

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM CIÊNCIAS ACTUARIAIS

**PROBABILIDADES DE RUÍNA
E O
MODELO BINOMIAL**

Isabel Brandão Jerónimo

ORIENTAÇÃO: Prof. Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria de Lourdes Caraças Centeno

Vogais: Prof. Doutor João Tiago Praça Nunes Mexia

Prof. Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis

Maio 2004

Resumo

Nesta dissertação, vamos apresentar o modelo binomial composto em tempo discreto e calcular probabilidades de ruína. Do ponto de vista da probabilidade de ruína em tempo finito, em vez de ter em linha de conta o instante temporal em que a ruína ocorre, estudamos a probabilidade da ruína ocorrer na n -ésima indemnização e o número de indemnizações ocorridas durante o período de recuperação do processo de risco.

O nosso objectivo é, não só, obter resultados numéricos para estas probabilidades no modelo binomial como também conseguir aproximações às quantidades correspondentes no modelo clássico apresentadas em Egídio dos Reis (2002). A aproximação do processo contínuo ao processo discreto correspondente é feita através da discretização do processo de risco.

Palavras-chave: Modelo binomial composto; probabilidade de ruína; número de indemnizações até à ocorrência de ruína; número de indemnizações durante o período de recuperação; discretização; cálculo recursivo.

Abstract

In this thesis, we present the discrete time compound binomial model and we consider a different approach concerning the probability of ruin in a finite horizon. Instead of taking into account the instant of ruin, we study the probability of ruin occurring at the n -th claim and the number of claims arriving during a recovery time period.

Our purpose is, not only, to obtain numerical results for these probabilities in the binomial model but also to get approximations for the corresponding quantities in the classical model presented by Egídio dos Reis (2002). The method used for the approximate calculation involves the discretization of the risk process.

Keywords: Compound binomial model; probability of ruin; claim number up to ruin; claim number up to recovery; discretization; recursive calculation.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, não poderia deixar de manifestar o meu agradecimento ao professor Alfredo Egídio dos Reis não só pela sua orientação ao longo do ano mas também pelas suas palavras de encorajamento nas alturas mais críticas e constante dedicação.

Queria ainda agradecer a todos os que me apoiaram ao longo desta tese, em especial ao meu marido, que me incentivou a escrever a mesma em \LaTeX .

*Não existe nada para além de tudo,
e em tudo não existe nada para além de nós,
nem para além dessa forma simples, lata,
que detona a percursão dos nossos passos,
suspensos na orla do mundo inteiro.*

Para o Gonçalo

Conteúdo

Introdução	8
1 Modelo Clássico	10
1.1 Conceitos fundamentais	10
1.2 Descrição do modelo clássico de risco	12
1.3 Número de indemnizações necessárias para a ocorrência de ruína	17
2 Modelo binomial composto	20
2.1 Descrição do modelo	20
2.2 Número de indemnizações necessárias para a ocorrência de ruína	25
2.3 Número de indemnizações necessárias para a recuperação, partindo de uma reserva inicial nula	29
2.4 Exemplos	34
2.4.1 Distribuição Geométrica	34
2.4.2 Distribuição Binomial Negativa	38
2.4.3 Distribuição de “ <i>Poisson positiva</i> ”	42
3 Aproximações para o modelo clássico	46
3.1 Processo de discretização de uma distribuição	46
3.2 Exemplos	50

3.2.1	Distribuição Exponencial	51
3.2.2	Distribuição Gama	56
3.2.3	Distribuição de Pareto	58
4	Probabilidade de ruína	61
5	Notas Finais	66

Lista de Tabelas

2.1	Probabilidades $b(u; n + 1)$, Geométrica(0.5), $p = 0.2$ e $\beta = 1$	35
2.2	Probabilidades $b(u; n + 1)$, Geométrica(0.6), $p = 0.4$ e $\beta = 1.5$	35
2.3	Probabilidades $b(u; n + 1)$, Geométrica(9/14), $p = 0.6$ e $\beta = 1.8$	36
2.4	Probabilidades $b(u; n + 1)$, BN(2, 0.5), $p = 0.2$ e $\beta = 1$	39
2.5	Probabilidades $b(u; n + 1)$, BN(2, 0.6), $p = 0.4$ e $\beta = 1.5$	39
2.6	Probabilidades $b(u; n + 1)$, Poisson(1), $p = 0.4$	43
3.1	Exponencial: comparação entre $q(0; n)$ e $v(0; n)/\psi(0)$	52
3.2	Exponencial: comparação entre $q(0; n)$ e $v(0; n)/\psi(0)$, usando (3.2)	53
3.3	Exponencial: comparação entre $p(u; n + 1)/\psi(u)$ e $b(\beta u; n + 1)/\psi(u)$	55
3.4	Gama: comparação entre $q(0; n)$ e $v(0; n)/\psi(0)$	56
3.5	Gama: comparação entre $q(0; n)$ e $v(0; n)/\psi(0)$, usando (3.3)	57
3.6	Pareto: comparação entre $q(0; n)$ e $v(0; n)/\psi(0)$	59
4.1	Distribuição geométrica: probabilidade de ruína eventual	62
4.2	Distribuição binomial negativa: probabilidade de ruína eventual	63
4.3	Distribuição de Poisson: probabilidade de ruína eventual	63

Lista de Figuras

1.1	Reserva de risco em tempo contínuo	14
2.1	Reserva de risco em tempo discreto	22
2.2	Probabilidades $b(0; n + 1) = v(0; n)$, $n = 0, \dots, 20$, Geométrica(0.6), $p = 0.4$	36
2.3	Probabilidades $b(1; n + 1)$, $n = 0, \dots, 20$, Geométrica (0.6), $p = 0.4$	37
2.4	Probabilidades $b(2; n + 1)$, $n = 0, \dots, 20$, Geométrica(0.6), $p = 0.4$	37
2.5	Probabilidades $b(5; n + 1)$, $n = 0, \dots, 47$, Geométrica(0.6), $p = 0.4$	38
2.6	Probabilidades $b(0; n + 1) = v(0; n)$, $n = 0, \dots, 20$, BN(2, 0.6), $p = 0.4$	40
2.7	Probabilidades $b(1; n + 1)$, $n = 0, \dots, 20$, BN(2, 0.6), $p = 0.4$	40
2.8	Probabilidades $b(2; n + 1)$, $n = 0, \dots, 20$, BN(2, 0.6), $p = 0.4$	41
2.9	Probabilidades $b(5; n + 1)$, $n = 0, \dots, 47$, BN(2, 0.6), $p = 0.4$	41
2.10	Probabilidades $b(10; n + 1)$, $n = 0, \dots, 107$, BN(2, 0.6), $p = 0.4$	42
2.11	Probabilidades $b(0; n + 1) = v(0; n)$, $n = 0, \dots, 20$, P(1), $p = 0.4$	44
2.12	Probabilidades $b(1; n + 1)$, $n = 0, \dots, 20$, P(1), $p = 0.4$	44
2.13	Probabilidades $b(2; n + 1)$, $n = 0, \dots, 20$, P(1), $p = 0.4$	45
2.14	Probabilidades $b(5; n + 1)$, $n = 0, \dots, 47$, P(1), $p = 0.4$	45
3.1	Discretização	47
3.2	Probabilidades $v(0; n)/\psi(0)$, Exponencial(1) discretizada	54
3.3	Probabilidades $v(0; n)/\psi(0)$, Gama(2,2) discretizada	58

3.4 Probabilidades $v(0; n)/\psi(0)$, Pareto(2,1) discretizada 60

Introdução

Esta dissertação tem, como fonte de inspiração, alguns resultados obtidos e apresentados em Egídio dos Reis (2002) para o modelo de Poisson composto em tempo contínuo. Nesse artigo, estudou-se a probabilidade de a ruína ocorrer na n -ésima indemnização e a probabilidade de haver n indemnizações antes de o processo de risco recuperar para valores não negativos. O objectivo desta dissertação é obter resultados para estas probabilidades no modelo binomial composto em tempo discreto e apresentar alguns exemplos práticos. Pelo facto de este modelo poder ser utilizado como aproximação ao modelo de Poisson composto em tempo contínuo, as fórmulas estudadas serão também utilizadas na aproximação às quantidades correspondentes apresentadas em Egídio dos Reis (2002). A presente dissertação encontra-se dividida em cinco Capítulos.

O Capítulo 1 apresenta o modelo de Poisson composto em tempo contínuo. A Secção 1.1 introduz os processos estocásticos, dada a sua aplicação à teoria da ruína. A Secção 1.2 descreve o modelo referido e apresenta alguns resultados conhecidos. A Secção 1.3 é dedicada às probabilidades relacionadas com o número de indemnizações até à ocorrência de ruína, estudadas por Egídio dos Reis (2002).

O Capítulo 2 constitui uma das partes fundamentais desta dissertação e é dedicado ao estudo do modelo binomial composto em tempo discreto. A Secção 2.1 descreve o modelo e

refere alguns resultados. A Secção 2.2 apresenta novos resultados para a probabilidade de ruína, tendo em linha de conta o número de indemnizações até à ocorrência da mesma. A Secção 2.3 estuda a probabilidade de haver n indemnizações antes do processo recuperar para valores não negativos, para o caso particular em que a reserva inicial é zero. A Secção 2.4 apresenta aplicações práticas para estas probabilidades, considerando que as indemnizações individuais têm distribuição binomial negativa e distribuição de *Poisson positiva*.

O Capítulo 3 tem por objectivo utilizar os resultados do modelo discreto para aproximar às quantidades correspondentes obtidas em Egídio dos Reis (2002). A Secção 3.1 descreve a técnica de discretização utilizada para aproximar o processo contínuo ao processo discreto. A Secção 3.2 apresenta os resultados numéricos obtidos.

O Capítulo 4 apresenta um método alternativo para calcular a probabilidade de ruína eventual, tendo em conta o número de indemnizações até à ocorrência da mesma.

O Capítulo 5 tem por objectivo focar alguns aspectos relevantes desta dissertação.

Capítulo 1

Modelo Clássico

1.1 Conceitos fundamentais

Neste Capítulo vamos introduzir alguns conceitos e definições em que se baseia os modelos que iremos apresentar.

Ao longo do tempo, a lei de probabilidade que rege uma determinada experiência aleatória pode mudar. Deste modo fará sentido considerar, em cada instante temporal, uma variável aleatória $Y(t)$ que associará ao mesmo acontecimento, em instantes distintos, probabilidades (possivelmente) distintas. Esta sucessão de variáveis aleatórias designa-se por *processo estocástico*. Formalmente, poderemos representar um processo estocástico como $\{Y(t) : t \in \hat{T}\}$, onde \hat{T} é o conjunto de índices do processo e t é o parâmetro do processo. Quanto à natureza das medições temporais, os processos estocásticos podem ser classificados como *processo estocástico em tempo discreto* no caso de $\hat{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$, ou como *processo estocástico em tempo contínuo* no caso de $\hat{T} = [0, +\infty)$.

Se considerarmos os valores $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ como possíveis para t , podemos definir o *acréscimo do processo* como a variável aleatória $Y(t_{k+1}) - Y(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Diz-se que o processo tem *acréscimos independentes* se, para $t_1 < \dots < t_{n+1}$, as variáveis aleatórias $Y(t_2) - Y(t_1), \dots, Y(t_{n+1}) - Y(t_n)$ são independentes. Por outro lado, o processo tem *acréscimos estacionários* se, para quaisquer $t_i < t_k$ e para todo o $h > 0$, a variável aleatória $Y(t_k) - Y(t_i)$ tiver a mesma distribuição da variável aleatória $Y(t_k + h) - Y(t_i + h)$. Estas duas definições são importantes se quisermos descrever um processo de Poisson, como veremos mais à frente.

Quando $Y(t)$ representa o número de ocorrências de um fenómeno aleatório no intervalo $(0, t]$ diz-se que $\{Y(t), t \geq 0\}$ é um *processo de contagem*. Para facilitar a leitura das próximas expressões, vamos substituir a letra Y pela letra N sempre que estivermos perante um processo de contagem. O processo de Poisson, de média (λt) para todo o $t > 0$, é um caso particular de um processo de contagem, onde

1. $N(0) = 0$;
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ tem acréscimos independentes e estacionários;
3. $\forall h \rightarrow 0^+, \quad P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$;
4. $\forall h \rightarrow 0^+, \quad P(N(h) \geq 2) = o(h)$.

Note-se que uma função f diz-se $o(h)$ se $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

Mais à frente, vamos descrever alguns modelos relacionados com o montante e o número de indemnizações a que um conjunto de apólices dá origem. Por isso, vamos introduzir um outro conceito que é o *processo estocástico composto*, identificado pela letra Z . Se tivermos um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$, uma família de variáveis aleatórias $\{X_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) e independentes

de $\{N(t)\}$, e $\{Z(t), t \geq 0\}$ definido como

$$Z(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i$$

onde $X_0 \equiv 0$, então $\{Z(t), t \geq 0\}$ é um *processo estocástico composto*. No caso de $\{N(t), t \geq 0\}$ ser um processo de Poisson, então $\{Z(t), t \geq 0\}$ descreverá um processo de Poisson composto.

1.2 Descrição do modelo clássico de risco

O aparecimento das Seguradoras deve-se, sobretudo, à necessidade de cobrir o risco de uma eventual perda específica mediante o pagamento antecipado de uma prestação, designada por prémio. Por isso, a sua sobrevivência depende, entre outras coisas, do agrupamento de riscos semelhantes (que dão origem às carteiras de seguros) e da análise das indemnizações decorrentes do número de sinistros ocorridos num determinado período de tempo. É importante referir que, na realidade, o instante em que o sinistro ocorre não coincide com o instante em que é paga a indemnização. Isto deve-se a variadíssimas razões, tais como questões administrativas, legais ou se contratualmente o sinistro ocorrido não der direito ao pagamento de uma indemnização, entre outras. Nesta dissertação, vamos assumir que as indemnizações são pagas no instante em que o sinistro ocorre.

Embora o modelo de risco que vamos apresentar para definir o valor da reserva de uma carteira, só entre em linha de conta com os prémios recebidos em cada instante, o número de indemnizações pagas e o respectivo montante associado a cada uma delas, é preciso não esquecer que existem outros factores relevantes, tais como a taxa de juro, que irão ser omitidos por razões de simplificação.

Neste modelo, conhecido por *modelo clássico de risco*, vamos considerar que as indemnizações individuais vão sendo agrupadas à medida que os sinistros ocorrem. Por sua vez, as indemnizações agregadas são obtidas através da soma das indemnizações individuais pagas num determinado período de tempo.

No modelo clássico de risco, a variável aleatória $N(t)$ representa o número de indemnizações ocorridas até ao instante t e tem uma distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda t, \lambda > 0$. Vamos admitir que $\{N(t), t \geq 0\}$ descreve um processo de Poisson.

Relativamente às indemnizações individuais, vamos considerar $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma sequência de variáveis aleatórias em que cada uma das variáveis X_i diz respeito ao montante da i -ésima indemnização associada a um sinistro ocorrido no intervalo $(0, t]$. Vamos admitir que as indemnizações são independentes e identicamente distribuídas e independentes de $N(t)$, ou seja, o número de indemnizações não influencia o valor das mesmas, nem os montantes se influenciam entre si.

Então, podemos definir o valor da reserva de risco de uma carteira no instante t , $U(t)$, como

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0 \tag{1.1}$$

onde $u = U(0) (\geq 0)$ é a valor da reserva inicial, c é o prémio (colectivo) recebido por unidade de tempo e $S(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i$ são as indemnizações agregadas acumuladas no instante t , onde $X_0 \equiv 0$. Relativamente às indemnizações agregadas e com base nos conceitos apresentados na Secção 1.1, podemos concluir que $\{S(t), t \geq 0\}$ descreve um processo de Poisson composto.

Graficamente, a trajectória do valor da reserva em cada instante pode ser representada

de acordo com a Figura 1.1.

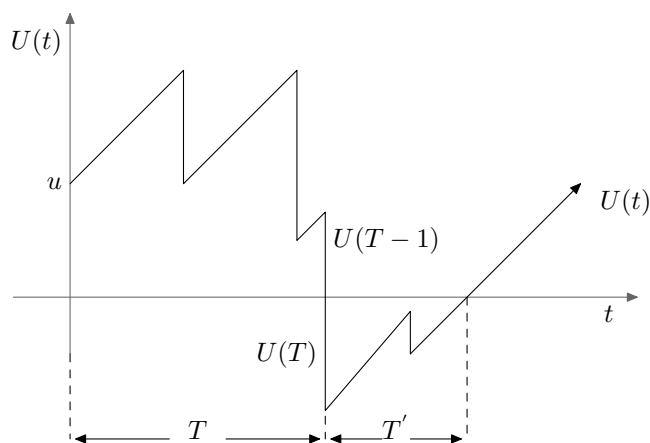


Figura 1.1: Reserva de risco em tempo contínuo

A Figura 1.1 mostra que, ao longo do tempo, o valor da reserva de risco vai tendo oscilações em virtude dos prémios recebidos (receita) e das indemnizações pagas (despesa). Como se pode ver, nem sempre o pagamento de uma indemnização dá origem a uma reserva de valor negativo mas no instante em que isso acontece, T , dizemos que *houve ruína*. Note-se que a ruína só acontece no instante em que ocorre uma indemnização e não deve ser confundida com insolvência de uma carteira. De facto, após a ocorrência de ruína, não só é possível o valor da reserva de risco atingir novamente valores positivos como tem probabilidade 1! Na Figura 1.1 identificámos esse período por T' , sendo este normalmente designado por *período de recuperação*.

No estudo de qualquer modelo de risco, é sempre importante conhecer a distribuição das indemnizações individuais. Vamos considerar $B(x) = P(X \leq x)$ a função distribuição das indemnizações individuais X_i , com $B(0) = 0$ e $b(x)$ a respectiva função densidade. Vamos admitir a existência da média e designá-la por $b_1 = E[X]$. Em alguns casos é necessário admitir a existência da função geradora de momentos, $m(s) = E[e^{sX_i}]$ como,

por exemplo, no caso de ser preciso calcular o *coeficiente de ajustamento*. Se $m(s)$ existir para $-\infty < s < \gamma$, tal que $\lim_{s \rightarrow \gamma} m(s) = \infty$, então o *coeficiente de ajustamento*, R , é a única raiz positiva da equação

$$\lambda + cR - \lambda m(R) = 0 \tag{1.2}$$

Vejamos agora a seguinte definição:

Definição. A *Transformada de Laplace* (T.L.) de uma função $i(x)$ definida para $x \geq 0$ é dada por

$$\bar{i}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} i(x) dx$$

se o integral for convergente.

No caso da indemnizações individuais, vamos considerar $\bar{b}(s)$ a Transformada de Laplace de $b(x)$. De Gerber (1979) temos a garantia que a T.L. existe, pelo menos para algum $s \in \mathfrak{R}$.

Em relação ao prémio, existem diversos métodos de cálculo referidos na literatura da especialidade. Nesta dissertação, vamos optar pelo *princípio do valor esperado* que tem em linha de conta o valor esperado das indemnizações agregadas, $E[S(t)]$. De acordo com este princípio, o prémio por unidade de tempo é $c = (1 + \theta)E[S(t)]$, sendo $\theta > 0$ o coeficiente da carga de segurança. A aplicação deste coeficiente deve-se, sobretudo, à necessidade de fazer face a desvios anormais de sinistralidade em relação ao seu valor esperado. Uma vez que $\{S(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson composto, temos $E[S(t)] = E[N(t)]E[X] = \lambda b_1$ e, por sua vez, $c = (1 + \theta)\lambda b_1$.

Apesar de $U(t) \rightarrow \infty$ se $t \rightarrow \infty$, o processo $U(t)$ pode passar por valores negativos, como podemos ver na Figura 1.1 e, nesse caso, falamos na *ruína do processo* ou *da carteira*.

Definimos o *instante da ruína* como a primeira vez que a reserva passa a valores negativos.

Seja

$$T = \begin{cases} \inf\{t : U(t) < 0\} \\ \infty & \text{se } U(t) \geq 0 \quad \forall t \end{cases}$$

A probabilidade de ruína é positiva e podemos definir a *probabilidade de ruína eventual* partindo de uma reserva inicial u como sendo

$$\psi(u) = P[T < \infty | U(0) = u] \quad (1.3)$$

Por outro lado, a *probabilidade de sobrevivência eventual*, partindo de uma reserva inicial u pode ser definida como $\delta(u) = 1 - \psi(u) = P[T = \infty | U(0) = u]$.

No modelo clássico de risco, é bem conhecido que, no caso particular de $u = 0$, temos $\psi(0) = a b_1$, onde $a = \lambda/c$ (ver Bowers *et al.* (1997)). Como considerámos que o prémio é calculado pelo *princípio do valor esperado*, temos ainda que $\psi(0) = 1/(1 + \theta)$. Para valores de $u > 0$, o cálculo de $\psi(u)$ apresenta maiores dificuldades. No entanto, existem vários métodos que permitem obter o seu valor tais como através das Transformadas de Laplace ou através de modelos discretos com parametrização adequada. A título de exemplo, temos Dickson & Waters (1991).

Além da probabilidade de ruína, existem outras quantidades a ter em consideração no instante em que a reserva passa a valores negativos, tal como conhecer o valor de $U(T)$ representado na Figura 1.1. Para isso, consideremos a função $G(u; y)$ como a probabilidade da ruína ocorrer partindo de uma reserva inicial u e com um *deficit* no instante de ruína menor que y . Seja $g(u; y) = \frac{d}{dx}G(u; y)$ a respectiva função densidade. $G(u; y)$ é conhecida como *função distribuição da gravidade de ruína* e pode ser definida como

$$G(u; y) = P[T < \infty \quad \wedge \quad U(T) > -y | U(0) = u] \quad (1.4)$$

Quando $y \rightarrow \infty$, temos $G(u; \infty) = \psi(u)$. Isto significa que $G(u; y)$ é uma função distribuição imprópria pois, caso contrário, no limite deveria convergir para 1. É por esta razão que é costume definirmos a função distribuição condicional, dado $T < \infty$, como $\tilde{G}(u; y) = G(u; y)/\psi(u)$ uma vez que $\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{G}(u; y) = 1$.

Existem métodos, já conhecidos na literatura actuarial, que permitem obter valores aproximados para a função densidade da gravidade de ruína. Em vez de calcularmos $g(u; y)$ directamente, podemos fazê-lo através da sua Transformada de Laplace, $\bar{g}(u; s)$, definida como

$$\bar{g}(u; s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} g(u; x) dx$$

Mais uma vez, no modelo clássico de risco e para o caso particular de $u = 0$, temos $g(0; y) = a(1 - B(y))$ de acordo com Bowers *et al.* (1997).

1.3 Número de indemnizações necessárias para a ocorrência de ruína

Nos últimos anos, a probabilidade de ruína e os problemas de cálculo associados a esta têm sido largamente discutidos, seja para o problema da ruína eventual seja para o problema da probabilidade de ruína em tempo finito. Contudo, não deixaria de ser interessante abordar a ruína não em função do “tempo” mas sim do número de indemnizações pagas até à ocorrência (ou não) de ruína. Esta “ideia” não é nova, tendo já sido abordada por Egídio dos Reis (2002) para o caso do modelo clássico de risco. Neste artigo, recorre-se às Transformadas de Laplace para calcular a probabilidade da ruína ocorrer na n -ésima indemnização ($n = 1, 2, \dots$) e a probabilidade (condicional) de haver n indemnizações durante o período de recuperação. Os resultados que vamos apresentar podem ser vistos, em detalhe, em Egídio dos Reis (2002) e aplicam-se ao processo de Poisson composto em

tempo contínuo.

Vamos considerar $P(u; n)$ a probabilidade da ruína ocorrer até à n -ésima indemnização ($n = 1, 2, \dots$), partindo de uma reserva inicial $u \geq 0$ e $p(u; n)$ a respectiva função densidade. Vamos designar a variável aleatória que lhe está associada por Q . Obviamente, temos

$$p(u; 1) = P(u; 1)$$

$$p(u; n + 1) = P(u; n + 1) - P(u; n)$$

$$\text{e } \psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(u; n).$$

Como no modelo clássico os tempos decorridos entre indemnizações sucessivas são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de média $1/\lambda$, podemos concluir que, relativamente à ocorrência da primeira indemnização, temos

$$P(u; 1) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty b(x) dx dt$$

e, no caso de $n \geq 1$,

$$P(u; n + 1) = P(u; 1) + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} b(x) P(u + ct - x; n) dx dt$$

Consideremos a T.L. de $p(u; n + 1)$ como $\bar{p}(s; n + 1) = \int_0^\infty e^{-su} p(u; n + 1) du$. A correspondência biunívoca entre $p(u; n + 1)$ e $\bar{p}(s; n + 1)$ revela-se bastante útil pois implica que, se tivermos uma expressão para a segunda, estamos em condições de obter uma expressão para a primeira. Partindo deste princípio, temos o seguinte resultado (ver Egídio dos Reis(2002))

$$\bar{p}(s; 1) = (s - a)^{-1} (\bar{g}(0; a) - \bar{g}(0; s)) , \quad s \neq a$$

$$\bar{p}(s; n) = (-1)^n \frac{(a \bar{b}(s))^{n-1}}{(s - a)^n} \bar{g}(0; s) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{(a \bar{b}(s))^i}{(s - a)^{i+1}} p(0; n - i), \quad n > 1$$

onde $\bar{g}(0; s) = a(1 - \bar{b}(s)) / s$ e $\bar{g}(0; a) = 1 - \bar{b}(a) \cdot \bar{p}(s; n)$.

Neste processo, supondo que a ruína ocorre, vamos agora considerar $q(u; n)$ a probabilidade de haver n indenizações até a reserva recuperar para valores não negativos, após a ocorrência de ruína. Seja R a variável aleatória associada, com suporte em $\{0, 1, 2, \dots\}$. Nesta definição, é importante ter em atenção que a indenização que dá origem à ruína, por já estar incluída no número de indenizações até à ocorrência de ruína, não pode ser aqui novamente contabilizada. Partindo de um resultado de Gerber (1990) e recorrendo novamente às T.L., Egídio dos Reis (2002) obteve as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} q(u; 0) &= \frac{\bar{g}(u; a)}{\psi(u)} \\ q(u; 1) &= \frac{-a\bar{b}(a)\bar{g}'(u; a)}{\psi(u)} \\ q(u; n) &= \frac{(-a)^n}{\psi(u)n!} \left(\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (b(s)^n \bar{g}'(u; s)) \Big|_{s=a} \right), \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde $\bar{g}'(u; s)$ é a derivada da Transformada de Laplace de $g(u; x)$, no ponto $s = a$. Em alguns casos, o cálculo destas probabilidades (condicionais) apresenta algumas dificuldades por envolver procedimentos numéricos complexos. Em Egídio dos Reis (2002) isso acontece, por exemplo, no caso das indenizações individuais que seguem uma distribuição de Pareto(2,1) e partem de uma reserva $u > 0$.

Para o caso particular em que a reserva inicial tem valor zero, o mesmo autor estabeleceu ainda a seguinte igualdade, facilmente compreensível com recurso a processos duais:

$$p(0; n + 1) = q(0; n)\psi(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.6}$$

Capítulo 2

Modelo binomial composto

2.1 Descrição do modelo

O Capítulo 1 foi dedicado à apresentação do modelo de reserva de uma carteira considerando que tanto as indemnizações como os prémios ocorriam em tempo contínuo. Neste Capítulo, vamos abordar o modelo binomial composto em tempo discreto e estudar a probabilidade da ruína ocorrer na $(n + 1)$ -ésima indemnização ($n = 0, 1, \dots$) e a probabilidade de haver n indemnizações durante o período de recuperação, após a ruína. A última Secção será dedicada aos exemplos práticos. Para isso, vamos começar por apresentar o modelo binomial composto em tempo discreto e alguns resultados conhecidos, que podem ser vistos em Dickson (1994), Gerber (1988a), Willmot (1992) e Shiu (1989).

Considere-se então o modelo de risco em tempo discreto em que $t = 0, 1, 2, \dots$. Vamos usar a letra ' d ' para diferenciar os novos resultados dos anteriormente apresentados no Capítulo 1.

Consideremos que o número de indemnizações até ao momento t segue um processo binomial $\{N_d(t) : t = 0, 1, \dots\}$ e $N_d(0) = 0$. Isto significa que a variável aleatória $N_d(t)$ tem

uma distribuição binomial e que o tempo de espera (discreto) entre a ocorrência de indemnizações é dado por uma distribuição Geométrica. Esta distribuição é conhecida por não ter *memória*, ou seja, “o tempo de espera já decorrido, qualquer que seja, não altera a distribuição de tempo adicional de espera” por uma indemnização (ver Murteira (1990)).

Uma vez que se trata de um modelo binomial, vamos assumir que, em cada período, a probabilidade de haver uma indemnização é p ($0 < p < 1$) e a probabilidade de não haver nenhuma indemnização é $q = 1 - p$.

Relativamente às indemnizações, vamos considerar a variável aleatória X_i para representar o montante de uma indemnização no período i e supor que a ocorrência de indemnizações em períodos diferentes é um acontecimento independente. Vamos ainda definir $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ como uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) e independentes do processo $\{N_d(t), t = 0, 1, \dots\}$. A variável aleatória X_i vai ter como suporte os inteiros positivos.

O valor da reserva de risco de uma carteira no instante t , $U_d(t)$, pode ser apresentado como

$$U_d(t) = u + ct - S_d(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

onde, analogamente ao modelo tratado na Secção 1.2, $u = U_d(0)$ é a valor da reserva inicial, c é o prémio (colectivo) recebido por unidade de tempo e $S_d(t) = \sum_{i=0}^{N_d(t)} X_i$ são as indemnizações agregadas acumuladas no instante t , onde $X_0 \equiv 0$. Consideremos $u \geq 0$ um valor inteiro e, para simplificar, vamos admitir que $c = 1$. Relativamente às indemnizações agregadas e uma vez que $\{N_d(t), t = 0, 1, \dots\}$ descreve um processo binomial, podemos concluir que $\{S_d(t), t \geq 0\}$ descreve um processo binomial composto.

Graficamente, a trajectória do valor da reserva em cada instante pode ser representada de acordo com a Figura 2.1.

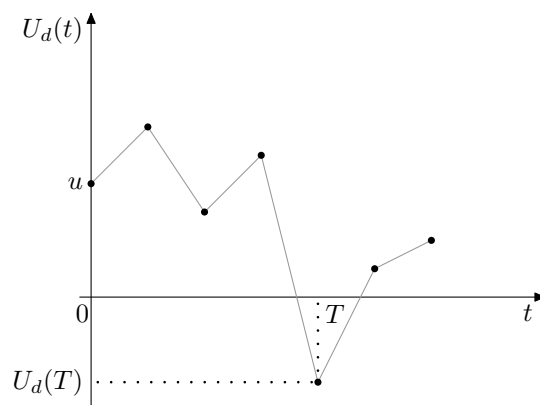


Figura 2.1: Reserva de risco em tempo discreto

Comparando as Figuras 1.1 e 2.1, podemos constatar que na primeira a trajectória do valor da reserva, em cada instante, está representada por uma “linha contínua” enquanto que na segunda temos a trajectória representada por pontos (a linha que os une tem somente um objectivo estético). Isto deve-se à própria definição de t , que tem valores no conjunto $[0, +\infty)$ e $\{0, 1, 2, \dots\}$ considerando o tempo contínuo e o tempo discreto, respectivamente. O instante em que ocorre a ruína é, mais uma vez, designado por T . Voltaremos a este assunto mais à frente.

A equação (2.1) mostra-nos a relação que existe entre a reserva em cada instante t e as indemnizações agregadas. Estas, por sua vez, estão relacionadas com as indemnizações individuais. Consideremos $f(x) = P(X_i = x)$ e $F(x) = P(X_i \leq x)$, para $x = 1, 2, \dots$ as funções de probabilidade e de distribuição, respectivamente, das indemnizações individuais, com $F(0) = 0$. Vamos admitir que $\mu = E[X_i] < \infty$, ou seja, impôr a existência da média. Vamos ainda considerar $g(z) = E[z^{X_i}] = \sum_{i=0}^{\infty} z^i f(i)$ a função geradora de

probabilidade.

Tal como para o modelo clássico definido na Secção 1.2, admite-se que o prémio é calculado com base no *princípio do valor esperado*. Por isso, para um coeficiente da carga de segurança $\theta > 0$, temos que $c = (1 + \theta)E[S(t)] = (1 + \theta)p\mu$. Como por hipótese, $c = 1$, então $p\mu < 1$.

O coeficiente da carga de segurança utilizado no cálculo do prémio tem por objectivo minimizar a probabilidade da reserva passar a valores negativos. Este acontecimento não pode ser totalmente eliminado e, por isso, definimos a *probabilidade de ruína eventual* como

$$\psi_d(u) = P[U_d(t) \leq 0 \quad \text{para } t, \quad t = 1, 2, 3, \dots] \quad (2.2)$$

Baseando-se no Teorema da Probabilidade Total, Gerber (1988a) apresenta a probabilidade de ruína eventual de um modo recursivo. Das Fórmulas (5)–(7) deste autor, retiramos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \psi_d(0) &= p\mu \\ \psi_d(1) &= q^{-1}(\psi_d(0) - p) \\ \psi_d(u + 1) &= q^{-1} \left(\psi_d(u) - p \sum_{i=1}^u \psi_d(u + 1 - i)f(i) - p[1 - F(u)] \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Na Figura 2.1 encontra-se representado o *instante de ruína*, T . Formalmente, pode ser definido como

$$T = \begin{cases} \min\{t, U_d(t) \leq 0, \quad t = 1, 2, \dots\} \\ \infty \quad \text{se } U_d(t) > 0 \quad \text{para } t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Embora não se encontre representado na Figura 2.1, poderia dar-se o caso da reserva inicial $u = U_d(0)$ assumir o valor zero, uma vez que não foi imposta nenhuma restrição nesse sentido. Porém, de acordo com a definição de T , neste instante não há ocorrência de ruína, pelo que essa situação fica salvaguardada. Relativamente ao instante de ruína, nem sempre existe consenso. A definição aqui apresentada corresponde à apresentada por Dickson (1994) e Gerber (1988a). No entanto, Willmot (1992) e Shiu (1989) consideram que só existe ruína quando a reserva de risco atinge valores negativos, razão pela qual alguns resultados poderão apresentar discrepâncias quando comparados com os apresentados nesta dissertação. Em Egídio dos Reis (2000), podemos ver ambas as definições de instante de ruína.

Existem alguns resultados relacionados com a ruína, tais como a relação entre o valor da reserva imediatamente antes e após ruína. Consideremos, para isso, a função probabilidade conjunta da reserva imediatamente antes de ruína e a gravidade de ruína dada pela seguinte expressão

$$f_d(u; x, y) = P[T < \infty, U_d(T) = -y, U_d(T - 1) = x | U_d(0) = u] \quad (2.4)$$

para valores de $x = 1, 2, 3, \dots$ e $y = 0, 1, 2, \dots$. Então, a equação (2.4) representa a probabilidade da ruína ocorrer partindo de uma reserva inicial u , com uma gravidade de ruína y e uma reserva de valor x no instante anterior à ocorrência de ruína. Sendo $f_d(u; x, y)$ uma probabilidade conjunta, sabemos que $f_d(u; x) = f_d(u; x, \infty)$ e $g_d(u; y) = f_d(u; \infty, y)$. De Gerber (1988a), Fórmula (35), sabemos que $f_d(0; x, y) = p f(x + y + 1)$, $x = 1, 2, \dots$ e $y = 0, 1, 2, \dots$. De acordo com o autor, esta igualdade também é válida para $x = 0$ e representa a probabilidade de haver uma indemnização de montante igual a $y + 1$ no primeiro instante. Portanto,

$$g_d(0; y) = p \sum_{x=0}^{\infty} f(x + y + 1) = p [1 - F(y)], \quad y = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

ou seja, temos a probabilidade da ruína ocorrer com uma gravidade y , partindo de uma reserva inicial nula. A função geradora de probabilidade de $g_d(u; y)$ pode ser definida como $h(u, z) = \sum_{y=0}^{\infty} z^y g_d(u; y)$ e, no caso particular de $u = 0$, obtemos facilmente, atendendo a (2.5),

$$h(0, z) = p \sum_{y=0}^{\infty} z^y [1 - F(y)] = \frac{p}{1 - z} [1 - g(z)] \quad (2.6)$$

Vamos ainda de definir mais duas variáveis aleatórias relacionadas com a ruína. Seja M a variável aleatória que representa o número de indenizações até à ocorrência de ruína, partindo de uma reserva inicial u . Consideremos $b(u; n)$ e $B(u; n)$ como sendo a função probabilidade e função distribuição, respectivamente, para $n = 1, 2, \dots$. Deste modo, é necessário haver pelo menos uma indenização para a ruína ocorrer, isto no caso de haver ruína.

Seja K a variável aleatória que representa o número de indenizações que ocorrem até a reserva recuperar para valores positivos, após a ocorrência de ruína. Consideremos $v(u; n)$ e $V(u; n)$ a função probabilidade e a função distribuição, respectivamente, para $n = 0, 1, \dots$. Deste modo, após ter ocorrido ruína, é possível que o processo recupere sem haver qualquer indenização. Além disso, a recuperação tem probabilidade 1 (ver Egídio dos Reis (1993)).

2.2 Número de indenizações necessárias para a ocorrência de ruína

Os resultados apresentados nesta Secção fazem parte de Egídio dos Reis (2004).

No modelo binomial, temos para cada período uma prova de Bernoulli, onde um sucesso pode ser interpretado como a ocorrência de uma indenização, cuja probabilidade

designámos por p . Numa sequência de provas de Bernoulli independentes, o tempo de espera (discreto) por um sucesso é dado por uma distribuição geométrica (ver Murteira (1990)) cuja função probabilidade é

$$p(1-p)^{t-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

De forma análoga ao modelo clássico, considerando a ocorrência da primeira indemnização temos, para $u = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} B(u; 1) &= \sum_{t=1}^{\infty} p(1-p)^{t-1} \sum_{x=u+t}^{\infty} f(x) \\ &= p \sum_{t=1}^{\infty} q^{t-1} [1 - F(u+t-1)] \\ &= p \sum_{t=0}^{\infty} q^t [1 - F(u+t)] \end{aligned} \tag{2.7}$$

Se reordenarmos a série, de modo a começar em u , obtemos

$$\frac{p}{q^u} \sum_{t=u}^{\infty} q^t [1 - F(t)] = \frac{1}{q^u} \left(\sum_{t=0}^{\infty} p q^t [1 - F(t)] - p \sum_{t=0}^{u-1} q^t [1 - F(t)] \right)$$

Note-se que esta expressão já só é válida para $u = 1, 2, \dots$ e pode ser simplificada se, com base na equação (2.6), substituirmos a série por $h(0, q)$, isto é, pela função geradora de probabilidade da função probabilidade da gravidade de ruína no ponto $z = q$. Então, para $u = 1, 2, \dots$

$$B(u; 1) = \frac{1}{q^u} \left(h(0, q) - p \sum_{t=0}^{u-1} q^t [1 - F(t)] \right) \tag{2.8}$$

Para $n = 1, 2, \dots$ e $u = 1, 2, \dots$, a probabilidade da ruína ocorrer até à n -ésima indemnização é dada por

$$B(u; n + 1) = B(u; 1) + \sum_{t=1}^{\infty} p(1-p)^{t-1} \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x)B(u+t-x; n) \quad (2.9)$$

A leitura que podemos fazer desta expressão é que a ruína ocorre na primeira indemnização ou, não tendo ocorrido na primeira, ocorre nas n seguintes. Como

$$b(u; 1) = B(u; 1)$$

$$b(u; n + 1) = B(u; n + 1) - B(u; n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

então temos as seguintes funções de probabilidade para $u = 1, 2, \dots$

$$b(u; 1) = \frac{1}{q^u} \left(h(0, q) - p \sum_{t=0}^{u-1} q^t [1 - F(t)] \right) \quad (2.10)$$

$$b(u; n + 1) = \sum_{t=1}^{\infty} pq^{t-1} \sum_{x=1}^{u+t-1} f(x)b(u+t-x; n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

No caso particular de $u = 0$, é fácil de perceber pela equação (2.7) que

$$b(0; 1) = p \sum_{t=0}^{\infty} q^t [1 - F(t)] = h(0, q) \quad (2.12)$$

Para obter $b(0; n + 1)$, $n = 1, 2, \dots$, não podemos aplicar directamente a equação (2.11). Isto porque se quisermos considerar a ocorrência de ruína na $(n + 1)$ -ésima indemnização, $n = 1, 2, \dots$ não podemos ter nenhuma indemnização no primeiro período, uma vez que qualquer indemnização implicaria ruína da carteira por levar a reserva para valores não positivos. Basta recordar que, por hipótese, $c = 1$ e pela equação (2.1), temos $U_d(1) = 1 - \sum_{i=0}^{N_d(1)} X_i$. Ora este acontecimento, tendo lugar na primeira indemnização, contradiz a definição de $b(0; n + 1)$, $n = 1, 2, \dots$. Portanto, a ocorrência de indemnizações para este caso só pode ser permitida a partir do segundo período. Então, para $n = 1, 2, \dots$ temos

$$\begin{aligned}
b(0; n+1) &= \sum_{t=2}^{\infty} pq^{t-1} \sum_{x=1}^{t-1} f(x)b(t-x; n) \\
&= \sum_{t=2}^{\infty} pq^{t-1} \sum_{x=1}^{t-1} f(t-x)b(x; n) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} pb(x; n)q^{x-1} \sum_{t=x+1}^{\infty} q^{t-x} f(t-x) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} pb(x; n)q^{x-1} \sum_{t=1}^{\infty} q^t f(t) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} pb(x; n)q^{x-1} g(q) \\
&= pq^{-1}g(q) \sum_{x=1}^{\infty} b(x; n)q^x
\end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $g(q)$ é a função geradora de probabilidade de $f(x)$ no ponto $z = q$. A série $\sum_{x=1}^{\infty} b(x; n)q^x < \infty$, uma vez que sendo $b(x; n)$ uma probabilidade então $0 \leq q^x b(x; n) < q^x$ e por sua vez $\sum_{x=1}^{\infty} q^x$ é uma série geométrica de razão $0 < q < 1$.

Para $n = 1$, a equação (2.13) simplifica-se. Como $b(0; 2) = pq^{-1}g(q) \sum_{x=1}^{\infty} b(x; 1)q^x$ e com base nas equações (2.6) para a f.p. da gravidade de ruína, e (2.7), reordenada para começar em u , temos

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{\infty} q^x b(x; 1) &= \sum_{x=1}^{\infty} q^x \sum_{i=x}^{\infty} q^{i-x} g_d(0; i) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{i=x}^{\infty} q^i g_d(0; i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i q^i g_d(0; i) = q \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} g_d(0; i) \\
&= q h'(0, q)
\end{aligned}$$

Então,

$$b(0; 2) = pg(q)h'(0, q). \tag{2.14}$$

Apesar de simplificada para os casos em que $n = 0, 1$, é fácil constatar que a fórmula

genérica (2.13) apresenta sérias dificuldades quando utilizada para apurar resultados numéricos. Nesse sentido, Egídio dos Reis começa por deduzir uma nova fórmula para $n = 2$, chegando à seguinte igualdade

$$b(0; 3) = \frac{1}{2}p^2 \frac{d}{dz} [g(z)^2 h'(0, z)] \Big|_{z=q}. \quad (2.15)$$

Comparando as equações (2.14) e (2.15) e trabalhando recursivamente, o autor conclui que

$$b(0; n+1) = \frac{1}{n!} p^n \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [g(z)^n h'(0, z)] \Big|_{z=q}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

Por último, falta arranjar uma equação recursiva para $b(u; n)$, $u = 1, 2, \dots$ e $n = 2, 3, \dots$

Em Egídio dos Reis (2004) demonstra-se que

$$b(1; n) = q^{-1} b(0; n) \quad (2.17)$$

$$b(u; n) = q^{-1} \left(b(u-1; n) - p \sum_{x=1}^{u-1} b(x; n-1) f(u-x) \right), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.18)$$

2.3 Número de indemnizações necessárias para a recuperação, partindo de uma reserva inicial nula

Na Secção anterior obtivemos equações para a função probabilidade de ocorrência de ruína na n -ésima indemnização. Uma vez atingida a ruína, sabemos que, mais tarde ou mais cedo, a reserva voltará a atingir valores positivos com ou sem a ocorrência de indemnizações. Vamos começar por analisar o caso em que a reserva inicial é zero. Nesta Secção, vamos omitir a letra 'd' para não tornar as fórmulas que vamos deduzir demasiado “pesadas”, tendo sempre em atenção que estamos a lidar com o modelo binomial composto em tempo discreto. Os resultados apresentados nesta Secção fazem parte de Egídio dos Reis (2004).

O nosso ponto de partida vai ser dado por um resultado de Gerber (1988a). Com vista a uma melhor compreensão desse resultado, vamos explicar em que contexto é que surgiu. Nesse artigo, o acontecimento “ruína” é visto como o acontecimento que descreve uma visita ao valor zero, ou seja, $\{U(t) = 0 \text{ para } t \geq 1\}$. Nesta óptica, a probabilidade de ruína não é mais do que a probabilidade de haver uma visita ao valor zero.

Dados $S_0 = 0$ e $S_k = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k$, a probabilidade condicional de haver uma visita a “0” entre a k -ésima e a $(k + 1)$ -ésima indemnização, no instante $t = S_k$ e desde que $N(t) = k$, é dada por

$$P(N(t) = k) = \binom{S_k}{k} p^k q^{S_k - k}$$

A garantia de que essa visita acontece pela primeira vez, é apresentada por um resultado aplicado às probabilidades condicionais. Dado o acontecimento $A = \{U(t) = x \text{ e } N(t) = k\}$, com x definido nos inteiros positivos, temos que $P(U(\tau) > 0 \text{ para } \tau = 1, \dots, t - 1 | A) = x/t$. Estamos, então, em condições de apresentar o resultado de Gerber (1988a), Subsecção 4.4: “Seja $S_0 = 0$, $S_k = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k$ e x um inteiro positivo. Então, dados x e S_k , a probabilidade condicional do valor x ser visitado pela primeira vez entre a k -ésima e a $(k + 1)$ -ésima indemnização é

$$\begin{aligned} P(N(t) = k | x, S_k) &= \binom{S_k + x}{k} p^k q^{S_k + x - k} \frac{x}{S_k + x} \\ &= \frac{(S_k + x)!}{k!(S_k + x - k)!} \left(\frac{p}{q}\right)^k q^{S_k + x} \frac{x}{S_k + x} \\ &= \frac{x}{k!} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{(S_k + x - 1)!}{(S_k + x - k)!} q^{S_k + x} \\ &= \frac{x}{k!} \left(\frac{p}{q}\right)^k (S_k + x - 1)^{(k-1)} q^{S_k + x} \end{aligned} \tag{2.19}$$

com $a^{(k)} = k! \binom{a}{k}$. A probabilidade anterior significa que, quando o processo atinge x , ocorreram k indemnizações.

Uma vez que definimos atrás $f(\cdot)$ como a função probabilidade de X_i , podemos concluir que função probabilidade de S_k é uma convolução $f^{*k}(\cdot)$. Para $k = 0$, consideramos $f^{*0}(0) = 1$. Então, pelo Teorema da Probabilidade Total,

$$\begin{aligned} P(N(t) = k|x) &= \frac{x}{k!} \left(\frac{p}{q}\right)^k \sum_{i=0}^{\infty} (i+x-1)^{(k-1)} q^{i+x} f^{*k}(i) \\ &= \frac{x}{k!} \left(\frac{p}{q}\right)^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+x-1)!}{(i+x-1-(k-1))!} q^{i+x} f^{*k}(i) \\ &= \frac{x}{k!} \left(\frac{p}{q}\right)^k E[(S_k + x - 1)^{(k-1)} q^{S_k+x}] \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde o valor esperado diz respeito à função probabilidade $f^{*k}(\cdot)$. Da Fórmula (21) de Gerber (1988a), podemos concluir que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^k E[(S_k + x - 1)^{(k-1)} q^{S_k+x}] = p^k \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [g(z)^k z^{x-1}] \Big|_{z=q} \quad (2.21)$$

Como $g(z)$ é a função geradora de probabilidade das indemnizações individuais e estas são i.i.d., podemos concluir que

$$g(z)^k = E[z^{S_k}] = \sum_{i=0}^{\infty} z^i f^{*k}(i) \quad (2.22)$$

Então, dado x , a probabilidade condicional do valor x ser visitado pela primeira vez entre a k -ésima e a $(k+1)$ -ésima indemnização é

$$P(N(t) = k|x) = \frac{x}{k!} p^k \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [g(z)^k z^{x-1}] \Big|_{z=q}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad x = 1, 2, \dots$$

Vamos agora considerar que a ruína ocorreu com um deficit x no momento T . A função de probabilidade associada à variável aleatória X é $g(0; x)$. Se “0” não fosse considerado ruína, então a recuperação a partir de x , $x = 1, 2, \dots$ até zero ocorreria, no mínimo,

após um período e, nesse caso, o deficit teria de ser 1. Mas uma vez que “0” ainda é ruína (ver definição de T), vamos fazer um rescalonamento considerando $x = 0, 1, 2, \dots$. O Teorema da Probabilidade Total permite concluir que a probabilidade de ocorrerem k indenizações durante o período de recuperação vai ser dada por

$$\begin{aligned} P(N(t) = k) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x}{k!} p^k \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [g(z)^k z^{x-1}] \Big|_{z=q} g(0; x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{k!} p^k \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[g(z)^k \frac{d}{dz} z^x \right] \Big|_{z=q} g(0; x) \end{aligned}$$

e, recorrendo à Regra de Leibnitz para a derivada do produto,

$$\begin{aligned} &\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{k!} p^k \left(\sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1}{n} \left(\frac{d^n}{dz^n} g(z)^k \Big|_{z=q} \right) \left(\frac{d^{k-1-n}}{dz^{k-1-n}} \frac{d}{dz} z^x \Big|_{z=q} \right) \right) g(0; x) \\ &= \frac{1}{k!} p^k \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1}{n} \left(\frac{d^n}{dz^n} g(z)^k \Big|_{z=q} \right) \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{d^{k-n}}{dz^{k-n}} z^x \Big|_{z=q} \right) g(0; x) \\ &= \frac{1}{k!} p^k \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1}{n} \left(\frac{d^n}{dz^n} g(z)^k \Big|_{z=q} \right) \frac{d^{k-n}}{dz^{k-n}} \sum_{x=0}^{\infty} z^x g(0; x) \Big|_{z=q} \end{aligned}$$

Aplicando novamente a Regra de Leibnitz para a derivada do produto, podemos concluir que:

$$P(N(t) = k) = \frac{1}{k!} p^k \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [g(z)^k h'(0, z)] \Big|_{z=q}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Como a função $v(0; k)$, $k = 1, 2, \dots$ pode ser entendida como a probabilidade da reserva atingir o valor zero na k -ésima indenização após a ocorrência de ruína e partindo de $u = 0$, corresponde à função probabilidade dada pela equação (2.23). Para não haver uma dupla contagem, considerámos que a reserva podia recuperar sem ocorrerem indenizações. Por isso, falta ainda obter uma fórmula para este caso, ou seja, para $k = 0$. Para isso, basta substituímos k por “0” na equação (2.20), notando que $f^{*0}(0) = 1$.

$$\begin{aligned} P(N(t) = 0|x) &= \frac{x}{0!} \left(\frac{p}{q}\right)^0 E[(S_0 + x - 1)^{(0-1)} q^{S_0+x}] \\ &= x E\left[\frac{(x-1)!}{x!} q^x\right] = x \frac{(x-1)!}{x!} q^x = q^x \end{aligned}$$

Calculando a probabilidade não condicional $v(0; 0)$ pelo Teorema da Probabilidade Total, concluímos que a probabilidade de ocorrerem “0” indenizações até o processo recuperar para valores não negativos é,

$$v(0; 0) = \sum_{x=0}^{\infty} P(N(t) = 0 | x) g(0; x) = h(0, q) \quad (2.24)$$

Em resumo, a função de probabilidade (imprópria) do número de indenizações durante o período de recuperação é, para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned} v(0; 0) &= h(0, q) \\ v(0; 1) &= p g(q) h'(0, q) \\ v(0; n) &= \frac{1}{k!} p^k \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [g(z)^k h'(0, z)] \Big|_{z=q}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como estamos perante uma função de probabilidade imprópria, basta dividir as equações (2.25) por $\psi(0)$ comparar com as apresentadas em (1.5) para $u = 0$. Sabendo que o modelo binomial composto em tempo discreto é o correspondente, em tempo discreto, ao modelo de Poisson composto em tempo contínuo, podemos concluir que a semelhança entre estes resultados faz todo o sentido.

A relação apresentada em Egídio dos Reis (2002) entre o número de indenizações ocorridas até à ruína e durante o período de reserva negativa, para o modelo clássico e no caso de $u = 0$, pode ser aplicada ao modelo aqui desenvolvido. Das equações (2.12), (2.14),

(2.16) e (2.25), temos

$$b(0; n + 1) = v(0; n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Este mesmo resultado pode ser visto em Egídio dos Reis (2004). O autor ainda refere que, no caso de $u > 0$, “a distribuição do número de indemnizações no período de recuperação $v(u; n)$ será muito semelhante às equações (2.25), bastando para isso substituir em $v(0; n) h(0, z)$ por $h(u, z)$.” Para obter $g(u; x)$, refere Dickson(1994).

2.4 Exemplos

Nas Secções 2.2 e 2.3 obtivémos “fórmulas redondas” para as probabilidades $b(u; n + 1)$ e $v(0; n)$, para $n = 0, 1, 2, \dots$. Além disso, estabelecemos uma relação no caso particular em que $u = 0$. O que se pretende nesta Secção é obter resultados numéricos para algumas distribuições e representá-las graficamente. Os softwares *Mathematica* e *Excel* com recurso a macros foram os escolhidos para efectuar os cálculos das funções de probabilidade $b(u; n + 1)$ e $v(0; n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

2.4.1 Distribuição Geométrica

Vamos supor que a variável X segue uma distribuição geométrica de parâmetro $\beta/(1 + \beta)$. Por hipótese, $F(0) = 0$ e X só tem valores nos inteiros positivos, pelo que

$$f(x) = \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right) \left(1 - \frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{(x-1)} = \beta \left(\frac{1}{1 + \beta} \right)^x \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Pela equação (2.5), sabemos que

$$g(0; y) = p \left(\frac{1}{1 + \beta} \right)^y, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

Na simplificação das funções geradoras de probabilidade $g(z)$ e $h(0, z)$, obtivemos as igualdades abaixo indicadas, válidas para $\left|z \frac{1}{1+\beta}\right| < 1$:

$$g(z) = \frac{\beta z}{1 + \beta - z}$$

$$h(0, z) = \frac{(1 + \beta)p}{1 + \beta - z}$$

As Tabelas 2.1, 2.2 e 2.3 apresentam alguns dos resultados obtidos para os casos em que (p, β) são iguais a $(0.2, 1)$, $(0.4, 1.5)$ e $(0.6, 1.8)$, respectivamente.

u	$b(u; 1)$	$b(u; 2)$	$b(u; 5)$	$b(u; 10)$	$b(u; 15)$	$b(u; 20)$
0	0.3333333	0.0370370	0.0035119	0.0002666	0.0000319	0.0000046
1	0.1666667	0.0462963	0.0043899	0.0003332	0.0000399	0.0000057
2	0.0833333	0.0370370	0.0044336	0.0003504	0.0000423	0.0000061
5	0.0104167	0.0098380	0.0025806	0.0002604	0.0000337	0.0000050
10	0.0003255	0.0005787	0.0004404	0.0000800	0.0000127	0.0000021

Tabela 2.1: Probabilidades $b(u; n + 1)$, Geométrica(0.5), $p = 0.2$ e $\beta = 1$

u	$b(u; 1)$	$b(u; 2)$	$b(u; 5)$	$b(u; 10)$	$b(u; 20)$	$b(u; 50)$
0	0.5263158	0.0524856	0.0105405	0.0024299	0.0003778	0.0000084
1	0.2105263	0.0874763	0.0175676	0.0040499	0.0006297	0.0000140
2	0.0842105	0.0615833	0.0185405	0.0046869	0.0007544	0.0000171
5	0.0053895	0.0090471	0.0083205	0.0034205	0.0006853	0.0000174
10	0.0000552	0.0001798	0.0006142	0.0006733	0.0002504	0.0000092

Tabela 2.2: Probabilidades $b(u; n + 1)$, Geométrica(0.6), $p = 0.4$ e $\beta = 1.5$

Analisando as Tabelas 2.1, 2.2 e 2.3 , constatamos que quanto maior é a probabilidade de

u	$b(u; 1)$	$b(u; 2)$	$b(u; 5)$	$b(u; 10)$	$b(u; 20)$	$b(u; 100)$
0	0.7000000	0.0525000	0.0150609	0.0052224	0.0017770	0.0001228
1	0.2500000	0.1312500	0.0376523	0.0130561	0.0044425	0.0003070
2	0.0892857	0.0870536	0.0435850	0.0178305	0.0064634	0.0004660
5	0.0040673	0.0094565	0.0181405	0.0156776	0.0083490	0.0007936
10	0.0000236	0.0001081	0.0008826	0.0027666	0.0039863	0.0009156

Tabela 2.3: Probabilidades $b(u; n + 1)$, Geométrica(9/14), $p = 0.6$ e $\beta = 1.8$

ocorrer uma indemnização maior é o valor de $b(u; n + 1)$, o que faz todo o sentido. Apresentamos de seguida alguns gráficos das funções de probabilidade apresentadas na Tabela 2.2.

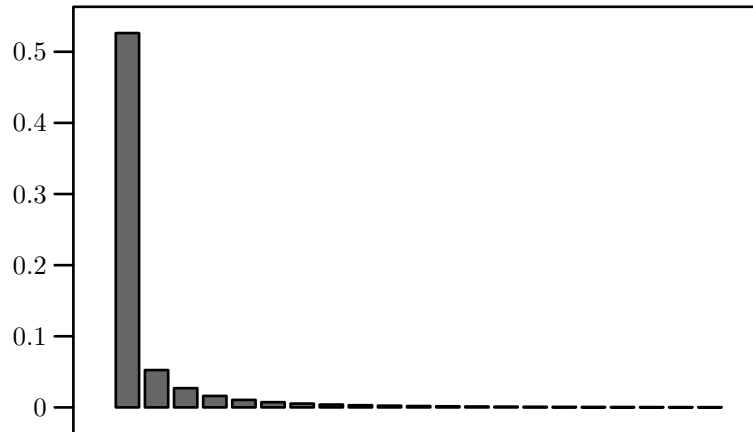


Figura 2.2: Probabilidades $b(0; n + 1) = v(0; n)$, $n = 0, \dots, 20$, Geométrica(0.6), $p = 0.4$

No gráfico da Figura 2.2 encontra-se representada a função probabilidade $v(0; n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, 20$ e é interessante constatar que de um modo geral a probabilidade de recuperação da reserva para valores positivos sem a ocorrência de qualquer indemnização é bastante elevada. Por outro lado, observa-se que no caso da reserva inicial ser $u = 0, 1, 2$ a função probabilidade $b(u; n + 1)$ decresce à medida que n aumenta mas esta situação

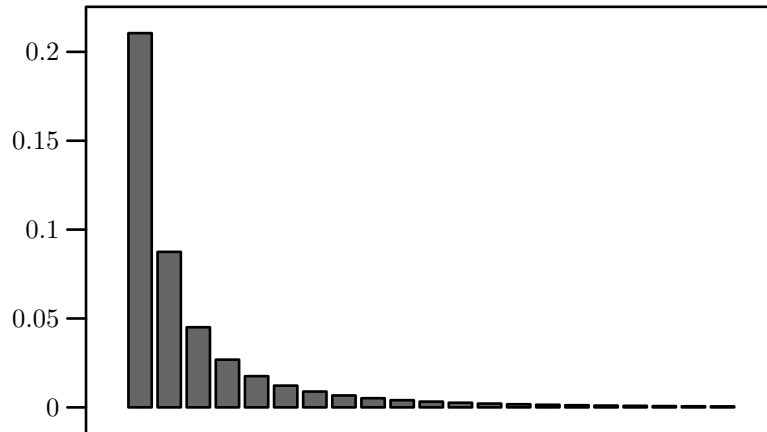


Figura 2.3: Probabilidades $b(1; n + 1)$, $n = 0, \dots, 20$, Geométrica (0.6), $p = 0.4$

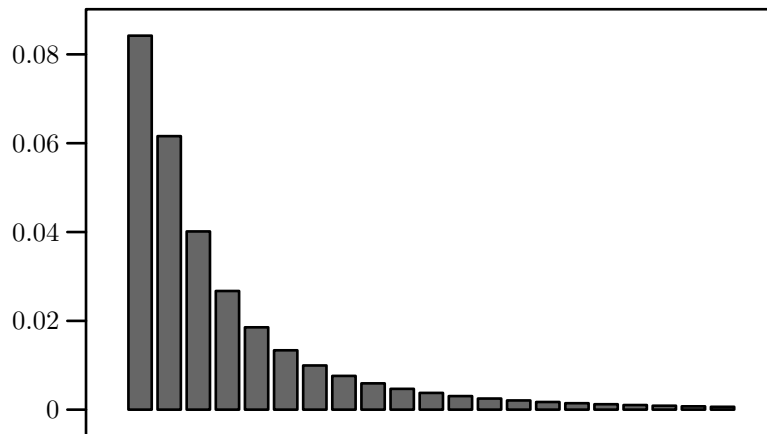


Figura 2.4: Probabilidades $b(2; n + 1)$, $n = 0, \dots, 20$, Geométrica(0.6), $p = 0.4$

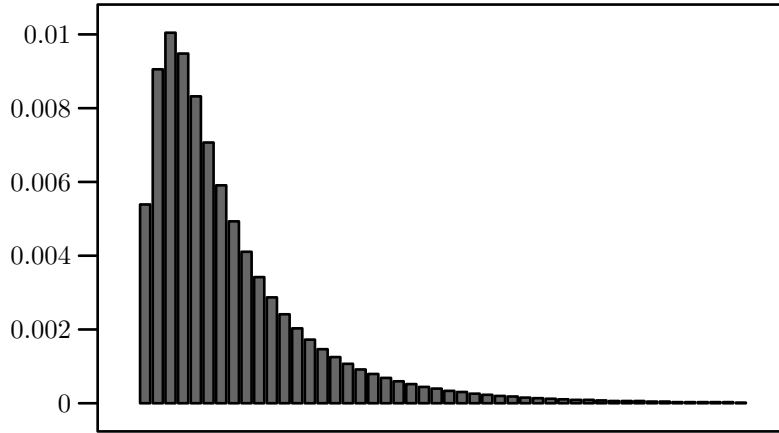


Figura 2.5: Probabilidades $b(5; n + 1)$, $n = 0, \dots, 47$, Geométrica(0.6), $p = 0.4$

altera-se no caso de $u = 5$ como se pode ver pela Figura 2.5.

2.4.2 Distribuição Binomial Negativa

Neste segundo exemplo, vamos considerar que a variável X segue uma distribuição binomial negativa de parâmetros 2 e $\beta/(1 + \beta)$. Por hipótese, $F(0) = 0$ e X só tem valores nos inteiros positivos, pelo que

$$f(x) = \binom{2+x-2}{2-1} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^2 \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{(x-1)} = x\beta^2 \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{(x+1)} \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Pela equação (2.5), sabemos que

$$g(0; y) = p(1 + \beta + \beta y) \left(\frac{1}{1 + \beta}\right)^{y+1}, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

Neste exemplo, obtivemos as seguintes expressões para as funções geradoras de probabilidade $g(z)$ e $h(0, z)$:

$$g(z) = \frac{\beta^2 z}{(1 + \beta - z)^2}$$

$$h(0, z) = \frac{p(1 + 2\beta + \beta^2 - z)}{(1 + \beta - z)^2}$$

As Tabelas 2.4 e 2.5 apresentam alguns dos resultados obtidos para os casos em que (p, β) são iguais a $(0.2, 1)$ e $(0.4, 1.5)$, respectivamente.

u	$b(u; 1)$	$b(u; 2)$	$b(u; 5)$	$b(u; 10)$	$b(u; 20)$	$b(u; 50)$
0	0.4444444	0.0668724	0.0107554	0.0021913	0.0002759	0.0000038
1	0.3055556	0.0835905	0.0134443	0.0027392	0.0003449	0.0000047
2	0.1944444	0.0853909	0.0154745	0.0032010	0.0004053	0.0000056
5	0.0399306	0.0452514	0.0157299	0.0037174	0.0004948	0.0000070
10	0.0020616	0.0059277	0.0071716	0.0026653	0.0004262	0.0000066

Tabela 2.4: Probabilidades $b(u; n + 1)$, $\text{BN}(2, 0.5)$, $p = 0.2$ e $\beta = 1$

u	$b(u; 1)$	$b(u; 2)$	$b(u; 5)$	$b(u; 10)$	$b(u; 20)$	$b(u; 100)$
0	0.6260388	0.0820000	0.0185784	0.0062275	0.0021072	0.0001536
1	0.3767313	0.1366666	0.0309640	0.0103792	0.0035120	0.0002560
2	0.2012188	0.1373621	0.0409778	0.0143609	0.0049400	0.0003641
5	0.0225791	0.0465969	0.0425037	0.0207235	0.0081147	0.0006528
10	0.0003968	0.0022473	0.0115413	0.0143245	0.0088104	0.0009684

Tabela 2.5: Probabilidades $b(u; n + 1)$, $\text{BN}(2, 0.6)$, $p = 0.4$ e $\beta = 1.5$

As conclusões a retirar das Tabelas 2.4 e 2.5 são análogas às das Tabelas da Subsecção 2.4.1. Os gráficos apresentados para a distribuição binomial negativa dizem respeito a funções de probabilidade $b(u; n + 1)$ considerando os mesmos parâmetros da Tabela 2.5.

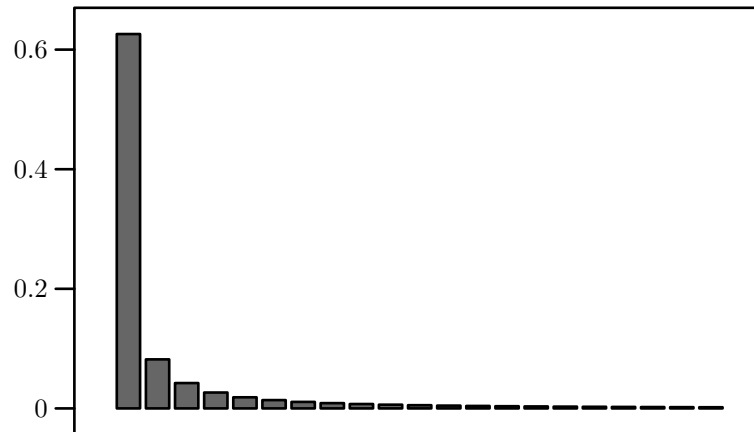


Figura 2.6: Probabilidades $b(0; n + 1) = v(0; n)$, $n = 0, \dots, 20$, $\text{BN}(2, 0.6)$, $p = 0.4$

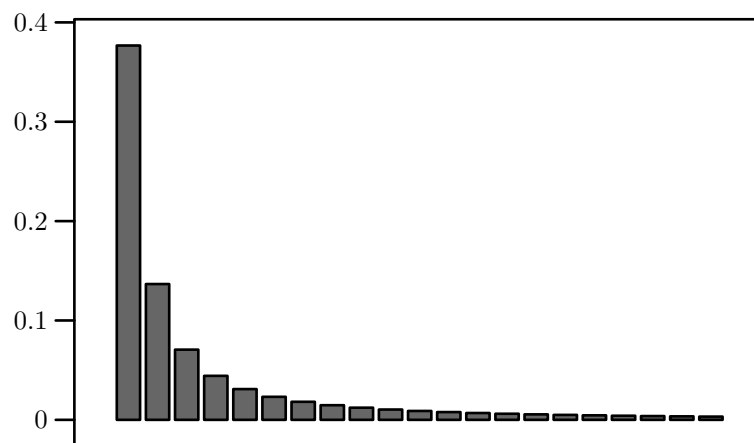


Figura 2.7: Probabilidades $b(1; n + 1)$, $n = 0, \dots, 20$, $\text{BN}(2, 0.6)$, $p = 0.4$

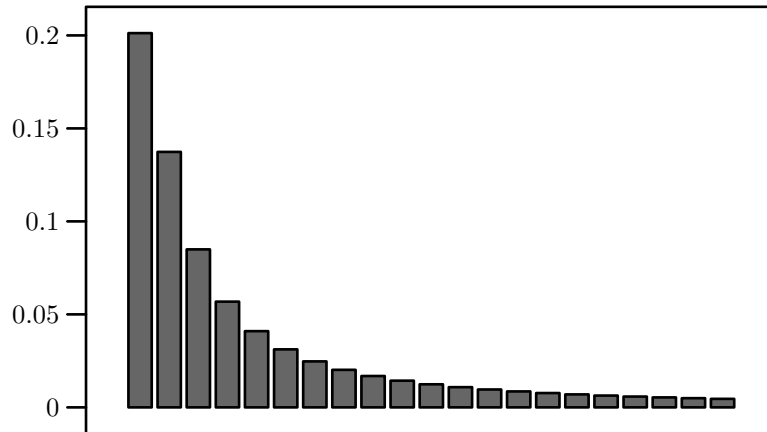


Figura 2.8: Probabilidades $b(2; n + 1)$, $n = 0, \dots, 20$, $\text{BN}(2, 0.6)$, $p = 0.4$

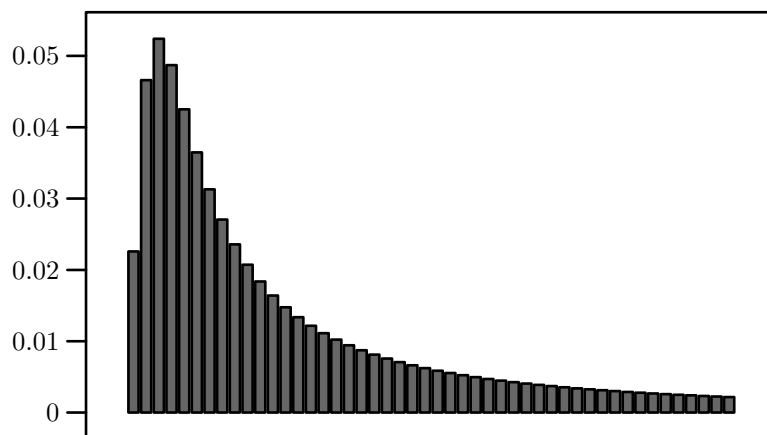


Figura 2.9: Probabilidades $b(5; n + 1)$, $n = 0, \dots, 47$, $\text{BN}(2, 0.6)$, $p = 0.4$

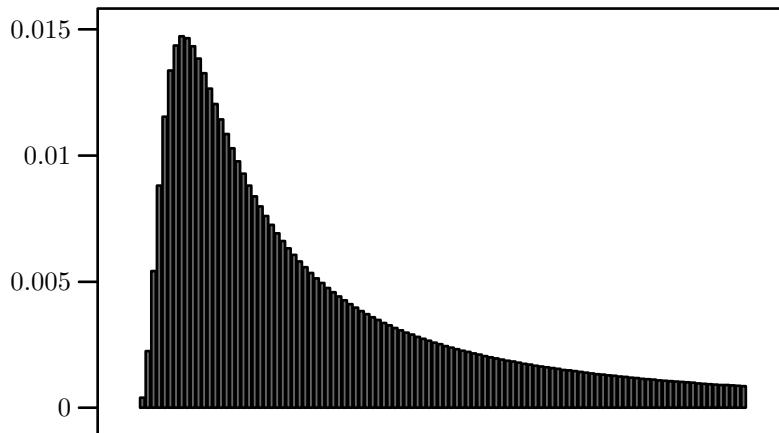


Figura 2.10: Probabilidades $b(10; n + 1)$, $n = 0, \dots, 107$, $\text{BN}(2, 0.6)$, $p = 0.4$

Nos gráficos das Figuras 2.6, 2.7 e 2.8, a probabilidade de ocorrer ruína no momento de uma dada indenização n vai decrescendo à medida que o valor de n aumenta. Contudo, nos gráficos das Figuras 2.9 e 2.10 a situação altera-se uma vez que até certo n a probabilidade de ocorrência de ruína aumenta e só depois é que começa a diminuir até atingir valores muito próximos de zero.

2.4.3 Distribuição de “*Poisson positiva*”

Neste terceiro exemplo, vamos considerar que a variável X segue uma distribuição de Poisson truncada em zero, conhecida por “*Poisson positiva*” de parâmetro λ . A sua função de probabilidade é dada por

$$f(x) = (1 - e^{-\lambda})^{-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = (e^\lambda - 1)^{-1} \frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Neste exemplo, obtivemos as seguintes expressões para as funções geradoras de probabi-

lidade $g(z)$ e $h(0, z)$:

$$g(z) = \frac{-1 + e^{\lambda z}}{-1 + e^{\lambda}}$$

$$h(0, z) = \frac{(-e^{\lambda} + e^{\lambda z})p}{(-1 + e^{\lambda})(-1 + z)}$$

A Tabela 2.6 apresenta alguns dos resultados obtidos para o caso em que $p = 0.4$ e $\lambda = 1$.

u	$b(u; 1)$	$b(u; 2)$	$b(u; 5)$	$b(u; 10)$	$b(u; 20)$	$b(u; 50)$
0	0.5215460	0.0465888	0.0080412	0.0015108	0.0001580	0.0000011
1	0.2025767	0.0776481	0.0134020	0.0025179	0.0002634	0.0000018
2	0.0589456	0.0508169	0.0140318	0.0029016	0.0003144	0.0000022
5	0.0004101	0.0022095	0.0039467	0.0016101	0.0002315	0.0000019
10	0.0000000	0.0000007	0.0000396	0.0001086	0.0000433	0.0000006

Tabela 2.6: Probabilidades $b(u; n + 1)$, Poisson(1), $p = 0.4$

Tal como nos exemplos anteriores, a ilustração da probabilidade $b(u; n + 1)$ para alguns valores de u e n , considerando os parâmetros da Tabela 2.6 é apresentada graficamente. Mais uma vez, a leitura a fazer dos gráficos das Figuras 2.11, 2.12, 2.13 e 2.14 é análoga à dos gráficos das Subsecções anteriores.

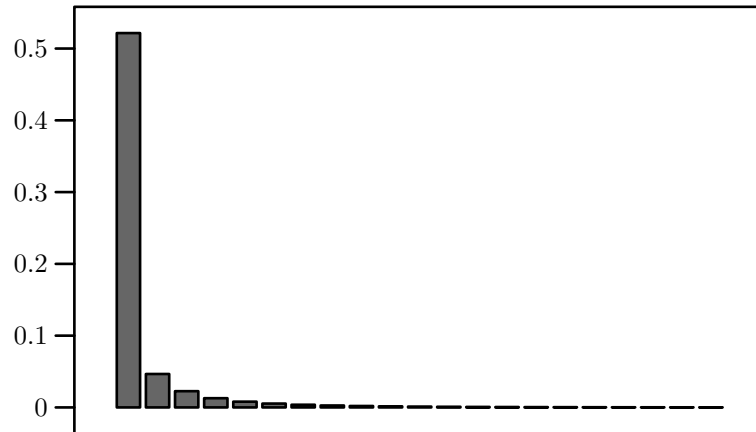


Figura 2.11: Probabilidades $b(0; n + 1) = v(0; n)$, $n = 0, \dots, 20$, $P(1)$, $p = 0.4$

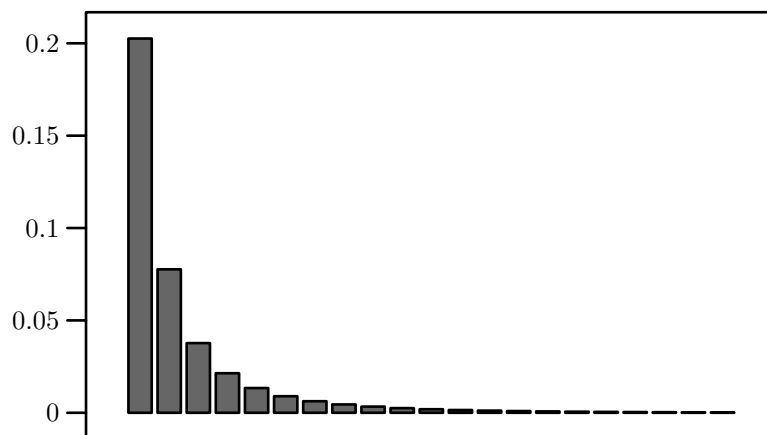


Figura 2.12: Probabilidades $b(1; n + 1)$, $n = 0, \dots, 20$, $P(1)$, $p = 0.4$

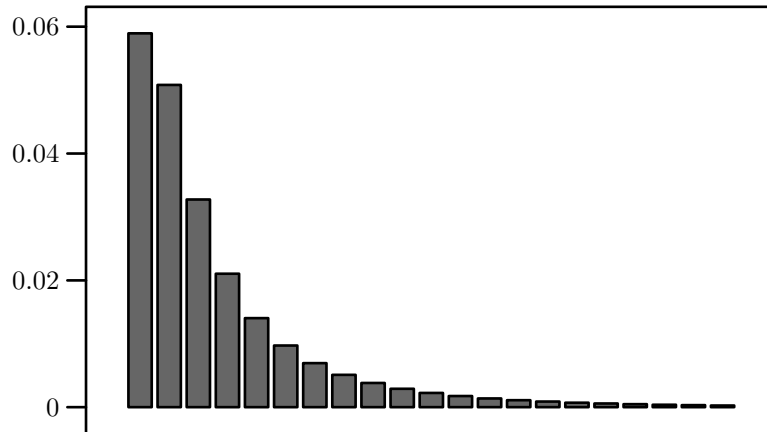


Figura 2.13: Probabilidades $b(2; n + 1)$, $n = 0, \dots, 20$, $P(1)$, $p = 0.4$

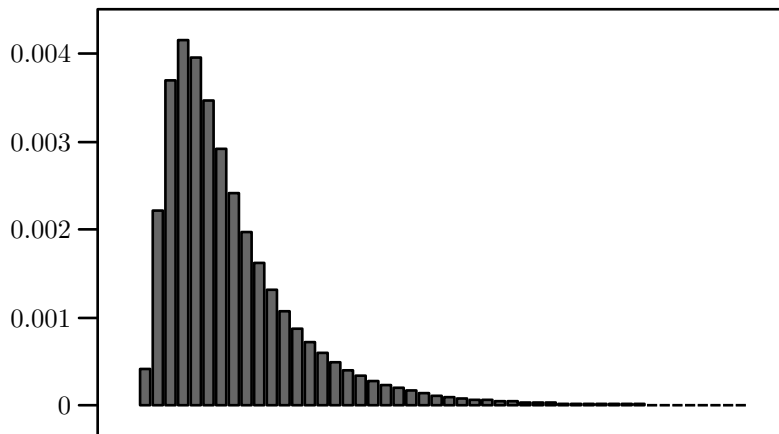


Figura 2.14: Probabilidades $b(5; n + 1)$, $n = 0, \dots, 47$, $P(1)$, $p = 0.4$

Capítulo 3

Aproximações para o modelo clássico

3.1 Processo de discretização de uma distribuição

De acordo com Dickson (1994) e Gerber (1988a), o modelo binomial composto em tempo discreto, pode ser utilizado como forma de aproximação ao modelo de Poisson composto em tempo contínuo. Além disso, Dickson (1994) apresenta na Secção 5 três exemplos com valores aproximados da probabilidade de ruína eventual através deste método mediante uma parametrização adequada dos modelos binomial composto e Poisson composto.

Nesta dissertação, relativamente ao modelo binomial composto em tempo discreto, obtivemos fórmulas para probabilidades associadas ao número de indemnizações até à ocorrência de ruína e no período de recuperação análogas às de Egídio dos Reis (2002) para o modelo de Poisson composto em tempo contínuo. Por isso, seria interessante obter resultados numéricos para as probabilidades $b(u; n + 1)$ e $v(0; n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ para, de seguida, comparar com os resultados obtidos para as mesmas quantidades por Egídio dos Reis (2002), Secção 6.

Consideremos o processo de Poisson composto em tempo contínuo de acordo com a Secção

1.2 e vamos supor que $\lambda = 1$ e $E[X] = 1$. Portanto, $c = (1 + \theta)$. Antes de mais, é necessário discretizar a distribuição das indemnizações individuais do modelo de Poisson composto em tempo contínuo. Para isso, vamos usar o mesmo método de discretização referido em De Vylder & Goovaerts (1988) para obter um modelo de Poisson composto em tempo discreto com parâmetro de Poisson λt , prémio por unidade de tempo 1, indemnizações individuais i.i.d e independentes de $\{N_t\}$ e distribuídas nos inteiros não negativos (ou seja, podemos ter probabilidade não nula no ponto $x = 0$). De acordo com os autores, o método de discretização pode ser dividido em três passos, que passamos a descrever:

1.

Considere-se a variável aleatória $Y = \beta X$, em que X representa o valor das indemnizações individuais da distribuição original. Isto quer dizer que $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ vai ter valores nos pontos $0, \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \dots$, $\beta > 0$, ou seja, vamos ter intervalos de amplitude $\frac{1}{\beta}$ tal como se pode ver na Figura 3.1.

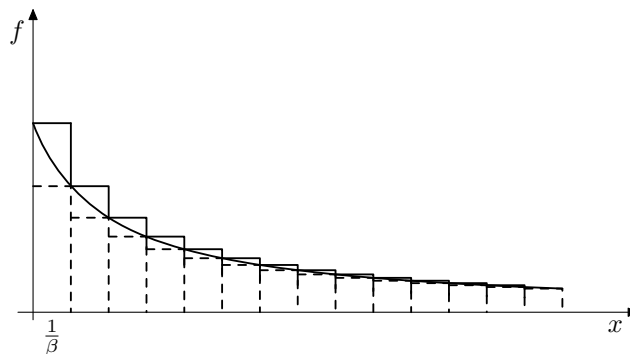


Figura 3.1: Discretização

Pela Figura 3.1, é fácil concluir que quanto maior for o valor de β , melhor será a aproximação da distribuição de Y à distribuição de X . A nova unidade tempo vem β^{-1} vezes a unidade de tempo original, ou seja,

$$b_Y(k) = P\left(Y_i = \frac{k}{\beta}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2.

O procedimento seguinte é rescalonar o processo original, multiplicando todos os valores monetários por β

$$b_Y(k) = P(\beta Y_i = k) = P(Z_i = k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ou seja, os valores obtidos para βu no modelo discretizado corresponderão aos valores para u no modelo contínuo e passamos a ter $c = (1 + \theta)\beta$. Relativamente ao valor médio das indemnizações individuais, como impusémos que, no modelo original, fosse 1, com esta alteração monetária passa a ser igual a β .

3.

Por último, há que mudar a unidade de tempo. No modelo discretizado pretendemos que $c = 1$. Por isso, a nova unidade de tempo corresponderá $((1 + \theta)\beta)^{-1}$ vezes a unidade de tempo original. Por sua vez, $\lambda = 1/[(1 + \theta)\beta]$.

No modelo discretizado, a distribuição original $B(x)$ é substituída por uma outra $H(j)$ que terá valores apenas para $j = 0, 1, 2, \dots$, ou seja:

$$H(j) = h(0) + h(1) + \dots + h(j) = \int_j^{j+1} B_Y(y) dy \quad (3.1)$$

e

$$B_Y(y) = B(x) = B(y/\beta)$$

A função probabilidade associada à função distribuição discreta $H(j)$ é bastante simples de se obter:

$$h(j) = \begin{cases} H(0) & j = 0 \\ H(j) - H(j-1) & j \geq 1 \end{cases}$$

Este processo de discretização permite não só obter uma distribuição discreta "próxima" da original como também mantém o valor esperado das indemnizações individuais inalterado (ver De Vylder & Goovaerts (1988)).

Em resumo, no modelo de Poisson composto discretizado:

1. O parâmetro de Poisson para o número esperado de indemnizações por unidade de tempo é $\lambda = 1/[(1 + \theta)\beta]$.
2. $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ tem valores nos inteiros não negativos e $E[Y] = \beta$
3. O prémio, por unidade de tempo, é 1

De acordo com Dickson (1994), para substituir o modelo de Poisson em tempo discreto pelo modelo binomial composto em tempo discreto, há que alterar o primeiro item por uma distribuição binomial de parâmetros 1 e $1/[(1 + \theta)\beta]$. Deste modo, o valor do prémio mantém-se inalterado e continuamos a ter $E[Y] = \beta$. O autor também refere que *a aproximação ao modelo de Poisson em tempo discreto é razoável para valores de β elevados, uma vez que a distribuição de Poisson com um parâmetro $1/[(1 + \theta)\beta]$ aproxima-se muito da distribuição binomial*. Poderemos constatar isto mesmo nos exemplos apresentados na Secção 3.2. Por último, existe outro aspecto a ter em linha de conta que é o facto de as indemnizações individuais estarem distribuídas nos inteiros não negativos em vez de nos inteiros positivos (ver condições iniciais do Capítulo 2). Tal deve-se ao facto de, para aproximar probabilidades do modelo de Poisson composto em tempo contínuo, ser

necessário discretizar indenizações individuais cujo montante segue uma distribuição contínua (Dickson (1994)).

3.2 Exemplos

Em Egídio dos Reis (2002) considerou-se o parâmetro de Poisson $\lambda = 1$ e $c = 1.2$ (ou seja, $\theta = 0.2$). Na Secção 6 do referido artigo foram estudadas três funções distribuição das indenizações individuais (com média 1), para as quais foram calculadas as funções de probabilidade $p(u; n+1)/\psi(u)$ e $q(u; n)$ $n = 1, 2, \dots$ que serviram e deram origem aos gráficos apresentados. As distribuições consideradas foram a Exponencial(1), Gama(2, 2) e Pareto(2, 1). Para usar o modelo binomial composto em tempo discreto como aproximação ao modelo de Poisson composto em tempo contínuo vamos, em primeiro lugar, discretizar cada uma destas três distribuições de acordo com o formulado na Secção 3.1. Numa segunda fase, há que atribuir valores a β e n , $n = 0, 1, 2, \dots$ para calcular as probabilidades que correspondem aos resultados numéricos aproximados obtidos para $q(0; n)$ e $p(u; n+1)/\psi(u)$. Estes últimos foram disponibilizados pelo Prof. Alfredo Egídio dos Reis.

Admitindo que $\theta = 0.2$, tem-se que $\psi(0) = 0.83333333(3)$. Para o caso particular em que as indenizações individuais têm uma distribuição exponencial, e para valores de β suficientemente grandes, tem-se ainda o seguinte resultado (ver Dickson (1994))

$$F(x) = 1 - (1 - \beta^{-1})^x \approx 1 - e^{-x/\beta}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Isto está relacionado com o facto de o modelo binomial/geométrico ser, em tempo discreto, análogo ao modelo de Poisson/exponencial em tempo contínuo. Por isso, para a distribuição exponencial e a título de curiosidade, vamos usar também esta relação para obter resultados numéricos.

A analogia acima referida pode ainda ser alargada à distribuição gama. Vejamos o seguinte resultado referido em Johnson, Kotz & Kemp (1992), p. 204:

“Suponhamos que temos uma mistura de distribuições de Poisson, tal que o valor esperado θ das distribuições de Poisson varia de acordo com uma distribuição gama com função densidade de probabilidade

$$f(\theta) = (\beta^\alpha \Gamma(\alpha))^{-1} \theta^{\alpha-1} e^{-\theta/\beta}, ; \theta > 0, \alpha > 0, \text{beta} > 0$$

Então

$$\begin{aligned} P(X = x) &= (\beta^\alpha \Gamma(\alpha))^{-1} \int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{-\theta/\beta} \theta^x e^{-\theta} / x! d\theta \\ &= \binom{\alpha + x - 1}{\alpha - 1} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^x \left(\frac{1}{1 + \beta} \right)^\alpha \end{aligned}$$

Por isso, X tem uma distribuição binomial negativa de parâmetros α e β . O parâmetro θ representa o número esperado de sinistros.”

Ou seja, para valores suficientemente grandes de β , substituímos a distribuição Gama por uma binomial negativa, de modo a manter uma média β

$$\text{Gama} \left(\alpha, \frac{m}{\beta} \right) \approx \text{BN} \left(\alpha, \frac{(m/\beta)}{(m/\beta) + 1} \right) \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

3.2.1 Distribuição Exponencial

Considere-se a distribuição Exponencial de parâmetro 1.

$$B(x) = 1 - e^{-x} \quad (3.4)$$

Como $Y = \beta X$, temos $B_Y(y) = B(y/\beta) = 1 - e^{-y/\beta}$, e usando a fórmula (3.1), obtemos a função distribuição discretizada

$$H(j) = e^{-\frac{1+j}{\beta}} (\beta - \beta e^{\frac{1}{\beta}} + e^{\frac{1+j}{\beta}}) \quad (3.5)$$

A função probabilidade correspondente é

$$h(j) = \begin{cases} 1 + \beta(-1 + e^{-1/\beta}) & j = 0 \\ \beta e^{-\frac{1+j}{\beta}} (-1 + e^{\frac{1}{\beta}})^2 & j \geq 1 \end{cases}$$

A Tabela 3.1 apresenta alguns dos resultados obtidos para diferentes valores de n e β .

	$\beta = 10000$			$\beta = 1000$		$\beta = 100$	
n	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	0.5454545	0.5454669	1.0000	0.5455785	1.0002	0.5466950	1.0023
5	0.0214628	0.0214623	1.0000	0.0214575	0.9998	0.0214092	0.9975
10	0.0080412	0.0080410	1.0000	0.0080391	0.9997	0.0080196	0.9973
15	0.0043485	0.0043484	1.0000	0.0043472	0.9997	0.0043360	0.9971
20	0.0027584	0.0027583	1.0000	0.0027575	0.9997	0.0027499	0.9969
40	0.0008489	0.0008488	1.0000	0.0008486	0.9996	0.0008456	0.9962
60	0.0003950	0.0003950	1.0000	0.0003948	0.9995	0.0003932	0.9954
80	0.0002183	0.0002183	0.9999	0.0002182	0.9995	0.0002172	0.9947
100	0.0001327	0.0001327	0.9999	0.0001326	0.9994	0.0001319	0.9939

Tabela 3.1: Exponencial: comparação entre $q(0; n)$ e $v(0; n)/\psi(0)$

A legenda da Tabela 3.1 é a seguinte: (1) é o valor de $q(0; n)$ de acordo com Egídio dos Reis (2002), (2) é uma aproximação a $q(0; n)$ usando o processo de discretização apresentado na Secção 3.1 com $\beta = 10000$, (3) representa o rácio entre os valores (2) e (1), (4) é análogo a (2) com $\beta = 1000$, (5) representa o rácio entre os valores (3) e (1), (6)

é análogo a (2) com $\beta = 100$ e, por último, (7) representa o rácio entre os valores (5) e (1).

Com base no resultado (3.2), ou seja, no caso de discretizarmos a distribuição exponencial usando, para tal, a distribuição geométrica de valor esperado β , temos

$$\text{Exp}\left(\frac{1}{\beta}\right) \approx \text{BN}\left(1, \frac{(1/\beta)}{(1/\beta) + 1}\right) \quad (3.6)$$

Os resultados obtidos para $u = 0$ encontram-se na Tabela 3.2.

	$\beta = 10000$			$\beta = 1000$		$\beta = 100$	
n	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	0.5454545	0.5454669	1.0000	0.5455785	1.0000	0.5455785	1.0000
5	0.0214628	0.0214628	1.0000	0.0214628	1.0000	0.0214628	1.0000
10	0.0080412	0.0080412	1.0000	0.0080412	1.0000	0.0080412	1.0000
15	0.0043485	0.0043485	1.0000	0.0043485	1.0000	0.0043485	1.0000
20	0.0027584	0.0027584	1.0000	0.0027584	1.0000	0.0027584	1.0000
40	0.0008489	0.0008489	1.0000	0.0008489	1.0000	0.0008489	1.0000
60	0.0003950	0.0003950	1.0000	0.0003950	1.0000	0.0003950	1.0000
80	0.0002183	0.0002183	1.0000	0.0002183	1.0000	0.0002183	1.0000
100	0.0001327	0.0001327	1.0000	0.0001327	1.0000	0.0001327	1.0000

Tabela 3.2: Exponencial: comparação entre $q(0; n)$ e $v(0; n)/\psi(0)$, usando (3.2)

A legenda da Tabela 3.2 corresponde à da Tabela anterior, excepto no ponto (2) que deve ser alterado para “Aproximação a $q(0; n)$ usando o resultado (3.2) com $\beta = 10000$ ”.

Relativamente às Tabelas 3.1 e 3.2 tem-se que os valores apresentados mostram que,

quanto maior for o valor de β , melhor é a nossa aproximação à probabilidade $q(0; n)$. Isto está relacionado com o facto de $1/\beta$ ser a amplitude do intervalo de discretização pelo que quanto mais baixo for o valor atribuído a β , mais grosseira é a discretização. Outro pormenor interessante é que, à medida que o número de indemnizações vai aumentando, o mesmo acontece com o erro entre o valor da probabilidade $q(0; n)$ e a respectiva aproximação.

Graficamente, podemos representar as probabilidades da Tabela 3.1 de acordo com a Figura 3.2.

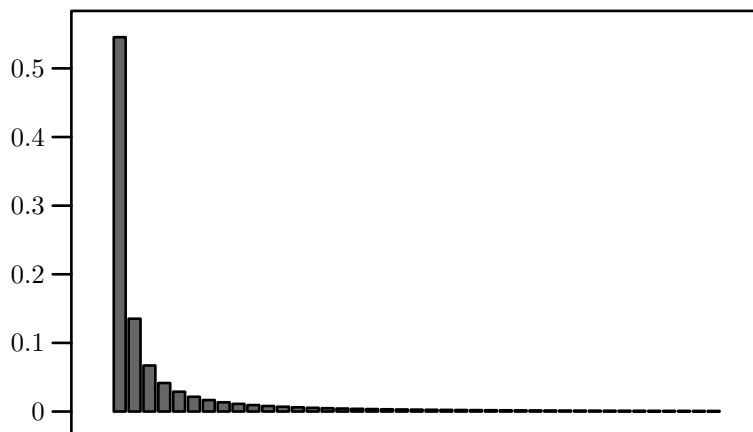


Figura 3.2: Probabilidades $v(0; n)/\psi(0)$, Exponencial(1) discretizada

Analisando a Figura 3.2, podemos constatar que à medida que o número de indemnizações aumenta, a probabilidade (condicional) $v(0; n)/\psi(0)$ diminui tendencialmente para zero. Podemos igualmente observar que existe uma grande quebra entre a probabilidade de, após a ruína, a reserva recuperar para valores não negativos sem ocorrer nenhuma indemnização.

Por Egídio dos Reis (2002), $\psi(u) = 1.2^{-1} \exp(-u/6)$. Usando a distribuição geométrica

apresentada em (3.6), com $\beta = 100$ calculou-se valores para $b(u; n + 1)$ $u = 1, 2$ $n = 1, \dots, 101$ para comparar com alguns resultados numéricos do referido artigo.

	$u = 1$			$u = 2$		
n	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	0.2370536	0.2382339	1.0050	0.1030231	0.1040516	1.0100
5	0.0406333	0.0410658	1.0106	0.0523546	0.0537154	1.0260
10	0.0160088	0.0161624	1.0096	0.0231250	0.0236502	1.0227
15	0.0087938	0.0088753	1.0093	0.0131778	0.0134634	1.0217
20	0.0056209	0.0056721	1.0091	0.0085754	0.0087570	1.0212
40	0.0017493	0.0017648	1.0089	0.0027398	0.0027958	1.0204
60	0.0008170	0.0008242	1.0088	0.0012907	0.0013168	1.0202
80	0.0004524	0.0004564	1.0088	0.0007178	0.0007322	1.0201
100	0.0002753	0.0002777	1.0087	0.0004378	0.0004466	1.0200

Tabela 3.3: Exponencial: comparação entre $p(u; n + 1)/\psi(u)$ e $b(\beta u; n + 1)/\psi(u)$

A legenda da Tabela 3.3 é a seguinte: (1) é o valor de $p(1; n + 1)/\psi(1)$ de acordo com Egídio dos Reis (2002), (2) é valor de $b(100; n + 1)/\psi(1)$, (3) representa o rácio entre os valores (2) e (1), (4) é o valor de $p(2; n + 1)/\psi(2)$ de acordo com Egídio dos Reis (2002), (5) é valor de $b(200; n + 1)/\psi(2)$, (6) representa o rácio entre os valores (5) e (4).

Da análise da Tabela 3.2 para $\beta = 100$ e da Tabela 3.3, concluímos que à medida que o valor de u aumenta, os valores aproximados vão-se distanciando dos valores exactos.

3.2.2 Distribuição Gama

A função distribuição de uma Gama(2,2) é dada por

$$B(x) = 1 - (1 + 2x)e^{-2x} \quad (3.7)$$

Mais uma vez, como $Y = \beta X$, temos que $B_Y(y) = B(y/\beta) = 1 - (1 + 2y/\beta)e^{-(2y)/\beta}$ e usando a fórmula (3.1), obtemos a seguinte função distribuição discretizada

$$H(j) = e^{-\frac{2(1+j)}{\beta}}(1 + \beta - e^{\frac{2}{\beta}}(\beta + j) + e^{\frac{2(1+j)}{\beta}} + j) \quad (3.8)$$

A função probabilidade correspondente é dada por:

$$h(j) = \begin{cases} 1 + e^{-\frac{2}{\beta}} + \beta(-1 + e^{-2/\beta}) & j = 0 \\ e^{-\frac{2(1+j)}{\beta}}(-1 + e^{\frac{1}{\beta}})(-1 + \beta(-1 + e^{\frac{1}{\beta}}) + e^{2/\beta}(-1 + j) - j) & j \geq 1 \end{cases}$$

A Tabela 3.4 apresenta alguns dos resultados numéricos obtidos:

	$\beta = 5000$			$\beta = 1000$		$\beta = 100$	
n	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	0.6020761	0.6021054	1.0000	0.6022227	1.0002	0.6035436	1.0024
5	0.0187733	0.0187722	1.0000	0.0187669	0.9997	0.0187096	0.9966
10	0.0068974	0.0068970	1.0000	0.0068948	0.9996	0.0068717	0.9963
15	0.0036740	0.0036738	1.0000	0.0036725	0.9996	0.0036591	0.9960
20	0.0022983	0.0022981	1.0000	0.0022973	0.9996	0.0022882	0.9956
40	0.0006709	0.0006709	1.0000	0.0006705	0.9994	0.0006671	0.9943
60	0.0002965	0.0002965	1.0000	0.0002963	0.9993	0.0002945	0.9930
80	0.0001557	0.0001557	1.0000	0.0001556	0.9992	0.0001544	0.9917
100	0.0000899	0.0000899	1.0000	0.0000898	0.9990	0.0000891	0.9904

Tabela 3.4: Gama: comparação entre $q(0; n)$ e $v(0; n)/\psi(0)$

A legenda da Tabela 3.4 é a seguinte: (1) é o valor de $q(0; n)$ de acordo com Egídio dos Reis (2002), (2) é uma aproximação a $q(0; n)$ usando o processo de discretização apresentado na Secção 3.1 com $\beta = 5000$, (3) representa o rácio entre os valores (2) e (1), (4) é análogo a (2) com $\beta = 1000$, (5) representa o rácio entre os valores (3) e (1), (6) é análogo a (2) com $\beta = 100$ e, por último, (7) representa o rácio entre os valores (5) e o (1).

Com base no resultado (3.3), ou seja, no caso de discretizarmos a distribuição Gama como uma binomial negativa de valor esperado β , temos

$$Gama\left(2, \frac{2}{\beta}\right) \approx BN\left(2, \frac{(2/\beta)}{(2/\beta) + 1}\right) \quad (3.9)$$

Os resultados obtidos são escalonados na Tabela 3.5.

	$\beta = 5000$		$\beta = 1000$		$\beta = 100$		
n	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	0.6020763	0.6020761	1.000	0.6020760	1.000	0.6020761	1.002
5	0.0187733	0.0187734	1.000	0.0187728	1.000	0.0187733	1.000
10	0.0068974	0.0068974	1.000	0.0068976	1.000	0.0068974	1.000
15	0.0036740	0.0036740	1.000	0.0036744	1.000	0.0036740	1.000
20	0.0022983	0.0022983	1.000	0.0022980	1.000	0.0022983	1.000
40	0.0006709	0.0006710	1.000	0.0006708	1.000	0.0006709	1.000
60	0.0002965	0.0002966	1.000	0.0002964	1.000	0.0002965	1.000
80	0.0001557	0.0001557	1.000	0.0001560	1.002	0.0001557	1.000
100	0.0000899	0.0000900	1.001	0.0000900	1.001	0.0000899	1.000

Tabela 3.5: Gama: comparação entre $q(0; n)$ e $v(0; n)/\psi(0)$, usando (3.3)

A legenda da Tabela 3.5 é igual à da Tabela 3.4, excepto no ponto (2) que deve ser alte-

rado para “Aproximação a $q(0; n)$ usando o resultado (3.3) com $\beta = 5000$ ”.

No caso da Tabela 3.4, considerando $\beta = 5000$ conseguimos uma melhor aproximação aos valores obtidos para $q(0; n)$ em Egídio dos Reis (2002) e o erro vai aumentando à medida que o n aumenta. Na Tabela 3.5, os valores têm maior grau de precisão para qualquer β .

Graficamente, podemos representar as probabilidades da Tabela 3.4 de acordo com a Figura 3.3.

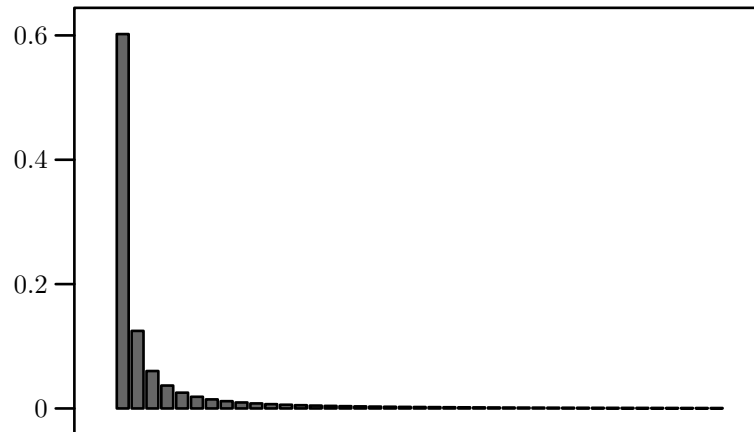


Figura 3.3: Probabilidades $v(0; n)/\psi(0)$, Gama(2,2) discretizada

A leitura a fazer da Figura 3.3 é análoga à da Figura 3.2, uma vez que as funções de probabilidade (condicional) $v(0; n)/\psi(0)$ $n = 0, 1, 2, \dots$ têm o mesmo comportamento.

3.2.3 Distribuição de Pareto

A função distribuição de uma Pareto(2,1) é dada por

$$B(x) = 1 - (1 + x)^{-2} \tag{3.10}$$

Para $Y = \beta X$ tem-se que $B_Y(y) = B(y/\beta) = 1 - (1 + y/\beta)^{-2}$ e, com base na equação

(3.1), obtemos a seguinte função distribuição discretizada

$$H(j) = \frac{\beta + j + 2\beta j + j^2}{(\beta + j)(1 + \beta + j)} \quad (3.11)$$

A função probabilidade correspondente é

$$h(j) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \beta} & j = 0 \\ \frac{2\beta^2}{(-1 + \beta + j)(\beta + j)(1 + \beta + j)} & j \geq 1 \end{cases}$$

A Tabela 3.6 mostra alguns dos resultados obtidos para diferentes valores de n e β .

	$\beta = 5000$			$\beta = 1000$		$\beta = 100$	
n	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	0.4390329	0.4390532	1.0000	0.4391345	1.0002	0.4400488	1.0023
2	0.0660209	0.0660180	1.0000	0.0660062	0.9998	0.0658738	0.9978
5	0.0239606	0.0239598	1.0000	0.0239563	0.9998	0.0239169	0.9982
7	0.0158780	0.0158775	1.0000	0.0158754	0.9998	0.0158512	0.9983
10	0.0100864	0.0100860	1.0000	0.0100848	0.9998	0.0100705	0.9984
12	0.0079496	0.0079494	1.0000	0.0079484	0.9998	0.0079377	0.9985
16	0.0054192	0.0054190	1.0000	0.0054184	0.9999	0.0054115	0.9986

Tabela 3.6: Pareto: comparação entre $q(0; n)$ e $v(0; n)/\psi(0)$

A legenda da Tabela 3.6 é a seguinte: (1) é o valor de $q(0; n)$ de acordo com Egídio dos Reis (2002), (2) é uma aproximação a $q(0; n)$ usando o processo de discretização apresentado na Secção 3.1 com $\beta = 5000$, (3) representa o rácio entre os valores (2) e (1), (4) é análogo a (2) com $\beta = 1000$, (5) representa o rácio entre os valores (3) e (1), (6) é análogo a (2) com $\beta = 100$ e, por último, (7) representa o rácio entre os valores (5) e o (1).

No caso desta distribuição, o cálculo da probabilidade de haver indenizações superiores à décima sexta durante o período de recuperação já apresenta alguns problemas de ordem computacional. Contudo, as conclusões que se podem retirar com base na Tabela 3.6 são análogas às referidas nos exemplos anteriores. Na Figura 3.4 representámos a função probabilidade $v(0; n)/\psi(0)$, que mais uma vez decresce em função de n .

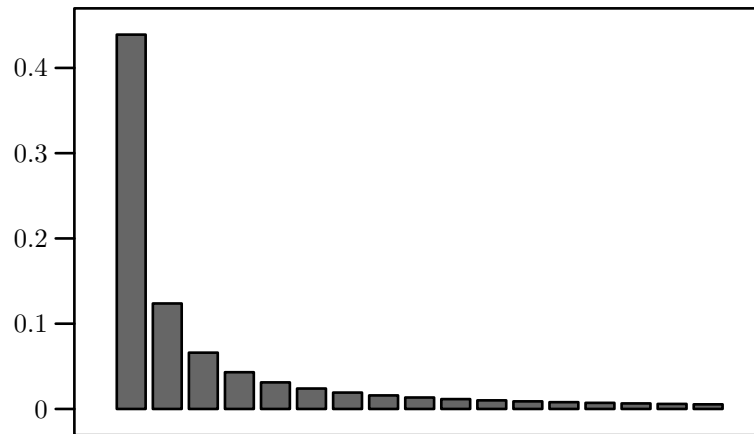


Figura 3.4: Probabilidades $v(0; n)/\psi(0)$, Pareto(2,1) discretizada

Como podemos ver pelo gráfico da Figura 3.4, o comportamento da função probabilidade $v(0; n)/\psi(0)$ mantém-se: à medida que o número de indenizações aumenta, esta probabilidade (condicional) diminui tendencialmente para zero.

Capítulo 4

Probabilidade de ruína

Neste último Capítulo pretende-se calcular a probabilidade de ruína (eventual) para alguns casos práticos recorrendo à probabilidade relacionada com o número de indemnizações até à ocorrência de ruína. Considerando a definição de $b(u; n)$ tem-se que

$$\psi_d(u) = \sum_{n=1}^{\infty} b(u; n) \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Este resultado faz todo o sentido tendo em conta os resultados apresentados na Secção 1.3 e no Capítulo 2 e que $\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(u; n)$. Como é óbvio, a igualdade dada pela equação (4.1) não será muito funcional do ponto de vista prático se pensarmos em somar infinitas parcelas (diria mesmo impossível). De qualquer modo, como estamos a lidar com probabilidades, sabemos que a soma dos valores obtidos para as primeiras n parcelas vão ser, seguramente, aproximações por defeito. Como iremos ver nos nossos exemplos, em muitos dos casos nem é preciso que o valor de n seja muito elevado para se obter uma boa aproximação. Por isso, este método de não deixa de ser mais uma ferramenta útil para o cálculo da probabilidade de ruína (eventual).

Os valores que iremos apresentar baseiam-se em algumas das funções distribuição das indemnizações individuais apresentadas nesta dissertação. Considerando as funções dis-

tribuição da Secção 2.4, vamos calcular a probabilidade de ruína eventual através das fórmulas apresentadas nas equações (2.3) e (4.1). Tendo em atenção o que foi dito, substituímos na equação (4.1) o símbolo ∞ por um dado n .

u	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	0.40000	0.40000	0.66667	0.66667	0.93333	0.93232
1	0.25000	0.25000	0.44444	0.44444	0.83333	0.83081
2	0.15625	0.15625	0.29630	0.29630	0.74405	0.74019
5	0.03815	0.03815	0.08779	0.08779	0.52960	0.52268
10	0.00364	0.00364	0.01156	0.01156	0.30051	0.29101
15	0.00035	0.00035	0.00152	0.00152	0.17052	0.16062
20	0.00003	0.00003	0.00020	0.00020	0.09676	0.08771

Tabela 4.1: Distribuição geométrica: probabilidade de ruína eventual

A legenda da Tabela 4.1 é a seguinte: (1) é o valor de $\psi(u)$ com base na equação (2.3) para uma distribuição Geométrica(0.5) e considerando $p = 0.2$; (2) é o valor aproximado de (1) com base na equação (4.1), com $n = 100$; (3) é o valor de $\psi(u)$ com base na equação (2.3) para uma distribuição Geométrica(0.6) e considerando $p = 0.4$; (4) é o valor aproximado de (3) com base na equação (4.1), com $n = 100$; (5) é o valor de $\psi(u)$ com base na equação (2.3) para uma distribuição Geométrica(9/14) e considerando $p = 0.6$; (6) é o valor aproximado de (5) com base na equação (4.1), com $n = 400$.

Passando para a função distribuição binomial negativa apresentada na Secção 2.4, temos a seguinte legenda para a Tabela 4.2: (1) é o valor de $\psi(u)$ com base na equação (2.3) para uma distribuição BN(2, 0.5) e considerando $p = 0.2$; (2) é o valor aproximado de (1) com base na equação (4.1), com $n = 100$; (3) é o valor de $\psi(u)$ com base na equação (2.3)

u	(1)	(2)	(3)	(4)
0	0.60000	0.60000	0.93333	0.93013
1	0.50000	0.50000	0.88889	0.88355
2	0.40625	0.40625	0.84148	0.83387
5	0.20727	0.20727	0.70921	0.69535
10	0.06552	0.06552	0.53240	0.51069
15	0.02066	0.02066	0.39966	0.37294

Tabela 4.2: Distribuição binomial negativa: probabilidade de ruína eventual

para uma distribuição $BN(2, 0.6)$ e considerando $p = 0.4$; (4) é o valor aproximado de (3) com base na equação (4.1), com $n = 300$.

u	(1)	(2)
0	0.63279	0.63279
1	0.38798	0.38798
2	0.21743	0.21743
5	0.03432	0.03432
10	0.00156	0.00156
15	0.00007	0.00007

Tabela 4.3: Distribuição de Poisson: probabilidade de ruína eventual

A legenda da Tabela 4.3 é a seguinte: (1) é o valor de $\psi(u)$ com base na equação (2.3) para uma distribuição $P(1)$ e considerando $p = 0.4$; (2) é o valor aproximado de (1) com base na equação (4.1), com $n = 100$.

Relativamente aos valores exactos da probabilidade de ruína (eventual) apresentados nas

Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 constatamos que nem sempre conseguimos uma boa precisão nas aproximações. Além disso, o grau de precisão nem sempre está relacionado com o facto de se usar maior ou menor número de parcelas no somatório de $b(u; n)$ como demonstram os dois exemplos da Tabela 4.2.

Consideremos agora as funções distribuição Exponencial(1) e Gama(2,2) apresentadas na Secção 3.2. Considerando $\theta = 0.2$, tem-se que $\psi(0) = 0.83333333(3)$. Vamos calcular a probabilidade de ruína eventual através da fórmula apresentada na equação (4.1). Recorrendo à relação dada pela equação (2.26), podemos substituir $b(0; n + 1)$ pela função de probabilidade (imprópria) $v(0; n)$, com $n = 0, 1, 2, \dots$. Mais uma vez, substituímos o símbolo ∞ por um determinado n e, não sendo possível calcular valores até infinito, somou-se os primeiros 1500 termos para a distribuição Exponencial e os primeiros 386 termos para a distribuição Gama. Estes números não estão aqui por acaso. De facto, à medida que o n aumentava, os cálculos iam-se tornando mais complexos até ao momento em que foi impossível continuar por razões de ordem computacional.

Relativamente à distribuição Exponencial(1) definida em 3.2.1 e considerando $\beta = 10000$,

$$\sum_{n=0}^{1500} v(0; n) = 0.8333333105586670$$

Relativamente à distribuição Gama(2,2) definida em 3.2.2 e considerando $\beta = 5000$,

$$\sum_{n=0}^{386} v(0; n) = 0.8333068300858010$$

Como podemos constatar, no caso da distribuição Exponencial conseguimos, no mínimo, um grau de precisão de sete casas decimais. Relativamente à distribuição Gama, o valor

aproximado da probabilidade de ruína (eventual), tem uma precisão em relação ao valor real que não vai além das quatro casas decimais. No entanto, é preciso ter em conta que o somatório desta distribuição tem muito menos termos que os utilizados no cálculo aproximado da probabilidade de ruína eventual para a distribuição Exponencial. Muito provavelmente essa é uma das razões para obter um grau de precisão muito menor.

Capítulo 5

Notas Finais

Como podemos constatar, o modelo binomial em tempo discreto pode ser utilizado como aproximação ao modelo de Poisson composto em tempo contínuo, na obtenção das probabilidades de ruína associadas ao número de indemnizações até à ruína e após a ocorrência da mesma. Conseguimos, inclusivé, relacionar estas duas probabilidades para $u = 0$ do mesmo modo que foi apresentado em Egídio dos Reis (2002) para o modelo clássico.

Com base nos resultados numéricos obtidos na Secção 3.2, podemos concluir que, no método de discretização do processo contínuo, o valor atribuído à amplitude do intervalo de discretização, β , é fundamental para uma boa aproximação, como demonstram os valores apresentados nas Tabelas do Capítulo 2.

No Capítulo 4 recorreremos às probabilidades de ruína associadas ao número de indemnizações até à ocorrência de ruína e após a ocorrência de ruína para calcular uma aproximação à probabilidade de ruína (eventual). Como vimos, o grau de precisão nem sempre depende do número de termos que compõem o somatório. O valor aproximado é, necessariamente, uma aproximação por defeito.

Bibliografia

- [1] Beard, R.E., Pentikäinen, T., Pesonen, E. (1984), *Risk Theory* 3rd edn, Chapman and Hall, London.
- [2] Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. & Nesbitt, C.J. (1997), *Actuarial Mathematics* 1st edn, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois, USA.
- [3] Centeno, L. (2001), Teoria do Risco, *CEMAPRE ISEG*, Lisboa, Portugal.
- [4] De Vylder, F., Goovaerts, M.J. (1988), 'Recursive calculation of finite-time ruin probabilities', *Insurance: Mathematics and Economics*, 7, 1–8.
- [5] Dickson, D.C.M., Waters, H.R. (1991), 'Recursive calculation of survival probabilities', *Astin Bulletin*, 21(2), 199–221.
- [6] Dickson, D.C.M.(1994), 'Some coments on the compound binomial model', *Astin Bulletin*, 24(1), 33–45.
- [7] Egídio dos Reis, A.D. (1993), 'How long is the surplus below zero?', *Insurance: Mathematics and Economics*, 12, 23–38.
- [8] Egídio dos Reis, A.D. (2000), 'On the moments of ruin and recovery times', *Insurance: Mathematics and Economics*, 27, 231–343.
- [9] Egídio dos Reis, A.D. (2001), Teoria da Ruína, *CEMAPRE ISEG*, Lisboa: Portugal.

- [10] Egídio dos Reis, A.D. (2002), 'How many claims does it take to get ruined and recovered?', *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(2), 235–248.
- [11] Egídio dos Reis, A.D. (2004), 'The compound binomial model revisited', (não publicado).
- [12] Gerber, H.U. (1979), *An introduction to Mathematical Risk Theory* S.S. Huebner Foundation for Insurance Education, University of Pennsylvania, Pa. 19104, USA
- [13] Gerber, H.U. (1988a), 'Mathematical fun with the compound binomial process', *Astin Bulletin*, 18(2), 161–168.
- [14] Gerber, H.U., (1988b), 'Mathematical fun with ruin theory', *Insurance: Mathematics and Economics*, 7, 15–23.
- [15] Gerber, H.U., (1988b), 'When does the surplus reach a given target?', *Insurance: Mathematics and Economics*, 9, 115–119.
- [16] Johnson, N.L., Kotz, S., Kemp, A.W. (1992), *Univariate discrete distributions*, 2nd edn, John Wiley & Sons, INC., USA.
- [17] Murteira, B. (1990), *Probabilidade e Estatística (vol. I)*, 2^a ed, McGraw-Hill, Portugal.
- [18] Parzen, E. (1971), *Procesos Estocasticos*, Holden Day, San Francisco.
- [19] Ross, S.M. (1996), *Stochastic Processes*, Canada.
- [20] Shiu, E.S.W. (1989), 'The probability of eventual ruin in the compound binomial model', *Astin Bulletin*, 19(2), 179–190.
- [21] Willmot, G.E. (1993), 'Ruin probabilities in the compound binomial model', *Insurance: Mathematics and Economics*, 12, 133–142.