

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS
DO TRABALHO E DA EMPRESA
DEPARTAMENTO DE FINANÇAS



Markov-Switching: Value-at-Risk e Expected Shortfall
Aplicado aos Índices *PSI20* e *DAX30*

Rita Vaz Moura

Mestrado em Matemática Financeira

Dissertação orientada por:
Professora Doutora Diana Aldea Mendes

Agradecimentos

Para a realização deste longo desafio, apresento o meu profundo e sentido agradecimento por toda a dedicação, disponibilidade e excelente orientação à Professora Doutora Diana Aldea Mendes que muito me encorajou e promoveu os meus conhecimentos.

Especialmente aos meus Pais, à minha irmã e às minhas Avós, um enorme obrigada por acreditarem sempre em mim e por todo o apoio e ensinamentos recebidos. Uma vez concluída esta etapa, espero poder compensar todo o carinho e incentivo que incessantemente me ofereceram.

Ao Bernardo, agradeço o amor e a compreensão.

Resumo

As séries financeiras exibem algumas características particulares (como não-estacionariedade e volatilidade, por exemplo), possíveis de serem capturadas pelo modelo *GARCH* (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic*) ou por algumas das suas vertentes, tais como o *EGARCH* (*Exponential GARCH*) ou o *GJR* (*Glosten, Jagannathan & Runkle*). No entanto, dados os resultados não totalmente satisfatórios obtidos pelos anteriores, em considerar mudanças súbitas em diferentes regimes de volatilidade, o modelo *MRS-GARCH* (*Markov Regime Switching-GARCH*) começou a ganhar bastante importância.

O foco desta dissertação passa por comparar a capacidade preditiva dos dois tipos de modelos referidos sobre o *Value-at-Risk* e posteriormente, garantir que os modelos uni-regimes mais adequados para essa, vão surtir ainda melhores efeitos de *Expected Shortfall*. De forma a inferir sobre ligações entre modelos e medidas, pode encontrar-se uma análise e comparação dos parâmetros envolvidos e das respectivas previsões das mesmas, aplicadas sobre índices provenientes de países com desenvolvimento económico diferente, o *PSI20* de Portugal e o *DAX30* da Alemanha. Recorrer-se-á às distribuições Normal, *t-Student* e *GED* (*Generalized Error Distribution*) e a *loss functions* e técnicas de *backtesting* específicas para avaliar os resultados.

Corrobora-se a ideia de que os *MRS-GARCH* e distribuições com caudas pesadas, proporcionam, de certa forma, melhores resultados de *Value-at-Risk* diário: para o *PSI20*, o *MRS-t* é o preferível, e para o *DAX30*, garante-se que tanto o anterior modelo como o *EGARCH-t* são os mais adequados. Quanto aos *steps* temporais utilizados nas técnicas de *backtesting*, salientam-se os intermédios e o superior horizonte para os anteriores modelos, respectivamente, e a confiança de 95%. Relativamente ao *Expected Shortfall*, o *EGARCH-t* a duas semanas para o *PSI20* e o *EGARCH-N* a um mês para o *DAX30* são os favorecidos. O *Expected Shortfall* diário, expectavelmente, é o que apresenta melhor *performance* na cobertura das verdadeiras perdas envolvidas.

Palavras-Chave: Não-Linearidade, Medida de Risco, *MRS-GARCH*, Avaliação da Volatilidade.

Abstract

Financial series exhibit some particular characteristics (like non-stationarity and volatility), which can be captured by the *GARCH* (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic*) model or some of its strands, such as *EGARCH* (*Exponential GARCH*) or the *GJR* (*Glosten, Jagannathan & Runkle*). However, given the unsatisfactory results obtained by the previous ones, in considering sudden changes in different volatility regimes, the *MRS-GARCH* (*Markov Regime Switching-GARCH*) model began to gain importance.

The focus of this thesis is to compare the predictive capacity of the two types of models referred below on *Value-at-Risk* and later on, ensure that the best single regimes models for this measure will provide even better *Expected Shortfall* effects. In order to infer connections between models and measures, an analysis and comparison of the parameters involved and their respective forecasts, applied on indices from countries with different economic development, the *PSI20* of Portugal and the *DAX30* of Germany can be found. Normal, *t-Student* and *GED* (*Generalized Error Distribution*) distributions and *loss functions* and specific *backtesting* techniques will be used to evaluate the results.

It is corroborated that the *MRS-GARCH* and larger distributions provide, somewhat, better daily *Value-at-Risk* results: for *PSI20*, *MRS-t* is preferable and for *DAX30*, it is guaranteed that the previous one and also *EGARCH-t* are the most adequate. For the time *steps* used in *backtesting* techniques, the intermediate and the superior horizon for the previous ones, respectively, and the 95% confidence are emphasized. For the *Expected Shortfall*, the two-week *EGARCH-t* for the *PSI20* and the one-month *EGARCH-N* for the *DAX30* are preferred. The daily *Expected Shortfall* is, expectedly, the one that performs better in covering the real losses involved.

Keywords: Non-Linearity, Risk Measure, *MRS-GARCH*, Volatility Assessment.

Abreviaturas

<i>ACF</i>	<i>Autocorrelation Function</i>
<i>ADF</i>	<i>Augmented Dickey-Fuller</i>
<i>AIC</i>	<i>Akaike Info Criterion</i>
<i>AR</i>	<i>Autoregressive Model</i>
<i>ARCH</i>	<i>Autoregressive Conditionally Heteroskedastic</i>
<i>ARMA</i>	<i>Autoregressive Moving Average Model</i>
<i>BDS</i>	<i>Brock, Dechert & Scheikman</i>
<i>CC</i>	<i>Conditional Converage</i>
<i>DAX</i>	<i>Deutscher Aktien Index</i>
<i>EGARCH</i>	<i>Exponential GARCH</i>
<i>ES</i>	<i>Expected Shortfall</i>
<i>FLF</i>	<i>Firm Loss Function</i>
<i>GARCH</i>	<i>Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic</i>
<i>GJR</i>	<i>Glosten, Jagannathan & Runkle</i>
<i>i.i.d</i>	<i>Independente e Identicamente Distribuído</i>
<i>Ind</i>	<i>Independence</i>
<i>JB</i>	<i>Jarque-Bera</i>
<i>KPSS</i>	<i>Denis Kwiatkowski, Peter C. B. Phillips, Peter Schmidt e Yongcheol Shin</i>
<i>GJR</i>	<i>Glosten, Jaganathan, and Runkle</i>
<i>GED</i>	<i>Generalized Error Distribution</i>
<i>LL</i>	<i>Log Likelihood</i>
<i>LR</i>	<i>Likelihood Ratio</i>
<i>MA</i>	<i>Moving Averages Model</i>
<i>MAE</i>	<i>Mean Absolute Error</i>
<i>MLE</i>	<i>Maximum Likelihood Estimations</i>
<i>MMV</i>	<i>Método da Máxima Verosimilhança</i>
<i>MRS</i>	<i>Markov Regime Switching</i>
<i>PACF</i>	<i>Partial Autocorrelation Function</i>
<i>PF</i>	<i>Proporção de Falhas</i>
<i>PP</i>	<i>Phillips-Perron</i>
<i>PSI</i>	<i>Portuguese Stock Index</i>
<i>RLF</i>	<i>Regulator Loss Function</i>
<i>RMSE</i>	<i>Root Mean Square Error</i>
<i>TARCH</i>	<i>Treshold AutoRegressive Conditionally Heteroskedastic Model</i>
<i>TUFF</i>	<i>Time Until First Failure</i>
<i>VaR</i>	<i>Value-at-Risk</i>

Índice

Introdução.....	1
1. Revisão Bibliográfica	3
2. Medidas de Risco e Metodologias de Estimação.....	5
2.1. Série Temporal e Estacionariedade	5
2.2. Retornos	7
2.3. Medida de Risco.....	7
2.4. <i>Value-at-Risk</i>	8
2.4.1. A Origem do <i>Value-at-Risk</i>	8
2.4.2. Definição de <i>Value-at-Risk</i>	8
2.5. <i>Expected Shortfall</i>	9
2.6. Comparação de <i>Value-at-Risk</i> e <i>Expected Shortfall</i>	10
2.7. Métodos para Estimar o <i>Value-at-Risk</i> e o <i>Expected Shortfall</i>	11
2.7.1. Abordagem Paramétrica	11
2.7.2. Métodos Econométricos	12
2.7.2.1. Modelos não-lineares no desvio-padrão da distribuição	13
2.7.2.1.1. Modelo <i>GARCH</i>	13
2.7.2.1.2. Modelo <i>TARCH (GJR)</i>	14
2.7.2.1.3. Modelo <i>EGARCH</i>	15
2.7.2.2. Modelos não-lineares na média da distribuição	15
2.7.2.2.1. Modelo <i>Markov Regime Switching</i>	15
2.8. Pressupostos dos Resíduos dos Parâmetros Estimados	17
2.8.1. Teste de Homocedasticidade <i>ARCH-LM</i>	18
2.8.2. Teste de Correlação e Linearidade de <i>Brock, Dechert & Scheikman</i>	18
2.8.3. Teste de Normalidade de <i>Jarque-Bera</i>	19
2.9. Avaliação da Previsão da Volatilidade.....	19
2.9.1. Funções Estatísticas de Perda <i>Standard</i>	20
2.9.2. <i>Backtesting</i>	21
2.9.2.1. <i>Backtesting Value-at-Risk</i>	21
2.9.2.2. <i>Backtesting Expected Shortfall</i>	24
3. Dados	25
4. Resultados Empíricos.....	31
4.1. Análise de Modelos Econométricos	31
4.2. Análise de Estatísticas <i>in-sample</i> entre Modelos Econométricos	36
4.3. Resultados <i>Backtesting</i>	38
4.3.1. Comparação dos Resultados de <i>backtesting</i> do <i>Value-at-Risk</i>	38
4.4. Comparação de Resultados <i>in-sample</i> e <i>out-of-sample</i>	40
4.5. Análise de Resultados de <i>Expected Shortfall</i>	42
4.5.1. Comparação de Resultados de <i>Value-at-Risk</i> e <i>Expected Shortfall</i>	44
Conclusão	45
Referências Bibliográficas	47
ANEXO 1	53
ANEXO 2	57
ANEXO 3	71

ANEXO 4	73
ANEXO 5	77
ANEXO 6	79

Índice de Figuras

Figura 3.1. Comportamento do <i>DAX30</i> e <i>PSI20</i> ao longo de 24 anos.....	26
Figura 3.2. Rendibilidades do <i>PSI20</i>	29
Figura 3.3. Rendibilidades do <i>DAX30</i>	29
Anexos:	
Figura 1.1. Correlograma da série <i>PSI20</i> em nível.....	53
Figura 1.2. Correlograma da série <i>DAX30</i> em nível	54
Figura 1.3. Correlograma da série <i>PSI20</i> integrada de ordem um	55
Figura 1.4. Correlograma da série <i>DAX30</i> integrada de ordem um	56
Figura 2.1. Teste de <i>BDS</i> sobre o <i>PSI20</i>	57
Figura 2.2. Teste de <i>BDS</i> sobre as rendibilidades do <i>PSI20</i>	57
Figura 2.3. Teste de <i>BDS</i> sobre o <i>DAX30</i>	58
Figura 2.4. Teste de <i>BDS</i> sobre as rendibilidades do <i>DAX30</i>	58
Figura 2.5. Períodos de mercado " <i>bull</i> " e " <i>bear</i> " sobre as rendibilidades do <i>PSI20</i> e <i>DAX30</i> ...	61
Figura 2.6. Variância Condicional e <i>Smoothed Probabilities</i> sobre as rendibilidades do <i>PSI20</i> associado à distribuição Gaussiana	62
Figura 2.7. Variância Condicional e <i>Smoothed Probabilities</i> sobre as rendibilidades do <i>PSI20</i> associado à distribuição <i>t-Student</i>	63
Figura 2.8. Variância Condicional e <i>Smoothed Probabilities</i> sobre as rendibilidades do <i>PSI20</i> associado à distribuição <i>GED</i>	64
Figura 2.9. Variância Condicional e <i>Smoothed Probabilities</i> sobre as rendibilidades do <i>DAX30</i> associado à distribuição Normal	65
Figura 2.10. Variância Condicional e <i>Smoothed Probabilities</i> sobre as rendibilidades do <i>DAX30</i> associado à distribuição <i>t-Student</i>	66
Figura 2.11. Variância Condicional e <i>Smoothed Probabilities</i> sobre as rendibilidades do <i>DAX30</i> associado à distribuição <i>GED</i>	67
Figura 5.1. Previsões <i>out-of-sample</i> a uma semana sobre as rendibilidades do <i>PSI20</i> do VaR a 95%	77
Figura 5.2. Previsões <i>out-of-sample</i> a duas semanas sobre as rendibilidades do <i>PSI20</i> do VaR a 95%	77

Figura 5.3. Previsões <i>out-of-sample</i> a um mês sobre as rendibilidades do <i>DAX30</i> do <i>VaR</i> a 95%	78
Figura 6.1. Previsões <i>out-of-sample</i> a duas semanas sobre as rendibilidades do <i>PSI20</i> do <i>ES</i> a 95%	79
Figura 6.2. Previsões <i>out-of-sample</i> a duas semanas sobre as rendibilidades do <i>PSI20</i> do <i>ES</i> e de <i>VaR</i> a 95% segundo o modelo <i>EGARCH-N</i>	79
Figura 6.3. Previsões <i>out-of-sample</i> a duas semanas sobre as rendibilidades do <i>PSI20</i> do <i>ES</i> e de <i>VaR</i> a 95% segundo o modelo <i>EGARCH-t</i>	80
Figura 6.4. Previsões <i>out-of-sample</i> a um mês sobre as rendibilidades do <i>DAX30</i> do <i>ES</i> a 95%.	80
Figura 6.5. Previsões <i>out-of-sample</i> a um mês sobre as rendibilidades do <i>DAX30</i> do <i>ES</i> e de <i>VaR</i> a 95% segundo o modelo <i>EGARCH-N</i>	81
Figura 6.6. Previsões <i>out-of-sample</i> a um mês sobre as rendibilidades do <i>DAX30</i> do <i>ES</i> e de <i>VaR</i> a 95% segundo o modelo <i>EGARCH-t</i>	811

Índice de Tabelas

Tabela 2.1. Características para a modelação de modelos $ARMA(p,q)$	7
Tabela 3.1. P -value associado aos testes de estacionariedade de ambas as séries.....	27
Tabela 3.2. Estatísticas descritivas dos retornos diários.....	28
Tabela 4.1. P -value associados aos testes dos pressupostos dos resíduos dos parâmetros estimados sobre as rendibilidades do $PSI20$	32
Tabela 4.2. P -value associado ao teste do pressuposto de independência dos resíduos dos parâmetros estimados sobre o $PSI20$ e sobre as suas rendibilidades.....	32
Tabela 4.3. P -value associados aos testes dos pressupostos dos resíduos dos parâmetros estimados para as rendibilidades do $DAX30$	33
Tabela 4.4. P -value associado ao teste do pressuposto de independência dos resíduos dos parâmetros estimados para o $DAX30$ e para as suas rendibilidades.....	34
 Anexos:	
Tabela 2.1. Estimativas dos parâmetros estimados e respectivo desvio-padrão sobre as rendibilidades do $PSI20$ de modelos de regimes simples.....	59
Tabela 2.2. Estimativas dos parâmetros estimados e respectivo desvio-padrão sobre as rendibilidades do $DAX30$ de modelos de regimes simples.....	60
Tabela 2.3. Estimativas dos parâmetros estimados e respectivo desvio-padrão sobre as rendibilidades do $PSI20$ de modelos de regimes <i>switching</i>	68
Tabela 2.4. Estimativas dos parâmetros estimados e respectivo desvio-padrão sobre as rendibilidades do $DAX30$ de modelos de regimes <i>switching</i>	69
Tabela 3.1. Estatísticas comparativas <i>in-sample</i> sobre as rendibilidades do $PSI20$	71
Tabela 3.2. Estatísticas comparativas <i>in-sample</i> sobre as rendibilidades do $DAX30$	71
Tabela 4.1. Avaliação <i>out-of-sample</i> : 95% VaR sobre as rendibilidades do $PSI20$	73
Tabela 4.2. Avaliação <i>out-of-sample</i> : 99% VaR sobre as rendibilidades do $PSI20$	74
Tabela 4.3. Avaliação <i>out-of-sample</i> : 95% VaR sobre as rendibilidades do $DAX30$	75
Tabela 4.4. Avaliação <i>out-of-sample</i> : 99% VaR sobre as rendibilidades do $DAX30$	76

Introdução

Prever o risco de uma instituição financeira tem uma enorme importância, uma vez que previsões correctas são cruciais para qualquer investidor, onde o objectivo comum, é minimizar os riscos e maximizar os lucros. A recente crise financeira enfatizou a necessidade de previsões adequadas, após o aperfeiçoamento dos regulamentos financeiros e da incredulidade em relação aos mercados, para avaliar não só os riscos financeiros nas carteiras, como também, aferir sobre a pertinência dos modelos que estavam a ser utilizados para tal averiguação.

O *Value-at-Risk (VaR)* é a medida quantitativa mais comum para acessar o risco de mercado. O catalisador a esta popularidade, foi a sua introdução na estrutura regulatória de *Basel I e II*, como uma medida *standard* para o risco de mercado, e a sua implementação é determinística no capital requerido pelos bancos. Contudo, o Comité de Basileia¹ não impôs um modelo *VaR standard* que os bancos têm de aplicar, com o intuito de que cada instituição calibre o seu próprio modelo, de acordo com as suas operações, necessidades e carteiras. Com a evolução dos estudos com respeito ao risco, existem várias formas de estimar esta medida, conduzindo por sua vez, à necessidade de verificar a eficácia dos métodos. O cálculo desta, está dependente de dados, metodologias, parâmetros e pressupostos, podendo conduzir a que dois utilizadores a efectuar cálculos para a mesma carteira possam chegar a resultados significativamente diferentes, levando à conclusão de que a utilização do *VaR* não está isenta de perigos, para além de se apresentarem posteriormente algumas limitações. Desta forma, propiciou-se a procura de um método alternativo, denominado por *VaR Condicional* ou *Expected Shortfall (ES)*, para o qual, *Osmundsen (2016)* afirma que as principais diferenças entre estes dois métodos, são a subaditividade, o risco presente na cauda, e o facto desta última medida ainda não ser adoptada pelo Comité de Basileia, pela dificuldade existente em fazer o seu *backtesting*.

As séries financeiras são bem descritas por factos que dão origem a eventos de *volatility cluster* e excesso de curtose, pelo que, de forma a capturar estas características, e de forma a prever a volatilidade, os modelos *GARCH* são fundamentais. Este, no entanto, responde simetricamente tanto a valores positivos como negativos de observações passadas, obrigando a que o sinal dos *shocks* na variância condicional, seja irrelevante. Por conseguinte, variantes do modelo *GARCH* foram concebidas, de forma a capturar este efeito assimétrico, entre elas, o modelo *GJR*, onde é acrescentado um termo à equação-padrão *GARCH* e o modelo *EGARCH*, ambos eficazes a reconhecer esses efeitos na volatilidade condicional, mas cuja principal diferença entre ambos consiste na não imposição de restrições de negatividade no segundo. Posteriormente, as dramáticas quebras de estrutura, provenientes de razões políticas, económicas e aleatórias, que tão bem se podem encontrar nos comportamentos destas séries, passaram a não conseguir ser registadas pelos anteriores modelos, uma vez que, nestes modelos uni-regimes, as alterações na volatilidade condicional se baseiam no choque de eventos determinísticos, não se ponderando, portanto, que mudanças de regime possam ser pautadas por eventos estocásticos não observáveis, que descrevam correctamente o regime de volatilidade no período temporal anterior, obrigando a que o comportamento da volatilidade dependa de eventos passados. Surge assim o modelo *Markov Regime Switching-GARCH (MRS-GARCH²)*, que ao ser baseado nas anteriores características, facilmente reconhece saltos persistentes na volatilidade das séries, definidas como *switches*. A estimação tanto dos modelos uni-regimes, como dos de *switching*, pressupõem a utilização do método de estimação da máxima verosimilhança, assumindo a Normal como distribuição condicional dos

¹ O Comité de Basileia de Supervisão Bancária, é uma organização que congrega autoridades de supervisão bancária, visando fortalecer a solidez dos sistemas financeiros.

² Nesta dissertação este modelo será denominado por *MRS-GARCH* ou apenas por *MRS*.

erros. No entanto, muitos estudos provaram que distribuições com caudas grossas, como a *t-Student* ou a *GED*, podiam oferecer bons ajustes aos excessos de curtose e assimetria existentes nos retornos.

O capítulo 1 contém uma breve revisão bibliográfica da literatura científica relacionada com os modelos utilizados e as suas aplicações na previsão do risco nos mercados financeiros. O capítulo 2 é composto por uma explicação teórica de cada medida de risco e modelo, bem como das respectivas distribuições utilizadas, para além de estarem expostos os testes estatísticos utilizados para a verificação dos pressupostos dos resíduos dos parâmetros estimados. Para a avaliação da previsão da volatilidade, utilizou-se a abordagem *in-sample* e *out-of-sample*, utilizando assim respectivamente, as *loss functions* para avaliar as estimativas dos parâmetros dadas pelos modelos utilizados em tal previsão, e técnicas de *backtesting* específicas para cada medida de risco, que consistem na avaliação dos valores previstos das mesmas, estando assim presentes, o teste de *TUFF*, a proporção de falhas, o teste de cobertura condicional de *Christoffersen* e funções de perda adicionais para o *VaR* e, somente, uma análise gráfica entre as verdadeiras rendibilidades e as estimativas de *ES* para a restante medida de risco. O capítulo seguinte destina-se à informação sobre os índices bolsistas utilizados, *PSI20* de Portugal e *DAX30* da Alemanha, os *softwares*, bem como a uma explicação do tipo de abordagem utilizada, que é ideal para capturar mudanças na média e variância ao longo do tempo, e por último, a uma análise estatística descritiva e de estacionariedade, relevante para saber sob que tipo de dados se está. Seguidamente, no capítulo 4, é possível encontrar uma análise e comparações empíricas do objectivo de estudo: comparação da capacidade preditiva de modelos da família *GARCH* em relação ao modelo *MRS-GARCH*, sobre o *VaR*, e para os dois índices com níveis de desenvolvimento diferente. Numa fase seguinte, face aos resultados sobre o/s modelo/s uni-regimes mais adequado/s para esta previsão, janela temporal da abordagem *Rolling Window* e nível de significância determinados, a outra medida competitiva do mercado vai ser exposta, com o intuito de confirmar as ideias até hoje desenvolvidas, acerca da melhor *performance* do *ES*, e sobre a fidedignidade dos modelos - nomeadamente dos *EGARCH*, que são os últimos encontrados na gama existente neste projecto e por conseguinte, os mais completos e eficazes - e distribuições que mais considerem não-linearidades, e, quando se considerar o *VaR*, também dos favoráveis *MRS*. Para tal, irá proceder-se a uma comparação de resultados obtidos pelas duas abordagens, que tiveram sempre em mente, a escolha do melhor modelo de cada uma das gamas existentes, sendo que, a escolha final, se irá basear na intersecção de todos os anteriores, concluindo assim sobre o melhor modelo, horizonte temporal e nível de confiança para estimar o *VaR* e seguidamente o *ES*, para cada índice. Dadas as contrariedades encontradas pelo *VaR*, tornando assim o *ES* uma medida mais potente e confiável, presume-se que distribuições não tão excêntricas, como a Gaussiana, também sejam capazes de oferecer boas previsões de *ES*, sendo assim também capaz de cobrir as verdadeiras perdas envolvidas, sobretudo em séries que, quando comparadas com outras, apresentem inferiores características extremas. Desta forma, na secção 4.4, constatar-se-á que, as melhores previsões de *VaR* diário, ocorrem segundo os *EGARCH* e *MRS* com inovações *t* para o *DAX30* e exactamente pelo *MRS-t* para o *PSI20*. Verificar-se-á também que, para além deste facto, o *ES* é a medida de risco mais eficaz.

Por fim, este tema foi ponderado no sentido de contribuir para o desenvolvimento dos estudos na área do risco e da econometria, uma vez que engloba temas fundamentais dessas áreas, que, por sua vez, permitem obter interpretações verídicas e com bastante importância. Ao mesmo tempo, em Portugal, este não é um alvo de investigação científica comum uma vez que o *MRS* ainda é, de certa forma, desconhecido. Para além do anterior, dada a complexidade da previsão, sobretudo de *ES* por si só, mas também com base em modelos econométricos e particularmente, através da implementação de modelos de regime *switching* para previsão de *VaR*, mais popularidade este tema ganha.

1. Revisão Bibliográfica

Ao longo deste capítulo, serão expressas algumas das relevantes investigações, exibidas em dissertações ou artigos, assentes em diversas técnicas acerca da previsão do risco de mercado por meio de métodos econométricos nas quais esta dissertação se baseou.

A dissertação de mestrado realizada por *Juri Marcucci*, em 2005, teve como propósito comparar a capacidade de modelos *MRS* e *GARCH* a prever a volatilidade do índice do mercado de acções dos Estados Unidos, o *S&P100*³. Todos os modelos estimados assumiram inovações Gaussianas, e distribuições com caudas mais pesadas como a *t-Student* e a *GED*, e a janela temporal para tal previsão variou de um dia a um mês. Quanto à avaliação das *performances* dos competitivos modelos, o autor utilizou funções de perda estatísticas e de gestão de risco, sendo que nas primeiras, englobou o teste de *DM* (*Diebold & Mariano, 1995*), cujo objectivo é o de verificar a superioridade de um modelo relativamente a outro, bem como outros dois métodos, o *Reality Check*⁴ (*White, 2000*) e o *Superior Predictive Ability test* (*Hansen, 2001*), que surgiu de forma a refinar o anterior, sendo menos sensível quando se incluem modelos pobres. No seguinte grupo de funções, expôs o teste *TUFF - Time Until First Failure* - e o de *CC-Christoffersen*, ambos explicitados em 2.9.2.1. Para este último, primeiro verificou quais os modelos que passavam nos testes de correcta cobertura condicional e incondicional e de seguida, comparou os escolhidos através de outras duas funções, a *Firm Loss Function* e a *Regulator Loss Function*, também abordadas no anterior capítulo, considerando-as ainda como cruciais para a selecção do melhor modelo. Resultados empíricos demonstraram que os *MRS-GARCH* tiveram uma melhor *performance* que os *GARCH standard* na previsão da volatilidade pela mais curta janela temporal, segundo ambas as análises. De forma particular, todos os testes rejeitaram a presença de um modelo melhor que o de *MRS-N*. Em horizontes *Rolling* – método sintetizado no capítulo 3 - superiores ao anterior, os *EGARCH* tenderam a ser superiores.

Em 2014, *Ludvig Hjalmarsson*, comparou na sua dissertação de mestrado, a *performance* do modelo de *Regime Switching* com o de uni-regimes - *GARCH(1,1)* - a partir da abordagem *Rolling Window* em obter estimativas de *VaR* e *mVaR - modified VaR*, que corrige o habitual *VaR* uma vez que para o seu cálculo não utiliza somente a volatilidade, mas também a assimetria e a curtose (*Cornish & Fisher, 1938*) - sobre os índices *OMXS30*⁵ e *Nikkei 225*⁶, e utilizando as distribuições Normal e a *t-Student*. Segundo o autor, o *MRS* associado a uma distribuição Normal foi o que ofereceu melhores resultados em termos de curtose e de assimetria nos resíduos. Pelos resultados de *backtesting* obtidos através do teste de *Proportion of Failures (PoF)* (*Kupiec, 1995*), que testa se o número de falhas ocorridas é consistente com o nível de confiança estabelecido - e do clássico de *Christoffersen*, o autor concluiu que o modelo que produziu, de forma geral, melhores resultados foi, novamente, o *MRS-N* e a medida que mais sobressaiu foi o *VaR*, ainda que as estimativas associadas ao *mVaR* e com o anterior modelo também sejam satisfatórias. Relativamente ao modelo *GARCH(1,1)*, o autor já esperava resultados insatisfatórios, uma vez que aquele não se consegue adaptar de forma tão eficiente a distribuições que não sejam normalmente distribuídas quanto os *MRS*.

Samet Günay, em 2015, examinou no seu artigo as *performances* obtidas entre os modelos *GARCH*, *EGARCH*, *GJR* e *MRS* sobre a previsão da volatilidade dos retornos do petróleo *Brent*. Todos os modelos foram formados segundo as três distribuições usuais e já descritas pelo autor *Jurii Marcucci*. Com o intuito de estudar o efeito da turbulência na volatilidade, analisou em primeiro a existência de possíveis quebras de estrutura sobre a série em causa, através do teste modificado *ICSS (Iterative Cumulative Sum of Squares)*, segundo *Sanso et al., 2004*, que oferece resultados credíveis para séries temporais leptocúrticas e de heterocedasticidade condicional. Os

³ Mede o desempenho de 100 grandes empresas bem estabelecidas, e é calculado por capitalização de mercado – definição encontrada em 3.

⁴ Testa se um determinado modelo supera significativamente outro conjunto de alternativas. É mais relevante que o teste de *DM*, pois permite verificar qual o melhor modelo de previsão ao invés de descobrir qual o melhor de entre um par de modelos.

⁵ O *OMX Stockholm 30* é o índice bolsista de Estocolmo, calculado através da ponderação de custos e consiste nas 30 classes de acções mais negociadas da Suécia.

⁶ Índice bolsista de Tóquio, calculado através da ponderação de custos das 225 mais importantes empresas do Japão.

seus autores, criaram para tal, dois testes, *Kappa 1 e 2*, com diferentes fundamentos. A análise destes evidenciou uma e duas quebras de estrutura na volatilidade dos retornos do petróleo, respectivamente, mas não implicando imediatamente a existência de diferentes regimes. No entanto, esta suspeita foi tida em consideração por *Samet*, começando este assim por analisar modelos uni-regimes e de seguida os *MRS*. Após uma análise dos parâmetros dos modelos, de forma a efectuar a avaliação de qual o mais adequado, utilizou duas *loss functions* - abordadas em 2.9.1. Segundo ambas, constatou que o *MRS* superou todas as restantes alternativas. Um outro resultado interessante que alcançou foi a falha dos modelos formados a partir de inovações Gaussianas, enquanto a *t-Student* foi a que melhor se comportou.

Farhat Iqbal, em 2016, realizou um similar artigo, prevendo assim a volatilidade e o *VaR* utilizando o modelo *MRS* e várias vertentes dos *standard GARCH*. A janela temporal e distribuições associadas às inovações foram as mesmas que *Juri Marcucci* considerou, para ambas as previsões. No que respeita às técnicas de *backtesting*, utilizou os testes de *DM Modificado (MDM, Diebold & Mariano Modificado, 1997, segundo Harvey et al.)* - desenvolvido a partir do de *DM*, uma vez que esse podia sobrestimar o risco se a amostra fosse reduzida - para a volatilidade e o de cobertura condicional de *Christoffersen*, entre outros, para o *VaR*. Acerca da primeira, o modelo que sobressaiu foi o *MRS-t*, para o curto prazo, excepto a 10% de significância, onde o modelo *GJR-t* foi o que apresentou melhores resultados. A longo prazo, no entanto, foi o modelo *EGARCH-t* que se destacou. Por último, quanto ao *VaR*, as conclusões foram similares, salientando assim os *MRS* no curto prazo e os *EGARCH* e *GJR* no longo, mas em todos com inovações não normais. Em suma, os resultados revelaram que os modelos *MRS-t* e *EGARCH-t*, se mostraram superiores em prever tanto a volatilidade como o *VaR* do *Karachi Stock Exchange*⁷, em curtas e longas posições respectivamente.

Esta dissertação foi ainda baseada noutros objectos e numa pesquisa profunda, tendo todo o material servido de base e de apoio para a sua realização. Foi assim possível aprofundar as metodologias e abordagens que nos próximos capítulos se seguirão, para além de terem servido como orientação à retirada de conclusões fidedignas sobre os resultados obtidos. Como nem todos os anteriores procedimentos serão abordados, é possível consultar qualquer um desses objectos no capítulo de Referências Bibliográficas, de forma a pormenorizar o tema em questão, e também toda a vasta gama de documentos utilizados para esta elaboração.

⁷ Bolsa de Valores de *Karachi* (Paquistão), e é calculado pelo método da ponderação de custos.

2. Medidas de Risco e Metodologias de Estimação

2.1. Série Temporal e Estacionariedade

Uma série temporal corresponde a um conjunto de observações ordenadas no tempo que apresentam uma dependência entre instantes de tempo não necessariamente uniformemente espaçados. A suposição que guia a análise de séries, é a de que há um sistema causal, que cria padrões não aleatórios, que exerceu influência sobre os dados no passado e pode continuar a fazê-lo no futuro. A observação deste comportamento passado pode permitir fazer previsões sobre o futuro, orientando a tomada de decisões.

Estes padrões podem ser identificados através da decomposição da série, nas componentes de tendência, ciclo, sazonalidade e movimentos irregulares. A tendência de uma série indica a direcção a longo prazo da evolução do nível médio da série. Os ciclos são caracterizados por movimentos oscilatórios, de tipo recorrente, mas sem periodicidade específica, ao longo da componente anterior. A sazonalidade corresponde a movimentos estritamente periódicos, uma vez que ocorrem apenas em determinados intervalos regulares de tempo. Por fim, os movimentos irregulares, referem-se aos deslocamentos esporádicos das sucessões cronológicas, decorrentes de acontecimentos casuais e imprevisíveis.

Segundo *Diniz* (1998, citado em *Albuquerque*, 2015), ao assumir-se a estabilidade da distribuição dos dados ao longo do tempo, isto é, caso o processo estocástico⁸ associado à série, oscile em torno de uma média, variância e covariância constante ao longo do tempo, adopta-se a noção de estacionariedade. Todavia, qualquer modelo econométrico usual só é aplicável caso esta propriedade seja validada, e, atendendo a que as séries apresentam trivialmente sinais de não-estacionariedade, torna-se necessário proceder à sua estabilização⁹. Ao mesmo tempo, todas as evidências serão complementadas com testes estatísticos, com o mesmo intuito, isto é, o de determinar a ordem de estacionariedade da mesma, de uma forma mais fidedigna, sendo a anterior metodologia apenas sugestiva. Os testes estatísticos utilizados para tal serão, o *Augmented Dickey-Fuller test (ADF)*, o de *Phillips-Perron (PP)* e o de *Denis Kwiatkowski, Peter C. B. Phillips, Peter Schmidt e Yongcheol Shin (KPSS)*, que não irão ser apresentados de forma pormenorizada¹⁰. Para os dois primeiros a hipótese nula testa a não-estacionariedade da série, contra a hipótese alternativa contrária, enquanto para o último teste, tais hipóteses serão as opostas. Embora todos estes testes tenham as suas vantagens e desvantagens, todos irão ser realizados, e a resposta consistente entre dois, ou três deles é a que vai ser considerada. Encontrada a ordem de integrabilidade (estacionariedade) da série, é possível pôr em prática os modelos econométricos desejados.

Para além dos padrões anteriores, outras características comuns podem ser encontradas, sobretudo em séries financeiras, tais como não-linearidades. De forma a iniciar o tema, tem-se a volatilidade como uma medida de dispersão em relação à média, normalmente calculada como o desvio-padrão ou como a variância, num determinado intervalo de tempo e sobre os preços/retornos do activo em questão. É uma característica bastante comum quando se está a tratar de séries temporais financeiras, utilizada para quantificar o risco da mesma, pelo que, quanto menor, mais os valores se aproximam da média e conseqüentemente, menor o valor do risco. Os *clusters* de volatilidade caracterizam-se pelo facto de períodos de grande volatilidade serem seguidos por outros períodos de igualmente grandes oscilações, do mesmo modo que se espera que pequenas alterações nos preços sejam consecutivamente seguidas por modificações de reduzida dimensão nos mesmos e implicando assim sinais inequívocos de heterocedasticidade - variância dos erros

⁸ Colecção de variáveis aleatórias utilizadas para estudar a evolução de fenómenos que são observados ao longo do tempo.

⁹ Conceitos aprofundados e relacionados, ao longo do capítulo 3, uma vez que podem ser facilmente detectados a partir de um gráfico da série.

¹⁰ Para mais informação consultar: Arltová I. M. & Fedorová D. (2016). *Selection of Unit Root Test on the Basis of Length of the Time Series and Value of AR(1) Parameter*. Artigo. Disponível em: <https://www.czso.cz/documents/10180/32912822/32019716q3047.pdf/09710b90-e1d0-4bb1-816e-5b83faad686b?version=1.0>

não constante - excesso de curtose¹¹, de assimetria¹² ou *leverage effect*¹³, tornando-se normalmente, impossível de descrever as séries correctamente através de modelos *ARMA*, sendo assim necessário recorrer a modelos heterocedásticos, devido às tais características não-lineares anteriores. Todas estas características próprias das séries financeiras podem dever-se a quebras de estrutura (ou mudanças de regime).

Correlograma. Imagem estatística de gráficos de barras das funções de autocorrelação (*Autocorrelation Function, ACF*) e autocorrelação parcial (*Partial Autocorrelation Function, PACF*). Esta imagem, possibilita analisar a série em nível (original) ou em qualquer ordem de diferenciação ($r_t = \Delta P_t$, para a primeira diferença e assim sucessivamente, com P_t a representar a série de dados que se deseja diferenciar), ao longo do número de *lags*¹⁴ que o utilizador definiu. A *ACF* mensura o grau de relação¹⁵ que existe entre a informação no tempo t e k para uma variável r e é calculada a partir de:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (r_t - \bar{r})(r_{t-k} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2} \quad (2.1)$$

onde r_t representa a série temporal em questão, T o número de observações, k o *lag* entre as duas informações, e \bar{r} é a média da série. As autocorrelações para intervalos sucessivos são formalmente dependentes, uma vez que, se o primeiro elemento da série está relacionado com o segundo, e o segundo com o terceiro, então o primeiro estará de alguma forma também relacionado com o terceiro e assim sucessivamente. Por conseguinte, para obter uma informação sobre autocorrelações na série sem esta influência em cascata, definiu-se o conceito de função de autocorrelação parcial. A autocorrelação parcial do *lag* k corresponde à autocorrelação entre r_t e r_{t-k} que não é explicada pelos atrasos de 1 a k . O seu cálculo é mais elaborado do que a simples *ACF* e como tal não será apresentada neste projecto¹⁶. Assim, através de ambas as funções, pode verificar-se o comportamento dos dois tipos de correlação ao longo do tempo. Os resultados de ambas são apresentados de forma gráfica no correlograma, onde a linha vertical contínua é dada em zero e as duas linhas pontilhadas, representam dois desvios-padrão, dados por $\pm 2/\sqrt{T}$.

Os conceitos base acerca do correlograma foram explicitados, uma vez que permite adquirir considerações sobre a modelagem das séries de tempo, através de modelos *ARMA*¹⁷, por meio do reconhecimento das características presentes na Tabela 2.1 e desde que as saliências não ultrapassem as linhas anteriores. Da mesma forma, um correlograma que apresente um padrão sazonal de

¹¹ Caracteriza o achatamento da curva da distribuição. Quando o coeficiente do momento de curtose, é igual, maior ou menor que três, trata-se de uma distribuição mesocúrtica, leptocúrtica ou platicúrtica, respectivamente. Assim, a função é leptocúrtica se a curva da mesma é mais afunilada e com um pico mais alto do que a distribuição Normal, possuindo neste caso, caudas pesadas.

¹² Medida que traduz o grau de afastamento que uma distribuição apresenta do seu eixo de simetria. Quando este coeficiente, é igual, maior ou menor que zero, a distribuição denomina-se por simétrica, assimétrica positiva ou assimétrica negativa, respectivamente. A assimetria positiva é caracterizada por um valor positivo deste coeficiente e indica que a cauda do lado direito é maior que a do lado esquerdo.

¹³ As variações dos preços estão negativamente correlacionadas com as variações na volatilidade.

¹⁴ Usualmente, adicionam-se pelo menos 30 desfasagens, para dados diários, que é o caso das séries presentes. Vão ser utilizados 31 *lags*, em todos os posteriores testes/metodologias onde seja necessário especificar este valor.

¹⁵ Correlação, medida do grau de relacionamento entre duas variáveis aleatórias, ou seja, mede a força e direcção do relacionamento existente linear, sem, contudo, indicar qual delas é a independente ou a dependente e está compreendida entre -1 e 1. Uma correlação próxima de zero indica que as duas variáveis não estão relacionadas, enquanto uma positiva (negativa) indica, que as duas variáveis se movem juntas (em relações opostas), e a relação é forte quanto mais o valor se aproximar 1 (-1), designando-se por variáveis perfeitamente correlacionadas positivamente (negativamente).

¹⁶ Para esclarecimentos consultar: *Partial Autocorrelation Function (PACF)*. Curso online. *STAT 510, Applied Time Series Analysis*. Disponível em: <https://onlinecourses.science.psu.edu/stat510/node/62/>

¹⁷ Segundo *Peter Whittle (1951)*, qualquer série r_t , pode ser modelada como uma combinação linear de valores de r_t e de erros ε_t , ambos passados, isto é, constituindo um polinómio tanto autorregressivo *AR(p)*, (*Autoregressive Model* de ordem p) como de média móvel *MA(q)*, (*Moving Averages Model* de ordem q), obtém-se o modelo *ARMA(p,q)* (*Autoregressive Moving Average*), dado respectivamente por: $r_t = \Phi_1 r_{t-1} + \Phi_2 r_{t-2} + \dots + \Phi_p r_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_p \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$, onde $\Phi_i, i = 1, \dots, p$ e $\theta_i, i = 1, \dots, q$, constantes reais e $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_t^2)$, com *WN* a representar *White-Noise*. Esta equação será utilizada constantemente para modelar a equação da média, necessária, em todos os modelos econométricos nas seguintes secções apresentados.

movimentos recorrentes como ondas, na *PACF*, sugere a presença de sazonalidade de ordem p . Ressalta-se também, o padrão de séries não-estacionárias, que mostram saliências de autocorrelação altas em diversas defasagens, para além de valores unitários na primeira função apresentada.

Tabela 2.1. Características para a modelação de modelos *ARMA*(p,q).

Modelo	ACF	PACF
<i>White-Noise</i>	Tudo zero	Tudo zero
<i>AR</i> (p)	Declínio geométrico a partir do p -ésimo <i>lag</i>	Zero após p <i>lags</i>
<i>MA</i> (q)	Zero após q <i>lags</i>	Declínio a partir

2.2. Retornos

Actualmente, torna-se preferível trabalhar com os retornos do que com os preços, pois estes são livres de escala e têm propriedades estatísticas interessantes, como estacionariedade¹⁸, e ergodicidade¹⁹. Assim, esta definição é fundamental, uma vez que qualquer método e modelo, será implementado com base nesta variável.

Assumir-se-á que os preços dos activos, seguem uma distribuição Log-Normal, e como tal, utilizar-se-á o logaritmo natural sobre os preços, entre dois períodos temporais consecutivos, definindo assim os retornos ou rendibilidades como:

$$r_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) = \ln P_t - \ln P_{t-1}, \quad (2.2)$$

onde P_t representa o preço do activo no momento t e o outro, em $t - 1$.

2.3. Medida de Risco

Segundo *Artzner et al.* (1997), uma definição natural de medida de risco, passa por descrever o quão perto ou longe está uma determinada posição de ser aceite pelo regulador, permitindo expressar o risco através de um único número, que evidentemente, maior será quanto mais arriscada a posição for. Formalmente, tem-se $\rho(X)$, que associa a medida ρ a um risco X , tal que $X \in \chi$, conjunto de todos os riscos. Quando este valor é positivo, pode ser interpretado como o montante de capital que um agente deve adicionar à duvidosa posição, de forma a torná-la aceitável, ao contrário do que acontece quando toma um valor negativo, havendo a necessidade de o retirar do valor da posição já aceite, investindo-o numa nova vertente mais proveitosa.

Existem diversas medidas de risco, sendo as que vão ser utilizadas nesta dissertação e expostas nas próximas secções, denominadas por *Value-at-Risk* e *Expected Shortfall*. Salienta-se o facto de que, algumas propriedades têm de ser verificadas para aceitar um determinado instrumento de referência como medida de risco, sendo as mais relevantes e tidas em consideração, a verificação de eliciável e a coerência.

¹⁸ Tal como posteriormente se apresentará, ambas as séries em causa são estacionárias de ordem um, pelo que, em todo o caso, tinha de se utilizar esta representação.

¹⁹ Processo para o qual os parâmetros amostrais convergem, em probabilidade, para os parâmetros verdadeiros, ou seja, os populacionais.

2.4. Value-at-Risk

2.4.1. A Origem do Value-at-Risk

Ao longo das últimas décadas, a gestão de risco evoluiu para um ponto em que é considerada como um campo distinto na teoria das finanças. O crescimento dessa indústria conduziu ao aumento da volatilidade dos mercados financeiros na década de 1970. A ruptura do sistema de taxas de câmbio de *Bretton Woods*²⁰, a adopção do modelo de *Black-Scholes*²¹ e o facto de a actividade comercial ter aumentado significativamente, foram alguns dos importantes eventos que contribuíram para a "revolução de gestão de riscos". Complementando-os com os eventos imprevisíveis de 1990, como os desastres financeiros no *Barings Bank* (banco de investimento em Londres) ou na empresa *Metallgesellschaft* (uma das maiores empresas alemãs), ressaltou a necessidade de melhorar as ferramentas internas dessa gestão. Por conseguinte, o conhecimento prévio do risco a que uma organização está exposta é incontestavelmente essencial para a sua sobrevivência num mercado altamente competitivo e mutável, de modo a que, baseada no valor de risco resultante haja uma orientação às tomadas de decisão a serem adoptadas. Face a essa necessidade, propiciou-se o desenvolvimento de uma ferramenta, objectiva e de fácil interpretação, que utiliza técnicas estatísticas para mensurar e administrar o risco, conhecida por *Value-at-Risk*.

As instituições financeiras começaram a construir os seus próprios modelos de gestão de riscos em 1970, mas apenas com o aparecimento do trabalho pioneiro de *J. P. Morgan*, se conseguiu tornar o *VaR* como o padrão da indústria através da sua publicação no sistema *RiskMetrics*²² em 1994. O Acordo de Capital de Basileia de 1996 desempenhou um papel significativo, pois permitiu que os bancos usassem modelos internos de *VaR* para calcular os seus requisitos de capital próprio. Desde então, esta medida foi uma das mais utilizadas em finanças para quantificar o risco de mercado, e veio a ganhar cada vez mais importância há medida que os métodos foram melhorando.

2.4.2. Definição de Value-at-Risk

Segundo *Roccioletti* (2016), a definição de *VaR* do *portfolio*, ao nível de confiança α , corresponde ao menor valor x tal que a probabilidade da perda máxima r_t exceder x não seja superior a $(1 - \alpha)$, com $\alpha \in (0,1)$. Começando por definir a função distribuição para a variável dos retornos por $F_{r_t}(x) = P[r_t \leq x]$, o *VaR* calcula-se da seguinte forma:

$$VaR(r_t) = \inf \{x \in \mathbb{R}: P(r_t \leq x) \leq 1 - \alpha\} = \inf \{x \in \mathbb{R}: F_{r_t}(x) \geq \alpha\}, \quad (2.3)$$

que em termos probabilísticos, corresponde ao quantil da distribuição de perdas, isto é, a equação (2.3) é equivalente a $q_\alpha(r_t)$.

Danielsson (2011), por sua vez, assume que existe uma probabilidade dada pelo nível de significância α , de perdas superiores ao *VaR* num dado período de transacção e uma probabilidade $(1 - \alpha)$ de perdas inferiores à mesma medida:

$$P[\Delta V > VaR(r_t)] = P[\Delta V < -VaR(r_t)]^{23} = \int_{-\infty}^{-VaR(r_t)} f(x)dx = \alpha, \quad (2.4)$$

onde ΔV denota a mudança no valor, para uma janela temporal específica, relacionada com a variável aleatória V que indica o lucro ou perda do investimento no *portfolio*. Assumindo o valor do *portfolio* como θ , então $V = \theta Y$, onde Y representa os retornos e $f(\cdot)$ a função densidade de V .

²⁰ Término da conversão do dólar americano por ouro.

²¹ Método de avaliação de opções que permite determinar o seu preço.

²² O objetivo do *RiskMetrics* é o de promover o *VaR* como um método de gestão de risco, fornecendo dados gratuitos para a computação do risco de mercado.

²³ Quando é calculado, obtêm-se resultados positivos que denotam perdas, logo, o sinal de menos é utilizado de forma a salientar que o valor do *VaR* é negativo.

Gustafsson & Lundberg (2009) afirmam que o cálculo do *VaR* consiste em três parâmetros, o nível de confiança, horizonte temporal e um montante. O nível de confiança determina com que confiança a medição é feita e níveis de confiança elevados implicam maiores valores de *VaR* e como tal, perdas superiores. O horizonte temporal corresponde ao período de tempo escolhido, para o qual determinado resultado tem significância, que, quanto maior for, maiores perdas se poderão esperar. Relativamente ao montante, corresponde à quantia arriscada tendo em consideração os anteriores parâmetros.

A principal vantagem de usar o *VaR*, conforme *De La Rocque (1997)*, é a da possibilidade de integrar, num único número, o risco total da carteira de activos em análise, agregando no cálculo todos os ativos e passivos. Esta pode ser uma ferramenta útil, através da qual os gestores de risco podem avaliar se os riscos que estão a assumir são os que desejam, precisam ou pensam que estão a assumir. No entanto, tal como todas as medidas de risco, o *VaR* apresenta algumas limitações. A primeira crítica, deve-se ao facto de serem necessários modelos que tenham em consideração a distribuição dos retornos, que caso se prove incorrecta, poderá conduzir a cálculos incorrectos de *VaR*. Em segundo, determinados problemas podem ser causados por uma rigidez na fixação de limites para o *VaR*, uma vez que limites inflexíveis podem levar a perdas ainda maiores do que as previstas já que esta depende do período temporal dos dados, e como tal, se a amostra tiver sido gerada durante um período relativamente calmo, o *VaR* obtido será menor e, por conseguinte, poderá subestimar a exposição ao risco, bem como a relação contrária, levando à reserva de capital regulatório desnecessário. Ainda neste tópico, autores consideram que o *VaR* apenas considera períodos temporais de curto prazo, enquanto qualquer organização está exposta a riscos durante períodos de tempo alargados. Esta medida foca-se ainda apenas no risco de mercado, podendo abrir portas à exposição a outro tipo de riscos. *Simons (2000)* chama a atenção para o facto desta se basear em volatilidades e correlações que podem funcionar em condições normais de mercado, mas que perdem a eficácia em épocas atípicas. Por último, o *VaR* não preenche a sub-propriedade de subaditividade, sendo então uma medida não coerente²⁴, podendo assim não ter em conta efeitos de diversificação²⁵, e é uma medida insensível nas caudas, uma vez nada refere sobre o tamanho da perda nos restantes $\alpha \cdot 100\%$ dos casos.

2.5. Expected Shortfall

Dadas as limitações apresentadas no capítulo anterior, o conceito de *Expected Shortfall* foi proposto para contornar algumas desvantagens apresentadas pelo *VaR*, dada a sua incapacidade em distinguir carteiras que incorporam diferentes níveis de risco na cauda, nomeadamente nos $\alpha \cdot 100\%$ piores casos. Assim, em vez de se pensar sobre a perda mínima que pode ocorrer nos piores casos descritos, pode passar a ter-se em atenção, à perda esperada nesses infelizes casos: o *Expected Shortfall* corresponde à esperança condicional da perda do *portfolio* para os $\alpha \cdot 100\%$ piores casos e responde à principal questão, de qual é a perda esperada quando estas excedem o *VaR*, interpretado como uma média de perdas na cauda:

$$E[\Delta V | \Delta V \leq -VaR(r_t)] = \frac{\int_{-\infty}^{-VaR} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{-VaR} f(x)dx}, \quad (2.5)$$

onde o denominador oferece a probabilidade denotada em (2.4), dada por α , e os restantes parâmetros com o mesmo significado que foi referido na anterior. Esta estatística, para certas distribuições, não oferece os melhores resultados, proporcionando-se assim a seguinte equação, colmatando a anterior dificuldade:

$$(2.6)$$

²⁴ Noção abordada no capítulo 2.6.

²⁵ Diversificação consiste em incluir activos mais e menos líquidos, com maior e menor nível de risco e rendibilidade, e de vários mercados, de forma a reduzir o risco geral da carteira de perdas provocadas por uma rendibilidade baixa de um único activo.

$$ES(r_t) = \frac{1}{1-\alpha} \left(E(r_t; r_t \geq q_\alpha) + q_\alpha(1 - \alpha - P(r_t \geq q_\alpha)) \right),$$

onde q_α representa o α -quantil e F_{r_t} a função distribuição de r_t .

Esta medida, ao invés de assumir condições normais futuras, como acontece com o *VaR*, assume a possibilidade de condições adversas. Por último, apesar de ser uma medida coerente de risco, não é eliciável²⁶, pelo que, pode torná-la uma medida de difícil utilização.

2.6. Comparação de *Value-at-Risk* e *Expected Shortfall*

Nesta secção, irão ser apresentados os principais conceitos para a aceitação de uma medida de risco, não só para clarificar algumas características e aspectos anteriormente referidos, mas também de forma a tornar perceptíveis alguns resultados futuramente obtidos e presentes no capítulo 4. Desta forma, irá ter-se em atenção os conceitos de coerência e eliciável. Entre outras propriedades que uma medida de risco deverá cumprir, não sendo o seu incumprimento um obstáculo à aprovação da definição, estão presentes a convexidade, lei da invariância e a robustez, que não irão ser apresentados.

Considerando a definição de medida de risco encontrada no capítulo 2.3, esta é coerente se os seguintes axiomas forem satisfeitos:

- | | |
|-----------------------------|---|
| I. Subaditividade: | $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2), X_1, X_2 \in \chi$ |
| II. Homogeneidade Positiva: | $\rho(\tau \cdot X) = \tau \cdot \rho(X), \tau > 0 \text{ e } X \in \chi$ |
| III. Translação Invariante: | $\rho(X + m) = \rho(X) + m, m \in \mathbb{R} \text{ e } X \in \chi$ |
| IV. Monotonicidade: | $\rho(X_1) \geq \rho(X_2), X_1 \geq X_2 \text{ e } X_1, X_2 \in \chi$ |

Embora o *VaR* cumpra os três últimos axiomas, o primeiro é o que traz mais conflitos, uma vez que quando se agregam duas carteiras, esta medida poderá sobrestimar o risco e como tal conduzir a alocações de determinado montante de capital não necessário e consequentemente reduzir a liquidez da instituição. Desta forma, conclui-se que esta medida não é coerente, conduzindo assim a alguns cuidados quando é utilizada. Devido a esta conclusão, muitos autores acreditam que o *ES* é um excelente substituto à primeira medida, não só por cumprir esta propriedade, mas também porque oferece previsões mais confiáveis.

Uma medida de risco é eliciável se é possível realizar uma validação e comparação do seu desempenho. Para tal, cada procedimento de previsão irá ser avaliado com base em funções de pontuação, dadas por:

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(x_i, y_i), \quad (2.7)$$

com x_i a representar os pontos de previsão, y_i as realizações correspondentes e S a função pontuação²⁷ em questão.

Segundo *Roccioletti & Osmundsen* (2016), o *ES* não cumpre certos níveis de convexidade, e como é de difícil utilização, não existe muita informação sobre a avaliação da previsão através desta medida, concluindo que esta medida não é eliciável. Relativamente ao *VaR*, considera-se uma propriedade verificada uma vez que, as funções de pontuação são consistentes para os quantis e como tal, consistentes para o *VaR*. Relativamente ao *backtesting*, existem interpretações contraditórias por parte de diversos autores quanto à dificuldade do processo, quando a consideram uma propriedade fundamental para tal.

²⁶ Noção abordada no capítulo 2.6.

²⁷ Existem diversas formas de representar a função S , sendo as mais conhecidas, o *Squared Error*, *Absolute Error*, *Absolute Percentage Error* e a *Relative Error*. Para mais informação, consultar *Roccioletti, S.* (2015). *Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall*. Vienna, Austria: Springer Gabler.

2.7. Métodos para Estimar o Value-at-Risk e o Expected Shortfall

De entre as várias metodologias para estimar a distribuição das perdas de um *portfolio* (neste caso, de cada uma das duas séries envolvidas), a mais comum consiste no recurso aos métodos paramétricos e não-paramétricos. Substancialmente, o primeiro, assume que as taxas de rentabilidade seguem uma determinada distribuição paramétrica, estando a mensuração condicionada à estimação dos respectivos parâmetros da distribuição definida e já conhecida, enquanto o segundo método, se baseia em simulações, e como tal, pode não representar uma boa distribuição teórica para as possibilidades dos retornos.

Através da abordagem não paramétrica, não são exigidas formulações de hipóteses sobre distribuições estatísticas nem proceder a qualquer estimação, pois, os próprios dados determinam a distribuição de probabilidade das variáveis utilizadas, sendo as mais conhecidas denominadas por Simulação de *Monte Carlo* e a Simulação Histórica. Esta metodologia apresenta a vantagem de ser conceptualmente simples, fácil de implementar e de não depender de nenhum pressuposto. No entanto, a sua maior desvantagem, deve-se ao facto de não capturar a dinâmica da volatilidade e consequentemente, conduzir a violações de *clustering* (*Christoffersen et al.*, 1998), bem como o facto de igualar os pesos de todas as observações passadas, considerando que o passado representa o futuro imediato, ou seja, o risco poderá ser subestimado.

Por conseguinte, nesta dissertação, para além de modelos econométricos, que capturem a dinâmica da volatilidade, baseados no desvio-padrão ou média não constante, sendo estes examinados no final deste capítulo, será apenas considerada a abordagem paramétrica, pois o objectivo passa por comparar a *performance* também das distribuições²⁸.

2.7.1. Abordagem Paramétrica

Nesta secção vão ser aprofundadas as distribuições que vão ser utilizadas ao longo do projecto, uma vez que vão estar associadas aos modelos econométricos posteriormente investigados. A escolha das mesmas, deveu-se ao facto de cada uma delas, ser capaz de deslindar os problemas comuns associados aos retornos das séries financeiras, para além de revisarem contrariedades entre si, podendo assim esperar-se resultados convenientes com a sua utilização.

Distribuição Normal. A distribuição Normal é a designação mais popular para a distribuição dos retornos. Esta assumpção, sobretudo falha, pelo facto de apenas ser caracterizada pelos dois primeiros momentos, a média e o desvio-padrão. A função densidade de probabilidade associada a esta distribuição é expressa por:

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.8)$$

com $\mu \in (-\infty, +\infty)$ a representar o valor médio, $\sigma > 0$ o desvio-padrão populacional e $x \in (-\infty, +\infty)$.

Muitos modelos continuam a ser implementados segundo esta distribuição mas, uma vez que os dados financeiros geralmente exibem assimetria positiva e leptocurtose como não-linearidades, podem conduzir a possíveis enviesamentos (*Angelidis et al.*, 2004). A utilização desta distribuição, simétrica, permite a obtenção de qualquer valor, aumentando assim a probabilidade de incorrer em perdas desmedidas, e maiores do que o próprio investimento, subestimando o risco.

Distribuição *t-Student*. Esta distribuição pode acomodar um terceiro momento, isto é, o excesso de curtose na média e no desvio-padrão. A função densidade de probabilidade associada é representada por:

²⁸ Os resultados do teste de *BDS* – presentes em 4.1 – embora sejam uma condição necessária, mas não suficiente para determinar e suspeitar o tipo de abordagem que se deve utilizar, indicarão, também, como direcção, a não utilização da abordagem não-paramétrica.

$$f(x|v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}, \quad (2.9)$$

com $x \in (-\infty, +\infty)$, $v \geq 1$ e $\Gamma(\cdot)$ a representar a função Gama definida por $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} z^{x-1} e^{-z} dz$. Se o número de graus de liberdade, v , indicador da espessura da cauda, for demasiado elevado, a distribuição *t-Student* generaliza-se na distribuição Normal, mas quando v é finito, esta distribuição apresenta caudas mais pesadas do que a anterior, possibilitando a utilização de valores mais extremos, contabilizando assim os fulcrais excessos de curtose e assimetria. No entanto, embora se considere uma distribuição sensata, quando comparada com a Normal, *Valle & Azzalini (2013)*, considera-a insuficiente, na medida em que contabiliza apenas um parâmetro para regular a forma da densidade da distribuição.

Variados autores têm enfatizado que esta distribuição pode capturar melhor características dos retornos em séries temporais, em termos de curtose, contudo, visto que é definida por um único parâmetro, pode tornar-se uma desvantagem.

Distribuição Generalizada do Erro (*Generalized Error Distribution, GED*). A escolha desta distribuição é dada novamente pela inabilidade dos processos *GARCH* Gaussianos em levar em conta a leptocurtose da maioria das séries de retorno, cuja função densidade de probabilidade é dada por (2.10). É uma distribuição simétrica pertencente à família exponencial, e oferece melhores resultados que a *t-Student*, por ser caracterizada por três parâmetros e não por um como acontecia anteriormente.

$$f(x|\mu, \sigma^2, v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{\frac{1}{v}}}}{2^v \sigma \Gamma(v+1)}, \quad (2.10)$$

com $x \in (-\infty, +\infty)$, a função é definida por três parâmetros: $\mu \in (-\infty, +\infty)$, parâmetro de localização da distribuição, $\sigma \in (0, +\infty)$, referente à dispersão da mesma e $v \in (0, +\infty)$, o *shape parameter*, que controla a assimetria existente e Γ é a função *Gamma*.

Esta distribuição melhora a distribuição Normal, devido às suas caudas mais leves ($K_G < 2$) ou mais pesadas ($K_G > 2$), simbolizando a própria distribuição quando $K_G = 2$, com esta variável a denominar a curtose desta própria distribuição. Comparativamente à primeira distribuição, já foi feita a comparação, quanto à *t-Student*, dado que esta é descrita por três parâmetros, pode capturar melhor as propriedades referidas.

2.7.2. Métodos Econométricos

Os modelos tradicionais constam de estruturas lineares, impedindo-os de explicar algumas das propriedades importantes dos dados financeiros. Uma forma simples de introduzir modelos não-lineares consiste em apresentar a não-linearidade através dos momentos condicionais. Desta forma, para estimar as medidas de risco é necessário proceder à caracterização das propriedades estatísticas das séries dos retornos, no que diz respeito ao valor médio e à variância populacional, que vão determinar o retorno esperado e a previsão da volatilidade dos períodos seguintes, respectivamente. Para tal, serão apresentadas nas secções seguintes, diferentes metodologias de forma a estimar ambos os parâmetros, uma vez que existem assim modelos não-lineares que consideram a média condicional (variância) constante ao longo do tempo e a variância (média) alternada, sendo assim preciso dar-lhes ênfase.

Para estimar o valor dos parâmetros nos modelos econométricos não-lineares estocásticos, utilizados nesta dissertação, recorrer-se-á ao método da máxima verosimilhança (MMV). Para iniciar este novo método, deve ter-se em mente os modelos que se pretendem utilizar, bem como os parâmetros que estes exigem que sejam estimados, uma vez que este método encontrará estes valores máximos que melhor se ajustam aos dados, denominados por *Maximum Likelihood Estimations (MLE)*, isto é, avaliando a probabilidade de os parâmetros tomarem determinados valores a partir de uma gama de dados, a partir das funções densidade anteriores. No entanto, tendo em consideração que este tema funciona como base da estatística e que estas funções são facilmente

aplicáveis nos *softwares* utilizados, não se irá proceder ao realce das mesmas nesta dissertação. Irão ser encontradas pelo *EViews* para os modelos de regime simples, e no *MATLAB* para os modelos de *regime switching*.

A análise dos parâmetros servirá de pilar para as restantes abordagens, uma vez que, tal como se verá nas próximas secções, por vezes deverão cumprir certas propriedades, para além de oferecerem certas informações para uma melhor compreensão das características dos modelos, e também sobre a direcção que os resultados de previsão vir a tomar, devendo ser, portanto, sempre analisada.

2.7.2.1. Modelos não-lineares no desvio-padrão da distribuição

Partindo do pressuposto de que muitas séries temporais financeiras possuem volatilidade que varia no decorrer do tempo, certos modelos econométricos não são capazes de explicar a variabilidade da mesma, devido ao facto de, normalmente, tratá-la como constante. A principal fonte de preocupação dos gestores de risco, foi motivada, exactamente devido a esta percepção, motivando assim o desenvolvimento de diversos modelos que, de facto, efectuem adequadas previsões de volatilidade. Foram assim propostos, na literatura, métodos capazes de modelar uma volatilidade que evolui ao longo do tempo, denotada por variância condicional. Este termo surge a partir do momento em que esta estatística irá estar condicionada ao conjunto de informações disponíveis. Desta maneira, assume-se a variância não-condicional como invariante, ao passo que a volatilidade condicional - estocástica - será modelada como uma variável aleatória.

A volatilidade de uma carteira de activos, não é constante, evidenciando frequentemente, os tais *clusters*, existindo períodos de maior e menor volatilidade e, conseqüentemente, de maior e menor risco, demonstrando assim que a volatilidade das rendibilidades dos activos financeiros varia com o tempo e que existe uma relação directa entre o *VaR* e a volatilidade.

Assim, de entre a família de modelos não-lineares possíveis para modelar a volatilidade condicional, nas próximas secções, serão apresentados os modelos mais usuais para tal, o *GARCH*, *EGARCH* e *GJR*, que vão ser combinados com cada uma das distribuições antes citadas. Estes foram escolhidos também pelo facto de cada um se ter desenvolvido a partir de outro, para corrigir eventuais lacunas.

Enfatiza-se por último o facto de que os seguintes modelos, serão apresentados unicamente pela sua equação da variância, sendo, no entanto, essencial à sua execução, também a equação da média, sendo esta criada com base em modelos *ARMA*, com o objectivo de remover qualquer tipo de dependência linear.

Em termos matemáticos, o *VaR* é calculado através da soma entre a média constante das observações e a multiplicação entre $\sqrt{\sigma_t^2}$ - calculado ao longo do tempo a partir dos seguintes métodos - e o quantil de cada uma das anteriores distribuições. O cálculo do *ES* altera-se segundo cada distribuição calculada, já que, depende em primeiro do cálculo do *VaR*.

2.7.2.1.1. Modelo *GARCH*

No modelo *ARMA*, assume-se que a volatilidade é constante ao longo do tempo, surgindo então como um aperfeiçoamento, o modelo *ARCH(q)* (*Autoregressive Conditionally Heteroskedastic*, Engle, 1982), vantajoso por modelar mudanças na variância dos erros, utilizado assim para descrever períodos de instabilidade, intercalados com períodos de relativa estabilidade, considerando a variância condicional como função de *q lags* dos erros quadrados passados:

$$\sigma_t^2 = \theta_0 + \sum_{i=1,q} \theta_i \varepsilon_{t-i}^2 + v_t, \quad (2.11)$$

com σ_t^2 a variância condicionada em *t*, θ_0 a constante, θ_i parâmetros reais, correspondentes à constante multiplicadora do termo de desfasagem *i*, ε_t os erros observados no tempo *t - i*, com *i* a denotar a desfasagem, seguindo uma distribuição Normal com média nula e v_t um Ruído Branco, normalmente distribuído com média nula.

Por conseguinte, *Bollerslev* (1986) apresentou o modelo *GARCH* (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model*) como uma extensão do modelo *ARCH*, que, ao incorporar uma componente adicional, assume que a variância condicional dos retornos depende dos seus próprios *lags*, isto é, o valor da mesma no período t , está condicionado não só, ao quadrado dos erros passados, mas também, aos seus próprios valores passados, e por conseguinte, tem capacidade em capturar o *clustering* da volatilidade dos dados. A equação da variância do modelo *GARCH*(p, q), onde p representa a ordem da componente *GARCH* e q a ordem da componente *ARCH*, é:

$$\sigma_t^2 = \theta_0 + \sum_{i=1, q} \theta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1, p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + v_t \quad (2.12)$$

onde β_j são parâmetros reais, correspondentes à constante multiplicadora do termo de desfasagem j , σ_{t-j}^2 a variância condicionada observada em $t - j$ e a denominação dos restantes parâmetros como em (2.11), sendo que θ_i mede em quanto um choque no retorno na posição actual afectará a volatilidade do retorno do dia seguinte. Trata-se de um modelo simétrico, levando à consideração de que, um impacto na volatilidade de um choque negativo é o mesmo que um impacto provocado por um choque positivo, o que nem sempre se verifica, segundo o autor. Como tal, este modelo não consegue identificar efeitos *leverage* para além de as restrições de não-negatividade, presentes em (2.13) poderem ser violadas. Essa equação revela a persistência da volatilidade, ou seja, reflecte o impacto de propagação de um choque nos retornos sobre a volatilidade ao longo do tempo: se o seu resultado for superior a 1, obtém-se não-estacionariedade em variância, onde os valores previstos da variância condicional não convergem para os seus valores não-condicionados, caso seja igual a 1, tem-se um processo *GARCH* Integrado (*IGARCH*), onde os *shocks* do passado não se dissipam, persistindo ao longo de períodos longos de tempo e caso contrário tem-se um efeito simétrico dos choques.

$$\sum_{i=1}^m \theta_i + \beta_i < 1, \text{ com } m = \max(p, q), \quad (2.13)$$

onde é obrigatória a positividade dos dois elementos anteriores na respectiva ordem e da constante.

2.7.2.1.2. Modelo *TARCH* (*GJR*)

Devido à desvantagem do modelo anterior em identificar efeitos *leverage*, foi desenvolvida uma extensão ao modelo *GARCH*, o *TARCH*(p, q), com p e q a representar as mesmas ordens de componentes que no modelo anterior, (*Threshold GARCH* segundo *Glosten, Jagannathan & Runkle* (*GJR*), 1993), na tentativa de captar esta típica característica das séries financeiras. Outra denominação será então *GJR*(p, q). Para tal, ao modelo *GARCH*, é adicionado um termo I_{t-1} , com o objectivo de modelar a assimetria existente na volatilidade de forma a concluir que uma notícia negativa implicará um maior efeito na volatilidade do que uma notícia de cariz positivo:

$$\sigma_t^2 = \theta_0 + \sum_{i=1, q} (\theta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2 I_{t-1}) + \sum_{j=1, p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + v_t, \quad (2.14)$$

onde γ_i denomina o coeficiente do anterior termo de assimetria a partir do resultado de $I_{t-1} = \begin{cases} 1, & \text{se } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$, variável *dummy*, onde estão manifestadas molestas ou aptas inovações em cada ramo, respectivamente, provocando assim, impactos divergentes na variância condicional, ou em caso de nulidade, não haverá efeito assimétrico. As primeiras, geram portanto um impacto de $\theta_i + \gamma_i$, enquanto as segundas, motivam um de θ_i . Para um efeito *leverage* de ordem i , deverá ter-se $\gamma_i > 0$, que aumentará (2.14) através de más notícias, e como restrições de não-negatividade devem ter-se θ_0, θ_i e β_j superiores ou iguais a zero e com todas as anteriores denominações relativas aos parâmetros utilizados. O coeficiente β mede a persistência dos choques nas variâncias futuras.

2.7.2.1.3. Modelo EGARCH

O modelo *Exponential GARCH*(p, q), com as anteriores ordens de componentes (*EGARCH*, *Nelson*, 1991) é outra das extensões do modelo *GARCH*, descrevendo também as diferentes respostas existentes nos retornos aos diferentes tipos de choques, mas cuja diferença se baseia na não imposição de não-negatividade dos parâmetros do modelo, uma vez que este modelo é efetuado sobre o logaritmo da volatilidade. Esta restrição garante a diferença face ao modelo *TARCH*, uma vez que essa era bastantes vezes violada e dificultava a estimação dos parâmetros.

$$\ln(\sigma_t^2) = \theta_0 + \sum_{i=1,p} \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1,q} \left(\gamma_j \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} + \alpha_j \left| \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right| \right) + \nu_t, \quad (2.15)$$

com γ_i a representar o número de pontos assimétricos a considerar: caso $\gamma < 0$, tem-se que um choque negativo implicará um aumento da volatilidade dos retornos, enquanto um valor positivo provocará o efeito contrário, e por último, caso seja nulo, simbolizará a ausência de assimetria em tal volatilidade. Os restantes parâmetros denominam-se como anteriormente. Por último, o coeficiente β indica a persistência de choques na volatilidade, segundo as interpretações já mencionadas.

2.7.2.2. Modelos não-lineares na média da distribuição

O cálculo do *VaR* sugerido por alguns autores, parte da suposição de que a distribuição condicional dos retornos é Normal, com média zero, caso clássico da distribuição Gaussiana, com μ_t constante ao longo do tempo.

Ao invés, segundo *Pemberton & Tong* (1981) existem modelos não-lineares com médias condicionais diferentes de zero, variando ao longo do tempo e conduzindo a que tenha de se estimar a média condicional dos retornos, em cada período μ_t , recorrendo a modelos *ARMA*(p, q) ou a modelos onde existe uma dependência entre regimes, denominados por *Markov Regime Switching*.

2.7.2.2.1. Modelo Markov Regime Switching

Os anteriores modelos podem apresentar dificuldades em considerar nas suas equações a ocorrência de mudanças súbitas nas séries financeiras. Dado o acontecimento de um evento relevante em larga escala, tais como guerras, atentados, crises financeiras, mudanças políticas, etc, o comportamento das séries pode mudar consideravelmente, diminuindo assim a eficácia preditiva dos anteriores modelos, levando ao pensamento de que poderá não ser só o desvio-padrão que não é constante, mas também a média poderá não o ser. Estes fenómenos, são por sua vez, conhecidos por quebras de estrutura, ou mudanças de regime/estado, e um dos modelos que melhor identifica tais alterações é o modelo *Markov Switching*, para além de tal como referido em 2.1, dadas as não-linearidades abundantes neste tipo de dados, a utilização de modelos *ARMA* não iria ser suficiente. Por sua vez, as características próprias destas séries podem dever-se precisamente à existência de tais componentes.

Enquanto pelos anteriores modelos, se entende que as mudanças ao longo da série são julgadas consoante o tipo de choque que cada um implica na volatilidade condicional, particularmente determinadas pelo coeficiente de assimetria, *Hamilton & Susmel* (1994), perceberam que as mudanças discretas no regime da série não são pautadas por eventos determinísticos, mas que a ocorrência desses “pontos de viragem” segue um comportamento estocástico não observável, governado pela lei das probabilidades. Nesse sentido, existe assim uma variável dependente, μ_t , numa série estacionária e observável, que é influenciada por uma variável aleatória não observável, S_t , que descreve o regime que estava em t , ou de outra forma, consegue descrever de forma fidedigna o comportamento da volatilidade ao longo do tempo, uma vez que não depende de eventos passados.

Este modelo reconhece saltos persistentes na volatilidade das séries, definidas como *switches*, assumindo - por simplicidade - a existência de dois estados, qualificados por elevados retornos dos activos com reduzida volatilidade e vice-versa. Ambas as disposições, são respectivamente, parentes do mercado “*bull*” e “*bear*”, sendo assim utilizados para descrever como os mercados de acções se comportam de forma geral, isto é, se se estão a valorizar ou a desvalorizar em valor. Ao mesmo tempo, como o mercado é determinado pelas atitudes dos investidores, esses termos também denotam como estes se sentem em relação ao mercado e às tendências inerentes. Um mercado “*bull*” reporta um mercado em ascensão. É tipificado por um aumento sustentado nos preços das acções de mercado. Nesses momentos, os investidores geralmente acreditam que a tendência de alta continuará no longo prazo. Normalmente, neste cenário, a economia do país é forte. Por outro lado, um mercado “*bear*” é aquele que está em declínio. Os preços das acções decrescem continuamente, resultando numa tendência de queda que os investidores acreditam que continuará, a curto prazo, o que, por sua vez, perpetua a espiral descendente e, durante este tipo de mercado, a economia abrandará.

O modelo utilizado nesta dissertação foi desenvolvido por *Klassen* (2002). O *MRS-GARCH* assume a existência de uma variável de estado que se desenvolve de acordo com uma cadeia de *Markov* de primeira ordem e que afecta a seguinte probabilidade de transição para outro regime:

$$P(S_t = j | \zeta_{t-1} = i) = p_{ij}, \quad (2.16)$$

que indica a probabilidade de transição do estado i no período $t - 1$ para o estado j no período t significando assim que S_t , variável de estado, depende unicamente dos i -ésimos estados anteriores, isto é, esta probabilidade descreve a dinâmica do regime latente²⁹. Estas probabilidades, são agrupadas na seguinte matriz:

$$P^* = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & 1-p_{22} \\ 1-p_{11} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

As probabilidades incondicionais de permanecer no estado $S_t = 1$, é dada por $\pi_1 = (1 - q)/(2 - p - q)$. O *MRS-GARCH*(1,1) é dado de forma geral por:

$$r_t | \zeta_{t-1} = \begin{cases} f(\theta_t^{(1)}), & \text{para } p_{1,t} \\ f(\theta_t^{(2)}), & \text{para } (1 - p_{1,t}) \end{cases} \quad (2.18)$$

onde $f(\cdot)$ representa cada uma das distribuições de probabilidades condicionais nos dois regimes, assumidas como distribuições Normal, *t-Student* ou GED, $\theta_t^{(i)}$ denota o vector de parâmetros no i -ésimo regime caracterizado pela distribuição, e a probabilidade *ex ante*³⁰ $p_{1,t} = P[S_t = 1 | \zeta_{t-1}]$ denota a probabilidade de permanecer no primeiro regime através de toda a informação obtida até ao período $t - 1$, encontrada na sigma-álgebra $\zeta_{t-1} = (r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-n})$. O vector de parâmetros ao longo do tempo, é decomposto em três componentes: $\theta_t^{(i)} = (\mu_t^{(i)}, \sigma_t^{2(i)}, v_t^{(i)})$, onde $\mu_t^{(i)} \equiv E(r_t | \zeta_{t-1})$ denomina a média condicional, $\sigma_t^{2(i)} \equiv \text{var}(r_t | \zeta_{t-1})$ a variância condicional e $v_t^{(i)}$ o parâmetro que determina a forma da distribuição condicional, só não aplicável na distribuição Normal, tendo em conta a sua forma.

Desta forma, o *MRS-GARCH*(1,1) consiste em quatro elementos, a média condicional, a variância condicional, o regime do processo e a distribuição condicional. Para este modelo tem-se:

$$r_t = \mu^{(i)} + v_t = \mu^{(i)} + \eta_t \sigma_t^{(i)} \quad (2.19)$$

$$\sigma_t^{2(i)} = \theta_0^{(i)} + \theta_1^{(i)} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^{(i)} \sigma_{t-1}^{2(i)}, \quad (2.20)$$

²⁹ O regime em t não é observável, ou seja, é uma variável latente que segue um processo de *Markov*.

³⁰ Termo utilizado quando os resultados de uma determinada acção, ou série de acções são previstos.

para $i = 1, 2$ os regimes, $\sigma_t^{2(i)}$ a variância condicionada em t - equivalente à equação (2.12) do modelo $GARCH(1,1)$ - η_t um processo Normal *standard* i.i.d, θ_0 , θ_1 e β_1 são denominados como nos primeiros modelos e σ_{t-1}^2 a variância condicionada observada em $t - 1$. Na equação (2.19) tem-se a média condicional e na seguinte, a variância condicional. Assim, a volatilidade condicional é gerada pelo modelo $GARCH$, e a média por (2.19).

No entanto, $\sigma_t^{2(i)}$ depende de $\sigma_{t-1}^{2(i)}$ que por sua vez depende de todos os acontecimentos passados, logo não é possível passar à estimação de tais equações. Para tal, uma forma de evitar estas dependências de estados anteriores, *Gray* (1996) sugeriu uma nova fórmula, como uma soma das potenciais variâncias condicionais esperadas sob um regime, cujos pesos foram determinados pela *ex ante* probabilidade dada em (2.16):

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{t-1}^{2(i)} = & P[S_t = 1 | \zeta_{t-1}] [\theta_0^{(1)} + \theta_1^{(1)} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^{(1)} \sigma_{t-1}^{2(1)}] + \\ & + P[S_t = 2 | \zeta_{t-1}] [\theta_0^{(2)} + \theta_1^{(2)} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^{(2)} \sigma_{t-1}^{2(2)}], \end{aligned} \quad (2.21)$$

com todos os parâmetros da mesma forma denominados e assumido que a *ex ante* probabilidade, segundo *Hamilton* (1989) é dada por:

$$\begin{aligned} P[S_t = 1 | \zeta_{t-1}] = & (1 - p_{22}) \left[\frac{f(r_{t-1}|s_{t-1}=2)(1-p_{1,t-1})}{f(r_{t-1}|s_{t-1}=1)p_{1,t-1} + f(r_{t-1}|s_{t-1}=2)(1-p_{1,t-1})} \right] + \\ & + p_{11} \left[\frac{f(r_{t-1}|s_{t-1}=1)p_{1,t-1}}{f(r_{t-1}|s_{t-1}=1)p_{1,t-1} + f(r_{t-1}|s_{t-1}=2)(1-p_{1,t-1})} \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $f(r_{t-1}|s_{t-1} = i)$ representa a densidade condicional de r_{t-1} sabendo que um determinado regime i ocorreu no período $t - 1$, para além da mesma nomenclatura para os restantes parâmetros.

O cálculo do VaR^{31} segundo este modelo é através da mesma fórmula que nos anteriores modelos, alertando apenas para o facto de que, neste caso, tanto a média, como o desvio-padrão são calculados em cada período de tempo.

2.8. Pressupostos dos Resíduos dos Parâmetros Estimados

Os erros dos parâmetros estimados³² têm de cumprir quatro pressupostos, de forma a poder validar-se o modelo utilizado para os estimar, caso contrário, será necessário proceder à sua revisão. Em primeiro, os resíduos têm de ter média nula, $E(\hat{u}_t) = 0$, em segundo tem-se a sua homocedasticidade, $var(\hat{u}_t) = \sigma^2$, seguido pela sua independência linear, $Cov(\hat{u}_i, \hat{u}_j) = 0$, para $i \neq j$ e por último a normalidade dos erros, $\hat{u}_t \sim N(0, \sigma^2)$, concluindo com a definição de Ruído Branco, caso todos os anteriores sejam verificados. Para os últimos três pressupostos, têm de ser realizados testes estatísticos, explicitados nas próximas secções, ao invés do primeiro, bastante simples de executar algebricamente.

Todas as anteriores presunções, em termos econométricos, devem ser analisadas, mas, no entanto, para o modelo ser reconhecido, apenas o segundo e terceiro têm de ser impreterivelmente concebidos. No entanto, a importância associada a estes pressupostos não será realmente respeitada neste contexto, uma vez que para além do tipo de dados de que se dispõe, recheados de inúmeras não-linearidades, tornando assim difícil a verificação de tais pressupostos, as técnicas de avaliação de volatilidade nos próximos capítulos aludidas, irão de facto estabelecer a eficácia dos resultados de previsão obtidos, pelo que se conclui que a não validação dos pressupostos, não indicará que o modelo não é aplicável ou que os resultados de previsão não são convenientes. Desta forma, esta verificação, será estudada apenas para efeitos de cultura sobre a série de que se

³¹ Dada a complexidade deste modelo, o *ES* não será estimado para tal.

³² Como se quer inferir sobre parâmetros estimados, os erros, passarão a ser chamados de resíduos, com a denominação de $\hat{\varepsilon}_t$.

usufrui e para efectuar uma comparação entre os resultados obtidos através destas duas componentes.

2.8.1. Teste de Homocedasticidade *ARCH-LM*

Para verificar o segundo pressuposto (homocedasticidade dos resíduos), utilizar-se-á o teste *ARCH-LM*. O primeiro passo para testar este tipo de efeitos, passa por correr um modelo *ARCH*, salvando os seus resíduos \hat{u}_t , de forma a construir a seguinte regressão:

$$\hat{u}_t = \theta_0 + \sum_{i=1,q} \theta_i \hat{u}_{t-i}^2 + \xi_t, \quad (2.23)$$

similiar a (2.11), trocando apenas os erros observados em $t - i$, com i denotando a defasagem, pelos erros estimados pela nova regressão e ξ_t a nova variável relativa aos próprios erros desta nova regressão, independentes e identicamente distribuídos, provenientes da distribuição Normal com média nula e mantendo as restantes denominações dos parâmetros. É necessário também obter o R^2 - definição presente em 2.9.1 - da mesma, uma vez que a estatística de teste é dada pela multiplicação da anterior com o número de observações.

A hipótese nula simples é dada por $H_0: \theta_i = 0$, para $i = 1, \dots, q$, que assumindo como verdadeira, tem uma distribuição $\chi^2(q)$, contra a hipótese alternativa de que algum dos parâmetros estimados do modelo é diferente de zero, isto é, está a testar-se a homocedasticidade contra a heterocedasticidade. Por último, caso o valor da estatística de teste seja superior ao valor crítico da distribuição χ^2 , a hipótese nula é rejeitada, concluindo-se que existem evidências de efeitos *ARCH*, isto é, a autocorrelação no quadrado dos resíduos é significativa, reflectindo *clusters* de volatilidade e constituindo uma aglomeração.

2.8.2. Teste de Correlação e Linearidade de *Brock, Dechert & Scheikman*

O foco deste teste, relativo ao quarto pressuposto, é a dimensão da correlação, com o intuito de testar padrões que ocorrem mais frequentemente do que o esperado para dados independentes na distribuição da série temporal. O percurso- m ³³ da série dos resíduos é definido como $u_t^m = (\hat{u}_t, \hat{u}_{t-1}, \dots, \hat{u}_{t-m+1})$. Para encontrar a estatística de teste, é necessário em primeiro, estimar a correlação:

$$C_{m,\hat{u}} = \frac{2}{T_m(T_m-1)} \sum_{t=1}^{T_m-1} \sum_{s=i+1}^{T_m} I(\hat{u}_t^m, \hat{u}_s^m, \hat{u}), \quad (2.24)$$

onde $T_m = T - m + 1$, com T o tamanho da amostra e m o coeficiente de mergulho (*embedding dimension*) e $I(\hat{u}_t^m, \hat{u}_s^m, \hat{u})$ a função indicatriz, que toma o valor um se uma distância de \hat{u} se verificar entre os pares de pontos $(\hat{u}_t^m, \hat{u}_s^m)$, isto é, se $|\hat{u}_t - \hat{u}_s| < \hat{u}$, para $i = 0, 1, \dots, m - 1$, e zero caso contrário. Desta forma, é possível deduzir a seguinte probabilidade:

$$C_{1,\hat{u}}^m = P(|\hat{u}_t - \hat{u}_s| < \hat{u})^m \quad (2.25)$$

Por conseguinte, a estatística de teste em questão, é dada por:

$$V_{m,\hat{u}} = \sqrt{T} \frac{C_{m,\hat{u}} - C_{1,\hat{u}}^m}{\sigma_{m,\hat{u}}}, \quad (2.26)$$

que irá convergir para a distribuição Normal *standard* há medida que T tende para infinito e onde $\sigma_{m,\hat{u}}$ representa o desvio-padrão de \hat{u} para o percurso em questão. Sob a hipótese nula de que os

³³ O percurso- m associado a \hat{u}_t^m pode ser genericamente escrito como $\hat{u}_t^m = (\hat{u}_t, \hat{u}_{t+1}, \dots, \hat{u}_{t+m-1})$. Se $m = 2$, as três primeiras histórias serão dadas por: $(\hat{u}_t, \hat{u}_{t+1})$, $(\hat{u}_{t+1}, \hat{u}_{t+2})$, $(\hat{u}_{t+2}, \hat{u}_{t+3})$.

resíduos são um Ruído Branco ou que os resíduos são independentes e identicamente distribuídos, esta vai ser rejeitada, a 5%, quando $|V_{m,\hat{v}}| > 1.96$. Por isso, a rejeição da hipótese é consistente com qualquer tipo de dependência que pode resultar de um sistema linear ou não-linear estocástico, ou de um sistema não-linear determinístico.

De entre múltiplas metodologias alusivas ao pressuposto de independência, ou exclusivamente associadas a cada tipo de não-linearidade existente, registando apenas certas especificidades, o teste de *BDS*, é distintamente o mais completo e adequado para esta análise, uma vez que se adapta às características da amostra de maneira mais efectiva, sendo deveras sensível a todas as possíveis não-linearidades do problema. Caso a hipótese em causa seja rejeitada, o desejável, torna-se necessário, recorrer a uma análise gráfica adequada e associada a este tipo de modelo, de forma a garantir a utilização do modelo *MRS*. Outro tipo de testes de não-linearidade podem ser encontrados, caso se verificasse que este modelo não era indicado, de forma a averiguar-se a natureza exacta da série e como tal, descobrir o melhor modelo a utilizar. Estes últimos testes, não serão exibidos, uma vez que o objectivo deste projecto, passa exactamente por utilizar este modelo, para além dos resultados encontrados a partir do capítulo 4.1 confirmarem essa utilização.

Por último, far-se-á este teste para os dados originais e para os respectivos retornos, para toda a amostra envolvida, de forma a garantir as conclusões que serão encontradas, uma vez que a não-rejeição em ambos os casos, garante que o modelo *MRS* não será adequado e como tal, não deve ser efectuado, pois tratar-se-á de um modelo linear, podendo assim utilizar-se um modelo *ARMA* para delinear os dados, ou caso haja discordância de resultados entre as anteriores, outros métodos pertencentes à abordagem não-paramétrica devem ser os únicos a serem tidos em consideração, ou caso contrário, o *MRS* adequar-se-á. No entanto, este teste garante a condição necessária anterior, mas não é suficiente, pelo que a indicação para qualquer tipo de abordagem, deverá apenas ser tida em consideração consoante o objectivo do projecto e grau de complexidade do mesmo e de que se queira possuir, uma vez que oferece apenas uma indicação. Como tal, apenas este pressuposto deverá ser analisado com alguma advertência, devido ao facto das suas conclusões oferecerem várias informações sobre a direcção que certos tópicos deverão tomar.

2.8.3. Teste de Normalidade de *Jarque-Bera*

No teste de *Jarque-Bera*, tem-se H_0 : Os resíduos são normalmente distribuídos, e a seguinte estatística de teste:

$$JB = \frac{S(\hat{v}_t)}{6/T} + \frac{(K(\hat{v}_t)-3)^2}{24/T}, \quad (2.27)$$

assimptoticamente $\chi^2(2)$, sob confirmação da hipótese nula, considerando T o tamanho da amostra, S o coeficiente de assimetria e K o coeficiente de curtose. Esta vai ser rejeitada, para o nível de significância usual, quando $|JB| > 3.84$.

2.9. Avaliação da Previsão da Volatilidade

A avaliação da volatilidade é a chave principal para qualquer exercício de previsão por parte de diferentes modelos, nomeadamente sobre o cálculo de medidas de risco, onde esta se torna um elemento indispensável nas suas fórmulas. Como tal, torna-se indispensável avaliar os resultados obtidos, de forma a garantir a sua boa utilização por parte de instituições financeiras. Esta avaliação, pode ser efectuada segundo a análise de estatísticas *loss functions standard* ou funções próprias de gestão de risco - *backtesting*. Ambas serão realizadas, possibilitando a obtenção de conclusões mais fidedignas através da comparação dos resultados obtidos pelas duas, com o intuito de se verificar qual o melhor modelo de previsão da volatilidade.

2.9.1. Funções Estatísticas de Perda Standard

A abordagem *in-sample* (avaliação da previsão sobre os dados da amostra), é uma métrica popular para avaliar diferentes modelos de previsão, e portanto, de volatilidade, com base nos resultados de estimação e consiste na minimização de determinadas estatísticas de perdas. No entanto, a avaliação da qualidade de diferentes modelos de volatilidade pode tornar-se difícil pois não existe um único critério capaz de seleccionar o melhor modelo. Nesta dissertação, ao invés de se escolher uma única função de perda, considerando-a como única e como o melhor critério, vão adoptar-se quatro diferentes estatísticas, de entre uma gama de funções possíveis, conduzindo a comparações mais completas dos modelos, a partir de diferentes interpretações: o *Mean Absolute Error 1* (MAE_1), o *Mean Absolute Error 2* (MAE_2), o *R2LOG* e o *Akaike Info Criterion* (AIC) que são os critérios mais comumente utilizados.

$$MAE_1 = n^{-1} \sum_{t=1}^n |\sigma_t - h_t| \quad (2.28)$$

$$MAE_2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n |\sigma_t^2 - h_t^2| \quad (2.29)$$

$$R2LOG = n^{-1} \sum_{t=1}^n [\log(\sigma_t^2 h_t^{-2})]^2 \quad (2.30)$$

$$AIC = 2k + n \log(\hat{L}) \quad (2.31)$$

Nota: Nas anteriores equações, consideram-se como variância/volatilidade tanto σ_t como h_t apesar da diferente denominação.

O *Mean Absolute Error 1*, é uma regra de pontuação quadrática que mede a magnitude média do erro, isto é, calcula a média das diferenças entre previsão (σ) e observação real (h). Em (2.29) pode encontrar-se uma equação similar à utilizada no primeiro critério, mas com ambas as variáveis elevadas ao quadrado, tornando-se assim um método menos robusto face à consideração de *outliers* que o primeiro caso.

Na equação (2.30) encontra-se um critério semelhante ao coeficiente de determinação³⁴ (R^2) segundo a métrica de regressão³⁵ de *Mincer-Zarnowitz* e consoante a versão logarítmica. *Pagan & Schwert* (1990), introduziram esta função de forma a penalizar erros de previsão em períodos de baixa volatilidade de forma mais extensa do que em períodos de alta volatilidade, considerando assim os modelos de acordo com o efeito de alavancagem.

Através do critério de AIC , não se tem mais do que uma conclusão genérica uma vez que se estima a qualidade do ajuste de cada modelo, em relação aos outros. Oferece uma estimativa da informação perdida quando um determinado modelo é usado para representar o processo que gerou os dados. É calculado a partir da formula presente em (2.31), com k a representar o número de parâmetros estimados no modelo e \hat{L} o valor máximo da função *likelihood* obtido pelo modelo - função multiplicatória das funções densidade apresentadas a partir das estimativas dos parâmetros encontradas - enquanto nas duas primeiras equações, os parâmetros têm a mesma denominação que os referidos em 2.7.2.1.

Por conseguinte, para além das anteriores, os modelos econométricos encontrados podem também ser comparados, segundo outros critérios, com a mesma finalidade que as funções de

³⁴ Medida de ajustamento de um modelo estatístico, que varia entre 0 e 1, indicando, em percentagem, o quanto o modelo consegue explicar os valores observados. Quanto maior, mais explicativo é o modelo e melhor se ajusta à amostra.

³⁵ É dada por: $\log(r_t^2) = a + b \log(\sigma_t) + u_t$, isto é, o logaritmo dos retornos quadrados correspondem à variável dependente da regressão comum e como variável independente tem-se o logaritmo das previsões de h_t obtidas. O termo a representa mais um dos termos comuns de uma regressão, a constante, e u_t os resíduos da mesma. Com esta, caso os valores de a e de b sejam diferentes de 0 e 1 respectivamente, indica-se a existência de um desvio sistemático entre a previsão obtida e o verdadeiro valor em causa, tornando-se assim uma das desvantagens deste critério.

perda, mas onde não é exigida a minimização dos resultados, estando assim incluídos a *Log Likelihood (LL)*, que para além de determinar os valores para os parâmetros de um modelo, reporta o valor da função log da verossimilhança (assumindo erros normalmente distribuídos), avaliado nos valores dos coeficientes estimados.

$$LL = -\frac{T}{2}(1 + \log(2\pi) + \log(\hat{\epsilon}' \hat{\epsilon}/T)) \quad (2.32)$$

Calculada a partir da equação (2.32), $\hat{\epsilon}$ representa assim os valores estimados dos parâmetros do modelo, assumindo para tal, que estes foram estimados a partir da distribuição Gaussiana, e considerando assim que o melhor modelo é aquele que apresentar um maior valor desta estatística, entre a análise das outras possíveis. Por último, irá ser apresentado o valor da persistência³⁶ (pers.) dos *shocks* de volatilidade, sempre bastante tidos em consideração em todo os modelos de previsão utilizados, que por sinal, não irá estar associada a nenhum *rank*.

Estas estatísticas de perda são utilizadas, em aplicações empíricas, para efectuar numa fase seguinte, o *rank* dos modelos, de forma a serem avaliados e retirarem-se conclusões, sobre quais os melhores modelos, segundo cada uma das cinco métricas anteriores. Em todo o caso, irão ser efectuados segundo o interesse desejado: com base nas *loss functions*, o melhor modelo estará associado ao menor *rank*, pois a partir destas, o interesse é o valor mínimo possível, enquanto para a *LL*, o menor *rank* estará associado ao maior valor, uma vez que o objectivo era o de maximização. Ainda assim, evidências empíricas baseadas no desempenho de previsão fora da amostra geralmente são consideradas mais confiáveis do que as baseadas num desempenho *in-sample*, que podem ser mais sensíveis a *outliers*.

2.9.2. Backtesting

O *backtesting* corresponde a uma técnica implementada para estabelecer a eficácia de resultados de previsão obtidos, isto é, determina quantas perdas actuais relatadas por uma instituição financeira excedem as previsões oferecidas pelo modelo durante um determinado horizonte temporal estipulado para a mesma, estando assim relacionado com os resultados previstos da medida de risco em causa. O *backtesting* está, desde há muito tempo, relacionado com estas duas medidas de risco, uma vez que estas podem ser estimadas com recurso a diversos modelos, testes e hipóteses, e como tal, estão bastantes expostas a alterações dos seus utilizadores, mas também porque, para que tanto o *VaR* e *ES* sejam utilizados no cálculo do capital regulamentar, estão condicionados à comprovação da sua adequação para quantificar o risco de mercado.

Desta forma, este procedimento torna-se indispensável para verificar se as estimativas obtidas pelos modelos são consistentes, comparando-as com os valores teóricos observados, de forma a verificar se o modelo é adequado a prever situações imprevisíveis. Como tal, as estimativas obtidas por este procedimento devem ser rigorosas, para se evitar uma subestimação ou sobrestimação de capital.

Muitos investigadores consideram esta metodologia como mais importante do que a análise dos resultados obtidos pela *in-sample*, uma vez que esta é baseada nas estimativas nos parâmetros obtidos, podendo assim oferecer conclusões mais vagas ou não tão fidedignas, tendo assim a capacidade de controlar possíveis sobrestimações, oferecendo uma estrutura mais potente de avaliação de *performances*. Tais técnicas, para cada medida de risco, serão em baixo especificadas e vão, portanto, permitir obter resultados que sugiram qual o modelo mais adequado para efectuar as previsões de *VaR* e *ES*, segundo a interpretação de resultados.

2.9.2.1. Backtesting Value-at-Risk

Para esta medida, diversas metodologias podem ser encontradas, nomeadamente ligadas à frequência das perdas na cauda, segundo *Kupiec* (1995) ou *Christoffersen* (1998), ligadas à mag-

³⁶ Em cada modelo, será apresentado o valor máximo de persistência obtido.

nitude dessas mesmas perdas, por *Colletaz et al.* (2011), para além dos testes estatísticos multivariados de *Portmanteau* (*Hurlin & Tokpavi*, 2006), entre outros. Tendo em conta que o teste de *Christoffersen* surgiu com o intuito de colmatar algumas lacunas do de *Kupiec* e embora cada uma destas técnicas tenha as suas vantagens e desvantagens, vão ser utilizados, os testes de *TUFF* e o de *Christoffersen*, uma vez que são considerados os testes *standard* da literatura, obtendo-se assim informação privilegiada acerca da frequência das perdas na cauda bem como a probabilidade incondicional pela qual as violações estão cobertas, para além de outras conclusões a partir do método da proporção de falhas e da análise de funções de perda adicionais. Tal como já foi referido, o *VaR* ao medir o risco de mercado de um *portfolio*, quantifica em termos monetários quais as perdas prováveis que podem existir a partir das flutuações de mercado. Desta forma, *Brooks & Persaud* (2003) sugeriram usar funções de perda baseadas no *VaR* para avaliar os tão competitivos modelos.

Teste de *TUFF*. O primeiro teste é baseado no número de observações existentes antes da primeira excepção ocorrer, isto é, obtém-se o tempo até à primeira falha (*Time Until First Failure*, *TUFF*, segundo *Kupiec*, 1995). Para este, em primeiro, constrói-se o processo de falhas, que indica o número exacto de excepções da medida a partir de determinado modelo k no tempo t :

$$I_t = \mathcal{I}_{\{r_t < VaR_t^k\}}, \quad (2.33)$$

onde $\mathcal{I}_{\{ \cdot \}}$ é, portanto, uma função indicatriz, onde r_t representa a perda observada no momento t , e *VaR* denomina a perda predicta pelo modelo no mesmo momento, tendo como finalidade contar todas as perdas actuais que excederam a perda máxima possível prevista pelo *VaR*. A hipótese nula associada a este teste é dada por $H_0: \alpha = \alpha_0 = \frac{1}{I_t}$, com α a representar a taxa de falhas sugerida como nível de significância usual, ou seja, pretende-se testar se a taxa proposta coincide com a taxa de falhas realmente obtida. Assim sendo, a estatística do mesmo, denominada por teste de *Likelihood Ratio* (*LR*) é dada da seguinte forma:

$$LR_{TUFF} = -2\ln[\alpha(1 - \alpha)^{I_t - 1}] + 2\ln[\alpha_0^{-1}(1 - \alpha_0^{-1})^{I_t - 1}], \quad (2.34)$$

com os parâmetros que já foram declarados. É assintoticamente distribuída como uma $\chi^2(1)$ sob a hipótese nula verdadeira e rejeitar-se-á a adequacidade do modelo caso (2.34) seja superior ao valor crítico da Qui-Quadrado, que a 95% e 99% apresenta um valor de 3.841 e 6.634 respectivamente.

Kupiec, no entanto, refere que este teste tem poder limitado em distinguir as hipóteses a testar, uma vez que todas as observações após a primeira falha são ignoradas, podendo assim resultar em sobrestimações de resultados. Como tal, é inaceitável contar com apenas este critério para testar a adequabilidade pois tem pouco poder em rejeitar modelos pobres.

Proporção de falhas. Segundo esta técnica, um modelo é julgado como adequado se a proporção de falhas (PF) ocorridas estiver próxima do valor nominal de 1% ou 5%, consoante se esteja a avaliar o *VaR* a 99% ou a 95%, respectivamente, isto é, a proporção vai ser comparada com o nível de esperado ou de significância e é dada por:

$$PF = \frac{\sum_{t=1}^T I_t}{(1-\alpha)T}, \quad (2.35)$$

com T a representar todas as observações e os restantes parâmetros definidos como anteriormente. Deseja-se que estes valores sejam os mais próximos possíveis, de forma a indicar que as perdas actuais são iguais às esperadas, caso contrário, tal como *Brooks & Persaud* (2003), assumir-se-á o modelo como incorrecto. Assumir-se-á como estatística de teste e interpretação de rejeição, a equação (2.36).

Teste de cobertura condicional de *Christoffersen*. *Kupiec* foi também bastante criticado pelo facto de contabilizar apenas o número de falhas e não garantir que estas possam existir nos *clusters*. Desta forma, surgiu este novo teste de *Christoffersen* (1998), que embora tenha o mesmo propósito que o primeiro autor, se tornou popular por ter desenvolvido um teste de cobertura

condicional, que tem em conta que as violações tendem a permanecer nos *clusters* se o modelo for mal especificado. Tendo como objectivo considerar as violações que possam ocorrer nos *clusters*, ao invés de assumir uma hipótese nula tão pesada, considerando que o modelo gera uma frequência correcta de violações independentes entre si, o autor decidiu dividir estas importantes hipóteses. Primeiro, estipula-se a frequência das excepções e em segundo, assumem-se independentes entre si. Como tal, para desenvolver esta ideia, criaram-se três testes.

A primeira estatística de teste apresentada, corresponde à estatística de teste cobertura incondicional de *Kupiec* (Unconditional Coverage, UC), que testa se o *VaR* é eficiente ou de forma equivalente, se exhibe a correcta cobertura incondicional $\alpha - H_0: E[I_t|F_{t-1}] = \alpha$ - onde F_{t-1} representa toda a informação existente até ao período $t - 1$, e a estatística de teste associada a este é:

$$LR_{UC} = LR_{PF} = -2\log \left[\frac{\alpha^{n_1} (1 - \alpha)^{n_0}}{\hat{p}^{n_1} (1 - \hat{p})^{n_0}} \right], \quad (2.36)$$

com n_1 a representar o número de 1's - falhas em I_t - e n_0 a denotar o número de 0's, α a representar o nível de significância e \hat{p} a taxa de falhas obtida por (2.35). Ainda assim, (2.36) apresenta a desvantagem de não considerar o momento em que ocorreram as excepções, podendo não rejeitar o modelo quando há violações agrupadas.

A estatística *LR* para o teste de independência (*Independence, Ind*), é dada por (2.37) e o objectivo passa por testar se o processo de falhas é independentemente distribuído - as violações não ocorrem nos *clusters* - isto é, $H_0: I_t$ e I_s são distribuídos de forma independente para $t \neq s$. Este teste, corrige o problema relacionado com os *clusters*.

$$LR_{ind} = -2\ln\{(1 - \hat{p})^{n_{00}+n_{10}} \hat{p}^{n_{01}+n_{11}}\} + 2\ln\{(1 - \pi_0)^{n_{00}} \pi_0^{n_{01}} (1 - \pi_1)^{n_{10}} \pi_1^{n_{11}}\}, \quad (2.37)$$

onde n_{ij} representa o número de observações que ocorreram num estado i , num certo dia, enquanto no dia anterior esteve no estado j com:

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}} \text{ e } \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}} \quad (2.38)$$

De outra forma, o objectivo do anterior teste, passa por descobrir se $H_0: n_{01} = n_{11}$, pois se o modelo for preciso, uma excepção de *VaR* hoje não deve depender do facto de ontem ter ocorrido ou não também. Este teste não mede todo o tipo de dependência, mas sim apenas se ocorre entre duas excepções. Finalmente, combinando estes dois testes, obtém-se uma estatística de teste de cobertura incondicional e independência, denominado por estatística de teste de cobertura condicional (*Conditional Coverage, CC*), que testa a hipótese nula de que se trata de um processo de falhas independentes com uma probabilidade de falhas de α representada assim por:

$$LR_{CC} = LR_{UC} + LR_{ind} \quad (2.39)$$

Tanto o teste representado na equação (2.36), como (2.37) seguem uma distribuição Qui-Quadrado com um grau de liberdade, enquanto a representada em (2.39), segue a mesma distribuição, mas com dois graus de liberdade. Neste teste, caso a estatística esteja abaixo do valor crítico da distribuição Qui-Quadrado, o modelo não é rejeitado.

Finalizando, através desta estrutura, é permitido verificar a apropriação do modelo, uma vez que se podem identificar as razões pelas quais o modelo poderá não ser apto. Se pela cobertura imprecisa, através do teste de cobertura incondicional de *Kupiec*, que caso o valor da estatística de teste presente em (2.36) seja superior ao valor crítico da Qui-Quadrado, leva à rejeição da hipótese nula e, portanto, que o modelo é incorrecto. Nesse caso, conclui-se que existe uma grande discrepância entre a taxa de falha prevista e a teórica. Ao invés, o modelo pode não ser conveniente por não reconhecer que futuras excepções não dependem das passadas. Caso o valor obtido

pela equação (2.37) seja superior ao valor da Qui-Quadrado, o modelo pode ser admitido como incorrecto, assumindo assim que é muito possível obter duas excedências consecutivas devido ao tal não reconhecimento. Por último, a estatística de teste presente em (2.39), torna-se bastante completa, na medida em que permite testar os dois factos anteriormente referidos simultaneamente e determinar se o modelo é de facto adequado. Se um modelo passar com sucesso estes três testes, é considerado adequado para os propósitos de gestão de risco.

Funções de perda adicionais. Seguir-se-á o pensamento de *Sarma et al. (2003)*, que através de uma avaliação adicional dos modelos concorrentes, se vai verificar através de funções de perda quais as que estão mais próximas das funções de utilidade reais dos gestores de risco. *Lopez's (1999)* propuseram uma função de perda reguladora (*Regulator Loss Function, RLF*) dada por $l_t^1 = (r_t - VaR_t^k)^2 \mathfrak{I}_{\{r_t < VaR_t^k\}}$ - penaliza apenas os excedentes do *VaR* em relação à magnitude da falha, que ao utilizar o termo quadrático, obriga a uma maior penalização das falhas mais largas - e uma função de perda da empresa (*Firm Loss Function, FLF*), uma vez que para uma empresa, existe um conflito entre a meta de segurança e a de maximização do lucro (*Sarma et al. 2003*), logo esta função terá a penalização quadrática de violação semelhante à de *RLF*, mas, como para a empresa os valores de *VaR* são "muito altos", a detenção de capital excessivo na memória reguladora impõe o custo de oportunidade do capital, logo esta é dada por $l_t^2 = (r_t - VaR_t^k)^2 \mathfrak{I}_{\{r_t < VaR_t^k\}} - \delta VaR_t^k \mathfrak{I}_{\{r_t > VaR_t^k\}}$, onde \mathfrak{I} representa a função indicatriz usual, δ o custo de oportunidade do capital³⁷, e os restantes parâmetros de acordo com as anteriores denominações. Para a análise destas, quanto menores, melhores resultados oferecem e, portanto, mais adequado será o modelo de previsão. Para os modelos que conduzissem à rejeição ou do teste de *UC* ou do *Ind*, obrigava a que a avaliação segundo este critério devesse parar. No entanto, quando se realizarem os resultados empíricos, a comparação vai ser continuada de forma a retirarem-se resultados mais completos e utilizando então o *RLF* e o *FLF* independentemente da conclusão anterior.

2.9.2.2. Backtesting Expected Shortfall

De acordo com *Wong (2008)*, o *Expected Shortfall* não é considerado no Comité de Basileia, porque as suas metodologias de *backtest* são significativamente mais difíceis do que as utilizadas para o *VaR*. A falha relativa ao cumprimento da propriedade de eliciável, faz com que exista algum cepticismo quanto à possibilidade de *backtesting* desta medida. No entanto, alguns autores questionaram-se sobre a necessidade desta propriedade, uma vez que para realizar o *backtesting* do *VaR*, nunca tinha sido tida em consideração. *Righi & Ceretta (2013)*, consideraram incorrecto admitir todas as observações da amostra para realizar um procedimento de *backtest* para esta medida, e não apenas aquelas em que ocorreram excepções, uma vez que o *ES* se concentra apenas nos retornos que representam uma perda maior do que o *VaR*, tal como indica a definição. Posto isto, embora se possam encontrar escassos métodos para realizar a avaliação das previsões desta medida, dadas as complexidades encontradas, a avaliação desta será apenas baseada numa análise gráfica³⁸ e sugestiva, entre as verdadeiras rendibilidades e a medida prevista, de forma a verificar se esta consegue cobrir a maioria das perdas reais.

³⁷ Assumir-se-á um custo de oportunidade do capital, uma vez esta pode ser adicionada à taxa de juro sem risco, e como tal, será de 1.5%.

³⁸ Estes foram baseados no livro escrito pela autora *Simona Rocciolletti*. Para mais informação, consultar *Rocciolletti, S. (2015). Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall*. Vienna, Austria: Springer Gabler.

3. Dados

Contextualização. Um índice bolsista é um valor que traduz a tendência geral de um determinado conjunto de títulos, reflectindo assim a situação corrente nalgum sector de mercado. Através de vários índices pode proceder-se a uma avaliação comparativa do desenvolvimento de diversos sectores da economia. Existem vários métodos para calcular índices, onde os principais, se debruçam sobre métodos de ponderação de custos ou de número de títulos ou ainda através da capitalização de mercado. No primeiro o preço de cada acção do título é o que é considerado no valor do índice, pelo que o peso de cada uma no índice é proporcional ao seu preço. Relativamente à segunda o peso de cada acção no índice é ponderado pelo valor total de mercado das suas acções, o que introduz a dimensão da empresa como factor relevante, enquanto pela terceira a ponderação do preço dos títulos é feita relativamente ao seu número em vez de ser em relação ao seu valor.

O *DAX30 (Deutscher Aktien Index)* consiste nas 30 maiores empresas alemãs negociadas na bolsa de valores de *Frankfurt* e representam 75% do valor total da bolsa de valores da cidade. A Alemanha possui a maior economia da Europa, o que torna o *DAX* um índice muito influente. Este é calculado pelo método de ponderação de custos, isto é, pelo primeiro método apresentado, que como tal, consiste numa média ponderada do valor dos preços das acções das 30 maiores sociedades da economia alemã.

O *PSI20 (Portuguese Stock Index)* é um indicador da evolução do mercado de acções em Portugal e reflecte a evolução dos preços das 20 acções emitidas com maior dimensão e liquidez seleccionadas num conjunto das empresas cotadas na *Euronext Lisboa*³⁹. Este é calculado através do segundo método, baseando-se no facto de que a capitalização bolsista das emissões que o compõe são ajustadas pelo *Free Float*⁴⁰, não podendo ter uma ponderação superior a 20% nas datas de revisão periódica da carteira.

Amostra. As amostras utilizadas para a realização deste projecto, correspondem aos períodos compreendidos entre 01/01/1993 e 31/01/2017, prefazendo praticamente 24 anos, constituído por dados diários reais, em dólares, dos índices *DAX30* e *PSI20*, obtendo-se no total, 6283 observações, sem contabilizar fins-de-semana. A base de dados foi recolhida do *Datastream*⁴¹.

A escolha destes dois índices deveu-se aos diferentes níveis de desenvolvimento dos dois países em causa, uma vez que o fraco desempenho da economia portuguesa tem sido um tema bastante explorado devido à crise financeira que teve início no final de 2007, comparativamente às características e comportamentos provenientes do *DAX30*, que se tem vindo a notabilizar.

Abordagem. A abordagem comumente utilizada quando se testam modelos estatísticos é baseada, de forma genérica, pela divisão da amostra. Para tal, dividir-se-ão os dados em duas partes, de forma a obter-se uma amostra para estimação, composta pelas *N* observações iniciais, *in-sample*, e outra para predição, *out-of-sample* a partir do método *Rolling Window*, com as restantes observações, com o intuito de que os parâmetros desconhecidos dos modelos utilizados, sejam estimados usando a primeira vertente, e através da segunda, passar-se à previsão de valores de *VaR* e *ES*. A *Rolling Window* vai produzir uma sequência de previsões através da amostra *out*, a partir de um número fixo de dados recentes. Uma questão relacionada com esta, consiste na dimensão da janela temporal utilizada para tal, baseada em experiência passada. Assim, vão ser utilizados os tamanhos⁴² de um dia, uma e duas semanas e um mês como horizonte temporal para a implementação destes ciclos: com toda a amostra *out* considerada, estimam-se os parâmetros necessários ao cálculo da medida, prevendo-se assim um valor da mesma. Para a seguinte iteração, trocar-se-á esse primeiro elemento encontrado, pela inicial da janela temporal envolvida. Torna-se assim possível prever um segundo valor da medida, através do novo cálculo das estatísticas envolvidas nas fórmulas. Este processo vai sendo repetido por ordem de valores da janela *Rolling* até se alcançarem todas as previsões desejadas. As estatísticas implícitas na fórmula de

³⁹ A *Euronext Lisboa* é a bolsa de valores de Lisboa, fundada em 1769, e tem como principal função, oferecer às entidades emitentes e aos aforradores a possibilidade de conciliarem os seus interesses, de forma segura e transparente, conferindo uma acrescida liquidez aos valores mobiliários nelas transaccionados.

⁴⁰ Refere-se às acções que uma empresa destina à livre negociação no mercado.

⁴¹ Plataforma de pesquisa que permite uma análise sofisticada numa variedade de instrumentos financeiros. Disponível no Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa, Lisboa (Portugal).

⁴² Apenas se consideram dias úteis.

cada medida vão sendo, portanto, actualizadas a cada nova estimação, e de acordo com o que cada modelo estimar e as suas regras de cálculo para tal.

Desta forma, vão ser utilizadas 112 observações para se efectuar a predição, e as restantes⁴³, para a estimação, estando assim em concordância com os programas que o autor, *Juri Marcucci*⁴⁴ desenvolveu no *software MATLAB*, apto a oferecer resultados de estimação e previsão, sobretudo no modelo *MRS* e sobre as importantes medidas de risco mencionadas.

Software. Relativamente aos *softwares*, inicialmente os dados extraídos foram armazenados no *Excel*. Posteriormente utilizou-se o *EViews* para efectuar a análise inicial, de estacionariedade e descritiva das séries, bem como, ir ao encontro do modelo adequado para ajustar o *PSI20* e *DAX30* pela verificação dos pressupostos dos resíduos, e o *software MATLAB* para realizar a estimação de parâmetros e previsão de risco pelos modelos, pelas abordagens *in* e *out-of-sample*.

Análise. O comportamento dos índices ao longo dos últimos 24 anos, consoante os respectivos valores de dólares, está descrito abaixo, na Figura 3.1.

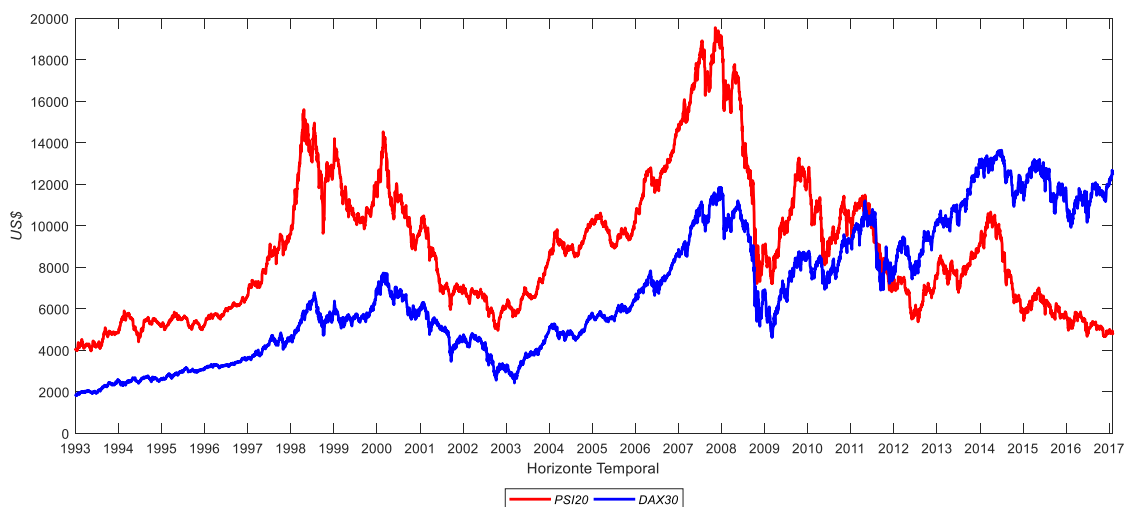


Figura 3.1. Comportamento do *DAX30* e *PSI20* ao longo de 24 anos.

Análise Histórica. Através da análise da Figura 3.1 é evidenciada uma conduta similarmente proporcional, mas avantajada no caso português na maioria dos anos, excepto a partir do final do ano de 2008, onde as séries começaram a apresentar cruzamentos entre si, bem como quedas significativas e valores análogos, e onde a partir do final de 2011 as impressões se invertem, tornando-se promissoras ao *DAX30*. Estas datas, estão relacionadas com uma trágica crise financeira, e como tal, faz sentido analisar os períodos anteriores, posteriores e durante a mesma.

Se forem comparados os períodos anteriores (1993 - 2008) e posteriores (2009 - 2017) à crise de dimensão global de 2008, claramente se compreende a importante queda no patamar de expansão da economia portuguesa e alemã. No período pré-crise, as economias apresentavam avanços e reduções de forma regular, sem nenhuma característica extraordinária, ao passo que no período posterior à crise, o panorama, se alterou drasticamente, passando a ser caracterizado por elevadas reduções e irregularidades da moeda ao longo dos anos. A crise financeira manifestada na abertura do ano de 2007, atingiu o ponto crítico a 15 de Setembro de 2008, com o colapso do banco de investimento *Lehman Brothers*⁴⁵. Este desequilíbrio, teve um impacto tremendo sobre a confiança dos mercados financeiros, conduzindo a repercussões graves sentidas em todo o mundo, essenci-

⁴³ A abordagem *out-of-sample*, corresponde a 112 retornos, devido ao facto de o programa utilizado apenas conseguir prever 111 valores, mais concretamente entre 29/08/2016 e 31/01/2017. A *in-sample*, corresponde às 6171 observações, portanto entre 01/01/1993 e 28/08/2016. Convenção utilizada: dd/mm/yy.

⁴⁴ Mais informação consultar, Marcucci, J. (2005), *Forecasting Stock Market Volatility with Regime-Switching GARCH Models*. Vol. 9 (4), Article 6, pages 1 - 55. Disponível em:

<https://sites.google.com/site/jurimarcucci/publications/hints-for-MRSGARCH-program>. Os programas funcionarão através do *MATLAB* 2008a. São fornecidos, tanto os programas desenvolvidos pelo autor, como o seu artigo na íntegra.

⁴⁵ Banco de investimento e provedor de outros serviços financeiros a nível global, sediado em Nova Iorque.

almente na Europa, através do efeito dominó. Este episódio justifica as abruptas quedas, em ambos os índices por volta dessa data, e de uma forma mais acentuada no índice bolsista de Portugal, uma vez que o *DAX30* é descrito por um comportamento mais monótono e menos intenso.

Desde 2009, constata-se sobretudo um desigual comportamento das duas séries, face ao proporcional anteriormente referido, na medida em que, passaram a ter comportamentos inesperados e com menores variações entre elas, fazendo com que em meados de 2011, o *DAX30* passasse a ser o distinto entre os dois. Tal, deve-se ao facto de que a partir do final de 2009, de forma a acorrer os países mais afectados pelo problema americano, através de esforços e operações lançadas por alguns governos, com auxílio e ajuda financeira internacional, a crise de dívida pública tenha sido instaurada, como resultado do aumento dos níveis de endividamento do governo e entidades privadas em alguns estados europeus, uma vez que alguns países se viram incapazes ou envolvidos em dificuldades, em pagar a sua dívida pública sem a ajuda de terceiros.

Como um dos países mais duradouramente afectados por esta crise foi Portugal, em 2011, o país foi obrigado a pedir auxílio, e tal situação de abalo, defende o motivo pelo qual o *PSI20* obteve um menor desempenho desde essa data, suscitando então o melhor desempenho do índice alemão. No que tange a Alemanha, o país considerou-se apenas marginalmente afectado, devido à recessão global que se seguiu em 2009 no país, levando ao colapso das suas exportações, confirmado pela, ainda que reduzida, quebra do *DAX30* em 2009. Com alguma relutância, o país juntou-se aos demais governos na adopção de políticas anti-crise, insistindo no entanto, na manutenção de programas nacionais distintos, rejeitando esforços, particularmente em relação ao resgate de instituições financeiras em crise, conduzindo a que alguns economistas passassem a considerar que a Alemanha usufruiu dos esforços de outros países para estimular a procura através de políticas monetárias e fiscais menos restritivas, argumentando o motivo pelo qual, o *PSI20* não voltou a ultrapassar o índice alemão, a partir de 2011.

Análise Econométrica. A análise da Figura 3.1, é também relevante para efectuar a análise de estacionariedade da série, de acordo com os movimentos característicos identificados na secção 2.1, havendo apenas indícios de movimentos esporádicos. A partir de 1997, a apresentação do gráfico difere significativamente de todos os anos anteriores, onde existiram nitidamente anos em relativo crescimento, e com tendência exponencial, levando à suspeita da existência de uma quebra de estrutura nesse ano.

Assimilando os variados comportamentos descritos, existe evidência para considerar ambas as séries como não-estacionárias⁴⁶. Passando à confirmação desta característica através da utilização dos testes estatísticos de raiz unitária mencionados, chega-se à conclusão de que ambas as séries não são estacionárias em nível, cumprindo apenas este conceito a partir da primeira ordem de integração, logo de facto, os índices serão considerados com base nos seus retornos e não originalmente, cuja fórmula foi mencionada na secção 2.2. Tais resultados são visíveis na Tabela 3.1.

Tabela 3.1. *P-value* associado aos testes de estacionariedade de ambas as séries.

	<i>PSI20</i>		<i>DAX30</i>	
	Nível	Ordem 1	Nível	Ordem 1
Teste de ADF	0.4001*	0.0001	0.6710*	0.0001
Teste de PP	0.3985*	0.0001	0.7072*	0.0001
Teste de KPSS	ET 1.0403	ET 0.2449	ET 7.9914	ET 0.0340
	VC 0.1460*	VC 0.4630	VC 0.4630*	VC 0.4630

(Serão rejeitadas as hipóteses nulas para os *p-value* apresentados com * para 5% de significância, isto é, simboliza-se não-estacionariedade).

Nota: “ET” simboliza a estatística de teste e “VC” o valor crítico. Neste teste, rejeitar-se-á a hipótese nula caso “ET” seja superior a “VC”. Para mais informações, consultar o artigo apresentado em 2.1.

⁴⁶ Em ambas as séries, não existem impressões de tendência determinística, mas complementando com a clara existência de uma média e variância não constantes ao longo do horizonte temporal, a hipótese estacionariedade é eliminada.

Finalizando, abordando a análise de estacionariedade, através do correlograma, tal como se poderá verificar na Figura 1.1 e Figura 1.2 do ANEXO 1, ambos os índices, em nível, apresentam inúmeros valores próximos ou até mesmo unitários em *ACF*, contrariamente ao que acontece com as séries integradas na primeira ordem, na Figura 1.3 e Figura 1.4 onde ambas as funções já se encontram bem definidas, podendo assim relacioná-las com os conceitos da Tabela 2.1, para além de se solidificarem as conclusões anteriores, de não-estacionariedade e estacionariedade, respectivamente.

Posteriormente à criação destes retornos, torna-se indispensável uma análise descritiva dos novos índices, estabilizados, de forma a conhecer os seus comportamentos, características e indícios sobre o modelo a ser utilizado, na próxima tabela.

Tabela 3.2. Estatísticas descritivas dos retornos diários.

	<i>DAX30</i>	<i>PSI20</i>
Média	0.0003	2.64E-05
Mediana	0.0006	0.0002
Máximo	0.1236	0.1168
Mínimo	-0.0960	-0.1264
Amplitude do Intervalo	0,2197	0,2432
Desvio-Padrão	0.0153	0.0133
Coefficiente de Assimetria	-0.1279	-0.2896
Curtose	7.8753	9.4567
Observações	6282	6282

Relativamente às duas medidas⁴⁷ de localização central, a média e a mediana, nota-se apenas que o índice alemão é o que apresenta valores superiores. Quanto ao desvio-padrão, medida de dispersão, repara-se que o caso alemão é o que apresenta um maior valor, sendo expectável uma maior variabilidade dos dados nesse índice. O coeficiente de assimetria e a curtose, medidas de dispersão, serão de seguida referidas. Na primeira estatística, é apresentado um valor negativo em ambos os índices, pelo que se consideram distribuições assimétricas negativas, indicando que os retornos negativos costumam estar mais abaixo da média do que os positivos, apresentando também efeitos *leverage*, ainda que mais significativos no índice Português. Na segunda, foram obtidos em ambos os índices, valores positivos, e bastante superiores ao valor de comparação com a distribuição Normal, tratando-se de duas distribuições leptocúrticas, sobretudo o *PSI20*. Este conceito, de leptocurtose, pode indicar vestígios de heterocedasticidade, mas sobretudo indica que, ao utilizar baixos níveis de significância a estimação de *VaR* e *ES* poderá ser sobrestimada⁴⁸, uma vez que o risco provém de *outliers* e como tal, neste tipo de distribuições, observações extremas ocorrerão mais facilmente. Através destes dois conceitos, conclui-se que as séries não seguirão uma distribuição Normal⁴⁹, um dos pressupostos a ter em consideração nas seguintes fases. Por último, através do conceito de excessiva curtose e assimetria, é expectável que os re-

⁴⁷ A mediana é uma medida de tendência central que indica o valor central de uma amostra de dados. Baseia-se numa ordenação dos valores de forma crescente, e se esses forem um número ímpar, consiste no valor central da amostra, caso contrário, é preciso tirar a média dos valores centrais. 50% dos elementos da amostra serão menores ou iguais à mediana e os outros 50% superiores a esta. A média, medida de localização, que evidencia o valor onde se concentram os dados de uma distribuição, sendo sensível a valores extremos, sendo assim facilmente enviesada.

⁴⁸ Elevados níveis de significância são propícios à subestimação do risco.

⁴⁹ Esta é simétrica e mesocúrtica.

sultados empíricos provem que modelos capazes em apreender mudanças específicas em diferentes regimes de volatilidade complementados com distribuições com caudas mais pesadas, apresentem uma melhor *performance*.

Os gráficos dos retornos de ambos os índices, estão presentes nas Figuras 3.2 e 3.3 abaixo, exibindo nitidamente a existência de dois períodos de diferença significativa na volatilidade, isto é, onde se reparam nos variados famosos *clusters* de volatilidade: o anterior à crise, entendido com volatilidade relativamente regular, e o durante e posterior à crise, onde existiu uma explosão da mesma entre o período de crise financeira (2008 - 2009), onde os dois índices apresentam desmedidos valores de volatilidade nos seus retornos, bem como valores superiores nos seguintes anos, comparativamente ao período pré-crise, sobretudo entre 2010 e 2011, onde os países enfrentaram a crise de dívida pública, sempre, neste período, tendo sido Portugal o país mais afetado, dadas as maiores variações encontradas. Contudo, as características típicas de não-linearidade não são possíveis de analisar, excepto a suspeita de *clusters* e consequentemente alguns *outliers* nessas mesmas exorbitâncias, de forma gráfica. Esta suspeita sobre regimes, irá ser posteriormente verificada a partir de meios próprios, para além de, como já referido, a existência de uma quebra de estrutura e a suspeita de tal a partir das figuras das rendibilidades conduzirem à utilização, de facto, do *MRS*. Por último, observando a mesma figura, evidencia-se a conclusão retirada pelos testes de raiz unitária, onde de facto se tratam de séries estabilizadas, dado o comportamento notório de estabilidade quando comparado com a primeira figura apresentada neste capítulo, apresentando uma média e variância constantes, bem como a não existência de qualquer outro elemento caracterizador para tal.

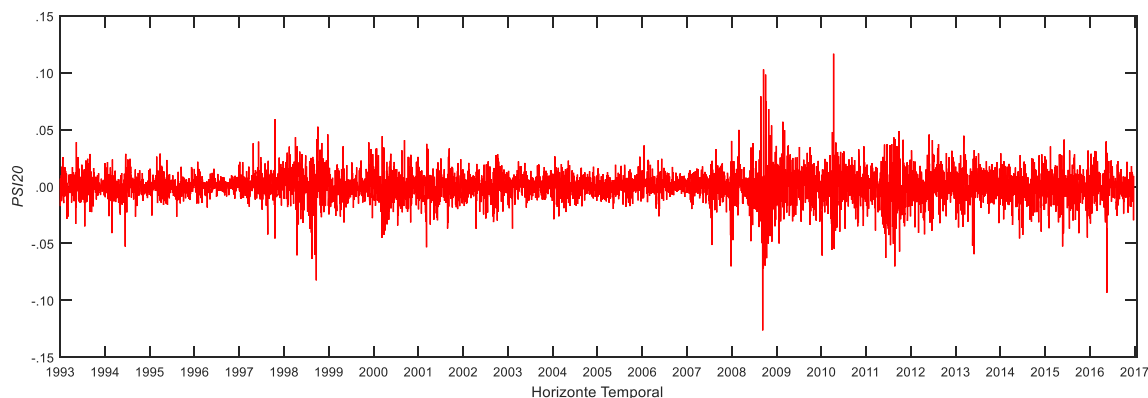


Figura 3.2. Rendibilidades do PSI20.

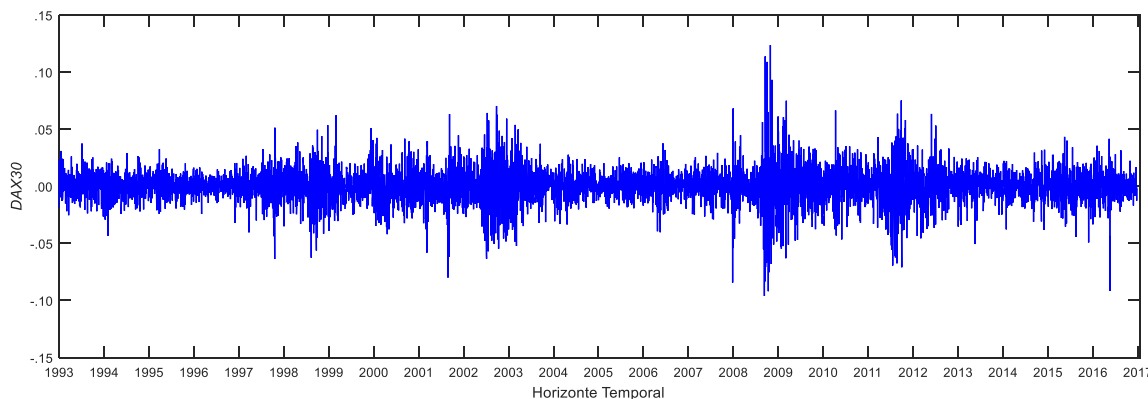


Figura 3.3. Rendibilidades do DAX30.

4. Resultados Empíricos

4.1. Análise de Modelos Econométricos

Este capítulo é composto por uma análise dos parâmetros estimados dos modelos pertencentes às duas gamas consideradas. Irá ser realizada com base em toda a amostra⁵⁰ e a 5% de significância, na tentativa de averiguar sobre o melhor modelo com um regime, a partir da análise dos pressupostos dos resíduos dos seus parâmetros bem como mais informações acerca dos mesmos. Quanto à gama de modelos de regimes *switching*, o método de interpretação difere, havendo apenas uma interpretação dos parâmetros envolvidos e, portanto, concluindo acerca das suas naturezas. Para a primeira análise, tornou-se necessário estabelecer a equação da média para cada modelo e índice e também o número de parâmetros na equação da variância, pelo que, tendo em conta que se vai utilizar, na restante fase o modelo *MRS-GARCH(1,1)*, os modelos uni-regimes vão ser baseados nos mesmos parâmetros, $p = q = 1$, tal como acontecerá com a equação da média, através do *ARMA(1,1)*, dadas também as conciliações com as propriedades da Tabela 2.1 excepto em algumas excepções, que nas próximas secções se salientarão. Foi tomado este esquema, de forma a terem-se todos os modelos apresentados de forma equivalente, e como tal, retirarem-se resultados o mais fidedignos possível.

A análise dos pressupostos dos resíduos dos parâmetros estimados dos modelos uni-regimes, foi também realizada, de forma a constatar que, de facto os modelos de *MRS* se poderão utilizar, devido à presença das inúmeras não-linearidades existentes e que estes pressupostos conseguem reflectir, face à sua rejeição na maioria dos casos. A segunda gama de modelos, adapta-se melhor a este tipo de características. Os modelos uni-regimes seriam adequados, caso se verificassem, pelo menos os pressupostos de homocedasticidade e independência, ainda que fossem necessárias algumas transformações nas séries e/ou modelos utilizados. Tal não se verifica, como posteriormente se verá: o facto de o segundo anterior pressuposto não se verificar ao invés do que acontece com o da homocedasticidade, garante que, de facto, existem muitas características não-lineares que levam à existência de *clusters* de volatilidade e de outros comportamentos tão extremos nas séries, tal como foi possível verificar a partir do gráfico de ambas originalmente, e que melhor serão capturadas pelos *MRS*.

Desvio-Padrão da distribuição. Nas subseqüentes páginas encontrar-se-ão os resultados associados aos parâmetros e aos respectivos testes relativos aos seus pressupostos associados aos modelos que procuraram ser utilizados para modelar os retornos do índice Português e Alemão, tendo sido empregues os modelos *GARCH(1,1)*, *EGARCH(1,1)*⁵¹ e *TARCH(1,1)*⁵², com um grau de assimetria e de *threshold order*, nos dois últimos modelos empregues respectivamente associados às três distribuições permanentemente mencionadas.

PSI20.

Relativamente ao índice Português, os modelos-padrão foram experienciados, a partir de 14/10/1998, uma vez que com a totalidade de anos envolvidos inicialmente, alguns dos fulcrais pressupostos, ou até, todos os existentes, eram não validados, embora as restrições de não-negatividade e subjacentes às componentes da equação da variância, quando existentes, fossem verificadas, bem como a aceitação da utilidade dos seus parâmetros associados. Face aos resultados bem-sucedidos quando se utiliza tal quebra de estrutura nesta série, esta vai ser tida cada vez mais em consideração, uma vez que se pode suspeitar de facto, que existirão dois regimes nesta série. Para além de tal, de forma a utilizar-se um raciocínio coerente, a mesma vai ser também utilizada no caso alemão.

⁵⁰ Devido a incompatibilidades com o programa utilizado para cada gama de modelos, para os uni-regimes, foi considerada toda a amostra, enquanto para os de *switching*, foi apenas a *in-sample*.

⁵¹ A equação da média para o modelo *EGARCH-t* e *GJR-t* relativas aos retornos do *DAX30*, é dada apenas pela constante.

⁵² A equação da média relativa ao modelo *TARCH-t* sobre as rendibilidades do *PSI20*, é apenas dada pelo modelo autogressivo *AR(1)*. Semelhantemente ao que acontece com as rendibilidades do índice Alemão, a equação da média que melhor se adequa ao mesmo modelo associado à distribuição Normal, é dada apenas pela constante.

Para além do pressuposto relativo ao valor médio dos resíduos, bem como o da homocedasticidade dos mesmos serem validados, o referente à da normalidade é rejeitado em todos os modelos utilizados, ostendendo-se os resultados na Tabela 4.1 e confirmando a ideia que se sugeriu na análise exploratória inicial, no capítulo 3. No que tange o pressuposto da independência, realçado na concisa Tabela 4.2, realizado sobre os dois tipos de séries, a conclusão, tal como se pode verificar pela análise das figuras 2.1 – 2.4, do ANEXO 2, em concordância para cada par de séries e consistentes para cada distância incluída, evidencia que ambas, são não independentes e identicamente distribuídas, obtendo-se assim a desejável conclusão, de que se pode de facto, ponderar a utilização do *MRS*. Estes resultados insatisfatórios, eram expectáveis, dadas características de não-linearidade de que esta série financeira Portuguesa está repleta, e que este teste de independência tão habilmente reflecte, para além de algumas das restantes exorbitantes características, associadas aos retornos que já foram apresentadas na Tabela 3.2.

Tabela 4.1. *P-value* associados aos testes dos pressupostos dos resíduos dos parâmetros estimados sobre as rendibilidades do *PSI20*.

		<i>GARCH(1,1)</i>	<i>EGARCH(1,1)</i>	<i>TARCH(1,1)</i>
Variância (Teste de <i>ARCH-LM</i>)	Normal	0.2301	0.5200	0.5735
	<i>t-Student</i>	0.2384	0.5697	0.6002
	<i>GED</i>	0.2431	0.5555	0.5694
Normalidade (Teste de <i>JB</i>)	Normal	0.0000*	0.0000*	0.0000*
	<i>t-Student</i>	0.0000*	0.0000*	0.0000*
	<i>GED</i>	0.0000*	0.0000*	0.0000*
$E(\hat{\epsilon}_t) = 0$	Normal	-0.0389	-0.0132	-0.0152
	<i>t-Student</i>	-0.0407	-0.0185	-0.0234
	<i>GED</i>	-0.0387	-0.0181	-0.0215

(Serão rejeitadas as hipóteses nulas para os *p-value* apresentados com * para 5% de significância).

Nota: No último teste da tabela apresentam-se os verdadeiros resultados do valor médio. O pressuposto é rejeitado caso os anteriores não sejam próximos do valor nulo.

Tabela 4.2. *P-value* associado ao teste do pressuposto de independência dos resíduos dos parâmetros estimados sobre o *PSI20* e sobre as suas rendibilidades.

	<i>PSI20</i>	Rendibilidades do <i>PSI20</i>
Independência (Teste de <i>BDS</i>)	0.0000*	0.0000*

(Será rejeitada a hipótese nula para o *p-value* apresentado com * para 5% de significância).

As estimativas dos parâmetros, obtidas pelo método da Máxima Verosimilhança, estão apresentadas na Tabela 2.1 do ANEXO 2, constatando-se que praticamente todas as componentes são significativas⁵³ para o modelo, e que nos casos necessários, os modelos cumpriam as propriedades de não-negatividade, para além de se obter uma melhor percepção de ambas as equações envolvidas. Para além dessas estimativas, podem também encontrar-se os desvios-padrão associados aos mesmos parâmetros. Iniciando, pode constatar-se que, todos os parâmetros são significativos para o modelo, excepto ϕ_0 ⁵⁴ em todas as distribuições no segundo e terceiro modelo visualizado. Para além do decorrido, considera-se o terceiro modelo, aquele que apresenta melhores estimativas, em virtude dos diminutos desvios-padrão apresentados, nomeadamente com a distribuição Normal.

⁵³ A significância de qualquer parâmetro deve ser sempre garantida desde início. Neste caso, é sempre verificada.

⁵⁴ A não rejeição deste parâmetro não será tida em consideração.

A curtose condicional da distribuição *t-Student*, dada por $K_t = 3(v - 2)/(v - 4)$, apresenta, pela ordem de modelos e distribuições encontradas nas tabelas, os valores de 4.6870, 4.3557 e 4.4389 para as rendibilidades deste índice, confirmando a presença das típicas intensas caudas inerentes aos retornos financeiros, e superiores às da distribuição Gaussiana. Ademais, modelos cujas inovações são dadas pela distribuição *GED*, ostentam estimativas dos graus de liberdade que revelam que a respectiva distribuição condicional apresenta caudas mais grossas do que as da distribuição Gaussiana, uma vez que todos os *shape parameter* se encontram entre 1 e 2, conforme a definição de assimetria. Para além do anterior, a mesma conclusão provém da fórmula da curtose para aquela distribuição, dada por $K_G = (\Gamma(1/v) \Gamma(5/v))/(\Gamma(1/v))^2$. Assim, para os modelos *GARCH*, *EGARCH* e *GJR*, a curtose da distribuição *GED* é de 11.0848, 8.8476 e 9.3946 para estas mesmas rendibilidades, confirmando novamente, que a distribuição condicional estimada dos dois índices, apresenta de facto, caudas pesadas, comparativamente à primeira distribuição mencionada.

Os positivos e significativos valores de γ presentes nos modelos assimétricos indicam o *leverage effect* que existe nesta série, e como tal, que efeitos negativos na volatilidade têm maior impacto que boas notícias.

Por último, face aos resultados obtidos pela Tabela 4.1 e Tabela 4.2 não deveria ser ratificado nenhum modelo em questão. No entanto, conforme o referido em 2.8, todos os anteriores modelos com as devidas distribuições vão ser estudadas, uma vez que esta exploração foi apenas para conhecer a cultura do *PSI20*, solidificar algumas sugestões sobre não-linearidades encontradas pelas análises gráficas e características da própria série.

DAX30.

No índice Alemão, o procedimento e interpretação, foram similares ao anterior, de forma a existir consistência entre dados, utilizando-se a mesma quebra de estrutura, para que nenhum índice esteja em desvantagem em relação ao outro, embora os resultados obtidos sem esta fossem consistentes. Novamente, embora algumas exceções, a equação da média manteve-se no *ARMA(1,1)*, pelo mesmo motivo já descrito, embora pela junção de informação entre a Tabela 2.1 e o correlograma associado na Figura 1.4 do ANEXO 1, parecesse estar descrita uma sequência que define o modelo *White-Noise*, que tal como posteriormente se verá, dificilmente o será⁵⁵. Tal como obrigatório, os pressupostos dos resíduos dos parâmetros estimados foram verificados.

Tabela 4.3. *P-value* associados aos testes dos pressupostos dos resíduos dos parâmetros estimados para as rendibilidades do *DAX30*.

		<i>GARCH(1,1)</i>	<i>EGARCH(1,1)</i>	<i>TARCH(1,1)</i>
Variância (Teste de <i>ARCH-LM</i>)	Normal	0.0991	0.1765	0.2109
	<i>t-Student</i>	0.0705	0.1934	0.2642
	<i>GED</i>	0.1108	0.2121	0.2655
Normalidade (Teste de <i>JB</i>)	Normal	0.0000*	0.0000*	0.0000*
	<i>t-Student</i>	0.0000*	0.0000*	0.0000*
	<i>GED</i>	0.0000*	0.0000*	0.0000*
E($\hat{\epsilon}_t$) = 0	Normal	-0.0347	-0.0080	-0.0068
	<i>t-Student</i>	-0.0388	-0.0181	-0.0183
	<i>GED</i>	-0.0421	-0.0192	-0.0195

(Serão rejeitadas as hipóteses nulas para os *p-value* apresentados com * para 5% de significância).

⁵⁵ A análise a partir dos correlogramas e por sua vez pela Tabela 2.1 é meramente sugestiva. Pelo modelo *GJR-t*, encontra-se um dos parâmetros da equação da variância que não é significativo para o modelo. Como o objectivo, com concordância, era o de testar o modelo *standard*, este modelo nem deveria ser tido em consideração e como tal, a observação dos pressupostos devia ter sido cancelada. Ainda assim, vai ser exposta, de forma meramente informativa.

Nota: No último teste da tabela apresentam-se os verdadeiros resultados do valor médio. O pressuposto é rejeitado caso os anteriores não sejam próximos do valor nulo.

Tabela 4.4. *P-value* associado ao teste do pressuposto de independência dos resíduos dos parâmetros estimados para o *DAX30* e para as suas rendibilidades.

	<i>DAX30</i>	Rendibilidades do <i>DAX30</i>
Independência (Teste de <i>BDS</i>)	0.0000*	0.0000*

(Será rejeitada a hipótese nula para o *p-value* apresentado com * para 5% de significância).

Baseado nos resultados desprimorosos obtidos pelo teste de *BDS*, presentes na Tabela 4.4, parte da dependência obtida, é devida às não-linearidades presentes nesta série financeira. Tal como o ocorrido no *PSI20*, os resultados obtidos na Tabela 4.4 conduzem à ideia de que nenhum modelo deverá ser validado, dado o não cumprimento de todos os requisitos, fundamentais, para tal. Não obstante, as estimativas dos parâmetros serão novamente apresentadas, embora em todo o caso, praticamente todas as componentes envolvidas fossem significativas e as restrições de não-negatividade e estacionariedade envolvidas em cada caso, fossem satisfeitas. Poder-se-ão estudar as diferentes estimativas dos parâmetros e de acordo com os mesmos critérios que no *PSI20*, a partir da Tabela 2.2 do ANEXO 2.

Averigua-se assim que, apenas nos modelos *EGARCH* e *GJR* Gaussianos, a constante associada à equação da média não é significativa para os modelos. O modelo que apresenta melhores estimativas, devido à análise do desvio-padrão, é o *GARCH* exponencial Gaussiano, enquanto a conclusão referente aos graus de liberdade da distribuição *t* é mantida desde o caso do *PSI20*, acrescentando apenas que, K_t toma os valores de 4.1765, 4.0821 e 4.0571 para este índice, consoante a ordem de distribuições, espelhando assim, também, as mesmas conclusões. No que tange as inovações dadas pela distribuição *GED*, permanece o mesmo termo, e K_G apresenta os valores de 8.6372, 7.3541 e 7.4079, salientando que a distribuição condicional estimada do *DAX30*, apresenta caudas mais pesadas do que a distribuição Normal.

Os positivos valores de γ presentes nos modelos *GJR* indicam também o *leverage effect* existente no *DAX30*, enquanto os negativos no *EGARCH* garantem que neste modelo um choque negativo implicará um aumento da volatilidade dos retornos.

Por último, face a estas conclusões, seguir-se-à a mesma linha de pensamento assumido no índice Português e, como tal não se devia passar a uma validação de modelos, pois nenhum se ajusta bem ao tipo de dados desta série. O modelo *GJR-t*, não devia ter sido considerado desde início, devido às informações já referidas sobre o problema encontrado no mesmo. Novamente, assumir-se-ão ainda assim, todos os modelos, com o mesmo intuito que foi referido no caso do *PSI20*.

Média da Distribuição. Pelos resultados associados à anterior gama de modelos, o facto dos pressupostos não serem completamente aceites e sobretudo com base na direcção que o teste de *BDS* indica em ambas as séries, os modelos de *MRS* devem ser estudados. Como tal, nesta secção, vai ser examinado o único e influente modelo, o *Markov Regime Switching-GARCH(1,1)*, consoante análises gráficas e de resultados, e não através da análise dos pressupostos dos resíduos dos parâmetros estimados.

Através da observação da Figura 2.5 do ANEXO 2, estão evidenciados alguns sombreados, relativos a indiscutíveis mudanças de valor no mercado ao longo dos 24 anos, isto é, são irrefutáveis as alturas de mercado “*bull*” e “*bear*”, sobretudo nesses períodos, para ambos os índices em estudo. Embora também possam ser encontradas no período pré-crise, são mais notáveis no período durante e posterior à mesma, tal como já explicado. Tal presença de, nomeadamente, dois regimes, significa que ambos os índices exibem *volatility clustering*, assinalando a presença de efeitos *ARCH* nestas séries, tornando evidente a utilização de modelos do tipo *MRS*, já que a definição deste, se acomoda na perfeição no problema deste estudo e nas evidências encontradas pela figura envolvida, para além dos mesmos indícios pelo teste de *BDS*.

Face a esta conclusão, nas figuras 2.6 – 2.11 do mesmo anexo, apresentam-se os gráficos mais representativos quando se trata deste modelo, isto é, os gráficos⁵⁶ da variância condicional com as respectivas estimativas suavizadas das probabilidades para os dois regimes em causa, correspondentes às probabilidades representadas pela equação (2.16), ao longo de todas as observações da amostra. De forma genérica, as três distribuições parecem capazes de capturar a dinâmica nas probabilidades de transição, sendo claras as alternâncias entre períodos “*bull*” e “*bear*” em ambos os mercados.

Pode facilmente distinguir-se a diferença na persistência de regime entre as três distribuições utilizadas para as duas carteiras. As probabilidades de suavização, presentes nos gráficos inferiores das figuras 2.6 e 2.8, no caso do índice Português e sobretudo na Figura 2.9 no caso do *DAX30* associados à distribuição Normal na primeira imagem de cada caso e *GED* na outra, indicam que os preços alternam frequentemente entre os regimes, enquanto nas restantes figuras, com a *t-Student* envolvida se sugere uma menor persistência em cada estado por um período mais extenso de tempo.

De outra forma, é também acessível relacionar as probabilidades anteriores, com o comportamento da variância condicional, nos gráficos superiores de tais figuras. Torna-se evidente que no caso do *PSI20*, o estado 2, regime “*bear*”, é o mais provável, uma vez que, quando se está perante picos significativos de volatilidade, é o que mais se salienta. Neste caso, suspeitar-se-á que esse estado, estará associado a uma elevada volatilidade dos retornos e conseqüentemente a uma maior persistência de choques ao longo do tempo. Já no caso do *DAX30*, a interpretação deverá ser a oposta, já que se observa que em períodos calmos de volatilidade, lhes estão associados, probabilidades suavizadas mais intensas, concluindo que para este índice, o segundo estado, estará associado a um regime “*bull*”, e como tal, com uma grande persistência ao longo do horizonte temporal. Nos restantes regimes, a conclusão será, portanto, a oposta. Através de tais diferenças, pode concluir-se que o modelo *MRS-GARCH* associado à distribuição *GED*, é o que melhor representa o índice português e o alemão, uma vez que é aquele onde, de uma forma mais nítida, se observam estas mudanças de regime.

Passando a resultados empíricos, de forma a comprovar as suspeitas acima, bem como retirar outras conclusões, as estimativas dos parâmetros do modelo *MRS-GARCH* estão apresentadas nas tabelas 2.3 e 2.4 do ANEXO 2, de forma a examinar a significância estatística dos parâmetros do modelo. Verifica-se que, com qualquer que seja a distribuição em causa, se apresentam estimativas *in-sample* bastante significativas, particularmente na equação relativa à média condicional. Quando se está perante os parâmetros da variância condicional, apresentam-se bastantes resultados onde se suspeita do contrário, isto é, que não se pode rejeitar a hipótese nula simples de nulidade do parâmetro, especialmente nas variáveis $\theta_0^{(i)}$, e de forma mais acentuada no *PSI20*. Constata-se ainda, para ambos os índices, que o *MRS-GED* é aquele que visualmente apresenta melhores estimativas, dados os mais frequentes reduzidos valores de desvio-padrão obtidos em tais parâmetros.

Acrescenta-se ainda o desvio-padrão - volatilidade - dos retornos condicionais em cada regime de volatilidade isto é, $\sigma^{(i)} = (\theta_0^{(i)} / (1 - \theta_1^{(i)} - \beta_1^{(i)}))^{1/2}$, que é mais simples de interpretar. Reunindo informações sobre o índice Português, confirmam-se de facto, a existência de dois estados onde: o primeiro regime é caracterizado por uma relativa reduzida volatilidade e na maioria dos casos, por uma reduzida persistência entre os *shocks*, como é indicado por $\rho_1 = \theta_1^{(i)} + \beta_1^{(i)}$, quando comparados estes valores, com o outro regime. O segundo, por sua vez, revela uma maior volatilidade e ao mesmo tempo, uma elevada persistência entre os seus *shocks*, não sendo em qualquer dos mesmos, nenhuma persistência inferior a 0.8025. No caso do *DAX30*, a interpretação é a oposta, uma vez que se garante que no primeiro regime é característica a exorbitante volatilidade juntamente com uma elevada persistência entre os seus *shocks*. Desta forma, o segundo regime, é assim caracterizado por uma menor volatilidade e reduzida persistência, sendo

⁵⁶ Gráficos efectuados no *MATLAB* 2018, com toda a amostra existente, e consoante a publicação de Thomas Chuffart, cujo objectivo passou por introduzir uma nova *toolbox* alusiva aos *MRS-GARCH*. Para mais informação consultar: Chuffart, T. (2016). “An Implementation of Markov Switching GARCH Models in MATLAB”, Aix-Marseille University (Aix-Marseille School of Economics), CNRS & EHESS.

ainda possível de referir que neste índice estas diferenças são mais significativas e notáveis, uma vez que, para este, o valor associado à persistência mais reduzida - 0.0244 - é bastante inferior ao mínimo visualizado no primeiro índice. A probabilidade de transição representa a probabilidade de ocorrer um *switch* nos regimes de *Markov* entre as datas $t - 1$ e t . Para ambas as séries, são significativas e próximas de 1, sendo as mais reduzidas, encontradas na distribuição Normal, com o valor de 0.7715 e de 0.8626 pela mesma ordem de índices das tabelas, mas nos segundos e primeiros regimes respectivamente, mostrando assim que quase todos os regimes apresentam bastante elevados graus de persistência na mudança entre regimes.

Estas tabelas evidenciam também as probabilidades incondicionais para cada modelo *MRS*. A probabilidade incondicional de estar no primeiro regime, π_1 , no caso do *PSI (DAX)* que é caracterizado por uma baixa (elevada) volatilidade quando comparado com o segundo regime, varia entre 30% (26%) e 81% (93%), para os modelos com inovações provenientes da distribuição t e Gaussianas com a distribuição (e vice-versa para o segundo caso). De outra forma, a probabilidade incondicional de pertencer ao regime de elevada (reduzida) volatilidade, varia entre 19% (7%) e 70% (74%) pela ordem inversa de distribuições mencionadas para o primeiro regime.

Para a versão *t-Student*, a figura de parâmetro é inferior a 8 em Portugal e 11 na Alemanha, pelo que se concluiu que é possível que o modelo capture mais leptocurtose entre os dados do que a distribuição padrão Normal e sobretudo no segundo caso, implicando ainda em ambos, que esta tem caudas mais grossas que a anterior, a partir da definição de curtose condicional, pois o valor que esta apresenta é de 4.90 e 9.60 respectivamente.

No caso da *GED*, para ambos os casos, o valor associado à curtose condicional garante que a distribuição tem caudas mais grossas do que a distribuição Normal, pois são de 2.7233 e 7.0188, respectivamente, uma vez que os *shape parameter* apenas eram inferiores a 2.

Desta forma, embora se confirme através da primeira e segunda metodologia, que o modelo que melhores resultados poderia oferecer, de entre a gama de *MRS*, era aquele que estava associado a inovações *GED*, é possível concluir que de facto a série portuguesa é caracterizada por um regime “*bull*” no primeiro regime e “*bear*” no segundo e vice-versa no caso do *DAX30*, a partir da concordância entre ambas.

4.2. Análise de Estatísticas *in-sample* entre Modelos Económicos

Na anterior secção, procedeu-se em primeiro, a uma estimação dos parâmetros de cada um dos modelos de regime simples bem como do modelo *Markov Regime Switching*. Ainda assim, torna-se importante comparar todos os modelos existentes, não sendo suficiente estudar cada modelo por si só, e com diferentes metodologias. Para além do conhecimento inicial das séries através destas análises, não foi possível retirarem-se outras conclusões, uma vez que se está perante, apenas, características dos modelos e não de meios de comparação dos mesmos, pelo que a avaliação na fase posterior do estudo, não vai ser baseada na anterior análise. Assim, uma forma de corrigir este inconveniente e extraírem-se algumas conclusões, é através da análise das funções de perda *in-sample*, acerca da qualidade dos parâmetros estimados no modelo de previsão da volatilidade. Presenteando-se assim algumas estatísticas comparativas de selecção de modelos na Tabela 3.1 e Tabela 3.2 do ANEXO 3, estas estarão associadas às rendibilidades do *PSI20* e do *DAX30*, respectivamente.

Iniciando a análise das anteriores tabelas, o maior valor da *Log Likelihood*, é encontrado no modelo *EGARCH-t* em ambos os índices no que toca os modelos de regime simples, e no que concerne aos de regimes alternados, o modelo que se destaca está presente no *MRS* com inovações *GED* e t de acordo com o *PSI20* e com o *DAX30*, respectivamente, demonstrando-se assim que é com estas inovações que se obtém uma maior probabilidade de os parâmetros estimados se aproximarem do seu real valor.

Os modelos *EGARCH* e *MRS-GARCH* associados à distribuição Normal, são por sua vez enfatizados em ambos os índices segundo os critérios de MAE_1 e MAE_2 , ou seja, é através destes modelos que são apresentados menores erros de previsão, oferecendo assim resultados mais fidedignos segundo a análise do *Rank* realizado.

Relativamente aos restantes critérios presentes, é novamente o modelo *EGARCH-t* que se sobreleva nas duas rendibilidades pelo critério de *AIC*, enquanto para o segundo tipo de modelos, de regimes dependentes, os que se salientam são aqueles que estão associados a inovações *GED* e *t* para as rendibilidades portuguesas e alemãs respectivamente, tornando-os assim os modelos com mais qualidade de estimativas. A partir do *R2LOG*, no caso dos modelos com regimes independentes, realçam-se os resultados obtidos pelos *GARCH* exponenciais com erros calculados a partir da distribuição *GED* e no que toca ao segundo tipo, são a *t-Student* e a Normal as que melhores resultados oferecem, segundo a mesma ordem de índices já tratados. No entanto, os resultados obtidos a partir desta última estatística, podem tornar-se pobres na medida em que, por vezes, modelos pobres (enviesados) podem obter um maior coeficiente de determinação do que modelos sem enviesamento. É devido a esta razão que se justifica a escolha pelos menores valores encontrados. Ainda assim, seria com tais modelos que se deveriam obter menores erros de previsão.

Outra propriedade que estas tabelas evidenciam é a persistência⁵⁷ da volatilidade condicional. Esta, resumidamente, mede a permanência do impacto de um choque sobre a volatilidade. Através da explicação teórica, sabe-se que as séries económico-financeiras estão propensas a mudanças bruscas no comportamento da média/volatilidade, conhecidas por quebras estruturais, e que estas afectam a qualidade de previsão dos principais modelos econométricos usados para análise dessas séries, principalmente dos modelos uni-regimes, justamente por não serem funções do tipo *piecewise* (ou por partes). Consequentemente, os coeficientes ficam sobrestimados, e aumentam em demasia a persistência dos dados passados, dado que esta estatística é calculada a partir do valor dos parâmetros e como tal, diminuindo a capacidade predictiva do modelo. Desta forma, para lidar com quebras estruturais, a literatura econométrica indica os *switching models*, especialmente porque eles tornam o modelo suficientemente flexível, devido ao facto de distinguir os regimes onde a volatilidade elevada ou reduzida ocorrem, enquanto os primeiros modelos não têm esta capacidade, para diferentes tipos de comportamentos, em diferentes pontos no tempo (*Brooks, 2008*). Desta forma, era expectável existir uma diferença significativa desta estatística entre os dois tipos de modelos considerados, sendo que para além de nos primeiros modelos a persistência devesse ser superior à existente nos *MRS*, o valor nestes últimos, deveria ser reduzida. No entanto, em ambos os índices a persistência dos *GARCH* é sempre inferior à dos *MRS* e neste, não é tão reduzida como se esperava destes modelos. Finalizando, indica-se assim que os *GARCH* uni-regimes de facto tendem a sobrestimar os parâmetros e que, neste caso, os *MRS* apresentam certa “protecção” às mudanças súbitas nos factores macroeconómicos ocorridos no horizonte temporal da *in-sample*.

Desta forma, embora segundo cada metodologia efectuada o objectivo passe por encontrar o melhor modelo da família *GARCH* e do grupo dos *MRS*, talvez segundo esta abordagem, os modelos *MRS* não fossem os mais adequados, tendo em consideração os elevados valores desta última estatística. Ainda assim, pode sugerir-se que, para o *PSI20*, os modelos que permitiram obter melhores resultados de estimação, e da mesma forma, de volatilidade, são o *EGARCH-t* e *EGARCH-GED*, bem como os *MRS* juntamente com as anteriores distribuições associadas a tais inovações, enquanto para o *DAX30*, são os *GARCH* Exponencial e *MRS-GARCH* relativos à distribuição *t-Student* os escolhidos para se obterem as melhores previsões de volatilidade.

Por conseguinte, na próxima secção, vai dar-se ênfase aos resultados *out-of-sample* e verificar se os resultados *in-sample* estão de acordo com os posteriores, de forma a chegar-se a um consenso sobre os melhores modelos que poderão prever o *VaR*.

⁵⁷ Tendo em conta a diferente dimensão das amostras, é plausível que este valor esteja em concordância entre os resultados do capítulo anterior e neste nos *MRS*, enquanto com os da primeira gama, se poderá encontrar uma diferença.

4.3. Resultados *Backtesting*

Recorrendo ao facto de que adequados resultados *in-sample* não implicam necessariamente previsões de *VaR* precisas, os investigadores interessam-se mais pela análise de previsões precisas do que um bom ajustamento *in-sample*. Esta análise *out-of-sample*, vai ser efectuada com determinada parte da amostra e vai basear-se no nível de 5% de significância. Com esta não são apresentados os verdadeiros valores previstos de risco pela medida, mas sim, uma avaliação sobre os tais valores, para testar a sua fidedignidade, e como tal, se os parâmetros estimados permitiram uma boa previsão da volatilidade e/ou da média e, portanto, de *VaR* e de *ES* diários.

4.3.1. Comparação dos Resultados de *backtesting* do *Value-at-Risk*

As tabelas 4.1 – 4.4 do ANEXO 4, reportam a avaliação *out-of-sample* para a gestão do risco, relativas aos *steps* temporais determinados no capítulo 3 para cada um dos competitivos modelos utilizados, em termos de 95% e 99% de *VaR* diário⁵⁸ e respectivamente para o *PSI20* e *DAX30*. Utilizar-se-ão estes dois tipos de *VaR*, de forma a obterem-se interpretações mais comparáveis e saber com que confiança melhor se prevê.

Teste de TUFF. A interpretação desta estatística de teste é directa logo após a sua comparação com os valores críticos da Qui-quadrado. Consta-se que previsões calculadas a partir do *PSI20* são favoráveis em qualquer janela temporal através da maior significância existente, excepto quando previstas a um mês pelo modelo *MRS-t*. No entanto, quando se analisam as informações provenientes da previsão com o *DAX30*, a interpretação não é tão limpa, sendo até mais simples salientar os modelos adequados, sendo estes apenas encontrados no mais curto horizonte *Rolling* à excepção do *GARCH* exponencial com as inovações associadas à *t-Student* e com 5% de significância. Ainda assim, o *VaR* a 99% baseado em qualquer índice é previsto de forma adequada por qualquer modelo e janela escolhida.

Tendo em conta que o objectivo é cobrir tanto a 99% e 95% as perdas futuras, esta estatística evidencia a inadequação de muitos modelos, especialmente, quando se utilizam longas distâncias *Rolling* de previsão para o *DAX30*. No entanto, este teste é conhecido não só por ter pouco poder, mas também, por ser muito sensível a graus de turbulência, sobretudo no início da amostra, levando a que quando se realizar os restantes testes, as conclusões poderão ser outras, e sobretudo, mais rigorosas. Ainda assim, a realização do teste de *TUFF* foi apenas para uma comparação de resultados e verificar, a partir dos restantes resultados, se de facto a sua má fama é verídica ou se não se salientou neste caso.

Proporção de Falhas. Consta-se que no caso português, a maioria dos valores de PF se encontram em posições significativamente diferentes do valor nominal 5% e 1%, respectivamente na análise de previsões do *VaR* a 95% e 99%. No entanto, face a algumas excepções na anterior interpretação, é com horizonte temporal *Rolling* mais longo onde se evidenciam alguns valores mais próximos de tal limite quando se está a considerar o *VaR* a 95%. Na outra significância, também se podem realçar algumas proximidades ao valor nominal, não sendo, no entanto, possível realçar apenas uma janela temporal. Relativamente ao *DAX30*, todos os valores de PF se encontram abaixo dos respectivos níveis de significância.

Ainda assim, torna-se necessário de verificar qual o modelo que é capaz de rejeitar a PF nesses casos extremos, a partir da estatística de teste LR_{PF} , uma vez que a anterior análise era apenas visual e sugestiva: o *MRS-N* para o *PSI20* e o *EGARCH-t* no *DAX30* parecem ser os melhores modelos, uma vez que na maioria dos casos, através da comparação entre o valor crítico e a estatística de teste, se conseguem rejeitar valores extremos de PF, enquanto os restantes modelos apresentam falhas entre si, isto é, por vezes rejeitam, por outras aceitam valores extremos, e estes dois modelos referidos, apresentam certa concordância nesse aspecto, ao longo dos quatro horizontes temporais *Rolling* estudados e em qualquer nível de confiança em que se esteja a tratar o *VaR*.

⁵⁸ Os dados utilizados, são apresentados de forma diária, pelo que o *VaR* calculado o será também.

Por conseguinte, através desta análise, os dois modelos que devem ser salientados são os anteriores referidos, pelo que são considerados os melhores a prever ambos os VaR. Todavia, salienta-se a diferença intensa, com os horizontes considerados: uma semana de previsão para o VaR a 95% e duas para o de 99%, para o *PSI20*, e no outro índice, a 95% são mais evidentes os bons resultados obtidos a um dia de previsão, enquanto no caso de se considerar o 99%, qualquer período pode ser adequado.

Teste de Cobertura Condicional de Christoffersen. Através dos três testes de correcta cobertura condicional, isto é, considerando os testes de cobertura incondicional, independência e condicional é possível retirar de imediato uma conclusão: no caso do *PSI20*, poucos são os modelos - de entre todos os utilizados e partindo das inúmeras janelas temporais e significâncias utilizadas - que cumprem as duas primeiras propriedades, sendo este facto ainda mais escasso na série alemã.

Revedo o capítulo teórico, apenas devem ser validados os casos onde o teste de cobertura condicional e de independência sejam cumpridos, garantindo assim que se trata de um processo cujas falhas são independentes e cuja probabilidade é dada por α , ou seja, que esse mesmo modelo consegue cobrir todas as perdas futuras que o VaR captura, e desde que o *p-value* associado ao teste de cobertura condicional final do teste não obrigue à rejeição do modelo.

Relativamente ao *PSI20*, ressaltam-se os resultados obtidos na previsão do VaR a 95% no mais curto prazo, onde se podem salientar alguns modelos, estando presentes os *EGARCH* com qualquer tipo de inovações, e os *MRS* com caudas mais pesadas, isto é, com inovações *t* e *GED*, bem como o *GJR-t*, uma vez que é com estes que se obtém resultados desejáveis, que não levem à rejeição de nenhuma das estatísticas de teste consideradas. Nos restantes casos, os modelos falham em algumas das anteriores. Quanto ao segundo VaR, os resultados não são tão lineares como o sucedido a 95%, uma vez que não se consegue admitir um único período *Rolling* em que melhor se prevejam as medidas: ressaltando-se ainda as duas primeiras janelas temporais, onde se constata o bom comportamento dos modelos *GJR*. Fazendo referência aos modelos de estados dependentes, o *MRS-t* e o *MRS-GED* são os que melhores resultados de previsão oferecem, de forma respectiva, ao longo de um dia e uma semana. Pode ainda referir-se que o *MRS-t* é o que melhor se comporta quando se pretende prever o VaR a duas semanas.

Todavia, tendo em consideração o número de modelos que melhor prevê a medida quando se trata de 1 dia, os respectivos modelos são os seleccionados como finais para o *PSI20*, em ambas as confianças.

Ainda neste critério, existem alguns casos onde o *MATLAB* oferece um valor *NaN*, significando assim que há uma tendência para um resultado infinito e demasiado grande do valor encontrado. Ainda assim, estas variáveis aparecem apenas nas estatísticas de teste relacionadas com a independência e com o final, teste de correcta cobertura condicional. Desta forma, e ainda sabendo sobre a rejeição ou não do primeiro teste de cobertura incondicional, é sempre possível garantir que o tal modelo não é adequado para prever a medida de risco, uma vez que os valores críticos da Qui-Quadrado associados aos testes nunca estarão de acordo com a regra explicitada de forma a tornar o modelo adequado, sobretudo para o teste final. Da mesma forma, quanto ao *DAX*, a maioria dos valores apresentados, são dados pela condição anterior, salientando-se assim apenas os resultados oferecidos quando se utilizou o horizonte temporal passado de 1 dia e 5% de significância, onde se mostram todos os modelos como adequados, excepto o *EGARCH-t*. A previsão do VaR a 99%, não evidencia, portanto, nenhum modelo como adequado.

Por conseguinte, através dos resultados obtidos pelo teste de *Christoffersen*, e de forma a tentar alcançar-se alguma concordância entre horizonte temporal *Rolling* e os dois VaR considerados, conclui-se que os melhores modelos de previsão são obtidos pelo *GJR-t* com 1 dia de período temporal, no VaR a 95% e a 99% e com o *MRS-t* nos modelos de regimes dependentes para o índice português. Seguindo o mesmo raciocínio com o índice alemão, os modelos anteriores e distâncias também são os que melhores resultados oferecem a 95%, já que a 99% a conclusão era desastrosa.

Testes adicionais. Os modelos *GJR* e *MRS* ambos com inovações *t*, são os que melhores resultados apresentam para o *PSI20* - sobretudo pela janela de 5 e 10 a 95% e embora algumas discordâncias, também se pode constatar o mesmo a 99% - e o *GARCH* Exponencial e *MRS* com resíduos Gaussianos no caso do *DAX30* - em períodos de 10 e 22 dias a 95% e a duas semanas a

99% de confiança, pois são os que mais frequentemente apresentam os menores valores médios de ambas as perdas. Desta forma, estes modelos são os escolhidos para este segundo método de selecção, e, portanto, serão comparados com os melhores resultados obtidos pelos anteriores testes.

Conclusão. Finalizando, através de todos estes resultados, não fica claro qual o modelo uniformemente mais preciso. Todavia, podem retirar-se algumas conclusões sobre os modelos que mais se sobressaíram ao longo do processo de *backtesting*. Existe alguma evidência para considerar que os modelos *GJR-t*, *MRS-N* e *MRS-t* são os que melhor estimam o *VaR* sobre a série *PSI20* - sobretudo com horizontes *Rolling* intermédios - e para o *DAX30*, são os *GARCH* Exponenciais com erros provenientes da distribuição Gaussiana ou *t-Student* e *MRS-GARCH* com as anteriores inovações, exibindo uma melhor *performance* quando se usam *Rolling Windows* de grande duração.

4.4. Comparação de Resultados *in-sample* e *out-of-sample*

Nesta secção vão comparar-se os resultados que se obtiveram a partir da análise das avaliações *in-sample* e *out-of-sample*. Ainda assim, a partir dessas, as análises obtidas têm diferentes interpretações: a partir da *in-sample*, retiram-se informações acerca dos melhores modelos que através da estimação de parâmetros permitiram uma melhor previsão da volatilidade, enquanto através da *out-of-sample*, se retira o modelo mais capaz a prever o *VaR* a 95% e 99%, e, portanto, qual a melhor confiança para tal, bem como, com que períodos temporais tal se sucedeu. Desta forma, irá em primeiro chegar-se a uma concordância entre modelos a partir de cada uma destas metodologias, e posteriormente a essa descoberta, incidir-se-á sobre a distância em que cada um desses melhor se comportou em cada *VaR* estudado. Em todo o caso, quando se chegar a um acordo acerca dos melhores *steps* temporais, nenhuma conclusão deverá ser retirada: para além de serem as janelas temporais mais vulgarmente utilizadas, com base nos resultados encontrados, deve esperar-se uma interpretação subjectiva por parte da instituição financeira, isto é, ao obterem-se valores de *Value-at-Risk* diários, caso a instituição faça o seu balanço mensalmente, eventualmente a janela de 22 *steps* deverá ser a escolhida, pois poderão obter-se as informações que em média costumam ocorrer num mês, apesar de eventuais excepções, e com esse raciocínio de forma sucessiva. Quanto à confiança encontrada não se deverão também retirar nenhuma conclusão, pela mesma razão⁵⁹.

Estatísticas *in-sample*. Tendo em conta o sucedido através da análise da persistência dos modelos utilizados, era expectável ponderar uma evidência de melhores resultados em modelos da família *GARCH*, quando comparados com os *MRS*. Ainda assim, embora sejam mais visíveis os *ranks* desastrosos no caso do *DAX30* nos *MRS*, estes não são os que piores resultados apresentam ao longo dos critérios efectuados em ambos os índices. Assim, acerca deste tópico, pode sugerir-se que, para o *PSI20*, os modelos que permitiram obter melhores resultados de estimação e de previsão de volatilidade, são o *EGARCH-t* e *EGARCH-GED*, bem como os *MRS* juntamente com as anteriores distribuições associadas às inovações, enquanto para o *DAX30*, é mais fácil escolher-se apenas um modelo, tendo em conta que há alguma concordância entre critérios, sendo assim o *GARCH* Exponencial e *MRS-GARCH* relativos à distribuição *t-Student*. Desta forma, ambos os tipos de modelos conseguem, portanto, capturar bons resultados de previsão de volatilidade e permitem um promissor ajustamento dos dados. Esta metodologia, é menos potente que a seguinte, devido à dificuldade da/s correcta/s escolha/s da/s *loss functions* a utilizar e, os problemas provenientes da persistência podem estar associados à enorme dimensão da amostra *in-sample* utilizada.

Backtesting. Realizando uma intersecção de todos os resultados obtidos pelos cinco critérios acima, existe alguma evidência para considerar que os modelos *GJR-t*, *MRS-N* e *MRS-t* são os que melhor estimam o *VaR* sobre a série *PSI20* - sobretudo com janelas temporais intermédias - e para o *DAX30*, são os *GARCH* Exponenciais com erros provenientes da distribuição Gaussiana ou *t-Student* e *MRS-GARCH* com as anteriores inovações, e também exibindo uma melhor *per-*

⁵⁹ O mesmo acontecerá para o *ES*, quanto à confiança e *steps* encontrados.

formance com *windows* de grande duração. Estas conclusões estão em concordância com os últimos três testes realizados, mas, no entanto, quando se faz alusão à interpretação do teste de *TUFF*, apenas no caso português, os modelos considerados não vão ao encontro dos resultados obtidos pelo anterior teste, que, como já se tinha referido oferece conclusões fracas, e neste caso, pode comprovar-se esse facto.

Backtesting vs. in-sample. Os modelos *EGARCH* e *MRS* com inovações t , são os que melhor se ajustam ao *DAX30* e os que melhores resultados de *VaR* permitem obter, dada a harmonização de resultados existentes entre as metodologias. No que tange os resultados do *PSI20*, a interpretação é mais uniforme uma vez que apenas existe um modelo completamente adequado: o *MRS-t*. O objectivo passa ainda por determinar qual a distância em que os modelos de previsão escolhidos melhor se comportam, logo, para a série portuguesa, verifica-se que, 5 e 10 dias são os períodos em que os modelos melhor se comportam para prever o *VaR*. Por último, constata-se que para esta série, o melhor modelo a longo prazo, um mês, é o denominado *MRS-N*. Inferindo sobre o *DAX30*, tem-se que a maioria dos modelos que foram sendo validados ao longo das duas abordagens, pertenciam a distâncias mais longas, pelo que, a janela escolhida após a intersecção de resultados é a de um mês. Do mesmo modo, para este índice alemão, os modelos *EGARCH* com distribuições t para os erros podem também ser favoráveis em períodos mais curtos. Verifica-se ainda que, de forma geral, a 95% de confiança os resultados eram sempre melhores que os obtidos pela outra confiança, que ou eram bastantes vezes vagos ou então desastrosos.

Existem duas interpretações para os resultados obtidos, isto é, para ambos os índices, o cálculo do *VaR* diário, permite saber informação sobre a perda mínima que pode esperar que se ocorra num determinado dia - as previsões da medida têm início a 01/08/2017 e vão ser obtidas 112 - ou que, a cada 100 próximos dias é esperado que em 5 a perda realizada seja superior à prevista pela medida, devido à confiança avistada. Em ambos os casos, o montante perdido, será dado pelo próprio valor do *VaR*, e visível na análise gráfica abaixo referida.

Embora as conclusões retiradas a partir das anteriores sejam similares, onde, por vezes as obtidas pela primeira são consolidadas na segunda, as últimas são mais tidas em mente uma vez que, pela teoria, se garante uma maior fidedignidade a partir desses para além de evitar possíveis questões de sobrestimações e já que, a primeira se pode tornar duvidosa pela difícil escolha de uma função de perda adequada. Ainda assim, todos os resultados, confirmam a ideia inicial, de que os *GARCH* Exponencial são os prestigiados e de que os modelos que trabalham sobre a suposição da distribuição t oferecem resultados de previsão mais precisos do que aqueles que operam sobre a distribuição Normal. No entanto, era ainda mais expectável que a distribuição *GED* fosse a que evidenciava melhores resultados, uma vez que foi criada de forma a corrigir certas lacunas da distribuição *t-Student*. De facto, os resultados para esta distribuição também foram satisfatórios, mas não suficientes para ser a escolhida. Através também da utilização de modelos que contabilizam os efeitos de alavancagem, conclui-se que de facto, esses apresentam uma melhor habilidade, uma vez que costumam ser os mais requisitados, corroborando as informações teóricas sobre a *performance* dos modelos. De facto, o modelo *GARCH* raramente é associado aquele que melhores resultados de previsão produz, excepto a partir do teste de *TUFF*, que não é fidedigno.

Estas adaptações, tanto de modelos e distribuições, especializadas para este tipo de dados económicos, eram ainda mais expectáveis para o *PSI20*, tendo em consideração que apresentou valores superiores de curtose e assimetria - algumas das características não-lineares mais conhecidas - bem como outros comportamentos mais alternados ao longo do tempo.

Para completar as anteriores conclusões, através de uma análise visual, tornando-as mais perceptíveis, apresentam-se no ANEXO 5, com as figuras de 5.1 – 5.3 as perdas que foram superiores ao *VaR* a 95%, melhor confiança encontrada, estimado pelos modelos precedentes para os respectivos horizontes temporais *Rolling* e nível de significância, isto é, comparam-se, de facto, as estimativas de *VaR* com as taxas de rendibilidade efectivamente observadas, para todo o período da amostra *out*. Parece haver um comportamento suave da medida prevista, ao longo do tempo, tornando-se esta evidência brevemente mais nítida quando se observa o comportamento dos *MRS*, certamente, devido à possibilidade de alteração entre os dois regimes, sendo, no entanto, o comportamento do *VaR* estimado pelo *EGARCH* também acertado, dado que no índice,

não são apresentados comportamentos muito discordantes entre a medida e as verdadeiras rendibilidades. Ainda assim, embora esta abordagem ofereça uma estrutura potente, o tema em questão é bastante complexo, pelo que as falhas verificadas - quando os retornos cruzam os valores oferecidos pelo *VaR* estimado através de tais modelos - não são alvos frequentes. Estas, por sua vez, podem estar associadas a determinados testes de *backtesting* ou de funções de perda *standard* que apresentaram insucesso, mas que ainda assim, através da sua intersecção, garantiram a pertinência desses modelos para prever tanto a volatilidade como o *VaR* das séries envolvidas e para as janelas temporais utilizadas. Logicamente, através da análise de ambas as abordagens, nenhum modelo pareceu superar significativamente outro, em todos os horizontes temporais da *Rolling Window* adoptados, pelo que, era expectável que estes não fossem irreprováveis, mas que garantissem uma cobertura das perdas na maioria dos casos, que de facto se pode constatar. Finalizando, concluindo que estes modelos conseguem capturar a maioria das verdadeiras falhas, e que por sua vez, também apresentaram resultados de sucesso pelo primeiro método de avaliação da previsão da volatilidade, considerar-se-ão como os adequados para tal efeito.

Todas estas conclusões, desejáveis, mas por vezes não tão esperadas, podem estar relacionadas com o facto de as instituições financeiras admitirem como desvantagem, o uso de dados históricos, uma vez que podem não oferecer boas previsões de potenciais eventos futuros, particularmente quando existem casos extremos, podendo assim conduzir a sub ou sobrestimações do risco de mercado, sendo que nenhum é desejável para a gestão das instituições. Desta forma, como já foi referido, o tamanho da janela temporal usada para calcular o *VaR* influencia a própria medida. Por conseguinte, como os índices estão baseados em 24 anos, pode conduzir-se a uma sobrestimação de risco - possivelmente entre 2009 - 2011, entre outros - uma vez que o período pós-crise está instaurado, não ocorrendo assim tantas excepções como durante a mesma. De forma geral, o modelos e distribuições não eleitos podem não estar a ser adequados a adaptar a baixa volatilidade nos regimes que ocorreram sobretudo no período pós-crise, uma vez que podem estar a ser afectados pela turbulência de mercado sentida em 2008 devido à catastrófica crise financeira, sendo então a distribuição *t-Student* suficientemente capaz de capturar todos os efeitos não-lineares existentes, não tornando assim necessária uma distribuição mais potente como a *GED*. Ainda assim, embora se encontrem um menor número de excepções em determinados horizontes, são suficientes para a Gaussiana não se conseguir adaptar.

Por conseguinte, se estes modelos e distribuições, com tal horizonte temporal *Rolling* e nível de significância foram os preferidos, é porque se garante que o verdadeiro risco não foi sobrestimado nem subestimado, sendo estes capazes de se ajustarem e cobrirem as perdas reais. Possivelmente, os restantes modelos não-validados implicariam reprováveis conclusões. O comportamento favorável dos *MRS* e dos *EGARCH* era o desejável e o obtido.

4.5. Análise de Resultados de *Expected Shortfall*

Tendo em conta os factos anteriores encontrados para o *Value-at-Risk*, impulsionando a que certos modelos e distribuições não se tornassem os mais adequados como era esperado, e que o *VaR* não cumpre a propriedade de subaditividade, podendo assim sobrestimar o risco, torna-se necessário suplementar a análise dessa medida com outras, tal como o *ES*, de forma a obterem-se conclusões mais fidedignas.

Quando foram comparados os resultados de *backtesting* com os obtidos pelas funções de perda *standard* apurou-se que, para o índice alemão, o tipo de modelos que mais sobressaíram pertenciam à mesma categoria, isto é, à família de modelos *EGARCH* e *MRS*, sendo que, pela análise *in-sample*, as inovações que se sublinhavam eram as *t-Student*, ao passo que na outra fracção, se destacavam não só os anteriores, como também os mesmos, mas com erros provenientes da distribuição Gaussiana. Foi devido a este facto, que o *MRS* e *EGARCH* ambos com inovações *t*, foram considerados os melhores para a primeira medida de risco apreciada. No que respeita o *PSI20*, os modelos frisados pertenciam a várias categorias, pois tanto existiam *EGARCH*, como *GJR* como *MRS*, com as diversas distribuições em estudo, direccionando assim, através dos cruzamentos entre os resultados, que o final considerado fosse apenas o *MRS-t* para a

mesma medida em causa. Tais reflexões são fundamentais, uma vez que o estudo do *Expected Shortfall*, se vai basear em modelos uni-regimes, dada a complexidade dos *MRS* sobre esta medida de risco, devido à falta de informação existente para efectuar o seu *backtesting*, maioritariamente devido à não verificação da propriedade de eliciável, fundamental, segundo variados autores. Para este⁶⁰, o objectivo passará por comparar o comportamento dos melhores modelos e respectivas distribuições encontradas para ajustar e prever o *VaR*, com os resultados, a partir dos anteriores, para o *ES*, de forma a verificar quais as diferenças entre as medidas de risco, e, qual das duas é a melhor a cobrir as verdadeiras perdas de risco ou rendibilidades, e como tal, verificando também se tais modelos permitem, do mesmo modo, obter os melhores resultados de *ES*. Como tal, de forma a existir algum termo de comparação, os modelos utilizados para a análise desta segunda medida de risco, serão os *EGARCH*, tanto com inovações Gaussianas como com as provenientes da famosa *t-student*, uma vez que, foram os mais requisitados para o *VaR*. Tendo em consideração que a distribuição Normal vai ser utilizada por ter sido, em segundo, uma das mais salientadas, é expectável que esta não seja a mais indicada no contexto de estudo deste projecto, e sobretudo no caso do *PSI20*, devido aos anteriores juízos. O nível de confiança envolvido nesta análise, será de 95%, pois foi aquele que melhores resultados proporcionou no *VaR*, enquanto os *steps* temporais serão de duas semanas para o *PSI20*⁶¹, e para o *DAX30*, dada a concordância existente neste tema, serão considerados os 22 dias. Esperar-se-ão ainda melhores resultados de previsão⁶² no *ES* do que no *VaR*, devido às tais falhas que esta apresenta e à potência dos resultados de que esta nova medida é caracterizada, embora as anteriores declarações desvantajosas à análise de resultados *out-of-sample* desta.

Tal como aconteceu como *VaR*, esta nova medida vai ser analisada com base numa análise gráfica e a partir da *out-of-sample*, pelo que as conclusões retiradas vão ser garantidas para ambos os tipos de abordagens que deveriam ter sido utilizadas. Sabendo que mais uma das diferenças entre o *VaR* e o *ES* consiste na sensibilidade a *outliers*, uma vez que a primeira é pouco sensível aos mesmos, podendo oferecer perdas inferior às reais no pior cenário possível, obriga a que para se obter uma precisa estimativa da nova medida, se devam utilizar mais observações, para o mesmo nível de confiança utilizado. Desta forma, utilizar-se-ão 180 observações para o *ES*, ao invés das 112 que foram utilizadas para o *backtesting* do *VaR*. Obter-se-ão, ainda assim, também 180 valores de *ES* diários previstos, cujas datas se encontram a partir da última presente na amostra *out* em causa.

Reflectindo em primeiro apenas sobre as estimativas diárias de *Expected Shortfall*, a partir das figuras 6.1 e 6.4 do ANEXO 6, constata-se que, são apresentadas aproximações bastante suaves e que vão acompanhando o comportamento dos dois tipos de rendibilidades, praticamente ao longo de todo o horizonte temporal envolvido. Esta suavidade é mais nítida no caso alemão, aparentando uma previsão de *ES* com um comportamento linear constante por parte dos dois tipos de modelos circundados. Em ambos os casos, esta medida parece conseguir cobrir as verdadeiras perdas em ambos os índices e a partir de qualquer distribuição das inovações utilizadas, uma vez que existem poucas intersecções entre a medida e as rendibilidades, isto é, poucas falhas de correcto revestimento de risco. De forma mais concisa, embora as anteriores declarações, é ainda possível verificar que para o *PSI20*, o *EGARCH-t* é aquele que melhores resultados apresenta, uma vez que consegue cobrir mais perdas que o *EGARCH-N*, ainda que, de forma pouco reveladora. Com o índice alemão, acontece o oposto. A interpretação do *ES* é similar à do *VaR*, não se tratando assim da perda mínima esperada, mas do real valor expectável de se perder. Os montantes são visíveis pelos gráficos anteriores.

⁶⁰ Dada a existência dos mesmos dados, apresentados de forma diária, obter-se-á o *ES* diário.

⁶¹ Embora na análise da primeira medida se tenham valorizado os dois períodos intermédios, pela análise gráfica complementar – que é similar à que vai ser realizada para o *ES* – o que melhores resultados oferece, é com os resultados de previsão a duas semanas. Dada a complexidade do tema em questão, escolher-se-á apenas um melhor horizonte temporal.

⁶² Nesta medida, também da qualidade de ajustamento, como será posteriormente referido.

4.5.1. Comparação de Resultados de *Value-at-Risk* e *Expected Shortfall*

O principal objectivo do diagnóstico desta segunda medida de risco, não passa somente por verificar se o *ES* diário previsto, consegue cobrir a maioria das perdas reais, mas sim, comparar os seus resultados com os que foram obtidos pelo *VaR*, uma vez que, por cada uma destas são obtidas conclusões individuais similares. Nas figuras 6.2 e 6.3 para o *PSI20* e 6.5 e 6.6 para o excedente, do ANEXO 6, apresentam-se tais confrontos, a partir do modelo *EGARCH-N* e *EGARCH-t*, respectivamente. Através do *EGARCH-t* ambas as medidas parecem diferir, embora de forma não significativa e apenas no *PSI20*. Nos restantes casos, ambas as medidas apresentam comportamentos quase de diferença imperceptível. Em termos da análise da capturação das reais perdas, embora a capacidade de ambas as medidas em cobrir as verdadeiras perdas, o *EGARCH-t* parece ser o melhor no caso do *PSI20*, presumindo que se adaptará de forma conveniente às alterações na volatilidade condicional. Tal era esperado, uma vez que o modelo *EGARCH-N* não foi um dos mais salientados quando era calculado sobre o *PSI20*. Para o *DAX30*, o comportamento de ambas as medidas com ambos os modelos é análogo, mas, ocasionalmente com o *EGARCH-N*, obter-se-ão estimativas ligeiramente inferiores, transmitindo assim uma superficial superioridade na capacidade de cobertura do que com o *EGARCH-t*. Em adição, o *ES* apresenta resultados eminentes, cobrindo de forma mais completa as verdadeiras rendibilidades, dada a superioridade encontrada pelos gráficos face aos resultados obtidos pelo *VaR*.

Não se torna totalmente acessível comparar os resultados obtidos pelas medidas, dado que para o *VaR*, se consideraram os *MRS*, e sobretudo no *PSI20*. Contudo, verifica-se que inovações *t-Student* são as melhores para ajustar e prever tanto o *VaR* como o *ES*, tal como pressentido, devido às suas caudas pesadas, capturando assim os eventos mais extremos desta série portuguesa. No caso do *DAX30*, os resultados obtidos não eram então os ansiados, tendo em consideração a saliência da distribuição Gaussiana. Esta distribuição podia apenas ser considerada, devido ao facto de ter sido a eleita como uma das melhores quando se estava perante a análise dos testes de *backtesting* quando se pretendia calcular o *VaR*. Esperava-se um melhor desenvolvimento através da *t-Student*, mas, tal desfecho pode dever-se ao facto de, comparativamente ao *PSI20*, esta série possuir suficientemente menos leptocurtose e assimetria. Adicionando o facto de o *ES* ser uma medida de risco potente e que foi instituída para corrigir contrariedades do *VaR*, a Gaussiana poderá ser suficiente para estimar o risco futuro. Para o *PSI20*, que possui características mais extremas, tal distribuição, embora utilizada com tão possante medida, não será suficiente, para além de, esta distribuição não ter sido considerada como a mais favorável de uma forma mais recorrente como aconteceu com o *DAX30*.

O *ES* foi aquele que melhores resultados, em ambas as abordagens apresentou, uma vez que, graficamente, para além de evidenciar relativamente menos cruzamentos comparativamente ao *VaR*, as intersecções que existiam na anterior, conseguem ser mais frequentemente cobertas pelo *ES*. Este facto era também previsível, tendo em conta as desvantagens encontradas pelo *VaR*: o pior comportamento deve-se ao facto de esta não ser coerente, para além de não diferenciar duas perdas com diferentes comportamentos após o quantil limite e o *ES* corrige essa deficiência. A análise *out-of-sample* do *ES* não é realizada segundo testes próprios de *backtesting*, pelo que, a falha da propriedade de eliciável, não foi assim bastante sentida de forma a influenciar os resultados obtidos nos últimos gráficos referidos. Esta conclusão era plausível, sabendo desde o início que esta medida era mais potente e completa, uma vez que foi criada precisamente para corrigir as conclusões mais descartáveis que o *VaR* concedia, oferecendo assim interpretações mais favoráveis para qualquer instituição financeira, já que estas deverão estar conscientes da perda esperada no pior cenário existente e não na perda mínima que pode ocorrer.

Conclusão

Neste projecto foram comparados um conjunto de modelos *GARCH standard* e de *Markov Switching-GARCH*, em termos da sua habilidade na previsão de *Value-at-Risk* e de *Expected Shortfall*, ambas medidas de risco cuja função, de forma genérica, consiste na capturação das verdadeiras perdas a que uma instituição financeira esteja exposta, tendo sido assim empregues os modelos *GARCH(1,1)*, *GJR(1,1)*, *EGARCH(1,1)* e por último, o *MRS(1,1)*. Todos foram estimados a partir das distribuições Normal, *t-Student* e *GED*. Foram considerados tais trios, devido às características não-lineares eminentes nas séries financeiras, e observáveis no *PSI20*, de Portugal, e *DAX30* da Alemanha. Ao se assumir, pela primeira gama de modelos, que a variância não é constante ao longo do tempo, e no restante, que a média também não o será, foi possível com facilidade e eficiência incorporar tais particularidades. Estas foram plenamente visíveis a partir da (não) verificação dos pressupostos dos parâmetros estimados, que, habilmente reflectiram a boa capacidade dos *MRS* a estimar a volatilidade e como tal, nas previsões envolvidas.

Outro ideal deste projecto, foi o de comprovar alguns resultados teóricos já existentes, isto é, que os mais conceituados modelos de *MRS* sobressairiam, em qualquer abordagem e que, fazendo referência aos modelos uni-regimes, os *EGARCH* sejam os distintos. Por sua vez, os anteriores juntamente com distribuições com caudas mais pesadas como a *t-student* ou a *GED*, seriam propícios a melhores resultados. Ao mesmo tempo, dadas as lacunas encontradas pelo *VaR*, era expectável que o *ES* apresentasse melhores resultados de cobertura do verdadeiro risco envolvido.

Assim dividiu-se a amostra numa fracção de estimação e outra de previsão, denominadas por *in-sample* e *out-of-sample*, respectivamente. Pela primeira, estimaram-se os parâmetros que integram os dois tipos de modelos e que permitiram estimar a volatilidade e, a partir da segunda, foram previstas as perdas envolvidas por ambos os índices por parte de ambas as medidas. A última abordagem foi suportada para os *steps* temporais de curta dimensão, de um dia, intermédios, de uma e duas semanas, e nos mais longos, de um mês. Este método é útil pois, para além de uma análise e interpretação singular dos parâmetros e dos valores previstos, que são apenas elementos iniciais e sugestivos, se tornou necessário utilizar métodos empíricos que garantissem tais conclusões. Para tal, utilizaram-se *loss functions standard* de forma a avaliar a qualidade de ajuste dos parâmetros estimados por todos os modelos, e, de seguida, técnicas de *backtesting*, próprias para cada medida de risco, para classificar os valores de *VaR* previstos, pois, somente a partir de uma análise gráfica entre as rendibilidades dos índices e a estimação das mesmas pela medida, não se conseguiam retirar conclusões deveras consistentes. Para o *VaR* e para ambas as abordagens, analisaram-se, as duas gamas de modelos separadamente e só posteriormente se fez uma intersecção de resultados, de forma a chegar-se ao/s melhor/es modelo/s de previsão da medida, que por sua vez, apresentará também a melhor qualidade de parâmetros envolvidos. Dada a complexidade encontrada pelo *Expected Shortfall* e sobretudo quando adicionado ao modelo de regimes *switching*, para proceder à sua avaliação, recorreu-se, somente aos modelos mais sensatos e uni-regimes obtidos pelo *VaR*. Como tal, para esta medida, as conclusões *out-of-sample* compreendidas, foram consideradas também como as de *in-sample*.

De facto, as conclusões obtidas foram consistentes com as desejadas. Relativamente ao *VaR*, após a intersecção entre os resultados obtidos pelas duas abordagens, constatou-se que, de cada uma das gamas expostas, os *EGARCH* e *MRS*, com inovações provenientes da *t-Student*, seriam os que melhores resultados de qualidade de parâmetros e de previsão da medida apresentavam para o *DAX30*. Para o índice português, garantiram-se bons resultados apenas a partir do anterior segundo modelo, isto é, verificou-se um dos principais objectivos: o *MRS* superou todos os outros modelos envolvidos. Tais resultados foram retidos quando se utilizou o nível de confiança de 95%. Foi possível reparar-se que, os anteriores se deram mais favoravelmente na mais longa janela temporal e nos intermédios, de forma respectiva para o *DAX30* e para o *PSI20*. Ainda assim, nenhum horizonte temporal se valorizou de forma significativa em todos os modelos. Tais conclusões basearam-se, portanto, nas conclusões gerais obtidas por todos os modelos.

De facto, os modelos *GARCH* e *TARCH* não foram os mais valorizados ao longo das abordagens, uma vez que não conseguem ou capturar efeitos *leverage* ou devido à imposição de demasiadas restrições nos parâmetros, dificultando a sua estimação. Relativamente às distribuições

envolvidas, a *t-Student* foi a mais requisitada. A distribuição Normal não seria indicada, uma vez que poderia subestimar o risco, mas, no entanto, esperavam-se melhores comportamentos por parte da *GED*. Ambas as conclusões mais esperadas e que não se sucederam podem estar relacionadas com a utilização enorme dos dados históricos em questão, podendo assim esperarem-se demasiadas excepções devido à turbulência sentida em 2008 devido à crise financeira ocorrida. A partir desta esperança, que nem sempre se verificou neste período pós-crise, a *t-Student* tornou-se assim capaz de capturar todos os efeitos não-lineares existentes, não sendo assim necessária uma distribuição mais potente como a *GED*, devido ao facto de afinal existirem excepções mais e menos volumosas. Ainda que possam parecer minoritárias em certas datas, são suficientes para a Gaussiana não se conseguir adaptar.

Tendo em conta que pelo índice Português os uni-regimes não foram sensatos, unicamente através do *DAX30*, reparou-se que o *EGARCH-N*, foi seguidamente um dos modelos mais concorridos, eventualmente devido às anteriores suspeitas, ou também, devido a uma escolha menos eficiente da *loss function* utilizada. Como tal, esse e o mesmo com inovações *t*, foram os utilizados para o *ES*. Apenas uma das janelas temporais incorporadas para o *PSI20* foi considerada, pelo que, segundo a análise gráfica sobre o *VaR*, para esse índice, o modelo que conseguiria cobrir, ainda que de forma pouco reveladora, mais perdas, era com o período de duas semanas. Não tendo sido totalmente acessível comparar os resultados obtidos pelo *VaR* com os de *ES*, dada a incorporação dos *MRS*, na primeira e sobretudo no *PSI20*, verifica-se então que, para a anterior melhor confiança e horizontes temporais *Rolling* envolvidos, se considerou que para o índice português, os melhores resultados eram obtidos a partir do modelo *EGARCH-t*, enquanto para o alemão, era com a distribuição Gaussiana que se obtinham melhores resultados. Nesta análise, a distribuição Normal pareceu ter sucesso. Dada a unicidade da solução obtida na previsão do *VaR* através do *PSI20*, era plausível então, uma melhor *performance* a partir da *t-Student*, devendo-se tal ao facto de apresentar tais fulcrais características de não-linearidade, das visíveis, relativamente superiores às do *DAX30*. Dessa forma, adicionando a uma medida extremamente potente, distribuições como a Gaussiana, pouco pesada, poderá ser suficiente para capturar os diversos efeitos envolvidos nas séries, tal como aconteceu com o *DAX30*, que apresentou uma suficiente minoria face ao *PSI20*, sendo assim aquela suficiente. Por último, através de análises gráficas, constatou-se que, de facto, o *ES* é a medida de risco mais eficaz, conseguindo cobrir não só a maioria das perdas, mas de forma mais ágil, em alguns casos, do que o *VaR*. Tal é favorável para qualquer instituição financeira, já que estas deverão estar consientes da perda esperada no pior cenário existente e não na perda mínima que pode ocorrer, sendo esta mais sensível e confiável.

Uma linha natural para futuras investigações, poderá ser um desenvolvimento do estudo acerca dos métodos de estimação da volatilidade condicional, de modo a que não tenha de ser efectuada uma escolha subjectiva de funções, permitindo assim que se consigam obter juntamente com a estrutura *out-of-sample* procedimentos que correctamente identifiquem os melhores modelos de previsão da medida de risco implícita.

Referências Bibliográficas

- [1] *A Alemanha e a crise: vitórias pírricas*. (2013). Nueva Sociedad: 0251-3552. Disponível em: <http://nuso.org/articulo/a-alemanha-e-a-crise-vitorias-pirricas/>
- [2] Albuquerque. C. (2015). *Modelagem em séries temporais aplicados a dados climatológicos no sertão paraibano*. Trabalho de conclusão de curso. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/8188>
- [3] Amaro. R. (2016). *Comparação da Capacidade Preditiva de Modelos heterocedásticos através da estimação do Value-at-Risk*. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <http://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/4791/AMARO,%20RAPHAEL%20SILVEIRA.pdf?sequence=1>
- [4] Angelidis. T., Benos. A. & Degiannakis. S. (2004). *The Use of GARCH Models in VaR Estimation. Paper*. Disponível em: <http://macro.soc.uoc.gr/8conf/docs/The%20Use%20of%20GARCH%20Models%20in%20VaR%20Estimation.pdf>
- [5] Artzner. P., Delbaen. F., Eber. M. & Heath. D. (1997). *Thinking coherently*.
- [6] Augustsson. V. (2014). *Evaluating Switching GARCH Volatility Forecasts During the Recent Financial Crisis*. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <http://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordId=4739052&fileId=4739237>
- [7] Azzalini. A. & Valle. B. (2013). *Maximum penalized likelihood estimation for skew-normal and skew-t distributions*. Journal of Statistical Planning and Inference, N.º 143: 419-433. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1203.2376.pdf>
- [8] Bartlett. J. (2018). *Probability concepts explained: Maximum likelihood estimation*. Towards Data Science. Disponível em: <https://towardsdatascience.com/probability-concepts-explained-maximum-likelihood-estimation-c7b4342fdbb1>
- [9] Birtoiu. A. & Dragu. F. (2012). *The performance of time-varying volatility and regime switching models in estimating Value-at-Risk*. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <http://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordId=2856253&fileId=2856254>
- [10] Bollerslev. T. (1986). *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. Paper. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/7da8/bfa5295375c1141d797e80065a599153c19d.pdf>
- [11] Brandel. S. (2017). *Markov Regime Switching Model: Implementation to the Stockholm Stock Market & Comparison with Equal Weight Portfolio*. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <http://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordId=8902642&fileId=8902647>
- [12] *Bretton Woods system*. Wikipedia: a enciclopédia livre. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Bretton_Woods_system
- [13] Brooks. C. & Persaud. G. (2003). *Volatility forecasting for risk management*. Journal of Forecasting, Vol. 22, N.º 1: 1-22. Disponível em:

<https://pages.nes.ru/agoriaev/Papers/Brooks-Persand%20Volatility%20Forecasting%20for%20Risk%20Management%20JFc03.pdf>

- [14] Candelon. B., Colletaz. G., Hurlin. C. & Tokpavi. S. (2011). *Backtesting Value-at-Risk: A GMM Duration-based Test*. Journal of Financial Econometrics. Disponível em: <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00329495/document>
- [15] Carvalho. V. P. (2017). Material apresentado para a disciplina de Risco de Mercado no curso de Matemática Financeira (Português) do Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa.
- [16] Ceretta. P. & Righi. M. (2013). *Individual and Flexible Expected Shortfall Backtesting*. *Individual and Flexible Expected Shortfall Backtesting*. Journal of Risk Model Validation, N.º: 7, Vol: 3, Páginas: 3-20, Disponível em: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2155659
- [17] Chague. F. (2018). Econometria IV. Expected Shortfall e Value at Risk. 18 Slides. Apresentação em PowerPoint. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2155878/mod_resource/content/0/Topico7_WS.pd
- [18] Christoffersen. P. (1998). *Evaluating Interval Forecasts*. International Economic Review, Vol. 39, N.º 4. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/pdf/2527341.pdf?refreqid=excelsior%3Aed95824f534ad3129bde67efcb602095>
- [19] Costa. A. (2012). *A influência dos parâmetros nas estimativas VAR - caso prático*. Dissertação de Mestrado. Disponível em: http://recipp.ipp.pt/bitstream/10400.22/1142/1/DM_AntonioCosta_2012.pdf
- [20] Costa. S. (2014). *IMPACTO DA CRISE NA PERFORMANCE ECONÓMICO-FINANCEIRA DAS EMPRESAS*. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/7946/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20Sandra%20PDF%20corrigido.pdf>
- [21] *Crise da dívida pública da Zona Euro*. Wikipedia: a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Crise_da_d%C3%ADvida_p%C3%BAblica_da_Zona_Euro
- [22] *Crise econômica de 2007-2008*. Wikipedia: a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Crise_econ%C3%B4mica_de_2007%E2%80%932008
- [23] *Crise financeira em Portugal de 2010-2014*. Wikipedia: a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Crise_financeira_em_Portugal_de_2010%E2%80%932014
- [24] Danielsson. J. (2011). *Financial Risk Forecasting*. Wiley Finance.
- [25] De La Rocque. E. (1997). *A Vedete do Controle de Riscos*. Revista Bovespa, N.º 47: 50-52.
- [26] Economias (2016). *PSI-20*. Jornal online. Disponível em: <https://www.economias.pt/PSI-20/>
- [27] Engle. R. (1982). *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. Econometrica, Vol. 50, N.º 4. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/1912773?seq=1#metadata_info_tab_contents

- [28] *Entenda o que causou a crise financeira de 2008.* (2016). UOL economia. Disponível em: <https://economia.uol.com.br/noticias/redacao/2016/02/27/entenda-o-que-causou-a-crise-fiNaNceira-de-2008.htm>
- [29] Furriel. A. (2011). *Modelos Heterocedásticos - ARCH e GARCH.* Dissertação de Mestrado. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/57365/2/TeseMestradoMargaridaSepulveda.pdf>
- [30] Gameiro. A. (2017). *AVALIAÇÃO EMPÍRICA DO RISCO DE MERCADO: EXPECTED SHORTFALL vs. VALUE-AT-RISK.* Dissertação de Mestrado. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/30269/1/ulfc120803_tm_Ana_Gameiro.pdf
- [31] Giller. G. *A GENERALIZED ERROR DISTRIBUTION.* Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.542.879&rep=rep1&type=pdf>
- [32] Glosten. L., Jagannathan. R. & Runkle. D. (1993). *Relationship between the expected value and volatility of the nominal excess returns on stocks.* Journal of Finance, N.º 48: 1779-1802.
- [33] Gray. (1996). *Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime Switching Process.* Journal of Econometrics, Vol. 42. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/3972/480deaaa65c9ddd726892429292d3c2bef81.pdf>
- [34] Günay. S. (2015). *Markov Regime Switching Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Model and Volatility Modeling for Oil Returns.* International Journal of Energy Economics and Policy, N.º 5: 979-985, Vol: 4. Disponível em: <https://www.econjournals.com/index.php/ijeep/article/viewFile/1351/854>
- [35] Gustafsson. M. & Lundberg. C. (2009). *Empirical evaluation of Value-at-Risk.* Dissertação de mestrado. Disponível em: https://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/19299/1/gupea_2077_19299_1.pdf
- [36] Hamilton. D. & Susmel. R. (1994). *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime.* Journal of Econometrics, N.º 64: 307-333.
- [37] Hamilton. D. (1989). *A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle.* Econometrica, Vol. 57, N.º 2.
- [38] Hjalmarsson. L. (2014). *A Regime Switching Model - Applied to the OMXS3 and Nikkei 225 indices.* Dissertação de Mestrado. Disponível em: https://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/36513/1/gupea_2077_36513_1.pdf
- [39] *Human in a MAchine World. MAE and RMSE - Which Metric is better?* Disponível em: <https://medium.com/human-in-a-machine-world/mae-and-rmse-which-metric-is-better-e60ac3bde13d>
- [40] Hurlin. C. & Tokpavi. S. (2006). *Backtesting Value-at-Risk accuracy: A simple new test.* Journal of Risk, N.º 9: 19-37. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/258049597_Backtesting_Value-at-Risk_Accuracy_A_New_Simple_Test
- [41] Iqbal. F. (2016). *Forecasting Volatility and Value-at-Risk of Pakistan Stock Market with Markov Regime-Switching GARCH Models.* European Online Journal of Natural and Social Sciences 2016. Disponível em:

- https://www.researchgate.net/publication/301695847_Forecasting_Volatility_and_Value-at-Risk_of_Pakistan_Stock_Market_with_Markov_Regime-Switching_GARCH_Models
- [42] Janczura. J. & Weron. R. (2011). *Efficient estimation of Markov regime-switching models: An application to electricity spot prices*. Original Paper. Disponível em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs10182-011-0181-2.pdf>
- [43] Kirchner. R., Souza. R. & Ziegelmann. F. (2008). *Identificação de estruturas não-lineares de séries temporais através de regressão linear local e modelos aditivos*. European Online Journal of Natural and Social Sciences, N.º 1: 172-189, Vol: 5. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-74382008000100003
- [44] Klassen. F. (2002). *Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime Switching GARCH*. Paper. Disponível em: https://pure.uva.nl/ws/files/3524906/21100_v60.pdf
- [45] Klotzle. M., Moraes. A & Pinto. A. (2015). *Previsão de Value-at-Risk e expected shortfall para mercados emergentes usando modelos FIGARCH (Forecasting Value-at-Risk and expected shortfall for emerging markets using FIGARCH models)*. Artigo. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rbfin/article/viewFile/53080/56147>
- [46] Kupiec. P. (1995). *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models*. Journal of Derivatives, N.º 3: 73-84.
- [47] Leal. A. (2013). *APLICAÇÃO DE MODELOS DE VALUE-AT-RISK COM QUEBRA DE ESTRUTURA A RENDIBILIDADES DO MERCADO ACIONISTA PORTUGUÊS*. Dissertação de Mestrado. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/10366/1/ulfc106229_tm_Aida_Leal.pdf
- [48] Marques. M. (2017). *APLICAÇÃO DOS MODELOS GARCH, E GARCH E TGARCH NO DAX - 30*. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <https://repositorio.ipl.pt/bitstream/10400.21/7211/1/Aplica%C3%A7%C3%A3o%20dos%20modelos%20GARCH%20e%20TGARCH%20no%20DAX%2030%20-%20Marta%20Marques.pdf>
- [49] Marcucci. J. (2005). *Forecasting Stock Market Volatility with Regime-Switching GARCH Models*. Paper. Disponível em: http://www.greta.it/jae/poster/10_2_Marcucci.pdf
- [50] Matlou. K. & Yadavalli. L. *Regime switching model of stock market volatility*.
- [51] Mendes. A. D. (Setembro de 2017). Material apresentado para a disciplina de Econometria dos Mercados Financeiros no curso de Matemática Financeira (Português) do Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa.
- [52] *Metallgesellschaft*. Wikipedia: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Metallgesellschaft>
- [53] Morais. I., Schuck. G. & Stona. F. (2016). *Econometria Aplicada no Eviews*. Livro. Disponível em: <https://www.fee.rs.gov.br/wp-content/uploads/2016/10/20161031livro-econometria-aplicada-no-eviews-isbn-978-85-7173-141-7.pdf>
- [54] Mouralinho. S. (2010). *A PERFORMANCE DE MODELOS ALTERNATIVOS DA ESTIMAÇÃO DO VALUE-AT-RISK*. Relatório de Projecto. Disponível em: <https://repositorio.iscte-iul.pt/bitstream/10071/4230/1/Tese.pdf>

- [55] Nelson. D. (1991). *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*. *Econometrica*, Vol. 59, N.º 2. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/2938260?seq=1#metadata_info_tab_contents
- [56] Nieppola. O. (2009). *Backtesting Value-at-Risk Models*. Tese de Mestrado. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/5fbb/f20d7f3e03c4da3a9d33aa618fdfe5d0a9d4.pdf>
- [57] *Nikkei 225*. Wikipedia: a enciclopédia livre. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Nikkei_225
- [58] Nocera. J. (2009). *Risk Mismanagement*. *The New York Times Magazine*. Disponível em: <http://www.nytimes.com/2009/01/04/magazine/04risk-t.html>
- [59] *O índice DAX*. Plataforma de Negócio. Ufx. Disponível em: <https://www.ufx.com/pt-br/ativos/indicadores/DAX/>
- [60] *OMX Stockholm 30*. Wikipedia: a enciclopédia livre. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/OMX_Stockholm_30
- [61] Osmundsen. K. (2016). *Credit risk modeling with expected shortfall-a simulation based portfolio analysis*. Dissertação de mestrado. Disponível em: https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/2407353/14708_FULLTEXT.pdf?sequence=1
- [62] Pagan. R. & Schwert. G. (1990). *Alternative models for conditional volatility*. *Journal of Econometrics*, N.º 45: 267-290.
- [63] Pemberton. J. & Tong. H. (1981). *A Note on the Distributions of Non-linear Autoregressive Stochastic Processes*.
- [64] Pochmann. M. (2015). *Seis anos após início da crise, economia mundial segue fragilizada*.
- [65] *Rede Brasil Atual*. Disponível em: <http://www.redebrasilatual.com.br/blogs/blog-na-rede/2015/02/restricoes-ao-crescimento-482.html>
- [66] Reher. G. & Wilfling. B. (2011). *Markov-switching GARCH models in finance: a unifying framework with an application to the German stock market*. Paper. Disponível em: https://www.wiwi.uni-muenster.de/cqe/sites/cqe/files/CQE_Paper/CQE_WP_17_2011.pdf
- [67] Righi. M & Ceretta. P. (2013). Individual and flexible expected shortfall backtesting. *Journal of Risk Model Validation*, Vol. 7, N.º 3: 3-20.
- [68] Roccioletti. S. (2016). *Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall*. Vienna, Austria: Springer Gabler.
- [69] Sarma. M., Thomas. S. & Shah. A. (2003). *Selection of value at risk Models*. *Journal of forecasting*, Vol. 22, N.º 4: 337-358.
- [70] Simons. K. (2000). *The use of Value at Risk by Institutional Investors*. *New England Economic Review*. Disponível em: <https://www.bostonfed.org/publications/new-england-economic-review/2000-issues/issue-november-december-2000/the-use-of-value-at-risk-by-institutional-investors.aspx>

- [71] Tasche. D. (2014). *Expected Shortfall is not elicitable - so what?*. Hannover. 29 de Slides. Apresentação em PowerPoint. Disponível em: https://www.stochastik.uni-hannover.de/fileadmin/institut/pdf/Talk_Tasche.pdf
- [72] Whittle. P. (1951). *Hypothesis testing in times series analysis*. Tese de Doutorado. Uppsala: Almqvist & Wiksells.

ANEXO 1.

Sample: 1/01/1993 1/31/2017

Included observations: 6283

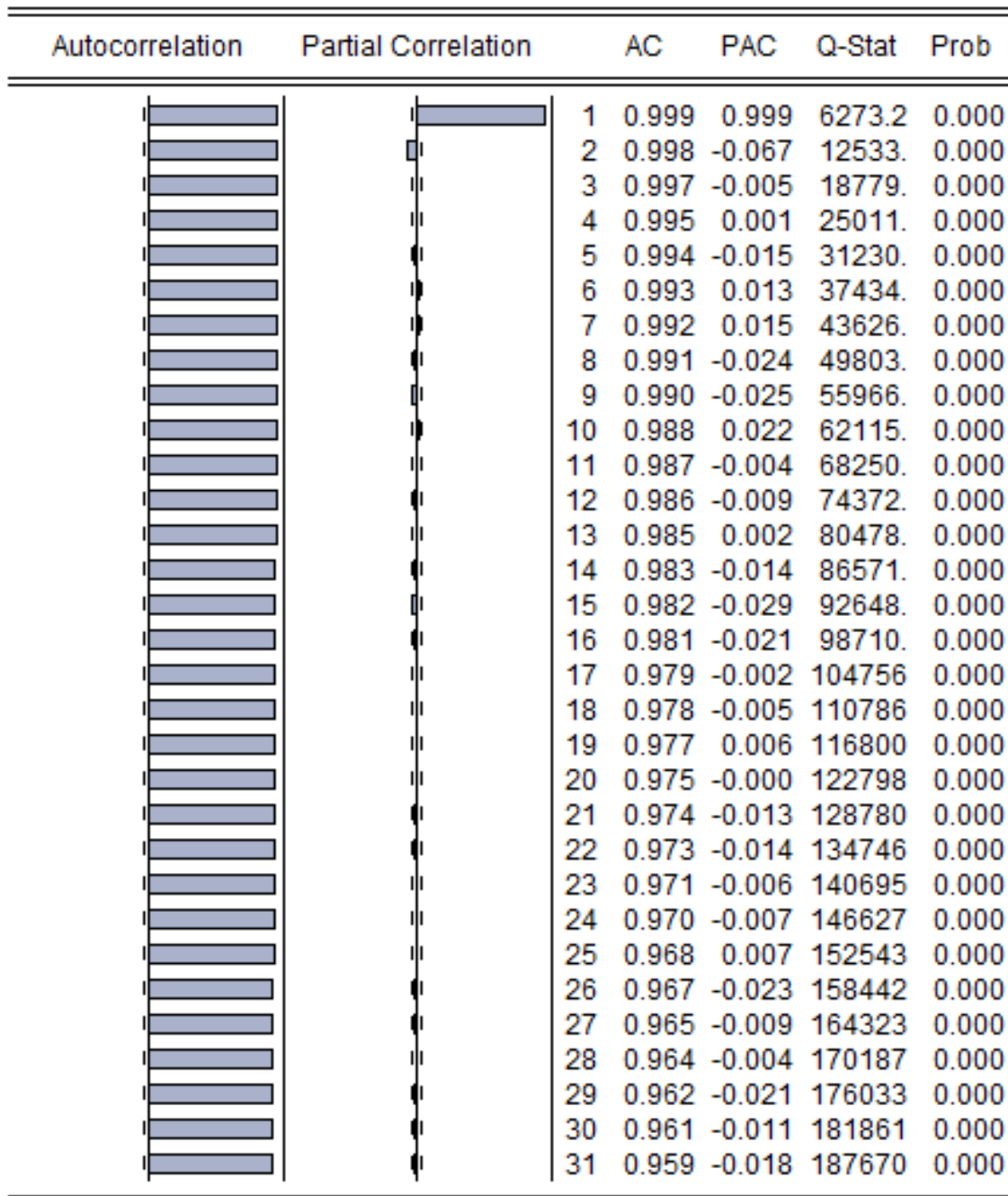


Figura 1.1. Correlograma da série *PSI20* em nível.
(Com os dados originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *EViews*).

Sample: 1/01/1993 1/31/2017

Included observations: 6283

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.999	0.999	6273.4	0.000
		2	0.998	-0.002	12535.	0.000
		3	0.997	0.002	18785.	0.000
		4	0.996	0.017	25024.	0.000
		5	0.995	-0.005	31252.	0.000
		6	0.994	0.028	37469.	0.000
		7	0.993	0.002	43676.	0.000
		8	0.992	-0.004	49872.	0.000
		9	0.991	0.008	56058.	0.000
		10	0.990	0.003	62233.	0.000
		11	0.990	0.009	68399.	0.000
		12	0.989	-0.006	74554.	0.000
		13	0.988	-0.001	80699.	0.000
		14	0.987	0.009	86834.	0.000
		15	0.986	0.001	92960.	0.000
		16	0.985	-0.012	99075.	0.000
		17	0.984	-0.009	105180	0.000
		18	0.983	-0.011	111274	0.000
		19	0.982	0.008	117358	0.000
		20	0.981	0.014	123431	0.000
		21	0.981	-0.009	129494	0.000
		22	0.980	-0.014	135547	0.000
		23	0.979	0.002	141589	0.000
		24	0.978	0.001	147621	0.000
		25	0.977	0.011	153642	0.000
		26	0.976	-0.012	159653	0.000
		27	0.975	-0.001	165654	0.000
		28	0.974	-0.007	171644	0.000
		29	0.973	-0.004	177623	0.000
		30	0.972	-0.006	183591	0.000
		31	0.971	-0.003	189549	0.000

Figura 1.2. Correlograma da série *DAX30* em nível.
(Com os dados originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *EViews*).

Sample: 1/01/1993 1/31/2017
 Included observations: 6282

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.086	0.086	46.432	0.000
		2	0.019	0.011	48.654	0.000
		3	-0.003	-0.006	48.728	0.000
		4	0.020	0.021	51.340	0.000
		5	-0.016	-0.019	52.876	0.000
		6	-0.025	-0.023	56.720	0.000
		7	0.031	0.036	62.844	0.000
		8	0.033	0.027	69.570	0.000
		9	-0.023	-0.030	73.022	0.000
		10	-0.000	0.004	73.023	0.000
		11	0.011	0.009	73.724	0.000
		12	0.004	0.001	73.813	0.000
		13	0.017	0.020	75.528	0.000
		14	0.039	0.036	85.135	0.000
		15	0.045	0.034	97.718	0.000
		16	0.014	0.007	98.866	0.000
		17	0.006	0.005	99.071	0.000
		18	-0.007	-0.010	99.378	0.000
		19	-0.006	-0.005	99.585	0.000
		20	0.010	0.014	100.25	0.000
		21	0.022	0.019	103.35	0.000
		22	0.012	0.005	104.27	0.000
		23	0.007	0.004	104.61	0.000
		24	-0.012	-0.014	105.59	0.000
		25	0.034	0.036	113.03	0.000
		26	0.011	0.007	113.84	0.000
		27	0.011	0.007	114.57	0.000
		28	0.029	0.024	119.73	0.000
		29	0.023	0.013	122.96	0.000
		30	0.027	0.022	127.65	0.000
		31	0.002	-0.000	127.68	0.000

Figura 1.3. Correlograma da série *PSI20* integrada de ordem um.
 (Com os dados originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *EViews*).

Sample: 1/01/1993 1/31/2017
 Included observations: 6282

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.002	-0.002	0.0344	0.853
		2	-0.014	-0.014	1.1914	0.551
		3	-0.031	-0.031	7.0483	0.070
		4	0.003	0.003	7.1190	0.130
		5	-0.034	-0.035	14.570	0.012
		6	0.001	0.000	14.579	0.024
		7	0.005	0.004	14.752	0.039
		8	-0.007	-0.009	15.036	0.058
		9	-0.013	-0.013	16.168	0.063
		10	-0.011	-0.012	16.962	0.075
		11	0.020	0.019	19.509	0.053
		12	-0.007	-0.007	19.777	0.071
		13	-0.009	-0.010	20.299	0.088
		14	0.003	0.003	20.360	0.119
		15	0.018	0.017	22.441	0.097
		16	0.020	0.021	25.015	0.070
		17	0.014	0.015	26.305	0.069
		18	-0.017	-0.016	28.052	0.061
		19	-0.014	-0.012	29.294	0.061
		20	0.020	0.022	31.919	0.044
		21	0.006	0.006	32.148	0.057
		22	0.004	0.004	32.243	0.073
		23	0.006	0.007	32.509	0.090
		24	-0.014	-0.014	33.803	0.088
		25	0.016	0.019	35.361	0.082
		26	0.002	0.002	35.379	0.104
		27	0.012	0.011	36.356	0.108
		28	0.005	0.006	36.516	0.130
		29	0.011	0.012	37.248	0.140
		30	0.007	0.010	37.577	0.161
		31	-0.007	-0.007	37.844	0.185

Figura 1.4. Correlograma da série *DAX30* integrada de ordem um.
 (Com os dados originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *EViews*).

ANEXO 2.

Sample: 1/01/1993 1/31/2017
Included observations: 6283

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.202637	0.000931	217.5705	0.0000
3	0.344543	0.001473	233.9026	0.0000
4	0.443442	0.001745	254.0719	0.0000
5	0.512089	0.001810	282.9324	0.0000
6	0.559562	0.001737	322.2306	0.0000

Raw epsilon	4681.088			
Pairs within epsilon	27712547	V-Statistic	0.702008	
Triples within epsilon	1.31E+11	V-Statistic	0.529725	

<u>Dimension</u>	<u>C(m,n)</u>	<u>c(m,n)</u>	<u>C(1,n-(m-1))</u>	<u>c(1,n-(m-1))</u>	<u>c(1,n-(m-1))^k</u>
2	13719695	0.695421	13849214	0.701986	0.492784
3	13618463	0.690509	13845324	0.702012	0.345966
4	13531980	0.686343	13841314	0.702032	0.242901
5	13454694	0.682640	13837346	0.702055	0.170551
6	13384999	0.679321	13833364	0.702076	0.119758

Figura 2.1. Teste de *BDS* sobre o *PSI20*.

(Com os dados originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *EViews*).

Sample: 1/01/1993 1/31/2017
Included observations: 6283

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.023613	0.001156	20.42060	0.0000
3	0.045075	0.001832	24.60002	0.0000
4	0.061299	0.002176	28.17342	0.0000
5	0.070686	0.002261	31.25630	0.0000
6	0.074654	0.002175	34.32428	0.0000

Raw epsilon	0.017018			
Pairs within epsilon	27706684	V-Statistic	0.702083	
Triples within epsilon	1.34E+11	V-Statistic	0.538743	

<u>Dimension</u>	<u>C(m,n)</u>	<u>c(m,n)</u>	<u>C(1,n-(m-1))</u>	<u>c(1,n-(m-1))</u>	<u>c(1,n-(m-1))^k</u>
2	10185462	0.516443	13845440	0.702018	0.492829
3	7715385.	0.391325	13844695	0.702204	0.346250
4	5999874.	0.304411	13839915	0.702185	0.243112
5	4755412.	0.241349	13834744	0.702146	0.170663
6	3829871.	0.194437	13829426	0.702100	0.119783

Figura 2.2. Teste de *BDS* sobre as rendibilidades do *PSI20*.

(Com os dados originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *EViews*).

Sample: 1/01/1993 1/31/2017
Included observations: 6283

Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
2	0.203058	0.000589	344.9188	0.0000
3	0.345713	0.000930	371.6823	0.0000
4	0.445582	0.001100	404.8986	0.0000
5	0.515293	0.001139	452.2775	0.0000
6	0.563835	0.001091	516.7131	0.0000

Raw epsilon	5060.011			
Pairs within epsilon	27759813	V-Statistic	0.703206	
Triples within epsilon	1.28E+11	V-Statistic	0.517829	

Dimension	C(m,n)	c(m,n)	C(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1))^k
2	13763180	0.697625	13874245	0.703255	0.494567
3	13680660	0.693663	13871729	0.703351	0.347950
4	13613039	0.690454	13869310	0.703452	0.244872
5	13553881	0.687673	13866886	0.703554	0.172380
6	13501214	0.685219	13864487	0.703656	0.121384

Figura 2.3. Teste de BDS sobre o DAX30.
(Com os dados originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no EViews).

Sample: 1/01/1993 1/31/2017
Included observations: 6283

Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.
2	0.017786	0.001141	15.58677	0.0000
3	0.038824	0.001809	21.45771	0.0000
4	0.055151	0.002150	25.65265	0.0000
5	0.064410	0.002236	28.80461	0.0000
6	0.068941	0.002152	32.03669	0.0000

Raw epsilon	0.019728			
Pairs within epsilon	27729500	V-Statistic	0.702662	
Triples within epsilon	1.34E+11	V-Statistic	0.538950	

Dimension	C(m,n)	c(m,n)	C(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1))^k
2	10085744	0.511387	13856276	0.702568	0.493601
3	7602908	0.385620	13851965	0.702573	0.346796
4	5887987	0.298734	13846612	0.702525	0.243583
5	4639754	0.235479	13841323	0.702480	0.171069
6	3725539	0.189140	13837430	0.702507	0.120199

Figura 2.4. Teste de BDS sobre as rendibilidades do DAX30.
(Com os dados originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no EViews).

Tabela 2.1. Estimativas dos parâmetros estimados e respectivo desvio-padrão sobre as rendibilidades do *PSI20* de modelos de regimes simples.

Equação	Parâmetro	<i>GARCH</i>			<i>EGARCH</i>			<i>GJR</i>		
		<i>N</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>N</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>N</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>
r_t	ϕ_0	0.0003 (0.0001)	0.0004 (0.0001)	0.0003 (0.0001)	9.99E-05* (0.0001)	0.0001* (0.0001)	0.0001* (0.0001)	9.51E-05* (0.0001)	0.0002* (0.0001)	0.0001* (0.0001)
	ϕ_1	0.4487 (0.0986)	0.4615 (0.1048)	0.4944 (0.1053)	0.5043 (0.0965)	0.4869 (0.0965)	0.5048 (0.0982)	0.4220 (0.0915)	0.0878 (0.0146)	0.4257 (0.1064)
	ε_1	-0.3653 (0.1030)	-0.3922 (0.1091)	-0.4350 (0.1095)	-0.4176 (0.1013)	-0.4079 (0.1013)	-0.4356 (0.1027)	-0.3300 (0.0957)	-	-0.3546 (0.1104)
σ_t^2	θ_0	2.62E-06 (2.62E-06)	2.65E-06 (5.87E-07)	2.66E-06 (5.88E-07)	-0.3269 (0.0267)	-0.3456 (0.0394)	-0.3390 (0.0388)	3.10E-06 (3.84E-07)	3.28E-06 (5.72E-07)	3.12E-06 (5.51E-07)
	θ_1	0.0934 (0.0934)	0.0943 (0.0092)	0.0941 (0.0087)	-	-	-	0.0352 (0.0064)	0.0391 (0.0096)	0.0370 (0.0093)
	β_1	0.8952 (0.0062)	0.8945 (0.0095)	0.8941 (0.0094)	0.9766 (0.0026)	0.9754 (0.0038)	0.9758 (0.0037)	0.8996 (0.0062)	0.8944 (0.0093)	0.8978 (0.0091)
	γ	-	-	-	0.1569 (0.0100)	0.1668 (0.0160)	0.1630 (0.0152)	0.0958 (0.0098)	0.0958 (0.0140)	0.0944 (0.0137)
	α	-	-	-	-0.0761 (0.0067)	-0.0752 (0.0096)	-0.0746 (0.0094)	-	-	-
	ν	-	7.5565 (0.7977)	1.4279 (0.0369)	-	8.4257 (0.9596)	1.4715 (0.0380)	-	8.1697 (0.8979)	1.4595 (0.0372)

(Posteriormente à quebra de estrutura, realizado no *EViews*. Em asterisco (*), simbolizam-se os parâmetros cujos *p-value* não conduzem à rejeição da hipótese nula a 5% de significância).

Tabela 2.2. Estimativas dos parâmetros estimados e respectivo desvio-padrão sobre as rendibilidades do *DAX30* de modelos de regimes simples.

Equação	Parâmetro	<i>GARCH</i>			<i>EGARCH</i>			<i>GJR</i>		
		<i>N</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>N</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>N</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>
r_t	ϕ_0	0.0006 (0.0001)	0.0006 (0.0001)	0.0007 (0.0001)	0.0003* (0.0001)	0.0004 (0.0001)	0.0004 (0.0001)	0.0002* (0.0001)	0.0004 (0.0001)	0.0004 (0.0001)
	ϕ_1	-0.9342 (0.0704)	-0.9440 (0.0692)	0.8203 (0.1105)	-0.9483 (0.0662)	-	0.8037 (0.1724)	-	-	0.8074 (0.1448)
	ε_1	0.9248 (0.0755)	0.9367 (0.0737)	-0.8371 (0.1055)	0.9415 (0.0704)	-	-0.8075 (0.1710)	-	-	-0.9161 (0.1418)
σ_t^2	θ_0	2.66E-06 (4.84E-07)	2.10E-06 (5.59E-07)	2.38E-06 (6.19E-07)	-0.2586 (0.0211)	-0.2335 (0.0265)	-0.2464 (0.0281)	3.31E-06 (4.41E-07)	5.29E-07 (5.29E-07)	3.14E-06 (5.65E-07)
	θ_1	-0.9342 (0.0053)	0.0747 (0.0076)	0.0780 (0.0077)	-	-	-	0.0189 (0.0050)	0.010699* (0.007433)	0.0149 (0.0073)
	β_1	0.9248 (0.0061)	0.9175 (0.0082)	0.9134 (0.0086)	0.9821 (0.0020)	0.9844 (0.0024)	0.9832 (0.0026)	0.9125 (0.0060)	0.9172 (0.0080)	0.9150 (0.0083)
	γ	-	-	-	-0.0825 (0.0060)	-0.0886 (0.0086)	-0.0853 (0.0086)	0.1078 (0.0088)	0.1162 (0.0130)	0.1103 (0.0125)
	α	-	-	-	0.1363 (0.0099)	0.1277 (0.0137)	0.1320 (0.0139)	-	-	-
	ν	-	9.0997 (1.0931)	1.4764 (0.0384)	-	9.5445 (1.1675)	1.5105 (0.0391)	-	9.6754 (1.1577)	1.5089 (0.0383)

(Posteriormente à quebra de estrutura, realizado no *EViews*. Em asterisco (*), cujos *p-value* não conduzem à rejeição da hipótese nula a 5% de significância).

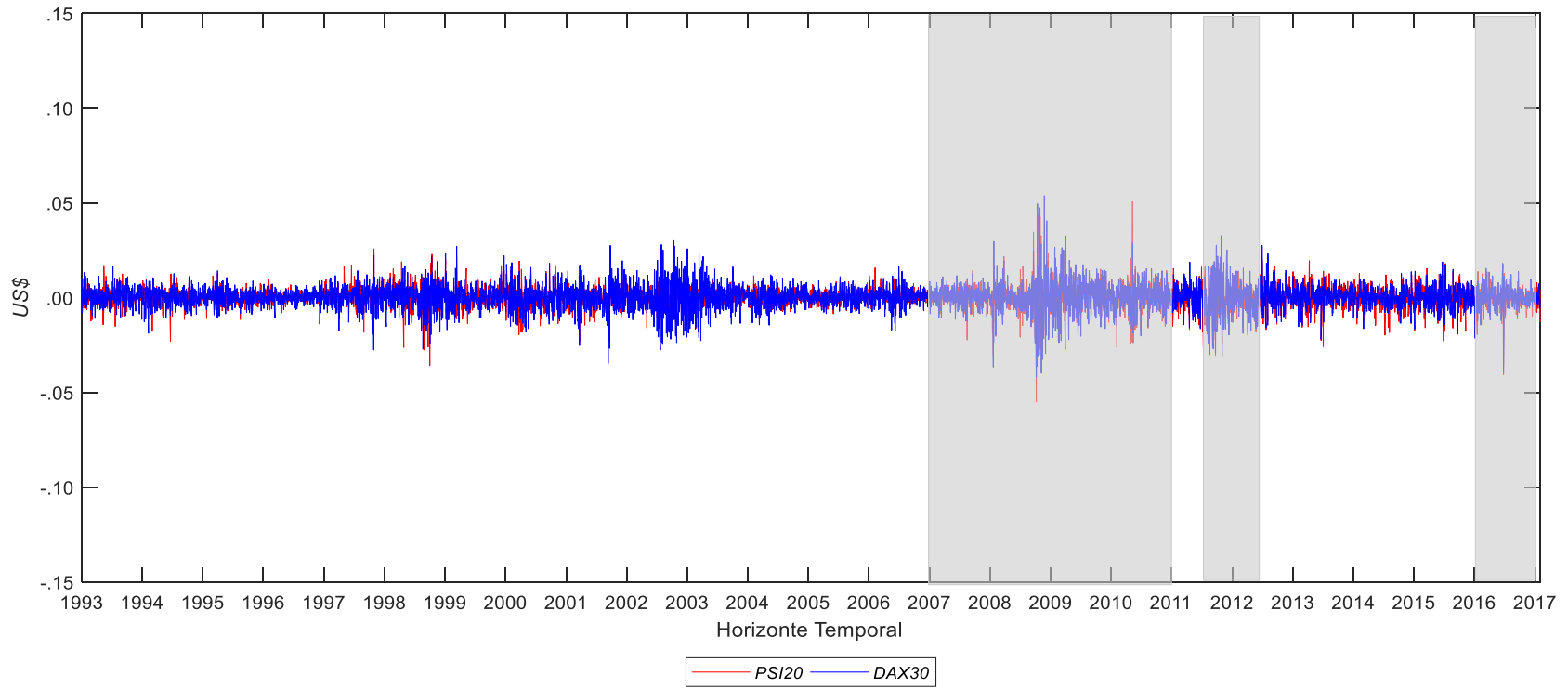


Figura 2.5. Períodos de mercado "bull" e "bear" sobre as rendibilidades do *PSI20* e *DAX30*.
(Com os dados originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *MATLAB*).

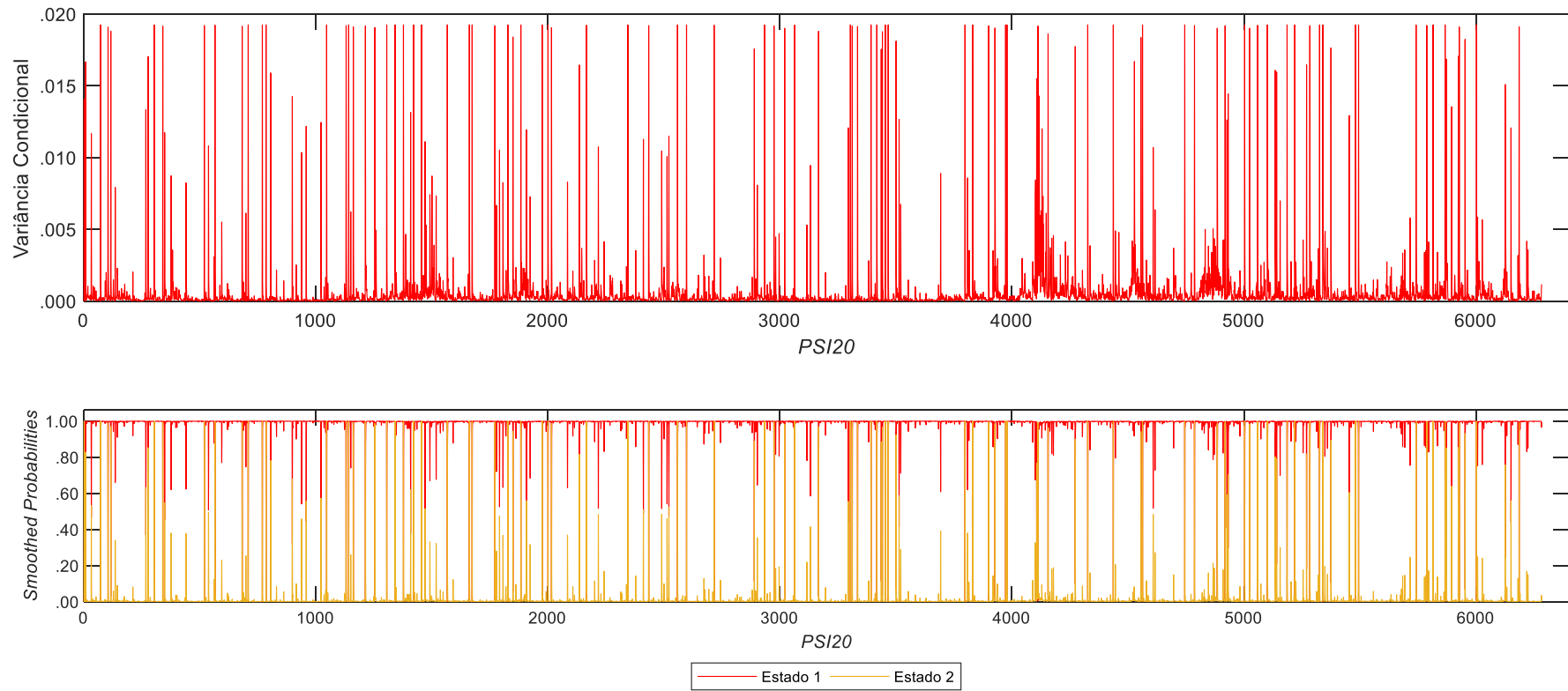


Figura 2.6. Variância Condicional e *Smoothed Probabilities* sobre as rendibilidades do *PSI20* associado à distribuição Gaussiana. Com os retornos originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *MATLAB*).

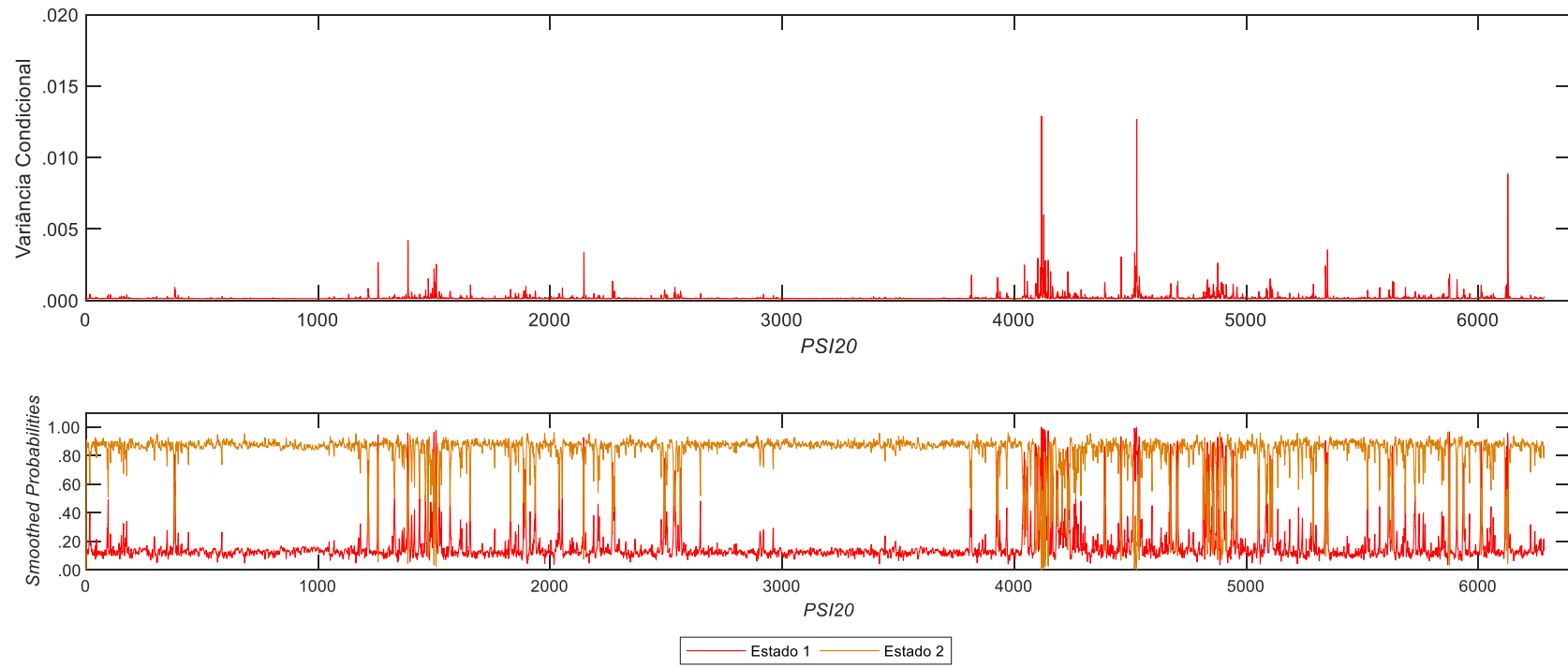


Figura 2.7. Variância Condicional e *Smoothed Probabilities* sobre as rendibilidades do *PSI20* associado à distribuição *t-Student*.
(Com os retornos originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *MATLAB*).

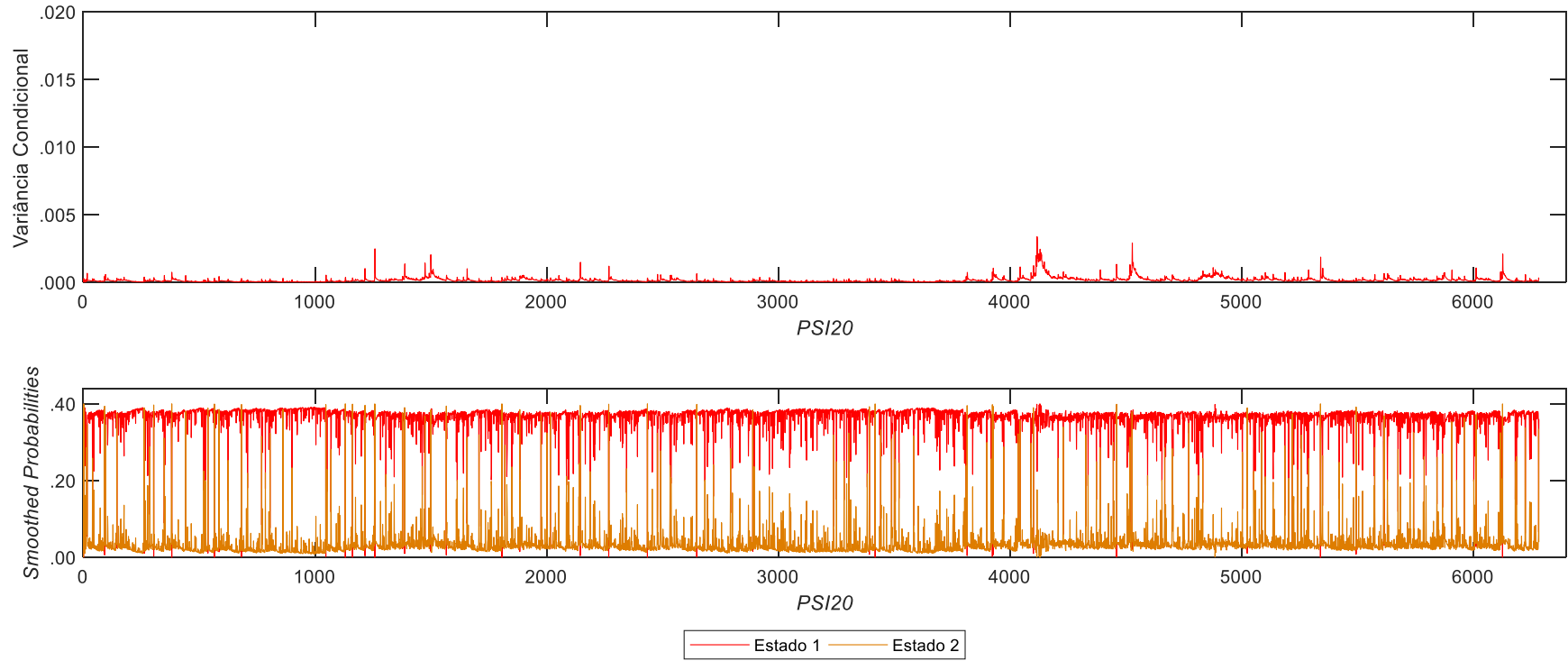


Figura 2.8. Variância Condicional e *Smoothed Probabilities* sobre as rendibilidades do *PSI20* associado à distribuição *GED*.
(Com os retornos originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *MATLAB*).

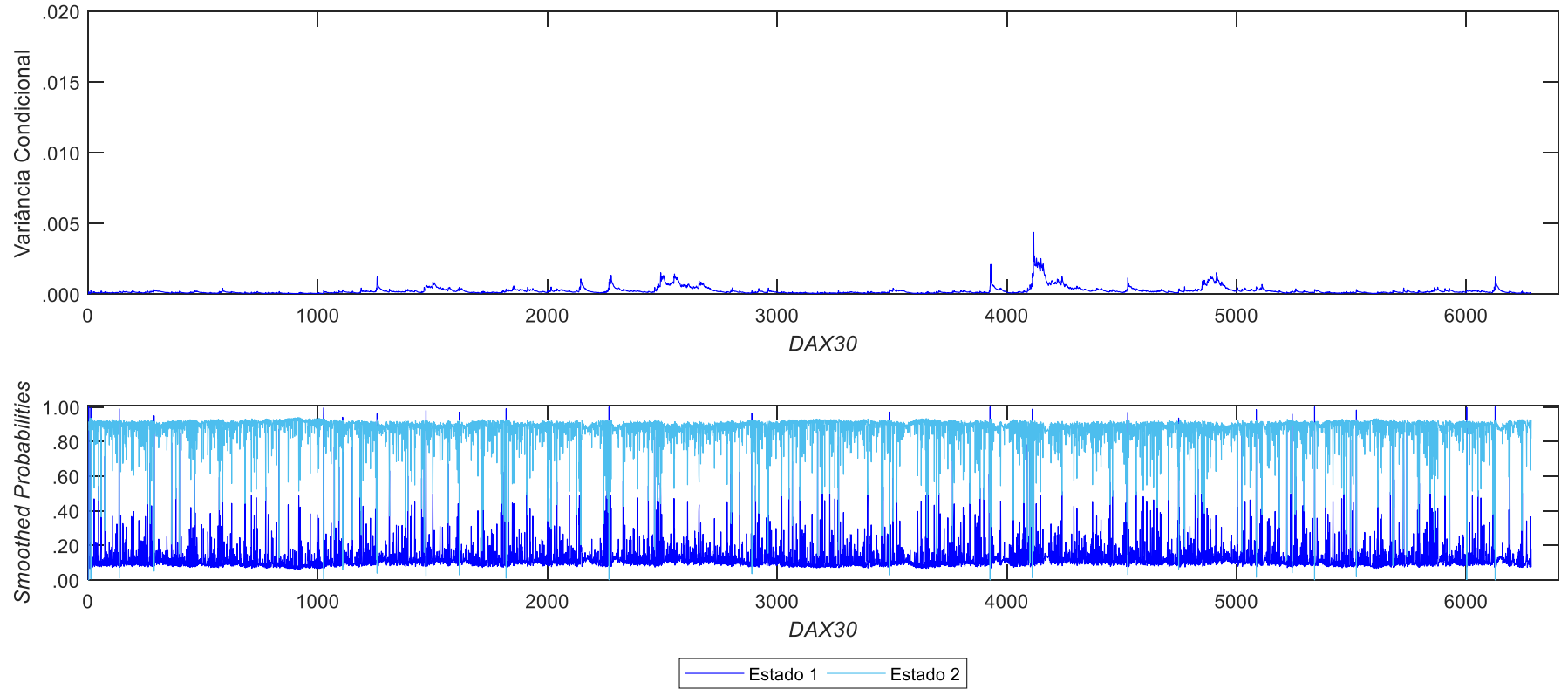


Figura 2.9. Variância Condicional e *Smoothed Probabilities* sobre as rendibilidades do *DAX30* associado à distribuição Normal. (Com os retornos originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *MATLAB*).

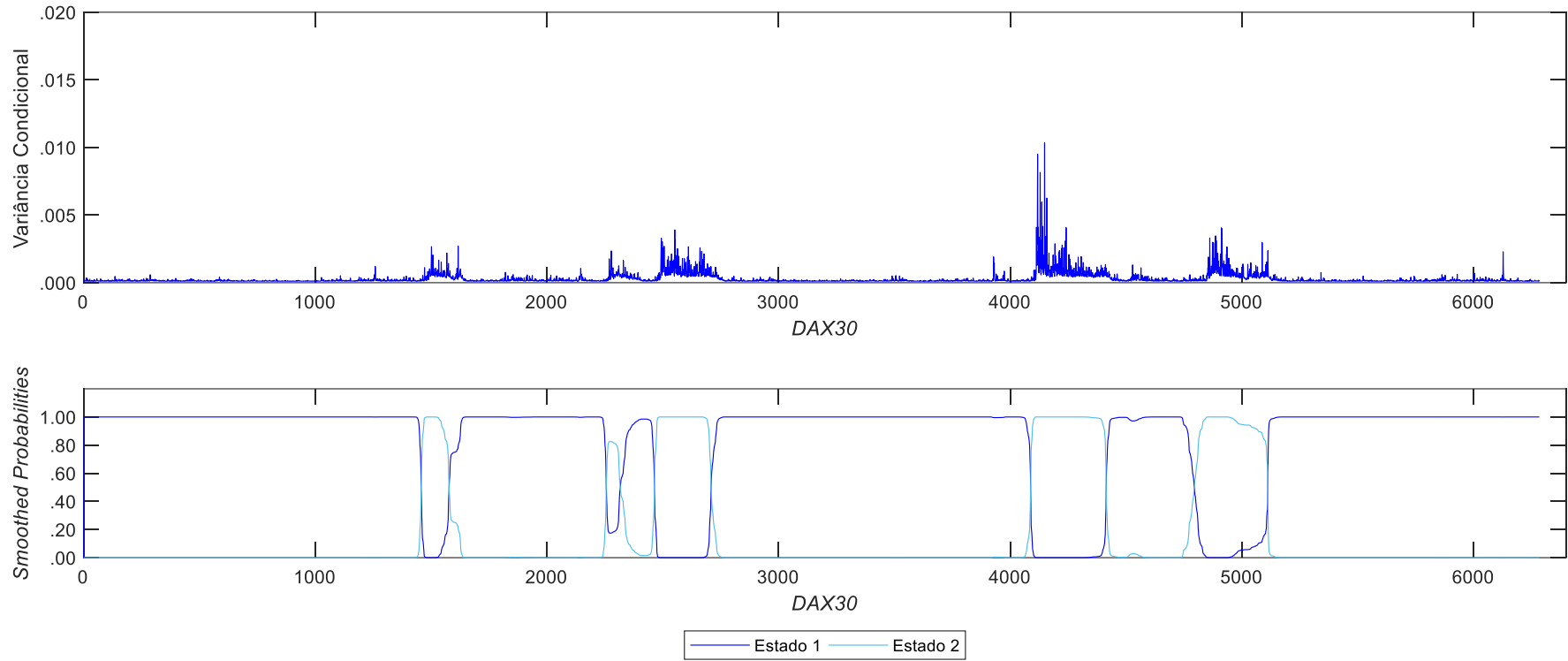


Figura 2.10. Variância Condicional e *Smoothed Probabilities* sobre as rendibilidades do DAX30 associado à distribuição *t-Student*.
(Com os retornos originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *MATLAB*).

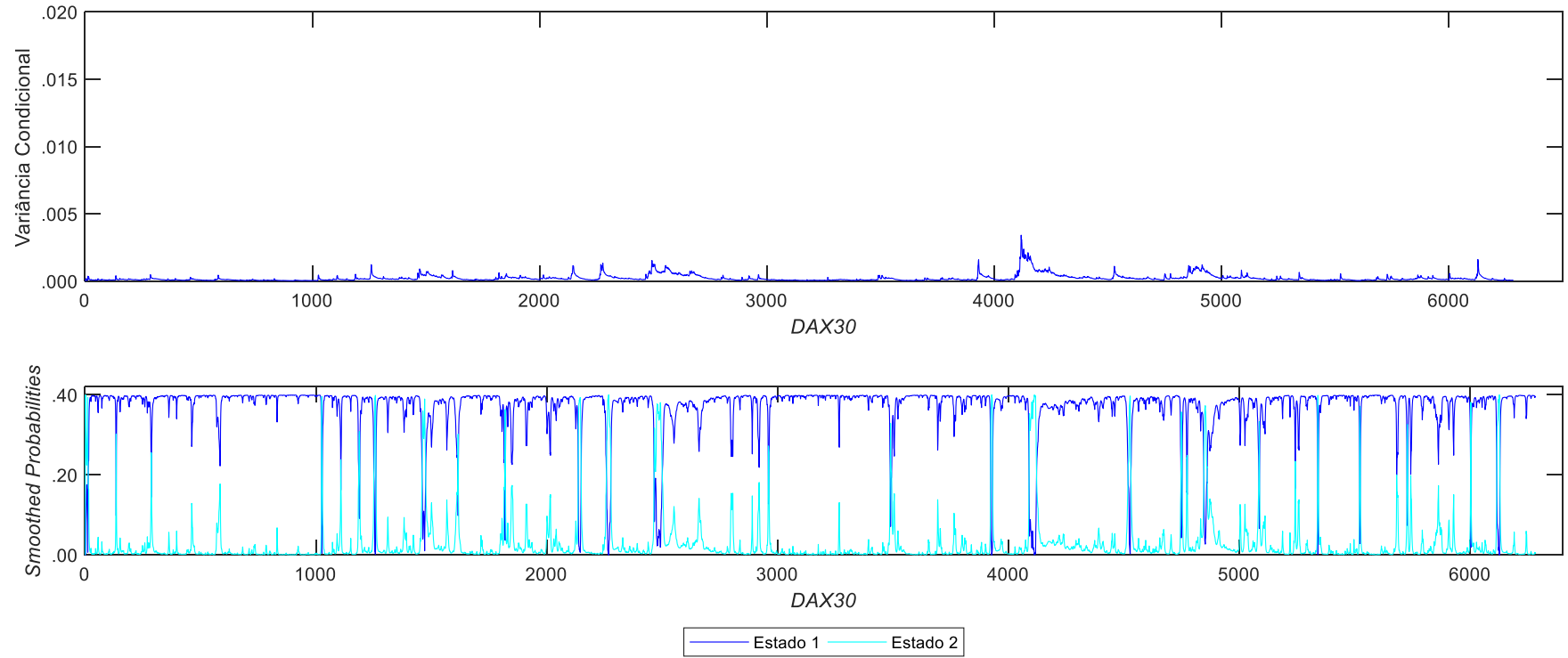


Figura 2.11. Variância Condicional e *Smoothed Probabilities* sobre as rendibilidades do *DAX30* associado à distribuição *GED*.
(Com os retornos originais, anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *MATLAB*).

Tabela 2.3. Estimativas dos parâmetros estimados e respectivo desvio-padrão sobre as rendibilidades do *PSI20* de modelos de regimes *switching*.

	<i>MRS-GARCH-N</i>	<i>MRS-GARCH-t</i>	<i>MRS-GARCH-GED</i>
$\mu^{(1)}$	0.0837 (0.014)	-0.0880 (0.037)	-0.0740 (0.035)
$\mu^{(2)}$	-0.3449 (0.062)	0.0865 (0.014)	0.0841 (0.014)
$\theta_0^{(1)}$	0.0192 (0.006)	0.4139 (0.084)	0.3534 (0.073)
$\theta_0^{(2)}$	0.4348 (0.068)	0.00563 (0.002)	0.0056 (0.002)
$\theta_1^{(1)}$	0.0407 (0.013)	0.2832 (0.052)	0.2644 (0.048)
$\theta_1^{(2)}$	0.0146 (0.015)	0.0550 (0.008)	0.0544 (0.008)
$\beta_1^{(1)}$	0.8566 (0.010)	0.5193 (0.066)	0.5624 (0.062)
$\beta_1^{(2)}$	0.9810 (0.026)	0.9406 (0.008)	0.9409 (0.008)
$\sigma^{(1)}$	0.43313	1.4479	1.4288
$\sigma^{(2)}$	10.0388	1.1402	1.1110
p_{11}	0.9451 (0.008)	0.9901 (0.004)	0.9913 (0.004)
p_{22}	0.7715 (0.038)	0.9958 (0.002)	0.9960 (0.002)
$v^{(1)63}$	-	7.1434 (0.648)	1.4101 (0.033)
π_1	0.8064	0.2954	0.3106
π_2	0.1935	0.7045	0.6893
ρ_1	0.8973	0.8025	0.8269
ρ_2	0.9966	0.9956	0.9963

(Anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *MATLAB* e com a amostra *in-sample*).

⁶³ Embora esta fórmula encontrada no capítulo teórico 2.7.2.2.1, apresente um (i), as distribuições utilizadas neste projecto, não permitem a utilização de parâmetros independentes de estado, logo apenas se considera $i = 1$.

Tabela 2.4. Estimativas dos parâmetros estimados e respectivo desvio-padrão, sobre as rendibilidades do *DAX30* de modelos de regimes *switching*.

	<i>MRS-GARCH-N</i>	<i>MRS-GARCH-t</i>	<i>MRS-GARCH-GED</i>
$\mu^{(1)}$	-0.3358 (0.074)	0.0499 (NaN)	0.0641 (0.017)
$\mu^{(2)}$	0.1305 (0.018)	0.2836 (NaN)	0.1537 (0.065)
$\theta_0^{(1)}$	0.2128 (0.031)	0.0129 (NaN)	0.0147 (0.005)
$\theta_0^{(2)}$	0.0191 (0.007)	0.7320 (NaN)	1.2568 (1.332)
$\theta_1^{(1)}$	0.0423 (0.012)	0.0717 (NaN)	0.0816 (0.008)
$\theta_1^{(2)}$	0.0246 (0.013)	0.0000 (NaN)	0.0214 (0.063)
$\beta_1^{(1)}$	0.9552 (0.016)	0.9282 (NaN)	0.9151 (0.008)
$\beta_1^{(2)}$	0.9048 (0.011)	0.0475 (NaN)	0.0030 (1.037)
$\sigma^{(1)}$	9.4449	113.6265	2.1456
$\sigma^{(2)}$	0.5210	0.8766	1.1350
p_{11}	0.8636 (0.023)	0.9930 (NaN)	0.9981 (0.002)
p_{22}	0.9509 (0.010)	0.9107 (NaN)	0.9888 (0.009)
$v^{(1)}$	-	10.0609 (NaN)	1.5208 (0.037)
π_1	0.2648	0.9276	0.8579
π_2	0.7351	0.0723	0.1420
ρ_1	0.9975	0.9999	0.9967
ρ_2	0.9295	0.0475	0.0244

NaN - *Not a Number*, representa um número que tende para um valor demasiado elevado. (Anteriormente à quebra de estrutura, realizado no *MATLAB* e com a amostra *in-sample*).

ANEXO 3.

Tabela 3.1. Estatísticas comparativas *in-sample* sobre as rendibilidades do *PSI20*.

Modelo	N.º Par.	Pers.	MAE1	Rank	MAE2	Rank	AIC	Rank	LL	Rank	R2LOG	Rank
<i>GARCH-N</i>	6	0.981	0.722	11	1.963	11	3.137	12	-9674.558	12	8.854	11
<i>GARCH-t</i>	7	0.981	0.721	10	1.962	10	3.092	7	-9535.421	7	8.838	10
<i>GARCH-GED</i>	7	0.981	0.720	9	1.957	9	3.093	8	-9537.657	8	8.828	9
<i>EGARCH-N</i>	7	0.978	0.709	2	1.872	1	3.114	10	-9604.241	10	8.785	2
<i>EGARCH-t</i>	8	0.982	0.712	4	1.884	4	3.077	3	-9487.606	3	8.802	5
<i>EGARCH-GED</i>	8	0.980	0.708	1	1.874	2	3.078	4	-9489.766	4	8.774	1
<i>GJR-N</i>	7	0.977	0.719	7	1.949	7	3.127	11	-9642.731	11	8.822	8
<i>GJR-t</i>	7	0.979	0.719	8	1.955	8	3.086	5	-9516.209	5	8.809	6
<i>GJR-GED</i>	8	0.978	0.718	6	1.948	6	3.087	6	-9517.694	6	8.800	4
<i>MRS-N</i>	10	0.996	0.710	3	1.875	3	3.106	9	-9572.415	9	8.813	7
<i>MRS-t</i>	11	0.995	0.714	5	1.940	5	3.077	2	-9483.438	2	8.794	3
<i>MRS-GED</i>	11	0.996	0.722	12	1.968	12	3.075	1	-9476.468	1	8.868	12

Nota: No *Rank*, e em casos de iguais valores, a ordem utilizada, é a crescente. Relativamente à persistência dos *shocks* da variância condicional, apenas as maiores persistências são reportadas.

Tabela 3.2. Estatísticas comparativas *in-sample* sobre as rendibilidades do *DAX30*.

Modelo	N.º Par.	Pers.	MAE1	Rank	MAE2	Rank	AIC	Rank	LL	Rank	R2LOG	Rank
<i>GARCH-N</i>	6	0.981	0.809	12	2.509	11	3.398	12	-10480.939	12	7.763	12
<i>GARCH-t</i>	7	0.980	0.807	9	2.501	8	3.378	9	-10418.574	9	7.749	10
<i>GARCH-GED</i>	7	0.980	0.808	11	2.501	9	3.377	8	-10415.195	8	7.751	11
<i>EGARCH-N</i>	7	0.983	0.789	1	2.399	1	3.372	7	-10400.163	7	7.644	2
<i>EGARCH-t</i>	6	0.986	0.790	3	2.407	3	3.354	1	-10342.281	1	7.644	3
<i>EGARCH-GED</i>	8	0.985	0.789	2	2.402	2	3.355	2	-10345.341	2	7.640	1
<i>GJR-N</i>	5	0.977	0.799	7	2.474	7	3.383	11	-10432.627	11	7.679	7
<i>GJR-t</i>	8	0.976	0.798	5	2.473	6	3.363	3	-10372.017	3	7.667	5
<i>GJR-GED</i>	8	0.976	0.798	6	2.470	5	3.364	4	-10373.492	4	7.670	6
<i>MRS-N</i>	10	0.997	0.793	4	2.430	4	3.381	10	-10421.807	10	7.665	4
<i>MRS-t</i>	11	0.999	0.807	10	2.577	12	3.371	5	-10388.689	5	7.710	8
<i>MRS-GED</i>	11	0.996	0.806	8	2.504	10	3.371	6	-10390.158	6	7.740	9

Nota: No *Rank*, e em casos de iguais valores, a ordem utilizada, é a crescente. Relativamente à persistência dos *shocks* da variância condicional, apenas as maiores persistências são reportadas.

Tabela 4.1. Avaliação *out-of-sample*: 95% VaR sobre as rendibilidades do *PSI20*.

Steps	95% VaR													
	1							5						
	LR _{TUFF}	PF(%)	LR _{PF}	LR _{ind}	LR _{cc}	RLF	FLF	LR _{TUFF}	PF(%)	LR _{PF}	LR _{ind}	LR _{cc}	RLF	FLF
<i>GARCH-N</i>	0.5331	14.286	13.846*	0.269	14.115*	0.0597	0.0643	0.8654	18.750	27.059*	25.779*	52.838*	0.1386	0.1485
<i>GARCH-t</i>	0.5331	9.821	4.332*	0.790	5.122	0.0452	0.0507	0.8654	11.607	7.624*	11.795*	19.419*	0.0888	0.1013
<i>GARCH-GED</i>	0.5331	14.286	13.846*	0.269	14.115*	0.0594	0.0640	0.8654	18.750	27.059*	25.779*	52.838*	0.1392	0.1491
<i>EGARCH-N</i>	0.3153	8.036	1.850	1.922	3.772	0.0471	0.0526	0.8654	18.750	27.059*	25.779*	52.838*	0.1132	0.1230
<i>EGARCH-t</i>	0.3153	7.143	0.961	0.306	1.268	0.0345	0.0409	0.8654	13.393	11.615*	22.842*	34.457*	0.0661	0.0780
<i>EGARCH-GED</i>	0.3153	8.929	2.981	1.283	4.264	0.0468	0.0523	0.8654	18.750	27.059*	25.779*	52.838*	0.1136	0.1234
<i>GJR-N</i>	0.3153	9.821	4.332*	3.084	7.416*	0.0505	0.0557	0.8654	16.964	21.387*	21.395*	42.782*	0.0868	0.0978
<i>GJR-t</i>	0.3153	8.036	1.850	1.922	3.772	0.0378	0.0439	0.8654	10.714	5.884*	14.141*	20.025*	0.0474	0.0610
<i>GJR- GED</i>	0.3153	9.821	4.332*	3.084	7.416*	0.0509	0.0561	0.8654	16.9654	21.387*	21.395*	42.782*	0.0865	0.0974
<i>MRS-N</i>	0.3153	9.821	4.332*	3.084	7.416*	0.0464	0.0518	0.8654	15.179	16.223*	22.185*	38.408*	0.0877	0.0993
<i>MRS-t</i>	0.3153	7.143	0.961	0.306	1.268	0.0283	0.0351	0.3153	5.357	0.029*	5.058*	5.088	0.0260	0.0424
<i>MRS- GED</i>	0.3153	8.036	1.850	1.922	3.772	0.0408	0.0467	0.3153	9.821	4.332*	16.868*	21.199*	0.0554	0.0688

Steps	95% VaR													
	10							22						
	LR _{TUFF}	PF(%)	LR _{PF}	LR _{ind}	LR _{cc}	RLF	FLF	LR _{TUFF}	PF(%)	LR _{PF}	LR _{ind}	LR _{cc}	RLF	FLF
<i>GARCH-N</i>	1.0977	12.500	9.537*	34.038*	43.575*	0.3851	0.4004	2.0815	4.464	0.070	14.199*	14.269*	0.0593	0.0847
<i>GARCH-t</i>	1.0977	10.714	5.884*	20.145*	26.029*	0.2768	0.2948	2.0815	4.464	0.070	14.199*	14.269*	0.0169	0.0463
<i>GARCH-GED</i>	1.0977	12.500	9.537*	34.038*	43.575*	0.3852	0.4005	2.0815	5.357	0.029	19.240*	19.270*	0.0606	0.0857
<i>EGARCH-N</i>	1.0977	13.393	11.615*	29.541*	41.156*	0.4877	0.5006	2.0815	11.607	7.624*	30.702*	38.326*	0.2730	0.2880
<i>EGARCH-t</i>	1.0977	12.500	9.537*	34.038*	43.575*	0.3688	0.3838	2.0815	9.821	4.332*	31.890*	36.221*	0.1738	0.1914
<i>EGARCH-GED</i>	1.0977	13.393	11.615*	29.541*	41.156*	0.4889	0.5018	2.0815	11.607	7.624*	30.702*	38.326*	0.2784	0.2933
<i>GJR-N</i>	1.0977	11.607	7.624*	30.702*	38.326*	0.2981	0.3148	2.0815	4.464	0.070	14.199*	14.269*	0.0243	0.0512
<i>GJR-t</i>	1.0977	8.929	2.981	20.080*	23.061*	0.2009	0.2207	2.0815	3.571	0.532	9.014*	9.546*	0.0013	0.0327
<i>GJR- GED</i>	1.0977	11.607	7.624*	30.702*	38.326*	0.2964	0.3130	2.0815	4.464	0.070	14.199*	14.269*	0.0237	0.0506
<i>MRS-N</i>	1.0977	11.607	7.624*	30.702*	38.326*	0.2963	0.3136	2.0815	4.464	0.070	14.199*	14.269*	0.0183	0.0463
<i>MRS-t</i>	2.0112	6.250	0.343	24.098*	24.441*	0.0434	0.1561	5.9505*	0.000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0379
<i>MRS- GED</i>	1.0977	9.821	4.332*	23.720*	28.051*	0.2088	0.2283	3.1901	1.786	3.202	5.883*	9.085*	0.0028	0.0350

(Realizado no *MATLAB* e com a amostra *out-of-sample*. Com (*) estão indicados os valores cujos *p-value* são significativos para o respectivo modelo a 5% de significância e a **bold**, os mínimos de cada grupo de modelos e em caso de iguais valores, na análise ter-se-á em atenção tal aspecto).

Nota: Em LR_{TUFF} e PF, os valores apresentados foram comparados, somente, com os respectivos valores do nível de confiança da tabela em questão.

Tabela 4.2. Avaliação *out-of-sample*: 99% VaR sobre as rendibilidades do PSI20.

Steps	99% VaR													
	1							5						
	Modelo	LR _{TUFF}	PF(%)	LR _{PF}	LR _{ind}	LR _{cc}	RLF	FLF	LR _{TUFF}	PF(%)	LR _{PF}	LR _{ind}	LR _{cc}	RLF
GARCH-N	2.7094	7.143	18.134*	0.306*	18.440*	0.0278	0.0347	3.0922	8.036	22.324*	5.376*	27.700*	0.0375	0.0533
GARCH-t	0.1147	4.464	7.338*	1.704*	9.043*	0.0111	0.0205	0.0087	2.679	2.184	3.846*	6.030*	0.0053	0.0270
GARCH-GED	2.7094	7.143	18.134*	0.306*	18.440*	0.0212	0.0288	3.0922	7.143	18.134*	2.735	20.868*	0.0215	0.0390
EGARCH-N	2.1438	5.357	10.599*	1.073*	11.673*	0.0197	0.0277	3.5893	6.250	14.214*	3.759	17.973*	0.0227	0.0385
EGARCH-t	0.0038	1.786	0.566	0.074	0.640	0.0077	0.0186	0.0108	2.679	2.184	3.846*	6.030*	0.0010	0.0222
EGARCH-GED	2.1438	4.464	7.338*	1.704*	9.043*	0.0142	0.0231	0.1528	3.571	4.499*	2.581	7.080*	0.0111	0.0289
GJR-N	2.1438	5.357	10.599*	1.073*	11.673*	0.0229	0.0307	0.1528	3.571	4.499*	2.581	7.080*	0.0140	0.0319
GJR-t	0.1147	2.679	2.184	0.167	2.351	0.0098	0.0201	0.0017	0.893	0.013	0.018	0.032	0.0003	0.0240
GJR- GED	2.1438	5.357	10.599*	1.073*	11.673*	0.0171	0.0256	0.1528	3.571	4.499*	2.581	7.080*	0.0056	0.0252
MRS-N	0.1147	4.464	7.338*	1.704*	9.043*	0.0209	0.0290	0.1528	3.571	4.499*	2.581	7.080*	0.0162	0.0347
MRS-t	0.0038	0.893	0.013	0.018	0.032	0.0055	0.0171	0.0135	0.000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0361
MRS- GED	0.1147	3.571	4.499*	2.581*	7.080*	0.0115	0.0209	0.0087	1.786	0.566	0.074	0.640	0.0020	0.0243

Steps	99% VaR													
	10							22						
	Modelo	LR _{TUFF}	PF(%)	LR _{PF}	LR _{ind}	LR _{cc}	RLF	FLF	LR _{TUFF}	PF(%)	LR _{PF}	LR _{ind}	LR _{cc}	RLF
GARCH-N	3.9041	8.036	22.324*	16.356*	38.680*	0.1588	0.1815	0.0576	0.893	0.013	0.018	0.032	0.0005	0.0379
GARCH-t	0.0108	1.786	0.566	5.883*	6.450*	0.0726	0.1040	0.0135	0.000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0492
GARCH-GED	3.9041	7.143	18.134*	6.900*	25.034*	0.1204	0.1454	0.0135	0.000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0412
EGARCH-N	3.9041	11.607	41.303*	30.702*	72.005*	0.2194	0.2380	0.1863	5.357	10.599*	19.240	29.840*	0.0652	0.0881
EGARCH-t	3.9041	5.357	10.599*	11.120*	21.719*	0.0931	0.1188	0.1746	1.786	0.566	0.074	0.640	0.0026	0.0332
EGARCH-GED	3.9041	8.036	22.324*	23.946*	46.270*	0.1695	0.1906	0.1863	4.464	7.338*	14.199	21.538*	0.0348	0.0600
GJR-N	3.9041	5.357	10.599*	11.120*	21.719*	0.0967	0.1218	0.0135	0.000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0400
GJR-t	0.0108	1.786	0.566	5.883*	6.450*	0.0256	0.0592	0.0135	0.000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0517
GJR- GED	0.1746	3.571	4.499*	9.014*	13.513*	0.0649	0.0928	0.0135	0.000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0437
MRS-N	3.9041	5.357	10.599*	11.120*	21.719*	0.1022	0.1283	0.0135	0.000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0415
MRS-t	0.0087	0.893	0.013	0.018	0.032	0.0197	0.0588	0.0135	0.000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0598
MRS- GED	0.0108	2.679	2.184	12.410*	14.594*	0.0492	0.0811	0.0135	0.000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0500

(Realizado no MATLAB e com a amostra *out-of-sample*. Com (*) estão indicados os valores cujos *p-value* são significativos para o respectivo modelo a 5% de significância e a **bold**, os mínimos de cada grupo de modelos e em caso de iguais valores, na análise ter-se-á em atenção tal aspecto).

Nota: Em LR_{TUFF} e PF, os valores apresentados foram comparados, somente, com os respectivos valores do nível de confiança da tabela em questão.

Tabela 4.3. Avaliação *out-of-sample*: 95% VaR sobre as rendibilidades do DAX30.

95% VaR														
Steps	1							5						
	Modelo	LR_{TUFF}	PF(%)	LR_{PF}	LR_{ind}	LR_{cc}	RLF	FLF	LR_{TUFF}	PF(%)	LR_{PF}	LR_{ind}	LR_{cc}	RLF
GARCH-N	0.3976	1.786	3.202	0.074	3.276	0.0000	0.0072	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0117
GARCH-t	0.3976	1.786	3.202	0.074	3.276	0.0000	0.0087	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0129
GARCH-GED	0.3976	1.786	3.202	0.074	3.276	0.0000	0.0078	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0117
EGARCH-N	0.3976	2.679	1.518	0.167	1.685	0.0000	0.0077	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0110
EGARCH-t	5.9505*	0.000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0092	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0122
EGARCH-GED	0.3976	2.679	1.518	0.167	1.685	0.0000	0.0082	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0111
GJR-N	0.3976	1.786	3.202	0.074	3.276	0.0000	0.0075	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0122
GJR-t	0.3976	1.786	3.202	0.074	3.276	0.0000	0.0090	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0134
GJR- GED	0.3976	1.786	3.202	0.074	3.276	0.0000	0.0081	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0122
MRS-N	0.3976	1.786	3.202	0.074	3.276	0.0000	0.0078	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0127
MRS-t	0.3976	0.893	5.951	0.018	5.969	0.0000	0.0090	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0134
MRS- GED	0.3976	1.786	3.202	0.074	3.276	0.0000	0.0081	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0123

95% VaR														
Steps	10							22						
	Modelo	LR_{TUFF}	PF(%)	LR_{PF}	LR_{ind}	LR_{cc}	RLF	FLF	LR_{TUFF}	PF(%)	LR_{PF}	LR_{ind}	LR_{cc}	RLF
GARCH-N	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0169	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0264
GARCH-t	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0187	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0291
GARCH-GED	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0170	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0265
EGARCH-N	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0140	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0170
EGARCH-t	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0156	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0189
EGARCH-GED	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0141	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0171
GJR-N	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0176	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0272
GJR-t	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0193	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0298
GJR- GED	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0176	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0272
MRS-N	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0186	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0289
MRS-t	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0231	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0289
MRS-GED	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0176	5.9505*	0.0000	11.490*	NaN	NaN	0.0000	0.0269

(Realizado no *MATLAB* e com a amostra *out-of-sample*. Com (*) estão indicados os valores cujos *p-value* são significativos para o respectivo modelo a 5% de significância e a **bold**, os mínimos de cada grupo de modelos e em caso de iguais valores, na análise ter-se-á em atenção tal aspecto).

Nota: Em LR_{TUFF} e PF, os valores apresentados foram comparados, somente, com os respectivos valores do nível de confiança da tabela em questão.

Tabela 4.4. Avaliação *out-of-sample*: 99% VaR sobre as rendibilidades do DAX30.

99% VaR														
Steps	10							5						
	Modelo	LR_{TUFF}	PF(%)	LR_{PF}	LR_{ind}	LR_{cc}	RLF	FLF	LR_{TUFF}	PF(%)	LR_{PF}	LR_{ind}	LR_{cc}	RLF
GARCH-N	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0072	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0165
GARCH-t	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0087	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0198
GARCH-GED	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0078	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0177
EGARCH-N	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0077	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0156
EGARCH-t	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0092	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0187
EGARCH-GED	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0082	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0167
GJR-N	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0075	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0172
GJR-t	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0090	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0205
GJR- GED	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0081	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0184
MRS-N	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0078	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0180
MRS-t	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0090	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0204
MRS- GED	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0081	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0184

99% VaR														
Steps	10							22						
	Modelo	LR_{TUFF}	PF(%)	LR_{PF}	LR_{ind}	LR_{cc}	RLF	FLF	LR_{TUFF}	PF(%)	LR_{PF}	LR_{ind}	LR_{cc}	RLF
GARCH-N	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0240	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0373
GARCH-t	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0286	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0445
GARCH-GED	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0257	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0400
EGARCH-N	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0199	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0240
EGARCH-t	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0238	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0289
EGARCH-GED	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0212	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0257
GJR-N	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0249	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0384
GJR-t	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0295	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0455
GJR- GED	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0266	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0410
MRS-N	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0263	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0409
MRS-t	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0292	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0440
MRS- GED	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0263	0.0135	0.0000	2.251	NaN	NaN	0.0000	0.0402

(Realizado no *MATLAB* e com a amostra *out-of-sample*. Com (*) estão indicados os valores cujos *p-value* são significativos para o respectivo modelo a 5% de significância e a *bold*, os mínimos de cada grupo de modelos e em caso de iguais valores, na análise ter-se-á em atenção tal aspecto).

Nota: Em LR_{TUFF} e PF, os valores apresentados foram comparados, somente, com os respectivos valores do nível de confiança da tabela em questão.

ANEXO 5.

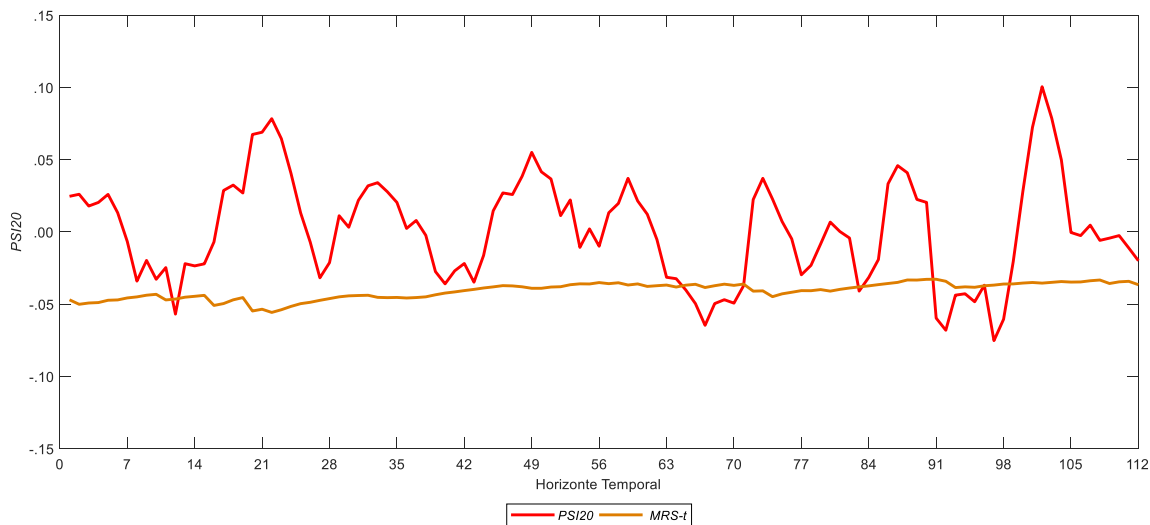


Figura 5.1. Previsões *out-of-sample* a uma semana sobre as rendibilidades do *PSI20* do VaR a 95%.
(Realizado no *MATLAB* e com a amostra *out-of-sample*).

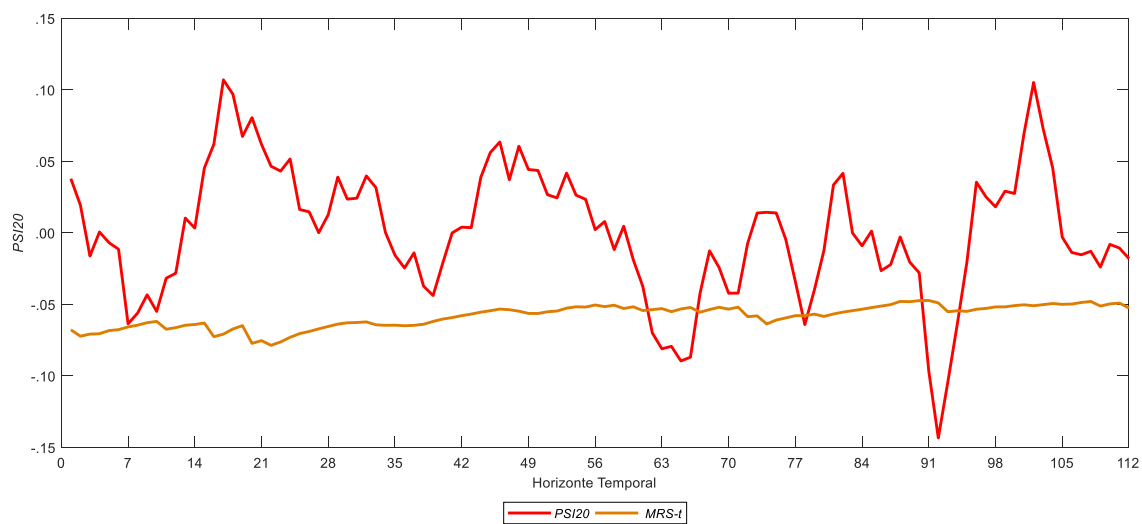


Figura 5.2. Previsões *out-of-sample* a duas semanas sobre as rendibilidades do *PSI20* do VaR a 95%.
(Realizado no *MATLAB* e com a amostra *out-of-sample*).

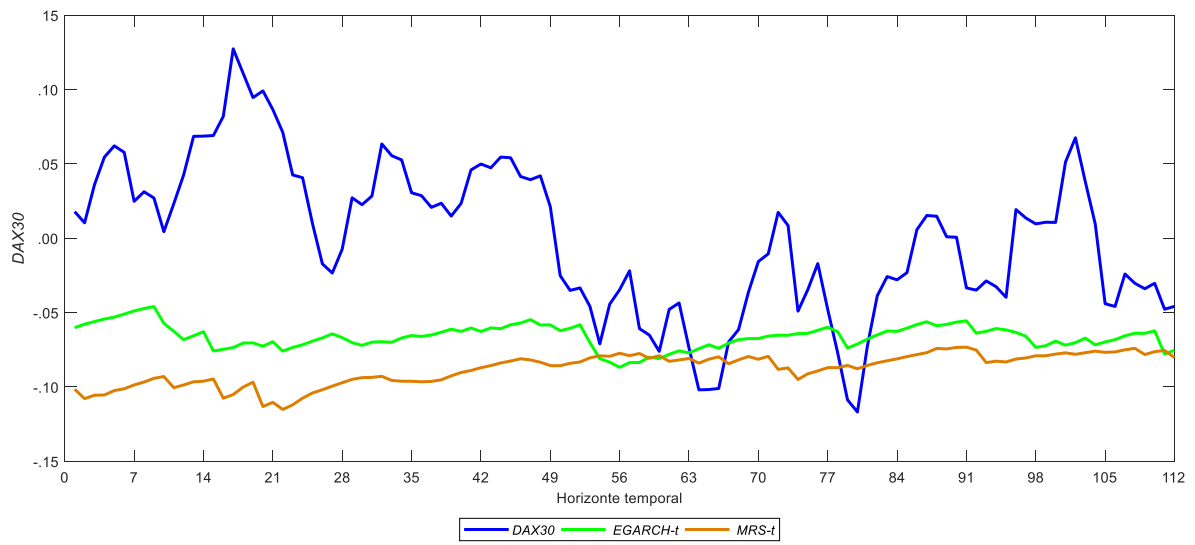


Figura 5.3. Previsões *out-of-sample* a um mês sobre as rendibilidades do DAX30 do VaR a 95%.
(Realizado no *MATLAB* e com a amostra *out-of-sample*).

ANEXO 6.

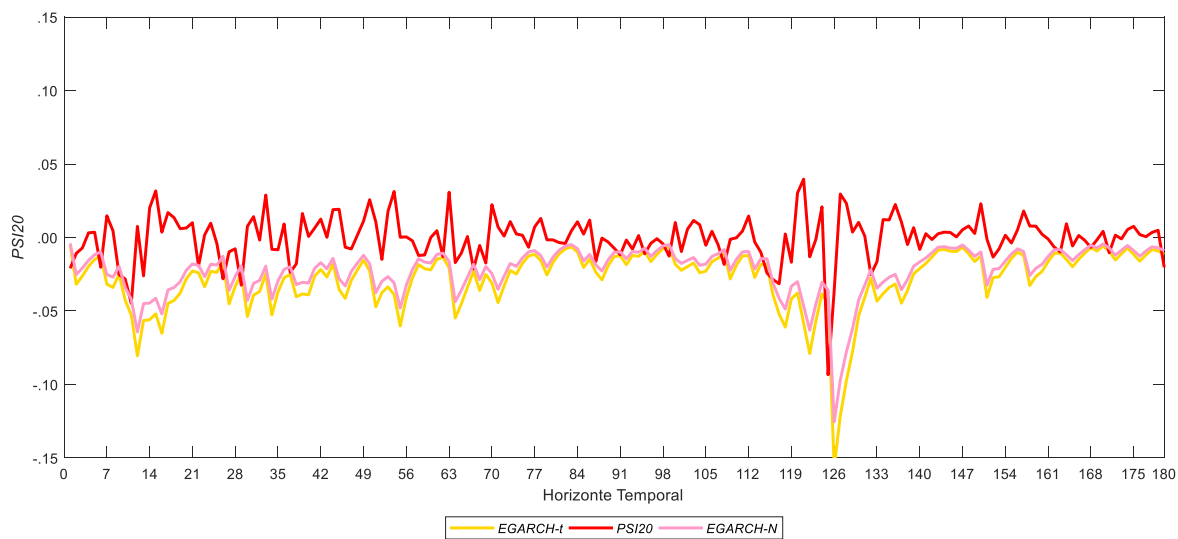


Figura 6.1. Previsões *out-of-sample* a duas semanas sobre as rendibilidades do *PSI20* do *ES* a 95%.
(Realizado no *MATLAB* e com a amostra *out-of-sample*).

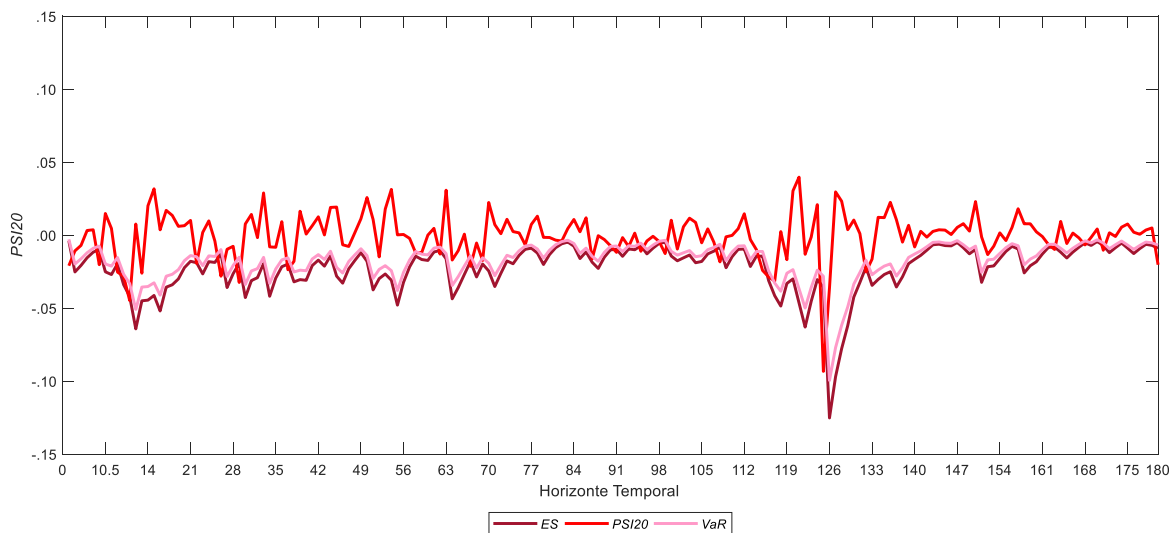


Figura 6.2. Previsões *out-of-sample* a duas semanas sobre as rendibilidades do *PSI20* do *ES* e de *VaR* a 95% segundo o modelo *EGARCH-N*.
(Realizado no *MATLAB* e com a amostra *out-of-sample*).

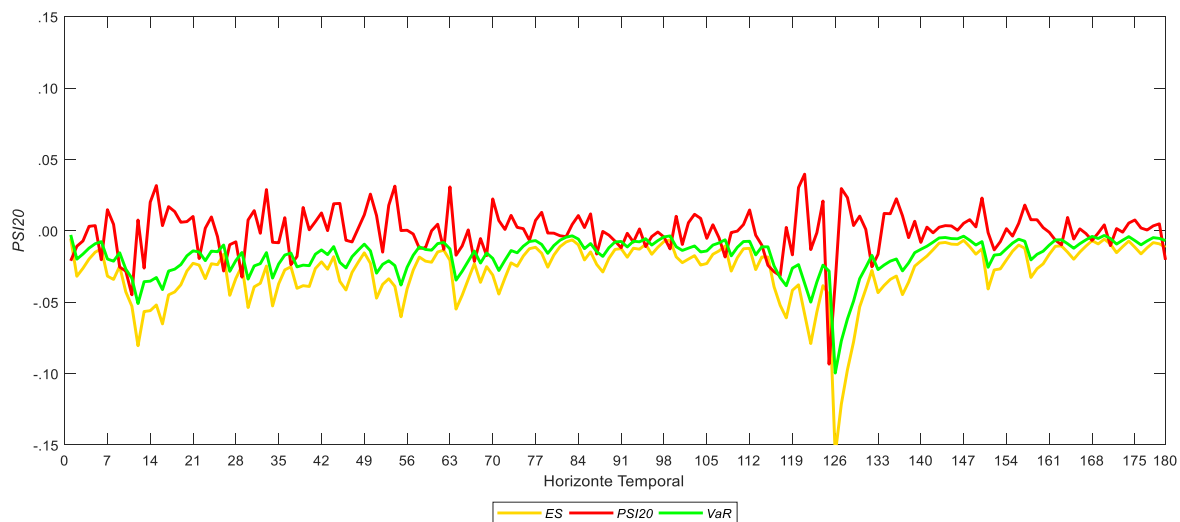


Figura 6.3. Previsões *out-of-sample* a duas semanas sobre as rendibilidades do *PSI20* do *ES* e de *VaR* a 95% segundo o modelo *EGARCH-t*.
(Realizado no *MATLAB* e com a amostra *out-of-sample*).

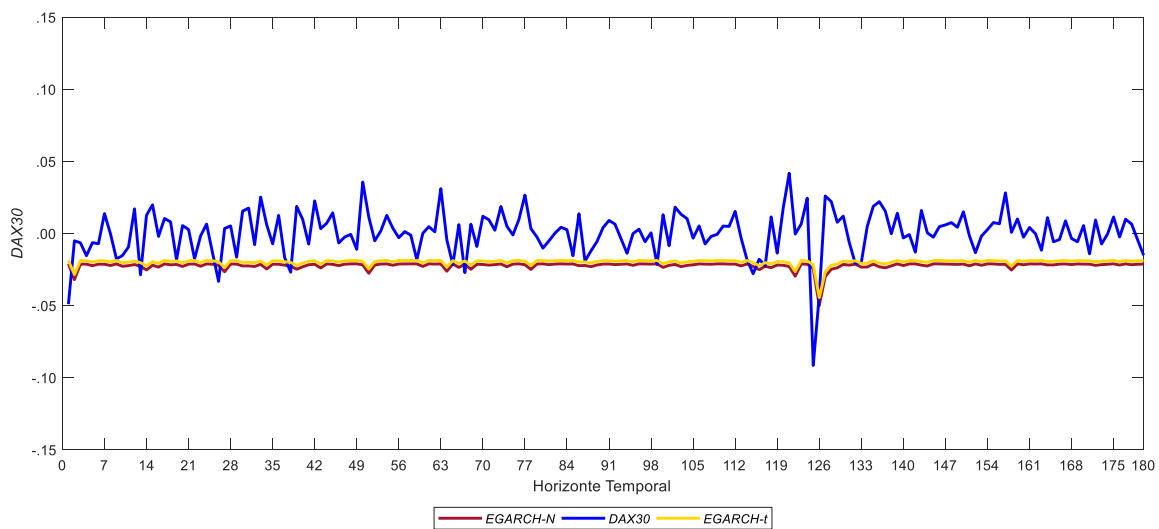


Figura 6.4. Previsões *out-of-sample* a um mês sobre as rendibilidades do *DAX30* do *ES* a 95%.
(Realizado no *MATLAB* e com a amostra *out-of-sample*).

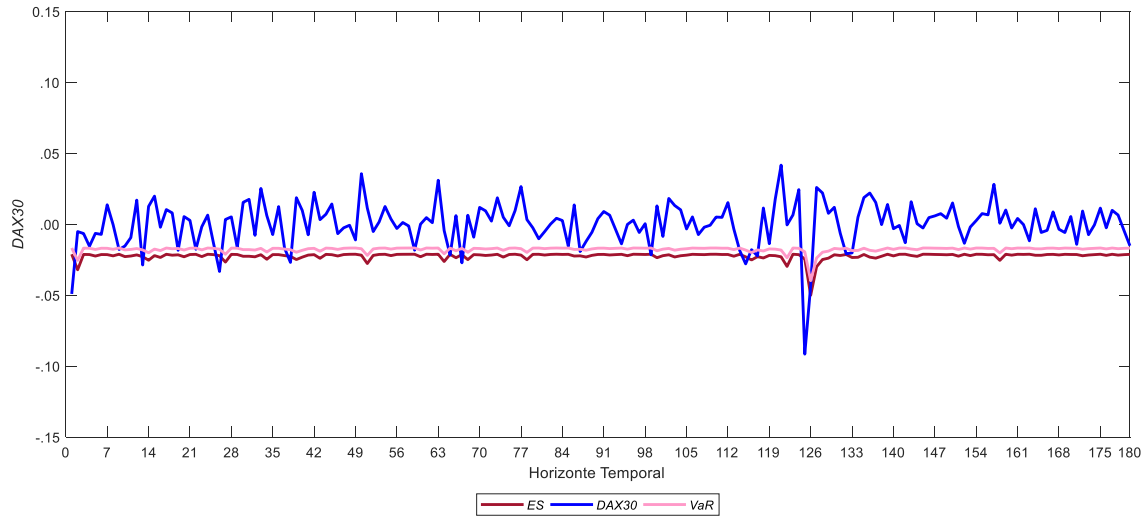


Figura 6.5. Previsões *out-of-sample* a um mês sobre as rendibilidades do DAX30 do ES e de VaR a 95% segundo o modelo EGARCH-N.
(Realizado no MATLAB e com a amostra *out-of-sample*).

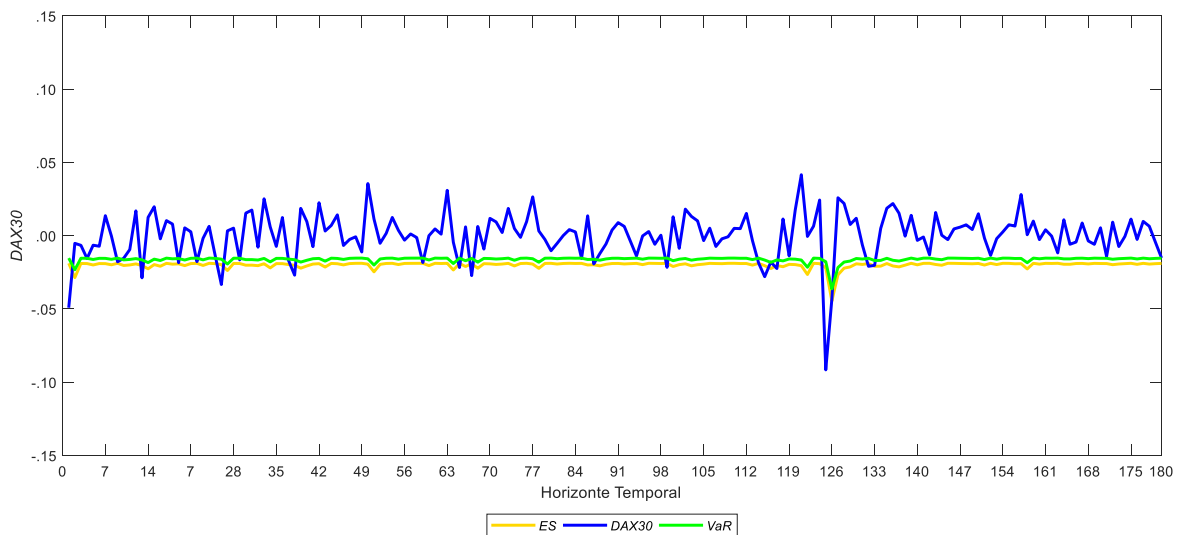


Figura 6.6. Previsões *out-of-sample* a um mês sobre as rendibilidades do DAX30 do ES e de VaR a 95% segundo o modelo EGARCH-t.
(Realizado no MATLAB e com a amostra *out-of-sample*).