Universidade de Lisboa

Pensamento algébrico e raciocínio matemático em alunos de 10.º ano no tópico das funções quadráticas

Sofia Pedro Lima

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pelo Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte e coorientado pela Professora Doutora Isabel Ferreirim

2021

Resumo

Este estudo procura compreender o pensamento algébrico e os processos de raciocínio matemático desenvolvidos por alunos do 10.º ano no estudo das funções quadráticas. O estudo assenta num conjunto de aulas sobre funções quadráticas lecionado, no âmbito da disciplina de Matemática A, a uma turma de 23 alunos do Curso de Ciências e Tecnologias da Escola Secundária de Camões.

O paradigma da investigação é interpretativo e a abordagem é qualitativa com observação participante.

Neste estudo faz-se uma avaliação das dificuldades iniciais dos alunos no âmbito do pensamento algébrico e do raciocínio matemático, através de um teste de diagnóstico, analisa-se o pensamento algébrico e o raciocínio matemático dos alunos durante as aulas lecionadas, através do seu contributo oral e escrito, e avalia-se a evolução dos alunos no âmbito do pensamento algébrico e do raciocínio matemático no final da lecionação através de um teste final semelhante ao teste de diagnóstico.

O estudo conclui que os alunos, no início das aulas das funções quadráticas, tinham dificuldade em traduzir um problema para linguagem algébrica e em produzir justificações. Durante as aulas, os alunos mostraram ter um pensamento algébrico e um raciocínio matemático adequados às tarefas propostas. No final da lecionação, as dificuldades iniciais mantinham-se não se observando evolução dos alunos nem no pensamento algébrico nem no raciocínio matemático.

Palavras-chave: Matemática, ensino secundário, funções quadráticas, pensamento algébrico, raciocínio matemático

Abstract

This study aims to understand the algebraic thinking and the processes of mathematical reasoning developed by grade 10 students in the study of quadratic functions. The study was conducted during several lessons about quadratic functions taught in the subject of Matemática A to a class of 23 students of the field of science and technology at Camões's Secondary School.

The study follows a qualitative and interpretative methodological approach and the data collection was carried out through participant observation.

The study did an evaluation of the initial difficulties of students in algebraic thinking and mathematical reasoning through a diagnostic test, analyzed the algebraic thinking and the mathematical reasoning of the students in class through their oral and written contributions and evaluated the students' progress in algebraic thinking and mathematical reasoning at the end of the lessons through a final test similar to the diagnostic test.

The study concludes that the students, at the beginning of the lessons, had difficulty in translating a problem to algebraic language and in producing justifications. During the lessons, the students showed an algebraic thinking and a mathematical reasoning adequate to the proposed tasks. At the end of the lessons, the initial difficulties remained and there was no evolution observed neither in the algebraic thinking nor in the mathematical reasoning of the students.

Keywords: Math, secondary school, quadratic functions, algebraic thinking, mathematical reasoning

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

1. Introdução

1.1 Organização do trabalho

O presente relatório resulta da lecionação de um conjunto de aulas sobre funções quadráticas a alunos do 10.º ano da Escola Secundária de Camões, em Lisboa, e de uma investigação feita durante estas aulas sobre o pensamento algébrico e o raciocínio matemático dos alunos.

No primeiro capítulo deste relatório apresento as motivações que me levaram a esta investigação e a sua pertinência, o objetivo da investigação, as questões que pretendo investigar e contexto de trabalho letivo que serve de suporte à investigação.

No segundo capítulo apresento o enquadramento da investigação na literatura e na investigação já existente.

No terceiro capítulo descrevo a escola e a turma onde decorreu a prática letiva, enquadro a unidade que irei lecionar no programa de matemática e descrevo os seus objetivos. Descrevo também as estratégias de ensino que utilizei e o planeamento que fiz das aulas.

No quarto capítulo descrevo os métodos e procedimentos de recolha de dados usados nesta investigação.

No quinto capítulo descrevo as aulas lecionadas e no sexto capítulo analiso os dados recolhidos durante a investigação refletindo sobre o pensamento algébrico e o raciocínio matemático dos alunos no início das aulas lecionadas, durante a aulas lecionadas e no final das aulas lecionadas.

Finalmente, no capítulo sete apresento as conclusões deste trabalho, fazendo um balanço das aulas lecionadas e respondendo às questões de investigação.

1.2 Motivação e pertinência

O estudo de funções é um dos tópicos mais importantes da matemática pois há variadíssimas situações reais que são modeladas por funções e o conhecimento da relação entre variáveis é, por isso, importante para a vida real. O estudo das funções e o conhecimento da relação entre variáveis é também importante para o conhecimento de matemática mais avançada (Celik & Guzel, 2017).

As funções quadráticas estão na transição entre as funções lineares e as funções polinomiais de grau mais elevado. Têm várias aplicações na física, como por exemplo, no lançamento de projéteis. O seu gráfico é uma parábola, pelo que podemos dizer que estabelecem uma relação entre a álgebra e a geometria. Por todas estas razões o estudo da função quadrática é fundamental.

Sendo objeto de estudo da álgebra, o estudo da função quadrática envolve pensamento algébrico e é, por isso, uma boa oportunidade para estudar o pensamento algébrico de alunos do ensino secundário, uma área em que de acordo com Kieran (2007) tem menos estudos que o pensamento algébrico em alunos do ensino básico.

As funções quadráticas são também um bom tema para estudar o raciocínio matemático pois oferecem oportunidade de fazer generalizações e justificações que, como veremos, são dois processos de raciocínio fundamentais.

Finalmente, conhecer o raciocínio matemático e o pensamento algébrico dos alunos, bem como as suas dificuldades nesta área poderá contribuir para a criação de tarefas e ambientes de aprendizagem que apoiem os alunos no estudo da função quadrática.

Assim, com este estudo espero contribuir para um melhor conhecimento das aprendizagens e dificuldades dos alunos de 10.º ano quando estudam a função quadrática e, consequentemente, para um melhor ensino e aprendizagem deste tema tão importante em matemática.

1.3 Objetivo e questões de investigação

O objetivo desta investigação é compreender o pensamento algébrico e os processos de raciocínio matemático desenvolvidos por alunos do 10.º ano no estudo das funções quadráticas.

Mais precisamente nesta investigação pretendo dar resposta às seguintes questões:

- Que dificuldades no domínio da álgebra revelam os alunos no início do estudo das funções quadráticas?
- Que dificuldades no campo do raciocínio matemático revelam os alunos no início do estudo das funções quadráticas?
- Que pensamento algébrico revelam os alunos no estudo de funções quadráticas e que desenvolvimento se evidencia ao longo deste estudo?

- Que processos de raciocínio algébrico os alunos realizam no estudo das funções quadráticas e que desenvolvimento se evidencia ao longo deste estudo?

1.4 Contexto do trabalho e da escola

A investigação é realizada no âmbito da lecionação de um conjunto de aulas de 10.º ano sobre a função quadrática incluídas no tema "Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos" do *Programa e Metas Curriculares de Matemática A* (Ministério de Educação e Ciências [MEC], 2013).

Este conjunto de aulas sobre a função quadrática foi lecionado a uma turma de 10.º da escola Secundária de Camões, no 2.º período do ano letivo 2020/2021, entre os dias 8 e 22 de março de 2021, compreendendo um total de cinco aulas de 45 minutos – das quais duas são síncronas, dadas através da plataforma Teams, e três são assíncronas, correspondendo a trabalho autónomo dos alunos – e quatro aulas de 90 minutos – das quais duas são síncronas, dadas através da plataforma Teams e duas são assíncronas, correspondendo a trabalho autónomo dos alunos. Estas aulas foram realizadas na Escola Secundária de Camões, da cidade de Lisboa, que será caraterizada em pormenor na seção 3.1.

2. Enquadramento curricular e didático

2.1 Funções quadráticas

As funções quadráticas são funções da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. O seu gráfico é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo dos yy, concavidade voltada para cima se $a > 0$ e concavidade voltada para baixo se $a < 0$. Estas funções têm um mínimo se $a > 0$ e um máximo se $a < 0$. O ponto da parábola correspondente ao mínimo ou ao máximo da função designa-se por vértice da parábola.

Existem três representações algébricas importantes da função quadrática: a forma canónica, a forma que explicita o vértice e, no caso de a função ter um ou dois zeros, a forma fatorizada.

A forma canónica é a que se indicou acima.

Para saber o vértice de uma parábola temos de escrever a função na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ onde h e k são, respetivamente, a abcissa e a ordenada do vértice. Com efeito, temos que o gráfico de $p(x) = ax^2$ é uma parábola com vértice de coordenadas (0,0) e que $f(x) = p(x-h) + k$ logo o gráfico de $f(x)$ é obtido a partir do gráfico de $p(x)$ fazendo uma translação segundo o vetor (h, k), o que faz com que as coordenadas do vértice passem a ser (h, k) Esta é a forma que explicita o vértice.

Para passar da forma canónica para a forma que explicita o vértice existem vários métodos.

Uma possibilidade é fazer a seguinte manipulação algébrica:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} =$$

$$= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Donde se conclui que a relação entre h e k da forma que evidencia o vértice e os coeficientes a, b e c da forma canónica é a seguinte:

$$h = -\frac{b}{2a}, k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Outra forma de fazer a conversão da forma canónica para a forma do vértice é desenvolver a expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$ da seguinte forma:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$$

e comparar com

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde vem que

$$\begin{cases} -2ah = b \\ ah^2 + k = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = -\frac{b}{2a} \\ a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + k = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = -\frac{b}{2a} \\ k = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}$$

Finalmente, uma terceira forma de fazer a conversão é notar que uma reta paralela ao eixo dos xx, de equação $y = d$, com d pertencente ao contradomínio da função quadrática exceto $d = k$, interseta a parábola em dois pontos que estão à mesma distância do eixo de simetria da parábola pelo que a abcissa do vértice será a média das abcissas dos pontos interseção da reta com a parábola.

Escolhendo $d = f(0) = c$ temos que as abcissas dos pontos de interseção da reta $y = c$ com a parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ se obtêm resolvendo a equação $f(x) = c$ da seguinte forma:

$$f(x) = c \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

A abcissa do vértice é então o valor médio das abissas obtidas, ou seja,

$$h = \frac{0 - \frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Para determinar a ordenada do vértice nota-se que $k = f(h)$ logo

$$k = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$$
$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Por ser o método de conversão proposto no manual adotado pela escola (Costa & Rodrigues, 2020) foi este o método ensinado aos alunos.

Para ensinar aos alunos a relação entre h e k e o vértice da parábola foi dado aos alunos um conjunto de tarefas no Geogebra em que estes foram levados a explorar o efeito destes parâmetros no gráfico da função.

Uma vez que ao determinar o vértice da parábola estamos também a determinar o máximo ou o mínimo da função (conforme $a < 0$ ou $a > 0$), a forma que evidencia o vértice é muito útil para problemas de otimização.

Para as funções quadráticas com dois zeros a forma fatorizada da função quadrática é a seguinte:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

onde x_1 e x_2 são os zeros da função. No caso da função só ter um zero $x_1 = x_2$ e a forma fatorizada é

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

onde x_1 é o único zero da função.

Esta forma é útil para estudar o sinal da função e, portanto, para resolver inequações quadráticas.

Nas minhas aulas ensinei aos alunos a forma canónica e a forma que evidencia o vértice. Ensinei a passar de uma forma para a outra e ensinei a resolver problemas de otimização em que é necessário passar da forma canónica para a forma que evidencia o vértice e interpretar as coordenadas do vértice no contexto do problema.

Estudos envolvendo funções quadráticas

Celik e Guzel (2017) analisam o pensamento de um aluno enquanto tenta representar graficamente uma função quadrática dada a sua expressão algébrica através da análise de uma entrevista feita ao aluno enquanto este tenta resolver a questão. São vários os erros cometidos pelo aluno que começa por dizer que se trata de uma função linear, mas depois apresenta como gráfico uma parábola. Este aluno não é capaz de determinar os zeros da parábola uma vez que usa o método de experimentar valores. Determina alguns pontos do gráfico por substituição do valor de x, mas não vai além disso, sendo também incapaz de determinar o vértice da parábola. A dada altura confunde equação com função.

Durante a entrevista o professor mostra-lhe a função y=x e ele faz corretamente o gráfico desta função. Comparando os dois gráficos, o aluno percebe que a função quadrática não é linear pois o seu gráfico não é uma reta.

Os autores concluíram que as principais dificuldades do aluno eram o seu limitado conhecimento e a memorização de regras sem a compreensão dos conceitos presentes nessas regras.

Nunes (2012) analisa as estratégias usadas por alunos do 10.º ano na resolução de problemas envolvendo a função quadrática e as dificuldades que estes alunos revelam na resolução destes problemas. O autor conclui que quando é dada a expressão algébrica da função quadrática os alunos tendem a representá-la graficamente, apoiando-se na representação gráfica para resolver o problema. Além disso, os alunos quando questionados sobre o que distingue a função quadrática da função linear, quase todos indicam que a função quadrática tem como gráfico uma parábola, sendo menos os que fazem referência ao facto de a expressão algébrica ser um polinómio de 2.º grau. Conclui daí a preferência dos alunos pela representação gráfica da função.

Contudo, quando se trata de um problema de otimização em que a função quadrática relevante não é dada, sendo necessário determinar a sua expressão, Nunes (2012) verificou que os alunos, inclusive os que têm melhor classificação, em vez de determinarem a função quadrática relevante, experimentam diferentes valores da variável independente e veem o efeito destes na variável dependente. A partir desses valores numéricos tiram conclusões quanto a qual seria o valor da variável independente ao qual corresponde o máximo ou mínimo da variável dependente. Os alunos mostram assim dificuldade na determinação da expressão algébrica relevante para a resolução do problema, revelando dificuldades no pensamento algébrico.

Nunes (2012) também observou que, na resolução de inequações quadráticas, os alunos tentaram frequentemente usar estratégias algébricas semelhantes às que usaram na resolução de equações lineares, o que levou a erros. Mesmo depois da lecionação estes erros persistiram. Finalmente nota que nem todos os alunos sabem usar a fórmula resolvente para acharem os zeros de uma função quadrática e que nem todos aprenderam a achar as coordenadas do vértice da parábola.

Silva (2009) estuda “como os alunos pensam e aprendem sobre as funções quadráticas, nas suas diferentes representações, quando utilizam a calculadora gráfica” (p. 37). O estudo tem por base a realização de um conjunto de tarefas de exploração intercaladas com aulas expositivas e de realização de exercícios do manual. O autor estuda em detalhe dois alunos. Conclui que estes dois alunos têm dificuldade em identificar representações de funções, apesar de saberem a definição formal de função e que esta situação não se altera depois da unidade de ensino.

Antes da unidade de ensino ambos os alunos revelaram dificuldade da transformação de uma função afim da representação gráfica para a representação algébrica. No final da unidade de ensino um dos alunos aprendeu a converter funções afins da representação gráfica para a representação algébrica, mas o outro não. O aluno que aprendeu a converter funções afins da representação gráfica para a representação algébrica aprendeu também a fazer esta conversão no caso de funções quadráticas em que o parâmetro a já é dado, mas revelou alguma dificuldade quando tinha de o determinar a partir das coordenadas de um ponto do gráfico dadas para além das coordenadas do vértice. O outro aluno não conseguiu de todo fazer a conversão de funções quadráticas da representação gráfica para a representação algébrica.

Em relação aos processos usados pelos alunos na resolução de problemas, Silva (2009) concluiu que há alunos, inclusive um dos entrevistados, que mostram preferência por processos algébricos, enquanto outros, incluindo o outro entrevistado, às vezes usam processos algébricos e outras vezes processos gráficos, com a ajuda da calculadora gráfica.

2.2 Raciocínio matemático

São vários os documentos que indicam a importância de promover, em sala de aula, o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Assim, por exemplo, o *Programa e Metas Curriculares de Matemática A* refere que o desempenho dos alunos nos diversos aspetos da matemática deve contribuir “para a construção e desenvolvimento do raciocínio matemático” (MEC, 2013, p. 6).

Não existe, contudo, uma definição única de raciocínio matemático. Como notam Jeannotte e Kieran (2017) diferentes autores salientam diferentes aspetos do raciocínio matemático. No entanto, Jeannotte e Kieran, após uma extensa pesquisa bibliográfica, concluíram que um aspeto comum a todas a referências ao raciocínio matemático é que este envolve a inferência de novas afirmações a partir de outras afirmações. Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) acrescentam que o processo de inferência deve ser justificado dando a seguinte definição de raciocínio matemático:

“raciocinar é realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado” (p. 7). É esta a definição que seguirei no presente relatório.

Existem três tipos inferências que dão origem a três tipos de raciocínio: O raciocínio dedutivo, o raciocínio indutivo e o raciocínio abdutivo.

O raciocínio dedutivo envolve inferências lógicas “caracterizadas pela relação necessária entre premissas e conclusões e pela irrefutabilidade das conclusões obtidas” (Mata-Pereira & Ponte, 2013, p. 18). Como referem Mata-Pereira e Ponte (2013) alguns autores identificam o raciocínio matemático com o raciocínio dedutivo. Este é, de facto, fundamental na matemática pois é o que permite a estruturação e validação do conhecimento matemático. O *Programa e Metas Curriculares de Matemática A* refere que “O raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo”(MEC, 2013, p. 6). No entanto, este mesmo documento prevê que “o raciocínio indutivo desempenhe também um papel fundamental na atividade matemática, uma vez que preside à formulação de conjeturas” (MEC, 2013, p. 6).

O raciocínio indutivo é aquele em que “se formulam generalizações a partir da identificação de características comuns a diversos casos” (Mata-Pereira & Ponte, 2013, p. 18). Este tipo de raciocínio é baseado não na lógica, mas na observação empírica. É observada empiricamente uma regra válida para vários casos e infere-se que a regra é válida para todos os casos. Esta inferência é criativa, uma vez que a conclusão contém mais informação que as premissas. No entanto não há garantia de que a conclusão seja verdadeira. (Silva, 2009).

Pelo seu lado, o raciocínio abdutivo “parte de um facto insólito ou invulgar e procura uma explicação para a sua ocorrência” (Silva, 2009, p. 39). Neste tipo de raciocínio são levantadas hipóteses que explicam a ocorrência.

Um exemplo deste tipo de raciocínio, dado por Charles Peirce e citado em Silva (2009), é o de um individuo que entra numa sala onde encontra alguns sacos que contêm diferentes espécies de feijões. Em cima da mesa está um punhado de feijões brancos e, após procurar, o individuo encontra um saco com feijões brancos. De imediato infere que o punhado de feijões foi retirado desse saco.

Repare-se que nada garante que os feijões tenham efetivamente sido retirados daquele saco. Tal como no raciocínio indutivo, a conclusão, no raciocínio abdutivo, não é garantidamente verdadeira. Por este motivo Silva diz-nos que este é um raciocínio “ousado e arriscado” (Silva, 2009, p. 39). No entanto, “apesar de ser um passo ousado e arriscado, a conceção da hipótese é um momento de génese, um momento de criação, o princípio da descoberta” (Silva, 2009, p.39).

Na sala de aula devem ser promovidos os três tipos de raciocínio, pois embora o raciocínio dedutivo seja o único permitido na validação do raciocínio matemático, os raciocínios indutivos e abdutivos são fundamentais na descoberta, uma vez que “as novas descobertas, na maior parte dos casos, não surgem através de raciocínio dedutivo, mas sim de […] raciocínio indutivo e abdutivo” (Ponte et al, 2020, p. 7).

Existem vários processos associados ao raciocínio matemático. Jeannotte e Kieran (2017) fazem referência a oito processos de raciocínio:

- Generalizar, que se refere à inferência de propriedades comuns a um conjunto de objetos;
- Conjeturar, que se refere a fazer declarações sobre relações matemáticas, denominadas conjeturas, que necessitam de ser exploradas para se verificar se são verdadeiras ou falsas;
- Identificar um padrão;
- Comparar, que se refere a um processo de identificação de semelhanças e diferenças que leva à descoberta de propriedades ou relações entre os objetos;
- Classificar;
- Justificar, que se refere a um processo em que, através de afirmações de suporte, se muda o valor epistémico de uma afirmação;
- Provar, que se refere ao processo de através de raciocínio dedutivo justificar uma afirmação;
- Exemplificar.

Já Ponte et al. (2020) destacam conjeturar, generalizar e justificar como processos essenciais do raciocínio matemático. Neste relatório irei focar-me nestes três processos.

Conjeturar “consiste em produzir afirmações que se espera sejam verdadeiras” (Mata-Pereira & Ponte, 2013, p. 19). Este processo está na base do raciocínio indutivo e abdutivo. Segundo o *Programa e Metas Curriculares de Matemática A* (MEC, 2013)

> Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjeturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares, nomeadamente pela exploração das potencialidades dos recursos tecnológicos (pp. 6 e 7)

Generalizar consiste em formular uma conjetura de natureza geral (Mata-Pereira & Ponte, 2013). Mais precisamente, a generalização ocorre quando observando uma certa propriedade num conjunto de objetos de uma dada classe se conjetura que essa propriedade é válida para todos os elementos da classe. Este processo é a base do raciocínio indutivo.

A formulação de conjeturas e a generalização originam afirmações que para serem válidas matematicamente têm de ser justificadas através de raciocínio dedutivo. A justificação é o processo pelo qual se valida uma afirmação matemática. De acordo com o *Programa e Metas Curriculares de Matemática A* (MEC, 2013)

> Os alunos deverão saber que o raciocínio indutivo não é apropriado para justificar propriedades e, contrariamente ao raciocínio dedutivo, pode levar a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras, razão pela qual as conjeturas formuladas, mas não demonstradas têm um interesse limitado, devendo os alunos ser alertados para este facto e incentivados a justificá-las *a posteriori* (p. 7)

Todos estes processos de raciocínio deverão ser incentivados desde os primeiros anos de ensino.

Outros estudos envolvendo raciocínio matemático

Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) começam por notar que recentemente as orientações curriculares para o ensino da matemática têm vindo a valorizar "a proposta de tarefas como explorações, investigações e problemas e a sua discussão coletiva na turma" (p. 55), "realçando-se o raciocínio matemático como capacidade transversal no ensino desta disciplina" (p. 55). Notam ainda que "o estudo das questões envolvidas na condução de discussões coletivas está largamente por fazer"(p. 56) e estabelecem como seu objetivo "compreender este aspeto da prática do professor, procurando identificar problemas que emergem durante a sua realização"(p. 56). Para cumprir este objetivo, os autores analisam duas discussões coletivas que ocorreram numa turma de 9.º ano, identificando as dificuldades que surgem para a professora na condução destas discussões e a forma como esta as resolve.

Este estudo classifica as ações da professora em quatro categorias:

- Ações de convidar que proporcionam "o envolvimento inicial dos alunos num dado segmento da discussão" (p.59);

- Ações de apoiar/guiar em que "o professor promove a continuação da participação dos alunos na resolução de um problema já iniciado conduzindo os alunos de modo discreto ou explícito, através de perguntas ou por outras intervenções" (p.59);

- Ações de informar/sugerir em que "o professor assume o papel de introduzir informação, proporcionar argumentos, ou validar respostas dos alunos" (p.59);

- Ações de desafiar em que o professor "coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo" (p. 59)

O estudo conclui que o professor nas discussões coletivas

> depara-se com numerosos problemas, alguns dos quais aparecem de forma recorrente, como (i) a seleção de um aluno como interlocutor, (ii) o modo de agir quando um aluno questiona ou faz uma conjetura, (iii) o modo de agir perante desacordos, (iv) aprofundar ou não uma resolução, que os alunos já dão por concluída, ou (v) o modo de agir perante uma situação de impasse, uma resolução incorreta ou uma explicação pouco clara. (p.79)

O estudo também conclui que

> as discussões evoluem em ciclos, marcados pelas questões da tarefa proposta ou por eventos que, por vezes, surgem na discussão e que suscitam uma atenção específica. Um segmento começa em regra com um convite e, perante as respostas dos alunos, a professora intervém sobretudo com ações de desafiar, procurando estender o seu conhecimento, ou apoiar, procurando sustentar a participação dos alunos. De uma forma geral, um segmento acaba com uma ação de sugerir, na forma de uma pequena síntese, que resume os aspetos principais trabalhados e que os alunos devem registar. (p.79)

Araman, Serrazina e Ponte (2020) estudaram a forma de promover o raciocínio matemático em alunos da escola primária. Este estudo foca-se na classificação das ações que promovem o raciocínio matemático nas mesmas quatro categorias referidas em Ponte *et al* (2013).

Os autores analisam as discussões coletivas de duas tarefas, uma do primeiro ano, e outra do terceiro ano, classificando a ações das professoras nas categorias referidas e discutindo a forma como estas ações se suportam umas às outras. Os autores concluem que as ações de convidar são um passo necessário às ações seguintes; que as ações de guiar/apoiar premeiam toda a discussão permitindo que a professora conduza o pensamento dos alunos para onde deseja; que as ações de informar/sugerir também permeiam toda a discussão e que as ações de desafiar têm forte potencial para desenvolver o raciocínio matemático "pois auxiliam os alunos a justificarem seu pensamento, oferecendo razões que o fundamentam" (p. 458).

Azevedo (2009) tem como tema o raciocínio matemático no estudo das funções em alunos do 10.º ano. Este tema é muito próximo do tema deste relatório, contudo, a abordagem é diferente. Com efeito, neste relatório, eu analiso, para toda a turma, o raciocínio matemático dos alunos, identificando os três processos de raciocínio referidos em Ponte et al (2020), enquanto Azevedo escolhe três alunos e analisa, antes, durante e no final das aulas lecionadas (sendo que o último ponto é o mais próximo deste relatório):

- A capacidade destes alunos para fazer a conversão entre as diferentes formas de representar funções;

- A forma como definem e aplicam estratégias na resolução de problemas e se são ou não críticos em relação às estratégias que utilizam;

- A capacidade de formular conjeturas, testá-las e justificá-las;

Azevedo (2009) procura também relacionar o desempenho dos alunos nestes três aspetos com as experiências de aprendizagem realizadas durante a unidade. A autora conclui que, antes da lecionação da unidade didática, o processo de justificação estava pouco presente nos alunos. Já durante a lecionação da unidade, justificar foi uma preocupação de todos. Contudo, dois dos três alunos escolhidos para o estudo revelaram dificuldades neste processo. Nomeadamente, um dos alunos, após a realização de um número reduzido de testes, tendia a aceitar como válidas generalizações, por vezes erradas. Com o decorrer da unidade didática, este aluno compreendeu a importância da justificação. Segundo a autora, no final da unidade didática, os três alunos sabiam fazer conjeturas, testá-las e justificá-las.

Dias (2020) fez uma análise do raciocínio matemático dos alunos durante as aulas que lecionou a alunos de 11.º ano sobre assíntotas, identificando os momentos em que ocorreram conjeturas, generalizações e justificações. Conclui que "os alunos revelam alguma facilidade na formulação de conjeturas" (p. 146) e que estas "são essenciais na compreensão das propriedades das retas que são assíntotas ao gráfico de uma função” (p. 146). Já a elaboração de justificações revelou-se mais difícil que a elaboração de conjeturas. Foi necessário discutir com os alunos o papel da calculadora gráfica, de modo que os alunos “compreendessem que o gráfico da função permite apenas confirmar resultados obtidos através dos métodos analíticos não sendo considerada uma justificação formal suficiente para este ano de escolaridade” (p. 146). Quanto às generalizações os alunos contribuíram com ideias importantes para a “generalização dos processos para determinar as assíntotas ao gráfico de uma função” (p. 146).

Mata-Pereira (2012) fez um estudo dos processos de raciocínio, em particular, a generalização e a justificação, que ocorrem durante a realização de tarefas inseridas no tópico “números reais e inequações” e procurou relacionar estes processos com as representações utilizadas pelos alunos e com a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos. Concluiu que os alunos têm facilidade em fazer generalizações a partir de um ou mais exemplos, mas as justificações só surgem quando os alunos são questionados e se lhes pede para as fazerem. As diferentes representações não colocam limites ao raciocínio matemático dos alunos, mas havendo dificuldades nos conceitos e procedimentos envolvidos na tarefa surgem também dificuldades nas generalizações e justificações.

Mata-Pereira (2018) procurou compreender como pode o professor promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula. Concluiu que é importante o professor conhecer os processos de raciocínio, nomeadamente, as generalizações e as justificações; conhecer a caraterísticas das tarefas a propor e as ações do professor que promovem o raciocínio matemático. Concluiu também que as generalizações não são específicas de determinados tópicos, emergindo em diversos tópicos. Outra conclusão é que se deve visar justificações cada vez mais formais e complexas. A autora concluiu ainda que as tarefas a propor devem ser de natureza exploratória, com diferentes graus de desafio, permitir vários processos de resolução e incitar generalizações e justificações. No seu entender, as discussões coletivas são também “fundamentais para apresentar, clarificar, complementar e aprofundar os processos de raciocínio matemático” (p. 60) e é neste momento que “as ações do professor são primordiais para promover adequadamente o raciocínio matemático dos alunos” (p. 60). Estas ações incluem:

- Apoiar ou desafiar os alunos a justificar ou apresentar justificações alternativas;

- Apoiar ou informar os alunos para identificar justificações válidas ou inválidas, enfatizando o que as valida;
- Desafiar ou apoiar os alunos na partilha de ideias, nomeadamente considerando e valorizando contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique;
- Apoiar ou informar os alunos com o objetivo de destacar processos de raciocínio, particularmente a generalização;
- Desafiar os alunos a irem além da tarefa. (p. 61)

2.3 Pensamento algébrico e ensino da álgebra

O estudo das funções, em particular das funções quadráticas, faz parte da álgebra.

Existe um debate sobre os limites da álgebra, no qual surge a noção de pensamento algébrico (Ponte, Branco, & Matos, 2009). De um lado do debate estão os que identificam a álgebra com a manipulação de símbolos, reduzindo-a ao cálculo algébrico, do outro estão os que reconhecem a importância dos símbolos na álgebra, mas consideram que a manipulação de símbolos é apenas uma faceta deste campo da Matemática.

Neste trabalho seguirei as ideias do segundo grupo de investigadores, considerando que o pensamento algébrico não se reduz ao cálculo algébrico.

Um desses investigadores é James Kaput para quem, de acordo com Ponte et al. (2009), o pensamento algébrico apresenta cinco facetas: "(i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (iii) o estudo de estruturas abstratas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos" (p.9).

Mais precisamente, o pensamento algébrico surge quando pretendemos descrever regularidades e relações entre objetos, não devendo os símbolos ser desligados dos objetos que representam sob pena da Matemática se tornar estéril e incompreensível para os alunos. Assim, além da manipulação de símbolos, temos a modelação de situações reais e o estudo da variação do qual faz parte o estudo das funções (Ponte et al., 2009).

Segundo o NCTM (2010) os alunos, no domínio da álgebra, deverão ser capazes de:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos. (p.2)

Para que os alunos tenham sucesso na aprendizagem da álgebra é importante, segundo o NCTM (2010), que no ensino deste tema sejam privilegiados o raciocínio e a construção de significado. De acordo com este documento, no caso do estudo das funções isto envolve:

- *Usar múltiplas representações das funções.* Representar funções de vários modos incluindo representação tabelar, gráfica, simbólica (explicita ou recursiva), visual e verbal; tomar decisões acerca de quais as representações que são mais úteis no contexto do problema que se está a resolver; e mover-se com flexibilidade entre estas representações.
- *Modelação usando famílias de funções.* Trabalhar para desenvolver um modelo matemático que se aplique num contexto particular aplicando conhecimento do comportamento característico de diferentes famílias de funções.
- *Analisar o efeito de parâmetros.* Usar uma representação geral de uma função numa dada família (por exemplo, a forma quadrática que evidencia o vértice, $f(x) = a(x-h)^2 + k$) para analisar os efeitos da variação dos coeficientes ou outros parâmetros; fazer a conversão entre diferentes formas de funções (por exemplo, entre a forma canónica da função quadrática e a forma fatorizada) de acordo com os requisitos do problema (por exemplo, encontrar o vértice da parábola ou os seus zeros). (p.3)

O NCTM (2010) define também alguns hábitos de pensamento que importa incentivar nos alunos:

- **Analisar um problema**, por exemplo,

– *definir cuidadosamente as variáveis e as condições*, incluindo unidades, se aplicável;
– *procurar padrões e relações*;

> – *procurar relações escondidas* (por exemplo, procurar formas equivalentes das expressões que revelem diferentes aspetos do problema).
>
> - **Implementar uma estratégia**, por exemplo,
>
> – *fazer uso propositado de processos;*
>
> – *monitorizar o progresso em direção a uma solução,* incluindo revisão das estratégias escolhidas e outras estratégias geradas pelo próprio ou sugeridas por outros.
>
> - **Refletir na solução de um problema**, por exemplo,
>
> – *interpretar a solução* e como esta responde ao problema, incluindo tomar decisões sob condições incertas;
>
> –*considerar a razoabilidade de uma solução,* incluindo a verificação se há algum número reportado com um grau irrazoável de precisão.
>
> – *generalizar uma solução* a uma classe mais vasta de problemas e olhando para as conexões com outros problemas. (pp. 3, 4)

De um modo geral, importa que os alunos aprendam não só os símbolos, mas adquiram também o sentido do símbolo. Arcavi (1994) fala-nos deste sentido do símbolo. Na sua perspetiva, os alunos devem ser capazes de apreciar o poder dos símbolos e também saber quando abandonar o uso dos símbolos. Os alunos devem interpretar as expressões simbólicas em vez de as manipular sem as compreender. O autor refere também a importância de verificar as respostas.

Além disso, Arcavi (1994) associa ao sentido do símbolo:

– A capacidade de perceber que uma expressão simbólica pode ser criada para cumprir determinado objetivo e a capacidade de criar essa expressão;

– A capacidade de manipular as expressões de modo a obter expressões equivalentes que revelem propriedades que de outro modo não seriam visíveis;

– A capacidade de reconhecer que um problema pode ser representado de múltiplas formas consoante a escolha que se faça das variáveis, que esta escolha não deve ser feita às cegas e ter a capacidade de fazer uma boa escolha;

– A capacidade de perceber quando se está a andar em círculos e é preciso mudar de estratégia;

Para o desenvolvimento destas capacidades pelos alunos, Arcavi (1994) sugere que as manipulações de símbolos devem ser ensinadas tão cedo quanto possível “em contextos ricos que providenciem oportunidade de aprender quando e como usar estas manipulações” (p.32) e que mostrem aos alunos o poder dos símbolos para representar relações genéricas.

Assim, enquanto professora, procurei dar aos alunos tarefas que evidenciassem o poder dos símbolos na resolução de problemas. Trabalhei com os alunos diversas representações da função quadrática e chamei a atenção para a importância de não perder o significado dos símbolos e verificar se a resposta a que se chegou faz sentido no contexto do problema.

Estudos sobre pensamento algébrico e ensino da álgebra

Como podemos ver em Kieran (2007) existe uma extensa bibliografia sobre o ensino-aprendizagem da álgebra, sendo inúmeros os estudos nesta área. Aqui referiremos alguns estudos que se encontram no repositório da Universidade de Lisboa.

Ponte, Branco e Matos (2008) começam por referir a existência de uma discussão quanto à forma como a álgebra deve ser ensinada, argumentando que, pelo menos numa fase inicial, os símbolos algébricos devem ter algum significado. Depois referem várias interpretações que as letras podem ter consoante o contexto algébrico em que se encontram. Em seguida analisam as dificuldades que podem surgir na resolução de equações do 1.º grau. Finalmente, concluem notando que a construção do conceito de variável é um processo complexo, mas central na aprendizagem da álgebra e que é importante introduzir tão cedo quanto possível as diversas utilizações dos símbolos.

Matos, Silvestre, Branco e Ponte (2008) analisam três experiências de ensino baseadas em tarefas de exploração e concluem que este tipo de tarefas ajuda a desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Mais precisamente, estes estudos permitem observar progressos assinaláveis no modo como os alunos se apropriam dos modos de representação da álgebra e relacionar esse progresso com as tarefas desenvolvidas em aula. Verifica-se, porém, que algumas dificuldades persistem o que se justifica pela "grande complexidade cognitiva que representa a iniciação à álgebra" (p. 9) e pela duração limitada das aulas. Os autores terminam notando que a "compreensão dos conceitos algébricos fundamentais é um processo lento e exigente para professores e alunos que requer um trabalho ao longo de vários anos" (p. 9).

Em Branco (2008) observamos como um conjunto de tarefas de exploração permite introduzir a linguagem simbólica e a álgebra a alunos do 7.º ano, introduzindo primeiro a letra como número generalizado, associada à escrita da expressão geral de sequências e depois a letra como incógnita, introduzindo o estudo das equações. A autora colocou os alunos a trabalhar em pares e depois discutiu com a turma as respostas dadas e as dificuldades encontradas, levantado questões que permitem aprofundar o trabalho dos alunos.

As discussões coletivas revelaram-se de grande importância. Com efeito, foi numa discussão coletiva que os alunos sugeriram pela primeira vez o uso de um símbolo para representar a ordem da figura e assim escreverem a expressão geral de uma sequência. Na resolução de problemas com recurso a equações, os alunos, apesar de serem capazes de escrever uma equação que traduz o problema, não foram capazes de resolver a equação formalmente, resolvendo-a intuitivamente com recurso a métodos aritméticos. Nesta situação, Branco (2008) valeu-se da discussão coletiva para, em conjunto com a turma, chegar a processos de resolução mais formal.

Outro aspeto do trabalho de Branco (2008) que é relevante é que a linguagem simbólica surgiu sempre com contexto. Isto vai ao encontro do que dizem Ponte et al (2008) quando referem que os símbolos, pelo menos numa fase inicial, devem ter significado.

Na conclusão, Branco analisou as estratégias seguidas pelos alunos e as dificuldades observadas, enquadrando-as na literatura existente.

Em Matos (2008) vemos como um conjunto de tarefas de exploração associadas ao trabalho com sequências, funções e equações no 8.º ano ajudaram os alunos a compreender os diferentes usos das letras na álgebra. Tal como aconteceu com Branco (2008), muito importante para esta aprendizagem foram as discussões coletivas pois permitiram a troca de ideias, permitindo o surgir de novas ideias e a discussão e correção de ideias erradas. Por exemplo, na primeira tarefa em que, para uma sequência de figuras formadas por pontos, se pedia para descrever "uma regra geral que permita determinar o número total de pontos existentes em qualquer figura" (p. 211), inicialmente os alunos indicaram a regra em linguagem natural. Foi só na discussão coletiva que um aluno referiu que devia haver uma maneira mais fácil de indicar a regra e foi daí que surgiu a ideia de representar a ordem da figura por x e escrever a regra através da respetiva expressão algébrica. Na mesma discussão surgiu a ideia de que uma expressão alternativa para $2x + 1$ era $x^2 + 1$, o que permitiu discutir a diferença entre $2x$ e x^2.

Em Matos (2008) também se observa a importância da escolha de tarefas com grau de dificuldade adequado aos conhecimentos dos alunos, começado por tarefas mais simples e depois propondo tarefas progressivamente mais complexas, isto é, com maior grau de abstração.

Na conclusão a autora resumiu as dificuldades e os progressos de dois alunos que entrevistou antes e depois da lecionação, identificando algumas destas dificuldades com dificuldades descritas na literatura. Nota que houve progresso, no entanto, nota também que algumas dificuldades persistem, sobretudo no caso do aluno com mais dificuldades.

Em Pesquita (2007) observamos o que acontece quando é dado a alunos de 8.º ano um conjunto de tarefas envolvendo pensamento algébrico. A autora analisa as estratégias usadas pelos alunos para resolver as tarefas e as dificuldades surgidas enquadrando-as na literatura existente. Mais uma vez nota-se a importância das discussões coletivas onde surgem ideias importantes que levam às generalizações que servem de base ao pensamento algébrico, se aprofundam raciocínios e se discutem erros.

Na conclusão, a autora resume os resultados de três alunos que entrevistou no início e no fim da lecionação notando que estes evoluíram, mas os mais fracos continuam a cometer erros.

Os estudos referidos dizem respeito ao ensino básico. Kieran (2007) tem uma secção dedicada à análise dos estudos sobre ensino da álgebra realizados com estudantes a partir dos 15 anos, o que corresponde ao nosso ensino secundário.

Nesta secção a autora diz-nos que existem estudos focados nas letras e símbolos algébricos e estudos focados em múltiplas representações de funções, sendo estes últimos mais frequentes.

Os estudos focados nas letras e símbolos algébricos avaliam a manipulação de símbolos por alunos do ensino secundário e também avaliam a capacidade dos alunos para distinguir entre parâmetros, incógnitas e variáveis, verificando-se neste último caso que os alunos têm muitas dificuldades essa distinção.

Em relação aos estudos focados em múltiplas representações de funções, "um número significativo (…) foca-se nos esforços para apoiar os alunos a passar de uma visão processual das funções para uma visão em que estas constituem objetos matemáticos" (p. 730).

Segundo Kieran (2007), alguns estudos "têm explorado, por exemplo, a natureza do raciocínio covariacional no contexto das funções exponenciais (…), a elaboração de uma visão das funções orientada para as suas propriedades, baseada em aspetos visuais do seu crescimento (…) e o papel dos mapas conceptuais no acesso à compreensão conceptual das funções” (p. 730).

As representações gráficas também têm sido objeto de investigação “com foco particular no estabelecimento de conexões entre a representação simbólica e a representação gráfica, frequentemente com recurso a calculadoras gráficas” (p.730)

Outros estudos analisam o uso de ferramentas gráficas dinâmicas, como por exemplo, gráficos que variam consoante a variação dos parâmetros das expressões algébricas, nos quais se verifica que o movimento contribui para a construção do significado dos objetos funcionais da álgebra.

Existem também “estudos que investigam o impacto do uso prolongado de calculadoras gráficas na compreensão conceptual dos alunos sobre funções e as suas representações” (p.731). Segundo a autora estes estudos “têm reportado resultados positivos” (p.731), notando que “o tempo gasto no trabalho com múltiplas representações tem sido crucial para a sua aprendizagem” (p.731)

Kieran (2007) também refere estudos sobre noções de equivalência e construção de significado para transformações de equivalência. Estes estudos revelam que “os alunos não desenvolvem espontaneamente a noção de equivalência” (p.732), havendo, por exemplo, alunos que não sabem que as transformações que fazem entre equações equivalentes preservam as soluções. Estes estudos permitem também concluir que o reconhecimento da equivalência é um obstáculo para a aprendizagem dos alunos.

Kieran (2007) nota que “enquanto a resolução de equações lineares recebeu grande atenção da investigação, a resolução de equações de segundo grau não a recebeu” (p.732). Os poucos estudos que existem mostram que os alunos têm dificuldade em perceber “como as soluções das equações quadráticas estão relacionadas com a equação em si mesma” (p.733) e concluem que “é necessária investigação para orientar os professores acerca de como os alunos pensam sobre equações quadráticas” (p.733).

Existem também estudos relativos a inequações. Segundo a autora, estes estudos revelam que os alunos tendem a usar métodos das equações no estudo das inequações.

Outros estudos analisam a factorização. Kieran (2007) nota que “com a emergência de CAS [Computer Algebra System] nas aulas de ensino secundário (…) a factorização tem recebido atenção da investigação” (p.733), de modo a verificar se esta tecnologia apoia ou não a aprendizagem dos alunos, tendo-se verificado que pode ser benéfica.

Segundo Kieran (2007) foram também realizadas investigações sobre tarefas em que se usou a tecnologia gráfica para estudar expressões algébricas. Por exemplo, num dos estudos, a tecnologia gráfica foi usada para estabelecer a fórmula trigonométrica para o ângulo duplo.

Outros tópicos de investigação são a resolução de problemas e a modelação. Nestes tópicos tem sido estudado o uso da tecnologia.

De acordo com Kieran (2007) têm também sido realizados estudos em larga escala sobre o efeito do uso da tecnologia gráfica, especialmente calculadoras gráficas, na aprendizagem da álgebra por alunos do ensino secundário. Estes estudos avaliam alunos que frequentaram cursos de álgebra baseados na tecnologia e comparam-nos com alunos que frequentaram cursos de álgebra tradicionais, sem recurso à tecnologia. Estes estudos concluíram que "quando as calculadoras são incluídas no ensino, mas não nos testes, a capacidade de selecionar as estratégias de resolução de problemas apropriadas aumentou" (p.735). Além disso, "estudantes que usaram calculadoras enquanto aprendiam matemática reportaram atitudes mais positivas em relação à matemática" (p.735). "Os alunos são mais beneficiados quando as calculadoras têm um papel pedagógico na sala de aula e não servem apenas para exercícios e prática ou confirmação de resultados"(p.735). Num estudo que compara a compreensão de funções verificou-se que os estudantes que usaram o computador compreendiam melhor as funções. Um outro estudo verificou que os estudantes com acesso ao computador apresentavam melhores resultados na resolução de problemas algébricos apresentados em contextos realistas e com acesso ao computador que alunos que assistem ao ensino convencional. No entanto, estes últimos apresentam melhores resultados na manipulação de expressões algébricas quando estas expressões se apresentavam fora de contexto realista e não era permitido o uso de calculadora.

Finalmente Kieran (2007) refere estudos que analisaram o efeito da tecnologia no papel desempenhado pelo professor e o aluno na sala de aula. "Estes estudos sugerem o potencial da tecnologia para ampliar o domínio da atividade matemática em que os estudantes se envolvem" (p.737).

3. A unidade didática

3.1 Caracterização da escola

A Escola Secundária de Camões, onde realizei a minha intervenção, situa-se no concelho de Lisboa, na freguesia de Arroios. Oferece todos os cursos científico-humanísticos, cursos profissionais e também ensino recorrente, presencial e à distância e, no ensino noturno, educação e formação de adultos. Durante o dia é frequentado por cerca de 1000 alunos e à noite por cerca de 600 alunos.

A população escolar é bastante heterogénea, sendo constituída por alunos de todas as classes sociais, nomeadamente, filhos de emigrantes provenientes dos bairros envolventes, e alunos de classe média-alta, cujos pais trabalham perto da escola.

Há um computador por sala associado a um projetor. Há também WiFi em todas as salas, permitindo o acesso à internet tanto do professor como dos alunos.

3.2 Caracterização da turma

A turma 10.º D, que acompanhei desde o início do ano letivo e onde lecionei as aulas e realizei a investigação, é do Curso de Ciências e Tecnologias, sendo composta por 23 alunos (8 rapazes e 15 raparigas) com idades entre os 14 e os 15 anos. Na disciplina de Matemática não há alunos repetentes.

A turma tem um bom desempenho escolar, quer a Matemática, quer nas outras disciplinas. Todos os alunos tiveram positiva no 9.º ano e nas classificações finais do 1.º período, na disciplina de Matemática, houve apenas uma negativa.

A tabela seguinte apresenta a classificação dos alunos na disciplina de Matemática, no final do 1.º período.

1.º período de 10.º ano – Nota obtida	Número de alunos
8	1
10-14	9
15-17	4
18-20	6

Quadro 1-Classificação dos alunos na disciplina de Matemática no final do 1.º período

Houve dois alunos que não foram avaliados porque não frequentaram um número suficiente de aulas, um por motivos de saúde e outro porque só ingressou na turma poucas semanas antes do final do 1.º período. Houve também uma aluna que só integrou a turma no início do 2.º período.

Na aula de Matemática, a maioria dos alunos mostra-se interessada e realiza as tarefas propostas. Em termos de participação oral, existem alunos que querem sempre participar e há outros que só participam quando se lhes dirige diretamente uma pergunta. Assim o professor tem de ter atenção para não dar a palavra sempre aos mesmos alunos e fazer perguntas dirigidas aos que são mais calados.

3.3 Ancoragem da unidade didática no programa de Matemática

O estudo das funções inicia-se no 3.º ciclo do ensino básico. No 7.º ano, introduz-se a noção de função e de gráfico cartesiano e estudam-se as funções constantes, as funções lineares ou de proporcionalidade direta e as funções afins. No 8.º ano continua-se o estudo das funções afins e no 9.º ano introduzem-se as funções de proporcionalidade inversa e as funções quadráticas da forma $f(x) = ax^2$ (MEC, 2013).

No 10.º ano, o estudo das funções surge, de acordo com o *Programa de Matemática A* (MEC, 2013), dividido em quatro tópicos: "generalidades acerca de funções", "generalidades acerca de funções reais de variável real", "monotonia, extremos e concavidade" e "Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos".

No primeiro tópico revê-se o conceito de gráfico de uma função e introduzem-se os conceitos de restrição de uma função, imagem de um conjunto por uma função, função injetiva, sobrejetiva e bijetiva, função composta e função inversa de uma função bijetiva.

À data em que iniciei as minhas aulas, a professora Teresa Moreira tinha lecionado neste tópico apenas a revisão do conceito de função, indicando a função como uma correspondência entre objetos e imagens em que para cada objeto existe uma e uma só imagem e distinguindo, a partir desta definição, entre representações gráficas de funções e representações gráficas que não representam funções.

No segundo tópico estuda-se a paridade, a relação entre o gráfico de uma função e, quando existe, o da sua inversa e a relação entre o gráfico de f e o gráfico das funções $f(x+a)$, $f(x)+a$, $af(x)$ e $f(ax)$.

Este tópico ainda não tinha sido lecionado quando iniciei as minhas aulas.

No terceiro tópico definem-se os conceitos associados à monotonia, aos extremos e à concavidade.

À data em que iniciei as minhas aulas só tinha sido lecionado deste tópico a monotonia.

No quarto tópico aplicam-se os conceitos estudados anteriormente ao estudo das funções quadráticas, das funções por ramos, e das funções da forma $a|x-b|+c$. Tendo em conta que não surgem nas *Aprendizagens Essenciais* (MEC, 2018), as funções da forma $a\sqrt{x-b}+c$ e as funções da forma $a\sqrt[3]{x-b}+c$, que são referidas no *Programa de Matemática A* (MEC, 2013), por decisão do grupo de Matemática da Escola Secundária de Camões, não foram lecionadas nesta escola.

Embora no *Programa de Matemática A* (MEC, 2013) os polinómios sejam apresentados separadamente das funções, na turma onde lecionei foram dados a seguir ao quarto tópico de funções, concluindo, assim, o estudo das funções no 10.º ano.

3.4 Objetivos do estudo da função quadrática segundo as metas curriculares e as aprendizagens essenciais

Para lecionar as aulas correspondentes ao estudo da função quadrática tive em conta os objetivos definidos nas *Metas Curriculares de Matemática A* (MEC, 2013) e no documento *Aprendizagens Essenciais 10.º ano Matemática A* (MEC, 2018).

Segundo as *Metas Curriculares de Matemática A* (MEC, 2013) o estudo das funções quadráticas tem como objetivo que os alunos sejam capazes de:

- Dada uma função quadrática identificar "os intervalos de monotonia, o extremo absoluto, as eventuais raízes e o sentido da concavidade [do respetivo gráfico]" (p.18).
- "Esboçar o gráfico de funções quadráticas, começando por representá-las por expressões da forma $a(x-b)^2+c$" (p.18).
- Resolver problemas envolvendo funções quadráticas.

O documento *Aprendizagens Essenciais 10.º ano Matemática A* (MEC, 2018) refere que os alunos devem "reconhecer e interpretar os extremos, sentido das concavidades, raízes e a representação gráfica de funções quadráticas e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação” (p.8)

3.5 Estratégia de ensino

Nas aulas que lecionei usei sobretudo um tipo de estratégia de ensino que Ponte (2005) designa por “ensino-aprendizagem exploratório”. Nesta estratégia de ensino são dadas tarefas aos alunos que lhes permitem descobrir e construir conhecimento. O professor escolhe a tarefa de acordo com os objetivos de aprendizagem e a aula é dividida em ciclos de três etapas:

- Lançamento da tarefa, que deve incluir uma pequena discussão para envolver os alunos;
- Trabalho autónomo dos alunos, em que o professor pode apoiar o trabalho colocando questões e fazendo observações, mas sem nunca raciocinar pelo aluno;
- Discussão coletiva, onde as diferentes resoluções são debatidas e é feita uma síntese final (Ponte et al.,2020)

Ponte et al. (2020) indicam este tipo de aula como sendo propício ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

Vários estudos (por exemplo, Bishop, Otto, & Lubinski, 2001; Rodrigues, Ponte, & Menezes, 2018) mostram que este tipo de aula é igualmente profícuo no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Segundo Ponte et al. (2020) este tipo de abordagem tem dois suportes principais. Um deles é a escolha da tarefa. As tarefas a apresentar aos alunos neste modelo de aula devem ser tarefas de natureza exploratória, isto é, cujo processo de resolução não seja imediato para o aluno, levando-o a desenvolver as suas próprias estratégias.

> Deste modo, os alunos assumem um papel ativo na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução. (…) Os alunos têm assim oportunidade para construir ou aprofundar a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas. (p.10)

O outro suporte da abordagem exploratória é a promoção em sala de aula de um ambiente de comunicação que favoreça a participação e discussão de ideias especialmente durante a discussão coletiva.

Sobre a discussão coletiva Menezes e al. (2018) afirmam que,

> A promoção de discussões matemáticas coletivas em sala de aula é uma abordagem pedagógica com fortes potencialidades para a aprendizagem dos alunos, na medida em que estes são chamados a apresentar diversas estratégias de resolução de tarefas matemáticas ricas, a justificar os raciocínios usados, a argumentar sobre os raciocínios dos colegas e a sistematizar os principais conceitos resultantes dessa discussão. (p.487)

Assim, nas aulas que lecionei, usei tarefas que permitiram aos alunos descobrir as propriedades das funções quadráticas. Usei frequentemente o modelo de aula em três fases e dei particular atenção aos momentos de discussão coletiva e síntese, de modo que houvesse uma discussão rica que promovesse a aprendizagem dos alunos.

3.6 Planeamento das aulas

<u>Aula 1</u>

Aula assíncrona correspondente ao segundo bloco de 45 minutos do dia 8 de março.

Objetivo: Fazer o diagnóstico das dificuldades dos alunos no pensamento algébrico e no raciocínio matemático.

É enviado aos alunos o enunciado do teste de diagnóstico (anexo 2) e pede-se que o resolvam e submetam a resolução através da plataforma Teams.

É enviado também o plano de trabalho para a unidade didática (anexo 1).

<u>Aula 2</u>

Aula síncrona, dada através da plataforma Teams

Data: 10 de março

Duração: 90 minutos

Objetivos:

- Introduzir as funções quadráticas usando um exemplo de projéteis
- Estudar o efeito do parâmetro a nas funções da forma $f(x) = ax^2$

A aula está divida nos seguintes momentos:

1. Introdução (15 min)
2. Resolução do problema "uma bola lançada do terraço" (15 min)
3. Discussão do problema "uma bola lançada do terraço" (15 min)
4. Resolução da tarefa "Função quadrática – parte 1" (15 min)
5. Discussão da tarefa "Função quadrática – parte 1" (15 min)
6. Síntese (15 min)

1. Introdução

O professor explica que vamos estudar uma família de funções da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ e nota que já estudaram, no 9º ano, o caso $b = c = 0$. O professor pergunta, então, quem se recorda do nome da curva do gráfico de $f(x) = ax^2$. O professor recorda esse gráfico e refere o que é o vértice da parábola.

2. Resolução do problema "uma bola lançada do terraço"

Esta tarefa (anexo 3) é realizada no Geogebra.

Durante 15 minutos os alunos resolvem autonomamente a tarefa e o professor observa as respostas dos alunos no Geogebra.

Questão	Atividade do aluno
1.	Os alunos fazem o gráfico da função e observam que para *x*=0, *y*=3 e concluem que a altura do terraço é 3 m
2.	Os alunos observam o gráfico e notam que *y*=0 quando *x*=3 e concluem que a bola caiu a 3 m da casa
3.	Observando o gráfico os alunos verificam que o valor máximo de *y* é 4 e que, neste caso, *x*=1. Concluem que a altura máxima atingida pela bola é 4m e que a bola, quando atinge a altura máxima, está a um metro da casa.

3. Discussão do problema "Uma bola lançada do terraço"

O professor escolhe um aluno ao acaso e abre a sua resolução, partilhando com toda a turma a sua resposta à primeira questão. Discute depois com a turma a resposta dada. Faz o mesmo com mais dois alunos para a segunda e terceira questão.

4. Resolução da tarefa “Função quadrática – parte 1”

Esta tarefa (anexo 3) também é resolvida no Geogebra.

Durante 15 minutos os alunos resolvem autonomamente a tarefa. O professor observa as resoluções no Geogebra.

Questão	Atividade do aluno
1.	Os alunos fazem variar o valor de a e observam a variação do gráfico. Verificam que para valores positivos de a a parábola tem concavidade voltada para cima e que para valores negativos de a tem concavidade voltada para baixo.
2.	Os alunos fazem variar o valor de a e observam a variação do gráfico. Verificam que quando a é positivo o aumento do valor de a faz a parábola ficar mais “fechada”. Quando a é negativo, quanto mais negativo for mais “fechada” é a parábola. Concluem que quando o módulo de a aumenta a parábola fica mais fechada. **Dificuldades** Os alunos podem ter dificuldade em relacionar o módulo de a com o gráfico por o módulo de a não ser uma variável diretamente observável.

5. Discussão da tarefa “Função quadrática – parte 1”

Ao fim dos 15 minutos de trabalho autónomo, o professor abre a resolução de um dos alunos e discute com a turma a resolução da primeira questão. Depois abre a resolução de outro aluno e discute com a turma a resolução da segunda questão. Se o aluno não tiver respondido à segunda questão o professor ajuda o aluno a raciocinar perguntando o que acontece à parábola quando a é positivo e aumentamos o valor de

a e o que acontece quando o a é negativo e diminuímos o valor de a. Depois explica a relação com o valor absoluto de a.

6. Síntese

O professor resume a aula recordando que se vai estudar a família de funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ e que o gráfico destas é uma parábola. Recorda também o que é o vértice da parábola. Finalmente recorda os efeitos do parâmetro a no gráfico das funções $f(x) = ax^2$.

Aula 3

Aula assíncrona correspondente ao bloco de 90 minutos do dia 11 de março.

Os alunos resolvem tarefas definidas no plano de trabalho que devem estar prontas no início da aula síncrona seguinte, no dia 15 de março.

Objetivo:

Estudar o gráfico de funções da forma $f(x) = ax^2 + k$ e $f(x) = a(x-h)^2 + k$

Tarefa 1 – "Função quadrática – parte 2"

Esta tarefa (anexo 4) é resolvida no Geogebra.

Questão	Atividade do aluno
1.	O aluno faz variar o parâmetro k e verifica que este coincide com a ordenada do vértice da parábola
2.	O aluno faz variar o parâmetro a e verifica que este faz variar a "abertura" da parábola, tendo a parábola concavidade voltada para cima se $a > 0$ e concavidade voltada para baixo se $a < 0$. Quanto maior o valor absoluto de a mais "fechada" é a parábola.

Tarefa 2 - "Função quadrática – parte 3"

Esta tarefa (anexo 4) é resolvida no Geogebra.

Questão	Atividade do aluno
1.	O aluno faz variar os parâmetros h e k e verifica que estes coincidem respetivamente com a abcissa e a ordenada do vértice da parábola

2.	O aluno faz variar o parâmetro a e verifica que este faz variar a "abertura" da parábola, tendo a parábola concavidade voltada para cima se $a > 0$ e concavidade voltada para baixo se $a < 0$. Quanto maior o valor absoluto de a mais "fechada" é a parábola.

<u>Aula 4</u>

Aula síncrona, dada através da plataforma Teams

Data: 15 de março

Duração: 45 minutos

Objetivo: Saber as características do gráfico de funções na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, em particular, as coordenadas do vértice e o sentido da concavidade.

A aula está dividida em 3 momentos:

1. Discussão da tarefa "Função quadrática – parte 2" (15 min)
2. Discussão da tarefa "Função quadrática – parte 3" (15 min)
3. Resolução do exercício 63 da página 66 do manual "Novo espaço. Matemática A 10º ano - parte 2" (Costa & Rodrigues, 2020) (15 min)

1. Discussão da tarefa "Função quadrática – parte 2" (15 min)

O professor abre a resolução de um aluno e discute com a turma a resposta dada por este à primeira questão. Depois escolhe outro aluno, abre a sua resolução, e discute com a turma a resposta deste à segunda questão.

2. Discussão da tarefa "Função quadrática – parte 3" (15 min)

O professor abre a resolução de um aluno e discute com a turma a resposta dada por este à primeira questão. Depois escolhe outro aluno, abre a sua resolução, e discute com a turma a resposta deste à segunda questão.

3. Resolução do exercício 63 da página 66 do manual "Novo espaço. Matemática A 10º ano - parte 2" (Costa & Rodrigues, 2020) (15 min)

Para cada função (anexo 5) o professor pede a um aluno que indique expressão que a define.

função	Atividade do aluno	Atividade do professor
F	O aluno nota que as coordenadas do vértice são (0,0) logo $h = k = 0$ e, portanto, $$y = 3x^2$$	
G	O aluno nota que o vértice da parábola tem coordenadas (0,4) logo $h = 0$ e $k = 4$. Além disso, a parábola tem concavidade voltada para baixo, o que implica $a = -3$. Logo $y = -3x^2 + 4$ **Dificuldades** O aluno pode ter dificuldade em associar as coordenadas do vértice com a expressão da função. O aluno pode não perceber a necessidade do sinal negativo do a.	O professor recorda o aluno que a parábola tem uma expressão do tipo $$y = a(x - h)^2 + k$$ E pergunta: A que corresponde o h? Quanto vale o h neste caso? E a que corresponde o k? Quanto vale o k neste caso? Finalmente, questiona o aluno quanto vale o a? Se o aluno tiver dificuldade no sinal do a, o professor recorda a relação ente o a e a concavidade da parábola.
H	O aluno nota que o vértice tem coordenadas (-3,0) e que, portanto, $h = -3$ e $k = 0$. Além disso, a concavidade	

	está voltada para baixo, logo $a = -3$. Assim $y = -3(x+3)^2$ **Dificuldades** a) O aluno pode ter dificuldade em associar as coordenadas do vértice com a expressão da função. b) O aluno pode esquecer-se do sinal negativo atrás do h e dizer erradamente $y = -3(x-3)^2$ c) O aluno pode não perceber a necessidade do sinal negativo do a.	a) O professor questiona o aluno: Quais as coordenadas do vértice da parábola? Quanto vale h? Quanto vale k? Quanto vale a? b) O professor chama a atenção para o sinal negativo antes do h c) O professor recorda o aluno da relação entre a concavidade da parábola e sinal do a
I	O aluno nota que o vértice da parábola tem coordenadas $(0,-2)$ pelo que $h = 0$ e $k = -2$. Além disso, a concavidade é voltada para baixo pelo que $a = -3$. Assim $y = -3x^2 - 2$ **Dificuldades** O aluno pode ter dificuldade em associar as coordenadas do vértice com a expressão da função. O aluno pode não perceber a necessidade do sinal negativo do a.	O professor questiona o aluno: Quais as coordenadas do vértice da parábola? Quanto vale h? Quanto vale k? Quanto vale a? Se o aluno tiver dificuldade no sinal do a, o professor recorda a relação entre o a e a concavidade da parábola.

J	O aluno nota que o vértice tem coordenadas (4,0) e que, portanto, $h = 4$ e $k = 0$. Além disso, a concavidade está voltada para cima, logo $a = 3$. Assim $y = 3(x-4)^2$ **Dificuldades** a) O aluno pode ter dificuldade em associar as coordenadas do vértice com a expressão da função. b) O aluno pode esquecer-se do sinal negativo atrás do h e dizer erradamente $y = 3(x+4)^2$	 a) O professor questiona o aluno: Quais as coordenadas do vértice da parábola? Quanto vale h? Quanto vale k? Quanto vale a? b) O professor chama a atenção para o sinal negativo antes do h

<u>Aula 5</u>

Aula assíncrona correspondente ao segundo bloco de 45 minutos do dia 15 de março.

Os alunos resolvem tarefas definidas no plano de trabalho que devem estar prontas no início da aula síncrona seguinte, no dia 17 de março.

Objetivo: Consolidação das aprendizagens adquiridas nas aulas anteriores.

Tarefa:

Ler o exercício resolvido da página 63 do manual e resolver os seguintes exercícios:

Pág. 63 ex: 58

Pág. 64 ex: 59

Pág, 65 ex: 62

Pág. 66 ex: 64

Pág. 67 ex: 66

(ver anexo 6)

Exercício	Atividade dos alunos

<table>
<tr><td>58.1</td><td>O aluno nota que o vértice da parábola tem abcissa $-\frac{1}{2}$, logo $h = -\frac{1}{2}$ e, portanto, $y = a(x+\frac{1}{2})^2$. Como o ponto (0,1) pertence à parábola $1 = a(\frac{1}{2})^2$ logo $a = 4$ e portanto $y = 4(x+\frac{1}{2})^2$.</td></tr>
<tr><td>58.2</td><td>O aluno nota que o vértice da parábola tem abcissa 3 , logo $h = 3$ e, portanto, $y = a(x-3)^2$. Como o ponto $(0,-\frac{9}{2})$ pertence à parábola $-\frac{9}{2} = a(3)^2$ logo $a = -\frac{1}{2}$ e portanto $$y = -\frac{1}{2}(x-3)^2$$</td></tr>
<tr><td>59.1</td><td><u>Função f</u>
Domínio: IR
Contradomínio: [0,+∞[
Quadro de variação
<table>
<tr><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>Decrescente</td><td>Minimizante: 2
Mínimo: 0</td><td>Crescente</td></tr>
</table>
<u>Função g</u>
Domínio: IR
Contradomínio:]-∞, 0]
Quadro de variação
<table>
<tr><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>Crescente</td><td>Maximizante: -1
Máximo: 0</td><td>crescente</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>59.2</td><td><u>Função f</u>
O aluno nota que a abcissa do vértice é 2 e que, portanto, $h = 2$ e $y = a(x-2)^2$. Como a parábola passa no ponto (0,2) vem $2 = a(-2)^2$ e portanto $a = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$
<u>Função g</u></td></tr>
</table>

	O aluno nota que a abcissa do vértice é -1 e que, portanto, $h = -1$ e $y = a(x+1)^2$. Como a parábola passa no ponto (-3,-4) vem $$-4 = a(-3+1)^2 \Leftrightarrow -4 = a(-2)^2 \Leftrightarrow -4 = 4a \Leftrightarrow a = -1$$ Assim $y = -(x+1)^2$
62.1	O aluno nota que a ordenada do vértice da parábola é 2, logo $k = 2$ e, portanto, $y = ax^2 + 2$. Como a parábola passa no ponto (2,4) vem $$4 = 4a + 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$ Assim $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$
62.2	O aluno nota que a ordenada do vértice da parábola é 5, logo $k = 5$ e, portanto, $y = ax^2 + 5$. Como a parábola passa no ponto (3,0) vem $$0 = 9a + 5 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{9}$$ Assim $y = -\frac{5}{9}x^2 + 5$
64	(see table below)
66.1	O aluno observa que a abcissa do vértice da parábola é igual à abcissa do ponto médio dos zeros, logo é -1. Observa também que a ordenada do vértice é 2 e conclui que as coordenadas do vértice são (-2,2) pelo que $h = -1$ e $k = 2$ e, portanto, $y = a(x+1)^2 + 2$. Observando que a parábola passa em (1,0) o aluno nota que, então,

Parábola	Coordenadas do vértice	contradomínio
$y = -x^2 + 5$	(0,5)	$]-\infty, 5]$
$y = 3x^2 + \sqrt{3}$	$(0, \sqrt{3})$	$[\sqrt{3}, +\infty[$
$y = -2x^2 - \frac{1}{2}$	$(0, -\frac{1}{2})$	$]-\infty, -\frac{1}{2}]$
$y = -4(x-3)^2$	(3,0)	$]-\infty, 0]$

	$0 = a(1+1)^2 + 2 \Leftrightarrow 0 = 4a + 2 \Leftrightarrow -2 = 4a \Leftrightarrow a = -\frac{2}{4}$ $= -\frac{1}{2}$ O aluno conclui assim que $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$
66.2	O aluno observa que as coordenadas do vértice são $(\frac{3}{2}, -3)$ e que, portanto, $h = \frac{3}{2}$ e $k = -3$ pelo que $y = a(x - \frac{3}{2})^2 - 3$. Notando que a parábola passa no ponto de coordenadas $(\frac{7}{2}, 0)$ o aluno escreve: $$0 = a(\frac{7}{2} - \frac{3}{2})^2 - 3 \Leftrightarrow 0 = 4a - 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$ O aluno conclui então que $y = \frac{3}{4}(x - \frac{3}{2})^2 - 3$
66.3	O aluno observa que a abcissa do vértice da parábola é igual à abcissa do ponto médio dos zeros, logo é 2. Observa também que a ordenada do vértice é -2 e conclui que as coordenadas do vértice são (2,-2) pelo que $h = 2$ e $k = -2$ e, portanto, $y = a(x-2)^2 - 2$. Observando que a parábola passa em (-1,0) o aluno nota que, então, $$0 = a(-1-2)^2 - 2 \Leftrightarrow 0 = 9a - 2 \Leftrightarrow 2 = 9a \Leftrightarrow a = \frac{2}{9}$$ O aluno conclui assim que $y = \frac{2}{9}(x-2)^2 - 2$

<u>Aula 6</u>

Aula síncrona, dada através da plataforma Teams

Data: 17 de março

Duração: 90 minutos

Objetivos:

- Saber passar da forma canónica para a forma que evidencia o vértice
- Saber resolver inequações da forma $f(x) > d$ ou $f(x) < d$, sendo $f(x)$ uma função quadrática

A aula está dividida nos seguintes momentos:

1. Explicação do professor sobre como passar da fórmula canónica para a fórmula que evidencia o vértice e vice-versa (20 min)
2. Resolução pelos alunos de dois exercícios de passagem da forma canónica para a fórmula que evidencia o vértice (15 min)
3. Correção dos exercícios de passagem da forma canónica para a fórmula que evidencia o vértice (10 min)
4. Resolução da tarefa "Altura de uma bola" (15min)
5. Discussão da tarefa "Altura de uma bola" (10 min)
6. Discussão de inequações da forma $f(x) > d$ ou $f(x) < d$, sendo $f(x)$ uma função quadrática (20 minutos)

1. Explicação do professor sobre como passar da fórmula canónica para a fórmula que evidencia o vértice e vice-versa

O professor começa por recordar que na aula anterior se estudou o gráfico de funções da forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Depois nota que é comum escrever as funções quadráticas na forma canónica $f(x) = ax^2 + bx + c$, pelo que importa aprender a converter uma forma na outra e anuncia que esse será o conteúdo da primeira parte da aula.

O professor indica então que, para escrever $f(x) = a(x-h)^2 + k$ na forma canónica, basta desenvolver o quadrado, fazer o produto por a e somar as constantes. Para fazer a conversão inversa temos de pensar um pouco mais.

Fazendo partilha de ecrã o professor abre uma folha branca e desenha uma parábola e uma linha horizontal que interseta a parábola em dois pontos. O professor nota então que a abcissa do vértice corresponde à abcissa do ponto médio dos pontos de interseção da linha horizontal com a parábola. Assim, explica então o professor, para saber a abcissa do vértice basta resolver a equação $f(x) = d$ para algum valor de d pertencente ao contradomínio de f e achar a média das soluções obtidas. Continuando, o professor nota que, na forma canónica, $f(0) = c$ pelo que c pertence sempre ao contradomínio f. Então, explica o professor, uma maneira rápida de obter a abcissa do vértice é fazer $d = c$, determinar as soluções da equação $f(x) = c$ e fazer a sua média.

O professor acrescenta ainda que sabendo a abcissa h do vértice para saber a ordenada basta determinar $f(h)$. Finalmente, o professor nota que o valor de a é o mesmo nas duas representações.

O professor abre então o ficheiro "Exercício de conversão da forma canónica para a forma que evidencia o vértice" (anexo 7) e resolve a primeira alínea na folha branca previamente aberta.

2. Resolução pelos alunos de dois exercícios de passagem da forma canónica para a fórmula que evidencia o vértice

O professor pede aos alunos que resolvam os exercícios 2 e 3 do ficheiro "Exercício de conversão da forma canónica para a forma que evidencia o vértice" (anexo 7). Dá 15 minutos para resolverem autonomamente.

Exercício	Atividade do aluno
2.	O aluno escreve: $x^2 - 4x + 7 = 7$ $\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow x(x-4) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$ $h = \frac{4+0}{2} = 2$ $k = g(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 7 = 4 - 8 + 7 = 3$ $a = 1$ $g(x) = (x-2)^2 + 3$ O vértice tem coordenadas (2,3) e a concavidade é voltada para cima
3.	O aluno escreve $-2x^2 - 8x - 11 = -11$ $\Leftrightarrow -2x^2 - 8x = 0$ $\Leftrightarrow x(-2x-8) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee -2x - 8 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee -2x = 8$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$

	$$h = \frac{0-4}{2} = -2$$ $$k = h(-2) = -2 \times (-2)^2 - 8 \times (-2) - 11 =$$ $$= -8 + 16 - 11 = -3$$ $$g(x) = -2(x+2)^2 - 3$$ O vértice tem coordenadas (-2,-3) e a concavidade é voltada para baixo.

3. Correção dos exercícios de passagem da forma canónica para a fórmula que evidencia o vértice

O professor pede a um aluno que indique a solução da alínea 2. Se estiver errada o professor vai resolver passo a passo verificando se o aluno cumpriu cada um dos passos, descobrindo, assim, o erro do aluno.
Escolhendo outro aluno o professor usa o mesmo processo para corrigir a alínea 3.

4. Resolução da tarefa "Altura de uma bola"

Durante 15 minutos os alunos resolvem autonomamente a tarefa "Altura de uma bola" (anexo 7).

Possível resolução:

O aluno determina quando é que a bola volta a estar nos 1,3 m resolvendo a equação

$$-4{,}9t^2 + 15t + 1{,}3 = 1{,}3$$

$$\Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 15t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(-4{,}9t + 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \ \vee \ -4{,}9t + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \ \vee 15 = 4{,}9t$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \ \vee t = \frac{15}{4{,}9} \approx 3{,}06$$

O aluno conclui que a bola esteve acima dos 1,3m durante aproximadamente 3,06 segundos.

5. Discussão da tarefa “Altura de uma bola”

O professor pede a um aluno que explique como resolveu o problema. Se a resolução deste não estiver correta o professor pergunta à turma se concorda com o colega e procura chegar, em conjunto com a turma, à resposta correta.

6. Discussão de inequações da forma $f(x) > d$ ou $f(x) < d$, sendo $f(x)$ uma função quadrática (20 minutos)

O professor nota que neste problema consideramos a inequação

$$-4{,}9t^2 + 15t + 1{,}3 > 1{,}3$$

e que para a resolvermos tivemos de resolver a equação $-4{,}9t^2 + 15t + 1{,}3 = 1{,}3$

de modo a saber em que instantes a bola esteve a 1,3 m de altura e depois observar graficamente que entre estes dois instantes a bola esteve sempre acima dos 1,3 metros de altura.

O professor pergunta então, e se quisermos resolver a inequação $x^2 < 4$, que devemos fazer?

O professor espera pela resposta de um aluno e conduz a discussão de modo a concluir que se tem de resolver a equação $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$, ver graficamente que entre $x = -2$ e $x = 2$ a função x^2 é sempre menor que 4 e concluir que o conjunto solução da inequação é o intervalo $]-2,2[$.

Em seguida o professor pergunta: e se quisermos resolver a equação $-x^2 < -9$?

O professor espera pela resposta de um aluno e conduz a discussão de modo a concluir que se tem de resolver a equação $-x^2 = -9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$ e verificar graficamente que $-x^2$ é menor que -9 quando $x < -3$ ou $x > 3$ pelo que o conjunto solução da equação é o intervalo $]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

Genericamente, conclui o professor, para resolver uma inequação do tipo $f(x) < d$ ou $f(x) > d$ primeiro resolvemos a equação $f(x) = d$ e depois vemos graficamente o conjunto solução.

<u>Aula 7</u>

Aula assíncrona correspondente ao bloco de 90 minutos do dia 18 de março.

Os alunos resolvem tarefas definidas no plano de trabalho que devem estar prontas no início da aula síncrona seguinte, no dia 22 de março.

Objetivo: Consolidar as aprendizagens adquiridas na aula síncrona anterior
Tarefa: Resolução da ficha "Exercícios 17 de Março"

Exercício	Atividade do aluno
1a)	O aluno começa por determinar a abcissa do projétil para a qual a altura do projétil é máxima. Para isso, resolve a equação $$-0{,}0005x^2 + 0{,}8x + 100 = 100$$ $$\Leftrightarrow -0{,}0005x^2 + 0{,}8x = 0$$ $$\Leftrightarrow x(-0{,}0005x + 0{,}8)$$ $$\Leftrightarrow x = 0 \vee -0{,}0005x + 0{,}8 = 0$$ $$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee 0{,}8 = 0{,}0005x$$ $$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee x = \frac{0{,}8}{0{,}0005} = 1600$$ O aluno conclui, então, que a abcissa para a qual a altura do projétil é máxima é $x = \frac{1600+0}{2} = 800$ e, portanto, a altura máxima do projétil é $$y(800) = -0{,}0005 \times 800^2 + 0{,}8 \times 800 + 100 = 420\,m$$
1b)	O aluno nota que quando o projétil cai sobre o mar a sua altura é zero logo a sua abcissa pode obter-se resolvendo a equação $$-0{,}0005x^2 + 0{,}8x + 100 = 0$$ $$\Leftrightarrow x = \frac{-0{,}8 \pm \sqrt{0{,}8^2 - 4 \times (-0{,}0005) \times 100}}{2 \times -0{,}0005}$$ $$\Leftrightarrow x \approx -116.52 \vee x \approx 1716.52$$

	O aluno observa que a abcissa negativa não faz sentido no contexto do problema pois corresponderia a um ponto atrás do ponto de lançamento do projétil. Conclui, assim, que o alcance do projétil é 1716.52 m
1c)	O aluno começa por determinar a abcissa do projétil para a qual a sua altura é 75m. Para isso resolve a equação $-0{,}0005x^2 + 0{,}8x + 100 = 75$ $\Leftrightarrow -0{,}0005x^2 + 0{,}8x + 25 = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{-0{,}8 \pm \sqrt{0{,}8^2 - 4 \times (-0{,}0005) \times 25}}{2 \times -0{,}0005}$ $\Leftrightarrow x \approx -30{,}66 \vee x \approx 1630{,}66$ O aluno descarta a abcissa negativa por corresponder a valores atrás do ponto de lançamento que não fazem sentido no contexto do problema. O aluno conclui então que o projétil atinge 75m de altura quando a sua abcissa é aproximadamente 1630,66, e como nesse momento está a descer em direção ao mar, a altura estará entre 0 e 75m quando a sua abcissa estiver entre 1630,66m e 1716,52m
2 a)	O aluno começa por determinar a abcissa do vértice da parábola, começando por resolver a equação $2x^2 - 4x - 16 = -16$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow x(2x - 4) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x - 4 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$ O aluno conclui que a abcissa do vértice da parábola é $x = \frac{0+2}{2} = 1$ Em seguida o aluno determina a ordenada do vértice calculando $f(1) = 2 - 4 - 16 = -18$

	Notando que $a = 2 > 0$ o aluno conclui que a parábola tem concavidade voltada para cima e que, portanto, tendo em conta as coordenadas do vértice, será decrescente em $]-\infty, 1]$ e crescente em $[1, +\infty[$, tem minimizante 1 e mínimo -18. Para estudar o sinal o aluno começa por determinar os zeros da parábola resolvendo a equação $$2x^2 - 4x - 16 = 0$$ $$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 2 \times -16}}{2 \times 2}$$ $$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$$ Uma vez que a concavidade da parábola é virada para cima o aluno conclui que a função será positiva em $]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$ Será negativa em $]-2,4[$ e será nula em $x = -2$ e em $x = 4$
b)	O aluno começa por determinar a abcissa do vértice da parábola, começando por resolver a equação $$-x^2 - 2x - 8 = -8$$ $$\Leftrightarrow -x^2 - 2x = 0$$ $$\Leftrightarrow x(-x - 2) = 0$$ $$\Leftrightarrow x = 0 \vee -x - 2 = 0$$ $$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$ O aluno conclui que a abcissa do vértice da parábola é $$x = \frac{0 - 2}{2} = -1$$ Em seguida o aluno determina a ordenada do vértice calculando $f(-1) = -1 + 2 - 8 = -7$ Notando que $a = -1 < 0$ o aluno conclui que a parábola tem concavidade voltada para baixo e que, portanto, tendo em conta as coordenadas do vértice, função é crescente em $]-\infty, -1]$ e decrescente em $[-1, +\infty[$, tem maximizante -1 e máximo -7. Como o máximo é -7 o aluno conclui que a função será sempre negativa.

Aula 8

Aula síncrona, dada através da plataforma Teams

Data: 22 de março

Duração: 45 minutos

Objetivos:

- Consolidação da matéria estudada nas aulas anteriores
- Saber resolver quaisquer inequações de segundo grau

A aula encontra-se dividida nos seguintes momentos:

1. Correção da tarefa "Exercícios 17 de Março" (25 minutos)
2. Discussão em torno de inequações quadráticas em que o segundo membro não é constante (20 min)

1. Correção da tarefa "Exercícios 17 de Março"

Para cada alínea o professor pede a um aluno que explique como resolveu o exercício. Vai fazendo a correção dos exercícios numa folha branca do OneNote.

2. Discussão em torno de inequações quadráticas em que o segundo membro não é constante

O professor anuncia que vamos agora ver como resolver inequações de segundo grau em que o segundo membro não é constante. Numa folha branca do OneNote escreve a inequação $2x^2 < 2x$ e pede aos alunos sugestões de como começar a resolução. Ou há um aluno que sugere passar o termo $2x$ para o primeiro membro ou o professor faz essa sugestão. O professor escreve então a inequação equivalente $2x^2 - 2x < 0$ e pergunta: Agora como resolver a inequação? Em seguida, o professor pede a um aluno explique como resolver a inequação e vai resolvendo na folha branca à medida que o aluno vai dizendo como se resolve. Se o aluno escolhido não souber resolver o professor dá oportunidade aos colegas de ajudar.

Em seguida, o professor escreve a inequação $2x^2 - 8 < 2x + 8$, pede a um aluno que indique como resolvê-la e vai resolvendo na folha branca à medida que o aluno vai dizendo como se resolve. Se o aluno escolhido não souber resolver o professor dá oportunidade aos colegas de ajudar.

Aula 9

Aula assíncrona correspondente ao segundo bloco de 45 minutos do dia 22 de março.

Objetivo: Avaliar a evolução do pensamento algébrico e do raciocínio matemático dos alunos.

É dado aos alunos o "teste final" (anexo 9) para estes resolverem e submeterem na plataforma Teams até ao dia 24 de março.

4.Métodos e procedimentos de recolha de dados

Uma vez que o objetivo desta investigação é compreender o pensamento algébrico e o raciocínio matemático dos alunos, observando-os e ao seu trabalho durante as aulas, o paradigma da investigação é interpretativo e a abordagem é qualitativa com observação participante.

Quanto aos métodos de recolha de dados utilizei testes escritos, recolha documental e observação.

Para saber quais as dificuldades que os alunos têm no início do estudo das funções quadráticas relativamente ao pensamento algébrico e ao raciocínio matemático, apliquei a toda a turma um teste de diagnóstico dirigido a estas duas capacidades e pedi aos alunos que submetessem as resoluções na plataforma Teams (recolha documental).

Para saber que pensamento algébrico e que processos de raciocínio revelam os alunos durante o estudo das funções quadráticas recolhi as resoluções dos alunos em Geogebra (recolha documental) e fiz o registo áudio das aulas (observação). Infelizmente o registo áudio perdeu-se devido a um problema técnico, pelo que tive de recorrer ao registo das minhas memórias das aulas.

Finalmente, para avaliar o desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio matemático devido à lecionação das aulas sobre funções quadráticas apliquei a toda a turma um teste final semelhante ao teste de diagnóstico e pedi que submetessem a resolução na plataforma Teams (recolha documental).

5. Descrição das aulas lecionadas

Aula 1

Aula assíncrona correspondente ao segundo bloco de 45 minutos do dia 8 de março.

Apenas 16 alunos resolveram a tarefa “Teste de diagnóstico”. A análise deste teste é feita na seção “6.1 Teste de diagnóstico e teste final”.

Aula 2

Aula síncrona dada na plataforma Teams no dia 10 de março, com duração de 90 minutos.
Estiveram presentes todos os 23 alunos da turma.

Iniciei a aula com a apresentação de um PowerPoint cujo primeiro slide apresenta as funções quadráticas como sendo funções da forma $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ e onde coloquei vários exemplos de funções deste tipo. Pedi aos alunos que nos exemplos dados identificassem o a, o b e o c, e obtive, dos vários alunos que foram respondendo, a resposta correta. Disse, então, que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola e mostrei um slide com imagens de objetos com a forma de parábola, assinalando as que tinham concavidade voltada para cima e as que tinham concavidade voltada para baixo. Depois mostrei um slide com o gráfico de uma parábola voltada para cima e de uma parábola voltada para baixo onde assinalei o eixo de simetria e o vértice das parábolas e disse que todas as parábolas tinham um eixo de simetria e que a interseção desse eixo de simetria com a parábola se designa vértice.

Passei, então, ao problema “Uma bola lançada do terraço” (Anexo 3, figura 8) que foi resolvido pelos alunos no Geogebra. Li o enunciado do problema explicando como inserir a função no Geogebra e observar o seu gráfico, depois dei 15 min para todos responderem e fui vendo as respostas que iam surgindo no Geogebra. Verifiquei que todos estavam a dar respostas corretas. Ao fim de 15 minutos abri a resposta de um aluno escolhido ao acaso, li a sua resposta à primeira pergunta e pedi que explicasse como resolveu a questão. O aluno disse que a altura do terraço correspondia a $x = 0$. Depois abri a resposta de outro aluno escolhido ao acaso, li a sua resposta à segunda pergunta e pedi que explicasse como chegou à resposta. O aluno disse que tinha de ver a interseção da parábola com o eixo dos *xx*. Então notei que a parábola interseta o eixo dos *xx* em dois pontos e perguntei ao aluno porque escolheu o ponto da direita. O aluno respondeu que no outro ponto a bola teria de se mover para trás. Finalmente passei à última pergunta. Novamente escolhi um aluno ao acaso e li a sua resposta à terceira pergunta. O aluno respondeu que a bola atingiu uma altura máxima de 4 metros e a 1 metro da casa. Validei a resposta e passei à tarefa seguinte.

Abri o ficheiro Geogebra "Função quadrática – parte 1" (Anexo 3, figura 9), destinado ao estudo das funções da forma $y = ax^2$. Li o enunciado, mostrei como se fazia variar o a e dei 15 minutos para responderem às questões. Durante estes 15 minutos os alunos responderam às questões no Geogebra e eu observei a suas respostas. Na primeira pergunta, todos os alunos identificaram corretamente que, quando $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e, quando $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo. Na segunda pergunta as respostas divergiram. Por exemplo, uma aluna, Cátia[1], respondeu "Quando aumentamos o valor de a, a concavidade fica positiva e vira para cima." Outro aluno, João, respondeu "A concavidade fica menor". Outra aluna ainda, Teresa, respondeu "Quando se aumenta o valor absoluto de a, a concavidade fica mais estreita".

Respostas como a de Cátia indicam que alguns alunos não perceberam a referência da pergunta ao valor absoluto de a e descreveram o que acontece quando se aumenta o valor de a. As outras duas respostas fazem referência à concavidade, apenas a última refere que fica mais estreita apontando para a observação correta de que a parábola fica mais estreita.

Após os 15 minutos, escolhi um aluno ao acaso e li a sua resposta à primeira pergunta, confirmando que estava certa. Depois escolhi outro aluno e pedi que lesse a sua resposta à segunda pergunta e a explicasse. O aluno disse que não sabia explicar muito bem, mas que a parábola se aproximava do eixo dos yy. Validei a resposta e expliquei que podíamos dizer que a abertura da parábola diminuía. Expliquei também a influência do valor absoluto, indicando que quando o a é positivo, quando aumento o valor de a, aumenta o seu valor absoluto e diminui a abertura da parábola. Quando o a é negativo, quanto mais negativo, maior o seu valor absoluto e menor a abertura da parábola. Daí que quanto maior o valor absoluto, menor a abertura da parábola.

[1] Os nomes de todos os alunos são fictícios.

Terminada a tarefa de exploração das funções da forma $y = ax^2$, abri as páginas do Geogebra correspondentes ao trabalho de casa. Li os enunciados e houve uma aluna que perguntou o que eram os parâmetros. Respondi que eram as letras, a, h e k cujos valores fazíamos variar.

Aproveitei também para averiguar se os alunos tinham compreendido o que era o vértice da parábola selecionando uma das parábolas que seriam estudadas no trabalho de casa e perguntando qual era o vértice da parábola. Obtive a resposta correta por parte de um aluno e com isto terminou a aula.

Nesta aula os momentos de discussão duraram menos tempo que o previsto pois chegou-se logo à resposta correta. Os alunos participaram sempre que solicitados e parece-me que os objetivos de aprendizagem foram cumpridos pois as respostas dadas pelos alunos foram, quase sempre, corretas.

<u>Aula 3</u>

Aula assíncrona correspondente ao bloco de 90 minutos do dia 18 de março

Os alunos resolveram as tarefas "função quadrática – parte 2" (Anexo 4, figura 10) e "função quadrática – parte 3" (Anexo 4, figura 11).

Nas questões sobre a relação entre os parâmetros h e k e as coordenadas do vértice houve alguns alunos que se aperceberam do deslocamento da parábola para cima e para baixo de acordo com o valor de k mas não identificaram k com a ordenada do vértice. O mesmo aconteceu com o efeito do parâmetro h, sendo que alguns alunos identificaram o deslocamento horizontal da parábola, mas não identificaram que h era a abcissa do vértice. Por exemplo, a Rafaela respondeu na primeira pergunta do estudo das funções da forma $ax^2 + k$ (Anexo 4, figura 10) que "Quando o parâmetro k aumenta as coordenadas do vértice também aumentam, e vice-versa". Na primeira pergunta do estudo das funções da forma $a(x - h)^2 + k$ (Anexo 4, figura 11), Rafaela escreveu "a relação entre o parâmetro h com as coordenadas do vértice da parábola, é que o y mantém constante mas o x muda, quanto maior o h mais a função vai estar para a direita, e vice-versa, e a relação do parâmetro k com as coordenadas do vértice, tem a ver com o y, o x do vértice mantém-se constante mas o y muda, se o k aumentar o y aumenta, se o k diminuir o y aumenta, mudando a função para cima e para baixo".

Apesar de alguns erros na sua resposta, percebe-se que Rafaela compreendeu o deslocamento horizontal da parábola como efeito do parâmetro h e o deslocamento vertical da parábola como efeito do parâmetro k, mas não identificou h e k com as coordenadas do vértice.

Quanto ao efeito do parâmetro a voltaram a aparecer respostas muito diversas. Nem todos os alunos referiram que, quando $a > 0$, a concavidade é voltada para cima e que, quando $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo. No entanto, todos notam que o parâmetro a faz variar a concavidade.

<u>Aula 4</u>

Aula síncrona dada na plataforma Teams no dia 15 de março, com duração de 45 minutos.

Estiveram presentes 21 alunos, tendo faltado 2 alunos.

Tendo em conta as respostas dadas pelos alunos tinha planeado para esta aula abrir respostas como a de Rafaela, validar a respostas e dar depois a palavra a quem identificou h e k com as coordenadas do vértice.

Contudo, devido a um problema com o meu computador não pude partilhar ecrã. Teve de ser a professora Teresa Moreira a partilhar ecrã que, no entanto, não tinha acesso às respostas dos alunos, só ao enunciado. A aula começou então com a professora Teresa Moreira a abrir, partilhando ecrã, o enunciado da tarefa relativa ao estudo das funções da forma $ax^2 + k$ (Anexo 4, figura 10). Disse então aos alunos que, pelo que tinha estado a ver, eles tinham percebido que o parâmetro k fazia a parábola deslocar-se para cima e para baixo, mas que havia uma conclusão mais importante a tirar. Pedi à professora Teresa Moreira que selecionasse $k = 2$ e notei que a ordenada do vértice da parábola era também 2. Salientei então que ordenada do vértice seria sempre igual a k.

Quanto ao parâmetro a, salientei que, tal como antes, quando $a > 0$, a concavidade é voltada para cima, quando $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo, quando a é positivo e a aumenta a parábola "fecha", quando a é negativo e a diminui a parábola também "fecha".

Depois de ter corrigido as respostas ao estudo das funções da forma $ax^2 + k$, pedi à professora Teresa Moreira que escrevesse numa folha branca do OneNote a função $2x^2 + 3$ e escolhi um aluno para responder às perguntas "qual a concavidade do gráfico da função?" e "quais as coordenadas do vértice?". O aluno respondeu corretamente e passámos ao estudo das funções da forma $a(x-h)^2 + k$.

Pedi então à professora Teresa Moreira que abrisse a tarefa correspondente ao estudo das funções da forma $a(x-h)^2 + k$ (Anexo 4, figura 11) e disse aos alunos que tinham compreendido bem o efeito dos parâmetros h e k no deslocamento da parábola, mas que faltava perceber uma coisa importante. Pedi à professora Teresa Moreira para selecionar $h = 2$ e $k = -2$ e notei que o vértice tinha coordenadas $(2, -2)$. Disse então que o vértice tem sempre coordenadas (h, k).

Em relação à segunda pergunta, notei que, tal como antes, se $a > 0$ a concavidade é voltada para cima e se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo, sendo que se $a > 0$ e a aumenta a abertura da parábola diminui, se $a < 0$ e a diminui a abertura parábola também diminui.

Após a correção do trabalho de casa pedi à professora Teresa Moreira que abrisse o manual virtual, da escola virtual, na página 66 para fazermos o exercício 63 (Anexo 5, figura 12).

Para cada parábola pedi a um aluno que indicasse a sua expressão e explicasse como tinha chegado a essa expressão. Só houve dificuldade na função h em que o aluno propôs para expressão algébrica $-3(x-3)^2$. Então chamei a atenção para o sinal "-" na expressão $(x-h)^2$ e o aluno corrigiu indicando a resposta correta.

Com a resolução deste exercício terminou a segunda aula.

Devido ao problema no computador esta aula foi mais curta que o previsto e não foi possível discutir respostas de alunos. Em vez de uma discussão das respostas, eu apenas expliquei oralmente a resposta pretendida.

Os alunos participaram sempre que solicitados e dadas as respostas quase sempre corretas concluo que foram cumpridos os objetivos de aprendizagem.

<u>Aula 5</u>

Aula assíncrona correspondente ao segundo bloco de 45 minutos do dia 15 de março

Foi pedido aos alunos que lessem o exercício resolvido da página 63 (Anexo 6, figura 13) e resolvessem os exercícios do livro indicados nas figuras 14 a 18 do anexo 6.

Não se sabe se os alunos responderam a estas perguntas pois não foi pedido que submetessem as respostas.

É suposto que os alunos resolvam as questões, comparem a resposta com as soluções providenciadas no final do manual e enviem dúvidas via Teams.

Contudo, nenhuma dúvida foi colocada.

Aula 6

Aula síncrona dada na plataforma Teams no dia 17 de março, com duração de 90 minutos.

Estiveram presentes 21 alunos, tendo faltado 2.

Comecei a aula notando que vimos duas expressões para as funções quadráticas: A expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$, designada "forma canónica" e a expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$ designada "forma do vértice".

Escrevi então a função quadrática $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$ e perguntei "como podemos passar para a forma canónica?" Houve logo uma aluna que respondeu começando corretamente por desenvolver o quadrado e juntando por fim os termos semelhantes. No final, notei que o a da forma canónica era o mesmo a da forma do vértice.

Depois escrevi a função quadrática $2x^2 - 4x + 4$ e notei que para escrevê-la na forma do vértice tínhamos de achar o vértice da parábola. Para isso, desenhei na folha branca do OneNote uma parábola com concavidade voltada para cima, pois o parâmetro a da função era positivo, e uma reta horizontal intersetando a parábola em dois pontos.

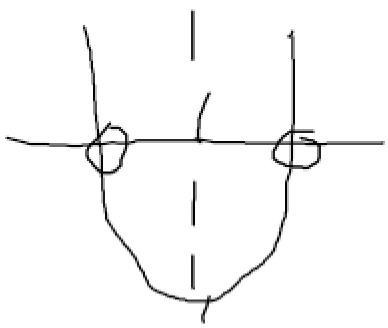


Figura 1-Parábola com eixo de simetria marcado a tracejado, uma linha horizontal e pontos de interseção entre a linha horizontal e a parábola (imagem da figura feita manualmente no OneNote e utilizada na aula)

Perguntei então "como posso determinar o vértice sabendo estes dois pontos?". Houve logo um aluno que respondeu que o vértice estava no meio.

Para determinar estes dois pontos - disse eu – precisamos de saber a equação da reta. Perguntei a um aluno qual era a equação de uma reta horizontal e ele não soube responder. Perguntei então se alguém podia ajudar e houve um aluno que disse que a equação era $y = k$. Validei a resposta do aluno, mas quando escrevi no OneNote substituí k por d para não fazer confusão com o k da parábola. Depois disse que d podia ser qualquer valor do contradomínio de f e sugeri que se considerasse $d = f(0)$.

Pedi a um aluno que determinasse $f(0)$ e o aluno respondeu corretamente 4. Então pus no gráfico, junto à reta, a equação $y = 4$ e perguntei como podíamos determinar os pontos de interseção da reta com a parábola.

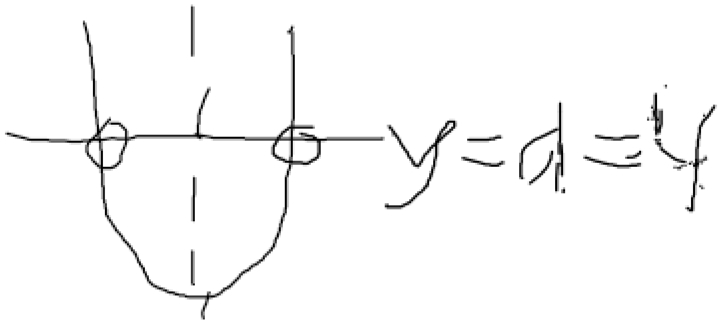


Figura 2- Interseção da parábola com a reta de equação y=4 (imagem da figura feita manualmente no OneNote e utilizada na aula)

Ninguém me respondeu, por isso expliquei que os pontos da parábola têm equação $y = 2x^2 - 4x + 4$ e que os pontos da reta têm equação $y = 4$. Os pontos de interseção verificam ambas as equações pelo que podem ser obtidos através da equação

$$2x^2 - 4x + 4 = 4$$

Escolhi então um aluno para resolver a equação. O aluno disse que teríamos de usar a fórmula resolvente. Notei que para usar a fórmula resolvente tínhamos de passar 4 para o primeiro membro ficando com a equação:

$$2x^2 - 4x = 0$$

Depois expliquei que havia uma forma mais rápida de resolver a equação que consistia em pôr o x em evidência. Escrevi "$x($" e pedi a um aluno que completasse. O aluno respondeu corretamente

$$x(2x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Um aluno perguntou-me “como fazia $x(2x-4)=0$?” Expliquei-lhe que quando um produto é zero pelo menos um dos fatores é nulo.

Escrevi as abcissas dos pontos no gráfico previamente desenhado (ver figura 3) e pedi a um aluno que indicasse a abcissa do vértice. O aluno indicou corretamente $x = 1$.

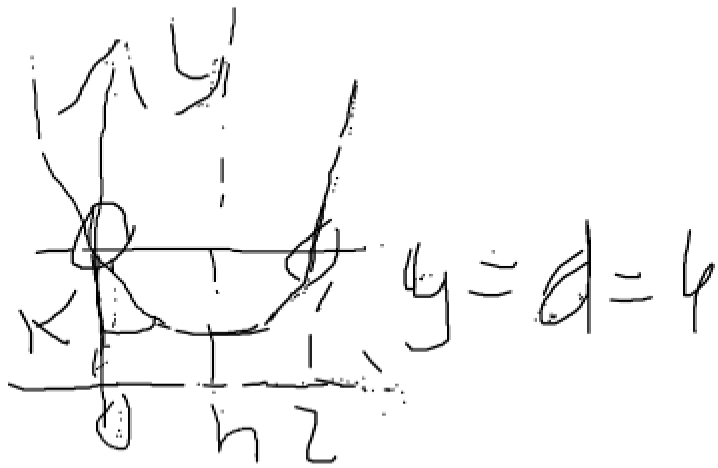


Figura 3-Interseção da parábola com a reta de equação y=4 e marcação das abcissas dos pontos de interseção (imagem da figura feita manualmente no OneNote e utilizada na aula)

Em seguida, perguntei a um aluno: “Como posso determinar a ordenada do vértice?”. O aluno disse que não sabia. Perguntei se alguém podia ajudar e ninguém me respondeu.

Então expliquei que para determinar a ordenada do vértice podíamos substituir x por 1 na expressão da função, ou seja, $k = f(1)$ e fiz o cálculo de $f(1)$ tendo concluído que $k = 2$. Finalmente, escrevi a expressão de f na “forma do vértice”:

$$f(x) = 2(x-1)^2 + 2$$

Passei então à segunda função que tinha previsto dar aos alunos a resolver (ver anexo 7) como exercício, mas a explicação da primeira função durou tanto tempo que não dava já tempo para os alunos resolverem sozinhos. Por isso, escrevi a função $g(x) = -2x^2 - 8x - 11$. Escolhi um aluno ao acaso e perguntei como se podia achar o vértice desta parábola. O aluno respondeu-me “Não sei. Tinha de estudar primeiro”. Perguntei: “Como fizemos na outra função?”. Houve então outro aluno que me respondeu que tínhamos de achar $g(0)$ e calculou $g(0) = -11$. Fiz então o gráfico de uma parábola com concavidade voltada para baixo e assinalei a reta $y = -11$.

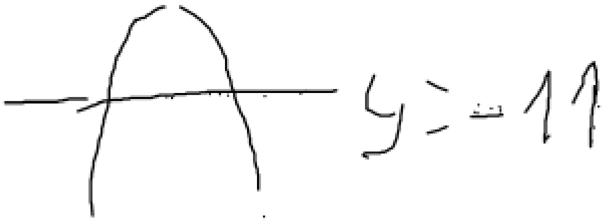


Figura 4- Interseção da parábola com a reta de equação $y = -11$ (imagem da figura feita manualmente no OneNote e utilizada na aula)

Fui perguntando aos alunos os passos seguintes. Muitos não souberam responder. Aos poucos, no entanto, surgiram ideias de como avançar por parte dos alunos e resolvemos a equação $-2x^2 - 8x - 11 = -11$. Obtivemos o resultado $x = 0 \vee x = -4$. Assinalei no gráfico as abcissas dos pontos de interseção da reta $y = -11$ com a parábola e perguntei a um aluno escolhido ao acaso qual a abcissa do vértice da parábola e o aluno respondeu corretamente $h = -2$. Representei também essa informação no gráfico.

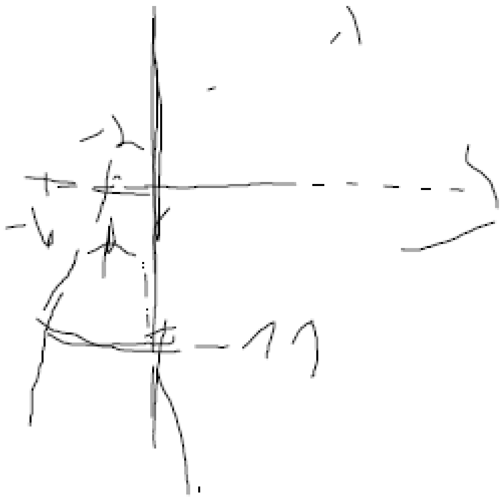


Figura 5-Interseção da parábola com a reta $y = -11$, abcissas dos pontos de interseção e abcissa do vértice (imagem da figura feita manualmente no OneNote e utilizada na aula)

Mais uma vez perguntei como se calculava a ordenada do vértice e ninguém me respondeu. Recordei então que a ordenada do vértice é a imagem da abcissa, pelo que basta calcular $g(-2)$, determinei $g(-2) = -3$ e concluí escrevendo a função na forma do vértice: $g(x) = -2(x + 2)^2 - 3$.

Passei então ao problema “Altura de uma bola” (ver anexo 7) e dei 15 minutos para os alunos resolverem. Durante estes 15 minutos esperei que os alunos resolvessem autonomamente, cada um no seu caderno (e em sua casa) o problema proposto. Depois escolhi um aluno ao acaso para dizer como resolveu o problema.

O aluno disse que achou o instante em que a bola atingiu os 1,3 metros resolvendo a equação $-4{,}9t^2 + 15t + 1{,}3 = 1{,}3$. Ditou como se resolvia a equação e concluiu que a bola atingiu os 1,3 metros ao fim de 3,06 segundos, pelo que a bola esteve acima dos 1,3 metros durante 3,06 segundos.

Notei então que tínhamos resolvido a inequação $-4{,}9t^2 + 15t + 1{,}3 > 1{,}3$ resolvendo primeiro a equação $-4{,}9t^2 + 15t + 1{,}3 = 1{,}3$.

Em seguida, escrevi a inequação $x^2 < 4$ e perguntei como podíamos resolvê-la. Houve logo uma aluna que sugeriu $x < 2$ e corrigi dizendo que, à semelhança do problema anterior, primeiro tínhamos de resolver a equação $x^2 = 4$. Resolvi então a equação e representei o gráfico da função x^2 assinalado os pontos de ordenada 4 e as respetivas abcissas. Perguntei então quando é que $x^2 < 4$ e obtive a resposta correta por parte de um aluno: no intervalo $]-2,2[$.

Com isto terminou a aula.

Esta aula não correu de acordo com o plano. Demorei muito mais tempo que o previsto a explicar como passar da forma canónica para a forma do vértice e só fiz dois exemplos quando estavam previstos três. Quando passei para o problema "Altura de uma bola" faltava meia hora para acabar a aula e não tive o tempo necessário para trabalhar bem as inequações.

Uma coisa que me surpreendeu foi que os alunos não foram capazes de encontrar a ordenada do vértice sabendo a sua abcissa.

Nesta aula os alunos nem sempre participaram quando solicitados, havendo muitos que se limitavam a dizer que não sabiam a resposta à minha pergunta.

Dadas as dificuldades dos alunos em responder às minhas questões concluo que nesta aula não foram cumpridos os objetivos de aprendizagem.

<u>Aula 7</u>

Aula assíncrona correspondente ao bloco de 90 minutos do dia 18 de março.

Foi enviada aos alunos a ficha de trabalho "Exercícios 17 de março" (Anexo 8).

Não sabemos quais os alunos que resolveram esta ficha nem como resolveram pois não foi pedido que submetessem as resoluções na plataforma Teams.

Apenas sei as respostas dadas oralmente na aula síncrona seguinte.

<u>Aula 8</u>

Aula síncrona dada na plataforma Teams no dia 22 de março, com duração de 45 minutos.

Estiveram presentes 21 alunos, tendo faltado 2.

Esta aula consistiu na correção das primeiras duas primeiras alíneas do problema da ficha "Exercícios 17 de março" (Anexo 8) resolvida assincronamente pelos alunos.

Comecei por pedir a um aluno que lesse o enunciado do problema. Depois pedi a outro aluno que explicasse como resolveu a primeira alínea. O aluno disse que primeiro tinha calculado $y(0) = 100$ e depois tinha resolvido a equação $-0{,}0005x^2 + 0{,}8x + 100 = 100$.

Perguntei ao aluno porque tinha feito isso. O aluno respondeu-me: "para achar o vértice". Perguntei que relação tinham a soluções da equação com o vértice. O aluno não foi capaz de responder.

Eu então fiz o gráfico, notando que a concavidade era voltada para baixo pois o a era negativo, e representei os pontos com ordenada 100 mostrando que a abcissa do vértice estava a meio caminho entre estes dois pontos.

Figura 6-parábola com os pontos de ordenada 100 assinalados

Em seguida, passei a palavra a outro aluno e perguntei se estava a perceber a resolução. O aluno respondeu-me que tinha chegado atrasado e expliquei novamente o que estávamos a fazer e pedi-lhe que resolvesse a equação. Ele disse que a equação se resolvia usando a fórmula resolvente. Escrevi então a fórmula resolvente.

O aluno começou a indicar a resolução ditando a equivalência

$$-0{,}0005x^2 + 0{,}8x + 100 = 100 \Leftrightarrow -0{,}0005x^2 + 0{,}8x = 0$$

Nesse momento eu disse que não era necessário usar a fórmula resolvente pois podíamos simplesmente por o x em evidência. Resolvi então a equação pondo o x em evidência e usando depois a lei do anulamento do produto. No final acrescentei no gráfico da parábola as abcissas dos pontos de ordenada 100. Pedi a um aluno que me indicasse o valor da abcissa do vértice e obtive a resposta correta, que assinalei também no gráfico.

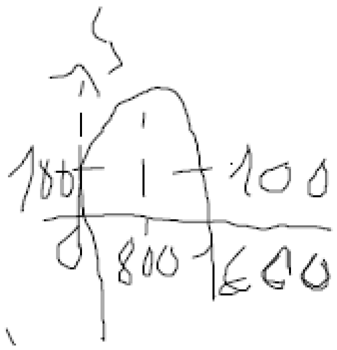


Figura 7-Parábola com os pontos em que a ordenada é 100, as respetivas abcissas e a abcissa do vértice

Em seguida perguntei como calculávamos a altura máxima e obtive a resposta correta.

Passei então para a alínea b) e escolhi um aluno para responder a esta alínea. O aluno disse que o alcance seria 1600 e eu disse que não podia ser porque 1600 correspondia à altura de 100 m. Depois perguntei: "Quando a bola cai na água qual é a altura?" O aluno respondeu: "A altura é zero". Eu então disse que podíamos achar o ponto em que a altura é zero resolvendo a equação $-0{,}0005x^2 + 0{,}8x + 100 = 0$ e perguntei como se resolvia a equação. O aluno respondeu-me que punha o x em evidência e eu disse que neste caso não podia ser porque a equação era completa, sendo necessário usar a fórmula resolvente. Escrevi a fórmula resolvente e o aluno aplicou-a corretamente tendo obtido como resultado $x = -116{,}52 \vee x = 1716{,}52$.

Escolhi então outro aluno e perguntei que informação tirávamos dali sobre o alcance do projétil e o aluno respondeu-me que o alcance do projétil estava entre aqueles dois valores. Perguntei: "Concordam?" e houve um aluno que disse que alcance era 1716,52. Perguntei-lhe porque não era -116,52 e o aluno disse-me que isso implicava a bola andar para trás. Validei a resposta do aluno e dei a aula por terminada.

Após a aula enviei via Teams a correção das restantes perguntas da ficha “Exercícios 17 de março” (Anexo 8).

Esta aula também não correu de acordo com o plano. Com efeito, por falta de tempo, não foi terminada a correção da ficha e não se falou de inequações.

Desta vez os alunos participaram mais. Via-se que pelo menos alguns tinham resolvido a ficha, inclusive alunos que na aula síncrona anterior disseram não saber a resposta às minhas questões. Estes alunos estudaram e atingiram os objetivos de aprendizagem. No entanto, notei também a insegurança de outros, o que me leva a crer que nem todos atingiram os objetivos de aprendizagem.

<u>Aula 9</u>

Aula assíncrona correspondente ao segundo bloco de 45 minutos do dia 22 de março

21 alunos resolveram o “teste final” (anexo 9). Dois alunos não entregaram a resolução, sendo que um deles tinha respondido ao teste de diagnóstico. A análise das respostas a este teste é feita na secção “6.1 teste diagnóstico e teste final”.

6. Análise de resultados

6.1 Teste de diagnóstico e teste final

Dos alunos da turma, 16 responderam ao teste de diagnóstico.

A primeira e a segunda perguntas do teste de diagnóstico destinavam-se a avaliar o pensamento algébrico dos alunos. Na primeira pergunta dez alunos acertaram a resposta e seis erraram. Dos seis que erraram, cinco não responderam ou a resposta que deram não faz sentido e um enganou-se apenas num cálculo. Isto revela que no início do estudo da função quadrática alguns alunos tinham dificuldade em escrever uma expressão algébrica traduzindo o enunciado de um problema. No entanto, a maioria dos alunos conseguiu resolver este tipo de pergunta.

Na segunda pergunta apenas dois alunos não acertaram a resposta, sendo que um destes interpretou erradamente a expressão n-ésimo como nono e calculou corretamente esse termo da sucessão. Isto mostra que os alunos têm facilidade em descobrir a lei de formação de uma sequência, o que revela um pensamento algébrico adequado. Revela também boa capacidade de generalização, uma das formas de raciocínio matemático.

A terceira e quarta perguntas do teste destinavam-se a avaliar duas formas de raciocínio matemático: A generalização e a justificação.

A terceira pergunta pedia uma generalização – a descoberta de uma regularidade na soma de três números consecutivos – e uma justificação – a justificação de que a regra é válida para quaisquer somas de números consecutivos.

Apenas três alunos não foram capazes de descobrir uma regra geral, sendo que dois destes apontam uma propriedade de um exemplo. Assim, Carolina escreveu: “20+21+22=63 Se dividirmos 63 por 3 obtemos o valor do meio, neste caso, 21. E o número é ímpar”. No entanto, dos treze alunos que formularam uma regra geral apenas dois foram capazes de justificar corretamente a validade da regra para todas as somas. A maioria dos alunos – nove dos dezasseis – chegou a uma regra geral, mas justificou apenas com exemplos. Uma aluna tentou justificar a validade da regra para todas as somas, mas não concluiu corretamente a justificação e outra deu uma justificação errada. Isto mostra que os alunos têm facilidade na generalização, mas, no início do estudo da função quadrática, mostravam dificuldades em produzir justificações, havendo muitos alunos que achavam suficiente apresentar exemplos para justificar uma regra geral.

Na quarta questão pedia-se uma justificação de uma propriedade. Apenas dois alunos apresentaram uma justificação completa. Sete alunos limitaram-se a dar exemplos e um não respondeu. Seis alunos apresentam justificações incompletas. Nestes seis alunos nota-se uma dificuldade em exprimir o seu raciocínio. Com efeito, em quatro destes seis percebe-se a ideia da demonstração – que a soma de quatro números consecutivos envolve a soma de dois números pares e de dois números ímpares – mas a exposição do raciocínio está incompleta. Por exemplo, Carlos considerou a situação em que a soma começa com um número par e escreve “par + ímpar + par + ímpar = (par + par) + (ímpar+ ímpar) = par + par = par. O raciocínio está correto, mas faltou considerar o caso em que a soma começa com um número ímpar. Ainda entre os seis alunos que deram respostas incompletas encontra-se também uma aluna que apenas se enganou no passo final da sua demostração.

Da análise das respostas à quarta questão conclui-se, mais uma vez, que, no início do estudo da função quadrática, os alunos mostravam dificuldade em fazer justificações. Alguns apenas apresentaram exemplos e outros tiveram dificuldade em exprimir o seu raciocínio.

21 alunos responderam ao teste final.

A primeira pergunta do teste final era do mesmo género da primeira pergunta do teste de diagnóstico, destinando-se a avaliar o pensamento algébrico dos alunos no final do estudo da função quadrática.

Dos vinte e um alunos que responderam ao teste final onze responderam corretamente à primeira questão. Dos dez alunos que erraram a resolução, dois enganaram-se a copiar os dados, dois esqueceram-se que x estava em cêntimos e exprimiram o preço do litro de gasolina com desconto usando a expressão $1{,}40 - x$, outra aluna escreveu para o preço do litro de gasolina com desconto a expressão $1{,}5 - 0{,}01x$, e cinco não responderam ou deram respostas erradas cujo raciocínio não se percebe. Isto mostra que após a lecionação da unidade didática ainda havia muitos alunos com dificuldade em traduzir o enunciado de um problema por uma expressão algébrica.

Em comparação com o teste de diagnóstico, dos 15 alunos que responderam aos dois testes três acertaram a primeira questão do teste de diagnóstico, mas falharam a primeira questão do teste final, dois porque se enganaram a copiar os dados e um porque usou para representar o preço do litro de gasolina com desconto a expressão $1{,}4 - x$. Por outro lado, houve três alunos que erraram a primeira questão do teste de diagnóstico, mas acertaram a primeira questão do teste final. Destes, dois tinham deixado por resolver a primeira questão do teste de diagnóstico e um tinha apenas um erro de contas no final da primeira questão do teste de diagnóstico.

Dado que são poucos os alunos que melhoram ou pioram na primeira pergunta dos dois testes conclui-se que não se nota progresso na resolução deste tipo de questão nem no pensamento algébrico subjacente.

Na segunda questão do teste final apenas erraram seis dos vinte e um alunos que responderam ao teste final. Esta questão é semelhante à segunda questão do teste de diagnóstico envolvendo pensamento algébrico e generalização. Dos quinze alunos que responderam ao teste de diagnóstico e ao teste final apenas um errou a segunda questão do teste de diagnóstico e acertou a segunda questão do teste final e todos os alunos que acertaram a segunda questão do teste de diagnóstico acertaram também a segunda questão do teste final.

Concluímos assim, que quer no início, quer no fim da unidade didática a grande maioria dos alunos mostrou facilidade em resolver este tipo de questão apresentando um bom desempenho no raciocínio algébrico e na generalização subjacente. Não se nota, portanto, qualquer alteração nos dois aspetos avaliados.

A terceira pergunta do teste final é idêntica à terceira pergunta do teste de diagnóstico, pedindo uma generalização e uma justificação. Apenas dois alunos responderam corretamente a esta questão. Tal como aconteceu com a terceira questão do teste de diagnóstico a maioria dos alunos – doze em vinte e um – apresenta uma regra geral e exemplos não dando qualquer justificação da regra geral. Isto mostra que os alunos evidenciaram boa capacidade de generalização, mas dificuldade na justificação. De facto, além dos dois alunos que acertaram a questão apenas três tentaram justificar a regra, o que significa que dezasseis dos vinte e um alunos não foi capaz de produzir qualquer justificação.

Comparando os resultados da terceira questão do teste de diagnóstico com os resultados da terceira questão do teste final verificamos que nenhum aluno respondeu corretamente às duas questões. Das alunas que responderam corretamente à terceira questão do teste de diagnóstico, na terceira questão do teste final, uma tentou justificar a regra a que chegou corretamente, mas a sua justificação está incompleta e a outra escreveu e justificou uma regra para a soma em vez de para o produto de três números consecutivos. As alunas que responderam corretamente à terceira questão do teste final são as mesmas que tinham tentado justificar a resposta na terceira questão do teste de diagnóstico, embora sem sucesso. Vemos assim, que quem tentou justificar a resposta no teste de diagnóstico também tentou justificar a resposta no teste final. Por outro lado, apenas uma aluna das que não tinha apresentado justificação no teste de diagnóstico apresentou uma justificação no teste final e mesmo assim muito incompleta. Nesta questão, não se verificaram, portanto, alterações significativas na capacidade de justificação dos alunos.

Quanto à capacidade de generalização, há apenas dois alunos que na terceira questão do teste de diagnóstico não foram capazes de indicar uma regra, mas que na terceira questão do teste final foram capazes de indicar a regra, ainda que sem justificar. Para estes dois alunos houve evolução na capacidade de generalização, mas dois em quinze alunos é um número muito reduzido para se dizer que globalmente houve melhoria. Assim concluímos que também não há diferenças significativas na capacidade de generalização dos alunos.

Na quarta questão do teste final, tal como na quarta questão do teste de diagnóstico, pedia-se aos alunos uma justificação. Cinco alunos deram a resposta correta e quatro não responderam ou tiveram a resposta totalmente errada.

Doze alunos apresentaram uma justificação incompleta. Destes, dois identificaram a diagonal com a hipotenusa do triângulo retângulo formado pela diagonal e dois dos lados do retângulo, mas não referiram que a hipotenusa é maior que os catetos; três referiram que a hipotenusa é maior que os catetos, mas não identificaram o triângulo retângulo a que se referiam; sete identificaram a diagonal com a hipotenusa do triângulo retângulo formado pela diagonal e dois dos lados do retângulo e evocaram o teorema de Pitágoras para justificar que a diagonal é maior que os lados, mas falharam em relacionar o teorema de Pitágoras com o facto de a hipotenusa (diagonal) ser maior que os catetos (lados do retângulo).

Verifica-se assim que, no final da unidade didática, há ainda muitos alunos com dificuldades em formular justificações completas. Embora haja mais alunos a responder corretamente à quarta questão do teste final do que à quarta questão do teste de diagnóstico a diferença não é suficiente para afirmar que houve evolução na capacidade de justificação dos alunos em geral, tanto mais que esta evolução também não se verificou na terceira questão destes testes.

As tabelas seguintes resumem os resultados obtidos nos dois testes.

Questão 1

	Teste de diagnóstico	Teste final
Resposta correta	10	11
Resposta com alguns erros	1	5
Sem resposta ou resposta totalmente errada	5	5
Total	16	21

Questão 2

	Teste de diagnóstico	Teste final
Resposta correta	14	15
Resposta errada	2	6
Total	16	21

Questão 3

	Teste de diagnóstico	Teste final
Resposta correta	2	2
Apresenta regra, mas justifica apenas com exemplos	9	12
Apresenta regra e tenta uma justificação, mas não consegue	2	3
Não apresenta regra	3	4
Total	16	21

Questão 4

	Teste de diagnóstico	Teste final
Resposta correta	2	5
Resposta incompleta	6	12
Sem resposta ou resposta errada	8	4

Total	16	21

Em conclusão, a análise do teste de diagnóstico e do teste final permite-nos verificar que, tanto no início da unidade curricular como no final, os alunos apresentaram alguma dificuldade em traduzir o enunciado de um problema em linguagem algébrica, mas mostraram facilidade em encontrar a expressão algébrica de uma sucessão, apresentando neste último ponto um pensamento algébrico adequado e uma adequada capacidade de generalização. Esta capacidade de generalização também se verifica nas respostas à terceira pergunta dos referidos testes. Pelo contrário, na produção de justificações os alunos revelaram dificuldades tanto no início como no fim da unidade didática. Assim, não se evidencia uma evolução ao longo da unidade didática nem no pensamento algébrico dos alunos nem no seu raciocínio matemático.

6.2 Pensamento algébrico

Nesta secção analiso, para cada uma das tarefas propostas aos alunos, quais os aspetos que requerem pensamento algébrico e em que medida estes realizaram o pensamento algébrico requerido.

A primeira tarefa dada a seguir ao teste de diagnóstico foi "Uma bola lançada do terraço" (Anexo 3). Esta tarefa é um exemplo de modelação e envolve, por isso, pensamento algébrico, de acordo com o ponto (V) da descrição de Kaput (ver secção 2.3). Mais precisamente, a tarefa requer dos alunos a interpretação do gráfico da função que relaciona a altura da bola com a distância horizontal à casa no contexto do problema. Uma vez que envolve funções esta tarefa também está relacionada com o ponto (IV) da descrição acima referida. Todos os alunos foram capazes de realizar esta tarefa pelo que todos realizaram o pensamento algébrico subjacente.

A segunda tarefa da aula 2 (Anexo 3) e as tarefas da aula 3 (anexo 4) envolvem estudar como varia o gráfico de uma função quando se faz variar um ou mais parâmetros da função. Estas tarefas requerem pensamento algébrico na medida em que tratam de funções, ou seja, estão relacionadas com o ponto (IV) da descrição de Kaput. Além disso, ao estudarem uma família de funções, os alunos estão a estudar uma estrutura abstrata, conforme consta do ponto (III) da mesma descrição. Por outro lado, as tarefas envolvem a identificação de padrões, uma vez que é preciso notar que parábolas com o mesmo vértice correspondem ao mesmo valor dos parâmetros h e k

e que sempre que $a > 0$ ($a < 0$) a parábola tem concavidade voltada para cima (baixo). Tudo isto está relacionado com o ponto I da descrição acima referida.

Todos os alunos se aperceberam de que quando $a > 0$ ($a < 0$) as parábolas têm concavidade voltada para cima (baixo), mas nem todos conseguiram relacionar os parâmetros h e k com as coordenadas do vértice. Podemos dizer, portanto, que nem todos os alunos identificaram o padrão requerido, tendo, portanto, surgido dificuldades na identificação de padrões.

A tarefa abordada na aula 4 (anexo 5) também tem a ver com o ponto (IV) da descrição de Kaput, uma vez que continuamos a falar de funções. Além disso, a tarefa requer dos alunos a manipulação da expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$, o que se insere no ponto (II) da referida descrição. Nesta tarefa surgiu uma dificuldade na manipulação da expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k.$ Um aluno verificou que o vértice do gráfico da função h tinha coordenadas $(-3{,}0)$ pelo que $h = -3$ e $k = 0$, mas, ao substituir o h na expressão algébrica da função, em vez de escrever $h(x) = 3(x-(-3))^2 = 3(x+3)^2$ escreveu $h(x) = 3(x-3)^2$.

Os exercícios 58, 59, 62 e 66 da aula 5 (Anexo 6) envolvem a manipulação da expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$, sendo necessário identificar as coordenadas do vértice da parábola, substituir na expressão e depois substituir um ponto conhecido para determinar o valor de a. Estas ações envolvem pensamento algébrico na medida em que envolvem estudar funções, estando relacionadas com o tópico (IV) da descrição de Kaput e manipular expressões formais, estando relacionadas com o tópico (III) da mesma descrição.

O exercício 64 (Anexo 6) envolve comparar a expressão algébrica dada com a expressão geral $f(x) = a(x-h)^2 + k$ de modo a identificar os valores de a, h e k e depois relacionar estes valores com o vértice e a concavidade, fazer um esboço do gráfico da função e determinar o seu contradomínio. Estas ações envolvem pensamento algébrico na medida em que envolvem o estudo de funções, estando relacionadas com o tópico (IV) da descrição de Kaput e manipulação de expressões formais, estando relacionadas com o tópico (II) da referida descrição.

Em relação à aula 5 não sabemos o que os alunos foram ou não capazes de fazer pois não se pediu aos alunos que submetessem a resolução no Teams.

A primeira tarefa da aula 6 (Anexo 7) envolvia encontrar dois pontos da parábola com a mesma ordenada e perceber que a abcissa do vértice estaria a meio das abcissas dos referidos pontos. Depois, era necessário calcular a ordenada do vértice substituindo a abcissa na expressão algébrica. Estas ações envolvem pensamento algébrico na medida em que envolve o estudo de funções, estando relacionado com o ponto (IV) da descrição de Kaput. Além disso, para encontrar dois pontos com a mesma ordenada é necessário resolver uma equação, o que envolve a manipulação de expressões formais, o que se insere no ponto (II) da descrição de Kaput.

Os alunos tiveram muita dificuldade em perceber o método usado para resolver esta tarefa. Penso que a principal dificuldade esteve na compreensão de que era necessário encontrar dois pontos com a mesma ordenada e na tradução da condição de os pontos terem a mesma ordenada numa equação. Assim, a dificuldade esteve na tradução do problema para uma linguagem formal, a linguagem das equações, estando relacionada com o ponto (II) da descrição de Kaput.

Nesta tarefa surgiu também uma discussão interessante do ponto de vista do pensamento algébrico: A equação que se obtém para determinar as abcissas dos pontos com ordenada c é uma equação de 2.º grau incompleta. Por ser uma equação do 2.º grau houve alunos que quiseram usar a fórmula resolvente, ignorando que havia um método mais rápido de resolver esta equação por se tratar de uma equação incompleta. Isto tem a ver com o sentido do símbolo referido por Arcavi (secção 2.3). O aluno aplica cegamente um método de resolução formal sem verificar se existe um método mais rápido.

A segunda tarefa da aula 6, “Altura de uma bola” (Anexo 7), é uma tarefa de modelação que envolve uma função quadrática. Envolve também a resolução de uma equação. Deste modo, em termos de pensamento algébrico, insere-se nos pontos (II), (IV) e (V) da descrição de Kaput. Os alunos resolveram facilmente esta tarefa tendo evidenciado o pensamento algébrico necessário.

Depois da tarefa “Altura de uma bola”, propus aos alunos a resolução da inequação $x^2 < 4$. Esta tarefa envolve fazer um esboço do gráfico da função x^2, resolver a equação $x^2 = 4$ e identificar graficamente a solução da inequação. Deste modo, a tarefa envolve pensamento algébrico na medida em que requer o estudo da função x^2, o que se insere no ponto (IV) da descrição de Kaput e manipulação de expressões formais, o que corresponde ao ponto (II) da referida descrição. Quando propus a inequação $x^2 < 4$ a primeira resposta que obtive de um aluno foi $x^2 < \pm 2$. Esta resposta revela a aplicação cega de métodos de resolução conhecidos, sem compreender o significado do que se está a fazer, pois a expressão $x^2 < \pm 2$ não tem qualquer significado. Isto corresponde a falta do sentido do símbolo segundo Arcavi.

A última tarefa dada aos alunos antes do teste final foi “Exercícios 17 de Março” (Anexo 8). Esta tarefa envolve a modelação por uma função quadrática logo, em termos de pensamento algébrico, insere-se nos pontos (IV) e (V) da descrição de Kaput. Além disso envolve a resolução de equações. Logo, envolve manipulação de expressões formais, inserindo-se, por isso, no ponto (II) da descrição de Kaput.

De um modo geral, os alunos foram capazes de resolver a tarefa tendo evidenciado o pensamento algébrico necessário. Houve, contudo, uma aluna a quem aconteceu perder a relação entre a equação algébrica que se estava a resolver e o problema lhe servia de contexto: isso aconteceu no cálculo do alcance do projétil. Para calcular o alcance do projétil era necessário resolver a equação $-0{,}0005x^2 + 0{,}8x + 100 = 0$, a qual tem duas soluções, uma positiva e outra negativa. Depois de ter determinado as duas soluções da equação perguntei à aluna o que podíamos concluir sobre o alcance do projétil e respondeu-me que estava entre um valor e o outro. Isto revela dificuldades no pensamento algébrico referente à modelação. Corresponde também a uma falta do sentido do símbolo segundo Arcavi.

Desta análise podemos concluir que os alunos evidenciaram na maioria dos casos um pensamento algébrico adequado às tarefas. Surgiram, no entanto, algumas dificuldades da parte dos alunos, nomeadamente, na tradução de um problema para linguagem formal e na manipulação de expressões formais. Verifica-se, por vezes, a tendência da sua parte para aplicar cegamente um método de resolução, o que revela falta de sentido do símbolo em alguns alunos.

6.3 Raciocínio matemático

Nesta secção analiso o raciocínio matemático evidenciado pelos alunos na resolução das tarefas propostas.

A primeira tarefa a seguir ao teste de diagnóstico foi “Uma bola lançada do terraço” (anexo 3). Esta tarefa não pede diretamente uma justificação das respostas dadas, mas durante a discussão coletiva pedi aos alunos que justificassem a suas respostas. Deste modo, a discussão da tarefa envolveu a justificação, um dos três processos de raciocínio matemático analisados na secção 2.2.

Na primeira pergunta obtive do aluno que solicitei a resposta que a altura do terraço era 3 metros, pois correspondia à altura quando $x = 0$. Na segunda pergunta obtive como resposta que a bola caiu a 3 metros da casa, uma vez que era onde a parábola intersetava o eixo dos xx. Esta última justificação estava incompleta pois a parábola interseta o eixo dos xx em dois pontos. Por isso, chamei a atenção do aluno para existência de dois pontos de interseção da parábola com o eixo dos xx e pedi que justificasse a sua escolha. O aluno respondeu que tinha escolhido o ponto da direita porque o outro ponto correspondia a que a bola andasse para trás. Na terceira pergunta o aluno respondeu-me que a altura máxima da bola era 4 metros e era atingida a um metro da casa pois correspondia ao vértice da parábola. Podemos assim concluir que as justificações dadas pelos alunos nesta tarefa são adequadas e revelam um bom desempenho neste processo de raciocínio.

A segunda tarefa da aula 2 (anexo 3) e as tarefas da aula 3 (anexo 4) envolvem descobrir propriedades da família de funções em estudo a partir de exemplos. Este é um exemplo típico do processo de raciocínio denominado generalização (ver secção 2.2).

Na tarefa "função quadrática – parte 1", na primeira pergunta, os alunos fizeram a generalização pretendida, isto é, indicaram que a parábola tem concavidade voltada para cima (baixo) quando $a > 0$ ($a < 0$). Na segunda pergunta, os alunos tiveram mais dificuldade, o que se deveu à dificuldade em interpretar a pergunta e em encontrar palavras que exprimissem a observação feita e não uma dificuldade em fazer generalizações.

Nas tarefas "função quadrática – parte 2" e "função quadrática – parte 3" todos os alunos fizeram generalizações. Com efeito, embora nem todos tenham identificado os parâmetros h e k com as coordenadas do vértice, todos observaram que a variação de h levava a um deslocamento horizontal da parábola e a variação de k a um deslocamento vertical.

Assim, mais uma vez, podemos dizer que os alunos tiveram um bom desempenho ao fazer as generalizações pedidas.

A tarefa da aula 4 (Anexo 5) não pedia diretamente uma justificação, mas eu pedi a cada aluno que respondeu que justificasse a sua resposta. A tarefa envolveu, assim, o processo de raciocínio denominado justificação. Os alunos justificaram as suas respostas baseando-se na relação entre as coordenadas do vértice observadas no gráfico e os parâmetros h e k da expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$. As justificações foram adequadas revelando bom desempenho dos alunos nas mesmas.

Na primeira tarefa da aula 6 a justificação das respostas envolve vários passos. Na verdade, não é possível chegar à resposta sem executar os passos que a justificam e é preciso compreender o motivo de cada passo. Os alunos tiveram muita dificuldade em compreender a resolução desta tarefa e mesmo os que perceberam quais os passos a dar não foram capazes de justificar o porquê destes passos. Com efeito, na aula síncrona seguinte, a aula 8, quando a aluna estava a apresentar a sua resposta à primeira alínea da primeira questão da tarefa "Exercícios 17 de Março" (Anexo 8) pedi que justificasse porque tinha começado por calcular $y(0) = 100$ e por resolver a equação $y(x) = 100$ e a aluna só dizia que era para encontrar o vértice da parábola, não sabendo justificar porque o procedimento levava à determinação do vértice da parábola.

A segunda tarefa da aula 6 – "Altura de uma bola" – levou à justificação por parte da aluna a quem dei a palavra para apresentar a sua resolução de que para determinar durante quanto tempo a bola esteve acima dos 1,3 metros primeiro temos de saber quando está a 1,3 metros de altura. Esta justificação foi adequada e revela o bom desempenho da aluna na justificação requerida por esta tarefa.

Em conclusão, de modo geral, os alunos foram capazes de fazer a justificação das suas respostas e a generalização pedida nas tarefas "Função quadrática – parte 1", "Função quadrática – parte 2" e "Função quadrática – parte 3". Os alunos mostraram mais dificuldade em compreender os passos necessários à conversão da função quadrática da forma canónica para a forma do vértice, o que levou a não serem capazes de justificar os passos necessários a esta conversão.

7. Conclusão

Durante as aulas lecionadas os alunos aprenderam a identificar as coordenadas do vértice e a concavidade das parábolas que se obtêm fazendo o gráfico de funções cuja expressão algébrica é da forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Com estas informações os alunos aprenderam a esboçar o gráfico de funções quadráticas dadas na referida forma e a identificar os intervalos de monotonia e o extremo.

Os alunos aprenderam também a passar da forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para a forma canónica. Os alunos tiveram mais dificuldade em perceber como se passa da forma canónica para a forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Esta dificuldade deveu-se possivelmente à dificuldade em perceber como determinar as abcissas dos pontos de interseção da parábola com uma reta horizontal.

Os alunos resolveram também alguns problemas envolvendo a função quadrática, mostrando facilidade em resolvê-los.

Conclui-se, assim, que foram cumpridos os objetivos de aprendizagem relativos à função quadrática definidos quer nas *Metas Curriculares* (MEC,2013), quer no documento *Aprendizagens Essenciais 10º ano* (MEC,2018).

Em relação ao pensamento algébrico dos alunos, conclui-se que no início do estudo das funções quadráticas, de acordo com o teste de diagnóstico, alguns alunos tinham dificuldade em traduzir um enunciado para linguagem algébrica. Durante a lecionação das aulas os alunos manifestaram um pensamento algébrico adequado às tarefas desenvolvidas, notando-se, no entanto, alguma dificuldade em traduzir um problema em linguagem algébrica e uma tendência para aplicar cegamente métodos de resolução, o que revela alguma falta de sentido do símbolo. Após a lecionação das aulas, de acordo com o teste final, verifica-se que alguns alunos continuam a ter dificuldade em traduzir um problema em linguagem algébrica. Não se verifica progresso no pensamento algébrico dos alunos talvez porque foram lecionadas poucas aulas e os objetivos destas aulas não se focaram no desenvolvimento do pensamento algébrico, mas sim nos conteúdos programáticos.

Em relação ao raciocínio matemático, conclui-se que no início do estudo das funções quadráticas, de acordo com o teste de diagnóstico, os alunos tinham dificuldade em produzir justificações. Durante a lecionação das aulas os alunos mostraram facilidade em produzir generalizações, mas houve vezes em mostraram dificuldade em justificar o método que estavam a usar para resolver um exercício ou problema. Após a lecionação das aulas, de acordo com o teste final, os alunos continuam a ter dificuldade em produzir justificações. Não se nota, portanto, evolução no raciocínio matemático dos alunos. Tal poderá dever-se, mais uma vez, ao reduzido número de aulas lecionadas, e ao facto de os objetivos das aulas não estarem focados no desenvolvimento do raciocínio, mas nos conteúdos programáticos.

Com as aulas a que assisti e que lecionei aprendi a lecionar aulas dinâmicas em que os alunos participam e são parte ativa na construção do seu conhecimento. Pude aplicar conhecimentos adquiridos ao longo do meu mestrado em Ensino da Matemática e melhorar a minha interação com os alunos. Aprendi, por exemplo, a avaliar a aprendizagem dos alunos colocando questões, a suscitar uma discussão coletiva em torno de uma resposta errada, em vez de corrigir a resposta. Aprendi a dar apoio aos alunos na resolução de uma tarefa, sem lhes dar a resposta à tarefa.

Com a investigação que realizei aprendi sobre o pensamento algébrico dos alunos e as dificuldades que apresentam nesta área e sobre o raciocínio matemático dos alunos, a forma como fazem generalizações e apresentam justificações.

Em conclusão, este estágio e a investigação que aqui apresento permitiram-me desenvolver capacidades que me serão úteis na minha vida profissional.

Referências

Araman, E. M., Serrazina, M. L., & Ponte, J. P. (2020). Raciocínio matemático nos primeiros anos: Ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. *Bolema, 34*(67), pp. 441- 461.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14(3),* 24-35.

Azevedo, A. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções.Uma experiência com alunos do ensino secundário.* Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação na universidade de Lisboa.

Bishop, J. w., Otto, A. D., & Lubinski, C. A. (2001). Promoting algebraic reasoning using students' thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6(9),* 508-514.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico.* Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação na Universidade de Lisboa.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2020). *Novo Espaço. Matemática A 10º ano.* Porto: Porto Editora.

Dias, C. (s.d.). *O raciocínio matemático dos alunos de 11.º ano de escolaridade no tópico assímtotas ao gráfico de uma função.* relatório de prática de ensino supervisionada realizada na Universidade de Lisboa.

Jeannotte, d., & Kieran, c. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), pp. 1-16.

Kieran, C. (2007). learning and teaching algebra at the middle scool through college levels. Em F. Lest (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age.

Liu, M. A. (2013). *Aspects of mathematical arguments that influence eigth grade studens' judgment of their validity.* Tese de doutoramento, Ohio State University, EUA.

Mata-Pereira, J. (2012). *O raciocínio matemático em alunos do 9.º ano no estudo dos números reais e inequações.* Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação na Universidade de Lisboa.

Mata-Pereira, J. (2018). *As ações do professor para promover o raciocínio matemático em sala de aula.* Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação, especialidade de Didática da Matemática, na Universidade de Lisboa.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2013). Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. *Boletim GEPEM, 62*, pp. 17-31.

Matos, A. (2008). *Explorando relações funcionais no 8.º ano. Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.* Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação na Universidade de Lisboa.

Matos, A., Sivestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. Em R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín, & L. B. Nieto, *Investigación en educación matemática XII* (pp. 505-516). Badajoz: SEIEM.

Ministério da Educação. (2018). *Aprendizagens Essenciais-10ºano-Matemática A.* Lisboa: MEC.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa de Matemática A.* Lisboa: MEC.

Ministério da Educação e ciência. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do 3.º ciclo.* Lisboa: MEC.

Ministério da Educação e Ciências. (2013). *Metas curriculares Matemática A.* Lisboa: MEC.

NCTM. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making.* Reston, VA: NCTM.

Nunes, G. (2012). *Resolução de problemas envolvendo funções quadráticas por alunos do ensino secundário.* Relatório de prática de ensino supervisionada realizado na universidade de lisboa.

Oliveira, R. (2016). *Preparar os teste. Matemática A - 11º ano.* Lisboa: Texto Editores.

Ozaltun Celik, A., & Bukova Guzel, E. (2017). Revealing Ozgur's thoughts of a quadratic function with a clinical interview: Concepts and their underlying reasons. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*(3(1)), 122-134.

Pesquita, I. (2007). *Álgebra e pensamento algébrico de alunos do 8.º ano.* Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação na universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Lisboa: DGIDC.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução e discussões matemáticas. *Quadrante, XXII*(2), pp. 55-81.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Pereira, J. M. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático em sala de aula. *Educação e Matemática*(156), 7-11.

Rodrigues, C., Ponte, J. P., & Menezes, L. (2018). Prática de discussão coletiva de uma professora em Álgebra. *Zetetiké, 26*(3), 486-505.

Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova. *Educção e Matemática, 101*, pp. 37-41.

Silva, C. (2009). *Funções quadráticas no 10º ano, usando a calculadora gráfica.* Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação na universidade de Lisboa.

Anexos

Anexo 1 – Plano de trabalho

Plano de trabalho de 8 a 24 de março

Segunda feira 8 de Março	Terça feira 9 de Março	Quarta feira 10 de Março	Quinta feira 11 de Março	Sexta feira 12 de Março
Aula síncrona (45 min) Teste	**Atividade 1** Submeter no Teams até Terça à noite	Aula síncrona (90 min) **Atividades 2 e 3** Realizadas durante a aula	**Atividades 4 e 5** Responder às questões no Geogebra até final da semana	

Segunda feira 15 de Março	Terça feira 16 de Março	Quarta feira 17 de Março	Quinta feira 18 de Março	Sexta feira 19 de Março
Aula síncrona (45 min) **Atividade 6** Realizada durante a aula	**Atividade 7**	Aula síncrona (90 min) **Atividades 8 e 9** Realizadas durante a aula	**Atividade 10** Resolver até ao final da semana	

Segunda feira 22 de Março	Terça feira 23 de Março	Quarta feira 24 de Março
Aula Síncrona (45 min)	**Atividade 11** Submeter no Teams até Quarta	Aula Síncrona (90 min)

Atividade 1- Resolver e submeter até terça feira, dia 9

Resolver a tarefa "Teste de diagnóstico" que está na pasta TPC's

Atividade 2- Resolver durante a aula síncrona de Quarta feira, dia 10

Acede a www.geogebra.org, seleciona Classroom, insere o código **DAGJ 9GCT** e realiza a tarefa "Uma bola lançada do terraço"

Atividade 3 - Resolver durante a aula síncrona de Quarta feira, dia 10

Acede a www.geogebra.org, seleciona Classroom, insere o código **EYTF 4WYD** e realiza a tarefa “Função quadrática – parte 1”

Atividade 4 – Resolver depois da aula de 10 de março, até ao final da semana

Acede a www.geogebra.org, seleciona Classroom, insere o código **KVCS MHA9** e realiza a tarefa “Função quadrática – parte 2”

Atividade 5 – Resolver depois da aula de 10 de março, até ao final da semana

Acede a www.geogebra.org, seleciona Classroom, insere o código **CPBT PKQU** e realiza a tarefa “Função quadrática – parte 3”

Atividade 6- Resolver durante a aula síncrona de 15 de março

Exercício 63 da pág. 66 do Manual

Atividade 7 – Resolver depois da aula síncrona de 15 de março

Ler o exercício resolvido da página 63 do manual e resolver os seguintes exercícios:

Pág. 63 ex: 58

Pág. 64 ex: 59

Pág, 65 ex: 62

Pág. 66 ex: 64

Pág. 67 ex: 66

Atividade 8- Resolver durante a aula síncrona de 17 de março

Resolver a tarefa “Exercício de conversão da forma canónica para a forma que evidencia o vértice” disponibilizada na pasta “material de aula”.

Atividade 9 - Resolver durante a aula síncrona de 17 de março

Resolver a tarefa “Altura de uma bola” disponibilizada na pasta “material de aula”

Atividade 10 – Resolver depois da aula de 17 de março, até ao final da semana

Resolver a tarefa “Exercícios 17 de Março” disponibilizada na pasta TPCs

Atividade 11 – Resolver e submeter até Quarta feira dia 24

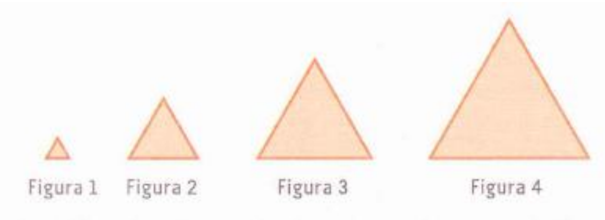
Resolver a tarefa “Teste final” disponibilizada na pasta TPCs.

Anexo 2 – Tarefa da aula 1

Teste de diagnóstico

1. A Teresa tem uma rede com um comprimento total de 32 m, com a qual pretende fazer uma cerca retangular para o seu cão. Escreve uma expressão para a área da cerca em função do comprimento de um dos lados.

2. Considere a seguinte sequência de triângulos



O lado do primeiro triângulo é 1 e o lado de cada um dos outros triângulos mede mais duas unidades do que lado do triângulo anterior.
Qual o perímetro do n-ésimo triângulo?

3. Escolhe três números naturais consecutivos e calcula a sua soma. Procura depois descobrir uma propriedade dos números que se obtêm em somas de três números naturais consecutivos. Justifica que a propriedade que descobriste é verdadeira.

4. Mostra que adicionando quatro números naturais consecutivos a soma é par.

O primeiro exercício desta ficha é adaptado de um problema do relatório de prática de ensino supervisionada intitulado "Resolução de problemas envolvendo funções quadráticas por alunos do ensino secundário" (Nunes, 2012).

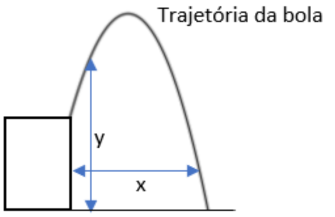
O segundo exercício desta ficha é adaptado do exercício 6 da página 88 do livro "Preparar os testes. Matemática A – 11º ano" (Oliveira, 2016).

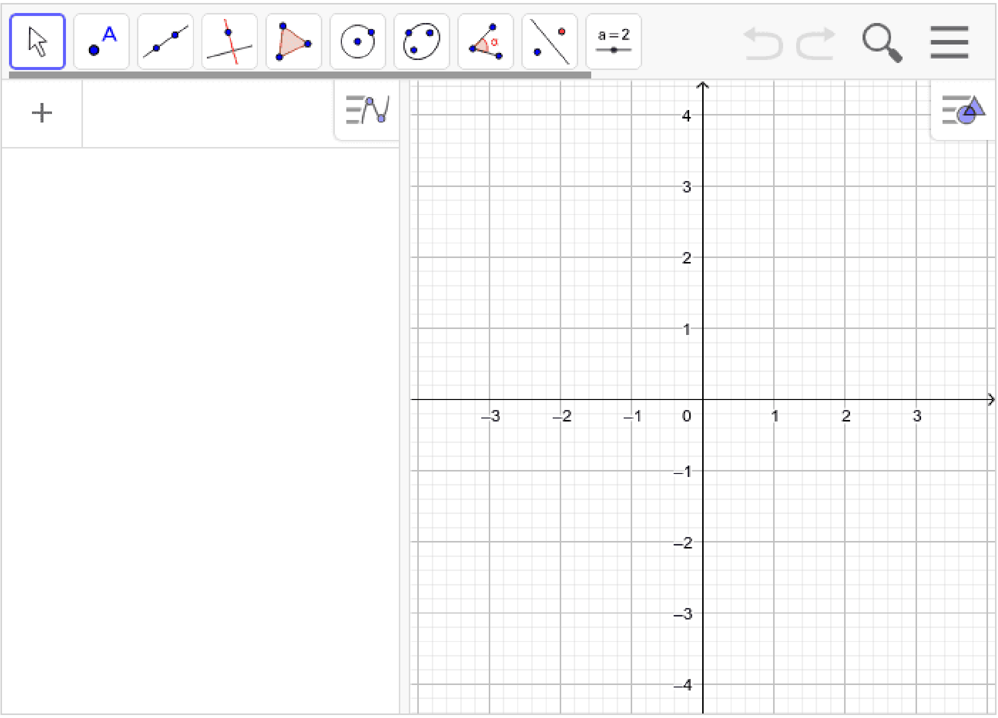
Os exercícios 3 e 4 são uma adaptação da tarefa apresentada no seguinte site: https://www.map.mathshell.org/download.php?fileid=1602

Anexo 3 – Tarefas da aula 2

Tarefa – Uma bola lançada do terraço

Uma bola é lançada do terraço de uma casa. A altura, em metros, da bola em relação ao chão é dada em função da distância, em metros, à casa, medida na horizontal, pela função $y = -x^2 + 2x + 3$.
Começa por fazer o gráfico desta função e depois responde às questões.





1. Qual a altura do terraço?

Escreva aqui a sua resposta ...

2. A que distância da casa caiu a bola?

Escreva aqui a sua resposta ...

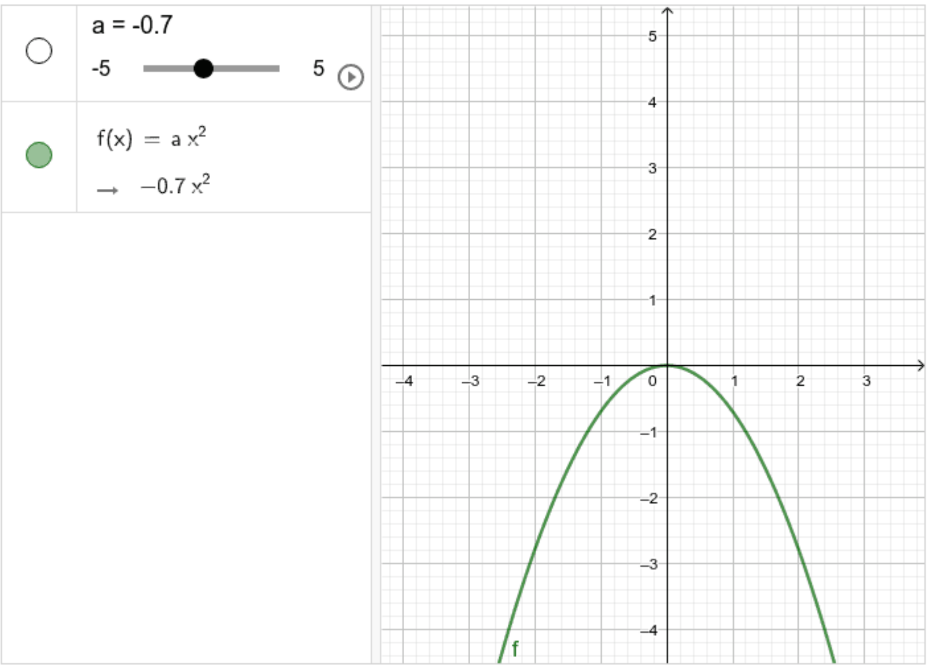
3. Qual a altura máxima atingida pela bola? A que distância da casa se encontrava a bola?

Escreva aqui a sua resposta ...

Figura 8 - Enunciado da tarefa "Uma bola lançada do terraço" (Tarefa elaborada pela autora deste relatório).

Tarefa – Função quadrática – Parte 1

Nesta tarefa irás explorar funções da forma f(x)= ax^2 . Faz variar o valor de a e verifica o que acontece ao gráfico da função. Depois responde às questões abaixo indicadas.



1. Como varia o sentido da concavidade do gráfico com sinal de a?

Escreva aqui a sua resposta ...

2. Que acontece quando se aumenta o valor absoluto de a?

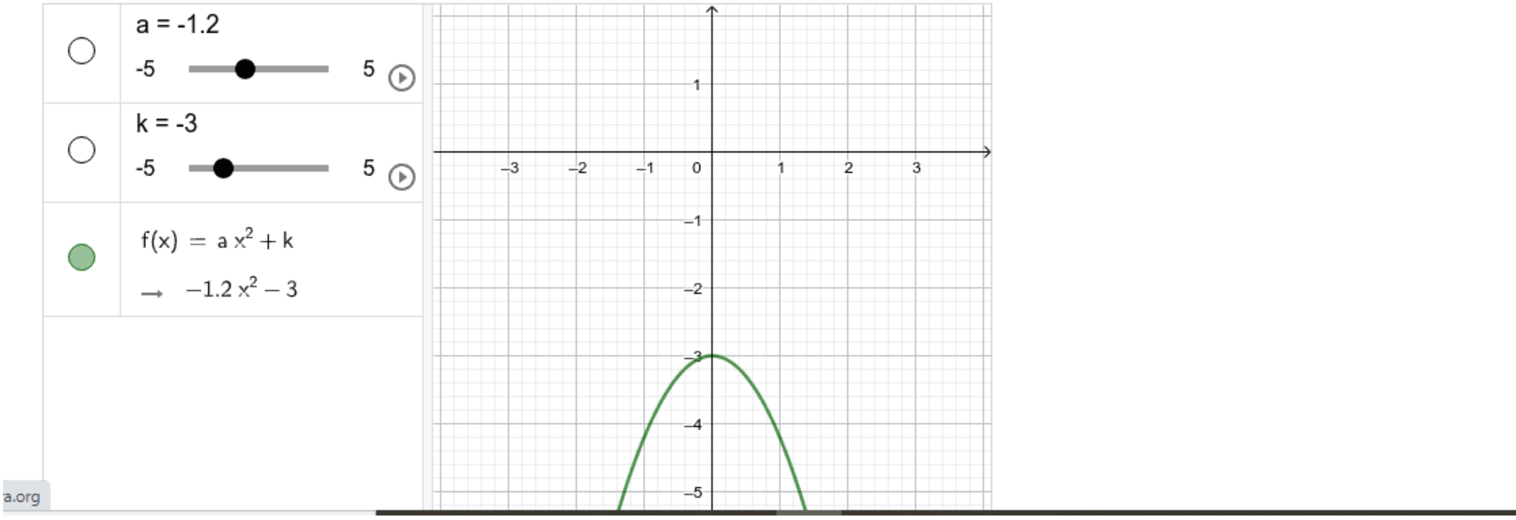
Escreva aqui a sua resposta ...

Figura 9- Enunciado da tarefa "Função quadrática - parte 1" (Tarefa elaborada pela autora deste relatório)

Anexo 4 – Tarefas da aula 3

Tarefa – Função quadrática – parte 2

Neste trabalho vamos explorar o gráfico das funções da forma f(x)= $ax^2 + k$. Faz variar o parâmetro k mantendo fixo o a. Despois faz variar o a mantendo fixo o k e responde às questões.



1. Qual a relação entre o parâmetro k e as coordenadas do vértice da parábola?

Escreva aqui a sua resposta ...

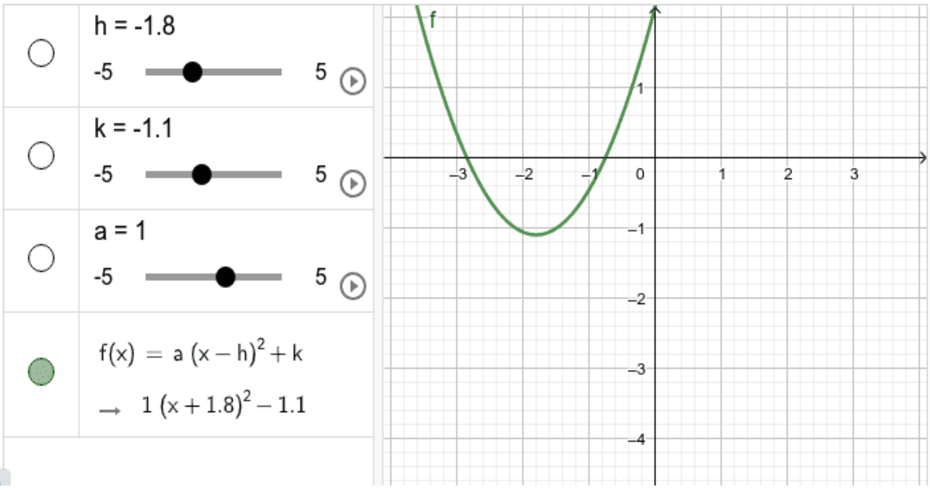
2. Qual o efeito do parâmetro a ?

Escreva aqui a sua resposta ...

Figura 10 - Enunciado da tarefa "Função quadrática - parte 2" (tarefa elaborada pela autora deste relatório)

Tarefa – Função quadrática - parte 3

Nesta tarefa vamos estudar o gráfico de funções da forma f(x)= $a\,(x-h)^2+k$. Faz variar cada um dos parametros mantendo os outros fixos e responde às questões.



1. Qual a relação entre os parâmetros h e k e as coordenadas do vértice da parábola?

Escreva aqui a sua resposta ...

2. Qual o efeito do parâmetro a ?

Escreva aqui a sua resposta ...

Figura 11 - Enunciado da tarefa "Função quadrática - parte 3" (Tarefa elaborada pela autora deste relatório)

Anexo 5 – Tarefa da aula 4

Exercício 63

63 Uma das funções representadas graficamente na figura é definida pela equação $y = 3x^2$. Identifica-a e escreve expressões que definam as restantes, sabendo que todas as parábolas representadas têm a mesma abertura.

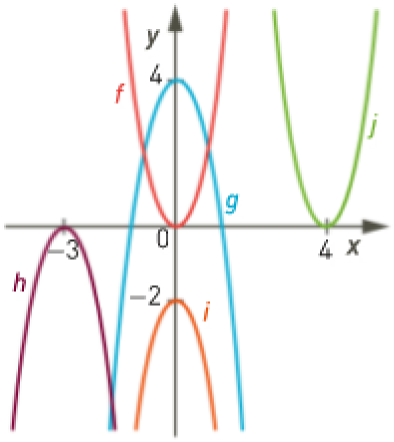


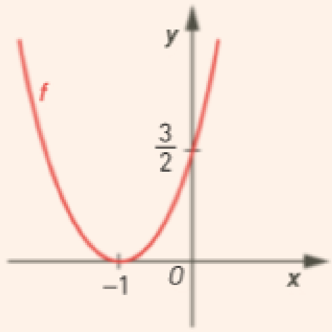
Figura 12 - Exercício 63 da página 66 do manual "Novo espaço. Matemática A 10º ano - parte 2" (Costa & Rodrigues, 2020)

Anexo 6 – Tarefas da aula 5

EXERCÍCIOS

1 Na figura está representada uma função f, tal que $f(x) = a(x-h)^2$.

Determina os valores de a e de h.



Resolução

$f(x) = 0 \Leftrightarrow a(x-h)^2 = 0 \Leftrightarrow x = h$

Então, $h = -1$.

Assim, $f(x) = a(x+1)^2$.

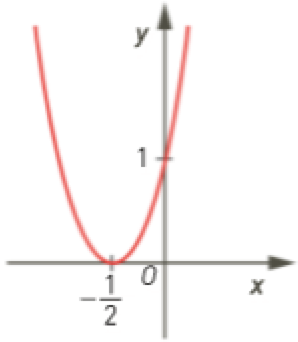
$f(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a(0+1)^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

Conclui-se que $f(x) = \frac{3}{2}(x+1)^2$.

Figura 13 - Exercício resolvido da página 63 do manual "Novo espaço. Matemática A 10º ano - parte 2" (Costa & Rodrigues, 2020)

58 Escreve na forma $y = a(x-h)^2$ a função cujo gráfico é representado pela parábola:

58.1.



58.2.

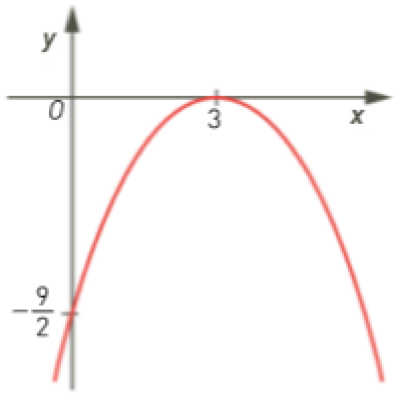
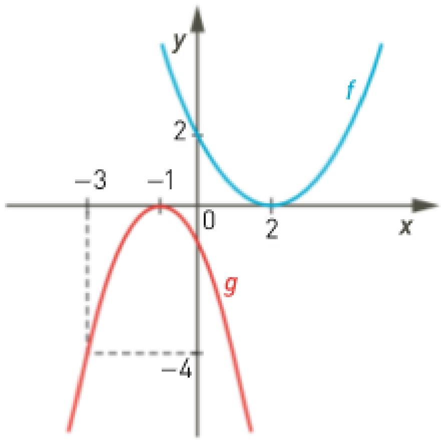


Figura 15 - Exercício 58 da página 63 do manual "Novo espaço. Matemática A 10º ano - parte 2" (Costa & Rodrigues, 2020)

59 No referencial da figura estão representadas duas funções f e g da família

$$y = a(x-h)^2 \text{ , } a \neq 0$$

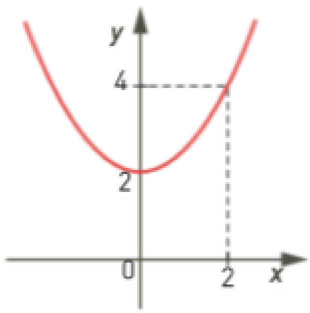


59.1. Para cada função, indica o domínio e o contradomínio e constrói um quadro de variação identificando os extremos.

59.2. Atendendo aos dados da figura, determina expressões que definam as funções f e g.

Figura 14 - Exercício 59 da página 64 do manual "Novo espaço. Matemática A 10º ano - parte 2" (Costa & Rodrigues, 2020)

62.1.



62.2.

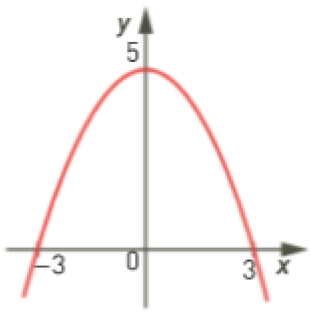


Figura 16 - Exercício 62 da página 65 do manual "Novo espaço. Matemática A 10º ano - parte 2" (Costa & Rodrigues, 2020)

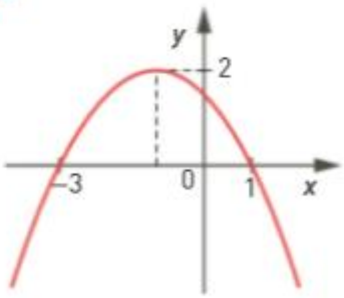
64 Transcreve para o teu caderno o seguinte quadro e completa-o.

Parábola	Coordenadas do vértice	Contradomínio
$y = -x^2 + 5$	...	...
$y = 3x^2 + \sqrt{3}$	...	...
$y = -2x^2 - \frac{1}{2}$	...	...
$y = -4(x-3)^2$	...	...

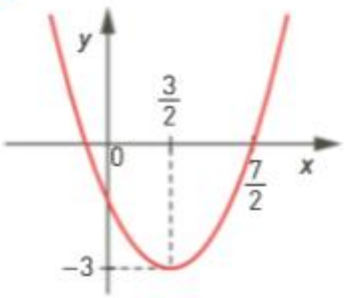
Figura 17 - Exercício 64 da página 66 do manual "Novo espaço. Matemática A 10º ano - parte 2" (Costa & Rodrigues, 2020)

66 Observa cada uma das figuras e determina uma equação da parábola representada em cada uma delas.

66.1.



66.2.



66.3.

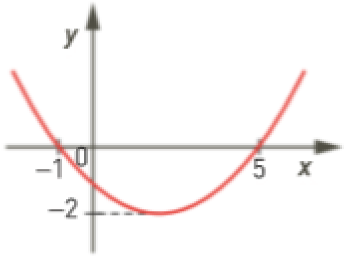


Figura 18 - Exercício 66 da página 67 do manual "Novo espaço. Matemática A 10º ano - parte 2" (Costa & Rodrigues, 2020)

Anexo 7 – Tarefas da aula 6

Tarefa – Exercício de conversão da forma canónica para a forma que evidencia o vértice

Escreve as seguintes funções na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, indica as coordenadas do vértice e o sentido da concavidade

1. $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$
2. $g(x) = x^2 - 4x + 7$
3. $h(x) = -2x^2 - 8x - 11$

Tarefa elaborada pela autora deste relatório.

Tarefa – Altura de uma bola

O José está a brincar com uma bola num jardim. Lança-a verticalmente, no instante t=0s, com uma velocidade inicial de 15 m/s, a partir de uma altura inicial de 1,3 m. A altura da bola, em metros, em função do tempo, em segundos, é dada pela função:

$$y(t) = -4{,}9t^2 + 15t + 1{,}3$$

Durante quanto tempo (arredondado às centésimas de segundo) a bola se mantém acima dos 1,3 m?

Tarefa adaptada de um problema do relatório de prática de ensino supervisionada intitulado “Resolução de problemas envolvendo funções quadráticas por alunos do ensino secundário” (Nunes, 2012)

Anexo 8 – Tarefa da aula 7

Tarefa – Exercícios 17 de Março

1. Uma fortaleza encontra-se num promontório, junto ao mar, a 100m de altura. Desta fortaleza é disparado um projétil, com uma certa inclinação e com uma certa velocidade inicial. A coordenada horizontal da fortaleza (a sua abcissa) é x=0m. A altura y do projétil, medida em metros, é uma função quadrática da abcissa do projétil: $y(x) = -0{,}0005x^2 + 0{,}8x + 100$

Sem recorrer à calculadora gráfica determina:

a) A altura máxima atingida pelo projétil (arredondada aos centímetros).

b) O alcance do projétil, isto é, a distância entre a base do promontório e o ponto onde o projétil cai sobre o mar (arredondada aos centímetros).

c) Os valores da abcissa do projétil para os quais a sua altura (acima do mar) se encontra entre 0m e 75m, inclusive (arredonda aos centímetros).

2. Sem recorrer à calculadora gráfica estuda a monotonia, os extremos e o sinal das seguintes funções quadráticas

a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$

b) $g(x) = -x^2 - 2x - 8$

Sugestão: Para estudar a monotonia e os extremos determina primeiro o vértice da parábola e faz um esboço da mesma. Para estudar o sinal começa por determinar os zeros da parábola e depois, através do esboço do gráfico vê onde é positiva e negativa.

O primeiro problema desta tarefa foi retirado do relatório de prática de ensino supervisionada intitulado "Resolução de problemas envolvendo a função quadrática por alunos do ensino secundário" (Nunes, 2012).

O exercício 2 foi elaborado pela autora deste relatório.

Anexo 9 – Tarefa aula 9

Teste final

1. Um posto de combustível vende 10000 litros de gasolina por dia a 1,40€ cada litro. O seu proprietário percebeu que por cada cêntimo de desconto que concedia por litro vendia mais 100 litros por dia.

Considerando x o valor em cêntimos do desconto dado no preço de cada litro e V o valor em euros ganho por dia pelo proprietário, escreve uma relação entre x e V. Simplifica a expressão o mais possível.

2. Considere a seguinte sequência de figuras, construídas com fósforos

Admitindo que a lei de formação se mantém, quantos fósforos tem a n-ésima figura?

3. Escolhe três números naturais consecutivos e calcula o seu produto. Procura depois descobrir uma propriedade dos números que se obtêm fazendo o produto de três números naturais consecutivos. Justifica que a propriedade que descobriste é verdadeira.

4. Justifica que a diagonal de um retângulo é sempre maior que qualquer dos seus lados.

O primeiro exercício foi adaptado de um exercício do site https://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/enem---algebra-questoes-pedem-generalizacao-a-partir-de-regularidades.htm

O segundo exercício foi adaptado do exercício 11 da página 90 do livro "Preparar os testes. Matemática A – 11º ano" (Oliveira, 2016).

O terceiro exercício foi adaptado de uma tarefa da disciplina Metodologia do Ensino da Matemática.

O quarto exercício foi adaptado de Liu (2013).