PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 2.º ANO DE ESCOLARIDADE: GENERALIZAÇÃO DE SEQUÊNCIAS

Teresa Ramos
Agrupamento de Escolas da Boa Água
teresa.ramos@gmail.com

Ana Maria Boavida
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
ana.boavida@ese.ips.pt

Hélia Oliveira
Instituto da Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo

É inquestionável a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade. Neste âmbito, a exploração de sequências é um meio privilegiado de promover o pensamento funcional, permitindo a expressão de generalizações em linguagem natural. Neste texto analisa-se a actividade de alunos do 2.º ano numa tarefa de exploração de uma sequência crescente. Os resultados indiciam que a maior parte resolve com facilidade questões de generalização próxima usando estratégias de representação e contagem. Nas de generalização distante sentem mais dificuldades e recorrem a outras estratégias resultantes da forma como visualizam as figuras da sequência.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, Generalização, Pensamento funcional, Sequências.

Introdução

Considera-se, actualmente, que a álgebra é, sobretudo, um modo de pensar, um método para ver e expressar relações que proporciona instrumentos poderosos para entender o mundo e que, por isso, deve ser um dos objectivos a privilegiar em todos os níveis de ensino (Kieran, 2007). Esta ideia encontra eco nas actuais orientações curriculares para o ensino da Matemática. Em Portugal, o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), salienta que é essencial desenvolver o pensamento algébrico desde os primeiros anos, o que pressupõe a realização de actividades de observação, descrição e construção de sequências numéricas e/ou pictóricas, a identificação e descrição de relações e a generalização de regularidades. A nível internacional, o NCTM(2007) considera a álgebra como um tema transversal, sublinhando o seu potencial no estabelecimento de relações com outros temas matemáticos. A introdução das ideias algébricas no 1.º ciclo do ensino básico é, assim, um tema integrador que traz significado, profundidade e coerência ao currículo.

Esta comunicação, que se insere num estudo mais amplo, tem como objectivo analisar estratégias de generalização usadas por alunos do 2.º ano de escolaridade numa tarefa de exploração de uma sequência crescente, bem como os tipos de generalização e dificuldades que emergem do seu trabalho.

Pensamento algébrico nos primeiros anos

Existe algum consenso em torno da ideia de que o pensamento algébrico se manifesta e desenvolve quando os alunos estabelecem generalizações a partir da observação e análise de dados numéricos, padrões, regularidades ou relações matemáticas e expressam essas generalizações usando recursos diversos, nomeadamente a linguagem natural, diagramas, tabelas, fórmulas ou símbolos matemáticos (Kaput, 2008).

Nos primeiros anos de escolaridade é através do estudo de sequências, regularidades e padrões, bem como das relações numéricas associadas aos números, operações e suas propriedades, que se favorece a iniciação ao pensamento algébrico, valorizando-se duas das três vertentes consideradas por Kaput (2008): a álgebra como aritmética generalizada e a álgebra como o estudo das funções, relações e (co)variação.

A álgebra como aritmética generalizada baseia-se no carácter potencialmente algébrico da aritmética que, se for explorado explicita e sistematicamente, permite expôr a sua generalidade; o pensamento funcional envolve a generalização através da ideia de função encarada como a descrição da variação (Canavarro, 2009). Este pensamento inicia-se, amiúde, com a generalização de padrões, estabelecendo conexões entre padrões geométricos e numéricos para descrever relações funcionais.

Ponte, Branco e Matos (2009) consideram quatro tipos de sequências: *pictóricas*, *numéricas*, *repetitivas* e *crescentes*, sendo esta a nomenclatura adoptada neste texto. Os autores sublinham que, nos primeiros anos de escolaridade, é importante que os alunos, de forma articulada com o desenvolvimento do sentido de número, elaborem sequências numéricas e pictóricas de acordo com uma dada lei de formação e as generalizem usando linguagem natural.

Quando, no ensino básico, se pretende que a álgebra esteja num plano central, há três aspectos que, segundo Darrel e Balti (2008), importa ter em conta: utilizar expressões numéricas não resolvidas que permitem a análise dos números e operações; estender o problema a números grandes para que os alunos considerem a relação entre entradas e saídas; e utilizar contextos representacionais – interacções e discursos construídos em torno de uma representação específica. Este último aspecto remete para a importância de se dedicar uma atenção especial a diversos modos de representar ideias e conceitos matemáticos bem como às conexões entre representações. Neste âmbito, Tripathi (2008) salienta a relevância de se considerarem representações concretas, verbais, simbólicas, contextuais e visuais de modo a retratar os vários aspectos de um conceito. Nas representações visuais inclui "formas como tabelas ou diagramas organizados, modelos concretos, gráficos, metáforas, imagens dinâmicas ou em movimento, e "word pictures" (a descrição em palavras do que estamos a tentar fazer)" (p. 440).

Um aspecto central do pensamento algébrico é a generalização que envolve a extensão deliberada do raciocínio ou comunicação para além do(s) caso(s) considerado(s), identificando e expondo explicitamente o que é comum, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas e as relações através de e entre eles (Canavarro, 2009, cit. Kaput).

Focando-se nos primeiros passos para a generalização em sequências de crescimento pictóricas, Ursini (1991, cit. Mason et al.) refere quatro etapas: "ver" – apreender mentalmente um padrão ou uma regularidade; "dizer" – articular a percepção em palavras; "gravar" – utilizar símbolos para formular a generalização; e "testar" – verificar a validade da formulação. Para generalizar, as crianças precisam de compreender que existem duas representações da mesma situação (a visual e a numérica), ser capaz de passar de uma representação para outra, apreender a regra de crescimento evidenciada em ambas e perceber que se trata da mesma regra. Quando conseguem construir uma nova representação que identificam com a original, facilita-se a descoberta de regularidades que permitem expressar a generalização.

Quanto ao tipo de generalização, Stacey (1989) distingue a próxima e a distante. A "generalização próxima" remete para uma questão que pode ser resolvida passo a passo por desenho ou contagem; a "generalização distante" refere-se a questões que vão além dos limites práticos razoáveis de uma abordagem passo a passo. A autora identifica quatro métodos de generalização:

- *De contagem* – contar a partir de um desenho;
- *Da diferença* – calcular a diferença entre dois termos consecutivos e assumir implicitamente que a adição sucessiva de um mesmo número (a diferença) se traduz num termo geral que é múltiplo desse número;
- *Do objecto inteiro* – assumir que um termo de uma dada ordem é múltiplo de um termo de ordem inferior;
- *Linear* – reconhecer que tanto a multiplicação como a adição estão envolvidas e que importa considerar a ordem das operações, ou seja, usar implicitamente, um modelo linear.

Estes métodos têm significativas semelhanças com as estratégias de generalização referidas por Ponte, Branco e Matos (2009), embora estes autores usem, por vezes, designações e caracterizações um pouco diferentes.

Metodologia

Este estudo, de cunho interpretativo, foi realizado no âmbito de uma experiência de ensino. Os participantes são 25 alunos de uma turma do 2.º ano de escolaridade, composta por 13 rapazes e 12 raparigas, entre os 7 e os 9 anos.

Neste texto analisar-se-á o modo como os alunos resolveram a tarefa *As mesas do restaurante da Carolina* (anexo I). Foram analisados os documentos produzidos pelos alunos e a gravação em vídeo das duas aulas em que a tarefa foi explorada. A investigadora (primeira autora) assumiu o papel de observadora-participante, coadjuvando e apoiando a professora titular da turma. Em algumas ocasiões desempenhou o papel de professora, uma medida que foi acordada.

A experiência de ensino decorreu em 2010/11, em 14 aulas de 90 minutos cada, nas quais foram exploradas 12 tarefas organizadas numa sequência previamente preparada com a professora. Num primeiro momento (26 Nov. a 7 de Dez.), foram apresentadas 5 tarefas com as quais se pretendeu trabalhar aspectos do pensamento relacional. No segundo momento (26 Jan. a 15 de Mar.), foram exploradas 7 tarefas com sequências, pretendendo-se trabalhar aspectos do pensamento funcional e da generalização. O presente texto incide apenas nos dados referentes ao segundo momento.

Ao se propor a tarefa *As mesas do restaurante da Carolina*, os alunos já tinham analisado sequências pictóricas crescentes, identificado regularidades com base na análise de representações visuais e tentado generalizar, exprimindo as regularidades em linguagem corrente. No anexo II apresentam-se as tarefas exploradas anteriormente a esta e respectivos objectivos.

As mesas do restaurante da Carolina

A exploração desta tarefa decorreu em duas fases: uma em que os alunos trabalharam sobretudo individualmente; outra em que se analisou e discutiu colectivamente o trabalho realizado, visando a explicação das expressões encontradas e a formulação de generalizações. Neste texto serão objecto de análise as produções escritas dos alunos, realizadas durante a fase de trabalho individual, recorrendo-se pontualmente a episódios de sala de aula para ilustrar os seus raciocínios.

O enunciado da tarefa tem 8 questões que, no seu conjunto, permitem trabalhar os aspectos indicados por Darrel e Balti (2008), anteriormente referidos.

Apresentação da tarefa

A professora (P) começa por chamar a atenção para a primeira figura e pergunta quantas mesas e cadeiras a compõem e como estão dispostas. Este foi o mote para os alunos explicarem diferentes processos de contagem:

Episódio 1

P: Como estão dispostas as cadeiras?
CPP: Uma em cada ponta.
G: Uma em cima, uma em baixo, uma no lado direito, uma no lado esquerdo.

(...)

P: Explica como é que contaste?
T: É uma conta 3 + 1
P: Três mais um como?
T: Pus uma no lado esquerdo, uma no lado de cima e outra do lado de baixo, é 3 e juntei uma do lado direito.
P: Eu ainda queria outra maneira diferente... Margarida!
MC: Na de baixo... separámos a mesa e pusemos mais uma cadeira.

(...)

RR: Eu pus 2 em recta e 2 deitadas

Como é visível no episódio, a professora tenta focar a atenção dos alunos nas representações visuais e incentivar a sua análise, aspecto essencial para que posteriormente consigam generalizar. Constata-se que muitos descobrem processos de contagem eficazes, associados à figura. Pouco depois os alunos são encaminhados para o trabalho individual.

Análise da actividade dos alunos

Questões 1 e 2. Pretendia-se que os alunos analisassem as figuras apresentadas e descrevessem o processo de contagem do número de cadeiras. Cinco, apesar de traçarem linhas a unir cadeiras, contam-nas, uma a uma, a partir da representação visual (fig. 1).

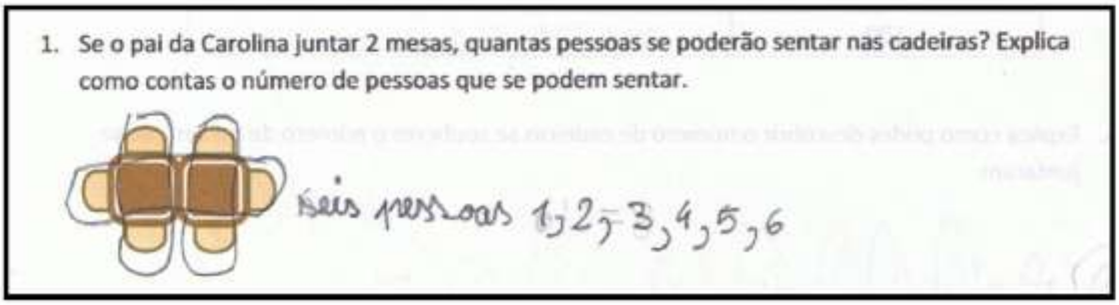


Fig. 1 – Resolução da questão 1 (JJ)

Cerca de 19 alunos recorrem a estratégias de contagem baseadas na visualização e interpretação da figura, sendo possível distinguir quatro processos de contagem diferentes.

1. Cinco retiram cadeiras na zona em que as mesas se unem, as mesas dos extremos ficam com três e as interiores com duas (figs. 2 e 3).

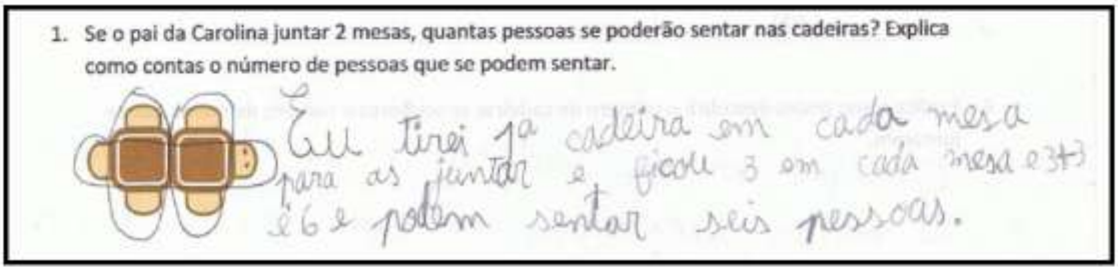


Fig. 2 – Resolução da questão 1 (RA)

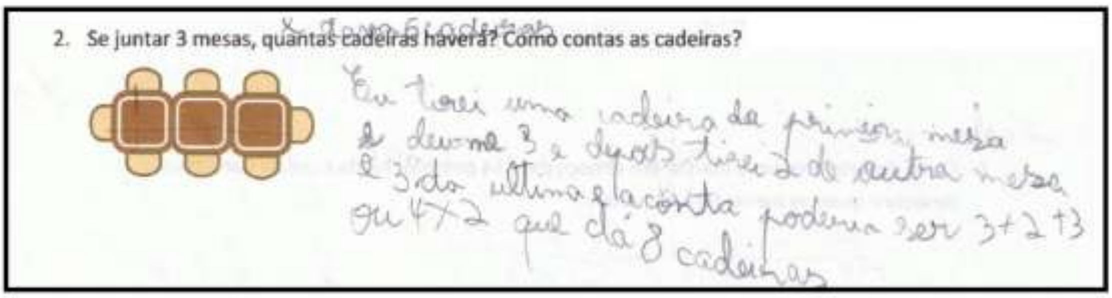


Fig. 3 – Resolução da questão 2 (MC)

2. Cerca de onze agrupam as cadeiras em três linhas: a de cima; a de baixo; e a do meio, formada pelas cadeiras dos lados (figs. 4 e 5).

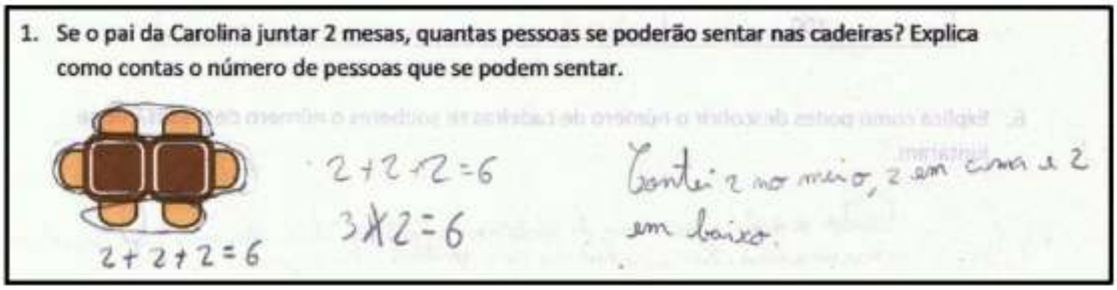


Fig. 4 – Resolução da questão 1 (G)

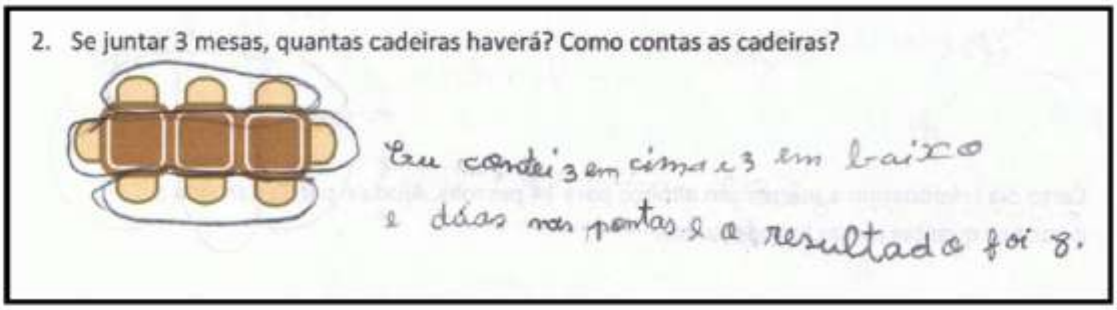


Fig. 5 – Resolução da questão 2 (RR)

3. Um utiliza um processo semelhante ao anterior, mas sem agrupar as duas cadeiras laterais (fig. 6).

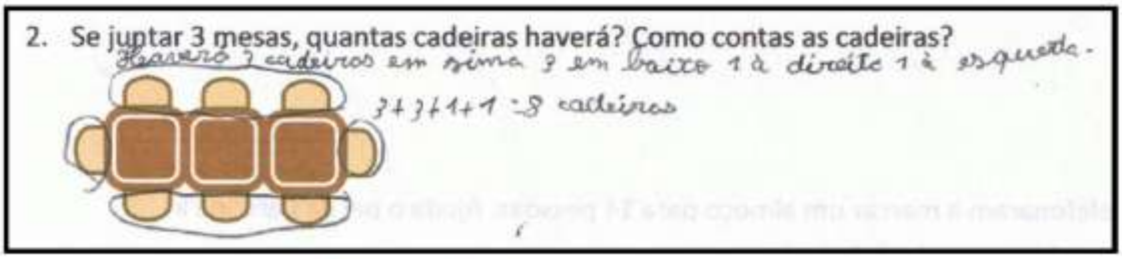


Fig. 6 – Resolução da questão 2 (MA)

4. Três consideram que cada mesa tem duas cadeiras, uma em cima e outra em baixo, a que acrescem as laterais (fig. 7).

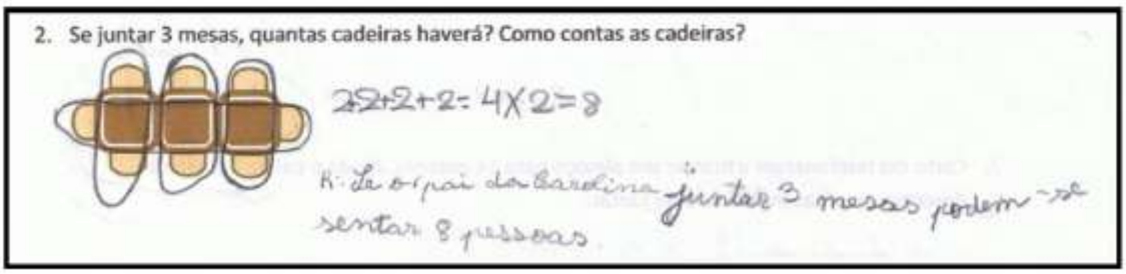
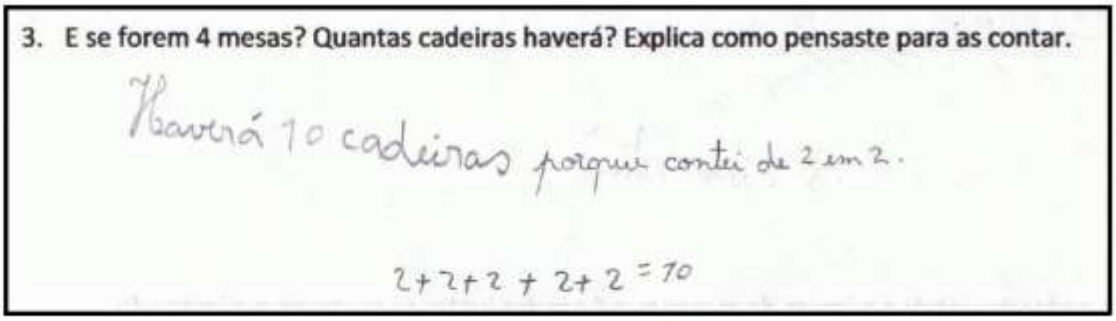


Fig. 7 – Resolução da questão 2 (CPP)

Nestas duas questões apenas um aluno apresenta uma resposta incompreensível, pelo que não foi possível classificá-la.

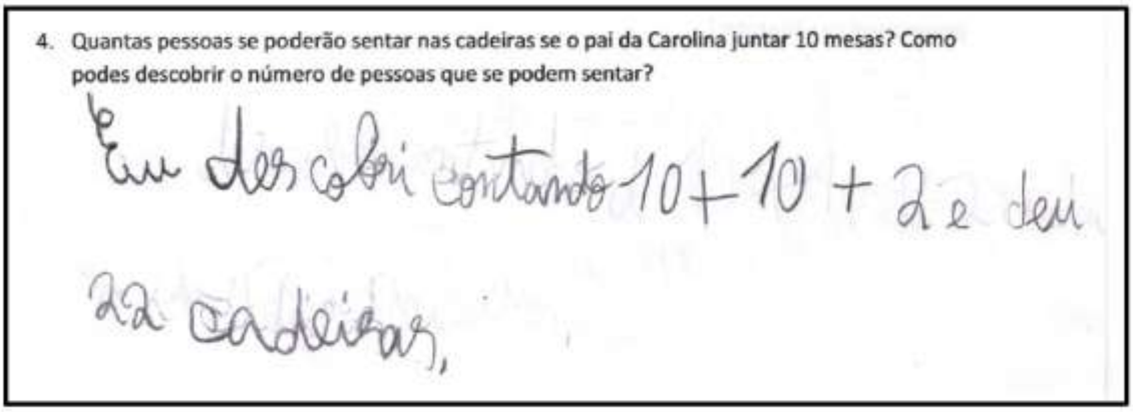
Questões 3 e 4. Pretendia-se que os alunos estabelecessem relações entre o número de cadeiras e o número de mesas com base nas figuras visualizadas nas questões anteriores, transferindo essas relações para as novas situações. Três respondem sem desenhar as figuras, embora refiram um processo de contagem associado a uma imagem mental, resultante da forma como visualizaram a disposição das cadeiras nas questões anteriores (figs. 8 e 9).


3. E se forem 4 mesas? Quantas cadeiras haverá? Explica como pensaste para as contar.

Haverá 10 cadeiras porque contei de 2 em 2.

2+2+2 + 2+2 = 10

Fig. 8 – Resolução da questão 3 (G)


4. Quantas pessoas se poderão sentar nas cadeiras se o pai da Carolina juntar 10 mesas? Como podes descobrir o número de pessoas que se podem sentar?

Eu descobri contando 10+10 + 2 e deu 22 cadeiras,

Fig. 9 – Resolução da questão 4 (LF)

Os restantes alunos recorrem a processos de representação e contagem, desenhando primeiro a figura representativa da situação. Vários mantiveram o processo usado nas duas primeiras questões, mas três substituem-no por outro mais eficaz. Entre estes estão MC e RA. Na figura 10 pode observar-se como MC, apesar de descrever o processo de contagem anterior (retirar as cadeiras na união das mesas), recorre a uma representação com simbologia matemática que traduz os pares de cadeiras existentes.

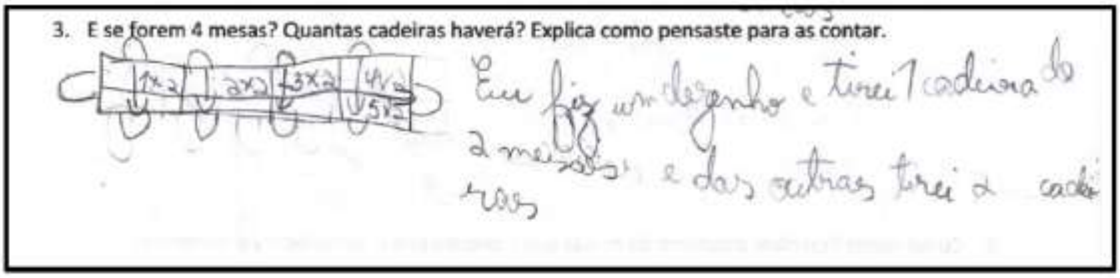


Fig. 10 – Resolução da questão 3 (MC)

Na questão 4 já só adopta o processo mais eficaz. Apesar da sua estratégia ser muito apoiada nos contornos visuais da figura, faz a ponte entre o que visualiza e conhecimentos anteriores, apercebendo-se que pode recorrer aos múltiplos de 2 e à tabuada (fig. 11).

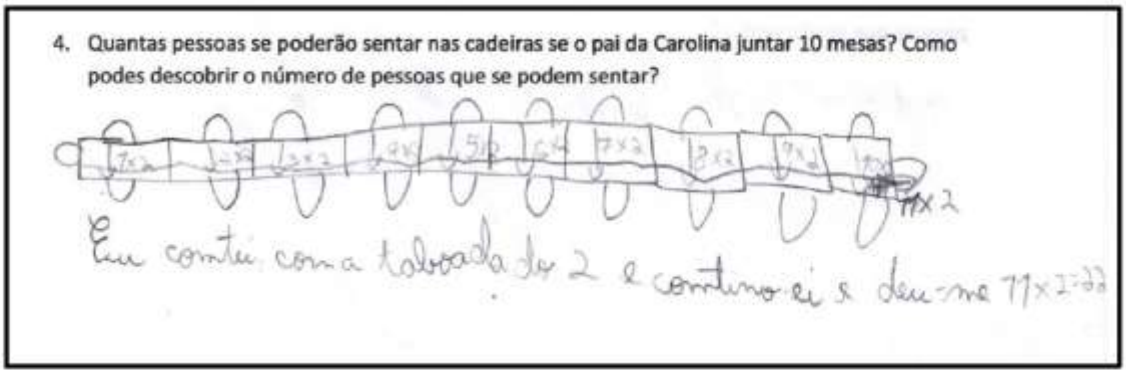


Fig. 11 – Resolução da questão 4 (MC)

RA, que na questão 3 mantém o processo de contagem usado nas primeiras questões, na 4 recorre a outro processo resultante de uma nova forma de visualizar a disposição das cadeiras, que aparenta ser mais facilitador, e agrupa-as em linhas horizontais. A figura 12 mostra a sua descrição do processo, a representação visual e os cálculos que faz.

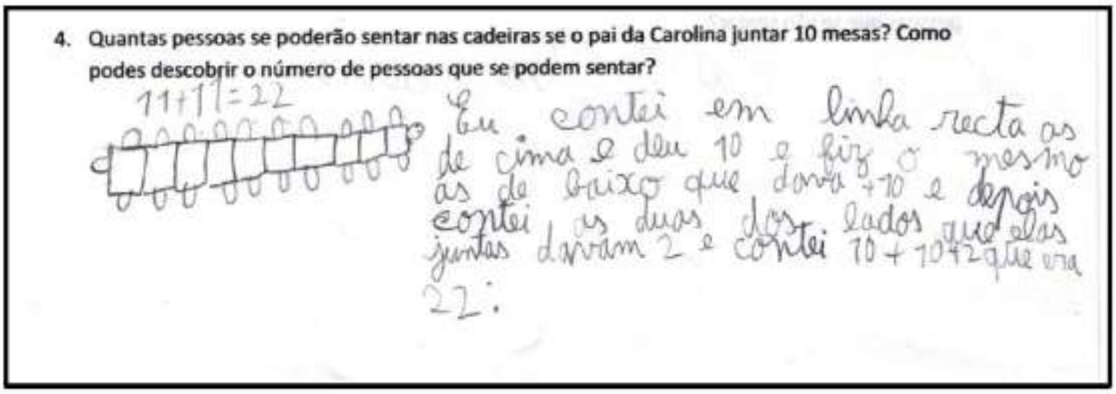
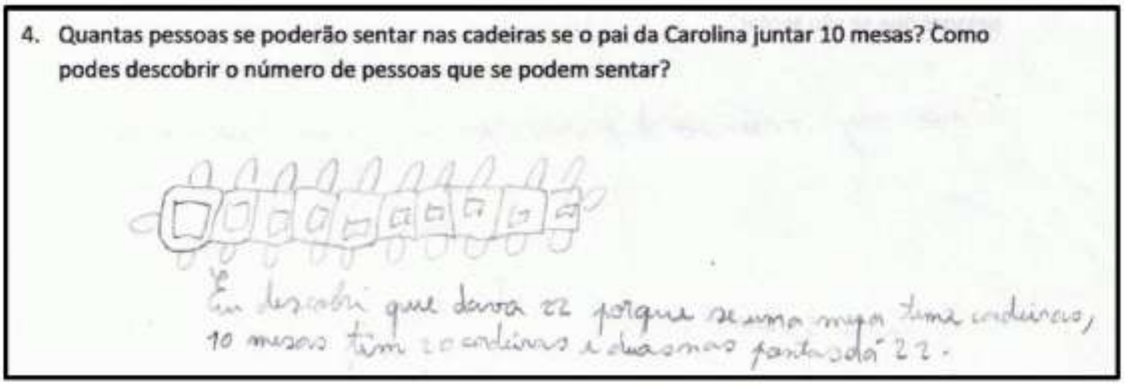


Fig. 12 – Resolução da questão 4 (RA)

Nas quatro primeiras questões, quase todos os alunos recorrem a explicações geométricas no sentido atribuído por Stacey (1989), que tem a ver com a disposição no plano dos elementos que constituem a figura – representação visual – por vezes associadas a cálculos. Bastantes identificam um padrão de crescimento na sequência pictórica e alguns associam-lhe uma regularidade numérica, exprimindo uma relação entre o número de cadeiras e o de mesas. Na figura 13 é evidente o raciocínio proporcional efectuado por G e o reconhecimento da necessidade de acrescentar duas cadeiras, ou seja, utilizando uma estratégia linear esboça a lei de formação.


4. **Quantas pessoas se poderão sentar nas cadeiras se o pai da Carolina juntar 10 mesas? Como podes descobrir o número de pessoas que se podem sentar?**

Eu descobri que dava 22 porque se uma mesa tem 2 cadeiras, 10 mesas têm 20 cadeiras e duas nas pontas dá 22.

Fig. 13 – Resolução da questão 4 (G)

Questão 5. Solicitava-se o preenchimento de uma tabela, registando o nº de mesas e o de cadeiras. Pretendia-se, ainda, que os alunos escrevessem uma expressão para o número de cadeiras, visando facilitar a identificação da relação funcional entre as duas variáveis em jogo e enunciar a generalização. No entanto, a maior parte revela dificuldade em compreender o que se pretende. Com efeito, registam decomposições diversas dos números sem atender ao padrão visualizado (fig. 14). Outros limitam-se a indicar o número de cadeiras evidenciando uma estratégia da diferença, resultante de uma abordagem recursiva: “Contamos sempre de 2 em 2” (LF).

5. **Completa a tabela, escrevendo uma expressão que indique o número de cadeiras:**

Número de mesas	Número de cadeiras
1	4 2+2=4
2	6 3+3=6
3	8 4+4=8
4	10 5+5=10
5	12 6+6=12
20	14 7+7=14
(...)	
100	202 ~~101~~ 100+102=202

Fig. 14 – Resolução da questão 5 (CPP)

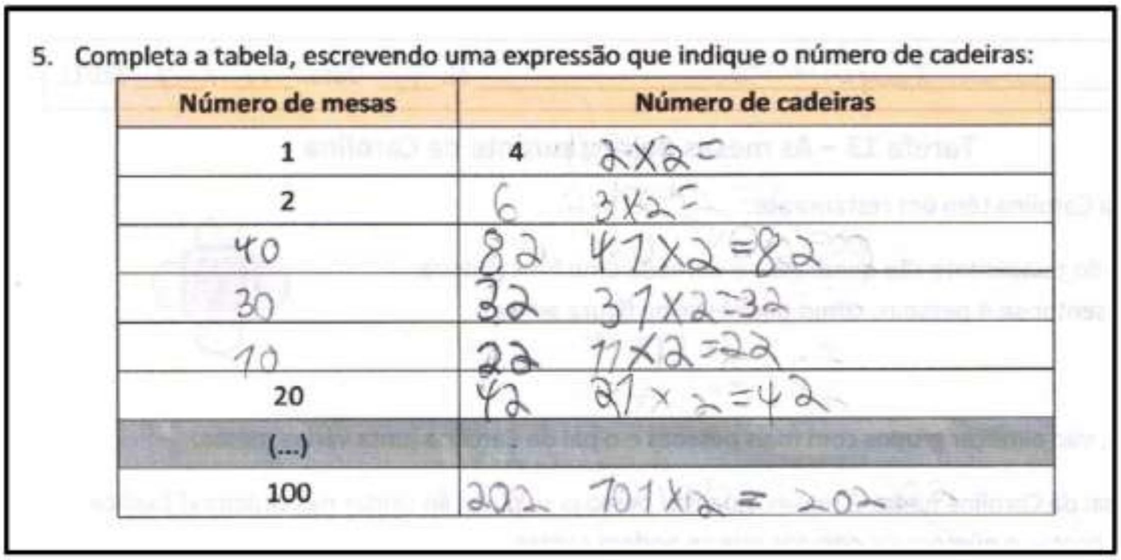
Apenas duas alunas (G e MC) completam a tabela com expressões que traduzem a forma como contaram apoiada na representação visual das primeiras figuras da sequência. G, após alguma hesitação inicial, opta por expressões do tipo n + n + 2 (fig. 15).

5. **Completa a tabela, escrevendo uma expressão que indique o número de cadeiras:**

Número de mesas	Número de cadeiras
1	4 2+1+1=4
2	6 3+3=6
10	22 10+10+2=22
40	82 40+40+2=82
200	402 200+200+2=402
20	42 20+20+2=42
(...)	
100	202 100+100+2=202

Fig. 15 – Resolução da questão 5 (G)

As expressões de MC resultam da descoberta feita na questão 4 em que recorre à tabuada do dois. Parece compreender que há uma relação funcional em que o número de pares de cadeiras é igual ao número de mesas mais um (um par de cadeiras por mesa e um par lateral). Em seguida, multiplica esse número por dois mantendo o recurso à tabuada do dois (fig. 16).

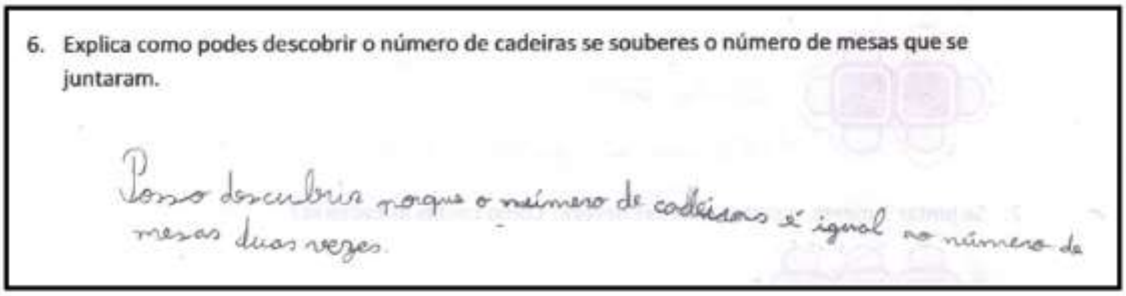


5. Completa a tabela, escrevendo uma expressão que indique o número de cadeiras:

Número de mesas	Número de cadeiras
1	4 2x2=
2	6 3x2=
40	82 41x2=82
30	32 31x2=32
10	22 11x2=22
20	42 21x2=42
(...)	
100	202 101x2=202

Fig. 16 – Resolução da questão 5 (MC)

Questão 6. Pretendia-se que os alunos exprimissem a generalização traduzindo por palavras a regularidade encontrada. Alguns apenas conseguem identificar uma relação de dobro (fig. 17). Esta poderá ter sido evidenciada pela observação da tabela da questão 5, tendo em conta a abordagem recursiva (método da diferença).

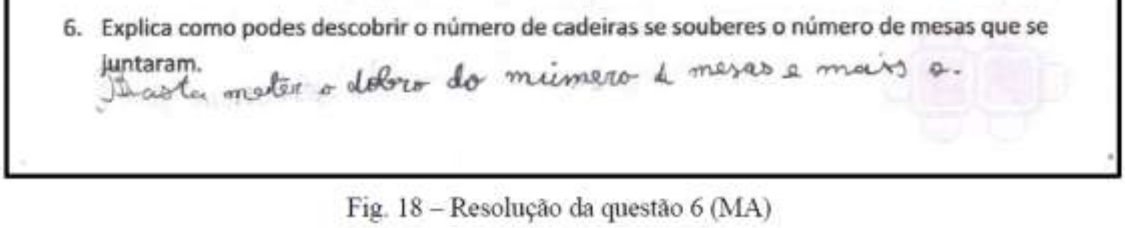


6. Explica como podes descobrir o número de cadeiras se souberes o número de mesas que se juntaram.

Posso descubrir porque o número de cadeiras é igual ao número de mesas duas vezes.

Fig. 17 – Resolução da questão 6 (CPP)

Outros exprimem uma lei geral de formação da sequência em linguagem corrente. Usam, assim, o método linear e recorrem a explicações de carácter geométrico muito simples. Nestes casos, a regularidade detectada visualmente foi transposta para a sequência numérica associada, o que lhes permite fazer uma generalização distante como se pode observar nas resoluções de MA e de G (figs. 18 e 19).



6. Explica como podes descobrir o número de cadeiras se souberes o número de mesas que se juntaram.

Basta meter o dobro do número de mesas e mais 2.

Fig. 18 – Resolução da questão 6 (MA)

6. Explica como podes descobrir o número de cadeiras se souberes o número de mesas que se juntaram.

Tanto o mesmo número de cadeiras em cima e em baixo igual ao número de mesas e mais duas cadeiras nas pontas.

Fig. 19 – Resolução da questão 6 (G)

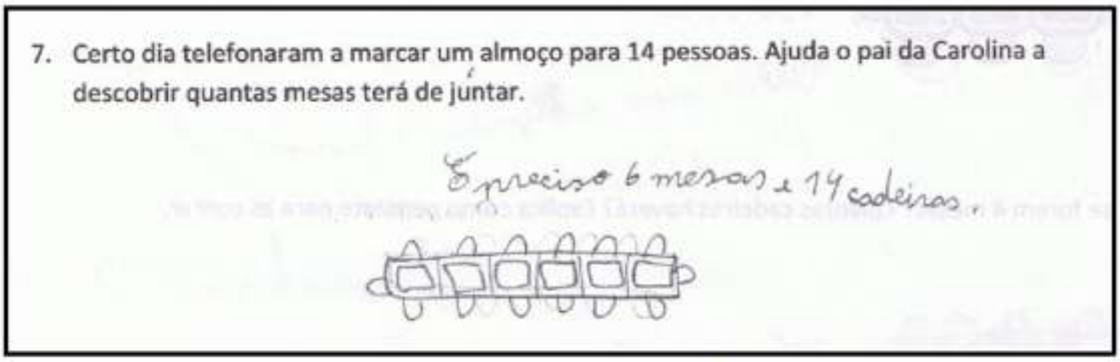
No episódio 2, durante a discussão colectiva, pode constatar-se a forma como G apreende a regra de crescimento da representação visual e a transfere para uma expressão numérica.

Episódio 2

> G vai ao quadro e na 2ª. figura circunda as 2 cadeiras de cima, as 2 de baixo e as 2 dos lados. Na 3ª. figura faz o mesmo, dizendo:
> G: 3 em cima, 3 em baixo e mais 2.
> (…)
> P: Faça lá as continhas, as expressões...
> (G escreve abaixo da primeira figura 1 + 1 + 2 = 4)
> P: Continua...
> (G, na figura 2, escreve 2 + 2 + 2 = 6 e na figura 3 escreve 3 + 3 + 2 =8)
> Inv: G, agora como é na 4ª figura, com 4 mesas?
> G: Aparecia 4 em cima, 4 em baixo e 2 nas pontas.
> Inv: E com 5 mesas?
> G: 5 em cima e 5 em baixo e 2... e 2 no meio... nas pontas.
> Inv: E com 10?
> G: E com 10, 10 em cima, 10 em baixo e 2 no meio (vai indicando as posições).
> (...)
> Inv: G, vê lá se consegues dizer a frase: O número de cadeiras é...
> G: Igual ao número de mesas... mais dois.
> Inv: Quantas vezes o número de mesas?
> G: Duas... (mostra os dedos e olha para a investigadora). Uma?!... Ai! Duas, duas!!
> Inv: Porque é que é duas vezes?
> RR: Duas, em cima e em baixo
> (...)
> Inv: Queres ir escrever? Então agora o RR escreve no quadro a frase "O número de cadeiras é...
> (...)
> LF: O número de cadeiras é igual ao número de mesas duas vezes, em cima e em baixo, e mais dois dos lados.

Como este episódio evidencia, a discussão colectiva foi importante para a compreensão da relação funcional pelos alunos. Com efeito, apesar de durante o trabalho individual só dois terem conseguido formulá-la por escrito, foram vários os que, oralmente, manifestaram tâ-la compreendido (por exemplo RR).

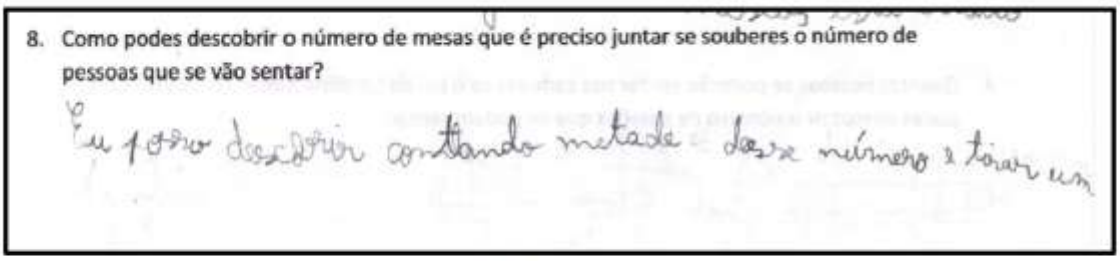
Questões 7 e 8. Focam-se na relação inversa e foram as que levantaram mais dificuldades. Se se indicar o número de pessoas que se irão sentar e este número não for elevado, há oito que resolvem facilmente. No entanto, voltam a privilegiar as estratégias de representação e contagem (fig. 20).


7. Certo dia telefonaram a marcar um almoço para 14 pessoas. Ajuda o pai da Carolina a descobrir quantas mesas terá de juntar.

É preciso 6 mesas e 14 cadeiras.

Fig. 20 – Resolução da questão 7 (CPP)

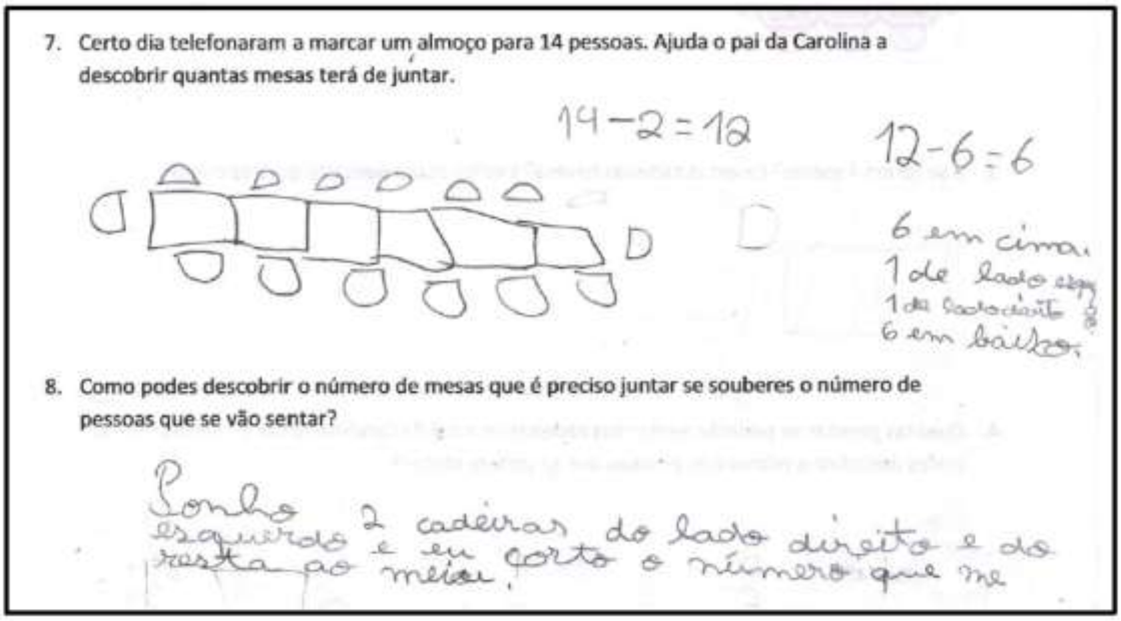
Quando se solicita que exprimam uma generalização que indique o número de mesas para qualquer número de cadeiras, há apenas três alunos que, durante o trabalho individual, conseguem enunciar correctamente a relação em linguagem natural, embora usando formulações diferentes. A figura 21 mostra uma destas formulações.


8. Como podes descobrir o número de mesas que é preciso juntar se souberes o número de pessoas que se vão sentar?

Eu posso descobrir contando metade desse número e tirar um

Fig. 21 – Resolução da questão 8 (MC)

A outra formulação (fig. 22) é do único aluno que, na questão 7, não recorreu apenas a uma estratégia de representação e contagem.


7. Certo dia telefonaram a marcar um almoço para 14 pessoas. Ajuda o pai da Carolina a descobrir quantas mesas terá de juntar.

14 − 2 = 12 12 − 6 = 6

6 em cima.
1 de lado esq
1 do lado dirto
6 em baixo.

8. Como podes descobrir o número de mesas que é preciso juntar se souberes o número de pessoas que se vão sentar?

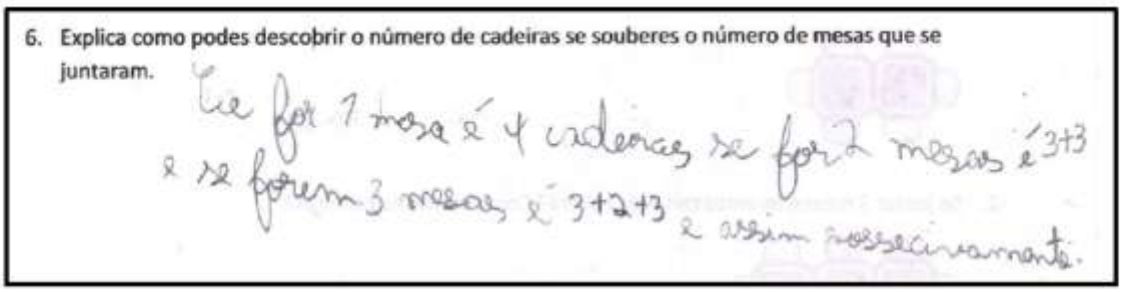
Ponho 2 cadeiras do lado direito e do esquerdo e eu corto o número que me resta ao meio.

Fig. 22 – Resolução das questões 7 e 8 (JN)

Pode considerar-se que JN usa o método linear, pois há uma decomposição do número de mesas com recurso às operações inversas: primeiro uma subtracção e depois a subtracção de metade do número obtido, que tem subjacente a divisão por dois, pois estes alunos ainda não trabalharam a operação divisão. Esta ideia é reforçada quando se observa a sua resposta à questão 8: “Corto o número que resta ao meio”.

Dificuldades

Podem considerar-se dificuldades de dois tipos: as inerentes à faixa etária dos alunos e as relacionadas com o desenvolvimento do pensamento algébrico e os conhecimentos matemáticos que conseguem mobilizar. No primeiro tipo pode incluir-se a compreensão do significado do vocabulário utilizado e a má interpretação do que é pedido. Esta dificuldade está patente na resposta de MC (fig. 23) quando, ao não entender o enunciado, refere uma situação concreta.


6. Explica como podes descobrir o número de cadeiras se souberes o número de mesas que se juntaram.

Se for 1 mesa é 4 cadeiras se for 2 mesas é 3+3 e se forem 3 mesas é 3+2+3 e assim sucessivamente.

Fig. 23 – Resolução da questão 6 (MC)

As respostas são muito curtas e as justificações reduzidas, o que pode estar associado à não proficiência na escrita. Além disso, nem sempre foi fácil desenharem com rigor as figuras da sequência. Por exemplo, M e C apenas aproximam as mesas, mantendo 4 cadeiras em cada uma. Dificuldades semelhantes foram identificadas por Silvestre et al. (2010).

Um exemplo do segundo tipo de dificuldades é ilustrado pela forma como JN conta as cadeiras e escreve a sequência numérica (fig. 24), que dificulta a identificação de uma expressão representativa do número de cadeiras. O diálogo com o aluno revela que as suas expressões não estão relacionadas com a representação visual, mas sim com o conhecimento de que 22, número obtido por contagem unitária, se pode estruturar usando 10 como número de referência: “dez, depois do onze até ao vinte e depois conto mais dois [JN vai apontando para os números representados na figura 24, questão 4]”.

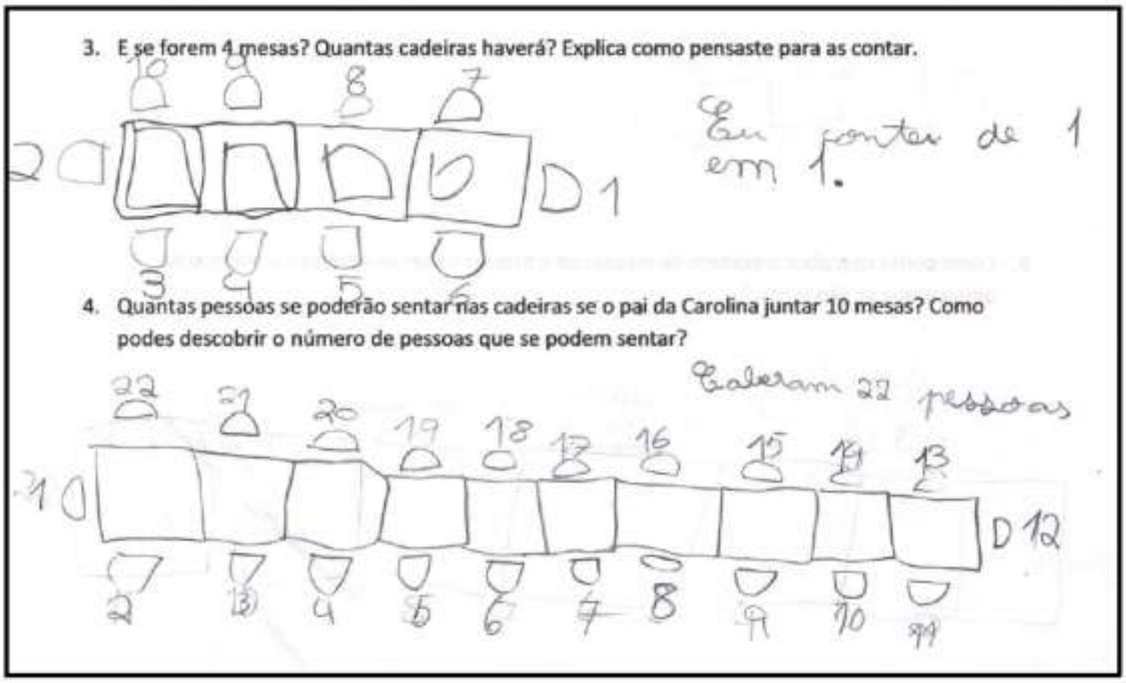


Fig. 24 – Resolução das questões 3 e 4 (JN)

JN compreende o crescimento da sequência pictórica, mas não é capaz de estabelecer conexões entre esta e a sequência numérica, ou seja, não compreende que há uma lei de crescimento comum a ambas as representações. Este tipo de dificuldade é também visível nas decomposições dos números de cadeiras que vários alunos fazem na questão 5.

A concluir

A análise do trabalho individual dos alunos revela que usam diversas estratégias de generalização, predominando as de representação e contagem na resolução de questões de generalização próxima, tal como referido por alguns autores (Barbosa, 2010; Stacey, 1989; Vale, 2006). Estas estão, na quase totalidade, associadas às quatro primeiras questões da tarefa, que a generalidade resolveu correctamente e voltam a surgir nas resoluções de oito alunos, quando está em jogo a relação inversa da identificada até aí. Nas restantes questões, direccionadas para a generalização distante, adoptam os métodos da diferença e linear (Stacey, 1989) ou estratégias de generalização aditiva e da decomposição dos termos (Ponte, Branco & Matos, 2009). Estas estratégias surgem com bastante menos frequência do que a anterior. Constata-se que encontrar termos numa sequência torna-se progressivamente mais difícil, à medida que estes são mais distantes dos apresentados.

As diferentes formas como visualizam o "padrão" traduzem-se em diferentes modos de contagem e, consequentemente, são também diferentes as expressões usadas para traduzir uma lei geral de formação da sequência em linguagem natural. Em alguns casos, apenas determinam o número de cadeiras por contagem unitária, não estabelecendo ligação entre este número e a forma como se distribuem à volta das mesas. Segundo Ursini (1991), é essencial para a generalização que os alunos compreendam que há uma lei de crescimento comum às duas representações visual e numérica. Semelhantemente Barbosa (2010) refere dificuldades associadas à contagem de forma não organizada e à visualização espacial. Refere ainda que os alunos revelam mais dificuldades em descobrir valores distantes do que valores próximos, sendo as situações que implicam reversibilidade de pensamento as mais complicadas, o que acontece também no presente estudo. Nas questões 7 e 8, muitos alunos optam por não responder, por não dominarem conhecimentos matemáticos essenciais, nomeadamente a operação divisão. Segundo vários autores a tendência para a utilização de estratégias de contagem e da diferença pode tornar-se um obstáculo à formulação de relações de tipo funcional, dificultando a formulação de uma lei geral (Barbosa, 2010; Stacey, 1989).

Há evidências de que a maior parte dos alunos compreende a forma de crescimento da sequência pictórica ao representar as figuras pedidas, sendo mais difícil explicá-la do que continuá-la. A dificuldade em exprimir por escrito a forma como pensam e em utilizar uma linguagem apropriada para descrever regras é também identificada em outros estudos recentes (Barbosa, 2010; Vale, 2010).

Por último, o recurso à tabuada do dois e à estrutura do 10 evidenciam que, tal como refere Canavarro (2009), os alunos tendem a socorrer-se de todo o "repertório de ferramentas intelectuais", apresentado pelo professor, que se torna a referência em torno da qual pensam algebricamente.

Referências bibliográficas

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico* (dissertação de Doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante 16* (2), 81-118.

Darrel, E., & Balti, A. (2008). Instructional strategies for teaching algebra in elementary school: Findings from a research-practice collaboration. *Teaching Children Mathematics, 14* (9) 518-522.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, XVI* (1), 5-26.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: ME.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: ME.

Silvestre, A., Faria, A., Sousa, H., Cristo, I., Santos, I., Molarinho, M. J., & Veladas, M. (2010). Sequências pictóricas: estratégias de generalização dos alunos do 2º, 3º e 5º anos. In GTI (Eds.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 89-119). Lisboa: APM.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20* (2), 147-164.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13* (8), 438-445.

Ursini, S. (1991). First steps in generalization processes in algebra. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 316-323). Assisi: Universita di Genova.

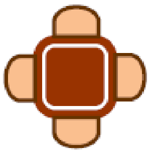
Vale, I., Cabrita, I., Palhares, P. & Borralho, A. (2006). Os Padrões no ensino e aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra* (pp. 193-213). Lisboa: SPCE.

Anexo I

Tarefa – As mesas do restaurante da Carolina[1]

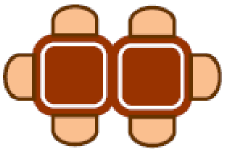
Os pais da Carolina têm um restaurante.

As mesas do restaurante são quadradas e em cada uma há 4 cadeiras, podendo sentar-se 4 pessoas, como podes ver na figura ao lado.

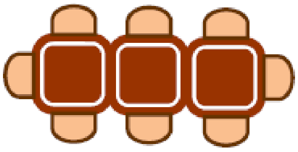


Por vezes, vão almoçar grupos com mais pessoas e o pai da Carolina junta várias mesas.

1. Se o pai da Carolina juntar 2 mesas, quantas pessoas se poderão sentar nas cadeiras? Explica como contas o número de pessoas que se podem sentar.



2. Se juntar 3 mesas, quantas cadeiras haverá? Como contas as cadeiras?



3. E se forem 4 mesas? Quantas cadeiras haverá? Explica como pensaste para as contar.

4. Quantas pessoas se poderão sentar nas cadeiras se o pai da Carolina juntar 10 mesas? Como podes descobrir o número de pessoas que se podem sentar?

[1] Tarefa adaptada de Earnest, D. e Balti, A. "Instructional Strategies for Teaching Algebra in Elementary School: Findings from a Research-Practice Collaboration" *in Teaching Children Mathematics* May, 518-522 (2008)

5. Completa a tabela, escrevendo uma expressão que indique o número de cadeiras:

Número de mesas	Número de cadeiras
1	4
2	
20	
(...)	
100	

6. Explica como podes descobrir o número de cadeiras se souberes o número de mesas que se juntaram.

7. Certo dia telefonaram a marcar um almoço para 14 pessoas. Ajuda o pai da Carolina a descobrir quantas mesas terá de juntar.

8. Como podes descobrir o número de mesas que é preciso juntar se souberes o número de pessoas que se vão sentar?

Anexo II

Tarefa	**Objectivos**
Sol ou chuva?	*Identificar o grupo que se repete;* *Continuar sequências repetitivas;* *Relacionar cada elemento da sequência com a posição que ocupa;* *Identificar relações entre diferentes elementos da sequência e exprimir estas relações em linguagem corrente.*
Estradas de números	*Identificar, continuar e descrever sequências numéricas crescentes;* *Identificar relações entre os elementos da sequência e exprimir estas relações em linguagem corrente.*
Os cães do avô do Gonçalo	*Completar e interpretar uma tabela;* *Identificar a relação entre duas variáveis e exprimir esta relação em linguagem corrente.*
Quadrados e mais quadrados	*Identificar, continuar e descrever sequências numéricas crescentes;* *Identificar relações entre elementos de uma sequência crescente;* *Relacionar cada elemento da sequência com a posição que ocupa;* *Generalizar sequências crescentes.*
Uma viagem especial: a migração dos gansos!	*Identificar, continuar e descrever sequências numéricas crescentes;* *Escrever expressões que representem o número de pontos que compõem cada figura da sequência;* *Organizar os dados em tabela e por análise desta descobrir regularidades relativas ao número de pontos das figuras;* *Relacionar o número de pontos da figura com a sua posição, generalizando.*
Os desenhos do Pedro	*Identificar, continuar e descrever sequências numéricas crescentes;* *Identificar relações entre elementos de uma sequência crescente;* *Generalizar sequências crescentes.*

Quadro I – Sequência de tarefas