

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Estatística e Investigação Operacional



Gerador de Cenários Económicos em Solvência II: Aplicação do Modelo Vasicek

Alexandre Braamcamp de Oliveira Sarmiento Pereira

Mestrado em Matemática Aplicada à Economia e Gestão

Trabalho de Projeto orientado por:
Professora Doutora Helena Mouriño
Professora Doutora Raquel João Fonseca

*“Começa por fazer o que é necessário, depois o que é possível,
e de repente estarás a fazer o impossível.”*

S. Francisco de Assis

Resumo

Desde o início de 2016, que o mercado segurador europeu passou a operar ao abrigo do Solvência II. Este regime obrigou a uma profunda revisão das garantias financeiras, tendo em conta a relação entre risco, capital exigido e rentabilidade dos capitais próprios. Tal relação exigiu uma reformulação na forma de avaliação dos ativos e dos passivos que compõem o capital próprio da empresa. O resultado desta avaliação pode, por um lado, significar a necessidade de aumento de capital, obrigando um maior esforço financeiro por parte dos investidores, ou, por outro lado, significar a estabilidade financeira, a possibilidade de distribuição de resultados fruto de um bom desempenho e dos investimentos concretizados. Para garantir a concretização de qualquer um destes cenários, é necessário que a avaliação seja coerente e consistente para garantir o compromisso com as responsabilidades assumidas.

No que toca à carteira de ativos das empresas Seguradoras, grande parte é composta por obrigações, ações e imobiliário. O valor futuro destes ativos é influenciado por um, ou mais, fatores de risco, como por exemplo, risco de crédito, risco de taxa de juro, risco cambial, etc, e, portanto, a otimização da avaliação dos ativos passa pela previsão consistente do valor destes fatores.

O presente trabalho tem como principal objetivo a previsão da taxa de juro associada às obrigações, recorrendo ao método Gerador de Cenários Económicos (GCE). É efetuada uma abordagem no contexto dos processos estocásticos por meio do ajustamento do modelo Vasicek. Iremos avaliar a sua sensibilidade e a sua capacidade de adaptação à evolução da taxa de juro, e discutir, com base nos resultados obtidos, o uso do modelo Vasicek em contexto empresarial para apoiar a avaliação não só das obrigações, como também de outros ativos.

Palavras-Chave: Solvência II, obrigações, risco taxa de juro, GCE, modelo Vasicek.

Abstract

Since the beginning of 2016, the European insurance market has operated under Solvency II. This has led to a review of financial guarantees, taking into account the relationship between risk, capital required and the return on equity. This relationship requires a makeover in the form of valuation of assets and liabilities that make up the equity of the company. The result of this assessment could mean the need of increasing capital, requiring greater financial effort on the part of investors, or, on the other hand, mean the financial stability, the possibility of distribution of results, generated by the good performance and realization of investments. In either of these scenarios, a coherent and consistent evolution must be provided to primarily ensure the commitment of responsibilities.

The asset portfolio of the insurance companies is largely composed of bonds, stocks and real estate. It turns out that the future value of these assets is influenced by one, or more, risk factors, as for example, credit risk, interest rate, foreign exchange risk, etc. In other words, the assessment of asset optimization involves consistent predictions of these factors.

In this context, the present work aims at forecasting the interest rate associated to pricing the bonds using the method Economic Generator Scenarios (ESG). One approach is made in the context of stochastic processes by adjusting the Vasicek model. We will evaluate their sensitivity and their ability to adapt to changes in the interest rate, and discuss, based on the results, the use of Vasicek model in a business context to support the evaluation not only of the obligations, as well as other assets.

keywords: Solvency II, liabilities, interest rate risk, ESG, Vasicek model.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
Lista de Abreviaturas	xiii
1 Introdução	1
2 Solvência II	3
2.1 QIS & Informações Técnicas	4
2.2 Requisitos para a GCE	4
2.2.1 Melhor Estimativa	5
2.2.2 Avaliação Consistente com o Mercado	6
2.2.3 Gerador de Cenários Económicos	6
3 Obrigações e Risco de taxa de juro	9
3.1 Obrigações	9
3.2 Risco de Investimento	11
4 Modelação da Taxa de Juro	13
4.1 Introdução	13
4.2 Modelo Vasicek determinístico	15
4.3 Modelos Estocásticos	16
4.3.1 Modelo Vasicek	17
4.3.2 Estimadores dos parâmetros do Modelo Vasicek	19
4.4 Outros Modelos	21
5 Análise dos Dados	23
5.1 Descrição da base de dados	23
5.1.1 Sub-intervalos em estudo	27
5.2 Análise Exploratória	28
5.3 Aplicação do Modelo Vasicek	31
5.3.1 Simulação	31
5.3.2 Previsão	38
6 Conclusões e Discussão	43

Bibliografia	49
Anexo A	51
Fórmula de Itô	51
Anexo B	53
Tabela de resultados	53

Lista de Figuras

3.1	Relação entre Valor das Obrigações e YTM	10
5.1	Resultado do teste <i>Kruskal - Wallis</i> para as taxas de OT.	24
5.2	Resultado do teste <i>Kruskal - Wallis</i> para as taxas <i>swap</i>	24
5.3	Taxa de rentabilidade das OT mensal a 3 anos (esquerda), Taxa <i>swap</i> diária a 3 anos (direita).	25
5.4	Taxas EONIA e de referência diária do BCE.	26
5.5	Taxa de rentabilidade das OT mensal com maturidade a 3 anos.	27
5.6	Taxa <i>swap</i> diária com maturidade a 3 anos.	28
5.7	Histograma. Estimação da f.d.p: Normal, estimador de <i>kernel</i> . Taxa de rentabilidade das OT (esquerda) e <i>swap</i> (direita).	28
5.8	Boxplot (a), tendência (b), FAC (c) e FACP do histórico da taxa de rentabilidade das OT.	29
5.9	Boxplot (a), tendência (b), FAC (c) e FACP do histórico da taxa <i>swap</i>	30
5.10	Comando R: localização dos ficheiros excel	31
5.11	Código R do método de estimação de Máxima Verosimilhança.	31
5.12	Código R para o Modelo Vasicek.	33
5.13	Geração de cenários (esquerda), cenário médio (direita) da taxa de rentabilidade das OT.	33
5.14	Geração de cenários (esquerda) e cenário médio (direita) da taxa <i>swap</i>	34
5.15	Propagação dos erros de simulação taxa de rentabilidade OT (esquerda) e dasimulação da taxa <i>swap</i> (direita).	34
5.16	Resíduos ao longo do tempo (esquerda) e Resíduos <i>vs.</i> valores estimados (direita) da taxa de rentabilidade das OT.	35
5.17	PP-plot (esquerda) e histograma com estimação da f.d.p da Normal e estimador de <i>kernel</i> (direita) da taxa de rentabilidade das OT.	36
5.18	FAC (esquerda) e FACP (direita) da taxa de rentabilidade das OT.	36
5.19	Resíduos ao longo do tempo (esquerda) e Resíduos <i>vs.</i> valores estimados (direita) da taxa <i>swap</i>	36
5.20	PP-plot (esquerda) e histograma com estimação da f.d.p da Normal e estimador de <i>kernel</i> (direita) da taxa <i>swap</i>	37
5.21	FAC (esquerda) e FACP (direita) da taxa <i>swap</i>	37
5.22	Evolução da taxa de rentabilidade das OT (esquerda); taxa <i>swap</i> (direita) entre 31/12/1999 e 31/01/2002.	38
5.23	Simulação taxa de rentabilidade das OT entre 31/12/1999 e 31/01/2002.	39
5.24	Cenários de previsão da taxa de rentabilidade das OT para os próximos 5 anos (esquerda) e respectivo cenário médio em simultaneo com as observações (direita).	40
5.25	Cenários de previsão da taxa <i>swap</i> para os próximos 5 anos (esquerda) e respectivo cenário médio em simultaneo com as observações (direita).	41

5.26	Cenários de previsão da taxa de rendibilidade das OT para os próximos a 7 anos e 4 meses (esquerda), e respectivo cenário médio em simultâneo com as observações (direita).	42
------	---	----

Lista de Tabelas

3.1	Notações financeiras de avaliação.	12
4.1	Modelos de Equilíbrio.	21
4.2	Modelos de não-arbitragem.	22
5.1	Estimativas com base no histórico das taxas de rentabilidade das OT.	32
5.2	Estimativas com base no histórico da taxa <i>swap</i>	34
5.3	Estimativas das funções do modelo Vasicek para a taxa OT.	39
5.4	Estimativas dos parâmetros do modelo Vasicek para a taxa OT.	40
5.5	Estimativas do modelo Vasicek para a taxa <i>Swap</i>	41
6.1	Cenário médio a 5 anos (60 meses) para a taxa de rentabilidade das OT.	53
6.2	Cenário médio a 7 anos e 4 meses (88 meses) para a taxa de rentabilidade das OT.	55

Lista de Abreviaturas

- ASF** - Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões
BCE - Banco Central Europeu
EIOPA - *European Insurance and Occupational Pensions Authority*
EONIA - *Euro Overnight index Average*
EURIBOR - *European Interbank Offered Rate*
f.d.p - função densidade de probabilidade
FAC - Função de Auto-correlação
FACP - Função de Auto-correlação Parcial
GCE - Gerador de Cenários Económicos
IGCP - Agência de Gestão da Tesouraria e da Dívida Pública
LIBOR - *London Interbank Offered Rate*
MCR - *Minimum Capital Requirement*
OT - Obrigações do Tesouro (obrigações governamentais portuguesas, dívida pública)
OTC - *over-the-counter*
OPR - Operações Principais de Refinanciamento
pp - Ponto percentual
QIS - *Quantitative Impact Study*
SCR - *Solvency Capital Requirement*
VN - Valor Nominal
VR - Valor de Reembolso
YTM - *Yield-To-Maturity* (taxa de rendimento até à maturidade)

Capítulo 1

Introdução

As empresas seguradoras têm como principal função a proteção contra acontecimentos futuros, através dos diferentes serviços fornecidos tanto no ramo vida como no ramo não-vida, dos quais podem resultar perdas. Por isso, estas empresas desempenham cada vez mais o papel de captação de poupança de médio e longo prazo, para garantir o cumprimento dos compromissos assumidos perante o tomador do seguro. Para o efeito são criados seguros de forte componente financeira e ligados a fundos de investimento, os quais concorrem com outros produtos do sector financeiro. Assim sendo, as seguradoras acabam por assumir um papel de elevada importância económica e social, sendo por isso necessário o recurso à intervenção e monitorização de autoridades públicas de supervisão para garantir que estas possuem capital suficiente para fazer face às perdas resultantes de situações adversas garantindo o compromisso das responsabilidades assumidas [1].

A ausência de mecanismos de mensuração dos riscos assumidos e de determinação das necessidades de capital associadas aos mesmos, num ambiente de cada vez maior volatilidade e competitividade, levou os organismos regulamentares europeus a desenvolver o regulamento Solvência II, que tem por objetivo dar resposta à necessidade de introduzir fatores qualitativos, quantitativos, e, ainda, incrementar o nível e a transparência da informação a prestar pelas seguradoras [2], [3]. A introdução de uma forma de cálculo de solvência mais suportada no risco traz ainda alterações à forma como as seguradoras conduzem os negócios e à sua organização interna. Com uma legislação mais exigente, espera-se que o regime Solvência II traga uma maior solidez financeira ao sector, permitindo também às companhias e supervisores detetar, antecipadamente, sinais de alarme e prevenir e corrigir eventuais problemas.

Devido ao carácter aleatório das responsabilidades, torna-se difícil a determinação dos requisitos de capital que as seguradoras deverão possuir, pois os riscos assumidos diferem entre os serviços prestados. Isto porque existem contratos de seguro ligados a fundos de investimento, obrigações, ações ou imóveis, que faz com que a sua rendibilidade seja variável, o que em contratos do ramo vida, tem impacto na avaliação das provisões técnicas, que são a principal rubrica do ativo, e, conseqüentemente, no capital de solvência.

Os investimentos em ativos do mercado financeiro estão sujeitos a fatores de risco, como, por exemplo, risco de crédito, risco de taxa de juro e risco cambial. Estes riscos têm impacto direto no valor do ativo, o que leva a que, para obtermos a otimização do seu valor, precisaremos de ter conhecimento da sua estrutura temporal.

O objetivo deste projeto corresponde ao estudo da construção e da utilização de um Gerador de Cenários Económicos (GCE) que irá permitir o conhecimento da estrutura temporal do

fator de risco dos ativos obrigacionistas. Este é um dos métodos referenciados pela *European Insurance and Occupational Pensions Authority* (EIOPA), que por meio de modelos estocásticos produz cenários económicos futuros com os quais, posteriormente, as seguradoras calculam o valor presente dos seus ativos e passivos. Neste projeto iremos construir um GCE, que será programado no *software R* [4].

Este projeto surge no seguimento da bolsa de estágio, realizada na empresa VICTORIA-Seguros, decorrida entre o final de maio até ao final de novembro de 2015, como técnico de actuariado vida no departamento de Gestão de Risco e Planeamento. Com os novos critérios da regulamentação do Solvência II, a existência de uma ferramenta própria de apoio à avaliação dos ativos revela uma importância elevada para a gestão do capital próprio da empresa. Na VICTORIA-Seguros, a carteira de ativos é composta essencialmente por obrigações, ações e imobiliário, cabendo a maior fatia da carteira às obrigações. Estas podem ser obrigações governamentais, também chamadas de dívida pública, e obrigações de empresas privadas, ou de dívida privada. O valor das obrigações é influenciado por vários fatores de risco, nomeadamente risco de taxa de juro e risco de crédito, quando se trata de dívida privada. Então, naturalmente a avaliação das obrigações passa pela previsão consistente do valor futuro destes fatores. No entanto, torna-se complexa a previsão simultânea destes fatores, optando-se apenas pela previsão da taxa de juro que é o fator de risco mais relevante entre as obrigações [5].

Durante anos têm sido desenvolvidos uma grande variedade de modelos estocásticos para a taxa de juro, cada um deles com a sua complexidade e sensibilidade em simular a taxa de juro, não existindo ainda um modelo ótimo. O modelo escolhido para este projeto corresponde ao modelo Vasicek, que embora com alguma componente teórica exigente, é um modelo estático, de parâmetros constantes e fácil de calibrar com recurso a dados do mercado. Neste trabalho, será, ainda, efetuada uma introdução aos modelos estocásticos a partir do modelo Vasicek, nomeadamente, avaliando o benefício da sua implementação, que posteriormente poderá ser estendida a outros modelos mais evoluídos, em ambiente empresarial.

O projeto encontra-se estruturado da forma a seguir descrita.

No capítulo 2, é apresentado, em linhas gerais, o regulamento Solvência II e os três pilares em que este assenta, seguindo-se as linhas orientadoras publicadas pela EIOPA para as instituições seguradoras de apoio à implementação de métodos próprios de avaliação, em particular do método GCE. No capítulo 3 introduzimos os ativos financeiros em estudo, as obrigações, e descrevemos diferentes tipos de obrigações que podem existir, consoante o estipulado na data de emissão, e o efeito da taxa de juro.

No capítulo 4, é feita uma contextualização histórica e intuitiva dos modelos estocásticos até à origem do modelo Vasicek, um dos primeiros a surgir para descrever a evolução da taxa de juro. No capítulo 5, abordamos os dados de mercado utilizados para a calibração do modelo e a sua admissibilidade, iniciando-se um exemplo prático onde testamos todo o código implementado no *software* de programação R acompanhado com os resultados obtidos. Finalmente, no último capítulo apresentamos um resumo de todo o trabalho desenvolvido e a discussão dos resultados obtidos. Será também feita uma crítica ao modelo Vasicek dando conta de algumas melhorias a serem implementadas, que acabam por dar origem a modelos mais evoluídos, motivando para que no futuro se possam alcançar melhores resultados no uso de GCE.

Capítulo 2

Solvência II

A construção da mais importante mudança que o mercado dos seguros enfrentou faz parte do plano de ação dos serviços financeiros, organizado em duas fases: Solvência I e Solvência II. Estas fases, que visam a revisão estrutural da regulação do sector, foram iniciadas pelos membros da Conferência das Autoridades de Supervisão Europeias de Seguros, a atual EIOPA [6].

Na primeira fase, o Solvência I reconheceu a importância da margem de solvência das empresas de seguros, com vista a assegurar a proteção dos tomadores de seguros no mercado único, tanto no ramo vida como no ramo não vida, [7] e [8]. Esta margem de solvência era uma garantia para fazer face aos potenciais riscos, sendo o principal o risco de taxa de juro, que influencia a rentabilidade do ativos, mas muitas vezes não refletia a totalidade dos riscos assumidos de uma carteira do segurador [9]. As regras não eram sensíveis ao risco, pois estas seguiam um sistema que assentava em rácios fixos em detrimento de um sistema baseado nos fatores risco, ou seja, o nível de solvência dependia apenas do montante de prémios ou sinistros, não existindo qualquer ligação entre risco assumido e requisitos de capital. Por outro lado, a grande diversidade de sistemas de supervisão entre Estados Membros não permitia uma uniformização entre estes [10]. O reconhecimento destas limitações, que ameaçavam a solvência de uma empresa de seguros, levou a que o Solvência I fosse revisto e que se desenvolvessem novas medidas, surgindo assim o novo regulamento Solvência II. Iniciado em 2001 todo este processo foi sofrendo vários atrasos, explicados sobretudo pela elevada turbulência dos mercados financeiros da altura, que acabou mesmo por se desenrolar, em 2007, numa crise financeira, obrigando a revisões de princípios, metodologias e formas de calibragem para o regulamento Solvência II [6].

Nesta segunda fase foram garantidas as condições de uniformização de cálculo das provisões técnicas e dos fundos próprios de base pelas empresas de seguros e de resseguros. [11]. À semelhança do que acontece na banca com o Basileia II, o Solvência II vem introduzir não só critérios exigentes no cálculo dos rácios de solvência, mas também uma maior transparência. Estes critérios permitem um ajustamento do capital aos riscos efetivamente assumidos pela empresa, através de processos de gestão de risco. Tal ajustamento pode significar uma maior exigência de capital, dada a volatilidade dos ativos [12].

O Solvência II não só pretende reforçar a solidez financeira do setor, aumentar a proteção dos tomadores de seguros, segurados e beneficiários, como também unificar o mercado segurador. Este novo regulamento de solvência foi estruturado tendo em conta três objetivos estratégicos, três pilares, ligados entre si, adaptados às necessidades da supervisão seguradora em termos quantitativos e qualitativos, bem como à prestação de informação. Os pilares podem ser resumidos da seguinte forma:

Pilar I: compreende requisitos quantitativos, onde se incluem critérios para o cálculo de provisões técnicas e outros mecanismos de segurança, como o Requisito de Capital de Solvência (SCR - *Solvency Capital Requirement*) e Requisitos Mínimos de Capital (MCR - *Minimum Capital Requirement*).

O MCR corresponde ao capital mínimo absoluto que a seguradora deve deter para cumprir com as responsabilidades assumidas. Quando este se encontra abaixo do estipulado, existe a intervenção das autoridades supervisoras.

O SCR representa o montante de capital necessário para que uma empresa possa exercer a sua atividade, no período temporal de um ano. O cálculo do Requisito de Capital de Solvência pode ser efetuado através de uma fórmula-padrão ou da utilização de modelos internos aprovados pela autoridade de supervisão (totais ou parciais);

Pilar II: contempla requisitos qualitativos, nomeadamente em termos de governação, controlo interno, gestão de risco e processos de supervisão;

Pilar III: compreende a transparência e a disciplina de mercado, através de requisitos de prestação de informação às autoridades de supervisão.

2.1 QIS & Informações Técnicas

À medida que o Solvência II ia sendo desenvolvido cada Estado Membro do setor segurador europeu foi testando os efeitos das novas especificações propostas. Seguidos atentamente não só pela EIOPA como também pelas autoridades de supervisão de seguros de cada Estado, os testes realizados, designados por estudos de impacto quantitativo, *QIS* (*Quantitative Impact Study*), assumiram um papel importante contribuindo decisivamente para o aperfeiçoamento do novo regulamento. O último teste realizado pela EIOPA, o *QIS5* [13] em particular, constituiu uma importante fonte de informação para a finalização das medidas de implementação.

Uma nota positiva publicada no relatório final da ASF sobre o efeito das novas propostas do Solvência II testadas no *QIS5* é que a nível nacional, quase todas as entidades seguradoras sob a supervisão da Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões (ASF) realizaram este estudo. Apesar da grande aderência por parte das seguradoras portuguesas ao *QIS5*, estas ainda apresentaram algumas dificuldades a nível técnico, no cálculo das provisões técnicas e no cálculo dos requisitos de capital, como também limitações de tempo e de recursos [14].

Este estudo permitiu testar o impacto da implementação das novas propostas e identificar as áreas de vulnerabilidade, quer em matéria de necessidade de capital e de redução de risco, quer na concretização de cálculos fiáveis e mais consistentes para a solvência. Em paralelo, a EIOPA emitiu orientações e recomendações, elaborou projetos de regulamentação e normas técnicas de execução de forma a contribuir para a criação de padrões e de práticas regulamentares, e de supervisão comuns na União Europeia.

É com base nestas orientações [15] que em toda a secção seguinte é explicado o uso dos GCE como uma ferramenta de apoio para o cálculo das provisões técnicas.

2.2 Requisitos para a GCE

Assente no Pilar I, as provisões técnicas correspondem ao montante que permite à seguradora cumprir com os compromissos decorrentes dos contratos de seguro. Como referido no primeiro

capítulo, parte dos ativos é de origem financeira, nomeadamente, obrigações, ações e imobiliário, cujo o retorno é incerto. No caso das obrigações e das ações, os seus valores são influenciados pelas taxas de juro aplicadas, dificultando o cálculo das provisões técnicas.

Focados na otimização deste cálculo, a EIOPA deu a conhecer técnicas e formas de avaliação da rentabilidade dos ativos financeiros, entre eles o GCE que será falado na subsecção 2.2.3, que verificam determinados critérios, nomeadamente:

- Avaliação na ótica "Melhor estimativa",
- Avaliação consistente com o mercado.

2.2.1 Melhor Estimativa

Sob o regulamento Solvência II, a avaliação das provisões técnicas é feita de acordo com o princípio da transferência de valor, segundo o qual o valor das provisões técnicas deve corresponder ao valor atual que a seguradora teria de pagar se transferisse as suas obrigações de seguro imediatamente para uma outra seguradora. Com base no último *QIS5*, para conseguir uma avaliação de acordo com este princípio, as provisões técnicas são calculadas como uma melhor estimativa adicionando uma margem de risco (*best estimate*). A melhor estimativa corresponde ao valor atual esperado dos cash-flows futuros, tendo em conta o valor do dinheiro no tempo necessário para liquidar as obrigações assumidas até ao final do período de maturidade e outras despesas. Em documento anexo ao *QIS5* [16] são dados a conhecer exemplos de métodos para o cálculo da melhor estimativa das provisões técnicas, nomeadamente:

- **Técnicas de Simulação**

Modelos que geram cenários futuros dos quais a empresa pode considerar adequadamente os cenários mais representativos do cenário possível futuro:

- Simulação Monte-Carlo, onde se simula o comportamento das variáveis aleatórias ao longo do tempo, abrangendo um largo número de cenários futuros possíveis. A média ponderada destes cenários corresponde ao cenário mais provável;
- Bootstrapping, que implica a construção de modelos onde se estimam os pagamentos futuros de sinistros;
- Simulação das perdas acima de um determinado montante e até um certo limite pré-definido;
- Abordagem Bayesiana, que consiste na estimação das provisões com base em pressupostos assumidos pela empresa e em observações históricas das variáveis.

- **Técnicas Analíticas**

Conjunto de técnicas baseadas na distribuição futura dos *cash-flows*, para a estimação da melhor estimativa do passivo de seguros não vida, bem como do passivo de seguros vida:

- Variação estocástica de pressupostos/variáveis não relacionadas com o mercado;

- Cálculo do valor temporal das opções e garantias com base nos custos de mercado de *hedge*¹;
- Utilização de técnicas no pressuposto de que os sinistros futuros seguem uma determinada distribuição matemática.

- **Técnicas Determinísticas**

Conjunto de técnicas onde a projeção dos *cash-flows* é baseada num conjunto fixo de suposições:

- Métodos atuariais;
- Stress e cenários de teste;
- Observações influentes ou *outliers*;
- Teste de sensibilidade;
- Ajustamento das proporções ao longo do ano da propagação do risco;
- Uso de pressupostos relevantes, ou outros dados específicos, para o cálculo como um ponto de referência para comparação.

- **Combinação de Técnicas**

A empresa de seguros pode usar uma combinação de técnicas para o cálculo da melhor estimativa.

2.2.2 Avaliação Consistente com o Mercado

Um outro pressuposto assumido pelo regulamento Solvência II é que na avaliação das provisões técnicas como melhor estimativa, a avaliação tem que ser consistente com a informação do mercado financeiro: "uma avaliação é consistente com o mercado sempre que os dados financeiros do mercado forem profundos, líquidos e transparentes" [17]. Estes dados são usados para construir uma taxa de juro de risco neutro, que será definida na subsecção 2.2.3. O mercado diz-se líquido quando os ativos podem ser transacionados em grande volume sem afetar significativamente o preço e profundo quando os ativos podem ser facilmente transacionados sem afetar seu preço, quantidade ou ordem de transação [18].

Uma avaliação consistente do mercado permite promover a transparência entre os mercados seguradores dos Estados Membros, unindo-os e criando condições de comparação e de concorrência equitativa entre empresas.

2.2.3 Gerador de Cenários Económicos

Os Geradores de Cenários Económicos (GCE) são uma metodologia para a avaliação das provisões técnicas. Dentro dos GCE existem duas classes, a classe de Risco Neutro e a classe de Mundo Real. A classe Risco Neutro tem como principal objetivo reproduzir os preços de mercado esperados com base numa taxa de risco neutro, ou seja, aos preços esperados é descontado

¹*hedge* é um investimento que reduz o risco de movimentos adversos do preço de um ativo.

o prêmio de risco. A classe Mundo Real produz cenários económicos que refletem a evolução futura esperada pelas companhias de seguro. Um GCE mundo real inclui prêmio de risco. A calibragem e também a volatilidade são calculadas de forma diferente dos GCE de risco neutro [19].

No entanto, sob o regulamento Solvência II apenas o GCE de risco neutro está em concordância com uma avaliação consistente do mercado, pois a inexistência de prêmio de risco permite que os ativos sejam comprados e vendidos facilmente e transacionados sem afetar o seu preço. Os modelos GCE de risco neutro baseados numa avaliação consistente do mercado resultam na projeção do preço do ativo assente numa pequena transação, ignorando os custos de negociação e a falta de liquidez do mercado.

Por meio de modelos estocásticos provenientes do método de simulação Monte-Carlo são gerados cenários futuros, onde a média ponderada destes cenários corresponderá ao cenário mais provável sem risco. O objetivo é prever os fatores de risco subjacentes aos ativos financeiros. No entanto, existe uma grande variedade de fatores de risco a que os ativos financeiros podem ser sensíveis. Para este trabalho apenas iremos prever os fatores de risco para os ativos financeiros obrigacionistas. Este tema é abordado no próximo capítulo onde também é justificado qual o fator de risco a que as obrigações são mais sensíveis, para o qual iremos prever a sua evolução.

Capítulo 3

Obrigações e Risco de taxa de juro

Neste capítulo é abordado o tema das obrigações, compreendendo como se gerem e fixando convenientemente alguns tipos de obrigações para as quais temos garantias quanto ao principal fator de risco, o risco de taxa de juro. Toda a matéria exposta neste capítulo é baseada e suportada na bibliografia [20] e [21].

3.1 Obrigações

Uma obrigação é um título de dívida de médio/longo prazo dando o direito ao detentor de receber um juro periódico (cupão) bem como o valor de reembolso do título numa data futura. Ou seja, não é mais do que um contrato entre um emitente e um tomador. O emitente recebe um determinado valor (valor de subscrição), e o detentor do título passa a ser titular do direito de recebimento de juros pré-definidos até à data final desse contrato (maturidade da obrigação), bem como o reembolso na maturidade do montante financiado. As obrigações podem ser emitidas pelo Estado, ou por empresas privadas.

Na emissão do título é acordado:

- **Valor Nominal/Facial (VN):** valor sobre o qual incide a taxa de remuneração do empréstimo, chamada taxa de cupão;
- **Preço de Emissão:** preço a que a obrigação é colocada no mercado primário;
- **Cupão:** pagamento dos juros efetuado periodicamente até ao final da maturidade;
- **Valor de Reembolso (VR):** valor pago ao detentor da obrigação na maturidade do empréstimo.

As obrigações de dívida pública são o principal instrumento de financiamento do Estado, podendo ser emitidas a médio ou longo prazo, com ou sem cupão. Sobre o valor nominal incide normalmente uma taxa fixa de cupão. Já a dívida de empresa titularizada sob obrigações, sendo uma das suas possíveis fontes de financiamento, tem termos de contrato idênticos às obrigações de dívida pública, podendo ainda a taxa de cupão ser variável. Existe uma grande diversidade de tipos de obrigações de acordo com o tipo de taxa de juro aplicável, a existência, ou não, de cupões e a forma de amortização de capital entre outras características. Todos estes fatores influenciam o valor da obrigação.

O valor de uma obrigação é dado pelo valor atualizado dos *cash-flows* esperados, isto é, corresponde ao valor atual dos cupões que ainda não venceram mais o valor atual do capital de

reembolso. Matematicamente, é calculado por:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{VR}{\left(1 + \frac{YTM}{m}\right)^n} + \sum_{k=1}^n \frac{\frac{C}{m}}{\left(1 + \frac{YTM}{m}\right)^k} \\
 &= \frac{VR}{\left(1 + \frac{YTM}{m}\right)^n} + \left(\frac{C}{m}\right) \left(\frac{YTM}{m}\right)^{-1} \times \left(1 - \left(1 + \frac{YTM}{m}\right)^{-n}\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

m - número de pagamentos de cupão durante o ano;

n - maturidade da obrigação;

C - valor do cupão.

A *YTM* (*Yield-to-maturity*) ou taxa de rendimento até à maturidade, corresponde à taxa interna de rentabilidade da obrigação. Por outro lado, quando se sabe o valor de reembolso da obrigação, a *YTM* corresponde à taxa de atualização/desconto dos *cash-flows* tal que o seu valor atual é igual ao preço de emissão, P .

Obrigações de cupão zero

As obrigações de cupão zero são um tipo clássico de obrigações que durante a sua existência não pagam juros, logo, a taxa de cupão é zero. O valor destas obrigações é dado por:

$$P = \frac{VR}{(1 + YTM)^n}.$$

Quando a *YTM* é conhecida e única, o preço atual da obrigação, bem como o seu valor futuro esperado, é facilmente calculado. No entanto, quando temos o recebimento de cupões ao longo do tempo, isso representa uma dificuldade acrescida, pois a taxa de juro não é constante ao longo do tempo. A relação entre a taxa de juro e o valor da obrigação é não linear, mas sim convexa relativamente à origem e decrescente, como exemplificado na figura 3.1:

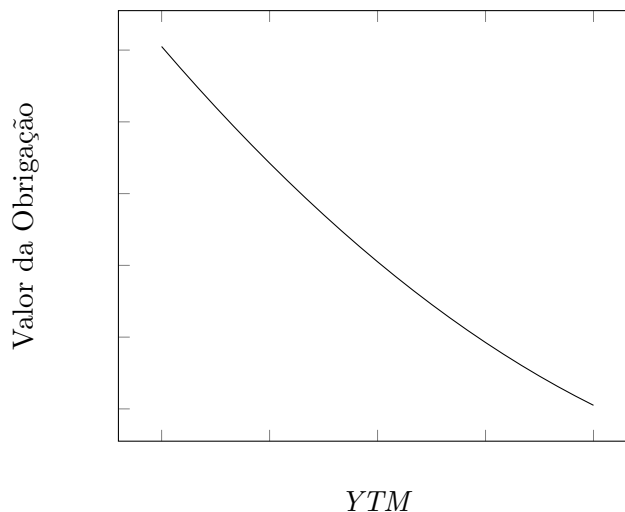


Figura 3.1: Relação entre Valor das Obrigações e *YTM*

A *YTM* da obrigação não pode divergir muito das taxas de juro que vigoram no mercado para títulos de risco e prazo idênticos e portanto as obrigações emitidas têm de se ir ajustando à evolução das taxas de juro. A forma como se processa esse ajustamento varia consoante as obrigações sejam de taxa variável, ou fixa. Quando as obrigações são de taxa variável, o seu rendimento provém, normalmente, de uma taxa de juro de cupão que vai variando ao longo do

tempo, ajustando-se às condições de mercado. Desta forma, o valor das obrigações permanece relativamente inalterado porque o ajustamento às taxas de juro de mercado é feito pela taxa de cupão. Contudo, existe a possibilidade de o emitente não honrar os seus compromissos, existindo risco de crédito. O valor das obrigações de taxa fixa antes de atingir a maturidade depende das condições de mercado, isto é:

- Quando as taxas de juro de mercado baixam, as obrigações valorizam. Isto porque, como possuem uma taxa de juro fixa superior às novas emissões de obrigações, despertam um interesse acrescido por parte dos investidores,
- Quando as taxas de juro de mercado sobem, acontece o processo inverso. As novas obrigações são emitidas com uma taxa de juro superior e os títulos anteriormente disponíveis veem o seu valor diminuir, pois tornam-se menos interessantes.

Ou seja, em qualquer das situações, existe um risco incorporado que corresponde ao risco de investimento assumido pelo investidor.

3.2 Risco de Investimento

Como vimos da secção 3.1, o valor das obrigações sofre variações desde o período em que estas vigoram até à sua maturidade. Esta variação decorre explicitamente da taxa de juro, tornando-se um risco a que se fica sujeito quando investimos em obrigações. O risco de investimento em obrigações pode ser decomposto nos dois principais fatores de risco: risco de crédito e risco de taxa de juro.

- **Risco de crédito** decorre da incerteza quanto à capacidade de a entidade emitente cumprir atempadamente com o serviço da dívida, ou seja, no cumprimento do pagamento do VR e cupões;
- **Risco de taxa juro** decorre da incerteza das variações das taxas de juro que, por um lado resulta na variação do preço/valor da obrigação, chamado o risco de preço; e, por outro lado, pode resultar numa variação da taxa de remuneração quando os rendimentos obtidos de uma aplicação forem novamente aplicados, podendo auferir-se juros mais baixos, chamado risco de reinvestimento.

O risco de crédito ocorre com mais frequência em obrigações cujo emitente é uma sociedade. O rendimento destas obrigações é normalmente mais elevado, comparativamente com as obrigações do Estado como contrapartida à exposição ao risco de incumprimento. Para avaliar o grau deste risco, existe no mercado, um indicador, denominado de *rating*, que mede o risco de crédito de uma forma coerente e estandardizada, não só para empresas como também entre países. São avaliados o nível de risco do setor de atividade, o posicionamento da empresa no mercado, a rentabilidade, a situação financeira e a qualidade da gestão da empresa. Esta avaliação permite graduar o risco das diferentes emissões de títulos, aferindo a capacidade de solvência dos emitentes.

Na tabela 3.1 ilustramos as notações financeiras usadas¹. Quanto mais baixo se está no *ranking*, mais os juros aumentam e podem tornar-se insuportáveis para a empresa pagar. Verifica-se também que existem 4 grandes níveis (A, B e C) de notações financeiras. Na linha superior da tabela correspondente à letra A, estão as entidades mais seguras ou com notas médias-altas.

¹Fonte *Moody's* [22]

Quanto à letra B existe apenas um nível em que a notação de risco de crédito se enquadra nos níveis de qualidade de investimento que corresponda a uma avaliação Baa. Os restantes níveis Ba e B, significam uma situação altamente especulativa no que toca à qualidade do emitente de dívida. Ou seja, existe um risco maior de o país, ou empresa, entrarem em incumprimento com as suas obrigações. Uma avaliação a baixo de Baa é considerado um nível de "lixo".

Chegando ao nível C, a entidade está em processo de insolvência e torna-se um investimento sem interesse para os investidores.

Tabela 3.1: Notações financeiras de avaliação.

Classificação	Significado
Aaa	Risco mínimo
Aa	Risco muito baixo
A	Risco baixo
Baa	Risco moderado
Ba	Risco substancial
B	Risco alto
Caa	Risco muito alto
Ca	Risco elevado
C	Risco máximo

Em alguns casos, a sociedade pode também emitir obrigações com taxa fixa, que complementando com o *rating*, origina um certo grau de imunização à volatilidade das taxas de juro, tornando o impacto do risco de crédito menos significativo.

Segundo a equação (3.1), que explicita a forma de cálculo do preço da obrigação, a taxa de juro é um risco de investimento comum em qualquer obrigação seja qual for o tipo de taxa de cupão incorporado. Por um lado, se a taxa é variável, esta não é constante ao longo do tempo, o que dificulta o cálculo do valor atualizado dos *cash-flows* recebidos, pois esta é influenciada pelas subidas e descidas das taxas de juro de mercado. Por outro lado, quando a taxa é fixa está-se sujeito a que o preço da obrigação seja desvalorizado pela subida da taxa de juro de mercado.

Torna-se, então, necessário conhecer a estrutura temporal das taxas de juro para conseguirmos avaliar os títulos detidos de acordo com as taxas de juro em vigor no mercado para cada instante. O seu conhecimento é útil não só para quem vende, mas também para quem investe. Importa avaliar a sua evolução temporal e, conseqüentemente, o impacto no valor da obrigação.

Ora isto leva-nos a introduzir modelos de simulação para a taxa de juro. Estes modelos simulam a variação futura durante um certo período, permitindo assim ao investidor ter uma noção de quanto poderá valer a obrigação ao longo do tempo. No próximo capítulo será introduzida a noção de modelos estocásticos recorrendo posteriormente ao modelo Vasicek, que será testado na simulação e na previsão da variação da taxa de juro.

Capítulo 4

Modelação da Taxa de Juro

Variações na taxa de juro afetam diretamente o preço e a rentabilidade de uma obrigação, tornando fulcral o estudo de modelos que descrevam a variação temporal das taxas de juro. Quando conhecido o preço de uma obrigação é possível determinar o valor da variação temporal das taxas de juro, com base numa transformação da fórmula de cálculo do preço da obrigação. No entanto, quando os preços não são conhecidos recorre-se a modelos de estimação para simular a evolução da taxa de juro. Neste contexto apresentamos o modelo Vasicek, que será introduzido e estudado no presente capítulo, e posteriormente testado no capítulo 5.

4.1 Introdução

O juro é o rendimento proveniente de um capital cedido/aplicado por um dado período de tempo. Em geral, se uma determinada quantia for emprestada por um certo período de tempo, o seu proprietário prevê receber no final do prazo o capital emprestado acrescido de uma determinada quantia, designada por juro. À noção de juro associa-se o tempo durante o qual ocorre a aplicação do capital, isto é, o juro é uma função do tempo, t , e do capital, P , que se pode escrever da forma:

$$j = F(t, P). \quad (4.1)$$

onde j - juro; t - tempo; P - Capital.

O juro é um rendimento que cresce ao capital aplicado/cedido e que varia consoante o capital aplicado e o tempo. Assume-se, então, que este é diretamente proporcional ao valor do capital inicial multiplicado por uma dada constante:

$$j = r \times P \quad (4.2)$$

Esta constante, r , designa-se por taxa de juro. No final do período de tempo t , o valor total acumulado, M , corresponderá a $P + j$. Se esta aplicação, (4.2), for feita recursivamente, a evolução é descrita pela equação a baixo [23]:

$$\begin{cases} dP(t) = rP(t)dt, & t \geq 0 \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Em particular, a evolução do valor de uma obrigação é descrita pela equação 4.3, em que o preço inicial da obrigação é apresentado por P_0 . Prova-se que a solução exata da equação 4.3 é dada por:

$$P(t) = P_0 e^{tr}. \quad (4.4)$$

Esta solução permite-nos saber qual o valor, ou preço, da obrigação em cada instante decorrido até à sua maturidade. No entanto, esta forma adotada para traduzir matematicamente o fenómeno da evolução do preço da obrigação é simplista dado que pressupõe que a sua evolução seja uniforme, o que nunca se observa no mercado financeiro. Quando aplicado o limite de $t \rightarrow +\infty$ à solução anterior apresentada, temos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P_0 e^{tr} \rightarrow +\infty,$$

o que não é verdade, não só porque a taxa de juro aplicada não é constante, e a rendibilidade da obrigação varia de instante para instante, como também porque existem fatores económicos associados que variam ao longo do tempo. Então, uma alternativa é considerar que a evolução é perturbada por um "ruído" com características aleatórias.

Suponhamos, então, que à equação da evolução do valor da obrigação (4.3), se adiciona um termo aditivo representativo do ruído, ou da incerteza, em cada instante t . A evolução passa a ser dada pela equação seguinte:

$$\begin{cases} dP(t) + C(t)dt = r(t)P(t)dt, t \geq 0 \\ P(0) = P_0 \end{cases}, \quad (4.5)$$

com funções r e C , e cujos valores são conhecidos em cada instante. A função taxa de juro corresponde a $r(t)$, e $C(t)$ representa o valor dos pagamentos dos cupões quando feitos continuamente. Prova-se que a solução da equação (4.5) é dada por:

$$P(t) = P_0 e^{\int_0^t r(s)ds} + e^{\int_0^t r(s)ds} \int_0^t e^{-\int_0^s r(h)dh} C(s)ds, \quad (4.6)$$

onde as variáveis s e h são variáveis de integração em função de t .

Ao invés da condição inicial considerada em (4.5), sabe-se que na maturidade o preço de uma obrigação corresponde ao valor de reembolso, VR, ou seja, tomando T como a maturidade da obrigação, a nova condição inicial é apresentada por $P(T) = VR$. Isto incorre uma pequena alteração na solução (4.6) em que $P_0 = VR$.

Quando P é conhecido no mercado das obrigações, é possível calcular a taxa de juro em vigor a partir de transformações feitas na solução (4.6). Considerando o caso particular das obrigações de cupão zero, ou seja, $C(t) = 0$, o preço destas reduz-se a:

$$P(t) = VR \times e^{\int_t^T r(s)ds}. \quad (4.7)$$

O preço também pode ser visto como uma função de T , ou seja, $P(t) = P(t, T)$. Reescrevendo a expressão anterior tem-se:

$$P(t, T) = VR \times e^{\int_t^T r(s, T)ds}, \quad (4.8)$$

onde

$$\int_t^T r(s, T)ds = \log \left(\frac{P(t, T)}{VR} \right). \quad (4.9)$$

Derivando esta expressão em ordem a T , vem

$$r(T, T) = \frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial}{\partial T} P(t, T). \quad (4.10)$$

No entanto, a fórmula $r(T, T)$ exige o conhecimento do valor de uma derivada que é desconhecida. Por outro lado, podemos considerar $r(t, T)$ aproximadamente constante, ou seja,

$$\int_t^T r(s, T)ds = (T - t) \times r(t, T), \quad (4.11)$$

que quando substituído na igualdade 4.9 permite obter

$$(T - t) \times r(t, T) = \log \left(\frac{P(t, T)}{VR} \right). \quad (4.12)$$

Assim, podemos estimar as taxas de juro em função de t e de T , para uma dada maturidade T e para os vários instantes t , pela seguinte expressão:

$$r(t, T) = \frac{\log \left(\frac{P(t, T)}{VR} \right)}{T - t}. \quad (4.13)$$

Mas os preços das obrigações no futuro são conhecidos, o que leva à construção de modelos que simulem as variações das taxas de juro. Atualmente, existe uma grande diversidade de modelos que estudam a variação temporal das taxas de juro. Os primeiros modelos que surgiram na literatura, e também os mais conhecidos, são os modelos contínuos de um fator [24], entre eles o modelo Vasicek.

4.2 Modelo Vasicek determinístico

Tal como para a equação da evolução do preço, vamos começar por descrever o modelo Vasicek para a evolução da taxa de juro, de forma determinística:

$$\frac{d}{dt}r(t) = a(b - r(t)), \quad a > 0, b \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Esta equação descreve a evolução da taxa $r(t)$, que é a taxa *spot*. A taxa *spot* é a taxa observada no dia para diferentes maturidades, e que corresponde à taxa de juro cobrada por um depósito de menor montante possível. É a taxa instantânea a que o capital se vence continuamente. Os parâmetros da equação, a e b , são constantes, em que b é o valor médio para o qual a taxa de juro converge; e a corresponde à velocidade de convergência para a média.

A solução da equação (4.14) é dada por:

$$r(t) = Ke^{-at} + b(1 - e^{-at}), \quad (4.15)$$

com $K \in \mathbb{R}$. Note-se que $K = r_0$ se considerarmos uma condição inicial do tipo $r(0) = r_0$, onde r_0 é a taxa de juro observada no momento antes da entrada em vigor da obrigação.

Demonstração:

Trata-se de uma equação diferencial linear de primeira ordem cuja solução se pode reduzir a um problema de primitivação visto que a equação não se anula. A equação (4.14) é equivalente a:

$$e^{at} \left(\frac{d}{dt}r(t) + ar(t) \right) = abe^{at}$$

Tendo em conta que $\frac{d}{dt}(e^{at}r(t)) = e^{at}\frac{d}{dt}r(t) + ae^{at}r(t)$, então obtemos:

$$\frac{d}{dt}(e^{at}r(t)) = abe^{at},$$

que primitivando,

$$\begin{aligned} e^{at}r(t) &= \int_0^t abe^{as} ds + K = b(e^{at} - 1) + K \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r(t) &= Ke^{-at} + b(1 - e^{-at}), \end{aligned}$$

onde K é uma constante arbitrária. ■

O modelo Vasicek determinístico é um modelo de taxa de juro com reversão para o valor médio. Esta afirmação justifica-se quando calculado o valor da taxa de juro quando t tende para $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} K e^{-at} + b(1 - e^{-at}) = b.$$

Também quando estudamos a monotonia da solução (4.15) temos que:

- Se $b > r(t) \Rightarrow r'(t) > 0 \Rightarrow r(t)$ é crescente;
- Se $b < r(t) \Rightarrow r'(t) < 0 \Rightarrow r(t)$ é decrescente.

Como a constante arbitrária K é uma taxa, então $K \leq 1$. Esta interpretação reflete novamente a convergência da taxa $r(t)$ para o valor médio a longo prazo.

Mais uma vez, a incerteza do futuro acaba por subestimar a modelação das taxas de juro de forma determinística pois o mercado financeiro não é perfeito, e muito menos previsível. Na tentativa de modelar esta incerteza, surgem os modelos estocásticos, que procuram modelar as taxas de juro através de equações diferenciais estocásticas.

4.3 Modelos Estocásticos

Os modelos estocásticos de um fator são representados pela equação diferencial estocástica:

$$dr_t = \mu(r_t)dt + \sigma(r_t)dW_t, \quad (4.16)$$

onde os parâmetros $\mu(r_t)$ e $\sigma(r_t)$, são funções do tempo t . A função $\mu(r_t)$ corresponde à parte determinística do modelo, que é designada por *drift*, e a função $\sigma(r_t)$ é o parâmetro introduzido para tentar modelar a incerteza presente nos mercados financeiros, designado por volatilidade.

O valor médio para o qual o modelo determinístico converge depende e é influenciado por um grande número de fatores económicos, como políticas monetárias e riscos financeiros. Por isso, torna-se necessário que o parâmetro b não seja completamente determinístico introduzindo-lhe um fator aleatório. Isto motiva à seguinte representação estocástica do parâmetro b de acordo com a estrutura de um processo de "ruído branco":

$$b \rightarrow b + \lambda W(t),$$

sendo $W(t)$ o movimento Browniano, ou processo de Wiener, com uma certa intensidade $\lambda > 0$.

O movimento Browniano surgiu inicialmente associado à descrição do movimento de uma partícula sobre uma superfície líquida em repouso [25]. O movimento dessa partícula é aqui representado pelo risco de volatilidade da taxa de juro que constitui uma medida de incerteza quanto à sua evolução ao longo tempo. O processo W_t mede, através da soma finita de pequenas deslocações, a deslocação de uma partícula Browniana no período de tempo t , desde o ponto inicial até um outro qualquer ponto fixado num eixo. O movimento Browniano (Processo de Wiener), tem as seguintes propriedades:

1. $W(0) = 0$;
2. Num intervalo $[s, t]$ os incrementos $W(t) - W(s)$ são independentes, isto é,

$$W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_{n+1}) - W(t_n),$$

com $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < t_{n+1} < +\infty$;

3. $W(t)$ tem incrementos estacionários, $W(t) - W(s) \stackrel{d}{\sim} N(0, \sqrt{t-s})$ em particular quando $s = 0$, $W_t \stackrel{d}{\sim} N(0, \sqrt{t})$;
4. $W(t)$ é contínua $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

Uma propriedade importante que se retira dos pontos 1. e 2. é que o movimento Browniano (Processo de Wiener) é um processo de Markov de 1^a ordem.

Reformulamos de seguida o modelo Vasicek determinístico de forma a incluir um parâmetro estocástico, de acordo com a estrutura da equação (4.16).

4.3.1 Modelo Vasicek

O modelo Vasicek, apresentado no artigo [26] e na bibliografia de Brigo e Mercuri, [27], é o modelo proposto a estudar neste trabalho, o qual pertence à classe de modelos de um fator. Introduzindo o parâmetro estocástico no modelo Vasicek determinístico, obtemos a nova equação:

$$\frac{d}{dt}r(t) = a((b + \lambda W(t)) - r(t)) = a(b - r(t)) + \underbrace{a\lambda}_{\sigma} W(t). \quad (4.17)$$

O parâmetro da volatilidade é representado por σ e $W(t)$ é o movimento Browniano. Esta é a equação de valores iniciais do modelo Vasicek, também conhecido por *Ornstein - Uhlenbeck*, de coeficientes constantes,

$$\begin{cases} dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \\ r(0) = r_0, \end{cases} \quad (4.18)$$

onde a , b e σ são constantes positivas.

Como veremos, a solução do modelo Vasicek é expressa em termos do movimento Browniano. A fim de fazer previsões da taxa de juro é necessário realizar simulações do movimento Browniano.

O modelo Vasicek é um modelo escrito da forma (4.16), capaz de descrever a evolução da taxa de juro. Toda a equação definida desta forma segue um processo de difusão de Itô, pois através da teoria do cálculo de Itô [28], é possível calcular uma solução exata, solução esta que depende apenas da forma específica dos coeficientes $\mu(r_t)$ e $\sigma(r_t)$, para os quais se aplica a fórmula de Itô (Anexo A). Neste contexto a solução da equação (4.18) para cada $s \leq t$ é dada por:

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u). \quad (4.19)$$

Demonstração: Para calcular uma solução, r_t , que satisfaça (4.18), consideremos a seguinte mudança de variável: $X_t = r_t - b$. Então $r_t = X_t + b$ e $dr_t = dX_t$, que substituindo na equação (4.18) obtém-se:

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t.$$

Tendo em conta a fórmula de Itô, apresentada no Anexo A, definimos uma função, $f(t, Y)$, que seja duplamente diferenciável, ou seja, tomemos $f(t, Y) = e^{at}Y$ tal que,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = ae^{at}Y, \quad \frac{\partial f}{\partial Y} = e^{at}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = 0.$$

No caso em que $Y = X_t$, pela fórmula de Itô tem-se:

$$de^{at}X_t = \left(ae^{at}X_t - ae^{at}X_t + \frac{\sigma^2}{2} \times 0 \right) dt + e^{at}\sigma dW_t \Leftrightarrow de^{at}X_t = e^{at}\sigma dW_t.$$

Integrando a expressão para cada $s \leq t$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_s^t de^{au} X_u du &= \int_s^t e^{au} \sigma dW_u \\ \Leftrightarrow [e^{au} X_u]_s^t &= \int_s^t e^{au} \sigma dW_u \Leftrightarrow e^{at} X_t - e^{as} X_s = \int_s^t e^{au} \sigma dW_u \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow X_t = X_s e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)} \sigma dW_u. \end{aligned}$$

Substituindo $X_t = r_t - b$ em que $X_s = r_s - b$ chegamos à solução da equação (4.18) dada por:

$$r(t) = r(s) e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)$$

■

A variável $r(t)$ é a taxa de juro de curto prazo (*short rate*), isto é, a taxa observada para diferentes instantes num dado intervalo de tempo, que segue uma distribuição Normal, com valor esperado e variância:

$$E(r(t)) = r(s) e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}),$$

$$Var(r(t)) = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}].$$

Demonstração:

Na secção 4.16 referiu-se que W_t aproxima-se a uma distribuição Normal. O mesmo se pode aferir sobre o integral estocástico da solução da equação de Vasicek,

$$\int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u),$$

com $0 < s < t < +\infty$. Como a função $e^{-a(t-u)}$ é regular ou, dito de outra forma, é uma função simples, então o integral pode ser definido como a seguinte soma:

$$\int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u) = \sum_{[t_{i-1}, t_i]} \underbrace{e^{-a(t_i-s)} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}_{X_{t_i}}$$

Pelo Teorema do Limite Central, X_{t_i} segue assintoticamente uma distribuição Normal com:

$$\begin{aligned} E\left(\int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)\right) &= E\left(\sum_{[t_{i-1}, t_i]} e^{-a(t_i-s)} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\right) \\ &= \sum_{[t_{i-1}, t_i]} E\left(e^{-a(t_i-s)}\right) \underbrace{E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} Var\left(\int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)\right) &= E\left(\left(\int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)\right)^2\right) - \left[E\left(\int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)\right)\right]^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Var\left(\int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)\right) &= E\left(\left(\int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)\right)^2\right). \end{aligned}$$

Pela isometria de Itô [29],

$$\begin{aligned} E\left(\left(\int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)\right)^2\right) &= E\left(\int_s^t \left(e^{-a(t-u)}\right)^2 du\right) \\ &= \frac{1}{2a} (1 - e^{-2a(t-s)}). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} & E\left(r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1 - e^{-a(t-s)}\right) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)\right) = \\ & = r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1 - e^{-a(t-s)}\right) + \sigma E\left(\int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)\right) = r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1 - e^{-a(t-s)}\right) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \text{Var}(r(t)) &= E((r(t))^2) - [E(r(t))]^2 = \\ &= E\left(\left(r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1 - e^{-a(t-s)}\right)\right)^2\right) \\ &+ 2\left(r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1 - e^{-a(t-s)}\right)\right)\sigma E\left(\int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)\right) \\ &+ E\left(\left(\sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)\right)^2\right) - \left(r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1 - e^{-a(t-s)}\right)\right)^2 \\ &= E\left(\left(\sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)\right)^2\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(t-s)}\right). \end{aligned}$$

Logo $r_t \sim N\left(r_s e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})\right)$. ■

Uma consequência negativa deste modelo é que, para cada instante t , a taxa r_t pode assumir, com probabilidade positiva, valores negativos. Esta é, de fato, uma das principais desvantagens do modelo. A solução desta equação também poderia ser aproximada através de métodos numéricos, como a conhecida aproximação de Euler.

4.3.2 Estimadores dos parâmetros do Modelo Vasicek

Os coeficientes da solução do modelo Vasicek, equação (4.19), são estimados através do Método da Máxima-Verosimilhança. Para construir a função de verosimilhança recorre-se a uma base histórica, isto é, com base nas taxas $r_0, r_1, r_2, \dots, r_N$.

Os coeficientes a , b e σ da solução (4.19), são obtidos pela estimação das funções:

1. $\alpha(a) = e^{-a\delta}$,
2. $\beta(b) = b$,
3. $V^2(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\delta})$.

O intervalo de tempo entre dois pontos consecutivos da base de dados, é designado por δ . Os estimadores de máxima verosimilhança para os parâmetros α , β e V^2 , são obtidos respetivamente por:

$$\hat{\alpha} = \frac{N \sum_{i=1}^N r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^N r_i \sum_{i=1}^N r_{i-1}}{N \sum_{i=1}^N r_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^N r_{i-1}\right)^2}, \quad (4.20)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N (r_i - \hat{\alpha} r_{i-1})}{N(1 - \hat{\alpha})}, \quad (4.21)$$

$$\hat{V}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i - \hat{\alpha}r_{i-1} - \hat{b}(1 - \hat{\alpha}))^2. \quad (4.22)$$

Demonstração:

Seja $r_t \sim N\left(r_s e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}), \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}]\right)$, cuja função densidade de probabilidade (f.d.p) é dada por:

$$f(r_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}]}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r_t - r_s e^{-a(t-s)} - b(1 - e^{-a(t-s)})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}]}} \right)^2}.$$

Substituindo pelas funções $\alpha = e^{-a\delta}$ e $V^2 = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a\delta})$, tem-se:

$$f(r_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r_t - r_s \alpha - b(1 - \alpha)}{\sqrt{V^2}} \right)^2},$$

onde o vetor r_t contém o histórico das taxas observadas, r_0, r_1, \dots, r_N , de dimensão N ; e β , α e V^2 são os parâmetros desconhecidos. A função de verosimilhança, denotada por $L(\cdot; \cdot)$, das N taxas, será então a f.d.p. conjunta, vista como função dos parâmetros desconhecidos, e é descrita como:

$$\begin{aligned} L(r_1, r_2, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2) &= \prod_{i=1}^N f(r_0, r_1, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2) = \\ &= f(r_0; \alpha, \beta, V^2) \times f(r_1|r_0; \alpha, \beta, V^2) \times f(r_2|r_0, r_1; \alpha, \beta, V^2) \times \dots \\ &\dots \times f(r_N|r_{N-1}, \dots, r_1, r_0; \alpha, \beta, V^2), \end{aligned}$$

Por se tratar de um processo de Markov, temos:

$$\begin{aligned} L(r_1, r_2, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2) &= f(r_0; \alpha, \beta, V^2) \times f(r_1|r_0; \alpha, \beta, V^2) \times f(r_2|r_1; \alpha, \beta, V^2) \times \dots \\ &\dots \times f(r_N|r_{N-1}; \alpha, \beta, V^2) = \prod_{i=1}^N f(r_i, r_{i-1}, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2). \end{aligned}$$

Desenvolvendo a expressão anterior:

$$\begin{aligned} L(r_1, r_2, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi V^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r_1 - r_0 \alpha - \beta(1 - \alpha)}{\sqrt{V^2}} \right)^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi V^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r_2 - r_1 \alpha - \beta(1 - \alpha)}{\sqrt{V^2}} \right)^2} \times \dots \\ &\dots \times \frac{1}{\sqrt{2\pi V^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r_N - r_{N-1} \alpha - \beta(1 - \alpha)}{\sqrt{V^2}} \right)^2} = (2\pi V^2)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_i - r_{i-1} \alpha - \beta(1 - \alpha)}{\sqrt{V^2}} \right)^2}. \end{aligned}$$

Como alternativa à da função $L(r_1, r_2, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2)$ é possível usar também a função log-verosimilhança, $\log(L(r_1, r_2, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2))$, uma vez que ambas atingem os seus máximos para os mesmos parâmetros α , β e V^2 :

$$\mathcal{L}(r_1, r_2, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2) = \log(L(r_1, r_2, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2)),$$

resultando assim:

$$\mathcal{L}(r_1, r_2, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2) = -\frac{N}{2} \log(2\pi V^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(r_i - r_{i-1} - \beta(1 - \alpha))^2}{V^2}.$$

Tendo derivada contínua sobre todo o espaço de parâmetros, os estimadores de máxima verosimilhança são determinados através da resolução do sistema de três equações:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{L}(r_1, r_2, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \mathcal{L}(r_1, r_2, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial V^2} \mathcal{L}(r_1, r_2, \dots, r_N; \alpha, \beta, V^2) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow & \begin{cases} -\sum_{i=1}^N \alpha (r_{i-1} - \beta)^2 + \sum_{i=1}^N (r_i - \beta) (r_{i-1} - \beta) = 0 \\ \sum_{i=1}^N [(1 - \alpha) (r_i - r_{i-1} \alpha) - \beta (1 - \alpha)^2] = 0 \\ -\frac{N}{2V^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(r_i - r_{i-1} \alpha - \beta (1 - \alpha))^2}{(V^2)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^N (r_i - \hat{\beta})}{\sum_{i=1}^N (r_{i-1} - \hat{\beta})} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \frac{N \sum_{i=1}^N r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^N r_{i-1} \sum_{i=1}^N r_i}{N \sum_{i=1}^N r_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^N r_{i-1} \right)^2} \\ \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N (r_i - r_{i-1} \hat{\alpha})}{N (1 - \hat{\alpha})} \\ \hat{V}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i - r_{i-1} \hat{\alpha} - \hat{\beta} (1 - \hat{\alpha}))^2 \end{cases} \end{aligned}$$

■

Uma vez calculados os estimadores de máxima verosimilhança para α , β e V^2 , facilmente se obtém os valores dos parâmetros a , b e σ , da equação (4.18):

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = e^{-\hat{a}\hat{\delta}} \\ \hat{V}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{2\hat{a}} (1 - e^{-2\hat{a}\hat{\delta}}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(\hat{\alpha}) = e - \hat{a}\hat{\delta} \\ 2\hat{a}\hat{V}^2 = \hat{\sigma}^2 (1 - \hat{\alpha}^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = -\frac{\ln(\hat{\alpha})}{\hat{\delta}} \\ \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{2\hat{a}\hat{V}^2}{1 - \hat{\alpha}^2}} \\ \hat{\beta} = \hat{b} \end{cases}$$

4.4 Outros Modelos

Existem muitos outros modelos na literatura para descrever a evolução das taxas de juro, o quais se distinguem basicamente pela forma como definem as funções $\mu(r_t)$ e $\sigma(r_t)$. Em termos gerais, estes modelos podem ser classificados em dois tipos:

- Modelos de equilíbrio;
- Modelos não-arbitragem.

Os modelos de equilíbrio derivam da relação entre a esperança de rendibilidade e o risco de taxa juro. Os modelos mais conhecidos são os modelos Vasicek (o modelo em estudo no presente trabalho), Cox, Ingersoll e Ross, [27]. Um resumo destes modelos encontra-se na tabela 4.1:

Tabela 4.1: Modelos de Equilíbrio.

Vasicek	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$
Cox, Ingersoll e Ross	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$

Note-se que a única diferença entre os modelos anteriores, reside no segundo membro da soma do modelo Cox, Ingersoll e Ross, que faz com que para cada instante t , a taxa de juro r_t assumam consecutivamente valores positivos, ao contrário do que acontece no modelo Vasicek.

Os modelos de não-arbitragem, apresentados na tabela 4.2, conseguem ser mais rigorosos do que os modelos anteriores na representação da estrutura temporal das taxas de juro, uma vez que o ponto médio, b , deixa de ser constante e vai sendo reajustado em cada instante do tempo.

Tabela 4.2: Modelos de não-arbitragem.

Hull e White	$dr_t = (b_t - ar_t)dt + \sigma dW_t$
Black-Karasinski	$dr_t = (b_t - a \ln(r_t))dt + \sigma dW_t$

Estes dois tipos de modelos diferem pela função da estrutura temporal das taxas de juro e pela evolução da taxa de juro. Enquanto que os modelos de equilíbrio não conseguem capturar as alterações mais complexas da estrutura temporal, os modelos de não-arbitragem conseguem-no, pois consideram o *drift* dependente do tempo através do seu parâmetro b_t .

Capítulo 5

Análise dos Dados

É com base nas taxas de juro observadas que um modelo é calibrado, por estimação dos parâmetros, e posteriormente é simulada a evolução da taxa de juro de curto prazo futura.

A taxa de curto prazo, num dado momento, é a taxa que se aplica a um período infinitesimal de tempo, não sendo diretamente observável no mercado [30]. Existem no mercado financeiro diferentes taxas de juro, cada uma associada a aplicações distintas, entre elas, EONIA, EURIBOR e LIBOR:

- EONIA - é a média ponderada das taxas *overnight*, isto é, as taxas de juro mais baixas acordadas entre duas instituições financeiras durante um curto espaço de tempo, para empréstimos interbancários;
- EURIBOR - são as taxas de juro oferecidas aos bancos de referência, para depósitos a prazo interbancários da zona euro;
- LIBOR - é a taxa de juro média de referência interbancária do mercado monetário de Londres.

É através destas taxas que resulta a chamada taxa *swap*, que deriva do preço de uma *swaption*, isto é uma opção OTC (*over-the-counter*)¹ que permite ao seu detentor adquirir um contrato *swap* numa data futura pré-determinada. Um contrato *swap* de taxa de juro consiste num contrato entre dois intervenientes de mercado que acordam trocar um conjunto de *cash-flows* fixos e um conjunto de *cash-flows* variáveis, dependentes da evolução de uma dada taxa flutuante de referência, EONIA, EURIBOR ou LIBOR. Uma vez que a taxa *swap* está cotada para diferentes maturidades, esta é usada para a avaliação da maioria das obrigações.

5.1 Descrição da base de dados

Numa fase inicial foi recolhido o histórico entre 31/12/1999 até 01/12/2015 da taxa EONIA *swap* EUR cedido pela Vitoria - Seguros no dia 01/12/2015, e obtida através da plataforma *Bloomberg* com maturidades a variar entre 1 semana e 50 anos. Foi também extraído, com o mesmo intervalo de tempo, do banco de dados do Banco de Portugal a base de dados da taxa de rentabilidade das OT, representativas da dívida pública portuguesa, no dia 10/02/2016 [31], com maturidades de 3, 5 e 10 anos. O histórico de maturidade a usar é especificado de acordo com a maturidade fixada para cada tipo de obrigação. Isto deve-se ao facto de os diferentes históricos

¹Um mercado OTC é um mercado não regulamentado onde as transações entre duas partes ocorrem diretamente.

para as maturidades seguirem distribuições diferentes, pois senão bastaria apenas um histórico para calibração do modelo Vasicek qualquer que fosse a maturidade fixada. Para demonstrar esta distinção recorreremos ao teste acadêmico Kruskal- Wallis que averigua se um determinado conjunto de amostras seguem a mesma distribuição de probabilidade.

Teste Kruskal - Wallis

Seja m_i o histórico de maturidade com i anos.

Pergunta: As populações subjacentes às amostras m_i têm a mesma distribuição de probabilidade?

O teste estatístico Kruskal-Wallis é usado para testar se um conjunto de amostras independentes provem da mesma distribuição. É usado para testar a hipótese nula de que todas as populações possuem funções de distribuição iguais contra a hipótese alternativa de que existe pelo menos uma população cuja função de distribuição é diferente das restantes [32]. Basta então que exista um histórico de maturidade com distribuição de probabilidade diferente para que a hipótese H_0 seja rejeitada. Consideremos por isso, uma amostra para a taxa *swap* com o histórico das maturidade de 3, 5 e 10 anos e o mesmo para a taxa de rendibilidade das OT. Formalmente testamos as hipóteses:

$$H_0 : F_{m_3}(x) = F_{m_5}(x) = F_{m_{10}}(x), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$H_1 : \exists F_{m_i}(x) : F_{m_i}(x) \neq F_{m_j}(x), i = j = \{3, 5, 10\} \wedge i \neq j,$$

onde $F_{m_i}(x)$ é a função de distribuição correspondente a cada maturidade m_i . Para aplicar o teste de Kruskal-Wallis às maturidades de 3, 5 e 10 anos, executamos o comando *kruskal.test* disponível no software de programação *R* tendo obtido os resultados apresentados nas figuras 5.1 e 5.2:

```
> kruskal.test(historicOT)
      Kruskal-Wallis rank sum test
data:  historicOT
Kruskal-Wallis chi-squared = 56.8949, df = 2, p-value = 4.42e-13
```

Figura 5.1: Resultado do teste *Kruskal - Wallis* para as taxas de OT.

```
> kruskal.test(historicSwap)
      Kruskal-Wallis rank sum test
data:  historicSwap
Kruskal-Wallis chi-squared = 640.73, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

Figura 5.2: Resultado do teste *Kruskal - Wallis* para as taxas *swap*.

Como se pode aferir das figuras 5.1 e 5.2, tanto para as taxas de rendibilidade como para as taxas *swap*, a hipótese nula é rejeitada, isto é, os históricos das maturidades seguem efetivamente diferentes distribuições. Portanto, para a simulação futura é necessário recorrer-se ao respetivo histórico dessa maturidade, como já seria de esperar.

Esta distinção entre as observações das maturidades levanta um problema para a previsão da taxa de juro para as obrigações cujo o histórico da maturidade não exista ou não esteja acessível.

Como vimos, os históricos das maturidades observadas podem ser diferentes, o que obriga a extrapolar informação para as observações. Neste contexto o método de extrapolação adotado pela EIOPA é o método de *Smith-Wilson* [17]. Para os dados usados neste projeto teve-se o cuidado conveniente de trabalhar apenas com as observações disponíveis considerando um período de tempo contínuo, não sendo necessário assim, existir extrapolação.

A título de exemplo, nas análises seguintes, iremos apenas fazer uso do histórico das taxas com maturidade a 3 anos, tanto *swap* como da rendibilidade das OT, por ambos se encontrarem acessíveis e com maior período contínuo de observações. O estudo feito a estas taxas e posterior aplicação ao modelo Vasicek será um exemplo do procedimento a efetuar para os restantes casos, maturidades.

O histórico das taxas *swap* e de rendibilidade disponíveis até à data para o desenvolvimento do projeto está compreendido entre os períodos 31/12/1999 e 31/12/2015, variando apenas a periodicidade com que a recolha foi feita:

- taxa *swap*: recolhida diariamente perfazendo uma dimensão total de 4152 taxas,
- taxa de rendibilidade: recolhida mensalmente tendo uma dimensão de 192 taxas.

A representação da evolução das taxas ao longo deste período é apresentada nos gráficos da figura 5.3. Esta apresenta a evolução das taxas no decorrer do tempo, tendo maior amplitude em determinados instantes derivado da instabilidade financeira da União Europeia, com a qual Portugal foi afetado, como se pode ver no gráfico à esquerda da figura 5.3:

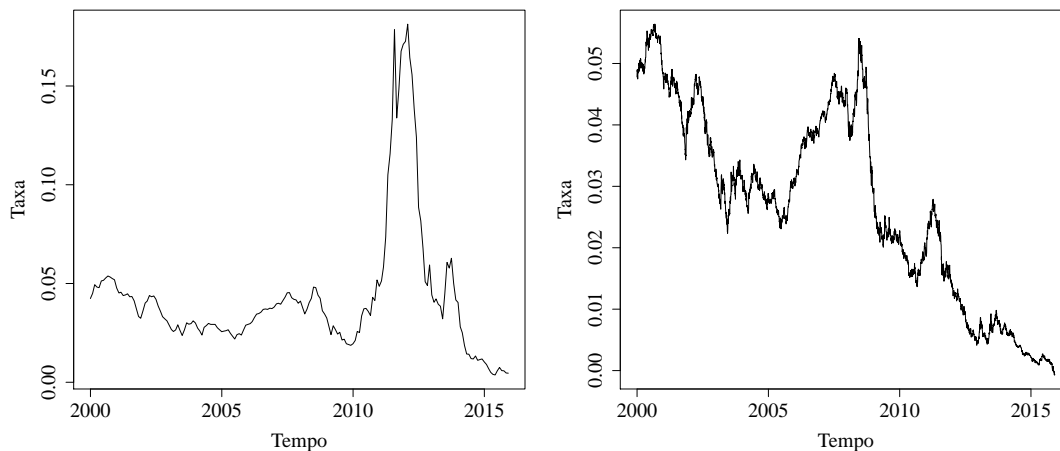


Figura 5.3: Taxa de rendibilidade das OT mensal a 3 anos (esquerda), Taxa *swap* diária a 3 anos (direita).

Com base nos relatórios disponíveis entre os anos 2005 e 2014 da Agência de Gestão da Tesouraria e da Dívida Pública - IGCP, é possível perceber cronologicamente a influência gradual da crise financeira na taxa de rendibilidade das OT. Em 2008², [34], dá-se por encerrado um ciclo de estabilidade que se tinha vindo a verificar nos últimos três anos com um aumento do volume bruto da dívida soberana em toda a União Europeia de cerca de 654 mil milhões, dos quais 2.5% pertencem à República Portuguesa. Em 2009, a dívida continuou a subir, ascendendo aos 941.4 mil milhões, relatório [35], com 1.8% pertencentes à República Portuguesa. No entanto, mesmo com impacto pleno da crise financeira sobre a economia, houve capacidade de absorção da dívida por parte dos mercados financeiros. Esta capacidade revelou-se insuficiente, pois no ano seguinte foram particularmente afetados pela instabilidade financeira os países de Portugal,

²Até este ano foram consultados os relatórios de 2005, 2006 e 2007, onde apenas se relatou a evolução da dívida pública, [33].

Irlanda, Espanha e Grécia. No caso de Portugal, este acabou por ser apoiado pelo Banco Central Europeu (BCE), em maio de 2010, [36], que adquiriu dívida soberana Portuguesa quando a taxa *yield* começou a tomar valores demasiados elevados. O crescimento desta taxa é bem notório no gráfico da figura 5.3 (esquerda). No último relatório, de 2011 [37] a taxa de rendibilidade das OT ainda apresenta um agravamento da dívida soberana pela crise financeira, e a partir de 2012 [38], dá sinais de um crescimento lento da economia, de um início de estabilização, mas sem nunca garantir de facto a plena estabilização da economia.

Na zona Euro, cabe ao BCE fixar taxas de juro oficiais que servem de referência para as taxas de juro do mercado interbancário, entre elas a EONIA, que posteriormente dará origem à taxa *swap*. O BCE tem à sua disposição vários meios para intervir no mercado de liquidez. Um dos instrumentos mais importantes corresponde às operações principais de refinanciamento (OPR), com as quais providencia liquidez, segundo uma previsão, para as necessidades do sistema bancário da zona Euro. Para além desta, dispõe de duas facilidades permanentes, a facilidade de depósito e a facilidade de cedência marginal. As taxas das facilidades são “penalizadoras” de modo a que as instituições recorram a este instrumento apenas em caso de ocorrência tardia e inesperada de grandes choques individuais de liquidez, [39]. As facilidades têm maturidade *overnight* e têm por objetivo limitar a volatilidade das taxas *overnight*. Estas acabam por ter o papel de delimitar a flutuação da taxa de juro *overnight* do mercado, como se verifica na figura 5.4:

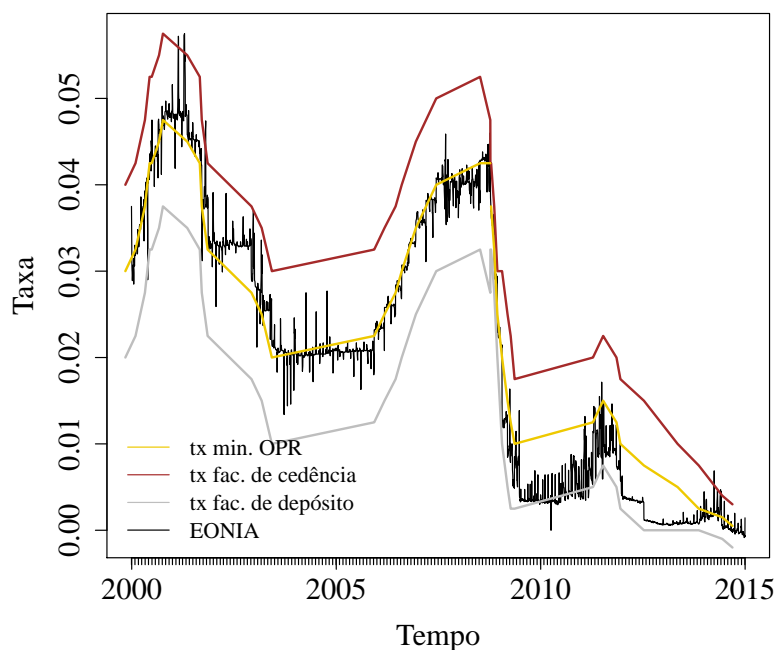


Figura 5.4: Taxas EONIA e de referência diária do BCE.

Entre 2000 e 2008, os bancos interessados em obter financiamento submetiam as suas propostas de acordo com o montante desejado e a taxa que estavam dispostos a pagar. As propostas eram satisfeitas por ordem decrescente de taxas propostas, que não podiam ser inferiores à taxa mínima definida pelo BCE [40]. A crise de liquidez que se começou a gerar na Europa em meados de 2008, originada nos E.U.A pela falência de instituições financeiras com grande influência mundial, levou ao endividamento dos governos na tentativa de evitar o mesmo fim, agravando os défices orçamentais e aumentando cada vez mais a dívida dos Estados. Este endividamento gerou dúvidas na capacidade de cumprimento da dívida por parte de alguns países, onde se destacaram Portugal, Irlanda, Grécia e Espanha, cabendo ao BCE tomar medidas de apoio aos países mais debilitados. Para tal, uma das medidas tomadas em setembro de 2008 foi a adoção

do leilão de taxa fixa com satisfação total das propostas. Desta forma, as entidades passaram a submeter apenas o montante que necessitavam, obtendo-o na sua totalidade, pagando-o à taxa de juro definida pelo BCE igual para todos os participantes. Esta medida representou uma descida da taxa das OPR, e conseqüentemente da taxa EIONA. Foi sem dúvida uma das medidas mais relevantes, assegurando as necessidades dos bancos ao mesmo tempo que ia ajustando a amplitude entre as taxas de facilidade. A taxa EONIA passou a situar-se sistematicamente abaixo da taxa das OPR e mais próxima da taxa de facilidade de depósito. De um modo geral, as medidas tomadas foram eficazes em conter a turbulência nos mercados de financiamento.

O conhecimento dos acontecimentos cronológicos dos históricos das taxas, *swap* e de rentabilidade, sugere-nos a existência de pelo menos dois períodos distintos em ambos, que devem ser estudados em separado. Um período em que as taxas se regiam segundo as necessidades do mercado financeiro, e um período segundo o qual a evolução das taxas foi influenciada, pelas medidas implementadas pelo BCE. Nenhum modelo de previsão previu a crise que se gerou, e muito menos as ações concretizadas pelo BCE para estabilizar o mercado financeiro. É um facto que esse período existiu e pertence ao histórico. No entanto, não se pretende, ou se quer, que tais efeitos produzidos em toda a Europa e outros Estados se repitam, querendo mesmo é que exista uma harmonização de todo o mercado financeiro. Convenientemente para progressão deste projeto vamos restringir-nos ao sub-intervalo de tempo dos anos antecedentes à crise financeira, para o qual não houve uma manipulação direta das taxas procurando ter um período consideravelmente estável.

5.1.1 Sub-intervalos em estudo

Na taxa de rentabilidade das OT, sem dúvida que o ponto de diferenciação é o instante em que existe a compra de dívida soberana por parte do BCE ao Estado português, em maio de 2010, provocando posteriormente a queda da taxa de rentabilidade das OT. Desta forma, temos um histórico em estudo compreendido entre os meses 31/12/1999 e 30/04/2010 apresentado na figura 5.5.

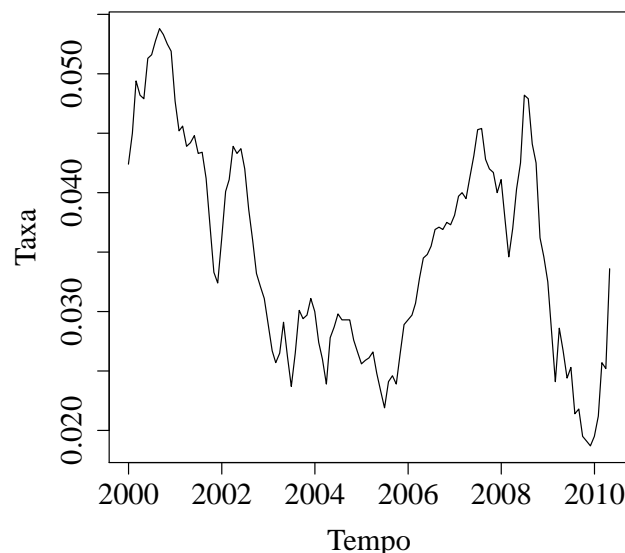


Figura 5.5: Taxa de rentabilidade das OT mensal com maturidade a 3 anos.

Para a taxa *swap*, que é o reflexo da taxa EONIA, a alteração dos leilões de taxa variável para taxa fixa foi a medida mais relevante tomada, provocando o declive negativo da taxa, dividindo o histórico em dois. O sub-intervalo a considerar é, então, apresentado na figura 5.6 compreendido

entre os dias 31/12/1999 a 29/08/2008.

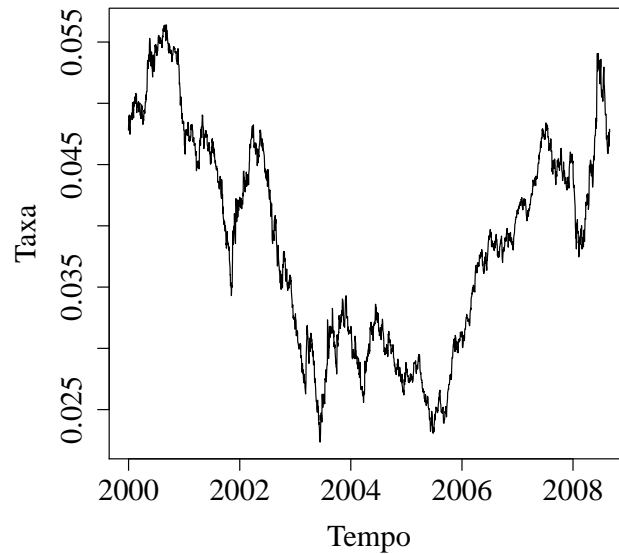


Figura 5.6: Taxa *swap* diária com maturidade a 3 anos.

Passamos, então, a ter os seguintes históricos:

- taxa *swap*, de 31/12/1999 a 29/08/2008, recolhida diariamente perfazendo uma dimensão total de 2261 observações,
- taxa de rendibilidade, de 31/12/1999 a 30/04/2010, recolhida mensalmente tendo uma dimensão de 125 observações.

5.2 Análise Exploratória

Com base na normalidade do modelo Vasicek, será interessante procurar saber se as distribuições subjacentes à taxa de rendibilidade e à taxa *swap* seguem distribuições Normais. Para tal, apresentamos abaixo, na figura 5.8 a análise feita ao histórico considerado da taxa de rendibilidade das OT, e na figura 5.9, a análise ao histórico da taxa *swap*.

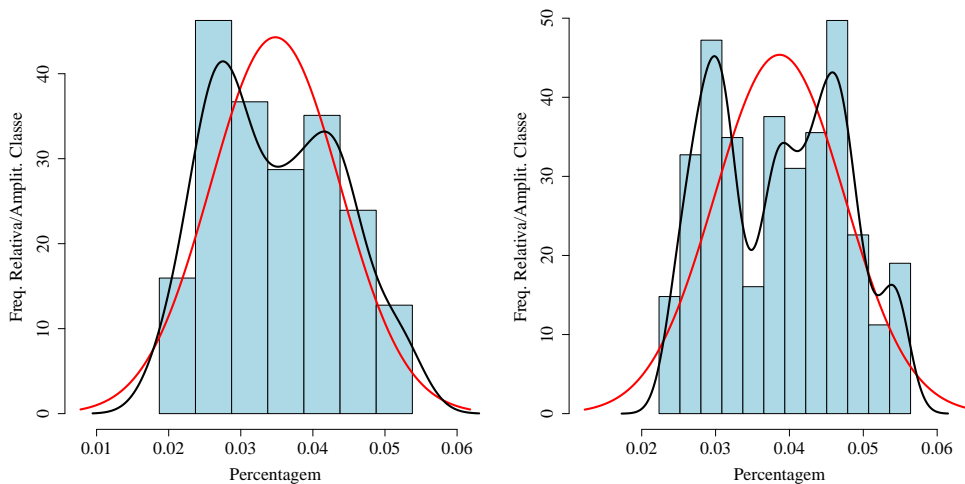


Figura 5.7: Histograma. Estimação da f.d.p: Normal, estimador de *kernel*. Taxa de rendibilidade das OT (esquerda) e *swap* (direita).

O histórico da taxa de rentabilidade das OT não segue uma distribuição Normal, por visualização do histograma (figura 5.7 (esquerda)), e confirmado pelos testes Shapiro-Wilk (est. de teste=0.96291, p -value=0.001671) e Kolmogorov-Smirnov (est. de teste=0.11481, p -values=0.0003563). Também o mesmo se passa com o histórico da taxa *swap* (direita), figura 5.7, com os testes Shapiro-Wilk (est. de teste=0.95752, p -values=0) e Kolmogorov-Smirnov (est. de teste=0.10636, p -values=0). Em seguida é apresentada uma curta análise exploratória às series com a interpretação dos gráficos de *boxplot*, tendência, função de auto-correlação (FAC) e função de auto-correlação parcial (FACP) dos históricos da taxa de rentabilidade das OT e da taxa *swap*, figuras 5.8 e 5.9, respetivamente.

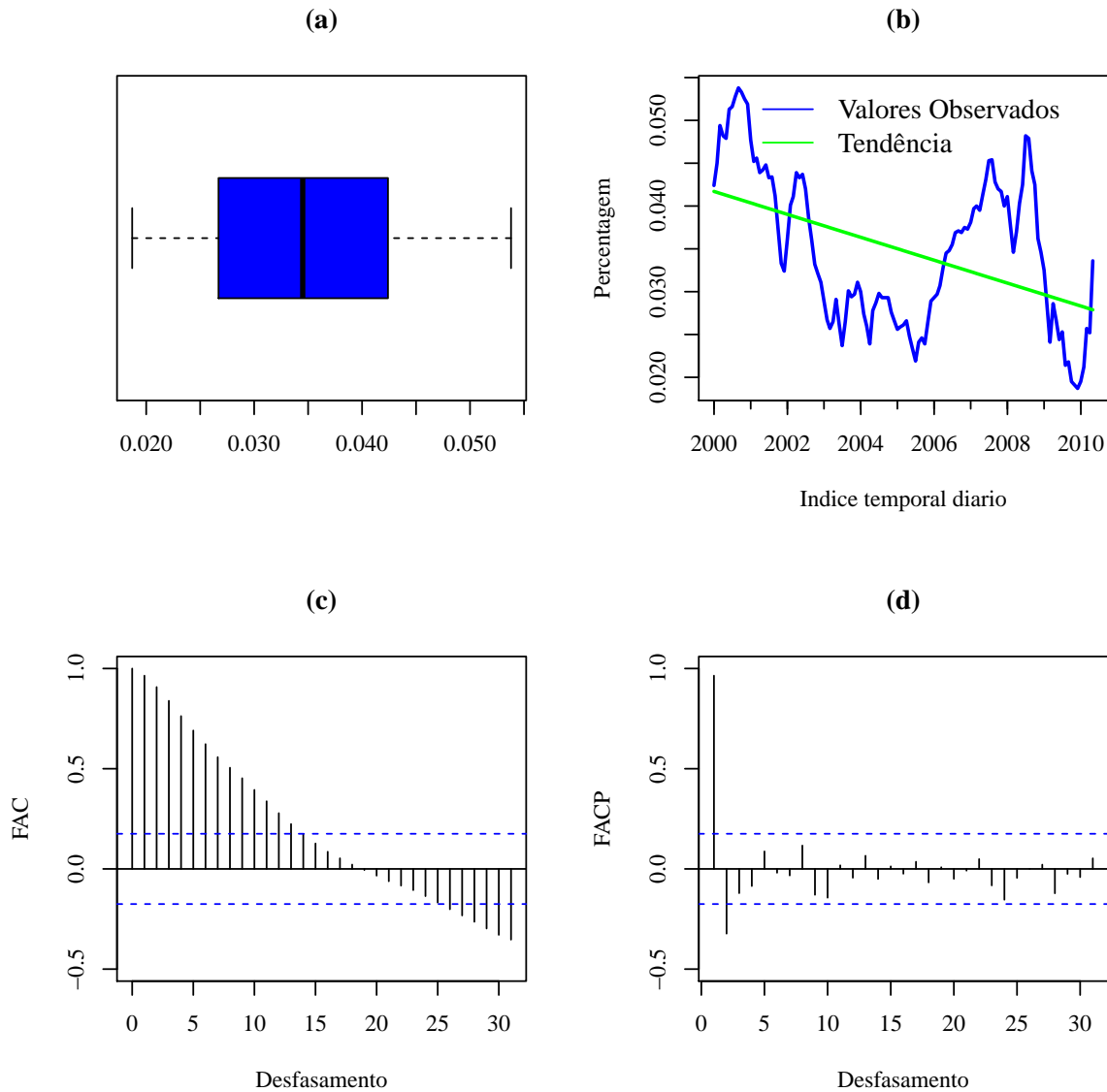


Figura 5.8: Boxplot (a), tendência (b), FAC (c) e FACP do histórico da taxa de rentabilidade das OT.

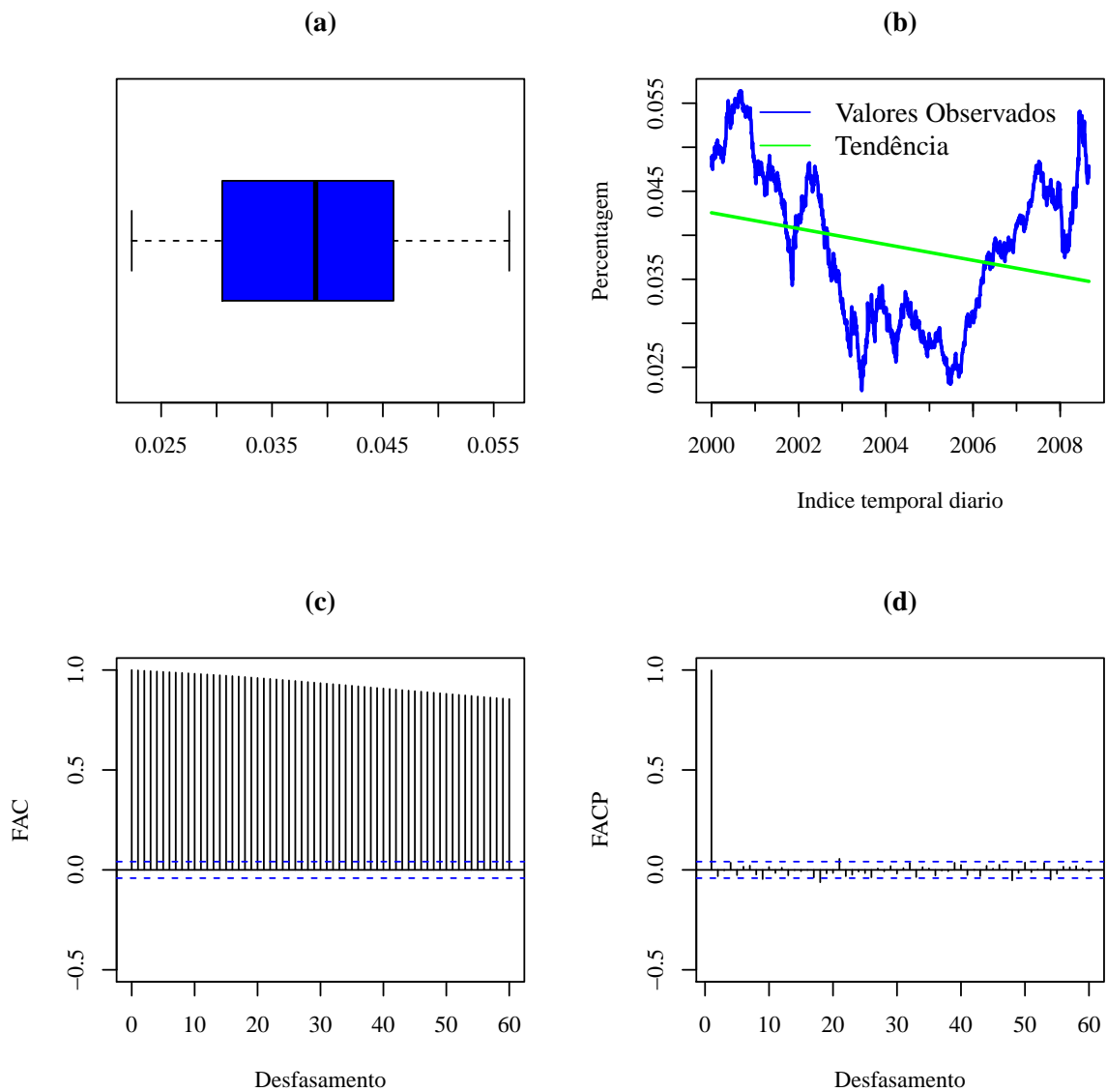


Figura 5.9: Boxplot (a), tendência (b), FAC (c) e FACP do histórico da taxa *swap*.

Começando por analisar a figura 5.8 relativa à taxa de rendibilidade das OT, o gráfico *boxplot* (a) revela uma distribuição simétrica. É perceptível na figura 5.5 um declive negativo, que poderá ser descrito por uma função linear como apresentado no gráfico (b) da figura 5.8. Quando observado os gráficos de auto-correlação, FAC (Função de Auto-Correlação), gráfico (c), e FACP (Função de Auto-Correlação Parcial), gráfico (d), o histórico apresenta-se não estacionário, existindo uma forte correlação ao *lag* 1, no primeiro desfasamento.

Da figura 5.9 podemos concluir que o gráfico do *boxplot* (a), apresenta uma distribuição ligeiramente assimétrica, e nos gráficos (c) e (d) a não existência de estacionaridade do histórico é devido à presença de uma forte correlação ao *lag* 1, sendo esta muito significativa devido ao elevado valor que toma. Quanto ao gráfico (b), este apresenta um declive com estrutura semelhante à observada na figura anterior 5.8.

5.3 Aplicação do Modelo Vasicek

Será com base nas séries apresentadas em 5.2 que partimos para o ajustamento do modelo Vasicek. Recorremos a estas séries para a calibração do modelo e, posteriormente, avaliar os resultados do seu comportamento, e a sua sensibilidade em descrever a evolução das taxas. Outras formas de calibrar o modelo Vasicek podem ser consideradas, em particular como apresentado no artigo [41]. Faremos a avaliação do modelo Vasicek em duas etapas. Primeiramente avaliando os resultados obtidos por simulação, e em seguida avaliando os resultados obtidos para a previsão futura da taxa de juro relativa a um determinado período de tempo com observações conhecidas. À medida que se vão realizando estes testes não só são apresentados os resultados, como também o código implementado no *software* de programação *R*.

5.3.1 Simulação

Para a estimação dos parâmetros do modelo Vasicek, é necessário armazenar o histórico em ficheiro excel, o qual posteriormente é importado para o *R* instalando o *package* *xlsx* e executando o comando onde se especifica a localização do ficheiro (ver figura 5.10).

```
>histTx<- read.xlsx(...) #Carrega ficheiro excel com o histórico
```

Figura 5.10: Comando R: localização dos ficheiros excel

Os parâmetros do modelo Vasicek são estimados pelo método de Máxima-Verosimilhança. Como demonstrado no capítulo 4, subsecção 4.3.2, a implementação do método de estimação apresenta-se na figura 5.11:

```
#ESTIMADOR DE MÁXIMA - VEROSIMILHANÇA

>dados=t(hist[T])
>N=length(dados)
>dt = 1/N
>r_i<-c(dados[1:N])
>r_j<-c(r0,dados[1:(N-1)]) #r_j = r_(i-1)

>alpha_hat<-(N*sum(r_i*t(r_j))-sum(r_i)*sum(r_j))/
(N*sum(r_j^2)- (sum(r_j))^2)
>beta_hat<-sum(r_i-alpha_hat*r_j)/(N*(1-alpha_hat))
>V2_hat<-(1/N)*sum((r_i-r_j*alpha_hat-beta_hat*(1-alpha_hat))^2)

>EMV<-c(alpha_hat,beta_hat,V2_hat)
>a<--log(EMV[1])/dt
>b<-EMV[2]
>sigma<-sqrt((EMV[3]*2*a)/(1-(alpha_hat)^2))
```

Figura 5.11: Código R do método de estimação de Máxima Verosimilhança.

Com a variável T a corresponder à coluna que contém o histórico da taxa da respectiva maturidade, em que r_0 é a taxa inicial, introduzida pelo utilizador. Esta quantidade corresponde à taxa observada no "momento atual", que dá início à simulação ou previsão do modelo Vasicek.

Simulação da taxa de rendibilidade das OT

A simulação da taxa de rendibilidade ocorre entre 30/12/1999 e 30/04/2010, um histórico de 10 anos e 5 meses, composto por 125 observações, onde r_0 corresponde à taxa observada a 30/12/1999. As estimativas daí resultantes encontram-se na tabela 5.1:

Tabela 5.1: Estimativas com base no histórico das taxas de rendibilidade das OT.

Parâmetros	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{V}^2	
Estimativa	0.9648314	0.0328614	0.0000051	
Parâmetros	\hat{a}	\hat{b}	$\hat{\sigma}$	$\hat{\delta}$
Estimativa	4.475239	0.0328614	0.0258185	$\frac{1}{125}$

Recordando a solução do modelo Vasicek da equação (4.18):

$$r_t = r_{t-1}e^{-a\delta} + b(1 - e^{-a\delta}) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\delta})}Z,$$

onde $Z \sim N(0, 1)$.

A taxa de rendibilidade simulada é dada por:

$$\begin{aligned} r_0 &\rightarrow \text{fixo}; \\ r_1 &= r_0e^{-a\delta} + b(1 - e^{-a\delta}) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\delta})}Z, \\ &\vdots \\ r_{i+1} &= r_ie^{-a\delta} + b(1 - e^{-a\delta}) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\delta})}Z, \end{aligned}$$

onde r_{i+1} é a taxa simulada para o mês $(i + 1)$ com um determinado risco associado, o qual é descrito pela v.a. Z com distribuição Normal Standard. Este risco é gerado aleatoriamente através do comando $rnorm(n)$, onde n é o número de observações geradas.

Quanto maior a dimensão n , mais cenários possíveis para r_{i+1} são gerados, derivados dos diferentes riscos assumidos. Considerando $n = 1000$ e iterando r até $t = 125$, a dimensão do histórico, obtemos todos, ou quase todos, os cenários possíveis para os restantes meses. A série das taxas de rendibilidade das OT simulada é obtida por meio de um ciclo *for*, cuja sintaxe é apresentada na figura 5.12:

```

#MODELO VASICEK
>t<-length(data)
>delta<-1/t
>r=matrix(0,1000,t)
>r[,1]=r0

>for(i in 1:(t-1)){
r[,i+1]=(exp(-a*delta)*r[,i]+b*(1-exp(-a*delta)))+
sqrt((sigma^2/(2*a))*(1-exp(-2*a*delta)))*rnorm(1000)}

```

Figura 5.12: Código R para o Modelo Vasicek.

Designa-se por r a matriz de dimensão (1000×125) onde são armazenados os resultados da simulação, em cada iteração do procedimento apresentado na figura 5.12 é preenchida uma coluna da matriz r (taxa de rendibilidade das OT simuladas para o $(i + 1)$ -ésimo mês). Ao final do ciclo obtemos todos os caminhos futuros gerados para a taxa de rendibilidade das OT, como se apresenta no gráfico da esquerda da figura 5.13.

A média de todos os caminhos gerados resulta num único caminho que será designado aqui por cenário de risco médio. Este cenário é apresentado no gráfico da direita da figura 5.13.

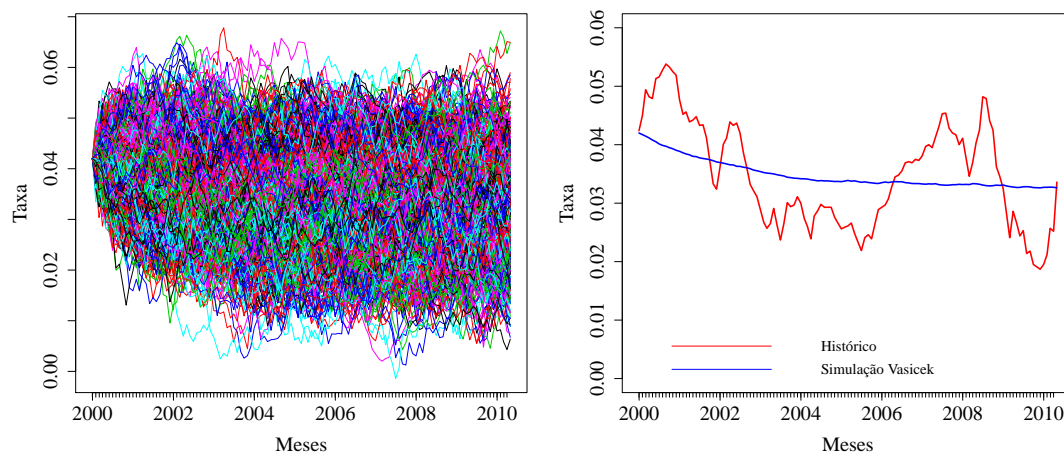


Figura 5.13: Geração de cenários (esquerda), cenário médio (direita) da taxa de rendibilidade das OT.

Simulação da taxa *Swap*

O mesmo código implementado atrás será aplicado agora para a simulação do histórico ajustado da taxa *swap*. Procedendo à estimação das funções α , b e V^2 , obtemos as estimativas apresentadas na tabela 5.2.

Tabela 5.2: Estimativas com base no histórico da taxa *swap*.

Parâmetros	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{V}^2	
Estimativa	0.9986895	0.0386178	0.00000020	
Parâmetros	\hat{a}	\hat{b}	$\hat{\sigma}$	$\hat{\delta}$
Estimativa	2.965021	0.0386178	0.0213556	$\frac{1}{2261}$

Simulando a taxa *swap* para o mesmo período do histórico ajustado, são gerados os 1000 cenários da evolução da taxa, e o respectivo cenário médio. Os resultados encontram-se na figura 5.14.

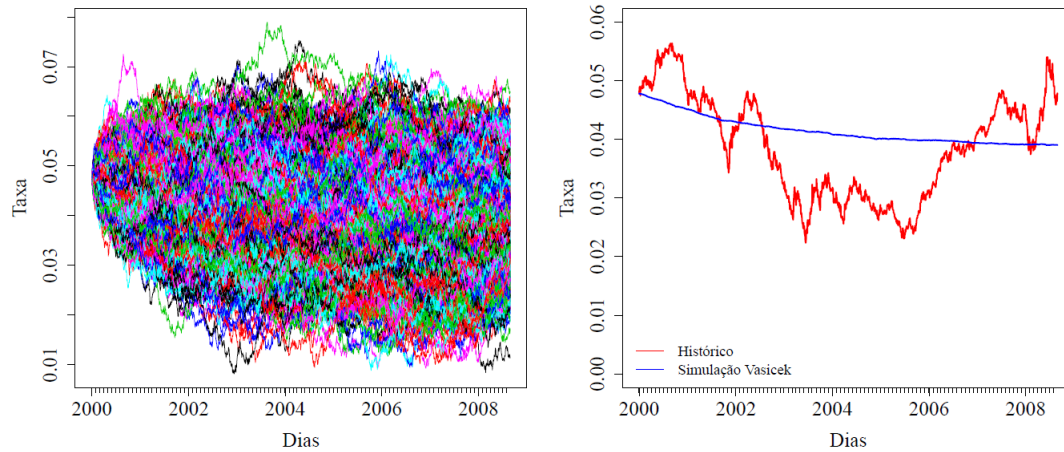


Figura 5.14: Geração de cenários (esquerda) e cenário médio (direita) da taxa *swap*.

Com alguns instantes mais dispares, as simulações refletiram os históricos de ambas as taxas, com as observações dos históricos a oscilarem em torno do cenário, do caminho médio.

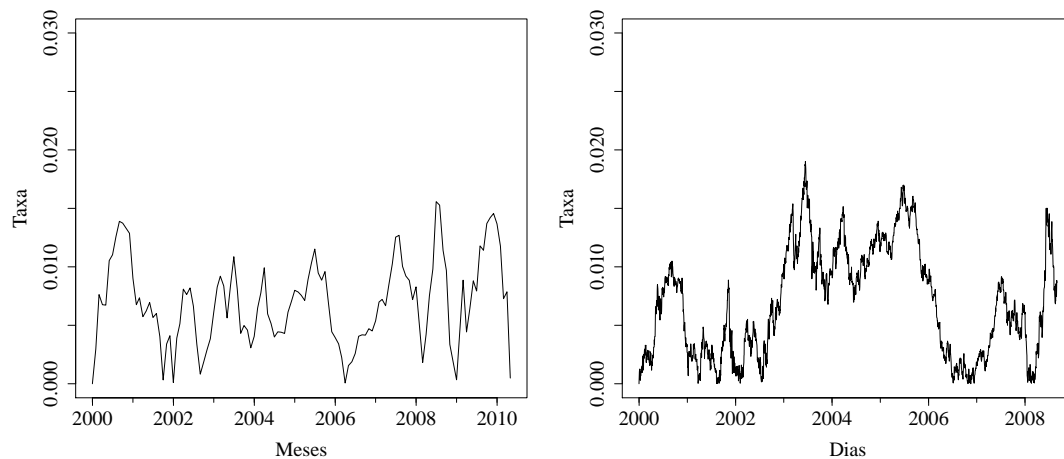


Figura 5.15: Propagação dos erros de simulação taxa de rendibilidade OT (esquerda) e da simulação da taxa *swap* (direita).

A complementar os resultados da simulação, apresentamos, na figura 5.15, a propagação do erro, que mede as diferenças entre as observações e o cenário médio, tanto para a taxa de rendibilidade das OT como para a taxa *swap*, para melhor avaliar o relacionamento entre estas. Registrou-se

então, certos períodos em que a diferença entre as observações e os cenários médios chega a ser superior a 0.015 pp (pontos percentuais), e também, com maior impacto na taxa *swap*, um longo período de sensivelmente três anos, entre 2003 e 2006, em que as taxas evoluem afastadas do cenário médio simulado. Esta discrepância na taxa *swap* é, no entanto, expectável, pois estamos a lidar com um histórico diário que comporta todas as flutuações da taxa. Pode acontecer que para diminuir as diferenças entre observações e cenário médio se converta a taxa *swap* de diária para mensal.

Análise de resíduos

Ao analisarmos a solução do modelo Vasicek facilmente percebemos que se trata de um modelo auto-regressivo de 1^a ordem da forma,

$$r_{t+1} = r_t \underbrace{e^{-a\delta}}_{\beta_1} + \underbrace{b(1 - e^{-a\delta})}_{\beta_0} + \underbrace{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\delta})}}_{\epsilon_i} Z_{t+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

onde β_0 e β_1 não são mais que os parâmetros do modelo Vasicek que são estimados da forma como já apresentámos na secção 4.3.2 e ϵ_i representam efetivamente os erros aleatórios, ou seja, o risco, que se supõe seguir uma distribuição Normal. Sob este ponto de vista, é-nos permitido fazer uma análise aos resíduos do modelo Vasicek no qual avaliamos o ajustamento do modelo aos dados, bem como a Normalidade dos resíduos.

A análise dos resíduos pode ser realizada com recurso a representações gráficas, donde, para efeitos de estudo académico, apresentamos: o gráfico dos resíduos ao longo do tempo, ou seja, $e_i = r_i - \hat{r}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, e o gráfico dos resíduos *vs.* valores estimados, figuras 5.16 e 5.19; histograma dos resíduos, com estimação da f.d.p da Normal e estimador de *kernel*, e gráfico de quantis, designado por PP-plot, figuras 5.17 e 5.20; e, por fim, os gráficos de FAC e FACP, respectivamente, nas figuras 5.18 e 5.21. Trata-se das representações gráficas mais usuais neste contexto [42].

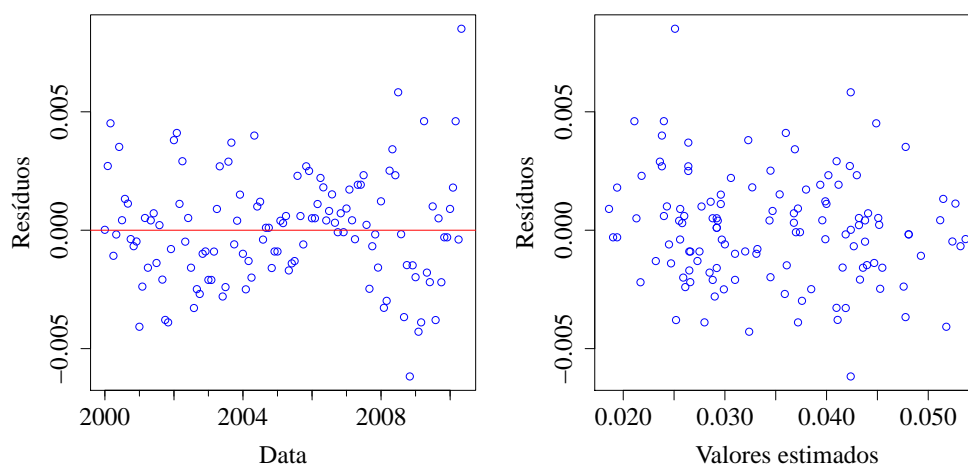


Figura 5.16: Resíduos ao longo do tempo (esquerda) e Resíduos *vs.* valores estimados (direita) da taxa de rentabilidade das OT.

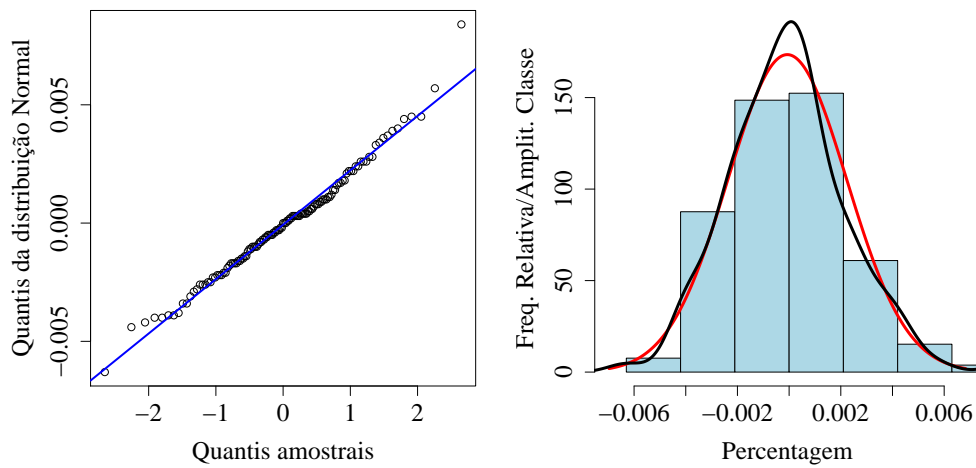


Figura 5.17: PP-plot (esquerda) e histograma com estimação da f.d.p da Normal e estimador de *kernel* (direita) da taxa de rentabilidade das OT.

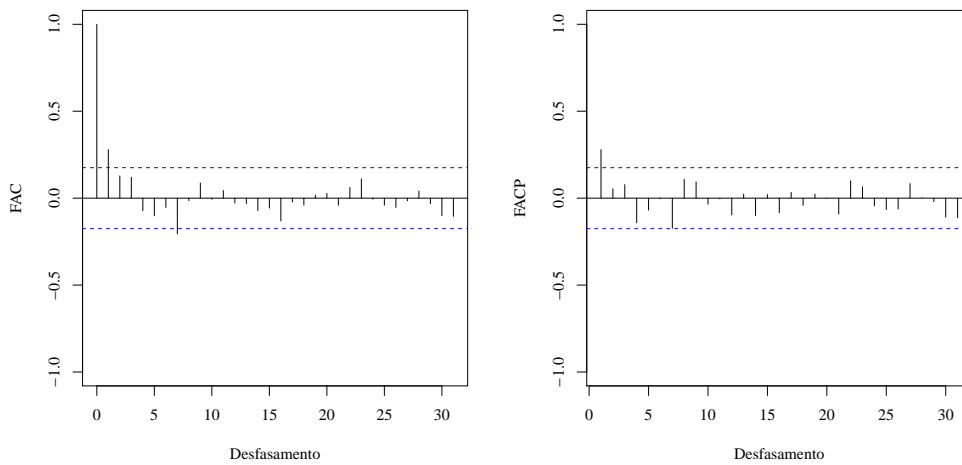


Figura 5.18: FAC (esquerda) e FACP (direita) da taxa de rentabilidade das OT.

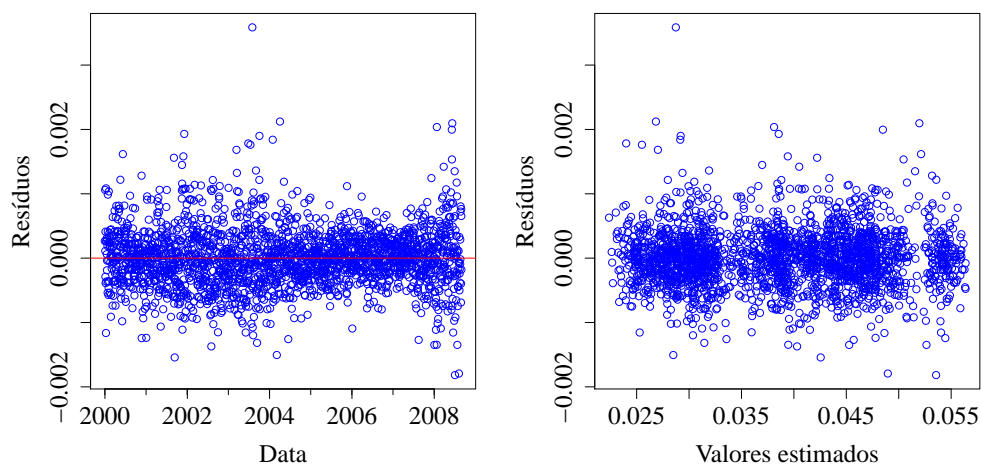


Figura 5.19: Resíduos ao longo do tempo (esquerda) e Resíduos *vs.* valores estimados (direita) da taxa *swap*.

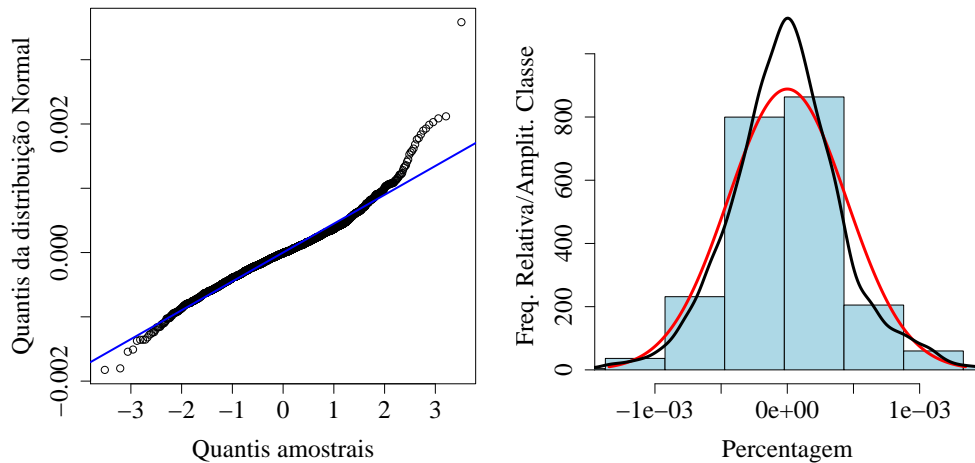


Figura 5.20: PP-plot (esquerda) e histograma com estimação da f.d.p da Normal e estimador de *kernel* (direita) da taxa *swap*.

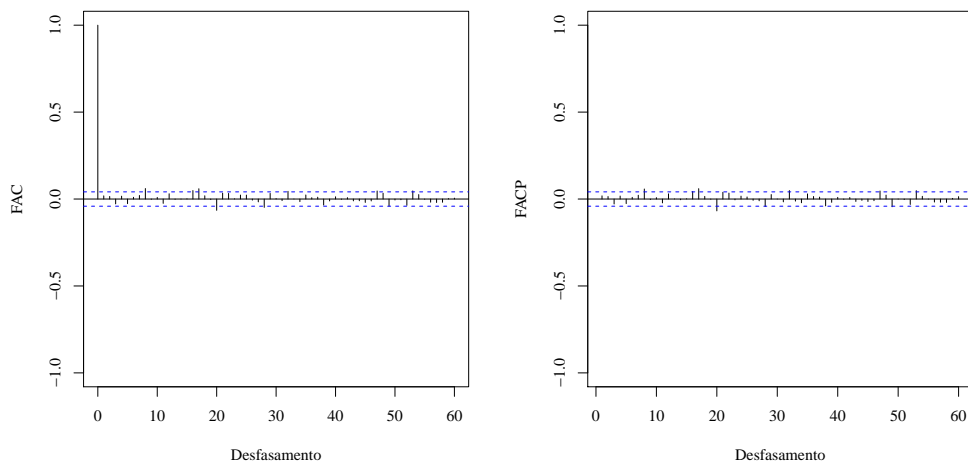


Figura 5.21: FAC (esquerda) e FACP (direita) da taxa *swap*.

Nas figuras, 5.16 e 5.19, verifica-se que os resíduos estão distribuídos de uma forma quase uniforme ao longo de uma faixa horizontal centrada na reta $x = 0$. Apenas de salientar que nos resíduos da taxa de rendibilidade das OT, figura 5.16 (esquerda), parece existir um afunilamento no período circundante aos anos 2006/2007, seguido de um aumento da dispersão dos mesmos. Este comportamento poderá evidenciar uma estrutura de variância a evoluir no tempo. No entanto, tal hipótese é desvalorizada quando analisamos a figura 5.16 (direita) em que se verifica a inexistência de um padrão, indicando que a variância é constante ao longo do tempo.

Analisando as figuras 5.18 e 5.21, podemos concluir que as séries dos erros não apresentam estrutura de dependência.

Examinando o gráfico de PP-plot da taxa de rendibilidade das OT, figura 5.17 (esquerda), verifica-se que os pontos se distribuem linearmente, o que revela que a série dos erros se ajusta à distribuição Normal. Este resultado é confirmado pela análise do histograma, figura 5.17 (direita), e também pelos seguintes testes: Kolmogorov-Smirnov ($D=0.065403$, $p\text{-value}=0.6588$); e Shapiro-Wilk ($W=0.98595$, $p\text{-value}=0.2251$). O gráfico PP-plot da taxa *swap*, figura 5.20 (esquerda), salienta que a distribuição de probabilidade da série dos erros pode apresentar

uma cauda direita mais pesada do que a da distribuição Normal. Este comportamento pode estar na origem da rejeição da hipótese de normalidade pelos testes de Kolmogorov-Smirnov ($D=0.051598$, $p\text{-value}=1.182e-05$) e Shapiro-Wilk ($W=0.96771$, $p\text{-value}<2.2e-16$). No entanto, a figura 5.20 (direita), não confirma estes resultados na medida em que tanto o histograma como as estimativas da f.d.p se assemelham à estrutura da distribuição Normal.

5.3.2 Previsão

O objetivo passa agora pelo teste à sensibilidade do modelo Vasicek na previsão das taxas durante um determinado período de tempo, considerando para a calibração do modelo um período histórico anterior à data de início de previsão da respetiva taxa. Vamos efetuar a previsão da taxa de rendibilidade das OT e da taxa *swap* supondo que o "momento atual" é 31/01/2003. Temos então disponível um histórico decorrido entre 31/12/1999 e 31/12/2002, a partir do qual se pretende prever a evolução da taxa. Até à data citada as taxas de rendibilidade das OT e *swap* descreveram a evolução apresentada na figura 5.22.

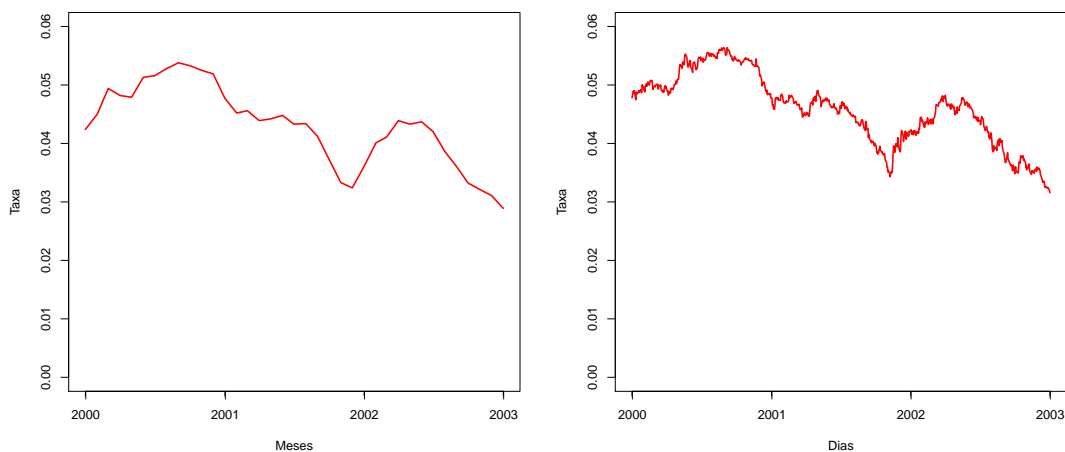


Figura 5.22: Evolução da taxa de rendibilidade das OT (esquerda); taxa *swap* (direita) entre 31/12/1999 e 31/01/2002.

Não existe uma regra ou uma técnica, que nos aconselhe o número de observações a usar para a calibração do modelo Vasicek, e depois de quanto tempo a previsão será fiável. Para este caso prático procuramos englobar um histórico próximo do "momento atual" para que não haja observações díspares por estarem demasiados longínquas no tempo, e que também registassem uma tendência linear. Relativamente à duração da previsão é intuitivo pensar que quanto mais longe procurarmos prever, mais poderemos estar-nos a afastar dos valores futuros reais a observar. Estas incertezas serão testadas no projeto.

Tendo em vista a previsão das taxas para os próximos 5 anos, o primeiro problema que se coloca é até que data passada do nosso histórico recuamos para a calibração do modelo Vasicek.

Começando pela taxa de rendibilidade das OT, dispomos de um histórico de três anos e um mês, um total de 37 meses, que quando simulado obtemos o gráfico 5.23.

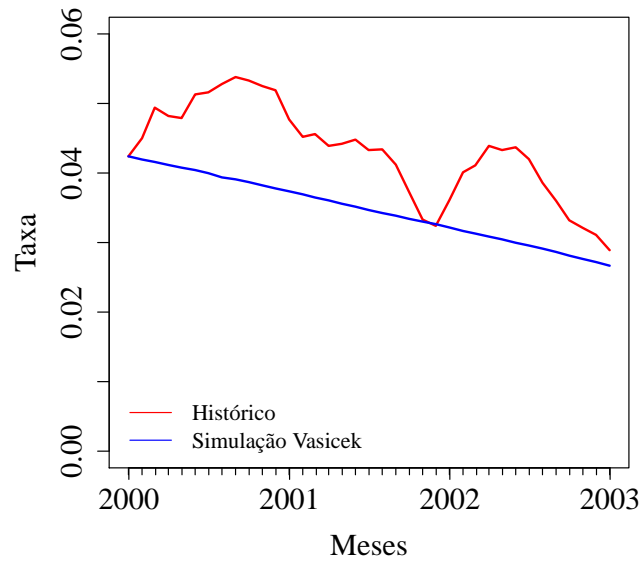


Figura 5.23: Simulação taxa de rentabilidade das OT entre 31/12/1999 e 31/01/2002.

O gráfico 5.23 apresenta a evolução da série observada, assim como do cenário médio simulado. A análise a esta simulação poderá apoiar quanto à escolha do volume de dados a usar para a calibração do modelo, restringindo o número de observações a considerar, pois pressupondo que quanto maior for a relação entre as observações e o cenário simulado, isto é, quanto mais próximas forem, maior é a probabilidade de obter uma previsão fiável, pelo menos a curto prazo, dado que o modelo se adapta às observações. Note que na figura 5.23 regista-se a partir de meados do ano 2002 até ao início do ano 2003 uma maior interação entre as observações e o cenário médio quando comparado com os anos anteriores. Este será um período pertinente a considerar para a calibração do modelo Vasicek, no entanto, vamos testar também o efeito do restante histórico na calibração do modelo.

Vamos então calibrar o modelo de três modos distintos, primeiro recuando apenas um ano de histórico, depois dois anos, e por fim considerar todo o histórico para a calibração.

Então, começando por estimar os parâmetros do modelo Vasicek obtemos respetivamente, de acordo com as tabelas 5.3 e 5.4:

Tabela 5.3: Estimativas das funções do modelo Vasicek para a taxa OT.

Histórico	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{V}^2
12 meses	6.287730e-01	3.814386e-02	1.456712e-05
24 meses	6.236919e-01	3.951443e-02	1.515697e-05
37 meses	8.586673e-01	0.04340179	1.069789e-05

5.3. APLICAÇÃO DO MODELO VASICEK

Tabela 5.4: Estimativas dos parâmetros do modelo Vasicek para a taxa OT.

Histórico	\hat{a}	\hat{b}	$\hat{\sigma}$
12 meses	5.56782	0.03814386	0.01637926
24 meses	11.33037	0.03951443	0.02370935
37 meses	5.637828	0.04340179	0.0214288

Efetuada respectivamente para cada histórico considerado a previsão da taxa de rentabilidade para os cinco anos seguintes, os resultados são apresentados na figura 5.24.

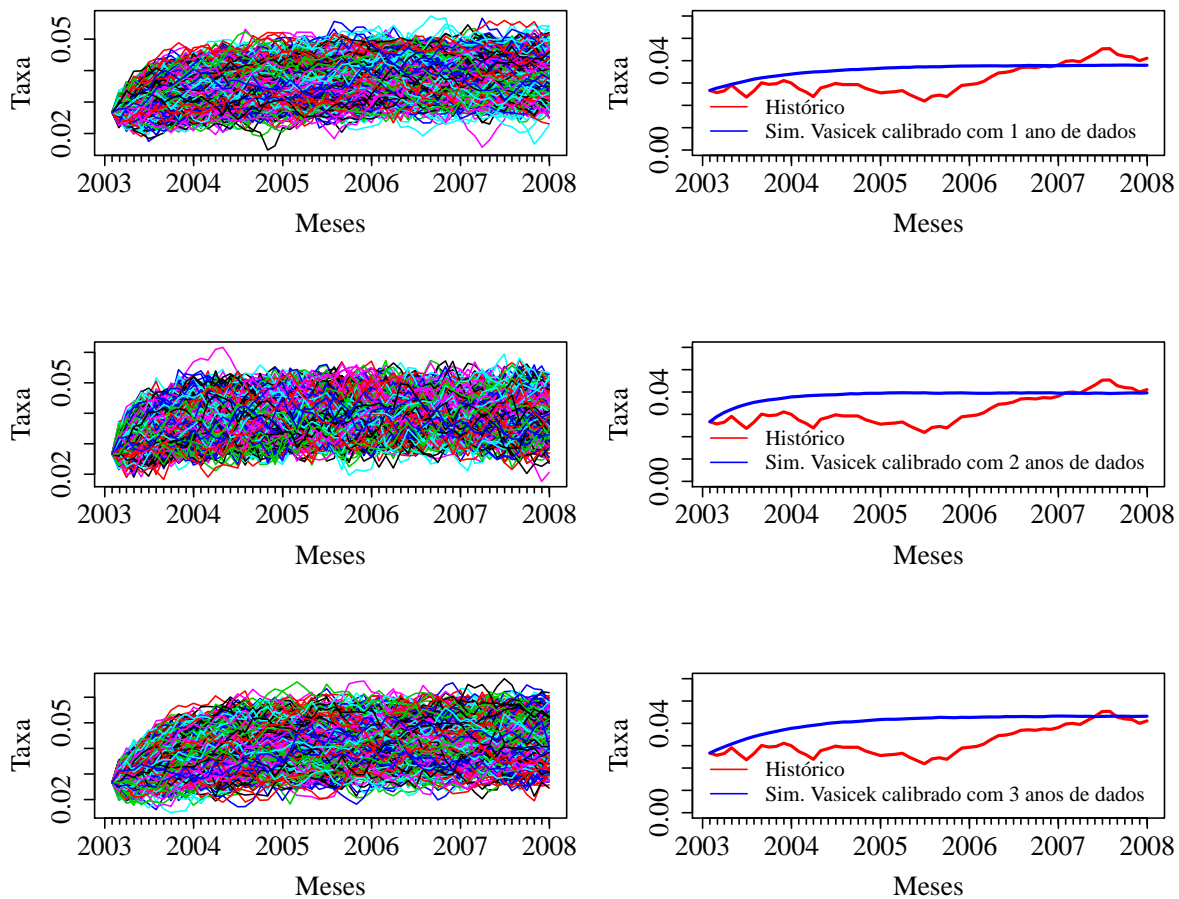


Figura 5.24: Cenários de previsão da taxa de rentabilidade das OT para os próximos 5 anos (esquerda) e respectivo cenário médio em simultâneo com as observações (direita).

Os valores resultantes da média calculada de todos os cenários possíveis, existentes no gráfico 5.24 (esquerda), são apresentados em tabela no Anexo B, 6.1. Estes correspondem ao cenário médio presente no gráfico 5.24 (direita), e que posteriormente puderam servir para o cálculo efetivo das obrigações ao longo do período de previsão.

Para o mesmo período faremos uma previsão da evolução da taxa *swap*. O processo é idêntico ao realizado para a taxa de rendibilidade das OT, com os resultados obtidos das estimativas apresentados na tabela 5.5 e os diferentes cenários e caminho médio, derivados dos diferentes períodos de observações usados para calibração do modelo Vasicek, no gráfico 5.25. Para esta previsão não será apresentado os valores do cenário médio devido à elevada dimensão do vetor de resultados.

Tabela 5.5: Estimativas do modelo Vasicek para a taxa *Swap*.

Histórico	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{V}^2	$\hat{\alpha}$	\hat{b}	$\hat{\sigma}$
12 meses	0.9631324	0.04175478	1.139213e-06	9.8042996	0.0417547	0.0175682
24 meses	0.9657720	0.0429189	1.069678e-06	18.1799664	0.0429189	0.0240425
37 meses	0.9862663	0.04633157	7.794181e-07	10.8280367	0.0463315	0.0248749

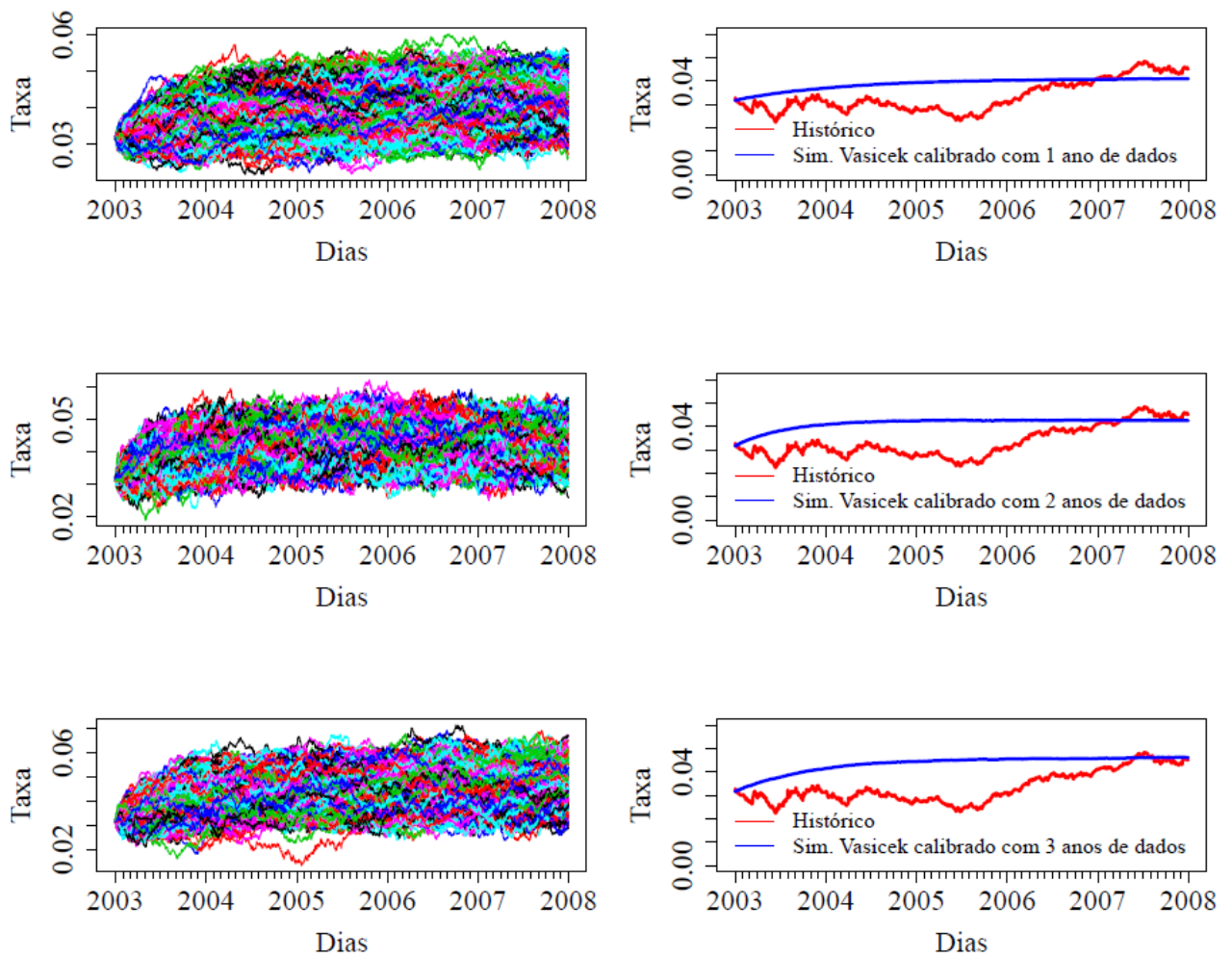


Figura 5.25: Cenários de previsão da taxa *swap* para os próximos 5 anos (esquerda) e respectivo cenário médio em simultâneo com as observações (direita).

Verifica-se em ambas as previsões obtiveram-se resultados idênticos. Avaliando a curto prazo os resultados, apenas o cenário gerado com base num registo histórico de um ano obteve melhor aproximação à taxa observada nos primeiros anos, seguindo-se um período em que se registou uma diferença perto de 0.01 pp.

Consideremos agora uma previsão mais longínqua de 01/2003 a 04/2010 (mês/ano), um total de 88 meses, todas as observações até então disponíveis para avaliar os resultados de previsão da taxa de rendibilidade das OT. Desta vez calibramos o modelo Vasicek com histórico que mais se aproximou das taxas de mercado observadas no primeiro teste, figura 5.24, apenas um histórico de 12 meses. As estimativas obtidas para os parâmetros a , b e σ do modelo Vasicek encontram-se na tabela 5.4.

Para uma previsão a 7 anos e 4 meses são apresentados os cenários possíveis e o cenário médio em simultâneo com as taxas observadas, na figura 5.26.

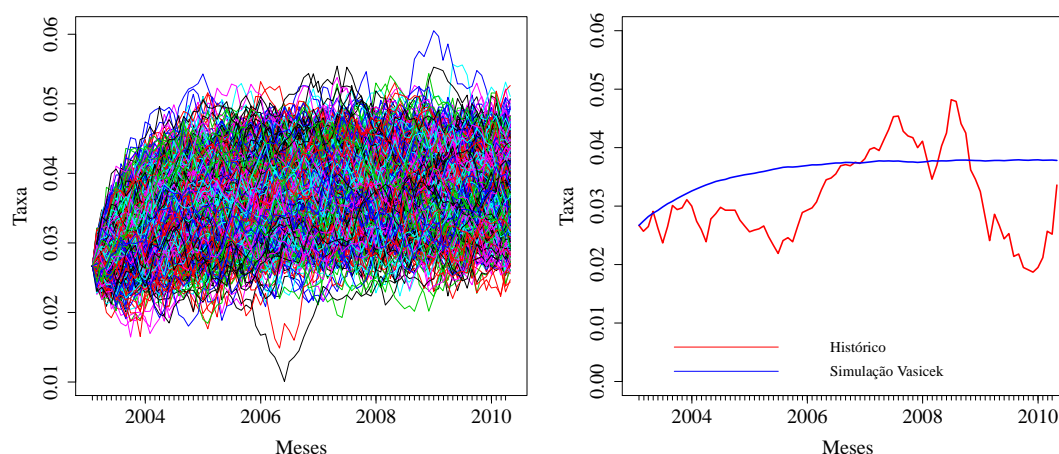


Figura 5.26: Cenários de previsão da taxa de rendibilidade das OT para os próximos a 7 anos e 4 meses (esquerda), e respectivo cenário médio em simultâneo com as observações (direita).

Os valores do cenário médio, apresentado no gráfico 5.26, estão organizados em tabela no Anexo B, 6.2. Após decorridos 5 anos de previsão, já analisados, a taxa de rendibilidade das OT volta a interceptar o cenário médio, oscilando em torna desta, com picos de desfasamento, durante cerca de 2 anos, tornando-se a afastar do cenário médio para valores bastante dispares. Outros comentários serão feitos no capítulo final. Discutiremos os resultados bem como a fiabilidade do modelo Vasicek mediante a existência de outros modelos mais complexos, de melhor resolução e mais rigorosos.

Capítulo 6

Conclusões e Discussão

Neste projeto construímos um Gerador de Cenários Económicos (GCE) com o propósito de apoiar a avaliação das provisões técnicas para os ativos obrigacionistas consistente com o mercado. O estágio decorrido na VICTORIA-Seguros abriu portas ao conhecimento do regulamento Solvência II que agora está em vigor em toda a Europa para unificação do mercado segurador, e fortificar o seu desempenho financeiro face ao cumprimento das garantias assumidas com cálculos do capital mais restritos que implicam uma avaliação mais precisa do valor dos ativos. A partilha do conhecimento sobre os GCE e a existência de *softwares* e outros programas para o cálculo das provisões técnicas foi o mote para o desenvolvimento deste projeto. O principal objetivo do projeto é a construção de um programa para avaliação do valor dos ativos para apoiar o cálculo das provisões técnicas. Para atingir este objetivo, recorreremos às equações estocásticas que têm sido desenvolvidas ao longo dos anos com o propósito de prever a evolução de indicadores financeiros.

De entre os ativos financeiros são vários os indicadores, designados por fatores de risco, que não são constantes e que influenciam o valor real dos ativos [43]. Os vários fatores de risco associados aos ativos financeiros levou-nos a estudar um caso particular. As obrigações são o principal ativo financeiro que compõe grande parte da carteira da VICTORIA-Seguros, que têm como principal fator de risco a taxa de juro.

Ao conhecer a estrutura temporal da taxa de juro conhecemos também como evolui o valor de uma obrigação. Durante anos foram desenvolvidos modelos para descrever a evolução da taxa de juro dos quais, para desenvolver o GCE, usamos o modelo Vasicek [26]. O modelo Vasicek foi um dos primeiros modelos a surgir neste contexto, revelando-se agora como um modelo de introdução a todo um vasto conjunto de modelos existentes mais complexos e rigorosos [43]. Desta forma conseguimos compreender o efeito que cada componente e parâmetro do modelo Vasicek provoca na previsão da taxa de juro, tornando-se vantajoso na forma como se molda e se controla o seu ajustamento para se aproximar à taxa de juro. Por isso, o modelo é ajustado a partir de observações históricas do mercado, tornando-se assim um modelo consistente com o mercado.

Neste projeto abordamos uma forma de ajustar o modelo Vasicek à taxa de rendibilidade das OT e à taxa *swap*, escrevendo um manual de utilizador para exemplificar o uso e a aplicação do modelo Vasicek. Estas duas taxas foram recolhidas para dois tipos de obrigações; a taxa de rendibilidade para as OT para as obrigações do Estado e a taxa *swap* para as restantes obrigações que contemplam requisitos que podem ser mais voláteis no tempo. Embora estes dois históricos de taxas apresentem a mesma evolução, eles diferem pelo números de observações que

foram feitas, que criaram algumas dificuldades ao longo do projeto. Após uma análise inicial aos históricos com maturidades de 3, 5 e 10 anos, verificou-se que pelo menos um dos históricos tem distribuição diferente dos restantes. Neste projeto analisamos apenas o histórico de maturidade a 3 anos, sendo este procedimento passível de ser generalizado para as restantes maturidades.

Baseando-nos apenas no histórico de maturidade a 3 anos, para ambas as taxas, procedemos a uma análise aos dados, onde procurámos perceber a evolução das mesmas ao longo do tempo. Devido à instabilidade do sistema financeiro ocorrida a partir de 2008, tornou-se necessário estudar a existência de eventuais causas externas que pudessem provocar mudanças abruptas nas taxas de juro inviabilizando os modelos de descreverem essas mesmas taxas de forma fidedigna.

Definimos assim um intervalo de tempo contínuo, sem perturbações anormais, para modelar a evolução das taxa de juro ao longo do tempo. Passada esta fase, iniciámos a aplicação do modelo Vasicek onde através da simulação testámos o efeito do número de observações a considerar para o ajuste do modelo na previsão da taxa de juro. Adicionalmente, realizámos uma análise aos resíduos onde aferimos a distribuição Normal dos erros do modelo Vasicek.

Os resultados obtidos neste projeto, a curto prazo, são satisfatórios, com a proximidade da curva do cenário médio aos valores observados. Isto acontece pois no ajustamento considerámos um período histórico estável, não só para a estimação dos parâmetros do modelo Vasicek, como também para o período de avaliação da previsão. Se o mercado financeiro se tornar mais instável, o modelo deixa de captar a evolução da taxa, devido ao ponto médio ser fixo, e também ao facto de a iteração do modelo depender apenas da taxa registada imediatamente antes e não de tudo o que se previu anteriormente, não permitindo a existência de variação de declives na evolução da previsão. Verificámos essa situação no nosso caso prático, pois ao fim de 2 anos de previsão, o cenário médio continua a convergir para a taxa média, enquanto na realidade a taxa toma outra variação no declive. Concluimos assim, que este modelo obtém previsões a curto prazo favoráveis apenas quando e enquanto o ambiente no mercado financeiro for estável. Também existem outros fatores externos que podem prejudicar a evolução da taxa no mercado, como medidas tomadas pelo próprio Banco Central Europeu. No entanto nem outros modelos mais complexos conseguem prever tais alterações nas taxas.

A simplicidade do modelo Vasicek revela grandes limitações, não só pelos resultados obtidos nos testes levados a cabo neste projeto, como também pela própria forma como o modelo está construído. Uma dessas limitações é a probabilidade, positiva, de a taxa de juro poder vir a assumir valores negativos. Este aspeto não causa no entanto problemas na nossa avaliação pois a probabilidade de acontecer é reduzida devido à reversão para o valor médio [27].

Uma limitação adicional do modelo Vasicek consiste no facto dos parâmetros serem constantes ao longo do tempo, impedindo desde logo uma previsão coerente a longo prazo. No modelo de Vasicek, o parâmetro b , que representa o valor médio, utilizado na equação (4.18), é constante ao longo do tempo e tem um efeito direto na evolução da taxa de juro [44].

Se o parâmetro citado atrás pudesse variar ao longo do tempo, talvez fosse possível descrever a evolução da taxa de juro de uma forma mais rigorosa. Neste contexto, o ponto médio de convergência iria sendo reajustado, aproximando a curva de previsão à taxa de juro do mercado. Dois dos modelos pioneiros nesta área correspondem ao modelo Hull-White [45] e ao modelo Black-Karasinski [46]. No futuro, a avaliação das provisões técnicas consistente com o mercado passa pelo estudo de modelos mais robustos e rigorosos, tendo como base os modelos de não-arbitragem a 1-fator.

Se tanto o valor médio como a velocidade da taxa, a , puderem variarem ao longo do tempo (modelo de 2-fatores) conseguimos uma maior flexibilidade no que diz respeito ao grau de inclinação da curva de previsão da taxa de juro [27]. Também o parâmetro da volatilidade pode tornar-se dependente do tempo, o que certamente vai melhorar as previsões, mas conduzirá obviamente a um acréscimo do grau de complexidade dos modelos.

Apesar das limitações citadas atrás o modelo Vasicek poderá ser aplicado em ambientes empresariais, mas é necessário ter em conta que as variações abruptas do mercado financeiro, que se tem verificado desde 2008, podem tornar o modelo evasivo. Qualquer que seja o modelo escolhido para se implementar, este exige um estudo e uma atualização contínua do mesmo, permitindo assim ajusta-lo de acordo com o ambiente, seja para avaliação de ativos ou outras previsões no mercado financeiro.

Bibliografia

- [1] Delgado, M. M.: *Projecto solvência ii – modelação do risco de subscrição numa companhia de seguros não vida*. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2011.
- [2] Novo, T. S. M.: *Análise do risco de subscrição no âmbito do projecto solvência ii*. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2008.
- [3] Professor Doutor Almaça, J. F.: *Conferência internacional organizada pelo cirsf*. Em *A Relevância da Função dos Atuários para a Gestão do Risco no Setor Financeiro em especial nos setores de Seguros e de Fundos de Pensões*, 2015.
- [4] R Core Team: *R: A Language and Environment for Statistical Computing, version 3.2.4*. The R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2016. <http://www.R-project.org/>, ISBN 3-900051-07-0.
- [5] *Relatório de estabilidade financeira 2005*. Banco de Portugal Eurosistema, 2005.
- [6] Borginho, H.: *A Importância Estratégica do Solvência II*. Departamento de Análise de Riscos e Solvência do ISP, 2013.
- [7] *Directiva 2002/13/ce do parlamento europeu e do conselho de 5 de março de 2002 aos seguros de não vida*. Jornal Oficial das Comunidades Europeias, Março 2005.
- [8] *Directiva 2002/13/ce do parlamento europeu e do conselho de 5 de março de 2002 aos seguros de vida*. Jornal Oficial das Comunidades Europeias, Março 2002.
- [9] Lages, V. F. V.: *Solvência ii – aplicação a uma companhia de seguros não vida*. Tese de Mestrado, ISCTE Business School - Instituto Universitário de Lisboa, 2010.
- [10] Martis, A. C.: *Análise de pressupostos para definição de um modelo interno no Âmbito da solvência ii*. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2009.
- [11] *Directiva 2002/13/ce do parlamento europeu e do conselho de 5 de março de 2002*. Jornal Oficial das Comunidades Europeias, Março 2002.
- [12] *Suplemento especial - seguros*. Diário Económico, 05 de Maio de 2014.
- [13] EIOPA - European Insurance and Occupational Pensions Supervisors: *QIS5 Technical Specifications*, 2010.
- [14] Guiné, C.: *Solvência II - Resultados do exercício QSI5*. Departamento de Análise de Riscos e Solvência do ISP, 2012.
- [15] EIOPA - European Insurance and Occupational Pensions Supervisors: *Orientações sobre a avaliação de provisões técnicas*, 2016.

- [16] EIOPA - European Insurance and Occupational Pensions Supervisors: *Annexes to the QIS5 Technical Specifications*, 5 Julho 2010.
- [17] EIOPA - European Insurance and Occupational Pensions Supervisors: *Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures*, 19 Junho 2015.
- [18] Sandström, A.: *Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers: Theory and Practice*. Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [19] Varnell, E. M.: *Economic scenario generators and solvency ii*. Presented to the Institute of Actuaries, 2009.
- [20] Mota, A. G. e Custódio, C.: *Finanças da Empresa*. bnomics, 2007.
- [21] Pinho, C. e Soares, I.: *Finanças - Mercados e Instrumentos*. Edições Sílabo, 2008.
- [22] Moody's Investors Service: *Rating Symbols and Definitions*, 2016.
- [23] Higham, D.: *An Introduction to Financial Option Valuation: Mathematics, Stochastics and Computation*. Cambridge University Press, 1ª edição, 2004.
- [24] Pinho, C., Valente, R., Madaleno, M. e Vieira, E.: *Risco Financeiro - Medida e Gestão*. Edições Sílabo, 2011.
- [25] Karatzas, S. I.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1ª edição, 2002.
- [26] Vasicek, O.: *An equilibrium characterization of the term structure*. Journal of Financial Economics, 5, 1977.
- [27] Brigo, D. e Mercurio, F.: *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer, 2006.
- [28] Dynkin, E. B., Ikeda, N., Watanabe, S., Fukushima, M. e Kunita, H.: *Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory*. Springer Tokyo, 1ª edição, 1996.
- [29] Simão, I.: *Apontamentos da cadeira de análise estocástica do mestrado em matemática*. Departamento de Matemática da FCUL.
- [30] Frederico, S. G.: *Avaliação de opções e garantias embutidas em seguros ligados a fundos de investimento*. Tese de Mestrado, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior de Economia e Gestão, 2011.
- [31] Portugal eurosistema, Banco de. [http://www.bportugal.pt/EstatisticasWeb/\(S\(ghxf5055xxhaa34530d13t55\)\)/Default.aspx](http://www.bportugal.pt/EstatisticasWeb/(S(ghxf5055xxhaa34530d13t55))/Default.aspx). 10/02/2016.
- [32] Conover, W. J.: *Practical Nonparametric Statistics*. John Wiley & Sons, 1999.
- [33] IGCP - Instituto de Gestão da Tesouraria e do Crédito Público, I.P.: *Relatório Anual de Gestão da Tesouraria e da Dívida Pública - 2005/2006/2007*. Capítulo - Mercado de Dívida Pública.
- [34] IGCP - Instituto de Gestão da Tesouraria e do Crédito Público, I.P.: *Relatório Anual de Gestão da Tesouraria e da Dívida Pública - 2008*, 2007. Capítulo - Mercado de Dívida Pública.
- [35] IGCP - Instituto de Gestão da Tesouraria e do Crédito Público, I.P.: *Relatório Anual de Gestão da Tesouraria e da Dívida Pública - 2009*, 2008. Capítulo - Mercado de Dívida Pública.

-
- [36] IGCP - Instituto de Gestão da Tesouraria e do Crédito Público, I.P.: *Relatório Anual de Gestão da Tesouraria e da Dívida Pública - 2010*, 2011. Capítulo - Mercado de Dívida Pública.
- [37] IGCP - Instituto de Gestão da Tesouraria e do Crédito Público, I.P.: *Relatório Anual de Gestão da Tesouraria e da Dívida Pública - 2011*, 2012. Capítulo - Financiamento e Mercado de Dívida Pública Portuguesa.
- [38] IGCP - Instituto de Gestão da Tesouraria e do Crédito Público, I.P.: *Relatório Anual de Gestão da Tesouraria e da Dívida Pública - 2012/2013/2014*. Capítulo - Economia e Mercados Financeiros.
- [39] Soares, C. e Rodrigues, P. M. M.: *Os determinantes do diferencial da eonia e a crise financeira de 2007-2009*. Banco de Portugal - Boletim Económico, Volume 16, Número 3, Outono 2010.
- [40] Fonseca, F. G. P.: *Impacto da alteração das taxas directoras do bce nos mercados de obrigações de tesouro e ações no período 2000-2011*. Tese de Mestrado, ISCTE - IUL, Instituto Universitário de Lisboa, Escola de Ciências Sociais e Humanas, 2012.
- [41] Sousa, J. B., Esquível, M. L e Gaspar, R. M: *Machine learning vasicek model calibration with gaussian processes*. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 2012.
- [42] Montgomery, D. C., Peck, E. A. e Vining, G. G.: *Introduction to Linear Regression Analysis*. John Wiley & Sons, Ltd, 2012.
- [43] Hunt, P. J. e Kennedy, J. E.: *Financial Derivatives in Theory and Practice*. John Wiley & Sons, Ltd, 2005.
- [44] Zeytun, S. e Gupta, A.: *A comparative study of the vasicek and the cir model of the short rate*. Relatório Técnico, Fraunhofer Institute for Industrial Mathematics ITWM, 2007.
- [45] Hull, J. e White, A.: *One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 28, 1993.
- [46] Black, F. e Piotr Karasinski, P.: *Bond and option pricing when short rates are lognormal*. Financial Analysts Journal, 47, 1991.

Anexo A

Fórmula de Itô

Teorema: Seja $f(t, x) : [0, +\infty] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in C^{1,2}$ e $\{X_t\}_{t \geq 0}$ um processo de Itô dado por:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0$$

com $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$, $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ e W_t o processo Browniano. Seja $Y_t = f(t, X_t)$, $t \geq 0$. Então $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ também é um processo de Itô e representa-se por:

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2, \quad t \geq 0,$$

com $(dX_t)^2 = (\mu_t dt + \sigma_t dW_t)^2 = \sigma_t^2 dt$.

Corolário: A representação de Itô do processo $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ é:

$$dY_t = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) + \sigma_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) \right] dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dW_t, \quad t \geq 0$$

Anexo B

Tabela de resultados

Tabela 6.1: Cenário médio a 5 anos (60 meses) para a taxa de rendibilidade das OT

Data	2003 - 01 - 31	2003 - 02 - 28	2003 - 03 - 31	2003 - 04 - 30	2003 - 05 - 31	2003 - 06 - 30	2003 - 07 - 31	2003 - 08 - 31	2003 - 09 - 30
CM1	0.02670000	0.02772502	0.02875739	0.02962056	0.03042575	0.03113630	0.03176434	0.03235421	0.03278829
CM2	0.02670000	0.02899240	0.03066152	0.03237376	0.03354777	0.03466400	0.03551878	0.03622749	0.03661816
CM3	0.02670000	0.02822058	0.02960930	0.03086987	0.03202482	0.03303727	0.03395377	0.03488242	0.03559983
	2003 - 10 - 31	2003 - 11 - 30	2003 - 12 - 31	2004 - 01 - 31	2004 - 02 - 29	2004 - 03 - 31	2004 - 04 - 30	2004 - 05 - 31	2004 - 06 - 30
	0.03328112	0.03370439	0.03413727	0.03448450	0.03483468	0.03520359	0.03548594	0.03561312	0.03596030
	0.03707338	0.03750467	0.03778640	0.03797549	0.03846548	0.03871716	0.03881734	0.03886745	0.03911514
	0.03615667	0.03687256	0.03750735	0.03803824	0.03857947	0.03895283	0.03951225	0.03983900	0.04015474

CM1 - Caminho médio gerado com modelo calibrado com histórico de um ano;

CM2 - Caminho médio gerado com modelo calibrado com histórico de dois anos;

CM3 - Caminho médio gerado com modelo calibrado com histórico de três anos.

2004 - 07 - 31	2004 - 08 - 31	2004 - 09 - 30	2004 - 10 - 31	2004 - 11 - 30	2004 - 12 - 31	2005 - 01 - 31	2005 - 02 - 28	2005 - 03 - 31
0.03616339	0.03646298	0.03666359	0.03671292	0.03681355	0.03687519	0.03699991	0.03701312	0.03721214
0.03916191	0.03919521	0.03930382	0.03946451	0.03936551	0.03931670	0.03927038	0.03918499	0.03930694
0.04042660	0.04085329	0.04102156	0.04118858	0.04143836	0.04170769	0.04180756	0.04200696	0.04225142

2005 - 04 - 30	2005 - 05 - 31	2005 - 06 - 30	2005 - 07 - 31	2005 - 08 - 31	2005 - 09 - 30	2005 - 10 - 31	2005 - 11 - 30	2005 - 12 - 31
0.03728109	0.03735648	0.03739898	0.03737136	0.03734915	0.03741882	0.03742775	0.03737095	0.03738564
0.03939823	0.03937410	0.03950667	0.03953393	0.03959836	0.03955818	0.03957442	0.03959773	0.03965936
0.04228813	0.04250593	0.04255660	0.04263275	0.04288208	0.04288302	0.04300844	0.04299458	0.04297280

2006 - 01 - 31	2006 - 02 - 28	2006 - 03 - 31	2006 - 04 - 30	2006 - 05 - 31	2006 - 06 - 30	2006 - 07 - 31	2006 - 08 - 31	2006 - 09 - 30
0.03752511	0.03758578	0.03766525	0.03780349	0.03784940	0.03782646	0.03795088	0.03800938	0.03810938
0.03950692	0.03959905	0.03956439	0.03956644	0.03944937	0.03941786	0.03940516	0.03945210	0.03929847
0.04301018	0.04297788	0.04306129	0.04316795	0.04303380	0.04303072	0.04305798	0.04302975	0.04303452

2006 - 10 - 31	2006 - 11 - 30	2006 - 12 - 31	2007 - 01 - 31	2007 - 02 - 28	2007 - 03 - 31	2007 - 04 - 30	2007 - 05 - 31	2007 - 06 - 30
0.03799072	0.03795771	0.03796778	0.03795713	0.03803565	0.03808011	0.03799290	0.03805763	0.03807936
0.03924418	0.03940518	0.03947420	0.03937781	0.03938757	0.03946058	0.03956566	0.03960522	0.03952875
0.04317958	0.04327551	0.04318278	0.04329459	0.04343258	0.04359717	0.04357246	0.04355251	0.04359284

2007 - 07 - 31	2007 - 08 - 31	2007 - 09 - 30	2007 - 10 - 31	2007 - 11 - 30	2007 - 12 - 31
0.03805122	0.03812677	0.03813991	0.03815810	0.03818571	0.03818918
0.03956992	0.03953525	0.03937990	0.03940574	0.03941248	0.03941956
0.04359335	0.04350209	0.04344592	0.04346845	0.04334891	0.04336193

Tabela 6.2: Cenário médio a 7 anos e 4 meses (88 meses) para a taxa de rendibilidade das OT

Data	31/01/2003	28/02/2003	31/03/2003	30/04/2003	31/05/2003	30/06/2003	31/07/2003	31/08/2003	30/09/2003	31/10/2003
Taxa	0.02700000	0.02761842	0.02812673	0.02861218	0.02910923	0.02961708	0.03009596	0.03055662	0.03102425	0.03138956

30/11/2003	31/12/2003	31/01/2004	29/02/2004	31/03/2004	30/04/2004	31/05/2004	30/06/2004	31/07/2004	31/08/2004
0.03172255	0.03204954	0.03243431	0.03274637	0.03306549	0.03340537	0.03362741	0.03393208	0.03424234	0.03444416

30/09/2004	31/10/2004	30/11/2004	31/12/2004	31/01/2005	28/02/2005	31/03/2005	30/04/2005	31/05/2005	30/06/2005
0.03458892	0.03487022	0.03510851	0.03530246	0.03546721	0.03560223	0.03582270	0.03589363	0.03613600	0.03622849

31/07/2005	31/08/2005	30/09/2005	31/10/2005	30/11/2005	31/12/2005	31/01/2006	28/02/2006	31/03/2006	30/04/2006
0.03627883	0.03639914	0.03646432	0.03658159	0.03663895	0.03684687	0.03687490	0.03697724	0.03707592	0.03712035

31/05/2006	30/06/2006	31/07/2006	31/08/2006	30/09/2006	31/10/2006	30/11/2006	31/12/2006	31/01/2007	28/02/2007
0.03716075	0.03725061	0.03731650	0.03730267	0.03730398	0.03744798	0.03755561	0.03754912	0.03758299	0.03762444

31/03/2007	30/04/2007	31/05/2007	30/06/2007	31/07/2007	31/08/2007	30/09/2007	31/10/2007	30/11/2007	31/12/2007
0.03761718	0.03763414	0.03776516	0.03776458	0.03775859	0.03780275	0.03781971	0.03793565	0.03794913	0.03793273

31/01/2008	29/02/2008	31/03/2008	30/04/2008	31/05/2008	30/06/2008	31/07/2008	31/08/2008	30/09/2008	31/10/2008
0.03790625	0.03790316	0.03786452	0.03785467	0.03798066	0.03790790	0.03790975	0.03788482	0.03790090	0.03787188

30/11/2008	31/12/2008	31/01/2009	28/02/2009	31/03/2009	30/04/2009	31/05/2009	30/06/2009	31/07/2009	31/08/2009
0.03791299	0.03785253	0.03788513	0.03793333	0.03794082	0.03795661	0.03800778	0.03800803	0.03793430	0.03805141

30/09/2009	31/10/2009	30/11/2009	31/12/2009	31/01/2010	28/02/2010	31/03/2010	30/04/2010
0.03803796	0.03804046	0.03808112	0.03811358	0.03816884	0.03817857	0.03821163	0.03828340