

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

ISCTE Business School
Instituto Universitário de Lisboa
Departamento de Finanças



**COMPARAÇÃO DE MÉTODOS DE VALUE-AT-RISK PARA
MEDIÇÃO DO RISCO FINANCEIRO EM RENDIBILIDADES
DE TAXAS DE CÂMBIO**

Ana Filipa de Carvalho Ferreira

DISSERTAÇÃO

ORIENTADOR: PROFESSORA DOUTORA DIANA ALDEA MENDES

MESTRADO EM MATEMÁTICA FINANCEIRA

2015

Resumo

Este estudo tem como principal objetivo comparar métodos de previsão do *VaR* (*Value at Risk*), com o intuito de medir o risco financeiro das rendibilidades da taxa de câmbio EUR/USD.

Iremos analisar o comportamento da série considerada no período temporal de 2009 a 2015, onde inicialmente a taxa de câmbio sofre um aumento, face à desvalorização do USD em relação ao EUR. As subidas e descidas do EUR/USD durante este período temporal, foram provenientes, principalmente, das descidas das taxas de referência do FED e do BCE, desde o início da crise financeira. Em 2015, esta taxa de câmbio atinge valores muito próximos da paridade, devido aos incentivos à Economia, por parte do BCE.

Com o objetivo de chegarmos a um modelo estacionário capaz de capturar os *clusters* de volatilidade, vamos utilizar modelos não-lineares, como o caso dos modelos heterocedásticos do tipo GARCH, que não assumem uma restrição de variância constante.

Por fim, iremos prever o *VaR* através dos modelos GARCH, EGARCH e *RiskMetrics*, analisar a volatilidade predita através das estatísticas de erro MSE (*Mean Square Error*), HMSE (*Heteroskedasticity-adjusted Mean Square Error*), HMAE (*Heteroskedasticity-adjusted Mean Absolute Error*) e MAE (*Median Absolute Error*) e implementar os testes de *Backtesting*, utilizando as estatísticas LRUC (Cobertura Não-Condiciona), LRIND (Independência) e LRCC (Cobertura Condiciona); de modo a chegarmos ao nosso propósito principal, o modelo mais adequado.

Palavras-chave: Taxa de câmbio EUR/USD, *VaR*, GARCH, EGARCH, *RiskMetrics*, Volatilidade, *Backtesting*

Abstract

The main objective of this work is to compare *VaR* (*Value at Risk*), forecasting methods in order to measure EUR/USD exchange rate returns financial risk.

We will analyze the behavior of the considered series for the time interval since 2009 until 2015, where initially was observed an increase in the exchange rate, due to US Dollar devaluation against EUR. The ups and downs of EUR/USD behavior during this time period arose mainly from the falls in the reference rates of the FED and the BCE, since the beginning of the financial crisis. In 2015, the EUR/USD exchange rate reached values close to parity, due to BCE incentives to the Economy.

With the purpose to reach a stationary model able to capture *clusters* of volatility, we used non-linear models, such as of heteroskedastic models from the GARCH family, which do not assume the constant variance condition.

Finally, we will forecast the *VaR* through GARCH, EGARCH and *RiskMetrics* models, analyze the volatility prediction through the error statistics MSE (*Mean Square Error*), HMSE (*Heteroskedasticity-adjusted Mean Square Error*), HMAE (*Heteroskedasticity-adjusted Mean Absolute Error*) and MAE (*Median Absolute Error*); and employ *Backtesting* tests, such as LRUC (*Unconditional Coverage*), LRIND (*Independence*) and LRCC (*Conditional Coverage*) statistics; in order to reach the most appropriate model to our main purpose.

Keywords: Exchange rate EUR/USD, *VaR*, GARCH, EGARCH, *RiskMetrics*, Volatility, *Backtesting*

Agradecimentos

*"Somos o que fazemos,
sobretudo o que fazemos
para modificar o que somos."*

António Fagundes

*"As nossas dúvidas são traidoras,
e fazem-nos perder o que, com frequência,
poderíamos ganhar,
por simples medo de tentar."*

William Shakespeare

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha orientadora, Professora Doutora Diana Aldea Mendes, pela referência que sempre foi para mim, como pessoa e como profissional. A vida às vezes põe-nos à prova e é nessas alturas que mostramos quem realmente somos. Por ter mantido sempre o seu profissionalismo, independente das circunstâncias, um profundo e sincero obrigada.

Em segundo lugar, gostaria de agradecer às pessoas que sempre me apoiaram e incentivaram. Às que me disseram vezes sem conta: "Força!", "Tu és capaz!", "Acredita em ti!": ao meu pai, por todos os sacrifícios que fez por nós e para que fossemos "alguém na vida"; à minha mãe, às minhas irmãs Inês e Paty, às minhas tias, Jú e Clara, à minha amiga Rita e ao meu tio Mário que esteve sempre presente, em pensamento.

Em terceiro lugar, um agradecimento especial à minha Valéria. Por nunca precisar de te explicar nada, por seres das pessoas mais presentes e que mais força me deu ao longo deste mestrado e por nunca teres duvidado das minhas capacidades, obrigada.

E por último, mas ainda assim especial, à pessoa que conheci no mestrado e que é hoje o meu maior confidente. O meu muito obrigada pela tua infindável paciência e compreensão. Por acreditares em mim, mesmo quando eu não acreditei. Por teres sempre insistido comigo e nunca me teres deixado desistir. Se foi difícil? Foi, muito... mas consegui! "Um dia as vitórias vão deixar de ser minhas por acréscimo e vão passar a ser minhas por mérito". Hoje é o dia!

A todos os que estiveram presentes, muito obrigada!

Conteúdo

Introdução	3
1 Enquadramento teórico	4
1.1 Mercados Financeiros	4
1.1.1 Mercados Monetários	4
1.1.2 Mercados de Capitais	4
1.1.3 Mercados Cambiais	5
1.2 <i>Value-at-Risk, VaR</i>	6
1.3 Volatilidade	8
1.4 Breve Revisão Bibliográfica	9
2 Métodos Econométricos	10
2.1 Modelos e Metodologias	10
2.1.1 Séries Temporais	10
2.1.2 Modelos ARMA, ARCH e GARCH	15
2.2 Métodos de <i>Backtesting</i>	22
2.2.1 Teste de Cobertura não-condicional ou de Kupiec	22
2.2.2 Teste de Cobertura Condicional ou de Christoffersen	23
3 Apresentação e análise dos resultados obtidos	25
3.1 Dados e análise estatística	25
3.2 <i>Backtesting</i> e Previsão do <i>VaR</i> e da Volatilidade	34
3.2.1 <i>Backtesting</i> -Métricas do <i>VaR</i>	34
3.2.2 Previsão da volatilidade	37
3.2.3 Previsão <i>out-of-sample</i> do <i>VaR</i>	39
3.2.4 <i>VaR</i> Histórico	39
4 Conclusões	42
Anexos	43
Anexo A Modelos heterocedásticos analisados	45

Lista de Figuras

1.1	<i>VaR</i> para um nível de significância de 5%	8
3.1	Representação gráfica da série EURUSD	25
3.2	Representações gráficas das taxas de referência do FED e BCE, respectivamente	26
3.3	Histograma e respectivas estatísticas descritivas da série EURUSD	27
3.4	Teste de Dickey-Fuller Aumentado, ADF, para a série EURUSD	27
3.5	Série temporal diferenças logaritimizadas da taxa de câmbio EUR/USD	28
3.6	Histograma e respectivas estatísticas descritivas da série DLEURUSD	28
3.7	Teste de Dickey-Fuller Aumentado, ADF	29
3.8	Correlograma da série DLEURUSD	29
3.9	Correlograma do quadrado dos resíduos	30
3.10	Teste de heterocedasticidade- ARCH	31
3.11	Estimação do modelo EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada <i>t-student</i>	32
3.12	Resíduos da série DLEURUSD quando aplicado ao modelo EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada <i>t-student</i>	33
3.13	Correlograma dos resíduos do modelo EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada <i>t-student</i>	33
3.14	Teste de heterocedasticidade para os resíduos do modelo EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada <i>t-student</i>	34
3.15	Previsão <i>out-of-sample</i> do <i>VaR</i> para nível de confiança de 99%	39
3.16	Previsão <i>out-of-sample</i> do <i>VaR</i> para nível de confiança de 95%	39
3.17	Estimação do <i>VaR</i> Histórico a um nível de confiança de 99%	40
3.18	Estimação do <i>VaR</i> Histórico a um nível de confiança de 95%	40
A.1	Estimação do modelo GARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana	45
A.2	Estimação do modelo GARCH(1, 1) com distribuição condicionada <i>t-student</i>	46
A.3	Estimação do modelo EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana	46

Lista de Tabelas

2.1	Funções ACF e PACF dos modelos $AR(p)$ e $MA(q)$	17
3.1	Desempenho dos modelos heterocedásticos testados	31
3.2	Previsão do VaR a 1 dia e a 5 dias para os diferentes modelos considerando um nível de confiança de 99%- Posição Longa	35
3.3	Previsão do VaR a 1 dia e a 5 dias para os diferentes modelos considerando um nível de confiança de 99%- Posição Curta	35
3.4	Previsão do VaR a 1 dia e a 5 dias para os diferentes modelos considerando um nível de confiança de 95%- Posição Longa	35
3.5	Previsão do VaR a 1 dia e a 5 dias para os diferentes modelos considerando um nível de confiança de 95%- Posição Curta	35
3.6	Estatísticas de Erro para previsão de Volatilidade, para um nível de confiança de 99%	37
3.7	Estatísticas de Erro para previsão de Volatilidade, para um nível de confiança de 95%	38

Introdução

Desde 1998, segundo *Basel Committee Banking Supervision (1998)* foram exigidos aos bancos com grande atividade de *trading*, que condicionassem quantidades de capital consideráveis para fazer face a eventuais perdas nos seus portfólios. A quantidade de capital necessária está diretamente relacionada com o risco do portfólio, que é medido através do *VaR*.

Atualmente, esta abordagem regulamentar faz com que as instituições financeiras tenham que utilizar os seus próprios modelos de risco para calcular e reportar o seu *VaR*. Os testes de *backtesting* são então utilizados para medir a adequabilidade dos modelos utilizados pelos bancos.

A implementação dos *backtesting* tornou-se então fundamental no sentido em que o *VaR* reportado pelos bancos tem um impacto direto no capital que estes têm de condicionar.

Caso o resultado dos testes de *backtesting* permitam concluir que os modelos utilizados pelos bancos não sejam adequados, estes deverão rever os seus pressupostos.

Esta tese tem então, como principal objetivo, ajustar os modelos não-lineares da família GARCH à série temporal considerada, fazer os testes de *backtesting* nos modelos heterocedásticos estudados para a previsão do *VaR* e verificar qual o modelo mais adequado ao propósito definido.

No estudo que fizemos, utilizámos a taxa de câmbio EUR/USD, por ser uma das taxas de câmbio mais líquidas em todo o mundo.

A taxa de câmbio EUR/USD teve origem no ano de 1999, aquando a criação da moeda europeia. O EUR/USD representa a taxa a que se troca as moedas de duas grandes economias mundiais: Europa e Estados Unidos da América.

Desde o início, a taxa de câmbio EUR/USD teve um comportamento tendencialmente crescente, o que favoreceu as exportações dos Estados Unidos da América para a Europa. Apenas a partir do ano de 2007, esta taxa começou a diminuir significativamente, atingindo valores mínimos. Neste momento, o valor do EUR/USD está muito próximo da paridade.

Ainda no primeiro capítulo, falámos de duas medidas de risco financeiro: o *VaR* e a volatilidade.

O *VaR* é uma medida de risco que tenta capturar a perda máxima esperada, com um nível de confiança e horizonte temporal previamente estabelecidos. O *VaR* relaciona o montante das perdas com a sua probabilidade de ocorrência.

Esta medida tem como principais objetivos: a gestão do risco, o reporte de risco financeiro e o cálculo do capital exigido pelo Banco Regulador.

A volatilidade, por sua vez, mede a variação de um determinado ativo. E pode ser medida através do desvio-padrão ou da variância.

Quanto maior for a volatilidade de um determinado ativo, maior é o seu risco, isto é, maior é a probabilidade do ativo ter uma grande variação num curto espaço de tempo. Por outro lado, pequenas variações do ativo tendem a ser seguidas por pequenas variações desse mesmo ativo, assim como grandes variações do ativo tendem a ser seguidas por grandes variações. A este fenómeno designamos por *clusters de volatilidade*.

No segundo capítulo foram abordados os principais conceitos que iremos aplicar na parte prática desta tese. Aquando a escolha do modelo, verificámos através de um teste de hipótese, que existia evidência de efeitos ARCH no modelo, o que nos conduziu a estudar modelos heterocedásticos, como o caso dos modelos da família GARCH.

Os modelos do tipo GARCH, são modelos não-lineares que permitem capturar os *clusters* de volatilidade, pois não assumem uma condição de variância constante, ao contrário dos modelos homocedásticos.

A descoberta dos modelos GARCH foi um grande avanço em termos econométricos, uma vez que permitiu explicar alguns fatos até então não considerados, como o caso das distribuições leptocúrticas, *clusters* de volatilidade e efeitos de alavancagem.

Os testes de *backtesting*, abordados ainda no segundo capítulo, são utilizados para avaliar a qualidade das estimativas de previsão do *VaR*. Esta técnica é utilizada para comparar as estimativas previstas de perda dadas pelo *VaR*, com as perdas efetivas, no final de cada horizonte temporal. O resultado dos testes de *backtesting* pode ser utilizado para melhorar os modelos utilizados para previsão do *VaR*, com o intuito de os tornar mais precisos, reduzindo assim potenciais perdas. Para a previsão da volatilidade utilizámos os modelos GARCH e modelos EGARCH.

No terceiro capítulo aplicámos os conceitos teóricos abordados nos capítulos anteriores. Através do *software* Eviews, fizemos uma análise estatística dos dados com o intuito de chegar a um modelo que melhor se ajustasse aos dados. Segundo esta análise, o melhor modelo é o EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada *t-student*.

Utilizámos também o *software* MatLab para fazer a previsão do *VaR* e da volatilidade. Conforme aprovado pelo Comité de Basileia, utilizámos os testes de *backtesting*: testes de cobertura condicional e não-condicional, para a previsão do *VaR*.

Os testes de cobertura não-condicional, ou testes de Kupiec, verificam se a frequência da ocorrência das falhas do modelo, num determinado período de tempo, está em consonância com o nível de confiança. Dois dos testes de Kupiec mais utilizados são os testes de *Proportion of Failures*, que mede a percentagem de falhas do modelo, e o teste *Time until First Failure*, que mede o tempo até à ocorrência da primeira falha do modelo.

O modelo é adequado, se a estatística do teste de cobertura não-condicional, LRUC, for inferior ao valor crítico.

Os testes de cobertura condicional, ou testes de *Christoffersen* junta as propriedades da cobertura não-condicional, descrita anteriormente, com a propriedade da independência das falhas. Estas duas propriedades, embora distintas, deverão ser ambas satisfeitas, de modo a obtermos um modelo preciso.

A propriedade da independência, permite verificar se uma determinada falha do modelo está relacionada ou não, com a falha ocorrida no momento anterior.

De acordo com o teste de cobertura condicional, se a estatística de teste LRCC estiver abaixo do respetivo valor crítico, estamos perante um modelo adequado.

Por fim, para a previsão da volatilidade foram utilizadas as estatísticas de erro: *Mean Square Error*, *Heteroskedasticity-adjusted Mean Square Error*, *Heteroskedasticity-adjusted Mean Absolute Error* e *Median Absolute Error*.

Para a previsão do *VaR* o melhor modelo que obtivemos foi o EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana e para a previsão da volatilidade o melhor modelo foi o *RiskMetrics*.

Capítulo 1

Enquadramento teórico

Neste capítulo, vamos fazer um breve enquadramento teórico de alguns conceitos importantes abordados ao longo desta tese, como o caso dos mercados financeiros, *Value at Risk*, volatilidade, entre outros.

1.1 Mercados Financeiros

Os mercados financeiros estão segmentados em três tipos de mercados: os mercados monetários, os mercados de capitais e os mercados cambiais. Tal qual como podemos ver em Ribeiro (2012) e em Mota e Custódio (2012), os preços estabelecidos nestes mercados têm um impacto significativo no poder de compra dos consumidores, e por sua vez, na taxa de emprego e no nível de preços.

1.1.1 Mercados Monetários

O mercado monetário obtém e concede empréstimos por um prazo inferior a um ano. O foco principal deste mercado é o Mercado Monetário Interbancário, MMI, onde as instituições financeiras obtêm e concedem empréstimos entre si, também por um prazo inferior a um ano e onde as taxas são acordadas por ambas as partes. Estas operações permitem uma regulação da liquidez, uma vez que podem haver situações de excesso de depósitos e um défice de pedidos de crédito; e permitem que haja especulação relativamente à evolução das taxas de juro.

O Mercado Monetário Interbancário é o mercado diretor das taxas de juro da economia, dado que tanto as taxas das aplicações como as taxas dos financiamentos são influenciadas pelos níveis das taxas de juro no Mercado Monetário Interbancário. E cabe a cada Banco Central supervisionar todas estas transações.

1.1.2 Mercados de Capitais

O mercado de capitais é aquele onde atua substancialmente a obtenção e aplicação de fundos de longo prazo, tendo subjacente um valor mobiliário colateral ao financiamento ou à aplicação.

Os valores mobiliários mais aplicados são as ações e as obrigações. As ações são títulos que compõem o capital social de uma empresa, tendo o detentor da ação direito ao pagamento de dividendos, quando há distribuição de resultados. Por outro lado, as obrigações são títulos de dívida, que pagam um cupão com uma certa periodicidade, sendo a taxa de cupão e o prazo de maturidade previamente estabelecidos. Na data de vencimento da obrigação, o detentor é reembolsado pela parte do empréstimo a que está associado.

Os valores mobiliários podem ser transacionados tanto em mercado primário, onde o produto da venda reverte a favor da entidade emitente; como em mercado secundário (Bolsa de Valores), onde as transações dos valores mobiliários criados no mercado primário são efetuadas entre investidores individuais ou institucionais.

1.1.3 Mercados Cambiais

O mercado cambial abrange todo o conjunto de transações de conversão de moedas, tanto nas operações à vista (*spot*) como nas operações a prazo (*forward*).

O conceito de taxa de câmbio advém da relação de conversão de uma moeda na outra. A taxa de câmbio *spot* corresponde à taxa de conversão imediata entre duas moedas, onde se fixa o montante estabelecido na moeda *A* e recebe-se o montante a resultar da aplicação da taxa de câmbio na moeda *B*, ou vice-versa.

As taxas de câmbio podem ser cotadas de forma direta e indireta. A direta expressa a taxa de câmbio em x unidades da moeda local por cada unidade da moeda estrangeira, enquanto que a indireta expressa em x unidades da moeda estrangeira por cada unidade da moeda local.

A notação A/B da taxa de câmbio deduz x unidades de *B* por uma unidade de *A*. Desta forma, a compra de A/B significa que iremos receber a moeda *A* e pagar a moeda *B* e por sua vez, a venda de A/B representa que iremos pagar *A* e receber *B*. Apesar de ser mais comum o montante da transação ser representado na moeda *A*, este também pode ser representado na moeda *B*.

As operações *spot* de compra e venda ocorrem apenas dois dias úteis após a data de negociação, tanto no mercado interbancário como no mercado balcão.

A arbitragem permite-nos denotar a taxa de câmbio entre duas moedas *A* e *B* tanto por A/B como por B/A . Esta equivalência deriva da inversão de cada cotação, embora seja necessário trocar a posição de compra e de venda. Em termos gerais temos:

$$A/B_{c(\nu)} = \frac{1}{B/A_{\nu(c)}} \quad (1.1.1)$$

onde c é a cotação de compra e ν a cotação de venda.

Através das taxas cruzadas (*cross rates*) e juntamente com as condições de arbitragem é possível determinar-se a taxa de equilíbrio B/C , conhecendo previamente as taxas de câmbio A/B e A/C . Para tal basta usar a seguinte expressão geral de equilíbrio:

$$B/C_c = \frac{A/C_c}{A/B_v} \quad \text{e} \quad B/C_v = \frac{A/C_v}{A/B_c} \quad (1.1.2)$$

Tal qual como no mercado monetário, o mercado *spot* tem o mercado interbancário como diretor de todos os preços. As transações que ocorrem neste mercado visam a criação ou eliminação da especulação da instituição financeira. Ocorrem também como contrapartida, os fluxos contrários que se registam nas operações da instituição financeira com os seus clientes.

Por outro lado, o mercado balcão abrange todas as transações realizadas entre as instituições financeiras e os seus clientes. Os preços são indexados aos preços praticados no mercado interbancário, auferindo a instituição financeira da margem comercial, diferença entre o preço indexado e o preço praticado no mercado interbancário.

A maior parte das transações cambiais, no mercado interbancário e no mercado balcão, não envolvem a troca física de moeda, pelo que estas operações financeiras são efetuadas através de sistemas de pagamento mais comuns, como é o caso do débito e crédito em conta, transferências, cheques, entre outros. Por outro lado, quando as operações financeiras exigem a troca de moeda física (mercado de notas e moedas), as taxas praticadas são sensivelmente mais elevadas, uma vez que têm custos de transação e administrativos associados. Por consequência, também as margens comerciais são mais elevadas.

O mercado *spot* opera 24 horas por dia, facilitando assim a qualquer operador, situado em qualquer parte do mundo, a compra e venda de moeda. O acesso simultâneo a todos os acontecimentos e informações é facultado pelos sistemas de informação *online* (*Bloomberg* e *Reuters*).

1.2 Value-at-Risk, VaR

O *VaR* (*Value at Risk*) é o método de avaliação de risco em operações financeiras mais utilizado, conforme podemos constatar em Jorion (2006), Alexander (2008) e Morgan e Reuters (1996).

É um quantile na distribuição de *P/L*, (*Profit and Loss*), onde podemos indicar a função *Profit and Loss* num portfólio de investimento pela variável aleatória Q , com uma realização indicada por q . Se tivermos uma unidade de um ativo, a função *Profit and Loss* será indicada por:

$$Q = P_t - P_{t-1} \quad (1.2.1)$$

onde P_t e P_{t-1} são os lucros referentes aos momentos t e $t - 1$, respetivamente.

Generalizando, se o valor do portfólio for designado por ϑ , então,

$$Q = \vartheta Y \quad (1.2.2)$$

Isto é, a função *Profit and Loss* é o valor do portfólio multiplicado pelos retornos, Y . A

densidade da função *Profit and Loss* é denotada por $f_q(\cdot)$. O *VaR* é dado por:

$$Pr[Q \leq -VaR(p)] = p \quad (1.2.3)$$

ou

$$p = \int_{-\infty}^{-VaR(p)} f_q(x) dx \quad (1.2.4)$$

O sinal de menos é utilizado porque esta medida dá-nos um valor positivo, mas o mesmo retrata perdas possíveis. Podemos representar o *VaR* como sendo um montante positivo ou negativo e as probabilidades podem estar, próximas de 1 ou próximas de 0, respetivamente.

O risco financeiro não pode ser medido diretamente, pelo que se torna mais complicado prevê-lo. No entanto, este pode ser inferido através da observação do comportamento dos preços de mercado.

A medição do risco financeiro requer o estudo de modelos estatísticos e de algumas suposições, uma vez que é uma variável incerta. Nesta medição do risco financeiro, o *VaR* é uma medida importante comparado com as medidas tradicionais baseadas em sensibilidades das variáveis de mercado. A abordagem mais comum para o problema de medição do risco de um ativo, com diferentes distribuições, é admitir uma medida de risco que representa o risco de um ativo como um único número que compara diferentes ativos.

O *VaR* é uma conceito universal podendo ser aplicado a quase todos os instrumentos financeiros. Sumariza numa única medida todos os riscos de um portfólio, incluindo risco das taxas de juro, das taxas de câmbio, entre outros. O *VaR* também facilita as comparações entre diferentes ativos.

Para estimar o *VaR* são necessários três passos. O primeiro diz respeito à probabilidade da perda exceder o *VaR*, p , que precisa de ser estabelecida para os nível de probabilidade mais comuns de 1% e de 5%. A escolha deste nível de probabilidade é determinante para explicar como o sistema de gestão de risco pretende interpretar o *VaR*.

O segundo passo é o horizonte temporal, que habitualmente é de um dia, mas pode variar consoante as circunstâncias. Aqueles que transacionam diariamente usam um horizonte temporal de um dia, mas para a maior parte dos investidores institucionais e empresas não financeiras será mais benéfico usarem um horizonte temporal mais longo. Quanto maior for o horizonte temporal maior será o *VaR*. E o *VaR* diário é o mais fácil de determinar.

O último passo para cálculo do *VaR* é a escolha da distribuição da probabilidade da função *Profit and Loss* do portfólio. É o aspeto mais importante para a modelação do risco. O procedimento standard é estimar a distribuição usando as observações passadas e um modelo estatístico.

Portanto, para comparar e interpretar o *VaR* é crucial saber a probabilidade e o horizonte temporal, uma vez que sem eles os valores do *VaR* não são precisos.

Habitualmente concluímos que o *VaR* implica a normalidade dos retornos. No entanto, tal pode não ser verdade. É possível usar qualquer distribuição para calcular o *VaR*, desde que a média esteja previamente definida. No entanto, a distribuição mais usada na determinação do *VaR* é a distribuição normal, condicional ou não-condicional.

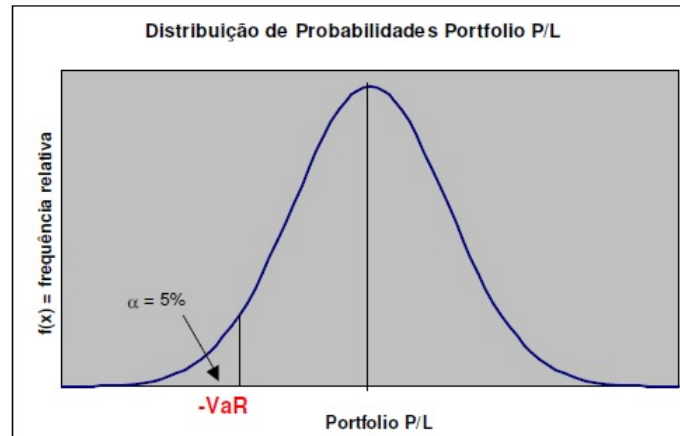


Figura 1.1: *VaR* para um nível de significância de 5%

Existe uma diferença entre os termos, medida de risco (*risk measure*) e medição do risco (*risk measurement*). Enquanto a primeira baseia-se na utilização de modelos matemáticos para calcular o risco, a segunda baseia-se na aplicação da medida de risco, numa base de dados.

O *VaR* continua a ser a medida de risco de eleição de toda a indústria financeira, mesmo tendo as suas falhas. Quando são consideradas as suas propriedades teóricas, os problemas na implementação e no *backtesting* ficam mais claros.

O *VaR* providencia o melhor balanço entre as medidas de risco disponíveis e portanto, dos seus modelos subjacentes.

1.3 Volatilidade

A volatilidade (ou o desvio padrão dos retornos) é uma das medidas de risco mais comuns em termos de análise financeira dos dados.

É uma medida precisa quando os retornos seguem uma distribuição normal, uma vez que a maior parte das propriedades estatísticas da distribuição normal estão em torno da média e da variância. No entanto, o pressuposto da normalidade dos resíduos é violado para a maior parte dos retornos financeiros. Por essa mesma razão, o uso da volatilidade como medida de risco pode levar a resultados errados.

O nível de previsão para a utilização da volatilidade como medida de risco depende, na prática de algumas aplicações específicas. A volatilidade pode ser baixa quando as caudas são gordas (*fat tails*), ou seja, é possível que uma variável com volatilidade baixa tenha resultados mais extremos do que uma variável com uma volatilidade elevada. É por esta razão que a volatilidade pode originar resultados não muito precisos.

Existem dois tipos de volatilidade: condicional, designada por σ_t , e não-condicional, designada por σ , sendo que a volatilidade condicional é a volatilidade medida num pe-

riodo de tempo anterior e a não-condicional é definida como a volatilidade medida num período de tempo longo.

Através dos ciclos de volatilidade podemos prever parcialmente o seu comportamento. A este fenómeno chamamos *clusters* de volatilidade. Quando a volatilidade aumenta, estamos perante um *cluster* de volatilidade mais alto e da mesma forma, quando a volatilidade diminui, estamos perante um *cluster* de volatilidade mais baixo.

1.4 Breve Revisão Bibliográfica

Fallman e Wirf (2010), analisaram a previsão das volatilidades de taxas de câmbio para estimar o *VaR*. Utilizaram a volatilidade realizada e juntamente com os modelos ARMA conseguiram prever o *VaR* com um dia de antecedência. As previsões destes modelos foram comparadas com as previsões dos modelos ARCH baseados nos retornos quadrados diários, onde procuraram encontrar um modelo com uma melhor previsão. Concluíram que os modelos ARCH tendem a subestimar o *VaR* nos mercados cambiais comparando com os modelos de volatilidade realizada.

Por outro lado, Hartman e Sedlak (2013) estudaram o desempenho de dois modelos GARCH multivariados aplicados às taxas de câmbio. Utilizaram a previsões do *VaR* para dois portfólios e fizeram a comparação com o modelo univariado GARCH(1,1) de modo a estudar o efeito de diversificação do portfólio. Avaliaram as estimativas do *VaR* pelo método de *backtesting* de Kupiec e concluíram neste estudo que os modelos multivariados têm uma melhor performance do que o modelo univariado GARCH (1,1).

G. Cera, E. Cera e Lito (2013) analisaram o *VaR* para todas as taxas de câmbio relacionadas com o Euro. Utilizaram o modelo GARCH para medir o *VaR*, considerando esta abordagem a mais apropriada para o seu estudo. O modelo GARCH voltou a ser novamente o mais estável em relação aos outros modelos utilizados.

Vimos também que Marcos Oliveira e Carmona (2008) estudaram o *VaR* dinâmico aplicado à taxa de câmbio do Brasil, Chile e México, utilizando modelos *VaR* homoceásticos e heterocedásticos e a simulação de Monte Carlo. Verificaram que a abordagem dinâmica forneceu suporte à hipótese de eficiência destes mercados, contrariando algumas evidências empíricas. Concluíram também que os modelos do tipo GARCH foram os mais indicados na abordagem para os ativos e períodos estudados.

Furriel (2011) descreveu os modelos heterocedásticos ARCH e GARCH com o intuito de prever e modelar a média e variância condicional de séries financeiras. Analisou algumas extensões dos modelos GARCH, como os modelos IGARCH, EGARCH e CHARMA, e também modelos com volatilidade estocástica.

E por fim, analisámos a tese de Leal (2013) que aplicou modelos, com quebras de estrutura, na previsão e modelação do risco de mercado, associadas ao mercado de capital português. Utilizou o *VaR* como medida de avaliação de risco e preveu não só o *VaR* mas também a volatilidade, com modelos heterocedásticos que também utilizámos nesta tese, como o caso do GARCH, *RiskMetrics*, EGARCH e GJR. Por fim, aplicou os testes de *backtesting* para avaliar a performance das diferentes metodologias de previsão do *VaR*.

Capítulo 2

Métodos Econométricos

2.1 Modelos e Metodologias

Neste capítulo, vamos começar por fazer uma breve apresentação de alguns modelos e conceitos importantes que iremos utilizar mais à frente aquando a aplicação e comparação dos modelos. Os conceitos irão ser abordados de forma sucinta pelo que para uma leitura mais aprofundada sugerimos as seguintes referências bibliográficas: Heij et al. (2004), Brockwell e Davis (2006), Box e Jenkins (1976) e Wooldridge (2009).

2.1.1 Séries Temporais

Quando uma variável é observada continuamente, por um determinado período de tempo, as observações dessa variável formam uma série temporal.

As séries temporais (ou sucessões cronológicas) constituem um conjunto de observações que evoluem ao longo do tempo, observações estas com carácter económico-financeiro relevante, onde o período de tempo entre cada duas observações consecutivas é considerado o mesmo (dia, mês, entre outros).

Denotamos por $\{y_t\}_{t \in T}$ uma série temporal de elementos y_0, y_1, y_2, \dots , onde T é o conjunto do tempo. As equações da média no momento t , da variância no momento t e da covariância nos momentos t e $t - s$ de uma série temporal são dadas por, respetivamente:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[y_t] &= \mu_t = \sum_{t \in T} y_t p(y_t), \quad \forall t \in T \\ \text{Var}(y_t) &= \sigma_t^2 = \mathbb{E}[(y_t - \mu_t)^2] \\ \text{Cov}(y_t, y_{t-s}) &= \mathbb{E}[(y_t - \mu_t)(y_{t-s} - \mu_{t-s})] = \gamma_{t,s}\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

onde μ_t é a média, σ_t^2 é a variância e $\gamma_{t,s}$ a covariância. Se as medidas não dependerem do tempo, então utilizamos a notação μ , σ^2 e γ_s .

2.1.1.1 Estacionaridade

Uma série temporal designa-se fracamente estacionária, quando a média e a variância se mantêm constantes ao longo do tempo e a covariância entre os valores de des-

fasamento (*lags*) depende apenas da distância entre eles.

Na maior parte dos casos, quando provamos que uma série é estacionária, estamos na verdade a provar que esta é fracamente estacionária.

Portanto, para que y_t seja uma série temporal estacionária, as seguintes condições deverão ser satisfeitas:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[y_t] &= \mu && \text{para todo o } t, \\ \mathbb{E}[(y_t - \mu)^2] &= \sigma^2 && \text{para todo o } t, \\ \mathbb{E}[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] &= \gamma_k && \text{para todo o } t.\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

onde μ , σ^2 e γ_k são constantes finitas que não dependem da variável t , sendo μ a média, σ^2 a variância e γ_k a covariância.

Deste modo, a média da série deverá ser constante ao longo do tempo e caso tenha tendência, esta deverá ser removida, assim como a variância deverá ser constante e deverão ser removidas as flutuações sazonais ou mudanças de variância. Desta maneira, também a covariância será constante ao longo do tempo.

Todas as séries que não verifiquem as condições anteriores são designadas por séries não-estacionárias.

O ruído branco é um processo estacionário com média zero, variância constante e não apresenta correlação serial, ou seja, a sua função de autocorrelação é igual a zero. Por outras palavras, podemos dizer que o ruído branco é um processo estacionário com independência serial:

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0;\tag{2.1.3}$$

$$Var[\varepsilon_t] = \sigma^2 < \infty;\tag{2.1.4}$$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}] = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0, s \neq 0\tag{2.1.5}$$

Denotamos um processo ruído branco por $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

Se os elementos de ε_t forem independentes e identicamente distribuídos, e normalmente distribuídos então designamos ε_t como um processo ruído branco Gaussiano, sendo este denotado por $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

A simples observação gráfica de uma série temporal permite-nos tirar algumas conclusões acerca do seu comportamento, nomeadamente a existência de tendência e/ou sazonalidade, permitindo assim verificar numa fase inicial a estacionaridade da série.

Quando verificamos que uma série é não-estacionária, o passo seguinte é estabilizar a mesma. Para esse efeito, podemos utilizar dois tipos de processos: diferenças sucessivas e diferenças logaritmizadas, isto é:

$$\text{Diferenças Sucessivas : } \Delta y_t = y_t - y_{t-1}; \quad \Delta^2 y_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}.\tag{2.1.6}$$

$$\text{Diferenças Logaritmizadas : } \Delta \log y_t = \log y_t - \log y_{t-1}.\tag{2.1.7}$$

onde a série Δy_t denota-se por retornos e a série $\Delta \log y_t$ denota-se por retornos loga-

ritmizados (ou rendibilidades).

Conforme referido, uma das características que podemos observar através do gráfico de uma série é a existência de tendência. As séries não- estacionárias podem apresentar dois tipos de tendência: determinística e estocástica.

Uma série y_t com tendência determinística (linear), em que as suas variações apenas dependem do período temporal, pode ser representada por:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \quad (2.1.8)$$

onde β_0 e β_1 são parâmetros reais e ε_t é um processo ruído branco.

Por outro lado, uma série com tendência estocástica pode ser representada por:

$$z_t = \rho z_{t-1} + \alpha + \varepsilon_t \quad (2.1.9)$$

onde ρ e α são parâmetros reais e ε_t é um processo ruído branco.

Uma questão relevante está relacionada com a verificação do tipo de tendência apresentada pela série. Para tal, vamos considerar o seguinte modelo:

$$z_t = \rho z_{t-1} + \beta_0 + \beta_1 t + u_t \quad (2.1.10)$$

As seguintes conclusões poderão ser tiradas:

- Se estivermos perante um processo estocástico em torno de uma tendência linear, com variância constante, mas média não constante- processo estocástico em tendência puro- então existe tendência determinística ($\rho = 0$);

- Se estivermos perante um processo estacionário com tendência estocástica- processo estacionário em diferenças puro- então $\rho = 1$ e $\beta_1 = 0$ e designamos o processo por passeio aleatório com *drift*;

- Se $\rho = 1$, estamos perante um passeio aleatório com *drift* e tendência determinística;

- Se $0 < \rho < 1$, existe correlação serial em z_t mas este não apresenta tendência estocástica;

- Se $\rho = 1$ e $\beta_0 = \beta_1 = 0$, então estamos perante um processo aleatório sem *drift*, sendo este processo um exemplo clássico de uma série não-estacionária.

2.1.1.2 Teste de Raiz Unitária

Ainda que através da observação gráfica seja possível tirar conclusões acerca do comportamento da série, é sempre necessário confirmar a estacionaridade (ou outras propriedades) da série através de um teste de hipóteses.

Dois dos testes de hipóteses mais abordados para analisar a estacionaridade de uma série temporal são os testes de raiz unitária de Dickey-Fuller, DF, e Dickey-Fuller Aumentado, ADF.

No teste de Dickey-Fuller, o modelo de regressão da equação (2.1.10) é alterado para a seguinte equação:

$$\Delta z_t = z_t - z_{t-1} = (\rho - 1) z_{t-1} + \beta_0 + \beta_1 t + u_t \quad (2.1.11)$$

e o teste de hipóteses é dado por:

$$\begin{aligned} H_0 : \alpha = \rho - 1 = 0 & \text{ (Série não-estacionária)} \\ H_1 : \alpha < 0 & \text{ (Série estacionária)} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

A distribuição deste teste é assimétrica pelo que, para que a hipótese nula não seja rejeitada é necessário determinar os valores críticos próprios. Estes vão variar se os termos do *drift* determinístico forem incluídos na regressão ou não.

Não se rejeita a hipótese nula para valores do teste superiores aos valores críticos determinados para os níveis de confiança de 1%, 5% e 10%. Nestes casos, a série é um passeio aleatório, tem uma raiz unitária ou é não-estacionária.

O teste de Dickey-Fuller deverá ser utilizado quando os erros u_t não têm correlação serial caso contrário, devemos utilizar o teste de Dickey-Fuller Aumentado.

O teste de Dickey-Fuller Aumentado adiciona à regressão, os valores desfasados Δz das variáveis independentes:

$$\Delta z_t = (\rho - 1) z_{t-1} + \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \Delta z_{t-1} + \beta_3 \Delta z_{t-2} + \dots + \beta_s \Delta z_{t-s} + u_t \quad (2.1.13)$$

Schwert (1989) determina a regra seguinte com intuito de determinar o número de *lags* s , a utilizar no teste ADF:

$$\text{Número de lags máx} = \left\lceil 12 \left(\frac{N}{100} \right)^{\frac{1}{4}} \right\rceil \quad (2.1.14)$$

onde N é referente ao tamanho da série e $[x]$ é a parte inteira de x .

Este teste apresenta valores críticos diferentes do teste de Dickey-Fuller. Não é rejeitada a hipótese nula se o valor do teste for superior aos valores críticos para os níveis de confiança de 1%, 5% e 10%.

Dependendo da variável que se pretende estudar, os testes de Dickey-Fuller e Dickey-Fuller Aumentado têm diferentes aplicações possíveis:

H_0 : z_t é um passeio aleatório

H_1 : Série estacionária com média zero

H_0 : z_t é um passeio aleatório com drift

H_1 : Série estacionária com média $\frac{\beta_0}{(1-\rho)}$ (2.1.15)

H_0 : z_t é um passeio aleatório com drift em torno da tendência

H_1 : Série estacionária com média em torno de uma tendência determinística

Uma série não-estacionária em níveis, que se torna estacionária após a aplicação do operador da primeira diferença (ou diferença dos logaritmos) diz-se integrada de ordem 1 e denota-se por $I(1)$.

2.1.1.3 Simulação histórica

A simulação histórica é um método simples de previsão de risco que se baseia no pressuposto de que os retornos observados no passado serão observados no período seguinte.

Na simulação histórica é necessário estimar a distribuição de *Profit and Loss* usando as observações históricas dos retornos. Os diferentes pressupostos utilizados podem originar diferentes previsões de risco.

Cada observação histórica tem o mesmo peso na previsão da simulação histórica, o que poderá ser uma desvantagem quando ocorrem quebras estruturais na volatilidade. No entanto, na ausência destas quebras estruturais, a simulação histórica tende a ser mais eficaz do que recorrendo a outros métodos. Tem menos sensibilidade ao *outlier* ímpar e não incorpora erros na estimação na mesma medida que os métodos paramétricos.

A simulação histórica utiliza a distribuição empírica dos dados para fazer a previsão do risco. Não são assumidos modelos estatísticos nem são estimados parâmetros para os métodos não paramétricos.

Por outro lado, a utilização de métodos paramétricos é baseada na estimação da distribuição dos ativos subjacentes de modo a obter posteriormente as previsões de risco das distribuições estimadas.

A vantagem da utilização da simulação histórica é que quando aplicada aos portfólios, captura diretamente a dependência não linear dos modelos de uma maneira que outros modelos não conseguem fazer.

Existem dois tipos de simulação histórica, a univariada e a multivariada. Na simulação histórica univariada, o *VaR* para a probabilidade p é simplesmente o valor negativo ($T \times p$) no retorno do vetor selecionado, onde T é o número de observações dos retornos

e p o nível de probabilidade; multiplicado pelo valor monetário do portfólio.

A simulação histórica multivariada é muito mais complicada no caso de ativos múltiplos. Em primeiro lugar, será necessário formar um portfólio com os retornos históricos usando os pesos dos portfólios correntes:

$$y_{port} = \sum_{k=1}^K w_k y_k \quad (2.1.16)$$

onde K é o número de títulos do portfólio, $\{y_k = y\}_{t=1}^T$ é a matriz dos retornos dos ativos, w_k é o peso dos ativos e y_{port} o retorno do vetor do portfólio histórico.

2.1.2 Modelos ARMA, ARCH e GARCH

Os modelos univariados são uma classe de modelos que fazem a previsão de variáveis financeiras utilizando apenas as informações contidas nos seus valores passados e valores passados do erro, conforme podemos verificar em Mendes (2013) e em Marta Oliveira (2014). Os modelos univariados que vamos estudar nesta tese são os modelos da família ARMA, ARCH e GARCH.

Os modelos $AR(p)$, $MA(q)$ e $ARMA(p, q)$ são os modelos lineares mais utilizados para fazer previsão e que assumem que a variância é constante- *homocedasticidade*. Por outro lado, os modelos do tipo $ARCH(q)$ e $GARCH(p, q)$ são modelos não-lineares e que não assumem a variância dos erros constante- *heterocedasticidade*. A descoberta destes modelos não-lineares teve um grande impacto em termos econométricos, uma vez que permitiu o estudo da modelação dos *clusters* de volatilidade.

2.1.2.1 Modelos Autoregressivos

2.1.2.1.1 Modelos Autoregressivos de ordem 1, AR(1)

O modelo $AR(1)$ é representado por:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ com } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \quad (2.1.17)$$

onde y_t é explicado pelo y do período anterior acrescido de uma perturbação aleatória do tipo ruído branco.

O modelo $AR(1)$ tem a seguinte média, variância, covariância e função de autocorrelação:

$$\mathbb{E}[y_t] = \frac{a_0}{1 - a_1}; \quad Var(y_t) = \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2}; \quad (2.1.18)$$

$$Cov(y_t, y_{t-s}) = \frac{\sigma^2 (a_1)^s}{1 - (a_1)^2} = \gamma(s); \quad \rho(s) = a_1^s, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

A função de autocorrelação converge lentamente para zero e para valores de $0 < a_1 < 1$, a convergência é monótona. Se $-1 < a_1 < 0$, a convergência é oscilante.

Relativamente à função de autocorrelação parcial, esta converge abruptamente para zero, ao fim do primeiro passo (para definição de ACF e PACF ver Brooks (2008)).

O processo AR(1) é estacionário se e só se $|a_1| < 1$, caso contrário, o processo cresce exponencialmente ao longo do tempo.

2.1.2.1.2 Modelos Autoregressivos de ordem p , AR(p)

Os modelos AR(p) têm a seguinte forma geral:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \text{ com } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \quad (2.1.19)$$

onde p é a ordem de defasamento e ε_t é um processo de ruído branco, ou processo de inovação, que assinala a nova informação recebida no passo t .

A equação (2.1.19) pode ser reescrita em função dos operadores de defasamento:

$$\Phi(L) y_t = a_0 + \varepsilon_t \text{ onde } \Phi(L) = 1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p \quad (2.1.20)$$

O processo AR(p) é estacionário se e só se as raízes $z = \frac{1}{\alpha_i}$ do polinómio

$$\Phi(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_p L^p, \quad (2.1.21)$$

estiverem situadas no exterior do círculo unitário, ou seja, para valores de $|\alpha_i| < 1$.

A função de autocorrelação parcial de um processo AR(p) converge rapidamente para zero ao fim de p passos, enquanto a função de autocorrelação converge lentamente para zero.

2.1.2.2 Modelos de Média Móvel do tipo 1, MA(1)

O modelos MA(1) são definidos por:

$$y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} = (1 + \theta L) \varepsilon_t \text{ onde } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \quad (2.1.22)$$

Neste tipos de modelos, o valor atual da série é dado em função dos processos de inovação atuais e passados.

A média e variância dos modelos MA(1) é dada por:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\varepsilon_t) + \theta E(\varepsilon_{t-1}) = 0; \\ \text{Var}(y_t) &= \text{Var}(\varepsilon_t) + \theta^2 \text{Var}(\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2 = \sigma^2 (1 + \theta^2) \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

E como se pode verificar, a variância vai crescendo à medida que o coeficiente θ cresce.

A função de autocorrelação deste modelo converge abruptamente depois do primeiro passo, ou seja, converge para zero. No caso particular, em que $|\theta| < 1$, o processo

MA(1) pode ser invertido podendo ser representado como um processo autoregressivo:

$$y_t = \varepsilon_t + \phi y_{t-1} + \phi^2 y_{t-2} + \dots \quad (2.1.24)$$

A função de autocorrelação parcial converge gradualmente para zero.

2.1.2.3 Modelos de Média Móvel do tipo q, MA(q)

Um processo MA(q) é representado por:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ &= \varepsilon_t + \theta_1 L \varepsilon_t + \theta_2 L^2 \varepsilon_t + \dots + \theta_q L^q \varepsilon_t \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

ou então por:

$$y_t = \Theta(L) \varepsilon_t, \quad \Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q \text{ onde } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \quad (2.1.26)$$

Desta maneira, a média e a variância são dadas por:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= 0 \\ \text{Var}(y_t) &= (1 + \sigma_1^2 + \dots + \sigma_q^2) \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

A função de autocorrelação destes modelos anula-se para o termo de desfasamento de ordem $(q + 1)$ e a função de autocorrelação parcial converge suavemente para zero.

Os processos MA(q) são fracamente estacionários para todos os valores de $\{\theta_u\}$.

Apresentamos de seguida e de forma resumida, as principais diferenças nas funções de autocorrelação e autocorrelação parcial para os modelos AR(p) e MA(q):

Modelo	Função de Autocorrelação	Função de Autocorrelação Parcial
Ruído Branco	Zero	Zero
MA(1)	Zero após 1.º desfasamento	Decresce após 1.º desfasamento
MA(q)	Zero após q.º desfasamento	Decresce após q.º desfasamento
AR(1)	Decresce após 1.º desfasamento	Zero após 1.º desfasamento
AR(p)	Decresce após p.º desfasamento	Zero após p.º desfasamento

Tabela 2.1: Funções ACF e PACF dos modelos AR(p) e MA(q)

2.1.2.4 Modelos ARMA(p, q)

Os modelos ARMA(p, q) obtêm-se combinando os modelos AR(p) e os modelos MA(q):

$$\begin{aligned} \Phi(L) y_t &= a_0 + \Theta(L) \varepsilon_t \text{ onde } \Phi(L) = 1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p \\ \text{e } \Theta(L) &= 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q \\ \text{ou } y_t &= a_0 + a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t \text{ com} \\ E(\varepsilon_t) &= 0, E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, t \neq s \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

A média de um modelo ARMA(p, q) é dada por:

$$E(y_t) = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_p} \quad (2.1.29)$$

A função de autocorrelação deste tipo de modelos é uma combinação da função de autocorrelação dos modelos AR(p) com a dos modelos MA(q). No entanto, para valores de desfasamento inferior a q a função de autocorrelação vai ser idêntica à função de autocorrelação de um modelo AR(p).

2.1.2.5 Modelos ARCH/GARCH

A estrutura linear dos modelos apresentados anteriormente não explica algumas propriedades financeiras importantes, como o caso da leptocurtose, dos *clusters* de volatilidade e do efeito de alavancagem. Desta forma, surgiu a necessidade de criar um modelo não-linear que explicasse estes fenómenos e que não assumisse variância constante, de modo a incluir a heterocedasticidade.

Os modelos ARCH (*Autoregressive Conditionally Heteroscedastic*), propostos por R. F. Engle (1982), são definidos por duas partes distintas: a primeira parte que contém a equação da média condicional e a segunda, que contém a equação da variância condicional e que depende da informação dos momentos anteriores.

O modelo ARCH(1) completo para a variância dos erros, é definido por:

$$\begin{aligned} \text{Equação da Média: } y_t &= \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \dots + \beta_k y_{t-k} + u_t, u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \text{Equação da Variância: } \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Para o caso geral, o modelo ARCH(q) é definido por:

$$\begin{aligned} \text{Equação da Média: } y_t &= \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \dots + \beta_k y_{t-k} + u_t, u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \text{Equação da Variância: } \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

Nos modelos ARCH(q), a variância depende dos q desfasamentos dos erros quadrados. A grande vantagem deste tipo de modelo é o fato de as variâncias poderem ser modeladas permitindo que este seja enquadrado nos modelos ARMA. No entanto, o fato de não ser possível saber o valor certo de q e de haver a possibilidade de serem utilizados valores demasiados elevados torna-se uma desvantagem para o modelo. Outra desvantagem, é que a condição $\alpha_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, q$ tem de ser obrigatoriamente verificada,

uma vez que a variância não pode ser negativa.

O teste de hipótese que estuda a evidência de efeitos ARCH é dado por:

$$\begin{aligned} H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0 \\ H_1 : \alpha_1 \neq 0 \text{ ou } \alpha_2 \neq 0 \text{ ou } \dots \alpha_q \neq 0 \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

Caso o valor da estatística de teste seja maior que o valor crítico da distribuição χ^2 , é rejeitada a hipótese nula, concluindo-se a evidência de efeitos ARCH, ou seja, a existência de autocorrelação nos quadrados dos resíduos que refletem os *clusters* de volatilidade observados nos retornos dos resíduos.

O modelo GARCH (*Generalised* ARCH) é uma extensão do modelo ARCH, proposto por Bollerslev (1986), que permite que a variância condicional seja dependente dos seus próprios desfasamentos.

O modelo GARCH(1, 1) é definido por:

$$\begin{aligned} \text{Equação da Média: } y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \dots + \beta_k y_{t-k} + u_t, u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \text{Equação da Variância: } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \gamma \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

A equação da variância deste modelo corresponde à equação de um modelo do tipo ARMA(1, 1). O termo σ_t^2 é a variância condicionada, ou volatilidade, α_0 o termo independente (constante), u_{t-1}^2 o termo de volatilidade, que nos dá a informação acerca da volatilidade do período anterior e σ_{t-1}^2 a variância prevista do último período.

Um modelo do tipo GARCH(p, q) é definido por:

$$\begin{aligned} \text{Equação da Média: } y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \dots + \beta_k y_{t-k} + u_t, u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \text{Equação da Variância: } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \\ + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \sigma_{t-2}^2 + \dots + \gamma_p \sigma_{t-p}^2 \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

com $\alpha_i > 0$ e $\gamma_j > 0$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$.

Na maior parte dos casos empíricos, o modelo GARCH(1, 1) é suficiente para capturar os *clusters* de volatilidade dos dados.

O modelo GARCH(0, q) é equivalente ao modelo ARCH(q). Financeiramente, é possível interpretarmos esta equivalência dos modelos uma vez que quando um agente provisiona a variância presente é formada uma média condicionada de uma média a longo prazo (a variável independente), uma variância prevista no período anterior (o termo GARCH) e a informação relativamente à volatilidade prevista no período anterior (o termo ARCH). A estimativa da variância para o período seguinte cresce consoante o crescimento ou decréscimo do retorno dos ativos.

Esta equivalência de modelos também explica os *clusters* de volatilidade observados

nos dados financeiros, uma vez que alterações significativas nos retornos conduzem a alterações nas regressões.

O efeito dos choques a longo prazo é obtido através da variância não-condicional de u_t . Esta é dada por:

$$Var(u_t) = \frac{\sigma_0}{1 - (\sigma_1 + \gamma)} \quad (2.1.35)$$

A partir da equação anterior, verificamos que:

- Quando $(\sigma_1 + \gamma) < 1$, a variância é finita e garantimos a estacionaridade;
- Se $(\sigma_1 + \gamma) \geq 1$, os valores previstos da variância condicional não convergem para os seus valores não condicionados- não-estacionaridade em variância;
- Se $(\sigma_1 + \gamma) = 1$, designamos este processo por GARCH integrado, onde os choques do passado não se dissipam e persistem por grandes períodos temporais.

O método de estimativa OLS não deve ser utilizado nos modelos ARCH e GARCH, devendo-se optar pelo método de máxima verosimilhança, para estimar os parâmetros do modelo.

Para estimar o modelo, devemos especificar uma equação apropriada para a média e para a variância, como por exemplo de um modelo AR(1)-GARCH(1, 1):

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + \phi y_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

e especificar a função log-verosimilhança, L , de modo a maximizar a mesma e obter os valores estimados dos parâmetros e erros padrão:

$$L = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu - \phi y_{t-1})^2}{\sigma_t^2} \quad (2.1.37)$$

Tal qual como em qualquer modelo de regressão, é necessário testar a normalidade dos resíduos, u_t . Nos modelos ARCH/GARCH devemos utilizar a seguinte representação:

$$\begin{aligned} u_t &= v_t \sigma_t, \quad v_t \sim N(0, 1) \\ \sigma_t &= \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-2}^2} \\ v_t &= \frac{u_t}{\sigma_t} \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

onde $\hat{v}_t = \frac{\hat{u}_t}{\hat{\sigma}_t}$ vão ser os resíduos standartizados. Estes vão ser leptocúrticos, um dos sinais da heterocedasticidade, mas menos leptocúrticos que os \hat{u}_t .

Deverá ser utilizado o método QML (*Quasi-Maximum Likelihood*), um estimador robusto de variância e covariância.

De modo a ultrapassar alguns dos principais problemas dos modelos GARCH, como o caso das condições de não-negatividade e da impossibilidade de identificar os efeitos *leverage*, foram desenvolvidas algumas extensões deste modelo. Brooks (2008), fala

de duas extensões assimétricas do modelo GARCH e muito utilizadas: os modelos GJR (*Glosten, Jaganathan and Runkle*) e EGARCH (*Exponential-GARCH*).

O modelo GJR é uma simples extensão do modelo GARCH com um termo adicional para identificar possíveis assimetrias. A variância condicional neste modelo é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma u_{t-1}^2 I_{t-1} \text{ onde} \\ I_{t-1} &= \begin{cases} 1 & \text{se } u_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{se caso contrário} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

Para um efeito *leverage* deveremos ter $\gamma > 0$ e a condição de não-negatividade requer que $\alpha_1 + \gamma \geq 0$ e $\alpha_1 \geq 0$.

No modelo EGARCH existem várias maneiras de expressar a variância condicional. Uma das possibilidades é:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma \frac{u_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + \alpha \left[\frac{|u_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \quad (2.1.40)$$

Neste modelo, $\ln(\sigma_t^2)$ faz com que σ_t^2 seja positivo, mesmo que os parâmetros sejam negativos.

Por outro lado, a assimetria permite que, mesmo que a relação entre a volatilidade e os retornos seja negativa, γ será negativo. O modelo EGARCH pressupõe que os choques negativos vão ter um maior impacto sobre a volatilidade devido ao efeito de alavancagem.

Outra extensão do modelo GARCH é o modelo GARCH *in Mean*, GARCH-M, proposto por R. Engle, Lilien e Robins (1987). Neste modelo, é adicionada a equação da média condicional, na variância condicional dos retornos dos ativos. Esta especificação foi aplicada inicialmente nos modelos ARCH *in Mean*, ARCH-M e foi reajustada nos GARCH-M, uma vez que atualmente são mais utilizados para fazer estimativas. Um exemplo deste modelo, é dado por:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + \delta \sigma_{t-1} + u_t, u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (2.1.41)$$

onde δ é o prémio de risco.

Estes modelos são utilizados em aplicações financeiras onde o retorno esperado de um ativo está relacionado com o risco esperado desse ativo. O coeficiente estimado de risco é uma medida de *risk-return trade-off*.

2.2 Métodos de *Backtesting*

Como vimos em Danielsson (2011) e em Campbell (2005) e conforme recomendado pelo *Basel Committee Banking Supervision (1998)*, os testes de *backtesting* são um conjunto de procedimentos utilizados para testar vários modelos de risco. São muito úteis para identificar as falhas dos modelos de previsão de risco e promover ideias para melhorar os mesmos. No entanto, não conseguem identificar as causas das falhas dos modelos.

Os modelos que não tiverem um bom desempenho durante os *backtesting* deverão ter os seus pressupostos e parâmetros questionados e reformulados.

Os testes de *backtesting* podem impedir que haja uma subestimação do *VaR* e asseguraram que os bancos têm o capital adequado para fazer face a eventuais perdas, devidas a eventos inesperados. Por outro lado, os *backtesting* podem reduzir a probabilidade de sobrestimar o *VaR*, fazendo com que os bancos não conservem mais capital do que o necessário.

Com o intuito de avaliar a qualidade das estimativas, os modelos devem ser sempre testados com métodos adequados.

Vamos de seguida falar de dois testes que medem a precisão da medida *VaR*. São estes, o teste de cobertura não-condicional e o teste de cobertura condicional.

2.2.1 Teste de Cobertura não-condicional ou de Kupiec

Nos testes de *backtesting*, há uma análise estatística que examina se a frequência da ocorrência das exceções num determinado intervalo de tempo está em linha com o nível de confiança. A este tipo de testes designamos por cobertura não-condicional. Este teste numera as exceções do *VaR*, isto é, o número de dias (ou outros períodos temporais) quando as perdas de um portfólio excedem as estimativas do *VaR*. Caso contrário, muitas exceções são sinal de um *VaR* subestimado.

2.2.1.1 Testes de *Proportion of failures*, POF

Um dos testes de Kupiec, ou também conhecidos por testes de *Proportion of failures*, POF, verificam se o numero de exceções é consistente com o nível de confiança. Sob a hipótese nula de o modelo ser bom, o número de exceções segue uma distribuição binomial.

A hipótese nula deste teste é dada por:

$$H_0: p = \hat{p} = \frac{x}{T}, \text{ onde}$$
$$p = (1 - c) = \text{taxa de falha}$$
$$\hat{p} = \text{taxa de falha observada} \tag{2.2.1}$$
$$x = \text{número de exceções}$$
$$T = \text{número total de observações}$$
$$c = \text{nível de confiança}$$

O objetivo deste teste é encontrar a taxa de falha observada, \hat{p} , que pode ser significativamente diferente de p . Para tal, o teste POF deverá ser testado através do teste *Likelihood Ratio*, LR , isto é:

$$LR_{POF} = -2 \ln \left(\frac{(1-p)^{T-x} p^x}{\left[1 - \left(\frac{x}{T}\right)\right]^{T-x} \left(\frac{x}{T}\right)^x} \right) \quad (2.2.2)$$

Neste teste, a hipótese nula verifica que o modelo é adequado. A estimativa LR_{POF} é assintoticamente χ^2 distribuída com um grau de liberdade. Se o valor da estatística de teste, LR_{POF} , for superior ao valor crítico da distribuição χ^2 , a hipótese nula será rejeitada e o modelo não é adequado (não é preciso).

2.2.1.2 Teste de *Time until first failure*, TUFF

Kupiec sugeriu outro tipo de teste designado por *Time until first failure*, TUFF. Este teste mede o tempo, ν , até à primeira exceção ocorrer e baseia-se nos mesmos pressupostos do teste anterior.

A estatística LR para este teste é dada por:

$$LR_{TUFF} = -2 \ln \left(\frac{p (1-p)^{\nu-1}}{\left(\frac{1}{\nu}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\nu-1}\right)} \right) \quad (2.2.3)$$

Se a estatística de teste do modelo for menor que o valor crítico, o modelo é aceite.

2.2.2 Teste de Cobertura Condicional ou de Christoffersen

O teste de Cobertura Condicional junta em simultâneo as propriedades de cobertura não-condicional e da independência das exceções. Neste teste, espera-se que as exceções sejam identicamente distribuídas ao longo do tempo.

No teste de independência verificamos que enquanto a cobertura não-condicional estabelece uma restrição no número de violações da medida VaR que podem ocorrer, a independência estabelece uma restrição na medida em que estas violações ocorrerem.

Um *clustering* de violações na medida VaR representa violações na propriedade de independência, o que faz com que haja uma falta de capacidade de resposta na medida VaR . Desta forma, os riscos de mercado não conseguem ser incorporados nesta medida, fazendo com que seja mais provável a ocorrência de novas violações do VaR .

Apesar das propriedades da cobertura não-condicional e da independência serem distintas, ambas deverão ser satisfeitas para termos um modelo VaR preciso.

Um modelo particular do VaR pode resultar de uma *hit sequence* que satisfaz a propriedade de cobertura não-condicionada, mas não a de independência. Da mesma forma, outro modelo VaR pode resultar de uma *hit sequence* que satisfaz a propriedade de independência mas não a de cobertura não-condicional. Apenas as *hit sequences* que satisfaçam as duas propriedades podem ser descritas como evidência de um modelo VaR

preciso.

Um dos testes de independência influentes, descrito em por Christoffersen (1988), é o teste de Markov. Este teste examina se a estimativa *Likelihood* de uma violação do *VaR* depende ou não das violações do *VaR* ocorridas no dia anterior. Se a precisão da medida *VaR* refletir o portfólio de risco então a possibilidade de violação da medida *VaR* naquele dia deverá ser independente da ocorrência (ou não ocorrência) da violação da medida *VaR* no dia anterior.

Outro teste de independência sugerido por Christoffer and Pelletier (2004), testa a hipótese de que se as violações da medida *VaR* forem completamente independentes umas das outras, então o tempo decorrido entre as violações da medida *VaR* deverão ser independentes do tempo decorrido desde a última violação. Desta maneira, o tempo entre as violações não deverá exibir nenhuma duração dependente.

Os bons modelos *VaR* reagem a alterações na volatilidade e nas correlações de maneiras a que as exceções ocorridas sejam independentes umas das outras. No entanto, os maus modelos *VaR* tendem a produzir uma sequência de exceções, segundo Finger (2005). Os testes de Cobertura Condicional tentam lidar com os *clustering* de exceções não só examinando a frequência das violações do *VaR*, mas também quando estas ocorrem.

O teste de Cobertura Condicional que vamos apresentar foi proposto por Christoffersen (1988), onde a estatística *LR* é dada por:

$$LR_{CC} = LR_{POF} + LR_{Ind} \sim \chi^2_{(2)} \quad (2.2.4)$$

onde LR_{POF} é a estatística do teste de Kupiec, e LR_{Ind} é a estatística do teste de independência. LR_{CC} segue uma distribuição χ^2 com dois graus de liberdade, uma vez que temos duas estatísticas separadas *LR* neste teste.

Neste teste, se o valor da estatística LR_{CC} estiver abaixo do valor crítico da distribuição χ^2 , o modelo não é rejeitado.

Capítulo 3

Apresentação e análise dos resultados obtidos

Neste capítulo, vamos fazer uma análise estatística dos dados considerados, escolher os modelos que melhor ajustam os dados e interpretar os resultados obtidos, tendo como principal objetivo os modelos de volatilidade e a previsão do *Var*.

Os dados são referentes à taxa de câmbio EUR/USD, que representa a taxa de câmbio entre as divisas de duas grandes economias. O EUR/USD foi criado em 1999 para facilitar o comércio entre a Europa e os seus parceiros, e é hoje uma das taxas de câmbio mais utilizadas no mundo.

Os dados apresentados foram retirados da *Bloomberg*. Apresentam uma frequência diária e estão compreendidos entre 1 de janeiro de 2009 a 30 de junho de 2015. Apresentamos um total de 1694 observações.

3.1 Dados e análise estatística

Começamos o estudo representando graficamente a série das taxas de câmbio EUR/USD, que vamos denotar por EURUSD.

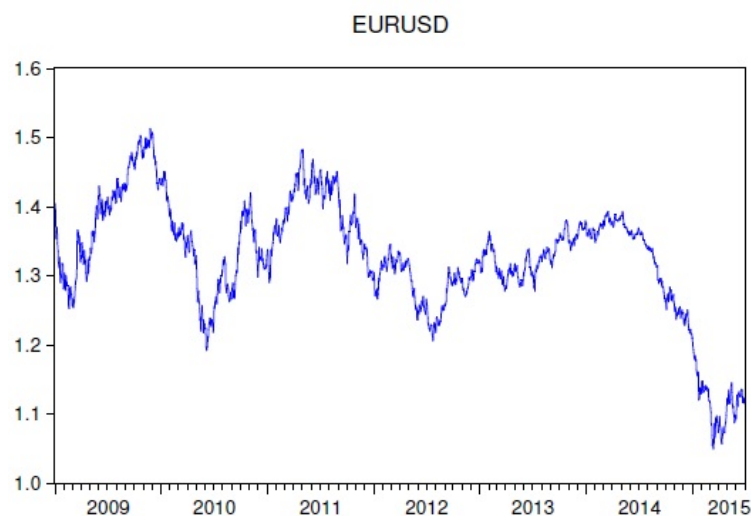


Figura 3.1: Representação gráfica da série EURUSD

Pela análise do gráfico, verificamos que a série aparenta ser não-estacionária, sendo observados períodos de variâncias diferentes. Apresenta uma tendência alternada durante este período, sendo que cresce de março a dezembro de 2009, de junho de 2010 a abril de 2011 e de julho de 2012 a julho de 2014. A série é decrescente nos restantes períodos.

Tentámos encontrar uma explicação económica para o comportamento da série e verificámos que um dos principais fatores está relacionado com as taxas de referência do *Federal Funds Rate*, FED, e com as taxas de referência do Banco Central Europeu, BCE.

De seguida, apresentamos a evolução das taxas de juro de referência do FED e do BCE.

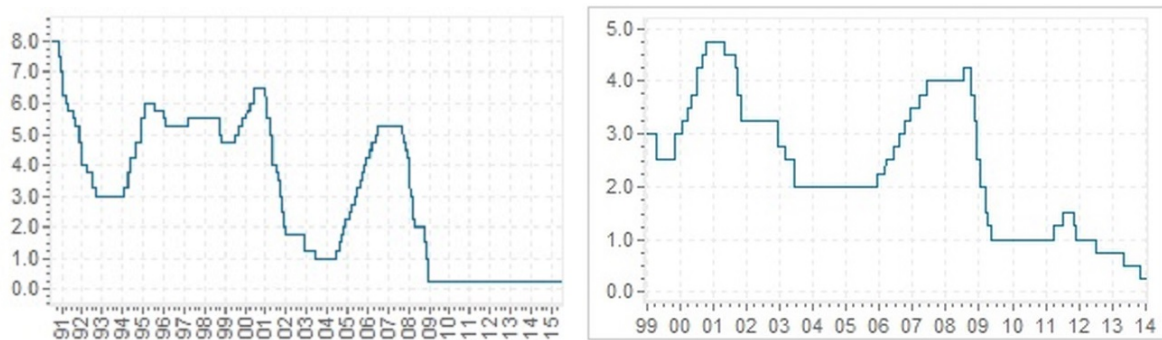


Figura 3.2: Representações gráficas das taxas de referência do FED e BCE, respetivamente

As oscilações críticas da série EURUSD começam sensivelmente no final do ano 2007. Analisando os gráficos das taxas de referência do FED e do BCE, verificamos que foi também neste período que as taxas de referência começaram a oscilar: no caso das taxas do FED sofrem um decréscimo acentuado de 2007 até 2009, relacionado principalmente com a falência do banco *Lehman Brothers*, o início da crise do *Subprime* e com as alterações das classificações de *rating*; e no caso do BCE, as taxas crescem até meados de 2008 e só posteriormente começam a baixar.

A crise começou primeiro nos Estados Unidos da América e as taxas de referência do FED começaram a baixar, o Dólar (USD) começou a desvalorizar-se face ao Euro (EUR), o que fez com que as taxas de câmbio EUR/USD aumentassem neste período. Por outro lado, quando se desencadeou a crise na Europa, as taxas de referência do BCE começaram a baixar. Consecutivamente a moeda desvalorizou e as taxas de câmbio EUR/USD começaram a diminuir.

Voltando ao comportamento da série, vamos agora fazer uma análise das suas estatísticas descritivas. O histograma (ilustrado na Figura 3.3) sugere a não normalidade da série. Rejeita-se a hipótese nula do teste de Jarque-Bera, ou seja, a série não é normal para todos os níveis de significância. A mesma apresenta média diferente de zero, assimetria negativa (Skewness), uma vez que a média é menor do que a mediana. O valor do

coeficiente de Curtose é superior a 3, pelo que a distribuição é leptocúrtica.

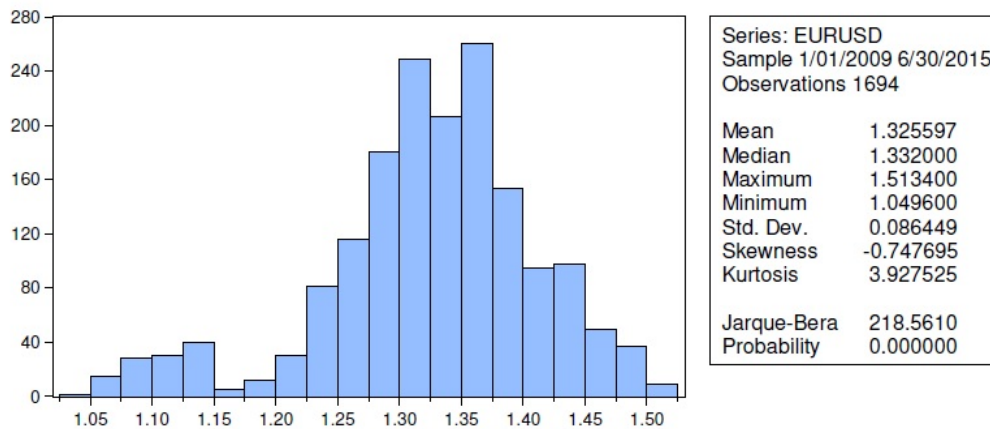


Figura 3.3: Histograma e respetivas estatísticas descritivas da série EURUSD

Para confirmarmos a não-estacionaridade da série, recorreremos ao teste de raiz unitária ADF que pode ser observado na Figura 3.4.

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on EURUSD

Null Hypothesis: EURUSD has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.344802	0.6105
Test critical values:		
1% level	-3.434009	
5% level	-2.863043	
10% level	-2.567618	

Figura 3.4: Teste de Dickey-Fuller Aumentado, ADF, para a série EURUSD

Como o *p-value* deste teste é superior a qualquer nível de significância, não se rejeita a hipótese nula e a série é não-estacionária, apresentando assim uma raiz unitária.

Uma vez que a série EURUSD é não-estacionária, vamos tentar estabilizar a mesma, utilizando o operador primeira diferença dos logaritmos da série. Designámos a série das rendibilidades assim obtida por DLEURUDS.

A representação gráfica da série DLEURUDS pode ser observada na Figura 3.5.

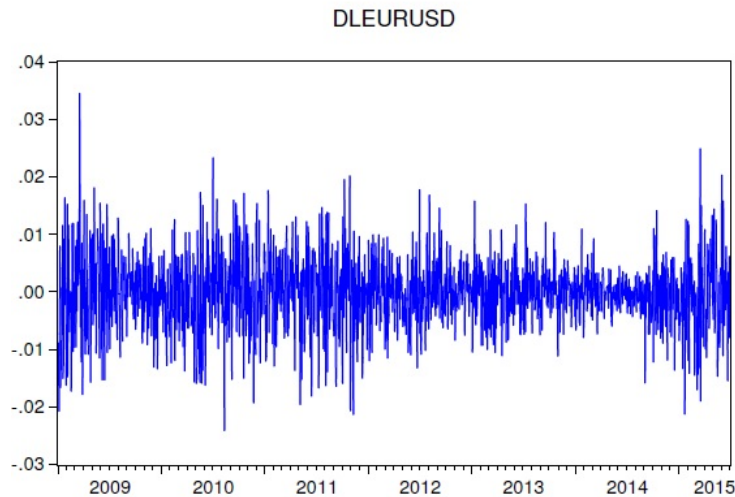


Figura 3.5: Série temporal diferenças logaritmizadas da taxa de câmbio EUR/USD

Através do gráfico verificamos que a série das diferenças logaritmizadas aparenta ter um comportamento estacionário. Observam-se os *clusters* de volatilidade, um dos fatos estilizados das séries financeiras.

Fazendo uma análise das suas estatísticas descritivas e analisando o histograma, verificamos que a série não segue uma distribuição normal, pois rejeita-se a hipótese nula do teste de Jarque-Bera, e a Curtose é superior a 3 (distribuição leptocúrtica).

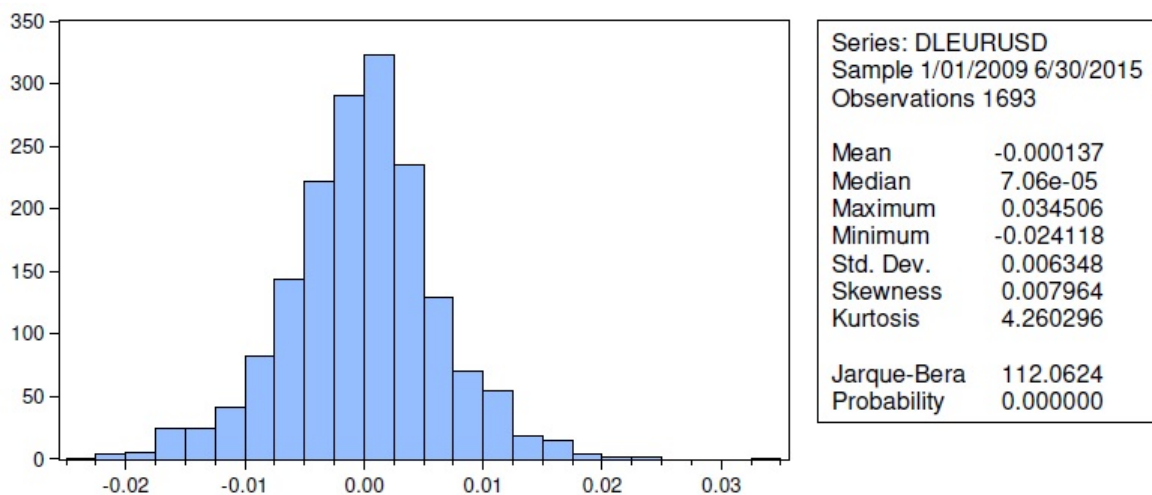


Figura 3.6: Histograma e respectivas estatísticas descritivas da série DLEURUSD

Para analisar a estacionaridade da série das rendibilidades, aplicamos o teste Dickey-Fuller Aumentado. O *p-value* deste teste é zero, pelo que rejeitamos a hipótese nula, logo a série não tem uma raiz unitária, sendo portanto estacionária. Concluimos assim que a série é integrada de ordem 1, $I(1)$, uma vez que a série da primeira diferença dos logaritmos é estacionária:

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on DLEURUSD

Null Hypothesis: DLEURUSD has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-41.67355	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.434011	
5% level	-2.863044	
10% level	-2.567618	

Figura 3.7: Teste de Dickey-Fuller Aumentado, ADF

No que segue, vamos analisar o correlograma da série das rendibilidades com o objetivo de obter um modelo da família ARMA que se ajuste aos dados. O correlograma pode ser observado na Figura 3.8.

Correlogram of DLEURUSD

Date: 09/07/15 Time: 21:28						
Sample: 1/01/2009 6/30/2015						
Included observations: 1693						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.013	-0.013	0.3091	0.578
		2	0.012	0.012	0.5538	0.758
		3	-0.047	-0.046	4.2524	0.235
		4	-0.005	-0.006	4.2895	0.368
		5	0.028	0.029	5.6656	0.340
		6	0.039	0.038	8.3141	0.216
		7	0.002	0.002	8.3241	0.305
		8	0.010	0.012	8.5054	0.386
		9	-0.020	-0.016	9.1887	0.420
		10	0.002	0.001	9.1993	0.513
		11	0.028	0.027	10.491	0.487
		12	-0.001	-0.004	10.493	0.573
		13	0.031	0.030	12.148	0.516
		14	-0.032	-0.028	13.869	0.460
		15	-0.006	-0.006	13.933	0.531
		16	-0.027	-0.026	15.198	0.510
		17	0.010	0.005	15.366	0.569
		18	-0.005	-0.007	15.412	0.633
		19	0.014	0.010	15.754	0.674
		20	-0.008	-0.003	15.856	0.726
		21	0.039	0.040	18.477	0.619
		22	-0.017	-0.012	18.965	0.647
		23	-0.018	-0.021	19.523	0.671
		24	0.009	0.011	19.676	0.715
		25	-0.012	-0.013	19.945	0.750
		26	-0.035	-0.040	22.094	0.684
		27	0.022	0.023	22.959	0.687
		28	0.021	0.023	23.721	0.696
		29	0.010	0.008	23.887	0.734
		30	0.001	0.002	23.889	0.777
		31	0.028	0.034	25.253	0.756
		32	-0.006	-0.008	25.318	0.793
		33	-0.026	-0.027	26.466	0.783
		34	-0.028	-0.030	27.799	0.765
		35	0.044	0.045	31.075	0.658
		36	0.008	0.007	31.180	0.697

Figura 3.8: Correlograma da série DLEURUSD

Obtivemos os valores das funções de autocorrelação, ACF, e autocorrelação parcial,

PACF , para os desfasamentos especificados. As linhas a tracejado correspondem a um intervalo limitado entre $-\frac{2}{\sqrt{1694}} \simeq -0.048592953$ e $\frac{2}{\sqrt{1694}} \simeq 0.048592953$. Obtivemos um valor da estatística Q com 36 graus de liberdade de 31.180 e uma vez que este valor é inferior ao valor crítico $\chi_{36}^2(0.05) = 50.9985$, não rejeitamos a hipótese nula (H_0 : Não existe autocorrelação até à ordem k). Portanto, a série das rendibilidades aparenta ser um processo de ruído branco. Assim, um primeiro modelo que vamos definir para a série das rendibilidades é um modelo AR(0), ou seja, $\Delta \log(y_t) = \alpha_0 + \varepsilon_t$.

Para os resíduos desse modelo vamos estudar o correlograma do quadrados dos resíduos e investigar eventuais efeitos ARCH.

Analisámos o correlograma do quadrado dos resíduos e como podemos constatar pela figura seguinte, ambas as funções ACF e PACF saem fora do intervalo limitado. A função de autocorrelação parcial aparenta uma convergência abrupta para zero. O valor da estatística Q com 36 graus de liberdade é 520.17 e como este valor é superior ao valor crítico $\chi_{36}^2(0.05) = 50.9985$, rejeitamos a hipótese nula, logo existe autocorrelação no quadrado dos resíduos, o que constitui uma evidência de efeitos ARCH.

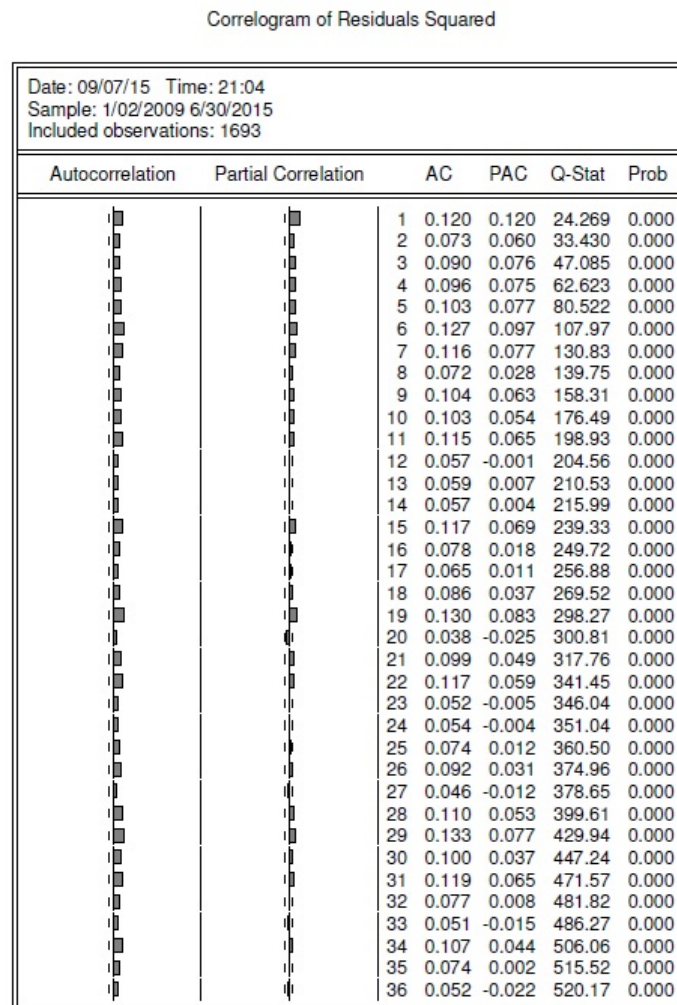


Figura 3.9: Correlograma do quadrado dos resíduos

Complementámos a investigação de evidência de efeitos ARCH na série, através do teste heterocedasticidade. Na Figura 3.10, verificamos que a variância não é constante: *p-value* inferior a qualquer nível de significância pelo que rejeita-se a hipótese nula (H_0 : variância constante). Desta forma, concluímos que existem efeitos ARCH nos dados e portanto faz sentido analisarmos modelos não-lineares de heterocedasticidade para as rendibilidades da taxa de câmbio EUR/USD.

Heteroskedasticity Test: ARCH			
F-statistic	24.53911	Prob. F(1,1690)	0.0000
Obs*R-squared	24.21652	Prob. Chi-Square(1)	0.0000

Figura 3.10: Teste de heterocedasticidade- ARCH

De seguida, analisámos alguns modelos heterocedásticos como o GARCH (1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana e distribuição condicionada *t-student*; e duas extensões do modelo GARCH: EGARCH (1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana e distribuição condicionada *t-student*. Em todos os casos, a equação da média é dada por $\Delta \log(y_t) = \alpha_0 + \varepsilon_t$. Os *outputs* dos modelos estudados estão apresentados no Anexo A.

Verificada a significância dos parâmetros e a estacionaridade dos modelos, a tabela 3.1 apresenta de forma sucinta alguma informação sobre os mesmos.

Modelos	Akaike Info Criterion	Schwarz Criterion	Kurtosis	Skewness
GARCH (1,1) Gaussiana	-7,43703	-7,42419	4,02735	-0,11916
t-GARCH (1,1)	-7,45494	-7,43889	4,31771	-0,15989
EGARCH (1,1) Gaussiana	-7,44406	-7,42801	3,86903	-0,12121
t-EGARCH (1,1)	-7,45858	-7,43932	3,98889	-0,13268

Tabela 3.1: Desempenho dos modelos heterocedásticos testados

O melhor modelo obtido é o modelo EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada *t-student*, uma vez que apresenta os valores mais baixos segundo os critério de informação de Akaike e de Schwarz e os resíduos têm um coeficiente de Curtose próximo de 3.

Vamos então fazer uma análise mais detalhada acerca deste modelo, analisando o *output* apresentado na Figura 3.11.

Dependent Variable: DLEURUSD				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Student's t distribution				
Date: 09/07/15 Time: 21:09				
Sample (adjusted): 1/02/2009 6/30/2015				
Included observations: 1693 after adjustments				
Convergence achieved after 18 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
LOG(GARCH) = C(2) + C(3)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(4)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(5)*LOG(GARCH(-1))				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000177	0.000124	-1.423433	0.1546
Variance Equation				
C(2)	-0.091578	0.026625	-3.439504	0.0006
C(3)	0.069490	0.016981	4.092149	0.0000
C(4)	-0.033652	0.008342	-4.034252	0.0001
C(5)	0.996377	0.001973	504.8933	0.0000
T-DIST. DOF	10.86983	2.542477	4.275291	0.0000
R-squared	-0.000040	Mean dependent var	-0.000137	
Adjusted R-squared	-0.000040	S.D. dependent var	0.006348	
S.E. of regression	0.006348	Akaike info criterion	-7.458576	
Sum squared resid	0.068190	Schwarz criterion	-7.439317	
Log likelihood	6319.684	Hannan-Quinn criter.	-7.451445	
Durbin-Watson stat	2.024905			

Figura 3.11: Estimação do modelo EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada *t-student*

Na equação da média, o *p-value* é superior a qualquer nível de significância, pelo que o *intercept* é nulo.

Na equação da variância, todos os coeficientes são significativos para explicar o modelo (são rejeitadas as hipóteses nulas destes testes). O coeficiente de assimetria *c(4)* é negativo, o que permite-nos concluir que a variância cresce mais depois de impactos negativos do que impactos positivos; e o coeficiente *c(5)* (parâmetro de persistência) é muito elevado, o que faz com que a variância se movimente muito devagar ao longo do tempo.

A soma dos coeficientes das variáveis independentes é muito próxima de 1 ($-0,091578 + 0,069490 - 0,033652 + 0,996377 \approx 1$), pelo que concluímos que os *clusters* de volatilidade são persistentes, ou seja, não se dissipam e persistem por longos períodos de tempo.

Passando à análise dos resíduos (Figura 3.12) verificamos que os resíduos apesar de não serem normalmente distribuídos (*p-value* inferior a qualquer nível de significância) apresentam características próximas da normalidade (média zero, Curtose próximo de 3 e o valor da estatística de Jarque-Bera pouco elevado).

De referir que os resíduos leptocúrticos (moderados neste caso) estão relacionados com os *clusters* de volatilidade persistentes e que observámos aquando a representação gráfica da série. Estes *clusters* de volatilidade fazem com que seja mais difícil chegarmos a um modelo em que os resíduos verifiquem as características de ruído branco Gaussiano.

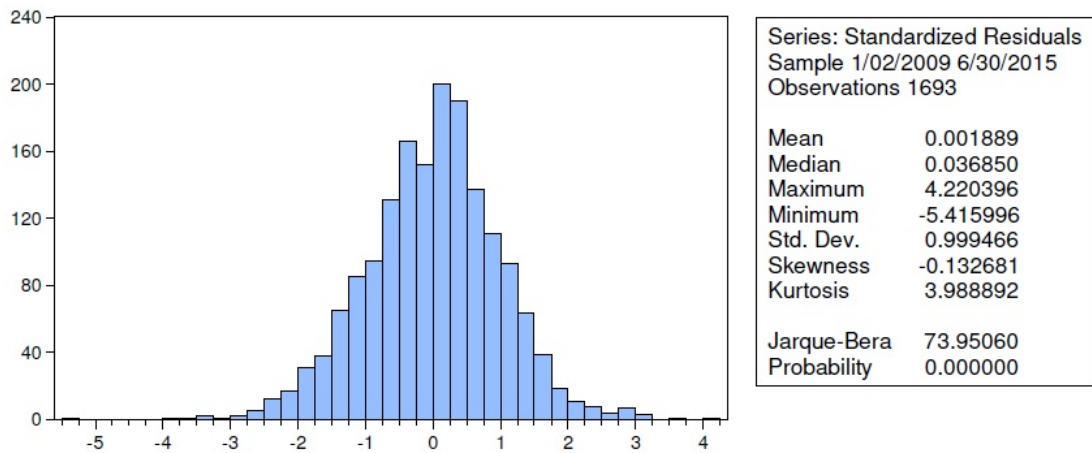


Figura 3.12: Resíduos da série DLEURUSD quando aplicado ao modelo EGARCH(1,1) com distribuição condicionada *t-student*

Fomos analisar também o correlograma dos resíduos, representado na Figura 3.13, para testar a independência dos mesmos.

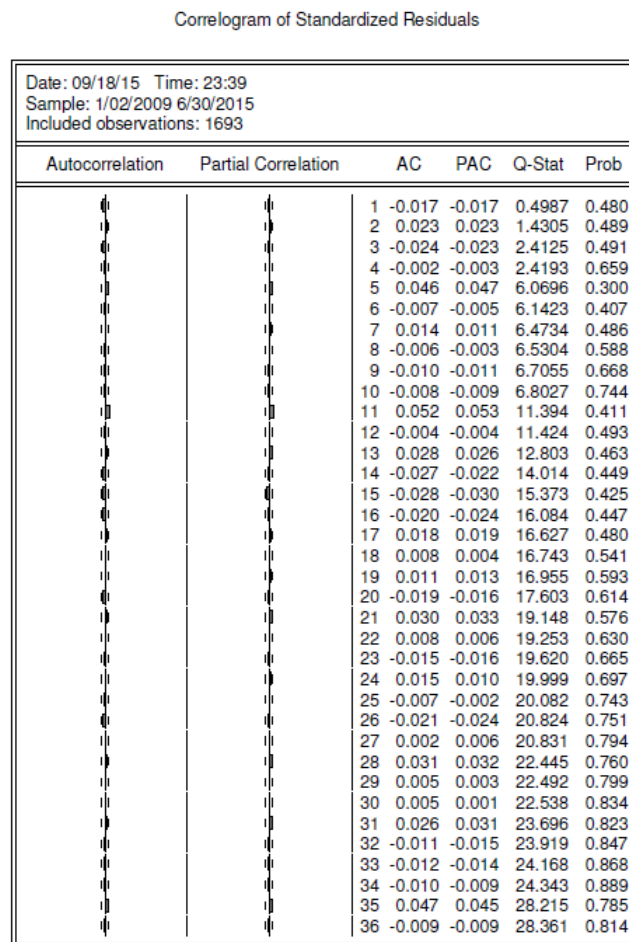


Figura 3.13: Correlograma dos resíduos do modelo EGARCH(1,1) com distribuição condicionada *t-student*

Verificámos que as funções de ACF e PACF se encontram dentro do intervalo limi-

tado, o que nos indica que já não existe informação nos resíduos (o valor da estatística Q com 36 graus de liberdade é de 28.361 e como este valor é inferior ao valor crítico $\chi_{36}^2(0.05) = 50.9985$, não rejeitamos a hipótese nula). Assim, podemos concluir que não existe autocorrelação nos resíduos e que os mesmos são independentes.

O teste de heterocedasticidade, representado na Figura 3.14, permitiu-nos concluir que a variância dos resíduos é constante, uma vez que o *p-value* deste teste é superior a qualquer nível de significância e portanto não rejeitamos a hipótese nula. O que significa que já não existem efeitos ARCH nos resíduos, sendo que o modelo considerado conseguiu capturar de forma bastante eficiente a volatilidade dos dados.

Heteroskedasticity Test: ARCH			
F-statistic	0.024557	Prob. F(1,1690)	0.8755
Obs*R-squared	0.024585	Prob. Chi-Square(1)	0.8754

Figura 3.14: Teste de heterocedasticidade para os resíduos do modelo EGARCH(1,1) com distribuição condicionada *t-student*

Desta forma, é-nos possível afirmar que os resíduos verificam as características de um processo ruído branco, mas não verificam as características de processo ruído branco Gaussiano uma vez que os mesmos não seguem uma distribuição normal.

3.2 *Backtesting* e Previsão do *VaR* e da Volatilidade

3.2.1 *Backtesting*-Métricas do *VaR*

Na segunda parte desta análise, utilizámos o *software* Matlab para correr os modelos GARCH, EGARCH, *RiskMetrics*, estimar o *VaR* e obter os testes de *backtesting* (POF, TUFF, LRUC, LRIND e LRCC). Analisámos os testes de *backtesting* para um nível de confiança de 95%, estabelecido pelo *RiskMetrics* e para um nível de confiança de 99%, estabelecido pela Basileia II e utilizámos os horizontes temporais de 1 dia e 5 dias. Assumimos ainda uma posição longa e uma posição curta para o *VaR*.

Toda a informação necessária está apresentada nas tabelas seguintes.

Modelos	HT	PF	TUFF	LRUC	LRIND	LRCC
GARCH (1,1) Gaussiana	H1	0,0097087379	22	0,0008912208	0,0036598011	0,0045510219
	H5	0,1616161616	13	61,4504513826	24,5561904985	86,0066418810
t-GARCH (1,1)	H1	0,0000000000	103	2,0703691858	1,0000000000	3,0703691858
	H5	0,1515151515	16	55,6285599151	28,4830953579	84,1116552730
EGARCH (1,1) Gaussiana	H1	0,0000000000	103	2,0703691858	1,0000000000	3,0703691858
	H5	0,1515151515	16	55,6285599151	28,4830953579	84,1116552730
t-EGARCH (1,1)	H1	0,0097087379	22	0,0008912208	0,0036598011	0,0045510219
	H5	0,1616161616	13	61,4504513826	24,5561904985	86,0066418810
RiskMetrics	H1	0,0097087379	22	0,0008912208	0,0036598011	0,0045510219
	H5	0,0303030303	20	2,6734817670	11,0412204208	13,7147021877

Tabela 3.2: Previsão do *VaR* a 1 dia e a 5 dias para os diferentes modelos considerando um nível de confiança de 99%-Posição Longa

Modelos	HT	PF	TUFF	LRUC	LRIND	LRCC
GARCH (1,1) Gaussiana	H1	0,0194174757	30	0,7236101352	0,0000551864	0,7236653216
	H5	0,1616161616	26	61,4504513826	19,3229905259	80,7734419084
t-GARCH (1,1)	H1	0,0194174757	30	0,7236101352	0,0000551864	0,7236653216
	H5	0,1414141414	26	49,9639108087	15,5053507834	65,4692615921
EGARCH (1,1) Gaussiana	H1	0,0097087379	30	0,0008912208	0,0036598011	0,0045510219
	H5	0,1313131313	26	44,4657705254	13,4327905736	57,8985610991
t-EGARCH (1,1)	H1	0,0194174757	30	0,7236101352	0,0000551864	0,7236653216
	H5	0,1616161616	26	61,4504513826	19,3229905259	80,7734419084
RiskMetrics	H1	0,0194174757	30	0,7236101352	0,0000551864	0,7236653216
	H5	0,0000000000	99	1,9899664990	1,0000000000	2,9899664990

Tabela 3.3: Previsão do *VaR* a 1 dia e a 5 dias para os diferentes modelos considerando um nível de confiança de 99%-Posição Curta

Modelos	HT	PF	TUFF	LRUC	LRIND	LRCC
GARCH (1,1) Gaussiana	H1	0,077669903	2	1,430944806	0,163813985	1,594758791
	H5	0,272727273	12	53,13715874	37,9815884	91,11874714
t-GARCH (1,1)	H1	0,067961165	16	0,631987625	0,464812526	1,096800152
	H5	0,252525253	12	45,48971596	36,49896582	81,98868178
EGARCH (1,1) Gaussiana	H1	0,058252427	16	0,140558279	1,76E-10	0,140558279
	H5	0,252525253	12	45,48971596	36,49896582	81,98868178
t-EGARCH (1,1)	H1	0,077669903	2	1,430944806	0,163813985	1,594758791
	H5	0,272727273	12	53,13715874	37,9815884	91,11874714
RiskMetrics	H1	0,077669903	2	1,430944806	0,163813985	1,594758791
	H5	0,252525253	12	45,48971596	36,49896582	81,98868178

Tabela 3.4: Previsão do *VaR* a 1 dia e a 5 dias para os diferentes modelos considerando um nível de confiança de 95%-Posição Longa

Modelos	HT	PF	TUFF	LRUC	LRIND	LRCC
GARCH (1,1) Gaussiana	H1	0,058252427	30	0,140558279	1,76E-10	0,140558279
	H5	0,212121212	26	31,50529844	17,66168832	49,16698676
t-GARCH (1,1)	H1	0,038834951	30	0,291844117	5,49E-08	0,291844172
	H5	0,202020202	26	28,30195276	16,43247206	44,73442482
EGARCH (1,1) Gaussiana	H1	0,038834951	30	0,291844117	5,49E-08	0,291844172
	H5	0,202020202	26	28,30195276	16,43247206	44,73442482
t-EGARCH (1,1)	H1	0,058252427	30	0,140558279	1,76E-10	0,140558279
	H5	0,232323232	26	38,27073666	15,84018762	54,11092428
RiskMetrics	H1	0,048543689	30	0,004641804	2,77E-09	0,004641807
	H5	0,212121212	26	31,50529844	17,66168832	49,16698676

Tabela 3.5: Previsão do *VaR* a 1 dia e a 5 dias para os diferentes modelos considerando um nível de confiança de 95%-Posição Curta

onde:

H_1 - Previsão a 1 dia;

H_5 - Previsão a 5 dias;

PF- *Proportion of failures*;

TUFF- *Time until first failure*;

LRUC- Cobertura Não-Condiciona;l

LRIND- Independência;

LRCC- Cobertura Condicional.

Analisaremos numa primeira instância, os resultados obtidos para um nível de confiança de 99% e fazendo previsão a 1 dia.

Para ambas as posições (longa e curta) e segundo as estatísticas LRUC, LRIND e LRCC nenhum dos modelos foi rejeitado, uma vez que obtivemos estatísticas de teste inferiores aos valores críticos $\chi^2_{(2)}(0.01) = 9.210$ para o teste LRCC e $\chi^2_{(1)}(0.01) = 6.635$ para os restantes testes. Segundo PF e TUFF e para uma posição longa, os melhores modelos são o GARCH(1, 1) com distribuição condicionada *t-student* e o EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana, uma vez que são os modelos que têm menor percentagem de falhas e os que levam mais tempo até ocorrer a primeira falha. Para uma posição curta e segundo PF e TUFF, o melhor modelo é o EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana.

Para uma posição curta e fazendo previsão a 1 dia, o melhor modelo é o EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana, tanto a nível das estatísticas LRUC, LRIND e LRCC, uma vez que as estatísticas de teste são inferiores aos valores críticos $\chi^2_{(2)}(0.01) = 9.210$ para o teste LRCC e $\chi^2_{(1)}(0.01) = 6.635$ para os restantes testes; como a nível da PF e TUFF.

Passando para a previsão a 5 dias, para uma posição longa, segundo as estatísticas LRUC, LRIND e LRCC, os modelos são rejeitados à exceção do *RiskMetrics* que não é rejeitado pela estatística LRUC. E segundo PF, este modelo também é o que tem menor percentagem de falha.

Para uma previsão a 5 dias e para ambas as posições, o melhor modelo é o *RiskMetrics*, uma vez que não é rejeitado por nenhuma estatística (estatísticas de teste inferiores aos valores críticos $\chi^2_{(2)}(0.01) = 9.210$ para o teste LRCC e $\chi^2_{(1)}(0.01) = 6.635$ para os testes LRIND E LRUC) e segundo PF e o TUFF é o modelo que tem menor percentagem de falha e que leva mais tempo até que ocorra a primeira falha.

Passando para um nível de confiança de 95% obtivemos resultados muito idênticos. Fazendo previsão a 1 dia e para uma posição longa, os modelos não são rejeitados por todas as estatísticas, uma vez que as estatísticas de teste são inferiores aos valores críticos $\chi^2_{(2)}(0.05) = 5.991$ no caso da estatística LRCC e $\chi^2_{(1)}(0.05) = 3.841$ no caso das estatísticas LRUC e LRIND. De acordo com PF e TUFF o melhor modelo é o EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana, uma vez que de todos os modelos é o que tem menor

percentagem de falhas e que leva mais tempo até à ocorrência da primeira falha. Para a posição curta, os modelos não são rejeitados pelas estatísticas LRUC, LRIND e LRCC e segundo PF e TUFF, o modelo GARCH(1, 1) com distribuição condicionada *t-student* tem menor percentagem de falha e demora mais tempo até que a primeira falha ocorra.

Fazendo previsão a 5 dias, as estatísticas LRUC, LRIND e LRCC rejeitam todos os modelos tanto para as posições longa e curta (estatísticas LRUC e LRIND superiores ao valor crítico $\chi^2_{(1)}(0.05) = 3.841$ e estatística de LRCC superior ao valor crítico $\chi^2_{(2)}(0.05) = 5.991$. Segundo PF e TUFF, para a posição longa, os modelos GARCH(1, 1) com distribuição condicionada *t-student*, EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana e *RiskMetrics* apresentam menores percentagem de falhas e levam mais tempo até à ocorrência da primeira falha. Para a posição curta e ainda segundo PF e TUFF, os melhores modelos são o GARCH(1, 1) com distribuição condicionada *t-student* e EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana.

Assim, podemos concluir que de uma maneira geral, o melhor modelo é o EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana, uma vez que foi o modelo menos rejeitado pelas estatísticas LRUC, LRIND, LRCC e segundo PF e TUFF. Particularmente, para um nível de confiança de 99% e fazendo previsão a 5 dias, o melhor modelo foi o *RiskMetrics*.

3.2.2 Previsão da volatilidade

Vamos agora fazer uma previsão da volatilidade utilizando as estatísticas de erro: MSE (*Mean Square Error*), HMSE (*Heteroskedasticity-adjusted Mean Square Error*), HMAE (*Heteroskedasticity-adjusted Mean Absolute Error*) e MAE (*Median Absolute Error*), segundo Jorion (2006). Os resultados obtidos estão representados nas tabelas seguintes:

Modelos	HT	MSE	HMSE	HMAE	MAE
GARCH (1,1) Gaussiana	H1	0,0000000002	2,8283264150	Inf	5,25904E-05
	H5	0,0000093619	121,5951403025	Inf	0,000113246
t-GARCH (1,1)	H1	2,4688E-13	2,7256783858	Inf	0,0000537109
	H5	0,0000092570	118,5266833934	Inf	0,0001109589
EGARCH (1,1) Gaussiana	H1	0,0000000002	2,3011085896	Inf	0,0000551151
	H5	0,0000091742	102,0914507726	Inf	0,0001101263
t-EGARCH (1,1)	H1	0,0000000003	2,4760459949	Inf	0,0000540282
	H5	0,0000093702	105,9653988642	Inf	0,0001147444
RiskMetrics	H1	0,0068609715	0,983672371	Inf	0,0080076939
	H5	0,0323180480	0,958306619	Inf	0,0178130641

Tabela 3.6: Estatísticas de Erro para previsão de Volatilidade, para um nível de confiança de 99%

Modelos	HT	MSE	HMSE	HMAE	MAE
GARCH (1,1) Gaussiana	H1	0,0000000003	2,4760459949	Inf	0,0000540282
	H5	0,0000093702	105,9653988642	Inf	0,0001147444
t-GARCH (1,1)	H1	0,0000000000	2,7256783858	Inf	0,0000537109
	H5	0,0000092570	118,5266833934	Inf	0,0001109589
EGARCH (1,1) Gaussiana	H1	0,0000000002	2,3011085896	Inf	0,0000551151
	H5	0,0000091742	102,0914507726	Inf	0,0001101263
t-EGARCH (1,1)	H1	0,0000000003	2,4760459949	Inf	0,0000540282
	H5	0,0000093702	105,9653988642	Inf	0,0001147444
RiskMetrics	H1	0,0068609715	0,9836723708	Inf	0,0080076939
	H5	0,0323180480	0,9583066187	Inf	0,0178130641

Tabela 3.7: Estatísticas de Erro para previsão de Volatilidade, para um nível de confiança de 95%

onde:

H_1 - previsão a 1 dia;

H_5 - previsão a 5 dias;

MSE- *Mean Square Error*;

HMSE- *Heteroskedasticity-adjusted Mean Square Error*;

HMAE- *Heteroskedasticity-adjusted Mean Absolute Error*;

MAE- *Median Absolute Error*.

Fazendo uma análise inicial para um nível de confiança de 99%, tanto para a previsão a 1 dia como a 5 dias, as estatísticas de erro aprovam individualmente cada modelo: para ambas as previsões a 1 e a 5 dias, o melhor modelo pela estatística MAE é o GARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana, e pela estatística HMSE, para ambas as previsões é o modelo *RiskMetrics*. Relativamente à estatística MSE, para a previsão a 1 dia o melhor modelo é o GARCH(1, 1) com distribuição condicionada *t-student* e para a previsão a 5 dias, o melhor modelo é o EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana. Os valores da estatística HMAE tendem para infinito, para todos os modelos, pelo que não conseguimos apurar qual a previsão para o melhor modelo, segundo esta estatística.

Passando para o nível de confiança de 95%, pelas estatísticas de erro MAE e MSE, o melhor modelo para previsão a 1 dia é o modelo GARCH(1, 1) com distribuição condicionada *t-student* e para previsão a 5 dias é o modelo EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana. Pela estatística HMSE, o melhor modelo é o *RiskMetrics* para previsão a 1 dia e a 5 dias. Novamente os valores da estatística HMAE tendem para infinito, para todos os modelos, pelo que não conseguimos apurar qual a previsão para o melhor modelo, segundo esta estatística.

3.2.3 Previsão *out-of-sample* do VaR

O melhor modelo que obtivemos para a previsão *out-of-sample* foi pelo modelo *RiskMetrics*, tanto para um nível de confiança de 99% como para um nível de confiança

de 95%, conforme podemos verificar nas figuras seguintes:

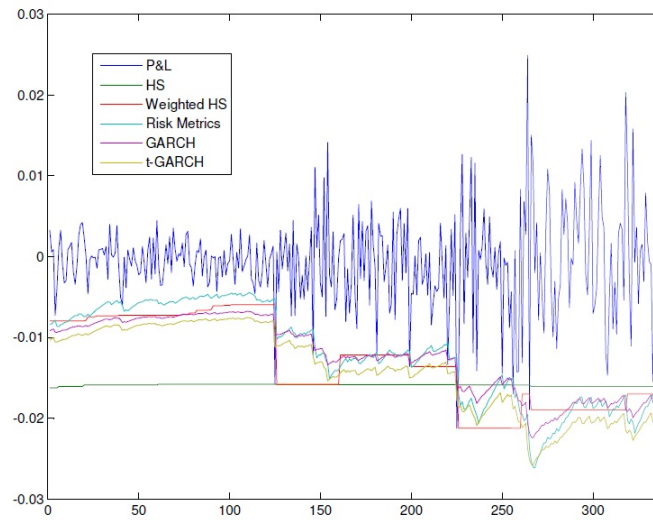


Figura 3.15: Previsão *out-of-sample* do VaR para nível de confiança de 99%

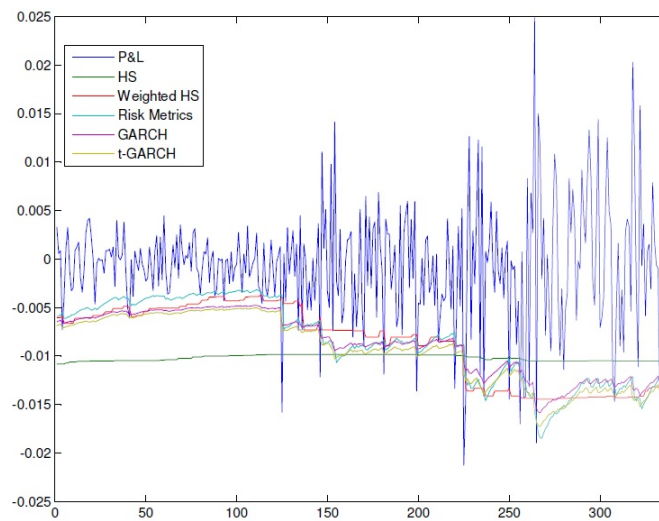


Figura 3.16: Previsão *out-of-sample* do VaR para nível de confiança de 95%

3.2.4 VaR Histórico

Para um nível de confiança de 99%, a perda máxima esperada considerando a simulação histórica é de 0.016246.

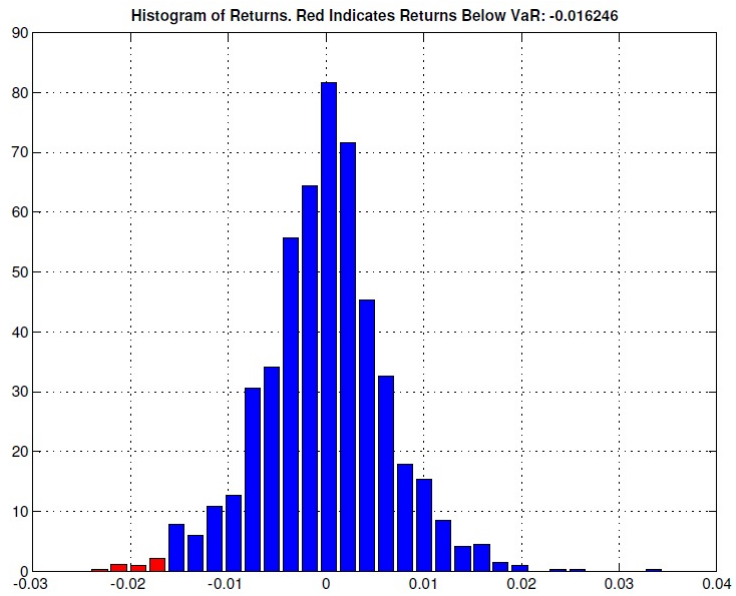


Figura 3.17: Estimação do *VaR* Histórico a um nível de confiança de 99%

A perda máxima esperada para um nível de confiança de 95%, considerando a simulação histórica é de 0.010937.

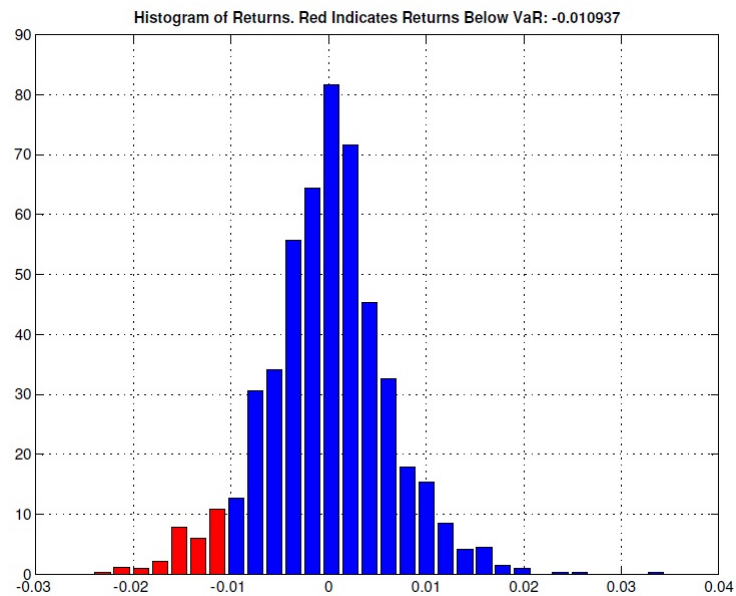


Figura 3.18: Estimação do *VaR* Histórico a um nível de confiança de 95%

Da observação dos *VaR* históricos, verificamos que a perda é menor quando consideramos um nível de confiança de 95%.

Capítulo 4

Conclusões

A série temporal analisada nesta tese diz respeito à taxa de câmbio EUR/USD.

Com o início da crise financeira, a taxa de câmbio EUR/USD deixou de seguir um comportamento natural, influenciado apenas pelos mercados financeiros, devido aos estímulos à economia por parte do FED e do BCE. Estes estímulos, como o caso do *Quantitative Easing*, manipularam "sinteticamente" o comportamento do EUR/USD e fizeram com que, a partir do ano de 2007, o comportamento da taxa de câmbio mudasse significativamente.

A série foi estudada apenas a partir do ano de 2009, depois do BCE ter começado a diminuir as taxas de referência. No entanto, esta medida já tinha sido implementada pelo FED, em 2007.

Esta diminuição das taxas de referência por parte do BCE, fez com que houvesse uma desvalorização do Euro face ao Dólar, o que fez com que a taxa de câmbio EUR/USD diminuísse.

A instabilidade dos mercados durante a crise, e as próprias medidas para estimular a economia, aplicadas pelo FED e BCE, fizeram com que a partir deste período a volatilidade da taxa de câmbio EUR/USD sofresse grandes variações. Graficamente, quando observamos o comportamento da série verificamos que esta tinha períodos de variância diferentes, o que evidenciava que a série não apresentava variância constante.

Os modelos analisados neste estudo, foram os modelos heterocedásticos do tipo GARCH, uma vez que para além dos períodos de variância diferentes, observados pela representação gráfica da série, confirmamos através do correlograma, evidência de efeitos ARCH.

Tentámos chegar a um modelo que não tivesse nenhuma informação nos resíduos, ou seja, que os resíduos fossem independentes e com variância constante. O melhor modelo que obtivemos foi o EGARCH(1,1) com distribuição condicionada *t-student*, por ser o modelo que apresentava valores mais baixos segundo os critérios de informação de Akaike e de Schwarz.

Neste modelo, a soma dos coeficientes das variáveis independentes é muito próxima de 1, o que nos permitiu concluir acerca do comportamento dos *clusters* de volatilidade, que não se dissipam e persistem por longos períodos de tempo.

Os resíduos do modelo EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada *t-student* apresentam características muito próximas de um processo ruído branco Gaussiano, uma vez que verificam as condições de independência e variância constante, e apresentam características muito próximas da normalidade (média próxima de zero, Curtose próximo de 3 e Jarque-Bera pouco elevado).

Quando fizemos a análise dos testes de *backtesting*, o melhor modelo que obtivemos para a previsão do *VaR* foi o EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana. Este modelo foi o modelo mais aprovado, de forma geral, considerando um nível de confiança de 99%, para uma posição longa e curta do *VaR* e um horizonte temporal de 1 e 5 dias; e quando considerando um nível de confiança de 95%, para uma posição longa e curta do *VaR* e um horizonte temporal de 1 dia. Apenas quando consideramos um nível de confiança de 95%, para uma posição longa e curta do *VaR* e um horizonte temporal de 5 dias, o modelo mais adequado foi o *RiskMetrics*.

Na previsão da volatilidade não foi possível aprovarmos um modelo geral, uma vez as estatísticas de erros rejeitam os modelos individualmente, dependente do nível de confiança e horizonte temporal escolhido. Assim para um nível de confiança de 99% e para ambas as previsões a 1 e a 5 dias, o melhor modelo pela estatística MAE é o GARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana, e pela estatística HMSE, é o modelo *RiskMetrics*. Pela estatística MSE, para a previsão a 1 dia o melhor modelo é o GARCH(1, 1) com distribuição condicionada *t-student* e para a previsão a 5 dias, o melhor modelo é o EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana.

Para o nível de confiança de 95%, pelas estatísticas de erro MAE e MSE, o melhor modelo para previsão a 1 dia é o modelo GARCH(1, 1) com distribuição condicionada *t-student* e para previsão a 5 dias é o modelo EGARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana. Pela estatística HMSE, o melhor modelo é o *RiskMetrics* para previsão a 1 dia e a 5 dias.

Para a previsão *out-of-sample* do *VaR* o modelo mais adequado foi o *RiskMetrics*, para um nível de confiança de 99% e de 95%.

Em termos gerais, podemos concluir que os modelos que melhor se ajustam aos dados podem não ser os que geram a melhor *performance* em termos de volatilidade e/ou *VaR*, sendo assim imprescindível a análise de testes adicionais, como o caso dos *backtesting*.

Os resultados desta tese estão, em grande parte, em concordância com outros resultados encontrados na literatura científica (melhor *performance* dos modelos heterocedásticos com assimetria e *RiskMetrics*) e consideramos assim, este trabalho como um primeiro ensaio na investigação do risco de mercado que ainda pode ser moldado de várias formas para obter resultados mais fidedignos.

Anexos

Anexo A

Modelos heterocedásticos analisados

Dependent Variable: DLEURUSD				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 09/07/15 Time: 21:06				
Sample (adjusted): 1/02/2009 6/30/2015				
Included observations: 1693 after adjustments				
Convergence achieved after 17 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1)				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000109	0.000130	-0.837479	0.4023
Variance Equation				
C	1.47E-07	3.50E-08	4.199536	0.0000
RESID(-1)^2	0.038422	0.006674	5.756750	0.0000
GARCH(-1)	0.957638	0.006680	143.3671	0.0000
R-squared	-0.000019	Mean dependent var	-0.000137	
Adjusted R-squared	-0.000019	S.D. dependent var	0.006348	
S.E. of regression	0.006348	Akaike info criterion	-7.437030	
Sum squared resid	0.068189	Schwarz criterion	-7.424190	
Log likelihood	6299.446	Hannan-Quinn criter.	-7.432275	
Durbin-Watson stat	2.024948			

Figura A.1: Estimação do modelo GARCH(1, 1) com distribuição condicionada Gaussiana

Dependent Variable: DLEURUSD				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Student's t distribution				
Date: 09/07/15 Time: 21:07				
Sample (adjusted): 1/02/2009 6/30/2015				
Included observations: 1693 after adjustments				
Convergence achieved after 21 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1)				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000107	0.000123	-0.874945	0.3816
Variance Equation				
C	5.95E-08	5.48E-08	1.083953	0.2784
RESID(-1)^2	0.040484	0.008463	4.783963	0.0000
GARCH(-1)	0.958754	0.008115	118.1394	0.0000
T-DIST. DOF	10.31162	2.189048	4.710549	0.0000
R-squared	-0.000021	Mean dependent var	-0.000137	
Adjusted R-squared	-0.000021	S.D. dependent var	0.006348	
S.E. of regression	0.006348	Akaike info criterion	-7.454939	
Sum squared resid	0.068189	Schwarz criterion	-7.438889	
Log likelihood	6315.605	Hannan-Quinn criter.	-7.448996	
Durbin-Watson stat	2.024943			

Figura A.2: Estimação do modelo GARCH(1,1) com distribuição condicionada *t-student*

Dependent Variable: DLEURUSD				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 09/07/15 Time: 21:08				
Sample (adjusted): 1/02/2009 6/30/2015				
Included observations: 1693 after adjustments				
Convergence achieved after 14 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
LOG(GARCH) = C(2) + C(3)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(4)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(5)*LOG(GARCH(-1))				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000211	0.000131	-1.613032	0.1067
Variance Equation				
C(2)	-0.096118	0.020278	-4.739932	0.0000
C(3)	0.058743	0.010887	5.395559	0.0000
C(4)	-0.034036	0.005662	-6.011000	0.0000
C(5)	0.995107	0.001413	704.4543	0.0000
R-squared	-0.000139	Mean dependent var	-0.000137	
Adjusted R-squared	-0.000139	S.D. dependent var	0.006348	
S.E. of regression	0.006349	Akaike info criterion	-7.444056	
Sum squared resid	0.068197	Schwarz criterion	-7.428007	
Log likelihood	6306.394	Hannan-Quinn criter.	-7.438114	
Durbin-Watson stat	2.024704			

Figura A.3: Estimação do modelo EGARCH(1,1) com distribuição condicionada Gaussiana

Bibliografia

- Alexander, Carol (2008). *Market Risk Analysis Volume IV*. John Wiley & Sons, Ltd.
- Banking Supervision, Basle Committee on (1996). «Supervisory Framework for the use of "Backtesting" in conjunction with risk capital requirements». Em: *Basle Committee on Banking Supervision*.
- Basel Committee Banking Supervision (1998). *Instruments eligible for inclusion in Tier 1 capital*. URL: <http://www.bis.org/press/p981027.htm> (acedido em 27/10/1998).
- Bollerslev, T. (1986). «Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity». Em: *Journal of Econometrics* 31, pp. 309–328.
- Box, George E. P. e Gwilym M. Jenkins (1976). *Time Series Analysis Forecasting and Control*. Revised Edition. Holden-Day.
- Brockwell, Peter J. e Richard A. Davis (2006). *Time Series: Theory and Methods*. 2ª ed. Springer.
- Brooks, Chris (2008). *Introductory Econometrics for Finance*. 2ª ed. Cambridge.
- Campbell, Sean D. (2005). «A Review of Backtesting and Backtesting Procedures». Em: p. 23.
- Cera, Gentjan, Edmond Cera e Gerdi Lito (2013). «A GARCH Model Approach to calculate the Value at Risk of Albanian Lek Exchange Rate». Em: *European Scientific Journal* 9, p. 260.
- Christoffersen, P. F. (1988). «Evaluating interval forecasts». Em: *International Economic Review* 39, pp. 841–862.
- Danielsson, Jon (2011). *Financial risk forecasting*. 1ª ed. Wiley Finance.
- Denis Pelletier, Peter Christoffersen ans (2003). «Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach». Em: *Journal of Financial Econometrics*, p. 108.
- Engle, R. F. (1982). «Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation». Em: *Econometrica* 50, pp. 987–1007.
- Engle, R., D. M. Lilien e R. P. Robins (1987). «Estimating time varying risk premia in structure: The ARCH-M model». Em: *Econometrica* 58, pp. 525–542.
- Fallman, David e Jens Wirf (2010). «Forecasting Foreign Exchange Volatility for Value at Risk». Português. Em: *Bachelor's Thesis*, p. 30.
- Ferreira, Miguel A. e Jose A. Lopez (2005). «Evaluating Interest Rate Covariance Models Within a Value-at-Risk Framework». Em: *Journal of Financial Econometrics* 3, p. 168.
- Furriel, Ana Margarida Queirós Sepúlveda (2011). «Modelos Heterocedásticos- ARCH e GARCH». Em: *Tese de Mestrado em Métodos Quantitativos para a Economia e Gestão*, p. 69.

- Hartman, Joel e Jan Sedlak (2013). «Forecasting Conditional Correlation for Exchange Rates using Multivariate GARCH Models with historical Value-at-Risk application». Em: *Bachelor's Thesis*, p. 67.
- Heij, Christiaan et al. (2004). *Econometric Methods with Applications in Business and Economics*. 1ª ed. Oxford University Press.
- Jánský, Ivo e Milan Rippel (2011). «Value at Risk forecasting with the ARMA-GARCH family of models in times of increased volatility». Em: p. 14.
- Jorion, Philippe (2006). *Value at Risk- The new benchmark for managing financial risk*. third edition. The McGraw-Hill Companies.
- Katsenga, Gerald Z. (2013). «Value at Risk (VaR) Backtesting». Em: *Master of Management in Finance and Investments-University of Witwatersrand Business School*.
- Leal, Aida (2013). «Aplicação de Modelos de Value-at-Risk com quebra de estrutura a rendibilidades do mercado accionista português». Em: *Dissertação de Mestrado*, p. 100.
- Mansouri, Zia, Martin Gustafsson e Caroline Lundberg (2009). «An empirical evaluation of Value at Risk». Em: *Master Thesis- Industrial and financial management*, p. 55.
- Martins, Marco A. et al. (2011). «Gestão de Risco Cambial Baseada no Conceito de Value-at-Risk: Uma Aplicação em uma Empresa Não Financeira». Em:
- Mendes, Diana Aldea (2013). «Econometria dos Mercados Financeiros. Apontamentos das aulas». Em: *Mestrado em Matemática Financeira*.
- Morgan, J.P e Reuters (1996). «RiskMetrics- Technical Document». Em: p. 102.
- Mota, António Gomes e Cláudia Custódio (2012). *Finanças da empresa*. 4ª ed. Edições Sílabo.
- Oliveira, Marcos e Charles Carmona (2008). «Value at Risk dinâmico aplicado à taxa de câmbio de países latino-americanos: um estudo multiperíodo entre os modelos heterocedásticos e homocedástico». Em: *Revista de Administração-eletrônica*, p. 67.
- Oliveira, Marta (2014). «Análise e Previsão do Valor Acumulado de um Fundo de Pensões». Em: *Dissertação de Mestrado*, p. 55.
- Reider, Rob (2009). «Volatility Forecasting I: GARCH Models». Em: p. 16.
- Ribeiro, Pedro Pires (2012). «Derivados e Gestão de Riscos Financeiros». Em: *Mestrado em Matemática Financeira*.
- Schwert, W. (1989). «Test for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation». Em: *Journal of Business and Economic Statistics* 7, pp. 147–159.
- Sheedy, Elizabeth (2008). «Why VaR models fail and what can be done». Em: *Macquarie University Applied Finance Centre Research Papers* 34.
- Supervision, Basel Committee Banking (2006). «International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards». Em: p. 333.
- Wooldridge, Jeffrey M. (2009). *Introductory Econometrics- A Modern Approach*. fourth edition. South-Western Cengage Learning.
- Zivot, Eric (2008). «Practical Issues in the Analysis of Univariate GARCH Models». Em: p. 41.