

UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



## **Métodos de Estimação de Provisões para Sinistros**

Filipa Aleluia Soares

**Mestrado em Matemática Aplicada à Economia e Gestão**

Trabalho de Projeto orientado por:  
Professor Doutor João Miguel Paixão Telhada  
Professor Doutor Joaquim Eduardo Gonçalves Severino

2023



*“Valeu a pena? Tudo vale a pena  
Se a alma não é pequena.”*

Fernando Pessoa, *Mensagem*



# Agradecimentos

Porque a gratidão e o reconhecimento são alguns dos sentimentos mais fortes e impactantes na vida, utilizo esta secção para poder manifestar o meu carinho por todas as pessoas que contribuíram, das mais variadas formas, para a realização deste trabalho de projeto.

Em primeiro lugar, agradeço aos meus orientadores, Professor Doutor João Miguel Paixão Telhada e Professor Doutor Joaquim Eduardo Gonçalves Severino, pela disponibilidade, dedicação e crítica, vertentes necessárias para acrescentar valor e rigor científico ao projeto.

Em segundo lugar, agradeço a todos os docentes, sem exceção, que contribuíram para a minha formação ao longo da licenciatura em Matemática Aplicada e do mestrado em Matemática Aplicada à Economia e Gestão na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Seguidamente, deixo expresso o meu agradecimento aos meus colegas de licenciatura e de mestrado pelo companheirismo e pela partilha (de conhecimento, ideias, emoções e tempo).

Aos meus pais, agradeço a educação e liberdade de escolha, o apoio incondicional, o amparo, o suporte e o carinho que me deram.

Por último, mas não menos importante, agradeço aos meus amigos, conhecidos e a todas as pessoas que me inspiram, pelo apoio, reconhecimento e motivação.

Espero que todas as pessoas mencionadas de forma explícita ou de forma generalizada, por questões de privacidade, saibam que ocupam um lugar muito especial no meu coração. A todos vós, o meu sincero obrigada!



# Resumo

Para as empresas de seguros, é indiscutível a importância da constituição de provisões adequadas para fazer face a pagamentos futuros de indemnizações decorrentes das responsabilidades com os contratos de seguro. Se, por um lado, a constituição de provisões insuficientes pode levar as empresas a entrar em insolvência, a constituição de provisões em excesso afeta a sua rentabilidade e pode, ainda, levar ao aumento da tarificação, comprometendo, deste modo, a competitividade de mercado.

A nova Norma Internacional de Relato Financeiro, IFRS 17, divide as responsabilidades decorrentes dos contratos de seguro em duas provisões designadas de LIC (*Liability for Incurred Claims*) e LRC (*Liability for Remaining Coverage*). A LIC compreende os sinistros RBNS (*Reported But Not Settled*) e os sinistros IBNR (*Incurred But Not Reported*). Já a LRC refere-se a sinistros CBNI (*Covered But Not Incurred*). A LIC apresenta um peso elevado no balanço das empresas de seguros, assumindo um papel de extrema primazia, com destaque para o ramo Não Vida.

Uma vez que, aquando da sua ocorrência, o custo total de um sinistro assume um valor desconhecido, existe a forte necessidade de estimação. Com base nos dados históricos, as empresas de seguros realizam análises casuísticas (por sinistro, caso a caso) e análises agregadas para sinistros com características semelhantes. A análise casuística revela-se mais adequada na presença de sinistros atípicos e a análise agregada quando existe um elevado número de sinistros, permitindo estimar custos associados a sinistros IBNR com recurso a matrizes de *run-off*.

O presente trabalho aborda dois métodos clássicos de estimação agregada: o método de *Chain Ladder* e o método de *Bornhuetter-Ferguson*. Para cada método é proposto um modelo e dado um exemplo de aplicação. Por último, é discutida a validação dos pressupostos assumidos nos modelos propostos, sendo apresentadas as limitações inerentes a este processo.

**Palavras-chave:** provisões para sinistros, atividade seguradora



# Abstract

For insurance companies, the importance of setting aside adequate provisions to cover future liabilities arising from insurance contracts is indisputable. If, on the one hand, setting aside insufficient provisions can lead companies into insolvency, on the other hand, setting aside excessive provisions affects their profitability and can also lead to increased pricing, thus compromising market competitiveness.

The new International Financial Reporting Standard, IFRS 17, sets the liabilities arising from insurance contracts in two provisions called LIC (Liability for Incurred Claims) and LRC (Liability for Remaining Coverage). LIC includes RBNS (Reported But Not Settled) and IBNR (Incurred But Not Reported) claims. LRC refers to CBNI (Covered But Not Incurred) claims. LIC has a high weight in the balance sheet of insurance companies, assuming an important role, especially in the Non-Life business.

Since the total cost of an accident is unknown at the time of its occurrence, there is a strong need for estimation. Based on historical data, insurance companies carry out case-by-case analysis and aggregate analysis for claims with similar characteristics. The case-by-case analysis is more appropriate in the presence of atypical claims and the aggregate analysis when there are a large number of claims, estimating also costs associated with IBNR claims, using run-off matrices.

The present work addresses two classic aggregate estimation methods: the Chain Ladder method and the Bornhuetter-Ferguson method. A model is proposed for each method and an application example is given. Finally, the validation of the assumptions made in the proposed models is discussed, and the limitations inherent in this process are presented.

**Keywords:** claim provision, insurance activity



# Índice

Lista de tabelas .....	xii
Lista de figuras .....	xiv
Lista de siglas .....	xvi
Capítulo 1 – Introdução.....	1
1.1 Apresentação do trabalho .....	1
1.2 Estrutura do documento.....	1
Capítulo 2 – Contextualização .....	3
2.1 A atividade seguradora.....	3
2.2 Importância social e económica da atividade seguradora .....	4
2.3 Relatórios financeiros e provisões.....	8
Capítulo 3 – Métodos de estimação .....	12
3.1 Organização dos dados.....	12
3.2 Método de Chain Ladder .....	17
3.3 Método de Bornhuetter-Ferguson.....	21
3.4 Exemplo de aplicação.....	24
Capítulo 4 – Análise de resíduos .....	28
Capítulo 5 – Conclusões.....	35
Referências bibliográficas .....	36



## Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Seguros e operações do ramo Vida e seguros do ramo Não Vida .....	6
Tabela 2.2 – Número de empresas de seguros a operar em Portugal no ano 2022 (Fonte: ASF Estatísticas de Seguros [8]) .....	7
Tabela 3.1 – Matriz de run-off incremental.....	13
Tabela 3.2 – Matriz de run-off acumulada .....	13
Tabela 3.3 – Exemplo de matriz de run-off incremental .....	14
Tabela 3.4 – Exemplo de matriz de run-off acumulada .....	14
Tabela 3.5 – Matriz de run-off incremental (Adaptado de Fidelidade Relatório sobre a Solvência e a Situação Financeira 2022 [18]) .....	24
Tabela 3.6 – Matriz de run-off acumulada (Adaptado de Fidelidade Relatório sobre a Solvência e a Situação Financeira 2022 [18]) .....	24
Tabela 3.7 – Fatores de desenvolvimento .....	25
Tabela 3.8 – Matriz de run-off acumulada estimada pelo método de Chain Ladder.....	25
Tabela 3.9 – Montantes totais de indemnizações por pagar estimados pelo método de Chain Ladder.	26
Tabela 3.10 – Estimativas a priori dos padrões de desenvolvimento para montantes acumulados.....	26
Tabela 3.11 – Estimativas a priori dos valores esperados dos montantes totais acumulados de indemnizações que serão pagos até ao final do ano de desenvolvimento 9 .....	26
Tabela 3.12 – Matriz de run-off acumulada estimada pelo método de Bornhuetter-Ferguson .....	27
Tabela 3.13 – Montantes totais de indemnizações por pagar estimados pelo método de Bornhuetter-Ferguson .....	27
Tabela 4.1 – Exemplo de matriz de run-off em estudo ( <i>M</i> 2016, 2019) .....	30
Tabela 4.2 – Matriz de run-off <i>M</i> 2013, 2016.....	30
Tabela 4.3 – Matriz de run-off <i>M</i> 2014, 2017 .....	30
Tabela 4.4 – Matriz de run-off <i>M</i> 2017, 2020.....	31
Tabela 4.5 – Matriz de run-off <i>M</i> 2018, 2021.....	31
Tabela 4.6 – Matriz de run-off <i>M</i> 2019, 2022.....	31
Tabela 4.7 – Exemplo de matriz de run-off em estudo ( <i>M</i> 2018, 2022) .....	33
Tabela 4.8 – Matriz de run-off <i>M</i> 2018, 2020.....	33
Tabela 4.9 – Matriz de run-off <i>M</i> 2018, 2021.....	34
Tabela 4.10 – Matriz de run-off <i>M</i> 2018, 2021.....	34



## Lista de figuras

Figura 2.1 – Proposta de ciclo de vida de um sinistro.....	4
Figura 2.2 – Prémios per capita em diversos países da União Europeia (Fonte: Memória do Seguro [9]) .....	7
Figura 2.3 – Fases do ciclo de vida de um sinistro que compreendem os sinistros IBNR e RBNS.....	10
Figura 3.1 – Diferentes matrizes de run-off .....	16
Figura 3.2 – Matriz de run-off com cauda/colunas ultimate .....	20
Figura 4.1 – Matrizes de run-off com a mesma dimensão e que diferem no primeiro e no último ano de ocorrência.....	29
Figura 4.2 – Matriz de run-off $Mt - n, t$ .....	29
Figura 4.3 – Variáveis observadas, estimadas e em estudo.....	32
Figura 4.4 – Matrizes de run-off de diferentes dimensões que diferem no último ano de ocorrência e no último ano de desenvolvimento.....	32
Figura 4.5 – Matriz de run-off $MN - n, t$ .....	33



## Lista de siglas

ASF	Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões
CBNI	<i>Covered But Not Incurred</i>
CSM	<i>Contractual Service Margin</i>
FASB	<i>Financial Accounting Standards Board</i>
IAS	<i>International Accounting Standards</i>
IASB	<i>International Accounting Standards Board</i>
IBNR	<i>Incurred But Not Reported</i>
IFRS	<i>International Financial Reporting Standards</i>
LIC	<i>Liability for Incurred Claims</i>
LRC	<i>Liability for Remaining Coverage</i>
PIB	Produto Interno Bruto
RBNS	<i>Reported But Not Settled</i>



# Capítulo 1

## Introdução

O presente trabalho de projeto, elaborado na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, representa um requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada à Economia e Gestão.

### 1.1 Apresentação do trabalho

A atividade seguradora desempenha um papel relevante na sociedade e na economia. Como tal, a constituição de provisões que, por um lado, sejam suficientes para assegurar o cumprimento das responsabilidades decorrentes dos contratos de seguro e que, por outro lado, não descapitalizem a empresa torna-se fundamental.

Na base do cálculo das provisões assenta a estimação de responsabilidades futuras com sinistros ocorridos. Os métodos clássicos de *Chain Ladder* e *Bornhuetter-Ferguson* são duas técnicas atuariais amplamente utilizadas para o devido efeito.

No presente trabalho serão contruídos modelos para os dois métodos, tendo por base os parâmetros definidos na literatura e de forma a manter a concordância com os estimadores mais usados nos referidos métodos. Posteriormente, será abordada a validação dos pressupostos assumidos nos modelos propostos, apresentando as limitações deste processo.

### 1.2 Estrutura do documento

Este documento encontra-se organizado em 5 capítulos que seguem a seguinte estrutura:

**Capítulo 2 – Contextualização:** Ao longo deste capítulo são abordados os princípios da atividade seguradora e clarificados alguns conceitos-base, de acordo com a legislação atualmente em vigor. Na secção 2.1 é apresentada uma proposta para o ciclo de vida de um sinistro. Na secção 2.2 é feita uma alusão à importância social e económica da atividade seguradora e na secção 2.3 realça-se a importância dos relatórios e demonstrações financeiras, com destaque para o balanço, pela importância que as provisões assumem no passivo das empresas de seguros;

**Capítulo 3 – Métodos de estimação:** Na secção 3.1 são apresentados os conceitos de matriz de *run-off* incremental e acumulada, bem como a linguagem e notação a estes subjacentes. Nas secções 3.2 e 3.3 são abordados teoricamente os métodos de *Chain Ladder*, e *Bornhuetter-Ferguson*,

respetivamente, sendo proposto um modelo para cada método. Na secção **3.4** é dado um exemplo no qual se aplicam os dois métodos;

**Capítulo 4 – Análise de resíduos:** Este capítulo apresenta duas formas possíveis de observação de resíduos, para efeito de validação dos pressupostos assumidos nas secções **3.2** e **3.3**, e evidencia as limitações inerentes a este processo;

**Capítulo 5 – Conclusões:** Neste capítulo, tecem-se as conclusões do presente estudo, abordando as fragilidades encontradas ao longo do projeto e são feitas sugestões de direções futuras e de aspetos que podem vir a ser investigados.

# Capítulo 2

## Contextualização

Estando o presente trabalho relacionado com a atividade seguradora, torna-se essencial compreender em que consiste, quais os seus ramos de atividade e qual o seu produto para a economia e para a sociedade, assim como clarificar alguns conceitos-base, de acordo com a legislação atualmente em vigor. A abordagem efetuada neste capítulo permitirá compreender o cariz estocástico inerente ao setor segurador, destacando, desde já, a importância de se obterem boas estimativas.

### 2.1 A atividade seguradora

De uma forma simplificada, a atividade seguradora é a atividade económica que comercializa contratos de seguro. As empresas de seguros, tipicamente designadas de seguradoras, são geralmente entidades privadas com fins lucrativos [1] que se encontram responsáveis por gerir e reportar a sua atividade de acordo com normas como as Normas Internacionais de Contabilidade (IAS - *International Accounting Standards*) e com as Normas Internacionais de Relato Financeiro (IFRS - *International Financial Reporting Standards*).

Ao abrigo da IFRS 17 [2], a nova Norma Internacional de Relato Financeiro, com entrada em vigor no dia 1 de janeiro de 2023, um contrato de seguro é “Um contrato segundo o qual uma parte (o emitente) aceita um risco de seguro significativo de outra parte (o tomador de seguro), aceitando compensar o tomador de seguro no caso de um acontecimento futuro incerto especificado (o acontecimento coberto pelo seguro) afetar adversamente o tomador de seguro”. A norma estabelece que existe transferência de “risco de seguro significativo” do tomador de seguro para a seguradora se existir um cenário no qual seja possível verificar-se a ocorrência de um acontecimento coberto pelo seguro que represente uma perda significativa, i.e., com “efeito discernível sobre a economia de uma transação”, em valor presente para a seguradora. Este normativo realça a importância dos montantes serem determinados com base no valor presente, refletindo, deste modo, o valor temporal do dinheiro, uma vez que “se um contrato de seguro impuser o pagamento na ocorrência de um acontecimento com calendário incerto e se o pagamento não estiver ajustado ao valor temporal do dinheiro, pode haver situações em que o valor presente do pagamento aumente, mesmo que o seu valor nominal seja fixo”.

A norma define o tomador de seguro como “uma parte que tem direito a indemnização nos termos de um contrato de seguro na eventualidade de ocorrer um acontecimento coberto pelo seguro” e, como mencionado anteriormente, estabelece que o acontecimento coberto pelo seguro é um “acontecimento futuro incerto”. “A incerteza (ou risco) constitui a essência de um contrato de seguro” e a sua natureza estocástica prende-se com as seguintes questões:

1. A probabilidade de ocorrência do acontecimento coberto pelo seguro;
2. Em caso de ocorrência do acontecimento coberto pelo seguro, o momento em que este ocorre;
3. A quantia que a entidade terá de pagar, caso o acontecimento coberto pelo seguro ocorra.

Quando um acontecimento coberto pelo seguro ocorre, diz-se que ocorre um sinistro. Segundo a ASF (Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões) [3], a “autoridade nacional responsável pela regulação e supervisão, quer prudencial quer comportamental, da atividade seguradora, resseguradora, de fundos de pensões e da mediação de seguros”, um sinistro é “um evento ou série de eventos resultantes de uma causa capaz de acionar as garantias de um ou mais contratos de seguro”.

Os sinistros apresentam um ciclo de vida composto por diversas fases que se revelam essenciais para o seu processo de gestão: após a ocorrência do sinistro, o tomador de seguro<sup>1</sup>, segurado<sup>2</sup> ou beneficiário<sup>3</sup> deve efetuar uma participação (comunicação) à seguradora. Ao tomar conhecimento da ocorrência do sinistro, a seguradora procede à abertura do processo de gestão. Seguidamente, são levadas a cabo um conjunto de ações, que a ASF [3] designa de regularização, para confirmar que o sinistro ocorreu, analisar as suas causas, circunstâncias e consequências, decidir se os danos<sup>4</sup> vão ser reparados ou se os prejuízos resultantes do sinistro vão ser compensados e decidir qual o valor da respetiva compensação. Posteriormente, efetua-se o pagamento da indemnização, o que conduz ao encerramento do processo de gestão do sinistro. A indemnização pode ser a reparação de um bem, a substituição de um bem por outro ou o pagamento do seu valor em dinheiro, um valor definido no contrato ou uma renda ou pensão [3], pelo que, a fase que compreende o pagamento da indemnização se pode estender por vários anos. Por vezes, após o encerramento, pode ocorrer uma reabertura do processo, considerando novamente o pagamento da indemnização. Na **Figura 2.1** esquematiza-se o ciclo proposto.

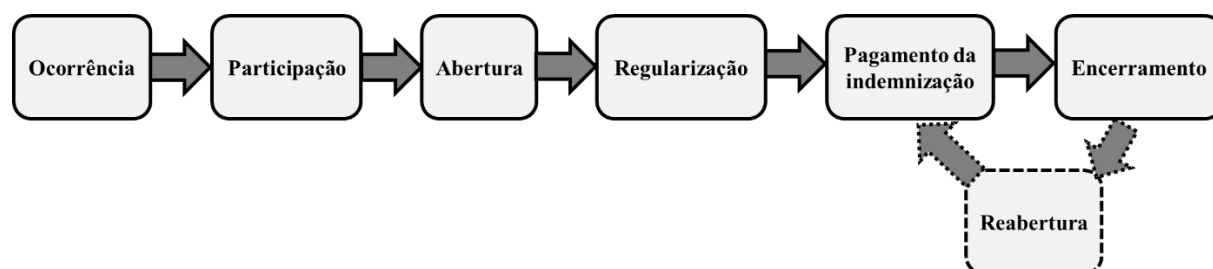


Figura 2.1 – Proposta de ciclo de vida de um sinistro

## 2.2 Importância social e económica da atividade seguradora

A atividade seguradora assume um papel de extrema primazia tanto para a sociedade como para a economia de um país. Focando no âmbito social, os contratos de seguro geram um impacto psicológico de segurança face ao risco de acontecimentos futuros associados a pessoas ou bens que representem uma perda monetária. Os tomadores de seguro preferem pagar uma quantia estabelecida *a priori*

<sup>1</sup> “Pessoa que celebra o contrato de seguro com a empresa de seguros, sendo responsável pelo pagamento do prémio.” [3]

<sup>2</sup> “Pessoa ou entidade no interesse da qual é feito o contrato de seguro ou pessoa cuja vida, saúde ou integridade física se segura (pessoa segura).” [3]

<sup>3</sup> “Pessoa ou entidade com direito às prestações previstas no contrato de seguro.” [3]

<sup>4</sup> “Prejuízo sofrido por alguém. O dano pode ser causado por perda, destruição ou avaria de bens ou por lesão que afete a saúde física ou mental de uma pessoa.” [3]

(prémio<sup>5</sup>) às seguradoras, depositando nestas entidades um sentimento de confiança estabelecido por meio de um contrato, ao invés de terem de lidar com a incerteza de poderem vir a suportar no futuro uma perda monetária significativa para a sua carteira. Louceiro [1] refere que se as empresas de seguros não fornecessem este tipo de serviço, “a forma mais direta de assegurar a estabilidade e coesão social seria o alargamento da intervenção do Estado”.

O pagamento de indemnizações à sociedade por parte das empresas de seguros concretiza-se através do princípio da mutualidade. Este princípio estabelece que todos os clientes contribuem, através do pagamento do prémio, para um fundo que a seguradora administra e utiliza para o pagamento dos custos de cobertura do risco, dos custos de aquisição, gestão do contrato e de cobrança e encargos relacionados com a emissão da apólice<sup>6</sup> [3]. O princípio da mutualidade encontra-se intrinsecamente relacionado com os conceitos de risco partilhado, solidariedade, troca e reciprocidade: risco partilhado e solidariedade, na medida em que um conjunto de pessoas que se encontram sujeitas a um mesmo tipo de risco dividem “o custo de uma proteção comum” [4]; troca e reciprocidade entre a seguradora, que “garante a reposição de determinado bem”, por via do pagamento da indemnização, e os tomadores de seguro, que “desejam resguardar-se” [5].

Desde muito cedo, as civilizações sentiram a necessidade de abraçar o princípio da mutualidade até se estabelecerem as primeiras formas de contrato de seguro. Cerca de 5000 a.C. [6], as culturas encontravam-se organizadas por clãs e tribos que de forma solidária e em cooperação repartiam os danos resultantes de acidentes, “garantindo a subsistência dos lesados, nomeadamente os órfãos ou incapacitados, viúvas, etc.”. Na antiguidade, por volta de 2300 a.C., na Babilónia e Mesopotâmia surgiram técnicas para assegurar o comércio e os transportes, como por exemplo a “substituição dos camelos perdidos durante a viagem”. Em 1600 a.C., os Fenícios desenvolveram um forte comércio marítimo, o que os levou a adotar o conceito de “fundo de reserva” extraído do lucro das viagens realizadas para fazer face aos prejuízos de viagens futuras. Em 600 a.C., as “leis de Atenas” criaram “Caixas de auxílio mútuo, corporativas ou religiosas, prevenindo gastos excepcionais do grupo: associações de carácter mutualista”.

Ao longo da história dos contratos de seguro, o princípio da mutualidade assumiu diversas formas de acordo com as necessidades das civilizações, tendo experimentado na Europa [6], a partir dos séculos XIII e XIV, formas ligadas ao desenvolvimento do comércio e do mercado de capitais. Em Portugal, no ano de 1293, D. Dinis, o rei de cognome “O Lavrador”, estabeleceu uma de forma seguro dedicada exclusivamente aos riscos marítimos. Como forma de suportar perdas relativas a navios e mercadorias, celebravam-se acordos entre os mercadores que pressupunham o pagamento de quantias sobre as embarcações de acordo com o seu porte e tráfego. Em 1347 surge o primeiro contrato de seguro em Génova, com referência a um transporte de mercadorias entre Génova e a Ilha de Maiorca.

Um olhar atento sobre a génese e a missão das empresas de seguros permite-nos perceber que, mais do que entidades com fins lucrativos, à semelhança de outras atividades socioeconómicas, estas empresas são “importantes prestadoras de serviços de âmbito social”, como refere Almaça [7], sublinhando ainda que a atividade seguradora “potencia a iniciativa empreendedora e a criação de valor, protegendo as famílias e as empresas face aos riscos, salvaguardando e estabilizando a sua situação financeira”.

---

<sup>5</sup> “Valor total, incluindo taxas e impostos, que o tomador do seguro deve pagar ao segurador pelo seguro” [3] i.e., preço de um contrato de seguro. O prémio pode ser liquidado em pagamentos regulares (mensais, trimestrais, semestrais, etc.) ou através de um pagamento único antecipado ao período de cobertura.

<sup>6</sup> “Documento que contém as condições do contrato de seguro acordadas pelas partes” [3]

A atividade seguradora é vista pela sociedade como uma “solução moralmente justa” para fazer face à incerteza da ocorrência de acontecimentos futuros que impliquem perdas significativas [4]. Como tal, os contratos de seguro estão presentes no quotidiano por celebração exigida por lei, no caso dos contratos de seguro de carácter obrigatório, ou por celebração opcional, no caso dos contratos de seguro de carácter facultativo. Os contratos de seguro podem cobrir riscos relativos a bens materiais, bens imateriais, créditos e outros direitos patrimoniais (seguros de danos) ou riscos relativos à vida, à saúde e à integridade física de uma pessoa (seguros de pessoas). Quanto às pessoas seguras, os contratos de seguro podem ser individuais, quando cobrem riscos referentes a uma única pessoa, um agregado familiar ou um conjunto de pessoas que vivam numa economia comum, ou podem ser de grupo, quando cobrem riscos de um conjunto de pessoas ligadas ao tomador do seguro por uma relação distinta do seguro. Os contratos de seguro de grupo podem ser contributivos, quando os segurados suportarem o pagamento de parte ou da totalidade do prémio, e não contributivos, quando o prémio é totalmente suportado pelo tomador do seguro [3].

O setor segurador divide a sua atividade em dois ramos: Vida e Não Vida. A **Tabela 2.1** apresenta os seguros e operações do ramo Vida e os seguros do ramo Não Vida.

*Tabela 2.1 – Seguros e operações do ramo Vida e seguros do ramo Não Vida*

<b>Seguros e operações do ramo Vida</b>	<b>Seguros do ramo Não Vida</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Seguros de Vida (em caso de morte, sobrevivência ou mistos)</li> <li>• Rendas</li> <li>• Operações de Capitalização</li> <li>• Seguros ligados a fundos de investimento (<i>unit linked</i>)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Seguro de Acidentes e Doença (Acidentes de Trabalho e Doença)</li> <li>• Seguro de Incêndio e Outros Danos (Riscos Múltiplos Habitação, Riscos Múltiplos Comerciantes e Riscos Múltiplos Industrial)</li> <li>• Seguro Automóvel</li> <li>• Seguro Marítimo e Transportes</li> <li>• Seguro Aéreo</li> <li>• Seguro de Mercadorias Transportadas</li> <li>• Seguro de Responsabilidade Civil Geral</li> <li>• Diversos (Crédito, Caução e Assistência)</li> </ul>

Uma vez compreendido o impacto social da atividade seguradora, importa agora focar no seu aspeto económico. Almaça [7] refere que “Tradicionalmente, a atividade seguradora acompanha o desenvolvimento dos países”, uma vez que “A sociedade beneficia dos seguros, pois os seguradores recebem os prémios que devem ser suficientes para fazer face aos sinistros e estes prémios são investidos, ajudando a financiar a economia do país”.

De acordo com a ASF [8], no ano 2022, operavam em Portugal 603 empresas de seguros, das quais 63 em regime de estabelecimento e 540 em regime de livre prestação de serviços. Das 63 empresas em regime de estabelecimento, 37 eram empresas de seguro de direito português e 26 eram sucursais de empresas de seguros estrangeiras. Para além da categorização referida, as 603 empresas de seguros distribuem-se por ramos de atividade, nas categorias de Vida, Não Vida e Mistas, conforme apresentado na **Tabela 2.2**.

Tabela 2.2 – Número de empresas de seguros a operar em Portugal no ano 2022 (Fonte: ASF Estatísticas de Seguros [8])

2022	Vida	Não Vida	Mistas	Total
<b>Em regime de estabelecimento</b>	<b>14</b>	<b>37</b>	<b>12</b>	<b>63</b>
Empresas de seguros de direito português	12	21	4	37
Empresas de seguros	12	19	4	35
Empresas de resseguro <sup>7</sup>	0	1	0	1
Mútuas	0	1	0	1
Sucursais de empresas de seguros estrangeiras	2	16	8	26
Sediadas na União Europeia	2	16	8	26
Sediadas noutros países	0	0	0	0
<b>Em regime de livre prestação de serviços</b>	<b>47</b>	<b>466</b>	<b>27</b>	<b>540</b>
<b>Total</b>	<b>61</b>	<b>503</b>	<b>39</b>	<b>603</b>

De acordo com os dados do *site Memória do Seguro* [9], no ano 2022, o valor total recebido pelas empresas de seguros dos seus clientes (excluindo impostos), designado por volume de prémios, foi de 12,1 mil milhões de euros e o peso da atividade seguradora na economia, medido através do rácio entre o volume de prémios e o PIB (Produto Interno Bruto) foi 5,8%.

A **Figura 2.2** representa, para alguns países da União Europeia, o gráfico com o valor do indicador prémios *per capita* nos anos 2021 e 2022, que se obtém pelo rácio entre o volume de prémios gerados pela atividade seguradora (suportados por particulares ou por empresas) e a população residente num dado país.

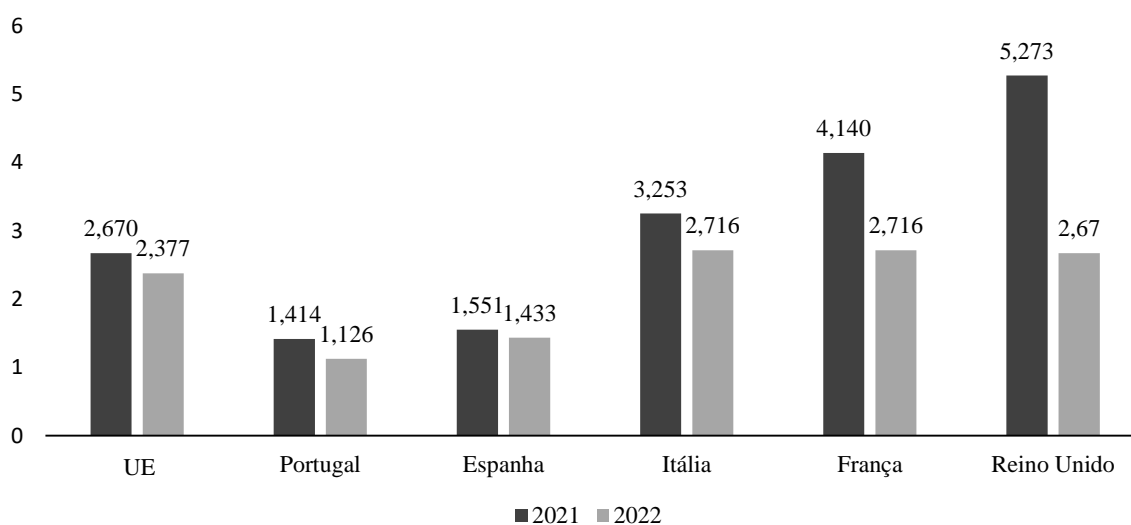


Figura 2.2 – Prémios *per capita* em diversos países da União Europeia (Fonte: Memória do Seguro [9])

No gráfico apresentado é possível observar que se verificou uma tendência decrescente entre 2021 e 2022 no valor obtido deste indicador para os países apresentados e que Portugal foi o país que apresentou, nos dois anos em análise, o valor mais baixo. Estes dados alertam para a necessidade do desenvolvimento da atividade seguradora em Portugal.

<sup>7</sup> Resseguro: “Mecanismo de transferência de riscos de um segurador para outro segurador ou ressegurador” [3].

## 2.3 Relatórios financeiros e provisões

Periodicamente, as empresas reportam a sua situação financeira e o seu desempenho económico em relatórios financeiros, recorrendo a documentos denominados de demonstrações financeiras. Estes documentos procuram dar um amplo conhecimento das empresas a entidades internas como gestores, administradores e sócios e a entidades externas como investidores, credores e autoridades. Por se destinarem a um vasto público, a elaboração de relatórios e de demonstrações financeiras deve seguir regras internacionais que procuram minimizar a subjetividade dos conceitos abordados [10].

Herath & Albarqi [11] realçam a importância da produção de relatórios financeiros de elevada qualidade, na medida em que estes se tornam imprescindíveis na tomada de decisões de investimento, com especial impacto sobre a eficiência de mercado. As autoras enumeram e clarificam os elementos estabelecidos na Estrutura Conceptual para Relatórios Financeiros (*Conceptual Framework for Financial Reporting*) do FASB (*Financial Accounting Standards Board*) e do IASB (*International Accounting Standards Board*) como identificadores de relatórios financeiros de qualidade. Esses elementos incluem: relevância, confiabilidade, comparabilidade, compreensibilidade, oportunidade e representação fiel.

- Relevância:

O atributo relevância prende-se com a utilidade do relatório financeiro para a tomada de decisões económicas e para “avaliar, corrigir ou confirmar eventos atuais e passados”.

- Confiabilidade:

A confiabilidade é outra característica que se revela essencial para que o relatório financeiro seja útil. Esta vertente apenas se torna possível quando a informação se encontra livre de “preconceitos e de erros materiais”.

- Comparabilidade:

Tal como o próprio nome sugere, a comparabilidade é o atributo que permite que os agentes comparem as demonstrações financeiras, os fluxos de caixa e o desempenho económico de diversas entidades em períodos homólogos.

- Compreensibilidade:

A compreensibilidade é uma característica que se alcança por meio de uma comunicação clara e eficaz. O uso de tabelas e figuras pode ajudar a aumentar a compreensibilidade dos relatórios financeiros.

- Oportunidade:

O conceito de oportunidade realça que a informação deve estar disponível para os agentes económicos antes de perder o seu poder de influência.

- Representação Fiel:

A representação fiel é uma característica que se verifica quando o relatório apresenta de forma transparente e neutra a verdadeira posição económica e financeira da empresa.

O balanço é uma das demonstrações financeiras mais importantes, sendo o documento que retrata a posição financeira da empresa num certo momento. O balanço apresenta a situação do património da empresa e a forma como o capital que sustenta esse património é financiado, através da representação do ativo, passivo e capital próprio [10]. Geralmente, as empresas são obrigadas a efetuar um balanço no final de cada exercício económico (que por norma coincide com o ano civil), embora o possam fazer em qualquer momento. Naturalmente, ao comparar dois balanços consecutivos é possível observar as variações registadas nos vários elementos que o constituem.

No âmbito do presente trabalho, destaca-se uma rubrica do balanço designada de provisão, que constitui uma parte significativa do passivo das empresas de seguros [12]. O passivo representa o total de responsabilidades de uma empresa num certo momento, incluindo dívidas e obrigações [10]. No caso das seguradoras, a provisão permite precaver a empresa de encargos futuros decorrentes dos contratos de seguro, sendo registada como passivo, uma vez que representa potenciais obrigações financeiras para com os tomadores de seguro, a liquidar numa data futura. Note-se que, provisões insuficientes podem comprometer gravemente a situação de solvência das empresas de seguros, ao passo que provisões em excesso afetam a sua rentabilidade, uma vez que o excesso de capital provisionado poderia ser investido e, ainda, podem levar ao aumento da tarifação, com especial impacto sobre a competitividade de mercado [12]. À medida que os processos de gestão de sinistros são encerrados ou a vigência<sup>8</sup> dos contratos de seguro termina, as provisões são reajustadas, declarando-se nas demonstrações financeiras as receitas ou as despesas, consoante tenham sido constituídas provisões excessivas ou insuficientes, respetivamente.

A IFRS 17 [2] divide as responsabilidades decorrentes dos contratos de seguro em duas provisões designadas de passivo para sinistros ocorridos (LIC - *Liability for Incurred Claims*) e passivo de cobertura remanescente (LRC - *Liability for Remaining Coverage*).

- Passivo para sinistros ocorridos (LIC): “É obrigação de uma entidade investigar e pagar indemnizações válidas pelos acontecimentos cobertos pelo seguro que já ocorreram, incluindo acontecimentos que tenham ocorrido mas pelos quais não tenham sido apresentadas participações, e outras despesas de seguro suportadas”.
- Passivo de cobertura remanescente (LRC): “É obrigação de uma entidade investigar e pagar indemnizações válidas no âmbito de contratos de seguro vigentes por acontecimentos cobertos pelo seguro que ainda não ocorreram (ou seja, a obrigação que diz respeito à parte remanescente da cobertura de seguro)”.

Por outras palavras, a LIC inclui não só as responsabilidades com sinistros já participados que ainda não se encontram encerrados, designados por sinistros RBNS (*Reported But Not Settled*), mas também com sinistros ocorridos que ainda não foram participados, designados por sinistros IBNR (*Incurred But Not Reported*). Já a LRC refere-se a responsabilidades cobertas pelos contratos de seguro vigentes com sinistros que ainda não ocorreram, designadas por CBNI (*Covered But Not Incurred*).

De acordo com o ciclo de vida de um sinistro proposto na secção 2.1, analise-se o período decorrente entre a ocorrência do sinistro e o pagamento integral da respetiva indemnização. Na **Figura 2.3** esquematiza-se uma divisão deste período em dois subperíodos, na qual o primeiro subperíodo compreende a ocorrência e a participação dos sinistros e o segundo subperíodo compreende a participação e o pagamento completo da indemnização. Os sinistros IBNR e RBNS situam-se, assim, no primeiro e no segundo subperíodo, respetivamente [13].

---

<sup>8</sup> “Período durante o qual o contrato de seguro produz os seus efeitos.” [3]

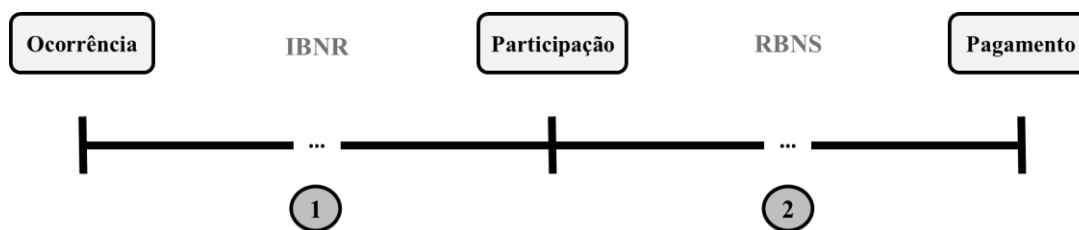


Figura 2.3 – Fases do ciclo de vida de um sinistro que compreendem os sinistros IBNR e RBNS

A IRFS 17 [2] estabelece um modelo geral para a estimação da LIC e da LRC. Para a estimação da LIC, o modelo inclui:

- estimativas dos fluxos de caixa (*cash-flows*) ponderadas pela probabilidade de ocorrência (valor esperado);
- um ajustamento para refletir o valor temporal do dinheiro e os riscos financeiros inerentes aos *cash-flows* futuros;
- um ajustamento pelo risco para o risco não financeiro (*risk adjustment*).

No caso da LRC, para além dos pontos referidos, é ainda considerada uma margem de serviços contratuais (CSM - *Contractual Service Margin*), que representa os lucros não realizados que a entidade reconhecerá ao prestar serviços de contratos de seguro no futuro.

Os métodos que serão abordados no presente trabalho permitem estimar responsabilidades com sinistros IBNR e RBNS, não refletindo o valor temporal do dinheiro nem o *risk adjustment*. Contudo, podem ser utilizados como métodos de estimação do valor esperado dos *cash-flows* futuros, para uma determinada carteira.

O custo total de um sinistro, aquando da sua ocorrência, assume um valor desconhecido, o que leva à necessidade de estimação. Compreende-se que os custos com sinistros englobam, por um lado, as indemnizações pagas e, por outro, as provisões para fazer face a pagamentos futuros. De forma a estimar os custos com sinistros, as empresas de seguros baseiam-se nos seus registos históricos [12], pelo que, o processo de recolha de dados, quer a nível quantitativo, quer a nível qualitativo se revela fundamental. Se a utilização reduzida de dados compromete a significância estatística dos modelos aplicados, a sua utilização em excesso pode conduzir a resultados enviesados, caso sejam introduzidas tendências passadas que já não se encontrem em conformidade com a atualidade, ou que não permitam identificar e reproduzir novas tendências, resultantes de alterações de políticas de gestão [12]. Torna-se, portanto, necessário que os dados recolhidos sejam comparáveis entre os períodos considerados. Por vezes, podem ainda ser necessários ajustes como a inflação, as tendências, a evolução dos custos médios por tipo de dano, etc.. Note-se que a utilização de informação histórica pode revelar-se mais útil para empresas de seguros cuja atividade se encontre bem consolidada no mercado.

O valor esperado das responsabilidades futuras com sinistros ocorridos pode ser estimado com base em análises casuísticas (por sinistro) ou análises agregadas (para sinistros com características semelhantes) [12]. Por vezes, é ainda feita uma calibração, ajustando estimativas casuísticas em função dos resultados agregados.

- Análise casuística: aborda as características e especificidades de cada sinistro [12], efetuando ajustes em função de peritagens, avaliação de danos e da informação histórica da empresa. Nesta abordagem, as responsabilidades com sinistros ocorridos correspondem inicialmente à soma das várias estimativas calculadas para cada processo de sinistro participado [12]. Note-se que a análise

casuística, apesar de poder conduzir a estimativas que se aproximem da realidade, torna-se num processo extremamente pesado para um número elevado de sinistros em aberto, podendo ser uma abordagem mais adequada quando se verificam sinistros atípicos. Mais ainda, não permite obter estimativas para sinistros IBNR [12].

- Análise agregada: permite obter estimativas para as responsabilidades futuras com sinistros ocorridos, com base em métodos estatísticos. Usualmente, a informação histórica é agrupada numa matriz de *run-off* [12], conceito que será abordado no próximo capítulo.

# Capítulo 3

## Métodos de estimação

Conforme mencionado, para as empresas de seguros, é importante obter boas estimativas dos montantes de indemnizações a pagar referentes a sinistros ocorridos. Neste capítulo são abordados dois métodos clássicos de estimação para os referidos montantes: *Chain Ladder* e *Bornhuetter-Ferguson*. Primeiramente, são apresentados conceitos e notação comuns aos dois métodos, incluindo os conceitos de ano de desenvolvimento e matriz de *run-off*, e, seguidamente, são propostos modelos baseados nos parâmetros e estimadores definidos na literatura para estes métodos.

### 3.1 Organização dos dados

Na secção 2.1 foi apresentada uma proposta para o ciclo de vida de um sinistro. Posteriormente, na secção 2.3 esquematizaram-se algumas fases do ciclo para se distinguirem os conceitos de sinistros IBNR e RBNS. Considerem-se, novamente, as referidas fases do ciclo, essenciais para o agrupamento da informação histórica relativa a sinistros, que se encontram ordenadas cronologicamente:

1. Ocorrência;
2. Participação;
3. Pagamento.

Designa-se por ano de desenvolvimento cada ano que decorre entre a ocorrência e a participação, a participação e o pagamento ou a ocorrência e o pagamento.

Considere-se, como exemplo, um sinistro ocorrido no ano 2000, participado no ano 2001 e cujo pagamento da respetiva indemnização tenha decorrido até ao final do ano 2010. Este sinistro possui 10 anos de desenvolvimento desde a ocorrência até ao pagamento completo da indemnização, apresentando 1 ano de desenvolvimento desde a ocorrência até à participação e 9 anos de desenvolvimento desde a participação até ao final do pagamento da indemnização.

Sejam  $N$  o último ano de ocorrência e  $n$  o último ano de desenvolvimento pretendidos. De acordo com a literatura [14], sejam  $Z_{i,k}$  e  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  variáveis aleatórias. Defina-se  $Z_{i,k}$  como o montante total de indemnizações, referente a sinistros ocorridos no ano civil  $i$ , pago no ano de desenvolvimento  $k$ , ou seja, no ano civil  $i + k$  (valor incremental). De forma análoga, defina-se  $S_{i,k}$  como a soma dos montantes totais de indemnizações, referentes a sinistros ocorridos no ano civil  $i$ , pagos até ao final do ano de desenvolvimento  $k$ , ou seja, até ao final do ano civil  $i + k$  (valor acumulado). Deste modo, tem-se:

$$S_{i,k} = \sum_{j=0}^k Z_{i,j}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (3.1)$$

e

$$Z_{i,k} = \begin{cases} S_{i,0}, & k = 0 \\ S_{i,k} - S_{i,k-1}, & k \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}. \quad (3.2)$$

Exemplificando,  $Z_{2021,2}$  representa o montante total incremental de indenizações, referente a sinistros ocorridos no ano 2021, pago no ano de desenvolvimento 2, ou seja, no ano 2023. Por seu turno,  $S_{2021,2}$  representa o montante total acumulado de indenizações, referente a sinistros ocorridos no ano 2021, pago até ao final do ano de desenvolvimento 2, ou seja, até ao final do ano 2023.

As variáveis  $Z_{i,k}$  e  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  são representadas nas chamadas matrizes de *run-off* [14]. Estas matrizes apresentam por linha os anos de ocorrência dos sinistros e por coluna os anos de desenvolvimento. Por convenção, são utilizadas matrizes de *run-off* quadradas, com tantas linhas de anos de ocorrência quanto o número de colunas de anos de desenvolvimento pretendido. Esta forma de organização dos dados permite verificar tendências ao longo dos anos de ocorrência e/ou padrões ao longo dos anos de desenvolvimento aquando da observação das variáveis. A **Tabela 3.1** corresponde a uma matriz de *run-off* incremental, com elementos  $Z_{i,k}$ ,  $i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , e a **Tabela 3.2** corresponde a uma matriz de *run-off* acumulada com elementos  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Tabela 3.1 – Matriz de *run-off* incremental

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento						
	0	1	...	$k$	...	$n-1$	$n$
$N-n$	$Z_{N-n,0}$	$Z_{N-n,1}$	...	$Z_{N-n,k}$	...	$Z_{N-n,n-1}$	$Z_{N-n,n}$
$N-n+1$	$Z_{N-n+1,0}$	$Z_{N-n+1,1}$	...	$Z_{N-n+1,k}$	...	$Z_{N-n+1,n-1}$	$Z_{N-n+1,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$i$	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	...	$Z_{i,k}$	...	$Z_{i,n-1}$	$Z_{i,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$N-1$	$Z_{N-1,0}$	$Z_{N-1,1}$	...	$Z_{N-1,k}$	...	$Z_{N-1,n-1}$	$Z_{N-1,n}$
$N$	$Z_{N,0}$	$Z_{N,1}$	...	$Z_{N,k}$	...	$Z_{N,n-1}$	$Z_{N,n}$

Tabela 3.2 – Matriz de *run-off* acumulada

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento						
	0	1	...	$k$	...	$n-1$	$n$
$N-n$	$S_{N-n,0}$	$S_{N-n,1}$	...	$S_{N-n,k}$	...	$S_{N-n,n-1}$	$S_{N-n,n}$
$N-n+1$	$S_{N-n+1,0}$	$S_{N-n+1,1}$	...	$S_{N-n+1,k}$	...	$S_{N-n+1,n-1}$	$S_{N-n+1,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$i$	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	...	$S_{i,k}$	...	$S_{i,n-1}$	$S_{i,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$N-1$	$S_{N-1,0}$	$S_{N-1,1}$	...	$S_{N-1,k}$	...	$S_{N-1,n-1}$	$S_{N-1,n}$
$N$	$S_{N,0}$	$S_{N,1}$	...	$S_{N,k}$	...	$S_{N,n-1}$	$S_{N,n}$

No uso dos métodos de estimação, os elementos da diagonal secundária destas matrizes, bem como os que se encontram acima de cada um deles, representam os montantes totais (incrementais ou acumulados) de indemnizações que já foram pagos, sendo dados históricos das empresas de seguros, e os elementos que se encontram abaixo de cada um dos elementos da diagonal secundária representam estimativas dos montantes a pagar [12]. Ou seja, as variáveis aleatórias tais que  $i + k \leq N$  já foram observadas e as variáveis aleatórias tais que  $i + k > N$  são estimadas.

De acordo com a literatura [14], sejam  $\hat{Z}_{i,k}$  e  $\hat{S}_{i,k}$ ,  $i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $i + k > N$  estimadores de  $Z_{i,k}$  e  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $i + k > N$ , respetivamente. Por (3.1) e (3.2), tem-se:

$$\hat{S}_{i,k} = S_{i,N-i} + \sum_{j=N-i+1}^k \hat{Z}_{i,j}, \quad i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}, i + k > N \quad (3.3)$$

e

$$\hat{Z}_{i,k} = \begin{cases} \hat{S}_{i,N-i+1} - S_{i,N-i}, & k = N - i + 1 \\ \hat{S}_{i,k} - \hat{S}_{i,k-1}, & k \in \{N - i + 2, \dots, n\} \end{cases}, \quad i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}, i + k > N. \quad (3.4)$$

Note-se que os elementos dispostos paralelamente à diagonal secundária das matrizes de *run-off*, i.e., os elementos  $Z_{i,k}$  ou  $S_{i,k}$  tais que  $i + k = c$ ,  $c \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N + n\}$ , representam montantes totais incrementais ou acumulados de indemnizações, referentes a sinistros ocorridos em anos civis diferentes, pagos ou a pagar (consoante  $i + k \leq N$  ou  $i + k > N$ ) no mesmo ano civil ou até ao final do mesmo ano civil, respetivamente. Somando os montantes destes elementos obtém-se, na matriz incremental, o montante total incremental de indemnizações que foi pago ou será pago num determinado ano civil e, na matriz acumulada, o montante total acumulado de indemnizações que foi pago ou será pago até ao final de um dado ano civil. Como exemplo, considerem-se as seguintes matrizes de *run-off*, incremental e acumulada, que se apresentam na **Tabela 3.3** e na **Tabela 3.4**, respetivamente:

Tabela 3.3 – Exemplo de matriz de run-off incremental

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento		
	0	1	2
2020	45274	39580	11607
2021	58279	42724	13816
2022	37305	29650	9159

Na **Tabela 3.3** pode observar-se que os montantes totais incrementais de indemnizações pagos nos anos 2022, 2021 e 2020 foram  $37305 + 42724 + 11607 = 91636$  u. m.,  $58279 + 39580 = 97859$  u. m. e  $45274$  u. m., respetivamente. Estima-se que os montantes totais incrementais de indemnizações que serão pagos nos anos 2023 e 2024 sejam  $29650 + 13816 = 43466$  u. m. e  $9159$  u. m., na respetiva ordem.

Tabela 3.4 – Exemplo de matriz de run-off acumulada

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento		
	0	1	2
2020	45274	84854	96461
2021	58279	101003	114819
2022	37305	66955	76114

Por sua vez, na **Tabela 3.4** pode observar-se que os montantes totais acumulados de indemnizações pagos até ao final dos anos 2022, 2021 e 2020 foram  $37305 + 101003 + 96461 = 234769 u. m.$ ,  $58279 + 84854 = 143133 u. m.$  e  $45274 u. m.$ , respetivamente. Estima-se que os montantes totais acumulados de indemnizações que serão pagos até ao final dos anos 2023 e 2024 sejam  $66955 + 114819 = 181774 u. m.$  e  $76114 u. m.$ , por esta ordem.

Os montantes totais de indemnizações referentes a sinistros que se encontram por pagar podem ainda ser agrupados por anos de ocorrência [14]. Sejam  $R_i, i \in \{N - n + 1, N - n + 2, \dots, N\}$  variáveis aleatórias tais que  $R_i$  representa o montante total de indemnizações por pagar, referente a sinistros ocorridos no ano civil  $i$ . Para  $i \in \{N - n + 1, N - n + 2, \dots, N\}$ ,  $R_i$  pode escrever-se como a soma dos montantes totais incrementais de indemnizações, referentes a sinistros ocorridos no ano civil  $i$ , que se encontram por pagar. De modo equivalente,  $R_i$  pode obter-se por diferença entre o montante total acumulado de indemnizações a pagar até ao final do último ano de desenvolvimento pretendido e o montante total acumulado de indemnizações já pago, para sinistros com ocorrência no ano civil  $i$ , i.e.,

$$R_i = \sum_{k=N-i+1}^n Z_{i,k} = S_{i,n} - S_{i,N-i}, \quad i \in \{N - n + 1, N - n + 2, \dots, N\}. \quad (3.5)$$

Deste modo, um estimador de  $R_i$ ,  $\hat{R}_i$ , tem a seguinte expressão:

$$\hat{R}_i = \sum_{k=N-i+1}^n \hat{Z}_{i,k} = \hat{S}_{i,n} - S_{i,N-i}, \quad i \in \{N - n + 1, N - n + 2, \dots, N\}. \quad (3.6)$$

Assim, o montante total de indemnizações referente a sinistros por pagar, associado a uma matriz de *run-off*,  $R$ , corresponde à soma dos montantes totais de indemnizações por pagar, referentes a sinistros ocorridos no ano civil  $i \in \{N - n + 1, N - n + 2, \dots, N\}$  [14].

$$R = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (3.7)$$

O respetivo estimador,  $\hat{R}$ , é dado por:

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i. \quad (3.8)$$

Importa referir que a notação apresentada ao longo da secção se refere aos montantes totais (incrementais ou acumulados) de indemnizações relativos a sinistros “IBNR+RBNS”. Os métodos abordados neste trabalho de projeto, que serão apresentados nas próximas secções deste capítulo, para além de permitirem estimar os referidos montantes, permitem adicionalmente estimar os montantes totais (incrementais ou acumulados) de indemnizações referentes a sinistros IBNR e a sinistros RBNS, separadamente, e ainda estimar o número total (incremental ou acumulado) de sinistros IBNR. Para tal, torna-se necessário efetuarem-se as devidas adaptações [13]:

- Quando se pretende obter estimativas dos montantes totais de indemnizações relativos a sinistros IBNR, o conceito de ano de desenvolvimento deve referir-se a cada ano decorrente entre o ano de ocorrência e o ano de participação do sinistro e a matriz de *run-off* deve apresentar por linha os anos de ocorrência e por coluna os anos de desenvolvimento, o que implica que as variáveis aleatórias  $Z_{i,k}$  representem o montante total incremental de indemnizações referente a sinistros ocorridos no ano civil  $i$  e participados no ano de desenvolvimento  $k$ , ou seja, no ano civil  $i + k$  e as variáveis

aleatórias  $S_{i,k}$  representem o montante total acumulado de indemnizações referente a sinistros ocorridos no ano civil  $i$  e participados até ao final do ano de desenvolvimento  $k$ , ou seja, até ao final do ano civil  $i + k$ , para  $i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ;

- Quando o objetivo é obter estimativas dos montantes totais de indemnizações relativos a sinistros RBNS, o conceito de ano de desenvolvimento deve referir-se a cada ano decorrente entre o ano de participação e o ano de pagamento e a matriz de *run-off* deve apresentar por linha os anos de participação e por coluna os anos de desenvolvimento, o que implica que as variáveis  $Z_{i,k}$  representem o montante total incremental de indemnizações, referente a sinistros participados no ano civil  $i$ , pago no ano de desenvolvimento  $k$ , ou seja, no ano civil  $i + k$  e as variáveis  $S_{i,k}$  representem o montante total acumulado de indemnizações, referente a sinistros participados no ano civil  $i$ , pago até ao final do ano de desenvolvimento  $k$ , ou seja, até ao final do ano civil  $i + k$ , para  $i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ;
- Quando se pretende estimar o número total (incremental ou acumulado) de sinistros IBNR, devem criar-se novas variáveis aleatórias com o significado pretendido. Por exemplo, sejam  $X_{i,k}$  e  $Y_{i,k}$ ,  $i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  variáveis aleatórias tais que  $X_{i,k}$  representa o número total de sinistros ocorridos no ano civil  $i$  e participados no ano de desenvolvimento  $k$ , ou seja, no ano civil  $i + k$  (valor incremental) e  $Y_{i,k}$  a soma do número total de sinistros ocorridos no ano civil  $i$  e participados até ao final do ano de desenvolvimento  $k$ , ou seja, até ao final do ano civil  $i + k$  (valor acumulado). Deste modo, tem-se:

$$Y_{i,k} = \sum_{j=0}^k X_{i,j}, \quad i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (3.9)$$

e

$$X_{i,k} = \begin{cases} Y_{i,0}, & k = 0 \\ Y_{i,k} - Y_{i,k-1}, & k \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}, \quad i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}. \quad (3.10)$$

Na **Figura 3.1** esquematiza-se, permitindo comparar, os três tipos de matrizes de *run-off* (incrementais ou acumuladas) a serem utilizadas quando se pretende obter estimativas para o número total de sinistros IBNR (1) ou para os montantes totais de indemnizações referentes a sinistros IBNR (1), RBNS (2) ou “IBNR+RBNS” (3).

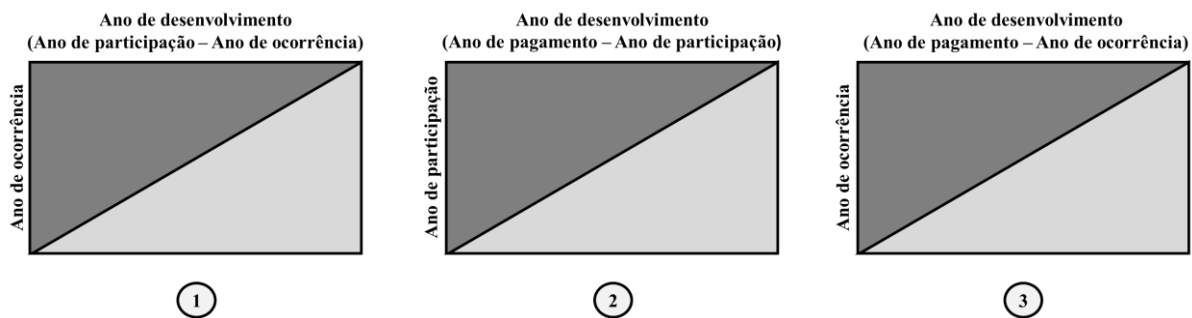


Figura 3.1 – Diferentes matrizes de *run-off*

Ao longo do projeto, é abordada a estimação dos montantes totais (incrementais ou acumulados) de indemnizações referentes a sinistros “IBNR+RBNS”.

## 3.2 Método de Chain Ladder

O método de *Chain Ladder* é uma das técnicas atuariais de estimação de responsabilidades com sinistros mais antiga e amplamente utilizada no mundo segurador, especialmente devido à simplicidade da sua aplicação. Este método, referido na literatura [14] como tendo sido possivelmente apresentado pela primeira vez em 1934 [15], parte do pressuposto de que o pagamento de indemnizações, referente a sinistros ocorridos, por parte das empresas de seguros, segue um padrão ao longo dos anos de desenvolvimento, que se verifica para qualquer ano de ocorrência.

Suponha-se que  $S_{i,k}$  se consegue escrever em função de  $S_{i,k-1}$ , de acordo com o seguinte modelo:

$$S_{i,k} = \varphi_k S_{i,k-1} + \varepsilon_{i,k}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.11)$$

sendo  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  parâmetros designados por **fatores de desenvolvimento** e  $\varepsilon_{i,k}$ ,  $i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  variáveis aleatórias que representam os erros, com valor esperado zero, variância constante, desconhecida, e não correlacionadas, i.e.,

- $E[\varepsilon_{i,k}] = 0, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\},$
- $Var[\varepsilon_{i,k}] = \sigma^2, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\},$
- $Cov[\varepsilon_{i,k}, \varepsilon_{j,l}] = 0, \quad i, j \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \vee k \neq l.$  (3.12)

Assuma-se, adicionalmente, que  $S_{i,0}$  e  $\varepsilon_{i,k}$  são variáveis aleatórias não correlacionadas, ou seja,

$$Cov[S_{i,0}, \varepsilon_{i,k}] = 0, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.13)$$

Os fatores de desenvolvimento considerados no método de *Chain Ladder* estão definidos, na literatura [14], para cada ano de desenvolvimento  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , como o quociente entre o valor esperado de  $S_{i,k}$  e o valor esperado de  $S_{i,k-1}$ , com  $i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}$ , ou seja,

$$\varphi_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.14)$$

De acordo com o modelo proposto em (3.11), é possível obter (3.14) por aplicação do valor esperado, verificando-se a seguinte relação:

$$E[S_{i,k}] = \varphi_k E[S_{i,k-1}], \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.15)$$

Na literatura [14] estão ainda definidos os seguintes estimadores:

$$\hat{S}_{i,k} = \left( \prod_{j=N-i+1}^k \hat{\varphi}_j \right) S_{i,N-i}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, i+k > N, \quad (3.16)$$

$$\hat{\varphi}_k = \frac{\sum_{i=N-n}^{N-k} S_{i,k}}{\sum_{i=N-n}^{N-k} S_{i,k-1}}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.17)$$

De modo a fazer-se a ligação entre o modelo proposto em (3.11) e o estimador apresentado em (3.16), repare-se que o modelo proposto se pode escrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{i,k} &= \varphi_k S_{i,k-1} + \varepsilon_{i,k} = \\ &= \varphi_k (\varphi_{k-1} S_{i,k-2} + \varepsilon_{i,k-1}) + \varepsilon_{i,k} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_k \varphi_{k-1} S_{i,k-2} + \varphi_k \varepsilon_{i,k-1} + \varepsilon_{i,k} = \\
&= \varphi_k \varphi_{k-1} (\varphi_{k-2} S_{i,k-3} + \varepsilon_{i,k-2}) + \varphi_k \varepsilon_{i,k-1} + \varepsilon_{i,k} = \\
&= \varphi_k \varphi_{k-1} \varphi_{k-2} S_{i,k-3} + \varphi_k \varphi_{k-1} \varepsilon_{i,k-2} + \varphi_k \varepsilon_{i,k-1} + \varepsilon_{i,k} = \\
&= \dots = \\
&= \left( \prod_{j=1}^k \varphi_j \right) S_{i,0} + \sum_{l=1}^{k-1} \left( \prod_{j=l+1}^k \varphi_j \right) \varepsilon_{i,l} + \varepsilon_{i,k}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$S_{i,k} = \left( \prod_{j=1}^k \varphi_j \right) S_{i,0} + \delta_{i,k}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.18)$$

com  $\delta_{i,k} = \sum_{l=1}^{k-1} \left( \prod_{j=l+1}^k \varphi_j \right) \varepsilon_{i,l} + \varepsilon_{i,k}$ .

Analogamente, é possível escrever  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  em função de qualquer  $S_{i,l}$ ,  $i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, l \in \{0, \dots, k-1\}$ , havendo particular interesse em escrever  $S_{i,k}$  em função de  $S_{i,N-i}$ . Deste modo, tem-se:

$$S_{i,k} = \left( \prod_{j=N-i+1}^k \varphi_j \right) S_{i,N-i} + \theta_{i,k}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, i+k > N \quad (3.19)$$

com  $\theta_{i,k} = \sum_{l=N-i+1}^{k-1} \left( \prod_{j=l+1}^k \varphi_j \right) \varepsilon_{i,l} + \varepsilon_{i,k}$ .

Aplicando o valor esperado à igualdade (3.19) verifica-se a seguinte relação:

$$E[S_{i,k}] = \left( \prod_{j=N-i+1}^k \varphi_j \right) E[S_{i,N-i}], \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, i+k > N, \quad (3.20)$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
E[\theta_{i,k}] &= E \left[ \sum_{l=N-i+1}^{k-1} \left( \prod_{j=l+1}^k \varphi_j \right) \varepsilon_{i,l} + \varepsilon_{i,k} \right] = E \left[ \sum_{l=N-i+1}^{k-1} \left( \prod_{j=l+1}^k \varphi_j \right) \varepsilon_{i,l} \right] + E[\varepsilon_{i,k}] = \\
&= \sum_{l=N-i+1}^{k-1} E \left[ \left( \prod_{j=l+1}^k \varphi_j \right) \varepsilon_{i,l} \right] + 0 = \sum_{l=N-i+1}^{k-1} \left( \prod_{j=l+1}^k \varphi_j \right) E[\varepsilon_{i,l}] = 0,
\end{aligned}$$

$i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, i+k > N$ .

Note-se ainda que, para  $i \neq j$  ou  $k \neq l$ , se tem:

$$Cov[\varepsilon_{i,k}, \theta_{j,l}] = Cov \left[ \varepsilon_{i,k}, \sum_{p=N-i+1}^{k-1} \left( \prod_{q=p+1}^k \varphi_q \right) \varepsilon_{j,p} + \varepsilon_{j,l} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= Cov \left[ \varepsilon_{i,k}, \sum_{p=N-i+1}^{k-1} \left( \prod_{q=p+1}^k \varphi_q \right) \varepsilon_{j,p} \right] + Cov[\varepsilon_{i,k}, \varepsilon_{j,l}] = \\
&= \sum_{p=N-i+1}^{k-1} Cov \left[ \varepsilon_{i,k}, \left( \prod_{q=p+1}^k \varphi_q \right) \varepsilon_{j,p} \right] + 0 = \\
&= \sum_{p=N-i+1}^{k-1} \left( \prod_{q=p+1}^k \varphi_q \right) Cov[\varepsilon_{i,k}, \varepsilon_{j,p}] = 0,
\end{aligned}$$

$i, j \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}, j+l > N, i \neq j \vee k \neq l$ .

Do mesmo modo, também se tem:

$$E[\delta_{i,k}] = 0, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.21)$$

$$Cov[\varepsilon_{i,k}, \delta_{j,l}] = 0, \quad i, j \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \vee k \neq l. \quad (3.22)$$

À luz do modelo proposto em (3.11), um estimador de  $S_{i,k}$  pode escrever-se da seguinte forma:

$$\hat{S}_{i,k} = \begin{cases} \hat{\varphi}_k S_{i,N-i}, & k = N-i+1 \\ \hat{\varphi}_k \hat{S}_{i,k-1}, & k \in \{N-i+2, \dots, n\} \end{cases}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, i+k > N, \quad (3.23)$$

verificando-se ainda que

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_k \hat{S}_{i,k-1} &= \hat{\varphi}_k (\hat{\varphi}_{k-1} \hat{S}_{i,k-2}) = \hat{\varphi}_k \hat{\varphi}_{k-1} \hat{S}_{i,k-2} = \hat{\varphi}_k \hat{\varphi}_{k-1} (\hat{\varphi}_{k-2} \hat{S}_{i,k-3}) = \hat{\varphi}_k \hat{\varphi}_{k-1} \hat{\varphi}_{k-2} \hat{S}_{i,k-3} = \\
&= \dots = \left( \prod_{j=1}^k \hat{\varphi}_j \right) S_{i,N-i}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, i+k > N.
\end{aligned}$$

Passando à análise da expressão do estimador de  $\varphi_k$  definida na literatura [14], dada a definição (3.14), seria natural obter-se um estimador de  $\varphi_k$  com base no quociente entre os valores esperados de  $S_{i,k}$  e  $S_{i,k-1}$ , ou seja,

$$\hat{\varphi}_k^* = \left( \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]} \right), \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.24)$$

No entanto, o estimador de  $\varphi_k$  apresentado em (3.17) é obtido a partir do valor esperado do quociente entre  $S_{i,k}$  e  $S_{i,k-1}$ , i.e.,

$$\hat{\varphi}_k = \hat{E} \left[ \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}} \right], \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.25)$$

recorrendo, de acordo com a literatura [14], a uma média ponderada de observações  $\frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}}$ , ou seja,

$$\hat{\varphi}_k = \sum_{i=N-n}^{N-k} w_{i,k} \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.26)$$

com  $w_{i,k} = \frac{S_{i,k-1}}{\sum_{j=N-n}^{N-k} S_{j,k-1}}$ , tais que  $\sum_{i=N-n}^{N-k} w_{i,k} = 1$ .

Deste modo,

$$\hat{\varphi}_k = \sum_{i=N-n}^{N-k} \left( \frac{S_{i,k-1}}{\sum_{j=N-n}^{N-k} S_{j,k-1}} \right) \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}} = \sum_{i=N-n}^{N-k} \frac{S_{i,k}}{\sum_{j=N-n}^{N-k} S_{j,k-1}} = \frac{\sum_{i=N-n}^{N-k} S_{i,k}}{\sum_{i=N-n}^{N-k} S_{i,k-1}}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Porém, note-se que

$$S_{i,k} = \varphi_k S_{i,k-1} + \varepsilon_{i,k} \Leftrightarrow \varphi_k = \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}} - \frac{\varepsilon_{i,k}}{S_{i,k-1}}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Aplicando o valor esperado, tem-se:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= E \left[ \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}} - \frac{\varepsilon_{i,k}}{S_{i,k-1}} \right] = E \left[ \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}} \right] - E \left[ \frac{\varepsilon_{i,k}}{S_{i,k-1}} \right] = \\ &= E \left[ \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}} \right], \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned}$$

uma vez que, por (3.13), (3.18) e (3.22),

$$Cov \left[ \varepsilon_{i,k}, \frac{1}{S_{i,k-1}} \right] = Cov \left[ \varepsilon_{i,k}, \frac{1}{\left( \prod_{j=1}^{k-1} \varphi_j \right) S_{i,0} + \delta_{i,k-1}} \right] = 0, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

logo,  $\varepsilon_{i,k}$  e  $\frac{1}{S_{i,k-1}}$  são não correlacionados e, consequentemente,

$$E \left[ \frac{\varepsilon_{i,k}}{S_{i,k-1}} \right] = E \left[ \varepsilon_{i,k} \frac{1}{S_{i,k-1}} \right] = E[\varepsilon_{i,k}] E \left[ \frac{1}{S_{i,k-1}} \right] = 0, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Assim, é então possível concluir que

$$\varphi_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]} = E \left[ \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}} \right], \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.27)$$

Considerando que o pagamento completo da indemnização de alguns sinistros decorre ao longo de um número elevado de anos de desenvolvimento, por vezes, são considerados um ou mais fatores de cauda, também conhecidos como fatores *ultimate*. Tais fatores refletem a evolução esperada do pagamento de indemnizações após o último ano de desenvolvimento pretendido na matriz de *run-off* [12]. Desta forma, na matriz de *run-off*, após a coluna do último ano de desenvolvimento pretendido, são adicionadas uma ou mais colunas designadas de cauda/*ultimate*, tal como esquematizado na **Figura 3.2**.

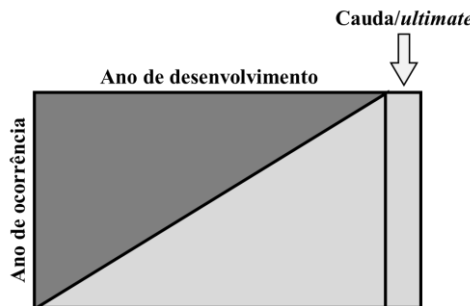


Figura 3.2 – Matriz de run-off com cauda/colunas ultimate

### 3.3 Método de Bornhuetter-Ferguson

O método de *Bornhuetter-Ferguson* é uma das técnicas atuariais mais populares para a estimação de responsabilidades com sinistros. Este método, proposto pela primeira vez em 1972 [16], parte do pressuposto de que o pagamento de indenizações, referente a sinistros ocorridos, por parte das empresas de seguros, segue um padrão ao longo dos anos de desenvolvimento, que se verifica para qualquer ano de ocorrência.

Suponha-se que  $S_{i,k}$  se consegue escrever em função de  $S_{i,n}$ , de acordo com o seguinte modelo:

$$S_{i,k} = \gamma_k S_{i,n} + \varepsilon_{i,k}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad (3.28)$$

sendo  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ , com  $\gamma_n \equiv 1$ , parâmetros designados por **padrões de desenvolvimento para montantes acumulados** e  $\varepsilon_{i,k}, i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$  variáveis aleatórias que representam os erros, tais que  $\varepsilon_{i,n}$  é uma variável aleatória degenerada em zero e  $\varepsilon_{i,k}, i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  são variáveis aleatórias com valor esperado zero, variância constante, desconhecida, e não correlacionadas, i.e.,

- $E[\varepsilon_{i,k}] = 0, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\},$
- $Var[\varepsilon_{i,k}] = \begin{cases} \sigma^2, & k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ 0, & k = n \end{cases}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\},$
- $Cov[\varepsilon_{i,k}, \varepsilon_{j,l}] = 0, \quad i, j \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k, l \in \{0, 1, \dots, n\}, i \neq j \vee k \neq l.$  (3.29)

Na literatura [14], os **padrões de desenvolvimento para montantes acumulados** considerados no método de *Bornhuetter-Ferguson* estão definidos, para cada ano de desenvolvimento  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , como o quociente entre o valor esperado de  $S_{i,k}$  e o valor esperado de  $S_{i,n}$ , com  $i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}$ , ou seja,

$$\gamma_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (3.30)$$

De acordo com o modelo apresentado em (3.28), é possível obter (3.30) por aplicação do valor esperado, verificando-se a seguinte relação:

$$E[S_{i,k}] = \gamma_k E[S_{i,n}], \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (3.31)$$

Por simplicidade de notação, na literatura [14],  $E[S_{i,n}], i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}$  é representado pelo parâmetro  $\alpha_i > 0$ , i.e.,

$$E[S_{i,n}] = \alpha_i, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}. \quad (3.32)$$

Deste modo, considerando (3.31) e (3.32), tem-se:

$$E[S_{i,k}] = \gamma_k \alpha_i, \quad i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (3.33)$$

No método, assume-se ainda a existência de estimadores *a priori* para  $\alpha_{N-n}, \alpha_{N-n+1}, \dots, \alpha_N$  e  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  que se podem basear [17]:

- em informação interna, contida na matriz de *run-off* da carteira em análise, como médias ponderadas;

- em informação externa (*benchmarks*), que não consta na matriz de *run-off* da carteira em análise, obtida, por exemplo, através de estatísticas de mercado, de outras carteiras consideradas semelhantes ou de prémios ou outras medidas de volume da carteira em análise;
- ou numa combinação de informação externa e interna.

Suponha-se agora a existência de parâmetros  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n > 0$ , com  $\sum_{j=0}^n \vartheta_j = 1$ , designados de **padrões de desenvolvimento para montantes incrementais**. Estes parâmetros estão definidos na literatura [14], para cada ano de desenvolvimento  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , como o quociente entre o valor esperado de  $Z_{i,k}$  e o valor esperado de  $S_{i,n}$ , com  $i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}$ , ou seja,

$$\vartheta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}, \quad i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (3.34)$$

Tendo em conta a linearidade do valor esperado, tem-se:

$$\gamma_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]} = \frac{E[\sum_{j=0}^k Z_{i,j}]}{E[S_{i,n}]} = \frac{\sum_{j=0}^k E[Z_{i,j}]}{E[S_{i,n}]} = \sum_{j=0}^k \frac{E[Z_{i,j}]}{E[S_{i,n}]}$$

$i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , pelo que, os **padrões de desenvolvimento para montantes acumulados** são convertíveis nos **padrões de desenvolvimento para montantes incrementais** e vice-versa, através das seguintes expressões [14]:

$$\gamma_k = \sum_{j=0}^k \vartheta_j, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (3.35)$$

e

$$\vartheta_k = \begin{cases} \gamma_0, & k = 0 \\ \gamma_k - \gamma_{k-1}, & k \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases} \quad (3.36)$$

De acordo com a literatura [14], os estimadores de  $S_{i,k}, i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}, i + k > N$  considerados no método de *Bornhuetter-Ferguson* apresentam a seguinte expressão:

$$\hat{S}_{i,k} = S_{i,N-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{N-i}) \hat{\alpha}_i, \quad i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}, i + k > N. \quad (3.37)$$

De modo a fazer-se a ligação entre o modelo proposto em (3.28) e o estimador apresentado em (3.37), repare-se que o modelo proposto se pode escrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{i,k} &= S_{i,N-i} + \sum_{j=1}^{k-N+i} Z_{i,N-i+j} = \\ &= S_{i,N-i} + \sum_{j=1}^{k-N+i} [S_{i,N-i+j} - S_{i,N-i+j-1}] = \\ &= S_{i,N-i} + \sum_{j=1}^{k-N+i} [(Y_{N-i+j} S_{i,n} + \varepsilon_{i,N-i+j}) - (Y_{N-i+j-1} S_{i,n} + \varepsilon_{i,N-i+j-1})] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S_{i,N-i} + \sum_{j=1}^{k-N+i} [(\gamma_{N-i+j} - \gamma_{N-i+j-1}) S_{i,n} + \varepsilon_{i,N-i+j} - \varepsilon_{i,N-i+j-1}] = \\
&= S_{i,N-i} + S_{i,n} \sum_{j=1}^{k-N+i} [\gamma_{N-i+j} - \gamma_{N-i+j-1}] + \sum_{j=1}^{k-N+i} [\varepsilon_{i,N-i+j} - \varepsilon_{i,N-i+j-1}] = \\
&= S_{i,N-i} + S_{i,n} (-\gamma_{N-i} + \gamma_k) - \varepsilon_{i,N-i} + \varepsilon_{i,k},
\end{aligned}$$

$i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{0,1, \dots, n\}, i+k > N$ , ou seja,

$$S_{i,k} = S_{i,N-i} + (\gamma_k - \gamma_{N-i}) S_{i,n} + \theta_{i,k}, \quad (3.38)$$

$i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{0,1, \dots, n\}, i+k > N$ , com  $\theta_{i,k} = \varepsilon_{i,k} - \varepsilon_{i,N-i}$ .

Aplicando o valor esperado à igualdade (3.38), verifica-se a seguinte relação:

$$E[S_{i,k}] = E[S_{i,N-i}] + (\gamma_k - \gamma_{N-i}) \alpha_i, \quad (3.39)$$

$i \in \{N-n, N-n+1, \dots, N\}, k \in \{0,1, \dots, n\}, i+k > N$ , uma vez que

$$E[\theta_{i,k}] = E[\varepsilon_{i,k} - \varepsilon_{i,N-i}] = E[\varepsilon_{i,k}] + E[-\varepsilon_{i,N-i}] = E[\varepsilon_{i,k}] - E[\varepsilon_{i,N-i}] = 0.$$

No método de *Borhuetter-Ferguson*, dado o estimador (3.37) e considerando (3.6), o estimador  $\hat{R}_i$ ,  $i \in \{N-n+1, N-n+2, \dots, N\}$  pode escrever-se em função de  $\hat{\gamma}_{N-i}$  e  $\hat{\alpha}_i$ , da seguinte forma, facilitando, assim, o seu cálculo [14]:

$$\hat{R}_i = (1 - \hat{\gamma}_{N-i}) \hat{\alpha}_i, \quad i \in \{N-n+1, N-n+2, \dots, N\}. \quad (3.40)$$

Dadas as definições (3.14) e (3.30) é possível estabelecer a seguinte relação [14]:

$$\varphi_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}, \quad k \in \{1,2, \dots, n\}. \quad (3.41)$$

Por sua vez, tem-se

$$\gamma_{k-1} = \gamma_k \frac{1}{\varphi_k} = \gamma_{k+1} \frac{1}{\varphi_{k+1}} \frac{1}{\varphi_k} = \dots = \gamma_n \prod_{j=k}^n \frac{1}{\varphi_j} = \prod_{j=k}^n \frac{1}{\varphi_j}, \quad k \in \{1,2, \dots, n\}, \quad (3.42)$$

pelo que, é possível definir  $\gamma_k, k \in \{0,1, \dots, n\}$  em função de  $\varphi_k, k \in \{1,2, \dots, n\}$  da seguinte forma [14]:

$$\gamma_k = \prod_{j=k+1}^n \frac{1}{\varphi_j}, \quad k \in \{1,2, \dots, n\}. \quad (3.43)$$

Deste modo, é possível obter estimativas de  $\gamma_k, k \in \{0,1, \dots, n\}$  recorrendo a informação contida na matriz de *run-off* da carteira em análise, de acordo com a seguinte expressão:

$$\hat{\gamma}_k = \prod_{j=k+1}^n \frac{1}{\hat{\varphi}_j}, \quad k \in \{1,2, \dots, n\}. \quad (3.44)$$

### 3.4 Exemplo de aplicação

Nesta secção, apresenta-se um exemplo onde são aplicados os métodos de *Chain Ladder* e *Bornhuetter-Ferguson*. Os dados utilizados são informação pública referente à empresa de seguros Fidelidade. O grupo Fidelidade conta com mais de 200 anos de história, sendo atualmente de um grupo bem consolidado e líder no mercado segurador português.

Considere-se, primeiramente, a matriz de *run-off* incremental apresentada na **Tabela 3.5** apenas com valores observados, que figura no Anexo do *Relatório sobre a Solvência e a Situação Financeira* do ano 2022 [18]. Os dados históricos apresentados correspondem aos montantes totais incrementais de indemnizações, referentes a sinistros ocorridos e pagos nos anos 2013, 2014, ..., 2022.

*Tabela 3.5 – Matriz de run-off incremental (Adaptado de Fidelidade Relatório sobre a Solvência e a Situação Financeira 2022 [18])*

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2013	401326	149240	25073	16958	9589	5743	3904	1322	2143	670
2014	386761	147670	31692	14588	7492	4632	430	3806	1375	
2015	398877	167655	31027	13167	8889	3116	5209	3419		
2016	450541	181257	68573	34634	10169	7110	3948			
2017	494920	211953	40080	16904	10682	5240				
2018	535184	213164	31580	14429	13645					
2019	549662	212548	30714	21944						
2020	509924	167853	29083							
2021	586157	229494								
2022	654239									

Na **Tabela 3.6** encontra-se a matriz de *run-off* anteriormente apresentada sob a forma acumulada, que serve de base à aplicação dos dois métodos abordados.

*Tabela 3.6 – Matriz de run-off acumulada (Adaptado de Fidelidade Relatório sobre a Solvência e a Situação Financeira 2022 [18])*

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2013	401326	550566	575639	592597	602186	607929	611833	613155	615298	615968
2014	386761	534431	566123	580711	588203	592835	593265	597071	598446	
2015	398877	566532	597559	610726	619615	622731	627940	631359		
2016	450541	631798	700371	735005	745174	752284	756232			
2017	494920	706873	746953	763857	774539	779779				
2018	535184	748348	779928	794357	808002					
2019	549662	762210	792924	814868						
2020	509924	677777	706860							
2021	586157	815651								
2022	654239									

Começando pelo método de *Chain Ladder*, é necessário calcular inicialmente as estimativas dos fatores de desenvolvimento para cada ano de desenvolvimento pretendido.

Tabela 3.7 – Fatores de desenvolvimento

Ano de desenvolvimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fator de Desenvolvimento	1,3897	1,0556	1,0279	1,0148	1,0078	1,0052	1,0047	1,0029	1,0011

Na **Tabela 3.7** pode observar-se que os fatores de desenvolvimento apresentam valores relativamente mais elevados nos primeiros anos de desenvolvimento e valores mais próximos de 1 nos últimos anos de desenvolvimento pretendidos, verificando-se ainda uma tendência decrescente. Tal significa que os montantes de indemnizações referentes a sinistros foram, maioritariamente, pagos nos primeiros anos de desenvolvimento.

Calculadas as estimativas dos fatores de desenvolvimento, é possível obter, pelo método de *Chain Ladder*, as estimativas dos montantes totais acumulados de indemnizações que serão pagos ao longo dos anos de desenvolvimento seguintes, para cada ano de ocorrência. Os valores obtidos encontram-se na **Tabela 3.8**.

Tabela 3.8 – Matriz de run-off acumulada estimada pelo método de *Chain Ladder*

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2013	401326	550566	575639	592597	602186	607929	611833	613155	615298	615968
2014	386761	534431	566123	580711	588203	592835	593265	597071	598446	599098
2015	398877	566532	597559	610726	619615	622731	627940	631359	633194	633884
2016	450541	631798	700371	735005	745174	752284	756232	759758	761967	762796
2017	494920	706873	746953	763857	774539	779779	783863	787518	789807	790667
2018	535184	748348	779928	794357	808002	814273	818538	822354	824745	825643
2019	549662	762210	792924	814868	826953	833370	837735	841641	844088	845007
2020	509924	677777	706860	726557	737332	743054	746946	750429	752610	753429
2021	586157	815651	860985	884976	898100	905070	909811	914053	916710	917708
2022	654239	909184	959716	986459	1001088	1008857	1014141	1018870	1021832	1022944

Por fim, é então possível calcular, para cada ano de ocorrência, as estimativas dos montantes totais de indemnizações por pagar, efetuando a diferença entre as estimativas dos montantes totais acumulados de indemnizações que serão pagos até ao final do ano de desenvolvimento 9 e os montantes totais acumulados de indemnizações que foram pagos até ao final do ano 2022. Os valores obtidos encontram-se na **Tabela 3.9**.

Tabela 3.9 – Montantes totais de indemnizações por pagar estimados pelo método de Chain Ladder

Ano de ocorrência	Montante total acumulado de indemnizações pago até ao final do ano 2022	Montante total acumulado de indemnizações que será pago até ao final do ano de desenvolvimento 9	Montante total de indemnizações por pagar
2013	615968	615968	0
2014	598446	599098	652
2015	631359	633884	2525
2016	756232	762796	6564
2017	779779	790667	10888
2018	808002	825643	17641
2019	814868	845007	30139
2020	706860	753429	46569
2021	815651	917708	102057
2022	654239	1022944	368705
<b>Total</b>	7181404	7767145	585741

Deste modo, para a matriz de *run-off* apresentada na **Tabela 3.6**, o montante total de indemnizações por pagar estimado pelo método de *Chain Ladder* é de 585 741€,

Passando ao método de *Bornhuetter-Ferguson*, é necessário que sejam conhecidas as estimativas *a priori* dos padrões de desenvolvimento para montantes acumulados, para cada ano de desenvolvimento pretendido, e dos valores esperados dos montantes totais acumulados de indemnizações que serão pagos até ao final do último ano de desenvolvimento pretendido, para cada ano de ocorrência.

As estimativas *a priori* dos padrões de desenvolvimento para montantes acumulados encontram-se na **Tabela 3.10** e foram calculadas a partir das estimativas dos fatores de desenvolvimento obtidas para o método de *Chain Ladder* (**Tabela 3.7**) mas poderiam ter sido obtidas com base noutra tipo de informação interna, ou com base em informação externa, ou numa combinação de ambas, como referido na secção 3.3.

Tabela 3.10 – Estimativas *a priori* dos padrões de desenvolvimento para montantes acumulados

Ano de desenvolvimento	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Padrão de desenvolvimento para montantes acumulados	0,6396	0,8888	0,9382	0,9643	0,9786	0,9862	0,9914	0,9960	0,9989	1

Na **Tabela 3.11** constam as estimativas *a priori* dos valores esperados dos montantes totais acumulados de indemnizações que serão pagos até ao final do ano de desenvolvimento 9.

Tabela 3.11 – Estimativas *a priori* dos valores esperados dos montantes totais acumulados de indemnizações que serão pagos até ao final do ano de desenvolvimento 9

Ano de ocorrência	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Valor esperado do montante total acumulado de indemnizações que será pago até ao final do ano de desenvolvimento 9	600000	620000	740000	800000	820000	850000	750000	900000	1000000

Conhecidas as estimativas *a priori*, é possível obter, pelo método de *Bornhuetter-Ferguson*, as estimativas dos montantes totais acumulados de indemnizações que serão pagos ao longo dos anos de desenvolvimento seguintes, para cada ano de ocorrência. Os valores obtidos encontram-se na **Tabela 3.12**.

Tabela 3.12 – Matriz de run-off acumulada estimada pelo método de *Bornhuetter-Ferguson*

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2013	401326	550566	575639	592597	602186	607929	611833	613155	615298	615968
2014	386761	534431	566123	580711	588203	592835	593265	597071	598446	599099
2015	398877	566532	597559	610726	619615	622731	627940	631359	633154	633828
2016	450541	631798	700371	735005	745174	752284	756232	759653	761795	762600
2017	494920	706873	746953	763857	774539	779779	783911	787610	789926	790796
2018	535184	748348	779928	794357	808002	814230	818466	822256	824630	825522
2019	549662	762210	792924	814868	827024	833480	837870	841800	844261	845185
2020	509924	677777	706860	726467	737193	742889	746763	750230	752402	753217
2021	586157	815651	860110	883638	896509	903345	907994	912154	914760	915739
2022	654239	903466	952864	979007	993308	1000903	1006069	1010693	1013587	1014674

Por último, é então possível calcular, para cada ano de ocorrência, as estimativas dos montantes totais de indemnizações por pagar, efetuando a diferença entre as estimativas dos montantes totais acumulados de indemnizações que serão pagos até ao final do ano de desenvolvimento 9 e os montantes totais acumulados de indemnizações que foram pagos até ao final do ano 2022. Os valores obtidos encontram-se na **Tabela 3.13**.

Tabela 3.13 – Montantes totais de indemnizações por pagar estimados pelo método de *Bornhuetter-Ferguson*

Ano de ocorrência	Montante total acumulado de indemnizações pago até ao final do ano 2022	Montante total acumulado de indemnizações que será pago até ao final do ano de desenvolvimento 9	Montante total de indemnizações por pagar
2013	615968	615968	0
2014	598446	599099	653
2015	631359	633828	2469
2016	756232	762600	6368
2017	779779	790796	11017
2018	808002	825522	17520
2019	814868	845185	30317
2020	706860	753217	46357
2021	815651	915739	100088
2022	654239	1014674	360435
<b>Total</b>	7181404	7756629	575225

Deste modo, para a matriz de *run-off* apresentada na **Tabela 3.6**, o montante total de indemnizações por pagar estimado pelo método de *Bornhuetter-Ferguson* é de 575 225€.

## Capítulo 4

### Análise de resíduos

Dados os modelos propostos no capítulo anterior para os métodos de *Chain Ladder* e *Bornhuetter-Ferguson*, seria importante averiguar se os pressupostos assumidos sobre as variáveis aleatórias que representam os erros se verificam. Para tal, são observados resíduos, no entanto, a forma como as variáveis aleatórias que representam os erros estão definidas e a própria estrutura das matrizes de *run-off* impõem uma limitação à obtenção destas observações, dificultando, assim, o estudo do seu comportamento. O presente capítulo apresenta duas formas possíveis de observação de alguns resíduos evidenciando, deste modo, a referida limitação.

Defina-se o erro de estimação de  $S_{i,k}$  de acordo com a seguinte expressão:

$$\eta_{i,k} = S_{i,k} - \hat{S}_{i,k}. \quad (4.1)$$

Designa-se por resíduo e represente-se por  $e_{i,k}$  o valor observado de  $\eta_{i,k}$ . Sejam  $s_{i,k}$  o valor observado de  $S_{i,k}$  e  $\hat{s}_{i,k}$  uma estimativa de  $S_{i,k}$  obtida por via do estimador  $\hat{S}_{i,k}$ . Deste modo tem-se:

$$e_{i,k} = s_{i,k} - \hat{s}_{i,k}. \quad (4.2)$$

A análise de resíduos permite validar os pressupostos sobre as variáveis aleatórias que representam os erros, na medida em que os resíduos podem ser usados como estimativas destas variáveis aleatórias, não observáveis. Por outras palavras, é necessário observar uma amostra de cada  $\eta_{i,k}$  para que os pressupostos assumidos sobre cada  $\varepsilon_{i,k}$  possam ser validados.

No método de *Chain Ladder*, as estimativas dos fatores de desenvolvimento são calculadas com base na informação contida na matriz de *run-off* e, para matrizes de *run-off* com diferentes anos de ocorrência, são obtidas diferentes estimativas destes parâmetros. Consequentemente, é possível obter diferentes estimativas de  $S_{i,k}$ . No método de *Bornhuetter-Ferguson*, a utilização de diferentes matrizes de *run-off* poderá ou não conduzir a diferentes estimativas de  $S_{i,k}$ , dependendo da forma como os estimadores *a priori* dos parâmetros usados no modelo estiverem definidos.

Considere-se uma matriz de *run-off* acumulada cujos elementos representam as variáveis aleatórias  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , para  $N$  e  $n$  fixos. Designa-se esta matriz pela matriz de *run-off* em estudo. Note-se que as variáveis  $S_{i,0}$ ,  $i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}$  são observadas no ano civil  $i$ , mas não existem matrizes de *run-off* que contenham estimativas destas variáveis.

Seja  $t$  o último ano de ocorrência pretendido em matrizes de *run-off* acumuladas que servem de auxílio na observação de resíduos. Seja  $\hat{s}_{i,k}^t$  uma estimativa de  $S_{i,k}$ , obtida por via do estimador  $\hat{S}_{i,k}$ , que consta na matriz de *run-off* acumulada cujo último ano de ocorrência pretendido é  $t$ . Definam-se os resíduos  $e_{i,k}^t$  de acordo com a seguinte expressão:

$$e_{i,k}^t = s_{i,k} - \hat{s}_{i,k}^t. \quad (4.3)$$

Existem, pelo menos, duas formas de obter uma amostra observada de alguns  $\eta_{i,k}$ ,  $i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ :

1. Através de  $2n + 1$  matrizes de *run-off* acumuladas de dimensão  $(n + 1) \times (n + 1)$  cujo último ano de ocorrência pretendido é  $t \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N + n\}$ . A **Figura 4.1** esquematiza duas matrizes de *run-off* com a mesma dimensão e que diferem no último e, conseqüentemente, no primeiro ano de ocorrência pretendidos.

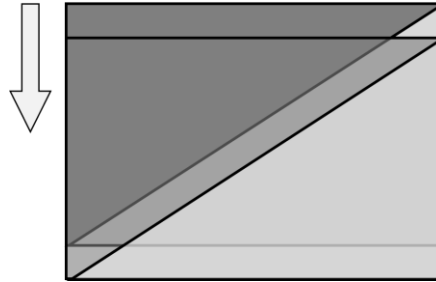


Figura 4.1 – Matrizes de *run-off* com a mesma dimensão e que diferem no primeiro e no último ano de ocorrência

Em cada uma destas matrizes:

- Como mencionado, o último ano de ocorrência pretendido corresponde a  $t$  e, conseqüentemente, o primeiro ano de ocorrência corresponde a  $t - n$ , conforme se encontra esquematizado na **Figura 4.2**;
- Os elementos representam as variáveis aleatórias  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{t - n, t - n + 1, \dots, t\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ;
- As variáveis  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{t - n, t - n + 1, \dots, t\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $i + k \leq t$  já foram observadas e as variáveis  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{t - n, t - n + 1, \dots, t\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $i + k > t$  são estimadas.

Denotem-se estas matrizes por  $M_{t-n,t}$ . Note-se que a matriz tal que  $t = N$  corresponde à matriz de *run-off* em estudo.

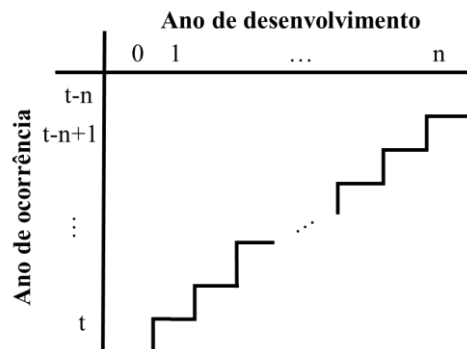


Figura 4.2 – Matriz de *run-off*  $M_{t-n,t}$

Nesta forma de observação de resíduos, é possível obter  $k$  estimativas de cada variável  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , que constam nas matrizes de *run-off*  $M_{i-n,i}$ ,  $M_{i+1-n,i+1}$ ,  $\dots$ ,  $M_{i+k-1-n,i+k-1}$ , sendo que uma das estimativas das variáveis  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i + k > N$  consta na matriz de *run-off* em estudo,  $M_{N-n,N}$ .

Como exemplo, assume-se que a matriz de *run-off*  $M_{2016,2019}$ , que se apresenta na **Tabela 4.1**, corresponde à matriz de *run-off* em estudo. Nesta matriz, as variáveis  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{2016, 2017, 2018, 2019\}$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $i + k \leq 2019$  já foram observadas e as variáveis  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{2016, 2017, 2018, 2019\}$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $i + k > 2019$  foram estimadas. Considerem-se as variáveis  $S_{2016,2}$  e  $S_{2019,3}$ .

Tabela 4.1 – Exemplo de matriz de *run-off* em estudo ( $M_{2016,2019}$ )

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento			
	0	1	2	3
2016	$S_{2016,0}$	$S_{2016,1}$	$S_{2016,2}$	$S_{2016,3}$
2017	$S_{2017,0}$	$S_{2017,1}$	$S_{2017,2}$	$\hat{S}_{2017,3}$
2018	$S_{2018,0}$	$S_{2018,1}$	$\hat{S}_{2018,2}$	$\hat{S}_{2018,3}$
2019	$S_{2019,0}$	$\hat{S}_{2019,1}$	$\hat{S}_{2019,2}$	$\hat{S}_{2019,3}$

Para a variável  $S_{2016,2}$  é possível obter duas estimativas, que constam nas matrizes de *run-off*  $M_{2013,2016}$  e  $M_{2014,2017}$ , apresentadas na **Tabela 4.2** e na **Tabela 4.3**, respectivamente.

Tabela 4.2 – Matriz de *run-off*  $M_{2013,2016}$

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento			
	0	1	2	3
2013	$S_{2013,0}$	$S_{2013,1}$	$S_{2013,2}$	$S_{2013,3}$
2014	$S_{2014,0}$	$S_{2014,1}$	$S_{2014,2}$	$\hat{S}_{2014,3}$
2015	$S_{2015,0}$	$S_{2015,1}$	$\hat{S}_{2015,2}$	$\hat{S}_{2015,3}$
2016	$S_{2016,0}$	$\hat{S}_{2016,1}$	$\hat{S}_{2016,2}$	$\hat{S}_{2016,3}$

Tabela 4.3 – Matriz de *run-off*  $M_{2014,2017}$

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento			
	0	1	2	3
2014	$S_{2014,0}$	$S_{2014,1}$	$S_{2014,2}$	$S_{2014,3}$
2015	$S_{2015,0}$	$S_{2015,1}$	$S_{2015,2}$	$\hat{S}_{2015,3}$
2016	$S_{2016,0}$	$S_{2016,1}$	$\hat{S}_{2016,2}$	$\hat{S}_{2016,3}$
2017	$S_{2017,0}$	$\hat{S}_{2017,1}$	$\hat{S}_{2017,2}$	$\hat{S}_{2017,3}$

Para a variável  $S_{2019,3}$  é possível obter três estimativas, que constam nas matrizes de *run-off*  $M_{2017,2020}$  e  $M_{2018,2021}$ , apresentadas na **Tabela 4.4** e na **Tabela 4.5**, respectivamente, e na matriz de *run-off* em estudo,  $M_{2016,2019}$ , (**Tabela 4.1**).

Tabela 4.4 – Matriz de run-off  $M_{2017,2020}$

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento			
	0	1	2	3
2017	$S_{2017,0}$	$S_{2017,1}$	$S_{2017,2}$	$S_{2017,3}$
2018	$S_{2018,0}$	$S_{2018,1}$	$S_{2018,2}$	$\hat{S}_{2018,3}$
2019	$S_{2019,0}$	$S_{2019,1}$	$\hat{S}_{2019,2}$	$\hat{S}_{2019,3}$
2020	$S_{2020,0}$	$\hat{S}_{2020,1}$	$\hat{S}_{2020,2}$	$\hat{S}_{2020,3}$

Tabela 4.5 – Matriz de run-off  $M_{2018,2021}$

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento			
	0	1	2	3
2018	$S_{2018,0}$	$S_{2018,1}$	$S_{2018,2}$	$S_{2018,3}$
2019	$S_{2019,0}$	$S_{2019,1}$	$S_{2019,2}$	$\hat{S}_{2019,3}$
2020	$S_{2020,0}$	$S_{2020,1}$	$\hat{S}_{2020,2}$	$\hat{S}_{2020,3}$
2021	$S_{2021,0}$	$\hat{S}_{2021,1}$	$\hat{S}_{2021,2}$	$\hat{S}_{2021,3}$

Para calcular o resíduo  $e_{2019,3}$ , é necessário obter o valor observado da variável  $S_{2019,3}$ , que consta na matriz de run-off  $M_{2019,2022}$ , apresentada na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Matriz de run-off  $M_{2019,2022}$

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento			
	0	1	2	3
2019	$S_{2019,0}$	$S_{2019,1}$	$S_{2019,2}$	$S_{2019,3}$
2020	$S_{2020,0}$	$S_{2020,1}$	$S_{2020,2}$	$\hat{S}_{2020,3}$
2021	$S_{2021,0}$	$S_{2021,1}$	$\hat{S}_{2021,2}$	$\hat{S}_{2021,3}$
2022	$S_{2022,0}$	$\hat{S}_{2022,1}$	$\hat{S}_{2022,2}$	$\hat{S}_{2022,3}$

Quando  $t = N + n$ , são conhecidos os valores das variáveis  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{N - 2n, N - 2n + 1, \dots, N + n\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $i + k \leq N + n$ . A Figura 4.3 esquematiza o conjunto de todas as variáveis observadas e estimadas e destaca as variáveis em estudo.

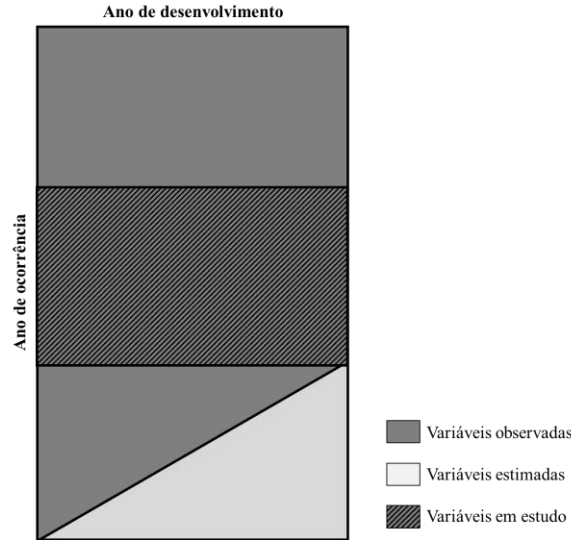


Figura 4.3 – Variáveis observadas, estimadas e em estudo

Desta forma, é possível observar uma amostra de cada  $\eta_{i,k}, i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  de dimensão  $k$ , ou seja, é possível obter  $k$  resíduos, para validar os pressupostos assumidos para cada  $\varepsilon_{i,k}, i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . No entanto, é necessário contruir  $2n + 1$  matrizes de *run-off* acumuladas de dimensão  $(n + 1) \times (n + 1)$  e, para tal, que as variáveis  $S_{i,k}, i \in \{N - 2n, N - 2n + 1, \dots, N + n\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}, i + k \leq N + n$  sejam observadas.

2. Através de  $n - 1$  matrizes de *run-off* acumuladas cujo primeiro ano de ocorrência pretendido é  $N - n$  e o último ano de ocorrência pretendido é  $t \in \{N - n + 1, \dots, N - 1\}$ . A **Figura 4.4** esquematiza a relação entre estas matrizes e a matriz de *run-off* em estudo.

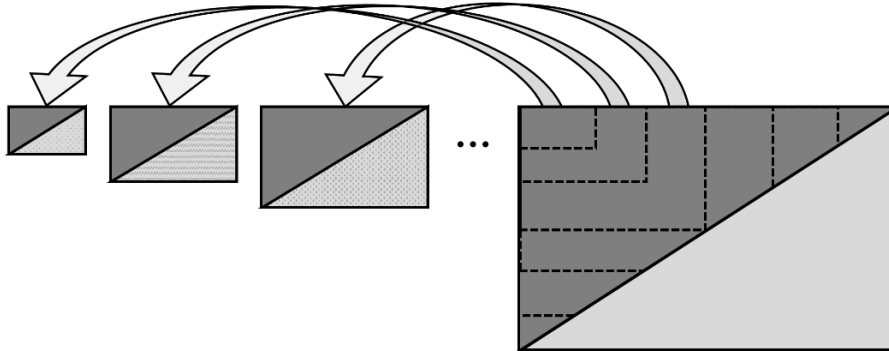


Figura 4.4 – Matrizes de *run-off* de diferentes dimensões que diferem no último ano de ocorrência e no último ano de desenvolvimento

Em cada uma destas matrizes:

- $N - n$  é primeiro ano de ocorrência pretendido e  $t \in \{N - n + 1, \dots, N - 1\}$  é o último ano de ocorrência pretendido, conforme se encontra esquematizado na **Figura 4.5**;
- Os elementos representam as variáveis aleatórias  $S_{i,k}, i \in \{N - n, \dots, t\}, k \in \{0, \dots, t - (N - n)\}$ ;
- As variáveis  $S_{i,k}, i \in \{N - n, \dots, t\}, k \in \{0, \dots, t - (N - n)\}, i + k \leq t$  já foram observadas e o seu valor observado consta na matriz de *run-off* em estudo e as variáveis  $S_{i,k}, i \in \{N - n, \dots, t\}, k \in \{0, \dots, t - (N - n)\}, i + k > t$  são estimadas.

Denotem-se estas matrizes por  $M_{N-n,t}$ .

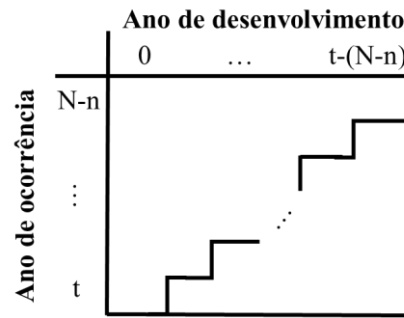


Figura 4.5 – Matriz de run-off  $M_{N-n,t}$

Nesta forma de observação de resíduos, é possível obter  $m = \min\{k, i + n - N\}$  estimativas de cada variável  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{N - n + 1, N - n + 2, \dots, N - 1\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i + k < N$ , que constam nas matrizes de run-off  $M_{N-n,t}$ ,  $t \in \{\max\{i, N - n + k\}, \dots, i + k - 1\}$ . Contudo, não é possível construir matrizes com estimativas das variáveis  $S_{N-n,k}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Para exemplificar, assumam-se que a matriz de run-off  $M_{2018,2022}$ , que se apresenta na **Tabela 4.7**, corresponde à matriz de run-off em estudo. Nesta matriz, as variáveis  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{2018, 2019, 2020, 2021, 2022\}$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $i + k \leq 2022$  já foram observadas e as variáveis  $S_{i,k}$ ,  $i \in \{2018, 2019, 2020, 2021, 2022\}$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $i + k > 2022$  foram estimadas. Considerem-se as variáveis  $S_{2020,2}$  e  $S_{2019,3}$ .

Tabela 4.7 – Exemplo de matriz de run-off em estudo ( $M_{2018,2022}$ )

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento				
	0	1	2	3	4
<b>2018</b>	$S_{2018,0}$	$S_{2018,1}$	$S_{2018,2}$	$S_{2018,3}$	$S_{2018,4}$
<b>2019</b>	$S_{2019,0}$	$S_{2019,1}$	$S_{2019,2}$	$S_{2019,3}$	$\hat{S}_{2019,4}$
<b>2020</b>	$S_{2020,0}$	$S_{2020,1}$	$S_{2020,2}$	$\hat{S}_{2020,3}$	$\hat{S}_{2020,4}$
<b>2021</b>	$S_{2021,0}$	$S_{2021,1}$	$\hat{S}_{2021,2}$	$\hat{S}_{2021,3}$	$\hat{S}_{2021,4}$
<b>2022</b>	$S_{2022,0}$	$\hat{S}_{2022,1}$	$\hat{S}_{2022,2}$	$\hat{S}_{2022,3}$	$\hat{S}_{2022,4}$

Para a variável  $S_{2020,2}$  é possível obter duas estimativas, que constam nas matrizes de run-off  $M_{2018,2020}$  e  $M_{2018,2021}$ , apresentadas na **Tabela 4.8** na **Tabela 4.9**, respetivamente.

Tabela 4.8 – Matriz de run-off  $M_{2018,2020}$

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento		
	0	1	2
<b>2018</b>	$S_{2018,0}$	$S_{2018,1}$	$S_{2018,2}$
<b>2019</b>	$S_{2019,0}$	$S_{2019,1}$	$\hat{S}_{2019,2}$
<b>2020</b>	$S_{2020,0}$	$\hat{S}_{2020,1}$	$\hat{S}_{2020,2}$

Tabela 4.9 – Matriz de run-off  $M_{2018,2021}$

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento			
	0	1	2	3
2018	$S_{2018,0}$	$S_{2018,1}$	$S_{2018,2}$	$S_{2018,3}$
2019	$S_{2019,0}$	$S_{2019,1}$	$S_{2019,2}$	$\hat{S}_{2019,3}$
2020	$S_{2020,0}$	$S_{2020,1}$	$\hat{S}_{2020,2}$	$\hat{S}_{2020,3}$
2021	$S_{2021,0}$	$\hat{S}_{2021,1}$	$\hat{S}_{2021,2}$	$\hat{S}_{2021,3}$

Para a variável  $S_{2019,3}$  apenas é possível obter uma estimativa, que consta na matriz de *run-off*  $M_{2018,2021}$ , apresentada na **Tabela 4.10**.

Tabela 4.10 – Matriz de run-off  $M_{2018,2021}$

Ano de ocorrência	Ano de desenvolvimento			
	0	1	2	3
2018	$S_{2018,0}$	$S_{2018,1}$	$S_{2018,2}$	$S_{2018,3}$
2019	$S_{2019,0}$	$S_{2019,1}$	$S_{2019,2}$	$\hat{S}_{2019,3}$
2020	$S_{2020,0}$	$S_{2020,1}$	$\hat{S}_{2020,2}$	$\hat{S}_{2020,3}$
2021	$S_{2021,0}$	$\hat{S}_{2021,1}$	$\hat{S}_{2021,2}$	$\hat{S}_{2021,3}$

Desta forma, é possível observar uma amostra de cada  $\eta_{i,k}, i \in \{N - n + 1, N - n + 2, \dots, N - 1\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, i + k < N$  de dimensão  $m = \min\{k, i + n - N\}$ , ou seja, é possível obter  $m$  resíduos, para validar os pressupostos assumidos para cada  $\varepsilon_{i,k}, i \in \{N - n + 1, N - n + 2, \dots, N - 1\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, i + k < N$ . Para tal, é necessário contruir  $n - 1$  matrizes de *run-off* acumuladas de dimensões  $2 \times 2, 3 \times 3, \dots, n \times n$  e que as variáveis  $S_{i,k}, i \in \{N - n, N - n + 1, \dots, N\}, k \in \{0, 1, \dots, n\}, i + k \leq N$  sejam observadas, ou seja, apenas são necessários os valores observados que estão contidos numa única matriz de *run-off* acumulada, a matriz de *run-off* em estudo.

Para as duas formas apresentadas, o número de resíduos que se podem obter para efeitos de validação dos pressupostos assumidos para cada  $\varepsilon_{i,k}$  é, no máximo,  $k$ , o que se torna claramente insuficiente para as variáveis referentes aos primeiros anos de desenvolvimento ou até para as variáveis referentes aos últimos anos de desenvolvimento, consoante o  $n$  pretendido. Para além disso, a primeira forma apresentada envolve um histórico de dados relativamente elevado e a construção de inúmeras matrizes de *run-off* e a segunda forma apresentada apenas permite obter estimativas das variáveis  $\varepsilon_{i,k}, i \in \{N - n + 1, N - n + 2, \dots, N - 1\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, i + k < N$ . Deste modo, pelo menos para as formas de observação de resíduos mencionadas, torna-se inviável a validação dos pressupostos assumidos nos modelos propostos, o que, por seu turno, impossibilita uma comparação estatística entre ambos.

# Capítulo 5

## Conclusões

A atividade seguradora é vista aos olhos da sociedade como uma forma justa de suportar perdas monetárias associadas a pessoas e bens em caso de infortúnio. As indemnizações pagas pelas seguradoras à sociedade são a devolução dos prémios recebidos dos tomadores de seguro. Por sua vez, estes podem ser investidos e contribuir, deste modo, para o financiamento da economia, pelo que, o nível de desenvolvimento da atividade seguradora pode ainda servir como um indicador de riqueza de um país. Dada a importância desta atividade para a economia e para a sociedade, torna-se fundamental uma gestão eficaz, que passa pela constituição de provisões adequadas.

Os métodos clássicos de *Chain Ladder* e *Bornhuetter-Ferguson* são técnicas atuariais amplamente utilizadas na estimação de provisões para sinistros ocorridos. Para os dois métodos referidos, foram contruídos modelos tendo por base os parâmetros e os estimadores definidos na literatura, de forma a manter a concordância entre todos os elementos. Nos dois modelos, consideraram-se erros aleatórios com valor esperado zero, variância constante, desconhecida, e não correlacionados.

No método de *Chain Ladder*, para além dos pressupostos assumidos sobre os erros, foi necessário considerar um pressuposto adicional de covariância nula entre cada variável que representa o montante total acumulado de indemnizações pago no ano de ocorrência dos sinistros e os erros aleatórios que estão definidos no modelo ao longo dos anos de desenvolvimento, para o referido ano de ocorrência. Este pressuposto, que faz algum sentido, permitiu assegurar a coerência entre os parâmetros e os estimadores definidos na literatura.

Como forma de medir a utilidade dos modelos propostos, seria importante validar os pressupostos assumidos, no entanto, pelo facto dos erros aleatórios estarem definidos para cada ano de ocorrência e para cada ano de desenvolvimento e devido à estrutura das matrizes de *run-off*, não existe suficiência estatística para inferir sobre estas variáveis, o que, por sua vez, inviabiliza uma comparação entre os métodos.

O trabalho futuro poderá passar por se efetuar uma análise aos erros aleatórios por classes (ano de ocorrência e ano de desenvolvimento), como forma de avaliar se estas variáveis deveriam ser redefinidas, dependendo apenas, por exemplo, do ano de desenvolvimento. Esta consideração pode fazer algum sentido, dado que o princípio subjacente a estes métodos assenta na existência de um padrão ao longo dos anos de desenvolvimento que se verifica para qualquer ano de ocorrência. Por outro lado, poderá averiguar-se se estas variáveis deveriam ser consideradas independentes do ano de ocorrência e do ano de desenvolvimento, tratando-se dos erros associados a uma determinada matriz de *run-off*. Deste modo, seria possível obter-se uma maior significância estatística para a validação dos pressupostos assumidos. Para além disso, pode ainda ser importante efetuar-se uma análise de sensibilidade, verificando os impactos causados pela variação dos parâmetros dos modelos.

## Referências bibliográficas

- [1] L. Louceiro, “A importância social e económica da atividade seguradora,” 12 julho 2018. [Online]. <https://pt.linkedin.com/pulse/import%C3%A2ncia-social-e-econ%C3%B3mica-da-atividade-luis-louceiro>. [Acedido em 2023].
- [2] “REGULAMENTO (UE) 2021/2036 DA COMISSÃO de 19 de novembro de 2021 que altera o Regulamento (CE) n.o 1126/2008, que adota determinadas normas internacionais de contabilidade nos termos do Regulamento (CE) n.o 1606/2002 do Parlamento Europeu e do Conselho, n.º,” *Jornal Oficial da União Europeia*, 23 novembro 2021.
- [3] ASF, “Guia de Seguros e Fundos de Pensões,” 2015. [Online]. <https://www.asf.com.pt/NR/exeres/DC513DEB-5E88-436A-8301-9D1B8E0C27D2,frameless.htm?NRMODE=Published>. [Acedido em 2023].
- [4] CNSeg, “A Atividade Seguradora: Fundamentos, Conceito, História e Operação,” 5 junho 2018. [Online]. <https://cnseg.org.br/publicacoes/a-atividade-seguradora-fundamentos-conceito-historia-e-operacao.html>. [Acedido em 2023].
- [5] C. Mattos, “Mutualismo nos Contratos de Seguro,” 20 abril 2021. [Online]. <https://pt.linkedin.com/pulse/mutualismo-nos-contratos-de-seguro-carlos-mattos>. [Acedido em 2023].
- [6] L. C. d. Nascimento, “História do Seguro,” 11 fevereiro 2022. [Online]. <https://historiadosseguro.com/sobre/>. [Acedido em 2023].
- [7] J. F. Alença, “A importância económica e social da atividade seguradora,” *Diário Económico*, p. 3, 22 maio 2014.
- [8] ASF, “Estatísticas de Seguros 2022,” 2023. [Online]. <https://www.asf.com.pt/estat%C3%ADsticas/seguros/estat%C3%ADsticas-anuais/estat%C3%ADsticas-de-seguros>. [Acedido em 2023].
- [9] Memória do Seguro, “Os seguros em números: O setor segurador português,” [Online]. <https://www.memoriadosseguro.pt/seguros-em-numeros/>. [Acedido em 2023].
- [10] M. Fragoso, “As três Demonstrações Financeiras e a sua relação: Balanço, Demonstração dos Resultados e Fluxos de Caixa,” 22 julho 2022. [Online]. <https://pt.linkedin.com/pulse/tr%C3%AAs-demonstra%C3%A7%C3%B5es-financeiras-e-sua-rela%C3%A7%C3%A3o-balan%C3%A7o-dos-fragoso>. [Acedido em 2023].
- [11] S. K. Herath e N. Albarqi, “Financial Reporting Quality: A Literature Review,” março 2017. [Online]. <https://www.ijbmcnet.com/images/Vol2No2/1.pdf>. [Acedido em 2023].

- [12] H. Borginho, “Provisões para Sinistros Não Vida Metodologias de Estimação,” agosto 2003. [Online].  
<https://www.asf.com.pt/Biblioteca/Catalogo/winlibsrch.aspx?skey=&pesq=2&doc=13342>.  
[Acedido em 2023].
- [13] I. M. F. Cordeiro, “Constituição de reservas para sinistros ocorridos e ainda não participados ou não encerrados - Análise de alguns métodos de previsão,” 1991.
- [14] M. Radtke, K. D. Schmidt e A. Schnaus, *Handbook on Loss Reserving*.
- [15] T. F. Tarbell, “Incurred but not reported claim reserves,” em *Proceedings of the casualty actuarial society*, vol. 59, Boston, Massachusetts, 1972.
- [16] R. L. Bornhuetter e R. E. Ferguson, “The actuary and IBNR,” em *Proceedings of the casualty actuarial society*, vol. 59, Boston, Massachusetts, 1972.
- [17] K. D. Schmidt, “Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles: A Unifying Survey,” *Casualty Actuarial Society Forum*, 2006.
- [18] Fidelidade, “Relatório sobre a Solvência e a Situação Financeira 2022,” 10 abril 2023. [Online].  
[https://www.fidelidade.pt/PT/a-fidelidade/investidores/informa%c3%a7%c3%a3o-financeira/Documents/Relatorio\\_sobre\\_Solvencia\\_Situacao\\_Financeira-PT/2022/Fidelidade\\_SFCR\\_PT\\_2022.pdf](https://www.fidelidade.pt/PT/a-fidelidade/investidores/informa%c3%a7%c3%a3o-financeira/Documents/Relatorio_sobre_Solvencia_Situacao_Financeira-PT/2022/Fidelidade_SFCR_PT_2022.pdf). [Acedido em 2023].