, com compreensão de toda a sua riqueza e complexidade (Burns, 2000). Como se pretende recorrer a diferentes formas de recolha de dados que, sendo complementares, se enriquecem mutuamente, o processo de análise teve como orientação a consecução de um processo de triangulação para conseguir dar resposta às questões do estudo de forma aprofundada, tentando compreender toda a sua riqueza e complexidade.

Sendo importante aprender a pensar matematicamente de forma autorregulada e, admitindo que isso tem por base um conjunto de processos fundamentais, torna-se pertinente a consciência e a observação de ocorrência de tais processos nos alunos

aquando da realização do portefólio. Em Matemática são muitos os processos relevantes que podemos encontrar, não existindo, contudo uma listagem bem definida de todos eles. De facto, existem autores que dão destaque e analisam uns processos, outros salientam outros, conforme o contexto e a relevância onde que lhes são atribuídos. Acrescenta-se também que há processos que podem ser considerados específicos da matemática e há outros que são independentes dos conteúdos matemáticos (Frobisher, 1994).

Para facilitar ou tornar mais fluente a leitura dos processos usados pelos alunos na realização da tarefa que se pretende investigar neste estudo, em cada um dos três estudos de caso e na conclusão, referir-me-ei apenas aos processos, sem fazer a respetiva referência ao autor ou autores. Assim, passo a fazer uma breve referência aos processos apontados no capítulo I, com a correspondência dos seus autores, salientando mais uma vez que os processos interagem entre si.

Mason, Burton & Stacey (1982) distinguem a especialização, a generalização, a formulação de conjeturas e a justificação como processos matemáticos centrais no pensamento matemático. Tais processos também mereceram a atenção de Pirie (1987), e Burton (1984) e Holding (1991). No âmbito do processo de especialização enquadrou-se os processos de interpretação desenvolvidos por Dias (2005): traduzir, experimentar inicial, interiorizar e ancorar. A propósito deste último processo, sobressaiu o estabelecimento de analogias por Holding (1991). Aquando do processo de experimentar inicial chamou-se a atenção para os processos de *adivinhação*, por Frobisher (1994), também designado de pensamento intuitivo por Holding (1991) e de seleção de uma estratégia, por Pirie (1987), que pode ser feito por tentativa/erro, organização sistemática e também por representações.

Os processo de generalização, de formulação de conjeturas, de justificação e de prova são comummente referidos por Mason, Burton & Stacey (1982), Pirie (1987), Burton (1984) e Holding (1991), donde também se salientam os apontamentos de Frobisher (1994) e Pugalee (2004). De Dias (2005) sobressaíram os processos de traduzir, experimentar inicial, interiorizar, ancorar, conjeturar, experimentar, solucionar, generalizar, aprofundar e ziguezaguear.

Dos processos independentes dos conteúdos matemáticos, Frobisher (1994) salienta os de comunicação, de raciocínio, operacionais e de registo, este último também explanado por Pirie (2004) e Kilpatrick (1991). Pugalee (2004) define quatro grupos de processos

cognitivos. São eles, processos de orientação, de organização, de execução e de verificação. Nestes sobressaiu o processo de reflexão explorado por Pirie (1987).

Capítulo VI

Apresentação e discussão de dados - Francisca

Apresentação

A Francisca tinha dezasseis anos de idade no início do ano letivo 2010/2011 e estava a frequentar o décimo primeiro ano pela primeira vez. No ano letivo anterior já havia sido, em dois períodos letivos, minha aluna. A Francisca foi considerada como tendo um bom desempenho a Matemática, tendo obtido, no fim do ano letivo anterior, a classificação de dezassete valores e classificações idênticas nas restantes disciplinas. Trata-se de uma aluna com facilidade de expressão, tanto oral como escrita, que gosta da disciplina de Matemática porque "decora-se pouca coisa".

A Francisca tem presente que a matemática vai muito para além do cálculo. Associa-a à sua vertente mais pura, regida por leis próprias e teóricas (questionário, 24/01/11), e à sua vertente mais aplicada onde refere a associação desta à tecnologia e à experimentação/observação, embora denote ideias ainda muito vagas, tanto numa vertente como noutra. (1ª entrevista, 15/03/2011)

Considera que o trabalho que desenvolve nas aulas de Matemática incide sobre os seus conteúdos mais básicos e também nos processos mais simples. No entanto, em termos de processo, supõe que o trabalho de um matemático será semelhante ao seu com a diferença de que, perante uma situação problemática, o matemático analisa/explora com muito mais frequência os dados de que dispõe e os resultados parciais que vai obtendo, dada a complexidade muito superior dos problemas que lhes são dados para resolver. Uma outra diferença que faz sobressair é a de que o matemático não prescinde da verificação dos resultados obtidos, algo por ela quase sempre negligenciado por questões de tempo e de não consideração das consequências que daí advêm:

> Eu acho que aquilo em que os alunos trabalham são as bases muito básicas daquilo que ele [matemático] faz depois. E acho que nós não chegamos a aprofundar da maneira como a matemática segue e faz. Nós aprendemos uma base, e a partir daí eu acho que há vários

> ramos e o que o matemático faz é explorar mesmo a 100% esse ramo (…) É provável que eles peguem em situações que lhes são pedidas e as explorem matematicamente, ou seja, se os cálculos estão bem feitos, se aquilo se aplica àquilo que é necessário, se determinado material pode ser usado, por exemplo, na engenharia em que é muito usada a matemática, e por aí…(…) Eu acho que deve envolver sempre uma parte tecnológica. Eu acho que sim. Acho que também deve envolver estudos de várias coisas e também envolve coisas que já se sabiam: tipo teoremas, bases da matemática e eles a partir daí vão aplicar aquilo que eles querem a esses teoremas (…) Só que eles aplicam a situações provavelmente muito mais reais do que aquilo que nós fazemos (…) Se tiver tempo, verifico, mas aquilo que eu raramente faço é mesmo verificar (…) A concepção que eu tenho de um matemático é: quando ele está a trabalhar nalguma coisa é a um nível mais complicado, e acho que exige mais a análise que é para saber se está a fazer uma coisa que é correta. Ah! E verificar convém. A nível profissional já verifica. (1ª entrevista, 15/03/2011)

De uma forma geral, tanto na disciplina de Matemática, como noutras, após o término de um trabalho, considera que faz um balanço sobre a forma como este decorreu – as dificuldades que teve e como as ultrapassou, os erros que deu, etc, mas não de uma forma consciente nem reserva um tempo específico para esse efeito:

> Eu acho que acaba por ser um raciocínio que a pessoa faz sempre quando acaba de fazer qualquer coisa. Sim, eu acho que sim. Não reservo um tempo para isso! (1ª entrevista, 15/03/2011)

Em relação à forma como costuma estudar Matemática, afirma que, em média, estuda para esta disciplina quatro vezes por mês mas não de forma igualmente espaçada – dependendo do facto de ter ou não prova escrita de Matemática:

> C - Com que frequência costumas estudar Matemática?
>
> F- Depende do tempo.
>
> C- Mais ou menos, de uma forma geral.
>
> F – Assim, num mês, umas 4 vezes, mais ou menos. Mas depende: se for em épocas de testes, se tiver teste de Matemática posso estar 2 semanas inteiras só a estudar para Matemática. Se não tiver teste de Matemática e tiver outros testes posso não fazer nada para

> Matemática durante 2 semanas, depende muito do tempo. (1ª entrevista, 15/03/2011)

Ao estudar Matemática, geralmente começa por fazer uma planificação da matéria que foi dada por tópicos, colocando os títulos e os subtítulos da matéria numa folha e dando prosseguimento ao estudo pela "parte mais básica da matéria", por exemplo, todas as fórmulas e deduções "de base". Depois faz "todos os exercícios que tiver" (1ª entrevista, 15/03/2011).

Atribui à origem do erro desatenção ou erros de cálculo no caso de dominar a matéria envolvida. Quando ainda não percebeu ou não teve muita prática num exercício específico assume o erro como algo natural e expectável. Quando se apercebe que se enganou fica desagradada ao ponto de apagar tudo e começar do início pensando noutras estratégias. Se mesmo assim, não conseguir, faz uma de duas coisas: pede ajuda a alguém ou, na impossibilidade dessa ajuda, planifica o que pode fazer com várias hipóteses. Perante um problema que não consegue resolver, atribui ao facto de não saber por onde começar, a causa mais provável:

> F - Quando eu não tenho muita prática num exercício específico eu engano-me sempre, não há volta a dar, acabo sempre por me enganar mesmo nos passos mais fáceis.
>
> C- Sem ser num exercício. Num problema, quando te enganas num problema, quando chegas à solução e vês que não é a solução. Geralmente a que se deve?
>
> F- Muitas vezes faço erros de cálculo, às vezes até por mais fáceis que eles sejam, eu faço. Acho que isso se deve mesmo à desatenção que eu tenho na maior parte das vezes.
>
> (…) Não saber por onde começar. Ah! Essa sim… Essa é a mais de todas.
>
> C- Não saber os conteúdos?
>
> F- Depende. Mas esse não saber, acho que não me acontece muito.
>
> C- Não verificares os resultados.
>
> F - Também já disse que não faço isso. Devia.. (risos)
>
> C - Quando descobres que te enganaste o que é que tu fazes?

> F- Primeira fico chateada (risos). Depois muitas vezes quando eu não sei… porque fiquei mesmo chateada, apago tudo, não deixo nada e começo do início pensando de uma outra forma qualquer, e se isso não der em nada, ou peço ajuda, ou então planifico aquilo que eu posso fazer: ponho hipóteses, ponho porque é que eu não cheguei à conclusão a partir de uma determinada hipótese… Mais por aí. (1ª entrevista, 15/03/2011)

Na avaliação, o que a Francisca acha mais importante é "o professor perceber que o teste não é só aquilo que o aluno sabe" e é importante que os alunos não sejam avaliados apenas nesses momentos (os de prova escrita de 90 minutos). Na percepção desta aluna, o que é valorizado na avaliação, para além das provas escritas, é o desempenho do aluno na aula, a forma como ele age, em particular quando vai ao quadro; os trabalhos de casa ou outros trabalhos pedidos pelo professor e que este leva para casa para corrigir. Com isto, o professor fica com uma imagem do aluno. Para esta aluna, a vantagem da avaliação é perceber em que patamar se encontra e ter uma noção daquilo que pode fazer para melhorar, segundo o que lhe é dito "na altura da avaliação":

> C- Para ti o que é que é mais importante na avaliação?
>
> F- O professor perceber que o teste não é só aquilo que o aluno sabe, e não é só a Matemática, acho isso de uma forma geral. Eu acho que isso é o mais importante numa avaliação, é o aluno não ser avaliado só naquele momento, porque se o teste corre mal, se houve alguma coisa que falhou mesmo, depois a avaliação fica estragada.
>
> C - Que tipo de trabalhos é que são entregues para serem avaliados?
>
> F- Os testes, no nosso caso o portefólio; muitas vezes os trabalhos de casa podem ser pedidos para entregar, a participação, quando um aluno vai ao quadro, resolve exercícios. Não é entregue mas o professor vê.
>
> C- Quais são as vantagens da avaliação?
>
> F- Perceber o que eu sei, perceber em que parâmetro é que eu estou e em que deveria estar e ter uma noção daquilo que eu posso fazer segundo aquilo que me é dito na altura da avaliação. Como é que eu posso fazer, como é que eu posso melhorar, eu acho que é por aí. (1ª entrevista, 15/03/2011)

O Portefólio da Francisca

As tarefas escolhidas pela Francisca para as entradas do portefólio encontram-se no anexo XIV.

Razões das escolhas para as entradas

Quanto à forma de escolher as entradas esta aluna procedeu de uma das seguintes duas maneiras: "primeiro, se eu tivesse dúvidas específicas nalgum exercício, era esse que eu escolhia. Se eu não soubesse ou não fizesse a mínima ideia, aí eu ia ver aquilo que eu encontrava" (2ª entrevista, 06/06/2011).

Na escolha da 1ª entrada, cujo tema incidiu sobre *trigonometria*, a aluna identificou em primeiro lugar uma dificuldade genérica – a de fazer demonstrações envolvendo expressões trigonométricas. Só depois tomou a decisão de escolher um exercício do manual com as características identificadas como difíceis para ela:

> Resolvi escolher uma demonstração com razões trigonométricas presente no manual escolar, visto que foi, em toda a matéria do primeiro período, os exercícios que mais dificilmente consegui resolver (…) gostaria que isso mudasse. (1ª entrada, 1ª versão, 08/01/2011)

No entanto, a Francisca compreendeu perfeitamente o que lhe era dado e pedido (não houve problemas de comunicação) e tem algumas ideias genéricas de possíveis percursos que lhe podem conduzir à resposta, as quais colocou por pontos.

Na 2ª entrada, referente à *geometria no plano e no espaço*, a aluna escolheu um problema do manual mas que, ao contrário da primeira entrada, não vislumbrou uma forma de o resolver, alegando que essa falta de ideias de resolução é comum em problemas envolvendo geometria e cuja principal causa se prende com questões de interpretação:

> Não consegui compreender o que era exatamente para fazer (…) este tipo de problemas trazem-me sempre dificuldade pois no fim da leitura do enunciado não sei exatamente o que fazer. (2ª entrada, 1ª versão, 05/02/2011)

Na 3ª entrada, que se reportou ao tema das *funções racionais e irracionais*, a aluna escolheu um tipo específico de problemas que geralmente traz dificuldades de compreensão à generalidade dos alunos, não pelos conteúdos envolvidos, que de forma isolada são bastante simples, mas pelo encadeamento de raciocínios que o problema exige. A aluna perante a sua escolha afirmou que:

> Passado quase um mês, já não percebo algumas conclusões alcançadas nem como se resolve o problema (…) sempre tive algumas dificuldades neste tipo de exercícios, mas na turma é sempre mais fácil resolvê-los, pois existe sempre alguém que vai dando uma ou outra dica, mas assim, sozinha, não sei como continuar. (3ª entrada, 1ª versão, 26/02/2011)

A 4ª entrada, é referente ao tema *operações com funções*. A aluna alegou que a escolha desta entrada foi "a mais difícil de todas", não pelo facto de se tratar de um tema que não lhe tinha trazido dificuldades, mas porque, mesmo assim, tinha que escolher algo. Nesta procura, encontrou um exercício que lhe trazia dificuldades de compreensão num determinado pormenor. Pormenor esse, que também já lhe tinha surgido noutros contextos. Trata-se do relacionamento entre duas variáveis que são co-dependentes em contexto de resolução de problemas:

> Encontrei um exercício que não consigo fazer, mas que engloba apenas duas alíneas e não tem um grande desenvolvimento. Não sei se será a melhor escolha, mas como me trouxe dificuldades num determinado pormenor e esse pormenor tem também aparecido noutros contextos de problemas do género, penso que é a escolha que devo fazer. (4ª entrada, 1ª versão, 20/03/2011)

A 5ª entrada, reportou-se à *introdução do cálculo diferencial*, onde a maioria dos alunos apresenta dificuldades no relacionamento entre as perspetivas analítica e geométrica Esta aluna também não foi exceção. As dificuldades mais uma vez prenderam-se com os processos e não tanto com os conteúdos. A diferença nesta escolha em relação às

anteriores é a de não possuir, nem uma resolução, nem a solução, anteriormente utilizadas como ferramentas de regulação da atividade:

> Simplesmente não vi (e ainda não vejo) o que tenho de fazer para resolver este exercício, razão pela qual o escolhi (…) as dúvidas que tenho são mais na escolha do processo que devo seguir para realizar o exercício e não tanto na matéria em si (…) Este foi o primeiro problema que escolhi para uma entrada de portefólio sem ter a oportunidade de ver a solução e nem sequer tinha qualquer tipo de resolução de base por onde me pudesse seguir, que é geralmente aquilo que eu faço. (5ª entrada, 3ª versão, 14/05/2011)

A 6ª e última entrada, referiu-se ao tema das *sucessões*. Na 1ª versão desta entrada a aluna fez uma avaliação geral da sua *performance* no tópico em que esta incidia: "Não é uma matéria de muito difícil compreensão para mim mas no entanto é uma matéria onde muitas vezes não percebo os resultados que obtenho e o que é que significam" (6ª entrada, 1ª versão, 25/05/2011). A sua escolha deveu-se ao facto de parte do "exercício (ser) diferente daquilo que temos feito, ou pelo menos está assente em moldes diferentes e esse não tenho ideias de resolução – peço por isso a sua ajuda :b." (6ª entrada, 1ª versão, 25/05/2011)

Em síntese, as razões das escolhas Francisca incidiram sobre os mais diversos aspetos que a resolução de um problema pode apresentar. Com efeito, foram por elas identificadas dificuldades de interpretação do enunciado (entrada nº 2); dificuldades na escolha de estratégias de resolução (entrada nº 5); dificuldades de processo, nomeadamente no encadeamento dos diversos raciocínios (entradas nº 3); dificuldades de relacionamento entre diferentes variáveis (entrada nº 4); e dificuldades de interpretação dos resultados obtidos (entrada nº 6). Ainda dificuldades sobre capacidades genéricas como as demostrações envolvendo funções trigonométricas (entrada nº 1) nas razões pelas quais escolheu as entradas. Tais dificuldades naturalmente não surgiram todas de forma isolada em cada entrada.

Apesar de a aluna ter evidenciado desde o início um certo à vontade e confiança em expor as suas dificuldades, foi notória a existência de uma certa necessidade de segurança, nomeadamente na posse da resposta à situação escolhida. Por exemplo, na 2ª entrada, a aluna apesar de não vislumbrar nenhuma forma de resolução, tinha na sua

posse a resposta ao problema. Na 3ª entrada a aluna até tinha a resolução, embora não a percebesse. Só na 5ª entrada é que a aluna não dispunha de qualquer tipo de referência onde se pudesse apoiar na regulação da sua atividade.

Processos para melhorar as suas produções

A Francisca, alegou na primeira entrevista que, perante um problema, sentia necessidade de o ler diversas vezes ao longo do processo de resolução. Afirmou que os processos de análise e planificação dependem um do outro e é o que vai fazendo entre as leituras/releituras do enunciado do problema. Estrutura uma forma de resolução "primeiro na cabeça" (1ª entrevista, 15/03/2011). Quando passa à fase de implementação "o mais provável é a voltar a ler nessa altura" (1ª entrevista, 15/03/2011). Raramente verificava as respostas que obtém por questões de tempo, ao contrário do que imagina no trabalho de um matemático onde considera que, apesar de os procedimentos usados por este serem idênticos aos que ela utiliza, provavelmente o matemático analisa/explora mais vezes dada a complexidade dos problemas e, como não podia deixar de ser, verifica sempre se a solução obtida faz sentido e é a correta. No entanto, quando elabora o portefólio de Matemática é que "revejo sempre aquilo que fiz. Aliás, porque depois há a reflexão" (1ª entrevista, 15/03/2011). Vejamos então como a elaboração do portefólio decorreu.

Na 1ª entrada, antes de dar início ao tratamento da situação escolhida, a aluna, por iniciativa própria, começou por fazer dois tipos de listagem com o intuito de reunir toda a informação de que dispunha e que lhe parecia estar relacionada com a sua escolha: uma com algumas das principais fórmulas trigonométricas, outra com alguns possíveis procedimentos envolvidos neste tipo de demonstrações:

> Para qualquer demonstração realizada, e como me apercebi ser uma dificuldade para mim, elaborei na altura uma lista, com um conjunto de métodos que poderia experimentar para fazer demonstrações. Essa lista, apenas serviu para me guiar e de certo modo para me fazer ter um ponto por onde começar na realização deste tipo de exercícios. Essa lista englobava as seguintes "medidas":
>
> - Resolver o que está entre parênteses primeiro;

- Ter cuidado com os sinais e com os denominadores;
- Ter atenção às parcelas que cortam;
- Ter atenção à possível existência de casos notáveis.
- Utilizar as fórmulas apreendidas.
- Trabalhar um membro da igualdade até chegar ao outro.

(1ª entrada, 1ª versão, 08/01/2011)

Nesta fase, a Francisca encontrava-se num processo de orientação e de organização ainda não diretamente relacionado com a entrada que escolheu. Com efeito, ao reunir este conjunto de processos colocando-os por tópicos encontrava-se numa tentativa de familiarização com o tema, com a expectativa de que isso a iria ajudar na obtenção de sucesso na realização da entrada. Também é desde aqui que a aluna escreve as ideias matemáticas por palavras próprias num processo de tradução e firma-as com a intenção de posteriormente ancorar pelo menos algumas delas na elaboração da entrada propriamente dita.

Já numa fase de execução, na 1ª versão da 1ª entrada a Francisca, perante os tópicos de processo gerais que tinha elaborado, investiu em duas estratégias de resolução sem sucesso. Na primeira estratégia trabalhou simultaneamente com os dois membros da igualdade que pretendia demonstrar. Como dessa maneira "deixei de saber como continuar" (1ª entrada, 1ª versão, 08/01/2011), procurou uma nova forma de demonstrar a igualdade pretendida, mas com uma estratégia diferente: a de trabalhar um só membro da igualdade até chegar ao outro, mesmo assim sem sucesso. No entanto, na mesma entrada optou por deixar as duas tentativas e, num processo de verificação fez uma avaliação acerca do seu ponto de situação em relação à solução:

> Na verdade acho que estou bastante perto de conseguir igualar a expressão a que cheguei, ao primeiro membro da equação, mas faltam-me que tanto o cos $\propto$ e o sen $\propto$ do numerador estejam elevados ao quadrado, assim como no denominador todo o parêntesis - $(\cos \propto + sen \propto)$ – esteja elevado ao quadrado. Se os tivesse nessas condições, conseguiria a igualdade pretendida:
>
> $$\frac{cos^2 \propto - sen^2 \propto}{(sen \propto + \cos \propto)^2} = \frac{cos^2 \propto - sen^2 \propto}{(sen \propto + \cos \propto)^2}$$
>
> (1ª entrada, 1ª versão, 08/01/2011)

Assim, na 1ª versão da primeira entrada houve um recuo com um refazimento (ziguezaguear) na abordagem da demonstração. O bloqueio em que se encontrava foi dissolvido aquando da segunda versão através da seleção de uma estratégia adequada sobre a segunda tentativa da 1ª versão, e com apoio no *feedback* escrito por mim dado. Na segunda (e última versão) da primeira entrada a aluna fez um balanço da sua atividade num processo de verificação, retendo uma expressão que resumiu o que lhe tinha faltado para chegar à resposta:

> afinal até era fácil, faltou-me ter pensado mais um bocadinho! :DD Para a próxima não me esqueço de multiplicar pelo que "me dá jeito"! (e-mail enviado pela aluna 16/01/2011)

Na 2ª entrada, a situação escolhida pela aluna continha várias alíneas. Apesar desta ter sentido dificuldades em apenas parte do exercício, optou por trabalhar o exercício todo, o que se veio a verificar produtivo pois, apesar de ela ter chegado à resposta, devido à exigência da parte escrita a que o portefólio obriga, verificou-se a existência de aspetos a melhorar e a corrigir, nomeadamente em relação à correção da linguagem matemática, tanto na vertente simbólica, como no aperfeiçoamento e rigor na transmissão de ideias matemáticas, que da forma como estavam na 1ª versão revelaram que estas também não estavam devidamente compreendidas pela Francisca. Tratou-se de trabalhar os conceitos prévios da aluna de forma a serem gradualmente apropriados por esta:

> Sabia que o ponto B tinha como equação reduzida da recta, a equação construída na alínea anterior e estava contido simultaneamente na equação da circunferência, então bastou-me realizar um sistema de equações com duas incógnitas para determinar o x e o y, com base na utilização de ambas as expressões.
>
> - Equação reduzida da recta – $2y + x + 5 = 0$;
>
> - Equação da circunferência - $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$.
>
> (…)$\cos x = \frac{[OR]}{hipotenusa}$.
>
> (2ª entrada, 1ª versão, 05/02/11)

> Sabia que o ponto B pertencia à recta AB cuja equação (geral ou reduzida) já tinha sido obtida na alínea anterior e estava contido simultaneamente na ~~equação da~~ (um ponto não está contido numa equação.. Eh..eh..)circunferência, então bastou-me realizar um sistema de equações com duas incógnitas para determinar o x e o y, com base na utilização de ambas as expressões.
>
> - Equação geral da recta – $2y + x + 5 = 0$;
>
> - Equação da circunferência - $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$.
>
> (…)$\cos x = \frac{[OR]}{hipotenusa}$ (em vez do símbolo de segmento, deves usar o símbolo de comprimento).
>
> (*Feedback* dado à 1ª versão da 2ª entrada, 11/02/11)

Na 2ª entrada, a aluna identificou os temas que envolviam de forma interligada a sua escolha (trigonometria, produto escalar e geometria) e explorou tudo o que considerava pertinente acerca de cada um deles, quer em termos de definições, quer em termos de raciocínios, para chegar a fórmulas como a equação reduzida da reta ou a equação da circunferência. Desta forma, ainda não entrando na exploração propriamente dita da sua escolha, integrou os processos de interpretação identificados por Dias (2005) e/ou nos processos de orientação e de organização apresentados por Pirie (1987), associados a processos de tradução na medida em que procurou sempre escrever as ideias por palavras próprias.

O estabelecimento de pontes entre diferentes conteúdos de forma a obter uma resposta foi a grande dificuldade que esteve presente nesta entrada e cuja superação foi feita após uma orientação da professora que chamou a atenção para o erro e apelou à consulta de uma página do manual. Uma vez aproveitada esta orientação, a Francisca evidenciou um ziguezaguear sobre conceitos prévios e um estabelecimento de ligações entre conteúdos de geometria e trigonometria, em processos de raciocínio. Uma vez estabelecidas as pontes, o problema ficou circunscrito a processos que a aluna já dominava bastando, portanto, aplicá-los:

> Na última alínea do problema, eu sabia onde deveria chegar e porque passos, mas não sabia como realizar alguns desses passos, pois não estabeleci a ligação entre a parte geométrica (cálculo da distância) e a parte trigonométrica (fórmulas da trigonometria). Deste modo, aquilo que adquiri com esta entrada, centrou-se mais na forma como é possível interligar os conteúdos do que propriamente com os conteúdos em si, pois a resolução dos exercícios baseou-se em matérias que penso já ter compreendido, não havendo a introdução de nenhum princípio, nenhuma fórmula ou resolução nova, relativamente ao que já foi feito. (reflexão final da 2ª entrada, 12/02/2011)

Na 3ª entrada, na abordagem preliminar, introduziu pela primeira vez, num processo de especialização/ experimentar inicial, exemplos de aplicação concretos, não relacionados com o exercício em si. As dificuldades dividiram-se em três áreas: a de interpretação e equacionamento do enunciado; de processo – confusão entre a existência de uma equação quando apenas existia em expressão a que lhe foi atribuída uma letra designatória; e um problema de relacionamento de resultados parciais de forma a obter a resposta ao problema.

Em relação à primeira dificuldade, os processos metacognitivos usados pela aluna foram, por sugestão da professora, a leitura/releitura dos dados do enunciado, reflexão sobre os diferentes significados dos símbolos e das expressões e respetiva rescrição melhorada. Para a segunda dificuldade detetada, a aluna foi conduzida através do meu *feedback* e do próprio raciocínio que ela tinha feito, a um absurdo, o que a levou a recuar e refazer (ziguezaguear) o percurso na resolução do problema. Na última dificuldade acima referida, a professora sugeriu que a aluna se reportasse a um raciocínio já anteriormente usado nas aulas e que poderia se usado nesta entrada, conduzindo-a, desta forma, a processos de estabelecimento de analogias e de ancorar. A partir daí, na versão seguinte, foi possível observar que a aluna entra num diálogo com ela própria que expõe por escrito, de forma a monitorizar o seu progresso e estabelecer uma interação crítica com ela própria:

> Então eu pretendo saber o número total de horas que são necessárias para encher uma piscina (ou seja quero saber o T) e sei que numa hora tenho X parte da piscina cheia, devo relacionar essas quatro variáveis.

> - Quero saber em quantas horas a fracção da piscina cheia é a total (Y);
>
> - E já sei que numa hora a fracção da piscina cheia é X. (Já percebi!!).
>
> (3ª entrada, 2ª versão, 06/03/2011)

Na 4ª entrada, logo na abordagem preliminar que é seu hábito fazer, a aluna, num processo de orientação, refletiu sobre os pontos mais fáceis e difíceis para ela neste tema:

> Geralmente, a primeira parte é bastante fácil de se compreender, bastando saber o domínio da função *g(x)*, no entanto a segunda parte já cria mais dificuldades. (4ª entrada, 1ª versão, 20/03/2011)

Começou a resolução do exercício por esboçar uma estratégia geral de como o pretendia trabalhar e identificou, num processo de estabelecimento de analogias e de ancorar, semelhanças e diferenças com outros exercícios que já conhece:

> Este exercício, assemelha-se muito ao que se encontra imediatamente acima na página do livro em questão. Contudo, esse exercício pede o volume de um cilindro, onde é necessário a composição de funções, no entanto essa composição é feita inconscientemente, sem que haja qualquer necessidade de relacionar funções, o que não acontece neste exercício (pelo menos a meu ver). (4ª entrada, 1ª versão, 20/03/2011)

Já dentro da situação problemática propriamente dita, a Francisca, num processo de orientação, organização e tradução, começou por colocar por palavras suas, os tópicos fornecidos pelo enunciado. Nesta parte, detetei uma interpretação errada por parte da aluna pelo que a instigada a fazer uma releitura e rescrição dessa parte. Na versão seguinte, a Francisca mostrou que deu seguimento a este *feedback*. Relativamente à resolução, optando por estratégias de organização e de ancorar, a Francisca colocou por passos o procedimento genérico desta, depois voltou a reescrever os mesmos três passos, mas de forma adaptada ao exercício escolhido. É nesta fase que ela identificou o seu bloqueio, explicitando-o:

> 1º Passo – Será modificar a expressão inicial que é $(f \circ g)(x)$, por outra que tenha o mesmo significado, isto é: $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$;
>
> 2º Passo – Compreender que: $f[g(x)]$ é $f(x)$, logo a função *g(x)* simboliza uma letra (a *x)* e como tal deve ser substituída pelo valor correspondente – que neste caso é uma expressão;
>
> 3º Passo – Calcular ou, no caso de termos presente o gráfico da função *f(x),* verificar o valor da ordenada da função *f(x)* para a abcissa já determinada;
>
> O que adaptando ao exercício em si:
>
> 1º Passo – Modificar a expressão inicial que é $(c \circ x)(t)$, por outra que tenha o mesmo significado, isto é: $(C \circ x)(t) = C[x(t)]$;
>
> 2º Passo – Iniciar o exercício de cálculo da expressão pela substituição de *x(t)* pela expressão da mesma, que se encontra no enunciado e que é: $x(t) = 10t,\ 0 \leq t \leq 8$.
>
> 3º Passo – Calcular o valor da ordenada da função *C (x),* cuja abcissa é *10t*.
>
> Então, tenho que:
>
> $(C \circ x)(t) = C[x(t)] = C(10t) = ?$
>
> As minhas dúvidas começam aqui! (…) Como é que a partir da expressão $C(x) = 2{,}5x + 500$, é suposto eu descobrir o valor de *10t*? Não faz sentido (…) Agora, no caso do problema em questão, não sei como é que é suposto estabelecer a relação entre duas incógnitas, *c* e *t*, que pelas duas expressões que eu tenho não se relacionam diretamente. (4ª entrada, 1ª versão, 20/03/2011)

Parece que o que esteve em causa nesta entrada foram processos de interpretação e "na relação que as expressões/funções têm umas com as outras e no estabelecimento dessas relações como se uma função completasse o sentido da outra" (4ª entrada, 2ª versão, 03/04/2011), aliados a uma escrita matemática simbólica que a composição de funções assim exigia:

> Eu pensava que tinha de ir à expressão de *C(x)* e deveria substituir o *10t* pela letra *t* existente na expressão e obviamente constatei que não

> existia nenhum *t* na mesma (daí a minha escolha para uma entrada - na tentativa de perceber que substituição teria de fazer). Agora entendi que na verdade o que tenho de fazer é pegar na expressão *10t* e utilizá-la como se fosse o meu novo *x*. (4ª entrada, 2ª versão, 03/04/2011)

Este bloqueio foi superado pela Francisca através de um processo de leitura/releitura e reflexão, sendo que a aluna na reflexão final alegou que a resolução do problema também passou por uma combinação de recursos como os "do caderno diário, do livro e do que me foi dito pela professora" (4ª entrada, 2ª versão, 02/04/2011).

A 5ª entrada, referente ao cálculo diferencial, foi a que deteve mais versões, num total de quatro. A aluna não sabia como resolver nem dispunha de uma solução: "Nunca tive tão "às cegas" numa entrada de portefólio" (5ª entrada, 1ª versão, 30/04/2011).

Nesta entrada, foi bastante evidente a não compreensão dos conceitos teóricos envolvidos pois, através do que a aluna escreveu, foi possível perceber que a Francisca não dominava, nem o vocabulário específico do cálculo diferencial, nem os conceitos de base. Também os teoremas foram escritos por palavras da própria de forma bastante confusa. A título de exemplo, eis o que a aluna escreveu na 1ª versão da 5ª entrada, a propósito da relação entre a monotonia de uma função e sinal da função derivada:

> Monotonia e variação de uma função derivada:
>
> Uma função derivada pode ser, crescente, decrescente, nula ou simplesmente não existir e isso varia com a forma de variação da própria função "original" a partir da qual se forma a derivada, o que vai modificar também o sinal da função derivada (...) Tudo isto vai ainda originar os extremos (absolutos ou relativos) de uma função. Estes registam-se em algumas situações, entre elas:
> - Quando a função é positiva, posteriormente é nula e seguidamente é negativa – máximo relativo ou absoluto;
> - Quando a função é negativa, posteriormente é nula e seguidamente é positiva – mínimo relativo ou absoluto.
>
> Geralmente a monotonia é descoberta com base em tabelas onde interagem ambas as funções: a original e a derivada dessa função original (5ª entrada, 1ª versão, 30/04/2011).

A Francisca lidou com as suas dificuldades através da explicitação do que não sabia e o porquê, e dentro do que não sabia, escreveu o que sabia, num processo de diálogo interior, possivelmente com ela própria:

> Em relação à alínea a) simplesmente não sei o que fazer, porque para exprimir a área do rectângulo eu preciso da comprimento e da largura do rectângulo, pois: $A_{rectângulo} = c \times l$
>
> No entanto, o meu grande problema é que não sei o que significa: $y = 16 - x^2$**.** Trata-se da equação da recta tangente ao ponto referido no enunciado ou estou a dizer uma grande asneira? Porque ao saber as coordenadas (x, y) desse ponto eu consigo obter o comprimento e a largura do rectângulo e daí obter a área – ou pelo menos uma expressão para a mesma. Relativamente à segunda alínea, parece-me bem mais fácil, no entanto faltam-me dados. (…)No entanto como me faltam dados, vou explicar genericamente o que tenho de fazer (passos…) Pronto, é o que consigo fazer por agora! Apesar de não ter cálculos penso que expliquei o raciocínio desta segunda alínea e espero não estar a dizer uma grande asneira. (5ª entrada, 1ª versão, 30/04/2011)

O *feedback* dado revelou-se suficiente para ultrapassar parte do bloqueio, de forma consciente, dando-se lugar a um refazimento da 1ª versão, agora com base num novo entendimento/interpretação dos dados:

> Nota: eu tinha escrito na primeira versão que $y = 16 - x^2$ era a equação da recta tangente ao ponto A, no entanto isso é completamente descabido, visto que uma recta tangente seria definida pela forma $y = mx + b$ e nunca por uma expressão sob a forma de $ax^2 + bx + c$. Como tal a expressão dada representa a parábola que coincide com o ponto A (5ª entrada, 2ª versão, 11/05/2011).

No entanto, na segunda versão, ainda surgiram erros não só com aspetos relacionados diretamente com o contexto do problema, mas também (e ainda) em termos mais gerais/teóricos, de relação e aplicação entre diferentes conceitos (o que está sublinhado foi acrescentado como *feedback*):

> O domínio é $\mathbb{R}$ (Dentro do contexto do problema, achas que o domínio é $\mathbb{R}$?) (…) a partir das tabelas de "monotonia da função/sinal da derivada" onde utilizamos a função derivada. ~~de uma função num ponto~~. (feedback dado à 5ª entrada, 2ª versão, 13/05/2011)

A aluna também usou um processo de questionamento sobre os resultados parciais que tinha obtido, agora em diálogo com a professora:

> Eu continuo a achar que existe alguma coisa que não faz sentido na minha resolução! Até porque os valores numéricos alcançados na tabela de monotonia/sinal, são um bocadinho estranhos. Como tal optei por esperar pela sua resposta e numa terceira versão farei a minha reflexão :b[2] (5ª entrada, 2ª versão, 11/05/2011)

Na 3ª versão, a Francisca explicou com pormenor a forma como usou o meu *feedback* para desenvolver o seu próprio processo de raciocínio. Assim, num processo de reflexão sobre as suas produções anteriores da entrada e sobre os *feedbacks*, a aluna foi-se apercebendo dos raciocínios erróneos, corrigindo-os, num processo de ziguezaguear, seguido do processo de aprofundar, até chegar à sua 3ª versão. Ainda houve necessidade de uma 4ª versão por questões de aperfeiçoamento de processos relativos à comunicação matemática, associados também a processos de tradução e de interiorização de raciocínios, que possibilitaram à aluna atingir a solução final da entrada.

Na 6ª entrada, mais uma vez verificou-se que Francisca não conseguiu interpretar a totalidade do enunciado e, apesar de ter uma estratégia adequada para resolver o exercício, não conseguiu concretizá-la. No entanto, depois do meu *feedback*, a 2ª versão explicava como a Francisca tinha superado as suas dificuldades e já se orientava para a alínea seguinte:

> Consegui fazer a 19.3! Sim era o que estava a dizer, mas não tinha pensado no $^1/_3$, só em números inteiros. Quanto à outra alínea vou tentar avançar mais qualquer coisa a partir da sua sugestão! Vamos ver o que consigo fazer :b (6ª entrada, 2ª versão, 31/05/2011)

Como vinha sendo hábito, a aluna foi ultrapassando as suas dificuldades através de processos de orientação e organização, desenvolvendo os cálculos a par da escrita dos raciocínios e identificando de forma incisiva onde estão as suas dúvidas, o porquê delas existirem e como pensa solucioná-las, ou seja, apesar do bloqueio, selecionava uma estratégia:

[2] Note-se que símbolos como ":b", estão usados pelos alunos, em particular pela Francisca, estão associados à escrita por *sms* e são destinados à expressão de emotividade.

> Aqui começaram as minhas dúvidas! Não percebo exatamente o que é que é para fazer. A única ideia que me veio à memória foi dividir os polinómios pois talvez assim desse para alcançar a expressão pedida pois a mesma relembra-me uma expressão do tipo: $D = q + \frac{r}{d}$
>
> (6ª entrada, 1ª versão, 25/05/2011).

Na 2ª versão da 6ª entrada, a aluna entrou num processo de diálogo crítico interior, que denotou um ziguezaguear em torno de uma ideia:

> Efetivamente eu consigo saber todos os termos a partir do termo de ordem 10 e isso quer dizer que eu posso inventar os termos todos desde o termo de ordem 1 ao termo de ordem 9? (…) mas então como é que vou fazer com que os termos anteriores a esse sejam "à minha maneira" se tenho de cumprir uma expressão que a partir do termo de ordem 10 tem de ser a expressão da sucessão (v_n)? Será que posso fazer do género da função módulo, em que dividíamos a expressão em duas: uma para valores maiores ou iguais a zero e outra para valores inferiores a zero? Se assim for crio uma expressão para todos os termos antes do n=9 e depois aplico a expressão da sucessão (v_n) para valores de n iguais ou superiores a 10. Seria qualquer coisa deste género:
> $$wn = \begin{cases} expressão\ qualquer\ se\ n < 10 \\ \frac{n+6}{3n}\ se\ n \geq 10 \end{cases}$$
>
> (6ª entrada, 2ª versão, 31/05/2011).

É neste processo de diálogo interior, ancorado no *feedback* da versão anterior, nas ferramentas teóricas e resultados já obtidos que a aluna conseguiu concluir a entrada.

Em síntese, respeitando as regras de execução do portefólio sugeridas pela professora, a aluna criou uma forma própria de o desenvolver na qual, numa primeira fase, reunia toda a informação que considerava estar relacionada com o tema e exercício que tinha escolhido, tanto ao nível dos conteúdos, como ao nível de alguns procedimentos. Naturalmente, neste trabalho a aluna encontrou-se envolvida em processos de orientação e organização, familiarizando-se com o tema, analisando informações, socorrendo-se de algumas representações iniciais, organizando dados, planeando e estabelecendo algumas metas.

Neste trabalho foi possível identificar processos de tradução uma vez que tanto conteúdos como procedimentos foram, de uma forma geral, escritos por palavras

próprias e como se estivesse a explicar a alguém (possivelmente a ela própria). Posteriormente, e já na escolha propriamente dita, a aluna, num processo de ancorar, foi buscar conteúdos e procedimentos, explanados na primeira fase, que considerou úteis na execução da estratégia escolhida. Quando a estratégia não produzia o efeito desejado, voltou atrás e experimentou outra. Só quando não tinha mais ideias é que me enviava a 1ª versão, mas deixando registado as tentativas falhadas. Aliás, de uma versão para a outra, a Francisca foi uma aluna que deixou sempre registado o avanço conseguido numa versão nessa mesma versão e, num processo de aprofundar, é que acrescentava a 2ª versão. Depois, o progresso conseguido na 2ª versão ficava registado nessa versão, e por assim adiante. Desta forma, uma entrada que tinha tido, por exemplo, 3 versões, tinha "versão 2" com o que tinha feito de útil na 1ª versão; mais o que conseguiu avançar na 2ª versão; a "versão 3" continha o que havia conseguido na 1ª versão, mais o que havia conseguido na 2ª, e finalmente o que faltava da 2ª para 3ª versão.

Em qualquer versão, a entrega foi acompanhada de um ponto da situação que a aluna elaborou num processo de verificação, denotando uma avaliação das decisões e dos resultados que tinha obtido e de uma perspetivação do que lhe faltava para chegar à resposta.

Sempre que as entradas recaíram em exercícios nos quais as dificuldades eram apenas sentidas numa parte destes (por exemplo, numa alínea), a Francisca optou por desenvolver todo o exercício. Esta opção revelou-se em todas as situações útil no que respeita à correção e melhoramento ao nível da comunicação matemática, bem como no esclarecimento da inter-relação entre diferentes conteúdos ou raciocínios. De facto, a parte escrita a que o portefólio obrigou, permitiu à Francisca e a mim, apercebermo-nos de aspetos que, pela forma como inicialmente foram escritos pela aluna, revelaram que conceitos e/ou raciocínios e a relação entre estes não estavam suficientemente compreendidos, nem bem estruturados ou relacionados. Foi no refazer das suas produções que se verificou um ziguezaguear que lhe permitiu interiorizar todos os aspetos envolvidos em cada escolha.

O processo de especialização onde incluímos os processos de interpretação que têm como objetivo a compreensão da situação, a clarificação de ideias e que permitiu que a Francisca se iniciasse na tarefa, foi usado de forma maioritariamente formal (ou pelo menos com esse intuito, por parte da aluna). A aluna apresentou com regularidade

processos de tradução com a elaboração e rescrição por palavras próprias de conceitos e procedimentos; debruçou-se sobre o significado de conceitos e resultados num processo de interiorização; recorreu a representações e a exemplos concretos (3ª entrada) em processos de experimentação inicial; identificou semelhanças e relacionou "o novo" ao que já sabia num processo de ancorar e seleção de estratégias de entre as quais umas se revelaram frutíferas e outras não. Independentemente das estratégias produzirem ou não os resultados esperados, a aluna, num processo de verificação, fez sempre uma avaliação das suas decisões e dos resultados dos seus planos. Aliás é notório, ao longo da fase de execução, uma monitorização do seu progresso e de mudanças de decisão. A acompanhar esta monitorização foi possível observar uma evolução nos processos de justificação que foram melhorando e tornando-se cada vez mais precisos e explícitos.

Recursos usados na elaboração do portefólio

Após a escolha feita, foi transversal no portefólio da Francisca, que o primeiro recurso a que a aluna recorreu foi a uma sistematização de tudo o que sabia sobre o tema, fosse em questão de conteúdos (fórmulas, definições, teoremas) fosse em termos de processo (raciocínios tipo, técnicas de base). Quando se justificou, incluiu esquemas ou outro tipo de representações gráficas. Esta abordagem preliminar, não obrigatória, foi feita isoladamente e de forma completamente independente do problema escolhido. A aluna reuniu toda a informação que estava relacionada com o tema da entrada ou apenas com o tipo de situação escolhida, consoante a necessidade sentida, colocando-a por tópicos. Na terceira entrada, na abordagem preliminar, recorreu pela primeira vez a exemplos de aplicação concretos, não relacionados com o exercício em si.

A opção de se munir de todas ferramentas teóricas antes de trabalhar a entrada nunca foi por mim sugerida. No entanto, veio a revelar-se importante na correção da linguagem (matemática ou não) e na captação de ideias erróneas da aluna, que, de outra maneira, muitas delas facilmente se manteriam para mim impercetíveis.

Naturalmente de forma transversal à realização do portefólio, porque este foi conceptualizado dessa forma, a utilização do *feedback* escrito dado por mim, na resposta a cada versão das entradas, foi um dos principais recursos utilizados para a superação

das dificuldades e bloqueios que a aula sentia. Apenas na primeira entrada houve necessidade de *feedback* relativamente à própria conceptualização do portefólio. Por exemplo, a 3ª e última versão da 1ª entrada prendeu-se apenas com a reflexão final dado que a aluna em vez de elaborar um texto único, em que os tópicos por mim dados constituíssem apenas ideias para essa reflexão, a aluna tomou essas questões como isoladas e de resposta obrigatória elaborando uma redação do tipo pergunta/resposta.

O *feedback* procurado por esta aluna foi o de apoio a processos de interpretação, superação de bloqueios, correção de erros e na reflexão sobre aspetos apenas parcialmente dominados. Assim, o *feedback* foi dado no sentido de a ajudar:

a) a refletir melhor sobre o significado de algumas expressões usadas por ela e a dar continuidade a passos já conquistados:

> Pela frase que acabaste de escrever, o comprimento do retângulo é x e a largura é y.
>
> Se o comprimento é x, então não é preciso "trabalhar" o comprimento porque já está escrito em função de x.
>
> A largura é y – a ordenada do ponto A. Ora, o ponto A pertence ao gráfico então a sua ordenada é dada por… (consegues completar a frase?) (feedback dado à 5ª entrada, 1ª versão, 07/05/2011).

b) a encontrar estratégias adequadas, ajuda esta a que a aluna apelidou de *dicas* como: "multiplica o numerador e o denominador pela mesma expressão (só tens de pensar na expressão que te convém para obteres o que queres)" (1ª entrada, feedback da 1ª versão, 15/01/2011);

c) a validar os resultados por ela obtidos:

> **2 + t + t** - tempo (em horas) que a torneira A e a torneira B levam a encher a piscina. (mas se somares o t com o t+2, a piscina vai ***transbordar*** com água, não achas? Vais encher muito mais do que uma piscina. (feedback dado à 3ª entrada, 2ª versão, 14/03/2011).
>
> "O domínio é $\mathbb{R}$ (Dentro do contexto do problema, achas que o domínio é $\mathbb{R}$?)" (*feedback* dado à 5ª entrada, 2ª versão, 13/05/2011).

d) através do desenvolvimento dos raciocínios errados da própria aluna para fazer surgir absurdos conducentes ao estabelecimento de "mal entendimento produtivo (Newman, Griffin & Cole, 1989 in Healy & Fernandes, 2004):

> Se pensares mais um bocadinho t+t+2 enche **mais de 2 piscinas**!
>
> Por exemplo, se t=3h
>
> Piscina A: 3h para encher uma piscina
>
> Piscina B: 5h para encher uma piscina
>
> Então t+t+2 dá 3+5, ou seja, 8 horas de enchimento com as duas torneiras abertas.
>
> Ao fim de 3h com as duas torneiras abertas, temos 1 piscina (da torneira A)+ 3/5 de piscina (da torneira B) com água.
>
> Nas 5 horas seguintes, as duas torneiras continuam abertas!
>
> Ou seja, mais 3h de enchimento (que dá mais 1 piscina e 3/5 de piscina); e depois ainda mais duas horas!!
>
> É muita água! Eheh.." (*e-mail* enviado à aluna, 15/03/2011)

O *feedback* direcionado para questões de escrita da língua portuguesa e matemática revelou-se importante na estruturação do pensamento matemático e na compreensão dos problemas e dos respetivos resultados parciais ou finais:

> Eu tinha escrito na primeira versão que $y = 16 - x^2$ era a equação da recta tangente ao ponto A, no entanto isso é completamente descabido, visto que uma recta tangente seria definida pela forma $y = mx + b$ e nunca por uma expressão sob a forma de $ax^2 + bx + c$. Como tal a expressão dada representa a parábola que coincide com o ponto A (5ª entrada, 2ª versão, 11/05/2011).

Também é de salientar o recurso a reforços positivos e de concordância com a avaliação feita pela aluna "estás mesmo a um passo de chegar ao fim da demonstração!" (*feedback* dado à 1ª versão da 1ª entrada, 15/01/2011).

A aluna recorre ao questionamento sobre os resultados parciais que vai obtendo e, ao pedir ajuda, como expressão de emotividade, a aluna também recorre a símbolos associados à escrita por *sms*:

> Eu continuo a achar que existe alguma coisa que não faz sentido na minha resolução! Até porque os valores numéricos alcançados na tabela de monotonia/sinal, são um bocadinho estranhos. Como tal optei por esperar pela sua resposta e numa terceira versão farei a minha reflexão :b (5ª entrada, 2ª versão, 11/05/2011)

Nem sempre o meu *feedback* foi imediatamente compreendido. A Francisca considerou-o por vezes pouco esclarecedor. Nessas situações a aluna solicitou mais ajuda, levando-me a reformular o meu *feedback*: ou então escrevia por palavras suas a informação dada pela professora para que esta verificasse se, de facto, a aluna tinha interpretado bem o meu *feedback*.

O tipo de *feedback* que mais ajudou a aluna a progredir foi o de completar o raciocínio, ou seja, a professora inicia uma ideia e a aluna tem de dar continuidade a essa ideia. Outra forma de *feedback* que a aluna considerou mais adequada foi da forma "se fizeres isto, o que é que vai acontecer?" (2ª entrevista, 06/06/2011). Trataram-se de situações em que foi apenas fornecida uma base de trabalho porque "se fosse tudo muito explicadinho, eu não pensava nada" (2ª entrevista, 06/06/2011).

Um outro aspeto que sobressaiu no trabalho desenvolvido pela aluna na elaboração do portefólio prendeu-se com o facto desta, desde a primeira entrada e à medida que ia fazendo as entradas, ir fazendo um formulário, não só com as fórmulas mas também com alguns raciocínios tipo, sob a forma de tópicos. O formulário foi por mim pedido a todos os alunos como um anexo ao portefólio, mas foram poucos os que conseguiram fazer na totalidade e de uma forma geral, quando o faziam, foi "de uma vez só" - do género "tirarem uma tarde para esse fim". Os alunos alegaram não ter tempo e ter falta de à vontade com o editor de equações o que tornava a elaboração do formulário mais morosa. No entanto, esta aluna conseguiu gerir a sua forma de atuar e optou, no meu entender, por uma forma de o fazer eficaz não só na execução do pedido da professora, mas também de forma eficaz ao seu estudo, uma vez que o formulário ia sendo construído à medida que as fórmulas iam surgindo na elaboração do portefólio.

Em síntese, a abordagem preliminar em termos de conteúdo e de processo foi um recurso de cariz próprio da aluna que se revelou útil no âmbito correção e

aperfeiçoamento da comunicação e do raciocínio matemático. O *feedback* escrito dado pela professora foi o principal recurso usado e foi dado, numa primeira fase, com o propósito de ajudar na implementação efetiva do portefólio; depois foi maioritariamente usado no apoio aos processos de interpretação, na proposta de estratégias, na correção de erros e na reflexão sobre aspetos parcialmente interiorizados, em particular, os conceitos prévios que a aluna detinha, de forma a fazer surgir de "mal entendimentos produtivos". Também foi usado *feedback* com o intuito de reforçar o que a aluna havia conseguido em versões anteriores por forma a ela ver reconhecido o seu esforço e manter a motivação no seu percurso.

Vantagens e limitações

Apesar de não o ter mencionado no início do processo de elaboração do portefólio, em janeiro, ou mesmo na primeira entrevista em março, no final do ano letivo a aluna revelou que, de facto, no início, o portefólio afigurou-se-lhe apenas como mais um trabalho que tinha de fazer, ainda por cima todas as semanas. No entanto, no fim do ano letivo a Francisca afirmou que o portefólio deu-lhe "muito mais jeito do que aquilo que eu pensava (…) é muito bom para estudar" (2ª entrevista, 06/06/2011). As razões que a levaram a modificar a ideia inicial prenderam-se essencialmente com o facto de, ao ter de fazer o portefólio, ser obrigada a estudar com regularidade e não preferencialmente na véspera dos testes (como fazia anteriormente). Afirmou que para fazer a entrada "tive que ver a matéria toda, escrever a matéria, perceber se aquilo fazia sentido escrito" (2ª entrevista, 06/06/2011). Quando ia estudar para o teste "eu já sabia aquilo que eu tinha que estudar e aquilo que eu tinha que fazer, pormenores que eu tinha que ter em atenção" (2ª entrevista, 06/06/2011), reconhecendo que essa foi uma das vantagens mais importantes que o portefólio lhe ofereceu. Consequentemente, o portefólio permitiu-lhe também chegar aos testes "um bocadinho mais segura" (2ª entrevista, 06/06/2011):

> Então com o portefólio eu tinha de duas em duas semanas, mais ou menos – eu pegava na matéria e pronto!, "vou ter de estudar isto"; e nos testes eu já sabia que tinha de estudar aquilo. Eu lembro-me de funções racionais – eu lembro-me dos limites. Eu não percebia como é que funcionavam as assimptotas. Eu fiz o portefólio e a matéria

> entrou. Depois quando eu fui a estudar [para o teste] eu já só tinha de ir rever e isso é bom porque não é tudo novo. Não é aquela ideia "ai agora, tenho teste amanhã, tenho teste daqui a dois dias e não percebo nada disto". E nesse sentido é muito bom. (2ª entrevista, 06/06/2011)

As reflexões finais das entradas também corroboram as ideias expressas nas entrevistas. Com efeito, segundo registos da Francisca, o portefólio ajudou-a a estudar de uma forma mais regular e a aprender matemática de uma forma mais consciente:

> O portefólio foi sem dúvida um ótimo elemento de estudo para mim (...). Tive de exercer sempre um processo de estudo da disciplina de uma forma contínua (...). Devido à existência destas entradas, fui sempre estando a par da matéria, estudando-a e debruçando-me mais sobre exercícios nos quais tinha dúvidas. Este processo de estudo recorrente e de dissolver dúvidas existentes ajudou-me imenso antes dos testes, porque ainda antes de começar a estudar mais a sério, já sabia a matéria, não apenas de uma forma mais superficial (como aconteceria sem o portefólio), mas de uma forma muito mais aprofundada pois efetivamente já a tinha estudado anteriormente (Reflexão final de ano, 06/06/11)

> O portefólio revelou-se também útil para tirar dúvidas, especialmente dúvidas mais pequenas que em aula me passariam despercebidas ou que acabaria por não tirar – este tipo de dúvidas são geralmente dúvidas de pouca relevância mas que me levam a cometer erros matemáticos (em cálculos, substituições ou deduções que faço) que por fim me levam a errar os exercícios. Por outro lado penso que o portefólio me permitiu expressar melhor os meus raciocínios e ainda me permitiu ter uma ajuda mais focalizada por parte da professora visto que através deste trabalho me foi possível retirar dúvidas e demonstrar o meu trabalho em casa, o que de outra forma não seria possível (...). Como tal, o balanço que consigo apurar deste trabalho é um balanço muito positivo que me ajudou a aprender e a estudar muito mais matemática do que faria sem ele – é uma responsabilidade boa (reflexão final de 2º período, 03/04/11)

Em termos processuais gerais de estudo da Matemática, parece que a elaboração do portefólio lhe chamou a atenção para uma forma "de estar" perante o estudo que se estende para além do estudo da disciplina desta Matemática:

> Esta tendência de decorar passos a seguir não me deixou abertura suficiente para perceber que as áreas não podem ser negativas!!!! Geralmente enfrento problemas deste género pois como já tenho a ideia estruturada nunca penso além dela e considero isso mesmo um grande entrave para mim na resolução de exercícios de matemática e também de físico-química, pois nunca me lembro que posso ter de fazer qualquer coisa diferente ou de ir buscar outra coisa que não está presente de imediato na minha cabeça, devido às diferentes circunstâncias que os exercícios podem ter. (5ª entrada, 3ª versão, 14/05/2011)

> Compreendi que muitas vezes temos de utilizar o nosso "olho clínico" e pensar para além do que está exposto à nossa frente. (Reflexão final da 1ª entrada, 20/01/11)

> Obviamente que não nos é dito, pelo menos com clareza, nos enunciados as matérias a aplicar, como tal deveremos ser nós a ter a capacidade de ler nas entrelinhas e a partir do que nos é dito determinar o ramo a escolher, dentro dos muitos ramos possíveis já adquiridos com os anos de estudo desta disciplina. (reflexão final da 2ª entrada, 12/02/2011)

> Como balanço final, esta entrada foi boa (...) porque me fez ver que é preciso ter mais atenção ao enunciado, ao que me é pedido e que não devo estar formatada para os exercícios que me pedem para resolver. (5ª entrada, 3ª versão, 14/05/2011)

Na realização do portefólio alegou que, por um lado, "uma pessoa pode pensar, pode refazer, pode voltar atrás e ver se aquilo faz sentido" (2ª entrevista, 06/06/2011), facto que a ajudou a estruturar melhor as ideias. Por outro lado, o portefólio também a ajudou a ter mais consciência dos raciocínios porque "tenho de explicar tudo por passos, e até os passos que uma pessoa nem sequer se lembrava de ter de dar e ter de explicar na mesma" (2ª entrevista, 06/06/2011). Assim, naquilo em que acha que o portefólio também foi realmente útil é nos exercícios mais difíceis, o que não são "chapa 3" (2ª

entrevista, 06/06/2011), "aí ajudou-me a perceber como é que aquilo funcionava" (2ª entrevista, 06/06/2011).

Considerou que o portefólio foi uma maneira de o professor estar focado no desenvolvimento e trabalho de cada aluno e perceber melhor as dificuldades desse aluno:

> Porque numa aula é muita gente (…) No portefólio a professora ajuda-me a mim. Não está a falar para 30 ou 20 e tal pessoas. É diferente porque é mesmo focado. Às vezes os professores dizem "ah, isto é um erro comum, que os alunos fazem", mas se calhar eu não faço esse erro. Faço outro. E aí é uma maneira de a professora saber o que eu faço mal. (2ª entrevista, 06/06/2011).

Desta forma, "eu acho que o portefólio de matemática é uma maneira do professor conseguir analisar cada aluno e perceber quais são as dúvidas de cada aluno e de certa forma fazer o apoio individualizado do aluno em si" (1ª entrevista, 15/03/2011).

O balanço global que fez foi bastante positivo: "Como tal, o balanço que consigo apurar deste trabalho é um balanço muito positivo que me ajudou a aprender e a estudar muito mais matemática do que faria sem ele – é uma responsabilidade boa" (reflexão final de 2º período, 03/04/11). No fim do ano letivo, referiu mesmo que ia imprimir o portefólio e fazer um livrinho porque "tem lá a matéria toda. Não sei é se imprimo as entradas todas ou se só imprimo a matéria (sem as reflexões)" (2ª entrevista, 06/06/2011).

No que respeita à avaliação na disciplina de Matemática, a aluna referiu que um dos motivos que a levou a investir no portefólio foi o facto de este ser muito menos vulnerável a percalços momentâneos porque "num teste é aquele momento, pode correr mal ali. Eu trabalhei nele (portefólio) para assegurar nota, para o caso de ter um mau teste ou de descer nalguma coisa (…) Enquanto que o portefólio – se eu fosse fazendo e tentando melhorar, eu acho que era uma maneira de eu ter sempre uma coisa assegurada. (2ª entrevista, 06/06/2011)

As resoluções no portefólio, não sendo definitivas, deram origem a novas oportunidades de aprendizagem e de avaliação, que uma prova escrita com tempo limitado não dá:

> Pelo que conheço do estado em que fico nos testes de matemática (nervosa) acho que não o ia conseguir fazer, porque nunca pensaria

> em multiplicar um número por uma fração – pois estou muito mais habituada a fazer divisões com números inteiros (enfim, novamente o meu problema de formatar os exercícios) -, e por isso ser-me-ia mais complicado perceber o que fazer, pois efetivamente o meu primeiro palpite até estava certo. (6ª entrada, 2ª versão, 31/05/2011)
>
> São este tipo de exercícios, em que a resolução pode "não dar em nada", que mais me trazem dificuldades no decorrer de um teste ou em exercícios de aula, pois sei que posso estar a perder tempo em algo que não me trará a resposta. (Reflexão final da 1ª entrada, 20/01/11)

Quando questionada acerca do que é que o portefólio valorizou que os outros instrumentos de avaliação não o fizeram, a aluna respondeu:

> O trabalho individual do aluno, o que ele faz em casa; avalia, dá para perceber exatamente aquilo que o aluno não percebeu e a partir daí o professor consegue avaliar se ele consegue ou não desenvolver o raciocínio a partir daí, depois das dicas, que é como eu chamo àquilo que a professora diz. (1ª entrevista, 15/03/2011)

A aluna acredita que no caso dos alunos "menos bons" mas que se esforçam para aprender, "o professor pode ver melhor quais são as dificuldades deles" (2ª entrevista, 06/06/2011) e atuar em conformidade; e considerou também que o portefólio é útil para o aluno perceber a sua evolução: "Dá para perceber o que é que eu fiz aqui e o que é que eu fiz aqui" (2ª entrevista, 06/06/2011).

Daí que, o portefólio favoreceu uma avaliação mais individualizada do aluno:

> Penso que esta reflexão não diverge muito da que foi feita no segundo período, mas efetivamente a minha opinião mantém-se: tornou-se bem mais proveitoso do que pensava, é sem dúvida uma forma da professora perceber o trabalho desenvolvido pelos alunos mais pormenorizadamente (Reflexão final, 06/06/11).

Finalmente há a salientar a promoção do à vontade para colocar questões ao mesmo tempo que se é avaliado. Só a título de exemplo, note-se que, a 2ª versão da 6ª entrada terminou com uma questão não diretamente relacionada com o exercício, mas que a aluna resolveu colocar:

> Tenho uma dúvida que não se relaciona diretamente com esta entrada, mas vou colocá-la aqui porque me surgiu novamente na resolução da alínea 19.3. Porque é que eu escolho imediatamente como minorante o zero?. (6ª entrada, 2ª versão, 31/05/2011)

Também foi possível observar que na 5ª entrada, a primeira do terceiro período, após a atribuição de uma classificação final no fim deste, a aluna escolheu um exercício para o qual não dispunha de qualquer ponto de referencia para a resposta final.

Em relação às dificuldades que o portefólio imprimiu, a aluna referiu que o "único ponto negativo do portefólio é o tempo que me tira por semana, pois como tenho prazos para cumprir e o portefólio é algo que me tira mesmo muito tempo (especialmente na primeira versão de cada entrada) (reflexão de final do 2º Período, 03/04/2011). Houve muitos momentos em que a aluna entregou as versões mesmo no limite das datas previstas: "Foi difícil respeitar as datas, as entradas foram entregues no limite do tempo (2ª entrevista, 06/06/2011).

A aluna afirmou que a determinada altura o portefólio passou a ser mais uma rotina que uma obrigação (não deixando de ser sempre uma obrigação por ser algo exteriormente imposto e com datas fixadas à priori).

Um aspeto que sobressaiu dos restantes portefólios da turma foi o facto da aluna manter de forma explícita e "permanente" a sua evolução, não eliminando as versões anteriores do seu portefólio final. No portefólio final, a aluna tinha todas as versões das entradas e em cada nova versão faz uma síntese do(s) ponto(s) que lhe ofereceram dificuldades, do(s) *feedback* dado pela professora nesse(s) ponto(s) e só depois é que procedia à elaboração efetiva da nova versão. Assim, em traços gerais, cada entrada tem a seguinte estrutura: 1ª versão com um apanhado de todos os conteúdos e "procedimentos *standard*", as diferentes versões subsequentes que se iniciam sempre com uma síntese processual da versão anterior, e finalmente a reflexão final de entrada. Os restantes alunos da turma optaram por, à medida que iam fazendo as novas versões, não guardar, muito menos introduzir no portefólio final as versões anteriores. Pode, portanto dizer-se que a aluna "conviveu" perfeitamente com os seus erros, não os procurando esquecer, mas sim, assumi-los como fonte e evidência do seu progresso. Esta ideia é por si corroborada:

> Eu posso escrever lá que eu não percebo e não tenho medo de dizer isso porque é mesmo para isso que serve. No início tinha medo de dizer "ok, não percebo" – como é que eu vou dizer isto? Geralmente eu acho que os professores ficam a pensar: "então não sabe?" - e eu não queria demonstrar isso. Mas houve uma altura, essencialmente depois da 1ª entrevista em que eu percebi: "pronto, eu posso dizer que não percebo" – não faz mal. (2ª entrevista, 06/06/2011)

Em síntese, as vantagens reconhecidas pela aluna foram: uma maior regularidade na frequência do estudo; a atenção e tratamento de pormenores que de outra forma lhe passariam impercetíveis. Além disso, o facto de ser uma forma de avaliação que, não estando limitada a um período de tempo fixo, lhe permitiu voltar a pensar, refazer e verificar se o que fez lhe fazia sentido, permitiu-lhe estruturar de uma forma mais consistente e consciente as ideias, conduzindo-a a uma "nova forma de estar" perante o estudo que passou a estar mais focado na compreensão em detrimento do "decorar passos".

Do ponto de vista da avaliação, a aluna considerou que o portefólio permitia ao professor um acompanhamento mais individualizado e especificamente dirigido a cada aluno, para além de estar focado no desenvolvimento da aprendizagem e não apenas no seu produto final, razão pela qual a avaliação se tornou mais coerente com o trabalho desenvolvido pelo aluno e que mostra, tanto ao aluno como ao professor, a cada momento, o que já está feito, o que falta fazer e uma ideia de como chegar ao objetivo final. Além disso, há uma promoção do à vontade para o aluno colocar dúvidas ao mesmo tempo que é avaliado.

No que respeita às dificuldades, apesar de a aluna alegar que o portefólio passara a ser mais uma rotina do que uma obrigação, a questão do tempo despendido na elaboração deste, continuou a ser um entrave dada a quantidade de afazeres que o conjunto das disciplinas do décimo primeiro ano de escolaridade obriga.

Síntese do capítulo

A Francisca mostrou que tem uma forma de estudar Matemática muito bem definida: em primeiro lugar estipula os tópicos principais e secundários da matéria – como se fosse um esqueleto. Depois vai preenchendo-o como que se associasse aos poucos os músculos, os órgãos e a pele. Por fim, à medida que uma parte do organismo vai estando preenchido, faz exercícios que o envolvam para a exercitar e ver se não falta nada.

Considero que a Francisca adaptou esta forma de proceder às exigências impostas pelo portefólio de forma a dar resposta ao que lhe era pedido e, ao mesmo tempo, respeitar a sua maneira de estudar. Assim, foi visível em todas as entradas uma abordagem preliminar, que não lhe foi pedida nem sugerida, na qual a aluna fez um apanhado de tudo o que ela considerava estar relacionado com a situação escolhida. Esta abordagem introduzida pela Francisca não se referia apenas a questões de conteúdos envolvidos, mas também a processos, raciocínios típicos de determinado tópico. No entanto, nesta parte todos os temas abordados foram tratados de forma estanque. Só depois é que a aluna procedeu ao tratamento da situação problemática específica que escolheu. Neste tratamento, este sim obrigatório, a aluna foi buscar o que escreveu na abordagem preliminar e procura estabelecer analogias e ancorar ao exercício escolhido. Foi possível observar que esta estratégia da aluna revelou-se bastante útil quer no aperfeiçoamento e correção de aspetos de comunicação matemática, quer de raciocínio (pois foram detetados raciocínios mal estruturados e até errados), que de outra forma poderiam não vir a ser trabalhados se a aluna apenas se tivesse limitado ao que lhe era pedido.

A comunicação de ideias na forma escrita, por um lado, nunca revelou ser um entrave para a Francisca dado que se expressou sempre de forma nítida e até emotiva (com vários pontos de exclamação e símbolos vulgarmente associados ao envio de *sms* ou *e-mails*). Para além disso, considero ser também um indicador do à vontade com que a aluna se expressa, ora "falando para ela própria", ora se dirigindo à professora.

Na realização do portefólio foi possível observar que a Francisca esteve de forma sistemática a fazer um ponto da situação, ou seja, a fazer autoavaliações sobre a forma como vai estando a desenvolver o seu trabalho. Dado que este aspeto foi verificado na

aluna desde o início da realização do portefólio, provavelmente esta atitude não foi despoletada por este instrumento de avaliação reguladora. No entanto, para além do esclarecimento de dúvidas, deu-se constantemente lugar a aperfeiçoamentos e/ou correções das suas produções, ou seja, lugar à evolução na sua aprendizagem.

Capítulo VII

Apresentação e discussão de dados - Lara

Apresentação

A Lara tinha dezasseis anos de idade no início do ano letivo 2010/2011 e estava a frequentar o décimo primeiro ano pela primeira vez. No ano letivo anterior já havia sido em dois períodos letivos, minha aluna. A Lara foi considerada com tendo um desempenho irregular a Matemática no sentido de que, no ano letivo anterior, as suas classificações oscilaram entre o suficiente e o insuficiente.

A Lara acredita que a Matemática trabalhada na escola é diferente da que é usada na vida real, contudo, a primeira é necessária no sentido de que constitui uma base da segunda (1ª entrevista, 16/03/11). Esta aluna concordou totalmente com a afirmação de que a Matemática é um instrumento ao serviço de quase todas as áreas de atividade humana e é uma ferramenta ao serviço das outras ciências (questionário, 24/01/11) e, corroborando, afirmou na primeira entrevista que "a matemática é muito abrangente" (1ª entrevista, 16/03/11). Talvez por isso, tenha discordado da afirmação de que a matemática é uma área do conhecimento que se desenvolve autonomamente, obedecendo a leis próprias, "internas" (questionário,24/01/11). No entanto, quando questionada acerca do trabalho de um matemático, cingiu-se apenas a um trabalho de cariz mais teórico:

> C- Achas que a matemática aqui da escola é diferente da matemática da vida lá fora da escola?
>
> L- Eu acho que sim, de certa maneira porque nós aprendemos na escola, depois é que evoluímos para essas profissões, e eles para saberem o que sabem nas profissões deles, tiveram de saber o que aprenderam aqui. Por isso não é exatamente igual mas tem como base.
>
> C- Olha, o que é que faz um matemático de profissão?
>
> L- Um matemático estuda matemática, não sei…(risos)

> C- Estuda só? Ele tem de receber um ordenado. O que é que achas que ele faz?
>
> L- Ai.. O que é que ele faz?..
>
> C – Só dá aulas (risos)
>
> L – Não.. estuda matemática, trabalha com ela, ensina a matemática, aprende, exercita matemática, exercita o cérebro.
>
> (1ª entrevista, 16/03/11)

Quanto ao seu próprio trabalho, afirmou que o que a levava a estudar Matemática não era o facto de gostar da disciplina e que não procurava resolver o mesmo problema de maneiras diferentes. Na realidade, praticamente não estudava matemática (questionário, 24/01/11). Na primeira entrevista explicou o porquê:

> C- Tu escreveste no questionário que não gostavas de matemática. Conta lá isso..
>
> L- É assim: eu sou muito esquisita porque eu só gosto das disciplinas se entender as coisas e como eu não entendo matemática logo à primeira e não vejo a segunda vez , eu não gosto de matemática (...) se eu não conseguir à primeira, depois desinteresso-me.
>
> (...)
>
> C- Com que frequência costumas estudar?
>
> L- Eu estudo antes dos testes, um dia ou dois dias antes dos testes.
>
> (...)
>
> L- Eu acho que um bom aluno em matemática não precisa ser inteligente (...) acho que tem de ser persistente porque não pode desistir, não é! Tem que gostar de uns numerozitos, não é? Tem que gostar de resolver problemas, tem que gostar de desafios, acho que tem que ser um bocado aventureiro digamos, porque matemática é uma aventura, não é? Parecendo que não.. (risos)
>
> (1ª entrevista, 16/03/11)

Reconheceu que a disciplina era importante na sua formação e que uma boa base matemática a poderia ajudar na sua vida futura (questionário, 24/01/11). No entanto,

considerou que a avaliação tinha apenas a vertente que se relacionava com a seleção dos alunos:

> C- De uma forma geral para que é que serve a avaliação?
>
> L- A avaliação serve para obter notas para ir a faculdade (risos) porque é isso que importa, quer dizer. assim, de uma maneira crua (risos) não importa o que nós sabemos ou não sabemos, o que importa é a nota, e o que toda gente se importa é com resultado final, não importa se é muita bom ou se é muita mau.
>
> C- O quê para ti é mais importante na avaliação?
> L- Eu acho que os testes não deviam ter tanto peso. Eu acho que o trabalho na aula deveria ter assim um peso maior, porque é mais contínuo do que os testes. Os testes não é tão contínuo.
>
> (1ª entrevista, 16/03/11)

A Lara concordou plenamente que cometer erros fazia parte da aprendizagem e que estes podiam não estar diretamente relacionados com desconhecimento do aluno. Fatores como a pressão do tempo num exame escrito ou desatenção, podiam ser fatores que podem estar na origem dos erros (1ª entrevista, 16/03/11).

O Portefólio da Lara

As tarefas escolhidas pela Lara para as entradas do portefólio encontram-se no anexo XV.

Razões das escolhas para as entradas

Na 1ª entrada, cujo tema incidiu sobre geometria, a aluna escolheu deliberadamente um exercício do manual que não envolvia cálculos numéricos, mas que se pautava essencialmente pelo raciocínio:

> Escolhi esta tarefa porque me fez raciocinar de modo generalizado pois a resolução desta tarefa não passava pelo uso de números mas sim de letras/incógnitas, o que me leva a ter de puxar mais pela

> cabeça e ter de recordar a "técnica" geral de resolução. A imagem não era logo direta nos dados que fornecia. (1ª entrada, 4ª versão, 14/02/11)

Ao contrário da entrada anterior, na 2ª entrada, a Lara tomou a liberdade de escolher um problema envolvendo funções trigonométricas de um livro não adotado nem referido pela professora. Ao dar resposta ao *feedback* dado à sua 1ª versão, na 2ª versão, a aluna tomou a iniciativa de inserir mais um exercício nesta entrada que se prendia com a resolução de várias equações trigonométricas, justificando: "Como achei que esta entrada não era suficientemente desafiadora escolhi outra" (2ª entrada, 2ª versão, 21/02/11).

No *e-mail* que tem em anexo à 2ª versão da 2ª entrada a aluna deu a entender que a escolha, não sendo aleatória, também não era definitiva:

> Segue a 2ª versão com outro exercício [o exercício suplementar], ainda não sei bem se é esse que quero mas depois decido quando vir o que falhei...(*e-mail* da aluna, 18/02/2011)

No cômputo da 2ª entrada, justificou a multiplicidade de escolhas para a mesma entrada:

> Escolhi os exercícios para esta entrada com base nas minhas maiores dificuldades que são, maioritariamente, na trigonometria. Tendo em conta que não percebo bem a mecânica de resolver exercícios deste tipo achei por bem colocá-los aqui. (2ª entrada, 4ª versão, 18/03/11)

Na 3ª entrada, a aluna voltou, por iniciativa própria, a escolher mais do que um exercício do manual (três ao todo) abarcando o mesmo tema das funções racionais, uma vez que "tentei fazer dos exercícios que tenho mais dúvidas..." (*e-mail* da Lara que acompanhou o envio da 1ª versão da 3ª entrada, 26/02/11); "escolhi este ex. [a equação] porque na aula não percebi" (3ª entrada, 1ª versão, 26/02/11).

A primeira tarefa prendeu-se com a interpretação da situação dada e sua tradução para uma expressão matemática, com posterior utilização na resolução gráfica da alínea seguinte. Os outros dois exercícios prenderam-se exclusivamente com a resolução

analítica, um de uma equação, outro de uma inequação, envolvendo funções racionais. Esta opção foi interessante uma vez que muito frequentemente os alunos não têm consciência clara das diferenças processuais inerentes à resolução de equações e inequações racionais. Representou para a Lara uma forma de trabalhar o mesmo tema em diferentes perspetivas:

> Para esta entrada escolhi vários exercícios para testar a minha capacidade de resolver de diferentes maneiras exercícios da mesma matéria. (3ª entrada, 2ª versão, 28/02/11)

Na 4ª entrada, relacionada com *operações com funções*, ao contrário das entradas anteriores, a Lara optou por escolher dois exercícios (uma escolha múltipla e um problema de desenvolvimento) de um exame externo, nomeadamente, de um teste intermédio do ano letivo anterior. Apesar deste tema não lhe causar grandes dificuldades, por respeito pelas regras vigentes, a aluna fez a sua escolha:

> Se calhar deveria ter escolhido uma mais difícil mas sinceramente não via qual porque esta matéria não é assim tão complicada. (4ª entrada, 2ª versão, 30/03/11)

Na 5ª entrada, "pela primeira vez decidi escolher um exercício que não sabia como começar a resolver quanto mais concluí-lo" (5ª entrada, 3ª versão, 21/05/2011). Tratou-se de uma situação que numa primeira etapa implicou a compreensão e a tradução para a linguagem simbólica da situação problemática, sendo que a 2ª alínea dependeu de parte do raciocínio da primeira. As razões da escolha tornaram-se mais claras através dos *mails* e no desenvolvimento propriamente dito da entrada:

> Sei que já fizemos exercícios destes mas não estou a conseguir tirar nada dos dados da figura. Não sei se a área é A(x)=xy ou A(x)=3xy. (5ª entrada, 1ª versão, 01/05/11)

> olá professora,
>
> Estou a ter grandes dificuldades na primeira alínea mas também se não tivesse não tinha escolhido este exercício...
>
> Beijinho,

(*e-mail* da aluna que acompanha a 2ª versão da 5ª entrada, 08/05/11)

Na 6ª entrada, a última do ano letivo, parece que a escolha foi feita de forma aleatória, num sentido de "sobrevivência" em dar resposta ao trabalho exigido pelo conjunto de professores, ou seja, por cumprimento das regras sociais. Assim,

> A escolha deste exercício deveu-se a falta de tempo e de imaginação. Falta de tempo porque estas últimas semanas têm sido complicadas e falta de imaginação porque não sabia o que escolher. Portanto decidi abrir o livro e o exercício que estivesse na página que abrisse era o que iria resolver. Parece absurdo mas é a verdade. (6ª entrada, 2ª versão, 05/06/11)

É de salientar que a aluna por vezes teve dificuldade no cumprimento dos prazos de entrega das entradas nomeadamente no fim de cada período letivo por ser a altura em que há mais trabalhos solicitados pelo corpo docente. Tal facto levou a que se desse lugar a uma flexibilização nos prazos de entrega para que os alunos pudessem trabalhar no portefólio da forma como este estava conceptualizado:

> É hoje que temos de enviar a 6ª entrada de sucessões? é que não tenho ideia que exercício escolher, poderia dar-me uma sugestão?
>
> (*e-mail* da aluna, 21/05/11)

> Quanto à entrada de sucessões, o escolher o exercício também "obriga a estudar"... vou deixar que sejas tu a fazê-lo, assim estás a aproveitar para estudar para o teste.
>
> Deixo enviar a entrada de sucessões até terça ou quarta à noite
>
> (*e-mail* da professora, 22/05/11)

Outro fator transversal à escolha das tarefas para o portefólio esteve relacionado com o grau de necessidade que a aluna sentia de se proteger relativamente a uma cultura de avaliação que penaliza o erro:

> C – Que tipo de intervenções minhas que mais te ajudaram?

> L – Olha, nesta última entrada, que foi uma que eu escolhi mesmo porque eu não sabia. Não percebia nada, nada, nada daquilo. E a stora lá me ajudou e eu lá consegui isso.
>
> C – A forma como tens vindo a escolher as entradas ao longo do ano, tem sido sempre da mesma forma? Por exemplo, agora disseste-me que escolheste um problema que não sabias mesmo nada. Terias feito isso na 1ª entrada?
>
> L – Não. Eu costumava sempre escolher, por exemplo, tinha duas alíneas. Escolhia sempre uma mas não sabia a outra. Tinha de saber sempre algum pormenorzinho.
>
> C – Nunca arriscavas não saber mesmo a ideia. E disseste que esta entrada, a penúltima – a 5ª , já arriscaste. Achas que agora já te sentes mais à vontade?
>
> L – Sim. Também já gosto mais (risos)
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

Em síntese, as fontes das escolhas da Lara foram três: manual adotado e outro não adotado e um exame externo. Raramente a aluna revelou explicitamente o motivo específico da escolha. Apenas referiu que esta se devia a *dificuldades* mas raramente especificou quais, nem nas reflexões, nem na entrada propriamente dita. Naturalmente, pela própria conceptualização do portefólio, as dificuldades tornaram-se explícitas para ambas, aquando do desenvolvimento da entrada. A última entrada foi subjugada à pressão do tempo, neste caso, à ausência de tempo para se dedicar à primeira etapa da entrada, ou seja, ao processo de escolha da tarefa.

No entanto, ao longo do portefólio, pareceu sobressair que as razões das escolhas, se prendiam essencialmente com dois aspetos. Por um lado, com questões de "treino" uma vez que na justificação destas a Lara usou frases como "escolhi vários exercícios para testar a minha capacidade de" (3ª entrada); "o que me leva a ter de puxar mais pela cabeça" (1ª entrada). O facto de a aluna ter escolhido mais do que um exercício na maioria das entradas também veio reforçar essa ideia. Por outro lado, escolheu exercícios que lhe trouxeram inquietude pelo facto do resultado conhecido não coincidir com o seu ou não perceber como se chegava a determinados resultados parciais.

Ainda há a salientar, que a Lara não considerou inicialmente as escolhas como definitivas, pois, por exemplo, ainda no decorrer da 2ª entrada, revela não ter a certeza da sua escolha, mas que decidiria consoante a quantidade e/ou grau de dificuldade que esta lhe fosse trazendo.

Processos para melhorar as suas produções

A Lara quando questionada acerca da forma como aborda um problema denotou ideias metacognitivas muito vagas, sobressaindo apenas na primeira entrevista que o processo de releitura é muitas vezes usado aquando da resolução de um problema. Contudo, a aluna contradiz-se quando refere que tem tendência em desistir logo à primeira tentativa frustrada (1ª entrevista, 16/03/11).

Na 1ª entrada, a Lara escolheu um tema de geometria relacionado com o produto escalar. O exercício era composto por duas alíneas. Na primeira alínea, a Lara traduziu corretamente o enunciado e selecionou uma estratégia geral adequada, mas, uma das justificações dadas não estava coerente com os cálculos apresentados, nem com a própria representação gráfica que a Lara tinha, por iniciativa própria, introduzido. No entanto, para que essa justificação passasse a ser adequada e coerente com a resolução dessa alínea, bastaria substituir a expressão "ângulos internos" para "ângulo giro". Por essa razão pensei que se tratava de um pequeno lapso de escrita, facilmente ultrapassado numa 2ª versão.

> Sabendo que os ângulos internos [É isto mesmo que queres escrever? Pensa melhor…] do pentágono regular perfazem um total de 360° basta dividir este valor por 5 (que é o nº de ângulos do pentágono) fazendo assim cada ângulo ter 72°.
>
> (*feedback* dado à 1ª versão da 1ª entrada, sendo que o que está entre parêntesis retos, foi escrito num balão de *comment*, 07/01/11)

No entanto, ao contrário do que eu tinha previsto, a Lara em vez de substituir uma expressão por outra, desenvolveu um raciocínio desadequado[3], associado à expressão

[3] O termo "desadequado" é aqui empregue de forma intencional uma vez que o raciocínio da Lara estaria correto se fosse aplicado, de facto, ao valor da amplitude de um ângulo interno de um polígono regular.

incorreta que tinha colocado na 1ª versão, evidenciando uma completa desarticulação de ideias. No *feedback* a esta 2ª versão voltei a chamar à atenção para a figura que tinha escolhido e para o facto de o ângulo envolvido não ser o ângulo interno, mas sim o ângulo giro. Na 3ª versão, já foi evidente o reconhecimento do erro pela Lara, que optou por deixar ficar esse raciocínio desadequado e acrescentar a justificação correta com um "mas":

> (...) mas a amplitude do ângulo a calcular obtém-se a partir do ângulo giro em 5 partes iguais, que é igual a 72º. (1ª entrada, 3ª versão, 01/02/11)

Esta primeira alínea, que levou três versões para ficar esclarecida, foi identificada pela Lara como não lhe oferendo dificuldades uma vez que a solução estava coerente com as soluções do manual. Só a segunda alínea é que ela reconhecer ter dificuldades:

> Por aqui envio a minha 1ª entrada. O primeiro exercício acho que percebi bem, tanto que fui às soluções verificar se tinha certo e tinha, mas o segundo já não porque não estou a conseguir saber a norma de EC (e-*mail* enviado pela aluna, 07/01/2011)

Em relação à segunda alínea, a Lara avançou num processo de interpretação/experimentar inicial com uma proposta de resolução, embora infrutífera (e errada), que partiu de uma tentativa irrefletida de análise de informações oferecidas pela figura do enunciado:

> O ângulo entre $\overrightarrow{CD}$ *e* $\overrightarrow{CE}$ é $\frac{180-144}{2} = 18^{o}$ [o que está errado]. E pouco mais sei acerca deste exercício. Sei que o co-seno será de 18 e que uma das normas ($\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$) é l. (1ª entrada, 1ª versão, 07/01/11)

Como *feedback* à 2ª alínea da 1ª versão, optei por dar uma sugestão para o início da resolução. No entanto, essa ajuda não produziu o efeito desejado, pois a Lara ancorou o raciocínio e os cálculos errados que tinha feito na 1ª versão, ao raciocínio (correto) por mim sugerido. Neste processo de tradução inconsequente, a aluna apropriou-se do discurso de *feedback* que eu tinha dado, reescrevendo-o para a primeira pessoa sem,

contudo, o compreender. Nesta 2ª versão ficou nítido que a dificuldade passava por um processo de interpretação da imagem do enunciado (apesar da aluna já ter em sua posse o raciocínio correto).

Na 3ª versão, com apoio no *feedback* dado, foi possível observar o processo de interiorizar em torno de um significante (figura) com vista a dar um significado coerente. Uma vez tornado interno o significado, a aluna avançou refazendo toda essa parte da alínea. Numa fase posterior, a aluna também não soube como chegar a um resultado, mesmo com o apoio dado por um colega, recurso que a Lara utilizou por iniciativa própria:

> Eu sei que assim é o resultado mas juro que não compreendo como lá chegar ☹ (1ª entrada, 3ª versão, 01/02/11)
>
> Vi a resolução do Diogo Costa mas não percebo como ele lá chegou :S
>
> (*e-mail* da aluna aquando do envio da 3ª versão da 1ª entrada, 01/02/11)[4]

O *feedback* da professora foi dado com recurso a uma imagem feita por esse colega, que tinha escolhido o mesmo exercício para o seu portefólio. No envio da 4ª e última versão da 1ª entrada, a aluna referiu que "depois de muito remoer, já entendi" (e-*mail* que acompanha o envio da 4ª versão da 1ª entrada, 14/02/11). De facto, o discurso/raciocínio que acompanhava os cálculos já era adequado, denotando processos de execução que transpareceram o estabelecimento das conexões exigidas pelo exercício, dando-se assim por terminada a 1ª entrada, estando já a decorrer a 2ª cuja 1ª versão já tinha sido entregue há nove dias atrás.

A 2ª entrada, sob o tema *trigonometria*, foi composta por duas alíneas, das quais a Lara alegou que só a última lhe trazia dificuldades. No entanto, mais uma vez, o facto de a aluna ter optado por desenvolver também a questão que não lhe oferecia resistência, se revelou novamente frutífera, não por questões de comunicação matemática, como tinha sido na 1ª entrada, mas porque originou uma discussão acerca dos dois sistemas de

[4] Nota: ☹ e :S são símbolos de expressão de emotividade usados pela aluna.

medição de ângulos (sexagesimal e circular) que a ajudou a ficar mais desperta para um pormenor (seleção adequada do sistema), geralmente negligenciado pelos alunos.

Relativamente à segunda alínea, a Lara, apesar de dispor de uma resolução, decidiu não a copiar e avançou, num processo de seleção de uma estratégia, com uma tentativa de resolução, no entanto, infrutífera: "não sei sair daqui, não percebo como me desembrulho do 2π e não entendo a resolução deles. (2ª entrada, 1ª versão, 05/02/11). No *feedback* optei por, de uma forma informal, explicar apenas o primeiro passo da resolução: "porque *seno* seja lá do que for, só pode tomar valores entre – 1 e 1 (*feedback* dado à 1ª versão da 2ª entrada, 11/02/11). A aluna, como resposta, apropriou-se das palavras da professora e avançou com os cálculos:

> porque $sen\left[2\pi\left(\frac{n-11}{52}\right)\right]$, só pode tomar valores entre – 1 e 1.
>
> (2ª entrada, 2ª versão, 18/02/11)

Findos estes, a Lara tinha necessariamente de interpretar o resultado que tinha obtido para posteriormente conseguir dar uma resposta ao problema. Como não conseguiu fazer esse processo de interpretação, optou por "colocando tal qual a solução do livro" (2ª entrada, 2ª versão, 18/02/11) copiar essa resposta sem a explicar por palavras suas, naturalmente porque não a compreendia. A explicação que passava por recordar que um ano tem 52 semanas e atender que as soluções obtidas só faziam sentido para um único valor inteiro de uma variável, foi dada em *feedback* pela professora com exemplos particulares.

Relativamente ao segundo exercício que a Lara optou por também inserir na 2ª entrada e que se prendeu com a resolução de quatro equações trigonométricas, notou-se que a aluna já tinha percebido a ideia do que é esperado fazer no portefólio pelo facto de já ter registado por palavras suas cada passo com frases de cariz oral, como se estivesse a explicar verbalmente a alguém (sendo esse alguém eventualmente ela própria) e se fazer acompanhar de representações para exemplificar essas ideias. Com efeito, a Lara recorreu a imagens previamente construídas, que manipulou acrescentado círculos relativamente ao que estava a considerar. No entanto, tal não foi suficiente para não cometer erros, em consequência de não estar suficientemente atenta ao seu trabalho "*on line*" (ausência de autoquestionamento e de automonitorização). A título de exemplo:

> $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \ V \ x = -\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$ (seria verdade se não tivesses o sinal de "-" antes do $\frac{\sqrt{3}}{2}$)Pensa melhor…
>
> (*feedback* dado à 2ª versão da 2ª entrada, 21/02/11)

No entanto, este *feedback* não foi suficiente:

> olá outra vez :)
>
> segue a 3ª versão da 2ªentrada
>
> estou com algumas dificuldades em visualizar os ângulos no círculo trigonométrico nos últimos exercícios.
>
> (e-*mail* enviado pela aluna a 28/02/11)

Desta forma, tive de ser mais incisiva no *feedback* dado à 3ª versão (no fundo, tive de colocar as questões que podiam ter sido colocadas por ela própria, se fosse autorreguladora):

> Então vamos pensar:
>
> Em que quadrantes o co-seno toma valores negativos?
>
> Os ângulos que escolheste pertencem a esses quadrantes?
>
> Faz tu o teu próprio desenho de um círculo trigonométrico e marca os ângulos. Se não tiveres scan, depois dá-me o desenho, que eu scaneio
>
> Depois pensa de igual forma no 23.4.
>
> (*feedback* dado à 3ª versão da 2ª entrada, 03/03/11)

Na 4ª versão da 2ª entrada, a aluna abandonou os desenhos que tinha apresentado e refez o processo com base na construção de uns novos: "Fiz no *paint*, espero que não haja problema" (2ª entrada, 4ª versão, 18/03/11).

Finalmente, também foi necessário chamar a atenção para pormenores de cálculo como:

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

> $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$ (tenho de dividir todas as parcelas do 2º membro por 2).
>
> (*feedback* dado à 4ª versão da 2ª entrada, 28/03/11)

A falta do número 2 no denominador da segunda fração foi um erro cuja causa pode ser dúbia: ou foi por "não saber" o raciocínio que está pode detrás (dividir ambos os membros por dois) ou foi apenas desatenção. De qualquer das formas, a aluna acabou por ficar com o registo escrito da justificação deste passo.

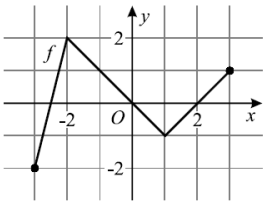
No término da 2ª entrada, num processo de verificação e reflexão, a aluna escreveu:

> Esta entrada aborda a trigonometria, especificamente as funções seno e co-seno no círculo trigonométrico. Com esta terminada fiquei, finalmente, a perceber de modo geral como resolver exercícios que impliquem esta matéria. (2ª entrada, 4ª versão, 18/03/11)
>
> Olá professora,
>
> acho que o pseudo apoio de hoje me ajudou a perceber o que ainda não estava percebido, talvez agora esteja tudo certo pois faz mais sentido na minha cabeça.
>
> (e-*mail* da aluna, 18/03/11)

Tal como anteriormente, ainda no decorrer da 2ª entrada, deu-se início à 3ª, cujo tema se referia às funções racionais e dentro da qual a Lara escolheu três exercícios: um problema, uma equação racional e uma inequação racional. Nas duas primeiras tarefas, a Lara, traduziu os dados do exercício, selecionou uma estratégia adequada que executou recorrendo-se a representações gráficas, acompanhadas das respetivas justificações. Apenas o último exercício lhe ofereceu resistência no processo de interpretação e na compreensão dos raciocínios subjacentes à colocação das expressões do numerador e do denominador na tabela de sinal, que a conduziu a uma solução errada: "repara que a representação gráfica da função dada por y=3-x é uma reta com declive negativo. (*feedback* dado à 1ª versão da 3ª entrada). Este *feedback* pareceu ser suficiente na superação da dificuldade dado que a 2ª versão já estava correta. Nas palavras da Lara:

> O que me causou maiores dificuldades foi o último pois tinha de se usar uma tabela para a resolução e ainda não tinha percebido totalmente como estas se interpretavam. Considero que a dúvida, para exercícios desta matéria, ficou resolvida.
>
> (3ª entrada, 2ª versão, 28/02/11)

A 1ª versão da 4ª entrada, pela primeira vez, iniciou-se com a anterior já terminada. A escolha recaiu sobre uma escolha múltipla e um problema de desenvolvimento de um teste intermédio do ano letivo anterior. Relativamente à escolha múltipla, a Lara desenvolveu todo o raciocínio que a conduzia a uma resposta (embora errada). O raciocínio desenvolvido pela aluna estaria totalmente correto se a função dada fosse o prolongamento da função cuja representação gráfica continha apenas o segmento de reta do meio:

> Para descobrir a função f(x) temos de retirar do gráfico pelo menos 2 pontos. (...) Agora temos de descobrir o declive para podermos saber a equação da função f, y=mx+b.
>
> 
>
>
> $$m = \frac{-1-2}{1-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$
>
> Logo, y=-x+b.
>
> O b é 0, pois zero é a ordenada na origem.
>
> Por isso, f(x)=-x
>
> O valor pedido é de (gof)(3).
>
> F(3)=-3
>
> $$(g^{o}f)(3) = g\big(f(3)\big) = g(-3) = -3 + 3 = 0$$
>
> Logo seria a opção B <u>mas eu sei que não é porque vi no GAVE que era a D mas não vejo onde está o meu erro</u>
>
> (4ª entrada, 1ª versão, 20/03/11)

Portanto, a Lara apesar de parecer dominar os conteúdos e alguns processos, não refletiu suficientemente sobre o que era dado e pedido, ou seja, não dedicou tempo suficiente

aos processos de tradução e interiorização, optando consequentemente por uma estratégia sem refletir suficientemente nela. Com efeito, a Lara foi determinar a expressão analítica da função cuja representação gráfica continha o segmento de reta do meio e desenvolveu a partir daí todo um raciocínio (cálculo da imagem de 3 através da função *f* , e depois aplicação da função *g* para obter o valor pedido) que, se estivesse ancorado numa interpretação correta, a teria levado à resposta certa. Ou seja, ela percebeu que precisava de calcular a imagem de 3 através da função *f* , e depois aplicar a função *g* para obter o valor pedido. Em suma, a aluna percebia o conceito de função composta e sabia o que precisava de calcular. No entanto, usou a informação gráfica de forma incorreta.

Após o *feedback*, a nova versão já veio correta e, depreende-se, compreendida:

> Para calcular $(g \circ f)(3)$ não é preciso FELIZMENTE determinar a expressão algébrica da função f. Felizmente, porque a função f é definida por 3 ramos e isso ia dar uma trabalheira!
>
> $(g \circ f)(3) = g(f(3))$
>
> Então só tens de ver quanto é f(3) e depois calculares g desse valor.
>
> (*feedback* dado à 1ª versão da 4ª entrada, 30/03/11)

Assim:

> Para calcular $(g \circ f)(3)$ não é preciso determinar a expressão algébrica da função *f*.
>
> $(g \circ f)(3) = g(f(3))$
>
> É preciso apenas ver no gráfico qual o valor de f(3).
>
> *f*(3)=1
>
> $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(1) = -1 + 3 = 2$
>
> Logo é a opção D.
>
> (era tão fácil e eu só compliquei!)
>
> (4ª entrada, 2ª versão, 30/03/11)

Também na questão de desenvolvimento (a segunda tarefa da entrada), a Lara conseguiu tirar umas elações do enunciado mas não conseguiu chegar a uma resposta: "não consigo interpretar os valores daqui para a frente" (4ª entrada, 1ª versão, 20/03/11). Levantado o bloqueio através de *feedback* dado no sentido de repensar no enunciado e no que havia escrito, a aluna chegou à versão final da 4ª entrada na 2ª versão, através de processos de interpretação dos dados no contexto do problema, que justificou convenientemente.

Na 5ª entrada, que incidiu sobre um problema do manual envolvendo cálculo diferencial, a dificuldade surgiu logo na parte de interpretação da primeira alínea:

> Sei que já fizemos exercícios destes mas não estou a conseguir tirar nada dos dados da figura. Não sei se a área é A(x)=xy ou A(x)=3xy. (5ª entrada, 1ª versão, 01/05/11)

O *feedback* foi então dado no sentido de dar início ao desbloqueio no processo de tradução:

> Pensa que a área é "comprimento vezes largura" e que tanto o comprimento como a largura têm de estar escritos em função de x.
>
> O comprimento é fácil: é 3x (como escreveste)
>
> A largura já não é tão imediato – tens de ir buscar informação ao enunciado. Lá diz "ele tem 300 metros de rede". (feedback dado à 1ª versão da 5ª entrada, 08/05/11)

No entanto, na 2ª versão, denotou-se que a aluna não refletiu o suficiente sobre esta ajuda pois, de forma infundada, complicou o que já era diretamente fornecido através do *feedback* (informação acerca do comprimento), e avançou com estratégias de resolução "desgarradas" do problema. Assim, em relação à variável *x* do problema:

> O comprimento será 300 a dividir pelos lados y dos canteiros que serão vedados, ou seja, 300/4=75. (5ª entrada, 2ª versão, 08/05/11)
>
> Quanto ao comprimento, já não tenho de fazer mais nada porque já tenho o comprimento em função da variável x. (frase acrescentada pela professora no *feedback* dado à 2ª versão da 5ª entrada, 12/05/11)

Relativamente à variável *y* do problema:

> Oh stora supostamente teria de fazer alguma raiz quadrada tipo $y = \sqrt{qualquer\ coisa - x^2}$, certo? Mas não estou a ver como ☹
>
> (5ª entrada, 2ª versão, 08/05/11)
>
> Porquê? Tens algum triângulo rectângulo no qual queiras saber o comprimento de um lado? (*feedback* dado à 2ª versão da 5ª entrada, 12/05/11)

Embora a aluna se tenha baseado no *feedback* dado à 1ª versão, mais uma vez se precipitou inadvertidamente para um raciocínio sem se preocupar que tal fizesse sentido. Deste modo, senti necessidade de ser mais incisiva no seu segundo *feedback*:

> Repara que x+x+x +y+y+y+y +x+x+x é o comprimento total da rede (informação obtida a partir da imagem).
>
> E lá diz "**a rede tem 300 metros**" (informação obtida através da parte escrita do enunciado).
>
> Traduz estas duas informações numa equação. Dessa equação retira a largura , y, em função de x.
>
> Et voilá! Já tens tudo o que precisas para escrever a área em função de x.
>
> (*feedback* dado à 2ª versão, 12/05/11)

Na 3ª versão, a primeira alínea, na qual incidiram estes *feedbacks*, ficou resolvida e explicada convenientemente pela Lara. A segunda alínea, neste processo, tinha ficado em *standby*, estando praticamente toda resolvida com exceção da parte que dependia do contexto do problema e que estava a ser compreendido na primeira alínea. De facto, a aluna sabia todos os passos e cálculos que tinha de percorrer para chegar a um valor algébrico. No entanto, apesar deste ser necessário para chegar à resposta final, não era esse o valor pedido. Para que a resposta fosse obtida, era necessário voltar ao contexto do problema e efetuar mais cálculos. Depois de a primeira alínea concluída, a Lara conseguiu resolver esta última. No entanto, apesar de não interferir com a consecução, mais uma vez foi notório o seu défice de atenção nos limites da variável, aquando da execução da tabela de sinal da função derivada/monotonia da função. Além disso, foram

vários os pontos de comunicação matemática que foram trabalhados, não só na formalização da comunicação de ideias como também na utilização de símbolos matemáticos.

Na 6ª entrada, subordinada ao tema sucessões, o primeiro *feedback* foi dado no sentido de pedir o raciocínio por escrito que estava em falta:

> Ao ser dito no enunciado que o Vítor depositou 5 mil euros é-nos dado o t_1=5000.
>
> A razão da PA é 500 pois a cada *t* adiciona-se 500 euros.
>
> (6ª entrada, 1ª versão, 29/05/11)
>
> Ao ser dito no enunciado que o Vítor depositou 5 mil euros é-nos dado o t_1=5000.
>
> Trata-se de uma PA porque ….
>
> A razão da PA é 500 pois a cada *t* adiciona-se 500 euros.
>
> (*feedback* dado à 1ª versão da 6ª entrada, 01/06/11)

Talvez pela forma como esta entrada foi escolhida, a aluna não tinha dúvidas acerca da sua resolução. No entanto, teve de ser incentivada a refletir sobre a resposta:

> A resposta ao problema é 91 meses.
>
> Mas a solução é 90 meses e não 91! Porque será? ☺
>
> Sugestão:
>
> Escreve o que significa t_n e então a que é que corresponderá t_1

Nitidamente, a aluna não tinha recorrido a processos de verificação.

Em síntese, o facto da seleção de algumas estratégias levadas a cabo pela Lara se virem a revelar infrutíferas deveu-se essencialmente a deficiências nos processos de interpretação e tradução dos dados dos enunciados e à tendência que a aluna tem em se precipitar por um caminho de forma pouco refletida e de levar essa opção até que se produza um resultado final, naturalmente errado. Assim, é observável em várias versões o refazimento total de alíneas ao invés de uma nova versão se apoiar em algo já

conseguido na versão anterior. Tal só foi observável, geralmente, em versões finais. Esta tendência para uma ausência de monitoração, onde se incluem processos de reflexão e justificação, e também processos de verificação, levou a que se atinjisse até quatro versões de uma mesma entrada e, consequentemente, que se desse início a novas entradas ainda com as anteriores por concluir.

Houve situações em que a Lara identificou objetivos parciais e reconheceu que não sabia como atingi-los, mas a opção por estratégias cegas, ou seja, irrefletidas e sem uma exploração conveniente dos dados, conduziram-na ao insucesso. Também houve situações em que a estratégia utilizada foi a correta, mas que fora aplicada a dados falsos provenientes de uma insuficiente leitura e análise do enunciado. No entanto, se aplicados aos dados corretos, produziriam as respostas esperadas. Desta forma, processos como os de traduzir e ancorar nem sempre foram bem sucedidos porque foram inconvenientemente aplicados, por ausência de processos de reflexão e monitorização, que levaram à necessidade de surgimento de novos *feedbacks* e, portanto, de novas versões de uma mesma entrada. Estas só posteriormente denotavam processos de execução que transpareciam o estabelecimento de conexões plausíveis e dentro do contexto da tarefa.

Também foi possível verificar tentativas, umas vezes conseguidas, outras vezes não, de processos de interiorização, onde se deu lugar à apropriação do discurso de *feedback* dado pela professora através de rescrições que visavam dar significado coerente ao discurso escrito que acompanhava a resolução da tarefa.

Sempre que a Lara detinha dificuldades numa parte da tarefa escolhida, optou por desenvolvê-la toda, o que se veio a revelar importante, tanto na completude, como na correção de aspetos, que de outra forma passariam impercetíveis, tanto para a aluna, como para a professora, e que se prendem com processos relacionados com a comunicação e o raciocínio matemáticos e a compreensão de conceitos.

Recursos usados na elaboração do portefólio

A Lara recorreu por iniciativa própria a esquemas, quer feitos por si, de raíz, quer obtidos em outras fontes, os quais depois modificava. A título de exemplo, na 2ª entrada, a aluna foi à internet buscar uma imagem à qual acrescentou uns círculos a fim

de pôr em evidência aquilo a que se queria referir na imagem e, numa versão posterior dessa mesma entrada abandonou essa montagem e construiu um novo desenho para a ajudar, não só na resolução como também na comunicação das ideias implícitas a esta.

Para além do *feedback* que foi dado ao longo do ano para fins de compreensão e efetiva implementação do portefólio como fora previamente conceptualizado, o *feedback* foi dado maioritariamente na direção dos processos de interpretação, sendo estes os causadores da maioria dos bloqueios, associado à sua precipitação na seleção de uma estratégia e no *seguimento cego* desta, até obter uma resposta, raramente recorrendo de uma monitoração e, consequentemente, de reflexão. São muitos os exemplos dos quais apresento o seguinte a título ilustrativo:

> Para descobrires o ângulo formado pelos vectores $\overrightarrow{CE}$ *e* $\overrightarrow{CD}$, pensa novamente neles. Olha para a figura. Vais ver que esse ângulo não tem 18º de amplitude [a aluna tinha executado todo um raciocínio até obter o valor 18 com base numa interpretação irrefletida da figura]. (*feedback* dado à 2ª versão da 1ª entrada, 26/01/11)

Naturalmente, esta ausência de autoquestionamento fez com que tivesse sido necessário o fornecimento de *feedback* com o objetivo de a levar a refletir sobre as suas próprias produções, no sentido de lhes dar ou retirar significado:

> (...) (=) $\cos(2x) = \frac{0}{2}$ como tal dá erro. (2ª entrada, 2ª versão, 18/02/11)

> (...) (=) $\cos(2x) = \frac{0}{2}$ como tal dá erro (o que é que dá erro? O número zero não está no denominador) (*feedback* dado à 2ª versão da 2ª entrada, 21/02/11)

O *feedback* também foi dado com os objetivos de:

a) encaminhar para outras estratégias de resolução:

> Para calcular $(g \circ f)(3)$ não é preciso FELIZMENTE determinar a expressão algébrica da função *f*. Felizmente, porque a função *f* é definida por 3 ramos e isso ia dar uma trabalheira!
>
> $(g \circ f)(3) = g(f(3))$

> Então só tens de ver quanto é f(3) e depois calculares g desse valor.
>
> (feedback dado à 1ª versão da 4ª entrada, 30/03/11)

b) dar seguimento ao estabelecimento de *mal entendimentos produtivos*:

> Oh stora supostamente teria de fazer alguma raiz quadrada tipo $y = \sqrt{qualquer\ coisa - x^2}$, certo? Mas não estou a ver como ☹ Porquê? Tens algum triângulo rectângulo no qual queiras saber o comprimento de um lado?
>
> (Feedback dado à 2ª versão da 5ª entrada, 12/03/11)

c) aperfeiçoar e/ou corrigir questões de comunicação de ideias matemáticas, não só de construção frásica, como de recurso adequado e pertinente de símbolos matemáticos associados:

> Assimptota horizontal: y=11 pois quando o polinómio do numerador tem o mesmo grau que o polinómio do denominador divide-se um pelo outro e obtemos a assimptota. (4ª entrada, 1ª versão, 20/03/11)
>
> Assimptota horizontal: y=11 pois quando o polinómio do numerador tem o mesmo grau que o polinómio do denominador divide-se um pelo outro e obtemos os dados para a assimptota horizontal.
>
> (feedback dado à 1ª versão da 4ª entrada, 30/03/11)

Por vezes, foi necessário o recurso a reforços positivos do desempenho da aluna. Por exemplo, na 3ª versão da 2ª entrada a aluna ainda se encontrava a trabalhar a mesma dificuldade pelo que no e-*mail* que acompanhava o *feedback* à 3ª versão seguia:

> Segue em anexo o meu feedback.
>
> Nas tuas dúvidas, não te dei logo a resposta. Apenas dei uma dica porque acredito que chegas lá sozinha.
>
> Aguardo então nova versão até domingo ou segunda para depois poderes gozar o carnaval sem preocupações :)
>
> Beijinhos

> (e-*mail* da professora aquando do *feedback* à 3ª versão da 2ª entrada, 03/03/11)

Nem sempre o *feedback* foi compreendido ou usado de forma conveniente devido à tendência que a aluna revelou ter em se precipitar em resoluções irrefletidas e não fundamentadas, como aconteceu, por exemplo, na 1ª entrada.

Houve *feedbacks* que propositadamente também incluíram uma linguagem menos formal com o intuito de facilitar a apropriação das ideias por parte da aluna:

> O co-seno só é 0 no $\frac{\pi}{2}$ ou no $-\frac{\pi}{2}$. (ou, se quiser: no $\frac{\pi}{2}+k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$ isto é, $\frac{\pi}{2}$ mais "meias voltas")
>
> (feedback dado à 2ª versão da 2ª entrada, 21/02/11)

Para além da professora, a Lara também tomou a iniciativa de recorrer à ajuda de um colega numa entrada que fora comum aos dois. Por esse facto a entrada acabou por ser construída numa tríade Lara, Diogo e professora:

> olá professora,
>
> segue a 3ª versão [da 2ª entrada].
>
> Vi a resolução do Diogo Costa mas não percebo como ele lá chegou :S
>
> (e-*mail* da aluna, 01/02/11)

Há ainda a salientar que a aluna recorreu, tanto nos *mails* como nas entradas propriamente ditas, a símbolos como ☹ e :S de expressão de emotividade. O formulário, também elaborado pela Lara, não foi feito à medida que as entradas iam sendo trabalhadas. Assim, a 1ª versão deste surgiu aquando da entrega do portefólio final do 2º período que englobava todas as entradas feitas até à data, capa, índice, reflexão final do 2º período pelo que se depreende que possivelmente este não foi usado como recurso no estudo decorrente da construção do portefólio.

Em síntese, sempre que se justificava a aluna recorreu a processos de orientação que incluíam a elaboração de figuras que apoiavam e exemplificavam o seu raciocínio. O

feedback foi um recurso usado maioritariamente na direção de processos de interpretação, sendo estes os causadores da maioria dos bloqueios, associado à sua precipitação na seleção de uma estratégia e no seguimento sem a sua monitorização, até à obtenção de uma resposta. Naturalmente, esta ausência de recurso a um autoquestionamento fez com que tivesse sido necessário o fornecimento de *feedback* com o objetivo de a levar a refletir sobre as suas próprias produções, no sentido de lhes dar ou retirar significado. O feedback foi usado para o estabelecimento de *mal entendimentos produtivos*, para o encaminhamento para outras estratégias de resolução, para o aperfeiçoamento e/ou correção de questões de comunicação de ideias matemáticas, não só de construção frásica, como de recurso adequado e pertinente de símbolos matemáticos associados.

Nem sempre o *feedback* foi compreendido ou usado de forma conveniente devido à tendência que a Lara revelou ter em se precipitar em resoluções irrefletidas e não fundamentadas. Houve necessidade de incluir uma linguagem menos formal em alguns *feedbacks* com o intuito de facilitar a apropriação das ideias por parte da aluna.

Para além da professora, a aluna também tomou a iniciativa de recorrer à ajuda de um colega numa entrada que fora comum aos dois.

Vantagens e Limitações

No início do desenvolvimento do portefólio, a Lara revelou falta de segurança relativamente à resolução de problemas o que, aliado à sua precipitação na escolha de estratégias e tendência para a ausência de monitoração aquando da implementação destas, a conduziu para resultados aquém das suas expetativas nas provas escritas de tempo limitado, aspeto que o portefólio parece que ajudou a ultrapassar:

> C- O que é que sentes [quando estás perante um problema]?
>
> L- Sinto-me insegura porque pressinto que não sei resolver. Logo à partida meto aquela ideia na cabeça de que não vou conseguir fazer.
>
> (1ª entrevista 16/03/11)
>
> C – Em cada entrada tiveste de escrever o raciocínio. Isso ajudou-te em alguma coisa.

> L - Sim porque até mesmo nos testes, quando a professora pergunta alguma coisa e não é logo imediato, assim eu já consigo pensar melhor. Já consigo pensar como é que digo aquilo em palavras. (...)
>
> C – A tua atitude perante um problema modificou-se, é isso?
>
> L – Sim, sim. Já não fico logo em pânico quando vejo uma coisa e penso que não consigo resolver.
>
> C – Já acreditas mais que consegues?
>
> L – Sim. Já é mais assim.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)
>
> A verdade é que já vejo que consigo perceber melhor a matéria e não bloqueio quando vejo um problema. (reflexão final de ano, 06/06/11)

Naturalmente que os fracos resultados não se prendiam apenas com a falta de segurança mas também com a falta de métodos regulares de estudo:

> C – Que balanço fazes da realização do portefólio?
>
> L – Maioritariamente foi bom porque me organizei melhor – isso é verdade. (...)Obrigava-me mesmo a ir ver os exercícios e então estudava um bocadinho mais.
>
> C – Mais que o regularmente?
>
> L – sim, sim. E como tinha aquelas datas então dava mesmo para organizar bem.
>
> C – Antes como é que tu estudavas? Era mais perto dos testes?
>
> L – Sim, era mesmo.
>
> C – Porque eu lembro-me de dizeres isso na 1ª entrevista.
>
> C – E agora?
>
> L – Eu antes acumulava muita matéria. Agora continuo a acumular matéria mas não acumulo tanta por causa do portefólio.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

Aliado a uma maior regularidade no estuda da disciplina, o portefólio veio trazer uma nova forma de estudar e de aprender:

> O portefólio foi uma boa ferramenta para me ajudar a estudar, a perceber melhor as matérias leccionadas, para me ajudar no raciocínio matemático, por desenvolver ao máximo todos os exercícios. (...) Ajudou-me a ser mais organizada porque necessita de uma estrutura ordenada, o que focaliza melhor o estudo e aprofunda mais as matérias (pelo facto de se ter de explicar tudo por extenso).
>
> (reflexão final de ano, 06/06/11)
>
> C – E o que é que podes dizer acerca da tua capacidade de expor ou explicar ideias matemáticas? Como também tiveste de as expor por escrito..
>
> L – Sim, sim. Até mesmo quando me perguntam alguma coisa – o que é raro, não é.. (risos). Mesmo quando alguns colegas me perguntam alguma coisa, eu já consigo explicar melhor. Porque eu antes era: eu não sei explicar. Agora já: olha, 1º tens de fazer isto, depois tens de fazer aquilo, experimenta assim, se não der depois a gente vê.
>
> C – E antes não era assim?
>
> L – Não. antes era eu que perguntava a eles: "olha, como é que se faz isto?" (sorrisos).
>
> (...)
>
> C – Achas que agora quando outras pessoas, sem ser eu, te explicarem coisas, tu "entras melhor no dialogo"?
>
> L – Sim, agora já sei argumentar! (risos)
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

A relação professor-aluno saiu reforçada apesar do portefólio continuar para a Lara a ser uma imposição *vertical*:

> C – O portefólio passou a ser uma rotina ou foi sempre uma obrigação?
>
> L – Como eu sou, foi sempre uma obrigação, mas foi uma obrigação – um mal veio por bem. Porque me obrigou! Por isso mesmo!
>
> (...)

> C – E o que é que pensas acerca do tipo de trabalho professor-aluno que o portefólio implicou?
>
> L – Uuui, muita!
>
> C – Não, o tipo de trabalho (e não a quantidade de trabalho)
>
> L – Ah, não é se foi muito ou não (risos)
>
> C – Sim, o tipo de trabalho. Sabemos que é um tipo de trabalho diferente das aulas. Em que consiste essa diferença?
>
> L – É mais consolidar o estudo, não é tanto: "eu ensinei, agora vocês fazem". É mais "eu ensinei, mas posso ensinar outra vez, ajudar-vos outra vez".
>
> C – Achas que é mais um trabalho em equipa?
>
> L – Sim, sim. É mais em equipa do que propriamente nas aulas. Nas aulas a professora tem eu e mais não sei quantos. Lá é só eu e a professora.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)
>
> C – Achas que o portefólio veio modificar a relação professor-aluno?
>
> L – Sim, é mais chegado, não é tão distante como alguns professores querem que seja. É mais próximo (...)
>
> L – E isso nota-se só pelo facto de nós dizermos "beijinhos" e a outros professores não.
>
> E mesmo se não for capaz de perguntar em aula, pergunta em casa.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

Relativamente à forma como se sente avaliada, há a referir que no questionário aplicado no início da investigação, a Lara assinalou que discordava do facto de a avaliação lhe ajudar a compreender a matéria. Além disso, considerou que os testes não refletiam aquilo que sabia. O portefólio configurou-se-lhe como um complemento na sua avaliação mais fidedigno ao seu trabalho escolar e à sua aprendizagem:

> L – Nas aulas eu tento estar atenta e resolver tudo, mas depois nos testes, não corresponde. Os teste não correspondem ao que eu sei. (...)

> C- Há pouco disseste que no teste te espalhas, ou que o teste não espelha aquilo que tu sabes. E achas que o portefólio espelha?
>
> L- Espelha porque eu aí consigo explicar tudo. Eu no portefólio explico tudo o que eu sei. E (...) Eu digo lá e escrevo os passos todos..
>
> (1ª entrevista, 16/03/11)
>
> C – Achas que o portefólio ajuda o professor a compreender o estilo particular de aprendizagem do aluno?
>
> L – Sim. O que não percebe em aula, percebe no portefólio. até mesmo pela escrita percebe-se.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)
>
> O portefólio ajuda a uma melhor compreensão por parte do professor das dificuldades e capacidades de cada um. (...) As principais vantagens do portefólio são a capacidade de desenvolver melhor o nosso raciocínio e perceber (sem consequências como se fosse num teste) os erros cometidos. (...) Este trabalho valeu a pena porque consolidou conhecimentos ao "obrigar" a acrescentar sempre pormenores que são importantes para resolver os exercícios e ao ser um trabalho de casa mais dinâmico que possibilita uma avaliação mais pormenorizada. É também por isso que o portefólio é melhor que a avaliação feita pelos testes porque, como referido na entrevista, os testes são uma maneira crua de avaliar em que se pode ter um dia mau e correr mal e já não há modo de reverter a situação.
>
> (...) O portefólio ajuda a uma melhor compreensão por parte do professor das dificuldades e capacidades de cada um.
>
> (reflexão final de ano, 06/06/11)

O envolvimento da aluna na sua própria avaliação também sofreu alterações, tornando-se maior:

> C – O que é que podes dizer neste momento acerca do teu envolvimento na tua própria avaliação?
>
> L – Como assim?
>
> C - Da tua consciência acerca da qualidade do teu trabalho como aluna?

> L – Eu acho que estou mais empenhada. A professora pode achar que eu estou mais empenhada, ou não. Mas pelo menos estou mais motivada e acho que o portefólio veio ajudar nisso porque: parece que a professora está em aula, mas depois parece que também está em casa connosco porque no portefólio parece que não estamos sozinhos.
>
> C – E não estão.
>
> L – Pois, é um apoio extra que dá incentivo. Dá incentivo. (...)
>
> C – O portefólio ajudou-te a pensar sobre os teus pontos fortes e os teus pontos fracos a Matemática?
>
> L – Sim. Isso nota-se claramente porque eu no portefólio consigo dizer tudo bem explícito e mais ou menos certo e depois nos teste sé o que é, não é? Portanto ajudou.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

No que respeita a constrangimentos facultados pelo portefólio, a Lara refere o tempo de espera pelo *feedback*:

> As dificuldades sentidas foram maioritariamente não ter resposta instantânea, ou seja não ter um feedback que se espera dum professor assim que se tira uma dúvida em aula. (reflexão final de ano, 06/06/11)

O cumprimento de prazos foi particularmente difícil nomeadamente no fim de cada período letivo:

> Olá professora,
>
> já é domingo por 8 minutos, espero que não haja problema :)
>
> (e-*mail* da aluna, 03/04/11)

> Olá professora
>
> Desculpe só enviar hoje mas ontem foi-me totalmente impossível.
>
> Beijinho,

PS: feliz dia da mãe :)

(*e-mail* da aluna, 01/05/11)

Apesar da Lara não ter mencionado nas entrevistas ou nas reflexões, foi então notória a dificuldade no cumprimento dos prazos de entrega de algumas versões, não surgindo, no entanto, atrasos superiores a um dia.

Síntese do capítulo

Nas escolhas da Lara, de uma forma geral, houve nitidamente um suporte de base (seja uma resolução que não compreende, seja o conhecimento da solução), sendo as escolhas feitas a partir de manuais – que têm sempre soluções e de exames do ano anterior cujas soluções estão também disponíveis (pelo menos *on line*). Este suporte de base, que é independente e prévio à minha ajuda, denotou uma necessidade de segurança por parte da aluna aquando da avaliação das dificuldades e da probabilidade de sucesso nesta forma de avaliação, o que também foi corroborado na última entrevista.

O portefólio levou a Lara a ser mais regular no estudo da disciplina, permitindo que esta não deixasse acumular tanto a matéria e se sentisse mais confiante perante uma situação problemática. Esta confiança adveio do facto de ter sido obrigada a escrever as suas interpretações, decisões e justificações; a refazer sempre que necessário os cálculos e os raciocínios, incluindo as relações entre eles. Numa situação fora do portefólio, a aluna alegou na 1ª entrevista que desistia com facilidade quando a resposta obtida não era a correta. Pela forma como o portefólio foi conceptualizado, a desistência esteve fora de questão. De qualquer maneira foi nítida essa impetuosidade com os respetivos insucessos, mas também uma perseverança (embora incutida pelo portefólio) que lhe mostrou que se não desistir e procurar pensar no "porquê" antes de agir, lhe podia elevar significativamente a probabilidade de obtenção de sucesso. De facto, a tendência que a Lara tinha em se precipitar com facilidade para a primeira estratégia de resolução que lhe viesse à cabeça e seguir em frente sem monitoração, reflexão ou verificação foi outro dos aspetos trabalhados na elaboração do portefólio.

Tal como a Lara, outros alunos optaram por incluir mais do que uma escolha numa única entrada. De facto uma escolha por entrada constituía um "base de trabalho" não sendo obrigatória a escolha de apenas uma tarefa. No caso da Lara a multiplicidade de escolhas não era definida à priori uma vez que surgia da avaliação do grau de dificuldades que o desenvolvimento do exercício já escolhido lhe trazia, ou pelo facto de querer diversificar os exercícios dentro de um mesmo tema.

Uma das maiores dificuldades que a Lara evidenciou ao longo da elaboração do portefólio foi em relação a processos de interpretação e de tradução dos dados do enunciado. Foram essas dificuldades a causa da seleção de estratégias que se vieram a revelar infrutíferas e da existência de várias versões. Os processos de ziguezaguear e refazer foram igualmente notados uma vez que a Lara diversas vezes enveredou por resoluções com base nessas interpretações erróneas, sem qualquer autoquestionamento *on-line* ou monitorização. Também houve lugar a apropriação da redação do *feedback*, sem contudo o compreender, e com prosseguimento, novamente, de resoluções inadequadas. Outras vezes, a Lara compreendeu o *feedback* mas ancorou-o a dados resultantes de interpretações inadequadas. Há então a salientar que, independentemente da forma como trabalhou cada versão, a Lara raramente aguardou pela minha ajuda para continuar uma resolução, só não continuava se realmente não tivesse qualquer ideia de como o fazer. Assim, foi importante trabalhar com esta aluna em processos relacionados com o autoquestionamento e automonitorização. Porque o portefólio foi assim conceptualizado, também houve regularmente correção e/ou aperfeiçoamento dos processos de comunicação matemática.

No seu trabalho, a Lara recorreu, por iniciativa própria a figuras que adaptou à sua maneira, para apoiar e exemplificar as suas justificações escritas e foi, nos três estudos de caso, a única que recorreu à ajuda um colega, acabando uma das entradas por ser resolvida em partilha de ideias entre mim e os dois alunos. Relativamente à avaliação, considerou que este complemento ajuda o professor a compreender melhor o trabalho e as dificuldades do aluno, ajuda o aluno desenvolver e a compreender melhor o seu raciocínio, não tendo o erro o caráter punitivo que é usual ter num teste escrito. Quanto à aprendizagem, a Lara sentiu-se mais apoiada no seu estudo e acompanhada de forma individualizada, o que permitiu progressos na sua aprendizagem e no seu envolvimento com o estudo da disciplina. O único constrangimento que salientou foi o tempo de espera do *feedback* a cada versão, contrapondo com a resposta oral e instantânea que

obtém quando me coloca oralmente uma questão. A pressão no cumprimento dos prazos de entrega foi bem gerida, verificando-se, quando muito, atrasos de um dia.

Capítulo VIII

Apresentação e discussão de dados - Francisco

Apresentação

O Francisco tinha dezasseis anos de idade no início do ano letivo 2010/2011 e estava a frequentar o décimo primeiro ano pela primeira vez. No ano letivo anterior já havia sido, em dois períodos letivos, meu aluno. O Francisco foi considerado como tendo um desempenho médio na disciplina de Matemática no sentido de que, no ano letivo anterior, as suas classificações foram regularmente médias.

Em todo o seu discurso (oral ou escrito) o Francisco mostrou que é um aluno que, a fim de proteger a imagem positiva que tem de si próprio, tem por estratégia motivacional, antecipar maus resultados (pessimismo defensivo):

> C – Que sentimento é que tu tens quando estás a estudar Matemática?
>
> F – O de sempre: não consigo fazer isto e não sei fazer isto, não consigo fazer nada. É sempre a mesma coisa: e depois aquilo não entra, e depois as matérias não são fáceis, e depois estar a associar aquilo àquilo, e depois olho para aquilo e "como é que se faz isto"? (..) A minha mãe diz: "então pede à professora", e eu: mas é sempre a mesma coisa! Vou pedir à professora, depois nunca sei, tenho que pedir sempre à professora. Vou fazer no teste e no teste também não vai lá estar a professora para me explicar como se faz o exercício, né? (1ª entrevista, 16/03/11)

Para o Francisco a matemática é acima de tudo uma ferramenta das outras ciências, estando ao serviço de quase todas as áreas de atividade humana. Provavelmente por essa razão considerou que a matemática se não resumia a um conjunto de regras e técnicas, nem fosse "um corpo de conhecimento estático" (questionário, 24/01/11). No entanto, as suas ideias acerca do que se faz em matemática são muito vagas, embora tenha a

certeza de que "a matemática não é só fazer contas e está a andar" (1ª entrevista, 16/03/11). O Francisco concordou plenamente que a matemática servia para resolver problemas do nosso dia-a-dia e da sociedade e que permitia que nos tornássemos indivíduos competentes, críticos, confiantes e criativos (questionário, 24/01/11). Quanto à Matemática como disciplina, considerou que "é mais leve. É mais para nos dar as bases" (1ª entrevista, 16/03/11). Tem em conta que esta é importante para a sua formação, que lhe desenvolve o raciocínio e o ajuda na preparação para a vida. Atribuiu também à disciplina um papel social e seletivo: "é como se fosse uma espécie de pirâmide e nós vamos a meio." (1ª entrevista, 16/03/11). Gosta da disciplina e considera que estuda bastante para ela. Além de prestar atenção nas aulas e reler os apontamentos, ouve explicações dos colegas e discute algumas resoluções das tarefas com eles (questionário, 24/01/11), embora prefira estudar sozinho para evitar se distrair (1ª entrevista, 16/03/11). Outro aspeto que o caracteriza como aluno é que prefere fazer muitos exercícios em vez de "fazer poucos exercícios, mas procurar perceber cada um deles", sendo que o tempo razoável para se resolver um problema de matemática é trinta minutos (questionário, 24/01/11).

Para este aluno saber Matemática é mais que saber resolver qualquer exercício e utilizar definições e regras. É também identificar e estabelecer conexões entre diferentes conteúdos matemáticos e ser capaz de interpretar e comunicar ideias matemáticas (questionário, 24/01/11). Além disso, o conhecimento matemático escolar também passa por "saber aplicar conhecimentos matemáticos em situações do dia-a-dia" e "ser capaz de simplificar coisas complicadas" (questionário, 24/01/11).

Quando questionado acerca da forma como resolve um problema, o Francisco foi peremptório e afirmou que a forma de resolução é a mesma independentemente do problema, de quem o resolve e do contexto em que se está:

> F – Primeiro leio, depois analisa-se o problema, depois de analisar o problema planifica-se como é que se há-de fazer, aplica-se essa planificação, implementa-se e depois verifica-se se no fim aquilo que a gente pensou, e de acordo com que aquilo que a gente sabe, se está certo ou não.
>
> C – E um matemático, perante um problema, como é que ele o resolve ?

> F – Eu acho que é isto é uma espécie de lei universal para se resolver todos os problemas. Quando uma pessoa, mesmo nos planos do dia a dia, quer resolver um problema, o que é que pensa? "Vou ver o que é que é", depois vou pôr de parte aquilo que acho que não é, analisar… Acho que isto não é só para um matemático, acho que é mesmo para tudo. Para resolver os problemas todos.
>
> (1ª entrevista, 16/03/11)

O Francisco considerou que os alunos também podem descobrir coisas em Matemática: "o professor explica de uma maneira, mas o aluno em casa, com aquilo que sabe, pode descobrir uma outra maneira de se fazer e até estar certa" (1ª entrevista, 16/03/11). Quando questionado acerca das causas de não conseguir resolver um problema fez sobressair a dificuldade em associar ideias e de não saber escolher o que deve aplicar: "Não saber associar as coisas. Por exemplo, nos problemas, às vezes, aquilo diz lá alguma coisa, e não sei bem o que vou associar. Às vezes fico mesmo à toa - Qual é que é a matéria que vou aplicar? (1ª entrevista, 16/03/11). Quando erra, "dá-me raiva!" (1ª entrevista, 16/03/11), apesar de concordar plenamente que "cometer erros faz parte da aprendizagem" (questionário, 24/01/11). Atribuiu à causa do erro "coisas mesmo pequenas que a gente não sabe, por exemplo, um denominador: "agora o que é que faço? Será que eu troco, será que não troco?" (1ª entrevista, 16/03/11). Perante as dificuldades, faseia a sua perseverança: "eu vou ser sincero. Às vezes vou repetir (resolver novamente) mas às vezes estou tão farto daquilo que já não me apetece fazer mais e deixo estar, senão não consigo pensar. Depois, passado algum tempo a seguir, é que agarro naquilo" (1ª entrevista, 16/03/11).

Relativamente à avaliação na disciplina de Matemática, não concordou que esta o ajudasse a compreender a matéria. Concordou sim, que servisse para quantificar e mostrar o que já aprendeu e o que lhe falta aprender (questionário, 24/01/11). Como desvantagem da avaliação praticada só vê o grande peso que os testes têm na classificação final, "porque às vezes a nota do teste não é bem aquilo que o aluno estuda ou não, e isso acontece muito comigo, porque eu posso estudar mesmo aquilo, mas depois chego ao teste e não percebo nada daquilo e não sei como hei-de aplicar e como é que hei-de fazer (1ª entrevista, 16/03/11).

O Portefólio do Francisco

As tarefas escolhidas pelo Francisco para as entradas do portefólio encontram-se no anexo XVI.

Razões das escolhas para as entradas

Na escolha das entradas, o Francisco denotou uma reflexão pessoal sobre a exigência das tarefas: "não vou escolher uma coisa muito difícil porque senão dá muito trabalho" (1ª entrevista, 16/03/11). Também foi perceptível, ao longo da 1ª entrevista, a pressão que o Francisco sentia para corresponder às exigências que o conjunto das seis disciplinas lhe impunha, sendo que, em particular, as escolhas do portefólio foram pautadas pelo tempo que elas, na perceção do aluno, iriam absorver.

A primeira escolha do Francisco incidiu sobre um exercício de geometria que tinha sido feito na aula por três processos diferentes. O aluno dirigiu-se a mim no fim de uma aula com dúvidas acerca de um desses processos. Como, pela conversa que tive com ele, fiquei com a sensação que também não percebia bem a razão de ser e o encadeamento nos restantes processos, ou pelo menos não tinha consciência das diferenças entre eles, sugeri-lhe que escolhesse esse exercício para a primeira entrada do seu portefólio.

A 2ª entrada foi escolhida "pois tive imensas dúvidas, e elas ainda estão um pouco presentes" (2ª entrada, 1ª versão, 06/02/11). Pelo desenvolvimento da entrada ficou evidente que as dúvidas se prendiam com a justificação da passagem de um ponto para o outro da resolução e não com os cálculos propriamente ditos. Assim, parece que a entrada foi escolhida para, mesmo estando os cálculos corretos, obter uma corroboração sobre os raciocínios e/ou justificações.

Na 3ª entrada, o aluno enviou apenas o enunciado do exercício que tinha escolhido alegando que não tinha qualquer ideia de resolução. No entanto, esse exercício tinha sido feito na aula o que revelou que o sentido que o aluno atribuiu à escolha foi outro. De facto, a primeira versão desta entrada estava agendada para a véspera de uma visita

de estudo de alguns dias, no âmbito da disciplina de Educação Física. O regresso estava previsto para uma quarta-feira, sendo que se seguiam quatro dias de ausência letiva (sábado, domingo, segunda e terça feira de carnaval). O Francisco foi um dos alunos que esteve entusiástico com a visita. No entanto, não queria deixar de dar resposta às exigências da professora, no âmbito do portefólio.

A 4ª entrada coincidiu com o fim do segundo período pelo que o aluno decidiu acoplar a reflexão da 4ª entrada com a reflexão final de período. Desta forma, não se verificou nenhuma referência explícita à razão da escolha da entrada. No entanto, foi possível observar que as duas alíneas do exercício escolhido recaíram sobre dificuldades no cálculo do domínio de uma função composta, dificuldades estas muito frequentes neste tema. Pelo desenvolvimento que esta entrada teve, foi possível observar que, à semelhança da 2ª entrada, o Francisco pretendeu, acima de tudo, a validação dos seus raciocínios, ou seja, certificar-se de que o significado da passagem de um passo para o outro, era o mesmo para professor e aluno.

As duas últimas entradas, previstas para o terceiro período, incidiram sobre o mesmo tema – sucessões. O Francisco apenas fez uma dessas entradas alegando que não estava a conseguir conjugar todas as exigências dos professores. Essa entrada, à semelhança da 1ª, foi sugerida pela professora mediante dúvidas apresentadas pelo aluno nas aulas e, ao invés de incidir sobre sucessões, ainda incidiu sobre estudo de funções, geometria e cálculo diferencial.

Em síntese, duas entradas foram sugeridas da professora, as restantes foram escolhidas essencialmente por conterem dificuldades na justificação dos processos usados ao longo do seu desenvolvimento, o que culminou frequentemente na validação de raciocínios.

Processos para melhorar as suas produções

Na primeira entrada, num processo de orientação e de ancoração, o Francisco começou por identificar o principal conteúdo que cada um dos três processos de resolução envolve:

> **1º** Método de 10ºano, através da expressão da distância entre 2 pontos.
>
> **2º**Método de 11ºano, só com vectores.
>
> **3º** Métodos de 11ºano, só com declives.
>
> (1ª entrada, 1ª versão, 08/01/11)

No primeiro processo, estando a estratégia delineada, aplicou-a e explicou-a, optando também por inserir uma imagem que exemplificasse o que estava a ser explicitado por via escrita. Apesar deste processo não lhe oferecer dificuldades, houve lugar, de uma versão para a outra, e por sugestão da professora, a melhoramentos ao nível dos processos de comunicação do raciocínio.

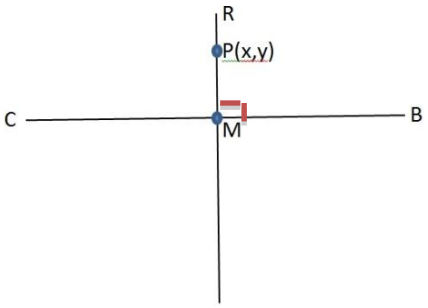
À semelhança do primeiro processo, o Francisco tem a iniciativa de construir uma figura que exemplificasse a ideia principal que estava colocada por palavras: a definição de mediatriz de um segmento de reta através do produto escalar de vetores. Depois, num processo de organização e de especialização, dividiu a resolução por três passos, sendo que, de um passo para o outro teve o cuidado de justificar a transição, onde, por exemplo, se questionou a ele próprio (embora sejam questões retóricas):

> O 2º passo é calcular agora o vector $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{MP}$. Porquê?
>
> A resposta é simples. Já calculámos o ponto médio, mas para calcular a mediatriz através de $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC}=0$, necessitamos de 2 vectores. São eles o vector $\overrightarrow{BC}$ e o vector $\overrightarrow{MP}$.
>
> (1ª entrada, 1ª versão, 08/01/11)

No entanto, talvez por precipitação, mas que certamente denotou uma ausência do processos de verificação, transformou equações em expressões algébricas, mantendo, no entanto, os sinais de equivalência. Além disso, na passagem de uma expressão para a outra, deu uma explicação que não fazia sentido naquele contexto. O *feedback* dado no sentido de observar o que tinha entregue, foi suficiente para, na 2ª versão, o Francisco corrigir o primeiro processo de resolução.

Em relação ao segundo processo de resolução, há ainda a acrescentar que o aluno, por iniciativa própria, fez um desvio a meio da resolução para justificar o porquê do uso da fórmula principal que estava a ser usada para resolver o problema e mais uma vez, fazendo-se acompanhar por uma figura construída por si com as ferramentas do *word* :

> Atenção: Usamos a fórmula $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC}=0$, pois pela definição de mediatriz, os vectores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{MP}$ perfazem um ângulo de 90º, sendo ~~assim~~ o seu produto escalar igual a 0.



> Voltamos agora ao 2º passo que é calcular os vectores $\overrightarrow{BC}$, e $\overrightarrow{MP}$ depois deste pequeno "à parte".
>
> (*feedback* dado à 1ª versão da 1ªentrada, onde o que está sublinhado, são sugestões de aperfeiçoamento ao nível da correção e comunicação das ideias)

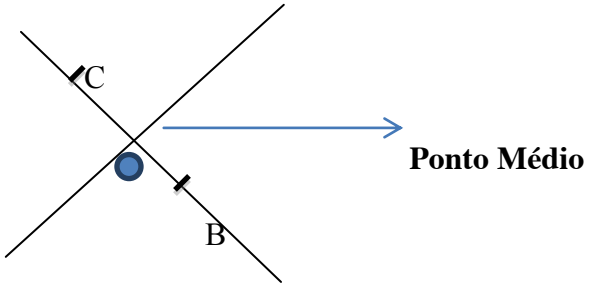
O terceiro e último processo foi o que, de facto, mostrou falta de compreensão e de encadeamento lógico de ideias. Foi perceptível que o Francisco sabia "partes soltas" da resolução mas que não estava a conseguir relacioná-las de forma a obter um "princípio, meio e fim" consistentes. Daí que o *feedback* só podia ser dado no sentido de tentar que "as partes da resolução" fizessem sentido lógico:

> O cálculo do ponto médio devia vir mais abaixo, quando o ponto médio surgisse como uma necessidade para acabar de escrever a equação da mediatriz.
>
> (*feedback* dado à 1ª versão da 1ª entrada, 13/01/11)

Na tentativa de que as partes fizessem sentido, o Francisco usou um processo de autoquestionamento, por vezes retórico, outras vezes não; e figuras de apoio construídas por ele:

Mas através do declive de BC é possível obter o declive da mediatriz. Porquê?

Porque, por definição de mediatriz, ...



(1ª entrada, 2ª versão, 21/01/11)

A forma como o Francisco escreveu as suas ideias também denunciou uma falta de interiorização efetiva destas, no sentido de que, as frases, apesar de bem construídas ocultavam vocábulos, encontrando-se, desta forma, incompletas:

> A relação entre declives de duas rectas $\perp$'s diz-nos que o declive da reta perpendicular, é igual ao inverso do simétrico da outra reta. Ou seja: $m = \frac{-1}{m'}$. (1ª entrada, 1ª versão, 08/01/11)

> a relação entre declives de duas rectas $\perp$'s diz-nos que o declive da reta perpendicular, é igual ao inverso do simétrico do declive da outra reta. Ou seja: $m = \frac{-1}{m'}$. (*feedback* dado à 1ª versão da 1ª entrada, 13/01/11).

Da 2ª para a 3ª versão da 1ª entrada, só houve aspetos de comunicação matemática a serem trabalhados, mediante *feedback*: "é mesmo este sinal que queres escrever? (*feedback* dado à 2ª versão da 1ª entrada, 25/01/11).

A 2ª entrada também incidiu sobre geometria, no entanto no espaço, em particular com a interseção de planos e retas. O aluno mais uma vez, num processo de organização e de ancorar, dividiu a resolução por passos (no total de três) e usou uma figura (mais uma vez construída por si) para o acompanhar nos seus raciocínios. No entanto, havia ausência de algumas justificações e a imagem que foi tomada como justificativa, apenas mostrava um esboço de uma ideia que tinha de ser justificada. A explicação encontrava-

se a um nível mais teórico/analítico, e não apenas "visual". De qualquer maneira, foi notório o uso do pensamento intuitivo:

> A intersecção é um ponto (ao lado fez um esboço de um plano, com uma reta a intersetá-lo, onde assinala o ponto de interseção). Portanto estamos à procura das coordenadas desse ponto.
>
> (2ª entrada, 1ª versão, 06/02/11)
>
> A intersecção é um ponto porque o vector diretor da recta não é perpendicular com o vector normal do plano. Portanto estamos à procura das coordenadas desse ponto. (*feedback* dado à 1ª versão da 2ª entrada, 12/02/11)

Algumas justificações que foram dadas, também não foram as mais adequadas:

> $(x, y, z) = (1 + \lambda; 3; 2\lambda)$
>
> O **2º Passo**, é fazer agora um sistema de equações (porquê? Qual é o conceito que está por trás ou que justifica o surgimento do sistema?) com o objectivo de obter expressões para as coordenadas (x,y,z) do ponto.
>
> $(x, y, z) = (1 + \lambda; 3; 2\lambda)$=...
>
> (*feedback* dado à 1ª versão da 2ª entrada, 06/02/11)
>
> $(x, y, z) = (1 + \lambda; 3; 2\lambda)$
>
> **2º Passo**: Pela igualdade de pontos: ("a 1ª coordenada de um é igual à 1ª coordenada do outro". "a 2ª …)
>
> (2ª entrada, 2ª versão, 12/02/11)

Nesta entrada, outros exemplos podiam ser dados, mas todas envolvem o ir ao cerne das justificações, pelo que o aluno foi induzido em processos de aprofundar, com base no avanço já dado por ele, ou seja, com base nas justificações que conseguiu dar inicialmente, que não estavam totalmente erradas, mas não eram a verdadeira razão de ser das estratégias selecionadas.

Na 3ª entrada o Francisco enviou apenas o enunciado de um exercício do manual, alegando que "eu escolhi este exercício, pois não faço a menor ideia de como fazê-lo, e

queria que a stora me desse umas luzes, para poder dar início" (*e-mail* que acompanhou o envio da 1ª versão da 3ª entrada, 26/02/11). Pelo exposto na razão da escolha, a professora optou por, via *e-mail*, não se referir a esse contexto social em que a entrada se encontrava e dar enfoque apenas à tarefa: "começa por escrever as tuas ideias acerca da resolução, independentemente de estarem corretas ou não, que é para eu poder pegar nelas e trabalhar a partir daí. Pode ser até 4ª feira à noite?"(*e-mail* enviado a 28/02/11).

O Francisco, mais uma vez revelou procurar dar resposta aos seus deveres como aluno e enviou a 2ª versão conforme o solicitado. No entanto, pela primeira vez, no *e-mail* que acompanhou o envio da 2ª versão, o Francisco não escreveu absolutamente nada. Até à data, sempre tinha cumprimentado a professora e se despedido. Além disso, apesar de não estar perfeito, na 2ª versão constava praticamente todo o raciocínio correto, que após *feedback* só mereceu mais uma versão para ser dado como "concluído". Desta vez a professora optou por mostrar que não estava alheia ao contexto em que a entrada estava a ser trabalhada, "definindo" prazos exequíveis e, ao mesmo tempo, respeitando os interesses que o Francisco tinha naquela altura:

> Olá Diogo,
>
> espero que te tenhas divertido pela Serra da Estrela. Que inveja!! :)
>
> envio feedback à entrada. Aguardo resposta até domingo ou segunda, para depois poderes gozar o carnaval sem esta preocupação :)
>
> (*e-mail*, que acompanhou o envio do *feedback* dado à 2ª versão da 3ª entrada, 03/03/11)

Esta intervenção produziu o efeito desejado pois o aluno acabou a resolução do exercício explicando de forma bastante clara cada um dos passos de resolução. Assim, nota-se que a escolha não recaiu propriamente sobre um exercício que lhe oferecia dificuldades, mas sim porque ele tinha que escolher um dentro do prazo previsto e "saiu aquele".

A 1ª versão da 4ª entrada, enviada um dia após a data limite de entrega, recaiu sobre duas alíneas de um exercício do manual, mas que não tinham sido feito na aula. Dadas duas funções *f* e *g*, era pedido a definição das funções compostas *f após g* e *g após f*.

Geralmente, neste tipo de exercício, a grande dificuldade dos alunos prende-se com a determinação do domínio, pois a não compreensão da ideia que está na base da sua determinação, muito dificilmente conduz o aluno à resposta correta, principalmente quando estão envolvidas simultaneamente funções racionais e irracionais, como foi o caso da segunda alínea. A expressão algébrica de uma função composta pode ser calculada pelo aluno através de uma "mnemónica", no entanto, no portefólio esta teria de ser devidamente justificada.

O Francisco optou por, em primeiro lugar, efetuar todos os cálculos, sem qualquer justificação escrita destes e pedir que professora os corrigisse para depois os justificar: "queria que a stora visse se está aqui algum erro, para dar então começo à explicação dos passos" (4ª entrada, 1ª versão, 20/03/11). No entanto, já nesta versão o Francisco verificou que não tinha conseguido chegar a um resultado esperado: "Neste exercício não consegui obter $4x^2 - 8x + 5$ tal como estava nas soluções" (4ª entrada, 1ª versão, 20/03/11). Esta divergência na expressão algébrica da função composta, prendeu-se com o inadequado desenvolvimento de um caso notável que, após uma indicação, facilmente foi resolvida pelo aluno. Por esta razão é possível considerar que o aluno não teve, por iniciativa própria, a preocupação de voltar atrás para ver onde poderia estar o erro e corrigi-lo, ficando apenas pela mera constatação deste. A professora considerou que, se o aluno tivesse optado por justificar simultaneamente os passos, teria monitorizado de forma eficiente a resolução do exercício e assim, para além de não se ter ficado pela mera constatação da discrepância entre o resultado esperado e o obtido, e tivesse, por si, ultrapassado o erro.

Embora, pelo acima referido, a professora não estivesse de acordo com a opção de remeter as justificações para uma segunda versão, assentiu/anuiu o pedido. De qualquer maneira, só pela escrita dos cálculos foi possível perceber que o Francisco tinha dificuldades ao nível da associação de ideias. Por exemplo, em três situações diferentes escreveu $(fog)(x) \rightarrow f(g(x))$ ao invés de assumir a igualdade: $(fog)(x) = f(g(x))$.

As restantes dificuldades, mais uma vez, prenderam-se com a ausência de registos escritos e com a falta de revisão do trabalho feito. Provavelmente estas dificuldades teriam sido ultrapassadas pelo próprio aluno se tivesse havido uma maior automonitorização do trabalho, ao invés da seleção de uma estratégia e no seguir

"cegamente" em frente até ao fim e, neste fim, não haver recurso a um processo de verificação.

Na 1ª versão da 5ª entrada, mais uma vez, o Francisco desenvolveu o raciocínio até onde tinha a certeza que sabia. Depois referiu as ideias que tinha, mas, mais uma vez, esperou pelo meu *feedback* (ou seja, uma "luz verde") para avançar com a execução das suas ideias, numa 2ª versão. Não arriscou despender esforço para "ver no que dava" e voltar atrás (monitorizar) se se verificasse ser preciso:

> Penso que seja estudar a monotonia para ver onde esta tem os máximos e os mínimos. Estou certo? (...)
>
> A mim "cheira-me" que vou ter de fazer uma derivada, pois esta ficha é de derivadas, apenas já não me lembro porquê. Será que me podia esclarecer essa dúvida? (5ª entrada, 1ª versão, 15/05/11)

Também naquilo que pensou estar explícito para ele, necessitou de correção e/ou aperfeiçoamento, além de se ter tornado evidente que ainda não existia o rigor necessário à compreensão efetiva da situação:

> NOTA: Para a resolução desta alínea é necessário ter em conta que o domínio da área máxima é de]0;4[, pelo que a área máxima nunca poderá exceder 4.
>
> (5ª entrada, 1ª versão, 14/05/11)
>
> NOTA:Para a resolução desta alínea é necessário ter em conta que o domínio da função área ~~máxima~~ é o intervalo]0;4[, pelo que o valor da variável x nunca poderá exceder 4. (*feedback* dado à 1ª versão da 5ª entrada, 9/05/11)

Com base no aperfeiçoamento destas notas redigidas pelo Francisco no meu *feedback*, optei também por dar início ao raciocínio inerente à resolução, ao que o aluno deu seguimento e completou com os cálculos e ainda incluiu uma representação gráfica como interpretação do resultado obtido.

> Vou estudar a monotonia da função através do estudo do sinal da função derivada.

> Então primeiro vou determinar a expressão da função derivada e estudar o seu sinal.
>
> Depois tiro conclusões para a monotonia da função e, consequentemente, a existência de extremos – máximos ou mínimos. Uma tabela ajudar-me-á a organizar estes raciocínios.
>
> (*Feedback d*ado à 1ª versão da 5ª entrada, 19/05/11)

No formulário, que foi sendo elaborado ao longo da realização do portefólio, e que é independente dos conteúdos das entradas escolhidas, o Francisco optou, por iniciativa própria, acrescentar alguns raciocínios, que no fundo, são, para ele, chamadas de atenção. A título de exemplo:

> Por vezes é nos pedido para escrevermos a equação de um determinado plano, só que não nos dão a normal ao plano ($\vec{n}$), e ,nós precisamos dessa informação para colocar na fórmula, sendo (a,b,c) as coordenadas do vector normal ao plano: $ax + by + cz + d = 0$
>
> Preciso então de um ponto e um vector perpendicular ao plano. Para ser perpendicular ao plano **basta que** seja perpendicular a dois vectores do plano.
>
> (formulário de 06/06/11,

Em suma, no portefólio do Francisco não houve registo explícito de processos de interpretação do enunciado como releitura ou rescrição por palavras próprias. Processos de verificação dos resultados obtidos tiveram de ser "lembrados" pois, apesar de o aluno constatar não ter chegado aos resultados pretendidos (finais ou parciais), aguardou diversas vezes pelo meu *feedback* para avançar com a resolução numa versão seguinte, ao invés de voltar atrás e autonomamente procurar e corrigir o erro (e.g. 4ª entrada). Assim, o aluno revelou, nos processos de execução, escassez de monitorização e portanto, também de reflexão, com consequentes eventuais mudanças de decisão ou de estratégias. Tal monitorização teve, desta forma, de ser solicitada pela professora.

Processos de registo, inerentes à conceptualização do portefólio surgiram sob a forma de representações construídas pelo próprio, e naturalmente, pela anotação escrita das ideias subjacentes ao desenvolvimento da entrada. As justificações escritas, por vezes

não surgiram aquando do desenvolvimento da tarefa pois, por exemplo, na 4ª entrada, o Francisco pretendeu que a professora, em primeiro lugar, assentisse os cálculos. Já na 5ª entrada, foi ao contrário: o Francisco em primeiro lugar, avançou com ideias e só prosseguiu com os cálculos depois da minha validação dessas ideias. Na 2ª entrada, o Francisco usou, numa 1ª versão, o seu pensamento intuitivo como justificação para um processo. Apesar desse pensamento lhe ter sido útil para despoletar a resolução, foi transformado em justificação matemática na versão seguinte. Também houve lugar a processos de organização como reordenar o encadeamento de ideias de forma a formarem um fio condutor em que umas surgissem por necessidade de operacionalização das outras (e.g. 1ª entrada).

Através de processos de orientação e de ancorar, o Francisco estabeleceu estratégias e identificou conteúdos inerentes a estas (1ª entrada). Dentro de uma linha de ação já estabelecida, dividiu explicitamente a estratégia por passos (e.g. 1ª e 2ª entradas). Recorreu ao autoquestionamento, embora na maioria das vezes retórico (e.g. 1ª entrada).

O processo de aprofundar foi mais nítido nas 2ª e 4ª entradas. Na 2ª entrada prendeu-se com a reflexão no sentido de aprofundar as justificações de forma a que fossem mais correlacionadas com o contexto da situação. A 4ª entrada foi desenvolvida mais no aprofundar de definições relacionadas com a função composta. Processos de interiorização foram mais nítidos aquando da rescrição, de uma versão para a outra, das ideias de forma mais rigorosa.

Recursos usados na elaboração do portefólio

No portefólio foi possível observar que o Francisco assumiu o papel de professor que se dirigia a uma turma numa aula:

> Este método que agora vos vou passar a explicar, é bem mais simples que os outros dois também aqui explicados. Vamos então a ele (1ª entrada, 1ª versão, 08/01/11).

Símbolos de expressão de emotividade como *smiles*, também foram usados para comunicar com a professora, tanto no *e-mail* como nas entradas do portefólio. O Francisco recorreu frequentemente a representações gráficas construídas por ele próprio, com as ferramentas do *Microsoft word*, para exemplificar o que tinha exposto por palavras (1ª , 2ª e 5ª entradas e no formulário).

O facto de ser exigido que o aluno explicasse todos os passos ou opções que eram por ele tomadas, revelou-se pertinente ao longo da realização de todo o portefólio pois, mesmo em partes da tarefa onde o aluno não apresentava dificuldades de interpretação ou de aplicação, foi possível observar e, através de *feedback*, colmatar e clarificar ideias mal expressas por escrito e, por essa razão, provavelmente pouco esclarecidas na sua mente. Pela própria forma como o portefólio foi conceptualizado, o *feedback escrito* foi o principal recurso usado pelo Francisco. De facto, este recurso foi fulcral na estruturação do pensamento matemático, na explicitação correta da razão de ser de determinados procedimentos e na compreensão efetiva destes. No entanto, também se pode verificar que parte do *feedback* foi muitas vezes usado para validar ideias que o Francisco tinha, antes de ele dar continuidade à tarefa. Tal não foi o objetivo traçado pela professora, no entanto, no caso do Francisco, houve situações em que acabou por ser concretizado dessa forma: "queria que a stora visse se está aqui algum erro, para dar então começo à explicação dos passos (4ª entrada, 1ª versão, 20/03/11); "Stora, eu esta parte não sei como fazer. Penso que seja (...) Estou certo? Se não for o caso, dê-me uma luzinha para começar ☺" (5ª entrada, 1ª versão, 14/05/11).

No caso do Francisco, o *feedback* também foi usado no sentido de o ajudar a refletir sobre expressões por ele usadas no sentido de repensar a validade do que tinha escrito ou no aperfeiçoamento das suas justificações: "queres mesmo dizer denominador?" (*feedback* dado à 1ª versão da 1ª entrada, 13/01/11); "É mesmo este sinal que queres escrever?" (*feedback* dado à 2ª versão da 1ª entrada, 13/01/11); "deves justificar porque é que apenas escolhes a solução positiva da equação" (*feedback* dado à 2ª versão da 3ª entrada, 03/03/11); "Porquê? Qual é o conceito que está por trás ou que justifica o surgimento do sistema?" (feedback dado à 1ª versão da 2ª entrada, 06/02/11).

Quando questionado acerca do tipo de *feedback* que mais o ajudou a superar as suas dificuldades, o aluno apenas identificou o tipo de *feedback* em que: "a professora às

vezes deixava ali coisas por dizer que é para o aluno também ter aquela capacidade de procurar e não ter a papinha toda feita" (2ª entrevista, 08/06/11).

Também se salienta o recurso a reforços positivos com particular ênfase no Francisco pois foi um dos alunos que teve mais dificuldade em se organizar de forma a dar resposta às exigências do portefólio, dentro dos trabalhos exigidos por todas as disciplinas. Apesar de reconhecer e atribuir importância os objetivos do portefólio, a dimensão comportamental por vezes não correspondeu a tal reconhecimento. Este facto tornou-se perceptível por acontecimentos como não ter entregue uma das entradas, reflexões menos desenvolvidas, e alguns dos prazos de entrega das versões terem sido ultrapassados. Daí o trabalho, por parte da professora, na dimensão motivacional. Por exemplo, "fizeste um bom trabalho. Só falta "limar" umas coisitas, principalmente na última resolução", "esta entrada está praticamente concluída. É só um ou dois pormenores. Vê o anexo" (*e-mails* que acompanharam *feedbacks* a versões da 1ª entrada, 13/01/11 e 25/01/11, respetivamente).

No formulário, que foi sendo elaborado ao longo da realização do portefólio, o Francisco recorreu a cores para enfatizar a "localização" de certos entes e ao *bold* para fazer sobressair algo que considerou importante:

> A relação entre declives de duas rectas diz-nos que o declive da recta perpendicular, é igual ao inverso do simétrico do declive da outra recta. Ou seja:
> $m = -\frac{1}{m'}$
>
> (...)
>
> Para ser perpendicular ao plano **basta que** seja perpendicular a dois
>
> vectores do plano.
> (formulário do Francisco, 06/06/11)

Em suma, o recurso ao registo escrito inerente à conceptualização do portefólio, conduziu o Francisco a estabelecer um diálogo interpessoal, acompanhado de representações gráficas construídas pelo próprio, e um envolvimento na aprendizagem denotada pelo uso de expressões de emotividade como os *smiles*. O registo escrito de todos os processos envolvidos no desenvolvimento da entrada, mesmo aqueles que na percepção do aluno não traziam dificuldades, mostrou que, através do *feedback* dado pela professora, careciam de aperfeiçoamento e/ou correções. De facto, o *feedback*

escrito foi o principal recurso usado no portefólio para evoluir na aprendizagem. Para além da correção e aperfeiçoamento das ideias, este também foi usado para validação de raciocínios e de cálculos, e para despoletar atividade dado que o aluno teve tendência de esperar pelo primeiro *feedback* para dar continuidade à entrada numa versão seguinte. A automonitorização do aluno através da reflexão sobre as suas produções também foi um dos focos do *feedback* fornecido uma vez que o aluno mostrou tendência para seguir sempre em frente até obter uma resposta (válida ou não). Associado a estes *feedbacks* houve recurso a reforços positivos para ajudar o aluno continuar a ter motivação na construção da sua própria aprendizagem.

Vantagens e Limitações

Na reflexão final de ano, tal como era tendência no desenvolvimento das entradas, o Francisco também optou por colocar por tópicos o seu ponto de vista:

> Com a realização deste portefólio e suas respetivas entradas, posso concluir e afirmar que foi produtivo. Para tal tenho 3 pontos de vista que vou explicar.
>
> 1º Foi produtivo porque…
>
> Obriga-nos de certa forma a, escrever e a explicar passinho a passinho, como se tivéssemos a publicar uma notícia, plausível e acessível a quem vai ler. (...)
>
> 2º Foi produtivo porque…
>
> Ficamos com um registo escrito, do nosso trabalho/dúvidas ao longo da realização das várias entradas, permitindo-nos observar a nossa evolução, na matéria, nas dúvidas, e tal como já referi, no desenvolvimento da escrita e capacidade de explicação.
>
> 3º Foi produtivo porque…
>
> (...) retirar as dúvidas, e ajudar os alunos a compreender melhor aquilo que mais dificuldades têm, cometendo erros e reconhecendo-os. Pois a errar é que se aprende (...)
>
> (Reflexão final de ano, 06/06/11)

Portanto, no fim do ano letivo, o Francisco identificou que uma das vantagens do portefólio se prendia com o desenvolvimento do processo de registo. Associado a este, o Francisco na segunda entrevista, acrescentou que "se eu metesse só lá a resolução, eu podia não perceber" (2ª entrevista, 08/06/11). Além disso, embora com o *scaffolding* dado pela professora, como a explicação foi feita pelo próprio, foi-lhe efetivamente acessível:

> C – Quando estavas a escrever os raciocínios nas entradas, estavas a escrever para quem?
>
> F – Eu acho que explico como se fosse para mim.
>
> C – Como gostavas que te explicassem..
>
> F – Exatamente. É isso. É isso mesmo. Porque às vezes a gente não percebe um exercício porque aquilo não está explicado. Faltam lá coisas por explicar. E eu acho que são esses pontos que são fulcrais para perceber.
>
> C – Falta explicar ou não está explicado de uma forma que tu compreendas?
>
> F – De uma forma que eu compreenda. E às vezes não explica, porque às vezes quando eles fazem os livros: "bem o aluno estudou isto aqui para trás, não é preciso estar agora a explicar novamente. À partida ele vai perceber". Mas às vezes esses pontos são o mínimo para a gente não fazer o exercício.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

O processo de registo dos raciocínios foi além do portefólio:

> F – Há uma coisa que eu dantes não fazia e agora gosto mesmo de fazer, é por exemplo, resolver o exercício e depois escrever o raciocínio. Não sei porquê, quando fui estudar para o teste intermédio, gostei de fazer aquilo: a escrever, senti-me inteligente, sei lá... Eu escrever aquilo.. eu sei isto! (...)
>
> C- Tu disseste que antes não fazias e que agora fazes, foi quando começaste a fazer o portefólio que começaste a fazer, ou foi antes?
>
> F – Eu acho que foi depois. Eu experimentei e até resulta. Se bem que a maior parte das vezes não tenho tempo. Mas às vezes faço, não

> digo que seja sempre que faço ~~os~~ exercícios, mas às vezes quando vejo que tenho dificuldade, faço.
>
> (1ª entrevista, 16/03/11)

Associado à compreensão de ideias, o registo escrito também trouxe para o Francisco outra vantagem, a de fazer sobressair os processos de forma a facilitar posteriormente o trabalho de estudo/revisão, que o Francisco referiu na segunda entrevista (08/06/11):

> F – Por exemplo, para fazer aquele exercício do teste intermédio, eu lembro-me que quando fui um dia ao café, e fui ver os desenhos, ajudou-me a relembrar, já não precisava resolver o exercício todo outra vez. (1ª entrevista, 16/03/11)
>
> [A escrita do] raciocínio ajuda não só a interiorizar mais a coisa, como mais tarde se a gente quiser voltar a ver, está lá escrito como é que é para fazer" (2ª entrevista, 08/06/11).

Além de que são esses os processos, que são passíveis de ser aplicados/ajustados/transferidos noutras situações:

> A capacidade de lógica também aumenta, porque uma pessoa vai estando a fazer exercícios que ao fim e ao cabo o raciocínio vai acabando por ser generalizado. Ser sempre o mesmo? Não, mas adaptado. Há qualquer coisa que é sempre igual ou encaixa.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

Estas modificações também recaíram sobre a frequência do estudo e acompanhamento da matéria lecionada nas aulas:

> C – o que é que podes dizer acerca do teu envolvimento na aprendizagem da Matemática?
>
> F – obviamente que não ficou igual. O portefólio obriga-me a ir ao caderno e rever a matéria. Aumentou a frequência de estudo.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

Em relação à forma como aprende, o Francisco ainda salientou que o portefólio foi uma via para a sua crescente autorregulação, num diálogo intrapessoal:

> F – Quando eu acabo de fazer o portefólio, por norma eu tenho vontade de ler aquilo para ver: "deixa lá ver se expliquei isto bem, se isto se percebe". Eu imagino que é outra pessoa que vai pegar para ler aquilo. Para ver se ela percebia eu tento me meter na cabeça desta pessoa para ver. (1ª entrevista, 16/03/11)[5]

A questão da visibilidade, apontada pelo Francisco no segundo ponto da sua reflexão final, foi sempre recordada oralmente: "Acho que ali é mais para ver a evolução do aluno, para ver ele melhora, o trabalho do aluno" (1ª entrevista, 16/03/11).

> C – Achas que o portefólio permite observar o desenvolvimento de competências de aprendizagem diferentes de outros instrumentos de avaliação?
>
> F – Sim. Porque, no teste não dá para ver a nossa evolução. É naquele momento em que a gente tem de fazer o teste. Enquanto que no portefólio não. Dá para ver a evolução. Por exemplo, ao nível da linguagem, da estruturação matemática: "eh pá, aquele aluno tem vindo a evoluir bastante", e acho que nesse aspecto o professor que está a observar e a avaliar os portefólios, acho que consegue ver isso; e nós também, mesmo!
>
> C – Achas que o portefólio reflete a tua evolução na aprendizagem..
>
> F – Sim, sim. Acho que, como aquilo é de semana a semana, acho que sim. Acho que com o portefólio dá para ver isso.
>
> C – O facto de teres várias versões, estarem datadas.
>
> F – Estarem datadas, em que matéria é que a gente estava, onde a gente tinha mais dificuldade e isso.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

A questão da visibilidade tanto para o professor, mas também para o próprio aluno, também é fruto de um acompanhamento mais individualizado deste:

> F – Nas aulas a professora pega num exercício e a gente vai estar ali a fazer. Mas, a professora tem de dar a volta à sala para ver os outros

[5] A primeira entrevista foi realizada a meio do processo de realização do portefólio, ou seja, com a três primeiras entradas feitas.

> alunos. Acho que na altura que a gente faz o portefólio e a professora verifica o portefólio, a professora está a pensar só naquela pessoa e as suas dificuldades e tentar explicar àquela pessoa da melhor maneira possível. A professora está só mesmo focada numa pessoa. (...) Um acompanhamento de aula comparado com um acompanhamento de um aluno, em casa, numa determinada hora para aquela pessoa, eu acho que é diferente, acho que é mais intensivo.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)
>
> C – Achas que o portefólio ajuda o professor a compreender melhor o estilo de aprendizagem específico de cada aluno?
>
> F – Sim. Pela linguagem, pela maneira como a gente escreve, como a gente resolve o exercício. As pessoas têm diferentes maneiras. Enquanto na aula a professora também percebe mas não é de uma maneira mais evoluída.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

Esta conjuntura trouxe consequências positivas no autoconceito do aluno:

> F – aumentou a confiança, sim [perante um problema de Matemática].
>
> C – e achas que o portefólio teve algum papel nisso?
>
> F – Tem. Tem porque nos obriga a escrever os raciocínios e a estruturá-los de uma maneira organizada, não coisas saltadas, mas uma linha contínua. Acho que sim. Acho que aumentou a minha auto-estima em relação à resolução de exercícios.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

No portefólio não houve medo de errar porque sentia que não era prejudicado por isso e contrapôs com os testes escritos: "são aqueles portefólios em que o aluno não sabia e vai aprendendo, assimila. Acho que é isso fundamentalmente para que serve o portefólio. Acho que não é: "ah, sabes ou não sabes? Pum!". Para isso temos o teste (1ª entrevista, 16/03/11).

Além disso, a pressão que existia sobre a avaliação foi diminuída:

> C – Que receios ou ansiedades o portefólio te provocou?
>
> F – Eu acho que não me provocou receios. Acho que os receios são mais quando eu estudo para o teste, porque no portefólio nós temos todo o tempo do mundo para fazer aquilo, enquanto que num teste "eh pá, eu não posso estar a perder muito tempo nisto porque ainda me falta o resto". Acho que para estudar para um teste me provoca muito mais receios do que propriamente a realização do portefólio.
>
> C – Isso também tem a ver com aquilo que escreves no teste ser definitivo?
>
> F – Sim. E no portefólio não é definitivo porque a gente manda para a professora e a professora manda um *feedback* e ali no teste a gente faz e, sabe ou não sabe. E já me aconteceu muitas vezes no teste ficar preso a um exercício e o meu cérebro começa a bloquear e eu a ficar nervoso. Quando vou para a frente, aquilo que eu sabia fazer melhor, acaba por ficar mal feito porque perdi muito tempo no resto.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

Quanto às desvantagens, o Francisco alegou que, apesar de reconhecer as suas vantagens, devido à quantidade de trabalho oferecido pelo conjunto das seis disciplinas: "é tanta coisa que a gente, às tantas, de certa forma, acaba por ser mesmo porque a gente tem de fazer. Nem sequer temos livre vontade de fazer por causa do tempo mesmo" (2ª entrevista, 08/06/11).

O balanço final parece ser positivo:

> C – O que é que tu pensavas em Janeiro que agora já não pensas? Ideias que tu tinhas sobre o portefólio e que agora mudaram.
>
> F –Quando é alguma coisa que dê assim algum trabalho, a gente pensa sempre: "oh, já nos estão a dar mais trabalho, não querem mais nada" – passam-nos essas coisas pela cabeça. Mas depois uma pessoa ao fazer, aí é que vai perceber.
>
> C – Tornou-se uma rotina, o portefólio?
>
> F – Sim. É uma rotina claramente. Tornou-se de certa forma uma rotina.
>
> (2ª entrevista, 08/06/11)

Em suma, as vantagens identificadas pelo Francisco prenderam-se com o favorecimento de uma forma de estudar mais regular e produtiva. Regular porque o levou a estudar semanalmente; produtiva porque os raciocínios, escritos pelo próprio, ajudaram-no a estruturar e a interiorizar melhor as ideias, além de as dúvidas, mesmo as mais singelas, serem esclarecidas, num processo crescente de autorregulação.

A evolução do aluno ficou visível para ambos o que permitiu uma avaliação da progressão deste. Além disso, esta forma de avaliação, para além de se focar mais no processos e na evolução destes, do que nos conteúdos, não causou a ansiedade que um teste escrito com tempo limitado causaria, pois não faz sentido ter medo de errar. Além de que mostra que o erro é "bem vindo", no sentido de mostrar ao aluno que está em evolução na sua aprendizagem: "a errar é que se aprende" (Reflexão final de ano, 06/06/11).

Em relação à superação das dificuldades, o Francisco considerou que o acompanhamento do aluno foi mais individualizado, o que permitiu um apoio mais eficaz e incisivo. Tudo isto levou o aluno a modificar a percepção que tem de si próprio no sentido de uma crescente autonomia e confiança. A questão do tempo, associada à quantidade de trabalho no conjunto de todas as disciplinas, foi o único fator que o Francisco considerou que interferiu de forma menos positiva na sua aprendizagem, no âmbito do portefólio.

Síntese do capítulo

Na primeira entrevista, o Francisco referiu que, perante um problema de Matemática, primeiro analisa-se, depois planifica-se (onde se subentende a seleção de uma estratégia), de seguida implementa-se aquilo que foi delineado e, finalmente verifica-se. Mesmo lhe dando a hipótese de considerar a repetição de etapas, não a considerou. De facto, na prática, o Francisco, depois de uma estratégia selecionada, teve a tendência de a aplicar até que ela produzisse um resultado final ou então de esperar pela minha validação de alguns aspetos, para fazer a entrada. De facto, quando não se sentia confortável ou com a estratégia escolhida (e.g. 5ª entrada) ou com os cálculos efetuados (e.g. 4ª entrada), este aluno pedia a minha validação para continuar, já numa versão

seguinte. Assim, o Francisco procurou regularmente na professora o automonitorização que era esperado nele desenvolver. Desta forma, uma vertente do *feedback* dado às produções do Francisco foi na direção do autoquestionamento e reflexão sobre os resultados parciais que tinha obtido, e também sobre a estruturação das ideias de forma a que estas se sucedessem com lógica. A verificação dos resultados quando era feita, tendencialmente ficava-se pela constatação se este resultado coincidia, ou não com o esperado, nomeadamente, com o que estava nas soluções.

Houve três entradas que foram escolhidas pelo Francisco acima de tudo com o objetivo de que, ao colocar por escrito as justificações da passagem de um passo para o outro ou o surgimento de determinados cálculos, eu corroborasse/validasse os seus raciocínios, ou seja, obter a certeza de que o significado destes é o mesmo para professor e aluno. Estas justificações, surgiram por vezes com base no seu pensamento intuitivo (e.g. 2ª entrada). De qualquer maneira houve altura em que o Francisco necessitou de apoio para conseguir interiorizar efetivamente os conceitos e processos inerentes ao desenvolvimento das entradas. Tal apoio foi dado através do aperfeiçoamento da parte escrita, associado ao questionamento do que havia produzido. De facto, foi constante o aperfeiçoamento e/ou correção da comunicação matemática, com particular ênfase ao nível da transmissão de ideias, tanto nas produções onde o Francisco não sentia dificuldade, como nas restantes.

A questão do tempo disponível, no conjunto das tarefas colocadas pelas seis disciplinas foi um dos fatores que condicionou a escolha das entradas pois o Francisco, ao fazer as suas escolhas, avaliou as exigências destas no sentido de assegurar que estas não lhe trariam "muito trabalho" (1ª entrevista, 16/03/11). Aliás o Francisco foi um dos alunos que mais teve dificuldade em gerir o seu tempo de forma a corresponder às exigências semanais do portefólio, daí não ter conseguido entregar uma das entradas e o formulário ter ficado incompleto.

Não se verificou registo explícito de dificuldades ao nível da interpretação do enunciados. Na seleção de uma estratégia, o Francisco tendeu a colocá-la por passos e recorreu frequentemente as figuras construídas com a ferramentas do *Microsoft word* para explicitar os que estava a expor por palavras. A obrigatoriedade do registo escrito, apesar de necessitar de tempo, traz, para o Francisco, muitas vantagens em particular ao

nível da estruturação das ideias, da saliência destas aquando da revisão do trabalho desenvolvido, e da sua eventual aplicabilidade em outras situações de forma ajustada.

Para além de um estudo mais eficaz e com mais resultados ao nível da aprendizagem, favoreceu a autoestima do aluno. Além disso, possibilita uma avaliação mais "completa" no sentido de que para além de incidir sobre conteúdos, passa também a incidir sobre os processos e sobre a evolução do aluno, evolução esta que ficou mais visível tanto para mim como também para o próprio aluno. Para além da completude, esta forma de avaliação foi menos stressante que a avaliação sumativa uma vez que o Francisco não se sentiu penalizado quando errava. Viu sim, o erro como uma oportunidade de mostrar que, com ajuda da professora, conseguia superá-lo e evoluir na aprendizagem e também na forma como estuda a disciplina. De facto, o Francisco reconheceu que no portefólio o objetivo não é que o erro fosse meramente corrigido pelo professor, mas que fosse o próprio aluno a corrigi-lo, naturalmente com o meu *scaffolding*.

Capítulo IX

Conclusões

Neste capítulo faço uma síntese do estudo, recordando os objetivos e as questões orientadoras, a metodologia adotada e o contexto pedagógico que lhe serviu de palco. De seguida, com base na análise e discussão dos resultados obtidos, apresento as principais conclusões em relação às questões enunciadas. Para terminar, faço algumas recomendações para futuras investigações na área da avaliação reguladora da aprendizagem.

Síntese do estudo

As crescentes transformações tecnológicas, económicas e culturais à escala mundial, criaram novas necessidades no mundo do trabalho e fizeram da aprendizagem ao longo da vida um alvo a atingir pela sociedade atual (Brown, 2008). Este fato tem tido implicações no sistema educativo que se vê obrigado a construir novos objetos que satisfaçam essas necessidades (Asbahr, 2005), ou seja, a adotar modelos educativos que visem a formação de pessoas que saibam de uma forma autónoma, crítica e motivada, assumir um papel construtivo nas suas próprias aprendizagens (Sá-Chaves, 2005; Alves, 2006; Fernandes, 2008). Os nossos alunos têm de ser ensinados a compreender e a utilizar os recursos internos e externos disponíveis, de forma consciente, conhecedora e controlada pois só desta forma conseguirão ter um papel ativo na construção dos seus saberes e na concretização das suas aspirações intelectuais, afetivas, sociais e profissionais (Alves, 2006).

A significação social da atividade pedagógica do professor é então proporcionar condições para que os alunos se envolvam em atividades de aprendizagem que deem resposta às necessidades e objetivos sociais acima referidos (Asbahr, 2005). Ao agir de forma intencional, consciente e dirigida para esses fins específicos, o portefólio do

presente estudo foi conceptualizado para favorecer a participação de cada aluno em ambientes e práticas específicas que propiciem o saber aprender de forma autorregulada.

O objeto do presente estudo é o aluno e o objetivo primordial é saber em que medida o *portefólio reflexivo de Matemática* pode contribuir para a sua aprendizagem matemática. Na aprendizagem escolar podemos considerar dois tipos de objetos de aprendizagem: conteúdos e processos (Burton, 1984; Grangeat coord.,1999). As tarefas escolhidas para o portefólio, apesar de terem como pano de fundo os conteúdos dados por uma lista (anexo III ou IV), foram tratadas de forma a pôr em ação processos, em particular, processos metacognitivos. Os conteúdos funcionaram apenas como uma base comum de trabalho. Daí que a primeira questão do estudo seja:

- Que processos são postos em prática pelos alunos para melhorar as suas produções?

Associado aos processos, temos os recursos usados pelos alunos que os auxiliaram nesses processos:

- Que recursos são usados pelos alunos quando envolvidos na realização do *portefólio reflexivo de Matemática*?

Para fazer o balanço de todo o trabalho desenvolvido, enunciámos a seguinte questão:

- Como os alunos autoavaliaram o desenvolvimento do *portefólio reflexivo de Matemática*? Que vantagens identificaram neste instrumento de avaliação?

Este estudo apresenta a *teoria da atividade* (Leontiev, 1978; Engeström, 1999; Roth, 2004; Asbahr, 2005) como referencial teórico. Esta teoria toma como unidade de análise um sistema da atividade, orientada para o objeto e mediada por artefactos, fazendo a ponte entre a estrutura social e o sujeito individual (Duarte, 2002).

A realização do estudo seguiu uma metodologia de natureza interpretativa porque se pretendia a compreensão da atividade do aluno durante a sua aprendizagem (Ponte, 2004, 2006; Yin, 2002). O design de investigação desenvolvido foi o estudo de caso, sendo para tal escolhidos três alunos caso (Burns, 2000), a Francisca, a Lara e o Francisco, de uma turma do 11º ano de escolaridade, de Matemática A. Para a escolha dos alunos foram tidas em conta a disponibilidade e a predisposição para participar no estudo, a facilidade de expressão oral e, como fator diferenciador, terem evidenciados níveis de desempenho diferente na disciplina.

A recolha de dados teve início com a aplicação de um questionário (Quivy & Campenhoudt, 1992) a todos os alunos da turma. Aos alunos que constituíram os estudos de caso, foram feitas duas entrevistas semiestruturadas (Bell, 1997; Bogdan & Biklen, 2007), cujas gravações foram, por mim, transcritas. A recolha documental foi constituída por todas as versões das entradas feitas pelos alunos, por todos os ficheiros de *feedback* feitos por mim, enquanto sua professora, ambos datados; e pelo conteúdo de todos os *e-mails*, reunido num único ficheiro que funcionou como um diário de bordo.

Apresentação e discussão dos resultados

A atividade do aluno na elaboração do portefólio

Qualquer um dos alunos do estudo tinha necessidades (Leontiev, 1978) comuns como a de ser um bom aluno, a de agradar aos pais e professores, de fazer novas aprendizagens, da classificação final não depender tanto dos testes escritos com tempo limitado, mas também do esforço dentro do próprio ato de aprender. A necessidade de obter estes resultados por si só não gera nenhuma atividade concreta, mas é o que dirige e regula a atividade do aluno quando esta ocorre (Asbahr, 2005). No entanto, estas necessidades, ao encontrarem um objeto que as satisfaçam (Leontiev, 1978), nomeadamente o portefólio com todos os seus objetos próprios (e.g. conceitos, teorias, temas propostos para as entradas), e um motivo que articule estas necessidades ao objeto, conseguem gerar atividade no aluno (Leontiev, 1960 *in* Duarte & Eidt, 2007), atividade esta que se pretende que seja concretizada por meio de ações (Leontiev, 1981) autorreguladas.

A atividade, que tem sempre uma necessidade a satisfazer, acontece por meio de ações, umas diretamente observáveis, outras, as intrapsicológicas, não (Oliveira, 1993; Wertsch, 1985). Na procura de ter acesso às ações de foro interno, uma das exigências do portefólio foi de que o aluno usasse a linguagem sob a forma escrita.

Do esquema de Engeström (1999), considerei para o presente estudo, a seguinte leitura/adaptação de um sistema de atividade no contexto de aprendizagem escolar:

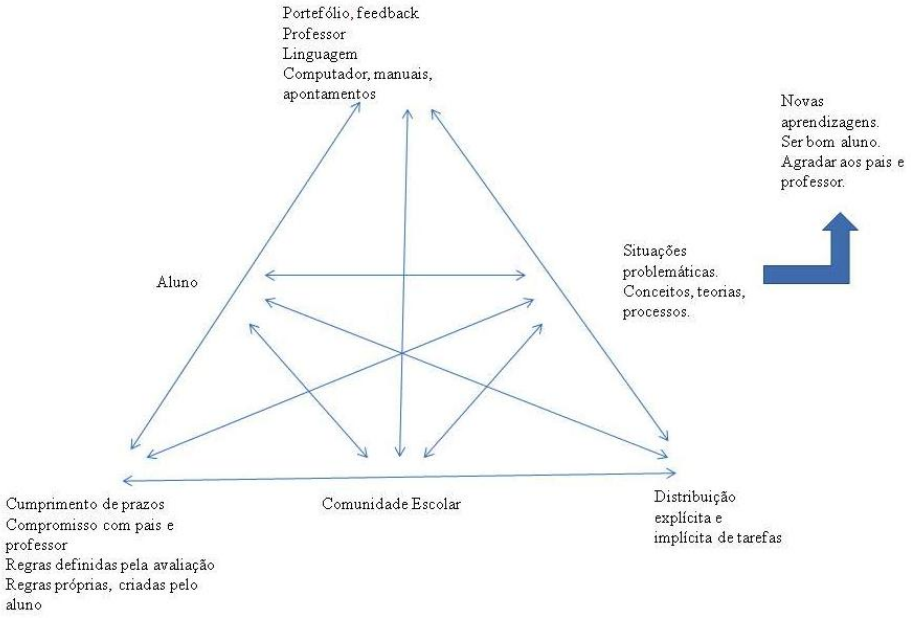


Figura 3: Interpretação do esquema de Engeström representativo de um sistema de atividade

Considero que o portefólio além de apoiar a apropriação do conhecimento pelo aluno de forma planeada, fez com que este não fosse só objeto de atividade do professor, mas fosse principalmente sujeito (Engeström, 1999; Cole & Engeström, 1993) inserido na comunidade escolar, na medida em que o aluno participou ativamente e intencionalmente no processo de apropriação do saber. O meu papel como docente afigurou-se como um mediador entre o conhecimento e o aluno, isto é, entre os produtos culturais e pessoas em desenvolvimento (Oliveira, 1993, Fernandes, 2009). Na divisão de trabalho, considerei as tarefas designadas a cada sujeito, segundo os objetivos e o plano de ação do portefólio e as suas formas de acompanhamento. As regras que limitam e regulam todas as ações e interações que acorrem no interior do sistema de atividade, prenderam-se com, por exemplo, o cumprimento dos prazos de entrega das versões, o compromisso com a professora, as próprias regras definidas pela avaliação no seu todo (Cole & Engeström, 1993; Engeström, 1999; Fernandes, 2009).

Para além das regras propostas pela professora na implementação do portefólio, cada aluno desenvolveu também regras próprias relacionadas com a sua maneira de estar e de estudar perante a disciplina de Matemática. Com efeito, a Francisca optou por, em todas as entradas, fazer uma abordagem preliminar que não lhe foi pedida nem por mim

sugerida. A Lara optou por escolher na maioria das entradas, mais do que um exercício quando podia ter sempre escolhido apenas um. O Francisco escolheu sempre apenas uma tarefa para cada entrada. Este fato salienta que o significado atribuído (Oliveira, 1993) às tarefas que são dadas aos alunos e a atividade desenvolvida por estes, não são os mesmos para todos os alunos e os desenvolvimentos também serão, então, também diferentes.

É de salientar que, como Yackel & Cobb (1996) defendem, na aprendizagem da matemática é fundamental ter em conta a vertente individual e a vertente social, ou seja, o ensino terá de ter em conta a aprendizagem como um processo de construção ativo individual e como um processo ativo de aculturação das práticas matemáticas, de uma sociedade mais alargada. Também por esta razão, considero que a desconfiança e algumas reticências iniciais em relação ao portefólio se prenderam com o fato deste vir alterar hábitos e talvez também, por questões de cultura de escola, interferir na falta de à vontade para o aluno dizer "eu não percebo isto" em algo que ele sabe que serve para avaliação e ao qual lhe vai ser atribuído uma classificação final. Foi notório no Francisco, que várias vezes não arriscou e esperou pelo *feedback* da professora, para iniciar ou continuar uma resolução ou explicação (e.g. 4ª entrada); esperou que a professora validasse uma ideia inicial ou o que já havia feito, para prosseguir. Também notei defesas no problema que se escolhe para entrada: tinha de ser algo que o aluno achasse que conseguia chegar ao fim e, como referiu o Francisco na 1ª entrevista, que não desse muito trabalho. Até a Francisca, considerada "boa aluna", escolheu entradas em que "percebia minimamente", e apenas no terceiro período, escolheu uma entrada, a 5ª, em que, tanto o desenvolvimento, como a solução, lhe eram desconhecidas, pois já se sentia mais à vontade para expor as suas dúvidas e também passou a considerar que quanto mais o aluno estiver à vontade, mais usufrui deste apoio. Também a Lara, apesar do tema da 4ª entrada não lhe causar grandes dificuldades, por respeito pelas regras vigentes, fez a sua escolha. Também na 6ª entrada, a última do ano letivo, parece que a escolha da Lara foi feita de forma aleatória, num sentido de "sobrevivência" em dar resposta ao trabalho exigido pelo conjunto de professores, ou seja, por cumprimento das regras sociais. O Francisco também chegou a escolher pelo menos uma entrada nestas condições, a 3ª, que coincidiu com a ida à Serra da Estrela.

Na sua ação, o aluno age sobre as situações problemáticas escolhidas para as entradas do portefólio, sobre conceitos, desejos e resultados esperados, tendo como um dos

artefactos mediadores (Cole & Engeström, 1993; Engeström, 1999) o portefólio, que constituiu um meio facilitador da atividade no sentido de dar ao aluno poder no processo de transformação desses objetos. Foi esperado que os resultados se traduzissem em novas aprendizagens cognitivas e metacognitivas, numa autoperceção como bom aluno e no agrado aos pais e professores. Para além do professor, do portefólio, do computador ou dos manuais, também se pode considerar que as regras e a divisão do trabalho, foram elementos de mediação na medida em que também foram alvo sobre o qual o aluno pensou e que contribuíram para que o processo de transformação do objeto fosse significativo (Fernandes, 2009).

A linguagem, entendida aqui como um processo de produção e negociação de significados (Asbahr, 2005; Duarte, 2002; Roth, 2004), tanto a usada na escrita, como a usada no discurso interno, constituiu um dos principais elementos mediadores (Vygotsky, 1978). Através do processo de internalização e da utilização de sistemas simbólicos (Wertsch, 1985; Oliveira, 1993), de entre os quais se destaca a linguagem, cada aluno interpreta, descodifica e constrói as suas próprias representações mentais da realidade exterior, que substituem os objetos do mundo real e são os principais mediadores a serem considerados na relação destes com o mundo (Vygotsky, 1978). É a lida com estas representações que permite ao aluno libertar-se do espaço e tempo presentes e fazer relações mentais na ausência das próprias coisas e fazer planos, ter objetivos, esperar obter resultados (Oliveira, 1993).

Os conceitos e teorias, para além de serem objetos, também podem assumir o papel de mediadores na interpretação, implementação e verificação da atividade desenvolvida. De fato, segundo Fernandes (2009), um sistema de atividade é uma estrutura, que pela sua complexidade e sucessivas mutações, o equilíbrio e a previsibilidade são uma exceção, pois nesta subsistem "inseguranças, tensões, perturbações e inovações que acabam por funcionar como impulsionadores da mudança" (p. 91). Por isso, os elementos componentes de um sistema de atividade não devem ser estudados em separado dado que é necessário ter em conta as relações internas que os caraterizam e também as relações entre eles, uma vez que estas podem trazer transformações no desenvolvimento da atividade, em particular no papel que desempenham (Roth, 2004).

Processos para melhorar as produções

A automonitorização é o processo metacognitivo da autorregulação mais importante na fase de execução e controlo da atividade (Zimmerman, 2000; Rosário, 2002) pois a sua ausência ou deficiente uso leva o aluno a dar respostas impulsivas e/ou lançar-se numa atividade sem recuo, gerindo-a ao acaso ou repetindo processos estereotipados (Grangeat coord., 1999; Silva *et al*., 2004). Ao contrário da Francisca, que recorreu frequentemente e por iniciativa própria, à automonitorização através do autoquestionamento e autoavaliação, o Francisco e a Lara tiveram tendência para não o fazer. No entanto, a Lara, mesmo assim, avançou quase sempre numa resolução (e executava-a até produzir um resultado); o Francisco, antes de avançar, pediu várias vezes a validação de uma ideia ou de cálculos para só depois elaborar uma nova versão. Apesar disso, o Francisco quando recorreu ao autoquestionamento, a maioria das vezes foi retórico.

A precipitação para uma resolução, sem monitorização e com ausência de processos de verificação finais foi, em certos casos, a principal causa da existência de um acréscimo do número de versões. Por exemplo, na 2ª entrada da Lara, apesar desta ter delineado uma estratégia e até a ter representado graficamente, executou-a "cegamente" o que a conduziu a um resultado errado. No *feedback* dado à sua 3ª versão, tive necessidade de escrever as questões que ela podia ter colocado a si própria, para chegar à solução correta sem necessidade de ajuda externa. A 2ª entrada da Lara foi concluída ao fim de cinco versões, que podiam ter sido, no máximo três. Da mesma forma poderia ter havido menos uma versão na 5ª entrada da Lara quando, apoiada no *feedback* dado, selecionou uma estratégia inadequada que executou até chegar a um resultado, naturalmente errado. Também o Francisco, por exemplo, na 4ª entrada, apesar de constatar que a solução a que tinha chegado não estava correta, não teve a iniciativa de procurar refazer o seu trabalho ou, pelo menos justificar os passos que tinha dado até à obtenção do seu resultado. Se o tivesse feito poderia eventualmente ter detetado, ele próprio, e na mesma versão, onde tinha errado. Já a Francisca, teve sempre esta atitude de automonitorização, deixando, inclusivé registadas as suas tentativas frustradas e a razão de ser das suas incorreções. Daí a maioria das entradas desta aluna conterem apenas duas versões. Na primeira ela explorou sempre e até à exaustão, todos os recursos que tinha disponíveis.

De facto, na realização do portefólio, foi possível observar que a Francisca esteve de forma sistemática a fazer um ponto da situação, ou seja, a fazer autoavaliações sobre a forma como ia estando a desenvolver o seu trabalho – aspeto salientado por Schoenfeld (1992) como indicador de um aluno que sabe resolver problemas e cuja forma de trabalhar se assemelha à de um matemático na resolução de problemas. Talvez por esta razão, a Francisca seja uma aluna que, de uma forma geral, consegue obter bons resultados quando sujeita a avaliações sumativas. A Lara e o Francisco já não foram tão perseverantes, nem recorreram, de uma forma geral, por iniciativa própria ao autoquestionamento; tendo sido incentivados através de *feedback*, ao longo da realização do portefólio.

O processo de autoregulação exige reflexão (Mason, Burton & Stacey, 1982; Zimmerman, 2000; Mahoney & Thoresen *in* Silva *et al*., 2004). Ao fazer o aluno refletir sobre os seus procedimentos e sobre as suas produções pessoais e depois o fazer comparar com as anteriores, para elaborar uma nova versão, esteve-se a levar o aluno a enveredar por processos de reflexão (Pirie, 1987) e de abstração sobre a sua própria atividade, para descontextualizar e conceptualizar as estratégias e os conhecimentos úteis e, portanto, torná-los mais facilmente transferíveis (Grangeat coord., 1999).

Pugalee (2004) estabeleceu quatro grupos de processos metacognitivos usados na resolução de problemas, nomeadamente processos de orientação, de organização, de execução e de verificação. O fato de caber aos alunos selecionar as tarefas para as entradas, fez com que estes se envolvessem em processos de orientação, familiarizando-se com o tema, analisando informações, planeando e estabelecendo algumas metas (Pugalee, 2004). A Francisca foi a única que foi mais além neste processo de orientação pois, dentro do tema de cada entrada, que era comum a todos os alunos, escreveu toda a informação que considerou estar relacionada com o tema e exercício que tinha escolhido, tanto ao nível dos conteúdos, como ao nível dos procedimentos de que dispunha, independentemente destes estarem ou não relacionados com a tarefa que ia desenvolver na entrada. Por este fato, nas entradas, a Francisca foi a que mais se demorou em processos de orientação.

Já dentro da tarefa escolhida, houve situações em que a Lara identificou objetivos parciais e reconheceu que não sabia como atingi-los, mas arriscava implementar uma estratégia de que se lembrasse estar relacionada com o conteúdo da entrada. Em relação ao Francisco, também foi explícita a existência de processos de organização (Pugalee,

2004; Pirie, 1987) como a identificação explícita das diferentes maneiras de resolver a mesma tarefa (e.g. 1ª entrada), ou, dentro de uma linha de ação já estabelecida, o Francisco dividiu explicitamente a estratégia por passos, ou seja, estabeleceu objetivos parciais, como uma forma de processo de organização (e.g. 2ª entrada). No caso da Francisca, os processos de organização começaram logo na fase de orientação, onde colocou sempre de forma esquemática ou por itens todos os recursos teóricos de que dispunha sobre o tema da entrada, de forma a terem um fio condutor.

Segundo NCTM (2000/07), um aluno ao avaliar a validade das justificações ou das explicações, está a desenvolver a confiança nas suas próprias capacidades de raciocínio. O processo de justificação (Mason, Burton & Stacey,1982; Burton, 1984; Pirie,1987; Holding, 1991; Pugalee, 2004) foi observado nos três casos por ser uma regra explícita de realização do portefólio. Foi notório na Francisca, ao longo da fase de execução, uma monitorização do seu progresso e de mudanças de decisão. A acompanhar esta monitoração foi possível observar uma evolução nos processos de justificação que foram melhorando e tornando-se cada vez mais precisos e explícitos. Com o Francisco, houve três entradas que foram escolhidas acima de tudo com o objetivo de que, ao colocar por escrito as justificações da passagem de um passo para o outro ou o surgimento de determinados cálculos, a professora corroborasse/validasse os seus raciocínios, de modo a obter a certeza de que o significado destes é o mesmo para professor e aluno. As suas justificações escritas, por vezes, não surgiram aquando do desenvolvimento da tarefa pois, por exemplo, numa entrada, o Francisco pretendeu que a professora, em primeiro lugar, assentisse os cálculos. Noutra entrada, foi ao contrário: o Francisco em primeiro lugar, avançou com ideias e só prosseguiu com os cálculos depois da validação por parte da professora, dessas ideias. Noutra entrada, o Francisco usou, numa 1ª versão, o seu pensamento intuitivo como justificação para um processo. Apesar desse pensamento ter sido útil para despoletar a resolução, foi transformado em justificação matemática na versão seguinte.

A Francisca assumiu na primeira entrevista que não tinha por hábito rever o que fazia. No entanto, quando elaborou o portefólio reviu sempre aquilo que fez não só na versão final, como também de uma versão para outra. Em qualquer versão, a entrega foi acompanhada de um ponto da situação que a aluna elaborou num processo de verificação (Pugalee, 2004), denotando uma avaliação das decisões e dos resultados que obteve e de uma perspetivação do que lhe faltava para chegar à resposta. Este processo

enquadra-se na terceira fase da autorregulação (Zimmerman, 2000) pois, de facto, no caso da Francisca, não assentou só na constatação de discrepâncias entre o idealizado e o atingido, mas também na análise do que foi a sua própria ação. Processos de verificação dos resultados obtidos tiveram de ser "lembrados" ao Francisco pois, apesar de o aluno constatar não ter chegado aos resultados pretendidos (finais ou parciais), aguardava *feedback* da professora para correção numa versão seguinte, ao invés de voltar atrás e autonomamente procurar e corrigir o erro. Assim, no caso do Francisco, a verificação também era feita mas, tendencialmente, ficava-se pela constatação se este resultado coincidia, ou não com o esperado, nomeadamente, com o que estava nas soluções.

O processo de especialização (Mason, Burton & Stacey, 1982; Pirie, 1987; Burton, 1984; Holding, 1991) onde incluímos os processos de interpretação (Dias, 2005) que têm como objetivo a compreensão da situação e a clarificação de ideias, que permitiu aos alunos que se iniciassem na tarefa, foram usados pela Francisca de forma intencionalmente formal (ou pelo menos sempre com esse intuito, por parte da aluna). Na Lara, houve situações em que, apesar da estratégia selecionada e utilizada ser a correta, foi aplicada a dados falsos provenientes de processos de interpretação insuficientes, como a leitura/releitura e análise do enunciado. No entanto, se aplicada aos dados corretos, teria produzido as respostas esperadas. O Francisco, de uma forma geral, não se apresentou dificuldades relativamente aos enunciados, verificando-se que estes não lhe ofereceram problemas de interpretação.

Aos processos de interpretação, estão associados processos de tradução (Dias, 2005). No trabalho dos três alunos foi possível identificar processos de tradução uma vez que tanto conteúdos como procedimentos foram, de uma forma geral, escritos por palavras próprias, inclusivamente em diálogos internalizados (Oliveira, 1993). A Francisca foi a que apresentou mais frequentemente e com bastante regularidade processos de tradução (Dias, 2005) com a elaboração e rescrição por palavras próprias de conceitos e procedimentos. O Francisco, ao contrário da Francisca, não se prendeu tanto com avanços e recuos ao nível de processos de tradução do enunciado (releitura, rescrição por outras palavras). Em cada entrada, numa fase inicial, a Lara, com a tendência em se precipitar numa resolução, revelou relutância em usar processos de tradução.

De fato, algumas das estratégias levadas a cabo pela Lara foram infrutíferas, devido essencialmente a uma insuficiência nos processos de interpretação e de tradução,

associada à tendência que a Lara manifestou em se precipitar por um caminho sem automonitorização até que se produzisse um resultado final, naturalmente incorreto. Assim, foi observável em várias versões o refazimento total de alíneas ao invés de uma nova versão se apoiar em algo já conseguido na versão anterior, por um processo de aprofundar (Dias, 2005). Tal só foi observável na Lara, geralmente, em versões finais. Já a Francisca, de uma versão para a outra, foi uma aluna que deixou sempre registado o avanço conseguido numa versão nessa mesma versão e, num processo de aprofundar, é que acrescentou a versão seguinte. No Francisco, o processo de aprofundar foi mais nítido nas 2ª e 4ª entradas. A primeira situação prendeu-se com a reflexão no sentido de aprofundar as justificações de forma a que fossem mais correlacionadas com o contexto da situação. Na segunda situação foi desenvolvida mais no aprofundar de definições relacionadas com a função composta.

Foi no refazer de algumas das produções escritas que se verificou um ziguezaguear (Dias, 2005) que lhes permitiu interiorizar mais aspetos envolvidos em cada escolha. Na Lara foi especialmente notória as suas tentativas, umas vezes conseguidas, outras vezes não, de processos de interiorização (Dias, 2005), onde se deu lugar à apropriação do discurso de *feedback* dado pela professora através de rescrições que visavam dar significado coerente ao discurso escrito que acompanhava a resolução da tarefa. A Francisca foi a que mais se debruçou sobre o significado de conceitos e resultados num processo de interiorização, embora de forma diferente da Lara e do Francisco, pois manifestou esse processo frequentemente de forma autónoma. Os processos de interiorização foram mais nítidas no Francisco aquando da rescrição, de uma versão para a outra, das ideias de forma mais rigorosa. De qualquer maneira, houve alturas em que o Francisco necessitou efetivamente de apoio para conseguir interiorizar com compreensão os conceitos e processos inerentes ao desenvolvimento das entradas. Tal apoio foi dado através do aperfeiçoamento da parte escrita, associado ao questionamento do que havia produzido.

Na entrada propriamente dita, a Francisca, num processo de ancorar (Dias, 2005), foi buscar conteúdos e procedimentos explanados na sua abordagem preliminar, que considerou úteis na seleção e execução de uma estratégia (Pirie, 1987; Dias, 2005). O Francisco e Lara, não dispondo desse resumo, selecionaram estratégias a partir da sua intuição, do caderno diário, apontamentos e do manual.

Também foram valorizados aspetos intuitivos da Matemática (Cuoco, 2003; Silva *et al*. 1999; Holding, 1991) pois os alunos foram encorajados a desenvolver o hábito de aplicar a(s) estratégia(s) que tinham em mente, embora procurando sempre que fosse de forma fundamentada. Foram incentivados a arriscar e a avaliar, não só os resultados, mas também a razão de ser destes. Tratou-se de um apoio na intuição fundamentada, ou seja, no *porquê*, mais do que no *o quê*.

Sempre que as entradas recaíram em tarefas nas quais as dificuldades eram apenas sentidas numa parte destas (por exemplo, numa alínea de um exercício), a Francisca e a Lara optaram por desenvolver toda a tarefa. Esta opção revelou-se em todas as situações útil no que respeita à correção e melhoramento ao nível dos processos de comunicação (Frobisher, 1994), tanto na completude como na correção de assuntos que de outra forma passariam impercetíveis, tanto para as alunas, como para a professora, e que se prenderam com processos relacionados com raciocínios matemáticos, com a compreensão de conceitos e com a relação entre os dois. De fato, os processos de registo (Frobisher, 1994) a que o portefólio obrigou, permitiu à professora e aos alunos aperceberem-se de aspetos que, pela forma como inicialmente foram escritos, revelaram que conceitos e/ou raciocínios e a relação entre estes não estavam devidamente compreendidos nem bem estruturados ou relacionados. Nos processos de registo, Frobisher (1994) e Pirie (1987) incluem o desenho e o fazer representações gráficas. A Francisca e o Francisco usaram desenhos construídas de raiz; a Lara usou imagens já existentes, que modificou de forma a exemplificar o que estava a pensar.

Qualquer um destes processos, por mais simples que possam, à partida, parecer, só são efetivamente aprendidos e reutilizáveis pelo aluno sem ajuda externa, se forem alvo de um treino explícito, regular e dirigido para uma tomada de consciência sobre a atividade desenvolvida (Mason, Burton & Stacey, 1982; Burton, 1984; Schoenfeld, 1992; Frobisher, 1994). Além disso, é necessário que esta instrução explícita seja feita durante um período suficientemente alargado, uma vez que acarreta consigo mudanças ao nível das crenças e dos hábitos do aluno, que podem fazer parte da sua cultura de escola e, portanto, estarem bastante enraizados (Bandura, 1986).

Pelo exposto, é possível afirmar que o portefólio constituiu uma forma de proporcionar a cada aluno, e de forma individualizada, o treino explícito e regular no tempo de diversos processos, de entrada para entrada, de versão para versão, com a releitura, o refazimento, a reorganização das ideias e o aprimoramento da consciência sobre o

próprio trabalho desenvolvido. Note-se que até nas situações em que o aluno pensava que não tinha dúvidas, houve lugar a correções e/ou aperfeiçoamento da comunicação escrita dos raciocínios e até mesmo dos conteúdos. A escrita foi considerada por Vygotsky (1934) como requerendo um discurso interior e uma estruturação intencional e deliberada de uma rede de significados, além de ser um suporte da metacognição, como defende Pugalee (2004). Para este autor, a escrita é vista como uma via para a reflexão e a tomada consciência dos processos matemáticos e para a autorregulação, essenciais para que o indivíduo se torne autónomo e saiba trabalhar estrategicamente.

Recursos usados na elaboração do portefólio

O nível de desenvolvimento potencial é a capacidade de desempenhar tarefas com a ajuda de alguém mais capaz, que pode dar instruções, fornecer pistas ou dar assistência durante a atividade (Vygotsky, 1978). Foi aqui que entrou o trabalho da professora como recurso. No portefólio, a professora confrontou com a ZDP (Meira & Lerman, 2001; Meira, 2004; Moll, 1996; Vygotsky, 1978; Oliveira, 1993) de cada um dos alunos por meio de tarefas de atividade escolar, nomeadamente as subjacentes ao portefólio, a fim de os guiar e permitir progressos em direção ao nível da aprendizagem formal.

No desenvolvimento do portefólio, o trabalho foi centrado na atividade do aluno e desenvolvido nele uma atitude ativa e consciente na sua própria aprendizagem. Assim, o papel da professora e do aluno assumiram características próprias: a professora deixou de ser o agente centralizador do processo de ensino e aprendizagem e passou a ser uma conselheira e um coordenadora global; um questionadora e uma ouvinte (Holding, 1991; Frobisher, 1994). De fato, a maioria das decisões foram transferidas para os alunos. Foram os alunos que escolheram as suas entradas e a quantidade de tarefas nelas a incluir. Por exemplo, a Lara e Francisca optaram por escolher mais do que um exercício numa mesma entrada; e foram os alunos que decidiram arriscar uma estratégia ou esperar pelo *feedback* da professora para elaborar a versão seguinte (no Francisco foi o que mais teve essa postura). Os resultados destas decisões foram recebidos pela professora, independentemente do seu grau de correção, concordância ou viabilidade, cabendo a ela apenas dar resposta às necessidades individuais e particularidades de cada

um dos alunos na consecução dos objetivos do portefólio, ou seja, da aprendizagem autorregulada (Holding, 1991).

Este apoio foi dado essencialmente através de *feedback* escrito. Foi através dele que se deu lugar a uma negociação de significados matemáticos e ao estabelecimento de ZDPs com vista à construção de novo conhecimento (Meira & Lerman, 2001; Healy & Fernandes, 2004).

Inicialmente, o *feedback* escrito foi usado relativamente à própria conceptualização do portefólio, para esclarecer e ajudar na sua implementação efetiva e na forma como tinha sido conceptualizado pela professora. À parte disso, o *feedback* foi dado, de uma forma geral, no sentido de ajudar os alunos a: a) refletir melhor sobre o significado de algumas expressões usadas pelos próprios e a dar continuidade a passos já conquistados (apoio aos processos de interiorizar, ziguezaguear ou aprofundar); b) encontrar estratégias adequadas (apoio a processo de seleção de uma estratégia); c) validar os resultados, parciais ou finais, obtidos pelo aluno (apoio aos processos de orientação e de organização); d) favorecer o surgimento de *mal-entendimentos produtivos*, através dos próprios raciocínios do aluno, por exemplo, com o confronto e/ou interpretação dos resultados obtidos (apoio ao processo de interiorização ou de raciocínio); e) aperfeiçoar e corrigir a escrita, não só matemática, mas também da língua portuguesa o que se revelou importante na restruturação do pensamento matemático e na compreensão dos problemas e dos respetivos resultados parciais ou finais (apoio aos processos de tradução, de interiorização, de raciocínio).

Também foi dado, com particular enfâse ao Francisco e à Lara, *feedback* na direção do autoquestionamento e reflexão sobre os resultados parciais que foram sendo obtidos, e também sobre a estruturação das ideias de forma a que estas se sucedessem com lógica, uma vez que estes alunos revelaram tendência em procurar na professora a automonitorização que era esperado neles desenvolver. Também foram utilizados guias de interrogação metacognitiva para que o aluno, ao formulá-las tomasse consciência do que fez e para que o fez, para funcionar como um *feedback* interno, que lhe permitisse autoavaliar a sua aprendizagem e potenciar mudanças no sentido da definição e/ou prossecução de objetivos.

Também é de salientar o recurso a reforços positivos e/ou de concordância com a avaliação feita pelo aluno. Grangeat (coord. 1999) refere a existência de investigações que mostram que as dificuldades metacognitivas dos alunos também devem ser

compreendidas em relação a um défice de ordem afetiva, o da motivação. Em particular, alunos com menor aproveitamento escolar, são alunos que não têm um bom "conceito de si", que não se conhecem e não confiam neles próprios, pelo que desistem depressa, ficando dependentes de uma condução exterior. Apesar da Lara e do Francisco serem alunos com aproveitamento inferior ao da Francisca, tanto eles como ela, obtiveram *feedback* escrito no sentido da valorização do que já haviam conseguido e na expressão de confiança da professora de que conseguiam seguir em frente, não só na aprendizagem da Matemática como também em relação a aspetos de "funcionalidade do portefólio", como sejam o cumprimento de prazos ou a conclusão da entrada nas últimas versões desta. Esta forma de *feedback* foi necessária porque o portefólio imprimiu uma forma de estudar regular e mais frequente, que não era hábito dos alunos até à data (todos tinham referido nas entrevistas que o estudo era mais próximo da altura das avaliações sumativas). O reconhecimento, os elogios e encorajamento foram dados com o intuito de transmitir ao aluno um sentido prazeroso de competência efetiva e domínio sobre o seu ambiente (Moll, 1996).

Foi frequentemente observável o recurso a diálogos internos, aspeto cuja existência já vinha sendo documentada por Kosko e Wilkins (2010) e Pugalee (2004) a propósito da comunicação escrita. Esta forma de diálogo "solitário" com sujeitos internalizados ou imaginários, evidenciou-se como promotora da compreensão matemática, pois foi através dela que a Francisca, a Lara e o Francisco foram clarificando e reorganizando as suas ideias e monitorizando a sua atividade. No seu diálogo interno, o Francisco chegou mesmo a dirigir-se a uma turma, usando tempos verbais "no plural".

Os campos semióticos constituídos na linguagem e no discurso (ZDP) surgidos da produção discursiva escrita em contextos dialogais onde se incluem os diálogos propriamente ditos com a professora ou os diálogos internalizados (Meira, 2004) acima tratados, foi outro dos principais recursos usados pelos alunos, explícitos no portefólio. A escrita requereu uma estruturação deliberada de uma teia de significados (Vygotsky, 1934), funcionou como suporte da metacognição (Pugalee, 2004), no sentido de que incluiu ações tais como a previsão, o planeamento, a revisão, a seleção, a classificação e a verificação. A escrita constituiu uma via para a reflexão, promovendo a consciência sobre os processos matemáticos e a autorregulação, permitindo que os alunos fossem bem sucedidos na superação das suas dificuldades e contribuindo para a sua capacidade de identificar e trabalhar estrategicamente.

Os registos escritos foram incentivados com o portefólio até se tornarem uma rotina. Considero que o pensamento transformado em linguagem escrita permitiu ao aluno falar consigo próprio e com a professor de forma a: a) compreender melhor a natureza das situações problemáticas e a resolução destas; b) avaliar melhor a informação necessária; c) definir melhor os objetivos que se pretendiam atingir; d) fazer um uso mais eficiente das estratégias de que o aluno dispunha; e) reforçar a atenção durante a realização da atividade proposta; f) favorecer uma orientação positiva durante a aprendizagem. g) avaliar melhor os processos adotados na realização das entradas; h) ajudar na avaliação final, não só na constatação de que o fim foi ou não atingido, mas também como o foi.

Em suma, a professora, com o *feedback* escrito dado a cada uma das produções do aluno, foi um recurso importante que os alunos utilizaram como suporte da sua atividade cognitiva e metacognitiva. Por vezes foi necessário a professora trabalhar questões de cariz motivacional através do recurso a reforços positivos e/ou de concordância, uma vez que, como defende (Moll, 1996; Silva *et al*., 2004), uma das grandes dificuldades do ensino é conseguir que os alunos se mantenham numa atividade depois desta ter sido iniciada.

A escrita, associada a diálogos com a professora e a diálogos internalizados, foi o principal recurso usado pelos alunos. Através da comunicação escrita, houve lugar à negociação e apropriação de significados e às relações entre eles; à reflexão consciente e intencional, que deu suporte a comportamentos metacognitivos e, de forma mais abrangente, a comportamentos autorreguladores.

Vantagens e limitações do portefólio

O portefólio, ao se focar mais nos processos do que nos conteúdos, situou-se naturalmente mais ao nível do pensamento matemático do que das ferramentas matemáticas tais como símbolos, as regras lógicas ou os cálculos (Tanner & Jones, 1997). De fato, apesar de continuar a ser legitimada a preocupação em ensinar a manejar tais ferramentas, deu-se um relevo muito maior e uma contextualização dessas ferramentas ao nível das ideias matemáticas, em que fosse claramente reconhecida a vantagem do conhecimento destas. Desta forma, o portefólio tornou-se um apoio mais

no plano metacognitivo, do que no âmbito dos conteúdos, o que, segundo Grangeat (coord. 1999) é o tipo de apoio que pode, de fato, combater o insucesso escolar.

Autores como Cuoco (2003), Pólya (1945/1977) e Schoenfeld (1992) afirmaram que o raciocínio matemático só se aprende através da explicitação objetiva dos *hábitos da mente*, ou seja, incidindo de forma objetiva sobre aspetos metacognitivos do pensamento matemático aquando da resolução de problemas. Ora, através da escrita, tanto por parte do aluno, como do professor no seu *feedback*, ao longo das sucessivas entradas, foram não só explicitados com pormenor tais aspetos, como também ficou o registo da sua evolução.

Os registos escritos relativos ao conhecimento sobre os processos cognitivos adotados, ou seja, registos sobre o que se pensou e o porquê desse pensamento, sobre o que se pôde fazer e o porquê dessa ação, sobre as dificuldades identificadas e as formas pensadas de as ultrapassar; apesar de necessitarem de tempo, trouxeram vantagens ao nível da estruturação ou reestruturação das ideias. De fato, a escrita a isso obriga, e obriga também ao aumento da reflexão sobre a atividade desenvolvida (Pugalee, 2004). Da mesma forma que Polya (1945/1977), assumo que perante a mesma questão, frequentemente repetida, dificilmente o aluno deixará de a notar e será induzido a formular, ele próprio, essa questão em situações semelhantes; também no portefólio, a exigência constante de reflexão sobre a sua própria ação também poderá fazer-se notar pelo aluno e ser usada em outros contextos. O Francisco foi um dos muitos alunos que corroborou esta tese. Considera-se que o portefólio desempenhou, de fato, um papel importante para o desenvolvimento destes hábitos de reflexão, imprescindíveis numa resolução eficaz de qualquer problema.

Hábitos de reflexão estão naturalmente associados a tomadas de consciência. Como salientam Mason, Burton & Stacy (1982), há que ter consciência dos processos envolvidos no pensamento matemático para que este não seja fortuito. Com o portefólio prestou-se auxílio ao controlo da atividade durante a realização da tarefa, favorecendo as tomadas de consciência úteis que lhe permitam o acesso a uma informação com *feedback* sobre o que o que o aluno fez em relação ao fim visado.

Este controlo da atividade, ou seja, esta atenção do indivíduo sobre a própria ação no momento em que ela ocorre, significa automonitorização (Schunk, 1996; Silva *et al*., 2004). Foram, desenvolvidos processos de autorregulação, através da automonitorização que ajudassem o aluno a regular melhor os processos adequados para planear, estar

atento, rever e corrigir, e para apreciar os efeitos daqueles processos no melhoramento da realização das tarefas escolares.

A crescente automonitorização permitiu também, por um lado, que os alunos ficassem menos dependentes da ajuda exterior, ou seja, fossem mais autónomos nas suas aprendizagens. Por exemplo, ao avaliarem, de uma versão para a outra, a validade das justificações ou explicações apresentadas, os alunos desenvolvem confiança nas suas próprias capacidades de raciocínio e questionam os seus próprios argumentos matemáticos (NCTM, 2000/07). Por outro lado, os alunos passaram a atribuir mais sentido àquilo que faziam, o que proporcionou uma melhor integração da sua atividade na memória a longo prazo, tornando as suas aprendizagens mais facilmente reutilizáveis. Assim, a crescente automonitorização tornou os alunos mais "autorregulados" e "transferidores" (Grangeat coord., 1999). Este fato, pode ter dado início a alterações na concepção que o aluno tem de si próprio, de deixar de se ver como um agente passivo e vítima das contingências do meio, para um agente ativo e empreendedor de mudanças (Silva *et al*., 2004).

Uma vez que foi transferido para o aluno o poder de escolher o conteúdo das entradas, foi estimulada a análise prévia sobre a natureza das tarefas, assim como a criação ou desenvolvimento de processos e estratégias mais adequados à sua execução (Flavell, 1979). Esta atividade integrou ações metacognitivas como a reflexão pessoal sobre as exigências da tarefa, como por exemplo, como abordar um enunciado em matemática e compreender aquilo que é lido; ou saber até que ponto se tem conhecimentos sobre o que a tarefa aborda (Yussen, 1985). A seleção e o conhecimento sobre a tarefa, a consciência sobre as exigências desta, a retrospetiva do que foi ensinado e aprendido, a utilidade e possíveis aplicações da tarefa constituiu uma forma de criação de metas realistas, ou a sua subdivisão em metas mais concretas e percecionadas pelo aluno como alcançáveis.

Ao permitir que o aluno partisse daquilo que conhece para compreender e se apropriar da situação, ao ajudá-lo a relacionar a tarefa proposta com outros conhecimentos e com os conhecimentos que viria a adquirir e, sobretudo, ao fazer-lhe tomar consciência das suas competências e do seu papel no desempenho realizado, favoreceu a atribuição intrínseca, o autoconceito e a motivação. Assim, foi favorecido o estabelecimento de atribuições causais internas, estáveis e específicas como a inteligência, o esforço ou a persistência, ao invés de atribuições externas como a sorte ,o favorecimento ou o tempo

limitado (Weiner, 1985). Na presença de atribuição interna, os alunos atribuem a si próprios os seus fracassos ou os seus sucessos, o que viabiliza a investigação pessoal de estratégias e a perseverança na procura de soluções (Grangeat coord., 1999). O sistema pessoal de crenças é então afetado de forma positiva, o que influencia o grau com que o próprio se considera capaz de conduzir a ação (Zimmerman, 2000).

O *portefólio reflexivo de matemática* contribuiu para o desenvolvimento de hábitos de trabalho e persistência na procura de soluções e no esclarecimento de dúvidas. Por exemplo a Francisca, na 1ª entrevista afirmou que estudava para a disciplina em média quatro vezes por mês, de forma não igualmente espaçada dependendo da data marcada para o teste. A Lara alegou na primeira entrevista que praticamente não estudava matemática, centrando o seu estudo na véspera dos testes e que facilmente se desinteressava pois não conseguia resultados à primeira. O portefólio foi uma forma de ajudar o aluno a ser capaz de continuar a esforçar-se e a persistir no desempenho de uma dada tarefa, passando pelo professor incentivar um trabalho em equipa, onde se abriu espaços de troca de ideias, de partilha e discussão de estratégias estimulando o aluno a ir mais além da ZDP (Vygotsky, 1978), e onde o aluno foi orientado para uma reflexão pessoal.

Vygotsky, com o desenvolvimento do conceito de ZDP, anuncia que um aluno aprende sendo levado a fazer coisas que não sabe fazer sozinho, mas que pode fazer quando apoiado eficazmente. No entanto, a ZDP tem um limite superior: aquele para além do qual o indivíduo não pode resolver o problema, nem mesmo quando ajudado a resolvê-lo. Este é um problema frequente nas aulas (Grangeat coord., 1999). Os apoios são muitas vezes orientados para além da ZDP dos alunos com dificuldades. Estes não podem tirar proveito das aprendizagens. Na ausência de uma pedagogia diferenciada, o desvio em relação aos outros vai-se pronunciando, aumentando o fracasso. O portefólio, para além de assegurar tarefas desafiantes para cada aluno individualmente, foi uma das formas de fornecer esse apoio individualizado. Este fato que foi valorizado nos três estudos de caso e até mesmo pela Francisca, que dos três alunos, foi a que sempre apresentou um maior aproveitamento escolar.

Em relação à avaliação, é comum aos três alunos considerarem que não existe uma relação direta entre o que sabem e a notas que têm nos testes por razões que se prendem com a limitação do tempo e ausência de oportunidade de reformulação com "subida de nota". No portefólio, estes alunos perceberam que, ao contrário da avaliação sumativa, o

seu trabalho e esforço tiveram visibilidade e foram reconhecidos. Além disso, tratou-se de uma forma de avaliação que não os penalizou pelo erro, mas que o aproveitou para ensinar e aprender. Os erros foram utilizados de forma positiva: o aluno foi encaminhado a detetá-los e a analisá-los de forma a permitir que ele próprio tomasse primeiro consciência dos procedimentos e conhecimentos que tinha utilizado espontaneamente e que o levaram ao erro para, de seguida, permitir que construísse estratégias de remediação e/ou reorientação.

A correção e a classificação dos testes e de quaisquer outras tarefas avaliativas sumativas, que tanto peso têm tido na classificação final dos alunos, dão, em geral, poucas ou nenhumas orientações aos alunos para melhorarem. Apenas, como salientou o Francisco numa das entrevistas, servem para dizer o que já se conseguiu e o que falta conseguir, mas não *como* o conseguir. Ora, como defende Grangeat (coord. 1999), para aprender, é preciso aprender como fazer para aprender. Não basta saber e fazer, mas também é preciso saber como se faz para saber. Além disso, como salienta Fernandes (2006), uma avaliação que se limita a informar da situação pontual do aluno na aprendizagem, pode constituir um reforço e perpetuação das baixas expetativas e do baixo nível das aprendizagens para os alunos com menor sucesso escolar. O portefólio tem então como vantagem contrariar esse ciclo vicioso de declínio do saber e do autoconceito do aluno pelas razões acima expostas.

Todos reconheceram que a implementação e realização do portefólio foi trabalhoso e requereu um tempo acrescido, mas também concordaram que se trata de um trabalho que faz parte do processo de aprender. É uma forma de trabalho a que os alunos não estão habituados, mas é uma questão de modificar hábitos e formas de pensar perante o estudo.

A concluir

Para Write (2004), é natural que na escola seja necessário que os alunos aprendam e apliquem teorias, mas também é necessário que para estes a escola tenha relevância para a sua vida e carreira futura. Ora, um dos processos-chave para atingir esse objetivo é ativar os alunos como donos da sua própria aprendizagem (Black & Wiliam, 2009). Ativar os estudantes como donos das suas próprias aprendizagens traz metacognição,

motivação, rendimento, atribuição do sucesso ou fracasso ao seu próprio esforço, bem como autoavaliação (Black & Wiliam, 2009). Neste sentido, nesta experiência, o foco principal do portefólio foi apoiar o aluno na autorregulação da sua própria aprendizagem e o seu ser emocional. Para isso, colocou-se em primeiro plano a prática reflexiva dos intervenientes (professor e aluno) num processo de interação contínuo e dinâmico, em que assumi essencialmente o papel de coordenadora, de mediadora e de instigadora da aprendizagem. A diferenciação pedagógica, que tem como ponto de partida um olhar individualizado sobre cada aluno, não implica ensinar de forma diferente cada um dos alunos (Santos Org., 2010). O portefólio foi uma forma eficaz de exercer uma diferenciação pedagógica, capaz de proporcionar uma aprendizagem com significado para cada aluno, através de desafios intelectuais reais para este.

Muitos dos processos matemáticos e, de forma mais abrangente, os processos metacognitivos referidos na revisão teórica, foram trabalhados de forma explícita e continuada ao longo do portefólio. A explicitação objetiva desses processos é, segundo autores como Cuoco (2003), Pólya (1945/1977) ou Schoenfeld (1992) a única maneira de mostrar e ensinar um aluno a pensar matematicamente. O tratamento continuado destes processos durante um considerável período de tempo, é também, segundo estes autores, uma condição necessária para uma mudança de hábitos instalados, muitas vezes desadequados ou até mesmo impeditivos de uma aprendizagem com compreensão e suscetível de ser transferida a outras situações.

Processos mais intimamente relacionados com tarefas de investigação matemática como por exemplo, a formulação de conjeturas, não surgiram nos portefólios devido à natureza das escolhas feitas pelos alunos. As investigações feitas nas aulas foram exploradas até o surgimento de relatórios finais completos e compreensíveis pelo que provavelmente para o aluno não se justificava a introdução destas no portefólio. Claro que foi dada a opção de o aluno procurar tarefas abertas como sejam as investigações matemáticas, para o portefólio, mas não se verificou nenhuma escolha nesse sentido. Esse é um aspeto a considerar na minha conceptualização de futuros portefólios.

Procurou-se que os processos matemáticos fossem aplicados, por cada aluno, com compreensão e consciência da sua aplicação, através do registo escrito, com palavras do próprio aluno. Desta forma, a escrita foi encorajada e constituiu uma valiosa forma de estruturar de forma visível as ideias, de estabelecer objetivos claros gerais ou parciais, de identificar pontes nítidas entre diferentes saberes; e de refletir sobre o trabalho

realizado. Segundo o NCTM (2000/07) é através da escrita que se consolida e reflete sobre o que se sabe e se desenvolve a confiança sobre as próprias capacidades de raciocínio.

A principal prioridade do portefólio foi a sua função formativa, contínua e sistemática, integrada, portanto, no processo de ensino e aprendizagem. Este instrumento constituiu um apoio efetivo, não só ao processo de regulação interativa professor-aluno, mas também, aos processos internos de autorregulação, aluno consigo próprio, em diálogos internalizados. Embora o estudo tenha decorrido num espaço de tempo relativamente curto, dois períodos de um ano letivo, foi possível encontrar evidências de que os alunos foram estimulados a perceber o papel das estratégias cognitivas e, paralelamente, a saber quando, como e onde usá-las, para que pudessem tirar o maior proveito da sua aplicação. Da mesma forma, foram encorajados a refletir sobre os objetivos das tarefas propostas, sobre o planeamento das estratégias a aplicar; a monitorizar a aplicação das estratégias selecionadas; a verificar os procedimentos adotados e os resultados conseguidos; a identificar dificuldades e a saber ultrapassá-las e a avaliar a qualidade das respostas obtidas. Tudo isto sem um acréscimo exagerado ou inexequível de trabalho, nem para o professor, nem para o aluno. Aliás, para o aluno, a forma de trabalhar no portefólio pode vir ser a sua própria forma de estudar e trabalhar, uma vez que a sua individualidade foi respeitada e gradualmente orientada para uma crescente autonomia no ato de aprender e para uma crescente aptidão para perceber, transformar e transferir as aprendizagens para outros contextos de vida, em sociedade.

A par destas considerações, levantaram-se, no entanto, algumas questões que podem constituir uma base para futuras investigações no âmbito da avaliação reguladora ao serviço da aprendizagem, com a utilização do *portefólio reflexivo de matemática*.

Primeira questão: qual a sustentabilidade das aprendizagens realizadas no contexto da realização de um portefólio? As competências adquiridas através do portefólio cessam ao mesmo tempo que este? Com base nesta interrogação, proponho estudos que apurem os resultados deste tipo de intervenção, não só a curto, mas também a médio e longo prazo.

Segunda questão: como evolui a independência do aluno face ao portefólio com o desenvolvimento da sua capacidade de autorregulação? À medida que o aluno vai vivendo cada vez mais experiências de autorregulação protagonizadas pela elaboração do seu portefólio, passa a exigir menos assistência ao seu desempenho na medida em

que aumenta a sua capacidade de autorregulação, ou tal relação de proporcionalidade inversa não se verifica? Proponho estudos sobre a aplicação do portefólio durante um período mais alargado no tempo, por exemplo, um ciclo de escolaridade, para verificar se existe um momento (naturalmente diferente de aluno para aluno) em que o portefólio deixe de ser necessário, ou seja, averiguar se gradualmente o aluno passa, ele próprio a conduzir a autorregulação da sua aprendizagem sem necessidade de realizar um portefólio.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P. (Coord.) (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico*. *Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Abrantes, P.; Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Abreu, G. (2000). Aprendizagem da Matemática e construção de identidades: uma perspectiva psicológica sócio-cultural. In J.F. Matos & M. Santos (Eds). *Actas do XI Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.

Abruscato, J. (1993). Early results and tentative implications from the Vermont Portfolio Project. *Phi Delta Kappan*, 74(6), 474-477.

Allal, L. (2002). The Assessment of Learning Dispositions in the Classroom. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, *vol*. 9 Issue 1, pp. 55-58. Acedido em *10 de novembro de 2010, de* EBESCOHost Academic Search Elite database.

Almeida, A. (2008). *Avaliação em matemática escolar*. *Implementando portfolios de aprendizagem dos alunos: contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Minho.

Almeida, A., Almeida, C., & Morais, C. (2004). Implementação de portfolios na aprendizagem de Matemática: um estudo com alunos de artes no 10.º ano. In C. Alves, C. Morais, C. Martins, M. Pires & P. Barros (Orgs), *Actas do XV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, pp. 193 – 211. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática.

Almeida, J., & Vieira, F. (2006). Portefólios de aprendizagem – da sua leitura à construção de um instrumento de avaliação. *In* Oliveira, L.R. & Alves, M.P. (Orgs), *Actas do 1º Encontro sobre e-Portefólio / Aprendizagem Formal e Informal*. Minho: CRM.

Alves, A. (2006a). "Portefólio em suporte papel: uma experiência com alunos do 8º ano". In Oliveira, L. Raquel & Alves, M. Palmira (Orgs.), *Actas do 1º Encontro*

sobre e-Portefólio /Aprendizagem Formal e Informal (pp. 193-199). Braga: Universidade do Minho.

Alves, M. (2006b). Portefolios – utensílios de avaliação e de desenvolvimento de competências. *In* Oliveira, L.R.& Alves, M.P. (Orgs), *Actas do 1º Encontro sobre e-Portefólio / Aprendizagem Formal e Informal* (pp. 15-25). Braga: Universidade do Minho.

Alves, A., & Gomes, M. (2007). Como organizar portefólios na sala de aula de Matemática. *In Actas do Congresso ProfMat -07*. Lisboa: APM. Acedido em 15 de Outubro de 2011, de http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/7665/1/

Comunica1-%20ana_paula_M_Joao%20%282%29.pdf

Asbahr, F. (2005). A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade. *Revista brasileira de educação*, 29, 108-118.

Archbald, D. (1991). Authentic assessment: Principles, practices, and issues. *School Psychology Quarterly*, 6(4), 279-293.

APM (1988). *Renovação do currículo de matemática*. Lisboa:APM.

APM (1998). *Matemática 2001 - Recomendações para o ensino e a aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. Acedido em 3 de Dezembro de 2010, de http://www.apm.pt/apm/2001/2001_d.htm

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action*. *A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Bell, J. (1997). *Como realizar um projecto de investigação* (Coleção Trajectos). Lisboa: Ed. Gradiva.

Bernardes, C., & Miranda, F. (2003). *Portefólio: uma escola de competências*. Porto: Porto Editora.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 5(1), 7-74.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation, and Accountability*, 21, 5-31. Acedido em 05 de junho de 2011, de EBESCOHost Academic Search Elite database.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2007). *Qualitative Research for Education: An introduction to Theories and Methods (5th ed.)*. New York: Pearson International Edition.

Brown, A. (1980). Metacognitive development and reading. In R. Spiro, B. Bruce & W. Brewer (Eds.), *Theoretical issues in reading comprehension*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Brown, S. (2008). *Reconstruir a Matemática escolar*. *Problemas com problemas e o mundo real*. Mangualde: Edições Pedago. LDA.

Burns, R. (2000). *Introduction to research methods*. London: SAGE Publications.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15(1),* 35-49.

Businskas, A. (2007). Conversations about connections: a secondary mathematics teacher considers quadratic functions and equations. In Conference Papers - Psychology of Mathematics & Education of North America, Annual Meeting, pp. 1-47. Acedido em *22 de novembro de 2010, de* EBESCOHost Academic Search Elite database.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 5-24). Lisboa: SPCE.

Bryant, S., & Timmins, A. (2002). Portfolio assessment : instructional guide : using portfolio assessment to enhance student learning. Hong Kong Institute of Education. Acedido a 10 de setembro de 2010, de http://libdr1.ied.edu.hk/pubdata/img00/arch00/link/archive/1/instarh/1921_image.pdf.

Carreira, S. (2005). Ecos de Amsterdão: O ambiente de aprendizagem e o potencial da relação entre a Matemática e as situações do mundo real. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 121-138). Lisboa: APM.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). *Dordrecht: Reidel*.

Cockcroft, W. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO.

Cole, M., & Engeström, Y. (1993). A cultural-historical approach to distributed cognition. In G. Salomon (ed.), *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations* (pp. 1-46). New York: Cambridge University Press,.

Cole, M., & Wertsch, J. (s/ data). Beyond the Individual-Social Antimony in Discussions of Piaget and Vygotsky. Acedido em 21 de Julho de 2011, de http://meduc.fc.ul.pt/file.php?file=%2F181%2Fcolevyg.pdf

Costa, F., Cruz, E., & Ferreira, R. (2006). Tecnologias que podem ajudar a pensar. In Oliveira, L.R. & Alves, M.P. (Orgs), *Atas do 1º Encontro sobre e-Portefólio / Aprendizagem Formal e Informal*. Minho: CRM.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A construtivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. In *Journal for research in mathematics education*, 23 (1), 2-33.

Cooke, B., & Buchholz D. (2005). Mathematical Communication in the Classroom: A Teacher makes a difference. *Early Childhood Education Journal*, 32 (6), pp. 365-369. Acedido em *22 de novembro de 2010, de* EBESCOHost Academic Search Elite database.

Cuoco, A. (2003). Mathematical habits oh mind. In H. Schoen (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: grades 6-12* (pp. 27-37). Reston, VA: NCTM.

Demetriou, A. (2000). Organization and development of self-understanding and self-regulation: Toward a general theory. In M. Bockaerts, P. R. Pintrich & M. Zeidner (eds.), *Handbook of self-regulation*. San Diego, CA: Academic Press.

Dewey, J. (1910/1997). *How we think*. New York: Dover Publications, Inc.

Dias, P. (2005). *Avaliação reguladora no Ensino secundário. Processos utilizados pelos alunos em investigações Matemáticas*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa,

Lisboa.

Dias, C., & Santos, L. (2009) Portefólio reflexivo de Matemática. In *ProfMat 2009*. Lisboa: APM.

Dias, S. (2008). *O papel do feedback escrito na avaliação reguladora do ensino e das aprendizagens estudo de caso com alunos de 8º ano na disciplina de matemática*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Duarte, N. (2002). A Teoria da atividade como uma abordagem para a pesquisa em educação. *Perspectiva*, Florianópolis, 20 (2), 279-301.

Duarte, N., & Eidt, N. (2007). Contribuições da teoria da atividade para o debate sobre a natureza da atividade de ensino escolar. *Psicologia educacional*, São Paulo 24 (1º sem.), 51-72. Acedido em 12 de fevereiro de 2010, de http://www.anped.org.br/reunioes/29ra/trabalhos/posteres/GT20-2502--Int.pdf

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding*. *An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit. Acedido a 10 de Agosto de 2011, de http://lchc.ucsd.edu/mca/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm

Engeström, Y.(1999). Expansive visibilization of work: an activity-theoretical perspective. *Computer Supported Cooperative Work, 8*, 63-93.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*. (pp. 119-161). Nova Iorque: MacMillan.

Fernandes, D. (Org.); Neves, A.; Campos, C.; Conceição, J. & Aliaz, V. (1994). Portefólios: para uma avaliação mais autêntica, mais participada e mais reflexiva. In Domingues Fernandes (Coord.), *Pensar avaliação, melhorar aprendizagem*. Lisboa:IIE. Acedido a 18 de Dezembro de 2010, de http://www.dgidc.min-edu.pt/secundario/Documents/portefolios.pdf.

Fernandes, D. (2006). Para uma teoria de avaliação formativa. *Revista Portuguesa de Educação*, 19(2), 21-50.

Fernandes, D. (2008). *Avaliação das aprendizagens: desafios às teorias, práticas e políticas*. Lisboa: Texto Editores.

Fernandes, D. (2009). Avaliação das aprendizagens em Portugal: investigação e teoria da actividade. *Sísifo*/*Revista de Ciências da Educação*, *9*, 87-99.

Fernandes, E. (1997). O trabalho cooperativo num contexto de sala de aula. *Análise Psicológica, 15(4),* 563-572.

Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring. A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 34, 906-911. Acedido a 11 de Agosto de 2012, de EBSCOHost Academic Search Elite database.

Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. In Orton & G. Wain (Eds.), *Issues in Teaching Mathematics* (pp. 150-173). London: Cassel.

Gainsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11 (3), 199-219.

Garcia T., & Pintrich P. (1994). Regulating motivation and cognition in the classroom: the role of self-schemas and self-regulatory strategies. In Schunk, D. H. & Zimmerman, B. J. (Eds.), *Self-regulation of learning and performance: Issues and educational applications*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Gearhart, M. (2009). Assessment portfolios as opportunities for teacher learning. *Educational Assessment,* 14 (1), 1–24.

Goldenberg, P. (1998). Hábitos de pensamento: um princípio organizador para o currículo (I). *Educação e Matemática*, 47, 31-44.

Grangeat, M. (Coord.) (1999). *A metacognição, um apoio ao trabalho dos alunos*. Porto: Porto Editora.

Green, H., & Emerson, A. (2010). Mathematical Reasoning in Service Courses: Why Students Need Mathematical Modeling Problems. *Montana Mathematics Enthusiast*, 7(1), 113-140. Acedido a 03 de maio de 2010, de EBSCOHost Academic Search Elite database.

Guimarães, H. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: um estudo com matemáticos e com professores do ensino básico e secundário*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Guimarães, H. (2005). A resolução de problemas no ensino da Matemática: Alguns passos do seu percurso no discurso curricular em Portugal. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 145-166). Lisboa: APM.

Healy, L., & Fernandes, S. (2004). Diálogos sobre simetria com aprendizagens sem acuidade visual – uma análise Vygotskyana. In *VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*. Acedido em 10 de junho de 2010, de http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/06/CC01425475817.pdf

Holding, J. (1991). *The investigations book*. Cambridge: University Press.

Kilpatrick, J. (1991). Some issues in the assessment of mathematical problem solving. In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 37-44). Berlim: Springer-Verlag.

Klenowski, V. (2002) *Developing Portfolios for Learning and Assessment: Processes and Principles*, London: RoutledgeFalmer.

Kopp, C. (1982). Antecedents of self regulation: a developmental perspective. *Developmental Psychology*, 18(2), 199-214. Acedido em 10 de agosto de 2012 de EBSCOHost Academic Search Elite database.

Kosko, K., & Wilkins, J. (2010). Mathematical Communication and Its Relation to the Frequency of Manipulative Use. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5(2), 79-90. Acedido em 22 de novembro de 2010, de EBSCOHost Academic Search Elite database.

Joenk, I. (s/ data). Uma introdução ao pensamento de Vygotsky. Acedido a 10 de agosto de 2012, de http://www.periodicos.udesc.br/index.php/linhas/article/viewFile/1276/1087

Leal, L. (1997). Portfolio ou pasta do aluno. *Educação e Matemática*, 42, 11-12.

Lei nº 46/86. Lei de Bases do Sistema Educativo. Acedido em 29 de outubro de 2010, de http://www.dges.mctes.pt/NR/rdonlyres/283BAF87-01C8-4EF4-A169-694533E63B0D/612/LeideBases4686.pdf

Leontiev, A. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Acedido em 9 de Agosto de 2012, de http://www.marxists.org/archive/leontev/works/1978/index.htm

Leontiev, A. (1981). The problem of Activity in Psychology. In Wertsch, J. V. (Ed.) *The concept of activity in soviet psychology (*pp. 37-71). New York: M. E. Sharpe. Inc.. Acedido em 9 de agosto de 2012, de

http://people.ucsc.edu/~gwells/Files/Courses_Folder/documents/LeontievProblemofactivity.pdf

Libâneo, J., & Freitas, R. (2006). *Vygotsky, Leontev, Davydov – três aportes teóricos para a teoria histórico-cultural e suas contribuições para a didática*. Acedido em 20 de junho de 2011, de http://www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe4/individuais-coautorais/eixo03/Jose%20Carlos%20Libaneo%20e%20Raquel%20A.%20M.%20da%20M.%20Freitas%20-%20Texto.pdf

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Harlow: Prentice Hall.

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1994). Estudos de caso em educação matemática: Problemas actuais. *Quadrante, 3* (1), 19-53.

Meira, L. (2004). Cognição e linguagem: explorações sobre comunicação e desenvolvimento na sala de aula. *VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*.

Meira, L., & Lerman, S. (2001). The zone of proximal development as a symbolic space**.** *Social Science Research Papers*, 13, 1-40.

Melo, R., & Freitas, H. (2006). O portefólio no desenvolvimento e avaliação das aprendizagens: Vantagens e desvantagens . *In Oliveira, L.R.& Alves, M.P. (Orgs), Actas do 1º Encontro sobre e-Portefólio / Aprendizagem Formal e Informal. Minho: CRM*.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Menino, H. (2004). O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa:APM.

Ministério da Educação (1991a). *Organização Curricular e Programas (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: ME-DGEBS.

Ministério da Educação (1991b). *Organização Curricular e Programas (2.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: ME-DGEBS.

Ministério da Educação (1991c). *Reajustamento do Programa de Matemática para o Ensino Secundário*. Lisboa: ME-DGEBS.

Ministério da Educação (1997). *Matemática: Programas – 10.º, 11.º e 12.º anos*. Lisboa: ME-DES.

Ministério da Educação (2001a). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: ME-DES. Acedido em 10 de junho de 2010, de http://esna.ccbi.com.pt/file.php/1/LivroCompetenciasEssenciais.pdf

Ministério da Educação (2001-02a). *Programa de Matemática A (10.º, 11.º e 12.º anos)*. Lisboa: ME-DES. Acedido em 23 de agosto de 2010, de http://www.dgidc.minedu.pt/programs/prog_hm.asp

Ministério da Educação (2001-02b). *Programa de Matemática B (10.º, 11.º e 12.º anos)*. Lisboa: ME-DES. Acedido em 23 de agosto de 2010, de http://www.dgidc.minedu.pt/programs/prog_hm.asp.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Moll, L. (1996). *Vygotsky e a educação: implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica*. Porto Alegre: Artes gráficas.

NCTM (1980). *An agenda for action*. Reston, VA: NCTM. Acedido em 13 de dezembro de 2010, de http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=17278.

NCTM (89/91). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (original em inglês, publicado em 1989)

NCTM. (91/94). Normas profissionais para o ensino da matemática. Lisboa: APM e IIE. (Original em inglês, publicado em 1991).

NCTM (95/99). *Normas para a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Original em inglês, publicado em 1995)

NCTM. (2000/07). Princípios e normas para a matemática escolar. Lisboa: APM e IIE. (Original em inglês, publicado em 2000).

NCTM (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8*

Mathematics: A Quest for Coherence. Reston, VA.: NCTM. Acedido em 26 de outubro de 2010, de http://www.nctmmedia.org/cfp/full_document.pdf.

Oers, B. (2001). Educational forms of iniciation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics, 46,* 59-85.

Oliveira, M. (1993). *Vygotsky*. *Aprendizado e desenvolvimento*. *Um processo sócio-histórico*. São Paulo: Scipione.

Ozogul**,** G., & Sullivan, H. (2009). Student Performance and Attitudes under Formative Evaluation by Teacher, Self and Peer Evaluators. *Educational Technology Research and Development*, 57(3), 393-410.

Perrenoud, P. (2004). Évaluer des compétences. *Éducateur*, mars 2004, 8-11. Acedido em 03 de fevereiro de 2010, de http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Poverty_alleviation/Presentation Experts/PresentationExperts_Madrid05_Perrenoud_EvaluerCompétences_FR.pdf

Pinto, J., & Santos, L. (2006a). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Pinto, J., & Santos, L. (2006b). É mesmo possível uma regulação no quotidiano do trabalho do professor e do aluno? *Actas do ProfMat 2006*. (CD-ROM). Lisboa: APM.

Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classroom - a guide for teachers*. London: Macmillan Education Ldt.

Piteira, G., & Matos, F. (2002). Ambientes Dinâmicos de Geometria como Artefactos Mediadores para a Aprendizagem da Geometria. In Saraiva M., Coelho M., & Matos J. (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Geometria* (pp. 61-72). Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE).

Pólya, G. (1945/1977). *A arte de resolver problemas (How to solve it)*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. (1992). A modelação no processo de aprendizagem. *Educação e Matemática*, 23, 15-19.

Ponte, J., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES do ME.

Ponte, J., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: Implicações Curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. (2003). O ensino da Matemática em Portugal: uma prioridade educativa? *In O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas*. Lisboa: CNE.

Ponte, J. (2004). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Pontelo, I., & Moreira, A. (2008). A teoria da atividade como referencial de análise de práticas educativas. Acedido em 20 de junho de 2011, de http://www.senept.cefetmg.br/galerias/Arquivos_senept/anais/terca_tema1/TerxaTema1Artigo8.pdf

Pugalee, D. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of student's problem solving processes. *Educational studies in mathematics, 55, 27-47*. Acedido em 10 de Julho de 2012, de EBESCOHost Academic Search Elite database.

Quinn, D., & Berry, R. (2006). Modelling and the Transit of Venus. Australian Senior *Mathematics Journal*, 20(1), 32-43.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (1992). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.

Rabello, E., & Passos, J. (sem data). Vygotsky e o desenvolvimento humano. Acedido em 10 de agosto de 2012, de http://www.josesilveira.com/artigos/vygotsky.pdf

Roth, W-M. (2004). Activity Theory and Education: an introduction. *Mind, Culture and Activity*, California, 11(1), 1-8.

Santos, L., Canavarro, A., & Ponte, J. (2000). O currículo de matemática: que problemas? Que mudanças?. *Actas do ProfMat2000*. (pp. 84-95). Lisboa: APM.

Santos, L. (1997). Portfolio ou pasta do aluno. *Educação e Matemática*, *42*, 11-12.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In Abrantes, P., & Araújo, F. (Orgs.), *Avaliação das Aprendizagens. Das concepções às práticas* (pp. 75-84). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico.

Santos, L. (2003a). Avaliação das aprendizagens em matemática. *Quadrante, 12, 1*-5.

Santos, L. (2003b). A avaliação em documentos orientadores para o ensino da matemática: uma análise sucinta. *Quadrante, 12,* 7-20.

Santos, L. (2003c). Avaliar competências: uma tarefa impossível? *Educação e Matemática*, 74, 16-21.

Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. In Santos, L., Canavarro, A., & Brocardo, J. (Orgs.), *Educação e matemática: Caminhos e encruzilhadas*. *Actas do encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 169-187). Lisboa: APM.

Santos, L. (2004) As actuais orientações curriculares no ensino e aprendizagem da Matemática: a avaliação e os seus desafios. In I. Lopes & J. Matos (Eds.), *Aprender matemática hoje*. (pp.26-35). Lisboa: APM.

Santos, L.; Canavarro, A., & Machado, S. (2007). Orientações curriculares actuais para a Matemática em Portugal. In *Actas do XV Encontro de Investigação em Educação Matemática – Currículo e desenvolvimento curricular* (CD-ROM). Lisboa: Secção de Educação matemática, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Santos, L., & Dias, S. (2006). Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback. In *Profmat2006* (CD-ROM). Lisboa: APM.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Santos, L. (Org). (2010). *Avaliar para Aprender: Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário*. Porto: Porto Editora & IEUL.

Sá-Chaves, I. (Org.). (2005). *Os "**Portfolios" Reflexivos (também) trazem gente dentro.*** Porto: Porto Editora.

Sebastião, J., & Correia, S. (2007) A democratização do ensino em Portugal. In Viegas, J., Carreiras, H., & Malamud, A. (orgs.). *Instituições e* Política (Portugal no Contexto Europeu. vol. I, pp. 107-136). Lisboa: Celta Editora. Acedido a 4 de Dezembro de 2010 em

http://www.ese.ipsantarem.pt/projectos/artigos_fct/A%20democratiza%C3%A7%C3%A3o%20do%20ensino%20em%20portugal.pdf

Seitz, H., & Bartholomew, C. (2008). Powerful Portfolios for Young Children**.** *Early Childhood Education Journal*, 36, 63-68.

Semana, S. (2008) *O relatório escrito enquanto instrumento de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos do 8º ano de escolaridade em Matemática*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J., & Abrantes, P. (1999) O currículo de matemática e as actividades de Investigação. In Abrantes, P., Ponte, J., Fonseca H., & Brunheira, L. (Org.). *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Silva, A., Duarte, A., Sá, I., & Simão, A. (2004). *Aprendizagem auto-regulada pelo estudante: perspectivas psicológicas e educacionais*. Porto: Porto Editora.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Co, Inc.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In Abrantes, P., Leal, L., & Ponte, J. (Eds.). *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Schoenfeld, A. (2005). *Curriculum Development, Teaching, and Assessment*. In In L. Santos, L., Canavarro, A., & Brocardo, J. (Eds.). *Proceedings of the international meeting in honour of Paulo Abrantes Mathematics Education: paths and crossroads* (pp. 13-41). Lisboa: APM.

Schoenfeld, A. (2007). Reflections on an Assessment Interview: What a Close Look at Student Understanding Can Reveal. *Assessing Mathematical Proficiency*, 53, 269 - 277.

Schunk, D. (1996). Goal and self-evaluative influences during children's cognitive skill learning. *American Educational Research Journal, 33, 359-382*. Acedido em 10 de agosto de 2012 em http://scholar.google.com

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In Charles, R., & Silver, E. (Eds.). *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Tanner, H., & Jones, S. (1995). Teaching children to think mathematically. In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (pp. 106-119). Helsinki: Universitty of Helsinki.

Tunç-Pekkan, Z., & D'Ambrosio, B. (2008/09). Mathematical Communications: Elementary Pre-service Teachers' E-mail Exchanges with Sixth Grade Students. *Mathematics Teacher Education & Development*, 10, 4-14. Acedido em 22 de novembro de 2010, de EBESCOHost Academic Search Elite database.

Uptegrove, E., & Maher, C. (2005). Students Building Mathematical Connections Through Communication. *Conference Papers - Psychology of Mathematics & Education of North America*, 5, 1-8. Acedido em 22 de novembro de 2010, de EBESCOHost Academic Search Elite database.

Vieira, F. (2006). *Para a compreensão do portefólio de aprendizagem*. In Oliveira, L.R.& Alves, M.P. (Orgs). *Actas do 1º Encontro sobre e-Portefólio / Aprendizagem Formal e Informal*. Minho: CRM.

Vigotsky, L. (1934). *Thinking and Speaking*. Acedido em 20 de junho de 2011, de http://www.marxists.org/archive/vygotsky/works/words/index.htm

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psycological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotsky, L. (1984). *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes.

Weiner, B. (1985). An attributional theory of achievement motivation and emotion. *Psycological Review*, 92, 548-573. Acedido em 11 de junho de 2012 de EBSCOHost Academic Search Elite database.

Wertsch J. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wing, C. (2006). Portfolio assessement of cooperative learning groups in small classes. 32nd Annual Conference - Internenational Association for Educational Assessment. Acedido em 10 de novembro de 2010, de

http://www.iaea2006.seab.gov.sg/conference/download/papers/Portfolio%20assessment%20of%20cooperative%20learning%20groups%20in%20small%20classes.pdf

Write, C. (2004). Student Portfolios: an alternative Way of encouraging and evaluating student learning. New Directions for Teaching and Learning (pp. 37-42). Acedido em 10 de novembro de 2010, de EBSCOHost Academic Search Elite database.

Yin, R. (2002). *Case study research: Design and methods* (Third Ed.). Newbury Park: Sage.

Yussen, S. (1985). The role of metacognition in contemporary theories of cognitive development. In *Metacognition, cognition and human performance* (vol. 1). Orlando: Forrest-Presley & Co. Academic Press.

Zimmerman, B. J. (2000). Attaining self-regulation: a social cognitive perspective. In Boekaerts, M., Pintrich, P., & Zeidner, M. (Eds.). *Hanbook of Self-Regulation* (13-39). New York: Academic Press.

Legislação

Decreto-Lei nº 74/2004. Estabelece os princípios orientadores da organização e da gestão do currículo, bem como da avaliação das aprendizagens, referentes ao nível secundário de educação.

Desp. *Norm*. *N.º6/2010*. Estabelece os princípios orientadores da avaliação das aprendizagens, referentes ao nível básico e secundário de educação.

Anexos

Anexo I – Pedido de autorização à direção do agrupamento de escolas
Anexo II – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação
Anexo III – Lista dos possíveis itens a incluir e calendarização – 1ª versão
Anexo IV – Lista dos possíveis itens a incluir e calendarização – 2ª versão
Anexo V – Cartão de comentário
Anexo VI – Apoio para reflexão final de período ou de ano
Anexo VII – Exemplo de uma entrada de um aluno
Anexo VIII – Critérios de avaliação do portefólio e descritores – 1ª versão
Anexo IX – Critérios de avaliação do portefólio e descritores – 2ª versão
Anexo X – *Powerpoint* de apresentação do portefólio aos alunos
Anexo XI – Questionário
Anexo XII – Guião para a primeira entrevista
Anexo XIII – Guião para a segunda entrevista
Anexo XIV – Tarefas escolhidas pela Francisca
Anexo XV – Tarefas escolhidas pela Lara
Anexo XVI – Tarefas escolhidas pelo Francisco

Anexo I – Pedido de autorização à direção do agrupamento de escolas

Exma. Presidente do Conselho Pedagógico do Agrupamento de Escolas do Forte da Casa

Encontro-me a realizar uma investigação, no âmbito de um Mestrado em Educação, especialidade de Didáctica da Matemática, no Instituto de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Durante o presente ano lectivo desenvolverei a minha dissertação de mestrado que será orientada pela Professora Doutora Leonor Santos.

A investigação que me proponho fazer tem como objectivo principal compreender o papel do portefólio reflexivo de Matemática enquanto instrumento de avaliação reguladora das aprendizagens de alunos do 11º ano, em Matemática.

É meu propósito desenvolver este estudo no agrupamento de escolas do qual V. Exa. é Directora e Presidente do Conselho Pedagógico. Venho então, por este meio, solicitar autorização para proceder à minha investigação nesta instituição, garantindo a confidencialidade do agrupamento e dos alunos participantes, na tese e em qualquer artigo publicado que decorra do estudo.

Na expectativa de uma resposta favorável, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

A Mestranda

(Célia Maria da Conceição Dias)

Anexo II – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo. Sr. Encarregado de Educação

Sou professora de Matemática e estou a fazer um Mestrado em Didáctica da Matemática, no Instituto de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. No âmbito da tese de mestrado, realizarei uma investigação que tem por objectivo compreender o papel do portefólio para as aprendizagens dos alunos, em Matemática. A investigação será desenvolvida durante o presente ano lectivo, no Agrupamento de Escolas do Forte da Casa, tendo já sido autorizada pelo respectivo Conselho Pedagógico deste Agrupamento.

Dado ser necessário analisar a forma como decorre, e conhecer a opinião dos alunos relativamente ao assunto em estudo, venho por este meio solicitar a Vª Ex.ª autorização para aplicar um pequeno questionário, entrevistar e áudio-gravar o seu educando. Os dados recolhidos serão absolutamente confidenciais, estando garantida a privacidade e anonimato dos participantes. Manifesto, ainda, a minha inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário.

Na expectativa de uma resposta favorável, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

Célia Maria da Conceição Dias

Autorização

Eu,……..…..……., Encarregado de Educação do(a) aluno(a)……, nº….., turma….., declaro que autorizo que a professora Célia Dias aplique um questionário, entreviste e grave em áudio o meu educando, no âmbito da investigação que me foi dada a conhecer.

Data:……/……/2011

…….

(Assinatura do Encarregado de Educação)

Anexo III – Lista dos possíveis itens a incluir e calendarização – 1ª versão

Lista dos Possíveis Itens a Incluir e Calendarização

1ª ENTRADA

- Trigonometria do Triângulo Rectângulo

- Razões trigonométricas para ângulos agudos.
- Fórmulas e resultados de referência.
- Resolução de triângulos.

- Generalização dos Conceitos de Ângulo e Arco – Círculo Trigonométrico

- *Medida de ângulos. O radiano. Conversão de graus em radianos e vice-versa.*
- *Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos.*
- *Relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo e de ângulos diferentes (Redução ao 1º quadrante).*

- Funções Trigonométricas Seno, Co-seno e Tangente

- *Definição; variação.*
- *Equações trigonométricas.*

- Produto Escalar de dois Vectores no Plano e no Espaço.

- *Definição e propriedades.*
- *Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vectores em referencial o.n.*
- *Ângulo de dois vectores.*

- Perpendicularidade de Vectores e Rectas

- Equação Cartesiana do Plano definido por um Ponto e um Vector Normal

- Rectas e Planos

- *Intersecção de planos e rectas no espaço e interpretação geométrica: resolução de sistemas; equações cartesianas da recta no espaço.*
- *Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos (interpretação vectorial).*

- Programação Linear - Breve Introdução

- *Domínios planos - interpretação geométrica de condições.*

2ª ENTRADA

- Funções Racionais

- *Assimptotas de uma função racional. Conceito intuitivo de limite.*
- *Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos para a seguinte classe de funções* $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$.
- *Equações e inequações fraccionárias. Simplificação de expressões algébricas.*
- *Aplicações das funções racionais na resolução de problemas.*

- Radicais

- *Funções irracionais.*
- *Equações irracionais.*
- *Resolver problemas envolvendo funções irracionais.*
- *Aplicação das funções irracionais na resolução de problemas em contexto real.*

3ª ENTRADA

- Operações com Funções

- *Igualdade de funções.*
- *Soma, diferença, produto e quociente de funções.*
- *Função composta de duas funções.*
- *Função injectiva. Função inversa de uma função injectiva.*
- *Restrição de uma função a um intervalo.*

4ª ENTRADA

- Cálculo Diferencial

- *Taxa de variação de uma função e taxa média de variação de uma função.*
- *Taxa de variação instantânea (ou taxa de variação) de uma função. Derivada de uma função num ponto.*
- *Cálculo da derivada de algumas funções.*
- *A calculadora gráfica na determinação da derivada de uma função num ponto.*
- *Derivada de uma função num ponto como o declive de uma recta.*
- *Interpretação da derivada de uma função num ponto.*
- *A função derivada de funções polinomiais.*
- *Função derivada de algumas funções racionais e irracionais.*
- *A derivada e os extremos de uma função.*
- *Sentido da variação de uma função e derivada..*
- *Extremos de uma função e derivada..*
- *Problemas de optimização.*

5ª e 6ª ENTRADAS

- Definição de Sucessão de Números Reais
  - Generalidades
  - Sucessões Monótonas
  - Sucessões Limitadas
  - Progressão Aritmética
  - Progressão Geométrica

CALENDARIZAÇÃO

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho
8 1ªE V1	5 2ªE V1	5	2 4ªE V2	7	4 6ªE V2
15	12	12 3ªE V2	Páscoa	14 5ªE V2	Férias
22 1ªE V2	19 2ªE V2	19 4ªE V1		21 6ªE V1	
29	26 3ªE V1	26		28	
			30 5ªE V1		

Anexo IV – Lista dos possíveis itens a incluir e calendarização – 2ª versão

Lista dos Possíveis Itens a Incluir e Calendarização

1ª e 2ª ENTRADAS

- Trigonometria do Triângulo Rectângulo

- Razões trigonométricas para ângulos agudos.
- Fórmulas e resultados de referência.
- Resolução de triângulos.

- Generalização dos Conceitos de Ângulo e Arco – Círculo Trigonométrico

- *Medida de ângulos. O radiano. Conversão de graus em radianos e vice-versa.*
- *Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos.*
- *Relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo e de ângulos diferentes (Redução ao 1º quadrante).*

- Funções Trigonométricas Seno, Co-seno e Tangente

- *Definição; variação.*
- *Equações trigonométricas.*

- Produto Escalar de dois Vectores no Plano e no Espaço.

- *Definição e propriedades.*
- *Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vectores em referencial o.n.*
- *Ângulo de dois vectores.*

- Perpendicularidade de Vectores e Rectas

- Equação Cartesiana do Plano definido por um Ponto e um Vector Normal

- Rectas e Planos

- *Intersecção de planos e rectas no espaço e interpretação geométrica: resolução de sistemas; equações cartesianas da recta no espaço.*
- *Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos (interpretação vectorial).*

- Programação Linear - Breve Introdução

- *Domínios planos - interpretação geométrica de condições.*

3ª ENTRADA

- Funções Racionais

- *Assimptotas de uma função racional. Conceito intuitivo de limite.*

- *Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos para a seguinte classe de funções* $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$.
- *Equações e inequações fraccionárias. Simplificação de expressões algébricas.*
- *Aplicações das funções racionais na resolução de problemas.*

- Radicais

- *Funções irracionais.*
- *Equações irracionais.*
- *Resolver problemas envolvendo funções irracionais.*
- *Aplicação das funções irracionais na resolução de problemas em contexto real.*

4ª ENTRADA

- Operações com Funções

- *Igualdade de funções.*
- *Soma, diferença, produto e quociente de funções.*
- *Função composta de duas funções.*
- *Função injectiva. Função inversa de uma função injectiva.*
- *Restrição de uma função a um intervalo.*

5ª ENTRADA

- Cálculo Diferencial

- *Taxa de variação de uma função e taxa média de variação de uma função.*
- *Taxa de variação instantânea (ou taxa de variação) de uma função. Derivada de uma função num ponto.*
- *Cálculo da derivada de algumas funções.*
- *A calculadora gráfica na determinação da derivada de uma função num ponto.*
- *Derivada de uma função num ponto como o declive de uma recta.*
- *Interpretação da derivada de uma função num ponto.*
- *A função derivada de funções polinomiais.*
- *Função derivada de algumas funções racionais e irracionais.*
- *A derivada e os extremos de uma função.*
- *Sentido da variação de uma função e derivada..*
- *Extremos de uma função e derivada..*
- *Problemas de optimização.*

6ª ENTRADA

- Definição de Sucessão de Números Reais
- Generalidades
- Sucessões Monótonas
- Sucessões Limitadas
- Progressão Aritmética
- Progressão Geométrica

Anexo V – Cartão de comentário

Título/Tema: _____ Entrada nº_____

1ª Versão Data: ____ de _____ de _____

2ª Versão Data: ____ de _____ de _____

__ª Versão Data: ____ de _____ de _____

__ª Versão Data: ____ de _____ de _____

Algumas questões:

Quais as razões que te levaram a escolher esta tarefa para o portefólio?

Que tema da Matemática aborda? Elabora um pequeno resumo.

O que aprendeste?

Quais as principais dificuldades com que te deparaste?

Como conseguiste ultrapassar as dificuldades?

De que modo a realização desta entrada te ajudou a aprender? (Em que medida esta tarefa foi útil para a tua aprendizagem?)

Como poderias melhorar o que fizeste?

É possível alargar a situação tratada nesta entrada a outros contextos? Generalizar a situação?

Anexo VI – Apoio para reflexão final de período ou de ano

Como me avalio em cada uma dos seguintes itens:
(ilustra a tua opinião com exemplos das entradas)

- Estrutura e apresentação do portefólio
- Reflexões
- Respeito pelos prazos
- Aquisição de conhecimentos
- Comunicação matemática
- Raciocínio matemático
- Aplicações e modelação matemática
- Resolução de problemas

O portefólio ajudou-me (ou não) a aprender Matemática?

O portefólio ajudou-me (ou não) a ser mais organizado(a)?

O portefólio ajudou-me (ou não) a ser mais responsável?

- Dificuldades sentidas

- Vantagens e desvantagens (aspectos positivos e negativos) que o portefólio me proporcionou.

Em relação à ultima auto-avaliação que efectuei, progredi no que respeita a (caso se aplique):

Devo melhorar nos seguintes aspectos.

O que gostava de mudar no portefólio (e porquê). Sugestões para melhorar o meu portefólio no futuro.

Valeu a pena este trabalho? Porquê?

O portefólio é melhor do que outros instrumentos de avaliação?

Anexo VII – Exemplo de uma entrada de um aluno

Entrada 2

Sábado, 5 de Fevereiro de 2011, Entrada 2

Título/Tema: Geometria e Trigonometria.
Entrada nº2; Versão nº1;
Data: 5 de Fevereiro de 2011

Para a minha segunda entrada de portefólio e visto que a matéria de trigonometria, produto escalar e geometria, continuam a ser as matérias abrangidas para o mesmo, resolvi escolher o **exercício 8 da ficha de trabalho número 3** – complementos de geometria no plano e no espaço - pois ao realizar a ficha para praticar para o teste intermédio de Janeiro, apercebi-me que não consegui realizar todas as alíneas e como tal penso que seja uma boa hipótese para uma entrada como esta.

A minha principal dificuldade residiu na alínea b_1, pois não consegui chegar à expressão pedida. Por outro lado também não consegui compreender o que era exactamente para fazer na alínea b_2, (este tipo de problemas de trigonometria, trazem-me sempre dificuldade pois no fim da leitura do enunciado não sei exactamente o que fazer).

Matéria abordada:

O exercício em si engloba vários pontos de matéria, de forma interligada: trigonometria, produto escalar e geometria, como tal requer a conjugação de todas e centra-se essencialmente na necessidade de empregar conceitos como:

- **Equação reduzida de uma recta -** $y = mx + b$. Para conseguir chegar a esta expressão é necessário um ponto pertencente a essa recta e um vector director da mesma (ou qualquer informação que nos dê o declive). Primeiro obtém-se o declive (m) a partir do vector director ou a partir de qualquer informação dada e posteriormente descobre-se o valor da ordenada na

origem (b) pela substituição das incógnitas x e y da expressão, pelas coordenadas x e y de um ponto pertencente a essa recta.

- **Noção de produto escalar –** O produto escalar trata-se de uma operação que é realizada entre dois vectores, obtendo-se dessa operação um valor numérico. Uma das expressões de cálculo do produto escalar entre os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é: $\vec{u}.\vec{v} \quad \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}\hat{\ }\vec{v})$. No entanto, o que é relevante ter-se em consideração para a realização deste exercício é que o produto escalar entre dois vector perpendiculares entre si, é sempre zero, visto que $\cos 90° \quad 0$ (Tendo em conta que qualquer multiplicação por zero é zero, o produto escalar será zero também.)

- **Equação de uma circunferência –** A equação de uma circunferência (conceito de 10º ano) é construída a partir do ponto que contém as coordenadas que pertencem à origem da circunferência – um ponto C de coordenadas C(x,y) - e do respectivo raio (r). Como tal, a expressão é dada por $(x \quad x_C)^2 + (y \quad y_C)^2 \quad r^2$.

- **Razões trigonométricas –** Para estes exercícios é igualmente necessário ter em consideração as três razões trigonométricas dadas por:

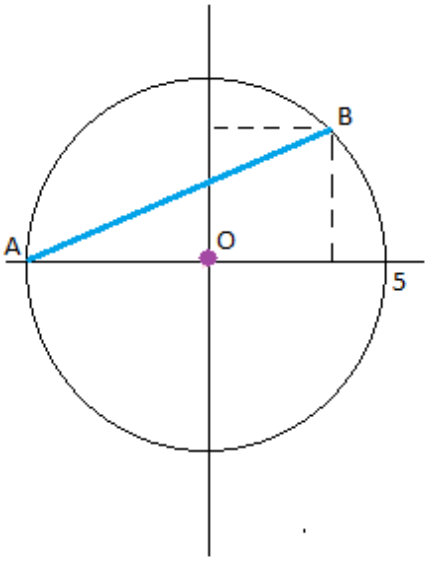
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\ \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\ \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha}$$

Tentativa de Resolução:

Ficha 3 – Exercício 8

Enunciado do problema:

"Na figura estão representadas, em referencial o.n xOy, uma recta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5. Os pontos A e B pertencem à circunferência e o ponto A também ao eixo das abcissas"



Alínea a):

A alínea a) não me trouxe dificuldades, pois eram praticamente exercícios de aplicação directa e como tal vou apenas enunciar o raciocínio que utilizei.

Era-nos dado no enunciado desta alínea o valor do declive da recta AB ($m=\frac{1}{2}$) e a partir daí tínhamos três exercícios a desenvolver:

- ✓ **Na alínea a)** tinha que mostrar que a equação da recta AB era dada pela expressão $x - 2y + 5 = 0$. Para tal bastava utilizar a expressão da equação reduzida da recta, substituindo o m por $\frac{1}{2}$ e y e x pelos valores das coordenadas y e x do ponto A. Logo:

- Se $m = 1/2$
- Se a circunferência tem centro na origem e raio 5

Então o ponto A, que sabemos estar sobre o eixo Ox, tem coordenadas $A(-5,0)$ e a ordenada na origem é: $0 = \frac{1}{2}\times(-5) + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$. Por isto a equação reduzida da recta é igual a:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{2y}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2y + x + 5 = 0 \quad c.q.d.$$

- ✓ **Na Alínea a2)**, tinha de identificar as coordenadas do ponto B como sendo $B(3,4)$:

Sabia que o ponto B pertencia à recta AB cuja equação (geral ou reduzida) já tinha sido obtida na alínea anterior e estava contido simultaneamente na–circunferência, então bastou-me realizar um sistema de equações com duas incógnitas para determinar o x e o y, com base na utilização de ambas as expressões.

- Equação da recta – $2y + x + 5 = 0$;
- Equação da circunferência - $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2y + x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = -2y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow (-2y-5)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow 5y^2 + 20y = 0 \Leftrightarrow$$
$$y(5y + 20) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = -4$$

Se y=0 - $x = -2y - 5 \Leftrightarrow x = -5$, obtém-se o ponto A de coordenadas A(-5,0);

Se y=4 - x $2y$ $5 \Leftrightarrow x$ 3, obtém-se o ponto B de coordenadas B(3,4) c.q.d;

- ✓ **Na alínea a_3** tinha de verificar se o triângulo ABC era rectângulo em B, tendo em atenção que as coordenadas do ponto C, dadas no enunciado da alínea eram - C(-3,16).

Neste caso tinha de efectuar o produto escalar entre os vectores $\vec{BA}$ e $\vec{BC}$ cuja expressão tinha de dar um resultado igual a zero pelo facto do ângulo entre ambos os vectores ser 90º.

$\vec{BA}$ (8, 4)

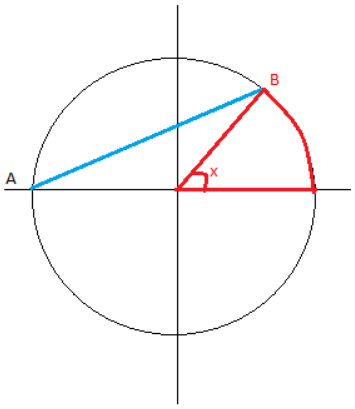
$\vec{BC}$ (6, 12)

$\vec{BA}.\vec{BC}$ $0 \Leftrightarrow (8, 4).(6, 12)$ $0 \Leftrightarrow 48$ 48 $0 \Leftrightarrow 0$ 0 - o que prova que o triângulo ABC é rectângulo em B *c.q.d.*

Alínea b):

Foi a **alínea b)** que me trouxe dificuldades, tanto a primeira parte da alínea como a segunda, tal como referi anteriormente. Nesta parte da entrada irei então apresentar os meus raciocínios e dúvidas sobre os exercícios desta alínea e as razões pelas quais não consigo terminar esta alínea.

Enunciado da alínea b) – "Admita agora que o ponto B se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante. Para cada posição do ponto B, seja x a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta OB. Seja d o comprimento do segmento [AB]"



b_1) Mostre que d^2 50 $50\cos x$.

Antes de começar a tentar resolver esta alínea, optei por fazer uma representação do que me era dito no enunciado, para tentar perceber aquilo que me era pedido.

Esta esquematização permitiu-me compreender que o que me daria a distância *d*, seria um teorema de Pitágoras

entre o segmento de recta [AR] e o segmento de recta [RB]. O que me levaria a uma expressão sob a forma de: $d^2 \quad \overline{RB}^2 + \overline{AR}^2$. Como tal, tentei calcular a medida de ambos os catetos deste triângulo ARB, com base em conceitos de trigonometria.

- Cateto *[AR]* - Para obter o valor numérico deste lado do triângulo [ARB], sei que posso dividir o cateto AR em duas partes: o segmento de recta [AO] e o segmento de recta [OR], cuja soma dar-me-á o valor do cateto pretendido: $\overline{AO} + \overline{OR} \quad \overline{AR}$.

Também sei que o segmento [AO] é igual ao raio da circunferência, ou seja, mede 5. Como tal basta-me apenas determina $\overline{OR}$, o que posso fazer através da razão co-seno, relativamente ao ângulo x, que estabelece uma ligação com o segmento de recta pretendido. Para isso, e sabendo que o co-seno de qualquer ângulo é igual ao cateto adjacente sobre a hipotenusa, então o cos x é igual a: $\cos x \quad \frac{\overline{OR}}{\text{hipotenusa}}$. Esta hipotenusa pode ser calculada através de um teorema de Pitágoras, a partir do ponto B:

$c^2 + c^2 \quad h^2 \Leftrightarrow 3^2 + 4^2 \quad h^2 \Leftrightarrow 5 \quad \text{h}$

Logo - $\cos x \quad \frac{\overline{OR}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos x \quad \frac{\overline{OR}}{5} \Leftrightarrow \overline{OR} \quad 5\cos\alpha$

Conclui-se então que: $[\text{OR}] + [\text{AO}] = [\text{AR}] \Leftrightarrow 5 + 5\cos\alpha = [\text{AR}]$.

- **Cateto $\overline{RB}$**: Seguindo a mesma linha de raciocínio, e pegando no triângulo ORB, o cateto em falta irá relacionar-se com a razão seno que sabemos ser igual ao cateto oposto sobre a hipotenusa:

Logo - $sen\ \alpha \quad \frac{RB}{5} \Leftrightarrow \overline{RB} \quad 5sen\ \alpha$.

Agora basta substituir na expressão inicial e temos que:

$d^2 \quad RB^2 + AR^2 \Leftrightarrow d^2 \quad (5sen\ \alpha)^2 + (5 + 5cos\ \alpha)^2 \Leftrightarrow d^2 \quad 25sen^2\ \alpha + 25 + 25cos^2\ \alpha \ \ldots$

- E agora? Depois de tudo isto não sei resolver a expressão a que cheguei. Não sei se cometi algum erro ou simplesmente se deva continuar a resolver esta expressão matematicamente. A verdade é que se continuasse esta resolução, iria dar-me um valor completamente diferente daquele que é suposto demonstrar. E assim, a minha alínea b_1 não fica terminada.
- **Conselho da professora**: "Mas estás a ir bem. Só te estavas a esquecer da parcela do meio, no desenvolvimento do caso notável."

b_2) Para uma certa posição do ponto B sabe-se que $\tan\alpha = \sqrt{24}$. Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de d.

Sei que:

- d é o comprimento de [AB] em função da posição de B.
- Numa certa posição de B, $\tan\alpha = \sqrt{24}$
- Determinar d, passa pelo uso da expressão da alínea anterior: $d^2 = 50 + 50\cos x$.
- Se descobrir o valor do co-seno para a situação descrita então posso substituir na expressão enunciada e resolver normalmente a expressão.

  - A minha dúvida é como é que chego a esse co-seno, de forma a conseguir substituir a expressão referida pelo valor em falta.

Estas são portanto as minhas duas dúvidas relativamente a este exercício, para a qual peço a sua ajuda.

Sábado, 12 de Fevereiro de 2011, Entrada 2

Título/Tema: Geometria e Trigonometria.
Entrada nº2; Versão nº2;
Data: 12 de Fevereiro de 2011

Com base na correcção (e ajuda) efectuada pela professora, irei continuar a resolução dos exercícios, começando pela alínea b_1).

b_1) Mostre que $d^2 = 50 + 50\cos\alpha$.

Pelo raciocínio que tinha feito, e pelo conselho da professora, o que tenho a fazer é continuar onde tinha parado, mas no entanto devo introduzir a parcela em falta na resolução do caso notável (conselho dado):

Logo…

- Desta expressão: $d^2 = RB^2 + AR^2$.
- Obtenho isto: $d^2 = RB^2 + AR^2 \Leftrightarrow d^2 = (5sen\alpha)^2 + (5 + 5cos\alpha)^2 \Leftrightarrow d^2 = 25sen^2\alpha + 25 + 50\cos\alpha + 25cos^2\alpha$.

- Em vez disto: $d^2 = RB^2 + AR^2 \Leftrightarrow d^2 = (5sen\alpha)^2 + (5 + 5cos\alpha)^2 \Leftrightarrow$ $d^2 = 25sen^2\alpha + 25 + 25cos^2\alpha$.

Resolução:

$d^2 = \overline{RB}^2 + \overline{AR}^2 \Leftrightarrow d^2 = (5sen\alpha)^2 + (5 + 5cos\alpha)^2 \Leftrightarrow$

$d^2 = 25sen^2\alpha + 25 + 50\,cos\alpha + 25cos^2\alpha \Leftrightarrow$

$d^2 = 25(sen^2\alpha + cos^2\alpha) + 25 + 50\,cos\alpha \Leftrightarrow$

$d^2 = 25 \times 1 + 25 + 50\,cos\alpha \Leftrightarrow$

$d^2 = 50 + 50\,cos\alpha$ *tal como se queria demonstrar.*

Por fim, penso ser importante esclarecer, que apesar do meu erro ao considerar as coordenadas do ponto B (o que não poderia fazer, visto o ponto ser móvel ao longo da linha de circunferência, no primeiro quadrante), apercebi-me então que não era necessário ter calculado o valor da hipotenusa segundo esse ângulo (hipotenusa igual a cinco), pois esse valor corresponde ao raio da circunferência que é dado no enunciado - e que é, logicamente, cinco, sendo a hipotenusa invariável para quaisquer coordenadas do ponto B, no contexto deste problema.

b_2) Para uma certa posição do ponto B sabe-se que $tan\alpha = \sqrt{24}$. Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de d.

Sei que:

- d é o comprimento de [AB] em função da posição de B.
- Numa certa posição de B, $tan\alpha = \sqrt{24}$
- Determinar d, passa pelo uso da expressão da alínea anterior: $d^2 = 50 + 50cosx$.
- Se descobrir o valor do co-seno para a situação descrita então posso substituir na expressão enunciada e resolver normalmente a expressão.

Atendendo ao que me foi dito, apenas tenho de utilizar a expressão:

$tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$ e substituir o valor da tangente, que é $\sqrt{24}$.

Determinação do valor da razão co-seno, a partir da razão tangente:

$tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\sqrt{24}^2 + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$25 \quad \frac{\cdot}{\cos^2 \propto} \Leftrightarrow$

$\cos^2 \propto \quad \frac{1}{25} \Leftrightarrow$

$\cos \propto \quad \pm \sqrt{\frac{\cdot}{25}} \Leftrightarrow$

$\cos \propto \quad \pm \frac{1}{5} \Leftrightarrow$

$\cos \propto \quad \frac{1}{5} \vee \cos \propto \quad \frac{1}{5}$

- Como nos encontramos confinados ao primeiro quadrante, onde a razão co-seno é positiva, então o $\cos \propto \quad \frac{1}{5}$.
- Para terminar esta resolução, é necessário substituir o valor da razão determinado, na expressão que nos dá a distância, como é pretendido no enunciado: $d^2 \quad 50 \pm 50\cos\alpha$

Determinação da distância pretendida, como base na expressão demonstrada na alínea b_1 e do valor do co-seno determinado nesta mesma alínea:

$d^2 \quad 50 \pm 50\cos\alpha \Leftrightarrow$

$d^2 \quad 50 \pm 50 \times \frac{1}{5} \Leftrightarrow$

$d^2 \quad 60 \Leftrightarrow$

$d \quad \sqrt{60}$

Decompondo a raiz de 60, tem-se que a distância é igual a: $d \quad 2\sqrt{5}\times\sqrt{3} \quad 2\sqrt{15}$

Reflexão:

Escolhi esta entrada, por ter sido um exercício de grandes dimensões, que engloba diferentes matérias e que me causou dificuldades em determinados pormenores, essencialmente nas alturas em que tive de interligar os diferentes conteúdos. Por exemplo, na última alínea do problema, eu sabia onde deveria chegar e porque passos, mas não sabia como realizar alguns desses passos, pois não estabeleci a ligação entre a parte geométrica (cálculo da distância) e a parte trigonométrica (fórmulas da trigonometria). Deste modo, aquilo que adquiri com esta entrada, centrou-se mais na forma como é possível interligar os conteúdos do que propriamente com os conteúdos em si, pois a resolução dos exercícios baseou-se em

matérias que penso já ter compreendido, não havendo a introdução de nenhum princípio, nenhuma fórmula ou resolução nova, relativamente ao que já foi feito.

Isto e outros exercícios levam-me a querer que apesar de conseguir obter as competências relacionadas com cada matéria, a minha aplicação das mesmas é realizada com mais eficácia quando as aplico separadamente umas em relação às outras, e não quando as mesmas se misturam. Por outro lado, penso que as minhas maiores dificuldades na realização deste exercício deveram-se também ao facto de ter resolvido mal um cálculo matemático (no caso da alínea b_1) e não apenas ao facto de não ter visualizado um método de resolução (no caso da alínea b_2). Caso tivesse elaborado o primeiro cálculo devidamente então teria conseguido resolver a alínea referida. Através do que já referi, é possível compreender que as dificuldades foram ultrapassadas assim que a professora me fez ver o cálculo mal resolvido (caso notável) e me mostrou o passo intermédio que deveria ser utilizado, e a partir desse "empurrãozinho" bastou-me a aplicar conceitos e fórmulas e a solução (ou pelo menos, penso que seja esta a solução) acabou por ser encontrada.

Nesta reflexão, queria ainda incluir que esta entrada me permitiu compactar mais informação relativamente a estas matérias já avaliadas em teste intermédio e testes do primeiro período e claro a compreender a forma como é possível ligar os diferentes assuntos. A interligação dos diferentes conteúdos leva a que seja necessário alargar o nosso pensamento às diferentes áreas da matemática e aplicar todos os conhecimentos aprendidos sobre as mesmas em qualquer ocasião, pois num qualquer exercício é possível encontrar os diferentes conteúdos programáticos misturados uns com os outros e ser também necessário encontrarmos, nos diferentes pontos dos exercícios, o que deveremos aplicar, para determinar um resultado que à partida nos parece englobar um outro conteúdo que não os que utilizámos. Obviamente que não nos é dito, pelo menos com clareza, nos enunciados as matérias a aplicar, como tal deveremos ser nós a ter a capacidade de ler nas entrelinhas e a partir do que nos é dito determinar o ramo a escolher, dentro dos muitos ramos possíveis já adquiridos com os anos de estudo desta disciplina. Pretendo então concluir, que numa próxima abordagem a exercícios que não sejam destinados a uma certa matéria mas sim a várias, tentarei compreender os métodos que deverei utilizar para conseguir resolver o problema que me é destinado.

Anexo VIII – Critérios de avaliação do portefólio e descritores – 1ª versão

Estrutura e Apresentação do Portefólio Respeito pela estrutura do portefólio com realização de cada um dos seus itens.	I – Não respeita a estrutura proposta, verificando-se pelo menos duas das seguintes situações: (a) estão omissas a maioria das entradas; (b) a maioria das entradas não estão terminadas (faltam a(s) última(s) versão(ões)); (c) a maioria das reflexões são inexistentes. S – Não respeita totalmente a estrutura proposta, verificando-se pelo menos uma das situações (a), (b) ou (c). B – Respeita completamente a estrutura proposta não se verificando nenhuma das situações (a), (b) ou (c).	

Reflexões Relevância dos comentários.	I – A maioria dos comentários, nas reflexões, não estão intimamente relacionados com o assunto da entrada. São comentários generalistas, podendo ser aplicados em qualquer reflexão. S – Existem comentários, nas reflexões que não estão intimamente relacionados com o assunto da entrada. B – Todos os comentários são relevantes, estando intimamente relacionados com a entrada.	
Grau de desenvolvimento (Diversidade dos aspectos focados).	I – Mais de metade das reflexões estão pouco desenvolvidas, não focando os diversos aspectos inerentes às entradas. S - Existem reflexões que não focam os diversos aspectos inerentes às entradas. B - Todas as reflexões focam os diversos aspectos inerentes às entradas.	
Problematização.	I – Todas as reflexões tratam-se apenas de descrições, não havendo lugar à problematização. S – Mais de metade das reflexões tratam-se apenas de descrições, não havendo lugar à problematização. B – Em mais de metade das reflexões encontramos o levantamento de pelo menos uma questão.	

Respeito pelos prazos Reformulação das entradas dentro dos prazos.	I – Nenhum prazo de entrega das versões foi cumprido. S – Existem prazos que não foram cumpridos. B – Todos os prazos foram cumpridos.	

Aquisição de conhecimentos nos seguintes domínios: a) Trigonometria. Vectores, rectas e planos. Programação Linear. (1ª entrada) b) Funções racionais. Radicais. (2ª entrada) c) Operações com funções. (3ª entrada) d) Cálculo diferencial. (4ª entrada) e) Sucessões. (5ª e 6ª entradas)	I – Na maioria dos temas existe pouca evidência de progresso na aprendizagem. S – Existem temas onde não há evidência de progresso na aprendizagem. B – Em todos os temas há evidências de progresso na aprendizagem.	

Resolução de Problemas Compreensão dos problemas. Utilização/mobilização dos conhecimentos matemáticos de forma adequada. Uso de métodos numéricos, gráficos e algébricos. Monitorização do trabalho aquando da resolução de problemas.	I – Não existe resolução de problemas com (a) compreensão do problema; (b) mobilização de conhecimentos matemáticos de forma adequada, (c) mais de uma forma de resolução (numérica, gráfica ou algébrica), (d) evidências de monitorização do trabalho aquando a resolução de um problema. S – Existe resolução de problemas com pelos menos dois dos aspectos (a), (b), (c) e (d). B - Existe resolução de problemas com todos os aspectos (a), (b), (c) e (d). (aqui fostes capaz de quantificar, tornando-se assim mais claro para os alunos)	

Raciocínio Matemático Intuição e conjecturação Detecção de conexões Estruturação de cadeias lógicas de raciocínio Avaliar/testar resultados. Fazer generalizações. Acompanhar o raciocínio dos outros, questionar, refutar.	I – Não existe evidência da maioria dos seguintes aspectos: (a) posse e uso da intuição matemática, (b) elaboração e exploração de conjecturas, (c) detecção de padrões, regularidades ou estruturas, (d) demonstrações, (e) argumentos dedutivos, (f) contra-exemplos, (g) avaliação ou testagem de resultados, (h) generalizações, caso se aplique, (i) acompanhamento do raciocínio de outros colegas, questionamento ou refutação. S – Existe evidência de alguns dos aspectos (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h) e (i). B - Existe evidência da maioria dos seguintes aspectos: (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h) e (i).	

Comunicação Matemática Coerência, clarificação e completude de argumentos Especificação de propriedades matemáticas utilizadas. Recurso à linguagem simbólica da Matemática Recurso a diferentes representações	I – Praticamente não existe evidência dos seguintes aspectos: (a) Recurso à linguagem simbólica da Matemática, à sua precisão e ao seu poder de síntese, de forma correcta e apropriada; (b) coerência, clarificação e completude de argumentos (principalmente quando estes inicialmente se revelaram incompletos e/ou incorrectos); (c) recurso a diferentes representações (gráficos, tabelas, modelos, diagramas, desenhos ou materiais manipuláveis). S – Na maioria das entradas existe alguma evidência dos aspectos: (a), (b) e (c) . B – Em todas as entradas existe evidência dos aspectos: (a), (b) e (c). *Caso seja aplicável:* (d) Acompanhamento do raciocínio de "quem explica" e convencer "o outro" acerca dos seus próprios pontos de vista, principalmente quando há discordância ou ideias diferentes.	

Aplicações e Modelação matemática Exploração, construção e análise de modelos matemáticos simples e de aplicações matemáticas.	I – Praticamente não existe evidência de exploração, construção ou análise de modelos matemáticos nem de aplicações matemáticas. S - Existe evidência de exploração, construção ou análise de modelos matemáticos e de aplicações matemáticas. B – Existe evidência de exploração, construção ou análise de modelos matemáticos e de aplicações matemáticas, assim como avaliação dos modelos no sentido do conhecimento do seu alcance e das suas limitações.	

Anexo IX – Critérios de avaliação do portefólio e descritores – 2ª versão

1. Estrutura e Apresentação do Portefólio Respeito pela estrutura do portefólio com realização de cada um dos seus itens.	I – Verifica-se pelo menos duas das seguintes situações: (a) 4 ou mais entradas estão omissas; (b) 4 ou mais entradas não estão concluídas (faltam a(s) última(s) versão(ões)); S – Existem esporadicamente entradas omissas ou não concluídas. B – Respeita completamente a estrutura e não há quaisquer entrada omissa ou não concluída.	

2. Reflexões Relevância dos comentários.	I – A maioria dos comentários são generalistas, podendo ser aplicados em qualquer reflexão. S – Existem comentários, nas reflexões que não estão intimamente relacionados com o assunto da entrada. B – Todos os comentários são relevantes, estando intimamente relacionados com a entrada.	
Grau de desenvolvimento (Diversidade dos aspectos focados).	I – 4 ou mais reflexões estão pouco desenvolvidas, não focando os diversos aspectos inerentes à respectiva entrada. S - Existem esporadicamente reflexões que não focam os diversos aspectos inerentes à respectiva entrada. B - Todas as reflexões focam os diversos aspectos inerentes à respectiva entrada.	
Problematização.	I – Em apenas uma ou duas reflexões há lugar à problematização, ou seja, ao levantamento de pelo menos uma questão. S – Em apenas três reflexões há lugar à problematização. B – Em mais de metade das reflexões encontramos o levantamento de pelo menos uma questão.	

3. Respeito pelos prazos Reformulação das entradas dentro dos prazos.	I – 4 ou mais prazos de entrega das versões não foi cumprido. S – Existem prazos que não foram cumpridos. B – Todos os prazos foram cumpridos.	

4. Aquisição de conhecimentos nos seguintes domínios: f) Trigonometria. Geometria. Prog. Linear. (1ª e 2ª entradas) g) Funções racionais. (3ª) h) Operações com funções. (4ª) i) Cálculo diferencial. (5ª) j) Sucessões. (6ª)	I – Na maioria dos temas existe pouca evidência de progresso na aprendizagem. S – Existem temas onde não há evidência de progresso na aprendizagem. B – Em todos os temas há evidências de progresso na aprendizagem.	

5. Resolução de Problemas Compreensão dos problemas. Utilização/mobilização dos conhecimentos matemáticos de forma adequada. Uso de métodos numéricos, gráficos e algébricos. Monitorização do trabalho aquando da resolução de problemas.	I – Existem menos de 3 resoluções de problemas com: (a) compreensão do problema; (b) mobilização de conhecimentos matemáticos de forma adequada, (c) evidências de monitorização do trabalho aquando a resolução de um problema. S – Existe 3 ou mais resoluções de problemas com os aspectos acima citados. B – todas as resoluções de problemas apresentam os aspectos acima citados e pelo menos um apresenta mais de uma forma de resolução (numérica, gráfica ou algébrica).	

6. Comunicação Matemática Coerência, clarificação e completude de argumentos Especificação de propriedades matemáticas utilizadas.	I – Praticamente não existe evidência dos seguintes aspectos: (a) Recurso à linguagem simbólica da Matemática de forma correcta e apropriada; (b) coerência, clarificação e completude de argumentos (principalmente quando estes inicialmente se revelaram incompletos e/ou incorrectos); (c) recurso a diferentes representações (gráficos, tabelas, modelos, diagramas, desenhos).	

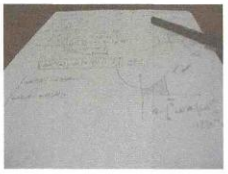
Recurso à linguagem simbólica da Matemática Recurso a diferentes representações	S – Na maioria das entradas existe alguma evidência dos aspectos: (a), (b) e (c) . B – Em todas as entradas existe evidência dos aspectos: (a), (b) e (c) e (d) Acompanhamento do raciocínio de "quem explica" e convencer "o outro" acerca dos seus próprios pontos de vista, principalmente quando há discordância ou ideias diferentes.	

Anexo X – *Powerpoint* de apresentação do portefólio aos alunos

PORTEFÓLIO REFLEXIVO DE MATEMÁTICA

UM PORTEFÓLIO PARA QUÊ?

- Permite que vejas valorizado o teu esforço.



PERMITE QUE DESENVOLVAS COMPETÊNCIAS DE:

- Planificação
- Organização
- Pensamento crítico
- Aceitação dos erros e da crítica
- Reformulação dos erros
- Persistência
- Responsabilidade

NA MATEMÁTICA

- Contribuir para aprofundar a tua compreensão sobre os vários assuntos estudados.
- Gerires a tua aprendizagem mais eficazmente.
- Melhorares a tua comunicação matemática.

PARA O PROFESSOR

- Conhecer-te e compreender-te melhor como aluno de Matemática
- Ajudar-te de forma individualizada (diferenciada)
- Recolher evidências do teu percurso (trabalho e esforço)
- Avaliação mais justa e "produtiva"

O QUE CONTÉM UM PORTEFÓLIO?

Trabalhos (entradas)

Reflexões

Auto-avaliação

ESTRUTURA DO PORTEFÓLIO

- Índice
- Critérios de Avaliação
- Lista dos possíveis itens a incluir e calendarização
- Entradas
- Reflexão final e Auto-avaliação
- Formulário e Anotações

CALENDARIZAÇÃO

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho
8 1ªE V1	5 2ªE V1	5	2 4ªE V2	7	4 6ªE V2
15	12	12 3ªE V2		14 5ªE V2	
22 1ªE V2	19 2ªE V2	19 4ªE V1	Páscoa	21 6ªE V1	Férias
29	26	26		28	
			30 5ªE V1		

O MEU APOIO

- No seguinte horário
  11º F: 2ª e 6ª das 12h30 às13h30
  11º E: 2ª das 17h45 às 18h30 e
  4ª das 12h30 às 13h30
- Pelo mail: celiadias.esfc@gmail.com
  (incluindo sábados, domingos e feriados ☺)

Anexo XI – Questionário

Para cada item, coloca uma cruz, consoante o teu grau de concordância.	Discordo Totalmente	Discordo Parcialmente	Nao Concordo, nem Discordo	Concordo Parcialmente	Concordo Totalmente
A MEU VER MATEMÁTICA É:	1	2	3	4	5
um instrumento ao serviço de quase todas as áreas de actividade humana					
um corpo de conhecimentos estático					
uma área do conhecimento que se desenvolve autonomamente, obdecendo a leis próprias, "internas"					
é uma ciência que, tal como as ciências naturais, se baseia na experimentação e observação					
um conjunto de regras e técnicas					
é uma ferramenta das outras ciências					

A MATEMÁTICA SERVE PARA:	1	2	3	4	5
compreender o mundo através de modelos matemáticos					
apenas resolver exercícios					
resolver problemas do nosso dia-a-dia e da sociedade					
nos tornarmos indivíduos competentes, críticos, confiantes e criativos					
comunicarmos					

SABER MATEMÁTICA É:	1	2	3	4	5
identificar e estabelecer conexões entre diferentes conteúdos matemáticos					
ser capaz de interpretar e comunicar ideias matemáticas					
conseguir criar modelos matemáticos, com consciência das suas potencialidades e limitações					
saber resolver qualquer exercício					
saber explorar, experimentar e fazer conjecturas					
ser capaz de fazer demonstrações					
ser hábil e rápido a efectuar cálculos mais ou menos complexos					
ser capaz de aplicar conhecimentos matemáticos em situações do dia-a-dia					
ser capaz de simplificar coisas complicadas					
ser capaz de desenvolver coisas novas					
formular problemas					
saber utilizar definições e regras					

A MINHA OPINIÃO:	1	2	3	4	5
cometer erros faz parte da aprendizagem					
só dá erros quem não sabe a matéria					
tudo em Matemática "ou está certo, ou está errado"					

A AVALIAÇÃO SERVE PARA:	1	2	3	4	5
me ajudar a compreender a matéria					
mostrar o que já aprendi e o que me falta para aprender					
dar notas					
me indicar indicar caminhos de forma a melhorar a minha aprendizagem					
quantificar o que aprendi					

O QUE ME LEVA A ESTUDAR MATEMÁTICA É O FACTO DE:	Sim	Não
ser uma matéria importante para a minha formação		
gostar da disciplina de Matemática		
ser uma disciplina obrigatória na escola		
desenvolver o raciocínio		
necessitar comunicar ideias		
ter de passar nos exames		
tirar boas notas		
na realidade, praticamente não estudo matemática		
obter uma boa base matemática, para me preparar para a vida		
outras razões: _____		

OS MEUS HÁBITOS NO ESTUDO DA MATEMÁTICA, PASSAM POR:	Sim	Não
fazer, sempre que possível, todos os exercícios do manual, resolvidos, ou não, nas aulas		
prestar atençao nas aulas e reler os apontamentos		
pedir ao professor para esclarecer as minhas dúvidas fora das aulas		
ouvir as explicações dos meus colegas e discutir as resoluções das tarefas com eles		
usar outros recursos (internet, outros manuais, etc.) para estudar Matemática		
fazer poucos exercícios, mas procurar perceber cada um deles		
ler, escrever e discutir Matemática com os meus colegas e com o professor		
procurar resolver o mesmo problemas de maneiras diferentes		
outros hábitos:_____		

Assinala com uma e uma só cruz a resposta que considerares mais correcta:

O TEMPO RAZOÁVEL PARA SE RESOLVER UM PROBLEMA DE MATEMÁTICA É:	
até 10 minutos	
até 30 minutos	
até 1 hora	
alguns dias	
alguns meses	
alguns anos	
ainda há problemas de matemática por resolver	

Nome: _____ Ano/Turma:_____

Obrigada pela tua colaboração

Anexo XII – Guião para a primeira entrevista

Concepções/visão acerca da Matemática

1. Vou apresentar-te 4 situações. Não é para resolvê-las. É só para dizeres se a situação que te é apresentada, é ou não, de Matemática, e porquê. (As situações estão no fim. Apresentar uma situação de cada vez em cartões individuais).
2. Comenta esta afirmação: "em matemática, ou está certo ou está errado".
3. Achas que a matemática que aprendes e com que trabalhas aqui na escola, é diferente da matemática "de um verdadeiro matemático"? O que faz um matemático? O que distingue um trabalho de um matemático do teu trabalho em Matemática?
4. Como é que resolves (descreves a tua actividade quando resolves) um problema de matemática? Podes pôr por ordem as etapas? Não tens de usar os cartões todos. Podes repetir cartões ou haver cartões que não uses.

Leio

Analiso e/ou exploro

Planifico

Implemento

Verifico

5. Como é que achas que um matemático profissional resolve um problema de matemática? (Dar os mesmos cartões, novamente baralhados. A ideia é a mesma)
6. Achas que os alunos podem descobrir coisas em Matemática ou todas as coisas têm que lhes ser ensinadas? Porquê?

Atitudes face à Matemática e às aulas de Matemática

<u>Como te vês a ti próprio como aluno de matemática?</u>

7. Gostas de Matemática? Porquê?
8. O que é que gostas mais na disciplina de Matemática?
9. O que é que gostas menos na disciplina de Matemática?
10. Consideras-te um bom, médio ou fraco aluno a Matemática? Porquê?
11. Sentes confiança a fazer Matemática?

<u>Como geres o teu trabalho relativamente à disciplina de matemática?</u>

12. Fora das aulas, como costumas estudar Matemática?
13. Costumas planificar o que deves/vais estudar?
14. Findo um trabalho, costumas refletir sobre o que realizaste (por exemplo, refletir sobre as dificuldades que tiveste, os erros que deste, como os ultrapassaste, etc).
15. Acontece deixares "acumular trabalho e /ou dúvidas" a matemática? A que é que achas que isso se deve?
16. Tens por hábito fazer resumos de Matemática? Porquê?
17. Quando estás a estudar matemática, preferes estudar sozinho ou com mais alguém?
18. Quando precisas de fazer um trabalho (resolver problema, fazer uma investigação, pesquisar, etc..), preferes ser orientado ou gostas de ter liberdade na gestão do teu trabalho?

Como lidas com os erros e as dificuldades na disciplina de Matemática?

19. Quando cometes um erro em matemática, de uma forma geral a que é se deve esse erro?
20. Quando não consegues resolver um problema, qual a causa provável? Coloca as seguintes possíveis causas por ordem de probabilidade, desde o mais provável (1) até ao menos provável (7).
    - Não li o enunciado com atenção ou não tenho por hábito reler o enunciado.
    - Tenho dificuldade em tirar/seleccionar os dados do enunciado.
    - Tirei os dados mas não sei por onde começar.
    - Não sei os conteúdos necessários à resolução do problema.
    - De entre o que sei, não consigo seleccionar o que me é útil para o problema.
    - Não tenho por hábito verificar se o resultado que obtive faz sentido no contexto do problema
    - outras causas.
21. Quando descobres que te enganaste, como é que reages/o que é que fazes?

Concepções sobre a avaliação em Matemática

22. O que pensas da avaliação? Para que serve a avaliação?
23. O que é para ti mais importante na avaliação? (Quais são as vantagens da avaliação?)
24. Que tipos de trabalhos costumas entregar a Matemática para serem avaliados?
25. Quando entregas um trabalho, o que te leva a pensar que fizeste um bom, médio ou mau trabalho?

26. Na tua opinião, quais são os aspetos que os professores valorizam quando acham que um trabalho é bom ou mau? (O que achas que os professores valorizam mais na avaliação?).
27. Tens por hábito avaliar-te a ti próprio? (No sentido de pensar no que já sabes; o que deves fazer para saber o que falta).
28. O que pensas do portefólio? O que achas que é valorizado num portefólio de matemática?

O portefólio

- O que é que pensas acerca do portefólio que tens estado a fazer?
- O que é que o portefólio valoriza que os outros instrumentos de avaliação não valorizam?
- Que vantagens?
- Que dificuldades?

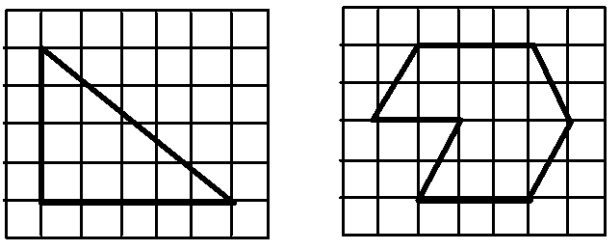
Adaptado de Schoenfeld (1992), Serrazina & Oliveira (2001), Dias (2005), Almeida (2008), Semana (2008).

Para cada uma das situações, diz se são de Matemática ou não e porquê.

1) Um autocarro do exército leva 36 soldados. Se 1128 soldados estão a ser mandados para os seus lugares de treino, quantos autocarros são precisos?

In Schoenfeld, *Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas*, 1996

2) Estás a falar com um colega da tua turma ao telefone e queres que esse colega desenhe as figuras que se seguem. O teu colega não pode ver as figuras. Que instruções darias para o teu colega para ele conseguir desenhar as figuras?



In Schoenfeld, *Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas*, 1996.

3) Três caixas têm as etiquetas "maças", "laranjas" e "maças e laranjas" respectivamente, mas todas as etiquetas estão trocadas. Tirando apenas um fruto de uma das caixas, como colocar correctamente as etiquetas em todas as caixas?

In *O relatório escrito enquanto instrumento de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos do 8º ano de escolaridade em Matemática*, Semana, 2008.

4) Todos nós sabemos que o teorema de Pitágoras diz que se a e b, são o comprimento dos catetos de um triângulo rectângulo no plano e c é o comprimento da hipotenusa, então, $a^2 + b^2 = c^2$.

Vamos começar daí. Podes provar o teorema? De quantas maneiras diferentes? Consegues estendê-lo ou generalizá-lo? Sabes qual é o número total de soluções tipo, como por exemplo o (3,4,5)? Há outros ternos idênticos? Consegues encontrá-los todos? Quantos mais?

In *Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas*, Schoenfeld, 1996

Anexo XIII – Guião para a segunda entrevista

Questão de partida:

Que balanço fazes da realização do portefólio?

a) Resolução de problemas.

Em cada entrada do portefólio tiveste de escrever os raciocínios que estavas a utilizar na resolução de um problema. Achas que isso te ajudou em alguma coisa? Em que medida é que te ajudou a aprender a resolver problemas?

O que é que pensas acerca da evolução da tua capacidade na resolução de problemas?

- A tua atitude (confiança em ti próprio) perante um problema de Matemática é a mesma de há 1 ou 2 anos para cá (ou antes de começar a fazer o portefólio)? O portefólio teve algum papel nesse aspecto?
- O que podes dizer acerca da confiança em ti próprio perante um problema de Matemática? Houve alguma evolução? O portefólio teve algum papel nesse aspecto?

Na resolução de problemas, houve alguma evolução na superação das dificuldades que apontaste na entrevista anterior? (dificuldades apontadas: não saber por onde começar… ir a cada entrevista e anotar as dificuldades que cada caso colocou nos primeiros lugares). O portefólio teve algum papel nesse facto?

b) Capacidade de comunicação matemática.

O que podes dizer acerca da tua capacidade de expor/explicar ideias aos outros? O portefólio teve algum papel neste aspecto?

E de usar correctamente a simbologia matemática? O portefólio teve algum papel neste aspecto?

E de compreender ideias das outras pessoas, nomeadamente das minhas, nos meus comentários., ouve alguma evolução? O portefólio teve algum papel neste aspecto?

Como é que os meus comentários (feedback) foram sendo por ti usados ao longo do portefólio?

Quais foram as minhas intervenções que mais te ajudaram a orientar? Exemplos. Que tipo de ajuda dada no portefólio que foi mais útil? Que uso deste ao meu feedback?

c) Auto-confiança face à Matemática.

O que podes dizer acerca do teu envolvimento na aprendizagem? Houve alguma evolução? O portefólio teve algum papel nisso?

O que podes dizer acerca do desenvolvimento do teu sentido de autonomia?

O portefólio teve algum papel no estímulo ao teu esforço? No estímulo ao teu progresso?

Que papel teve o portefólio no desenvolvimento do teu sentido de responsabilidade relativamente à tua aprendizagem?

d) Processos de regulação (auto-avaliação).

A escolha das entradas ocorreu sempre da mesma maneira ao longo do ano? Que critérios foram sendo usados? Foram sempre os mesmos?

O portefólio passou a ser uma rotina ou foi sempre uma obrigação?

O portefólio ajudou-te a identificar erros ou raciocínios erróneos? Em caso afirmativo, dá exemplos.

O processo de construção do portefólio ajudou-te a escolher estratégias para "dar a volta" a esses erros ou dificuldades?

Ajudou-te a pensar (reflectir) sobre os teus pontos fortes e fracos? Em caso afirmativo, dar exemplos.

Ajudou-te a ultrapassá-los por ti mesmo (mesmo sendo com a ajuda da professora)?

O que podes dizer acerca do teu envolvimento na tua própria avaliação? O que podes dizer acerca da tua consciência sobre a qualidade do teu desempenho e sobre as estratégias que usaste na aprendizagem? Houve alguma evolução? O portefólio teve algum papel nisso?

Ajudou-te a definir metas para futuros estudos (oportunidades)?

Que receios e ansiedades o portefólio te provocou? São as mesmas das que uma prova escrita provoca?

Achas que o portefólio permite observar o desenvolvimento de competências e aprendizagens diferentes do de outros instrumentos de avaliação, como seja os testes, ou não? Em caso afirmativo, dar exemplos.

O que é que pensas acerca do registo/documentação da evolução da tua aprendizagem? (Comparar com outros instrumentos de avaliação, falar no facto de se datar as versões. Se realça o esforço e/ou o progresso? Existem outros instrumentos de avaliação que o fazem?

e) Relação professor-aluno.

O que é que pensas acerca do tipo de trabalho professor-aluno que o portefólio implicou? Há diferenças em relação ao tipo de trabalho desenvolvido, por exemplo, nas aulas?

Que podes dizer acerca da relação professor-aluno ao longo da realização do portefólio? E o tipo de acompanhamento feito pelo professor?

Achas que o portefólio ajuda o professor a compreender o teu estilo particular de aprendizagem?

Anexo XIV – Tarefas escolhidas pela Francisca

Primeira tarefa:

Mostre que sempre que a expressão tem significado, se tem:

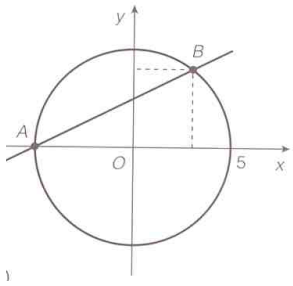
$$\frac{cos^2 \propto - sen^2 \propto}{(sen \propto + \cos \propto)^2} = \frac{1 - \tan \propto}{1 + \tan \propto}$$

Segunda tarefa:

Na figura estão representadas, em referencial o.n. *xOy*, uma recta *AB* e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5.

Os pontos *A* e *B* pertencem à circunferência.

O ponto *A* também pertence ao eixo das abcissas.



a) Admitindo que o declive da recta *AB* é igual a $\frac{1}{2}$, resolva as três alíneas seguintes:

a$_1$) Mostre que uma equação da recta *AB* é $x - 2y + 5 = 0$.

a$_2$) Mostre que o ponto *B* tem coordenadas $(3, 4)$.

a$_3$) Seja *C* o ponto de coordenadas $(-3, 16)$. Verifique que o triângulo [*ABC*] é rectângulo em *B*.

b) Admita agora que o ponto *B* se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.
Para cada posição do ponto *B*, seja α a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo *Ox* e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}B$.
Seja *d* o comprimento do segmento [*AB*].

b$_1$) Mostre que $d^2 = 50 + 50cos(\alpha)$.

b$_2$) Para uma certa posição do ponto *B*, tem-se $tg\alpha = \sqrt{24}$.
Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de *d*.

b_1) Mostre que $d^2 = 50 + 50cosx$.

b_2) Para uma certa posição do ponto B sabe-se que $tan \propto = \sqrt{24}$. Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de d.

Terceira tarefa:

Duas torneiras A e B são usadas para encher uma piscina. A torneira A, sozinha, enche a piscina em *t* horas. A torneira B leva mais duas horas do que a torneira A a encher a piscina. As duas juntas levam menos de 10h a encher a piscina. Entre que valores varia *t* ? (Considere que possuem um caudal constante ao longo do tempo de enchimento).

Quarta tarefa:

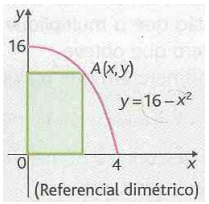
A função custo de produção por dia de uma empresa é dada, em euros, por $C(x) = 2{,}5x + 500$, onde x representa o número de unidades produzidas. O número de unidades produzidas em t horas durante o dia é dado por $x(t) = 10t, \quad 0 \leq t \leq 8$

a) Determine $(C \circ x)(t)$.

b) Calcule $(C \circ x)(8)$ e interprete o significado do calor que encontrou."

Quinta tarefa:

Um rectângulo de área A não nula tem dois lados sobre os eixos coordenados sendo a origem um dos vértices. O vértice oposto é ponto da parábola de equação $y = 16 - x^2$.



a) Exprime a área do rectângulo em função de *x* indicando o domínio de *A(x)*.
b) Para que valores de *x* a área do rectângulo é máxima?"

Sexta tarefa:

É dada a sucessão de termo geral: $v_n = \frac{n-6}{3n}$.

a) Calcule a soma dos três primeiros termos.

b) Estude a monotonia da sucessão.

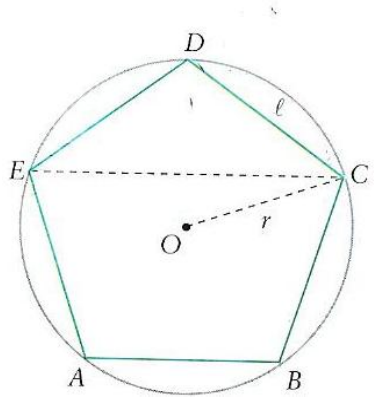
c) Verifique que $v_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{n}$ e justifique que a sucessão é limitada.

d) Defina algebricamente uma sucessão (w_n) sabendo que $w_n = v_n$ para $n \geq 10$ e (w_n) não é monótona."

Anexo XV – Tarefas escolhidas pela Lara

Primeira tarefa:

Numa circunferência de raio *r* está inscrito um pentágono regular de lado *l*.



a) Escreva em função de *r*: $\overline{OC}.\overline{OE}$;

b) Escreva em função de *l*: $\overline{EC}.\overline{CD}$.

Segunda tarefa (são duas situações):

1ª situação:

A quantidade de energia solar média, Q, alcança uma determinada região na semana de ordem *n* do ano, é dada, em kcal/cm^2, aproximadamente por:

$$Q(n) = 400 + 200 \sin\left|2\pi\left(\frac{n-11}{52}\right)\right|$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

a) Determine a quantidade de energia solar média na 1ª semana do ano. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

b) Sem recorrer à calculadora, determine em que semana a quantidade de energia solar média é máxima.

2ª situação:

Resolva, em IR, as seguintes equações.

a) $2\cos(2x) = 0$;

b) $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

c) $5\cos x = 1$

d) $2\cos 2x + 1 = 0$

Terceira tarefa (são três situações):

1ª situação:

Vedando parte de um terreno pretende-se cria uma área de pasto, rectangular e com $500m^2$ de área.

a) Mostre que o perímetro *p* do rectângulo é dado por:

$$p(x) = \frac{2x^2 + 1000}{x}$$

Sendo x a largura do rectângulo.

b) Determine as dimensões do rectângulo de modo que seja mínimo o custo da rede da vedação.

2ª situação:

Resolva, analiticamente, cada uma das equações fraccionárias e confirme a resposta usando a calculadora gráfica.

d) $\frac{2x}{x^2-16} - \frac{3x}{x-4} = \frac{5}{x+4}$

3ª situação:

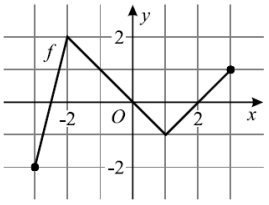
Resolva analiticamente, em IR, cada uma das seguintes inequações:

b) $\frac{x-1}{3-x} < 0$

Quarta tarefa (são duas situações):

1ª situação:

Seja *f* a função cujo gráfico está representado na figura ao lado.



Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}$, defina por

$$g(x) = -x + 3$$

Qual é o valor de $(g \circ f)(3)$?

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D)2

2ª situação:

Num certo ecossistema habitam as espécies animais A e B.

Admita que, *t* anos após o início do ano de 2009, o numero de animais, em milhares, da espécie A é dado aproximadamente por

$$a(t) = \frac{11t + 6}{t + 1} \quad (t \geq 0)$$

E que o número de animais, em milhares, da espécie B é dado aproximadamente por

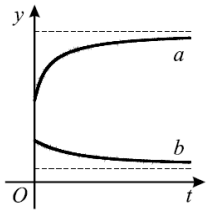
$$b(t) = \frac{t + 9}{t + 3} \quad (t \geq 0)$$

Resolva os dois itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

a) Desde o início do ano de 2009 até o início do ano de 2010, morreram 500 animais da espécie A.

Determine quantos animais dessa espécie nasceram nesse intervalo de tempo.

b) Na figura ao lado, estão representadas graficamente as funções *a* e *b*.

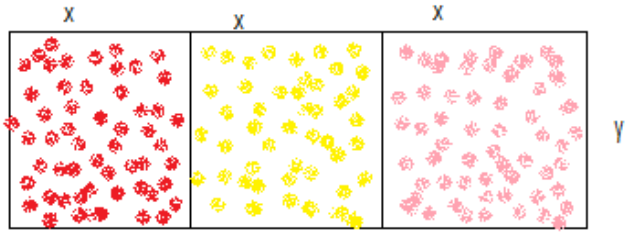


Tal como estes gráficos sugerem, a **diferença** entre os números de animais da espécie A e o número de animais da espécie B vai aumentando, com o decorrer do tempo, e tende para um certo valor.

Determine esses valores, recorrendo às assimptotas horizontais dos gráficos das funções *a* e *b*, cujas equações deve apresentar.

Quinta tarefa:

Um jardineiro pretende criar três canteiros rectangulares vedados como se indica na figura.



Ele tem 300 metros de rede.

a) De acordo com os dados da figura, mostre que a área dos canteiros em função de *x* é dada por $A(x) = 225x - 4.5x^2$.

b) Determine x e y de modo que a área seja máxima. Qual é o valor máximo da área?

Sexta tarefa:

O Vítor depositou num banco 5 mil euros e resolveu aí colocar, todos os meses, 500 euros.

Assim, decorrido um mês, o Vítor tinha 5500 euros no banco.

Se *t* é o total de dinheiro depositado e *n* o número de meses, escreva t em função de *n*.

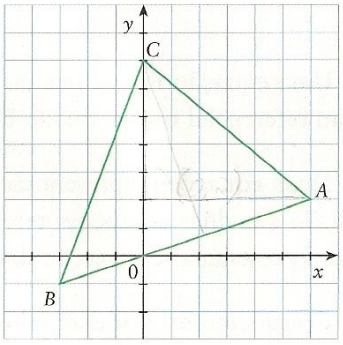
Ao fim de quantos meses o Vítor terá 50 000 euros depositados no banco?

Anexo XVI – Tarefas escolhidas pelo Francisco

Primeira tarefa:

17. No referencial o.n. Oxy está representado o triângulo $[ABC]$.

A (6 , 2) ; B (– 3 , – 1) ; C (0 , 7)



17.1 Escreva as coordenadas dos vectores:

a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AC}$.

17.2 Escreva uma equação da mediatriz de:

a) $[AB]$; b) $[BC]$; c) $[AC]$.

17.3 Escreva uma equação da recta que contém a altura do triângulo relativamente ao vértice:

Segunda tarefa:

14. Determine a intersecção da recta r com o plano α.

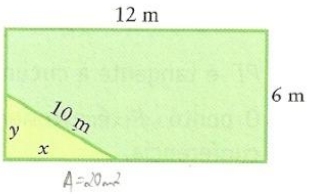
14.1 $r: (x, y, z) = (1, 3, 0) + \lambda\,(1, 0, 2),\ \lambda \in \mathbb{R}$

$\alpha: x + y - 2z - 1 = 0$

Terceira tarefa:

A vedação

Um terreno rectangular tem 12 metros de comprimento e 6 de largura. Aproveitando os muros existentes pretende-se vedar um canto do terreno usando uma rede com 10 m de comprimento. Para que o canto vedado tenha uma área de 20 m² e a forma sugerida na figura, quais devem ser as dimensões x e y ?



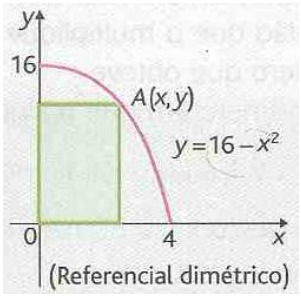
Quarta tarefa:

Caraterize, em cada caso, $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$, sendo:

a) $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x - 2$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ e $g(x) = \sqrt{x}$

Quinta tarefa:



Decidi seguir a sua sugestão, e como tal escolhi este exercício.

Um rectângulo de área A não nula tem dois lados sobre os eixos coordenados sendo a origem um dos vértices. O vértice oposto é ponto da parábola de equação $y = 16 - x^2$.

a) Exprime a área do rectângulo em função de *x* indicando o domínio de *A(x)*.

c) Para que valores de *x* a área do rectângulo é máxima?

FIM