UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

LISBOA

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INICIAÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL: PERSPETIVAS E PRÁTICAS DE PROFESSORES DO ENSINO SECUNDÁRIO PORTUGUÊS

Adilson de Campos

Orientador: Prof. Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade da Didática da Matemática

2021

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

INICIAÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL: PERSPETIVAS E PRÁTICAS DE PROFESSORES DO ENSINO SECUNDÁRIO PORTUGUÊS

Adilson de Campos

Orientador: Prof. Doutor João Pedro Mendes da Ponte
Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade da Didática da Matemática

Júri:

Presidente: Doutora Cecília Galvão Couto, Professora Catedrática e membro do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
Vogais:
– Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa;
– Doutora Ana Paula Florêncio Aires, Professora Auxiliar da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro;
– Doutor João Pedro Mendes da Ponte, Professor Catedrático do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, orientador;
– Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques, Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
– Doutora Joana da Fonte Dias Gomes da Mata Pereira, Professora Auxiliar Convidada do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

2021

Resumo

O presente estudo insere-se na área de investigação sobre o professor de Matemática, especificamente das conceções do professor sobre o ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário. A investigação é realizada tendo por pressuposto que tais conceções desempenham um papel fulcral no modo como o professor interpreta as situações educativas e também na forma como estrutura a atuação na sua prática de ensino. Assim, a presente investigação possui também uma segunda área de interesse, nomeadamente os aspetos centrais que caracterizam a prática do professor no ensino deste tema. Desse modo, o objetivo do estudo é identificar e compreender as conceções dos professores de Matemática sobre o ensino de Cálculo Diferencial no ensino secundário bem como os aspetos centrais da sua prática profissional no seu ensino.

O enquadramento teórico está organizado em três eixos: (i) as conceções do professor de Matemática; (ii) as práticas profissionais do professor de Matemática; e (iii) o ensino do Cálculo Diferencial. O primeiro eixo discute o interesse e as terminologias utilizadas nos estudos no domínio das conceções do professor, bem como a relação entre as conceções e o conhecimento e entre estas e a prática letiva. O segundo eixo aborda o conceito prática do professor e, tendo em atenção a prática letiva, destaca as tarefas e a comunicação em sala de aula como elementos estruturantes dessa prática. O terceiro eixo discute a presença do Cálculo Diferencial no currículo do ensino secundário e os esforços reformistas no ensino deste tema e apresenta, ainda, alguns estudos empíricos sobre o ensino-aprendizagem do Cálculo que possuem uma estreita relação com o objetivo do estudo.

O estudo segue uma abordagem metodológica de natureza qualitativa inscrita em um paradigma interpretativo, com a realização de estudos de caso de três professores do ensino secundário, sendo a recolha de dados realizada através de entrevistas semi-estruturadas, observações de aulas e recolha documental. A análise dos dados teve início ainda durante o processo de recolha de dados, ao que se seguiu um processo analítico que, por seu turno, se desdobrou em duas fases: uma primeira incidindo em cada caso objetivando a sua construção e uma segunda que considerou os três casos tendo em vista a construção das conclusões do estudo.

Quanto as perspetivas dos professores sobre a presença de tópicos de Cálculo Diferencial no ensino secundário, parece existir uma certa "naturalização" sobre tal presença, o que pode ser explicado pelo longo período de tempo que estes tópicos constam nos programas. No tocante às práticas, as conclusões do estudo apontam para um uso quase que exclusivo do exercício dos manuais sem usar outras tarefas. Outro ponto a evidenciar é o trabalho dos tópicos em contextos estritamente matemáticos sem uma interação com outras áreas do conhecimento e sem a aplicação destes conceitos em situações do mundo real (modelação). Contudo, mesmo nestes contextos estritamente matemáticos os professores dão uma ênfase significativa à conexão entre os diferentes conceitos envolvidos, buscando-se relacionar o conceito tratado com outros que já são do conhecimento dos alunos. Quanto à abordagem adotada pelos professores, esta parece estar mais focada em questões conceituais do que em técnicas procedimentais.

Palavras-chave: Conceções do professor; prática do profesor; ensino do Cálculo Diferencial.

Abstract

This study is situated in the area of research on the mathematics teacher, specifically of the teacher’s conceptions about the teaching of differential calculus in secondary education. The investigation is carried out under the assumption that such conceptions play a pivotal role in the way teachers interpret educational situations and also in the way they structure their actions in their teaching practice. Thus, the present investigation has also a second area of interest, namely the central aspects that characterize the teacher’s practice in teaching this theme. Thus, the aim of the study is to identify and understand the perspectives of mathematics teachers on the teaching of differential calculus in secondary education as well as the central aspects of their professional practice in their teaching.

The theoretical framework is organized into three axes: (i) the conceptions of the mathematics teacher; (ii) the professional practices of the mathematics teacher and (iii) the teaching of differential calculus. The first axis discusses the interest and terminologies used in studies in the field of teacher conceptions, as well as the relationship between conceptions and knowledge and between these and teaching practice. The second axis is a discussion on the concept of teacher practice and, taking into account teaching practices, highlights tasks and communication in the classroom as structural elements of this practice. The third axis discusses the presence of differential calculus in the secondary school curriculum and the reformist efforts in teaching this theme and also presents some empirical studies on the teaching-learning of calculus that have a close relationship with the objective of the study.

The study follows a qualitative methodological approach inscribed in an interpretive paradigm, with the case studies of three secondary school teachers, with data collection carried out through semi-structured interviews, class observations and document collection. Data analysis begun during the data collection process, followed by an analytical process, which, in turn, was divided into two phases: a first focusing on each case aiming at its construction and a second which considered the three cases with a view to building the study’s conclusions.

As for the teachers’ perspectives on the presence of differential calculus topics in secondary education, there seems to be a certain “naturalization” about such presence, which can be explained by the long period of time that these topics are present in the programs. With regard to practices, the study’s conclusions point to an almost exclusive use of the exercises from manuals with no use of other tasks. Another point to highlight is the work of the topics in strictly mathematical contexts without an interaction with other areas of knowledge and without applying these concepts in real-world situations (modeling). However, even in these strictly mathematical contexts, a significant emphasis is placed on the connection between the different concepts involved, seeking to relate the concepts with others that are already known to students. As for the approach adopted by the teachers, it seems to be more focused on conceptual issues rather than on procedural techniques.

Keywords: Teachers’ conceptions; teachers’ practice; teaching Differential Calculus.

ÍTACA

Konstantinos Kaváfis (1863-1933)

Quando partires em viagem para Ítaca
faz votos para que seja longo o caminho,
pleno de aventuras, pleno de conhecimentos.
Os Lestrigões e os Ciclopes,
o feroz Poseidon, não os temas,
tais seres em teu caminho jamais encontrarás,
se teu pensamento é elevado, se rara
emoção aflora teu espírito e teu corpo.
Os Lestrigões e os Ciclopes,
o irascível Poseidon, não os encontrarás,
se não os levas em tua alma,
se tua alma não os ergue diante de ti.

Faz votos de que seja longo o caminho.
Que numerosas sejam as manhãs estivais,
nas quais, com que prazer, com que alegria,
entrarás em portos vistos pela primeira vez;
para em mercados fenícios
e adquire as belas mercadorias,
nácares e corais, âmbares e ébanos
e perfumes voluptuosos de toda espécie,
e a maior quantidade possível de voluptuosos perfumes;
vai a numerosas cidades egípcias,
aprende, aprende sem cessar dos instruídos.

Guarda sempre Ítaca em teu pensamento.
É teu destino aí chegar.
Mas não apresses absolutamente tua viagem.
É melhor que dure muitos anos
e que, já velho, ancores na ilha,
rico com tudo que ganhaste no caminho,
sem esperar que Ítaca te dê riqueza.

Ítaca deu-te a bela viagem.
Sem ela não te porias a caminho.
Nada mais tem a dar-te.

Embora a encontres pobre, Ítaca não te enganou.
Sábio assim como te tornaste, com tanta experiência,
já deves ter compreendido o que significam as Ítacas.

(trad. Isis Borges B. da Fonseca: Poemas de K. Kaváfis,
São Paulo, Odysseus, 2006, p.100-3)

Agradecimentos

Ao chegar à etapa final de um trabalho tão intenso e significativo, considero importante registar o meu profundo agradecimento àqueles que contribuíram de um modo mais direto para que isso fosse possível. Essas pessoas foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui com a consciência, que tenho, de que vivenciei um dos momentos mais marcantes e importantes da minha vida e a pessoa que, por razões institucionais e temporais, escreve o ponto final nesse trabalho é bastante distinta daquela que deu início a esta hercúlea tarefa.

Agradeço a Deus pela vida e pela possibilidade de acordar todos os dias e trabalhar por aquilo em que acredito.

Agradeço imensamente à minha querida esposa Aline pela compreensão, carinho e por, assim como eu, também acreditar no poder transformador da Educação. A sua colaboração foi fundamental para levar a bom termo a resolução de um difícil trinômio que envolvia a necessidade de isolamento social (associada a uma pandemia mundial), os cuidados parentais a serem dispensados a um recém nascido (para a nossa querida Valentina) e a escrita de uma tese. Devo confessar que não foi fácil, mas foi profundamente transformador e gratificante. Muito obrigado!

Agradeço também à minha filha Valentina (pequeno tesouro que encontramos no caminho de Ítaca) pela doçura do seu sorriso e por me fazer acreditar na humanidade nesse momento tão difícil que atravessamos. Quis o destino que viesse ao mundo em um lugar bem distante de onde nasceram o papá e a mamã, na verdade em um outro país que agora também é seu, assim como foi o país de seus antepessados.

Agradeço aos meus pais Lázaro e Maria que estiveram sempre presentes em pensamento, apesar de estarem do outro lado do Atlântico. Obrigado pela atenção e pelas orações!

Agradeço imensamente ao meu orientador, professor Doutor João Pedro da Ponte. Sou grato pelas orientações prestadas ao longo da realização deste estudo, pelas reflexões e críticas construtivas, sempre oportunas e atempadas, que foram essenciais tanto para a construção deste trabalho como para o meu crescimento enquanto investigador.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Anexos

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, faço uma apresentação genérica do presente estudo. Inicio com uma referência às minhas motivações de ordem pessoal e à pertinência que me levaram à investigação que aqui apresento. Em seguida, abordo o objetivo do estudo e explicito as questões que elegi para concretizá-lo. Na sequência, apresento o contexto do estudo e o modo como o relatório está organizado.

1.1 Motivação e pertinência

Assim como tudo, este estudo também tem a sua história. E essa história está relacionada de uma forma direta ao meu interesse e forte ligação com o universo da docência desde há muito tempo. Um tempo que, para ser mais exato, remonta à minha infância. Desses tempos, recordo-me de uma forma muito viva o trabalho de meu pai, que exerceu a atividade docente por mais de três décadas e foi justamente por sua mão que aprendi as minhas primeiras letras, trazendo comigo para além de uma lavra similar, também as suas marcas como meu primeiro *professor*. Relato a seguir alguns acontecimentos de que recordo e que contribuiram para este meu interesse pelo pensamento do professor.

A escola onde meu pai lecionava, à época, estava localizada em uma pequena e distante aldeia numa povoação rural no sul do Brasil. Compreendia uma única e exígua sala e recebia alunos de diversas idades, muitos dos quais viviam numa situação muito carenciada e que, apesar de serem crianças, já tinham de auxiliar seus pais no trabalho rural. Numa época onde o ensino ainda não era obrigatório, muitos alunos só vinham às aulas depois de um forte trabalho de convencimento que meu pai realizava junto aos responsáveis destes.

A escola ocupava uma posição central na vida comunitária e meu pai dedicou muitos dos seus anos à tarefa de alfabetizador. Naquela altura, eu ainda não tinha idade para estar matriculado, mas como gozava da confiança de meu pai, tinha livre acesso à sala de aula, desde que lá permanecesse em silêncio. Lá estando, eu ficava também à disposição para atuar como uma espécie de ajudante. Minha missão era, muitas vezes, nos dias de maior calor ir até a nossa casa buscar, a pedido de meu pai, um "refresco", que nada mais era do que um café gelado que minha mãe preparava e era servido, bem me recordo, em uma grande chávena de alumínio. E assim, eu permanecia por horas e horas naquele ambiente a observar a aula desse professor muito especial: atento ao modo como ensinava, se movimentava na sala, como se dirigia aos alunos, a observar o que Nóvoa (1995) designa de *segunda pele profissional*, ou seja, o modo próprio do professor conduzir a aula, de se movimentar, etc. A esse propósito, mesmo estando reformado, papai carrega até hoje algumas expressões verbais, como o uso da palavra "entendes" em um tom interrogativo, que utiliza de modo recorrente em uma conversa corriqueira e normal. Resquícios de uma vida dedicada ao ensino e de uma segunda pele profissional que o acompanha e o acompanhará, mesmo que muitas vezes não se aperceba disso.

De tudo que eu vi e também ouvi dessa época, tenho a lembrança do idealismo e da dedicação de meu pai para com a profissão. A título de exemplo, recordo-me de um alfabeto (que ficava acima do quadro negro) com suas figuras ricamente ilustradas por uma artesã que vivia na localidade, a quem meu pai pagou com recursos próprios pelos seus serviços e depois teve o cuidado de envelopar todas aquelas figuras em um plástico para que ficassem ao abrigo da luz e da humidade. Também tenho muito presente a forma como ele vivia a profissão, o seu idealismo e a sua crença na possibilidade da transformação por meio da educação. Conforme já mencionei, sendo a comunidade muito carenciada e tendo presente que a região sul do Brasil experimenta temperaturas negativas nos rigores do seu inverno, lembro-me que minha mãe, a pedido de meu pai, chegou a confeccionar roupas para um aluno (usando para isso algumas roupas já em desuso) para que este pudesse frequentar as aulas nos períodos mais frios do ano. Por muito tempo meu pai contava essa história e sempre ao final, com uma inegável satisfação, emendava: *com apenas três meses frequentando às aulas, aquele menino já estava alfabetizado*! Sobre este aspeto, Canavarro (2003) refere como importante ter em conta a forma como o professor vive a sua profissão:

> Para compreender o ensino, é necessário conhecer os valores em que [o professor] acredita, as suas preocupações e dilemas, os seus desejos e motivações, as suas recompensas e expectativas, no fundo, a forma como o professor vive a profissão. (p. 14)

Passado algum tempo e tendo essa rica e próxima experiência com o universo da docência, opto pela realização de um curso superior de Matemática na sua vertente educacional. Lá chegando, me deparo com outra situação de que muito bem me recordo. Na fase inicial do curso de Matemática, tive como uma das primeiras disciplinas, Cálculo Diferencial e Integral. Na primeira aula, a professora foi logo dizendo: *já vou logo adiantando que esta cadeira será um grande desafio para vocês!* Complementando logo a seguir: *Isso porque vocês nunca tiveram Cálculo Diferencial no ensino secundário!*

De fato, o ensino de tópicos de Cálculo Diferencial não fazia (e não faz) parte do programa de Matemática do ensino secundário brasileiro, mesmo para os alunos que pretendem seguir os seus estudos no ensino superior em alguma área ligada às ciências exatas. Recordo-me que, naquela turma, para além de estudantes de Matemática, também havia estudantes de engenharias e de Química Industrial e o índice de reprovação foi elevado, ficando acima dos 50 por cento. Mas a visão da professora, expressa logo na primeira aula, me marcou muito e acabou por suscitar alguns questionamentos. Até que ponto a visão do professor sobre o ensino de tal temática influencia o que ocorre em sala de aula? De que modo e como essa visão da professora também influencia a visão dos seus alunos? E quando se trata de futuros professores (como tal era o caso de alguns alunos naquela turma e dentre os quais eu me incluia)?

> Os matemáticos são, em muitos casos, professores de futuros professores e não há ainda, em Portugal, estudos empíricos sobre as suas conceções relativas à ciência com que trabalham, certamente com influência na determinação do entendimento e visão desses futuros professores em relação à Matemática e à atividade matemática. (Guimarães, 2003, p. 3)

Na verdade, diversos estudos realizados nas últimas quatro décadas apontam para os altos índices de reprovação nas disciplinas iniciais dos cursos de Ciências Exatas, particularmente na disciplina de Cálculo Diferencial (e.g., Barufi, 1999; Fernandes Filho, Gomes, Lopes & Nieto, 2005). Essa retenção nos cursos de Cálculo no ensino superior brasileiro acaba por trazer consequências nefastas, desde o verdadeiro desperdício de recursos financeiros, ao abalo no grau de confiança do estudante em sua própria capacidade para prosseguir nos estudos, uma vez que estes cursos são geralmente apresentados numa fase inicial do curso superior.

Desse modo e por ocasião da realização dos meus estudos de doutoramento em Portugal, surgiu a possibilidade e também o interesse em entrecruzar esses dois domínios. Por um lado, considerar o ensino do Cálculo Diferencial em um país onde a implicação curricular já existe e está perfeitamente consolidada no ensino secundário. E, por outro lado, considerar o ensino do Cálculo Diferencial a partir da visão e da perspetiva do professor, ou seja, com foco específico nas suas conceções, sem, entretanto, deixar de considerar as situações relativas ao contexto e também aos aspetos centrais da prática do professor no ensino desse tema.

Mesmo que no Brasil o Cálculo Diferencial, em geral, não integre o currículo do ensino secundário, o estudo da disciplina de introdução de seu conteúdo e com foco nas conceções do professor pode trazer contributos importantes para o enfrentamento dos graves problemas que envolvem seu ensino nos cursos universitários da área de Ciências Exatas. Ademais, o estabelecimento e a exploração das especificidades desses campos (nomedamente a prática profissional, as conceções do professor de Matemática e o ensino do Cálculo Diferencial), descritos de modo mais pormenorizado no enquadramento teórico, incrementam a relevância da presente investigação e as possibilidades concretas de impacto de seus resultados. Sendo assim, o presente estudo pretende trazer novos elementos para a discussão, a partir do estudo no contexto educacional português.

Por outro lado, há também a possibilidade de o estudo vir a contribuir no que tange à formação do professor e à melhoria da sua prática pedagógica a partir da compreensão de suas conceções, conforme refere Guimarães (2010): "conhecer e compreender essas concepções [do professor] será essencial para compreender a atuação dos professores e também para poder intervir no sentido da melhoria da sua formação e da sua prática pedagógica" (p. 97).

1.2 Objetivo e questões do estudo

O foco desse estudo é o professor, especificamente as suas conceções sobre o ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário, tendo por pressuposto que tais conceções desempenham um papel fulcral no modo como o professor interpreta as situações educativas e estrutura a atuação no quadro da sua prática de ensino. Desse modo, a investigação também tem interesse nos aspetos centrais que caracterizam a prática do professor no ensino deste tema. Assim, o objetivo do estudo é identificar e compreender as conceções dos professores de Matemática sobre o ensino de Cálculo Diferencial (CD) no ensino secundário bem como os aspetos centrais da sua prática profissional no seu ensino. Para concretizar este objetivo, considero três professores de Matemática do ensino secundário, que lecionam a disciplina de Matemática A para o 11.º e 12.º anos. Tendo em conta cada um dos professores e o objetivo estabelecido, procuro responder às seguintes questões orientadoras:

1) *Quais as conceções do professor em relação ao ensino de CD no currículo escolar do ensino secundário (Matemática A)?*: Qual a conceção do professor sobre: (i) A inserção de tópicos do CD no currículo do ensino secundário?; (ii) O tempo destinado para sua abordagem?; (iii) A abordagem dos tópicos do CD?; (iv) O potencial de dispositivos tecnológicos (tais como calculadoras gráficas ou Ambiente de Geometria Dinâmica) como facilitadores da aprendizagem? Quais as razões para se fazer (ou não) uso destes dipositivos em aula? e (v) De que maneira o professor encara a articulação dos tópicos de CD com outras áreas do conhecimento?

2) *Como se caracteriza a exploração didática dos tópicos de CD pelo professor em termos de estrutura adotada, da abordagem seguida, das tarefas propostas e das representações matemáticas usadas?* Como as aulas são estruturadas? Qual é a natureza das interações ocorridas nas aulas (comunicação)? Que ênfases são conferidas pelo professor durante as aulas? De que tipo e como são trabalhadas as tarefas propostas pelo professor durante as aulas? De que forma os tópicos de CD são explorados do ponto de vista das representações? Existe a preponderância de alguma forma para representar?

1.3 O Contexto do estudo

Este estudo insere-se na área de investigação sobre o professor, especificamente sobre o professor de Matemática. A investigação neste domínio tem recebido uma grande atenção nas últimas décadas com uma notável evolução na forma de perspetivar o professor, apresentando a pesquisa, consoante às várias perspetivas assumidas, substanciais diferenças em termos metodológicos, teóricos e ideológicos.

Em um primeiro momento, antes e durante a década de 1960, o professor foi estudado a partir da sua personalidade e os métodos utilizados excluíam o exame direto dos processos educacionais (Good, Biddle & Goodson, 1997). Dentro desse paradigma, acreditava-se que os professores que possuíam certas personalidades, tais como cordialidade, abertura e comunicação eram melhores facilitadores do desempenho dos alunos em sala de aula do que aqueles que não tinham essas características. No entanto, esse paradigma que advogava um certo mito da "personalidade para o ensino" logo caiu por terra e "isso levou a pedidos de uma melhor pesquisa sobre os processos de ensino" (Good et al, 1997, p. 671).

Os investigadores passaram então a se interessar pela compreensão do que ocorria dentro da sala de aula, dando uma atenção importante para o comportamento observável do professor. Essa perspetiva tinha por pressuposto que a aprendizagem do aluno era uma consequência imediata e direta da ação do professor em sala de aula (Calderhead, 1987). Nessa fase, um dos principais objetivos dos pesquisadores "era demonstrar que a variação no comportamento dos professores poderia estar relacionada à aprendizagem do aluno" (Good et al, 1997, p. 672). No entanto, tal perspetiva que ficou conhecida como "processo-produto" mostrou-se muito limitada no intento de uma compreensão mais alargada do processo de ensino e aprendizagem, uma vez que reduzia tudo às ações observadas do professor em sala de aula (Calderhead, 1987).

Na sequência e tendo em conta as limitações apresentadas no paradigma de pesquisa correlacional do comportamento do professor (abordagem behaviorista), ou de processo-produto, um foco de interesse foi dado aos processos de pensamento do professor ou à vida mental dos professores. Essa linha de investigação tinha por pressuposto básico que aquilo que o professor fazia em sala de aula era influenciado por aquilo que o professor pensava.

> O comportamento do professor é substancialmente influenciado e até determinado pelos processos de pensamento dos professores. Essas são as premissas fundamentais por trás da literatura que passou a ser chamada de pesquisa sobre o pensamento do professor. Os profissionais desse ramo de pesquisa educacional procuram primeiro descrever completamente a vida mental dos professores. (Clark & Peterson, 1986, p. 255)

Essa nova forma de perspetivar o professor passou a ocorrer sensivelmente a partir da metade da década de 1970. Tendo em conta o contexto americano, Calderhead (1987) e Clark e Peterson (1986) citam um evento ocorrido precisamente em junho de 1974 nos Estados Unidos e que contribuiu, segundo esses autores, para o estabelecimento dessa nova perspetiva. Trata-se da Conferência Nacional sobre Estudos no Ensino organizada pelo Instituto Nacional de Educação (da sigla em inglês NIE - *National Institute of Education*, 1975). Dentre os vários painéis apresentados na referida conferência, um deles ocupou um lugar de destaque: foi justamente o painel de número 6, presidido por Lee Shulman, que produziu um relatório no qual enunciava uma justificativa e defendia um programa de pesquisa sobre os processos de pensamento dos professores.

> Para entender, prever e influenciar o que os professores fazem, argumentaram os painelistas, os pesquisadores devem estudar os processos psicológicos pelos quais os professores percebem e definem suas responsabilidades e situações profissionais (...) Essa visão do professor como profissional teve um efeito profundo nas perguntas feitas, nos métodos de investigação empregados e na forma dos resultados relatados nas pesquisas sobre o pensamento do professor. (Clark & Peterson, 1986, p. 256)

Este cenário que se desenhou desde então e que testemunhou uma insatisfação com as abordagens essencialmente comportamentais para o estudo do processo de ensino e aprendizagem acompanhou o desenvolvimento da Psicologia da Educação e também de outras áreas tais como a Sociologia, a Filosofia, a Antropologia e a Linguística e trouxe importantes mudanças a nível teórico, ideológico e metodológico (Calderhead, 1987).

> Ideologicamente, ver os professores como agentes ativos no desenvolvimento de sua própria prática, como tomadores de decisão usando seu conhecimento especializado para orientar suas ações em situações

> particulares, sublinhou os aspectos autônomos e responsáveis do trabalho dos professores e forneceu uma justificativa atraente para considerar o ensino como uma profissão digna, complexa e exigente, especialmente quando contrastada com a visão anteriormente dominante do ensino como o domínio de uma série de comportamentos efetivos no ensino. (Calderhead, 1987, p. 5)

A pesquisa tendo por foco os processos de pensamento e a "a vida mental" dos professores deu origem à diversas abordagens no que tange à investigação sobre o professor. Uma primeira abordagem está associada aos pensamentos dos professores e suas decisões interativas na sala de aula, bem como aos processos de planificação das aulas pelos professores (Clark & Peterson, 1986). Uma segunda abordagem se refere ao estudo do conhecimento do professor (Ball, Thames & Phelps, 2008; Shulman, 1986), tendo por pressuposto que os professores "possuem um corpo de conhecimentos especializados" (Calderhead, 1987, p. 1) e que este conhecimento ajuda o professor "a estabelecer relacionamentos com as crianças, gerenciar a turma, decidir a melhor forma de ensinar um tópico específico, manter o interesse das crianças e instruí-las" (Calderhead, 1987, p. 3). Finalmente, uma terceira abordagem segue uma linha de natureza mais interpretativa com foco nas crenças e conceções do professor e na relação destas crenças com as práticas de sala de aula (Cooney, 1985; Thompson, 1982, 1984, 1992; Pajares, 1992).

A investigação que aqui apresento tem por intenção identificar e compreender as conceções dos professores de Matemática sobre o ensino de Cálculo Diferencial (CD) no ensino secundário bem como os aspetos centrais da sua prática profissional no ensino deste tema e, portanto, insere-se na terceira abordagem referida, nomeadamente com foco nas conceções e crenças do professor.

A investigação das conceções do professor tem o seu início a partir dos anos 80 (Pajares, 1992). Esse interesse pelas conceções do professor, segundo Ponte (1992), baseia-se no pressuposto de "que existe um substrato conceptual que joga um papel determinante no pensamento e na ação" (p. 1). Segundo o autor, esse substrato apresenta uma natureza diferente dos conceitos específicos, não se reduz aos aspetos mais imediatamente observáveis do comportamento e não se revela com facilidade.

Pajares (1992), por seu turno, ao fazer referência às crenças dos professores, menciona ser essencial compreender as estruturas destas crenças, tendo em vista o aprimoramento da sua preparação profissional e da melhoria das suas práticas de ensino.

No que concerne à Educação Matemática[1], Thompson (1992) refere que a investigação nessa área também tem apresentado um vivo interesse no estudo das conceções:

> Ao reconhecer que provocar mudanças no que acontece nas salas de aula de Matemática depende de os professores mudarem suas abordagens de ensino e que essas abordagens, por sua vez, são influenciadas pelas conceções dos professores, os educadores matemáticos reconhecem a importância dessa linha de pesquisa. (p. 129)

Para Guimarães (2003), "os significados que elaboramos e que adquirem alguma estabilidade constituem as nossas conceções, o instrumento de que o pensamento se socorre para interpretar o mundo e que neste processo se corrigem e aperfeiçoam" (p. 51). Segundo o autor, na nossa relação com a realidade, as conceções desempenham um papel que é, simultaneamente, condição e limite do nosso conhecimento dessa realidade.

> Por um lado, permite-nos interpretar, dar sentido às situações com que nos confrontamos; sem elas, poderíamos dizer, essa interpretação não é possível. Por outro lado, o acesso que temos à realidade não é um acesso direto; é através de nossos sistemas conceituais que a realidade nos chega e, exatamente por isso, chega-nos 'filtrada' pelas nossas conceções que assim limitam o nosso conhecimento, introduzindo uma distorção que impregna a perceção e a compreensão que temos do que se nos apresenta ao nosso espírito". (p. 6)

Ponte (1992), por seu turno, reconhece nas conceções do professor uma natureza essencialmente cognitiva, que atua como uma espécie de filtro: "Por um lado, são indispensáveis pois estruturam o sentido que damos às coisas. Por outro lado, atuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de atuação e compreensão" (p. 1). Ainda segundo o autor, as conceções são formadas simultaneamente em um processo individual (resultando da elaboração sobre a experiência) e social (resultando do confronto entre a própria elaboração com as dos outros) e não constituem um todo relativamente homogêneo, apresentando diferenciações pelos níveis de ensino, pela origem profissional, pela inserção social e pelas opções ideológicas e educativas. Além disso, as conceções não

[1] Ponte (2008) identifica três significados essenciais para a expressão "educação matemática": (i) como um *campo de práticas sociais*; (ii) como um *campo de formação* e (iii) como um *campo de investigação académica*. Tendo em atenção justamente o domínio académico, mas considerando também a influência dos outros dois campos, Ponte (1993b) designa a educação matemática como a área do conhecimento em que se "procura debruçar de modo sistemático e consistente sobre os problemas que afetam o ensino e aprendizagem desta disciplina, bem como a formação de professores e o contexto curricular, institucional, social e cultural em que se desenvolve a ação educativa" (p. 95). Essa definição como área do conhecimento é a adotada nesse estudo e está identificada com letras maiúsculas: Educação Matemática.

constituem uma unidade estática e o seu estudo depara-se com dificuldades metodológicas:

> Estudar as conceções dos professores ou dos alunos é fazer antropologia na nossa própria cultura. Implica salientar os valores, as motivações, os eixos principais do processo educativo. Trata-se de um esforço particularmente difícil, tanto pelo caráter elusivo do objeto de estudo como pelo fato de os investigadores estarem eles próprios embebidos na mesma cultura. (Ponte, 1992, p. 34)

1.4 Organização do estudo

A investigação realizada deu origem a um relatório que está organizado em nove capítulos. No primeiro capítulo apresento a motivação e a pertinência do estudo, o objetivo e as questões que elegi para concretizá-lo e, por fim, também apresento o contexto no qual o estudo foi realizado. Na sequência deste capítulo introdutório, dedico três capítulos para discutir o enquadramento teórico, que, por seu turno, abrange três dimensões: (i) as conceções do professor; (ii) a prática profissional do professor e (iii) o ensino do Cálculo.

No capítulo 2 discuto o interesse no estudo das conceções do professor e trato também das diferentes terminologias e definições adotadas pela comunidade de investigação neste domínio. Em seguida, abordo as questões concernentes à estrutura, origem e mudança das conceções, explicitando os principais fatores associados a cada um destes domínios. Logo após discuto a relação entre conceções e conhecimento e também as conceções do professor sobre a Matemática e o seu ensino, bem como a relação entre as conceções dos professores e as respetivas práticas pedagógicas. Em seguida, apresento alguns estudos portugueses que tiveram a temática das conceções do professor como foco central.

No capítulo 3 começo por apresentar o interesse e também a importância da investigação centrada nas práticas do professor de Matemática. Na sequência, discuto o significado atribuído ao conceito "práticas do professor" tendo em atenção as duas perspetivas subjacentes que lhe são conferidas nos estudos conduzidos neste domínio, nomeadamente as perspetivas sociocultural e cognitivista. Por fim, considerando as práticas letivas do professor de Matemática, apresento os resultados de alguns estudos empíricos realizados e também alguns construtos teóricos elaborados, com destaque para as tarefas e para a comunicação em sala de aula.

No capítulo 4, discuto a presença do Cálculo Diferencial no currículo do ensino secundário de alguns países, com especial atenção para os casos brasileiro e português. Em seguida, discuto o movimento de reforma do ensino do Cálculo ocorrido em meados dos anos oitenta nos Estados Unidos e trato também da relação entre o Cálculo no ensino secundário e no ensino superior. Por último, apresento alguns estudos empíricos sobre o ensino-aprendizagem do Cálculo que possuem uma estreita relação com o objetivo da presente pesquisa, a saber, o estudo das prática profissionais e das conceções do professor de Matemática que leciona tópicos de Cálculo Diferencial na escola secundária de Portugal.

O capítulo 5 é inteiramente dedicado à fundamentação metodológica do estudo. Começo por justificar o porquê da inscrição da presente investigação em uma abordagem qualitativa de pesquisa e também o porquê dela estar inscrita em um paradigma interpretativo. Em seguida, quando trato da escolha pelo estudo de caso qualitativo, apresento os três participantes da investigação, bem como os critérios para a escolha e também as questões de ordem ética. Por fim, descrevo o processo de recolha e também a análise dos dados e apresento a parte da validação dos casos.

Os capítulos 6, 7 e 8 correspondem aos casos dos três professores que participam deste estudo – Mariana, João e Maria José. Em cada um dos casos, a escrita respeita uma estrutura que começa pela apresentação do professor e compreende o seu percurso profissional e também o contexto escolar onde está inserido. Na sequência apresento a perspetiva do professor sobre o ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário. Em seguida, apresento a seção referente às aulas de Matemática envolvendo o Cálculo Diferencial e que está dividida em 4 partes: (i) a turma e a sala de aula; (ii) a estrutura das aulas; (iii) as interações na aula; e (iv) o Cálculo Diferencial nas aulas.

No capítulo 9, último do relatório, apresento as conclusões do estudo, conectando os resultados da parte empírica com a revisão de literatura relativa ao quadro teórico apresentado nos capítulos 3, 4 e 5. Começo com uma breve síntese do estudo, onde revejo a incidência da investigação, a metodologia utilizada e os pressupostos assumidos, bem como os objetivos e as questões orientadoras do estudo. Na sequência, apresento as conclusões alcançadas, ponderando-as à luz do referencial teórico. Estas aparecem organizadas em quatro partes: (i) na primeira abordo as questões relativas ao percurso profissional e ao contexto escolar dos participantes; (ii) na segunda parte abordo as conceções dos professores em relação ao ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário; (iii) na terceira parte trato das questões respeitantes à prática dos professores no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial; e (iv) na última parte apresento as conclusões e implicações do estudo.

Capítulo 2

Conceções dos professores de Matemática

No presente capítulo apresento a revisão de literatura relativa às conceções do professor de Matemática. Esta revisão de literatura tem por objetivo informar e também estruturar a pesquisa por mim realizada. O capítulo inicia-se com uma breve discussão sobre o interesse no estudo das conceções do professor, sendo seguida por uma secção que trata das diferentes terminologias e definições adotadas pela comunidade de investigação, ocasião em que busco justificar o porquê de minha opção pelo termo "conceções". Em seguida, abordo as questões concernentes à estrutura, origem e mudança das conceções, explicitando os principais fatores associados a cada um dos domínios.

Logo após, tendo em atenção os domínios cognitivos e afetivos presentes nas conceções, discuto a relação entre conceções e conhecimento e também o domínio afetivo das conceções. A seguir são abordadas as conceções do professor sobre a Matemática e também sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática. Na sequência, uma secção é dedicada à relação entre as conceções dos professores e as respetivas práticas pedagógicas. Em seguida, apresento alguns estudos realizados em Portugal que tiveram a temática das conceções do professor de Matemática como foco central. Por último, apresento o resumo do capítulo.

2.1 O interesse pelo estudo das conceções

O interesse pelo estudo das conceções e crenças remonta ao início do século XX e está diretamente relacionado com a preocupação dos psicólogos sociais em compreender a influência das conceções e crenças sobre o comportamento das pessoas

(Cury, 2003). Após um período de estagnação durante a década de 1920, o interesse pela pesquisa neste domínio ressurge nas décadas de 1930 e 1960 (Barkatsas, 2008). Entretanto, e conforme já discutido, foi somente na década de 1970 e a partir do “advento da ciência cognitiva” que este domínio assume um lugar de destaque em “relação a outros aspectos da cognição humana e do afeto humano” (Abelson, 1979, p. 355). Considerando o estudo do pensamento do professor, é de referir também mudanças significativas ocorridas no paradigma metodológico utilizado:

> Houve uma crise metodológica emergente no final da década de 1970 que sugeria que os pesquisadores não estavam focando o que era realmente significativo no ensino de Matemática. Houve uma breve incursão nas investigações sobre as atitudes dos professores em relação à Matemática e ao ensino. Esta pesquisa foi geralmente bem recebida mas faltava um componente cognitivo e, no final das contas, não estava livre das amarras do paradigma behaviorista dominante. Ainda assim, havia uma sensação de que, para entender o ensino e a aprendizagem da Matemática, é preciso lidar com algo diferente de variáveis bem definidas e uma noção altamente quantificável do comportamento de ensino. (Cooney, 1999b, p. 18)

Como fruto desse intresse crescente dentro da comunidade de investigação, a década de oitenta assiste a um número expressivo de estudos que tiveram como foco principal as conceções do professor. Uma primeira investigação a referir e que constitui um verdadeiro marco no domínio do estudo das conceções do professor de Matemática foi a tese de doutoramento de Alba Thompson, ocorrida no ano de 1982 na Universidade da Geórgia e que teve por orientador Thomas J. Cooney, investigador que, por seu turno, se dedicou durante muito tempo ao estudo das conceções. No seu estudo, Thompson (1982) realiza três estudos de caso e adota uma abordagem interpretativa para investigar as conceções dos professores sobre a Matemática, o ensino de Matemática e a relação entre essas conceções e a prática dos professores.

Thompson (1992), passados exatos dez anos desde o seu primeiro estudo, escreve um capítulo em que apresenta uma vasta revisão da investigação desenvolvida sobre as conceções e crenças dos professores de Matemática. Neste trabalho, a autora destaca que dentro da comunidade investigativa não há uma definição clara e precisa para o termo “conceções”. Sobre esta questão de se ter uma definição mais precisa, Barkatsas e Malone (2005), referindo-se agora ao termo “crenças”, também referem que “o termo tem sido particularmente difícil de definir na literatura educacional e psicológica” (p. 69). Sobre esta questão dedico a próxima seção.

2.2 Definições e terminologias

Considerando a literatura anglo-saxónica, um termo bastante utilizado é o termo *belief* que pode ser traduzido para *crença* em língua portuguesa. O termo *conception*, por seu turno, pode ser traduzido para *conceção*. Mas a diversidade de termos utilizados pelos pesquisadores não fica restrita a estes dois termos. Pehkonen e Törner (1999) realizaram uma pesquisa na base de dados ERIC no período de 1989 até 1998 e encontraram, para além dos termos *belief* e *conception*, também *view, understanding, perception, perspective,* termos estes que poderiam ser traduzidos para a língua portuguesa como visão, entendimento, perceção e perspetiva, respetivamente. De todos esses termos, na busca referida, o termo *conception* aparece com maior frequência, sendo logo seguido por *belief.*

Tendo em atenção justamente a quantidade de expressões utilizadas, Pajares (1992) refere que a “Psicologia Educacional nem sempre concorda com suas construções com tanta precisão” e que, por essa razão, “definir crenças é, na melhor das hipóteses, um jogo de escolha” (p. 309):

> Elas [as crenças] viajam disfarçadas e frequentemente sob pseudônimos - atitudes, valores, julgamentos, axiomas, opiniões, ideologia, perceções, conceções, sistemas conceituais, preconceitos, disposições, teorias implícitas, teorias explícitas, teorias pessoais, processos mentais internos, estratégias de ação, regras de conduta prática, princípios práticos, perspetivas, repertórios de entendimento e estratégia social, para citar apenas alguns que podem ser encontrados na literatura. (p. 309)

Para além de uma grande quantidade de expressões que muitos autores utilizam de um modo até indistinto, Barkatsas (2008), tendo em atenção o termo “crenças”, refere que um “certo obstáculo ao progresso nesse domínio é o desalinhamento do significado do conceito referido pelos pesquisadores” (p. 22) e credita tal desalinhamento à falta de concordância entre os investigadores em relação aos limites entre crença e conhecimento. Esta questão do limite entre crença e conhecimento é também apontada por Pehkonen e Törner (1999) que, citando Thompson (1992) e Abelson (1979), referem: “Embora as crenças sejam populares como tema de estudo, o conceito teórico de “crença” ainda não foi tratado completamente. A principal dificuldade tem sido a incapacidade de distinguir crenças de conhecimento, e o problema ainda não está esclarecido" (pp. 6-7). E, como consequência, prosseguem os autores, "os pesquisadores frequentemente formulam sua própria definição para "crença", que pode até estar em contradição com os outros" (p. 7).

Diante desse universo polissêmico referente ao domínio e da falta de concordância quanto a uma definição mais clara e precisa, parecem existir posições díspares também em relação a este estado da situação. Por um lado, Günter (1999) parece identificar uma mais valia nesse estado de imprecisão ao afirmar que "na literatura atual até hoje ainda não há consenso sobre uma única definição de crença. Talvez seja essa abertura, ou seja, a imprecisão do termo crença que torna seu uso bem-sucedido e flexível" (p. 128). Uma posição similar parece ser a de Cooney (1999b), que questiona o valor da perspetiva de se ter uma definição mais precisa, mencionando que a condição humana desafia essas linhas mais nítidas de demarcação:

> Dada a natureza de nossa pesquisa, a preocupação com uma definição precisa de crença perde a cor em comparação com a compreensão da natureza do desenvolvimento profissional dos professores. Pode-se argumentar que uma definição mais precisa poderia moldar melhor nossa pesquisa e fornecer uma estrutura na qual nossa pesquisa avançaria mais rapidamente. Mas eu questiono o valor dessa perspectiva. Parece-me que a condição humana é sempre assolada por uma estranha mistura de racionalidade e irracionalidade que desafia linhas nítidas de demarcação (...) Mas, na medida em que nossa pesquisa é sobre as atividades de sentido do indivíduo, devemos reconhecer que o indivíduo é motivado por muitas considerações, algumas das quais são passíveis de uma forma de lógica aristotélica e outras que não são. (p. 22)

Por outro lado, Pajares (1992) parece discordar dessa posição ao fazer referência à necessidade de se ter conceituações mais claras e precisas. Na visão deste autor, a dificuldade do estudo no domínio reside justamente nessa questão da falta de uma definição mais precisa:

> A dificuldade em estudar as crenças dos professores foi causada por problemas de definição, conceituações precárias e diferentes entendimentos de crenças e estruturas de crenças (...) As crenças dos professores podem e devem tornar-se um foco importante da investigação educacional, mas que isso exigirá conceituações claras, exame cuidadoso das principais premissas, entendimento consistente e adesão a significados precisos e avaliação apropriada e investigação adequadas de construções de crenças específicas. (p. 307)

Diante destas duas posições, marcadamente antagônicas, é importante tecer algumas considerações. Em primeiro lugar, ambas as posições têm os seus méritos e também suas limitações: se, por um lado, uma maior liberdade no uso dos termos permite uma maior flexibilidade na condução de investigações, por outro lado, pode também se prestar à confusões que, por seu turno, podem levar à interpretações errôneas. Desse modo, e tendo em consideração o presente estudo, considero essencial realizar uma escolha do termo a utilizar e também apresentar uma justificação que procure respaldar esta escolha. Em segundo lugar, realizada tal escolha, considero igualmente importante apresentar, com base na literatura e no uso já consolidado, algumas definições apresentadas para o termo.

Sendo assim, opto aqui pela utilização do termo conceção. A justificativa para tal escolha reside no fato deste termo possuir uma maior abrangência que os demais, abrigando, inclusivamente, o próprio conceito de crença. Tal posição vai ao encontro da definição de Thompson (1992) de conceção: “Uma estrutura mental mais geral, incluindo crenças, significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais, preferências e outras coisas semelhantes” (p. 130). Uma definição próxima é adotada por Pehkonen (1999):

> Aqui entendemos que as crenças de um indivíduo são formadas com base em suas experiências subjetivas e são modos de pensamento bastante estáveis, que geralmente são mais ou menos carregados de emoções (...) As concepções são entendidas como as crenças conscientes de um indivíduo pelas quais ele geralmente é capaz de dar razões. (p. 107).

Assim, e de acordo com as definições acima, uma crença é um tipo especial de conceção. Mas a escolha por utilizar o termo conceção prende-se também com a possibilidade da abrangência dentro desse termo de aspetos respeitantes aos domínios afetivos e cognitivos, conforme referido por Guimarães (2003):

> Ao conceito de crença, como vimos, é tendencialmente associada uma carga afetiva, e com a utilização do conceito de conceção, na acepção ampla atrás referida, contemplam-se as dimensões cognitivas e afetivas que a simples utilização do conceito de crença poderia esconder. (p. 65)

A definição de Thompson (1992) anteriormente apresentada é uma definição dada por extensão, ou seja, consiste “essencialmente na enumeração de um conjunto de aspetos constituintes das conceções" (Canavarro, 1993, p. 24). Ao passo que a definição dada por Pehkonen (1999) apresenta já um cariz essencialmente compreensivo. Encontramos exemplos de definições compreensivas para o termo conceções em alguns estudos portugueses, dada a preferência a esse termo nos estudos conduzidos neste país, como é o caso de Guimarães (2003), Canavarro (1993) e Ponte (1992).

Canavarro (1993) no estudo conduzido com três professores refere-se às conceções do professor como sendo "um sistema organizativo algo difuso que opera tácita e permanentemente sobre o conjunto de componentes que constituem as referências do professor – crenças, valores, conhecimento de vária natureza e elementos afetivos – gerando e suportando os seus modos de ver e atuar" (p. 25). Guimarães (2003), por seu turno, no estudo conduzido com dois professores e dois matemáticos, apresenta uma definição baseada no papel mediador do que denominou de "sistemas conceituais":

> Na nossa relação com a realidade, as conceções podem assim ser vistas a desempenhar um papel que é, simultaneamente, condição e limite do nosso conhecimento dessa realidade. Por um lado, permite-nos interpretar, dar sentido às situações com que nos confrontamos; sem elas, poderíamos dizer, essa interpretação não é possível. Por outro lado, o acesso que temos à realidade não é um acesso direto; é através de nossos sistemas conceituais que a realidade nos chega e, exatamente por isso, chega-nos 'filtrada' pelas nossas conceções que assim limitam o nosso conhecimento, introduzindo uma distorção que impregna a perceção e a compreensão que temos do que se nos apresenta ao nosso espírito. (p. 6)

A ideia das conceções atuando como "filtros" é também referida por Ponte (1992). Para este autor, as conceções assumem um caráter essencialmente cognitivo, embora não negue que possuem também componentes de cariz afetivo. Na visão deste autor:

> As conceções têm uma natureza essencialmente cognitiva. Atuam como uma espécie de filtro. Por um lado, são indispensáveis pois estruturam o sentido que damos às coisas. Por outro lado, atuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando a nossa possibilidade de atuação e compreensão. (p. 1)

2.3 Conceções: estrutura, origem e mudança

Considerando a importância e o papel relevante desempenhado pelas conceções do professor, é natural a realização de alguns questionamentos: (i) De que modo as conceções de um indivíduo estão estruturadas? (ii) Como se originam as conceções? e (iii) Como ocorre o processo de mudança das conceções? A presente seção é dedicada a estas questões.

Tendo em conta que um indivíduo possui uma quantidade significativa de conceções sobre os mais variados assuntos, uma premissa básica assumida é a de que estas conceções devem respeitar alguma sistemática mínima de organização, ou seja, não devem estar dispostas ao acaso nem de uma maneira caótica. Entretanto, mesmo admitindo uma organização mais sistematizada das conceções de um indivíduo, uma outra questão, igualmente importante, surge: Como explicar o fato deste mesmo indivíduo apresentar crenças que são aparentemente conflitantes entre si? Estas questões mereceram muita atenção e foram abordada por Green (1971) que utilizou o termo sistema de crenças *(belief system)*. Este construto foi justamente concebido como uma estrutura organizativa que busca identificar o modo como se dá a relação das crenças entre si (Thompson, 1992).

Para Green (1971), citado em Thompson (1992), o sistema de crença possui três dimensões básicas. Uma primeira dimensão é a *estrutura quase-lógica* das crenças, segundo a qual uma crença nunca pode ser mantida em total independência das outras crenças e desse modo, o sistema de crenças pode apresentar algumas crenças primárias e outras crenças derivadas. Uma segunda dimensão está diretamente relacionada com o *grau de convicção* segundo o qual as crenças são mantidas, podendo existir crenças centrais e crenças periféricas. As crenças centrais são defendidas mais do que as periféricas, sendo que, por esta razão, as crenças periféricas são mais suscetíveis a mudanças. Finalmente, a terceira dimensão estabelece que as *crenças são mantidas em grupos*, sendo que cada um destes grupos pode permanecer mais ou menos isolados uns dos outros. Essa terceira dimensão referida impede o confronto entre crenças de um grupo com crenças de outro grupo e assim é possível explicar a existência, em um mesmo indivíduo, de crenças que são conflitantes entre si.

Juntamente com a tentativa de procurar entender como as conceções podem ser mantidas e estruturadas em um indivíduo, também está a preocupação de tentar entender como que estas conceções são originadas. Esta questão mereceu a atenção de muitos autores (Barkatsas, 2008; Cury, 1999; Handal, 2003; Pajares, 1992; Ponte, 1992; Thompson, 1992). Ponte (1992) refere que o processo de formação das conceções é, ao mesmo tempo, individual e social:

> As conceções formam-se num processo simultaneamente individual (como resultado da elaboração sobre a nossa experiência) e social (como resultado do confronto das nossas elaborações com as dos outros). Assim, as nossas conceções sobre a Matemática são influenciadas pelas experiências que nos habituámos a reconhecer como tal e também pelas representações sociais dominantes. (p. 1)

Uma autora que segue uma perspertiva muito próxima da de Ponte (1992) é Cury (1999). Embora não afirme textualmente que o processo de formação das conceções é simultaneamente individual e social, deixa isso subentendido ao tecer considerações sobre o modo como os professores *concebem* a Matemática:

> Acreditamos que os professores de Matemática formam idéias sobre a natureza da Matemática, ou seja, *concebem* a Matemática a partir das experiências que tiveram como alunos e professores, do conhecimento que construíram, das opiniões de seus mestres, enfim, das influências sócio-culturais que sofreram durante suas vidas, influências essas que vêm se formando ao longo dos séculos, passando de geração a geração, a partir das idéias de filósofos que refletiram sobre a Matemática. (p. 40)

A ideia trazida por Cury (1999) de que as conceções dos professores de Matemática são formadas a "partir das experiências que tiveram como alunos" encontra eco em outros autores. Handal (2003), por exemplo, ao procura responder à questão "Como se originam as crenças dos professores?", afirma que, em parte, "os professores adquirem essas crenças simbioticamente de seus ex-professores da escola de Matemática depois de assistir e observar as aulas por literalmente milhares de horas" (p. 48). Barkatsas (2008), por seu turno, também confere uma posição de relevo para a escolaridade prévia do professor, embora também coloque nesta equação um peso importante para o que chamou de "experiências culturais" dos professores. Segundo este autor, pode-se argumentar que "a escolaridade prévia e as experiências culturais dos professores também afetam suas crenças no nível inconsciente, agindo como uma peneira que filtra a maioria de seus pensamentos e ações matemáticas, especialmente no nível instrucional" (p. 22).

Pajares (1992), baseado nos estudos de Van Fleet (1979), refere que as crenças são criadas através de um processo de enculturação e construção social e que o processo de transmissão cultural apresenta três componentes: *enculturação, educação e escolaridade*. A componente de *inculturação*, segundo Pajares (1992), "envolve o processo de aprendizado incidental que os indivíduos sofrem ao longo de suas vidas e inclui sua assimilação, através da observação individual, participação e imitação, de todos os elementos culturais presentes em seu mundo pessoal". Já a componente *educação* é vista pelo autor como "a aprendizagem direcionada e proposital, formal ou informal, que tem como principal tarefa alinhar o comportamento aos requisitos culturais". Por fim, Pajares (1992) refere a *escolaridade* como sendo "o processo específico de ensino e aprendizagem que ocorre fora de casa" (p. 316).

Para além das explicações e construtos relacionados com o processo de organização estrutural das conceções no indivíduo e como que estas conceções têm origem, é igualmente importante buscar alguma explicação sobre o processo de mudança das conceções. Esta posição de um maior entendimento quanto ao processo de mudança das conceções do professor esteve intimamente ligada ao quadro reformista do ensino da Matemática, especialmente nos Estados Unidos, onde se constatou que muitas das conceções mantidas pelo professor estavam em desacordo com as ideias principais preconizadas nestes esforços de mudança.

Sobre esta questão, Handal (2003), refere que a mudança de conceção do professor é algo muito difícil. Essa posição também é endossada por Barkatsas (2008) que refere que "mudar as crenças dos professores do ensino secundário é uma tarefa assustadora que requer estratégias de intervenção planejadas com cuidado" (p. 46). Lerman (1999), por seu turno, vai mais além ao considerar que medir a mudança é algo problemático e complexo, referindo ainda a necessidade de se buscar uma reinterpretação mais acurada da noção de mudança:

> No cerne da pesquisa sobre as crenças dos professores está o argumento de que as crenças e concepções dos professores ou dos alunos precisam mudar para que o ensino mude. As crenças são consideradas um cenário mental interno que pode ser mapeado por instrumentos de pesquisa adequados. Elas são consideradas estáveis em toda a gama de locais de ensino e nos locais de coleta de dados do pesquisador, mas eles são passíveis de mudar ao longo do tempo como resultado de intervenções ou atividades. Tenho algumas preocupações sobre as duas primeiras premissas e, como conseqüência, desejo reinterpretar a noção de "mudança" como mais elaborada do que decorrente de uma mudança de crenças (p. 66)

Fennema, Carpenter, Jacobs e Empson (1996) realizaram um estudo que examinou mudanças nas crenças e no ensino de 21 professores do ensino fundamental em um período de quatro anos. Os professores envolvidos nesse estudo participaram de um programa de desenvolvimento profissional que "se concentrava em ajudar os professores a entender o desenvolvimento do pensamento matemático de crianças". Fennema et al, (1996) mencionam que "as descobertas sugerem que o desenvolvimento de uma compreensão do pensamento matemático das crianças pode ser uma base produtiva para ajudar os professores a fazer as mudanças fundamentais exigidas nas atuais recomendações de reforma" (p. 403).

Pajares (1992), por seu turno, é da opinião que "as crenças são criadas e promovidas e geralmente perduram, inalteradas, a menos que sejam deliberadamente desafiadas" (p. 316). O mesmo autor também refere que quanto mais cedo uma crença é incorporada, mais difícil se torna a sua alteração:

> Quanto mais cedo uma crença é incorporada à estrutura de crenças, mais difícil é alterar, pois essas crenças afetam subsequentemente a perceção e influenciam fortemente o processamento de novas informações. É por esse motivo que as crenças recém adquiridas são mais vulneráveis (...) Depois que as crenças são formadas, os indivíduos tendem a criar explicações causais em torno dos aspectos dessas crenças, sejam essas explicações precisas ou meras invenções. (p. 317)

Já na visão de Thompson (1992), parece existir uma tendência nos professores para que procedam a acomodação de elementos novos nas estruturas conceituais já existentes. Desse modo, segundo essa autora, ocorre a modificação apenas do que é necessário para que aquelas estruturas permaneçam basicamente inalteradas. Uma posição similar é referida por Ponte (1992). Para este autor, "mudanças profundas no sistema de concepções só se verificam perante abalos muito fortes, geradores de grandes desequilíbrios" (p. 27). Estes abalos, prossegue o autor, "apenas sucede[m] no quadro de vivências pessoais intensas como a participação num programa de formação altamente motivador ou numa experiência com uma forte dinâmica de grupo, uma mudança de escola, de região, de país, de profissão" (p. 27). Essa parece ser uma posição também assumida por Canavarro (1993):

> O processo de mudança das conceções é um processo complexo e lento. A vivência de situações disruptoras é potenciadora de alterações de conceções ou de práticas, que pode resultar em pequenas *nuances*, mesmo assim significativas, ou em mudanças mais radicais. Podem também ocorrer diversos fenómenos que aparentam mudanças de conceções ou práticas sem que a ela correspondam verdadeiramente, situação da qual muitas vezes o próprio professor nem se percebe. É o que acontece quando um professor não integra conceitualmente as novas ideias, adaptando-as de modo a que estas se ajustem ao esquema conceitual que possui – assimilação sem acomodação – ou quando adota determinados termos de

> um discurso novo ao qual adere verbalmente sem que isso produza qualquer outro efeito que não o retórico. (p. 59)

2.4 Conceções e conhecimento

Conforme mencionado na seção anterior, a razão principal apontada por alguns pesquisadores como um elemento de dificuldade e até de impedimento em direção a uma maior concordância da comunidade investigativa a cerca da definição do termo conceção é o reconhecimento, dentro dessa mesma comunidade, dos limites entre conceção e conhecimento ou, como tratado por alguns autores, dos limites entre crença e conhecimento (Abelson, 1979; Pehkonen & Törner, 1999; Thompson, 1992). A presente seção procura abordar esta questão e está dividida em duas partes. A primeira parte é dedicada inteiramente ao conhecimento do professor, dando especial atenção ao conhecimento do professor de Matemática. Para além da relação entre conceção e conhecimento, tal inclusão se justifica pelo fato do conhecimento profissional do professor representar uma temática que ocupou e ainda ocupa um lugar de centralidade dentro da investigação em Educação (e de modo específico na Educação Matemática), representando, atualmente, um dos seus focos principais de pesquisa. Assim, na primeira parte procuro apresentar algumas perspetivas sobre o conhecimento profissional do professor, com destaque para o construto teórico de Shulman (1986) e a seguir, já tendo em atenção o conhecimento do professor de Matemática, o modelo teórico de Ball, Thames e Phelps (2008). A segunda parte é dedicada à relação entre conceção e conhecimento.

2.4.1 Conhecimento do professor

O estudo dos professores e do ensino tem sido um campo ativo há muito tempo, mas foi na década de 80 que novas perspectivas do conhecimento do professor se tornaram proeminentes, nomeadamente as de Shulman (1986) e Schön (1991), passando a exercer forte influência na pesquisa sobre o professor. Para Schön (1991), a natureza do conhecimento do professor é essencialmente prática, ou seja, o conhecimento de qualquer profissional revela-se na sua ação, não havendo uma separação entre teoria e prática. Este conhecimento tem um caráter dinâmico, pois é resultado de reformulações da própria ação, e é tácito, sendo por isso difícil o professor falar dele. Para Schön (1991) “os profissionais competentes geralmente sabem mais do que podem dizer. Eles exibem um tipo de conhecimento na prática, a maior parte do qual é tácito” (p. 8). Ainda segundo este autor, o conhecimento do professor desenvolve-se a partir de processos de reflexão na ação e sobre a ação, o que lhe permite resolver problemas na prática como, por exemplo, lidar com situações de incerteza, instabilidade e conflito. “Através da reflexão, ele pode expor e criticar os entendimentos tácitos que cresceram em torno das experiências repetidas de uma prática especializada, e pode dar novo sentido às situações de incerteza ou singularidade que ele pode se permitir praticar” (Schön, 1991, p. 61).

Numa perspetiva semelhante, Ponte e Chapman (2006) consideram que o conhecimento do professor não é apenas “conhecer coisas” (fatos, propriedades, relações...), mas também saber como identificar e resolver problemas profissionais e, em termos mais genéricos, saber como construir conhecimento. Para os autores, esta perspectiva do conhecimento dos professores também inclui as suas crenças e conceções, que consideram construções relevantes para entender o que os professores conhecem.

Por influência de diferentes perspectivas dadas ao conhecimento do professor, algumas construções teóricas foram concebidas com a intenção de explicar tal conhecimento. Um dos constructos mais significativos e que exerceu forte influência na investigação é o “*pedagogical content knowledge*” *(PCK)* de Shulman (1986), por vezes traduzido para a língua portuguesa como “conhecimento pedagógico do conteúdo”.

Para Shulman (1986), ante a necessidade de simplificar as complexidades do ensino na sala de aula, a formação de professores subestimou um aspecto fundamental do ensino: o conteúdo a ensinar. Denominou esta falta de atenção ao conteúdo na investigação sobre o ensino de “paradigma ausente”. Considera que, para combinar adequadamente os dois aspectos da competência de um professor, o conteúdo do ensino e os elementos do processo de ensino, é preciso prestar atenção a ambos. Buscando um novo marco teórico coerente para aceder às complexidades do saber docente e da transmissão do conhecimento de conteúdo, o autor propõe três categorias de conhecimento: a) *conhecimento do conteúdo*, b) *conhecimento pedagógico do conteúdo* e c) *conhecimento dos programas de estudo (currículo)*.

<u>*O conhecimento do conteúdo*</u>. Este conhecimento relaciona-se com o conhecimento sobre as matérias de ensino que um professor possui e a forma como o

organiza. Os professores não só devem ensinar a seus alunos as verdades aceites em uma disciplina, mas deve explicar a justificação de determinado enunciado, por que vale a pena conhecê-lo e qual a sua relação com outros enunciados. Ademais, espera-se que o professor compreenda as razões pelas quais um determinado tema é fundamental dentro de uma disciplina, enquanto outros são secundários.

O conhecimento pedagógico de conteúdo. Dentro dessa categoria, estão incluídas as formas mais úteis de expor as ideias, as melhores analogias, descrições, exemplos, explicações e demonstrações, as formas de apresentar um tema para que os outros o entendam. Os professores têm que conhecer as estratégias mais propícias para organizar as aprendizagens de seus alunos. O autor ainda afirma que o estudo dos conceitos errados dos alunos e a forma como influenciam a aprendizagem posterior é um dos temas mais fecundos da investigação sobre os processos cognitivos.

O conhecimento dos programas de estudo (currículo). Este conhecimento compreende os programas desenhados para ensinar matérias e temas específicos em um nível determinado, os diferentes materiais didáticos disponíveis para esses programas e o conjunto de características que sugerem a conveniência de utilizar um determinado programa de estudo ou material didático em alguma circunstância. O autor confere também importância ao conhecimento vertical e horizontal dos programas de estudo.

Em relação às formas de conhecimento, Shulman (1986) propõe a existência de três tipos de conhecimentos docentes: *conhecimento proposicional* (ou enunciativo), *conhecimento casuístico* e *conhecimento estratégico*. Considera que o conhecimento proposicional se subdivide em três campos, a investigação empírica ou organizada, a experiência prática e o raciocínio moral e ético, a que se refere, como princípios, máximas e normas. Os princípios geralmente provêm da investigação empírica. As máximas representam o saber acumulado da experiência e, em muitos casos, são uma fonte importante de orientação prática. As normas são enunciados que orientam o trabalho do professor, não porque sejam verdadeiros em termos científicos, mas porque são moral e eticamente corretos.

Para Shulman (1986), o conhecimento casuístico consiste em conhecer eventos específicos, bem documentados e descritos de forma detalhada. Os casos podem ser exemplos de situações concretas ocorridas na prática ou podem ser exemplos de princípios, cujos detalhes servem para ilustrar um enunciado ou uma afirmação teórica mais abstrata. O autor sugere três tipos de casos: protótipos, que ilustram princípios teóricos; precedentes, que captam e comunicam princípios práticos ou normas; e parábolas, que transmitem normas ou valores.

Finalmente, o conhecimento estratégico opera quando o professor confronta determinadas situações ou problemas, sejam teóricos, práticos ou morais, que entram em conflito com princípios e não se vislumbra solução possível. O conhecimento estratégico se desenvolve quando as lições derivadas de princípios se contradizem entre si ou quando os precedentes de diversos casos são incompatíveis.

Essa análise de Shulman (1986) trouxe importantes implicações. A primeira começa por conceber de maneira diferente os exames para professores, defendendo que estes deveriam ser definidos e controlados por membros da profissão e não por legisladores e leigos na matéria. Outra consequência é que os profissionais da docência necessitariam conhecer tanto o conteúdo como o processo, e dentro do primeiro deveria incluir o conhecimento da estrutura da matéria, o conhecimento pedagógico dos termos gerais e específicos nesse campo e o conhecimento especializado dos programas de estudo. O aspecto principal a destacar nesse trabalho de 1986 e que acabou por influenciar de maneira significativa o pensamento sobre o assunto, tanto que gerou uma nova corrente de investigação, foi o constructo do "*pedagogical content knowledge*" *(PCK)* ou "conhecimento pedagógico do conteúdo". Sobre o PCK, o autor indica que este:

> Vai além do conhecimento per se, até a dimensão do conhecimento do assunto para ensinar. (...) inclui, na maioria dos tópicos ensinados na disciplina, as formas mais úteis de representação dessas ideias, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações – numa palavra, as formas de representar e formular o assunto que o tornam compreensíveis para os outros. (...) Também inclui uma compreensão do que torna fácil ou difícil o ensino de certos tópicos: as conceções e as preconceções que os alunos de diferentes idades e origens culturais trazem para a aprendizagem (Shulman, 1986, p. 9)

Foi a partir das ideias de Shulman que Ball, Thames e Phelps (2008), agora com foco no conhecimento do professor de Matemática, propuseram um modelo teórico fazendo um refinamento das categorias daquele autor. Tal construto foi chamado de *"Mathematical Knowledge for Teaching – MKT"* usualmente traduzido para a língua portuguesa como "Conhecimento de Matemática para Ensinar".

Com base em estudos empíricos, Ball et al. (2008) consideram que, além do conhecimento pedagógico do conteúdo, havia aspectos do conhecimento do conteúdo, que precisavam ser descobertos, mapeados, organizados e incluídos nos cursos de Matemática para professores. Com isso levantaram a hipótese de que o conhecimento de conteúdo de Shulman (1986) poderia ser subdividido em várias subcategorias, o mesmo acontecendo com o conhecimento pedagógico do conteúdo. Assim e a partir das ideias e conceptualizações do PCK de Shulman, Ball et al. (2008) concebem um modelo com subcategorias para estas duas categorias daquele autor (Figura 2.1).

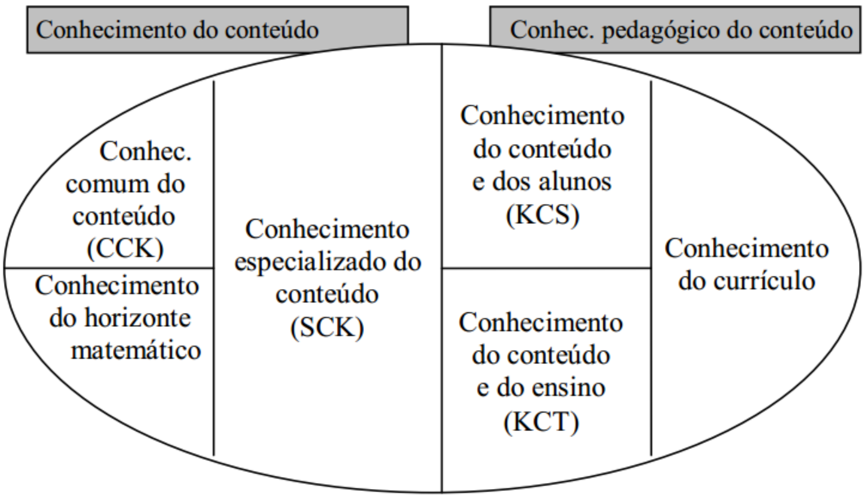


Figura 2.1: Conhecimento Matemático para Ensinar (Ball et al., 2008, p.403)

Eis os principais domínios dessa estrutura teórica.

1) *Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)*: é definido como o conhecimento matemático e a habilidade usados em configurações diferentes do ensino. O termo comum significa "não exclusivo do ensino".

2) *Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK)*: é o conhecimento matemático orientado para o ensino. O SCK é um conhecimento que normalmente não é necessário para outras finalidades além do ensino. Ao procurar padrões de erros dos alunos ou avaliar se uma abordagem fora do padrão funciona em geral, os professores têm que fazer um tipo de trabalho matemático que os outros não fazem.

3) *Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KCS)*: é o conhecimento que combina conhecimentos sobre os alunos e sobre a Matemática. Os professores devem prever o que os alunos provavelmente pensarão e o que eles acharão confuso.

4) *Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT)*: combina conhecimento sobre ensino e conhecimento sobre Matemática. A conceção das tarefas matemáticas exigem este conhecimento.

5) Conhecimento do Horizonte Matemático (HK): é uma percepção de como os tópicos matemáticos estão relacionados ao longo da Matemática incluída no currículo. Os professores da primeira série, por exemplo, podem precisar saber como a Matemática que ensinam está relacionada com a Matemática que os alunos aprenderão na terceira série, para poder definir a base matemática para o que virá depois. Também inclui a visão útil para ver conexões com ideias matemáticas muito posteriores. Ter esse tipo de conhecimento de horizonte matemático pode ajudar na tomada de decisão do professor.

6) *Conhecimento do currículo*: relativo aquilo que os professores têm de ensinar, bem como da forma como os diversos conteúdos se relacionam ao longo dos anos letivos.

Este modelo de Ball et al. (2008) tem sido criticado, dentre outros motivos, pelo fato de não contemplar as crenças dos professores e o impacto que estas podem ter sobre a maneira como as situações didáticas são abordadas. Por exemplo, Petrou e Goulding (2011) defendem a importância de se atender a estas crenças, referindo o seu papel no processo de ensino:

> Se os professores acreditam que a matemática é principalmente um assunto de regras e rotinas que devem ser lembradas, então a sua própria abordagem para problemas desconhecidos será limitada, e isso pode afetar o seu ensino. As crenças podem ser particularmente salientes no desenvolvimento do conhecimento sintático, onde conjeturar, encontrar evidências e buscar explicações é bem diferente de encontrar regras e rotinas em contextos reconhecíveis. (Petrou & Goulding, 2011, p. 17)

2.4.2 Relação entre conceção e conhecimento

A distinção entre conceções e conhecimento é uma tarefa das mais difíceis e complexas, senão impossível. Entretanto, e apesar desta dificuldade, alguns pesquisadores dedicaram seus esforços a esta tarefa, sendo que muitos deles, conforme pode ser visto na sequência, utilizaram-se do termo crença em seus estudos. É o que ocorre, por exemplo, em Pajares (1992). Este autor já começa por afirmar que "distinguir conhecimento de crença é uma tarefa assustadora" (p. 309), mas considera que uma das diferenciações principais repousa no fato de que as crenças são baseadas na avaliação e no julgamento, enquanto que o conhecimento é baseado em fatos objetivos. Seguindo uma linha semelhante, Nespor (1987) sugere que as crenças têm componentes avaliativos e afetivos mais fortes que o conhecimento. Assim, na visão destes dois autores, o conhecimento e as crenças estão fortemente entrelaçados, contudo a natureza afetiva, avaliativa e episódica das crenças fazem-nas uma espécie de "filtro" através do qual novos fenômenos podem ser interpretados.

Uma das primeiras tentativas de diferenciação entre esses dois domínios (que aparentemente estão muito longe de serem disjuntos) encontrada na literatura é a apresentada por Abelson (1979), que se utiliza das expressões "sistema de crenças" e "sistema de conhecimento". Este autor enfatiza a existência de características distintas, embora reconheça que "os sistemas de crenças têm muito em comum com os sistemas de conhecimento e, se não houvesse características distintas, a modelagem de sistemas de crenças seria como modelar sistemas de conhecimento e não precisaria de estruturas ou processos especiais" (p. 356).

Abelson (1979) apresenta sete características do sistema de crenças que o distingue, na sua visão, do sistema de conhecimento. As sete características são as seguintes: (i) Os elementos que constituem o sistema de crenças (conceitos, proposições, regras, etc.) não são consensuais; (ii) Os sistemas de crenças apresentam a preocupação com a existência (ou não) de determinadas entidades conceituais; (iii) Os sistemas de crenças incluem representações de "mundos alternativos" (p. 357); (iv) Os sistemas de crenças apresentam uma forte dependência de componentes avaliativos e afetivos, existindo como consequência dois aspectos relacionados, nomeadamente o "cognitivo" e o "motivacional"; (v) Existe uma grande probabilidade do sistema de crenças incluir um quantidade significativa de material episódico oriundo da experiência pessoal; (vi) O conteúdo pertencente a um sistema de crenças é, geralmente, muito "aberto"; e (vii) As crenças apresentam diferentes graus de certeza.

Considerando estas sete características, Abelson (1979) refere que estas "parecem caracterizar os sistemas de crenças como distintos dos sistemas de conhecimento". Entretanto, reforça que "nenhuma dessas [sete] características é garantida individualmente para distinguir crença de conhecimento; em combinação, é muito provável que o façam" (p. 360): "De qualquer forma, a capacidade dos sistemas de crenças de despertar e expressar as paixões dos crentes é uma característica essencial que não se encontra nos sistemas de conhecimento, valendo a pena nossos esforços teóricos para tentar compreendê-lo" (p. 364).

Cooney (1999b), ao relacionar crença e conhecimento, refere que "a crença é geralmente vista como uma construção que tem um componente cognitivo, mas é uma condição mais fraca que o conhecimento” (p. 19). Este autor refere que a “crença é uma condição necessária, mas não suficiente para o conhecimento” (p. 20) e, em outro trabalho, Cooney (1999a), chama a atenção para a necessidade de a investigação não se limitar somente ao que o professor sabe, ou seja, ao seu conhecimento, mas também considerar como este conhecimento foi adquirido e também ao que chama de “senso de propósito” do professor: “Na sala de aula, o que o professor sabe está fundido com seu senso de propósito como professor de matemática, sua filosofia de ensino e aprendizagem e seu senso de responsabilidade, dada a comunidade na qual ela ensina” (p. 170):

> Consequentemente, afirmo que, independentemente da lente que usamos para descrever o conhecimento dos professores, essa lente deve explicar a maneira pela qual o conhecimento é mantido e a capacidade do professor de usar esse conhecimento de maneira reflexiva e adaptativa.” (p. 171)

Estas considerações de Cooney (1999a) parecem ter subjacente que as conceções se relacionam, e que vão além do conhecimento de conteúdo específico e das habilidades pedagógicas. Tal premissa tem como consequência imediata, no campo da investigação, a consideração de Handal (2003), nomeadamente que as decisões do professor não dependem apenas de seu conhecimento pedagógico, mas do que acreditam ser o assunto e de como este assunto deve ser ensinado:

> Além disso, a profissão de professor parece moldar a natureza das crenças, porque os professores precisam tomar decisões e entender situações rapidamente, em solidão, com uma diversidade de assuntos, baseados no conhecimento empírico e sob pressão de fatores externos. O conhecimento pedagógico, portanto, não é um preditor total do comportamento instrucional, porque as crenças parecem mediar teoria e prática como uma interface poderosa. (p. 54)

Um estudo conduzido por Peterson, Fennema, Carpenter e Loef (1989), muito influenciado pelo construto de conhecimento pedagógico de conteúdo de Shulman (1986), investigou as relações entre o conhecimento do conteúdo pedagógico dos professores (envolvendo a adição e subtração na primeira série), as crenças de conteúdo pedagógico dos professores e o desempenho dos alunos em Matemática. Os resultados apontaram para relações significativas entre as crenças, o conhecimento (dos professores) e o desempenho dos alunos. Embora sem fazer uma análise detalhada na relação entre crença e conhecimento dos professores, os autores referem a confiança dos professores tanto em seus conhecimentos como em suas crenças: “Como pessoas cuja tarefa diária é entender e interpretar o rápido fluxo de eventos na sala de aula, tomar decisões e agir de acordo com suas interpretações, os professores obviamente confiam em seus conhecimentos e crenças" (p. 3).

Thompson (1992), por seu turno, refere a dificuldade de separar o conhecimento dos professores de suas crenças, entretanto vinca que "uma característica das crenças é que elas podem ser realizadas com diferentes graus de convicção" e também que "elas [as crenças] não são consensuais" (p. 129). Ainda segundo esta autora, "alguns educadores argumentam que não é útil para os pesquisadores buscar distinções entre conhecimento e crença, mas, sim, procurar se e como, de fato, as crenças dos professores – ou o que eles podem considerar como conhecimento – afetam sua experiência" (p. 129).

> De uma perspectiva epistemológica tradicional, uma característica do conhecimento é a concordância geral sobre os procedimentos para avaliar e julgar sua validade; o conhecimento deve satisfazer critérios envolvendo cânones de evidência. As crenças, por outro lado, são freqüentemente mantidas ou justificadas por razões que não atendem a esses critérios e, portanto, são caracterizadas pela falta de acordo sobre como elas devem ser avaliadas ou julgadas. (p. 130)

Conforme já referido, para Ponte (1992) as conceções possuem uma natureza essencialmente cognitiva. Este autor também refere que, por outro lado, "em todo o conhecimento intervêm necessariamente crenças" (p. 8) e que as crenças desempenham um papel indispensável, indicando que o seu alcance vai para além do alcance do conhecimento:

> Existe um ponto, para além do qual não consegue ir a racionalidade humana, entendida como a capacidade de formular raciocínios lógicos, definir conceitos com precisão, e organizar de forma coerente os dados da experiência. Para além da racionalidade entramos no domínio das crenças, que são indispensáveis pois sem elas o ser humano ficaria virtualmente paralisado, sem ser capaz de determinar cursos de ação. (p. 8)

Assim como para Thompson (1992), para Ponte (1992) não existe a necessidade de distinguir como incompatíveis crenças e conhecimento, destacando ser possível ver "as crenças como uma parte do conhecimento relativamente 'pouco elaborada', em vez de os ver como dois domínios disjuntos". Ainda segundo o autor, nas crenças haveria uma elaboração "mais ou menos fantasista e a falta de confrontação com a realidade empírica", ao passo que "no conhecimento mais elaborado de natureza prática predominariam os aspectos experienciais” e no “conhecimento de natureza teórica predominaria a argumentação racional”. Assim, nesse contexto, as concepções atuam “como o pano de fundo organizador dos conceitos”, constituindo-se o que o autor denominou de “miniteorias” (p. 8).

> O conhecimento pode ser visto em termos de uma correspondência com o mundo material ou com práticas sociais, sendo a sua validade indicada em termos de “eficiência” e “operacionalidade” e não em termos de “certo” ou “errado”: Nesta perspectiva, não há que opor crenças e conhecimento. As crenças não têm suporte empírico que as valide – são criações da imaginação humana (individual ou colectiva). Constituem apenas uma forma primitiva de saber. Por outro lado, há saberes que assentam directamente sobre crenças e que só nesse quadro fazem sentido (por exemplo, os membros de uma confissão religiosa, assente em determinadas crenças, sabem como executar os respectivos rituais).

Charalambous (2015), por seu turno, apresenta um estudo que reflete a necessidade de se investigar a interseção entre crenças e conhecimento do futuro professor. Através da análise das práticas letivas de três professoras em formação inicial, o estudo fornece evidências sugerindo que o efeito de um componente é mediado por limitações no outro. Somente um sólido conhecimento não garante que o professor se envolva em trabalhos que se prestam a criação de ambientes matematicamente ricos. O estudo também sugere que as crenças pedagógicas que se alinham às abordagens baseadas em normas (como as do NCTM, por exemplo) em si mesmas não são suficientes para apoiar o trabalho dos professores. E coletivamente, os casos analisados sugerem que as crenças e o conhecimento profissional proporcionam aos professores diferentes capacidades para envolver os alunos em ambientes matematicamente ricos. Como implicação, o estudo sugere que o desenvolvimento docente não pode ser entendido desde uma perspectiva aditiva, pois a relação entre esses dois componentes (crenças e conhecimento do professor) é dinâmica e complexa.

2.5 Conceções e afeto

Para além do domínio cognitivo, muitos autores reconhecem também nas conceções elementos afetivos (Abelson, 1979; Barkatsas, 2008; Guimarães, 2003;

McLeod, 1992, 1992; Pehkonen & Törner, 1999). Pehkonen e Törner (1999) situam as crenças no que denominam "zona crepuscular" entre os domínios cognitivo e afetivo, concluindo que as crenças "têm um componente em cada domínio" (p. 4)

Günter (1999), ao referir-se ao domínio afetivo, faz uso do termo "emoções" e refere, a exemplo Pehkonen e Törner (1999), que "dois níveis devem ser definidos com precisão para qualquer definição de crença, primeiro tendo em vista o termo conhecimento e, em segundo lugar, tendo em vista o termo emoções (p. 128). Para Günter (1999), "cargas emocionais e informações cognitivamente interpretadas quase nunca se deixam dissociar completamente" (p. 130). Barkatsas (2008), por seu turno, chama a atenção para que a pesquisa busque uma maior integração entre os domínios afetivo e cognitivo: "é necessário investigar mais profundamente o domínio afetivo e conseguir uma integração na pesquisa nos domínios afetivo e cognitivo, sobre o afeto e o aprendizado e sobre o afeto e o ensino" (p. 21).

Conforme já abordado na seção anterior, Abelson (1979), no intento de buscar uma diferenciação entre crença e conhecimento, constrói uma lista de sete características, que fazem diferir (em seu conjunto), na sua opinião, crença de conhecimento. Em uma dessas características, são discutidas justamente as componentes avaliativas e afetivas presentes nas crenças. O autor, usando o termo "sistema de crenças" afirma que esses sistemas possuem uma dependência muito grande de componentes avaliativos e afetivos, relacionando assim dois aspectos, um "cognitivo" e outro "motivacional".

Abelson (1979) exemplifica que, dependendo do domínio em questão, os conceitos de "bom" e "ruim" podem ser tratados de modos distintos. Assim, "de um ponto de vista formal, no entanto, os conceitos de 'bom' e 'ruim' podem, para todos os efeitos, ser tratados como categorias cognitivas frias, como qualquer outra categoria de um sistema de conhecimento" (p. 358). Entretando, quando estes mesmos conceitos adquirem força motivacional, as consequências e alcance são distintos:

> Quando as entidades boas e más do sistema têm força motivacional, em vez de simplesmente status categórico, é provável que surjam consequências únicas para os sistemas de crenças. Por força motivacional, quero dizer que, quando entidades afetivamente tonificadas são ativadas, os processos do sistema são alterados. Assim, um sistema que considerasse uma entrada interessante o processaria mais profundamente, ou se o medo a evitasse, e assim por diante." (p. 358)

Na visão de Abelson (1979) os componentes avaliativos dos sistemas de crenças originam os problemas menos compreendidos na investigação e as "as consequências únicas da avaliação são motivacionais e não apenas cognitivas". Ademais, prossegue o autor, "embora intuitivamente pareça claro o que se entende por "motivacional", na prática a distinção entre cognitivo e motivacional é bastante sutil" (p. 362).

Uma visão semelhante a de Abelson (1979) é a apresentada por Pajares (1992). Este autor, entretando, ao referir-se ao domínio afetivo das conceções e crenças, faz uso dos termos "atitudes" e "valores", referindo que "grupos de crenças em torno de um objeto ou situação em particular formam atitudes que se tornam agendas de ação" (p. 319).

> Crenças dentro de atitudes têm conexões entre si e com outras crenças em outras atitudes, de modo que a atitude de um professor sobre uma questão educacional específica pode incluir crenças conectadas a atitudes sobre a natureza da sociedade, comunidade, raça e até família. Essas conexões criam os valores que orientam a vida de alguém, desenvolvem e mantêm outras atitudes, interpretam informações e determinam o comportamento. (p. 319)

Para Pajares (1992) os componentes afetivos das conceções desempenham uma função muito importante e específica no indivíduo, nomeadamente a função de facilitar o armazenamento na memória de longo prazo. Este armazenamento na memória de longo prazo acarreta a formação do que denominou *gestalts*[2] "que são representados e recuperados eficientemente e adquirem um sentimento de assinatura" (p. 322). Esse sentimento de assinatura, prossegue o autor, apresenta três funções específicas: (i) *Facilita a recuperação* e desse modo, tem a capacidade de melhorar o acesso aos "arquivos de memória devido à coloração do sentimento"; (ii) *Age como um elemento adesivo* e assim "mantém os elementos da memória juntos por longos períodos" e (iii) *Contribui para a função de memória ativa e reconstrutiva* "preenchendo lacunas incompletas de memória durante a recuperação e/ou filtragem de informações que conflitam com a sensação de assinatura" (p. 322).

Outro autor que reconhece uma posição de relevo do domínio afetivo no estudo das conceções é McLeod (1992), destacando que o "afeto desempenha um papel

---

[2] *Gestalt* é uma palavra de origem germânica que pode ser traduzida livremente para língua portuguesa (em um sentido lato) como sendo "forma". O sentido dado à palavra por Pajares (1979) parece ser o de "dar forma" ou "configurar".

significativo na aprendizagem e no ensino de Matemática". Para McLeod (1992), "quando os professores falam sobre suas aulas de Matemática, parecem tão propensos a mencionar o entusiasmo ou hostilidade de seus alunos em relação à Matemática, quanto a relatar suas realizações cognitivas" (p. 575). Na visão deste autor, "o domínio afetivo refere-se a uma ampla gama de crenças, sentimentos e humores que geralmente são considerados como indo além do domínio da cognição". Entretanto, também adverte que "o afeto é geralmente mais difícil de descrever e medir do que a cognição" (p. 576).

McLeod (1992) refere que as crenças, atitudes e emoções podem ser consideradas como um subconjunto do afeto e fornece a indicação de três facetas da experiência afetiva dos estudantes de Matemática que julga importantes: (i) Os alunos mantêm crenças sobre si próprios e sobre a Matemática que, por seu turno, podem desempenhar um papel de importância no desenvolvimento de respostas afetivas frente às situações matemáticas, (ii) Os alunos experimentam emoções positivas e negativas à medida que aprendem Matemática; e (iii) Os alunos desenvolverão atitudes positivas ou negativas em relação à Matemática quando encontrarem repetidamente "situações matemáticas semelhantes" (p. 578). McLeod (1992), mesmo reconhecendo que as crenças são "amplamente cognitivas", valoriza o papel desempenhado pela dimensão afetiva ao referir-se à função das "emoções":

> As crenças são amplamente cognitivas por natureza e são desenvolvidas por um período relativamente longo. As emoções, por outro lado, podem envolver pouca avaliação cognitiva e podem aparecer e desaparecer rapidamente, como quando a frustração de tentar resolver um problema difícil é seguida pela alegria de encontrar uma solução. Portanto, podemos pensar em crenças, atitudes e emoções como representando níveis crescentes de envolvimento afetivo, níveis decrescentes de envolvimento cognitivo, níveis crescentes de intensidade de resposta e níveis decrescentes de estabilidade de resposta." (p. 579)

2.6 Conceções sobre a Matemática

Muitos autores têm reconhecido a importância do estudo das conceções dos professores em relação à Matemática (Cooney, 1999b; Ernest, 1988; Hersh, 1986; Ponte, 1992; Thompson, 1982, 1992). Na visão de Hersh (1986), as conceções do professor sobre a Matemática afetam de modo direto a forma como ele a apresenta aos alunos:

> Suas concepções [dos professores] sobre o que é Matemática afeta a concepção de como ela deve ser apresentada. A maneira de apresentá-la é uma indicação do que alguém acredita ser essencial nela ... A questão, então, não é: Qual é a melhor maneira de ensinar? mas, o que é realmente a Matemática? (Hersh, 1986, p. 13)

Thompson (1992) parece concordar com esta afirmação e reforça a importância do estudo das conceções sobre a Matemática, referindo que não existe um acordo universal sobre o que constitui o "bom ensino de Matemática". Entretanto, aquilo que o professor "considera ser formas desejáveis de ensinar e aprender Matemática é influenciado por uma conceção de Matemática" (p. 127). Ainda segundo esta autora, as conceções acerca da Matemática desempenham um papel significativo, embora subtil, na determinação do estilo de cada professor. Já tendo em atenção os aspectos inerentes à investigação neste domínio, Thompson (1992) menciona a existência de desafios metodológicos que o investigador deverá enfrentar:

> Qualquer tentativa séria de caracterizar a conceção de um professor da disciplina que ele ou ela ensina não deve se limitar a uma análise das opiniões do professor. Também deve incluir uma análise do ambiente instrucional, as práticas características desse professor e a relação entre as opiniões do professor e a prática real. (p. 134)

Na visão de Ponte (1992), "a Matemática é um assunto acerca do qual é difícil não ter conceções" (p. 1). Tal afirmação do autor se baseia no fato da Matemática ser uma ciência muito antiga, "que faz parte do conjunto das matérias escolares desde há séculos" (p. 1) e por seu ensino ser obrigatório durante largos anos de escolaridade. O autor elenca cinco conceções de Matemática muito comuns: *(i) Matemática reduzida ao cálculo; (ii) visão axiomática ; (iii) perfeição total; (iv) desligada da realidade e (v) nada de novo pode ser feito em Matemática.* Explicito a seguir cada uma dessas conceções:

(i) Matemática reduzida ao cálculo: trata-se de uma das conceções mais prevalecentes. Nesta conceção o cálculo é tido como a parte substancial da Matemática, a mais acessível e fundamental. Mas na visão do autor, a "identificação da Matemática com o cálculo significa a sua redução a um dos seus aspetos mais pobres e de menor valor formativo" (p. 15), pois este aspeto não requer capacidades especiais de raciocínio e pode ser executado por instrumentos, tais como calculadoras ou computadores.

(ii) visão axiomática: nesta conceção a "Matemática consiste essencialmente na demonstração de proposições a partir de sistemas de

axiomas mais ou menos arbitrários, perspectiva em que se reconhece a influência direta do formalismo" (p.15). O autor considera que toda a teoria Matemática aspira uma organização axiomática, porém nesse processo existem outras fases intermediárias e a dedução só pode ter lugar na medida em que já exista um significativo refinamento dos conceitos envolvidos.

(iii) perfeição total: esta conceção surge muito associada à anterior. Nela, a Matemática é o domínio do rigor absoluto e não há espaço para o erro ou incertezas. Mas o autor considera que "a prática Matemática, como produto humano, está sujeita às imperfeições de nossa espécie. Nela há margem para se desenvolverem diversos estilos ou tomarem diferentes opções" (p. 16).

(iv) desligada da realidade: esta conceção também segue uma linha formalista e tende a desligar a Matemática da realidade. Na sua visão, quanto mais "pura" e abstrata, melhor seria a Matemática. Porém, o autor considera que esta perspectiva não leva em conta o processo histórico onde as teorias matemáticas se desenvolvem, tão pouco se o seu ensino corresponde a uma efetiva relevância social.

(v) nada de novo pode ser feito em Matemática: conceção segundo a qual, nada de novo, interessante e criativo pode ser feito em Matemática, ou seja, a construção da Matemática só pode ser realizada por "génios". O autor afirma que, "embora admitindo o papel de relevo dos grandes vultos da Matemática, é importante, no entanto valorizar as investigações e as descobertas feitas por pessoas *normais*" (p. 16).

Segundo Ponte (1992), cada uma das cinco conceções tem uma explicação histórica, referindo que as conceções se formaram em um período em que predominava um ensino elitista: "O domínio da Matemática importava a um número reduzido de pessoas e esta ciência podia funcionar como um filtro selectivo" (p. 16). Ademais, prossegue o autor, as duas últimas conceções (desligada da realidade e nada de novo pode ser feito em Matemática) estão ligadas a uma visão mistificadora da Matemática.

Ernest (1988), por seu turno, distingue três conceções de Matemática assumidas pelos professores de Matemática: (i) *a visão de resolução de problemas*, segundo a qual a Matemática é um campo dinâmico – é um processo de investigação e de conhecimento, não sendo um produto acabado, pois seus resultados permanecem abertos à revisão; (ii) *a visão platônica*: visão como um corpo estático, mas unificado de conhecimento, sendo um produto imutável e estático: "A Matemática é descoberta, não criada" (p. 10); e (iii) *visão instrumentalista*, segundo a qual a Matemática é constituída por uma acumulação de fatos, regras e habilidades.

Ernest (1988) coloca estas três conceções em uma hierarquia. Segundo o autor, a visão instrumentalista está no nível mais baixo, envolvendo conhecimento de fatos, regras e métodos matemáticos como entidades separadas. No nível seguinte está a visão platônica da Matemática, envolvendo uma compreensão global da Matemática como uma estrutura consistente, conectada e objetiva. No nível mais alto, a visão de resolução de problemas vê a Matemática como uma estrutura dinamicamente organizada e localizada em um contexto social e cultural.

Outro autor que oferece uma conceptualização sobre este domínio é Cooney (1999b) que identifica duas orientações em relação à Matemática: uma orientação *dualística* e outra *relativística*. Sobre estas duas orientações, Cooney (1999b) escreveu:

> Uma orientação dualística em relação à matemática leva a uma ênfase no produto, como a aquisição de procedimentos, sem significado associado. Da mesma forma, uma orientação dualista em relação ao ensino de matemática leva a um estilo instrucional determinado pelo contar, pela certeza e por estratégias de ensino concebidas a priori. Em resumo, os estilos instrucionais pré-concebidos são necessariamente insensíveis aos contextos em que são usados - contextos determinados, em parte, pelo que os alunos sabem e acreditam sobre matemática Por outro lado, uma visão relativística da matemática enfatiza o processo e leva a uma visão dinâmica da matemática. Uma visão relativística do ensino de matemática seria baseada no contexto do ensino, o mais importante dos quais é a compreensão do aluno. A questão torna-se menos se uma atividade ou estratégia de ensino é boa ou ruim por si só e mais uma questão de qual contexto uma atividade se torna eficaz para a aprendizagem dos alunos. (p. 21)

Ainda no que concerne às conceções sobre a Matemática dos professores, Wilson (1999) refere o papel desempenhado do que chama “autoridade matemática”. Na sua perspetiva, “a autoridade matemática lida com a maneira pela qual os indivíduos entendem e passam a entender as idéias matemáticas” (p. 154). O autor reforça que “muitos professores de Matemática se consideram os árbitros finais da Matemática e acham extremamente difícil compartilhar responsabilidades com seus alunos” (p. 153):

> É essencial que os professores compreendam que não podem simplesmente explicar todas as conexões e conceitos importantes para os alunos; eles devem estar dispostos, às vezes, a compartilhar o controle ou a responsabilidade das idéias matemáticas. Esse compartilhamento permite que os alunos aceitem a responsabilidade por seu próprio aprendizado e adquiram a propriedade das idéias consideradas. Esse compartilhamento também é uma parte importante da categoria Autoridade Matemática.” (p. 154)

2.7 Conceções sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática

De modo análogo ao que ocorre em relação à Matemática, os professores também sustentam conceções em relação ao ensino e a aprendizagem da Matemática, uma vez que uma das características fundamentais do ensino é justamente o seu caráter intencional (Guimarães, 2003) e, por isso mesmo, um ato muito marcado e carregado de propósitos e intenções:

> O ato de ensinar, justamente porque se ensina sempre alguma coisa a alguém, é, assim, um ato radicalmente intencional. Um ato que, portanto, pressupõe no professor razões e motivos, propósitos e objetivos, eventualmente nem sempre claramente definidos e explícitos, que o orientam nos juízos que faz e nas opções e decisões que toma na sua prática de ensino. (Guimarães, 2003, p. 1)

Thompson (1992), em seu trabalho sobre as conceções do professor de Matemática, menciona que "as conceções dos professores sobre o ensino da Matemática também refletem suas opiniões, embora tácitas, do conhecimento dos alunos, de como eles aprendem Matemática e dos papéis e propósitos da escola em geral" (p. 135). Segundo a autora, existe uma variedade de aspetos que devem ser objeto de consideração no estudo das conceções dos professores sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, incluindo: o que um professor considera como objetivos desejáveis do programa de Matemática; seu próprio papel no ensino; o papel dos alunos; atividades de sala de aula adequadas; abordagens e ênfases desejáveis de ensino; procedimentos matemáticos legítimos e resultados aceitáveis de ensino. E ainda acrescenta que "diferenças nas concepções de Matemática dos professores parecem estar relacionadas a diferenças em suas visões sobre o ensino de Matemática" (p. 135).

Dada a importância conferida ao estudo das conceções sobre o ensino e aprendizagem da Matemática pela comunidade investigativa, vários construtos foram elaborados sobre o tema ao longo dos anos. Apresento a seguir alguns modelos teóricos que se debruçaram neste domínio.

Um primeiro modelo a referir é o proposto por Kuhs e Ball (1986). Neste construto, que exerceu grande influência ao longo do tempo, os autores referem quatro orientações fundamentais relativas às conceções pedagógicas dos professores de Matemática: *(i) centrada no aluno; (ii) centradas no conteúdo com ênfase na compreensão conceptual, (iii) centradas no conteúdo com ênfase na execução; e (iv) centrada na organização da sala de aula.* Explicito a seguir cada uma dessas orientações:

> *(i) centrada no aluno:* segundo essa orientação, o professor é um facilitador e estimulador da aprendizagem do aluno, colocando questões e situações interessantes para a investigação, desafiando os alunos a pensar e ajudando-os a descobrir inadequações em seus próprios pensamentos. Já os alunos são vistos como responsáveis, em última instância, por julgar a adequação de suas próprias ideias e o conhecimento é avaliado em termos da consistência entre as ideias construídas pelos alunos e o significado compartilhado da ideia na disciplina.
>
> *(ii) centradas no conteúdo com ênfase na compreensão conceptual:* nessa orientação o conteúdo matemático é o foco da atividade em sala de aula, ao mesmo tempo em que é enfatizada a compreensão dos alunos sobre ideias e processos. Enfatiza-se a compreensão dos estudantes sobre as relações lógicas entre várias ideias matemáticas e os conceitos e a lógica subjacentes aos procedimentos matemáticos.
>
> *(iii) centradas no conteúdo com ênfase na execução:* segundo essa orientação, as regras são os alicerces básicos de todo o conhecimento matemático e os procedimentos devem ser "automatizados" pelos alunos. Nessa orientação não é necessário entender a origem ou a razão dos erros dos alunos e reconhece que mais indicações sobre a maneira correta de fazer as coisas resultarão em aprendizado apropriado.
>
> *(iv) centrada na organização da sala de aula:* central para essa orientação é a noção de que a atividade em sala de aula deve ser bem estruturada e eficientemente organizada de acordo com os comportamentos eficazes do professor. A suposição é que os alunos aprendem melhor quando as aulas são claramente estruturadas e seguem princípios de ensino efetivo. Nessa orientação, o professor é visto como desempenhando um papel ativo dirigindo todas as atividades de sala de aula, apresentando claramente o material da aula para toda a turma ou para subgrupos e oferecendo oportunidades para os alunos praticarem individualmente. Já o papel dos alunos é ouvir atentamente o professor e cooperar seguindo as instruções, respondendo às perguntas e concluindo as tarefas atribuídas pelo professor.

Tendo em atenção este modelo, Ponte (1992) refere que estas orientações não possuem o mesmo peso nos diferentes níveis de ensino e acrescenta que o peso dos conteúdos (isto é, a matéria a ensinar) e a forma de encarar os alunos e a organização em sala de aula se altera de acordo com o nível de ensino (p. 21).

Fennema et al. (1996), por seu turno, apresentam em um estudo que investigou as instruções e crenças de 21 professores, um modelo para as crenças do professor sobre o ensino de Matemática. Este modelo, denominado pelos autores de "níveis de crenças guiadas cognitivamente por professores", está graduado em 4 níveis:

> *Nível 1* - Na visão do professor, os alunos aprendem melhor ao serem ensinados a fazer Matemática. "Eles [professores] acreditavam que as crianças não poderiam inventar soluções de problemas para si mesmas ou que era uma perda de tempo pedir que resolvessem os problemas antes que as demonstrações fossem fornecidas." (pp. 421-422)
>
> *Nível 2* - Os professores já começam a questionar a idéia de que precisam mostrar aos alunos como fazer Matemática, mas relatam crenças conflitantes. "Algumas vezes eles deram alguma indicação de que acreditavam que os alunos poderiam resolver problemas sem instruções, mas outras vezes indicaram que, ao lidar com certas ideias críticas, os alunos precisavam ser levados a fazer as coisas corretamente." (p. 422)
>
> *Nível 3* - Os professores acham que os alunos aprendem Matemática ao resolver muitos problemas e discutir suas soluções. Entretanto, "esses professores não indicaram que conhecimentos específicos sobre seus alunos deveriam informar sua seleção de experiências matemáticas. Apenas fornecer experiências ricas parecia suficiente." (p. 422)
>
> Nível 4 – Os professores aceitam a ideia de que os alunos podem resolver problemas sem instrução direta e que o currículo de Matemática deve basear-se nas habilidades dos alunos. Assim, "acreditavam que seu papel era descobrir o que os alunos sabiam e usar esse conhecimento para estruturar o ambiente de aprendizagem. De fato, eles acreditavam que o que os alunos sabiam deveria ser uma grande influência em todas as decisões instrucionais." (p. 423)

Cooney, Shealy e Arvold (1998) também desenvolveram uma caracterização das estruturas de crenças dos professores de Matemática do ensino secundário a partir de um estudo empírico por eles realizados e que envolveu quatro professores. Na visão destes autores, "é importante entender não apenas o que os professores acreditam, mas também como suas crenças são estruturadas e sustentadas" (p. 306), dando um relevo significativo às questões contextuais e reflexivas:

> Como muito do que um indivíduo aprende sobre o ensino é por meio de interações em várias comunidades, parece razoável supor que esses contextos sejam fatores influentes importantes no que é aprendido (...) Como forma de interação entre o eu e a comunidade, a atividade reflexiva fornece aos alunos oportunidades de aprender resolvendo perturbações e, conseqüentemente, fornece aos pesquisadores um site de pesquisa estratégica para a construção de crenças. (p. 307)

O esquema concebido por Cooney et al. (1998) é composto por quatro categorias: (i) *Isolacionista:* Os professores pertencentes a essa categoria apresentam uma tendência a ter estruturas de crenças que permanecem separadas ou agrupadas longe umas das outras. A acomodação não é um tema que caracteriza um isolacionista; (ii) *Idealista ingênuo:* Os professores dessa categoria apresentam uma tendência a absorver o que os outros acreditam, sem contudo fazer uma análise mais apurada; (iii) *Ligacionista ingênuo:* Nesta categoria os professores enfatizam a reflexão e têm em atenção as crenças dos outros em comparação com as próprias. Entretanto falham em resolver conflitos ou diferenças de crenças; (iv) *Conexionista reflexivo:* Nesta categoria os professores enfatizam a reflexão e a atenção às crenças dos outros em comparação com as suas. Os conexionistas reflexivos conseguem resolver conflitos através do pensamento reflexivo.

Cooney et al (1998) concluem que a passagem de uma categoria para outra está diretamente relacionada com a "inculcação da dúvida" e o aparecimento de situações "desconcertantes", sendo que tais situações "parecem ser centrais para a promoção do movimento de ser um idealista ingênuo ou mesmo isolacionista para ser um conexionista" (p. 330). Segundo os mesmos autores "não basta tornar a Matemática e o ensino problemáticos para os professores. Precisamos entender o efeito dessa inculcação de dúvida e também entender o tipo de apoio que os professores precisam para lhe dar sentido" (p. 331).

Comum a estes três modelos até aqui apresentados é o fato de cada um deles apresentar quatro categorias. Outros modelos, entretanto, foram concebidos a partir de duas categorias. Um exemplo é o de Perry, Howard e Tracey (1999) a partir de uma série de estudos realizados com professores do ensino secundário de Matemática da Austrália. Os autores identificaram duas categorias em seu modelo: (i) *Transmissão:* Nesta categoria prevalece uma visão tradicional da Matemática como sendo uma disciplina estática em que o ensino e o aprendizado se dá através da transmissão de habilidades e conhecimentos do professor para o aluno; (ii) *Centrado na criança:* Nesta categoria os alunos se envolvem de modo ativo e constroem o seu próprio significado quando confrontados com experiências de aprendizado baseadas no desafio do conhecimento existente.

Cooney (1985), por seu turno, ao considerar a influência do ambiente da sala de aula e as conceções de um professor, refere dois estilos de ensino deste professor. Um estilo a que denominou *autoritário* e um outro, a que chamou de *resolução de problemas*. Também Barkatsas e Malone (2005) referem em seu estudo uma classificação dicotómica quanto às conceções do professor de Matemática em relação ao ensino e a aprendizagem desta disciplina, a saber, uma orientação tradicional a que chamaram de *transmissão* e uma visão contemporânea, que denominaram *construtivista*. Handal (2003), por sua vez, apresenta uma classificação bastante semelhante: uma orientação a que chamou de *tradicional* e outra de *progressista*.

2.8 Relação entre conceções e prática

A investigação envolvendo as conceções do professor em relação à Matemática e também sobre o ensino e aprendizagem da Matemática procurou, ao longo do tempo, estabelecer uma relação entre as crenças professadas pelo professor e as práticas de ensino por ele realizadas em sala de aula. Apesar deste domínio estar bem documentado (Pehkonen & Törner, 1999), a relação entre conceções e prática permanece longe de estar completamente esclarecida (Canavarro, 1993). Essas relações são mais marcadas pela consistência ou pela inconsistência? Afinal, qual a influência das conceções nas práticas? E a influência das práticas nas conceções? Como essa relação poderia ser caracterizada: seria uma relação do tipo linear, de causa e efeito ou, pelo contrário, seria uma relação mais complexa?

Mesmo tendo presente que muitos fatores possuem a capacidade de influenciar a prática do professor, o papel desempenhado pelas conceções do professor aparece em uma posição de destaque segundo a visão de muitos autores. Entretando, o nível de importância conferido aparece de modo bastante distinto. Por um lado, alguns autores sugerem uma influência quase direta e linear das conceções sobre a prática do professor. Por exemplo, Pehkonen (1999) afirma que "parece que a própria visão dos professores de Matemática, ou seja, sua concepção sobre o bom ensino de Matemática, conduz com muita força suas decisões sobre o ensino" (p. 107).

Essa posição de influência das conceções sobre a prática é também partilhada por Ernest (1988). Este autor argumenta que as crenças dos professores de Matemática têm um forte impacto na prática de ensino. Contudo, também destaca que durante sua transformação em prática, dois outros fatores afetam essas crenças: as limitações e oportunidades do *contexto social* e o *nível do pensamento (reflexão)* do professor. Na sua perspetiva, a autonomia do professor de Matemática depende desses três fatores: crenças, contexto social e nível de pensamento (reflexão) do professor. No tocante às questões contextuais relativas ao ensino refere:

> Essas fontes levam o professor a internalizar um poderoso conjunto de restrições que afetam a promulgação dos modelos de ensino e aprendizagem da Matemática. O efeito de socialização do contexto é tão poderoso que, apesar de ter diferentes crenças sobre Matemática e seu ensino, os professores da mesma escola são frequentemente observados a adotar práticas de sala de aula semelhantes. (p. 4)

Esta ideia de uma relação quase linear entre conceções e prática, com uma influência quase direta da primeira sobre a segunda também parece ser sustentada por Pajares (1999): "As crenças que os professores mantêm influenciam suas perceções e julgamentos, que, por sua vez, afetam seu comportamento na sala de aula". Este autor chega a referir que justamente este grau de influência é uma justificativa para a investigação no domínio das conceções do professor: "a compreensão das estruturas de crenças dos professores e dos futuros professores é essencial para melhorar sua preparação profissional e práticas de ensino" (p. 307).

Thompson (1984), por outro lado, refere que "o exame da relação entre conceções e prática mostrou que as crenças, visões e as preferências sobre a Matemática e seu ensino tiveram um papel significativo, embora sutil, na formação de seu comportamento instrucional" (p. 105). A autora também refere que:

> Os professores desenvolvem padrões de comportamento característicos de sua prática instrucional. Em alguns casos, esses padrões podem ser manifestações de noções, crenças e preferências mantidas conscientemente que agem como "forças motrizes" na formação do comportamento do professor. Em outros casos, as forças motrizes podem ser inconscientemente mantidas em crenças ou intuições que podem ter evoluído a partir da experiência do professor. Há fortes razões para acreditar que, em matemática, as conceções dos professores (suas crenças, opiniões e preferências) sobre o assunto e seu ensino desempenham um papel importante ao afetar sua eficácia como mediadores primários entre o tópico e os alunos." (p. 105)

A mesma autora, em Thompson (1992), considera que existem resultados contraditórios quanto à consistência entre práticas e conceções. Assim, indica que tanto em relação às conceções sobre a Matemática como em relação às conceções sobre o ensino-aprendizagem de Matemática foram encontrados casos de consistência e também de inconsistência com as práticas. Na sua visão, parece que à medida que os professores interagem com seu ambiente, alguns não experimentam nenhum conflito entre suas crenças e sua prática, e alguns aprendem a conviver com conflitos não resolvidos. Outros professores, no entanto, parecem reorganizar suas crenças em resposta às pressões encontradas no ensino. A autora, ainda tendo em atenção o contexto social e a consistência entre crenças e práticas, afirma que "o clima político também pode explicar algumas das discrepâncias observadas entre as crenças dos professores e sua prática instrucional" (p. 138). Assim, sugere que conceções e práticas estão relacionadas dialeticamente:

> Há suporte na literatura para a afirmação de que as crenças influenciam a prática em sala de aula; as crenças dos professores parecem atuar como filtros através dos quais os professores interpretam e atribuem significados às suas experiências enquanto interagem com as crianças e com o assunto subjetivo. Mas, ao mesmo tempo, muitas das crenças e pontos de vista de um professor parecem se originar e serem moldados por experiências em sala de aula. Ao interagir com seu ambiente, com todas as suas demandas e problemas, os professores parecem avaliar e reorganizar suas crenças através de atos reflexivos, alguns mais do que outros. (pp. 138-139)

Assim como Thompson (1992), também Fennema et al. (1996) parecem assumir que a natureza das relações entre conceções e prática é complexa. Estes autores referem, a partir de um estudo empírico realizado, que a "relação entre mudança de instrução e crenças era complexa" (p. 424).

> Embora a relação entre níveis de instrução e crenças pareça óbvia, era difícil comparar os relacionamentos porque as crenças e instruções de um professor nem sempre eram categorizadas no mesmo nível e não havia um padrão geral sobre se um professor estava em um nível mais alto de crenças ou instruções. Também não houve consistência em saber se uma mudança nas crenças precedeu uma mudança na instrução ou vice-versa." (p. 423)

Llinares (1996), por seu turno, também aponta que tanto as crenças chegam a determinar uma prática, como também é possível considerar que uma prática, na qual o professor está imerso e "enculturado", tem o potencial de gerar determinadas crenças.

Para Ponte (1992), trata-se em última análise de um problema de cunho filosófico: “É o ser humano essencialmente movido por princípios e por um desejo de coerência ou essencialmente pragmático? Ou seja, é movido por decisões que assume conscientemente ou por mecanismos biológicos servidos apenas parcialmente pela racionalidade?” (p. 25).

Outros autores também parecem endossar a posição de Thompson (1992) no que se refere à relação entre conceções e prática do professor. Por exemplo, Nisbet e Warren (2000) referem que “a relação entre as crenças dos professores e a prática em sala de aula é dinâmica, uma influenciando a outra” (p. 35) e Handal (2003), menciona que “a natureza do relacionamento é complexa e mediada por fatores externos” (p. 47). Potari e Georgiadou-Kabouridis (2009) seguem em uma linha semelhante. As autoras realizaram um estudo de caso longitudinal de uma professora durante o período de quatro anos, compreendendo o último ano de seus estudos universitários até o terceiro ano de ensino na escola. O foco estava no desenvolvimento das crenças do professor em relação ao processo de ensino-aprendizado da Matemática. Na análise dos dados, duas crenças da professora emergiram: (i) uma tarefa matemática fácil para um adulto será facilmente compreendida pela criança e (ii) as crianças aprendem Matemática através de uma variedade de atividades de ensino que compreendem várias representações de conceitos matemáticos. No estudo evidenciou-se que a prática teve um impacto nas crenças da professora, mas ao mesmo tempo é reconhecido que a mudança das crenças influenciou as decisões de ensino, indicando uma relação dialética entre crenças e prática. Ademais, as autoras reconhecem as diferentes etapas na transição da professora da universidade para o ensino real e referem duas implicações do estudo para a formação de professores: (i) O estudo demonstrou o importante papel da formação inicial no desenvolvimento profissional do professor e (ii) O modelo do professor-pesquisador do pensamento matemático dos alunos pode gerar uma atitude em relação ao professor, o que sustenta seu desenvolvimento profissional ao longo da vida. Assim, este estudo parece corroborar com a visão dialética de Thompson (1992) sobre a relação entre crenças e prática:

> Análises cuidadosas da natureza da relação entre crenças e práticas sugerem que os sistemas de crenças são estruturas mentais dinâmicas e permeáveis, suscetíveis a mudanças à luz da experiência. A pesquisa também sugere fortemente que a relação entre crenças e prática é uma relação dialética, não uma simples causa e efeito. (p. 140)

Raymond (1997), por seu turno, a partir de um estudo de 10 meses com 6 professores em que fez uso de entrevistas, observações e análise de documentos, propõe um modelo para o relacionamento entre as crenças matemáticas dos professores e suas práticas de ensino. O modelo proposto "sugere relações complexas entre crenças e práticas e constrói um entendimento de fatores que contribuem para a inconsistência entre eles". Dentre os vários elementos constitutivos do modelo, os dois principais elementos são as "crenças matemáticas e práticas de ensino de Matemática" (p. 570).

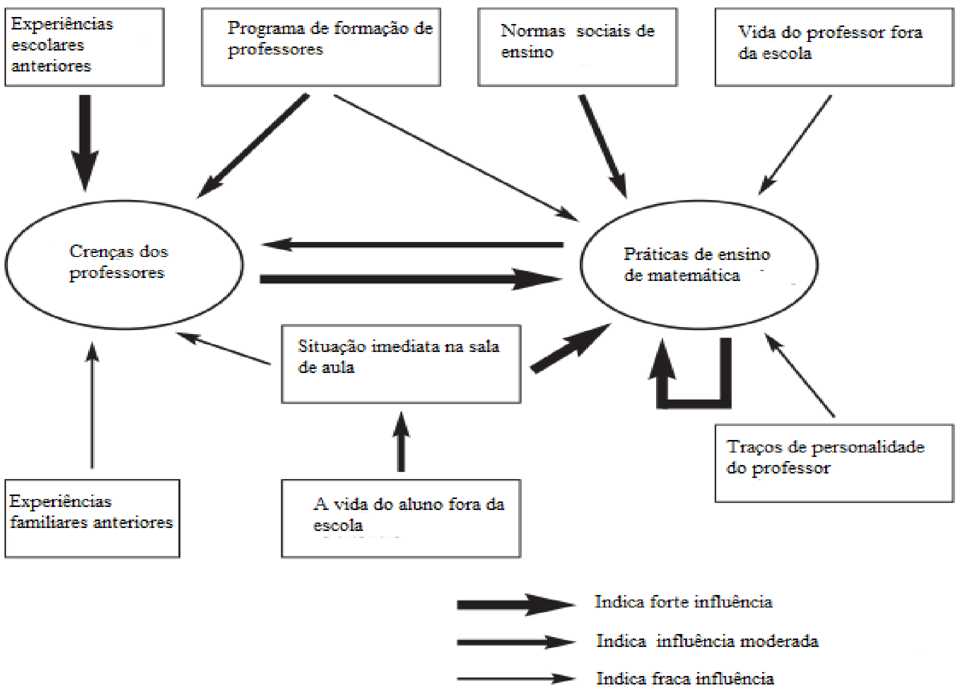


Figura 2.2: Modelo de Raymond (1997) para a relação entre as crenças matemáticas do professor e sua prática de ensino.

Conforme pode ser visto no modelo, a relação entre os dois elementos principais, nomeadamente as crenças e práticas de ensino, é de influência mútua, ou seja, indica que tanto as crenças influenciam as práticas, como as práticas também influenciam as crenças. Entretanto, como pode ser visto pelas setas de influência, as crenças parecem influenciar as práticas de maneira mais forte do que o contrário. Ademais, embora assumidamente com menor importância, outros elementos são indicados: experiências escolares anteriores, programa de formação de professores, normas sociais de ensino, vida do professor fora da escola, experiências familiares anteriores, situação imediata da sala de aula, a vida do aluno fora da escola e traços de personalidade do professor. Na visão de Raymond (1997) "o modelo também ilustra que os professores concordaram com as principais influências nas crenças e na prática, incluindo os elementos que têm o potencial de criar inconsistências entre crenças e práticas" (p. 572).

> O modelo indica claramente que as normas de ensino social e a situação imediata da sala de aula desempenham papéis-chave na influência da prática de ensino de matemática. Assim, é provável que eles desempenhem um papel na criação de inconsistências entre crenças e práticas de tempos em tempos. (p. 571)

2.9 Estudos sobre as conceções do professor em Portugal

O interesse, a nível mundial, envolvendo a investigação sobre as conceções do professor encontra em Portugal uma boa recetividade: "Portugal não tem estado alheio a este movimento. A investigação sobre questões relativas às *conceções*, saberes, práticas e formação dos professores tem ocupado nos últimos anos um lugar de grande destaque no nosso país" (Ponte, 1994, p. 81).

O interesse no estudo das conceções do professor de Matemática em Portugal, durante muito tempo, ocupou um lugar de relevo na investigação em Educação Matemática. Sobre essa temática, Ponte (1993) indica que esta propiciava uma significativa reflexão sobre o caminho até aí percorrido:

> Na verdade, a investigação nesta área (conceções do professor de Matemática) tem tido um lugar de relevo em Portugal. Trata-se, sem dúvida, do assunto mais representado nas teses de mestrado e nas temáticas de projetos. É também um tema que tem sido estudado com considerável consistência teórica e já com um significativo amadurecimento em termos metodológicos. (p. 1)

Numa fase inicial, dois trabalhos sobre as conceções do professor de Matemática ocupam lugar de destaque. Um primeiro trabalho a referir é o realizado por Paulo Abrantes (1986) que estuda as perspetivas de professores e futuros professores de Matemática do ensino secundário tendo em conta os grandes objetivos do ensino da Matemática. Este autor conclui que os futuros professores têm uma tendência em relacionar as razões que justificam o ensino da disciplina com a experiência que tiveram enquanto estudantes. O estudo conclui que os futuros professores atribuem uma importância significativa às finalidades referentes à aquisição de conhecimentos de

Matemática necessários à continuidade dos estudos, relacionados às demais disciplinas ou à situações de rotina, mas desvalorizam as finalidades relacionadas a um papel mais ativo dos alunos. Além disso, os futuros professores apresentaram uma tendência a valorizar as finalidades relacionadas com os objetivos lógicos e formais da Matemática e essa tendência parece estar mais ligada as conceções sobre a natureza da Matemática do que a convicções sobre o ensino em geral.

Um segundo estudo a referir, realizado um pouco mais tarde, é o de Henrique Guimarães (1988). A respeito deste estudo, pode dizer-se que ele é pioneiro em Portugal a investigar as conceções do professor de Matemática usando uma abordagem metodológica essenciamente qualitativa. O objetivo do estudo é identificar e descrever as conceções de professores relativos à Matemática e ao seu ensino. Tendo em vista esse objetivo, as seguintes questões de estudo são colocadas: (1) Como encaram, os professores, a Matemática? (2) Como entendem o papel do professor e do aluno em Educação Matemática? (3) O que é, para os professores, saber Matemática? O autor identifica duas perspetivas principais dos professores. Uma é a de que o sucesso na aprendizagem da Matemática depende, essencialmente, da quantidade de repetição de exercícios, mais ou menos similares que os alunos devem realizar (aprender é sobretudo mecanizar). A outra, contempla a compreensão dos assuntos e dos processos envolvidos na realização das atividades propostas (aprender é compreender). No entanto, em ambas as perspetivas, saber Matemática parece não incluir o usar Matemática. Assim, a Matemática é considerada aplicável, mas, dessa sua qualidade não são retiradas implicações para a sua aprendizagem. Nas aulas observadas são identificados dois pólos principais: a *introdução* dos assuntos matemáticos (concebida como um processo de transmissão de conhecimento que o professor realiza através de uma exposição) e a *prática* que consiste, basicamente, na realização de exercícios pelos alunos. Desse modo, segundo o autor, há o predomínio da interação professor-aluno com poucas interações dos alunos entre si e o diálogo preponderante na aula é do tipo pergunta-resposta entre professor e alunos.

Guimarães (1988) também conclui nesse estudo que os professores tendem a encarar a Matemática como uma disciplina que fez parte de sua aprendizagem enquanto estudantes. A investigação sugere que, mais do que um gosto ou entusiasmo pela Matemática, ela foi escolhida por esses professores, devido essencialmente à facilidade que sentiram em aprender e lidar com o que lhes era proposto durante o percurso escolar pré-universitário. Para os professores, o sucesso de um aluno depende fortemente da sua preparação anterior na disciplina e o insucesso é encarado como cumulativo e irremediável. Parece existir uma tendência para considerar que os alunos têm (ou não) uma espécie de talento natural para a Matemática, ainda que fatores exteriores ao aluno tenham sido referidos.

Numa fase posterior, segundo Ponte (1993b), novos interesses no campo investigativo emergem, nomeadamente interesses relativos à cognição e cultura, epistemologia e comunicação, com consequências para o estudo das crenças e conceções:

> É também de referir que inicialmente estudavam-se, sobretudo, as crenças do professor em relação à Matemática e ao ensino da Matemática. Agora, ganham proeminência conceitos mais específicos da didática: tarefa, discurso e objetivos curriculares. (Oliveira & Ponte, 1997, p. 10)

Dentre esses novos interesses, a dimensão da prática dos professores, que tinha ocupado um plano secundário, passa a um lugar de maior evidência. Nessa fase são realizados estudos que abordam as relações entre as conceções dos professores e a sua prática. Estes estudos são conduzidos “na perspectiva da renovação curricular, associada à resolução de problemas, ao uso das novas tecnologias e, em geral, à introdução dos novos programas da disciplina de Matemática” (Ponte, 1994, p. 90): “(Torna-se) cada vez mais evidente que não faz sentido estudar as conceções desligadas das práticas e das condições profissionais onde os professores são chamados a exercer a sua atividade” (Oliveira & Ponte, 1997, p. 9)

Conceções sobre o ensino da Matemática

Ao lado das conceções dos professores sobre a Matemática, as conceções dos professores em relação ao ensino dessa disciplina aparece com especial destaque nos trabalhos empíricos dedicados à temática em Portugal. Sobre as primeiras, e tendo em atenção alguns trabalhos empíricos realizados (Boavida, 1993; Canavarro, 1993; Guimarães, 1988; Loureiro, 1992; Vale, 1993), Guimarães (2003) refere que é “manifestada uma dificuldade, da parte dos professores estudados, em se pronunciarem sobre a Matemática para lá do campo estritamente escolar, tendo vários dos professores referido ser a primeira vez que lhes era solicitado e que refletiam sobre isso” (p. 9). Outro traço que se evidencia entre os professores, prossegue o autor,

> [É] uma visão da Matemática como um corpo de conhecimentos caracterizados por atributos de natureza lógica, como um domínio científico onde a ambiguidade não tem lugar e é possível estabelecer com certeza a verdade ou a consistência dos seus conhecimentos e a correção dos resultados aí perseguidos. (p. 9).

Já no tocante às conceções dos professores em relação ao ensino da Matemática e aos objetivos desta disciplina é possível identificar, a partir dos estudos empíricos conduzidos neste domínio, duas categorias básicas. Uma primeira relacionada à *aquisição de conhecimentos pelos alunos* e uma segunda relacionada com o *desenvolvimento de capacidades e atitudes nos alunos*.

Canavarro (1993), que investigou as relações entre as conceções dos professores de Matemática do ensino secundário e sua prática pedagógica tendo em atenção o uso do computador, apresenta dois professores inscritos na primeira categoria. Uma professora, considera que o ensino centrado na transmissão de conhecimentos e na prática da resolução de exercícios é o mais eficiente para a aprendizagem dos alunos e também para o controlo de questões inerentes ao ambiente da turma. Outro professor, põe igualmente a ênfase na aquisição dos conhecimentos indicados no programa e pensa que o ensino deve ser “giro” para que os alunos se sintam cativados pela Matemática, disciplina que este professor considera difícil e “chata”.

Menezes (1995) no estudo em que investigou as relações entre conceções e práticas de professores de Matemática do 2.º ciclo do ensino básico ao nível do discurso da sala de aula, tendo em atenção as práticas discursivas do professor (de modo específico, o estudo da pergunta) refere que um dos professores estudados se inscrevem na categoria relacionada à aquisição de conhecimentos. Este professor valoriza a aquisição de conhecimentos que tornem o aluno capaz de resolver problemas quotidianos e acredita que a aprendizagem é um processo apoiado em conhecimentos prévios, sendo portanto, sequencial. O autor classifica as conceções pedagógicas deste professor como sendo centradas nos conteúdos com ênfase na compreensão, categorização esta realizada com base nos quadros teóricos relativos às conceções sobre o ensino da Matemática (Thompson, 1992) em que na “conceção centrada no conteúdo com ênfase na compreensão conceptual" o conteúdo é o foco da atividade em sala de aula, ao mesmo tempo em que é enfatizada a compreensão dos alunos sobre ideias e processos.

Considerando a categoria relacionda ao *desenvolvimento de capacidades e atitudes nos alunos*, uma professora estudada por Canavarro (1993) aparece inscrita nessa categoria. Na visão desta professora, ensinar Matemática significa essencialmente ajudar os alunos a desenvolver suas capacidades, sendo que consegue realizar uma boa integração pedagógica do computador na sua sala de aula, usando-o como um instrumento de apoio ao trabalho dos alunos. Menezes (1995), por seu turno, refere também que para uma das professoras estudadas, a grande finalidade do ensino da Matemática é o desenvolvimento de capacidades nos alunos, com destaque especial para as capacidades de comunicação e raciocínio, assumindo a aquisição de conhecimentos um caráter complementar no nível de importância. Para esta professora, o trabalho de grupo possibilita o confronto de ideias e, por isso, as actividades de discussão são bastante valorizadas, tanto nos momentos em que os alunos estão a trabalhar em grupo, como nos momentos plenários de toda a turma.

Ainda dentro do quadro relacionado às conceções do professor sobre o ensino da Matemática, Menezes (1995) refere os papeis idealizados para o professor e para o aluno nos dois professores estudados. Na visão de uma das professoras, o professor não é alguém que transmite um conjunto bem organizado de conteúdos, mas que possui a missão de organizar tarefas e conduzir a realização de discussões, cabendo, por conseguinte, ao aluno um papel ativo e participante. O outro professor acredita que a principal atribuição do professor reside em construir uma boa relação com o aluno, a quem cabe ser responsável, disciplinado e participativo. Amado (1998), por sua vez, no estudo em que investigou as conceções e as práticas pedagógicas sobre avaliação de três professores do ensino secundário, também fez uso do quadro teórico de Thompson (1992), referindo uma visão dos professores centrada no conteúdo, porém com uma ênfase no desempenho, tendo o professor um papel central na aula e cabendo ao aluno um papel passivo e de recetor dos conhecimentos transmitidos pelo professor.

Embora o estudo de Guimarães (2003) se concentre nas conceções de professores e matemáticos em relação à Matemática e à atividade matemática, o autor refere, no caso das duas professoras do estudo que ambas valorizaram mais a compreensão que a memorização e em ambas foi perceptível a ideia de que a aprendizagem deve prosseguir "do concreto para o abstrato" e do "simples para o complexo". Em relação à visão sobre o cálculo na Matemática, "foi reconhecido pelas professoras que o cálculo é a atividade mais trabalhada no ensino" (p. 399), embora esta visão tenha diferentes matizes que evidenciam diferentes conceções sobre o seu papel e importância: "Uma delas considera-o como uma modalidade relativamente secundária na atividade matemática e de caráter essencialmente instrumental. A outra professora valoriza-o claramente mais, reconhecendo-o como pré-requisito essencial à aprendizagem conceptual em Matemática" (p. 399).

Relações entre conceções e práticas

Conforme já mencionado, não faz sentido estudar as conceções desligadas das práticas e das condições profissionais onde os professores exercem a sua atividade. Uma professora no estudo de Amado (1998), referiu a resolução de problemas e o uso de materiais manipulativos, do computador e das calculadoras, mas nas aulas não se observou a resolução de problemas e nem o uso dos materiais referidos. Outro professor, no mesmo estudo, fez referência à avaliação de atitudes, valores e capacidades, mas apresentou enormes dificuldades em recolher informação nestes domínios.

Em alguns estudos, conforme referido por Guimarães (2003), situações como as anteriores são tratadas como uma evidência de contradição entre conceções e práticas, sendo que nesses estudos se busca estudar a relação entre as conceções e as práticas, onde as conceções são retiradas da fala do professor (geralmente com o recurso à entrevistas ou conversas informais) e a prática como o que se revela na observação de aulas. No entanto, o mesmo autor chama a atenção que "esta forma de entender as conceções e de proceder ao seu estudo pode colocar limitações e dificuldades à sua compreensão, bem como a compreensão das próprias práticas, uma vez que eventuais contradições entre o que o professor diz e o que o professor faz não significam, necessariamente, contradições entre suas conceções e sua prática" (p. 12).

Um ponto de vista similar relativo a essa matéria é o revelado por Ponte (1994). Em seu trabalho que fez um balanço de dez anos de investigação sobre o professor de Matemática em Portugal, Ponte (1994) aprecia três estudos que se debruçaram justamente sobre a relação entre conceções e práticas no início dos anos noventa: Canavarro (1993); Delgado (1993), que estudou as concepções de três professoras de Matemática do 2.º ciclo acerca da resolução de problemas e do seu ensino, procurando compreender a relação com as práticas pedagógicas, e Vale (1994), que investigou as concepções e práticas de dois alunos no último ano de formação inicial e no primeiro ano de exercício da docência, relativamente a atividades de resolução de problemas de Matemática. Sobre estes trabalhos empíricos, Ponte (1994) considera:

> Nestes três trabalhos o objetivo de compreender a relação entre conceções e práticas fica longe de ser plenamente conseguido. Em particular, o tema das consistências e inconsistências revela-se de interesse bastante limitado – bem mais importante seria perceber as razões que levam as práticas a ser como são e as explicações que disso podem oferecer os professores. No entanto, o simples facto de se ter trazido o foco do estudo para as práticas ajuda a revelar importantes problemas que se põem neste domínio. (p. 94)

O estudo de Menezes (1995) parece apontar para uma relação de mútua influência entre o pensamento do professor e as suas práticas. A relação entre as conceções e as práticas dos dois professores sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, e as suas práticas, ao nível do questionamento, não parece ser de causa-efeito. No caso de uma professora, há um peso considerável na experimentação, ou seja, os resultados da investigação que chegam até a professora (por meio de congressos, revistas ou ações de formação) ao colidirem com as concepções vigentes, levam-na a experimentar nas aulas, confrontando a teoria com a prática. É esta experiência, embebida na reflexão, que mostra potencialidades de alterar as concepções. Por outro lado, são estas concepções recém-formadas que vão orientar, em grande parte, as práticas seguintes da professora. Já no caso de outro professor, o estudo revela uma forte influência de fatores de caráter social nas conceções e nas práticas. As opiniões dos encarregados de educação, dos outros professores da escola, dos órgãos diretivos, as determinações do Ministério da Educação são os principais elementos que interferem nas conceções e nas práticas deste professor.

Resumo

O estudo das conceções do professor de Matemática constitui um campo ativo da investigação em Educação Matemática, no plano internacional, desde o início da década de 80. Um primeiro trabalho neste domínio foi a tese de doutoramento de Alba

Thompson, ocorrida no ano de 1982 nos Estados Unidos. A partir de então, muitos outros estudos foram realizados. Considerando estes estudos, um ponto a destacar é a falta de concordância, entre os investigadores, quanto às terminologias e definições adotadas. Assim, para além de conceções e crenças, há também outras expressões, dentre as quais: visão, entendimento, perceção e perspetiva.

Neste estudo opto pela utilização do termo conceção por duas razões. Primeiro, devido à sua maior abrangência em relação aos demais termos, abrigando, inclusivamente, o próprio conceito de crença. Adoto, assim, a definição utilizada por Thompson (1992) para conceções: "Uma estrutura mental mais geral, incluindo crenças, significados, conceito, proposições, regras, imagens mentais, preferências e outras coisas semelhantes" (p. 130). Em segundo lugar, a escolha pelo termo conceção, prende-se também com a possibilidade da abrangência com o uso desse termo, para além de aspectos cognitivos, também os respeitantes aos domínios afetivos.

O que parece consolidado dentro da comunidade investigativa é o fato de que o processo de formação das conceções é, ao mesmo tempo, individual e social. Dentro desse processo de formação das conceções, um destaque é dado para as experiências escolares anteriores dos professores. Numa tentativa de conferir alguma estrutura, Green (1971), citado em Thompson (1992), utiliza-se do termo "sistema de crenças" e refere três dimensões: (i) O sistema de crenças pode apresentar algumas crenças primárias e outras crenças derivadas; (ii) As crenças são mantidas, dentro do sistema, com diferentes graus de convicção, existindo crenças centrais e periféricas; (iii) As crenças são mantidas em grupos, sendo que cada um destes grupos podem permanecer mais ou menos isolados uns dos outros. Quanto ao processo de mudança, as conceções geralmente perduram, inalteradas, a menos que sejam deliberadamente desafiadas. Desse modo, a mudança das conceções constitui um processo difícil.

Outro ponto de convergência dentro da comunidade investigativa é o reconhecimento da dificuldade de distinguir conceções de conhecimento, consistindo esta uma das tarefas das mais difíceis e complexas, senão impossível. O conhecimento e as conceções do professor estão fortemente entrelaçados, contudo parece que a natureza afetiva, avaliativa e episódica das conceções fazem-nas uma espécie de "filtro" através do qual novos fenômenos podem ser interpretados. Para além do domínio cognitivo, muitos autores reconhecem também nas conceções elementos essencialmente afetivos. Na visão de Pajares (1992), por exemplo, os componentes afetivos das conceções desempenham a função de facilitar o armazenamento na memória de longo prazo. Já McLeod (1992), refere que "o domínio afetivo refere-se a uma ampla gama de crenças, sentimentos e humores que geralmente são considerados como indo além do domínio da cognição".

Muitos dos estudos conduzidos no domínio das conceções do professor de Matemática referem com bastante regularidade as conceções do professor sobre a Matemática e também as conceções do professor sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. É o que ocorre com os estudos realizados em Portugal a partir do final dos anos 80. Estes estudos referem que os professores portugueses apresentam uma certa dificuldade de se pronunciarem sobre a Matemática para lá do campo estritamente escolar. Em relação às conceções sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, estes mesmos estudos referem duas categorias básicas: Uma primeira relacionada à *aquisição de conhecimentos pelos alunos* e uma segunda relacionada com o *desenvolvimento de capacidades e atitudes nos alunos*.

Por último, é também de referir que tanto em Portugal quanto no plano internacional, uma importância significativa no domínio das conceções do professor é conferida à relação entre estas e a prática do professor. A natureza dessa relação parece ser caracterizada pela influência mútua, representando uma relação complexa e que também é permeada por elementos sociais e culturais.

Capítulo 3

Prática do professor

Este capítulo está organizado em três secções. Na primeira secção apresento o interesse e também a importância da investigação centrada nas práticas do professor de Matemática. Na segunda secção discuto o significado atribuído ao conceito "práticas do professor" tendo em atenção as perspetivas subjacentes que lhe são conferidas nos estudos conduzidos neste domínio, nomeadamente as perspetivas sociocultural e cognitivista. Na terceira secção, considerando as práticas letivas do professor de Matemática, apresento os resultados de alguns estudos empíricos realizados e construtos teóricos elaborados, com especial destaque para as tarefas e também para a comunicação em sala de aula.

3.1 O interesse pelo estudo das práticas

Os estudos sobre as práticas do professor, segundo Ponte e Chapman (2006), ocorrem sensivelmente em um momento posterior aos estudos conduzidos nos domínios do conhecimento e também das conceções e crenças do professor. Os autores, tendo em atenção as tendências quantitativas e qualitativas dos estudos publicados no âmbito do PME - *Psychology of Mathematics Education* – durante um período de quase três décadas, referem:

> Utilizamos três períodos - 1977-85, 1986-94 e 1995-2005 - como base para considerar possíveis tendências em termos quantitativos (número de artigos em cada período) e qualitativos (objetos de estudo, ênfases teóricas, abordagens metodológicas, outros problemas). Como era de se esperar, no primeiro período, são poucos os trabalhos tratando do saber dos professores. No segundo período, há um grande número de artigos que tratam de aspetos do conhecimento dos professores (Matemática e Ensino de Matemática),

> crenças e conceções. Os estudos sobre as práticas dos professores aparecem pela primeira vez no segundo período e crescem a uma taxa surpreendente no terceiro. (pp. 462-463)

O estudo mais tardio das práticas do professor, se comparado a outros domínios como o conhecimento e as conceções do professor, também acontece em Portugal e parece estar relacionado aos constrangimentos de ordem teórico-conceptual e também metodológica. Canavarro (1993), por exemplo, no estudo que conduziu sobre as conceções e prática do professor de Matemática, refere, naquela altura, a falta de uma conceptualização aprofundada acerca das práticas dos professores:

> Apesar das práticas dos professores constituirem igualmente um conceito fundamental desta investigação, a revisão de literatura não contempla nenhuma secção específica sobre o tema. Este fato deve-se sobretudo às dificuldades em encontrar documentos escritos que incluam uma conceptualização profunda das práticas dos professores. (p. 20)

Ainda dentro do quadro das dificuldades iniciais encontradas no estudo das práticas do professor, Ponte e Santos (1998) referem que o estudo neste domínio se depara com numerosos problemas de ordem teórica e também metodológica. Estes autores questionam: "Quais os conceitos-chave que podem ser chamados a intervir neste tipo de pesquisa? Como estudar as práticas de um corpo profissional quando elas se desenvolvem em um ambiente dinâmico e complexo, como são as salas de aula?" (p. 3).

Apesar das dificuladades iniciais, o interesse pelo estudo das práticas do professor manteve-se de modo significativo no seio da comunidade investigativa. Este interesse pelo estudo das práticas do professor surge associado à importância de se melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática (Boaler, 2003). Isso ocorre por meio da constatação de que a "aprendizagem dos alunos depende em grande parte do que acontece na sala de aula" (Ponte, 2014, p. 5). Ademais, o interesse também repousa em questões respeitantes ao quadro das novas orientações curriculares que, por seu turno, colocam desafios importantes tanto às práticas do professor como também ao seu desenvolvimento profissional (Saxe, 1999).

Boaler (2003) refere a importância do estudo das práticas do professor a fim de se perceber melhor a relação entre o ensino e a aprendizagem, reforçando que o ensino é uma prática complexa e que não pode simplesmente ser dicotomizada entre conhecimento e ação, mas que deve, idealmente, ser tomada como uma ação que ocorre justamente na intersecção entre conhecimento e pensamento. A autora argumenta que o campo da Educação Matemática alcançou uma compreensão significativa e desenvolvida sobre ambientes de aprendizagem, sem, contudo, ter adquirido uma compreensão das práticas de ensino necessárias para dar suporte a tais ambientes. Com isso, coloca em primeiro plano a pertinência do estudo das práticas.

No tocante ainda à pertinência do estudo das práticas, Ponte e Serrazina (2004) referem que "as práticas profissionais dos professores são certamente um dos fatores que mais influenciam a qualidade do ensino e da aprendizagem dos alunos" (p. 51). Uma posição semelhante é adotada por Chapman (2004). Esta autora é categórica ao afirmar que a "compreensão do pensamento e das ações dos professores são importantes para melhorar o ensino da Matemática" (p. 191). Tendo em atenção os aspetos respeitantes ao currículo de Matemática, vinca que "o professor é o fator determinante de como o currículo de Matemática é interpretado e ensinado" e, desse modo, "é importante aprender com os professores o que eles fazem e como entendem o que eles fazem na sala de aula" (p. 191).

Saxe (1999), por seu turno, chama a atenção para a importância de se estudar as práticas de sala de aula a fim de se compreender melhor o impacto do desenvolvimento profissional do professor . O autor apresenta dois estudos sobre os esforços de reforma em andamento em Educação Matemática relacionando-os com as práticas dos professores. No primeiro estudo, o autor aborda os padrões de mudança das práticas de avaliação dos professores e no segundo examina as práticas dos professores que participam de dois programas de desenvolvimento profissional, sendo estes concebidos para apoiar a implementação de um currículo voltado para a reforma. O autor conclui que "ambos os estudos mostram a utilidade de um enfoque nas práticas para a compreensão do desenvolvimento profissional dos professores e do desenvolvimento da compreensão matemática dos alunos no contexto das reformas em andamento" (p. 25).

Em resumo, os estudos sobre as práticas do professor ocorrem, tanto no plano internacional como em Portugal, após outros estudos terem sido conduzidos com foco no conhecimento e também nas conceções do professor. O interesse pelo estudo das práticas do professor encontra-se diretamente relacionado com a sua importância e pertinência reconhecidas pela comunidade investigativa. Tal importância parece estar ligada a três situações: (i) o estudo da prática mostra-se importante no sentido de se *melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática*; (ii) a importância do estudo da prática também encontra-se relacionada a uma melhor compreensão de *como o currículo de Matemática* (especialmente em um quadro orientado para a reforma educativa) *pode ser interpretado e ensinado pelo professor*; e, por fim, (iii) a importância do estudo das práticas também repousa numa melhor compreensão no que se refere ao *impacto do desenvolvimento profissional do professor*.

3.2 O conceito de prática profissional

Uma pergunta inicial a ser colocada é a seguinte: o que se entende por “prática”? A resposta à esta questão é difícil e, por vezes, somos tentados a assumir que se trata de um conceito suficientemente consensual e, que assim, não necessita de uma maior discussão ou clarificação (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). Por outro lado, dado o seu largo emprego em situações cotidianas, a palavra “prática” pode também assumir-se como acentuadamente polissémica.

No que concerne à investigação em Educação Matemática, Ponte, Quaresma e Branco (2012) referem que “o conceito de prática é muito usado na literatura de Educação Matemática, assumindo sentidos diversos, mas, grande parte das vezes, com reduzida precisão conceptual” (p. 67). Essa posição é reforçada por Ponte (2014), que refere ser necessário, tendo em vista um estudo mais aprofundado, começar justamente por discutir esse conceito, dado que “a prática profissional tem sido apresentada na literatura de investigação numa variedade de perspetivas, por vezes fortemente redutoras, por vezes identificadas com as ações do professor e noutras vezes com a sua perspetiva curricular geral” (p. 6).

Com o objetivo de conceptualizar as práticas profissionais, Ponte e Serrazina (2004), tendo em atenção que as práticas profissionais envolvem vários campos da atividade do professor, organizam-nas em três grandes grupos: (i) práticas letivas, (ii) práticas profissionais na instituição, e (iii) práticas de formação. Em particular, os autores distinguem cinco aspetos principais da prática letiva: (i) as tarefas propostas, (ii) os materiais utilizados, (iii) a comunicação em sala de aula, (iv) as práticas de gestão curricular, e (v) as práticas de avaliação. Dados os contornos do presente estudo, considerarei as práticas letivas e, dentro destas, darei especial destaque para as tarefas propostas e a comunicação em sala de aula. Estas duas vertendes da prática letiva são discutidas de modo mais pormenorizado ao fim deste capítulo.

Ponte e Chapman (2006) referem que nos primeiros estudos sobre as práticas do professor, este conceito estava associado principalmente às ações, atos ou comportamentos do professor. Situação que, conforme referem os autores, evoluiu consideravelmente ao longo dos anos. Saxe (1999), por seu turno, em sua conferência no PME, define práticas como sendo "atividades recorrentes e socialmente organizadas que permeiam a vida cotidiana" (p. 1-25). Também no âmbito de uma conferência no PME, Boaler (2003), tendo em atenção justamente as práticas de sala de aula, define-as como sendo "atividades e normas recorrentes que se desenvolvem nas salas de aula ao longo do tempo, nas quais professores e alunos se envolvem" (p. 1-3). Desta definição é possível depreender alguns elementos importantes: em primeiro lugar, as práticas são, antes de mais nada, atividades, o que remete tal categoria para a teoria da atividade; em segundo lugar, apresentam um caráter recorrente, ou seja, realizam-se com frequência e não são ocasionais; em terceiro lugar, assumem uma natureza interativa envolvendo professores e alunos.

Para além de uma definição mais precisa e organizada para o conceito de "prática", é também importante considerar a forma como se realiza o seu processo de análise, ou seja, que aspetos são primordiais e que devem ser realçados quando se realiza um estudo analítico das práticas. Na realidade, a própria forma com que se perspetiva o conceito de prática parece estar fortemente relacionada à abordagem teórica subjacente (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). Nesse aspeto, é possível distinguir duas grandes abordagens: a cognitivista e a sociocultural.

> Várias décadas atrás, a pesquisa em Educação Matemática foi principalmente o que foi chamado de "pesquisa cognitiva". As concepções matemáticas e formas de aprendizado individuais do aluno eram o foco da atenção. Na última década, o foco da pesquisa em Educação Matemática começou a se estender da cognição e do conhecimento do aluno individual para incluir aspectos socioculturais da aprendizagem da Matemática. Os pesquisadores de Educação Matemática começaram a se concentrar na participação de alunos e professores em atividades de ensino-aprendizagem e em diferentes tipos de interação – entre ensino e aprendizagem e entre conhecimento e prática (Even & Schwartz, 2003, p. 283).

Vejamos em maiores detalhes cada uma dessas duas perspetivas. Começo pela perspetiva cognitivista que tem Schoenfeld como um de seus principais expoentes. Ponte, Quaresma e Branco (2012) referem que este autor "propôs um modelo para o estudo do processo de ensino do professor, em que o centro da atenção está nas decisões e ações que este assume na sua prática e que o autor procura explicar tendo por base o conhecimento, as crenças e os objetivos do docente" (p. 67). Dito de outro modo, Schoenfeld (2015) procura mostrar que sob certas circunstâncias é possível modelar o ato de ensinar a ponto de fornecer explicação fundamentada de cada decisão de um professor durante um período de ensino. Sua principal alegação é que "agir no momento" orientado por objetivos pode ser explicado e modelado por uma arquitetura na qual estão apresentados: *recursos* (especialmente conhecimentos), *objetivos, orientações* (uma abstração de crenças, incluindo valores, preferências, dentre outros) e a *tomada de decisão* (que pode ser modelada como uma forma de análise subjetiva de custo-benefício). Segundo Ponte (2014), "no essencial, a perspetiva cognitiva procura ter em atenção o modo como o professor toma decisões, atendendo às prioridades que estabelece e aos planos de ação que formula, e atende também ao modo como estes planos são depois concretizados ou não em sequências de ação" (p. 7).

Vejamos agora a perspetiva sociocultural. Para Ponte, Quaresma e Branco (2012), a caracterização das práticas decorrentes de uma abordagem sociocultural remete para uma caracterização de "atividades" que, por sua vez, apresentam três elementos principais: (i) as ações, (ii) os motivos que levam à realização da atividade, e (iii) o objeto ou tarefa, que dirige e dá unidade a toda a atividade. Ademais, os autores também argumentam que em uma abordagem sociocultural, as práticas letivas da sala de aula são o resultado de uma construção conjunta de professores e alunos e estão sujeitas a uma série de pressões de fatores socioculturais. Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), por seu turno, referem que esta abordagem possui as suas origens na escola russa, principalmente nos trabalhos de Leontiev.

Franco e Longarezi (2011), ao estudarem as contribuições da teoria da atividade para a formação de professores, vincam que "a gênese da atividade docente é melhor compreendida quando apreendida em sua estrutura social, no modo em que operam suas relações" (p. 559). Estas autoras, referindo-se aos estudos de Leontiev, mencionam que a estrutura da atividade é constituída por necessidade, motivo, operação, ação, condições e objeto. Ainda segundo as autoras, "uma necessidade é um requisito para qualquer atividade. Todavia ela não consegue se realizar, senão, no objeto da ação, quando se objetiva nele" (p. 569). E as autoras acrescentam:

> Por conseguinte, quando o sujeito consegue articular uma necessidade a um objeto ele o faz por meio do motivo, que o impele a buscar a satisfação daquela necessidade. Há deste modo, uma estreita relação entre necessidade, motivo, objeto e condições, presentes na estrutura da atividade. O motivo

> diz respeito àquilo que impulsiona o comportamento do sujeito, o que move sua ação, e este, por sua vez, se relaciona diretamente a uma necessidade que se quer satisfazer. Entretanto, para satisfazer essas necessidades, o sujeito depende das condições que se têm, ou do modo pelo qual são executadas. Essas condições são compreendidas como o conteúdo indispensável de toda ação, mas não se identifica com a ação. Uma só e mesma ação podem realizar-se por diferentes operações. Enquanto a ação é determinada pelo seu fim, as operações dependem das condições em que é dado este fim. Isto é, como essas necessidades são satisfeitas. (p. 569)

Apresentada, na sua essência, uma caracterização para as abordagens sociocultural e cognitivista, também é interessante observar o que alguns autores consideram sobre a possibilidade (ou não) de uma integração/articulação entre estas duas abordagens. Seriam elas compatíveis ou não? Ponte e Chapman (2006), ao mencionarem a dificuldade de se explicar "as ações individuais apenas em termos de aspectos sociais, culturais e contextuais", lançam a seguinte questão: "como podemos combinar os níveis de análise social e individual?" (p. 485). Sobre esta questão, Even e Schwartz (2003), ao considerarem as duas perspetivas teóricas (cognitivista e sociocultural), exemplificam como as análises de uma aula levam a diferentes interpretações e entendimentos, e discutem as implicações para a pesquisa. Os autores apresentam, a partir de seu estudo empírico, um questionamento sobre a possibilidade de se usar os dois quadros conceptuais em simultâneo, dado que a aula analisada se mostrou complexa demais para ser entendida usando apenas uma perspectiva. Assim, estes autores inclinam-se para a incompatibilidade entre as duas perspetivas.

Saxe (1999), por seu turno, embora não assumindo de uma forma peremptória e categórica a compatibilidade entre as duas perspetivas, parece assumir uma posição de possibilidade de integração entre elas, ao referir que: "um pressuposto fundamental é que existe uma relação reflexiva entre as atividades e práticas individuais – as atividades dos indivíduos são constitutivas das práticas e, ao mesmo tempo, as práticas dão forma e significado social às atividades dos indivíduos" (pp. 25-26).

Ponte, Branco, Quaresma, Velez e Mata-Pereira (2012), por seu lado, também pensam que não existe incompatibilidade intransponível entre as abordagens de cunho cognitivista e de cunho sociocultural e defendem que o estudo das práticas profissionais do professor de Matemática deve ter em atenção os seguintes aspectos: os motivos do professor, os contextos (social, educativo e da turma), o conhecimento profissional do professor, o saber-fazer do professor e a capacidade reflexiva do professor. Segundo estes autores, "as práticas letivas, interpretadas como atividade ou como planos de ação/decisões, têm de ser interpretadas tendo em atenção dois aspetos fundamentais: o contexto e o próprio professor” (p. 275). E acrescentam:

> O argumento principal de Even e Schwartz para justificar a sua tese de incompatibilidade das duas abordagens é que elas se centram em níveis muito diferentes – a sociocultural na atividade e a cognitiva nas decisões e ações. Na nossa perspetiva, ambos os níveis são necessários para compreender as práticas. É preciso compreender o sentido global do que faz o professor, tendo em atenção os seus planos de ação e procurando caraterizar a sua atividade, bem como identificar o modo específico como são postos em prática, através de diversas decisões e ações apoiadas em operações e técnicas mais ou menos apropriadas. (p. 275)

Ponte e Chapman (2006) referem que as práticas dos professores podem ser vistas como atividades que estes regularmente conduzem, tendo em atenção o contexto de trabalho e os seus significados e intenções e que “isso inclui a estrutura social do contexto e suas várias camadas – sala de aula, escola, comunidade, estrutura profissional e sistema educacional e social” (p. 483) parecem adotar uma posição no sentido de conciliar as duas perspetivas, contemplando tanto o ponto de vista sociocultural como também o cognitivo.

Potari e Jaworski (2002), por seu turno, ao usarem o constructo teórico *Tríade de Ensino* (com os domínios: *gestão da aprendizagem, sensibilidade ao aluno e desafio matemático*) buscam também captar os aspetos cognitivos e sociais. Uma perspectiva semelhante também é assumida por Jaworski e Potari (2009) que referem que as duas abordagens (cognitivista e sociocultural) são apenas duas maneiras de olhar o mesmo fenômeno da comunicação, que se origina entre as pessoas e não existe sem o coletivo, mesmo que possa envolver temporariamente apenas um interlocutor. As autoras usam o constructo *Triângulo Mediacional Expandido* (com os domínios: *ferramentas, sujeito, objeto, regras, comunidade e divisão de trabalho*), inscrito na teoria da atividade, para reforçar o quadro social mais amplo no qual o ensino em sala de aula está situado. Estes dois construtos são tratados de modo mais pormenorizado na próxima secção.

Por fim, é importante referir a delimitação dos níveis de abrangência das práticas letivas. Ponte, Branco, Quaresma, Velez e Mata-Pereira (2012) apresentam três níveis de abrangência – *grande generalidade, nível intermediário e nível específico*. Em algumas situações, fala-se de práticas a um nível de grande generalidade – como Boaler (2003) que distingue o ensino tradicional do ensino inovador e Ponte (2005) que se refere aos ensinos exploratório e direto. Neste nível, uma aula ou uma sequência de aulas corresponde a uma só prática. Em outras situações, consideram-se como práticas alguns episódios específicos de uma aula, como a forma que o professor apresenta uma tarefa aos alunos ou como responde a determinados questionamentos. Assim, uma aula de 50 minutos pode apresentar muitas práticas. E, finalmente, tem-se o nível intermediário, correspondendo a partes significativas da aula ou mesmo, toda a aula.

> No nosso entender, todos os níveis merecem a atenção da investigação. As práticas entendidas a um nível mais geral são importantes para se aferir das condições de aplicação e dos resultados de certas orientações curriculares. As práticas de nível intermediário são de grande importância para concretizar as orientações curriculares, indicando modos específicos de trabalho de sala de aula. E, finalmente, as práticas entendidas como ações específicas são também importantes, uma vez que são elas que permitem concretizar (ou não) o que é assumido nos dois níveis anteriores. (Ponte, Branco, Quaresma,Velez e Mata-Pereira, 2012, p. 270)

Em resumo, as práticas profissionais do professor podem ser divididas em três grandes grupos: (i) práticas letivas, (ii) práticas profissionais na instituição, e (iii) práticas de formação. Este estudo centra-se nas práticas letivas, com especial interesse pelas tarefas propostas e pela a comunicação em sala de aula. Tanto a definição como o processo analítico relacionados às práticas aparecem associado a duas grandes perspetivas teóricas: a cognitivista e a sociocultural. Na abordagem cognitivista o enfoque está nas ações e decisões do professor, enquanto que na abordagem sociocultural o foco repousa nas atividades realizadas, especialmente nas intenções e significados do professor, tendo em atenção o contexto onde estas práticas decorrem. Muitos autores advogam uma perspetiva analítica conciliando as duas perspetivas e assim interpretar as práticas tanto quanto atividade como plano de ação ou decisão do professor.

3.3 Estudos empíricos e construtos teóricos

Nesta secção começo por apresentar alguns construtos teóricos elaborados a partir de estudos empíridos e que propõem uma reflexão mais aprofundada sobre a prática letiva do professor bem como a análise de tais práticas. Com isso, tais construtos assumem a função de também informar a presente investigação. Na sequência, dedico um espaço especial para a discussão sobre as tarefas e também sobre a comunicação em sala de aula, tomando estes dois aspetos como elementos estruturantes da prática letiva.

A prática profissional do professor de Matemática, em aspetos gerais, e a prática letiva, em particular, ao adquirir um espaço de destaque na agenda investigativa, possibilitou o surgimento de alguns modelos teóricos que emergiram a partir dos estudos empíricos que foram realizados neste domínio. Tais modelos, de um modo mais ou menos explícito, trazem consigo a associação às abordagens sociocultural e/ou cognitiva antes discutidas.

Começo por apresentar o modelo teórico concebido por Potari e Jaworski (2002). As autoras, a partir de um trabalho empírico realizado com dois professores de Matemática do ensino secundário, concebem o modelo teórico denominado *Tríade do Ensino (TT).* Com este modelo as autoras buscam atender a um duplo objetivo: em primeiro lugar, incentivar a reflexão do professor sobre todos os aspetos do ensino e, em segundo lugar, analisar a prática letiva do professor de Matemática. O modelo apresenta três domínios: *gestão da aprendizagem, sensibilidade ao aluno e desafio matemático* (Figura 3.1).

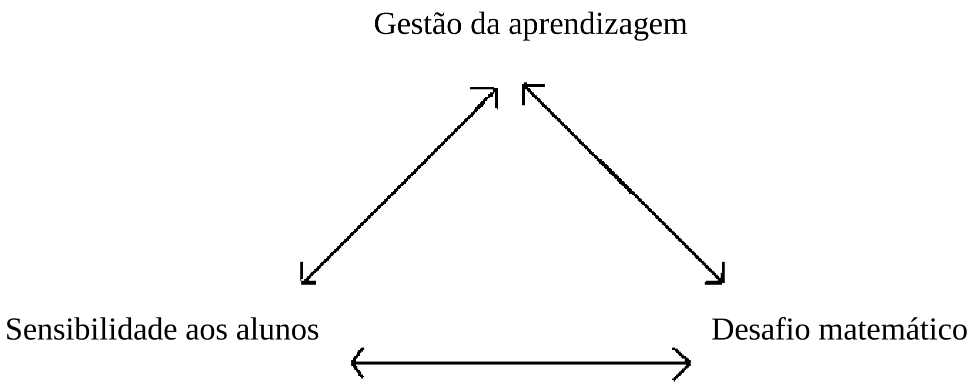


Figura 3.1: Tríade do ensino (Potari e Jaworski, 2002, p. 353)

A *gestão da aprendizagem* descreve o papel do professor na construção do ambiente de aprendizagem em sala de aula, incluindo agrupamentos de alunos, planejamento de tarefas e atividades e definição de normas. A *sensibilidade ao aluno* descreve o conhecimento do professor sobre os alunos e a atenção às suas necessidades, as maneiras pelas quais interage com eles e orienta as interações grupais. Por fim, o *desafio matemático* descreve os desafios oferecidos aos alunos para gerar pensamento e atividade matemática, incluindo as tarefas definidas e as questões colocadas.

Potari e Jaworski (2002) evidenciam que uma das professoras participante do estudo, por meio de seu gerenciamento da aprendizagem, cria um ambiente em que a sensibilidade em relação aos alunos funciona nos domínios afetivo e cognitivo tendo em vista tornar o desafio matemático adequado às necessidades e ao pensamento dos alunos. O uso do modelo, para além de um dispositivo analítico para a prática letiva, também levou as autoras a considerar preocupações sociais mais amplas ao lado de fatores cognitivos, e assim, perceber a impossibilidade de separação entre o cognitivo e o social. Por fim, as autoras consideram que os três domínios estão intimamente interligados e interdependentes e conjecturam que um ensino mais eficaz ocorre quando se consegue harmonizar as três categorias (gestão da aprendizagem, sensibilidade aos alunos e desafio matemático) na prática letiva.

Neste estudo é possível perceber o interesse das autoras em aceder através da macro-análise às questões de ordem sociocultural, para além dos aspetos cognitivos. Esse interesse é materializado de forma mais nítida em outro estudo das mesmas autoras (Jaworski & Potari, 2009), publicado sete anos após o primeiro, onde o interesse repousa na complexidade sociocultural no ensino de Matemática. Neste último estudo, Jaworski e Potari (2009) consideram o modelo teórico *Triângulo Mediacional Expandido (EMT)*, inscrito na teoria da atividade, para analisar a prática letiva de um professor, tendo dois focos: (i) relações (interação/cognição) entre alunos e professores e questões determinadas a partir do diálogo em sala de aula (*micro-análise*) e (ii) relações entre as interações de sala de aula e as culturas sócio-sistêmicas mais amplas através das quais a aprendizagem é mediada (*macro-análise*). As autoras concluem que é necessário um conhecimento mais amplo que leve em conta os fatores macro e que não seja especificamente relacionado a determinados estudantes, ao que chamaram de "*sensibilidade social*" (*social sensitivity*).

Outro estudo envolvendo as práticas profissionais foi apresentado por Boaler (2003) numa conferência no PME, em que a autora refere a necessidade dos pesquisadores em Educação Matemática prestarem mais atenção às práticas de ensino e também à forma eficaz de comunicar os resultados da pesquisa. A autora verifica diferenças nas práticas profissionais do professor segundo as abordagens tradicional ou inovadora (*reform teaching*):

> Enquanto os professores das aulas tradicionais davam muitas informações aos alunos, os professores da abordagem inovadora optavam por extrair informações dos alunos, apresentando problemas e fazendo perguntas aos alunos. Há uma perceção comum de que abordagens inovadoras são menos "centradas no professor", e mais no questionamento do professor. (p. 1-4)

Para Boaler (2003), ações de ensino específicas mudam as oportunidades criadas para os alunos. A autora apresenta três tipos de ensino conforme o grau de estrutura conferido pelo professor: (i) *muito estruturado*, reduzindo a demanda cognitiva da tarefa, (ii) *pouco estruturado* e com amplo grau de liberdade, causando frustração tanto ao professor como aos alunos, e (iii) *nível intermédio* de liberdade e estrutura, mas sem reduzir a demanda cognitiva da tarefa. Por fim, a autora refere três resultados de seu estudo: (i) compreender as formas como os alunos se envolvem com a Matemática requer um foco nas práticas de sala de aula, (ii) uma prática importante para os alunos trabalharem produtivamente em problemas abertos é a chamada "*dança da agência*" (*dance of agency*), que, por seu turno, não ocorre pela simples provisão de problemas abertos, requerendo um ensino cuidadoso, e (iii) maior atenção deve ser dada ao trabalho de ensino, pois são os professores que fazem a diferença entre o engajamento mais ou menos produtivo dos alunos.

Finalmente, apresento o relato de um trabalho empírico que possui uma íntima relação de afinidade com os objetivos desta investigação, nomeadamente a compreensão das práticas letivas e também das crenças que podem estar associadas a tais práticas. No referido trabalho, Arbaugh, Lannin, Jones e Park-Rogers (2006) procuram entender as práticas letivas (denomindas por estes autores de práticas instrucionais) e as crenças associadas de vinte e seis professores que usam manuais escolares baseados em problemas (Core-Plus). Para tal, utilizam uma lente teórica inicial baseada em três componentes interativos: (i) o impacto dos livros Core-Plus, (ii) as crenças do professor, e (iii) as práticas instrucionais do professor (Figura 3.2).

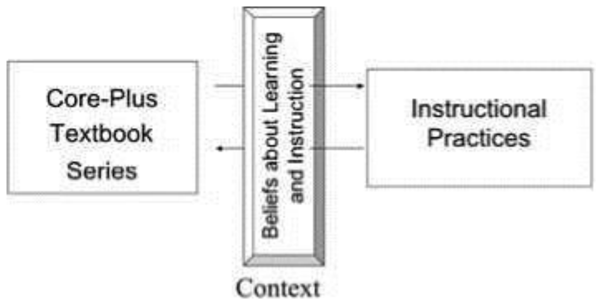


Figura 3.2: A interação entre o livro didático, crenças e práticas instrucionais. (Arbaugh et al., 2006, p. 520)

Conforme indica a figura 3.2, os autores consideram as crenças dos professores como um fator mediador entre o livro didático e suas práticas instrucionais. Como tal, reconhecem que os professores interpretam o Core-Plus através de suas crenças sobre o ensino e o aprendizado e que essas interpretações guiam a tomada de decisão instrucional com o livro didático, embora ressalvam que "a evidência das crenças dos professores é difícil de captar e a ligação entre prática e crenças do professor não é uma relação simples de causa e efeito" (p. 523). No estudo empírico, Arbaugh et al. (2006) utilizam a estrutura teórica de Hiebert et al. (1997) com suas cinco dimensões – (a) *natureza da tarefa, (b) papel do professor, (c) cultura de sala de aula, (d) ferramentas, e (e) equidade e acessibilidade* – e inserem uma sexta dimensão referente às crenças do professor. Para descrever o nível de qualidade das aulas observadas, utilizam descritores (Figura 3.3) graduados em uma escala de 1 a 5.

Rúbricas de descrição da aula	
Nível	Descrição
Nível 1: ensino ineficaz	Não há evidências de pensamento ou envolvimento de estudantes com ideias importantes de Matemática. Não é provável que o ensino aprimore a compreensão dos alunos sobre a disciplina ou desenvolva sua capacidade de fazer Matemática com êxito. As lições foram caracterizadas por: • "Aprender" passivo: o ensino é pedante e sem inspiração. Os alunos são receptores passivos de informações do professor ou do livro didático; o material é apresentado de uma forma inacessível para muitos dos alunos • Atividade por atividade: os alunos envolvem-se em atividades práticas ou outros trabalhos individuais ou em grupo, mas parece ser atividade por atividade. A lição não tem um sentido claro de propósito e / ou uma ligação clara com o desenvolvimento conceptual.
Nível 2: Elementos de ensino eficaz	O ensino contém alguns elementos de práticas eficazes, mas há problemas substanciais no design, implementação, conteúdo e / ou abordagem; o ensino pode não abordar com sucesso as dificuldades que muitos alunos estão vivenciando, etc. No geral, a lição é bastante limitada em sua probabilidade de aumentar a compreensão dos alunos sobre a disciplina ou de desenvolver sua capacidade de "fazer" Matemática com sucesso.
Nível 3: estágios iniciais do ensino efetivo	O ensino é significativo e caracterizado por alguns elementos da prática efetiva. Os alunos estão, às vezes, engajados em um trabalho significativo, mas há alguns pontos fracos no design, na implementação ou no conteúdo do ensino. Por exemplo, o professor pode causar um *curto-circuito* em uma exploração planejada, dizendo aos alunos o que eles "deveriam ter encontrado"; o ensino pode não atender adequadamente às necessidades de um certo número de alunos; ou a cultura da sala de aula pode limitar a acessibilidade ou a eficácia da lição. No geral, a lição é um pouco limitada em sua probabilidade de melhorar a compreensão dos alunos sobre a disciplina ou desenvolver sua capacidade de fazer matemática com sucesso.
Nível 4: ensino efetivo	O ensino é significativo e envolvente para a maioria dos alunos. Os alunos participam ativamente do trabalho significativo. A lição é bem planejada e o professor a implementa bem, mas a adaptação de conteúdo ou pedagogia em resposta às necessidades e interesses dos alunos é limitada. É bem provável que o ensino melhore a compreensão da disciplina por parte dos alunos e desenvolvam sua capacidade de fazer Matemática com êxito.
Nível 5: ensino exemplar	O ensino é significativo e todos os alunos estão altamente envolvidos, na maioria ou em todo o tempo, em trabalho significativo. A lição é bem projetada e artisticamente implementada, com flexibilidade e capacidade de resposta às necessidades e interesses dos alunos. É altamente provável que o ensino aprimore a compreensão da disciplina por parte dos alunos e desenvolva sua capacidade de fazer Matemática com êxito.

Figura 3.3: Rúbricas de descrição da aula (Arbaugh et al., 2006, pp. 546-547)

Os autores apresentam três categorias de análise para as aulas observadas: baixa qualidade (*low-lesson quality*) (LLQ - relacionada aos descritores 1 e 2), média qualidade (*medium-lesson quality*) (MQL - associada ao descritor 3 - baixo e médio) e alta qualidade (*high-lesson quality*) (HLQ - associada aos descritores 3 - alto, 4 e 5). Como resultado, o estudo empírico contradiz diretamente a ideia que adotar uma série de livros didáticos baseados em problemas e usá-los em sala de aula é suficiente, por si só, para ter um efeito nas práticas instrucionais dos professores. Além disso, os resultados parecem indicar uma relação estreita entre o nível de qualidade das aulas e as crenças dos professores em relação à possibilidade de os alunos aprenderem Matemática a partir de um livro baseado em problemas, sendo que nas lições HLQ, por exemplo, "os professores expressaram consistentemente crenças que indicavam que eles tinham confiança que os alunos poderiam aprender Matemática de valor a partir de um livro baseado em problemas como o Core-Plus" (p. 541). Na visão dos autores, compreender as atuais práticas instrucionais e as implicações dessas práticas para o desenvolvimento profissional é essencial para atender às diversas necessidades em sala de aula.

O estudo das práticas letivas em contextos de desenvolvimento profissional é outro foco da pesquisa. Tal foco é justificado devido à importância da sintonia desejada entre desenvolvimento profissional e prática letiva efetiva do professor, além de permitir aferir até que ponto as eventuais mudanças se sustentam ao longo do tempo. Este é o caso do trabalho de Copur-Gencturk e Papakonstantinou (2016) que examinaram, por meio de um estudo empírico longitudinal de quatro anos, até que ponto os aspetos do ensino mudaram depois dos professores terem participado de um programa de desenvolvimento profissional. Os resultados apontaram melhorias sustentáveis ao longo do tempo no discurso matemático dos professores, na clarificação instrucional e nos hábitos mentais de Matemática. Porém não se verificou melhorias na interação entre estudantes e no uso de múltiplas representações. As autoras acreditam que duas características-chave no desenvolvimento profissional contribuíram para o impacto nas práticas: (i) conexão com o trabalho dos professores e (ii) a duração do programa.

Conforme se pode observar, os estudos empíricos até aqui referidos abordam diferentes ângulos da prática letiva do professor de Matemática, tais como: (i) a gestão da aprendizagem em sala de aula, (ii) a sensibilidade ao aluno, traduzida na forma como o professor ouve e responde às estratégias dos alunos e como encaminha o discurso que promove a atividade do aluno e (iii) o desafio matemático (demanda cognitiva) apresentado e o consequente grau de estrutura conferido ao ensino. Entretanto, todos eles trazem dois elementos-chave: por um lado, a seleção ou elaboração de tarefas para a sala de aula e a sua apresentação e condução e, por outro lado, a comunicação promovida na sala de aula. Isso vai ao encontro de um ponto de vista defendido por Ponte e Santos (1998), nomeadamente o de que "as tarefas propostas e o discurso produzido são elementos decisivos na prática letiva" (p. 7). Sobre essa matéria, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2017) traz uma referência explícita a estes dois domínios tendo em vista a promoção de "uma aprendizagem profunda em Matemática" (p. 9): "Propor tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas" e "favorecer um discurso matemático significativo" (p. 10). Devido ao caráter estruturante desses dois domínios no estudo das práticas letivas, discuto de uma forma mais pormenorizada cada um deles nas duas subsecções a seguir.

3.3.1 Tarefas como elemento estruturante da prática letiva

Existe um crescente reconhecimento dentro da comunidade investigativa do papel estruturante desempenhado pelas tarefas na prática letiva dos professores de Matemática (Boston & Smith, 2011; NCTM, 2017). Até bem pouco tempo atrás, um tipo específico de tarefa, o exercício, exercia um papel quase hegemônico (Ponte, 2005). Porém, mais recentemente, outros tipos de tarefas começaram igualmente a merecer atenção, dentre os quais "os problemas, os projetos, as explorações e investigações" (Ponte & Serrazina, 2004, p. 52)

> Para se certificarem que todos os alunos vão ter oportunidade de se envolverem em pensamento de nível elevado, os professores devem regularmente selecionar e propor tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas. Estas tarefas encorajam o raciocínio e viabilizam o acesso à matemática por meio de múltiplas abordagens, entre as quais o uso de diferentes representações e ferramentas e promovem a resolução de problemas através de estratégias variadas (NCTM, 2017, p. 17).

Stein e Smith (1998) desenvolveram uma taxonomia para as tarefas matemáticas tendo por base o tipo e o nível de pensamento necessários para a sua solução. Nesta perspectiva, as tarefas matemáticas são vistas como exigindo dos alunos níveis de cognição diferentes, desde exigência reduzida (memorização e procedimentos sem conexões) a exigência alta (procedimentos com conexões e fazer matemática). Outro autor que trouxe um contributo para a conceptualização das tarefas e a sua importância no ensino de Matemática é Ponte (2005), que alertava que reduzir o ensino da Matemática à resolução de exercícios comporta grandes riscos de empobrecimento nos desafios propostos e de desmotivação dos alunos. O autor concebeu um quadro organizador dos diferentes tipos de tarefas, destacando duas dimensões fundamentais: o grau de desafio matemático, relacionado com a percepção da dificuldade de uma questão, e o grau de estrutura, que varia entre os polos "aberto" e "fechado". Skovsmose (2000), por sua vez, defende que as tarefas podem remeter para três referências: (i) à Matemática, (ii) à vida real e (iii) à semi-realidade. Por semi-realidade o autor designa as situações que embora pareçam reais, na verdade são criadas com o objetivo exclusivo de servirem como situações de aprendizagem. Na sua perspectiva, o desenvolvimento da autonomia intelectual dos alunos requer que estes estejam envolvidos e que realizem a Matemática investigativa, implicando em um significativo desafio para a prática letiva do professor:

> Qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para actuar no novo ambiente. A tarefa é tornar possível que os alunos e o professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma actividade produtiva e não uma experiência ameaçadora (Skovsmose, 2000, p. 86).

Swan (2017), por seu turno, considera importante a conceção de tarefas para atingir às amplas finalidades do ensino da Matemática, nomeadamente: *desenvolver o conhecimento factual e a fluência processual; desenvolvimento da compreensão conceptual; competência estratégica e competência crítica*. Para o autor, a conceção de uma aula envolve a sequenciação de tarefas matemáticas de forma a cativar tanto os alunos, como chamar a atenção para determinados conceitos ou estratégias. Cada aula (precedida de uma avaliação diagnóstica curta, em que os alunos resolvem um problema individualmente) é concebida pelo autor com uma sequência de seis etapas: (i) *Introdução*, (ii) *Trabalho em grupo: comparação das estratégias de abordagem*, (iii) *Discussão em grupos: comparar as estratégias de abordagens*, (iv) *Trabalho em grupo: criticar "exemplos do trabalho dos alunos"*, (v) *Trabalho de grupo: aperfeiçoamento de soluções*, e (vi) *Discussão a nível de toda a turma: uma revisão da aprendizagem*. O autor sublinha que não se deve pensar na tarefa como um amontoado de palavras escritas em um papel ou na lousa:

> Uma tarefa significa mais do que a impressão de um problema numa ficha de trabalho ou manual, incluindo a forma como é mediada e transformada pelo professor na sala de aula, a sua apresentação e subsequente provisão de indicações, pistas e outras questões. (p. 67)

Assim, uma tarefa concebida como de alto nível de exigência cognitivo não é garantidora da promoção de um aprendizado significativo. É no processo de discussão da sala de aula que suas potencialidades podem ser verificadas ou não, de modo que mesmo uma tarefa tendo um nível cognitivo elevado no início, pode, a partir das orientações do professor, ter a sua natureza e o seu nível cognitivo alterados, podendo vir a comprometer os possíveis benefícios em termos de aprendizagem.

Stein e Smith (1998), tendo em vista que as potencialidades de uma tarefa proposta em sala de aula estão diretamente ligadas ao modo como são colocadas pelo professor, à forma como é feita a organização do trabalho dos alunos e ao ambiente de aprendizagem criado, propõem um quadro relativo à realização das tarefas matemáticas em sala de aula e identificam três fases: (i) as tarefas como aparecem nos materiais curriculares; (ii) como são apresentadas pelo professor; e (iii) como são realizadas pelos alunos. As autoras argumentam que em diversas ocasiões há uma mudança na natureza da tarefa quando se passa de uma fase para outra e destacam os fatores ligados à manutenção dos níveis cognitivos elevados.

Sullivan, Zevenbergen e Mousley (2005), por seu turno, apresentam um modelo com três aspetos específicos: (i) *tarefas matemáticas e sua sequência*, compreendendo três componentes: uma meta que determina a direção desejada de ensino, atividades a serem realizadas e um processo cognitivo hipotético, ou seja, "uma previsão de como o pensamento e a compreensão dos alunos evoluirão no contexto das atividades de aprendizagem" (p. 4-250), (ii) *enabling prompts*: apoio aos alunos com dificuldade para realizarem subtarefas, e (iii) *extending prompts*: tarefas suplementares para os alunos que concluírem as tarefas planejadas rapidamente. A partir do estudo empírico, usando o modelo com vinte professores (no paradigma da pesquisa-ação), dois aspetos emergiram nos seus resultados: (i) a intensa interatividade com os alunos durante o ensino e (ii) a natureza dinâmica da interação. Embora o modelo apresentado cumpra mais uma função prescritiva do que analítica das práticas letivas, o estudo traz uma discussão sobre as "*normas matemáticas comunitárias*" (*mathematical community norms*), transmitindo a ideia de que todos os alunos podem participar e progredir como integrantes da comunidade de sala de aula, desenvolvendo assim uma base de conhecimento partilhada.

Uma abordagem centrada em tarefas também tem sido utilizada no que respeita o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. Por exemplo, Boston e Smith (2011) descrevem um programa de formação baseado numa "*abordagem centrada na tarefa*" (*task-centric approach*) para o desenvolvimento profissional. As autoras referem que os professores participantes na formação melhoraram a capacidade de selecionar e implementar tarefas instrucionais cognitivamente desafiantes, sendo que alguns mantiveram as melhorias um ano após o término do projeto.

Em síntese, tem-se cada vez mais reconhecido o grau de estrutura desempenhado pelas tarefas na prática profissional do professor de Matemática, tendo os professores um papel fundamental na elaboração, seleção e proposta de tarefas desafiadoras que possam promover o raciocínio e a resolução de problemas. Mais ainda, reconhece-se também que não se deve pensar as tarefas como *"letras mortas"* em manuais escolares ou um amontoado de palavras escritas em um papel ou na lousa. Na verdade, joga um papel fundamental a forma como a tarefa é apresentada, mediada e transformada pelo professor em sua prática letiva de sala de aula, destacando-se o processo de discussão estabelecido, onde as potencialidades originais das tarefas podem ser verificadas ou não.

3.3.2 Comunicação como elemento estruturante da prática letiva

Outro aspeto decisivo da prática profissional do professor de Matemática é a comunicação. Durante muito tempo, a comunicação predominante em sala de aula pode caraterizar-se como unidirecional com o professor expondo o assunto e, se isso fosse realizado de modo claro, acreditava-se que os alunos certamente aprenderiam. O foco estava então na eficiência do ensino. Mas para que exista uma comunicação que seja facilitadora da aprendizagem é necessário um ambiente onde todos se sintam à vontade, onde haja respeito mútuo e também disposição para a troca de ideias através da discussão na sala de aula (NCTM, 2017). Ponte e Serrazina (2004) chamam a atenção para se focar na qualidade do discurso partilhado entre professor e alunos e não somente na qualidade da fala do professor. Os autores também consideram que a problemática da comunicação está diretamente relacionada à questão do poder em sala de aula.

> Torna-se, então, necessária outra abordagem que coloque o acento tónico não na qualidade da fala do professor, mas na qualidade do discurso partilhado de professores e alunos e no modo como os significados matemáticos são interativamente construídos na sala de aula (...) Considera-se importante que os alunos participem no discurso da aula, mas também se considera essencial que desenvolvam a sua competência para comunicar ideias matemáticas, oralmente e por escrito. A problemática da comunicação liga-se diretamente à questão do poder dentro da aula e do ambiente de trabalho e da disciplina na sala de aula. Só pode existir uma comunicação

> propiciadora da aprendizagem se houver um ambiente onde os intervenientes se sintam à vontade, se respeitem mutuamente e se sintam disponíveis para procurar entender as ideias uns dos outros. (p. 58)

Assim, torna-se necessária uma abordagem que dê atenção não unicamente à qualidade da fala do professor, mas também ao discurso partilhado entre este e os alunos e à forma como os significados matemáticos são construídos pela interação em sala de aula. Como afirma Ponte (2005), “a aprendizagem decorre assim, sobretudo, não de ouvir diretamente o professor ou de fazer esta ou aquela atividade prática, mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que se realizou” (p. 15).

Dentro do processo de comunicação na aula de Matemática, as questões referentes ao processo de preparação e orquestração de discussões matemáticas vêm-se mostrando altamente relevantes. Conforme Ponte (2005) refere, o professor é convocado para preparar a discussão, buscando otimizar o uso do trabalho previamente realizado pelos alunos e o tempo disponível em aula. Tal processo de orquestração se mostra bastante complexo, pois se relaciona com questionamentos centrados nos alunos, sendo que um dos aspectos fundamentais são as questões colocadas pelo professor e que podem admitir uma série de respostas legítimas (NCTM, 2017).

Sobre o processo de orquestração de discussões matemáticas, Stein et al. (2008) apresentam um modelo que especifica cinco práticas: (1) *antecipar* as respostas prováveis dos alunos às tarefas cognitivamente exigentes; (2) *monitorar* as respostas dos alunos às tarefas durante a fase de exploração; (3) *selecionar* determinados alunos para apresentar suas respostas durante a discussão; (4) *sequenciar* as respostas dos alunos que serão exibidas; e (5) ajudar a classe a fazer *conexões matemáticas* entre as respostas dos diferentes alunos. As autoras consideram que o uso bem-sucedido das cinco práticas depende inicialmente da proposta de uma tarefa cognitivamente exigente, com múltiplas respostas possíveis e com objetivos bem definidos.

No que tange ainda ao processo de discussão em sala de aula, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) desenvolveram uma estrutura para a análise das discussões. Nela se estabelece uma distinção entre as ações do professor diretamente relacionadas aos temas e processos matemáticos e as ações que estão relacionadas com a gestão da aprendizagem. Centrando sua atenção nas ações relacionadas com os aspectos matemáticos, distinguem quatro tipos fundamentais: (i) *convidar*: objetivando iniciar uma discussão; (ii) *apoiar/guiar*: ajudando os alunos a resolver uma tarefa através de perguntas ou observações que apontam (explicita ou implicitamente) o caminho que podem seguir; (iii) *informar/sugerir*: introduzindo informações, dando sugestões, apresentando argumentos ou validando as respostas dos alunos; e (iv) *desafiar*: buscando que os alunos produzam novas representações, interpretem uma declaração, estabeleçam conexões ou formulem um raciocínio ou uma avaliação.

Doerr (2006), por seu turno, apresenta um estudo empírico sobre a prática letiva do professor de Matemática focando a forma como o professor ouve e responde às estratégias dos alunos. Para a autora, a ligação entre o exame do trabalho dos alunos e as ações do professor em sala de aula é muitas vezes ignorada, particularmente no ensino secundário. A análise dos dados, situada em um nível micro, revelou seis características críticas da prática do professor: (1) *definir expectativas para o pensamento do aluno*, (2) *focar a tarefa*, (3) *ouvir as maneiras de pensar dos alunos*, (4) *pedir justificação aos alunos*, (5) *compartilhar e comparar soluções*, e (6) *reconhecer conexões matemáticas*.

Dando especial atenção às ações do professor nas discussões realizadas em sala de aula, temos também o estudo empírico de Ponte e Quaresma (2016), que reconhecem aspectos fundamentais de processos matemáticos como: *representar* (criar novas representações ou transformar representações dadas), *interpretar* (usando palavras diferentes ou estabelecer conexões com outros conceitos), *raciocinar* (fazer inferências, usar as informações fornecidas para chegar a novas conclusões) e *avaliar* (fazendo julgamentos sobre os aspectos relacionados à solução da tarefa). Os autores referem que este estudo mostra como os elementos desafiadores se relacionam com as características das tarefas e podem ser potenciados durante a comunicação, tendo papel relevante as orientações do professor. Os autores dão especial atenção a três dimensões para caracterizar a robustez de um ambiente de aprendizagem: (i) *demanda cognitiva* (ou nível de desafio), (ii) *foco matemático* e (iii) *discurso que promove a atividade do estudante*.

Em resumo, assim como já destacado em relação às tarefas, ao processo de comunicação também é conferido um papel estruturante na prática profissional do professor de Matemática. Reconhece-se a necessidade de uma abordagem comunicativa não centrada unicamente na qualidade da fala do professor, mas no discurso partilhado entre este e os alunos e também na forma como os significados matemáticos são construídos em sala de aula, destacando-se o papel da reflexão realizada pelo aluno sobre a tarefa que realizou. Os estudos empíricos apontam para a ideia de que todos os alunos têm condições de participar e obter progressos como integrantes de uma comunidade de sala de aula baseada no conhecimento partilhado. Além disso, é conferida relevância ao processo de preparação e orquestração de discussões matemáticas com o objetivo de otimizar o uso do trabalho realizado previamente pelos alunos e também o tempo e recursos disponíveis em sala de aula.

Capítulo 4

O ensino do Cálculo Diferencial

Nesta secção, debruço-me sobre o ensino do Cálculo Diferencial. A secção está organizada em três partes. Na primeira, faço uma discussão sobre a presença do Cálculo Diferencial no currículo do ensino secundário de alguns países, com especial atenção para os casos brasileiro e português. Em seguida, discuto o movimento de reforma do ensino do Cálculo ocorrido em meados dos anos oitenta nos Estados Unidos e trato também da relação entre o Cálculo no ensino secundário e no ensino superior, com especial destaque para o posicionamento em relação à temática de duas importantes instituições norte americanas: o NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática) e a MAA (Associação Matemática da América). Por fim, discuto alguns estudos empíricos sobre o ensino-aprendizagem do Cálculo que apresentam uma estreita relação com o objetivo da presente pesquisa, a saber, o estudo das prática profissionais e das conceções do professor de Matemática que leciona tópicos de Cálculo Diferencial na escola secundária de Portugal.

4.1 O Cálculo Diferencial no currículo do ensino secundário

A presença de tópicos de Cálculo Diferencial no currículo do ensino secundário é muito distinta conforme o país. No Brasil, por exemplo, esses tópicos não estão presentes no currículo do ensino secundário desde o ano de 1961 (Carvalho, 1996; Spina, 2002). Neste país, como refere Carvalho (1996), uma introdução ao Cálculo já esteve presente no currículo do ensino secundário em duas ocasiões: no início da República (Reforma Benjamin Constant) e uma segunda vez, em 1942, no governo de Getúlio Vargas

(Reforma Capanema). A retirada definitiva do Cálculo do currículo do ensino secundário brasileiro, segundo Ávila (1991), deu-se no contexto do Movimento da Matemática Moderna, uma vez que "com essa excessiva preocupação com o rigor, o ensino do Cálculo exigiria agora um estudo detalhado dos números reais, coisa que tomaria no mínimo todo um semestre, por isso mesmo totalmente inviável" (p. 1). Por outro lado, considerando que tais tópicos jamais voltaram ao currículo do ensino secundário brasileiro, o mesmo autor afirma que "descartar o Cálculo no ensino (secundário) é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente relevante da Matemática para a formação num contexto de ensino moderno e atual" (p. 2).

Já em outros países, porém, o ensino do Cálculo merece uma posição de destaque no currículo do ensino secundário. Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces e Törner (2016), por exemplo, referem que o Cálculo integra o currículo do ensino secundário de países como França, Alemanha, Estados Unidos, Uruguai, Singapura, Coreia do Sul e Hong Kong. Considerando o caso da França, Artigue (1995) apresenta uma perspectiva histórica sobre o ensino dos princípios de Cálculo no ensino secundário daquele país. A autora refere a reforma de 1902 e a introdução do Cálculo no liceu como um aspeto fundamental: "a introdução do cálculo no primeiro grau do liceu nas secções científicas e, no último ano, em todas as secções foi um elemento chave desta renovação" (p. 100). Segundo a autora, o contexto reformista da época foi fortemente influenciado pela filosofia positivista que introduziu uma conceção experimental da Matemática vinculando-a de forma estreita com o mundo real e às outras ciências. Ademais, "esses matemáticos não enxergavam as dificuldades particulares da introdução do Cálculo que essencialmente se mantinha dentro de um quadro "algébrico", tanto nas práticas como nas aplicações" (p. 102). Artigue (1995) menciona ainda o impacto no ensino do Cálculo realizado através da renovação dos anos 60, do movimento reformista da Matemática Moderna e da contrarreforma dos anos 80. A autora cita um conjunto de críticas realizadas sobre o ensino de Cálculo nos anos 70, tais como a introdução de noções básicas de forma descontextualizada, a construção linear de conceitos, a linguagem muito formal e o ensino focado no discurso do professor:

> Essas críticas também atestam a busca por um equilíbrio mais satisfatório entre as demandas impostas pelo conhecimento matemático e as demandas impostas pelo funcionamento cognitivo do aluno. Graças à pesquisa sobre a aprendizagem, a realidade do funcionamento cognitivo do aluno é conhecida um pouco melhor, particularmente no domínio da aprendizagem da Matemática. Não é possível

> imaginar essa realidade tão facilmente ou reconstruí-la um pouco à vontade e em função de convicções pessoais.
>
> As propostas estabelecidas na época foram as seguintes:
>
> - Modificar as relações entre a teoria e as aplicações, organizando o ensino em torno de alguns problemas importantes;
> - Equilibrar melhor o quantitativo e o qualitativo;
> - Apoiar-se em objetos simples que mais tarde servirão como referência;
> - Teorizar apenas o que é necessário, com base nos níveis de formalização acessíveis aos alunos;
> - Promover uma abordagem construtivista para a aprendizagem. (p. 105)

Considerando o cenário português, Santos (2010) relata, a exemplo da França, que os tópicos de Cálculo foram uma constante no currículo do ensino secundário ao longo do tempo. A autora, em seu estudo sobre o conceito de limite nos manuais escolares e exames portugueses, menciona a reforma de 1905 como a que introduziu o conceito de derivada e a reforma de 1918 como a primeira que deu autonomia ao Cálculo em relação à Álgebra:

> A primeira reforma (DG n.º 250 de 4 Novembro 1905) que data, precisamente de 1905, apesar de introduzir o conceito de derivada, não contempla o estudo de limite de uma função, num ponto. Só a reforma seguinte, de Alfredo Magalhães, cujos programas curriculares foram publicados no decreto n.º 5002 do DG n.º 257 de Novembro de 1918, apresenta, pela primeira vez, um capítulo intitulado "Elementos de Cálculo Infinitesimal", onde o conceito de limite antecede a noção de derivada. Esta reforma, relativamente ao Cálculo Infinitesimal, é bastante importante, uma vez que é a primeira vez que esta área começa, efetivamente, a ganhar autonomia, relativamente à Álgebra. (p. 30)

Aires e Vásquez (2005), por seu turno, investigaram a presença do conceito de derivada no ensino secundário português ao longo de todo o século XX, um período marcado por significativas mudanças de regime político, com repercussões no domínio educativo. Os autores, em seu estudo, dividiram o século XX em quatro períodos: i) Introdução do conceito de derivada (1905-1963); (ii) Introdução da Matemática Moderna (1963-1974); (iii) A Lei de Bases do Sistema Educativo (1963-1974) e (iv) Da Lei de Bases ao final do século XX. Os autores referem que somente uma reforma retirou o estudo da derivada do currículo, a reforma de Carneiro Pacheco, datada de 14 de outubro de 1936: "com a desvalorização da instrução, assistiu-se uma considerável diminuição dos conteúdos programáticos, verificando-se a supressão, nos programas de Matemática, do ensino da noção de derivada" (p. 110).

Entretanto, conforme referem Aires e Vásquez (2005), a decisão de retirar o estudo da derivada do currículo português durou muito pouco tempo, ocorrendo a reintrodução desse conceito na reforma seguinte, de Pires de Lima, datada de 17 de setembro de 1947: "sublinhamos como meritório a decisão de reintroduzir a Análise Infinitesimal, em particular, o conceito de derivada, excluído nos programas de 1936" (p. 110).

> O estudo da noção de derivada, seguindo o método histórico, chama a atenção para o fato de que as noções matemáticas não se desenvolvem de maneira autárquica, mas antes conectadas entre si. Ao mesmo tempo faz-nos compreender que a evolução do conceito em estudo não foi linear, antes pelo contrário, verificamos progressos e retrocessos, indecisões, dúvidas, hesitações. Desde a introdução da noção de derivada no plano de estudo do ensino liceal, no ano de 1905 até o final do século XX, com exceção da reforma de Carneiro Pacheco, em 1936, em que aquela foi suprimida, assistimos a uma afirmação e aumento do espaço dedicado ao ensino das derivadas. (Aires & Vásquez, 2005, p. 120)

É importante observar que, diferentemente do caso brasileiro, em Portugal não houve a supressão de tópicos de Cálculo Diferencial dos programas por influência do Movimento da Matemática Moderna nos anos 1960 e 1970. Assim, o ensino de tópicos de Cálculo, exceto por um período de onze anos, se manteve presente ao longo do século passado no currículo do ensino secundário de Portugal (Aires & Vásquez, 2005). O atual programa de Matemática A do ensino secundário português, para os cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologia e de Ciências Socioeconômicas, foi homologado em 2013 e entrou em vigor no ano letivo 2015-2016 para o 10.º ano, prosseguindo nos anos seguintes para os 11.º e 12.º anos de escolaridade. Os tópicos de Cálculo estão previstos para os 11.º e 12.º anos de escolaridade conforme a tabela 4.1 a seguir:

Tabela 4.1 – Tópicos de Cálculo para o programa de Matemática A

Ano	Domínio	Conteúdos
11º	Programação Linear (PL) e Funções Reais de Variável Real (FRVR).	Limites e sucessões; limites segundo Heine de funções reais de variável real; continuidade de funções; assíntota ao gráfico de uma função e diferenciabilidade e cinemática do ponto.
12º	Funções Reais de Variável Real (FRVR), Trigonometria (TRI) e Primitivas e Cálculo Integral (PCI).	Limites e continuidade; diferenciabilidade; derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão; diferenciação de funções trigonométricas;

		aplicações aos osciladores harmónicos; limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas; primitivas e Cálculo Integral.

Em síntese, a presença de tópicos de Cálculo no currículo do ensino secundário é bastante distinta dependendo do país. O currículo do ensino secundário do Brasil, por exemplo, não prevê o ensino de tópicos de Cálculo desde o ano de 1961. Já em outros países, porém, a presença de tal temática é uma constante e ocupa inclusive uma posição de destaque como é o caso da França e Portugal. No caso particular de Portugal, os tópicos de Cálculo estão previstos no programa de Matemática A para os 11.º e 12.º anos no ensino secundário nos seguintes domínios: Programação Linear (PL), Funções Reais de Variável Real (FRVR), Trigonometria (TRI) e Primitivas e Cálculo Integral (PCI).

4.2 Relação entre o Cálculo do ensino secundário e do ensino superior

Antes de abordar a relação entre o Cálculo do ensino secundário e do ensino superior, considero importante discutir algo incontornável dentro do ensino do Cálculo: o movimento de reforma que teve lugar na metade dos anos 1980 nos Estados Unidos. Embora esse movimento tenha sido espoletado nos Estados Unidos, acabou por exercer uma influência significativa em muitos outros países e suas ideias centrais permaneceram ao longo do tempo (Hughes-Hallet, 2006; Schoenfeld, 1995).

Tall, Smith e Piez (2008) referem que durante a década de oitenta havia uma preocupação crescente, no seio da comunidade matemática americana, com a qualidade da aprendizagem dos alunos, o que acabou por redundar em um "vigoroso debate" e espoletar um movimento de reforma do Cálculo. Schoenfeld (1995), por seu turno, vinca o dia 2 de janeiro de 1986 como sendo a data de nascimento da reforma do Cálculo, justamente o dia em que teve início a conferência de Cálculo de Tulane, também chamada carinhosamente por este autor de "*lean and lively*".

> Por um lado, havia uma necessidade claramente percebida. Ao longo do final dos anos de 1970 e início dos anos de 1980, havia um descontentamento crescente com os resultados do ensino de Cálculo – um sentimento geral de que, por qualquer motivo, os alunos não estavam "entendendo" (Schoenfeld, 1995, p. 1)

Para Schoenfeld (1995), “esse descontentamento abriu espaço para a mudança” (p. 1). A partir dos debates realizados no âmbito reformista, quatro princípios basilares foram sugeridos tendo em vista a abordagem do Cálculo Diferencial e Integral. São eles: (i) incentivo ao uso da tecnologia; (ii) a chamada “Regra de três”, ou seja, que os aspetos gráfico, numérico e analítico deveriam, idealmente, ser enfatizados de modo semelhante no ensino do Cálculo – “Além de encorajar a compreensão, esta abordagem dá aos alunos, com fracas habilidades de manipulação, a chance de entender os conceitos por trás do Cálculo” (p. 4); (iii) ênfase na resolução de problemas, modelação e na compreensão conceitual – “o desenvolvimento da compreensão conceitual, e não da técnica algébrica, deve ser a força motriz” (p. 3). A compreensão conceitual aparece muito ligada à noção de múltiplas representações:

> A noção de múltiplas representações - que os conceitos matemáticos podem ser representados de várias maneiras, e que compreender os conceitos significa ter acesso a várias formas de representação, ser capaz de selecionar quais são as mais adequadas para determinados usos e usá-las de acordo – é central para muitos dos cursos. Em suma, “compreender os conceitos” adquiriu um significado mais rico do que muitos dos participantes da conferência de Tulane poderiam suspeitar. (Schoenfeld, 1995, p. 4)

Passados quase dez anos da Conferência de Tulane, Schoenfeld (1995) chama a atenção para outras três questões que julga importantes: (i) a primeira relaciona-se com *o envolvimento ativo dos alunos* e o seu *engajamento* nas aulas de Cálculo, cabendo ao professor exercer um olhar mais atento no trabalho do aluno e assim “repensar a eficácia de suas palestras” (p. 3); (ii) uma segunda questão tem a ver com uma expansão da chamada “Regra de Três” no sentido de se caminhar para uma “Regra de Quatro” com *o aspeto verbal* a ser incluído junto aos domínios gráfico, numérico e analítico; e (iii) uma terceira questão tem a ver com *a aprendizagem cooperativa*, uma vez que esta, segundo o autor, tem sido recorrente através dos projetos de reforma: “muitos dos projetos concluíram que pode (às vezes) ser mais lucrativo para os alunos envolver-se com a Matemática em grupos, em vez de individualmente” (p. 5).

Para Hughes-Hallet (2006) o impacto da reforma do ensino do Cálculo foi “substancial” e, após duas décadas da conferência de Tulane, a autora assevera que um benefício colateral dos esforços reformistas foi justamente o aumento da cooperação da Matemática com outros campos do conhecimento, como a Engenharia, a Biologia, a Física e a Economia. Na visão da autora, o maior impacto da reforma do Cálculo foi a criação de uma comunidade investigativa que busca inovar e refletir sobre o ensino e que isso é realizado de modo colaborativo e muito além das fronteiras institucionais.

Cumpre destacar que esses esforços de reforma ocorreram, sobretudo, tendo em atenção o Cálculo ensinado no ensino superior, mas que acabou por influenciar também o ensino do Cálculo ensinado no ensino secundário. Dadas as especificidades e incidência da presente investigação, darei atenção à relação entre o Cálculo ensinado no ensino secundário e o Cálculo ensinado no ensino superior. Considerando esta relação, duas instituições americanas, o NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática) e da MAA (Associação Matemática da América), questionam: como as escolas secundárias e faculdades devem prever o curso de Cálculo, tendo em atenção que o curso se situa na transição da Matemática secundária para a Matemática pós-secundária para a maioria dos estudantes que se dedicam às carreiras matematicamente intensivas? Na tentativa de trazer um contributo para a questão, as duas instituições emitem uma declaração conjunta com recomendações, que explicitarei de forma mais pormenorizada a seguir. Antes, porém, é importante perceber o que ocorreu, de modo mais específico no contexto americano, para que as duas instituições decidissem emitir tal declaração.

Bressoud, Camp e Teague (2012) referem que o Conselho de Assessores para Ciência e Tecnologia da Presidência dos Estados Unidos publicou em seu relatório de fevereiro de 2012, um pedido de um milhão de diplomados adicionais de Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM) ao longo da próxima década e ademais, segundo os mesmos autores, o Departamento de Comércio projetou um aumento de 17% na necessidade de graduados STEM nesse período. Segundo Bressoud et al. (2012), devido a esse cenário conjuntural, ocorreu uma verdadeira "corrida" ao Cálculo no ensino secundário e "o resultado é que, mesmo que os alunos sejam capazes de passar no Cálculo do ensino secundário, eles estabeleceram uma base inadequada para construir o conhecimento matemático necessário para uma carreira STEM" (p. 2).

> Muitos alunos estão sendo acelerados, fazendo mudanças curtas em sua preparação e conhecimento de álgebra, geometria, trigonometria e outros tópicos de pré-cálculo. Muitos alunos experimentam um curso de cálculo de escola secundária que aborda as técnicas e procedimentos que lhes permitirão responder com êxito aos problemas-padrão, mas nunca são desafiados a encontrar e compreender os fundamentos conceituais do cálculo. (p. 4)

Esse cenário de um aumento na busca por carreiras STEM, descrito por Bressoud et al. (2012), parece não ser um fenômeno circunscrito aos Estados Unidos da América. Em Portugal, por exemplo, o ingresso para o ensino superior no ano letivo de 2018/2019 teve as cinco maiores médias nacionais justamente para carreiras STEM, nomeadamente (nessa ordem e com a respetiva nota do último colocado): Engenharia Civil (189,4), Engenharia Física e Tecnológica (189), Engenharia Aeroespacial (188,5), Engenharia e Gestão Industrial (186,3) e Matemática Aplicada e Computação (183,5)[3], tendo inclusive o jornal *Público*, em sua edição impressa de 9 de setembro de 2018, estampado a sua capa com a seguinte manchete: *"Medicina já não está no top 5 das médias mais altas – Engenharias passam à frente e Portugal segue uma tendência internacional no ensino superior"*.

Ferrini-Mundy e Gaudard (1992), por seu turno, assinalaram a importância de se entender a relação entre a experiência de Cálculo da escola secundária e a experiência universitária e realizaram um estudo com o objetivo de "determinar se o cálculo da escola secundária realmente melhora o desempenho geral no Cálculo da faculdade, se as habilidades e o desempenho conceitual são afetados e se o grau de experiência de Cálculo no ensino secundário se relaciona com o desempenho no Cálculo universitário" (p. 58). Os autores concluem que os alunos que tiveram uma experiência escolar secundária mais substancial tenderam a receber notas mais altas do que os alunos que tiveram uma experiência de Cálculo escolar menos substancial e afirmam que a breve introdução ao Cálculo no ensino secundário pode não ser um bom investimento de tempo de ensino, trazendo evidências que sugerem que esse tipo de introdução enfatiza frequentemente tão somente os aspetos procedimentais:

> Dado que nossas descobertas não revelam vantagens substanciais para uma breve introdução ao cálculo, pode ser que outros tópicos sejam mais adequados para inclusão, incluindo uma base sólida na compreensão das funções e os fundamentos conceituais do cálculo. (p. 68)

Já para Sadler e Sonnert (2018), essa questão da presença do Cálculo no ensino secundário, além de pressões externas de organismos governamentais, como já mencionado, parece também estar relacionada com duas teorias conflituantes: a *Teoria*

[3] Fonte: Direção Geral do Ensino Superior – disponível em "http://www.dges.gov.pt/coloc/2018" (acesso em 11/09/2018)

da Aprendizagem Hierárquica de Robert Gagné e a *Teoria da Aprendizagem em Espiral* de Jerome Bruner. Segundo os autores, os posicionamentos dos professores são traduzidos em alguns discursos:

> Pare de perder tempo com Cálculo no ensino secundário! Concentre-se, em vez disso, em certificar-se de que seus alunos de graduação tenham uma base sólida em Álgebra e uma boa compreensão dos logaritmos, exponenciais e funções trigonométricas. Correr para ensinar Cálculo a alunos que não têm certeza sobre as regras para adicionar frações não faz bem a ninguém - Professor de cálculo da faculdade.
>
> Eu acho que você descobrirá que 'ter feito Cálculo anteriormente à universidade' (independentemente do grau de ensino secundário recebido) será um forte preditor de um bom desempenho do Cálculo na faculdade do que qualquer atividade, intervenção ou reforma" - professor de cálculo do ensino secundário (p. 292)

Enquanto a Teoria da Aprendizagem Hierárquica de Gagné afirma que a aprendizagem é maximizada através da identificação e do domínio de habilidades e conceitos pré-requisitos, a Teoria em Espiral de Bruner minimiza este domínio, afirmando que uma abordagem cíclica do currículo otimiza a aprendizagem (Sadler & Sonnert, 2018). E é justamente considerando esta duas teorias e o abismo entre os pontos de vista de professores em relação à preparação para o Cálculo da faculdade que Sadler e Sonnert (2018) conduzem o seu estudo. Tal estudo, embora não sendo experimental, toma uma amostra muito significativa (6207 estudantes de 216 professores em 133 faculdades e universidades americanas) e procura responder a seguinte questão: "qual a melhor preparação para o Cálculo da faculdade? (a) um alto domínio da Matemática considerada preparatória para o Cálculo (Álgebra, Geometria, Pré-cálculo) ou (b) o ensino do próprio Cálculo no ensino secundário?" (p. 292).

Sadler e Sonnert (2018) descobriram que as duas variáveis de interesse, o domínio da Matemática preparatória do Cálculo e o próprio Cálculo do ensino secundário, são ambos poderosos preditores de sucesso no Cálculo da faculdade. Ademais, o Cálculo do ensino secundário não parece prejudicar os alunos, mas, ao contrário, proporciona-lhes uma oportunidade de fortalecer o conhecimento de Cálculo e as habilidades prévias. No que tange às duas teorias mencionadas, os autores afirmam:

> Com relação às perspectivas teóricas discutidas anteriormente, encontramos pouco apoio à teoria de aprendizagem hierárquica de Gagné (1968) (...) Em vez disso, este estudo fornece suporte para a abordagem espiral de Bruner (1960,

> 1971) à aprendizagem, na medida em que ser exposto ao cálculo no ensino secundário claramente vale a pena quando os alunos se matriculam no cálculo da faculdade.” (p. 320)

Após essas considerações, retomo agora o posicionamento do NCTM e da MAA sobre o tema em discussão. As duas sociedades realizaram uma primeira recomendação no ano de 1986 (recordemos, que este foi o ano da Conferência de Tulane) e a última em março de 2012. A posição conjunta expressa em nota em 2012[4] apresenta a seguinte redação:

> Embora o Cálculo possa desempenhar um papel importante na escola secundária, o objetivo final do currículo de Matemática do ensino básico e secundário não deve ser levar os alunos para um curso de Cálculo até ao 12.º ano, mas estabelecer a base matemática que capacitará os alunos a prosseguir em qualquer curso de estudo que lhes interessa quando eles chegam à faculdade. O currículo da faculdade deve oferecer aos alunos uma experiência nova e envolvente, ampliando sua compreensão do mundo da Matemática e, ao mesmo tempo, fortalecendo seu domínio das ferramentas de que necessitarão se optarem por uma disciplina matematicamente intensiva.

Na mesma oportunidade, as duas sociedades estabelecem ainda três recomendações sobre o ensino de Cálculo no ensino secundário e na faculdade, sendo que as duas recomendações iniciais já constavam na posição das duas sociedades em 1986. As recomendações são as seguintes:

Recomendação 1: Os alunos que se matriculam em um curso de Cálculo na escola secundária devem ter demonstrado domínio da Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. É possível depreender a partir dessa recomendação, segundo a visão das duas sociedades, que o estudante que possui habilidade em pensamento algébrico e geométrico está muito melhor preparado para a Matemática de nível universitário do que aquele que memorizou técnicas de diferenciação e integração.

Recomendação 2: O curso de Cálculo oferecido no ensino secundário deve ter a substância de um curso de nível universitário convencional. Esta recomendação parece refletir a preocupação com a qualidade do curso de Cálculo ministrado no ensino secundário e reflete também a necessidade de se ter “diretrizes claras para o que significa

[4] A nota conjunta, assim como as três recomendações podem ser acessadas em: https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Position-Statements/Calculus/ (acesso em 24/08/2018)

‘Cálculo no ensino secundário’ e acesso a dados sobre os quais os cursos de Cálculo estão ou não estão preparando os alunos para a Matemática de nível universitário” (Bressoud et al., 2012, p. 6).

Recomendação 3: O currículo da faculdade deve reconhecer a presença do Cálculo na escola secundária, moldar o currículo de Cálculo da faculdade para que seja apropriado para aqueles que experimentaram o Cálculo introdutório no ensino secundário e oferecer alternativas ao Cálculo. Importante destacar que essa recomendação não havia em 1986 e parece dar importância para o fato de o ensino do Cálculo da faculdade estar mais vinculado ao ensino realizado no secundário e deixa aberta a possibilidade de se ter uma oferta formativa inicial alternativa ao Cálculo. Sobre esta recomendação, Bressoud et al. (2012) afirmam que um de seus objetivos é:

> Deixar claro que essa não é a aula de Cálculo do ensino secundário, seja por meio de uma abordagem de modelagem que se concentre em equações diferenciais ou vá ao outro extremo e torne isso um curso introdutório de análise. Pode-se também iniciar os alunos com um curso que não é Cálculo, como Matemática Discreta ou Álgebra Linear. (p. 7)

Em resumo, conclui-se que existe uma pressão nos estados Unidos por um aumento no número de profissionais formados em carreiras matematicamente intensivas, as chamadas profissões STEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática). Esse fenômeno não parece ser restrito ao cenário americano, sendo que em Portugal o ingresso para o ano letivo de 2018/2019 registou as maiores médias justamente para profissões STEM. Com este cenário conjuntural, existe uma preocupação quanto à base adequada em relação ao Cálculo do ensino secundário necessária para o prosseguimento nestas carreiras, o que levou o NCTM e a MAA a divulgarem nota conjunta sobre o ensino do Cálculo. Estudos já realizados apontam que tanto o domínio de Matemática preparatória para o Cálculo quanto o próprio Cálculo do ensino secundário são ambos poderosos preditores do sucesso no Cálculo da faculdade.

Feitas estas considerações, explicito a seguir alguns estudos empíricos realizados sobre o ensino do Cálculo que apresentam uma estreita relação com a prática profissional e com as conceções do professor de Matemática.

4.3 Conceções dos professores e prática profissional no ensino do Cálculo

Dada a natureza e o objetivo da presente investigação, torna-se importante perceber como estudos empíricos contemporâneos tratam da questão das conceções e da prática profissional do professor de Cálculo. Assim, começo com o trabalho empírico de Eichler e Erens (2014) sobre os sistemas de crenças para o ensino de Cálculo que envolveu 29 professores de Matemática do ensino secundário da Alemanha e apresentou duas questões de estudo: (i) Qual é a estrutura das crenças dos professores secundários em relação ao ensino do Cálculo? e (ii) Como essa estrutura se comporta tendo em vista as várias tendências de ensino do Cálculo? Os autores, considerando o ensino do Cálculo, referem inicialmente a escassez de pesquisas sobre as crenças do professor e o seu papel como ponte entre o conhecimento e o ensino:

> A pesquisa com foco no conhecimento e nas crenças dos professores de cálculo é escassa (...) há muito poucos trabalhos que enfocam as crenças dos professores em relação ao ensino do cálculo (...) Embora a conexão entre as crenças dos professores e a prática em sala de aula dos professores pareça ser ambígua, as crenças dos professores podem ser conceituadas como uma ponte entre o conhecimento e o ensino. (p. 647)

Eichler e Erens (2014) identificam inicialmente quatro tendências sobre o ensino do Cálculo: (i) <u>*Tendência Genérica*</u>: ao contrário de um currículo que segue uma abordagem dedutiva de cima para baixo, como preconizado pelo movimento da Matemática Moderna, o objetivo central dessa tendência é desenvolver as principais ideias do Cálculo com uma abordagem de baixo para cima por meio de exemplos que têm por objetivo incorporar os conceitos mais abstratos; (ii) <u>*Tendência Tecnológica*</u>: encontra-se estreitamente ligada à tendência genérica, já que a tecnologia é um meio para alcançar um desenvolvimento genérico de conceitos de Cálculo e facilitar a aprendizagem conceitual dos alunos; (iii) <u>*Tendência de Modelagem*</u>: para esta tendência, o uso de aplicações realistas (que potencialmente incorporam conceitos de Cálculo como ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos abstratos) é crucial. Outro objetivo dessa tendência é que os alunos aprendam cálculo de uma maneira que possam estabelecer muitas relações; e (iv) <u>*Tendência de Matemática Moderna Moderada*</u>: essa tendência não é tão aparente quanto as outras três. No entanto, apresenta ênfase na exatidão da definição de conceitos e um rigor formal moderado.

Para Eichler e Erens (2014) "os professores de Cálculo podem selecionar os principais objetivos, incluindo qualquer uma dessas tendências em seu ensino individual, e, assim, mostrar algum grau de concordância com uma ou mais das tendências" (p. 649). Por essa razão, na visão dos autores, as tendências facilitam ainda mais a descrição da realidade do ensino de Cálculo na escola. Tal descrição é baseada fortemente nas crenças dos professores de Cálculo, que por sua vez podem apresentar-se de duas formas: crenças centrais, isto é, crenças fortemente mantidas, e crenças periféricas. Por fim, os autores defendem uma maior compreensão sobre as crenças do professor de Matemática:

> Os professores decidem o quê, o como e o porquê: eles selecionam o conteúdo do ensino de acordo com os currículos escritos, eles decidem seu modo de ensinar – potencialmente influenciado por propostas da Educação Matemática – de acordo com seus objetivos subjetivos de ensino. Assim, tanto a investigação quanto qualquer tentativa de reformar o *status quo* do ensino da Matemática nas escolas depende de uma compreensão do conhecimento e das crenças dos professores. (p. 656)

Com o objetivo de estudar as práticas de ensino da análise real no primeiro ano de Matemática nas universidades tunisianas, Smida e Ghedamsi (2006) realizaram um estudo envolvendo questionário com professores de quatro universidades e identificaram dois projetos de ensino distintos: (i) projeto axiomático em que estruturas e formalismos são os discursos que justificam e geram conhecimentos e habilidades esperadas, e (ii) projetos que promovem uma melhor consideração dos requisitos cognitivos na aprendizagem. As autoras postulam que existe uma adequação entre a lógica do processo cognitivo e a prática da atividade matemática, delineada em três níveis: *nível mecânico* – cujo objetivo é desenvolver mecanismos (técnicas, procedimentos, algoritmos, etc.); *nível estratégico* – interessado em desenvolver estratégias de resolução (desenvolvendo vários tipos de raciocínio, valorizando e controlando um resultado, conjecturando, etc.) e o *nível de especialista* – que tem por objetivo "explorar a realidade matemática, estudando as propriedades dos objetos que as compõem e as relações que as conectam. Essa exploração requer uma grande parte de imaginação, tanto individual como coletiva" (p. 4).

> O questionário dos professores focalizou suas características profissionais, suas práticas pedagógicas, suas representações do papel da demonstração nesse nível do currículo, sua tomada de decisão quanto aos requisitos do programa e as especificidades da análise propriamente dita, seu grau de adesão/flexibilidade em relação ao programa instituído nesse nível do currículo e suas expectativas quanto aos pré-requisitos dos recém-formados. (p. 6)

Através de um exame complementar do questionário aplicado aos professores, Smida e Ghedamsi (2006) identificam três perfis típicos de professores: (i) *O perfil* *lógico-teórico*: pensa a aprendizagem da análise segundo a lógica do edifício matemático e não leva em conta as exigências cognitivas; (ii) O *perfil lógico-construtivo:* pensa a aprendizagem da análise real de acordo com a lógica da construção matemática e em virtude das intenções didáticas; a prática desses professores evidencia preocupações cognitivas que se refletem, em particular, no apoio à aprendizagem de vários modos de raciocínio e validação; e (iii) O *perfil lógico-cognitivo*: pensa a aprendizagem da análise real de acordo com a lógica da construção matemática e também do processo cognitivo: "As práticas desses professores atestam a gestão de requisitos cognitivos no aprendizado da análise real: o uso de ferramentas didáticas específicas à Análise, o uso de experimentação e o uso de vários modos de aprendizagem" (p. 17). Ademais, para a grande maioria dos professores entrevistados, a prova em Análise não figura como um meio de convencer os alunos da validade das declarações matemáticas. Esses professores apontaram a eficiência de fundamentar cursos de Análise preliminares em métodos numéricos de aproximação a fim de dar um significado apropriado para os conceitos de Cálculo.

Ainda no que concerne à prática profissional do professor de Cálculo, Barufi (1999) procura entender como ocorre a "ponte" entre o conhecimento matemático desenvolvido na escola secundária e o conhecimento abordado no curso de Cálculo bem como a forma como o Cálculo é apresentado: como algo pronto ou apresenta-se de modo heurístico? Na busca por respostas, a autora realiza um trabalho de investigação e analisa um conjunto considerável de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral (e alguns de Análise Real).

> Entendemos que o livro didático, escolhido pelo professor para suporte ou apoio ao seu trabalho, constitui um forte indício do tratamento que será dado ao curso. O livro preferido faz transparecer muitas das preocupações do professor, suas crenças, suas escolhas metodológicas. No grande espectro de livros que desenvolvem o Cálculo Diferencial e Integral, do qual selecionamos uma pequena parte, entendemos que a escolha do professor é importante e significativa. (pp. 7-8)

Na sua análise dos livros, Barufi (1999) identifica dois modelos principais que norteiam as várias propostas didáticas. O primeiro apresenta o Cálculo sistematizado e logicamente organizado, sendo o resultado pronto do trabalho de pensadores ao longo de mais de vinte séculos. "Nesse caso, a sequência temática, basicamente é: Números Reais, Funções, Limites, Derivadas e Integrais, e o tratamento metodológico obedece, em muitos casos, a ideia de fornecer uma *revelação* do Cálculo" (p. 52). Essa proposta parece basear-se na ideia de que a lógica interna consistente pode garantir um aprendizado significativo por parte dos alunos. O segundo modelo apresenta o Cálculo *em construção* e baseia-se numa metodologia *problematizadora*, segundo a qual é importante a existência de problemas motivadores que possuem a capacidade de deflagrar o processo de construção do conhecimento: “Este modelo diverge do anterior por apresentar uma sequência temática que não obedece necessariamente à estruturação lógica, mas muito mais ao desenvolvimento do Cálculo, ou à sua contemporaneidade” (p. 53). Para se chegar a tal categorização, a autora tomou como critério para a análise dos livros: as ideias, a problematização, a linguagem, a visualização, a argumentação e a formalização/generalização. Finalmente, considera a importância da negociação de significados no ensino do Cálculo:

> Nesse sentido, negociar significados é falar sobre, mostrar representações de, exibir metáforas extremamente úteis para a transferência de relações que existem entre o conhecido e o novo. Para negociar significados e estabelecer relações não basta pois, apresentar uma sucessão de definições e propriedades, formalmente corretas, coerentemente articuladas, inseridas no contexto; muito mais é preciso. (p. 153)

Conforme visto nesse último excerto, dentro da negociação de significados é destacado o uso de metáforas, inclusive apontando que estas desempenham um papel extremamente útil na transferência de relações que existem entre o conhecido e o novo. Assim, na visão de Barufi (1999), a metáfora parece jogar um papel importante dentro da prática letiva, embora não seja o objeto de sua investigação.

Na verdade, reconhece-se que o registro metafórico teve grande influência na discussão de diferentes definições (Bressoud et al., 2016). O exame do registro metafórico no contexto da sala de aula de Cálculo foi objeto de estudo realizado por Dawkins (2009) que apresentou uma categorização dos usos das metáforas (metáfora lógica e metáfora matemática) em uma sala de aula de Análise Real de graduação. O autor confere às metáforas um papel importante realizado na interseção primária entre o domínio da Matemática formal e da comunicação e sublinha sua importância no processo de mediação de situações difíceis:

> Tudo isso apoia a caracterização dessas metáforas de acordo com o instrumentalismo de Dewey como ferramentas que os estudantes usaram para mediar situações difíceis, neste caso construindo uma forte definição de conceito ou aprendendo como provar no contexto da análise real. (...) O presente estudo, portanto, afirma a possibilidade de empregar efetivamente metáforas concretas na

> discussão em sala de aula para ajudar os alunos a construir sua compreensão da análise de graduação. (p. 826)

Mometti (2007) investigou as metáforas e os argumentos no discurso de um grupo de professores de Cálculo de uma universidade particular brasileira (sendo o autor um dos membros desse grupo), pautando a sua pesquisa na reflexão sobre a prática. O assunto tratado foi a integral de Riemann para funções de uma variável real. O autor refere que foi possível "levantar os implícitos das falas dos professores, bem como, explicitar formas de pensar e agir que empregamos quase que automaticamente e inconscientemente na sala de aula, sem um exame mais profundo" (p. 160). O autor conclui, a partir da Teoria da Cognição Corporificada, que a forma como pensamos e aprendemos conceitos novos é organizada por uma estrutura metafórica e também a existência, nas metáforas e nos argumentos utilizados pelos professores ao discutir a prática, de uma forte tensão entre a intuição e o rigor no ensino de Cálculo.

Um outro ponto de interesse da pesquisa no domínio do ensino do Cálculo é a escrita e a fala dos alunos. Schoenfeld (1995) reforça que "fazer os alunos aprenderem a escrever, "falar" e fazer Matemática exige tempo e esforço, bem como práticas pedagógicas alteradas" (pp. 1-2). Olímpio Junior (2006) investigou as compreensões emergentes da integração entre oralidade, escrita (em linguagem natural) e informática (representada pelo CAS Maple) sobre conceitos fundamentais do Cálculo de oito alunos voluntários do primeiro ano de Matemática de uma universidade pública de São Paulo. O autor conclui que uma das maiores fontes de atrito na fase de transição entre o ensino secundário e o ensino superior materializa-se no conceito de função. Na sua visão, o Cálculo possui uma essência dinâmica e a visão das funções, trazida pelos alunos do ensino secundário, é predominantemente estática:

> As análises dos experimentos realizados sugerem que uma das maiores fontes de atrito nesta transição materializa-se no conceito de função. Uma visão predominante estática, povoada por exemplares de funções bem comportadas, mais ou menos familiares, parece embaraçar a necessária articulação e os movimentos que caracterizam a essência dos conceitos do Cálculo Diferencial: a dinâmica. É praticamente impossível exercitar a dinâmica do Cálculo no Ensino Superior, sem que seus conceitos-base — função e limite — sejam, também, "dinamizados", exercitados e explorados em suas possibilidades." (p. 245)

Olímpio Junior (2006) também refere que há indícios de que a escrita dos alunos é uma grande indutora de reflexões, sugerindo que a escrita em linguagem natural, quando materializa as compreensões dos conceitos tratados: (i) permite ao aluno “expressar suas compreensões de maneira conceitualmente mais significativa para ele” (p. 235) e, consequentemente, também para o professor que possui um vivo interesse em conhecer tais compreensões e (ii) revela “uma notável compatibilidade com as compreensões emergentes nos experimentos desenvolvidos” (p. 235). Por fim, o autor ainda refere a dificuldade enfrentada pelo professor no trabalho numa nova perspetiva com turmas de Cálculo numerosas, uma realidade muito presente no Brasil:

> Pelo menos alguns indícios do que o(a) estudante pensa, quais são suas dúvidas, idéias e dificuldades, que visão ele ou ela tem sobre determinado conceito ou procedimento, tudo isso fica mais ou menos encoberto, guardado, compondo, juntamente com os demais sessenta colegas (em média) um limbo de compreensões que permanecem em suspensão até serem, de forma anêmica—e até mesmo equivocada—, materializadas, direta ou indiretamente, nos quatro ou cinco momentos de avaliação formal de um curso clássico anual de Cálculo. (pp. 5-6)

Ribeiro e Paulin (2020), por seu turno, realizaram uma experiência de ensino com o objetivo de investigar os limites e as possibilidades do uso de tarefas exploratórias no ensino do Cálculo em um contexo universitário que envolveu 69 alunos. A exemplo de Olímpio Junior (2006), os autores também referem as dificuldades dos alunos com o conceito de função, bem como uma resistência dos alunos no trabalho com uma metodologia diferenciada: “ao colocar em discussão os limites enfrentados ao longo do desenvolvimento das tarefas, referimo-nos, em especial, às dificuldades dos estudantes com conteúdos anteriores à disciplina, como, por exemplo, o conceito de função; a resistência dos estudantes a uma metodologia diferenciada em sala de aula” (p. 83). Os autores concluem que uma prática docente pautada no ensino exploratório traz novas possibilidades para o ensino e a aprendizagem, “desvencilhando-se das aulas que adotam um modelo de palestra e acabam restringindo o desenvolvimento de diferentes práticas” (p. 82) e que a natureza das tarefas propostas e a abordagem adotada pelos professores levou os alunos “a uma nova dinâmica no processo de aprendizagem e conduziu a elaboração de respostas escritas, conjeturas e sistematizações a partir da discussão com os pares” (p. 81).

> O uso de tarefas matemáticas, como as que desenvolvemos com os estudantes, pode colaborar com a construção do conhecimento matemático em relação aos conceitos de derivada e integral. Creditamos esta construção à forma como estas tarefas foram desenvolvidas e trabalhadas com os estudantes, ao privilegiar um *design* de tarefa que buscasse resgatar conhecimentos anteriores dos estudantes, bem como os levasse a construir novos conhecimentos, por meio de situações-problema e da discussão em duplas. (p. 80)

Richit (2010), por seu turno, evidencia as possibilidades dos recursos tecnológicos no ensino do cálculo. Para a autora, as aulas de Cálculo pautadas no formalismo não possibilitam ao aluno atribuir um significado mais amplo ao conhecimento vinculado ao Cálculo, vincando que "o estudante desenvolve outras habilidades, para além de lidar com equações, com exercícios e com a simbologia própria do Cálculo, quando ambiente de aprendizagem que levam em conta recursos da tecnologia digitais forem a eles propiciados" (p. 33). Na visão da autora, tal incorporação de recursos tecnológicos no ensino do Cálulo permite que a natureza geométrica e dinâmica sejam resgatadas em detrimento de uma abordagem essencialmente algébrica.

Esses dois aspetos antes referidos, nomeadamente o suporte da tecnologia e as tarefas exploratórias foram objetos de estudo de Filho (2016), que buscou investigar a transversalidade de três temas: (i) o ensino e a aprendizagem do Cálculo; (ii) o ensino exploratório por meio de tarefas e (iii) a associação da tecnologia na exploração das tarefas. O trabalho envolveu 36 alunos de Matemática de uma universidade pública do estado da Bahia (Brasil). O autor conclui que as experiências investigativas potencializaram dois fatores essenciais: (i) a incorporação de um ambiente mais motivado favoreceu as capacidades reflexivas, comunicativas e argumentativas dos alunos e (ii) ocorreu também a participação ativa dos alunos na elaboração do conhecimento "através da diversificação das estratégias de análise das situações investigativas, da busca por padrões e regularidades em ensaios dinâmicos computacionais (nas tarefas com o suporte da tecnologia) e na formulação, testes e justificações de conjecturas na realização das investigações" (p. 278).

Em síntese, os estudos realizados apontam para a importância de uma maior compreensão sobre as crenças do professor de Matemática, pois é reconhecido que, em última análise, cabe ao professor decidir (sobre o ensino) o quê, o como e o porquê e as crenças podem apresentar-se de duas formas: crenças centrais, isto é, crenças fortemente mantidas e crenças periféricas. Quanto às práticas, a investigação empírica identifica dois projetos distintos: um projeto axiomático e muito centrado em formalismos (e no discurso do professor) e outro que considera requisitos cognitivos na aprendizagem. Desses dois projetos, emergem três perfis típicos de professores: lógico-teórico, lógico-construtivo e lógico-cognitivo. Ainda em relação à prática, tem-se considerado cada vez mais o estudo das metáforas e o seu papel na interseção primária entre o domínio da Matemática formal e o domínio da comunicação e também das possibilidades do ensino exploratório por meio de tarefas e do uso da tecnologia. No tocante ao uso de livros e manuais de Cálculo, parece existir uma estreita ligação com os dois projetos identificados anteriormente: o projeto axiomático (com os livros apresentando o Cálculo enquanto *revelação*) e o projeto atento aos requisitos cognitivos (com os livros apresentando uma visão do Cálculo enquanto *construção*).

Capítulo 5

Metodologia

Uma das questões capitais dentro de qualquer investigação é a escolha da sua metodologia. Savenye e Robinson (2001) recomendam que a orientação para as escolhas de caráter metodológico em uma investigação deve sempre ter por base o objetivo e as questões que o investigador se esforça para responder. Tal posição é também assumida por Cohen, Manion e Morrison (2007) que aconselham "que a adequação ao objetivo deve ser o princício norteador" (p. 4) na escolha metodológica. No entanto, mesmo considerando o papel relevante do objetivo do estudo na definição da metodologia a usar, os mesmos autores consideram que essa relação não é uma relação de causa e efeito e que tal processo está longe de ser um simples exercício técnico. Assim, para além da coerência entre o objetivo do estudo e a opção metodológica adotada é igualmente importante ter sempre presente que esta opção também é informada "pela maneira como vemos nosso(s) mundo(s), o que entendemos ser e o que vemos como propósito de entendimento" (Cohen et al., 2007, p. 5), ou seja, a consciência da existência de uma "abordagem filosófica subjacente ao estudo" (Savenye & Robinson, 2001, p. 1059) assente nas assunções do investigador e que são sustentadas nos pressupostos teóricos assumidos.

Na primeira secção deste capítulo procuro justificar o porquê da inscrição dessa investigação em uma abordagem qualitativa de pesquisa e também o porquê da investigação estar inscrita em um paradigma interpretativo. Na sequência, trato da escolha pelo estudo de caso qualitativo, apresento os três participantes da investigação, os critérios para a sua escolha e as questões de ordem ética. De seguida, descrevo o processo de recolha e também a análise dos dados. Por fim, apresento a parte da validação dos casos, um processo extremamente importante na medida em que se procura entender as perspetivas dos envolvidos. Tal validação foi concretizada através da verificação das interpretações produzidas junto aos participantes, "levando dados e interpretações de volta para as pessoas de quem eles derivaram e perguntando se os resultados são plausíveis" (Merriam, 1988, p. 168).

5.1 Opções metodológicas

5.1.1 Uma investigação qualitativa inscrita em um paradigma interpretativo

O presente estudo é focado, em essência, no professor. De modo específico, centra-se no professor de Matemática do ensino secundário português que leciona tópicos de Cálculo Diferencial. O objetivo do estudo está em identificar e compreender as conceções do professor sobre o ensino de Cálculo Diferencial, bem como identificar e compreender os aspetos centrais de sua prática no ensino de tal tema. Desse modo, os objetos em análise são as suas práticas e as suas conceções, as quais pretendo "identificar" e "compreender" a partir dos seus pontos de vista. Sendo assim, tendo em vista o objetivo do estudo e a necessidade de contemplar o ponto de vista do professor, a opção pela inscrição do estudo em uma abordagem metodológica de natureza qualitativa dentro de um paradigma interpretativo mostra-se, ao meu ver, apropriada. Explicito a seguir algumas considerações e implicações sobre a abordagem qualitativa na pesquisa, bem como sobre o paradigma interpretativo e que justificam a inscrição da presente investigação nessa abordagem e nesse paradigma.

Tendo em atenção, inicialmente, o significado da palavra "qualitativa" no contexto da pesquisa, Denzin e Lincoln (2006) consideram que a "palavra qualitativa implica uma ênfase sobre as *qualidades das entidades* e sobre os *processos* e os *significados* que não são examinados ou medidos experimentalmente (se é que são medidos de alguma forma) em termos de quantidade, volume, intensidade ou frequência" (p. 23). Considerando o objetivo da presente investigação, os verbos "identificar" e “compreender” estão, assim, diretamente relacionados com os *processos,* com as *qualidades das entidades* e também com os *significados* produzidos pelos participantes. Estes últimos são considerados a partir da visão dos próprios participantes, pois como enfatiza Merrian (1988), “nesse tipo de pesquisa, é importante entender as perspetivas dos envolvidos no fenômeno de interesse” (p. 168).

Erickson (2012) segue uma linha muito similar ao ponderar que os propósitos essenciais de uma pesquisa inscrita em uma abordagem qualitativa está em documentar de modo mais detalhável possível a condução dos eventos cotidianos e “identificar os significados que esses eventos têm para aqueles que participam deles e para quem os testemunha” (p. 1451). Goetz e LeCompte (1984), por seu turno, preferem o uso do termo “etnográfico” ao referirem-se à pesquisa qualitativa e indicam, tendo em vista o campo educativo, que tal abordagem possibilita aos investigadores maiores alternativas para a descrição, interpretação e explicação dos fenômenos educativos. Já para Denzin e Lincoln (2006), a “pesquisa qualitativa é infinitamente criativa e interpretativa” (p. 37) e envolve, em essência, o que chamam de “abodagem naturalista e interpretativa para o mundo” (p. 17), ou seja, que o pesquisador estuda as coisas em seus cenários naturais com o propósito de entender e interpretar os fenômenos “em termos dos significados que as pessoas a eles conferem” (p. 17). Um estudo realizado em cenários naturais, portanto em cenários situados e onde, devido a complexidade do contexto, é muito difícil, senão impossível, a separação das variáveis do contexto (Merrian, 1988), para além de distinguir a pesquisa qualitativa da pesquisa experimental, também faz com que a pesquisa qualitativa seja conhecida como pesquisa naturalista: “os analistas normalmente traçam distinções entre os cenários de pesquisa experimental (laboratório) e os de pesquisa de campo (natural), de onde provém o argumento de que a pesquisa qualitativa é naturalista” (Denzin & Lincoln, 2006, p. 38). Considerando ainda as diferenças entre a pesquisa experimental e a pesquisa qualitativa, Savenye e Robinson (2001) fazem questão, nessa diferenciação, de vincar que a pesquisa qualitativa é conduzida “em um ambiente natural, sem manipular intencionalmente o meio ambiente” e geralmente envolve “descrições ricas e altamente detalhadas de comportamentos e opiniões humanas” (p. 1046). Ademais, continuam os autores, na abordagem qualitativa “o principal instrumento de coleta de dados é o pesquisador humano”. No tocante a natureza da realidade a estudar, Merrian (1988) refere que uma das premissas subjacentes à pesquisa que segue uma abordagem qualitativa é de que esta realidade é “holística, multidimensional e está sempre mudando”, assim, o fenômeno em questão não é fixo e objetivo, de modo que este não estará “esperando para ser descoberto, observado e medido” (p. 168).

No entanto, como sublinha Canavarro (2003), um estudo pode basear-se em dados qualitativos, situação em que estes são recolhidos pelo investigador em presença do fenômeno que está a estudar, mas, apesar disso, pode não ser uma investigação interpretativa, bastando, para isso, que a referida investigação esteja assente somente nas perspetivas do investigador e que não considere as do observado. Ou seja, para além da abordagem da pesquisa é igualmente importante considerar o paradigma com o qual esta deseja ter algum alinhamento. Tendo em atenção os paradigmas na investigação, Cohen et al. (2007) identificam dois: o paradigma *normativo* e o paradigma *interpretativo*. Para estes autores, o paradigma normativo possui duas ideias orientadoras: i) que o comportamento humano é, em essência, governado por regras, e ii) a investigação deve ser realizada por meio dos métodos da ciência natural. Por outro lado, sublinham que “o esforço central no contexto do paradigma interpretativo é entender o mundo subjetivo da experiência humana” (p. 23). Assim, na perspetiva destes autores, em um paradigma interpretativo, “a teoria não deve preceder a pesquisa, mas segui-la”, sendo que “os investigadores trabalham diretamente com a experiência e a compreensão para construir sua teoria sobre eles. Os dados assim produzidos incluirão os significados e propósitos das pessoas que são sua fonte” (p. 22). Segundo os autores, subescrever o primeiro paradigma (normativo) é ser “positivista” e subscrever o segundo (interpretativo) é ser “anti-positivista” e referem que a perspetiva normativa persegue uma teoria universal, ao passo que na perspetiva interpretativa esse anseio dá lugar “a imagens multifacetadas do comportamento humano, tão variadas quanto as situações e os contextos que a sustentam” (p. 22). Cohen et al (2007), no entanto, chamam a atenção que o fato de o investigador considerar o conhecimento como pessoal e subjetivo e, nesse caso, assente em um paradigma interpretativo, impõe a ele, investigador, um envolvimento mais alargado com os participantes.

Por fim, e conforme já mencionei, as opções metodológicas estão também assentes em perspetivas e visões filosóficas para além de uma relação de causa e efeito com o objetivo do estudo que pretende ser realizado. Sobre essa questão e tendo presente o paradigma interpretativo, Denzin e Lincoln (2006) referem que “toda a pesquisa interpretativa é guiada por um conjunto de crenças e de sentimentos em relação ao mundo e ao modo como este deveria ser compreendido e estudado” (p. 34). De um modo resumido, por enfatizar aspetos de natureza qualitativa, tais como processos, além de ser conduzida em um ambiente natural, sem desejar manipular intencionalmente este ambiente, a presente investigação está, assim, assente em uma abordagem qualitativa. Ademais, pelo fato de enfatizar os *significados* produzidos pelos próprios participantes, buscando entender as suas perspetivas e interpretações, a investigação inscreve-se em um paradigma interpretativo.

5.1.2 Estudo de caso

No âmbito de uma investigação qualitativa e inscrita em um paradigma interpretativo, a opção tomada foi para a modalidade de estudo de caso. Justamente por estar inscrita em uma abordagem qualitativa de investigação, Merrian (1988) denomina tal modalidade de "estudo de caso qualitativo". Denzin e Lincoln (2006), por seu turno, enfatizam a ligação entre as estratégias de investigação (sendo o estudo de caso uma das possibilidades) com o paradigma interpretativo:

> As estratégias de investigação dão início aos paradigmas da interpretação. Ao mesmo tempo, as estratégias de investigação também ligam o pesquisador a métodos específicos de coleta e de análise de materiais empíricos (...) As estratégias de pesquisa implementam e ancoram paradigmas em terrenos empíricos específicos, ou em práticas metodológicas específicas, tais como a transformação de um caso em objeto de estudo. Entre estas estratégias estão o estudo de caso. (Denzin & Robinson, 2006, p. 36)

O estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico e sua realização mostra-se adequada para investigações que pretendem responder a questões de natureza explicativa, tendo por objetivo a obtenção de um produto final com características descritivas e interpretativas das situações (Bogdan & Biklen, 1994; Stake, 2007; Yin, 2010).

Segundo Yin (2010), os estudos de caso possuem como foco de investigação os acontecimentos que ocorrem no decorrer do próprio estudo. Para o autor, "os estudos de caso são o método preferido quando: (a) as questões "como" e "por que" são propostas;

(b) o investigador tem pouco controle sobre os eventos e (c) o enfoque está sobre um fenômeno contemporâneo no contexto de vida real” (p. 22). Merrian (1988), por seu turno, indica que o estudo de caso “é um projeto ideal para entender e interpretar observações de fenômenos educacionais” (p. 2), sendo especialmente “adequado para situações em que é impossível separar as variáveis do fenômeno do seu contexto” (p. 10).

A caracterização realizada por Ponte (2006) para o estudo de caso vai em uma direção semelhante. Para este autor, o estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social:

> O seu objetivo é compreender em profundidade o “como” e os “porquês” dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspetos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse (Ponte, 2006, p. 2).

Segundo Ponte (2006), os estudos de caso podem atender a diversos propósitos: (i) podem ser em essência *exploratórios*: servindo para informar preliminarmente sobre o objeto de interesse, (ii) podem ser fundamentalmente *descritivos* e, finalmente, (iii) podem ser *analíticos*: procurando problematizar o seu objeto, construir ou desenvolver nova teoria ou confrontá-la com a teoria já existente. Quanto às características apresentadas em um estudo de caso, o autor afirma ser uma investigação de natureza empírica, baseando-se fortemente em trabalho de campo ou análise documental. Ademais, prossegue o autor, este tipo de investigação não é experimental, pois o investigador não pretende modificar a situação estudada, mas compreendê-la e para se descobrir aspectos novos (escondidos) considera essencial um distanciamento do investigador e uma capacidade de interrogar os acontecimentos.

Resumidamente, a presente investigação apresenta as seguintes características principais: (i) as questões “como” e “porque” estão intimamente relacionadas com a ação de “compreender”, presente no objetivo do estudo e (ii) o investigador não possui e nem pretende ter qualquer controle sobre os eventos em questão, uma vez que não se trata de uma investigação experimental e, por fim, (iii) deseja-se um produto final com características descritivas e interpretativas (analíticas) das situações. Considerando tais características inerentes à investigação, este estudo opta pela realização de estudos caso.

5.2 Participantes do estudo

5.2.1 A escolha dos professores

Uma vez estabelecida a opção metodológica pela realização da modalidade de estudos de caso, uma questão muito importante é a escolha dos participantes propriamente ditos, como bem referem Merriam (1988) e Yin (2010). Desse modo, a escolha dos participantes foi antecedida por uma fase preliminar onde foram estabelecidos alguns critérios que deveriam ser respeitados. Assim, o processo de seleção foi pautado segundo três critérios básicos que atendiam aos objetivos da presente investigação, nomeadamente: (i) o nível de ensino de atuação dos professores; (ii) a experiência dos professores no ensino de Matemática, e (iii) a inserção escolar dos professores. Apresento e explicito cada um desses critérios a seguir.

Uma primeira questão esteve diretamente relacionada com o nível de ensino de atuação dos professores. Tendo em conta que se pretende identificar e compreender as conceções dos professores sobre o ensino de Cálculo Diferencial no ensino secundário português e também identificar e compreender os aspetos centrais da práticas desses professores no ensino de tal tema, ficou logo estabelecido que estes deveriam ser professores do ensino secundário, uma vez que para além de focar nas perspetivas dos professores, também se pretende analisar a sua prática. Ademais, como o Cálculo Diferencial integra apenas o currículo de Matemática A, ficou decidido que os professores deveriam lecionar esta disciplina. Com efeito, os tópicos de Cálculo Diferencial são lecionados somente no 11.º e 12.º anos em Matemática A, os professores deveriam ministar aulas para estes anos. Considerando que no 12.º ano há um exame nacional de Matemática, sendo que tal não ocorre com o 11.º ano, considerei interessante para a investigação ter casos com professores tanto do 11.º ano como do 12.º ano de Matemática

A. Tal acabou por ocorrer, conforme explicito logo mais adiante, sendo que um dos casos foi um professor do 12.º ano e os outros dois casos foram duas professoras do 11.º ano.

Uma vez decidido que os professores candidatos deveriam ser professores do 11.º e 12.º anos do ensino secundário (Matemática A), uma segunda questão teve relação com o grau de experiência desses professores. Em relação a eles, considerei importante que fossem docentes experientes, com no mínimo dez anos de experiência no ensino. Tal critério pode ser justificado considerando o objetivo da presente investigação. Além disso, a questão da experiência profissional, dentre outras mais valias, também parece jogar um papel relevante no grau de confiança dos professores na participação em um estudo que segue uma abordagem qualitativa, como refere Canavarro (2003): “é de esperar que os professores experientes já tenham desenvolvido um saber profissional sólido que, entre outras vantagens, os poderá ajudar a encarar com confiança a participação numa investigação onde lhes muito é pedido, nomedamente que abram ao investigador a porta da sua sala de aula” (p. 189).

Um terceiro e último aspecto está intimamente relacionado com a experiência do professor como docente na sua escola. Tal aspecto se relaciona com a questão de o investigador poder aceder com mais facilidade às questões de natureza contextual (Merriam, 1988), nomeadamente as dinâmicas do grupo de Matemática e da escola como um todo. Acredito que uma proximidade maior com o contexto do professor pode ser potencializado pelo fato deste possuir uma permanência prolongada na escola. Enfim, é absolutamente imperativo que esses professores conheçam bem a escola onde atuam para que as questões contextuais possam tornar-se, digamos assim, mais “visíveis” ao investigador. Desse modo, no que concerne à questão de inserção escolar do professor, optei pela escolha de professores que estivessem mais de 5 anos na escola atual.

Outra questão prende-se com o número de professores participantes no estudo. Considerei que deveriam ser três professores, uma vez que com este número poderia encontrar uma variedade de aspetos interessantes, potencialmente convergentes e divergentes, sendo adequado para a investigação a realizar.

Estabelecidos os critérios para a escolha e também o número de participantes no estudo, dediquei-me à identificação de possíveis professores. Essa parte foi bastante desafiante para mim na condição de investigador estrangeiro. Isso porque, na altura, eu estava a menos de um ano no país e embora já tendo os critérios bem presentes para a escolha dos casos, na realidade não tinha tido um contato mais prolongado com os professores que lecionavam Matemática A no ensino secundário. Ademais, também tinha a certeza de que as pessoas com quem eu iria trabalhar seriam pessoas novas para mim.

Essa questão de estar a pouco tempo no país e de não fazer parte do respetivo sistema de ensino acabou por revelar-se, no decorrer do estudo, um aspecto positivo, nomeadamente o de ver tudo como diferente sob algum prisma. Como referem Bogdan e Biklen (1994) é absolutamente interessante para o investigador qualitativo observar os fenômenos e não os "naturalizar" de alguma forma. Acredito que por ser "alguém de fora" isso acabou por ampliar, de algum modo, a minha visão de que nada era trivial.

Na tentativa de aproximar-me mais dos professores e também de prospetar possíveis candidatos, participei do encontro profissional nacional de professores de Matemática de Portugal no ano de 2018. Neste encontro, para além de buscar uma maior inserção neste universo dos professores, tive a oportunidade, durante os vários momentos de intervalos e de convivência, de conversar com muitos professores de Matemática do ensino secundário. O saldo final foi muito positivo: para além da experiência, consegui o contato de alguns professores, o que deixou-me muito confiante.

Ainda neste evento, encontrei uma professora de Matemática do ensino secundário da região metropolitana de Lisboa, que, por acaso, já conhecia da participação em alguns seminários ocorridos na Universidade. A referida professora estava naquele momento destacada para atuar em uma instituição, não estando, naquela altura, a lecionar Matemática para o ensino secundário. Ao saber da investigação que pretendia realizar e do perfil de professor que eu buscava, foi logo facultando-me os contatos de alguns professores da região da grande Lisboa e que se enquadravam no perfil que eu buscava. A professora, para além de ser muito simpática e comunicativa tinha um conhecimento muito grande dos professores de Matemática da região por conta do trabalho que realizava na instituição onde estava, de momento, destacada. Desses professores, dois acabaram por se tornar casos deste estudo e o terceiro, passado mais de um ano, acabou por ser a própria professora que havia me facultado os contatos. Apresento os três casos a seguir.

A primeira professora é uma professora de 11.º ano. Quando tivemos a primeira conversa e lhe apresentei a investigação que pretendia realizar, a professora ainda estava a lecionar para o 10.º ano. No entanto, logo adiantou-me que pretendia continuar com a mesma turma para o ano seguinte, ou seja, o 11.º ano e que também estava disposta a dar o seu contributo para a investigação. Neste encontro mostrou-se muito solícita, simpática e atenciosa e além do mais, preenchia todos os requisitos que eu havia colocado para a escolha dos casos. Não tive dúvidas em considerá-la como sendo a minha primeira escolha. Assim, a professora passou a ser designada por *Mariana*.

A segunda escolha recaiu sobre um professor. Já tendo escolhido uma professora que iria lecionar para o 11.º ano, procurei então que o segundo caso fosse um professor do 12.º ano. Após o meu contato e posterior pedido de participação na investigação, o professor logo aceitou e manifestou sua disponibilidade. O professor também preenchia todos os requisitos estipulados para a escolha dos casos e, já ao final do estudo, disse que gostaria de ser chamado de *João*, o que foi prontamente atendido por mim.

A terceira professora foi escolhida de um modo diferente dos dois primeiros casos. Devido a necessidade, por questões de ordem logística, de me circunscrever à região metropolitana de Lisboa acabei por descartar dois professores que conheci aquando da participação do encontro profissional referido. Passado algum tempo, encontro novamente aquela professora que havia me facultado os contatos dos outros professores. Na oportunidade, disse-me que estava justamente voltando a lecionar depois do período em que foi destacada e que tinha, naquele momento, uma turma de 10.º ano de Matemática A. Durante essa nossa conversa, adiantou que era muito provável que ficasse com a mesma turma para o próximo ano letivo. Para além de sua grande força comunicaticava e dinamismo, caso tivesse a turma de 11.º ano, preencheria todos os requisitos para se tornar o terceiro caso. Na oportunidade já lhe fiz o convite de participar na pesquisa, que foi prontamente confirmada por ela, mencinando, no entanto, somente a condicionante de efetivamente lecionar no ano seguinte no 11.º ano. Felizmente isso veio a se concretizar e assim a professora tornou-se o terceiro e último caso. A professora aceitou, com gosto, ser designada por *Maria José*.

5.3 Questões de ordem ética

As questões éticas são, sem dúvida, um dos pontos fundamentais na pesquisa educacional. Isto é ainda reforçado quando se trata de uma investigação que se assume como qualitativa e está inscrita em um paradigma interpretativo, como é o caso do presente estudo. Isso porque, nessa modalidade de investigação, há uma aproximação deliberada do investigador junto ao universo pessoal nas práticas observadas e da intimidade das pessoas.

Ao longo de todo o estudo, mantive uma atenta preocupação com as questões de ordem ética, tendo a clara consciência de que na condição de investigador, lidaria sempre com um dilema ético maior, nomeadamente o de produzir um estudo e assim contribuir para o bem comum, mas ao mesmo tempo também consciente do meu dever em respeitar de uma forma intransigente a dignidade da pessoa humana. Considerando o papel do investigador, Fiorentini e Lorenzato (2009) consideram que não há uma pesquisa ou um pesquisador neutro, ou seja, há sempre um interesse e uma intencionalidade subjacente que pode muitas vezes não coincidir com os interesses dos participantes que estão sendo investigados.

Cabe destacar que as questões relacionadas com o foro ético não se restringem somente à relação do investigador com os participantes da pesquisa, mas estão também relacionadas com todo o processo de investigação que vai desde a definição do tema, os instrumentos e a forma de coleta de dados, a análise dos dados, a produção de conclusões e a própria divulgação do estudo. Assim, as questões éticas foram pautadas segundo os critérios que procuro explicitar a seguir.

O primeiro critério teve a ver, ainda durante a fase de elaboração do projeto de investigação, com o respeito aos preceitos éticos expostos na Carta de Ética do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (2016). Em seguida, tão logo realizada a defesa do projeto de investigação, submeti-o para uma criteriosa análise no que concerne às questões éticas pela Comissão de Ética do Instituto de Educação. A Comissão de Ética, após proceder a análise, emitiu parecer favorável ainda no início do ano de 2019.

Um segundo critério se relaciona com a clarificação e explicação aos professores, de um modo o mais completo e claro possível, do que lhes será exigido durante a investigação e da obtenção do seu consentimento: “Os pesquisadores são obrigados eticamente a antecipar o que será feito na coleta, análise e relatório de dados, e a explicar aos estudados por que isso será feito dessa maneira e não de outra” (Erickson, 2012, p. 1456).

Cohen et al. (2007) denominam esses procedimentos de *consentimento informado* e enfatizam que durante essa fase os indivíduos escolhem se querem participar da investigação. Ademais, prosseguem os autores, a operacionalização do consentimento informado desdobra-se em quatro ítens básicos: *competência, voluntariado, plena informação e compreensão*. Seguindo essa caracterização de Cohen et al. (2007) para o consentimento informado, procurei respeitar os quatro itens sugeridos. No ítem *competência*, certifiquei-me de que não envolveria indivíduos incapazes de tomar tais decisões por imaturidade ou alguma forma de comprometimento psicológico. Quanto ao *voluntariado,* garanti que os participantes escolhessem de uma forma livre, consciente e de forma voluntária participar da pesquisa: "A pesquisa qualitativa requer não apenas consentimento passivo, mas participação ativa e comprometimento com a pesquisa por aqueles que são estudados" (Erickson, 2012, p. 1457). No que tange à *plena informação* e à *compreensão,* procurei fazer com que os participantes entendessem completamente a natureza do projeto de pesquisa, dando-lhes informação sobre as finalidades, os objetivos e os processos a utilizar. Assim, os professores foram permanentemente informados (antes e durante todo o processo de pesquisa) sobre a natureza dos dados que seriam por mim coletados, bem como o tempo que eles deveriam despender no estudo.

Para além do consentimento informado, outra preocupação que tive foi a proteção em relação à privacidade e à confidencialidade. Sobre isso, Yin (2010) destaca que é importante "proteger a privacidade e a confidencialidade dos que participam para que, em consequência de sua participação, não fiquem em posição indesejável" (p. 100). O fato de os professores serem identificados por nomes fictícios, apesar de minimizar os riscos de exposição destes, não constitui, por assim dizer, elemento garantidor que as suas identidades não sejam descobertas, pois a própria caracterização dos casos pode trazer, até de modo inadvertido, algum elemento que permita a sua identificação. Assim, para além de informar os professores sobre esse risco, também garanti a eles o conhecimento, em primeira mão, da versão final do estudo, bem como a possibilidade de solicitarem a retificação ou mesmo a subtração de alguma passagem que entendessem ser necessário.

Esse conhecimento em primeira mão pelos professores da versão final do estudo e a possibilidade de solicitarem alguma retificação, para além de uma questão relacionada com a preservação de suas identidades, prende-se também a outro objetivo que, por seu turno, mostra-se muito importante dentro de uma investigação interpretativa, nomedamente o da aferição dos significados pelos próprios professores, ou seja, a validação dos casos. Dada a relevância da validação junto aos próprios participantes do estudo, dedico a ela a secção final deste capítulo.

Por fim, no que tange à relação com os participantes ao longo da investigação, procurei manter uma relação de equilíbrio entre proximidade e distanciamento, mantendo discrição em relação aos dados que ia recolhendo, de modo que evitei realizar qualquer comentário sobre eles. Ainda dentro dessa complexa relação que envolve o investigador e os professores, mantive uma preocupação pautada na compreensão e não na avaliação do trabalho dos professores, me abstendo de emitir qualquer juízo de valor. Ademais, durante a investigação, não mantive qualquer trabalho de outra natureza com os três professores, sendo que a única relação mantida foi justamente àquela relacionada com o contexto da investigação.

5.4 Recolha de dados

5.4.1 Visão geral

Como refere Erickson (2012), "as questões básicas na elaboração de estratégias para a coleta de dados são pensar *onde precisamos pesquisar*, *com quem* e *em quais relacionamentos*" (p. 1454). Essas três questões básicas foram observadas na coleta de dados nesta investigação.

Primeiramente, as questões concernentes ao *com quem pesquisar e em quais relacionamentos* já foram explicitadas e clarificadas anteriormente aquando da identificação dos participantes e das considerações de ordem ética observadas na investigação. Em relação ao *local*, os dados foram preferencialmente recolhidos nas escolas onde os professores lecionavam. Obviamente este é o local, por excelência, onde decorreram as aulas e consequentemente onde foram realizadas as observações destas, mas também escolhi ali realizar a maioria das entrevistas por duas questões principais: (i) por permitir ao professor estar em um ambiente mais à vontade durante as entrevistas e, simultaneamente, (ii) poder captar e compreender às dinâmicas relacionadas com o contexto, algo muito importante dentro de uma pesquisa qualitativa (Merrian, 1988). Desse modo, realizei a maioria das entrevistas nas escolas, em locais que os próprios professores indicaram para o efeito.

Somente em relação a *Maria José* alguns dados foram recolhidos fora do ambiente da escola onde ela lecionava. Para este caso, especificamente, senti a necessidade de contemplar outros locais para além da escola. Isso prende-se ao fato de buscar mais dados que se relacionavam com a questão da caraterização do *dinamismo* da professora, algo muito presente em sua caraterização profissional, para além da colaboração que esta desenvolvia com outros atores. Assim, realizei, por sua sugestão, uma entrevista temática em uma universidade de Lisboa e observei também, com muito gosto e atendendo a seu convite, duas atividades em que ela participou da dinamização: i) uma oficina realizada com alunos de ensino secundário (estes não eram seus alunos) em uma feira de Matemática (tal oficina foi dinamizada por Maria José e outra professora) e ii) uma oficina envolvendo trigonometria e geogebra com a turma de 11.º ano de Maria José, atividade esta realizada no laboratório de geometria interativa de uma universidade de Lisboa (para além dela, uma professora universitária e uma assistente participaram da dinamização da oficina).

Também é importante mencionar *quem* fez a recolha e análise de dados. Na presente investigação, foram ambas integralmente realizadas por mim. Como refere Merrian (1988): "no estudo de caso qualitativo, o investigador é o principal instrumento para coletar e analisar dados" (p. 36). Desse modo, para além de observar aulas e realizar as entrevistas, também fui eu a realizar todos os relatórios das aulas observadas e também as transcrições de todas as entrevistas.

No que concerne aos processos de recolha de dados, Patton (2002) sugere três principais na investigação qualitativa: *a entrevista, a observação e a recolha documental*. Tal sugestão foi acolhida e seguida na presente investigação, tendo por predominância a entrevista e a observação direta. A predominância desses dois processos prende-se ao próprio objetivo da investigação que visa identificar e compreender as conceções do professor sobre o ensino do Cálculo Diferencial e também os aspetos centrais de sua prática. Assim, "olhar e perguntar", referidos por Erickson (2012), são ações extremamente importantes para o investigador. Este autor chega ao ponto de enfatizar que "o processo ideal", em sua opinião, "é um processo recursivo de observação e entrevista, no qual, a cada passo do caminho, as idéias obtidas por um método (seja olhando ou perguntando) são seguidas usando o outro método" (p. 1455). Também Canavarro (2003) considera que "o significado revela-se tanto na ação como no discurso. O fazer e o dizer são ambos faces da mesma moeda e devem ser associados para a compreensão do significado de qualquer situação” (p. 195).

Outra preocupação desta investigação é integrar evidências de várias fontes, o que, por seu turno, permite a triangulação das informações. Sobre este aspecto, Merrian (1988) destaca que a oportunidade de se usar vários métodos de coleta de dados é um dos pontos fortes da pesquisa envolvendo o estudo de caso qualitativo. Erickson (2012), por seu turno, vai numa mesma linha ao referir que “um projeto efetivo de coleta de dados inclui *o maior número possível de fontes diferentes* e sempre inclui observação, entrevista e coleta de documentos do local” (p. 1455). Para este autor, tal preocupação durante a fase de coleta de dados tem uma relação estreita com o processo de análise dos dados, indicando que a alegação probatória é mais forte quando as evidências provêm de várias fontes e do que de apenas de uma única fonte:

> À medida que a análise dos dados prossegue, quando palpites sobre padrões que foram desenvolvidos com base em anotações de campo são cruzados e confirmados por referência a dados entre entrevistas ou documentos do local, é mais forte a alegação probatória do que se as evidências viessem de apenas uma fonte de informação (o termo formal para isso é “*triangulação*”). (Erickson, 2012, p. 1455)

O uso de múltiplas fontes é, inclusivamente, um dos três princípios apontados por Yin (2010) a considerar no esforço de coleta de dados na realização de estudos de caso. Este autor, apresenta ainda mais dois princípios, nomeadamente: (i) a criação de um banco de dados para cada caso e (ii) a manutenção de um encadeamento de evidências, onde se busca vincular da forma mais explícita possível o objetivo do estudo, os dados coletados e as conclusões a que se chegou. Os três princípios foram observados nesta investigação.

O processo de recolha de dados decorreu por aproximadamente um ano e meio: começou no início de 2019 e terminou em meados de 2020. No ano de 2019 ocorreu a observação de todas as aulas, a maioria das entrevistas e a recolha de documentos referentes aos professores *Mariana* e *João*. Já em relação a *Maria José*, tal processo de recolha embora iniciando já ao final de 2019, teve uma incidência maior no ano de 2020.

Tão logo obtive o parecer favorável da Comissão de Ética do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, dei início à coleta de dados envolvendo *Mariana*. Realizei com ela a primeira entrevista temática sobre o seu percurso profissional no início de fevereiro de 2019 e em seguida, ainda naquele mês, dei início às observações de aulas. Na sequência, interrompi as observações das aulas de *Mariana* e dediquei-me ao professor *João*. As observações das aulas envolvendo *Mariana* foram retomadas e concluídas em maio daquele ano e no mês de junho foi realizada a segunda entrevista temática, incidindo sobre o ensino do Cálculo Diferencial e sobre a dinâmica escolar.

Com o professor *João*, a observação das aulas ocorreu durante todo o mês de março, final de abril e início de maio de 2019. Com este professor, a primeira entrevista temática ocorreu em abril e a segunda em junho daquele ano. Cumpre destacar que não realizei observação de aulas em simultâneo com estes dois professores. Na realidade, realizei uma pausa na recolha de dados envolvendo Mariana e foquei então no caso do professor *João*. A escolha em proceder com esta alternância na observação de aulas esteve diretamente ligada aos assuntos tratados pelos professores, nomeadamente os relacionados com o Cálculo Diferencial. Já em relação a *Maria José*, o processo foi diferente, sendo que a coleta de dados foi iniciada ainda em 2019. Em outubro daquele ano, participei de uma oficina que dinamizou Maria José em uma feira de Matemática e também observei duas aulas em sua turma de 11.º ano. Assisti a estas aulas atendendo a seu convite, pois insistiu que eu conhecesse a turma e verificasse, segundo suas palavras, se a turma atenderia aos meus objetivos, mesmo que naquele momento o tema lecionado não fosse de Cálculo Diferencial. Foi com muito gosto que assisti a estas duas aulas. Ainda em dezembro do mesmo ano, realizei a primeira entrevista temática sobre o percurso profissional da professora. Em janeiro de 2020 observei outra oficina sobre geogebra dinamizada por *Maria José* com sua turma de 11.º ano em parceria com uma universidade de Lisboa. Em abril e maio de 2020 realizei as observações de aulas e também a segunda entrevista temática.

Após um processo de análise dos dados coletados, assunto que discuto de uma forma mais pormenorizada a seguir, realizei um relatório escrito sobre cada um dos casos e encaminhei-os aos professores para que tivessem conhecimento em primeira mão deste material, conforme eu já havia acordado com eles aquando do início da coleta de dados. Uma vez entregue este material e após um período considerável para apreciação dos professores, realizei com cada um deles a última fase da coleta de dados, nomeadamente uma entrevista na qual se buscou a apreciação dos professores sobre o material escrito tendo em vista a validação dos casos. Essa entrevista foi realizada com *Mariana* e *João* em março de 2020 e com *Maria José* em julho do mesmo ano.

Apresento a seguir (Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3), de forma esquemática, a calendarização do processo de recolha de dados envolvendo cada um dos três professores.

Tabela 5.1: Síntese da calendarização da recolha de dados de *Mariana*

<table>
<tr><th colspan="4">Mariana</th></tr>
<tr><td colspan="3">2019</td><td>2020</td></tr>
<tr><td>Fevereiro</td><td>Maio</td><td>Junho</td><td>Março</td></tr>
<tr><td>1.ª entrevista temática</td><td></td><td>2.ª entrevista temática</td><td>Entrevista de Validação</td></tr>
<tr><td colspan="3">Entrevistas de reflexão sobre as aulas</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Observação de aulas no 11.º ano (10 aulas)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Recolha documental</td><td></td><td>Recolha documental</td></tr>
</table>

Tabela 5.2: Síntese da calendarização da recolha de dados de *João*

<table>
<tr><th colspan="5">João</th></tr>
<tr><td colspan="4">2019</td><td>2020</td></tr>
<tr><td>Março</td><td>Abril</td><td>Maio</td><td>Junho</td><td>Março</td></tr>
<tr><td></td><td>1.ª entrevista temática</td><td></td><td>2.ª entrevista temática</td><td>Entrevista de Validação</td></tr>
<tr><td colspan="3">Entrevistas de reflexão sobre as aulas</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Observação de aulas no 12.º ano (12 aulas)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Recolha documental</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabela 5.3: Síntese da calendarização da recolha de dados de Maria José

<table>
<tr><th colspan="6">Maria José</th></tr>
<tr><td colspan="2">2019</td><td colspan="4">2020</td></tr>
<tr><td>Outubro</td><td>Novembro</td><td>Janeiro</td><td>Maio</td><td>Junho</td><td>Setembro</td></tr>
<tr><td></td><td>Entrevistas temáticas (1ª e 2ª)</td><td></td><td></td><td></td><td>Entrevista de validação</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Observação oficina 1 e duas aulas</td><td></td><td>Observação oficina 2</td><td colspan="2">Observação de aulas no 11.º ano (10 aulas)</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">Entrevistas de reflexão sobre as aulas</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Recolha documental</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

5.4.2 Entrevistas

A entrevista constitui uma técnica essencial na recolha de dados na pesquisa qualitativa (Savenye & Robinson, 2001; Merriam, 1988; Patton, 2002), configurando-se assim um meio indispensável para o investigador poder aceder as maneiras como os participantes pensam e dão sentido ao mundo à sua volta. Para Bogdan e Biklen (1994) "a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio participante, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como eles interpretam aspetos do mundo" (p. 134). Merriam (1988), por seu turno, refere que "a entrevista é necessária quando não podemos observar comportamentos, sentimentos ou como as pessoas interpretam o mundo ao seu redor" (p. 72).

Nesta investigação que envolve estudos de caso, a entrevista assume um papel de grande relevância como instrumento de coleta de dados. Tal importância é destacada porque tal processo de recolha de dados está também associado à possibilidade de identificação de outras fontes de evidência:

> Em geral, as entrevistas são uma fonte essencial de evidência do estudo de caso porque a maioria delas é sobre assuntos humanos ou eventos comportamentais. Os entrevistados bem-informados podem proporcionar *insights* importantes sobre esses assuntos ou eventos. Eles também podem fornecer atalhos para a história prévia dessas situações, ajudando-o a identificar outras fontes relevantes de evidência. (Yin, 2010, p. 135).

No entanto, no que tange a sua operacionalização, as entrevistas apresentam especificidades que devem ser objeto de atenção por parte do investigador. Sobre esse aspeto, Erickson (2012) alerta para o fato de que o ato de "perguntar é muito mais intrusivo do que assistir, mesmo quando a pergunta é feita de maneira muito informal" (p. 1455). Bogdan e Biklen (1994), numa mesma linha, recomendam que uma preocupação do investigador nas entrevistas deve ser a criação de um ambiente descontraído, fazendo com que o entrevistado se sinta à vontade para falar. Tais preocupações foram tidas em consideração na realização das entrevistas neste estudo. Procurei também assumir, em todas as entrevistas, um tom de sensibilidade e de respeito para com o entrevistado, ocasiões em que falei incomparavelmente menos e procurei não emitir qualquer comentário que pudesse ser entendido como um juízo de valor. Neste estudo realizei dois tipos de entrevistas que apresentaram diferenciação tanto na duração quanto na incidência: (i) *entrevistas temáticas* tiveram uma duração aproximada de uma hora e meia e incidiram sobre temas específicos; e (ii) *entrevistas de reflexão do professor* tiveram uma duração sensivelmente menor (em torno de 30 minutos) e incidiram, como o próprio nome sugere, na apreciação do professor sobre as aulas por mim assistidas.

Ambos os tipos de entrevistas se enquadram no que alguns autores chamam de entrevistas semiestruturadas (Merriam, 1988; Bogdan & Biklen, 1994). Considerei as entrevistas semiestruturadas adequadas ao presente estudo por apresentarem uma estrutura bem clara de modo a considerar questões sobre assuntos específicos, sem no entanto tolherem o entrevistado de apresentar novas ideias que podem ser pertinentes para o estudo ou mesmo proporcionar os *insights* referidos por Yin (2010) sobre assuntos ou eventos específicos. Explicito a seguir as principais características de cada tipo de entrevista realizado, nomeadamente as entrevistas temáticas e as entrevistas de reflexão do professor.

A modalidade de *entrevista temática* ocorreu em três momentos. A primeira entrevista temática ocorreu antes ou ainda no início da fase de observação das aulas e visou reconstruir o percurso profissional do professor (Anexo 1) com foco no seu percurso profissional e na sua visão sobre a profissão. A segunda entrevista temática foi realizada já durante a fase final de observação de aula e incidiu sobre as conceções e crenças do professor relativas ao ensino dos tópicos de Cálculo Diferencial e contemplou também a visão do professor relativa ao contexto escolar (Anexo 2). A terceira e última entrevista temática ocorreu após o professor receber, em primeira mão, o material escrito relativo ao seu caso, ou seja, após um período mais concentrado de análise dos dados e que culminou com esse material escrito. Essa terceira entrevista temática apresentou dois focos: (i) buscou a validação do caso pelo próprio professor, lembrando que ele teve a liberdade de solicitar alguma adequação ou mesmo supressão de partes do texto; e (ii) buscou também uma apreciação geral do professor sobre a sua participação no estudo (Anexo 3).

A segunda modalidade de entrevista, que denominei de *reflexão do professor sobre a aula*, foi uma oportunidade para ouvir a reflexão do professor sobre a sua própria prática letiva. Esta segunda modalidade esteve diretamente relacionada com o "olhar" e o "perguntar" de Erickson (2012), conforme já referi. Estas entrevistas de reflexão realizaram-se, preferencialmente, no dia seguinte à aula. Quando tal não era possível, realizaram-se na primeira oportunidade possível. Para a operacionalizar em termos logísticos, eu realizava uma atenta leitura das notas de campo elaboradas após a observação da aula. Com isso identificava alguns episódios e passagens que gostaria de uma maior clarificação por parte do professor, sendo que estes já poderiam estar relacionados com a minhas categorias de análise provisórias. Quanto a estrutura das entrevistas de *reflexão do professor sobre a aula*, segui os três momentos identificados por Canavarro (2003): (i) permitir uma *apreciação completamente livre do professor* sobre o desenvolvimento da aula (nesse momento, em algumas situações, já poderiam ser respondidas algumas das questões dos próximos momentos); (ii) *dirigir ao professor questões concretas* relativas à estrutura e organização da aula, ao ambiente e interações, às tarefas matemáticas e ao discurso gerado; e (iii) *fala do professor sobre episódios específicos* identificados por mim (Anexo 4). Nesses momentos usava de minhas anotações contidas nas notas de campo para referenciar a professora sobre o episódio ou passagem em questão.

Todas as entrevistas foram gravadas com recurso a um pequeno gravador áudio portátil. A gravação das entrevistas também foi objeto de negociação com os professores. Antes de iniciar as entrevistas sempre solicitei autorização para a gravação, ao que os professores concordaram. O processo de transcrição das entrevistas foi integralmente conduzido por mim, pois considerei importante fazê-lo tendo em vista, com isso, garantir uma homogeneidade no tratamento dos dados.

O fato de as entrevistas terem sido integralmente áudio-gravadas e serem semiestruturadas, possuindo um guião com as perguntas, permitiu-me um maior grau de liberdade ao conduzi-las. Assim, não tive como preocupação principal copiar tudo o que o entrevistado dizia, mas sim tomava alguns poucos apontamentos. Desenvolvi ao longo das entrevistas uma técnica de internalizar as perguntas que deveria fazer e com isso pude focar mais no entrevistado, dando especial atenção para a sua entonação de voz, o seu estado de espírito, para a linguagem não verbal (especialmente para a gestual) e também para aspetos contextuais. Depois, aquando da transcrição da entrevista, procurava então inserir essas observações no material escrito.

5.4.3 Observação de aulas

A observação de aulas foi outro processo utilizado na recolha de dados nesta investigação. Considerando a importância e o relevo da observação dentro de uma abordagem qualitativa de pesquisa, Patton (2002) destaca que "para compreender completamente as complexidades de muitas situações, a participação e a observação do fenómeno de interesse poderá ser o melhor método de investigação" (p. 21). Nesta investigação, a observação das aulas permitiu o "olhar" referido por Erickson (2012), na tentativa de identificar e compreender os aspetos centrais da prática do professor no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial, ao passo que o "perguntar" referido pelo mesmo autor, foi contemplado nas entrevistas realizadas.

As observações podem variar de acordo com o grau de participação do observador. Merrian (1988) destaca que que podem existir várias posições assumidas pelo observador, podendo este ser um participante completo (neste caso o investigador é um membro do grupo) ou então, no outro extremo, ser apenas um espectador. Savenye e Robinson (2001) seguem uma abordagem similar, identificando a "observação participante" e a "observação não participante". No entanto, estes últimos autores destacam que mesmo na observação não participante, a presença do observador afeta, de algum modo, a dinâmica do que está sendo observado:

> Na observação não participante, o observador não interage em grande parte com aqueles a quem está observando (...) O pesquisador principalmente observa e regista e não tem papel específico como participante.

> Normalmente, é claro, o observador está "dentro" da cena e, portanto, a afeta de alguma maneira; isso deve ser levado em consideração." (p. 1053)

As observações levadas a termo nesta investigação não tiveram por objetivo participar de um modo ativo das aulas, seja auxiliando os alunos ou de qualquer outra forma. Antes pelo contrário, as observações buscaram captar os aspetos centrais da prática do professor no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial, sendo que nesses momentos assumi deliberadamente uma postura o mais discreta possível. Porém, tenho plena consciência que mesmo sem envolver-me na dinâmica da aula, estive "dentro da cena" que estava a observar. Assim, não estando em nenhum extremo, optei por chamar tal observação de "observação direta".

Durante a observação das aulas tive duas preocupações centrais. Uma primeira preocupação que tive foi a de não transmitir aos professores nenhuma expectativa do que esperava daquela aula. Uma segunda preocupação, como já referi, foi em assumir uma postura o mais discreta possível em sala de aula, de modo a não alterar com a minha presença padrões de comportamento e dinâmicas recorrentes naquele ambiente. Quanto à operacionalização, a observação direta foi realizada em dois momentos: (i) *um momento inicial*, antes da aula; e (ii) *a observação da aula* propriamente dita.

O momento inicial ocorreu sempre antes da aula. Teve como local principal a sala dos professores e também o corredor, enquanto eu e o professor nos dirigíamos para a sala de aula. Nestes momentos procurei inteirar-me junto ao professor a respeito dos objetivos que ele tinha para aquela aula, suas expectativas, comentários sobre a turma ou sobre algum aluno em particular. Esses momentos ocorreram sempre em um registo informal, sendo que não realizei a gravação em áudio e as notas sobre algum comentário de maior relevo eram tomadas em um momento posterior. Geralmente, fazia tais apontamentos logo que entrava na sala, enquanto os alunos ainda tomavam seus assentos e a aula ainda não iniciava.

Quanto à observação da aula propriamente dita, realizei a recolha de dados por meio de notas de campo. Savenye e Robinson (2001) referem que "a maioria dos estudos observacionais qualitativos se baseiam na anotação do pesquisador do que ocorre na forma de extensas anotações de campo" (p. 1052). Porém, os mesmos autores referem que o observador, por ser humano, não pode observar e registar tudo e, por consequência, é imperativo fazer escolhas. Desse modo, assumo o elemento da subjetividade presente tanto na recolha destes dados como também na fase analítica. Nessa fase de recolha, prosseguem Savenye e Robinson (2001) “o que é excluído pode ser tão importante quanto o que é incluído” (p. 1055). Merrian (1988), por seu turno, refere que “o conteúdo real das anotações de campo geralmente inclui o seguinte: descrição verbal do cenário, pessoas, atividades, citações diretas, comentários do observador” (p. 98). Considerando essa recomendação, desenvolvi um formato de notas de campo que buscaram incluir dados sobre a ação do professor e dos alunos, tarefas realizadas, metodologia, comunicação, opções e decisões tomadas pelo professor, dentre outros aspectos que na altura julguei serem objeto de interesse.

Para tanto, usei uma folha A4 em branco encimada por um cabeçalho e dividida em sua longitude por duas colunas, uma mais larga e outra mais estreita (Anexo 5). No cabeçalho da folha indicava a identificação geral da aula, incluindo: data, número da aula, turma, duração e número de alunos presentes. Na coluna mais larga registava os principais acontecimentos da dinâmica da aula, bem como os registos que a professora realizava no quadro. Na coluna mais estreita indicava a passagem do tempo (de 15 em 15 minutos ou de 20 em 20 minutos) e também alguns comentários de natureza mais interpretativa que a situação observada sucitava para que fossem posteriormente analisados, os chamados “comentários do observador” referidos por Merrian (1988).

Para a observação das aulas e tomada de notas sempre busquei uma posição intermediária da sala. Assim pude ter uma certa proximidade com algumas interações que o professor estabeleceu com alguns alunos que estavam próximo de mim. Em tais situações, procurava registar da forma mais fidedigna possível o diálogo estabelecido, transcrevendo citações diretas na linguagem dos próprios participantes. Em muitas situações nas aulas, pude acompanhar clarificações realizadas pelo professor no próprio caderno do aluno.

No entanto, tal tarefa de observar e de registar se mostrou, por vezes, bastante desafiante devido ao ritmo intenso que a aula assumia. Assim, em algumas situações, tive de interromper o que estava escrevendo para considerar uma situação nova que tomava corpo para somente depois (em um momento posterior da aula ou então imediatamente após a aula) completar o que havia iniciado. Desse modo, ao final essas notas pareciam terem sido escritas em códigos e devido ainda à rapidez com que eu as escrevia, tornavam-se assim quase ilegíveis para outra pessoa, o que representou para mim uma certa tranquilidade, nomeadamente a de saber que outras pessoas (sejam alunos ou mesmo o professor) poderiam espreitar à vontade o que eu estava a escrever.

Após a observação das aulas e a escrita das notas de campo eu então escrevia o relatório da aula. Esse relatório era digitado e salvo em um arquivo de computador. A folha com os meus manuscritos era digitalizada e também salva em um arquivo de computador. Ambos os materiais passavam então a fazer parte do que Yin (2010) chama de banco de dados do caso, estando, assim, rapidamente acessíveis para consultas posteriores. Mesmo apresentando um desafio logístico quanto à operacionalização, procurei sempre compor o relatório no mesmo dia da observação, seguindo a recomendação de Merrian (1988): "é imperativo que as anotações completas sejam escritas ou digitadas logo que possível após a observação (...) A observação em si é apenas metade do trabalho" (p. 96).

5.4.4 Análise de documentos

Na modalidade de estudo de caso, a recolha documental permite obter informações que complementam os dados que foram obtidos por meio de entrevistas e da própria observação direta. Desse modo, na presente investigação, a análise documental foi utilizada com menor expressão do que qualquer uma das outras duas já referidas, tendo por característica fundamental justamente o caráter complementar. Os documentos considerados foram de natureza bem diversa.

João, por exemplo, facultou-me o manual que utilizava em suas aulas, bem como um teste que realizou com os alunos. Foram documentos importantes para a compreensão do tipo e formato das questões trabalhadas em aula, bem como o formato de questões preconizado pelo professor nos testes. *Mariana*, para além de disponibilizar-me o manual que utilizava com a turma de 11.º ano também me ofereceu, no formato de livretos, uma espécie de *dossier* do agrupamento de escolas. Esse último foi muito útil para uma compreensão dos projetos realizados pela escola, além de servir como uma carta de apresentação (formal) da instituição, retratando elementos do contexto escolar que compreendiam uma caracterização da instituição e também dados sobre dinâmicas de projetos desenvolvidos. Ainda considerando *Mariana*, esta respondeu-me um email contendo as suas primeiras impressões sobre o material escrito por mim referente ao seu caso, tornando-se assim mais um material considerado nesse estudo.

5.5 Análise de dados

A análise qualitativa tem como preocupação transformar em descobertas uma quantidade significativa de dados coletados (Bogdan & Biklen, 1994; Patton, 2002; Yin, 2010). Porém, não existe uma fórmula ou um protocolo pré-estabelecido para se realizar tal transformação. Na realidade, o que existe são orientações e não receitas. Na análise dos dados, nada pode substituir a habilidade, sensibilidade e criatividade do investigador, constituindo essa fase um grande desafio na investigação (Yin, 2010).

Para Patton (2002), a análise qualitativa consiste justamente em compreender uma quantidade significativa de dados e envolve a redução do volume de informações brutas, o refinamento de significados e a construção de uma estrutura para comunicar a essência do que os dados revelam. Para este autor, aplicar diretrizes requer julgamento e criatividade e como cada estudo qualitativo é único, a abordagem analítica usada também será única: "Em suma, não existem regras absolutas, exceto, talvez, a seguinte: faça o seu melhor com todo o seu intelecto para representar de maneira justa os dados e comunicar o que os dados revelam, tendo em vista o objetivo do estudo" (p. 433). Merrian (1988), por seu turno, refere que "no processo de análise, os dados são consolidados, reduzidos e, em certa medida, interpretados" (p. 130). Uma definição semelhante é dada por Erickson (2012): "A análise consiste na revisão recursiva das fontes de informação com uma pergunta ou afirmação em mente, decidindo progressivamente quais informação devem ser atendidas mais adiante e, talvez ainda mais importante, as que não devem ser atendidas" (Erickson, 2012, p. 1458).

Assim como Merrian (1988) e Patton (2002), também Erickson (2012) faz questão de referir a importância da redução dos dados no momento da análise. Para isso, o autor lança mão de um aforismo que remete às artes gráficas, afirmando que "desenhar é deixar as coisas de fora" (p. 1458). Tal preocupação foi levada em consideração tanto durante a análise dos dados como também na escrita do relatório deste estudo, ou seja, tendo em vista que um grande volume de dados seria gerado durante a investigação, procurei, desde o início, reduzir o seu volume e focar nos aspetos que atendem mais aos objetivos do estudo.

Quanto à sua operacionalização, o processo analítico desdobrou-se em duas partes, com diferentes incidências e objetivos. Numa primeira parte, a coleta de dados e a análise ocorreram de modo simultâneo, sendo uma informada pela outra. Numa segunda parte, ocorreu a análise dos dados de modo exclusivo.

Conforme mencionei, o processo analítico teve início ainda na fase da recolha de dados. Savenye e Robinson referem que uma das características principais da pesquisa qualitativa é justamente o fato de os dados serem analisados de modo contínuo e ao longo de todo o estudo. Merrian (1988), por seu turno, ao enfatizar que coleta e análise são atividades simultâneas em uma pesquisa qualitativa, destacam:

> A análise começa com a primeira entrevista, a primeira observação, o primeiro documento lido. Informações emergentes, palpites e hipóteses tentativas direcionam a próxima fase da coleta de dados, que por sua vez leva ao refinamento ou reformulação das perguntas de alguém, e assim por diante.” (p. 119)

Durante esse processo de análise em simultâneo com a coleta de dados, tive o cuidado e a preocupação para que as minhas perceções iniciais aí obtidas não confinassem as demais possibilidades, mas que também não fossem perdidas, ou seja, o “cuidado para não permitir que essas interpretações iniciais confinem demais as possibilidades” (Patton, 2002, p. 437). Uma mais valia nesse sentido foi, sem dúvida, a escrita do relatório da aula observada logo a seguir à observação. Tais relatórios continham um espaço generoso dedicado aos chamados “comentários do observador” que possuiam um forte cariz interpretativo. Tais comentários, inclusivamente, são vivamente recomendados por Bogdan e Biklen (1994) tendo em vista que as ideias iniciais não sejam perdidas e que possam orientar e lançar luz para os passos seguintes.

A interação entre a análise e a recolha de dados ocorreu durante todo o período de duração desta última. Em seguida seguiu-se uma parte exclusivamente analítica, que, por seu turno, apresentou duas fases com incidências e objetivos distintos: (i) a primeira fase foi focada na análise de cada caso, tendo em vista a sua construção, sendo seguida (ii) por uma segunda fase que considerou os três casos e que tinha por objetivo formular as conclusões mais genéricas, nomeadamente as conclusões deste estudo.

A primeira fase da segunda parte do processo analítico baseou-se nos documentos produzidos durante a coleta, nomeadamente nas transcrições das entrevistas temáticas e das entrevistas de reflexão, nos relatórios descritivo-analítico das aulas observadas e nos materiais até ali reunidos. Nessa fase, mais focada e intensiva, realizei a chamada “busca por evidência” (Erickson, 2012), transformando-a em um “espaço da especulação” (Savenye & Robinson, 2001; Merrian, 1988).

Essa busca por evidência, conforme destaca Erickson (2012), “precisa ser exaustiva, a fim de garantir que evidências cruciais não confirmadas não sejam sistematicamente ignoradas” (p. 1459). E, nesse processo, destaca Merrian (1988), um papel importante deve ser dado à especulação: “a especulação, no entanto, é a chave para o desenvolvimento da teoria em um estudo qualitativo” (p. 141).

As duas sugestões anteriormente destacadas foram seguida nessa fase analítica mais concentrada, na qual busquei desenvolver o que Merrian (1988) chama de “conversa com os dados”, fazendo perguntas, tecendo comentários e considerações, tendo em vista “a busca de regularidades recorrentes nos dados” (p. 133). Nesta fase analítica mais focada e que envolveu a busca por evidências e a conversa com os dados foi também o momento em que ocorreu um dos aspetos mais complexos e críticos, nomeadamente a definição final das categorias de análise (Merrian, 1988).

Neste estudo, a definição das categorias foi inicialmente orientada pelo referencial teórico, tendo as seguintes categorias: (i) o percurso profissional, (ii) o contexto escolar, (iii) o ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário, e (iv) as aulas de Matemática envolvendo o Cálculo Diferencial. Tais categorias de análise foram corroboradas e confirmadas a partir da análise intensiva dos dados, sendo que as duas últimas categorias, apresentaram subcategorias distintas para cada um dos três professores.

Iniciei o processo de análise mais focada com as transcrições das entrevistas temáticas e de reflexão do professor. Li e reli várias vezes este material no formato impresso, o qual apresentava um espaço generoso de margens para que eu pudesse realizar anotações manuscritas (Anexo 6). Durante estas leituras, já fui identificando passagens que estavam mais alinhadas às categorias definidas enquanto realizava apontamentos, no formato escrito, de caráter interpretativo. Após esse trabalho, preparei então um plano de escrita para cada caso que contemplava as categorias percurso profissional, contexto escolar e o ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário. Neste plano de escrita já identifiquei os excertos das entrevistas que julguei pertinente constar no relatório escrito.

O trabalho analítico envolvendo os relatórios descritivo-analítico das aulas foi um tanto diferente. Inicialmente realizei a impressão de todos os relatórios de aula de cada caso, deixando um espaço significativo de margens para meus apontamentos (Anexo 7). Comecei fazendo uma leitura transversal do material e, em seguida, realizei várias leituras de cada relatório. Usando uma tabela construída especialmente para o efeito, fui identificando as passagens mais significativas e recorrentes e com isso identifiquei as subcategorias, em cada caso, para as categorias: o ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário e as aulas de Matemática envovendo Cálculo Diferencial. Nessa tabela identificava as páginas que continham as chamadas “vinhetas narrativas” referidas por Erickson (2012) e sempre que achava pertinente, voltava ao relatório da aula para verificar situações contextuais que envolviam tais vinhetas. O trabalho com as trancrições das entrevistas e com relatórios de aula foi complementado com a análise dos demais materiais.

Realizei este trabalho analítico tomando um caso por vez e somente quando concluía um é que passava ao seguinte. Iniciei com *Mariana*, depois *João* e finalmente com *Maria José*. Em cada caso e após este trabalho analítico mais intensivo escrevi o relatório escrito de cada caso. Na construção desses relatórios, procurei seguir as duas orientações dadas por Erickson (2012) em relação aos comentários orientadores específicos referentes às vinhetas narrativas ou às citações de entrevistas, nomeadamente: (i) identificar o ponto substantivo a ser ilustrado pelo exemplo em questão e (ii) identificar detalhes especiais aos quais o leitor deve prestar atenção. Após a escrita de cada relatório, estes foram então enviados aos professores para uma apreciação completa tendo em vista a validação dos casos. Este processo é explicitado na próxima secção. Por fim, realizei a segunda fase da segunda parte do processo analítico. Nesta fase confrontei os três casos identificando pontos de semelhança e também de diferença. Tal etapa permitiu formular conclusões mais abrangentes, tendo em vista as categorias e subcategorias delineadas, bem como os objetivos do estudo.

5.6 Validação

Após serem escritos, os casos foram enviados para que cada professor pudesse fazer a sua apreciação. Realizei tal envio por meio do correio eletrónico, sendo que no corpo do email para além de pedir uma leitura integral do texto, também fiz referência à algumas diretrizes que poderiam auxiliar os professores na referida apreciação, nomeadamente: (i) grau de identificação com o professor ali retratado; (ii) identificação de aspectos que considerassem mal tratados, sobretudo ao nível das interpretações e significados por mim construídos; (iii) deteção de alguma incorreção ou erro; e (iv) indicação de alguma clarificação e/ou apresentação de alguma sugestão que entendessem importante.

Ainda no corpo do email mencionei que os professores poderiam utilizar o tempo que julgassem necessário para tal apreciação. Pedi, no entanto, uma confirmação do recebimento do email (que enviei com o ficheiro em anexo) e, caso tivessem a preferência de apreciar o material impresso, providenciaria isso o mais rápido possível. Todos os professores realizaram a apreciação do texto em seu formato digital, não sendo necessário o envio do material impresso. Apresento a seguir como foi o processo de validação com cada um dos professores.

João respondeu-me o email após três dias do envio, dizendo ter recebido o material e que teria o maior gosto em realizar a leitura do documento. Passado pouco mais de um mês, agendamos um encontro para conversarmos. A data e o horário foram sugeridos por João, tendo em conta a sua disponibilidade para o efeito. No entanto, na data sugerida ocorreu um constrangimento que impossibilitou o nosso encontro presencial e a conversa foi então realizada por telefone. Naquele momento, as autoridades portuguesas competentes estavam a ponderar o cancelamento presencial das aulas em todas as escolas do país, tendo em conta uma pandemia mundial (já reconhecida pela Organização Mundial da Saúde) causada por um vírus oriundo da China, um novo tipo de coronavírus, que acometia o trato respiratório e era altamente contagioso.Tal suspensão veio mesmo a ocorrer no dia da nossa conversa, sendo uma medida extrema, sem precedentes e que buscava conter o contágio pelo vírus no ambiente escolar. Diante desse quadro, e atendendo às orientações das autoridades de saúde, julguei adequado realizar a conversa de modo não presencial.

Como já referi, João ocupava o cargo de adjunto do diretor e estava, naquele momento, numa situação de muita pressão tendo em vista a possibilidade de cancelamento das aulas de modo repentino e com todas as implicações inerentes que se colocavam. Contudo, ao iniciar a conversa, mostrou a sua habitual tranquilidade e serenidade, mencionando que felizmente na escola nenhum professor, funcionário ou aluno havia testado positivo para o vírus até aquele momento: “por aqui, por enquanto, estamos sossegados, depois vamos ver”.

O fato de a conversa ter sido realizada por telefone, possibilitou-me uma maior liberdade para anotar o que professor dizia e foi exatamente isso o que eu fiz. Inicialmente, ao realizar uma apreciação global do material, João comentou que o relato ali escrito conseguiu focar os pontos principais, as suas preocupações e “as coisa que foram feitas na altura”. Quando convidado a pronunciar sobre a identificação com o caso ali retratado, foi enfático: “acho que está tudo correto... todos os pontos... todas as coisas que eu julgo importante estão ali bem retratadas”. Quando perguntado se encontrou alguma incorreção ou gostaria que algo fosse suprimido ou clarificado, foi assertivo: “eu acho que não, acho que está correto tudo”.

Validado por completo o caso, João passou a falar da experiência que teve através da sua participação. Fez uma apreciação muito positiva, referindo como importante para si ver como o seu trabalho docente é percebido por alguém de fora: “foi interessante ver depois como é que os olhos de outra pessoa viram as minhas aulas, a relação com os alunos e o que se passou... é sempre importante sabermos o que se passa para os outros daquilo que fazemos”. Ademais, referiu mais uma vez que todas as aulas por mim assistidas foram “aulas normais”, onde não buscou fazer nada de especial tendo em conta sua participação no estudo e mostrou-se disponível caso eu necessitasse de algo mais.

No caso de Mariana, no mesmo dia do envio do material escrito, ela respondeu o email acusando tal recebimento e também mencionou que já havia iniciado o processo de leitura, relatando que já tinha lido até a página 14. Referiu também, naquela oportunidade, uma primeira reação ao material escrito: “nunca pensei que escrevesse tal e qual eu falei, deveria ter falado melhor [emoji com riso]”. Entretanto, disse que por ela estava tudo bem e que faria o restante da leitura e depois conversaríamos a respeito.

Passado mais de um mês da entrega do material, contatei novamente Mariana e combinamos um encontro presencial, tendo por local a sua escola e com o objetivo de conversarmos a respeito das suas reações em relação ao material escrito. O encontro presencial infelizmente não foi possível de ser realizado devido ao cancelamento das aulas presenciais, tal como aconteceu com João. Assim, a nossa conversa foi realizada por telefone em uma nova data e horário sugeridos por Mariana.

Ao iniciarmos a nossa conversa, Mariana parecia bem disposta, apesar dos constrangimentos e contigenciamentos inerentes à situação até então sem precedentes, onde as autoridades de saúde indicavam o distanciamento social. Sobre isso, falou inicialmente a respeito das alterações de suas rotinas domésticas, referindo que precisamente naquele dia já completava cinco dias sem sair de casa. Relatou que era ela a responsável pelo cuidado dos seus dois filhos menores e que somente o marido é que saía para trabalhar e também era ele que realizava os deslocamentos para as compras no mercado para a família.

Quanto à rotina profissional, mencionou que tinha uma turma de 12.º ano e que estava a realizar tudo à distância, referindo que para além do email da turma também havia criado um grupo em um aplicativo de mensagens e através desse aplicativo estava a implementar o "exercício do dia" para os alunos trabalharem a partir de casa. Por meio desta plataforma, e a partir de sua casa, também gravava e disponibilizava vídeos em que buscava responder as dúvidas dos alunos: "por acaso o meu marido conseguiu trazer aqui para casa um quadro branco e eu fiz vídeos a explicar os exercícios em que eles sentiram dúvidas e enviei, pronto, para eles... e eles vão dando *feedbacks*".

Conforme mencionei, em resposta ao email que continha o arquivo com o seu caso escrito, Mariana já apresentou uma primeira reação sobre a leitura que estava, naquele momento, a realizar. Quando convidada a explicar, por ocasião de nossa conversa, essa sua primeira reação, relatou que "não sabia que aquilo ia ser tudo transcrito", ou seja, que se utilizaria de expressões e citações literais. Então expliquei-lhe sobre o processo de escrita, onde busquei uma interpretação a partir dos dados recolhidos e que, para isso, era recorrente e, até certo ponto comum, o uso de excertos de entrevistas e também das passagens das aulas observadas. Entretanto, mesmo por considerar que "quando se lê, fica um bocadinho estranho" sentia-se totalmente identificada com a professora ali descrita, referindo que "ao ler, lembrava-me perfeitamente de todas aquelas conversas que tivemos". Assim, diz identificar-se "completamente" com a professora ali descrita: "está lá uma realidade com um bom retrato que... o meu retrato como professora, portanto concordo plenamente". Ao ser questionada se encontrou no texto algum aspecto que gostaria de uma maior clarificação ou possuía alguma sugestão para alteração, sobretudo ao nível das interpretações por mim realizadas e dos significados construídos, Mariana respondeu de forma negativa, referindo que “no fundo está tudo, tudo de acordo com o que se passou... também não tenho nada, nada a alterar... nada a sugerir para modificar”.

Tendo validado completamente o caso, Mariana passou então a fazer um balanço sobre o que significou para si a sua participação. Em tal apreciação, contemplou duas componentes, uma relativa às suas aulas e outra relativa à questão profissional. Ao comentar sobre a parte relativa às aulas, Mariana considerou tratar-se de um “processo muito natural”, referindo que “o que foi feito, foi feito naturalmente como se a aula não estivesse a ser assistida por alguém externo à turma”. Afirmou que “em termos de aula não alterou qualquer rotina” e mencionou ainda que o mesmo ocorreu com os alunos, ou seja, “o comportamento deles [alunos] não se alterou porque estava alguém externo à turma na sala de aula”.

No tocante ao segundo aspecto mencionado, nomeadamente o relativo às questões profissionais, Mariana relatou que a sua participação a fez “pensar em coisas que... que fazia, se calhar, com alguma naturalidade e que nunca tinha pensado”. Buscando uma maior clarificação, lançou mão de dois exemplos: o primeiro envolvendo a organização das suas aulas e o segundo relativo à forma de funcionamento da escola e do ensino. Quanto à organização das suas aulas, referiu que “a organização da minha aula saia naturalmente sem, sem uma planificação exaustiva, não é... e, na realidade fez-me pensar, mas no fundo foi um reconhecimento, portanto as coisas foram feitas como realmente acho que deveriam ser”. No tocante a forma de funcionar da escola e do ensino, referiu que “obviamente que me fez pensar sobre o assunto... e que provavelmente não iria pensar se... se não fosse o Adilson”.

Maria José, por seu turno, respondeu-me ao email no mesmo dia. Na oportunidade, acusou o recebimento do material e disse que já havia iniciado a leitura, entretanto gostava de realizar uma segunda leitura mais atenta do texto para, daí sim, realizarmos uma conversa. Como ainda estava a terminar alguns relatórios para a escola, disse-me que dentro de uma semana poderíamos conversar, mas que confirmaria ainda tal possibilidade. Agradeci a disponibilidade e atenção e deixei a critério dela a melhor altura para conversarmos sobre o material escrito.

A conversa na data inicialmente perspetivada pela professora não aconteceu. Maria José não contatou-me, entrando de férias na semana seguinte e achei por bem não estabelecer qualquer contato neste período. No regresso das férias, voltei a contatá-la e agendamos a nossa conversa para a semana seguinte, em uma quarta-feira pela manhã. Entretando, quando liguei, Maria José disse que surgiu uma reunião que não estava prevista e teríamos que conversar mais tarde. E assim a nossa conversa aconteceu ao final da tarde, após aproximadamente um mês e meio da entrega do texto para a professora.

A conversa aconteceu por telefone devido à pandemia. Maria José começou logo por referir que estava com muitas demandas devido ao início do ano letivo e não pode conversar logo pela manhã naquele dia, apesar de ter sugerido tal horário para o efeito. Em relação ao material escrito, quando questionada se havia alguma passagem que precisava ser retificada ou alterada, referiu uma passagem no texto em que constava uma referência sua sobre outra disciplina e sugeriu que "fosse escrito de outra maneira" ou então que fosse retirado. Na sequência, realizou uma breve discussão sobre o mérito da questão e defendeu o seu ponto de vista (de modo que o que ali estava retratado estava correto), entretanto, mencionou que ficaria em uma situação mais confortável se o nome da disciplina não constasse no texto, evitando assim "comprometer ali algumas situações". Na oportunidade, garanti a ela que assim o faria, ou seja, não deixaria no texto a menção a esta disciplina.

Ao continuar a sua apreciação, Maria José também referiu a passagem no texto que tratava da dificuldade de um aluno sobre os limites. Referiu que aquilo estava "bem explicado" e que, de fato, o aluno "tinha descuidado um bocado com o trabalho", pois ela poderia ver quem tinha acessado os materiais ou não. Disse também que ficou "muito contente" com a descrição realizada da escola e que tal descrição a deixou muito feliz, referindo que "nós notamos quando uma pessoa não se sente bem no sítio onde está a trabalhar... Eu sinto-me muito bem ali".

Validado completamente o caso, Maria José passou a fazer uma apreciação sobre a sua experiência docente em um ano letivo muito atípico que iniciou com aulas presenciais e depois passou-se integralmente para aulas à distância. Ao refletir sobre essa matéria, reafirmou a importância do ensino presencial referindo que é muito diferente do que estar à "frente do computador com as câmeras desligadas" e que, é muito importante o professor ter alguma sensibilidade e oferecer também algum apoio emocional aos alunos, mesmo nas aulas à distância: "ter ali alguma sensibilidade, brincar um bocadinho, incentivar a participação”. Por fim, teceu alguns comentários sobre a investigação que eu estava a realizar, mencionando como uma mais valia o fato de eu ter conhecido o seu trabalho “não só como professora de Matemática”, mas também como coordenadora de projetos do agrupamento. Considerou como enriquecedor também o fato de se ter presenciado as duas situações, nomeadamente o ensino presencial e o ensino à distância.

Capítulo 6

Professora Mariana

6.1 Apresentação

Mariana é professora há aproximadamente dezoito anos e leciona Matemática para 2.º ciclo, 3.º ciclo e ensino secundário há dez anos em uma escola da região metropolitana de Lisboa. Realizei quatro entrevistas com a professora, destas, duas foram temáticas e duas foram de reflexão sobre as aulas observadas. A primeira entrevista temática teve uma duração aproximada de uma hora, enquanto que a segunda entrevista temática durou cerca de uma hora e quarenta minutos. Todas as entrevistas ocorreram no primeiro semestre de 2019: A primeira entrevista temática teve lugar no início de fevereiro; as duas entrevistas de reflexão ocorreram em maio e a segunda entrevista temática ocorreu no início de junho.

Todas as quatro entrevistas foram realizadas em uma sala contígua à sala dos professores da escola onde Mariana lecionava. As entrevistas foram sempre às sextas-feiras pela manhã, com início as dez e meia. O dia e o horário, acordados previamente, eram os que davam mais jeito à professora, uma vez que ela tinha aula logo a seguir às entrevistas. Esta sala onde ocorreram as entrevistas era praticamente uma sala anexa à sala dos professores, sendo separada desta por uma parede de vidro com uma abertura central que dava acesso direto à sala dos professores. Neste pequena sala havia quatro mesas com computadores (junto à parede) para uso dos docentes e uma pequena mesa circular com cadeiras, local onde foram realizadas e gravadas as quatro entrevistas. Próximo à mesa havia uma estante com um aparelho micro-ondas para uso dos professores. A sala dos professores, mais ampla, apresentava cadeiras estofadas junto a duas de suas paredes e uma mesa de centro, além de três mesas circulares e um espaço com uma pequena cantina, local onde os docentes podiam comprar algo para beber ou comer (também havia uma máquina de café expresso na sala). A cantina tinha um aspecto muito organizado e apresentava algumas tortas e frutas frescas em suas prateleiras de vidro e era atendida por uma funcionária que sempre tinha o seu rádio ligado em uma estação local, mas com o volume sempre moderado.

A primeira entrevista temática correu muito bem. Durou cerca de uma hora, foi muito fluente e incidiu sobre o percurso profissional da professora. Na oportunidade, a professora mostrou-se sempre muito à vontade, não apresentando qualquer constrangimento devido ao fato de toda a nossa conversa ter sido gravada. Foi também muito solícita no sentido de colocar-se à disposição para contribuir e também em facultar manuais escolares que utilizava nas suas aulas.

As duas entrevistas de reflexão sobre as aulas observadas também correram bem. Entretanto, talvez pelo fato de as duas entrevistas terem sido realizadas já no período final do ano letivo, foi perceptível uma maior circulação de professores na sala. No entanto, isso não prejudicou o bom andamento das duas entrevistas. Nestas entrevistas, em um primeiro momento, a professora realizou uma apreciação livre das aulas em questão e em um segundo momento, coloquei à professora alguns episódios e passagens que gostaria de uma maior clarificação. Tanto na realização da apreciação da aula quanto na parte em que foi confrontada com episódios específicos, a professora demostrou segurança e convicção sobre aquilo que falava.

Tanto na primeira entrevista temática como nas duas entrevistas de reflexão, Mariana mostrou-se bem disposta e pontual, estando sempre na sala no momento de minha chegada. Em nenhum destes momentos eu apanhei-a isolada na sala. Sempre estava a conversar com uma ou mais colegas de trabalho. Durante as entrevistas, manteve sempre um tom descontraído e leve, demonstrando estar sempre muito à vontade quando questionada.

A última entrevista temática, como já referi, ocorreu no mesmo local das demais. O dia e horário foram combinados com a professora. Neste dia, uma sexta-feira ensolarada de final de primavera, execionalmente a professora não tinha aula a seguir e assim teve mais disponibilidade de tempo para a entrevista. Esta entrevista temática incidiu sobre dois eixos: (i) o contexto escolar – que não pode ser apreciado na primeira entrevista temática e (ii) as conceções da professora sobre o ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário (Matemática A). Na oportunidade, já praticamente ao final do ano letivo 2018/2019, a professora apresentava um aspeto muito cansado, traduzido em seu semblante e também no seu tom de voz, desta vez mais baixo que o habitual. Mas com o transcorrer da entrevista, parece ter 'recarregado suas baterias' e não demorou muito para abrir o seu peculiar sorriso enquanto falava. Foi a entrevista de maior duração de todas as realizadas. E mais uma vez, apesar dos constrangimentos de final de ano letivo, a professora mostrou-se solícita e com vontade de contribuir, falando muito e com muita clareza (em várias oportunidades buscou o auxílio de exemplos para corroborar suas colocações).

6.1.1 O percurso Profissional

Mariana é professora de Matemática há aproximadamente dezoito anos. Nascida no norte de Portugal, realizou sua formação pré-universitária nesta região e os estudos conducentes ao grau de Licenciada em Matemática (na modalidade pré-Bolonha) na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Atualmente, leciona Matemática para o 2.º ciclo, 3.º ciclo e ensino secundário em uma escola da região metropolitana de Lisboa, encontrando-se no quadro de docentes efetivos desta escola há exatos dez anos.

O gosto pela Matemática, segundo Mariana, sempre foi uma constante em sua vida pré-universitária: "eu sempre gostei de Matemática" *(entrev. temática 1, p. 1)*. Na altura do décimo ano do ensino secundário, por influência de seu pai, pretendia tirar o curso de Engenharia Civil:

> Portanto no 10.º ano, para mim era bem claro que eu queria ser... que eu queria ir para Engenharia Civil... porque estava ligado um bocado com o meu pai, portanto era claríssimo para mim que eu queria ir para aí.
>
> *(entrev. temática 1, p. 1)*

Devido a este interesse em Engenharia Civil, Mariana fez suas escolhas sempre tendo em conta essa vontade: "portanto eu tive geometria descritiva, eu tive desenho técnico-mecânico" *(entrev. temática 1, p. 1)*. Mas refere não se lembrar da viragem que fez com que abandonasse a ideia de tirar o curso de Engenharia Civil e optasse pelo curso de Matemática. Entretanto, segundo ela, esse momento ocorreu no décimo segundo ano do ensino secundário. Para além de uma discordância sua quanto a forma de explicar de sua professora de Matemática do 12.º ano, credita essa mudança de ideia, de forma peremptória, a uma experiência que teve com um professor explicador de Matemática (portanto em um contexto extra escolar):

> Eu não sei, eu já pensei várias vezes... eu não me lembro da mudança... do ter mudado de ideia, mas foi no 12.º de certeza! E foi por causa de um explicador que eu tive! Portanto... nós tínhamos Matemática e [pequena pausa] houve uma alteração de programa neste ano... porque foi um ano de mudanças quando eu fui para o secundário e portanto houve ali uma parte em que... não sentia que estava... não sentia... quer dizer... eu achava que aquela mensagem que a professora estava a passar não chegava... ela não estava a explicar da melhor forma.
>
> *(entrev. temática 1, p. 1)*

Segundo Mariana, este professor "era muito voltado para alunos que tinham boas notas e que queriam ter melhores resultados" *(entrev. temática 1, p. 2)* e que somente alunos com um bom desempenho em Matemática o procuravam: "Digamos que um aluno que tivesse dificuldade com a Matemática, ele não seria o melhor explicador" *(entrev. temática 1, p. 2)*.

Essa experiência que teve com o professor explicador no décimo segundo ano do secundário parece ter sido muito marcante para Mariana. A partir dela, Mariana diz ter passado a "adorar a Matemática", pois o professor a "fez ver as coisas de uma forma muito diferente... como a minha professora não tinha me posto a ver e portanto... ela foi minha professora no 10.º, 11.º e 12.º" *(entrev. temática 1, p. 2)*. Segundo suas próprias palavras:

> A visão dele, a forma como trabalhávamos... como nos motivava... porque estávamos sempre um grupo de três ou quatro lá .. que ele até nos separava de outros... e portanto foi essa a mudança.
>
> *(entrev. temática 1, p. 2)*.

A procura de Mariana por aulas de explicações de Matemática, justamente na altura do 12.º ano, estava relacionada com a preparação para o exame final de Matemática, no qual se lembra de ter errado apenas uma única questão, justamente uma questão que envolvia um conceito do Cálculo Diferencial:

> "E daí, pronto, ao final do 12.º eu fiz o exame e [risos] só errei... lembro-me perfeitamente, só errei foi uma [questão] de escolha múltipla... porque ao derivar [risos]... ao derivar o cosseno esqueci-me do menos! E era numa escolha múltipla. Já não lembro a questão em si, mas lembro é que tinha que derivar!"
>
> *(entrev. temática 1, p. 2)*

Concluídos os estudos no ensino secundário e realizada a opção por Matemática, Mariana então passa a estudar na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e recorda da dificuldade que enfrentou no 1.º semestre do curso: "(...) fui estudar para a Universidade do Porto... na Faculdade de Ciências... que é [foi] um trauma o 1.º semestre" *(entrev. temática 1, p. 2)*. Quando questionada sobre a dificuldade que enfrentou nesse seu 1.º semestre de estudos universitários, Marina prontamente respondeu: "É... parece que você entra em um outro mundo" *(entrev. temática 1, p. 2).*

Este "outro mundo" referido por Mariana parece estar relacionado com a questão de se provar muitos resultados. Ela inclusivamente relaciona essa experiência pessoal passada (aquando do início de seus estudos universitários) com a escola e seus alunos atualmente, o que é possível depreender a partir da seguinte passagem:

> Portanto quando... porque... é o que as vezes... eu tento explicar, as vezes, aos meus alunos [pausa]... nós aqui, tudo é dado porque é assim e o teorema diz isto e vamos aplicar e... quando se chega à Universidade, começa-se a provar tudo... desde... [risos].
>
> *(entrev. temática 1, p. 3)*

No entanto, mesmo considerando um "trauma" essa experiência do primeiro semestre no ensino superior e classificando como "muito exigente" o seu percurso formativo nesta etapa, refere que "nunca tive dúvidas sobre o que eu queria" *(entrev. temática 1, p. 3)* e chega inclusive a recomendar um curso de Matemática para os seus alunos: "(...) eu costumo sempre dizer aos alunos quando não sabem o que querem... vão para um curso de Matemática" *(entrev. temática 2, p. 8)*. Quando convidada a justificar tal recomendação aos alunos, Mariana ampliou o interesse também para a Física e relacionou tal escolha com as possibilidades formativas no ensino superior na modalidade pós-Bolonha, além da valorização em se ter uma base sólida nesses campos e à possibilidade em prosseguir os estudos no mestrado:

> Não sabem o que querem? Vão para Matemática, vão para Física... e tenham ali uma base sólida e a seguir do mestrado... entretanto, vocês descobrem outras coisas, são três anos, não conseguem ver muitas coisas... mas, entretanto, querem uma coisa, vão tirar qualquer coisa de Gestão, de Engenharia, de... já é um mestrado mais especializado naquilo... porque isso é muito, muito valorizado.
>
> *(entrev. temática 2, p. 9)*

Terminada a formação superior, Mariana realizou um concurso para seleção de professores a nível nacional. Em sua visão, deveria, naquela altura, concorrer a nível nacional para ficar a contrato e ter a certeza de ficar colocada em algum lugar.

Mariana trabalhou a contrato por cinco anos e nesse período lecionou em cinco escolas diferentes. Durante esse seu início na carreira docente, realizou um verdadeiro périplo por Portugal: lecionou em escolas situadas no norte, na parte central e no sul do país (nesta última região, em duas oportunidades). Esse período inicial na profissão, com a passagem por muitas escolas situadas em regiões diferentes e dentro de um curto espaço temporal parece ter sido significativo para a professora. Quando convidada a pronunciar-se sobre algo marcante que tivesse ocorrido em sua carreira, disse não lembrar-se de nada, mas faz referência às pessoas que conheceu e o convívio estabelecido durante esta fase inicial de vida profissional, momento em que estava, segundo disse, “fora de casa”:

> Nada muito marcante! O que me marca mais... o que me marcou mais em algumas escolas foram as pessoas que eu conheci... portanto há assim um grande convício em quase todas as escolas onde eu tenho estado... houve sempre... principalmente quando eu era contratada... que era muito nova... havia sempre muitos professores na mesma situação que eu e, portanto, esse convívio foi muito bom porque toda a gente estava fora de casa.
>
> *(entrev. temática 1, p. 4)*

O último ano a contrato, antes de entrar nos quadros, foi justamente no norte do país, em uma cidade muito próxima à cidade de seus pais: “eu tinha saído aos dezoito anos da casa de meus pais, não é... estudei sempre no Porto e depois fiquei sempre a dar aulas fora e nesse ano regressei” *(entrev. temática 1, p. 4)*. Mas a zona na qual Mariana conseguiu entrar foi na zona de Lisboa, onde permaneceu por três anos em uma escola (próxima da escola atual): “E depois passado três anos, voltei a concorrer... abriram novamente os concursos... voltei a concorrer e fiquei no quadro desta escola.” *(entrev. temática 1, p. 4)*.

A escola atual é portanto a sétima escola de Mariana. Já está nela há dez anos e relata que foi uma decisão dela e do marido decidir ficar e não tentar o regresso para o norte:

> Foi uma decisão minha e de meu marido termos ficado cá... porque sempre eu podia tentar ir pro norte... só que isso causa[ria] muita instabilidade... isso não se sabe se consegue ou não se consegue... portanto chega-se numa certa altura em que é necessário pensar em ter uma nossa casa... e daí foi uma decisão nossa de ficarmos cá porque gostamos.
>
> *(entrev. temática 1, p. 4)*

Quando convidada a refletir sobre quais mudanças e evoluções reconhece ao longo do seu percurso profissional, Mariana aponta dois tipos de mudança: (i) o primeiro tipo, designado por ela como a "minha grande mudança" *(entrev. temática 1, p. 5)* se refere a forma de avaliar e (ii) o segundo tipo se relaciona com a tolerância, "acho que sou muito mais tolerante" *(entrev. temática 1, p. 5)*.

No tocante à mudança na forma de avaliar, Mariana reconhece como sendo a grande alteração e menciona que: "eu valorizo muito mais o que o aluno mostra que sabe do que propriamente o que escreve... o que [o aluno] mostra em sala de aula" *(entrev. temática 1, p. 5)* e para exemplificar, menciona o seus testes e a valorização do raciocínio do aluno:

> E isso nota-se, por exemplo, na correção dos meus testes em que eu valorizo muito todo o raciocínio... tudo o que o aluno está ali a fazer, mesmo que ele cometa muitas "falhazitas" pelo meio... erros de cálculo ou confundiu uma pequena coisa, mas quer dizer... no geral, o raciocínio está correto.
>
> *(entrev. temática 1, p. 5)*

No que se refere à mudança relativa à tolerância, Mariana parece referir-se a não penalizar o aluno ao nível da avaliação:

> Portanto sou muito tolerante neste sentido de descontar muito pouco (...) eu acho que era muito menos no início e portanto... tem que fazer assim... tem que ser assim tudo direitinho com muito rigor... da parte do rigor da escrita também foi obviamente ensinando sempre que eles tem que ter esse cuidado com o rigor da escrita, mas não penalizando muito ao nível da avaliação.
>
> *(entrev. temática 1, p. 5)*

Mariana atua tanto no ensino básico como no ensino secundário atualmente (possui duas turmas de 7.º ano e uma de 11.º ano). Mencionou sua predileção em atuar no ensino básico, por considerar que os alunos, nesta fase, segundo suas palavras, "estão mais abertos a aprender”. Disse que, por vezes, “os alunos perdem a noção do que estão a fazer... passam muito ao formal e às regras e ao mecânico” *(entrev. temática 1, p. 6)*. Para exemplificar a questão de o aluno “passar muito ao formal”, recorre a um episódio ocorrido em sala de aula com um aluno do ensino secundário:

> No ensino básico nos dá mais essa liberdade e até porque eles estão mais abertos... a aprender e eles... a tentar por as coisas desta forma para não estar ali com aquelas formalidades... muito preso... fica muito mecânico e eles não sabem o que é... porque eles depois... eu ainda outro dia... esta semana com um aluno do secundário, dou uma equação... era qualquer coisa da solução da equação... e ‘solução da equação?’ ‘Mas três é solução da equação?’... ‘mas isso é o quê?’... porque o aluno está tão preso ao mecânico, pronto.
>
> *(entrev. temática 1, p. 6)*

Quando convidada a refletir sobre o que menos gosta no ensino, Mariana prontamente respondeu serem as condições de trabalho, que classificou como muito más: “O que menos gosto: as condições que temos que são muito más. Isso é o que eu menos gosto (...) ” *(entrev. temática 1, p. 6)*. Para exemplificar, cita a questão de os investimentos serem pontuais e faltar o básico para se ter salas de aula confortáveis:

> O que há são investimentos pontuais: pôe aqui uma “mesita” [faz gesto com a mão]... portanto nós damos aulas... aqui em Portugal está frio.... agora está frio... e como viste, ali naquela sala é gelada... e portanto nós temos que dar aulas de casaco... não há um aquecimento. Mesmo os materiais... eu não estou a falar de computadores, de tablets... estou a colocar é o básico e portanto... ter salas confortáveis para os alunos, salas agradáveis... portanto termos... até bem pouco tempo aquela sala não era assim... era virada ao contrário... os quadros não escreviam... eram de giz com quarenta anos e não escreviam. Depois de muita, muita insistência... não é um problema das escolas... as escolas não têm dinheiro e portanto isso é o que mais me custa... é o fato de não haver investimento e nós estarmos a trabalhar.
>
> *(entrev. temática 1, p p. 6-7)*

Quando questionada sobre o que mais gosta no ensino, Mariana responde de forma rápida: “é mesmo ensinar”. Mas logo a seguir tempera essa sua resposta dizendo que gosta mesmo “é de ensinar onde os alunos... dos alunos gostarem do que estão a fazer” *(entrev. temática 1, p. 7)* e acrescenta que a sua turma do ensino secundário (11.º ano) não é um bom exemplo disso, mencionando que (conforme já exposto), neste momento, é mais agradável para si estar a dar aulas ao 7.º ano do que ao 11.º ano:

> Porque eu tenho dois 7.ºs... são pequeninos, não é... que os alunos ficam com aqueles olhinhos a brilhar e fazem ‘ah! pois é’ [mudança no tom de voz

> e expressão facial de admiração]... portanto eles estão ali a ouvir e a tentar entender e ficam ainda admirados com o que estão a aprender e maravilhados com a descoberta... esta turma do 11.º, não... estão sempre a resmungar porque têm trabalhos... têm muitas disciplinas e porque têm testes... portanto... porque não sei o quê... e pronto.
>
> *(entrev. temática 1, p. 7)*

Quando lhe perguntei o que mais lhe motivava enquanto professora, Mariana referiu que neste momento estava "menos motivada do que gostava" *(entrev. temática 1, p. 7)*. E a seguir, procurando justificar essa sua posição, lembrou-se do que representava a classe docente, em sua visão, à epoca que era estudante: "quando eu era estudante, os professores eram uma classe muito respeitada e com um nível financeiro muito estável" *(entrev. temática 1, p. 7)*. Atualmente, contrastando com a visão de outrora, Mariana refere a situação de estagnação da carreira docente como uma das causas de sua desmotivação:

> "Atualmente não... os professores estão muito mal pagos... estamos a nove anos, quatro meses e não sei quanto [tempo] congelados. E portanto eu dou aulas há [quase] vinte anos e recebo praticamente o mesmo que recebia no início... não houve progressão [na carreira]! E portanto isso é uma coisa que está a me desmotivar!"
>
> *(entrev. temática 1, p. 7)*

Na sequência, Mariana ainda acrescenta "o pouco respeito que se tem pela classe", tanto do Ministério da Educação quanto da sociedade em geral como sendo outra razão para sua falta de motivação: "toda a gente põe em causa os professores", "acham que estão sempre a pedir" e "sem olhar de fundo" *(entrev. temática 1, p p. 7-8)*. Para Mariana, esse quadro de desvalorização e de desprestígio da profissão docente, para além da desmotivação, contribui para (após dezoito anos de docência) colocar em questão o fato de querer continuar na profissão: "será que eu vou querer fazer isso a minha vida toda? Será que não é melhor pensar em uma alternativa?" *(entrev. temática 1, p. 7)*.

De modo resumido, Mariana é professora de Matemática há aproximadamente dezoito anos, período em que lecionou em sete escolas diferentes nas regiões norte, central e sul de Portugal. Está há dez anos em uma escola da região metropolitana de Lisboa, onde leciona Matemática para o 2.º ciclo, 3.º ciclo e secundário. Mariana afirma que foi a partir da experiência que teve com um professor explicador (quando era estudante do 12.º ano), que passou a "adorar a Matemática" e decidiu ser professora. Considerando o seu percurso profissional, Mariana refere a mudança na forma de avaliar e o aumento da sua tolerância como sendo as duas mudanças mais significativas. E, por fim, refere que o que mais gosta no ensino é mesmo ensinar a alunos que realmente gostam de estudar e o que menos gosta no ensino é a falta de condições de trabalho, sendo que esta última parece contribuir de modo significativo para Mariana não estar tão motivada quanto gostaria na profissão.

6.1.2 O contexto escolar

Conforme já referido, Mariana leciona há dez anos em uma escola situada na região metropolitana de Lisboa: "Aqui eu estou há dez anos... desde 2009, setembro de 2009... ah... este é o meu décimo ano aqui [risos]". Mariana diz que na escola "havia o buraco do 2.º ciclo", mas que depois de algum tempo passou a contar com o 2.º ciclo, tornando-se assim um agrupamento: "(...) os agrupamentos são... são conjuntos de escolas em que tem desde o início até o fim... portanto temos do pré-escolar até o 12.º" *(entrev. temática 2, p. 19).* Assim, atua como professora de Matemática no 2.º ciclo, 3.º ciclo e ensino secundário.

Quando perguntada se a escola é pouco ou muito dinâmica, Mariana responde à questão, após um período de silêncio, de forma direta: "Pouco" *(entrev. temática 2, p. 19)*. Em sua visão "acaba por ser um conjunto de fatores que levam ao... que levam ao... à falta de incentivo para as outras coisas" *(entrev. temática 2, p. 25)*. Esse "conjunto de fatores" que leva à falta de dinamismo na escola, segunda a professora, parece estar associado com: (i) A desmotivação da classe docente; (ii) A desmotivação dos alunos; e (iii) A falta de investimento.

Ao referir-se ao primeiro fator que associa à falta de dinamismo na escola, nomeadamente a desmotivação da classe docente, como já referido, Mariana parece vinculá-lo com ao congelamento da carreira docente:

> Eu acho que a classe docente está muito, muito desmotivada, como todos estes problemas que deves ter acompanhado... tem a ver com a carreira docente, com o fato de estar[mos], de termos estado congelados há 9 anos... não houve aumento, portanto foram 9 anos que não contaram ... (...) portanto eu acho que isso fez com que o clima das escolas... pronto, eu só posso... só posso olhar para este porque já estou aqui há quase dez anos... ah... mas as pessoas estão muito desmotivadas, não sentem que são valorizadas... portanto daí também não tem grande motivação para, para dinamizar outras

> atividades... são feitas algumas, mas não acho que seja uma escola muito dinâmica.
>
> *(entrev. temática 2, p. 23)*

Em relação à desmotivação dos alunos, Mariana refere que "a nível de alunos, eles são muito difíceis... turmas muito difíceis de se trabalhar, estão totalmente desmotivados também... não querem nada com a escola" *(entrev. temática 2, p. 25).* Buscando explicar mais sobre o terceiro fator (a falta de investimento), Mariana exemplifica-o com questões concernentes à estrutura, nomeadamente a situação dos quadros e do acesso à internet em sala de aula:

> Os quadros não escrevem, uma coisa que não... ah... estive, estive um ano ali a fazer pedidos, pedidos, pedidos 'pra' aquela sala ficar com aqueles quadros... e um ainda é de giz, não é... ah, porque não... passei o ano passado, o ano todo, a escrever naquela sala em que o quadro estava num canto, não se via... ah, não escrevia, tínhamos que ter os estores todos para baixo... a sala ficava escura, portanto mesmo os recursos físicos não há qualquer investimento... umas escolas tiveram [investimentos], a nossa não teve... e, portanto é a falta de, por exemplo, as vezes, eu nunca posso programar uma aula... não é que, se calhar para mim não faça tanta diferença, mas noutras disciplinas pode fazer toda a diferença... o professor quer usar qualquer coisa da internet, um vídeo, uma coisa, uma aplicação ou um documentário que seja... tem que ter um plano B porque pode chegar à sala e não ter internet [risos]."
>
> *(entrev. temática 2, p. 24)*

Ao falar dos órgãos de gestão da escola, Mariana diz ter um "bom relacionamento" com a gestão da escola. A seguir, no entanto, admite não possuir muito conhecimento sobre gestão ao afirmar que "quando os professores, os colegas têm muito conhecimento sobre a gestão... eles percebem que as coisas não funcionam bem [risos]... quando se tem muito conhecimento, que não é o meu caso [risos]... para mim, as coisas funcionam [bem]" *(entrev. temática 2, p. 27)*. Para Mariana, uma gestão escolar muito controladora não leva a um funcionamento melhor e aponta o exemplo da sua antiga escola para corroborar esse ponto de vista:

> Mas já estive, na tal escola em que eu estive por 3 anos... a direção andava muito, muito em cima... muito controladora, muito documento para isso, muito documento para aquilo, era[m] papéis para todo o lado... e eu não via que funcionasse melhor.
>
> *(entrev. temática 2, p. 27)*

Ainda em relação aos órgãos de gestão da escola, Mariana admite que há coisas que falham com a gestão escolar, porém admite que tais situações "passa-me um bocado ao lado" e ao fim e ao cabo, segundo sua visão, há uma dificuldade muito grande no processo de gestão de pessoas: "é muito difícil gerir pessoas, muito difícil, muito difícil" *(entrev. temática 2, p. 27)*.

Como já referi, nos momentos que antecederam as entrevistas, Mariana sempre estava a conversar com um ou mais colegas. Em mais de uma oportunidade pude presenciar que uma colega veio até ela para dirimir algumas dúvidas sobre um relatório que deveria submeter, sendo prontamente atendida pela colega. A professora atualmente ocupa a função de representante do grupo de Matemática da escola.

Antes de falar do grupo de Matemática, Mariana, de modo espontâneo, refere um colega professor de Matemática que possui também uma formação em jornalismo e com quem teve um contato muito próximo em um ano por ocasião de terem um horário livre em comum: "sentamos os dois naquela mesa e pá... e passamos a falar, porque ele é mesmo uma pessoa muito interessante" *(entrev. temática 2, p. 29)*. Tendo este colega uma experiência na preparação de questões de exames de aferição e no atendimento de professores que levantavam algumas objeções sobre tais questões, Mariana menciona que esse colega havia dito na altura:

> É sorte que a sociedade não sabe que as pessoas de Matemática não sabem Matemática [com voz quase a susurrar] [risos]... quando descobrirem, aí vamos estar muito mal [risos]... (...) ele disse-me que vem aí cada coisa... é arrepiante... e saber assim... [que] estes estão a ensinar [susurrando].
>
> *(entrev. temática 2, p. 29)*

Na sequência, quando perguntada se trabalha de uma forma mais próxima com algum colega atualmente, responde: "não... ah... este ano até estou um bocado isolada [risos]". Refere que trabalhou de modo mais direto com o colega citado anteriormente (os dois tinham duas turmas de 6.º ano na altura): "marcávamos as avaliações e as atividades todas em conjunto e... aplicávamos nas mesmas turmas, as mesmas coisas... assim, quer dizer, poderíamos alterar" *(entrev. temática 2, p. 31)*. Entretanto, ressalva que apesar de "o ideal" é "tentarmos partilhar coisas", este ano tem apenas partilhado materiais com os colegas do 7.º ano, uma vez que há uma única turma de 11.º ano (Matemática A) no ensino secundário:

> Eu partilho com os meus colegas, mas só partilho... não tenho... do gênero, faço, coloco ali para quem tem também o sétimo ano... e já alguns utilizam, mas não há este, pronto... este ano não... e depois com o décimo primeiro, eu sou a única, só há uma turma de Matemática A.
>
> *(entrev. temática 2, p. 32)*

Quando solicitada a fazer uma caracterização do grupo da Matemática, Mariana refere que "cada um está muito centrado em si", mas não se exclui desta caracterização ao dizer: "eu não estou excluída" *(entrev. temática 2, p. 29)*. Em sua visão, cada um no grupo está:

> Muito centrado em si porque eu tenho que fazer isso, porque eu tenho que ir embora, eu tenho que não sei o quê, eu tenho que ... e portanto... ah... acaba por fazer somente o que é obrigatório, obrigatório, obrigatório e não há mais dinamismo para nada.
>
> *(entrev. temática 2, p. 29)*

Mariana busca um exemplo para corroborar esta caracterização e comenta sobre um processo formativo que ocorreu durante o último semestre, tendo como formadora uma colega do grupo da Matemática. A formação envolvia o uso de uma aplicação no ensino da Matemática com encontros presenciais em alguns sábados. Quanto ao formato das tarefas propostas na formação, Mariana refere que: "tínhamos dois momentos: (...) tínhamos que fazer uma ficha individualmente para depois aplicar aos alunos... (...) e depois o trabalho final era fazer uma [ficha] em grupo." *(entrev. temática 2, p. 29).*

O grande problema, na visão de Mariana, foi justamente a tarefa que envolveu o trabalho em grupo. Recordo-me que durante a fase de observações de aula, Mariana realizou um comentário sobre este trabalho em grupo enquanto nos encaminhávamos para a sala de aula (durante o mês de maio). Na altura disse que estava a gostar da formação, mas confidenciou-me que "o trabalho em grupo está mesmo muito complicado" *(notas de campo)*. Sobre o trabalho em grupo em questão, Mariana diz que ficou exausta e também que isso deixou marcas :

> [Foi] muito complicado... eu acho que... eu agora esta semana já estou melhor, mas... ali no final de maio eu estava exausta porque eu fiz noitadas com isso, que depois, depois deixa marcas, não é... e teve a ver com o trabalho de grupo... e era uma coisa que tinha que se fazer porque depois tem-se avaliação.
>
> *(entrev. temática 2, p. 30)*

Mariana recorda que "a formadora mandou um email a dizer que várias coisas que deveríamos alterar porque estava mal... (...) toda a gente respondeu sim, sim, nós vamos mudar e ficou". E essa situação toda causou-lhe um grande desconforto porque, segundo ela: "as coisas que eram referenciadas não estavam na parte que me cabia" *(entrev. temática 2, p. 30)*. Por fim, Mariana acabou por assumir uma postura de liderança no processo de retificação da tarefa em grupo, inclusive delegando tarefas, mesmo que em sua visão tal trabalho não lhe caberia:

> Se fosse nas minhas coisas, eu era a primeira a pegar naquilo e emendar e perguntar às outras e não sei que... nem era o caso... e tive que pegar naquilo e começar a delegar tarefas... e eu ali, eu aqui sou representante de grupo, na escola... mas aquilo é uma formação, eu ali... estamos como colegas, não sou representante de nada... portanto não tenho que...
>
> *(entrev. temática 2, p. 30)*

Essa situação, na visão de Mariana, parece resumir o espírito do grupo de Matemática na escola: "isto mostra como é que...ah... como é que as coisas [são], pronto... é o mínimo dos mínimos e toca a andar" *(entrev. temática 2, p. 30)*. Entretanto, refere a grande capacidade de trabalho da colega formadora, segundo suas palavras: "essa colega tem uma capacidade de trabalho fenomenal". Na sequência, refere ainda, com um tom orgulhoso, que os alunos dessa professora "participaram num concurso em que eles eram produtores de fichas" *(entrev. temática 2, p. 31)* e acabaram por receber uma premiação a nível nacional:

> "É pá, põe o trabalho dos professores assim [risos]... nunca tinham, porque é uma coisa de muita qualidade que os alunos fizeram, olhando para as fichas que eles produziram e coisas originais... atenção, originais porque não podia ser... que é fácil produzirmos uma ficha de trabalho em que vou buscar umas coisas aqui, umas coisas ali, pá... não, tinha que ser uma ficha de trabalho com exercícios originais e eles fizeram aquilo tudo sozinhos.
>
> *(entrev. temática 2, p. 31)*

De modo resumido, embora admitindo que algumas atividades ainda sejam dinamizadas na escola, na visão de Mariana, a escola não é muito dinâmica e este quadro está associado à tríade: (i) desmotivação docente, (ii) desmotivação dos alunos e (iii) falta de investimentos. Refere também que embora no passado já tenha trabalhado de forma mais direta com um colega, no momento tem trabalhado de forma mais isolada, limitando a partilhar os materiais que elabora. Tal isolamento aparece novamente quando faz uma apreciação do grupo da Matemática na escola, onde reconhece que as pessoas estão muito centradas em si e onde acaba por se fazer somente o que é obrigatório.

6.2 O ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário (Matemática A)

Em um primeiro momento, ao ser questionada sobre a sua perspetiva em relação à inserção de tópicos do CD no currículo do ensino secundário, nomeadamente em Matemática A, Mariana parece ver tal inserção com certa naturalidade, uma vez que o programa de Matemática A sempre contemplou tais tópicos de Cálculo Diferencial. Em suas palavras, o CD:

> Sempre esteve inserido, não é... portanto é até um bocado difícil fazer essa avaliação [risos]... porque nunca tivemos o programa sem [o Cálculo Diferencial]... sempre fez parte.
>
> *(entrev. temática 2, p. 2)*

Em seguida, após refletir um pouco mais sobre a questão, Mariana é assertiva e refere que a presença de tais tópicos "faz todo o sentido" *(entrev. temática 2, p. 3)*. Como justificação, aponta três razões principais: (i) tais tópicos dão um sentido maior para assuntos que os alunos já estudaram, nomeadamente no estudo de uma função; (ii) potencialidade, no 12.º ano, para se fazer um estudo exaustivo de uma função analiticamente e (iii) porque a Matemática A é dirigida para alunos que querem cursos que vão ter Álgebra e Cálculo. Vejamos cada um dessas razões de modo mais pormenorizado.

Na primeira razão apontada, nomeadamente que tais tópicos dão um sentido maior para assuntos já estudados, Mariana traz dois exemplos envolvendo funções. Num primeiro exemplo, refere que no 10.º ano o conceito de monotonia de uma função é estudado apenas de um modo muito intuitivo e visual. Em um segundo exemplo, menciona que em uma abordagem inicial da função quadrática (no 10.º ano), os alunos não fazem ideia do porquê da concavidade ser voltada para cima ou para baixo. Para ela, tanto no primeiro exemplo quanto no segundo, é somente no 12.º ano com o estudo da segunda derivada que os alunos começam a entender o porquê:

> Portanto faz todo o sentido no estudo de uma função... porque no décimo ano eles fazem muito [o estudo] de uma forma intuitiva... graficamente... para entenderem todos os conceitos, não é... os conceitos de monotonia, no décimo ano são todos visuais... é só olhando para o gráfico... e a partir daí concluir... ah... todos, todos sabem que, por exemplo, na equação... nas funções quadráticas, o coeficiente de *x* quadrado, o "*a*" é positivo, tem a concavidade voltada para cima... não fazem ideia do porquê, portanto só quando... que será no 12.º, com o estudo da segunda derivada é que eles começam a entender essas coisas... que foram dadas quase como regras... e percebem o porquê depois disso... portanto para mim faz todo o sentido... faz todo o sentido."
>
> *(entrev. temática 2, p. 3)*

A segunda razão apresentada pela professora que justifica, em sua visão, a presença de tópicos de CD no ensino secundário (Matemática A) é a potencialidade (no 12.º ano) para se fazer um estudo exaustivo de uma função analiticamente. Nela, Mariana exemplifica que tal estudo propicia aos alunos construirem um esboço gráfico de uma função dada algebricamente e sem qualquer apoio visual do gráfico:

> O aluno, no décimo segundo ano, consegue fazer o estudo exaustivo de uma função analiticamente... portanto, aliás, ah... ah... numa certa altura, o aluno deve ser capaz de pegar em uma função e construir o gráfico sem qualquer... sem visualizar em qualquer, em nenhum lado... e portanto uma função que não é... cujo gráfico não é visível a olho... portanto uma função em que eles... sei lá... tem ali uma mistura de exponencial com um polinômio e coisas assim... e portanto eles calculam os domínios, os zeros, as assíntotas... com a primeira derivada, eles estudam a monotonia e conseguem, conseguem descobrir os extremos, não é... máximos e mínimos... depois estudam as concavidades com a segunda derivada... e com todo este estudo, eles conseguem... ah... conseguem fazer um esboço do gráfico só pelo estudo que fizeram.
>
> *(entrev. temática 2, p. 4)*

Na terceira razão apresentada, Mariana alega não imaginar como que seria feito se tais tópicos de CD fossem suprimidos dos programas de Matemática A e que a presença deles faz todo o sentido, uma vez que esta disciplina, segundo sua visão, é dirigido para alunos que pretendem seguir para o ensino superior em cursos que terão Álgebra e Cálculo:

> Eu não imagino como é que seria feito... não... até porque nós temos três Matemáticas no secundário e a Matemática A é dirigida para os alunos que querem seguir na faculdade cursos que vão ter Álgebras, Cálculos... portanto faz todo, todo o sentido!
>
> *(entrev. temática 2, p. 4)*

6.2.1 Os tópicos de Cálculo Diferencial (CD) são, para os alunos, dos mais fáceis ou dos mais difíceis?

Quando confrontada com esta questão, Mariana responde rapidamente: “Mais fáceis” e logo justifica dizendo “porque é muito mecânico” e que “tudo o que seja muito mecânico, os alunos têm... têm facilidade” *(entrev. temática 2, p. 7)*. Mais adiante, exemplifica usando o caso que ocorreu com a sua turma de 11.º ano:

> Olhando para o que nós vimos este ano, o que que eles tem que saber... tem que perceber o que que é a derivada, como sendo uma taxa instantânea... de variação instantânea... e perceber a definição de derivada pelo limite... o cálculo de derivada num ponto utilizando o limite... perceber que aquilo é o declive da reta tangente... e, depois, saber aplicar as regras de derivação para tirar, para concluir a monotonia... aquilo acaba por ser muito, muito mecânico... é muito, pega na função usando as regras, deriva, calcula os zeros, constrói a tabela.
>
> *(entrev. temática 2, p. 7)*

Pelo exposto, Mariana resume de forma clara os seus objetivos em Cálculo Diferencial para o 11.º ano. Na sua perspetiva, os alunos devem: 1) Perceber a derivada como uma taxa de variação instantânea; 2) Perceber a definição de derivada pelo limite; 3) Calcular a derivada num ponto utilizando o limite e perceber que é o declive da reta tangente; e 4) Aplicar as regras de derivação para concluir a monotonia de uma função. Em sua visão, isso acaba por ser muito mecânico e, novamente fazendo um balanço do que ocorreu no ano, identifica como sendo um constrangimento a falta de tempo para se fazer exercícios (especialmente para os alunos “mais fracos”) “para estes mecanismos passarem a estar consolidados” *(entrev. temática 2, p. 7)*.

> Portanto aqui o... o... o que pode... o que eu acho, por exemplo nos alunos, alguns deles, os que tiveram mais dificuldade... foram exercícios, muitos fizeram tudo bem... o que saiu no teste... ah... se calhar ali, alguns foi pela falta de tempo porque não houve assim tantas, tantas aulas e portanto aqueles alunos mais fracos precisam de muitas aulas para estes mecanismos...ah... passarem a estar consolidados... portanto um aluno com mais possibilidades, faz duas vezes e já percebeu e ok... não vale a pena fazer muitos mais porque já sabe o que tem que fazer... ah... mas acaba por ser uma parte muito, muito simples para eles.
>
> *(entrev. temática 2, pp. 7-8)*

Na sequência, Mariana, já se referindo ao 12.º ano, acredita que a dificuldade maior dos alunos não está diretamente relacionada com os tópicos de Cálculo Diferencial, mas sim no que chamou de "subjacente", que em sua visão é o "cálculo dos zeros da função" *(entrev. temática 2, p. 8)*:

> Porque no 12.º, a dificuldade não é propriamente a parte [do CD]... é o que está sub, sub... subjacente, que é o cálculo dos zeros... isso é que é o entrave para os alunos [risos]... porque depois, no 12.º ano... ah... a função já é... são operações com funções exponenciais, logarítmicas e polinomiais e racionais... e portanto o cálculo dos zeros... aí já é uma equação exponencial... uma equação... e, portanto, as vezes isso é que é a dificuldade... não, não propriamente o processo em si, acho que para os alunos é simples.
>
> *(entrev. temática 2, p. 8)*

6.2.2 Para que isso serve? Para nada! Mas com isso é possível adquirir importantes competências.

Mariana, referindo-se ainda aos tópicos de Cálculo Diferencial, refere que os alunos "estão sempre a questionar para que é que aquilo serve", dando-lhes sempre a mesma resposta: "Para nada!" *(entrev. reflexão 1, p. 11)*. Entretanto, logo a seguir tempera essa sua resposta, dizendo que embora os alunos muito provavelmente não vão aplicar aquele tópico em questão, podem estar a adquirir importantes competências.

> Quando eles perguntam: quando é que eu vou utilizar isto? Eu digo: nunca. O mais provável é que nunca na tua vida profissional vais ter que determinar uma assíntota, [nunca] vais ter que calcular um limite... (...) Portanto, é... o conteúdo em si provavelmente não vais aplicar em nada... agora, as competências que adquirir.
>
> *(entrev. reflexão 1, p p. 11-12)*

> Acho que aquilo que eu tento passar aos alunos é que obviamente eles não... ainda outro dia disse que 'vocês não vão acordar de manhã e não vão derivar', não é... no vosso dia a dia não vão fazer uma coisa dessas... portanto... ah... as competências que eles adquirem são outras competências... ah... mais transversais.
>
> *(entrev. temática 2, p. 8)*

> Várias vezes me perguntam [pra que isso serve?] e eu sou sempre muito direta com eles... e eu digo: "nunca"... [risos] nunca mais vais usar... portanto a única coisa que eu quero é que tu penses... e portanto isso... vai...

> tu com a Matemática adquirem competências... que com outras disciplinas não adquires.
>
> *(entrev. temática 1, p. 13)*

Convidada a refletir mais sobre estas competências que os alunos adquirem no estudo dos tópicos de Cálculo Diferencial, Mariana indica serem "competências transversais" *(entrev. temática 2, p. 8)*. Segundo ela, o desenvolvimento destas competências justificaria o fato de se ter "tantas horas de Matemática" *(entrev. reflexão 1, p. 12)*, fato que disse procurar sempre explicitar aos seus alunos. Continuando sua reflexão, relaciona tais competências transversais com: (i) persistência, (ii) raciocínio lógico, (iii) abstração, (iv) resolução de problemas, (v) leitura e interpretação, e (vi) conjugar dados:

> Portanto que tem a ver com o... a persistência, o raciocínio lógico, com a... a abstração, a resolução de problemas... a leitura e a interpretação, a... ah... a, como que se diz...quando... o fato de conjugar dados porque eu sei isto... portanto com isso consigo terminar aquilo... e depois com este valor já consigo ir.
>
> *(entrev. temática 2, p. 8)*

> Portanto eu acho que a Matemática desenvolve muito essa parte de.... de raciocínio, de saber ler, interpretar, aplicar.
>
> *(entrev. temática 2, p. 11)*

Para Mariana, "isolando a Matemática", os alunos "ficam com competências extremamente importantes depois no futuro, no trabalho" *(entrev. temática 2, p. 8)* e que isso "faz diferença numa pessoa adulta" *(entrev. temática 1, p. 13)*. A relação entre estas competências e o mercado de trabalho é evidenciado por Mariana:

> É mais isso que eu tento passar... e aliás, há muitas empresas... outro dia vi um documentário... que há muitas empresas, em Portugal, que costumavam pedir como base, é... ah... alunos de Matemática... de preferência de Matemática Aplicada... a seguir, nós [empresa] damos a formação para a tarefa que vão desempenhar... mas interessa é os alunos de Matemática que vem com competências ah ... de extrema importância para o que a empresa pretende... depois, entretanto, ah portanto não procuram técnicos de não sei que, pronto... depois, porque depois, a tarefa que vão desempenhar é dada uma formação... a empresa dá a formação e... e as pessoas começam a desempenhar esses cargos."
>
> *(entrev. temática 2, p. 9)*

Na visão de Mariana, o grande objetivo da Matemática "é por os alunos a pensar... é por os alunos a arranjar estratégias de resolução" *(entrev. temática 1, p. 13)* e que justamente devido às competências transversais adquiridas no ensino da Matemática é possível, em sua visão, identificar se uma pessoa adulta teve ou não teve Matemática: “conversares com uma pessoa adulta que teve ou que não teve Matemática, nota-se” *(entrev. temática 1, p. 13).* Segundo ela, um aluno que tenha tido Matemática, “a fazer como deve ser” *(entrev. temática 2, p. 9)*, terá mais facilidade no futuro na realização de tarefas “pela questão da interpretação, da leitura (...) da interpretação que se faz do problema... de se conseguir retirar dados e se conjugar dados” *(entrev. temática 2, p. 10)*. Para exemplificar o seu ponto de vista, Mariana lança mão de um caso envolvendo o filho de uma vizinha que concluiu o ensino secundário (em um curso profissional) e da dificuldade que ele apresenta:

> O filho da minha vizinha que terminou agora o secundário, mas em um curso profissional... e nos cursos profissionais a Matemática é assim uma coisa "beabá" e depois fazem uns módulos, uns trabalhozitos e pronto... (...) depois as outras disciplinas mais gerais são trabalhadas muito superficialmente... entre elas, [a] Matemática... só que este meu vizinho pensou em ir estudar... para universidade... e precisava fazer o exame de Matemática B... (...) e nota-se a diferença... portanto como ele não teve Matemática nesta parte, ele tem muita dificuldade em compreender... arranjar uma estratégia... parece que está preso... que aquilo não desenvolve.”
>
> *(entrev. temática 1, p. 13)*

6.2.3 O essencial para uma boa aprendizagem de Cálculo Diferencial – A tríade: (i) Perceber conceitos, (ii) Exemplos de aplicação e (iii) Realização de exercícios variados.

Quando convidada a refletir sobre o que considera essencial para uma boa aprendizagem de Cálculo Diferencial no ensino secundário (Matemática A), Mariana admite ser “exatamente a forma como eu fiz” *(entrev. temática 2, p. 11)* e a seguir enumera três etapas que idealmente, em sua visão, devem ocorrer: (i) Numa primeira abordagem, os alunos devem perceber os conceitos, (ii) Numa segunda abordagem, é importante em aula, o professor dar vários exercícios/exemplos de aplicação, e (iii) Por fim, é fundamental os alunos fazerem um leque variado de exercícios.

> Portanto, é essencial, ao meu ver... em aula, é essencial, que na primeira abordagem, eles percebam os conceitos... e depois, na segunda abordagem é que eles têm que ver exemplos... é importante o professor, em aula, dar

> vários exemplos de exercícios de aplicação e depois, é fundamental eles fazerem ali um leque de exercícios muito variados... muito variados.
>
> *(entrev. temática 2, p. 12)*

Como já referi, Mariana considera os tópicos de CD fáceis para os alunos por estarem relacionados com procedimentos “mecânicos”. Entretanto, Mariana refere que em uma primeira abordagem, considera essencial que os alunos “percebam o que se está a fazer”, “que aquilo não caiu do céu”. Em sua visão, “não é chegar lá e dar as regras, pronto, acabou e agora façam assim”. Mais do que isso, é importante que os alunos “percebam como é que se chega lá” *(entrev. temática 2, p. 11)* e dá como exemplos os conceitos que trabalhou com a turma: (1) a importância da compreensão, por parte dos alunos, quando se passa da taxa média de variação para a taxa instantânea de variação e que tal passagem é dada usando o conceito de limite e (2) quando se conclui a monotonia atendendo o sinal da derivada:

> Eles percebam como é que se chega lá... eles, eles... percebam como é que da taxa média de variação se chega à taxa instantânea [de variação]... e facilmente, eles conseguem perceber que aquilo ali é um limite até porque trabalharam tanto esse conceito... que é no limite, quando *x* tende para... (...) podemos concluir a monotonia atendendo ao sinal da derivada... e isso vem porque eles sabem que o sinal da derivada é a reta tangente... e depois da reta tangente eles vêm porque percebem que a reta tangente então... é a reta que melhor [se aproxima à função naquele ponto]... portanto, se isso tudo tiver... essa lógica... eles percebem como é que de umas coisas chegamos às outras... portanto acho essencial, que é para aquilo fazer sentido.
>
> *(entrev. temática 2, p. 11)*

A seguir, ainda considerando essa primeira abordagem, Mariana refere como fundamental passar essa mensagem “sem grandes formalidades”, sublinhando o fato de os alunos “perceberem de uma forma intuitiva todos os conceitos”. Em sua perspetiva, maiores formalidades devem ser deixadas para o ensino superior, pois nesta fase os alunos “já estão com outra maturidade” *(entrev. temática 2, p. 13).*

> Portanto do ponto de vista da sala da aula, acho fundamental que o professor passe a mensagem sem grandes formalidades... sem grandes formalidades, ao meu ver é sempre sem grandes formalidades... acho que as formalidades... muitas formalidades no [ensino] superior.
>
> *(entrev. temática 2, p. 13)*

Na segunda abordagem, nomeadamente o trabalho em aula com exercícios de aplicação do conceito (antes tratado), Mariana destaca que este tipo de exercício deve ser de “encadeamento de várias matérias” e que tais exercícios desenvolvem nos alunos “o raciocínio e a resolução de problemas” *(entrev. temática 2, p. 12)*. Em suas palavras:

> Com isto eu consigo concluir aquilo... e é isto que eu digo que desenvolve nos alunos o raciocínio e a resolução de problemas... eu tenho isto e com isto consigo chegar àquilo... com aquilo... portanto...ah... tal competência que eu acho, que eu digo que eles acabam por [desenvolver].
>
> *(entrev. temática 2, p. 12)*

Buscando se fazer entender e tornar-se mais clara sobre o tipo de exercício que envolve o “encadeamento de várias matérias” *(entrev. temática 2, p. 12)*, Mariana toma uma caneta e uma folha de sua agenda e rascunha um esboço gráfico enquanto fala sobre o tipo de exercício em questão:

> É quando, por exemplo, é dado esse tipo de exercício que eles têm que, sei lá... essa função aqui é uma função *f*, graficamente representada, não é [desenha um esboço gráfico de uma curva no plano cartesiano]... e depois diz, seja *t* a reta tangente no ponto de abscissa “*a*”... e sabemos que a inclinação da reta tangente *t* é 45 graus, por exemplo... e a seguir pede qual é o valor do limite quando *x* tende para “*a*” de *f* de *x* menos *f* de “*a*” sobre *x* menos “*a*” [faz a construção da reta na folha e escreve $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$]... portanto é que o aluno tem que olhar aquilo e perceber que isto é o *f* linha de “*a*”... ora, mas o *f* linha de “*a*” é o declive da tangente... só que a reta tangente, nós temos a inclinação, nós sabemos que o declive que é a tangente da inclinação... e portanto isto é um, então [risos].
>
> *(entrev. temática 2, p. 12)*

Na terceira e última parte, Mariana menciona que é essencial “passar um leque muito variado de exercícios” e que os “alunos têm que ser capazes de fazerem aquilo tudo”. Em sua visão, deve “haver muito treino”, “que é para eles conseguirem ver várias perspectivas, misturando várias coisas” *(entrev. temática 2, p. 12)*. Por fim, evidencia como importante o professor não se limitar a propor aos alunos somente um tipo específico de exercícios:

> Portanto é fundamental de eles terem um leque de... porque se um aluno só treinar aqueles exercícios *f* de *x* é dois *x* mais um sobre *x* mais três, pronto... agora as regras de derivação... ta, ta, ta, ta... agora os zeros da derivada... ta, ta, ta, ta... tabela, ta, ta, ta... já está... quinhentos exercícios desses, não serve[m] de nada... só estes!”
>
> *(entrev. temática 2, p. 13)*

6.2.4 O tempo destinado ao estudo de tópicos de Cálculo Diferencial - aulas de apoio e exames finais.

Quando convidada a refletir sobre o tempo destinado ao estudo dos tópicos de Cálculo Diferencial (CD) no ensino secundário, Mariana inicialmente acha que o tempo não é adequado, mas logo em seguida, considerando que os alunos não podem passar o dia todo na escola, pondera que o tempo acaba por ser adequado:

> Eu acho que não é adequado... eles ganhariam se tivessem mais tempo... ah... mas o problema é que eles também não podem passar o dia todo aqui... portanto, acaba por ser adequado...às vezes, em certas turmas consegue-se gerir melhor... ah... noutras turmas, não se consegue fazer essa gestão.
>
> *(entrev. temática 2, p. 14)*

Em sua visão, o que faria mais falta não seriam aulas adicionais para se trabalhar os tópicos de CD, mas sim que os alunos pudessem ter mais horas de apoio. Essas horas de apoio deveriam ocorrer em um contexto extra sala de aula, onde um professor de Matemática deveria estar disponível para os alunos, que "por opção" *(entrev. temática 2, p. 14)* e sem serem obrigados, poderiam tirar dúvidas e fazer exercícios:

> Aqui, o que eu acho que faria falta era mais horas de apoio, se calhar, ao invés de aula, era horas de apoio... horas de apoio no sentido de se ter, por exemplo, um professor em uma salinha em que vários horários tinha lá um professor de Matemática... e os alunos, por... por opção, livremente iriam à essa sala colocar dúvidas e... portanto fazer exercícios, tirar dúvidas, trabalhar.
>
> *(entrev. temática 2, p. 14)*

Mariana menciona ainda que na gestão do tempo, procura sempre adequar as suas "escolhas em sala de aula de acordo com o que é feito nos exames" *(entrev. temática 2, p. 16)*. Em sua visão, deve-se "estar sempre a olhar para como é que os exames vão ser feitos", pois "aquilo vale trinta por cento da sua nota e vale cinquenta por cento quando vão entrar na faculdade" e que portanto o exame "é muito decisivo para a vida deles" *(entrev. temática 2, p. 15)*. A seguir, menciona que "a parte de Cálculo Diferencial sai [nos exames], há sempre questões relacionadas com primeira derivada, segunda derivada" e que costuma chamar a atenção em sala de aula para o formato de questões do exame e da importância do aluno relacionar assuntos e "ficar com uma daquelas competências" *(entrev. temática 2, p. 16)*:

> E portanto é aquilo que eu chamei a atenção nas minhas aulas, não sei se lembras... de dizer: atenção, se dão [no exame] *f* linha, se pedem *f*, não tem que chegar ao *f*... porque não sabem as primitivas... portanto, eles dão a derivada, pedem um limite... o aluno tem que mexer nesse limite... para ficar como uma daquelas competências, não é... portanto o aluno tem que relacionar isso, não é direto.
>
> *(entrev. temática 2, p. 16)*

6.2.5 Possibilidades do uso de tecnologia no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial

Quando solicitada a refletir sobre as possibilidades do uso de tecnologias, tais como calculadoras gráficas e softwares no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial, Mariana começa a reflexão tendo por base o que se passou em suas aulas com a turma de 11.º ano. Em sua visão, "idealmente (...) quando da introdução das derivadas... da reta secante... reta tangente... deveria ter sido feito no geogebra", contudo por uma questão de "falta de tempo" e também de "logística" isso não foi possível, "pois aquela sala ali não dá" *(entrev. temática 2, p. 17)*, "porque eles têm que virar cadeiras, depois... é... a turma é enorme... então resolvi fazer eu no quadro" *(entrev. temática 2, p. 17)* e concluiu que "poderia ter utilizado mais" *(entrev. temática 2, p. 17)* e menciona uma animação com o geogebra que poderia ter sido realizada:

> Mas o geogebra muitas vezes é utilizado para fazer as tais animações para eles perceberem então que... até porque eles... uma animação que pode ser feita é... o fato de passar de uma reta secante... taxa média de variação para a taxa instantânea... e passa de reta secante para reta tangente... e outra animação que pode ser feita é ao longo do gráfico a reta tangente vai variando... e eles vão vendo que a reta está sempre... a função é crescente e a reta tangente é crescente... depois a reta tangente é horizontal, já tem ali um extremo... entretanto, a reta tangente é decrescente, então tem declive negativo e a função é decrescente... fazer isso na tal aplica... no tal programa do geogebra.
>
> *(entrev. temática 2, p. 17)*

Quanto ao uso da calculadora gráfica nas aulas envolvendo tópicos de CD, Mariana reconhece que este foi reduzido e que tal deu-se principalmente em contextos de verificação. Entretanto, em seguida, logo refere que pretende usar mais esse recurso no próximo ano (12.º) devido às questões do exame que necessitam ser resolvidas recorrendo à calculadora gráfica:

> Relativamente à calculadora, o uso que eu dei este ano foi muito pouco... portanto eles fizeram... usaram a calculadora para cálculos, mas não precisavam de uma [calculadora] gráfica... e... e a parte de... de calculadora gráfica, foi mais para verificação... (...) no próximo ano, aí é que eu vou... ah... vou, vou ter que fazer mesmo obrigatoriamente... porque em exame é sempre pedido... questões que têm que ser resolvidas recorrendo à calculadora gráfica.
>
> *(entrev. temática 2, p. 17)*

Resumidamente, para Mariana faz todo o sentido o programa de Matemática A contemplar tópicos de CD, pois tais tópicos, em sua visão: (i) dão um sentido maior para assuntos que os alunos já estudaram; (ii) potencializam um estudo exaustivo de uma função analiticamente, e (iii) porque a Matemática A é dirigida para alunos que querem cursos que vão ter Álgebra e Cálculo. Em sua perspetiva, os tópicos de CD são dos mais fáceis para os alunos por envolverem procedimentos mecânicos, cujo estudo, mesmo sem ter uma aplicação imediata, possibilita desenvolver competências transversais relacionadas com persistência; raciocínio lógico; abstração; resolução de problemas; leitura e interpretação e conjugação de dados. Para Mariana, o essencial para uma boa aprendizagem de Cálculo Diferencial é: (i) Numa primeira abordagem, que os alunos percebam os conceitos, de forma a fazer-lhes sentido; (ii) Numa segunda abordagem, que o professor dê vários exemplos de aplicação, e (iii) Finalmente, que os alunos façam um leque de exercícios muito variados. Por fim, a professora menciona ainda a importância das aulas de apoio (em contexto extra sala de aula) com a presença de um professor de Matemática, onde os alunos possam, por iniciativa própria, buscar auxílio e tirar dúvidas.

6.3 As aulas de Matemática envolvendo tópicos de Cálculo Diferencial

As aulas observadas ocorreram em uma turma de 11.º ano de Matemática A, sendo que Mariana já ministrava aulas de Matemática para esta turma desde o 10.º ano. O trabalho de observação das aulas envolveu duas séries. A primeira série de observação compreendeu três aulas e ocorreu em dois momentos, sendo que em um deles a aula foi de dois períodos. Os temas tratado nessas aulas foram limites de uma sucessão e sucessão convergente. A segunda série de observação foi realizada três meses após a primeira e envolveu sete aulas, desdobrando-se em seis momentos, sendo que em apenas um deles a aula foi de dois períodos. Os temas tratados nessa segunda série de observação foram: taxa média de variação de uma função; taxa instantânea de variação de uma função; derivadas e estudo da monotonia de uma função. Após cada aula, ou no momento imediatamente anterior à aula seguinte a observar, teve lugar uma pequena conversa, informal, com a professora sobre a aula. Os dados relativos às conversas foram coletados em notas de campo. Após cada uma das duas séries de observação realizou-se uma entrevista semi-estruturada com registo em áudio. Essas entrevistas foram denominadas de entrevistas de reflexão.

Conforme já combinado previamente, o encontro com Mariana foi sempre na sala dos professores, local onde ocorreram nossas conversas informais e de onde seguíamos para a sala de aula. Estes encontros ocorreram logo no início da manhã, antes do início das aulas, ou então no momento do intervalo do turno da manhã, dado que a turma tinha suas aulas sempre no período matutino (das 8:30h às 12:30h).

Após o sinal, a professora e eu saíamos da sala dos professores em direção à sala de aula, que ficava em outro pavilhão. No caminho passávamos por um grande saguão onde eram expostos, em biombos, alguns trabalhos artísticos confeccionados pelos alunos. Chegando nesse outro pavilhão, em meio a muitos alunos que esperavam nos corredores, a professora então levantava a chave da sala de aula junto a um funcionário que detinha também as chaves das outras salas. Era também com este funcionário que a professora levantava os canetões usados para escrever no quadro.

Após a professora levantar a chave e os canetões, subíamos um lance de escadas e logo à direita já estávamos na sala do 11.º ano. A professora abria a sala e após alguns alunos entrarem, eu então entrava e era seguido pelos demais alunos. A organização das mesas assumia diferentes configurações e dependendo da aula anterior poderiam estar dispostas individualmente, em duplas ou trios.

A professora sempre iniciava as aulas ditando o sumário, realizando alguns informes gerais para a turma e somente após estes dois momentos, que não ocorriam necessariamente nessa ordem, os assuntos da aula eram então tratados. Em nenhuma aula observada a professora ficou muito tempo sentada em sua secretária, permanecendo a maior parte do tempo em pé.

A parte que apresento a seguir foi construída com base nas observações diretas das aulas, nas entrevistas realizadas e também nas notas de campo que foram tomadas. A referida parte está organizada em quatro itens, nomeadamente: i) A turma e a sala de aula; ii) A estrutura de aula; iii) As interações na aula e iv) O Cálculo Diferencial nas aulas. No item - *A turma e a sala de aula* - procuro trazer algumas características da turma de 11.º ano em que as observações recaíram, bem como alguns elementos do contexto físico da sala de aula. No item - *A estrutura das aulas* - são discutidos alguns elementos ligados à organização, estrutura e ambiente de trabalho. No item - *As interações na aula* - procuro discutir os principais tipos de interações ocorridos em aula. Por fim, em um último ponto - *O Cálculo Diferencial nas aulas* - procuro considerar os aspetos mais significativos relativos às diferentes dinâmicas de aula e atividades desenvolvidas.

6.3.1 A turma e a sala de aula

A turma onde decorreram as duas séries de observação pertencia ao turno da manhã e as cinco aulas semanais de Matemática ocorriam em quatro dias distintos, sendo que em apenas um desses dias havia uma aula dupla (de 100 minutos), justamente o único momento em que as aulas de Matemática eram as primeiras aulas da manhã. Sobre a duração das aulas, a professora deixou claro a sua predileção, no ensino secundário, por aulas duplas com a duração de 100 minutos. Disse inclusive que tentaria para o próximo ano ter mais aulas com este formato no ensino secundário, mas que no ensino básico, devido à questão da concentração dos alunos, o formato com aulas de cinquenta minutos era, no seu ponto de vista, adequado:

> Isso é uma coisa que... para o ano eu vou tentar que não aconteça... é... o que aconteceu este ano... porque eles só tem uma vez por semana aula de cem [minutos]... e portanto era importante se eles ... tem cinco tempos semanais... era importante que fosse[m] dois, dois, um... ah... em vez de termos quatro vezes por semana, termos apenas três, mas duas delas serem de cem minutos no secundário... no básico, não vejo muito, não sinto que isso seja importante até porque eles .. ah...são muito pequeninos e cinquenta minutos basta... senão perdem já... deixam de estar concentrados.
>
> *(entrev. reflexão 2, p. 7)*

A sala de aula era uma sala ampla e comportava muito bem todos os alunos, que sentavam-se individualmente, em duplas ou mesmo em trios. A sala era bem iluminada (com as janelas opostas aos quadros captando a luz exterior) e a visibilidade dos quadros não era prejudicada pela luz proveniente de fora. Segundo Mariana, recentemente ocorreu uma troca dos quadros na sala, uma vez que os quadros antigos "não escreviam", "eram de giz, com quarenta anos" e estavam localizados em uma parede que recebia lateralmente a luz externa (tendo, por consequência, a visualização prejudicada pelo reflexo da luz proveniente das janelas). Ademais, tal melhoria só ocorreu "depois de muita, muita insistência" *(entrev. temática 1, p. 7)*. Após tal alteração, a sala então passou a contar com dois quadros (um quadro de giz e outro branco). A professora, de modo recorrente, fazia uso dos dois quadros em suas aulas.

A sala não apresentava um sistema de climatização. Tive a oportunidade de assistir, em um dia frio de inverno, às primeiras aulas da manhã, onde tanto os alunos quanto a professora permaneceram o tempo todo com seus casacos. Sobre a questão da sala de aula, a professora mencionou uma certa insatisfação com a falta de materiais básicos para que se tivesse uma sala mais confortável e agradável para os alunos:

> Aqui em Portugal está frio.... agora está frio... e como viste ali aquela sala é gelada... e portanto nós temos que dar aulas de casaco... não há um aquecimento. Mesmo os materiais... eu não estou a falar de computadores, de tablets... estou a colocar é o básico e portanto... ter salas confortáveis para os alunos, salas agradáveis...
>
> *(entrev. temática 1, pp. 6-7)*

A turma de 11.º ano compreendia 31 alunos, sendo 15 rapazes e 16 raparigas. Para Mariana essa era uma característica recorrente das turmas na escola, ou seja, "turmas grandes". Devido a isso, em sua visão, era "impossível se chegar a todos os alunos" e o prejuízo maior era dos alunos "mais fraquinhos" , que acabavam "por ficar muito num cantinho... tentar passar despercebidos, não é." *(entrev. temática 1, p. 8).* A professora, ao falar da turma, considerava que em geral os alunos estudavam "muito pouco" e tinham "pouquíssimos hábito de estudo" *(entrev. temática 1, p. 9)*. No tocante à frequência nas aulas observadas, os alunos foram assíduos e estiveram quase sempre todos presentes (quando muito, faltaram três alunos em cada aula).

Por fim, já ao final do ano letivo, Mariana dividiu os alunos da turma em três grupos: *i) alunos bons:* apenas três ou quatro "que são alunos que estão a acompanhar tudo e que estão interessados e empenhados"; *(ii) alunos mais fracos:* mas que no fim “fizeram um grande esforço para tentar chegar à positiva” e *(iii) alunos medianos:* estes foram, na visão de Mariana, “o problema”, pois “não estudaram durante o ano todo” *(entrev. temática 2, p. 1).*

6.3.2 A estrutura das aulas

No que respeita a estrutura e a sequência das aulas, os dois conjuntos de aulas observadas foram, em aspectos gerais, muito semelhantes. As aulas observadas respeitaram uma sequência que foi justamente ao encontro do que a professora já havia manifestado sobre o quê, em sua visão, representava ser o essencial para uma boa aprendizagem dos tópicos de Cálculo Diferencial. Assim, as aulas observadas respeitaram três momentos: i) Em uma primeira abordagem acontecia a *apresentação do conceito* com um forte apelo intuitivo e sem maiores formalidades (uma maior formalização ligada ao conceito, quando existia, era deixada para um momento posterior – como o excerto a seguir dá conta); i) a seguir a esta apresentação do conceito central da aula, ocorria a *discussão de exemplos* envolvendo o conceito, e iii) por fim, eram *propostos exercícios* aos alunos (que neles trabalhavam individualmente, em duplas ou mesmo em trios).

A seguir aos informes iniciais eram dinamizadas as três abordagens já referidas, nomeadamente: i) *apresentação do conceito*; ii) *discussão de exemplos* e iii) *proposta de exercícios*. Embora essa tríade fosse recorrente em praticamente todas as aulas (especialmente nas aulas de 100 minutos), houve aulas em que a ênfase maior recaiu na apresentação do conceito, bem como houve também aulas dedicadas mais à discussão de exemplos ou então à realização de exercícios (estas mais frequentes no segundo conjunto de observações).

Apresento a seguir excertos de uma aula observada que procuram dar conta dos três momentos: *apresentando o conceito* (aqui coloco em duas partes – uma parte onde o conceito é apresentado de modo mais informal por meio de questionamentos aos alunos e outra parte, com mais formalidade), *discussão de exemplos* (onde um exemplo, já tratado em aula, é usado para elucidar/exemplificar a definição do conceito de limite) e *proposta de exercícios*. Da primeira aula observada (que teve duração de 100 minutos), cuja temática era limites de uma sucessão e sucessões convergentes, foi realizado o seguinte registo que pretende ilustrar o que acaba de ser dito:

<u>Apresentando o conceito (de um modo intutivo)</u>

Feito o rápido comentário sobre o teste da última semana, a professora fala:

Professora: Agora o nosso estudo será sobre limites e pretendo que todos percebam bem... de um modo intuitivo esse assunto... na verdade, trata-se de um assunto fácil.

Nesse momento ouço um comentário interrogativo (em voz baixa) de um aluno que está sentado bem atrás de mim:

Aluno: Toda gente diz que [esse assunto] é difícil... como é que pode ser fácil?

A professora então escreve no quadro (e os alunos copiam) as seguintes sucessões:

$u_n = n^2 + 2$ e $v_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$

Professora: Ora bem... calculem agora alguns termos para cada uma dessas sucessões.

Nesse momento, os alunos copiam as duas sucessões e começam a calcular os seus termos. A professora então apresenta aos alunos o seguinte questionamento:

Professora: Pronto, já calcularam alguns termos, certo? Então digam-me lá quais os primeiros termos dessa [e aponta para primeira sucessão]?

Aluno: Para os três primeiros [termos] eu encontrei 3, 6 e 11.

Professora: Todos encontraram isso?

Alunos: Sim.

Professora: Muito bem!

Nesse instante a professora desenha um plano cartesiano e representa graficamente os pontos: (1,3), (2,6) e (3,11).

Professora: Agora vejam... o que está acontecendo com os termos?

Alunos: Estão crescendo.

Professora: Sim... estão crescendo, mas será que existe um valor que limita esta sucessão?

Aluna: Acho que não... está sempre a crescer [e faz o sinal com a mão].

Professora: Agora vamos ver o que se passa com a segunda [sucessão]... quais são os seus primeiros termos?

Aluno: Três quartos, um e sete sextos.

Professora: Vamos ver...

A professora então calcula os três primeiros termos em um canto do quadro, desenha um plano cartesiano e representa graficamente os pontos: $\left(1,\frac{3}{4}\right)$, (2,1) e $\left(3,\frac{7}{6}\right)$. Para a fração $\frac{7}{6}$ é apresentada a sua expressão decimal: 1,1(6).

Professora: Agora vamos pensar... para onde é que está indo esta sucessão?

Nesse instante a professora sugere o uso da calculadora.

Professora: Vamos lá... usem suas calculadoras... calculem para "n"grande... igual a cem mil, um milhão, cem milhões...

Os alunos tomam suas calculadoras e começam a calcular. Não demora muito, um aluno diz:

Aluno: Não passa de dois.

Aluno [outro]: Mas na minha [calculadora] deu dois!

Diante do impasse apresentado, a professora vai até à mesa do aluno e pede para ver a sua calculadora.

Professora: Ah... a sua calculadora está a fazer um arredondamento.

Aluno: Ainda bem, pois paguei 150€ por ela [calculadora].

Nesse instante todos na sala, incluindo a professora, caem na gargalhada.

Professora: Alguém mais encontrou dois ou um valor maior que dois?

Alunos: [Silêncio].

Professora: Então... ao que parece... os valores tendem a dois, mas não chegam a dois, não é isso?

Alunos: Sim.

Professora: Tender para... é o limite... nunca vai dar 2... tender para dois é dizer que o limite é igual a 2 [e escreve no quadro: $\lim v_n = 2$ *para a segunda sucessão e* $\lim u_n = +\infty$ *para a primeira sucessão].*

(registo de aula, 18 de fevereiro)

<u>Apresentando o conceito (com maior formalidade)</u>

Professora: Mas o que é uma sucessão convergente? Vamos ao livro... página 52... o que está nessa caixinha é o conceito de limite.

A definição apresentada no livro é a seguinte:

Dada uma sucessão (u_n), $l \in R$ é limite de (u_n) quando n tende para $+\infty$ se, para qualquer intervalo que se tome centrado em l, os termos u_n pertencem todos a esse intervalo, a partir de certa ordem, ou seja:

$\forall \delta \in R^+, \exists p \in N : \forall n \in N, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \delta$ Isto é, $u_n \in]l-\delta, l+\delta[$ a partir da ordem p.

É possível perceber, a partir da expressão facial de alguns alunos, um certo espanto deles diante da definição com tantos símbolos ali escritos. A professora então tenta tranquilizá-los dizendo o seguinte:

Professora: A boa notícia: não vamos aplicá-la [a definição]! Mas vamos explicar o que isso quer dizer.

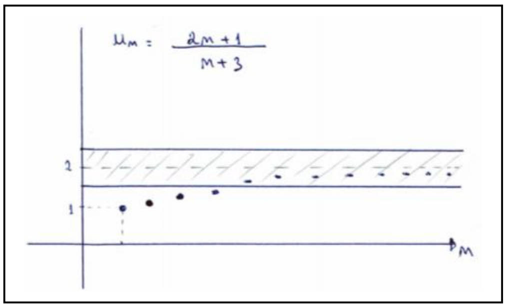
Uma aluna realiza a leitura da definição enquanto a professora a escreve no quadro.

(registo de aula, 18 de fevereiro)

<u>Discussão de exemplos</u>

Professora: Vamos tentar perceber o que está escrito aqui[referindo-se a definição de limite] usando o nosso segundo exemplo [referindo-se a sucessão dada pela expressão $v_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$*, já discutida] .*

A professora faz então a representação cartesiana que a figura a seguir procura dar conta e chama a atenção para o intervalo de “vizinhança” do dois (usando duas retas paralelas na cor azul e pintando o seu interior).



Professora: Já vimos de uma forma intuitiva que esta sequência é crescente... vimos também que nunca chega a ser dois e nem passa de dois.

Os alunos observam a professora no quadro.

Professora: O que a definição nos diz é isso [aponta para a representação] .. que eu posso tornar essa faixa centrada em dois tão estreita quanto eu queira... e os termos da sequência, a partir de uma certa ordem, ainda estarão em seu interior [faz gestos com a mão indicando um estreitamento].

(registo de aula, 18 de fevereiro)

Proposta de exercícios

A seguir, a professora escreve no quadro os seguintes limites: $\lim\left(\dfrac{2n+4}{n+5}\right) e \lim\left(\dfrac{3n+1}{n+4}\right)$ e solicita que os alunos façam uma investigação com auxílio da calculadora.

Professora: Investiguem os limites dessas sucessões... usem suas calculadoras.

Os alunos trabalham no exercício proposto. Pouco depois, um aluno diz:

Aluno: Para a primeira [sucessão] eu achei dois e para a segunda, [achei] três.

Logo a seguir, outros alunos confirmam a afirmação do colega e a professora logo emenda:

Professora: É óbvio que não vamos fazer assim com a calculadora.

E escreve no quadro:

$$\lim\left(\frac{2n+4}{n+5}\right) \rightarrow \left(\frac{2x(+\infty)+4}{+\infty+5} = \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

Professora: O que temos aqui é o que chamaremos de indeterminação [aponta para a expressão $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ *].*

Professora: Ouçam que isso é mesmo importante... precisaremos encontrar uma estratégia.

Nesse instante a professora faz uso de uma analogia. Em sua analogia, compara a indeterminação a um labirinto, onde não se sabe onde vai dar, podendo o limite existir ou não. A seguir, diz:

Professora: Nesse caso específico, a estratégia para sair do labirinto é pôr o termo de maior grau em evidência.

E apresenta a solução no quadro conforme a seguinte figura pretende dar conta:

$$\boxed{\begin{aligned}\lim\left(\frac{2n+4}{n+5}\right) &= \lim\left(\frac{n\left(2+\frac{4}{n}\right)}{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}\right)\\ &= \lim\left(\frac{2+\frac{4}{n}}{1+\frac{5}{n}}\right) = \frac{2}{1} = 2\end{aligned}}$$

> Após o exercício de investigação com a calculadora sobre os limites e a discussão do primeiro deles, os alunos trabalham de modo individual e em duplas no segundo limite. Nesse momento a professora circula pela sala e desloca-se até os alunos que solicitam sua presença. Ao final da aula, mais três exercícios envolvendo limites são escritos no quadro pela professora, para serem realizados em casa.
>
> *(registo de aula, 18 de fevereiro)*

No segundo conjunto de aulas observadas, que apresentou um número maior de aulas (consequentemente teve uma quantidade maior de conceitos trabalhados), a professora dinamizou alguns momentos de *revisão*, onde buscava revisar o conceito já trabalhado na aula anterior. Esses momentos de revisão e retomada ocorriam logo no início da aula e eram dinamizados por meio de questionamentos que a professora dirigia à turma para, em seguida, sistematizar o assunto objeto da revisão. O excerto seguinte extraído de uma aula de 50 minutos procura dar conta deste fato. Nele, a professora retoma o conceito de derivada em um ponto (pelo limite) como sendo o declive da reta tangente ao gráfico da função naquele ponto.

> *Revisão*
>
> A professora inicia a aula ditando o sumário (taxa média e instantânea de variação de uma função). Em seguida, retoma o que foi tratado na aula anterior (ontem).
>
> *Professora: Ora bem... vamos começar... na última aula estivemos a ver o conceito de taxa de variação!*
>
> *Professora: Do que vimos ontem... o que é importante ficar é isso [escreve no quadro a definição de derivada em um ponto de uma função* $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$*].*
>
> *Professora: Ou seja, na aula de ontem passamos do intervalo para um ponto, certo [consequentemente da taxa média de variação para a taxa instantânea de variação]?*
>
> *Alunos: Sim.*
>
> *Professora: Então... [aponta para a definição no quadro]... isso representa o que mesmo?*
>
> *Alunos: O declive.*
>
> *Professora: Declive do quê?*
>
> *Aluno: Da reta tangente ao gráfico.*
>
> *Professora: Sim... mas atenção...[o declive da reta] naquele ponto específico.*

Nesse instante, logo abaixo da definição escrita no quadro, a professora escreve:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abscissa "*a*".

(registo de aula, 17 de maio)

6.3.3 As interações na aula

A interação dominante e que ocupou a maior parte do tempo das aulas observadas foi entre a professora e os alunos. Ocorreu tanto na introdução/revisão de um conceito como no trabalho com exemplos e também quando havia a discussão de algum exercício. Tal interação se deu sempre na forma de um diálogo que a professora estabelecia com a turma, onde questões eram propostas pela professora e respondidas pelos alunos. As questões não eram direcionadas a um aluno ou grupo de alunos específicos, mas a toda a turma. O registo proposto anteriormente, quando da revisão de um tema, é um exemplo de tal interação, bem como o excerto que apresento a seguir no qual a professora estabelece um diálogo com a turma para introduzir o conceito de taxa média de variação de uma função.

Diálogo com a turma

A professora escreve no quadro: "Taxa média de variação de uma função". E a seguir tem-se o seguinte diálogo:

Professora: Vamos lá... vocês já viram isso, não? Lembram de onde isso pode ser aplicado?

Aluna: Na Física!

Professora: Sim, na Física... mas, de modo mais específico, em quê?

Aluna: Na aceleração e na velocidade!

Professora: Isso mesmo... portanto na Física tem-se uma aplicação direta do que vamos tratar aqui.

Aproveitando a fala da aluna que exemplificou a velocidade como uma aplicação da taxa média de variação, a professora então usa um exemplo:

Professora: Se quiserem fazer uma velocidade média... por exemplo entre a nossa cidade e Lisboa... o que deve ser feito?

Aluno: [Deve-se] dividir a distância pelo tempo.

Professora: Sim... é isso que na Física chamam de delta "d" e delta "t", ou seja, a velocidade média é justamente o delta "d" dividido pelo delta "t"... que é justamente um exemplo de taxa média de variação.

Nesse instante, a professora escreve a fórmula da taxa média de variação para um intervalo [*a*,*b*]:

$$T_{mv_{[a,b]}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(registo de aula, 16 de maio)

Ocorreram também situações de diálogo individualizado entre a professora e um aluno em particular. Tal modalidade de interação foi mais recorrente na segunda fase de observação, nomeadamente nas aulas que foram dedicadas à resolução de exercícios. Assim, este modelo de interação ficou mais cincunscrito às aulas de exercícios e ocorria quando um aluno solicitava a presença da professora para tirar uma dúvida ou pedir algum esclarecimento sobre o exercício que havia sido proposto. O registo a seguir pretende dar a entender como essa interação se processava. Nele, a presença da professora foi solicitada pelo aluno com a intenção de obter auxílio na resolução de um exercício que havia sido proposto.

Diálogo com um aluno

Professora: Vamos lá ver o exercício 166 [o primeiro da lista].

Os alunos então iniciam o trabalho no exercício sugerido. Não demora muito, um aluno que sentava logo atrás de mim solicita a presença da professora. O seguinte diálogo procura dar conta da interação entre este aluno e a professora:

Aluno: Aqui na [reta] "r" [aponta para gráfico no livro]... no ponto um, dois... posso derivar a [função] "g" de "x" e depois igualar a um para obter o declive?

Professora: Atenção... em algum momento é dito que este ponto é de tangência?

Aluno: Pois não.

Professora: Então não podes usar isso.

Aluno: [Mostra o gráfico]Mas parece [ser um ponto de tangência], não parece?

Professora: Pode até parecer... mas não posso usar esta informação... atente sempre para os dados fornecidos.

Professora: Veja... [aponta para gráfico no livro]...os declives das retas [“r” e “s”] são o quê?

Aluno: São iguais.

Professora: Sim... e são dadas as coordenadas de dois pontos pertencentes à [reta] “r”... logo com isso é possível saber o seu declive?

Aluno: Sim... percebi.

Professora: E depois... sabendo que esse declive é o mesmo de [da reta] “s”?

Aluno: Não percebi.

Professora: Como diz na questão que “s” é tangente à função “g” no ponto A... então?

Aluno: Ah... agora sim uso a derivada e igualo ao declive.

Professora: Isso mesmo... daí sai a abscissa do ponto A.

Aluno: Percebi... obrigado.

(registo de aula, 23 de maio)

Por fim, é de destacar que as interações do tipo ‘diálogos com a turma’ ocorreram um maior número de vezes do que as interações do tipo ‘diálogo com um aluno’ e tiveram um tempo sensivelmente maior de duração. Este último tipo, como já mencionei, verificou-se sobretudo nas últimas aulas observadas que foram devotadas à resolução de exercícios em aula. Também é de referir que ocorreram interações entre os alunos (em duplas e em trios) nos momentos que envolveram o trabalho com os exercícios propostos. Nessas situações, alguns alunos discutiam e trocavam impressões sobre o exercício em questão com o colega do lado (ou imediatamente à frente ou atrás). No entanto, estas interações foram sempre espontâneas, não tendo a professora recomendado de forma explícita que o trabalho fosse realizado em duplas ou em pequenos grupos.

6.3.4 O Cálculo Diferencial nas aulas

Na primeira série de observação o tema tratado foi limites de uma sucessão e na segunda série foram estudados os seguintes temas: taxas (média e instantânea) de variação de uma função, derivada e estudo da monotonia de uma função. Na parte respeitante aos limites de uma sucessão, que ocupou três aulas, foram abordados os seguintes tópicos: sucessão convergente, limite de uma sucessão, operações com limites de sucessões convergentes e cálculo de limites. O conceito de limite de uma sucessão foi introduzido por meio de um exemplo particular envolvendo uma sucessão dada por uma expressão racional. Alguns termos dessa sucessão foram representados pela professora num plano cartesiano e, em seguida, os alunos utilizaram a calculadora para conjeturar sobre a convergência da referida sucessão. Após a conjetura com a calculadora, foi realizada a comprovação pela via analítica. Em seguida, o conceito formal de limite de uma sucessão foi introduzido, sendo exemplificado através da mesma sucessão já trabalhada (com a representação gráfica no plano cartesiano). Por fim, foram discutidas as operações com limites de sucessões convergentes e o cálculo de limites através de exemplos envolvendo sucessões dadas por expressões polinomiais, racionais ou com raizes.

A segunda série de observação, que ocupou sete aulas, foi iniciada com o estudo da taxa média de variação de uma função (a partir do exemplo da velocidade média) e sua interpretação geométrica como sendo o declive de uma reta. Em seguida, a partir do conceito de taxa média de variação passou-se ao conceito de taxa instantânea de variação, terminando por escrever esta última como um limite, sendo interpretada geometricamente como sendo o declive da reta tangente e definida como sendo uma derivada. Logo após, foram apresentadas as principais regras de derivação. Finalmente realizou-se o estudo da monotonia de uma função com o auxílio da derivada por meio da discussão de exemplos envolvendo funções polinomiais e racionais.

6.3.4.1 Clarificando conceito

Em praticamente todas as entrevistas, Mariana expressou verbalmente o seu claro desejo que os alunos realmente entendessem o conceito que estava a ser estudado. Em suas palavras: "eles têm que entender o que se está a fazer e tem que perceber" (entrev. de reflexão 1, p. 5); "eles têm que perceber as ligações, o porquê das coisas, para depois a consolidação realmente ser eficaz" (entrev. de reflexão 1, p. 5).

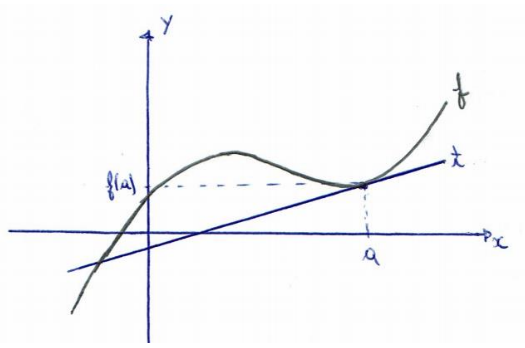
Tal desejo verbalizado pela professora no sentido do entendimento dos conceitos por parte dos alunos evidenciou-se em sua prática quando realizou, em diversos momentos, clarificações conceituais que envolviam temas centrais dentro do estudo em causa (expoentes fracionários e negativos, a inclinação da reta, retas paralelas, retas perpendiculares e reta tangente). Um exemplo que ilustra essa componente da prática da professora foi o trabalho com o conceito de *reta tangente*. Tal conceito, embora não fosse um tema específico das aulas, jogava um papel fundamental dentro do encadeamento lógico dos assuntos tratados: o conceito de derivada de uma função em um ponto específico foi dado justamente como sendo o declive da reta tangente à função (naquele ponto).

Ademais, o conceito de *reta tangente* jogaria um papel também importante nos estudos que viriam logo a seguir, nomeadamente no estudo da monotonia de uma função, como é possível depreender da seguinte afirmação da professora:

> Todos eles sabem ver o que é uma reta tangente... mas se não tiverem a noção então que a reta tangente é, na vizinhança, a que melhor aproxima ao gráfico... eles depois não iriam perceber o que era isso de reta tangente à esquerda e à direita.
>
> (entrev. de reflexão 2, p p. 3-4)

Tal clarificação do conceito de reta tangente pode ser vista no registo seguinte:

> A professora desenha no quadro o esboço de uma curva no plano cartesiano e também a reta tangente à curva no ponto (a,f(a)). A figura a seguir procura dar conta da representação supracitada.



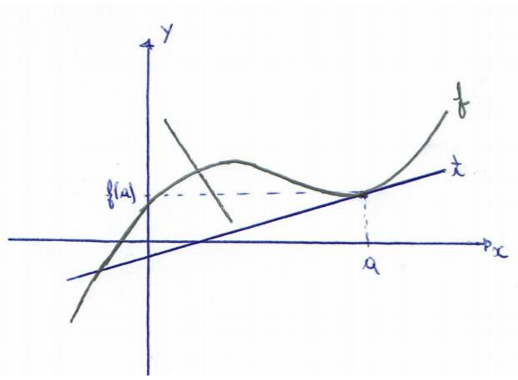
> A seguir, tem-se o seguinte diálogo entre a professora e os alunos envolvendo o conceito de reta tangente.
>
> *Professora: Mas o que é uma reta tangente mesmo?*
>
> *Alunos: [A reta] que toca o gráfico em um só ponto.*
>
> *(registo de aula, 17 de maio)*

Confrontada com esta situação ocorrida em sala de aula durante a entrevista de reflexão que tivemos, Mariana menciona que tal situação, na verdade, não é culpa dos alunos:

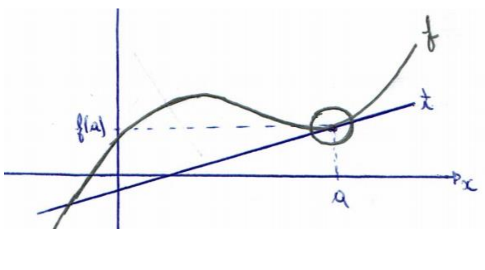
> Não é culpa deles eles dizerem isso, é culpa nossa... porque quando eles são mais pequeninos, é a maneira mais fácil de eles... eles fazem e é uma forma, sabem aquilo intuitivamente e o que lhes fica é que só toca em um ponto.
>
> (entrev. de reflexão 2, p. 3)

Na sequência da aula, Mariana usando como apoio a mesma construção gráfica, lança mão de um contra-exemplo e procura colocar em questão a resposta dada pelos alunos e assim clarificar o conceito, conforme o registo a seguir pretende dar conta:

> *Professora: Então essa reta aqui [desenha outra reta conforme a figura a seguir] pode ser considerada uma reta tangente ao gráfico?*



> Nesse instante há uma burburinho na sala com os alunos a trocarem impressões uns com os outros sobre a definição de reta tangente ao gráfico em um ponto.
>
> *Professora: Um de cada vez!*
>
> *Alunos: [Conversam entre si e apontam para o quadro, fazem gestos com as mãos e parecem não concordar que aquela reta desenhada seja tangente ao gráfico].*
>
> *Professora: E então... ninguém se arrisca?*
>
> *Professora: A reta tangente à função em um ponto é uma reta que intersecta a função naquele ponto e que melhor se aproxima ao gráfico da função.*
>
> *Aluno: Como assim professora... melhor se aproxima?*
>
> A professora então procura clarificar mais a sua afirmação e desenha um círculo no ponto de tangência (no esboço já desenhado, conforme a figura a seguir) e responde ao aluno:



Professora: Olha para aqui [mostra o círculo]... para ser tangente... olha para o zoom... na vizinhança é a reta que melhor se aproxima ao gráfico da função. Tudo bem?

(registo de aula, 17 de maio)

Por fim, é de também destacar o formato utilizado pela professora para realizar a referida clarificação, que se dá de modo a questionar os alunos, confrontando-os com suas próprias visões e compreensões sobre o conceito em questão. Essa forma de conduzir a aula, não apresentando diretamente o conceito aos alunos, antes pelo contrário, problematizando-o, parece ser algo deliberado por parte da professora, como é possível depreender a partir da seguinte afirmação: "se eu chegar lá e debitar matéria, não funciona" (entrev. de reflexão 1, p. 5).

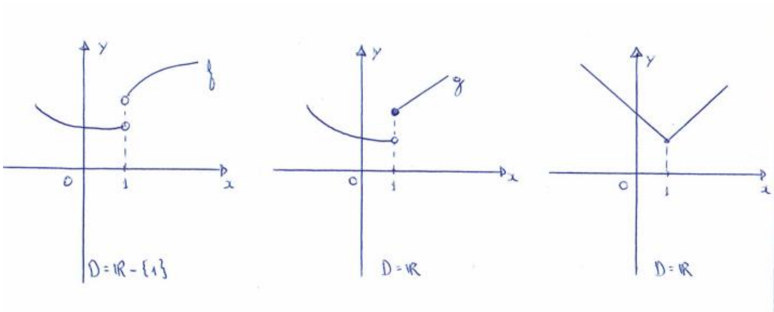
6.3.4.2 Mostrando graficamente

O registo anterior que apresenta a clarificação do conceito de reta tangente pela professora, conduzido por meio de um diálogo com a turma, também evidencia outro ponto marcante da prática da professora, nomeadamente a importância dada à representação gráfica. Na verdade, ao longo de todas as aulas observadas (tanto na primeira quanto na segunda série) a professora deu uma ênfase muito grande às representações e apoios gráficos em suas aulas. Quando convidada a refletir durante uma entrevista sobre o uso recorrente dessas representações, foi categórica ao afirmar: "tento, sempre que possível, mostrar as coisas graficamente" (entrev. de reflexão 2, p. 4).

Apresento a seguir dois extratos de aula que procuram dar conta disso. No primeiro, a representação gráfica é utilizada pela professora quando se abordou o conceito "continuidade de funções – funções deriváveis". Na oportunidade, três representações gráficas de três funções são desenhadas no quadro pela professora que, em seguida, aborda os conceitos na forma de um diálogo com a turma, tendo sempre em atenção as três representações gráficas.

Na sequência da aula, a professora escreve no quadro: "Continuidade de funções – funções deriváveis" seguido de três esboços gráficos (que a seguinte figura procura dar conta).

Continuidade de funções – funções deriváveis



Tendo em atenção os três esboços representados (no quadro da esquerda), a professora dirige algumas questões aos alunos:

Professora: [Referindo-se ao primeiro esboço] A função é contínua ou não?

Aluna: É contínua menos no um.

Professora: Cuidado! Observa o domínio dessa função... são todos os reais menos o um... logo?

Aluna: Ela é contínua em todo o seu domínio.

Professora: Correto... e quanto à função g? Essa tem por domínio todos os [números] reais.

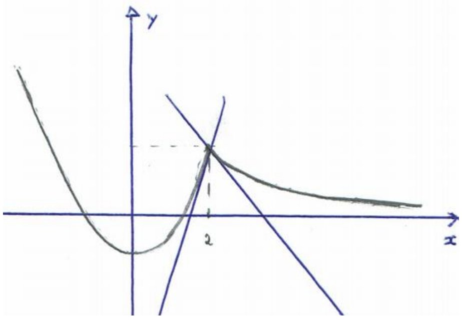
Professora: Nesse caso... o problema está justamente no um... que apesar de fazer parte do domínio [da função]... não há continuidade nesse ponto, pois está claro que [escreve $g(1) \neq \lim_{x \to 1^-} g(x)$ *, apontando para o gráfico].*

Professora: E quanto a função h... é contínua em todo o seu domínio... está claro?

(registo de aula, 20 de maio)

No segundo extrato, após a discussão de um exemplo do manual (que tratou da resolução analítica envolvendo a derivada em um ponto de uma função definida por ramos), a professora representa tal situação graficamente no quadro e evidencia o ponto onde a função não é derivável. A seguir, novamente lançando mão de apoios visuais gráficos, denomina estes pontos (onde a função não possui derivada) como sendo “pontos angulosos” e refere ainda que esses pontos ocorrem, em suas palavras, no formato de “v”. Tal apoio gráfico parece ter tido reflexo no entendimento dos alunos, uma vez que uma aluna logo reconhece esses pontos como aqueles em que o gráfico da função, em suas palavras, faz um “bico”.

Passados alguns instantes, a professora retorna ao quadro e desenha um esboço (que a figura a seguir procura dar conta) para o exemplo discutido:



Professora: Vamos ver aqui... observem as duas retas tangentes... uma positiva de declive igual a sete [aponta para esboço] e a outra de declive negativo... igual a menos quatro [aponta para esboço].

Professora: Assim é possível ver graficamente... e facilmente se percebe que não têm o mesmo declive.

Aluna: Sim professora... ela não é derivável, mas é contínua.

Professora: Sim... esses pontos que não são deriváveis... são mesmo interessantes... é o que chamamos pontos angulosos.

Professora: Esses pontos [angulosos] ocorrem muito geralmente no formato de "V" [faz alguns esboços no quadro – que a figura a seguir procura dar conta].

Professora: Já quando é derivável... isso não ocorre... o gráfico não tem esses pontos angulosos [escreve um traçado de curva no quadro].

Professora: Atenção... isso pode ser útil em uma questão de múltipla escolha... por exemplo sobre se a função é derivável... entendido?

Aluna: Sim... o gráfico não pode fazer "bico".

(registo de aula, 17 de maio)

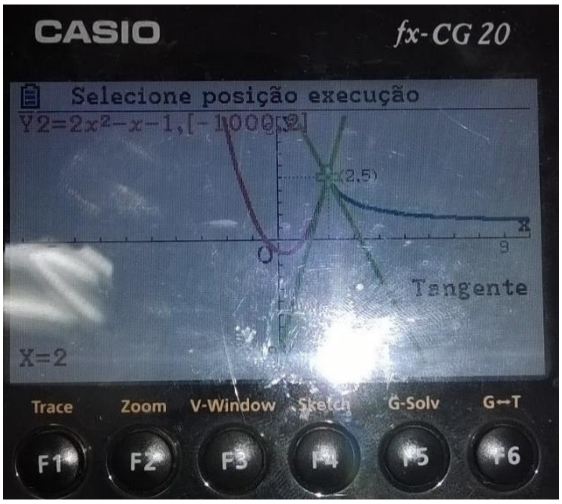
6.3.4.3 Comprovando/conjeturando com o auxílio da calculadora

Dois usos foram conferidos à calculadora pela professora nas aulas: o primeiro, mais recorrente, foi para comprovar e o segundo, na realização de conjeturas. Conforme já mencionei, a professora reconheceu que tinha conferido um uso um tanto restrito para a calculadora em suas aulas, especialmente para a função gráfica da calculadora. Tal uso se deu, segundo indicou, principalmente em contextos de verificação: a via gráfica para comprovar o resultado encontrado analiticamente.

> Estudavam qualquer coisa, faziam, verificavam e realmente é assim... reta tangente, OK, escrevemos a equação da reta tangente... ah, realmente está aqui a função, esta reta realmente é a reta tangente.
>
> *(entrev. temática 2, p. 17)*

Apresento a seguir dois excerto de aula que procuram dar conta do uso da calculadora gráfica para comprovar um resultado obtido analiticamente. Na primeira ocasião, após a discussão de um exemplo envolvendo uma função definida por ramos, concluiu-se que a função não era derivável nesse ponto por apresentar derivadas laterais distintas e, em seguida, a professora solicita que a calculadora gráfica seja usada para comprovar. Na segunda ocasião apresentada, após a obtenção da expressão analítica para a derivada da função $g(x) = \sqrt{1-x}$, a professora propõe a atividade de comprovar com o uso da calculadora gráfica.

> *Professora: Então... o que podemos concluir?*
>
> *Alunos: Que [a função] não é derivável em x = 2.*
>
> A professora então sintematiza no quadro, escrevendo:
>
> Como $g'(2^-) \neq g'(2^+)$ logo, não existe g'(2).
>
> *Professora: Agora... vamos ver isso graficamente usando a calculadora gráfica em uma função definida por ramos.*
>
> *Professora: Todos sabem usar?*
>
> *Alunos:[Ficam em silêncio enquanto manuseiam suas calculadoras].*
>
> *Professora: Nas [calculadoras] Texas tem que ser assim [escreve no quadro:* $y_1 = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)(x > 2)$*].*
>
> A professora vai até às mesas de alguns alunos e auxilia-os no uso das calculadoras.
>
> Observo uma dupla de alunos que está bem ao meu lado (uma rapariga e um rapaz) que nesse instante tentam usar a calculadora para verificar que a função, de fato, não era derivável em *x* = 2. O registo a seguir da conta da construção apresentada pela dupla na calculadora.



(registo de aula, 17 de maio)

Professora: Só para retomar... [Escreve a expressão da derivada que fora calculada: $g'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ *] qual é o domínio? Pensem lá nas restrições.*

Professora: Aqui temos duas questões referentes ao domínio... primeira, deve ser uma raiz positiva... e, segunda, o denominador deve ser diferente de zero.

Na sequência, a professora então escreve no quadro:

$$
\begin{array}{lll}
1-x\geq 0 & 2\sqrt{1-x}\neq 0 & \\
-x\geq -1 & \sqrt{1-x}\neq 0 & \text{Assim, } D=\left]-\infty,1\right[\\
x\leq 1 & x\neq 1 &
\end{array}
$$

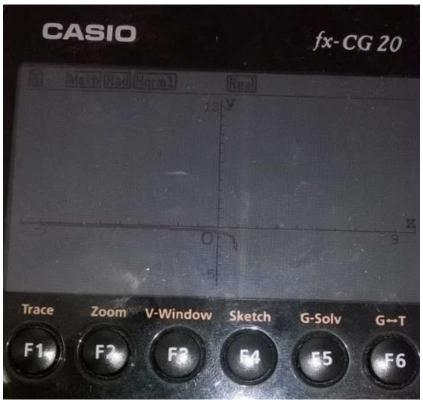
Professora: Agora vamos à calculadora... coloquem aí nas suas calculadoras.

Nesse momento, a professora mostra de forma pormenorizada como os alunos podem comprovar o cálculo que fizeram (da derivada) com recurso à calculadora gráfica. A professora faz referência ao modelo de calculadora gráfica Texas, que a maioria dos alunos possui.

A professora então escreve no quadro as entradas que os alunos deveriam meter em suas calculadoras gráficas. A professora então escreve o seguinte no quadro:

$$
g'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \longrightarrow
\begin{array}{l}
y_1=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} \\
y_2=\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x}\right)_{x=x}
\end{array}
$$

Após dar as orientações gerais, a professora circula pela sala de aula prestando auxílio aos alunos que solicitam. Coloco a seguir um registo fotográfico do visor da calculadora da aluna que sentava ao meu lado.



Após circular pela sala, a professora dirige-se para toda a turma:

Professora: Aqui... no fundo... usamos para comprovar que a derivada está correta.

(registo de aula, 20 de maio)

Houve também a indicação da professora para o uso da calculadora em uma situação específica de comprovação, sem no entanto isto efetivamente ocorrer. Essa situação se deu após a clarificação do conceito de reta tangente (já discutido anteriormente), situação em que, ao final, a professora realizou tal indicação:

Professora: Isso pode ser visto na vossa calculadora gráfica... basta usar uma janela de visualização adequada.

(registo de aula, 17 de maio)

O segundo tipo de uso referido anteriormente, nomeadamente o emprego da calculadora com o objetivo de se estabelecer conjeturas foi sensivelmente menor que o uso em comprovações e não foi explorada, nesse caso, a função gráfica da calculadora. Tal ocorreu quando se buscou conjeturar sobre a convergência ou não de uma sequência a partir do conhecimento de sua expressão analítica ($v_n = \frac{2n+1}{n+3}$) e também quando se investigaram alguns limites. Os dois registos seguintes procuram dar uma ideia de como tal emprego se deu.

Professora: Agora vamos pensar... para onde é que está indo esta sucessão?

Nesse instante a professora sugere o uso da calculadora.

Professora: Vamos lá... usem suas calculadoras... calculem para "n" grande... igual a cem mil, um milhão, cem milhões...

Os alunos tomam suas calculadoras e começam a calcular. Não demora muito, um aluno diz:

Aluno: Não passa de dois.

(registo de aula, 18 de fevereiro)

A seguir, a professora escreve no quadro os seguintes limites: $\lim\left(\dfrac{2n+4}{n+5}\right) e \lim\left(\dfrac{3n+1}{n+4}\right)$ e solicita que os alunos façam uma investigação com auxílio da calculadora.

Professora: Investiguem os limites dessas sucessões... usem suas calculadoras.

Os alunos trabalham no exercício proposto. Não demora muito, um aluno diz:

Aluno: Para a primeira [sucessão], eu achei dois e, para a segunda, [achei] três.

Logo a seguir, outros alunos confirmam a afirmação do colega e a professora logo emenda:

Professora: É óbvio que não vamos fazer assim com a calculadora.

(registo de aula, 18 de fevereiro)

6.3.4.4 Conectando conceitos (ênfase para a intuição)

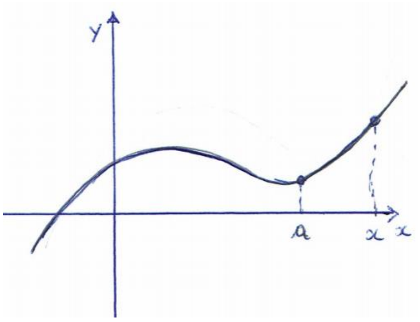
Durante o trabalho com um novo tópico em aula, a professora parecia ter sempre presente duas coisas: i) a necessidade de *conectar o novo conceito* com conceitos já trabalhados anteriormente e ii) nesse trabalho de conexão entre conceitos, um papel de relevo era dado a uma *abordagem intuitiva*. Nas palavras da professora: "a primeira parte eles têm que perceber as ligações, o porquê das coisas" (entrev. de reflexão 1, p. 7); "não pode[m] as coisas estar isoladas" (entrev. de reflexão 1, p. 6) e "só os consigo cativar se for uma coisa muito intuitiva" (entrev. de reflexão 1, p. 2).

O excerto de aula que apresento a seguir procura dar conta dessa preocupação da professora, nomedamente de apresentar os conceitos de modo articulado e com uma grande ênfase intuitiva (nesse caso, principalmente no tocante à percepção geométrica). Nessa aula, a professora já havia apresentado o conceito de taxa média de variação de uma função usando o exemplo da velocidade média da Física. Na sequência (parte que o excerto procura dar conta) a professora tenta, lançando mão de representações gráficas, passar da taxa média de variação de uma função para a taxa instantânea de variação através do uso do conceito de limite (já estudado pelos alunos) para finalmente apresentar o conceito de derivada de uma função em um ponto.

Professora: Agora... como vamos [ir] de um intervalo para um único ponto?

Professora: Prestem bem atenção porque a ideia é muito intuitiva!

A professora então faz um esboço no segundo quadro que a seguinte figura procura dar conta:



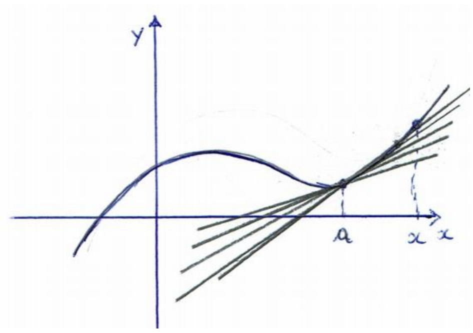
Professora: A ideia aqui é muito intuitiva e é bem simples... vejam [aponta para o intervalo [a,x]]... fazemos o x tender para a.

Professora: Assim... o intervalo que tínhamos passa a ser[faz um movimento com a mão para indicar a "aproximação" de x em direção a "a"]?

Aluna: Um ponto.

Professora: Exato... e em termos geométricos agora... o que passa a ocorrer com a reta?

A professora então desenha um feixe de retas secantes nessa "aproximação" de f(x) para f(a). A figura seguinte procura representar a situação.



Professora: Olha para aqui [aponta para as diferentes retas secantes]... a reta passa de ser secante para ser?

Aluna: Tangente.

Professora: Isso mesmo!

A professora então sistematiza escrevendo no quadro:

t $\rightarrow$ reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abscissa *a*

Professora: Entenderam a ideia?

Alunos: [Silêncio].

Professora: Então... ao fim e ao cabo, tenho que aplicar o quê?

Aluna: Um limite?

Professora: Sim... um limite e é a isso que chamamos de derivada.

A professora então escreve a notação para derivada (em um ponto *a*) no quadro, indicando que a expressão analítica representa o declive da reta tangente ao gráfico de *f* em *x* = *a*.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

declive da reta tangente ao gráfico de *f* em *x* = *a*.

Aluna: Então isso é o declive da reta tangente?

Professora: Sim... mas naquele ponto. Então vocês vão usar um limite para calcular a derivada.

(registo de aula, 16 de maio)

Em um momento posterior a esta aula, oportunidade em que realizamos uma entrevista de reflexão, a professora evidenciou a passagem da taxa média de variação de uma função para a taxa instantânea de variação e indicou como prioridade sua que os alunos percebessem o conceito de modo intuitivo:

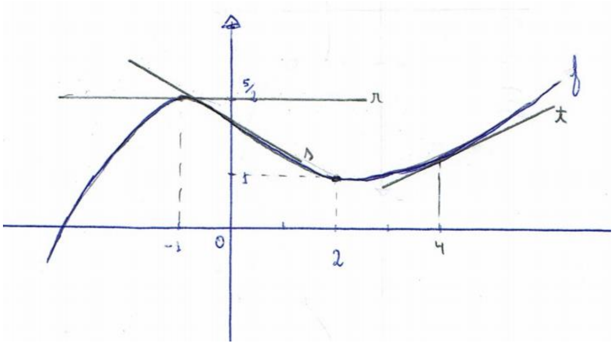
> Foi exatamente o momento aquele que viste, que foi eles perceberem que, como é que se passa da taxa média de variação, que é um conceito muito básico para eles... e passando logo a associar a velocidade média, todos compreendem o que é a velocidade média e todos compreendem que aquilo realmente, só, só nos dá uma informação em relação ao ponto inicial e ao ponto final e não do que se passou entre, não é, e... perceberem o porquê de como é que se passa daí para, para um instante e a aplicação do limite, que foram eles logo que chegaram lá, não é?... se *x* tem que tender para o *a*.
>
> *(entrev. temática 1, p. 2)*

> Para passarem do intervalo ao ponto, temos que aplicar um limite, e portanto a minha prioridade ontem é [foi] que eles tivessem presente o conceito intuitivo.
>
> *(entrev. temática 1, p. 3)*

O próximo excerto de aula diz respeito à relação estabelecida pela professora entre os conceitos derivada de uma função e o estudo da monotonia da referida função. Na visão da professora, este seria o grande objetivo das aulas envolvendo tópicos de Cálculo Diferencial: "O objetivo principal, estudar a monotonia de uma função sem ver o seu gráfico, a partir da sua expressão" *(entrev. temática 1, p. 3).* Na oportunidade, a professora começa por chamar a atenção de que o estudo da monotonia de uma função já era realizado pelos alunos, mas com a necessidade da visualização de seu gráfico. Então a professora, novamente empregando um apoio visual, procura conectar os conceitos de derivada e monotonia, identificando a possibilidade do uso da derivada para o estudo da monotonia de uma função.

Professora: Fizemos tudo pelo gráfico [estudo da monotonia de uma função]... vamos lá pensar o que a derivada pode nos ajudar nisso.

Nesse instante, a professora desenha três retas (r,s e t) tangentes ao gráfico da função “f” (como a figura procura representar).



Professora: Em relação à [reta] t... ela é?

Alunos: Crescente.

Professora: Em relação à [reta] s... ela é?

Alunos: Decrescente.

Professora: Em relação à [reta] r... ela é?

Alunos: É [uma reta] horizontal.

Professora: Sim... sim... vamos sistematizar isso pensando nos declives.

A professora então escreve logo abaixo do esboço construído:

t é uma reta crescente	$\longrightarrow$	$m_t > 0 \rightarrow f'(4) > 0$
s é uma reta decrescente	$\longrightarrow$	$m_s < 0 \rightarrow f'(0) < 0$
r é uma reta horizontal	$\longrightarrow$	$m_r = 0 \rightarrow f'(-1) = 0$

E após escrever, conclui:

Professora: Ou seja... podemos dizer que a monotonia está diretamente relacionada com a derivada... pois a reta tangente é a que melhor se aproxima da função, lembram?

(registo de aula, 20 de maio)

Novamente, aqui é possível identificar o caráter deliberado da professora em apresentar a conexão entre o sinal da derivada de uma função com o estudo da monotonia. Ao final, conecta-se também o conceito de reta tangente à função, assunto que mereceu uma clarificação mais pormenorizada da professora em uma aula anterior. E, por fim, de novo aqui está presente um forte apelo intuitivo nas representações gráficas utilizadas. Na entrevista de reflexão, a professora considerou que a aula correu relativamente bem e que os alunos conseguiram perceber as relações estabelecidas:

> Eu acho que eles até... eu ainda acho que correu relativamente muito bem... acho que eles conseguiram perceber... ah o porquê de se concluir então a relação entre o sinal da derivada e o sinal da monotonia da função... e... e essa parte que eu foquei do gráfico... é que para eles perceberem... que isto é, é... no fundo nós estamos sempre a ver o mesmo, mas a alargar... portanto a questão da monotonia já no ano passado foi estudado... só que eles só conseguiriam estudar, não é... só indicavam vendo graficamente a função... e é para eles perceberem que agora vamos conseguir fazer isso já sem ter o gráfico... é importante que eles percebam que coisas que eles faziam antes só, só por visualização, agora vão justificando analiticamente.
>
> *(entrev. reflexão 2, p p. 6-7)*

6.3.4.5 Oferecendo apoios/orientações no formato de resumos

Segundo a professora, considerando as características dos alunos da turma, apesar da sua idade, ainda necessitam de orientações pormenorizadas para que possam avançar:

> Mas os alunos, eles precisam muito... apesar de já... são quase adultos, ainda precisam de muitas orientações... se não for dito o que ele tem que estudar, mesmo assim pormenorizado, eles não estudam, não avançam.
>
> *(entrev. reflexão 2, p. 14)*

Nas palavras da professora, "porque os alunos mais fraquinhos, eles depois vão precisar de um quadro resumo". Este quadro resumo seria algo do tipo: "mas agora disto tudo, o que eu preciso mesmo de saber? Isto e isto... E pronto, é mais para esses alunos que se perdem" *(entrev. temática 1, p. 8).* Tais orientações ocorreram em aula no formato de pequenos resumos e desdobraram-se na forma de comentários orais ou então tomaram a forma de um resumo escrito no quadro pela professora. Os três excertos seguintes procuram dar uma ideia do tipo de orientação oferecida, bem como o seu formato. O primeiro é um resumo oral e os demais são resumos escritos.

Professora: Ora bem... vamos ver agora a última parte... assim fica toda a matéria dada... antes porém gostava de recapitular o que já vimos.

A professora faz então um resumo de toda a teoria já vista de modo oral. Destaca em sua intervenção o que, segundo ela, deveria ficar bem claro: 1.º) o conceito de DERIVADA em um ponto e o seu uso para escrever a equação da reta tangente ao gráfico naquele ponto; 2.º) as REGRAS DE DERIVAÇÃO e a sua utilidade no estudo da monotonia de uma função.

Professora: Essa última parte vamos ver agora com um exemplo... vejam... com a expressão da derivada vamos conseguir estudar a monotonia.

A professora então propõe o exemplo $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ para ser feito de modo conjunto.

(registo de aula, 20 de maio)

Professora: Retomando... com o sinal da derivada podemos estudar a monotonia da função sem ter a visualização do seu gráfico.

Professora: Vamos organizar aqui o que temos de fazer para isso.

Nesse instante, a professora vai ao quadro e escreve:

1.º) $f(x)$ =....... (Regras de derivação)

Professora: Isso vai ter no formulário.

Na sequência, escreve o segundo passo:

2.º) $f'(x) = 0$

Professora: *Tem que escrever isso... certo?*

Em seguida, para exemplificar, escreve o terceiro passo acompanhado da tabela do estudo da monotonia. E aproveita o exemplo da tabela para questionar os alunos sobre máximos e mínimos.

3.º) Tabela

x	D_f + zeros f'			
f'	Sinal	+	0	−
f	Monotonia	↗	MÁX	↘

Professora: Escrevemos na primeira linha o domínio e os zero da derivada... na segunda linha o sinal da derivada e... na última a monotonia da função f.

Professora: Nesse exemplo... como a função cresce e depois decresce, vamos ter o quê?

Alunos: Um ponto de máximo.

Professora: Isso... e se fosse o contrário... por exemplo decrescesse e depois crescesse... teríamos o quê?

Alunos: Um ponto de mínimo.

Professora: Sim... mas tenham cuidado que o valor máximo é a imagem e não o valor de x.

Após estes comentários, a professora escreve no quadro o quarto passo:

4.º) Resposta.

Após a escrita dos quatro passos a realizar, a professora passa à abordagem de um exemplo.

(registo de aula, 22 de maio)

Na sequência, a professora retoma os 4 passos adotados no estudo da monotonia através do uso da derivada. Escreve-os novamente no quadro:

1.º) Derivada: f'(x);
2.º) Os zeros da derivada: f'(x) = 0;
3.º) A construção da tabela;
4.º) A escrita da Resposta.

Segundo a professora, a maioria dos exercícios poderia ser abordada seguindo estes quatro passos. Porém, esclarece que podem ter exercícios com um formato distinto, mas que no fundo há a necessidade de um estudo envolvendo a derivada.

(registo de aula, 24 de maio)

No momento da entrevista de reflexão, quando convidada a refletir sobre a importância que conferia a estes apoios no formato de resumos, tanto orais quanto escritos, mas sobretudo os escritos por terem sido mais recorrentes nas aulas, a professora novamente referiu que os alunos precisavam desses apoios, os quais denominou de "bengalas" ou "cábulas". No seu entender, estes apoios permitiriam uma maior estruturação e parece indicar que essa sua ênfase se dava, sobretudo, devido às características da turma:

> Eles precisam de uma bengala... saber onde se apoiar... quando já foi o caso dos limites, eu também fiz isso... em termos de linguagem matemática, isso não vale nada, não é... isso são as vossas cábulas,

> que é para vocês saberem o que é que tem que fazer.(...) é para eles estarem estruturados... se acontecer isso, então faço isso... portanto eles precisam muito dessas bengalas e aí é a mesma coisa eles saberem... OK para estudar a monotonia, o que é que tem que fazer... é isso, isso e isso, pronto, OK... esta turma, se calhar, outras turmas, não.
>
> *(entrev. reflexão 2, p. 17)*

> Porque, por ser uma turma... quer dizer, quando se está com alunos muito bons, as vezes estes comentários até são desnecessários porque eles já compreenderam, já sabem... claro que sim... mas aqui é uma turma média/baixa.
>
> *(entrev. reflexão 1, p. 8)*

6.4 Síntese

6.4.1 O percurso profissional e o contexto escolar

Mariana é professora de Matemática há aproximadamente dezoito anos, período em que lecionou em sete escolas diferentes nas regiões norte, central e sul de Portugal. Está há dez anos em uma escola da região metropolitana de Lisboa, onde leciona Matemática para o 2.º ciclo, 3.º ciclo e secundário. Mariana afirma que foi a partir da experiência que teve com um professor explicador (quando era estudante do 12.º ano), que passou a "adorar a Matemática" e decidiu ser professora. Considerando o seu percurso profissional, refere a mudança na forma de avaliar e o aumento da sua tolerância como sendo as duas mudanças mais significativas. Refere também que o que mais gosta no ensino é ensinar a alunos que realmente gostam de estudar e o que menos gosta é a falta de condições de trabalho, sendo que isso parece contribuir de modo significativo para não estar, neste momento, tão motivada quanto gostaria na profissão.

No tocante ao contexto escolar, embora admitindo que algumas atividades sejam dinamizadas na escola, na visão de Mariana, esta não é muito dinâmica. Este quadro está associado à tríade: (i) desmotivação docente, (ii) desmotivação dos alunos e (iii) falta de investimentos. Refere também que embora no passado já tenha trabalhado de forma mais direta com um colega, no momento tem trabalhado de forma mais isolada, limitando-se a partilhar os materiais que elabora. Tal isolamento aparece novamente quando faz uma apreciação do grupo da Matemática na escola, onde reconhece que as pessoas estão muito centradas em si e onde acaba por se fazer somente o que é obrigatório.

6.4.2 Conceções em relação ao ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário

Mariana refere que a presença do Cálculo Diferencial no ensino secundário, em sua visão, faz todo o sentido. Menciona três razões para justificar esse seu posicionamento: i) refere que tais tópicos *dão um sentido maior para assuntos já estudados* pelos alunos; ii) mencina a *potencialidade para se fazer um estudo exaustivo de uma função analiticamente;* iii) refere que *a Matemática A é dirigida a alunos que buscam cursos superiores que terão Álgebra e Cálculo*. Para além de uma aplicabilidade dos tópicos de Cálculo Diferencial em situações reais, alude que o trabalho com estes tópicos no ensino secundário desenvolve o que denominou de 'competências transversais' que, por seu turno, relacionam-se com: i) *a persistência, ii) o raciocínio lógico, iii) a abstração, iv) a resolução de problemas, v) a leitura/interpretação e vi) conjugar dados*.

Refletindo sobre o que considera essencial, tendo em vista uma boa aprendizagem de Cálculo Diferencial no ensino secundário (Matemática A), Mariana indica três etapas que devem, em seu ponto de vista, idealmente ocorrer sequencialmente: i) *os alunos devem perceber os conceitos que estão sendo trabalhados*; ii) cabe ao professor *discutir em aula vários tipos de exercícios e exemplos de aplicação dos conceitos*; e iii) cabe ao professor propor (e ao aluno realizar) *um leque variado de exercícios*.

6.4.3 Aspetos centrais da prática letiva no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial

No tocante à estrutura das aulas observadas, estas respeitavam uma sequência de três momentos: i) primeiro ocorria a apresentação do conceito, na qual dava-se uma grande ênfase para a intuição e os conceitos eram aí tratados sem grandes formalidades; ii) de seguida, ocorria a discussão de exemplos com a aplicação do conceito e, finalmente, iii) eram propostos exercícios para os alunos fazerem na aula ou para serem realizados em casa, sendo que tais exercícios, quando realizados em aula, eram-no individualmente, em duplas ou mesmo em trios e a professora prestava auxílio aos alunos.

Junto a uma ênfase intuitiva na apresentação do conceito, Mariana também deixou claro, na sua prática de sala de aula, a necessidade de se fazer uma conexão entre os conceitos tratados. Tal conexão entre os conceitos permeou os três momentos (apresentação do conceito, discussão de exemplos e o trabalho com os exercícios), mas foi mais nítida aquando da apresentação de um novo conceito e também na discussão de exemplos, momentos nos quais a professora buscava ligar o conceito novo com outros conceitos já conhecidos dos alunos.

Consoante a avaliação que tinha da turma (considerando que não tinham hábitos de estudo e com rendimento médio/baixo), Mariana achava pertinente conferir apoios visuais, orientações e clarificações mais pormenorizadas para que os alunos pudessem avançar. As clarificações apresentadas pela professora desdobravam-se de duas formas: i) a partir do questionamento colocado por algum aluno aquando da apresentação ou menção ao referido conceito ou ii) pela própria professora, oportunidade em que ela questionava os alunos sobre o conceito em questão e estabelecia um diálogo com a turma.

Capítulo 7

Professor João

7.1 Apresentação

João é docente de Matemática em uma turma de 12.º ano (Matemática A), sendo esta a única turma de 12.º ano da escola e também a única turma para a qual o professor leciona Matemática atualmente. Para além das atividades docentes nessa turma, ele também exerce um cargo de gestão na escola, nomeadamente na função de adjunto do diretor. Devido às intensas demandas do professor, principalmente relacionadas com o seu cargo de gestão, as duas entrevistas foram realizadas em períodos de recesso escolar: a primeira entrevista ocorreu em abril, durante as miniférias da Páscoa, e a segunda aconteceu em junho, quando os alunos já estavam de férias. Cada uma das entrevistas teve uma duração aproximada de uma hora e meia.

A primeira entrevista foi agendada para o período das miniférias da Páscoa, altura em que o professor estava com maiores disponibilidades de agenda para o efeito. A entrevista ocorreu em dois locais: teve início na sala onde João exercia suas funções de adjunto do diretor e depois foi concluída na sala do grupo de professores de Matemática. Cheguei para esta primeira entrevista e aguardei o professor junto à entrada de sua sala. Após transcorridos alguns minutos, o professor chegou, abriu a sala e entramos. A sala era bastante ampla e servia também como local de trabalho de um secretário da escola, que possuía a sua mesa logo na entrada da sala, porém não estava presente quando do início da entrevista.

A entrevista teve início e transcorridos alguns minutos, fomos interrompidos por uma professora que chegou e solicitou o auxílio de João para a verificação de alguns computadores na sala de multimédia. João acompanhou-a, mas não se demorou, retornando logo em seguida. A entrevista teve continuidade, porém na sequência houve uma nova interrupção, dessa vez com a chegada do secretário. Estávamos agora os três na sala e João então sugeriu que a parte restante da entrevista fosse realizada na sala do grupo de professores de Matemática, para onde nos dirigimos. Neste novo local não houve qualquer interrupção e a entrevista ocorreu normalmente. Na oportunidade foi abordado o percurso profissional de João, além da apreciação, realizada por ele, das aulas por mim observadas.

A segunda entrevista ocorreu integralmente na sala do grupo de professores de Matemática e foi realizada, como já referi, no período de recesso escolar de junho, altura em que novamente não havia alunos na escola e que o professor dispunha de mais tempo para a entrevista. A sala do grupo de professores de Matemática ficava no térreo do prédio, ao final de um corredor e um tanto distante da sala dos professores. A sala não era muito grande e possuia uma mesa retangular com algumas cadeiras à sua volta.

João e eu sentámo-nos e logo iniciamos a entrevista, que transcorreu, dessa vez, sem nenhuma interrupção. Como na altura não havia aulas na escola e a sala ficava um tanto distante das demais salas administrativas, o silêncio só era quebrado pelo som oriundo da canalização hidráulica localizada em uma parede da sala quando a descarga de uma casa de banho adjacente era acionada. Contudo, tal ruído não comprometeu o bom andamento desta segunda entrevista que incidiu sobre três eixos: (i) o contexto escolar – que não pode ser apreciado na primeira entrevista, (ii) as conceções do professor sobre o ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário (Matemática A) e (iii) a livre apreciação, realizada pelo professor, das aulas por mim observadas.

Tanto a primeira quanto a segunda entrevista ocorreram em momentos previamente acordados com o professor que, por sua vez, demonstou muita segurança e tranquilidade no transcorrer de ambas. Na segunda entrevista, ao refletir sobre o seu perfil, o professor se auto definiu como sendo "muito contido" *(entrev. 2, p. 12)*. Com efeito, sendo muito mais contido, segundo ele próprio, em ambientes fora da sala de aula. Esse seu perfil foi realmente muito percetível ao longo das duas entrevistas: João não falava muito quando questionado, buscava, por outro lado, ser bastante objetivo sobre os assuntos em questão. No entanto, sempre que o fazia, apresentava a sua resposta de um modo muito articulado, não sendo incomum, nas duas entrevistas, a existência de momentos de absoluto silêncio, durante os quais o professor refletia sobre a questão colocada e articulava a sua resposta, sendo esta muito clara, concisa e objetiva.

7.1.1 O percurso Profissional

João é docente de Matemática há aproximadamente vinte anos. É natural da região metropolitana de Lisboa e realizou toda a sua formação pré-universitária nesta região e os estudos conducentes ao grau de Licenciado em Ensino da Matemática (na modalidade pré-Bolonha) na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ao relatar sobre seus estudos pré-universitários, o professor menciona que o seu desempenho na disciplina de Matemática sempre foi normal até o décimo ano do ensino secundário: "até aí [décimo ano], [tinha um desempenho] banal em Matemática... normal"*(entrev. 1, p. 1).* Porém, neste ano de escolaridade, o professor passou por uma experiência que mudou radicalmente a sua relação com a Matemática: "Isso teve a ver com... com obter uma [classificação] negativa em Matemática"*(entrev. 1, p. 1).* Tal acontecimento, ao invés de desmotivá-lo no estudo da disciplina, teve justamente o efeito contrário. Na altura, por considerar que aquela nota recebida não tinha sido uma nota justa, decidiu estudar Matemática por conta própria:

> Achei injusto, pois outras pessoas na mesma situação que eu terem tido uma classificação final diferente e... e como vingança, entre aspas, decidi começar a estudar por mim. *(entrev. 1, p. 1)*

Segundo o professor, como principal desdobramento dessa situação de inconformidade com a classificação recebida no décimo ano, foi ele ter passado a estudar Matemática sozinho ao longo do ensino secundário: "e depois, sozinho, comecei a estudar... e [com] aquilo houve um clic" *(entrev. 1, p. 1).*

Esse seu gosto em estudar sozinho Matemática, segundo o próprio professor, permaneceu durante todo o ensino secundário. Realizou também de modo individual a sua preparação para os exames finais de Matemática, obtendo inclusivamente uma classificação muito alta: “e depois fui fazer exames e [ob]tive [a classificação de] 19 [valores]... e depois a Matemática ficou cá.” *(entrev. 1, p. 1)*.

Essa relação mais intensa com a Matemática a partir desse acontecimento ocorrido no 10.º ano de escolaridade acabou por influenciá-lo de tal forma que o levou a escolher o curso de Matemática no ensino superior, embora a Matemática tenha sido a sua segunda opção:

> [A Matemática] não era a [minha] primeira opção... minha primeira opção era para as áreas da Psicologia... por aí... e depois havia exames de entrada na faculdade... havia Biologia obrigatória... depois entre a Matemática e a Filosofia... tínhamos de escolher e escolhi a Matemática... mas foi no sítio, a nota mais alta... e a minha segunda opção era Matemática. *(entrev. 1, p. 1)*

Quando convidado a refletir sobre o período em que realizou seus estudos universitários na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, não destacou nenhum acontecimento mais marcante, apenas mencionou que o curso foi realizado “com calma” *(entrev. 1, p. 2)*.

O início da carreira como professor de Matemática foi, segundo ele, “muito tranquilo” e dá a entender que essa tranquilidade teve alguma relação com a escolha da localização das escolas, classificadas por ele como “mais tranquilas” *(entrev. 1, p. 2)*:

> Sei que houve colegas meus que... na mesma situação... que se calhar... optaram por ficar mais perto de Lisboa no início da carreira e tiveram sítios mais complicados... escolas mais complicadas... eu optei, por se calhar, por ficar um pouquinho mais longe, mas em escolas tranquilas. *(entrev. 1, p. 2)*

Para João, não havia a certeza em seguir na carreira de professor de Matemática quando concluiu o estágio: “eu, quando... eu acabei o estágio não tinha cem por cento de certeza de que iria continuar no ensino” *(entrev. 1, p. 3)*. Mas a sua primeira experiência como docente em uma escola, após a realização do estágio, levou-o à convicção de querer continuar no ensino. Nessa primeira experiência, dois fatores parecem ter contribuído de modo preponderante para essa decisão: (i) as turmas com as quais ele trabalhou e (ii) os colegas do grupo da Matemática que teve: “Apanhei umas turmas muito boas e uns colegas espetaculares” *(entrev. 1, p. 3)*.

O primeiro fator mencionado pelo professor, nomeadamente as turmas com as quais trabalhou, foi determinante, segundo ele, no sentido de encorajá-lo a continuar na profissão:

> Pelos alunos que... [pequena pausa]... apanhei uma turma que como... que se calhar... com 3 ou 4 alunos muito bons e... e pronto, me encorajava para continuar... cá estou. *(entrev. 1, p. 3)*

Já o segundo fator mencionado pelo professor e que contribuiu para a decisão de continuar no ensino foi o grupo de colegas que teve, nomeadamente os colegas professores do grupo da Matemática. Estes colegas foram descritos por João como sendo "espetaculares" *(entrev. 1, p. 3)* e que, apesar de serem mais velhos, pediam-lhe conselhos e inclusivamente dicas de atividades envolvendo a calculadora gráfica, cujo uso, segundo João, começava a surgir naquela altura:

> Uns colegas espetaculares... que ao contrário... por serem mais velhos... que em vez de dizerem "lá vem o miúdo"... vinham pedir conselhos... professores mais velhos... por exemplo... em relação à utilização da calculadora gráfica... que era uma coisa que estava relativamente no início... eles vinham pedir-me para eu explicar-lhes como é que funcionava... para arranjarmos atividades e foi uma coisa que me marcou. *(entrev. 1, p. 3)*

Este período inicial nesta escola teve a duração de 5 anos e parece ter sido muito marcante para o professor. Em seguida, passou mais cinco anos em outra escola até chegar à atual, estando nesta escola há uns dez anos. Ao longo destes vinte anos de docência, quando convidado a refletir sobre as principais dificuldades enfrentadas, João elenca três principais: (i) as frequentes reformas curriculares, (ii) os alunos menos responsáveis e mais impacientes e (iii) o envelhecimento da classe docente.

No tocante às reformas curriculares, o professor menciona-as como sendo muitas vezes problemáticas pelo fato de se querer mudar por questões políticas e sem saber se o programa antigo era bom ou não:

> O grande problema são as reformas no ensino que vão aparecendo... ciclicamente sem se saber se a anterior resultou ou não... acho que às vezes... politicamente quer se mudar... e sem saber se o que estava a ser feito era bom ou não era bom... e há sempre a necessidade de adaptação... era o programa antigo depois passou às metas e agora de metas já passaram para outras coisas e isto é sempre complicado. *(entrev. 1, p. 3)*

Em relação aos alunos, o professor menciona que atualmente estes estão cada vez menos responsáveis e mais imediatistas quanto aos resultados que esperam. Na visão do professor, os alunos estão menos pacientes e isto parece estar relacionado com a questão do imediatismo a que estão habituados:

> Em termos de alunos... claro que... que se calhar... hoje em dia eles são mais infantis até mais tarde... menos responsáveis... menos pacientes... sempre à espera de resultados mais imediatos... estão habituados a com o dedo que

> carrega em um ecrã e as coisas aparecem, não é... e... [pequena pausa] sobretudo aí que eu noto a diferença. *(entrev. 1, p. 3)*

No que respeita ao envelhecimento da classe docente, João relaciona-o com as políticas de reforma implementadas, o que faz com que as reformas ocorram cada vez mais tarde e isso traz dificuldades.

> A classe docente que está a envelhecer a olhos vistos... nota-se perfeitamente esse envelhecimento... e isso tem a ver com as políticas que estão a ser implementadas com reformas cada vez mais tarde... [pausa] a possibilidade de os professores [pausa]... ou a não possibilidade de [os professores] se reformarem como se reformavam por volta dos 50 e muitos e hoje há pessoas com mais de 60 anos com muitas dificuldades... e portanto fica um tanto mais difícil. *(entrev. 1, p. 3)*

Quando convidado a refletir sobre a responsabilidade que sente estando na condição de docente de jovens que estão na fase de conclusão do ensino secundário, João menciona a responsabilidade em formar pessoas para o mercado de trabalho e também para o prosseguimento dos estudos e conclui dizendo que o professor tem em suas mãos o futuro destes jovens:

> A responsabilidade de que estamos a formar pessoas para... para o mercado de trabalho... para o prosseguimento de estudos... normalmente nos últimos anos tem sido para prosseguimento de estudos... portanto, estamos com o futuro de jovens em nossas mãos. *(entrev. 1, p. 4)*

Conforme já mencionei anteriormente, João divide a sua atuação na escola em duas esferas: como docente de Matemática na turma de 12.º ano e também como adjunto do diretor. Diante desse contexto de atuação profissional, solicitei-lhe que, se possível, me clarificasse uma frase sua dita nos corredores enquanto voltávamos de uma aula. A frase dita por João, na altura, foi algo do tipo: "Quando estou em aula, esqueço um pouco de tudo".

Como resposta a esta minha pergunta, João colocou que o que realmente gosta é de dar aulas e disse também que o fato de estar em um posto de gestão é algo momentâneo e que pretende, terminando o mandato do diretor, ficar somente com as atividades de docência. No entanto, acrescentou que todos os professores deveriam passar por uma experiência em cargos de gestão para terem a perceção dos inúmeros documentos, plataformas e a comunicação com o Ministério da Educação, enfim para que possam ter outra visão de como funciona uma escola:

> Eu gosto mesmo é de dar aulas... portanto... essa parte da gestão foi quase como um desafio que foi posto... porque a pessoa que estava na direção teve

> que sair... o diretor então desafiou os mais novos... [pausa] e foi quase como um acidente porque... eu prefiro é dar aulas e é esse o objetivo... dentro de... acabando o mandato do diretor... terão que encontrar outra pessoa [risos]... mas, pronto, tem que ser feito e por outro lado... acho toda a gente deveria passar por estes cargos para ter outra visão de como funciona a escola... pois na sala dos professores não se tem essa percepção de... de gestão... dos inúmeros documentos e plataformas... e depois a comunicação com o ministério. *(entrev. 1, p. 4)*

De modo a resumir o que mais gosta e o que menos gosta no ensino, João foi bastante conciso ao afirmar:

> O que mais gosto é exatamente o contato com os alunos... e... transmitir ideias que se calhar... ou formas que se calhar eles não estão a espera... e o pior é a burocracia. *(entrev. 1, p. 4)*

Buscando uma maior clarificação do professor, questionei-o sobre em que sentido de burocracia estava a referir-se, ao que respondeu:

> Relatórios... com a direção da escola... com outros... com encarregados de educação muitas vezes... receber os encarregados de educação que as vezes deixam para a escola coisas que... se calhar deveriam ser eles a tratar, então... é a parte com menos piada disso tudo [risos]. *(entrev. 1, p. 5)*

Dentro do ensino da Matemática, João já trabalhou ao longo destes vinte anos de docência com alunos de 2.º ciclo, 3.º ciclo e ensino secundário. Quando convidado a refletir sobre a existência de uma predileção sua por trabalhar com algum ciclo em específico, responde possuir uma preferência maior pelo ensino secundário e atribui tal predileção ao tipo de relação que consegue estabelecer com estes alunos mais velhos, dado o seu perfil:

> Ahm... já dei [aula para] todos os anos, desde o 5.º ano até o 12.º, já está... já lecionei todos os anos... já lecionei todas as Matemáticas, desde as MACS [Matemática Aplicada às Ciências Sociais], Matemática B e Matemática A... ahm... prefiro o secundário por uma questão de... de alunos, ou seja... ahm... a relação que se estabelece, o tipo de diálogos que é possível ter, se calhar o... o meu próprio feitio... portanto a maneira de ser... ahm... eu acho que consigo... ahm... chegar mais aos alunos um bocadinho mais velhos do que aos mais novos. *(entrev. 2, p. 12)*

Conforme exposto, o professor menciona a sua maneira de ser como um fator que mais o aproxima de alunos do ensino secundário e logo a seguir procura clarificar essa sua maneira de ser. Define-se como uma pessoa contida e considera que a relação que estabelece com os alunos é uma relação de confiança e que essa confiança, por vezes, chega a transcender o espaço de sala de aula:

> Eu sou contido... ahm... fora das aulas, eu sou muito mais contido do que nas aulas... ahm... mas, eu acho que a relação que eu estabeleço com os alunos é uma relação de confiança... portanto eles... as vezes até com coisas que não têm a ver com aulas, mas todavia eles tentam tirar dúvidas ou pedir conselhos... ahm... eu acho que... que aí sabem que podem contar comigo para o que quiserem. *(entrev. 2, pp. 12-13)*

Considerando agora as diferentes disciplinas de Matemática ensinadas no ensino secundário, João menciona não ter uma predileção por ensinar uma em particular, mas menciona o trabalho diferenciado e o desafio diferente que teve com alunos de Matemática Aplicada às Ciências Sociais. Na visão do professor, há a necessidade de um primeiro trabalho com estes alunos, dados os seus perfis, no sentido de convencê-los de que são capazes de ter sucesso naquela Matemática. Já em relação à Matemática A, ele a vê como muito mais exigente a nível científico:

> É completamente diferente... são conteúdos completamente diferentes, mas eu gostei de lecionar a Matemática Aplicada às Ciências Sociais que é um desafio diferente porque normalmente pegamos em alunos que vão para Línguas e Humanidades e... estão a fugir às Ciências... portanto fogem à Fisico-Química, alguns nunca tiveram positiva à Matemática quando chegam aí... e há um primeiro trabalho que é de tentar convencê-los que é uma Matemática diferente a que eles estão habituados... que são capazes de ter sucesso naquela Matemática... ahm... eles começam a ver que são coisas diferentes e... conseguem coisas engraçadas e reações muito engraçadas... ahm... a Matemática A é um desafio diferente, muito mais... exigente a nível científico e... e, mas eu gosto de ambas, por acaso. *(entrev. 2, p. 13)*

João também considera essa sua experiência na docência de Matemática com alunos que vão desde o 2.º ciclo até o ensino secundário como algo muito importante. Na visão do professor, essa experiência de ter passado por anos anteriores é uma mais valia no sentido de se saber que tipo de dificuldade os alunos sentem mais, além de dar uma visão global de tudo o que os alunos vão aprendendo ao longo dos anos:

> É importante, exatamente... eu acho que qualquer professor que chega ao secundário... havia um problema que neste momento... ahm... porque as escolas... há menos alunos e as escolas estão... as escolas que eram só secundário estão a tentar ir buscar alunos mais cedo... portanto abrir para o 3.º ciclo... mas é importante ter uma visão do, do... de tudo que os alunos vão aprendendo e o próprio professor ter experiência de ter passado por anos anteriores... até para saber que tipo de dificuldade é que os alunos sentem mais, não é... porque uma coisa é a teoria, depois na prática é outra. *(entrev. 2, p. 13)*

Por fim, quando solicitado a refletir sobre a principal motivação que sente como professor de Matemática, João, de imediato, diz ser a transmissão do conhecimento. Mas logo a seguir, tempera esta sua resposta dizendo que a motivação provem do fato de estar junto com os alunos a trabalhar, de vê-los construirem o seu próprio conhecimento (a partir dos auxílios fornecidos) e de perceber o crescimento dos alunos:

> É mesmo a transmissão do conhecimento... o estar com os alunos a trabalhar... vê-los construirem o seu conhecimento a partir de coisa que nós... das pistas que vamos dando... e vê-los crescer... não só em termos físicos. *(entrev. 1, p. 5)*

7.1.2 O contexto escolar

Conforme já referi, João leciona Matemática há dez anos em uma escola situada na região metropolitana de Lisboa, ocupando, neste momento, um cargo de gestão, nomeadamente de adjunto do diretor. Essa sua par função, de docente de Matemática e também de gestor da escola, parece permitir ao professor um ponto de vista privilegiado no que se refere à análise da conjuntura escolar nos seus mais diversos aspetos. Em um primeiro aspeto, concernente à gestão da escola, João acredita que os órgãos de gestão "tentam... com os recursos que têm... tanto monetários como de pessoal, gerir o melhor possível", porém devido às circunstâncias de limitação orçamental, acrescenta que "não é o que gostaríamos... não é o que os professores gostariam" *(entrev. 2, p. 17)*.

Continuando a sua apreciação da gestão da escola e sendo ele tanto um representante desta gestão como um docente, pontua que, por vezes, da maioria dos professores não há "a capacidade de perceber" *(entrev. 2, p. 17)* as limitações a nível de recursos que a escola passa e destaca ainda a importância do pessoal não docente na dinâmica da escola:

> Mas tentamos na medida do possível... chegar às vontades dos professores, dos alunos, do pessoal não docente, que é importante porque não é só com o pessoal docente e com os alunos que se faz uma escola... o pessoal não docente é importantíssimo... basta, as vezes, faltarem... isso tem acontecido, as pessoas estão doentes porque têm faltado... e gerir um número limitado desses recursos nem sempre é fácil, mas tenta-se fazer o melhor possível. *(entrev. 2, p. 17)*

Ao falar dos alunos da escola, por ocasião da nossa primeira entrevista, João fez uma referência à quantidade significativa de estudantes estrangeiros que a escola recebe atualmente e dos desafios inerentes a essa situação:

> A escola tem trinta e tal nacionalidades... é assim... inicialmente há alunos que não falam o [idioma] português e portanto quando eles têm a disciplina de Português... essa disciplina no lugar dela... Português língua não materna... por acaso temos a sorte de termos [uma professora] nos quadros da escola... e mesmo a nível superior tem preparação para falar... com alunos estrangeiros... e por níveis faz-se turmas... e depois para a elaboração do horário dá uma trabalheira... mas tem que ter aquelas horas em comum para poderem assistir aquelas aulas... e são avaliados como se fossem alunos de Português e no 9.º ano têm o exame nacional de Português língua não materna e depois no secundário também há alguma avaliação... mas aí normalmente são alunos que já trazem alguma preparação para o português... temos mais a nível do ensino básico... desde nepaleses, filipinos, indianos... países de leste também vêm alguns... Ucrânia, Romênia... Moldávia... e depois isso é uma zona... também vem muitos noruegueses, finlandeses, suecos... menos mas também aparecem. E neste ano... devido à questões políticas naquele país... estamos também recebendo muitos venezuelanos. *(entrev. 1, p. 10)*

Quando questionado sobre se a escola é muito ou pouco dinâmica, João diz que a escola "tenta ser cada dia mais dinâmica". Buscando exemplificar essa sua afirmação, menciona uma tentativa de abertura da escola às novas tecnologias com a criação de uma sala denominada de "sala do futuro", "com novas abordagens, com a introdução de novas tecnologias, com tablets" e também uma tentativa de sair do tradicional ensino em sala de aula a que chamou de "ensino em autocarros" devido à disposição das mesas dos alunos. Porém, destaca que neste último caso houve "alguma resistência por parte de muitos professores", contudo "outros gostaram" *(entrev. 2, p. 14)* da nova disposição.

João acrescenta que há sempre uma intenção da escola em evoluir e menciona a questão tecnológica como sendo incontornável, apesar dos constrangimentos de ordem orçamental:

> Mas tentamos que, que... evoluir... agora em que sentido, vamos ver... mas com, certamente com novas tecnologias a serem utilizadas... há uma perspetiva agora por aí de se tentar... ahm... de se passar para manuais digitais nalgumas turmas, pelo menos no projeto inicial... vamos ver como é que as coisas vão correr... há sempre aí os dinheiros pelo caminho. *(entrev. 2, pp. 14-15)*

Referindo-se ainda à questão dos constrangimentos enfrentados nessa busca por mais dinamismo na escola, João menciona a relação entre o envelhecimento da classe docente e a resistência à inovação:

> Apesar de haver aí... claro que com o corpo docente a envelhecer ao ritmo que está... porque há muitos professores já na casa dos 50 e muitos, 60 anos... ahm... que não quer dizer nada, mas é donde vem, se calhar, alguma

> resistência a descobrir coisas novas ou a aplicar coisas novas... pessoas que estão a trabalhar há vinte ou trinta anos ou mais de uma determinada maneira, é normal, se calhar, que se sintam menos confortáveis com, com outras coisas. *(entrev. 2, p. 15)*

Mas, para além das dificuldades enfrentadas, na visão do professor, há sempre uma tentativa da escola em "entrar em projetos novos ou ir buscar pessoas que venham nos ensinar" *(entrev. 2, p. 15)*. E para exemplificar, cita as parcerias realizadas entre a escola e a Câmara Municipal, principalmente no tocante à questão social e também uma iniciativa chamada semana do voluntariado que ocorre anualmente e que envolve a escola e a Junta de Freguesia:

> A Câmara [Municipal] ajuda bastante em algumas situações... nós partilhamos um monte de trabalho com... principalmente a nível social, a Câmara tem grupos de apoio em bairros sociais... ahm... em que a escola também participa... projetos... ahm... há dois bairros mais complicados, aqui a nível de conselho... um relativamente perto daqui, apesar de não ser um que nos forneça muitos alunos, mas nós temos... participamos com a Câmara em reuniões mensais com proteção de jovens com o gabinete da Câmara, com associações de juventude que trabalham nestes bairros... ahm... a fazer, a tentar fazer a integração de alguns alunos mais complicados ou que tenham mais dificuldades... ahm... e isso tem qual efeito? A nível da Junta de Freguesia, há uma iniciativa anual que é a semana do voluntariado jovem... em que toda a escola é envolvida... tentamos... dá uma trabalheira durante uma semana. *(entrev. 2, p. 16)*

Sobre estas parcerias, o professor deixou transparecer uma certa alegria ao comentar sobre a semana do voluntariado, evento que ocorreu justamente a poucos dias da nossa entrevista e envolveu praticamente toda a escola. O professor citou como exemplo de atividades desenvolvidas nesta semana do voluntariado o envolvimento dos alunos que visitaram centros de idosos, centros de crianças pequenas e também as atividades relacionadas com a proteção de animais e à limpeza do meio ambiente.

Tive o privilégio de ter estado na escola em um dos dias da semana do voluntariado e comprovar a atmosfera diferenciada que a envolvia. Na oportunidade, João chegou inclusive a cancelar uma de suas aulas de Matemática na turma do 12.º ano. Na semana do voluntariado, segundo disse:

> Tentamos que todas as turmas, principalmente, a começar pelos alunos mais jovens, tenham a oportunidade de experimentar uma atividade que depois poderão os alunos, se quiserem, continuar a desenvolver ou... ou eles próprios desenvolverem um projeto que, que vá nessas... nessas iniciativas que vão desde ir a centros de idosos... passar tempo com eles... ou trazer eles cá, como aconteceu... ahm... ou ir a centros com crianças mais pequenas ou

> com animais ou limpeza do ambiente... portanto, esse tipo de atividades. *(entrev. 2, p. 16)*

No tocante à participação dos pais na escola, João refere que esta participação "já foi mais reduzida" em outros momentos, mas há uma tentativa para que os pais "façam parte da comunidade" e que não venham somente à escola "para levantar os registos de avaliação dos alunos". Sobre esta questão do acesso dos pais aos registos avaliativos dos seus filhos, João diz inclusive que a escola já oferece um serviço onde "em casa, pode-se consultar pela internet" tais registos. A seguir, evidencia a existência de "uma associação de pais ativa" e que "vai fazendo alguma coisa", mas acredita que "ainda não há o envolvimento necessário" e quanto ao compareceimento na escola, "a maioria das vezes são sempre os mesmos" *(entrev. 2, pp. 16-17)*.

Quando convidado a refletir sobre o grupo de professores de Matemática da escola, João logo pontua que "é um grupo que trabalha em conjunto" *(entrev. 2, p. 18)*. Aparenta sentir-se muito a vontade ao falar do grupo de Matemática, dado que há pouco tempo exercia ainda a função de representante deste mesmo grupo, tendo deixado tal posto quando assumiu a função de adjunto do diretor. Ao comentar sobre a dinâmica de trabalho do grupo, João destaca o ambiente informal de trabalho:

> Éramos um grupo que, se calhar, não precisava de reuniões formais, de marcar reuniões para termos que trabalhar... encontramos, falamos, trocamos ideias, [nos] encontramos aqui, trabalhamos aqui... se for necessário para algumas pessoas que lecionam os mesmos níveis. *(entrev. 2, p. 18)*

A seguir, João destaca que dentro do grupo de professores de Matemática há "seis, sete professores" *(entrev. 2, p. 18)* que trabalham juntos há aproximadamente uns dez anos e estão sempre a procura de coisas novas que ajudem tanto o grupo de professores como os alunos, porém reconhece também que a abertura para os outros grupos da escola não é tanta:

> Portanto há um grupo mais velho que já cá está há mais tempo, que ficamos perfeitamente integrados e é um grupo que está sempre a procura de coisas novas... novas tecnologias para que nos ajudem... ajudem os alunos, que... ahm... que se calhar, não trabalha ou a abertura a outros grupos... ahm... por vezes, poderá não ser tanta, mas entre nós trabalhamos... acho que trabalhamos bem. *(entrev. 2, p. 18)*

Ao referir-se aos professores novos que chegam no grupo, considera que o professor que chega ao grupo de professores de Matemática "sente-se bem recebido e gosta de trabalhar". Para João, esse acolhimento proporcionado pelo grupo às pessoas novas que chegam é muito importante e o fato destas pessoas sentirem-se bem "é um bom sinal" *(entrev. 2, p. 18)*.

Quando questionado se trabalha de uma forma mais próxima com algum colega atualmente, João responde que a nível da direção trabalha de modo mais direto com seus "colegas de direção". Porém, a nível da Matemática, "neste momento, como só havia uma turma de 12.º e eu era único... pronto, restringi-me a mim próprio", no entanto, logo a seguir refere que "apesar de nas reuniões de grupo... sempre acaba... pondo uma situação... ver como é que estamos". Na sequência, revela que trabalhou em um ano anterior com um colega, descrevendo-o como "uma das pessoas com mais experiência do grupo" *(entrev. 2, p. 20),* destacando que naquele ano havia duas turmas de 12.º ano na escola:

> Trocávamos fichas de trabalho, preparávamos coisas em conjunto, aliás havia um teste por período que era comum às minhas turmas e às dele porque fazíamos em conjunto... ahm... pronto, por uma questão de... de vermos como é que as turmas se comportam para ter essas coisas. *(entrev. 2, pp. 20-21)*

7.2 O ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário (Matemática A)

João considera pertinente a presença de tópicos de Cálculo Diferencial (CD) no currículo de Matemática A do ensino secundário: "Eu acho que tem a sua pertinência" *(entrev. 2, p. 1)*. Na visão do professor, tais temáticas permitem ao estudante perceber que "há uma teoria em que tudo se assenta" *(entrev. 1, p. 13)* e como exemplo, menciona o fato de os alunos poderem dar um significado maior para os valores máximos e mínimos de uma função através do uso da calculadora gráfica:

> Faz sentido eles perceberem que há toda uma teoria por trás daquela aplicação que eles têm... e o fato de termos as calculadoras gráficas em se pode achar máximos e mínimos... essas coisas todas... eles também perceberem que não é simplesmente uma tecla da calculadora que se dá aqueles resultados... há uma teoria em que tudo assenta. *(entrev. 1, p. 13)*

Procurando clarificar ainda mais o seu posicionamento em relação à pertinência da presença de tópicos de Cálculo Diferencial no ensino secundário, o professor menciona uma perspetiva de utilidade desses tópicos aquando do estudo de uma função, nomeadamente em poder dar sentido ao que os alunos estão a estudar e também cita a ligação que é feita com conceitos da cinemática na Física, de modo específico a velocidade e a aceleração:

> Porque vai dar uma perspetiva aos alunos... ah... de utilidade para algumas das coisas que eles estão a estudar... porque às vezes, quando [se] está a estudar uma função só por estudar... ah... o fato de perceberem que há mecanismos, digamos, de cálculo que permitem achar extremos, máximos e mínimos... ahm... e depois o paralelismo em que é feito ou a ligação que é feita [na] cinemática... à velocidade, à aceleração... ah... vai... dar sentido à algumas das coisas que eles estão a estudar em termos de funções... e que depois vai permitir... eles encontrarem alguma utilidade para... para a teoria, digamos assim. *(entrev. 2, pp. 1-2)*

Resumidamente, João parece dar duas justificações para a presença dos tópicos de CD no ensino secundário (Matemática A): i) a primeira justificação relaciona-se com o fato de os alunos poderem perceber a existência de mecanismos relacionados ao CD que permitam encontrar extremos de uma função e com isso a possibilidade de "perceberem que há toda uma teoria por trás" *(entrev. 1, p. 13)* e ii) a segunda justificação tem relação com o aspecto utilitário do CD no estudo de assuntos relacionados à cinemática na Física: "partimos sempre de.... que se calhar de exemplos da Física mesmo como velocidades médias e como velocidades instantâneas... para depois alargar às funções" *(entrev. 1, p. 13).*

7.2.1 Os tópicos de Cálculo Diferencial (CD) são, para os alunos, dos mais fáceis ou dos mais difíceis?

Quando confrontado com esta pergunta, João fica um período considerável em absoluto silêncio, enquanto reflete sobre a questão. Em seguida, diz que esse assunto em particular "é como tudo... há aqueles alunos que facilmente captam a ideia e... as coisas correm bem", porém na sequência refere também que "há aqueles que têm alguma dificuldade" e acaba, finalmente, por dar uma resposta mais assertiva: "mas não é dos [tópicos] piores" *(entrev. 2, p. 3)*.

Na visão do professor, o trabalho inicial com os tópicos de CD no secundário é um tanto "teórico" e "complicado" para os alunos, mas depois, com um tempo destinado para a revisão, para o reforço e quando se chega "à aplicação com problemas", os alunos "acham até interessante essa parte" *(entrev. 2, p. 3)*.

> De início, com a mecanização, nem todos gostam de [es]tar a fazer ali... ganhar um pouquinho de prática ao fazer aquilo... e depois, aquelas regras todas também não, não ajudam, apesar de aquilo ser faseado e não ser tudo lecionado de seguida... ah... mas... ah... depois quando chegam à aplicação com problemas e... que eu vou tentando fazer ao longo de toda... desses conteúdos, mas não é fácil, pelo menos de início... o início é um bocadinho teórico e um bocadinho complicado... apesar da... daquela tentativa das velocidades, da aceleração... tentar fazer uma ligação... ahm... nem, nem sempre é... é a parte mais fácil... e depois, como estamos há algum tempo a trabalhar e dá tempo para rever e voltar a reforçar e... ahm... eles acabam por achar até interessante esta parte. *(entrev. 2, pp. 1-2)*

A seguir, o professor pontua também que os alunos possuem alguma "dificuldade com o formalismo... apesar de no 10.º ano terem a parte da lógica". Para ele "nem sempre a linguagem simbólica é fácil para os alunos", porém refere que procura sempre dar a volta a essa dificuldade dos alunos com o formalismo: "tenta-se sempre traduzir um pouco... [para uma] linguagem, dentro do possível, corrente... aquilo que se escreve"*(entrev. 2, p. 3)*.

7.2.2 O essencial para uma boa aprendizagem de Cálculo Diferencial

Quando convidado a refletir sobre o que considera essencial para uma boa aprendizagem do Cálculo Diferencial no ensino secundário (Matemática A), João dividiu a sua resposta em duas partes: primeiro falou sobre o papel a ser desempenhado pelo professor e em seguida tratou do papel a ser desempenhado pelo aluno.

De início, como uma espécie de introdução à sua resposta, o professor pondera: "é... alguém disse que para explicar... como é que é?... algo escandalosamente difícil... devemos torná-los escandalosamente fácil... qualquer coisa desse gênero" *(entrev. 2, pp. 4-5)*. Na sequência, buscando uma maior clareza e objetividade na sua resposta, indica que o professor deve: i) *não complicar*, pelo menos no início e ii) *passar confiança* para o aluno.

A primeira parte, no que se refere à questão de não complicar, João menciona que isso significa não assustar os alunos com muito formalismo em uma primeira abordagem e tentar que os alunos percebam os conceitos essenciais por meio de exemplos simples para, somente depois, o professor buscar coisas mais elaboradas:

> Não complicar... pelo menos de início... inicialmente... tentar que os alunos... ahm... [pausa]... que os alunos não se assustem com o formalismo e... com muitas fórmulas de início... portanto tentar com exemplos simples... que percebam os conceitos essenciais e depois então, a partir daí... começar a... complicar um bocadinho mais... ou ir buscar coisas um bocadinho mais elaboradas. *(entrev. 2, p. 5)*

A segunda parte que João considera importante para que os alunos tenham uma boa aprendizagem em Cálculo Diferencial é o professor passar confiança aos seus alunos. Na visão de João, a questão da falta de confiança dos alunos naquilo que estão a fazer representa um grande problema na construção do aprendizado.

> Muitos alunos... eu acho que o grande problema deles é... a falta de confiança naquilo que estão a fazer, a partir do momento que começam a fazer uma vez e conseguem concluir qualquer coisa... fazem a segunda vez e começam a se entusiasmar... e a terceira, já não é preciso "emperrar" muito porque eles começam a andar sozinhos. *(entrev. 2, p. 5)*

No que concerne ao papel do aluno para se ter uma boa aprendizagem no Cálculo Diferencial, João menciona três aspetos: i) *perceber o conceito e não decorar*, ii) *praticar* e iii) *não desistir*.

> Perceber o conceito e não decorar conceito... praticar e... [bate com os dedos na mesa] e... não desistir, ou seja, às vezes à primeira dificuldade param e não retomam... portanto é... é... faz a primeira, não correu bem... faz a segunda, vê se corre melhor... não corre bem, faz a terceira... eu , as vezes, digo a eles que para acertar uma vez têm que errar cinco... tens é que errar, portanto tens que fazer, tens que tentar. *(entrev. 2, pp. 5-6)*

Assim, considerando o que seria desejável ser realizado, na visão de João, tanto por parte do professor como por parte do aluno para que ocorra um bom aprendizado em Cálculo Diferencial, parece existir uma ligação entre o "não complicar" do professor com o "perceber o conceito e não decorar" do aluno. Esse "não complicar" do professor parece indicar uma relação com o encadeamento dos assuntos apresentados e também com a tentativa de se estabelecer relação com aquilo que os alunos já conhecem:

> É... eu tento sempre que... haja uma razão para as coisas aparecerem... não simplesmente aparecerem do... do nada... e tento... sempre que possível encadear com coisas que já fizeram ou que estamos a fazer... ah... e... buscando sempre coisas que eles já conhecem... normalmente começar por um exercício, problema ou qualquer coisa que depois permita chegar [até] aquele resultado. *(entrev. 1, p. 11)*

De modo semelhante, também parece existir uma relação muito forte entre os aspetos “praticar” e “não desistir” dos alunos com o aspeto “passar confiança” do professor. E nessa ligação, um papel de destaque é dado ao processo de tentativa e de erro dos alunos:

> Para os alunos tentarem e errarem e acertarem (...) para chegarmos a um exercício correto temos que errar... sete ou oito ou nove... mas é preciso fazê-los, errá-los... não é... nem sempre se acerta tudo na primeira. *(entrev. 1, p. 13)*

A esse processo de tentativa e erro dos alunos em aula, João denominou experimentação, ou seja, o espaço da aula onde os alunos poderiam realizar exercícios, falar, tirar dúvidas com o professor e também onde seria possível a troca de impressões com os colegas.

7.2.3 Tempo para o estudo de tópicos de Cálculo Diferencial no ensino secundário

Quando convidado a refletir sobre o tempo destinado ao estudo dos tópicos de Cálculo Diferencial (CD) no ensino secundário, João inicialmente faz um recorte maior e fala do tempo de aula dedicado à Matemática em sua turma, o 12.º ano. Na oportunidade, recorda que o tempo destinado à Matemática no 12.º ano, durante este ano, foi adequado devido ao acréscimo de mais uma hora aula semanal de Matemática, totalizando, desse modo, sete períodos semanais (um período a mais do que o recomedado pelo Ministério da Educação):

> Este ano foi adequado porque foi possível aqui na escola conseguirmos... ahm... ter mais uma hora semanal [de Matemática]... mais um tempo letivo semanal, do que aquele que o Ministério [da Educação] recomenda... portanto do crédito horário que foi dado à escola para gerir em termos de, de... de apoios foi possível se tirar um tempo para dar à Matemática... no 12.º ano... e portanto, em vez de ter seis tempos semanais, tinha sete. *(entrev. 2, p. 7)*

Esse tempo extra de Matemática, obtido através do crédito horário da escola em termos de apoios, foi, segundo João, uma proposta do grupo da Matemática à direção da escola, que a acatou. Esse tempo extra de Matemática, segundo João, foi dedicado ao 12.º ano por três motivos: i) a turma estava em atraso com o conteúdo de derivadas, temática esta que deveria ter sido lecionada ainda no 11.º ano; ii) no 12.º ano os alunos fazerem o exame final de Matemática A; e iii) a existência de uma única turma de 12.º ano na escola facilitou a gestão desse crédito horário.

> Foi... foi proposta da... do grupo da Matemática, fez proposta à direção e a direção, tendo em conta que no 10.º e 11.º anos, os alunos não tinham, tinham [tiveram] tempo extra... e que no 11.º, por exemplo, ficou em atraso o conteúdo do... das derivadas... ahm... e então geriu-se esses tempos que, que a escola tem direito... ahm... decidiu-se dar mais um tempo para o 12.º [ano], que é ano de exame e terminal e portanto, como é só uma turma foi mais fácil gerir... se tivésssemos mais turmas, se calhar, não seria assim tão fácil. *(entrev. 2, p. 7)*

Assim, resumidamente, João considera que com este período de aula extra dado à Matemática, o tempo acabou por ser suficiente na turma do 12.º ano. Em sua visão essa “uma aula a mais por semana” foi realmente “fundamental” para “conseguir cumprir o programa”. E também destaca que esse período extra também foi de fundamental importância para o trabalho de “experimentação” *(entrev. 2, p. 7),* ou seja, um período bastante considerável de aulas para a realização de exercícios.

Conforme mencionado pelo professor, uma das razões que levou a direção a decidir por este tempo extra de Matemática para o 12.º ano foi o fato de os alunos realizarem o exame final de Matemática. Ao refletir sobre a realização dos exames finais de Matemática e a influência que estes desempenham no que se refere ao Cálculo Diferencial ensinado, o professor pontua que os exames, nesse momento, estão em primeiro plano e menciona também que “o Cálculo Diferencial sai... em todos os exames há problemas... há um peso relevante de, desses conteúdos no total da cotação do exame” *(entrev. 2, p. 8)*.

> Esse... quer se queira, quer não... os exames existem... ahm... e são provas de acesso à maioria dos alunos que estão no... a ter Matemática A... todas as áreas de Ciências, além de, de servir para concluir o 12.º ano, servem como prova de acesso ao ensino superior... portanto... está sobre... está sempre... não é segundo plano, às vezes... nesse momento [está] em primeiro plano, mas em certas alturas em segundo [plano], mas sempre presente o fato de os alunos, ao final, terem um exame para fazer e que vai, se calhar, para alguns [poderá] servir no futuro próximo. *(entrev. 2, p. 8)*

7.2.4 Apreciação sobre os tópicos de Cálculo Diferencial em Matemática A

Ao refletir sobre a ementa de tópicos de Cálculo Diferencial presente no atual programa de Matemática A, João inicialmente a julga adequada. Porém, logo em seguida, refere uma certa contrariedade em face à possibilidade da presença do Cálculo Integral e a noção de primitiva no programa do 12.º ano do ensino secundário para o próximo ano letivo. Cumpre destacar que a noção de primitiva no 12.º ano está colocada, neste ano, como temática optativa, e por consequência, não faz parte dos assuntos cobrados no exame final de Matemática A. Ao justificar esta contrariedade, o professor refere que, com a inserção dessa temática, ficaria impossível, em suas palavras, lecionar com significado:

> Com a quantidade de conteúdos que temos para lecionar além das funções... ah... está, está adequado, digamos assim... há uma perspetiva, aliás do... programa prevê que a partir do próximo ano se estenda... ah... à noção de primitiva e de Cálculo de Integral... ah... mas se [isso] acontecer, vai ser uma coisa muito complicada para o tempo que temos de... de horas de lecionação para tanto conteúdo... [é] impossível lecionar com significado aquilo que eles querem. *(entrev. 2, p. 2)*

Dando continuidade a sua apreciação sobre a ementa de Cálculo Diferencial no atual programa de Matemática A, João faz uma reflexão sobre a gestão do programa a partir da experiência que teve com a turma de 12.º ano neste ano letivo. Pontua que quando iniciou o trabalho com o 12.º ano, os alunos não tinham tido nada de Cálculo Diferencial no ano anterior e portanto toda a ementa de Cálculo Diferencial foi tratada no 12.º ano. Na visão do professor, o trabalho com as temáticas de Cálculo Diferencial somente no 12.º ano acabou por tornar mais fácil de gerir o programa do que se o Cálculo Diferencial fosse lecionado uma parte no 11.º ano e outra no 12.º ano:

> É possível gerir adequadamente... se calhar, não tanto com a perspetiva do programa de no 11.º se lecionar... de lecionar logo com as regras de derivação e chegar praticamente aos conceitos todos e depois no 11.º... no 12.º... ah... adaptar só às exponenciais, às trigonométricas, essas coisas... mas se... e eu peguei numa turma este ano, pronto... [outro professor] tinha lecionado para o 11.º e ele não tinham dado nada de Cálculo Diferencial... portanto eu lecionei desde o início... e... dessa maneira, penso que é mais fácil de gerir o programa do que lecionar uma parte no 11.º e outra parte no 12.º. *(entrev. 2, p. 3)*

7.2.5 Possibilidades do uso de tecnologia no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial

Quando solicitado a refletir sobre o uso de tecnologias no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial, João fala inicialmente sobre a calculadora gráfica. Na oportunidade, refere inicialmente que a calculadora gráfica "tem sido usada com cuidado" nas aulas e completa dizendo que isso ocorre "para [que] os alunos não fiquem dependentes". No tocante ao uso da calculadora gráfica em aula, pondera que a referida tecnologia tem se mostrado "bastante útil para confirmar resultados" *(entrev. 2, p. 9)*:

> Para... ahm... pode ser "uso" indiferentemente pela calculadora e depois confirmar analiticamente o resultado... ou então resolver analiticamente e depois confirmar que efetivamente com a calculadora dá a mesma resposta... ou outros casos, que se calhar, dão um bocadinho mais de trabalho... a fazer em que a calculadora parece que nos engana... portanto dá um resultado que, se calhar, não é exatamente aquele e então analisar o porquê que [isso] aconteceu. *(entrev. 2, p. 9)*

O professor menciona que "90 e muitos por cento da utilização é a calculadora gráfica" e que, apesar de existirem outros dispositivos, estes "fazem basicamente parecido com a calculadora gráfica" *(entrev. 2, p. 9)* e dá a entender que, aparentemente, não há um ganho substancial em utilizá-los:

> Há vários que trabalham... como que se chama... qualquer coisa do *windowsplot* ou... que faz basicamente o mesmo, dá outra visualização com, com o computador... as calculadoras mais modernas fazem isso, tudo com cores e com estas coisas... mas é... ahm... as vezes o computador dá outro tipo de... de perpectiva, mas o... o conceito em si, vai dar no mesmo... portanto, às vezes com o... o geogebra... também é possível lá com os seletores fazer ali... modificar alguns parâmetros para... ahm... eles confirmarem melhor ou verem a interferência de alguns parâmetros, mas nada que não consigam fazer com uma calculadora gráfica. *(entrev. 2, p. 9)*

7.3 As aulas de Matemática envolvendo tópicos de Cálculo Diferencial

As aulas observadas decorreram na turma de 12.º ano de Matemática A existente na escola. Os alunos da referida turma já conheciam João desde o 10.º ano, oportunidade em que ele ministrou aulas de Matemática, tendo, no entanto, deixado de lecionar à turma no 11.º ano.

O período de observação das aulas compreendeu três meses, nomeadamente os meses de março, final de abril e início de maio. O trabalho envolvendo a observação das aulas desdobrou-se em três séries de observação, as quais incidiram sobre temáticas distintas. A primeira série de observação compreendeu oito aulas e ocorreu em quatro momentos, sendo que em cada um desses momentos, a aula foi de dois períodos. As temáticas tratadas nessas oito aulas foram funções exponenciais e funções logarítmicas.

A segunda série de observação foi realizada um mês após a primeira e compreendeu quatro aulas, que ocorreram em três momentos, sendo que em apenas um deles a aula foi de dois períodos. Duas aulas foram dedicadas à resolução de exercícios sobre limites, outra foi integralmente devotada ao trabalho com questões de exames anteriores de Matemática A e a última aula foi dedicada à realização de um teste avaliativo com cinco questões de resposta aberta.

Conforme trato mais adiante, a maioria dessas aulas (nas duas séries de observação) foi dedicada à resolução de exercícios. Assim, somente em dois momentos houve a introdução de um novo tópico: primeiramente com a introdução ao estudo da função logarítmica e depois, com a apresentação das propriedades da referida função. Em relação à função exponencial, houve somente duas aulas, sendo que estas foram dedicadas à resolução de exercícios.

Com o objetivo de obter mais elementos relativamente à prática de João na introdução de um novo tópico, realizei uma terceira série de observação. Embora não incidindo diretamente sobre tópicos de Cálculo Diferencial, assisti mais quatro aulas do professor, já ao final do terceiro e último período do ano letivo, onde ocorreu a introdução aos Números Complexos. Devido ao fato dessa temática não estar associada ao Cálculo Diferencial, a observação assumiu um caráter complementar às aulas já assistidas, tendo em vista uma melhor caracterização das aulas dedicadas à introdução de um novo tópico pelo professor.

Em relação à dinâmica das observações, João e eu sempre nos encontrávamos, antes de nos dirigirmos para a aula, em frente à sala onde ele despachava como adjunto do diretor. Esse local ficava no primeiro andar do prédio, próximo a uma sala onde funcionava a biblioteca da escola. Em frente a esta sala, ficava uma pessoa encarregada de dar as chaves aos professores e também possuia em seu poder um caderno com a distribuição dos horários das aulas. Também havia uma cadeira estofada e com respaldar junto ao corredor, ao lado de uma mesinha com um telefone. Em muitas oportunidades tomei assento nesta cadeira enquanto aguardava a chegada de João.

Tão logo o professor chegava, nos dirigíamos para a sala de aula. As aulas de Matemática ocorreram em duas salas: uma sala menor, localizada bem próximo da sala do adjunto da direção e outra sala mais ampla, esta localizada bem mais distante do local onde nos encontrávamos inicialmente.

Como a escola também atendia alunos de 2.º e 3.º ciclos, quando nos dirigíamos para a sala mais distante, João, que seguia sempre à frente, era obrigado a ir "cortando" o caminho por entre esses alunos menores que aguardavam a chegada de seus professores na entrada de suas salas, estando estes sempre em um clima muito alegre e descontraído. Chegando à sala de aula, João entrava primeiro, sendo seguido por alguns alunos e depois eu entrava. Tomei assento em todas as oportunidades em uma parte intermediária da sala de aula, junto a uma de suas paredes. As mesas, em ambas as salas, estavam sempre dispostas em pares e eram assim mantidas durante todas as aulas. João, em uma única oportunidade, justamente a primeira que lá estive, fez menção à minha presença dizendo: "Este é o professor Adilson de quem já vos falei" (notas de campo).

João iniciava as suas aulas ditando o sumário e, em algumas oportunidades, realizava também alguns informes sobre assuntos mais gerais para a turma. Em seguida, os assuntos da aula eram tratados. Durante todas as aulas observadas, o professor ocupou a parte da frente da sala e, principalmente durante a resolução de exercícios, circulou bastante pela sala, não ficando assim por muito tempo junto à sua secretária.

A seguir apresento a parte construída com base nas observações diretas das aulas, nas entrevistas e também nas notas de campo por mim escritas. Organizei-a em quatro itens: i) A turma e a sala de aula; ii) A estrutura das aulas; iii) As interações nas aulas e iv) O Cálculo Diferencial nas aulas. No item *A turma e a sala de aula*, trago algumas características da turma de 12.º ano e também elementos sobre o contexto físico das duas salas de aula utilizadas. No item *A estrutura das aulas*, discuto alguns elementos ligados à organização, à estrutura e ao ambiente de trabalho. No item *As interações nas aulas*, discuto os principais tipos de interações ocorridos nas aulas observadas. Por fim, em um último item *O Cálculo Diferencial nas aulas*, considero alguns aspetos relativos às diferentes dinâmicas de aula e às atividades desenvolvidas.

7.3.1 A turma e a sala de aula

A turma de 12.º ano de Matemática A, onde decorreram as três séries de observação, pertencia ao turno da manhã e as sete aulas semanais de Matemática ocorriam de segunda-feira à quinta-feira, sendo que somente na quinta-feira a aula era de um único período (50 minutos), sendo nos demais dias as aulas de dois períodos (100 minutos).

Conforme já referi, as aulas ocorreram em duas salas distintas, uma delas significativamente maior que a outra. Uma terceira sala, que na realidade era um laboratório, chegou a ser utilizada aquando da realização do teste final. Porém, as demais 15 aulas observadas ocorreram nas duas salas já mencionadas.

A sala menor apresentava as mesas dispostas em pares e continha muitos cartazes em suas paredes com temas relativos à História de Portugal e também à Língua Francesa. Era possível depreender a partir dos cartazes que a sala era utilizada no turno da tarde por uma turma de 3.º ciclo. A sala era bem iluminada, aconchegante e apresentava um computador junto à secretária, além de um equipamento de projeção preso junto ao teto. Os dois equipamentos multimédia foram utilizados nas aulas. O computador para além do uso do professor, também foi utilizado pelos alunos para responderem a um inquérito da tutela relativo à avaliação institucional.

Já a sala maior foi onde decorreu a maioria das aulas observadas. Era uma sala grande com as cadeiras também dispostas em pares. A exemplo da primeira sala, era muito bem iluminada, recebendo a luz natural através das janelas situadas em um dos seus lados. Também apresentava um computador junto à mesa do professor e um aparelho de projeção preso ao teto. Porém, nessa sala não havia cartazes nas paredes. As duas salas não eram climatizadas, mas não cheguei a presenciar qualquer tipo de reclamação quanto a este quesito, até porque as aulas observadas decorreram em meses de temperaturas amenas.

No tocante à turma de 12.º ano, esta era composta por 23 alunos, sendo 6 raparigas e 17 rapazes. Como já referi, a turma já havia sido de João no 10.º ano, altura em que havia na escola duas turmas de 10.º ano. Mas, devido à perda de alunos no 11.º ano, acabou por se ter uma única turma de 12.º ano, reunindo alunos de Economia e de Ciências.

> Essa turma foi minha no 10.º ano... depois quando passei para a direção, tive que deixar algumas turmas... e agora no 11.º [ano] estiveram com outra professora e no 12º pediram que fosse eu... porque era diferente, se calhar... eu não sei... é uma turma que... aliás eram ali duas turmas no 10º ano e foram perdendo alunos e no 12.º [ano] juntou tudo em uma turma só. *(entrev. 1, p. 5)*

Ao analisar as características da turma, João refere que tanto os alunos de Economia quanto os de Ciências trabalham muito pouco de modo autónomo nas tarefas deixadas para casa. Isso parece impactar diretamente as escolhas realizadas pelo professor que menciona que, suas aulas, justamente pelo fato de os alunos não trabalharem fora da sala de aula, devem ser aulas "eminentemente práticas" *(entrev. 1, p. 5)*.

> [A turma] tem umas características... a parte de Economia... os alunos de Economia... são alunos muito... instáveis... qualquer coisa que nós... um desafio extra-escolar, eles aceitam... mas depois, em termos de trabalho autónomo... nada ou pouco... e... portanto, as aulas têm que ser eminentemente práticas para eles fazerem... praticarem, que se calhar deveriam praticar em casa e que não praticam... a turma de Ciências... a parte de Ciências é bastante menos... há dois ou três alunos... que trabalham e o resto é mais ou menos dentro do quadro dos [alunos] de Economia. *(entrev. 1, p. 5)*

Tendo em conta esta particularidade da turma, João menciona que tenta trabalhar em suas aulas uma quantidade significativa de exercícios, indicando que isso é para que os alunos tenham "aquela prática mínima" *(entrev. 1, p. 6)*, referindo que os alunos nem sempre estão predispostos para aprender coisas novas e, por fim, refere ainda a preocupação com a realização do exame nacional (este com conteúdos desde o 10.º ano) e também as provas normais do 12.º ano:

> Portanto... as aulas... eu tento sempre fazer muitos exercícios para... para eles terem aquela prática mínima... isto... nem sempre estão... predispostos a aprenderem coisas novas... mas... com insistência e com... também já estamos no final do ensino secundário... portanto eles já estão um bocadinho mais crescidos... e tem o objetivo de ao final fazerem o exame nacional com conteúdos desde o 10º ao 12º... portanto [inaudível] esta motivação... por causa disto tem que insistir... também temos as provas normais ao fim... mas

> nada de especial... e portanto eu tento fazê-las o mais normal possível. *(entrev. 1, pp. 5-6)*

7.3.2 A estrutura das aulas

No tocante à estrutura das aulas observadas, foi possível classificá-las em dois tipos básicos: (i) *Aulas dedicadas à introdução de um tópico novo* e (ii) *Aulas dedicadas à realização e discussão de exercícios*. Cada tipo de aula apresentou uma estrutura organizacional e uma sequência bem característica, conforme procuro demonstrar mais adiante.

O primeiro tipo de aula, nomeadamente as aulas dedicadas à introdução de um tópico novo surgiu com menor frequência em comparação com o tipo de aulas dedicadas à realização de exercícios. A maior ênfase nas aulas dedicadas à realização de exercícios pareceu ser uma escolha deliberada de João: "Eu tento sempre fazer muitos exercícios para... para eles terem aquela prática mínima" *(entrev. 1, p. 5)*.

Dentro das temáticas relacionadas ao Cálculo Diferencial, assisti às aulas de introdução à função logarítmica e também às aulas dedicadas ao estudo das propriedades da referida função. Sendo assim, achei oportuno assistir mais algumas aulas de introdução de tópicos novos, com o objetivo de obter uma caracterização mais fidedigna e precisa desse tipo de aula. Desse modo, assisti mais quatro aulas dedicadas à introdução dos Números Complexos. Embora essa temática não configure um tópico de Cálculo Diferencial, a observação das aulas foi importante para consolidar, em termos analíticos, a estrutura desse tipo de aula.

Em termos de organização, as aulas onde ocorreu a apresentação de um conceito novo, apresentavam a seguinte estrutura: i) *Questionamentos iniciais realizados pelo professor*, ii) *Apresentação de um vídeo sobre o tema*, iii) *Construção de um resumo da teoria* (escrito no quadro) e iv) *Discussão de exemplos e proposta de exercícios*. Apresento a seguir alguns excertos que procuram dar conta desses 4 momentos. Tais excertos foram extraídos de duas aulas (com 50 minutos de duração cada aula), nas quais o professor introduziu o conceito de função logarítmica.

<u>Questionamentos iniciais realizados pelo professor</u>

O professor saudou a todos, sendo que dessa vez não fez qualquer referência a minha presença. De início, já escreveu no quadro a temática da aula: “Funções Logarítmicas”. Na sequência, ele fez uso do computador para projetar o gráfico da função exponencial, temática que os alunos já haviam estudado. Nesse instante o professor dirigiu algumas questões à turma:

Professor: Essa função que estudamos... a função exponencial, admite inversa?

Alunos: Sim.

Professor: Por que ela admite inversa?

Aluno: Porque ela é bijetiva.

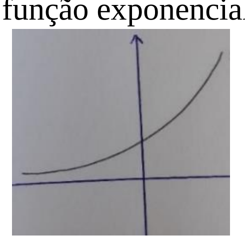
Professor: Isso mesmo... ela é injetiva e sobrejetiva, logo é bijetiva e... precisamente por isso, possui inversa.

Professor: Mas o que isso quer dizer em termos gráficos? Em relação à simetria?

Aluno: Ela é espelhada pela bissetriz dos quadrantes ímpares.

Professor: Isso mesmo.

Em seguida o professor realiza, em um lado do quadro, um esboço para a função exponencial de base *a*, com *a* > 0 e *a* diferente de 1:



Professor: Olhem para aqui... se tomarmos *x* igual a zero, vamos ter o quê?

Alunos: o um.

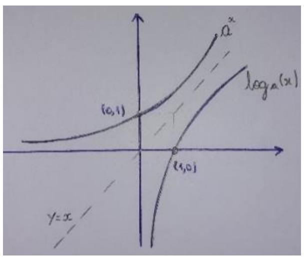
Professor: Exatamente... vamos ter o ponto zero e um, ou seja, abscissa zero e ordenada um [e escreve (0,1) no quadro].

Professor: E o que ocorre com a função inversa?

Alunos: Terá o ponto um e zero.

O professor então completa o esboço e apresenta a seguinte notação para as funções:

$$f: R \to R^+ \qquad\qquad f^{-1}: R^+ \to R$$
$$x \to a^x, a > 0, a \neq 1 \quad \text{e} \quad x \to \log_a(x)$$



Professor: Olhe para o gráfico... é possível calcular o *log* de número negativo?

Alunos: Não.

Professor: Vamos ver então dois exemplos... [escreve no quadro: $\log_{10} 100$ e $\log_6 36$].

Professor: Ambos são iguais a 2... por quê?

Aluno: Porque 10 ao quadrado é 100 e 6 ao quadrado é 36.

(*registo de aula, 11 de abril*)

Quando questionado, por ocasião da entrevista de reflexão, sobre a importância conferida a esta etapa inicial de questionamentos dirigidos aos alunos, João refere que, em sua visão, é importante existir uma razão para as coisas aparecerem e também que nessa etapa é possível encadear o assunto em questão com algo que já é do conhecimento dos alunos:

> É... eu tento sempre que... haja uma razão para as coisas aparecerem... não simplesmente aparecerem do... do nada... e tento... sempre que possível encadear com coisas que já fizeram ou que estamos a fazer... ah... e... buscando sempre coisas que eles já conhecem... normalmente começar por um exercício, problema ou qualquer coisa que depois permita chegar aquele resultado ou simplesmente começar... neste caso [função logarítmica] mais teórico porque tem inversa... recordando também ah... as funções bijetivas e esses conteúdos correspondentes e depois dar um nó na inversa da exponencial. *(entrev. 1, p. 7)*

Apresentação de um vídeo sobre o tema

Após essa chamada de atenção, o professor fez a projeção de um pequeno vídeo explicativo sobre a função logarítmica, material este que faz parte do manual do professor. Nesse vídeo, a definição e as principais propriedades da função exponencial foram apresentadas. Em dois momentos, o professor interrompeu o vídeo e realizou algumas considerações e clarificações adicionais.

Primeira interrupção: A primeira interrupção do vídeo que o professor realizou foi para chamar a atenção do conceito de função bijetiva. Na oportunidade, ele buscou clarificar, traduzindo em linguagem corrente os conceitos de função injetiva e sobrejetiva [a partir da definição dada formalmente no manual e apresentada no vídeo]. Ademais, fez menção à implicação lógica que relaciona as funções exponenciais e logarítmicas.

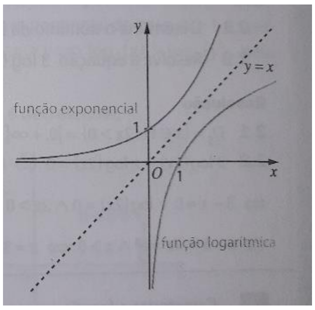
Dado um número real $a > 0$, $a \neq 1$, a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ é bijetiva.

f é injetiva: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Por outro lado, f é sobrejetiva, porque $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}: y = a^x$. Como a função é injetiva e sobrejetiva, então é bijetiva.

A função logarítmica de base a é a função inversa da função exponencial de base a. Tem-se, portanto:

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$$

<u>Segunda interrupção:</u> Em uma segunda interrupção do vídeo, o professor chamou a atenção para a animação gráfica apresentada, na qual era possível obter o gráfico da função logarítmica de base *a* a partir da reflexão do gráfico da função exponencial de base *a* em relação à reta de equação $y = x$ [bissetriz dos quadrantes ímpares].



(registo de aula, 11 de abril)

Conforme mostrado anteriormente, o professor realizou algumas pausas no vídeo para chamar a atenção dos alunos em relação à linguagem simbólica formal utilizada e também para clarificar aspetos relativos à simetria dos gráficos das funções em questão. Sobre este momento, o professor menciona que previamente assiste aos vídeos, ocasião em que destaca os pontos a serem esclarecidos e clarificados em aula.

> As editoras têm umas plataformas... onde estão os vários manuais daquela editora e... por acaso, foi daquela do manual e o próprio manual tem umas chamadas de atenção... penso que os alunos não têm... mas o manual do professor tem uma chamada de atenção com filmes ou documentos... *powerpoint* relacionados com aquele exercício... previamente vou ver se é útil ou não para aquilo que eu quero... ahm... e depois há esse enquadramento, encaminhamento por aí... já com aquelas pausas para escrever, esclarecer ou clarificar as coisas... chamar a atenção. *(entrev. 1, p. 13)*

Mais adiante, o professor ainda refere que estas pausas realizadas nem sempre eram previstas de modo antecipado: "nem sempre são previstas... as vezes, é, digamos... é no calor da coisa que vai acontecendo" *(entrev. 1, p. 11)*.

<u>Construção de um resumo da teoria (escrito no quadro)</u>

Concluída a apresentação do vídeo e realizadas as chamadas de atenção pelo professor [durante as interrupções do vídeo], o professor continua:

Professor: Agora para que não fiquem sem registar nada... vamos escrever um pequeno resumo... para que possam consultar.

Na sequência, o professor vai ao quadro e apresenta alguns apontamentos sobre a função, nomeadamente sobre a sua definição. Escrevo a seguir as partes principais presentes no resumo escrito realizado pelo professor no quadro:

$$\begin{aligned} f &: R \to R^+ \\ x &\to a^x, a > 0, a \neq 1 \end{aligned}$$ é bijetiva (injetiva e sobrejetiva), logo admite inversa.

$$\left.\begin{aligned} f^{-1} &: R^+ \to R \\ x &\to \log_a x \end{aligned}\right\rangle$$ função logarítmica

⚠ $D_{\log_a x} = R^+$, ou seja, só há logaritmos de números positivos.

O resumo apresentado pelo professor tem continuidade, sendo agora apresentada a definição formal da função logarítmica e algumas consequências imediatas à definição. Para cada uma dessas situações, o professor traz exemplos numéricos e questiona os alunos sobre o resultado em cada um dos exemplos.

Assim, $\begin{array}{l} \log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y \\ \forall x \in R, \forall y \in R^+ \end{array}$, por exemplo: $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

$\log_a a^x = x$, por exemplo: $\log_2 2^4 = 4$

$a^{\log_a x} = x$, por exemplo: $3^{\log_3 9} = 3^2 = 9$

$\log_a a = 1$ e $\log_a 1 = 0$

(registo de aula, 11 de abril)

Na visão do professor, o simples fato de os alunos estarem a construir estes resumos, onde cada um tem a sua maneira de organizar no caderno, ajuda a interiorizar as coisas. Ademais, segundo João, muitos alunos não têm o hábito de consultar o manual e assim, com a construção de um resumo, estes têm, ao menos acesso aos conceitos principais:

Eu acho que há alunos que consideram o manual apenas para ir consultar os exercícios e quando são mandados... não há... e se calhar deveria ser encorajado mais... o hábito de consultar o manual... e alguns entre não terem nada para consultar ou terem um caderno... onde têm pelo menos os conceitos principais... ahm e com os destaques feito por eles... portanto cada pessoa tem a sua maneira de se organizar e há aqueles... e chamo mais atenção quer queira, quer não... o simples hábito de estar a passar e depois perceber minimamente aquilo que foi feito... ajuda a interiorizar as coisas. *(entrev. 1, p. 12)*

Tentar sempre depois haver um momento final onde é resumido aquilo que se esteve a falar e normalmente com exemplos imediatos... mas ao mesmo tempo rápidos... onde seja utilizado aquele conceito.... aquela propriedade... que se chegou. *(entrev. 1, p. 11)*

<u>Discussão de exemplos e proposição de exercícios</u>

A seguir à apresentação do resumo no quadro [que foi copiado pelos alunos], o professor escreve 4 exercícios que consistiam basicamente na aplicação da definição de logaritmo ou de uma consequência imediata da definição.

Calcula:

(a) $\log_3 81 =$ (c) $\log_3 \frac{1}{27} =$

(b) $\log_2 32 =$ (d) $\log_5 0{,}04 + \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$

Após um curto período de tempo, os exercícios foram corridos pelo professor no quadro. Um dos alunos respondeu corretamente às questões, sendo que as três primeiras ele respondeu de imediato, sem registar no caderno. O professor fez então uma advertência sobre a necessidade de se registar no caderno, de modo a tornar isso “um hábito”, nas suas palavras.

Na sequência, o professor solicitou que o exercício 37 da página 153 fosse realizado em aula.

(*registo de aula, 11 de abril*)

No que concerne ao segundo tipo de aula, nomeadamente às aulas dedicadas à resolução e discussão de exercícios, para além de ocupar um tempo significativamente maior, também apresentou uma estrutura bem definida com: i) *Tempo para os alunos trabalharem nos exercícios* e ii) *Resolução comentada no grande grupo*.

Em um primeiro momento era conferido um tempo significativo para os alunos, em pares, trabalharem nos exercícios. Isso ocorria de modo invariável, mesmo para os exercícios que haviam sido propostos em uma aula anterior para serem realizados em casa. Nessa fase de resolução dos exercícios, o professor circulava pela sala, prestava auxílio aos alunos que solicitavam sua presença e também aproveitava para ouvir as principais dúvidas dos alunos.

No momento seguinte da aula, ocorria a resolução comentada dos exercícios no quadro. A apresentação das resoluções era realizada pelo professor ou por algum aluno que se voluntariava para tal ou ainda por um aluno que era chamado ao quadro pelo professor. Estes dois momentos pareciam estar intimamente ligados: na fase de resolução, o professor ouvia as principais dúvidas dos alunos e também intervia no sentido de dar "achegas" e auxílios individuais, entretanto sem dar a resposta pronta aos alunos. Em seguida, nomeadamente no momento de discussão dos exercícios, as dúvidas, os erros recorrentes e as soluções alternativas realizadas pelos alunos (e observados pelo professor) eram então problematizados no grande grupo. O professor resume de um modo muito claro a ligação entre esses dois momentos aquando da entrevista de reflexão:

> É... a idéia é mesmo essa... primeiro lançarmos a situação problemática... as vezes meros exercícios... não tem nada que... é a prática... ir ouvindo as dúvidas e não dar uma resposta, mas fazer eles pensarem... como é que chegam àquela resposta... e depois no final... até porque nem todos provavelmente chegam à resposta final... ou para verem outros processos de resolução... tentar fazer ali um ponto final da situação... para ver se toda a gente percebeu... claro, tentar que todos percebam. *(entrev. 1, p. 6)*

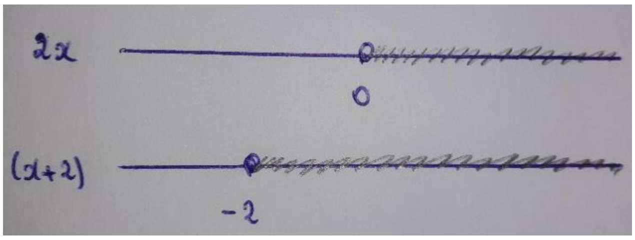
Não apresento aqui excertos de aulas sobre os dois momentos concernentes às aulas de resolução de exercícios, uma vez que tanto um quanto outro estão intimamente relacionados com as interações do professor em sala de aula, assunto de que tratado logo a seguir.

7.3.3 As interações nas aulas

Em relação aos aspetos respeitantes às interações estabelecidas em sala de aula foi possível observar três tipos de interações: i) interação do professor com um aluno em particular, ii) interação do professor com a turma e iii) interação entre os alunos. O primeiro e o terceiro tipos ocorreram preponderantemente durante as aulas dedicadas à resolução de exercícios, enquanto o segundo tipo, para além das aulas de discussão de exercícios, também ocorreu nas aulas em que um assunto novo era abordado.

A interação entre o professor e um aluno ocorreu na forma de diálogos individualizados e, conforme já referi, aconteceu principalmente nas aulas dedicadas à resolução de exercícios. Essa interação ocorria principalmente quando o aluno solicitava a presença do professor para tirar uma dúvida ou solicitar alguma clarificação adicional sobre o exercício em questão, mas também aquando da discussão do exercício, ocasião em que o aluno colocava uma questão ao professor. Tal modalidade de interação pareceu ter uma importância muito grande para o professor, pois permitia a ele fazer um apanhado das principais dúvidas, erros e soluções (alternativas ou não) apresentados pelos alunos, para em seguida, durante a fase de discussão dos exercícios, poder retomar estas questões. Em outras palavras, essa interação permitia ao professor coletar elementos (tais como erros comuns, dúvidas e soluções alternativas) diretamente com os alunos para, em seguida, discutir no grande grupo. O registo a seguir pretende dar conta dessa interação.

<u>Diálogo com um aluno</u>

> Os alunos trabalhavam em pares nos exercícios propostos e era possível ver que trocavam impressões sobre as questões, enquanto o professor circulava pela sala.
>
> Questão 2) Resolva: $\ln(2x) = \ln(x+2)$
>
> Nessa questão, consegui observar um pequeno diálogo entre o professor e um aluno que estava sentado próximo a mim.
>
> Aluno: Como é que fica o domínio?
>
> Professor: Desenha as retas.
>
> O aluno então desenha as duas retas reais com os sinais associados para cada situação. A figura a seguir procura dar conta da representação do aluno:
>
> 
>
>
> Professor: E então... qual a intersecção?
>
> Aluno: Quando o *x* for maior que zero.
>
> Professor: Sim... mas cuidado, estritamente maior [que zero].
>
> Questão 3) Resolva: $e^{\frac{2-\ln(x)}{2}} = e$

Nessa questão, os alunos ficaram um tanto confusos na hora de determinar o intervalo de domínio, pois a questão fugia à regra das demais, uma vez que apresentava a exponencial de base *e* para além do logaritmo natural. Descrevo a seguir outro diálogo que ocorreu com o mesmo aluno que sentava atrás de mim e o professor.

Aluno: Como é que eu vejo o domínio aqui?

Professor: Ok... qual é o domínio da exponencial?

Aluno: [Silêncio].

Professor: Olha aqui no livro [havia no livro do aluno um esboço do gráfico da função exponencial de base *e*].

Professor: São todos os reais... logo não há restrição, concordas?

Aluno: Sim... percebi.

Professor: Mas atenção... perceba que a nossa peocupação aqui, é com o logaritmo natural... que deve ser?

Aluno: Sim... maior que zero.

Professor: Correto... tal restrição não ocorre na exponencial.

Depois, no momento da resolução da questão no quadro, o professor começa justamente a falar desta questão:

Professor: Essa questão é diferente das demais... a única condição que temos que impor é que o *x* tem que ser maior que zero.

Na sequência, o professor escreve a resolução da questão no quadro.

$$
\begin{aligned}
&D=\{x\in R : x>0\}=R^{+}\\
&e^{\frac{2-\ln(x)}{2}}=e^{1}\\
&\Leftrightarrow \frac{2-\ln(x)}{2}=1\\
&\Leftrightarrow 2-\ln(x)=2\\
&\Leftrightarrow \ln(x)=0\\
&\Leftrightarrow x=1\\
&S=\{1\}
\end{aligned}
$$

Durante a resolução no quadro, um aluno tem dúvida na última passagem da resolução, nomedamente aquela em que de ln(x) = 0 passa-se a x = 1.

Aluno: Não percebi professor... quando de *ln* de *x* igual a zero passa para *x* igual a um.

Professor: Basta ver a definição [escreve no quadro: $\log_a(x)=y \Leftrightarrow a^{y}=x$].

Professor: Perceba que *e* elevado a zero é *x*. Portanto...

Aluno: Sim... vai dar um... pois qualquer número elevado na zero é um.

(*registo de aula*, *19 de março*)

No tocante à interação do professor com a turma, essa também ocorreu no formato de diálogos aquando da apresentação de um novo assunto ou então na fase de discussão dos exercícios. Nesta modalidade de interação, o professor dirigia questões ou então um aluno colocava uma questão ao professor e o diálogo desenvolvido a partir daí, tendo em vista dirimir aquela dúvida pontual, envolvia toda a turma. O extrato de aula a seguir, de uma aula dedicada às propriedades da função logarítmica, procura dar conta dessa modalidade de interação.

<u>Diálogo com a turma</u>

No regresso do intervalo, o professor então escreve no quadro: “PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS”, assunto a ser abordado a partir de então.

O professor começa por apresentar os dois casos da função exponencial: um para base *a* maior que zero (a > 0) e o outro para base *a* entre zero e um (0 < a < 1).

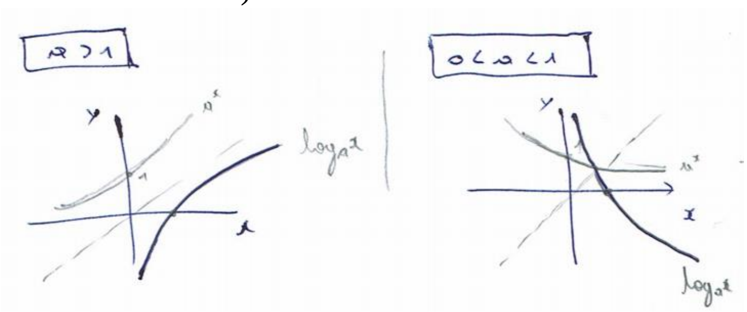
Professor: Como fica o gráfico da função exponencial de base maior que 1?

Alunos: Assim [fazem o sinal com a mão no ar].

Professor: Sabendo que a função é bijetiva... e tendo em conta a simetria, como fica o gráfico da sua inversa?

Alunos: [Silêncio].

Professor: Então... vejam lá como fica (o professor desenha no quadro o esboço da função inversa para ambos os casos – conforme as figuras procuram dar conta).



Aluno: Professor... não percebo aquela de lá [aponta para o caso de *a* entre zero e um no quadro – figura da direita].

Professor: Não percebes o quê?

Aluno: Não é espelhado?

> Professor: Sim... mas... em relação a quem está espelhado?
>
> Alunos: À bissetriz dos quadrantes ímpares.
>
> Professor: Pois... então o ponto zero, um vai para?
>
> Alunos: Um, zero.
>
> Professor: Sim... e os outros pontos também... veja aqui [aponta para o gráfico da função exponencial]... quando o *x* está aumentando muito, o que está acontecendo com *y*?
>
> Alunos: Se aproxima de zero.
>
> Professor: Então... na função inversa, quer dizer, na função logarítmica teremos o contrário... ou seja... quando o *x* está tendendo a zero, o *y* será cada vez maior [e aponta para a parte do gráfico de $\log_a x$ quando x está póximo de zero à direita]. (*registo de aula, 19 de março*)

O terceiro tipo de interação, nomeadamente a interação entre os próprios alunos foi uma constante durante a fase de resolução de exercícios. Os alunos, sentados em pares, trocavam impressões sobre os exercícios com o colega de mesa e também com os colegas sentados imediatamente a frente ou atrás. Essa interação foi inclusive mencionada pelo professor durante uma de nossas entrevistas, ocasião em que citou a questão da linguagem mais próxima entre os alunos como uma mais valia para a compreensão:

> Experimentar, falar, tirar dúvidas... reunir com os colegas... as vezes, entre eles próprios... ahm... se calhar, essa questão da linguagem mais próxima entre eles também ajuda. *(entrev. 2, p. 6)*

7.3.4 O Cálculo Diferencial nas aulas

A primeira série de observação incidiu sobre 8 aulas, sendo estas dedicadas às funções exponenciais e logarítmicas. A parte referente à função exponencial ocupou duas aulas (as primeiras que observei), as quais foram integralmente dedicadas à realização e à discussão de exercícios. Já a parte restante, ou seja, as outras 6 aulas foram dedicadas à função logarítmica: em duas aulas o professor apresentou a definição da referida função com exemplos e exercícios; em seguida, mais duas aulas foram dedicadas às propriedades da função logarítmica e finalmente, as duas últimas aulas dessa série foram dedicadas integralmente à resolução e discussão de exercícios.

A segunda série de observação ocorreu após um mês da primeira e compreendeu quatro aulas. A primeira aula dessa série foi dedicada à resolução e discussão de duas questões de exames anteriores de Matemática A. Outras duas aulas foram devotadas à resolução e discussão de exercícios envolvendo o cálculo de limites e por fim, uma aula foi dedicada para a realização de um teste contendo 5 questões dissertativas.

Como já referi, João acabou por dar um peso muito importante à realização de exercícios em aula. Assim, considerando as duas séries de observação já mencionadas, das 12 aulas observadas, tivemos apenas 4 delas dedicadas à apresentação de um tópico novo, uma aula para realização do teste final e 7 aulas dedicadas à realização de exercícios.

Sendo assim, objetivando ter mais dados para a posterior análise da prática de João aquando da introdução de um novo tópico, realizei uma terceira série de observação. Estando já no final do ano letivo, esta terceira série de observação compreendeu mais quatro aulas: em duas delas houve a introdução ao estudo dos Números Complexos e as outras duas aulas foram dedicadas à representação dos Números Complexos no Plano Complexo ou Plano Argand. É importante aqui mencionar que essa terceira série de observação teve um caráter meramente complementar às duas séries já observadas, uma vez que não incidiu sobre uma temática relacionada ao Cálculo Diferencial.

7.3.4.1 Ênfase na experimentação: tentar, errar, tentar de novo

João sempre fez questão de deixar claro, durante as nossas entrevistas, que era de fundamental importância os alunos trabalharem na resolução de exercícios e, durante esse processo, também errar. Considerando esses exercícios, disse que era "preciso fazê-los, errá-los... não é... nem sempre se acerta tudo na primeira" *(entrev. 1, p. 13)*. A este espaço dedicado ao trabalho com os exercícios em aula, o professor chamou de experimentação e, como já referi, acabou por ocupar um tempo muito significativo das aulas.

O excerto de aula a seguir, dedicado à resolução/discussão de um exercício sobre limites, procura dar conta do relevo dado pelo professor à experimentação em sala de aula. Neste excerto, o professor vai ao quadro e busca solucionar a questão ouvindo e seguindo as sugestões dos alunos. Na oportunidade, as duas primeiras tentativas de solucionar a questão mostraram-se infrutíferas e somente em uma terceira investida é que se chegou à solução.

Já são 8:55 horas, e então o professor passa para o item 2 da questão 6.

6.2) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\ln(x^2-3x+2)}{\ln(x^2-4)}$

Professor: E quando *x* tende para 2... o que ocorre?

Alunos: Indeterminação.

Professor: Sim... é só substituir, não é?

Então o professor escreve a indeterminação.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x^2-3x+2)}{\ln(x^2-4)}^{\frac{\infty}{\infty}}$$

Professor: E agora?

Aluno: Se calhar... substituir a variável.

Professor: Vamos então à sugestão do Gustavo... substituir a variável... mas qual substituição?

Gustavo: *x* igual a *y* mais 2.

Professor: Então vamos a isso.

No canto do quadro, o professor escreve :

$$\begin{aligned} &x^2-3x+2=0 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \\ &\Leftrightarrow x=2 \vee x=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x^2-4=0 \\ &\Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4} \\ &\Leftrightarrow x=\pm 2 \end{aligned}$$

Em seguida, o professor passa então à solução acatando a sugestão do aluno Gustavo, usando a substituição de variável indicada.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x^2-3x+2)}{\ln(x^2-4)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\ln((x-2)(x-1))}{\ln((x+2)(x-2))}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x-2=y \\ x=y+2}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(y(y+1))}{\ln(y(y+4))} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln y+\ln(y+1)}{\ln y+\ln(y+4)}$$

Após essa construção, chega-se a um impasse: não é possível progredir a partir da substituição de variável adotada. Os alunos conversam entre si, mas não sugerem nada.

Professor: Não resultou... não foi?

Aluno: Tudo outra vez.

Professor: Não... tudo na outra variável.

Professor: Que substituição podemos fazer então?

Gustavo: Pode ser um sobre *z*... quer dizer *y* igual a um sobre *z*.

Aluno: Por que *z* é um sobre *y*?

Gustavo: Pra fazer tender pra mais infinito.

O professor então, a partir do que já tinha feito no quadro, passa agora a realizar essa nova substituição de variável sugerida e escreve:

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln y + \ln(y+1)}{\ln y + \ln(y+4)} \underset{\substack{y=\frac{1}{z} \\ z=\frac{1}{y}\to+\infty}}{\uparrow} = \lim_{z\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{z}\right) + \ln\left(\frac{1}{z}+1\right)}{\ln\left(\frac{1}{z}\right) + \ln\left(\frac{1}{z}+\frac{4}{z}\right)} =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \frac{-\ln z + \ln(1+z) - \ln z}{-\ln z + \ln(4z+1) - \ln z} =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \frac{-2\ln z + \ln(1+z)}{-2\ln z + \ln(4z+1)}$$

Após essa construção, o professor para e começa a observar o quadro. Observa-o por alguns minutos, enquanto os alunos copiam no caderno. Ouço o seguinte comentário entre dois alunos, sentados próximo a mim:

Aluno: Não vai pôr algo tão difícil assim na ficha [avaliativa].

Aluno: Só pra dificultar um bocadinho [risos].

Nesse instante é dado o sinal de intervalo. O professor, após observar em silêncio a sua resolução no quadro , pega o seu caderno e uma caneta e começa a escrever. E assim ficou durante todo o intervalo: tentando resolver a questão no seu caderno.

Ao retornar do intervalo, o professor novamente vai ao quadro e ataca mais uma vez a questão 6.2 [agora já havia feito no caderno].

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x^2-3x+2)}{\ln(x^2-4)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{\ln((x-2)(x-1))}{\ln((x+2)(x-2))}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x-2)+\ln(x-1)}{\ln(x+2)+\ln(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{\ln(x-2)}{\ln(x-2)}+\frac{\ln(x-1)}{\ln(x-2)}}{\frac{\ln(x-2)}{\ln(x-2)}+\frac{\ln(x+2)}{\ln(x-2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{1+\frac{\ln(x-1)}{\ln(x-2)}}{1+\frac{\ln(x+2)}{\ln(x-2)}} = \frac{1+\frac{\ln 1^+}{\ln 0^+}}{1+\frac{\ln(4)}{\ln 0^+}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

Durante a apresentação da resolução no quadro, o professor observa o seu caderno.

Após a resolução ser apresentada, o professor então comenta:

Professor: Vejam... não há uma receita que serve para todos os casos... temos é que tentar! (*registo de aula, 30 de abril*)

7.3.4.2 Grau crescente de dificuldade

Como já referi, na visão de João é importante o professor, ao trabalhar temas ligados ao Cálculo Diferencial, "não complicar... pelo menos de início" *(entrev. 2, p. 5)*. Nas aulas observadas, essa preocupação do professor ficou bastante clara: ele procurava trabalhar exercícios e/ou exemplos com um grau crescente de dificuldade.

> Inicialmente... tentar que os alunos... ahm... [pausa]... que os alunos não se assustem com o formalismo e... com muitas fórmulas de início... portanto tentar com exemplos simples... que percebam os conceitos essenciais e depois então, a partir daí... começar a... complicar um bocadinho mais... ou ir buscar coisas um bocadinho mais elaboradas. *(entrev. 2, p. 5)*

Apresento a seguir dois excertos de aula, onde é possível identificar esta preocupação do professor, nomeadamente em conferir um grau crescente de dificuldade. No primeiro excerto, o professor propõe alguns exercícios imediatamente após a construção do resumo da teoria: é o que, nas palavras do professor, está ligado aos alunos "perceberem a teoria". O outro excerto, por seu turno, aborda uma questão apresentada na aula imediatamente a seguir, classificada pelo professor como sendo "uma questão um pouco mais interessante".

Na sequência, o professor solicitou que os alunos realizassem em aula o exercício 37 da página 153.

37 Calcula:

37.1 $\log_2 16$	**37.4** $\log(\log 10)$	**37.7** $e^{\ln 5} + \ln(e^3)$
37.2 $5^{2\log_5 3}$	**37.5** $\log_{0,1} 0,01$	**37.8** $\log 100 + \log 1000$
37.3 $\log_{\sqrt{5}}(\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5})$	**37.6** $\log_9(3\sqrt{3})$	**37.9** $7^{3+\log_3 27}$

Nesse instante ocorre o intervalo.

Durante o intervalo, 9 alunos permaneceram em sala de aula. Alguns estavam a preencher a sua inscrição para o exame final, outros resolviam os exercícios e os demais aproveitavam o tempo para mexer em seus telemóveis.

Após o intervalo, o professor procedeu a correção do exercício. Um dos itens do referido exercício solicitava que fosse calculado o valor de $5^{2\log_5 3}$. Daí resultou um pequeno diálogo:

Aluno: Não percebi este exercício, professor .

Professor: Tente aplicar isto [escreve no quadro $a^{\log_a x} = x$].

Aluno: Sim... mas não percebo como o dois fica... o dois que multiplica.

Professor: Tens que usar a propriedade... das potências [escreve no quadro $5^{2\log_5 3} = \left(5^{\log_5 3}\right)^2 = 3^2$].

Já em relação ao ítem que solicitava o cálculo de $\log_{0,1} 0,01$:

Professor: Toda a gente consegue perceber que isso é 2? [escreve no quadro: $0,1^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} = 0,01$].

(*registo de aula, 18 de março*)

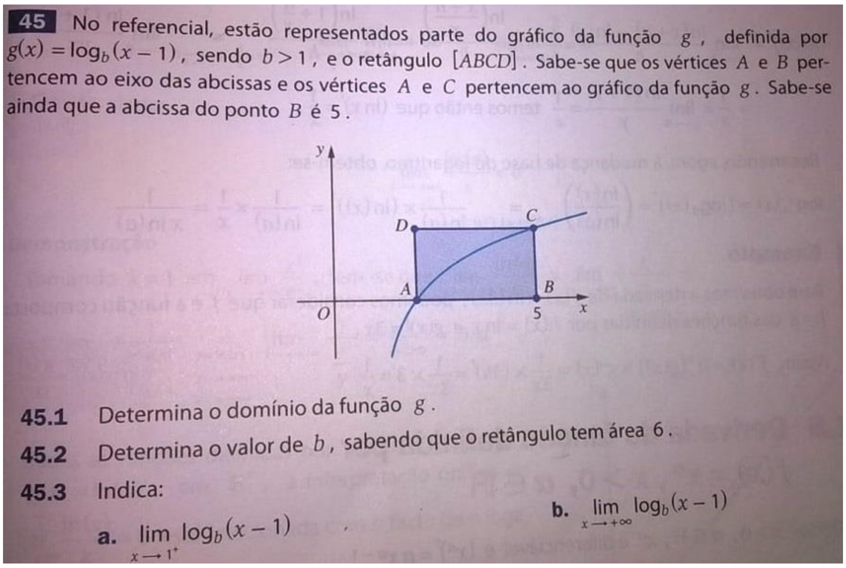
Professor: Agora vamos fazer uma questão um pouco mais interessante.

E propõe o exercício 45 da página 157.

Diante dos sorrisos de alguns alunos, o professor logo responde:

Professor: Uma questão interessante não é necessariamente difícil.

A questão referida apresentava a seguinte redação. Era, por sua constituição, bastante distinta das questões abordadas até então.



45 No referencial, estão representados parte do gráfico da função g, definida por $g(x) = \log_b(x-1)$, sendo $b > 1$, e o retângulo $[ABCD]$. Sabe-se que os vértices A e B pertencem ao eixo das abcissas e os vértices A e C pertencem ao gráfico da função g. Sabe-se ainda que a abcissa do ponto B é 5.

45.1 Determina o domínio da função g.

45.2 Determina o valor de b, sabendo que o retângulo tem área 6.

45.3 Indica:

a. $\lim\limits_{x \to 1^+} \log_b(x-1)$, **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_b(x-1)$

Novamente, um tempo considerável foi dado para que os alunos pudessem trabalhar em pares na resolução da referida questão. Durante esse momento, o professor criculou pela sala e deu algumas “achegas” aos alunos. Logo no início, o professor foi ao quadro e anotou: $A_{[ABCD]} = \overline{AB}\, x\, \overline{BC}$.

Transcorrido o tempo e já indo para o final da aula, o professor retornou ao quadro:

Professor: Vamos ver a área com as variáveis da figura.

Aluno: Como eu descubro o *x* do ponto A?

Ao que o professor não responde de modo direto, mas realiza outra pergunta:

Professor: Observa... o que o [ponto] A tem de especial em relação ao gráfico da função log?

Aluno: [Silêncio].

O professor sugere então pensar a questão a partir da translação do gráfico no eixo *x* [translação horizontal] e observa logo a seguir:

Professor: A translação é para a direta... lembre-se de que nesse caso... o *x* é “mentiroso”.

Aluno: Mas como é que eu demonstro isso?

Professor: Por escrito... ou, se calhar, iguala a zero e resolva analiticamente.

Então o professor passa a resolver analiticamente, como segue:

<u>Ponto A</u>

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \log_b(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = b^0$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$

Assim $\overline{AB} = 3$ e A(2,0)

<u>Ponto C</u>

$$g(5) = \log_b(5-1)$$
$$g(5) = \log_b(4)$$
$$\overline{BC} = \log_b 4$$

$$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \; x \; \overline{BC}$$
$$= 3.\log_b 4 = 6$$
$$\Leftrightarrow \log_b 4 = 2 \Leftrightarrow 4 = b^2 \Leftrightarrow b = 2$$

Aluno: Professor... não percebi o ponto C.

Professor: O ponto C é um ponto pertencente à função.

Aluno: Ah... por isso o *g* de 5 vai dar o *log* de 4... percebi.

Já finalizando a aula, o professor então apresenta a caracterização da função inversa de $g(x) = \log_2(x-1)$:

$$D_g =]1,+\infty[= D'_{g^{-1}}$$

Nessa passagem, o professor enfatiza que o domínio da função g(x) é precisamente igual ao contradomínio da sua inversa. E dando prosseguimento, explicita a inversa, no momento em que é dado o sinal de término da aula.

$$\log_2(x-1) = y$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 2^y$$
$$\Leftrightarrow u = 2^y + 1$$
$$\Leftrightarrow g^{-1}(x) = 2^x + 1$$
$$g^{-1} : R \to]1,+\infty[$$

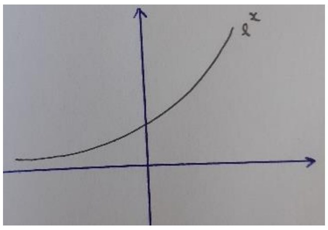
(*registo de aula, 19 de março*)

7.3.4.3 Desenvolvendo a confiança do aluno

Intimamente relacionada com a questão do professor conferir um grau crescente de dificuldade às questões propostas, está também a preocupação do professor em desenvolver no aluno a confiança em suas próprias capacidades. Como já referi, na visão do professor, a confiança do aluno em sua própria capacidade desempenha um papel fundamental, especialmente para os alunos que têm maiores dificuldades: “para estes alunos com mais dificuldade, começar a ter alguma confiança” *(entrev. 1, p. 8)*.

Os dois excertos que apresento a seguir procuram dar conta da preocupação do professor em desenvolver a confiança do aluno em si próprio. No primeiro excerto, um aluno é convidado pelo professor para ir ao quadro apresentar a sua solução para a questão. Já no quadro, o aluno mostra uma certa dificuldade e recebe auxílios tanto dos colegas quanto do professor. Já no segundo excerto, em uma aula posterior, no momento em que o professor solicita alguém para apresentar a solução no quadro, o mesmo aluno referido anteriormente voluntaria-se para tal e mostra-se muito mais confiante, resolvendo corretamente a questão.

> Dando prosseguimento à aula e buscando atender às questões que os alunos encontraram maiores dificuldades, o professor escreve no quadro a seguinte questão (76.4 da página 168):
>
> Resolva em IR, a seguinte condição: $x^2e^x + 3xe^x = 0$
>
> Como ocorreu na primeira questão, o professor deixou um tempo considerável para os alunos trabalharem.
>
> Professor: Quem não tentou fazer, tenta agora.
>
> Nesse momento de trabalho autônomo dos alunos, o professor, novamente, circulou pela sala, prestando auxílios aos alunos que solicitavam a sua presença. Ao final, solicitou que um aluno viesse ao quadro para apresentar a sua solução. Novamente aqui há um exemplo de diálogo entre o aluno [agora no quadro] e o professor, mas um diálogo em que toda a turma podia ouvir:
>
> O aluno escreve a equação $x^2e^x + 3xe^x = 0$ no quadro.
>
> Professor: Então... e agora?
>
> Aluno: Coloco em evidência [e escreve $e^x(x^2 + 3x) = 0$].
>
> Professor: Que operação principal está aí?
>
> Aluno: Uma multiplicação.
>
> Professor: E quando uma multiplicação é zero?
>
> Aluno: [Hesita e permanece em silêncio].
>
> Outro colega: Quando um [dos fatores] é zero ou o outro é zero.
>
> Aluno: [*Escreve no quadro*: $e^x = 0 \quad \text{V} \quad (x^2 + 3x) = 0$].
>
> Professor: Quando *e* na *x* é zero?
>
> Aluno: [Fica em silêncio].
>
> Professor: Pensa no gráfico... como é o gráfico da função exponencial na base *e*?
>
> O aluno parece não se recordar do gráfico da função exponencial. O professor então vai até o quadro e desenha um esboço do gráfico da função exponencial na base *e*, como a figura a seguir procura dar conta:



Em seguida, pergunta ao aluno:

Professor: Observa [aponta para o gráfico]... tem como *e* na *x* ser igual a zero?

Aluno: Não.

Professor: [Vai até o quadro e onde o aluno escreveu $e^x = 0$ e escreve: "Impossível"]. Agora... no restante... é só usar o mesmo princípio.

Aluno: [Escreve $(x^2 + 3x) = 0$].

Professor: Coloca o *x* em ecidência.

Aluno: [Escreve $x(x+3) = 0$].

Professor: Agora, volta a aplicar o mesmo princípio.

Aluno: (Escreve:
$$\begin{array}{l} x(x+3)=0 \\ x=0 \vee x+3=0 \\ x=0 \vee x=-3 \end{array}$$

Por fim, o professor vai até o quadro, coloca as implicações lógicas e escreve a solução usando a simbologia de conjunto:

$$\begin{array}{l} x(x+3)=0 \\ \Leftrightarrow x=0 \vee x+3=0 \\ \Leftrightarrow x=0 \vee x=-3 \\ \Leftrightarrow S=\{-3,0\} \end{array}$$

(*registo de aula, 11 de março*)

Questão 5) Resolva: $2^x.x^2 - 2^x = 0$.

Nessa questão, o professor de imediato já menciona que não há qualquer restrição para o domínio.

Professor: Não há log... não há raiz... ou qualquer coisa restritiva.

A seguir, um aluno se voluntaria para fazer no quadro a questão e um diálogo entre ele e o professor é estabelecido no momento da resolução.

Aluno: Posso fazer?

Professor: Força [o aluno sai da sua classe e vai até o quadro].

Professor: Está bem... por onde começar?

Aluno: Pôr em evidência?

Professor: Isso mesmo.

Aluno: (escreve então: $\begin{array}{l} 2^x.x^2 - 2^x = 0 \\ \Leftrightarrow 2^x(x^2 - 1) = 0 \end{array}$

Professor: E agora?

Aluno: (escreve: $\begin{array}{l} 2^x = 0 \vee x^2 - 1 = o \\ \Leftrightarrow 2^x = 0 impossível \vee x^2 = 1 \\ \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ \Leftrightarrow S = \{-1,1\} \end{array}$

Professor: Mas espera aí... é impossível por quê?

Aluno: Porque dois elevado na *x* é maior que zero, sempre.

O aluno que foi ao quadro foi o mesmo que fez uma questão similar durante a primeira aula que observei. Naquela ocasião, o aluno não soube resolver a equação $e^x = 0$, necessitando de auxílio do professor (que na oportunidade desenhou um esboço do gráfico da função $f(x) = e^x$). Hoje, no entanto, o mesmo aluno resolveu sem qualquer auxílio, mostrando-se confiante [inclusive voluntariou-se para ir ao quadro] e demonstrou convicção quando questionado pelo professor. (*registo de aula, 19 de março*)

O professor mostrou-se, ao longo de todas as aulas, muito sensível às perguntas e dúvidas colocadas pelos alunos. Esta disponibilidade em responder tais perguntas está, segundo João, relacionada diretamente com a questão de os alunos poderem ganhar confiança. Ademais, ele refere explicitamente o caso do aluno mencionado nos excertos anteriores:

[A turma] tem muitos alunos que chegaram às Ciências e tiveram um 3.º ciclo... com alguns... com algumas lacunas e... há coisas que... por exemplo aquele aluno, o Duarte, que está sempre a fazer algumas perguntas que as vezes podem parecer descabidas para alguém... como é que é possível se chegar ao 12.º [ano] e fazer perguntas dessas... tem muito a ver com isso... eu tento sempre... por mais básica que seja a questão... tentar esclarecer e... de maneira que consigam ganhar alguma confiança nas coisas que vão fazendo. *(entrev. 1, p. 7)*

7.3.4.4 Questionando os alunos

Nos dois excertos apresentados anteriormente também é possível verificar um outro aspecto que ocupou um papel central na prática de sala de aula do professor: o questionamento dirigido aos alunos. Esse questionamento poderia ser dirigido a um aluno em específico (como os dois excertos anteriores dão conta), mas também poderia ser dirigido à turma. Apresento a seguir um excerto de uma aula dedicada à realização de exercícios de exames anteriores de Matemática A, onde ocorre o questionamento do professor dirigido à turma.

> Já passava das dez horas da manhã, quando o professor então propõe a seguinte questão de um exame anterior de Matemática A.
>
> *11. Sejam a e b números reais superiores a 1 tais que lnb = 4 lna. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação* $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$. *Apresente a resposta usando a notação de intervalo de números reais.*
>
> Professor: A função logarítmica tem propriedades interessantes... vamos ter de usar algumas aqui.
>
> Durante a resolução, o professor novamente reforça o papel importante das propriedades, segundo ele: "estas propriedades, convém sempre tê-las presente".
>
> Professor: E aí... como resolvemos?
>
> Aluna: Começo pela equação e depois uso a inequação.
>
> Professor: Vamos então trabalhar conforme o sugerido.
>
> A seguir, o professor então vai ao quadro e começa a resolver a questão partindo da equação inicial, conforme sugerido pela aluna:

$$\ln b = 4 \ln a$$
$$\Leftrightarrow \ln b = \ln a^4$$
$$\Leftrightarrow b = a^4$$

> Nesse instante o professor reforça o papel das propriedades da função logarítmica.
>
> Dando prosseguimento, escreve:

$$a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$$
$$a^x \geq (a^4)^{\frac{1}{x}}$$
$$a^x \geq a^{\frac{4}{x}}$$

> Nesse ponto, o professor interrompe sua escrita e questiona.

Professor: Agora é lá do 11.º ano... esta função *a* na *x* é crescente ou decrescente?

Alunos: Crescente.

Professor: Por quê?

Aluno: Porque o *a* está entre zero e um.

Professor: Isso mesmo... mas cuidado... alguns podem se perder aqui.

E prossegue:

$$a^x \geq a^{\frac{4}{x}}$$
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{4}{x}$$
$$\Leftrightarrow x - \frac{4}{x} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0$$

Professor: Novamente... cuidado... não sei se o *x* é positivo ou negativo... parto do princípio que toda a gente sabe preencher este quadro.

O quadro seguinte, com o estudo do sinal, é desenhado e preenchido pelo professor que questiona os alunos ao preenchê-lo. Finalmente, o professor escreve a solução para a questão.

		-2		0		2	$+\infty$
x^2-4		0		-	-	0	+
x		-		0	+	+	+
$\frac{x^2-4}{x}$		0		ND	-	0	+

$$S = [-2,0[\cup [2,+\infty[$$

(*registo de aula, 28 de abril*)

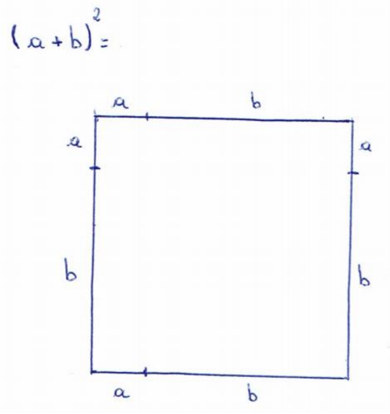
7.3.4.5 Apresentando clarificações

Outra questão recorrente na prática de sala de aula de João foi a sua predisposição em realizar clarificações pormenorizadas aos alunos. Nestas ocasiões, era bastante comum ele recorrer ao apoio visual de gráficos ou esquemas, os quais eram desenhados por ele em um canto do quadro. Em algumas dessas situações, tais clarificações realizadas pelo professor assumiam o formato de revisão de um conceito básico, como o próximo excerto procura dar conta. Na oportunidade, o professor demonstra aos alunos o produto notável (quadrado da soma de dois termos) por meio da área do quadrado.

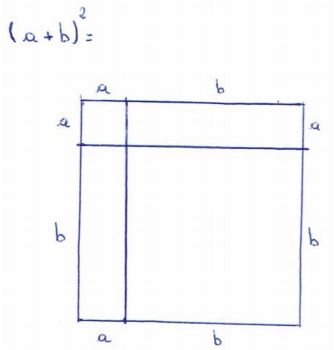
Professor: Toda gente sabe a área do quadrado, não?

Alunos: Sim... lado vezes lado.

Professor: Está bem... pensem lá... em um quadrado de lado *a* mais *b* [desenha o quadrado no canto do quadro] o que acontece então?



O professor decompõe o quadrado inicial [de lado (a+b)] em dois quadrados e dois retângulos, como a figura seguir procura dar conta.



Professor: Quantas figuras formam este quadrado maior de lado *a* mais *b* [aponta para a figura]?

Alunos: Dois quadrados e dois retângulos.

Professor: Perfeito... um quadrado maior... outro quadrado menor... e dois retângulos iguais... agora, usando esta notação, como ficam as áreas?

Alunos: [Permanecem em silêncio].

Professor: Aqui [aponta para o quadrado menor de lado *a*] temos um quadrado de lado *a*, portanto sua área será?

Alunos: *a* elevado ao quadrado.

Professor: [Escreve a^2 no interior do quadrado menor] E do mesmo modo, temos que o outro quadrado tem área *b* elevado ao quadrado [escreve b^2 no interior do quadrado maior].

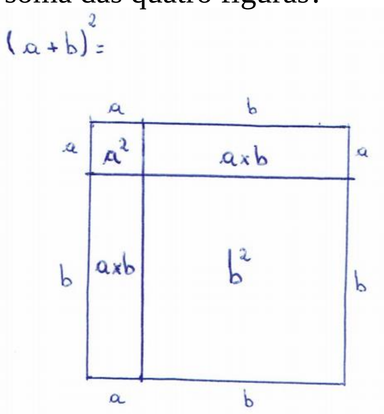
Professor: Por fim... esses dois retângulos são do mesmo tamanho, não são?

Aluno: Sim... de lados *a* e *b*.

Professor: Então a área de cada retângulo será?

Alunos: *a* vezes *b*.

Professor: [Escreve "a x b"no interior de cada retângulo] Agora... como que fica a área total do quadrado maior... aquele de lado *a* mais *b*... ou seja... a soma das quatro figuras?



Aluna: *a* elevado ao quadrado... mais *b* elevado ao quadrado... mais duas vezes *ab*.

Professor: [Escreve a expressão para o quadrado da soma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$] Isso vos convence, não convence?

Aluna: Sim... e eu que decorei essa fórmula. (*registo de aula, 6 de maio*)

O próximo excerto procura dar conta de uma clarificação sobre uma equivalência realizada pelo professor durante a realização de um exercício no quadro. Na oportunidade, ele recorre ao desenho de esquemas gráficos, nomeadamente do ciclo trigonométrico, tendo em vista clarificar a seguinte equivalência: $\cos(y+\frac{\pi}{2}) = -seny$.

Depois deste rápido diálogo com algumas interrogações dirigidas à turma, o professor vai até o quadro e escreve o seguinte:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x}{\pi - 2x} \underset{\substack{\uparrow y = x - \frac{\pi}{2} \\ y \to 0 \\ x = y + \frac{\pi}{2}}}{=} \frac{0}{0}$$

Nesse momento, o professor coloca a mudança de variável a ser usada e dá um tempo para que os alunos possam fazer a questão. E acrescenta:

Professor: Vamos ver então o que acontece... tentem aí.

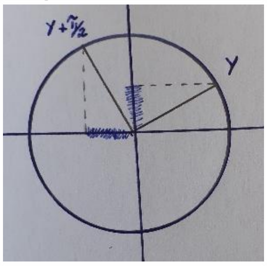
A partir dessa indicação de mudança de variável sugerida pelo professor, os alunos trabalham em pares na referida questão. Enquanto os alunos trabalham, o professor circula pela sala e dá “achegas” para os alunos, bem como observa as resoluções nos cadernos.

Passados aproximadamente 15 minutos, o professor vai ao quadro, pede a atenção dos alunos e inicia a resolução da questão:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x}{\pi - 2x} = \lim_{y \to 0} \frac{4\cos(y + \frac{\pi}{2})}{\pi - 2.(y + \frac{\pi}{2})}$$

Após essa mudança de variável na questão original, tendo agora a presença de *y* e não mais a presença da variável *x*, há um problema adicional à questão: o limite fundamental é expresso em função do seno e não do cosseno. O professor lança mão de um esquema no quadro, ao lado onde a questão está a ser resolvida, onde busca uma equivalência de cosseno e seno.

No referido esquema, o professor indica o arco *y* no 1.º quadrante e também o arco $(y + \frac{\pi}{2})$ no 2.º quadrante do ciclo trigonométrico, conforme a figura a seguir:



Nesse instante, tem-se um diálogo entre o professor e um aluno (que está sentado logo atrás de mim):

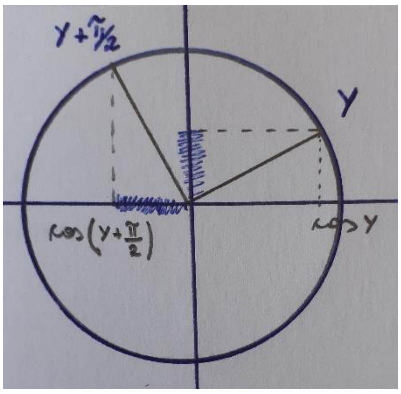
Aluno: Não percebi bem, professor.

Professor: O quê?

Aluno: Essa passagem... ali... do cosseno.

Professor: Vamos ver então...

No quadro, o professor desenha um esquema mais aumentado do que o desenhado anteriormente, conforme a figura a seguir pretende dar conta.



Professor: Aqui temos o *y*, certo (aponta para o arco no 1.º quadrante)?

Aluno: Sim.

Professor: Mas no nosso caso... o que queremos não é *y*, mas sim *y* mais *pi* meios, certo? [O professor então aponta para o arco $(y+\frac{\pi}{2})$, referindo que este foi obtido a partir do arco *y* somado a um ângulo reto].

Aluno: Sim.

Professor: Agora observa... veja a relação entre cosseno de *y* mais *pi* meios e seno de *y* [novamente o professor vai ao ciclo trigonométrico representado e pinta o seno e o cosseno em questão, conforme a figura anterior].

Aluno: Hummm...

Professor: Os dois [arcos] tem o mesmo valor, só muda de sinal... por isso vamos pôr o menos na frente... tudo bem?

Aluno: Sim... agora percebi.

Após dirimir esta dúvida individual, mas realizada no grande grupo como se fosse uma dúvida da turma [as ilustrações foram feitas no quadro e o diálogo foi direcionado à turma como um todo]. Por fim, o professor então escreve a solução da questão como segue:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{4\cos x}{\pi-2x}=\lim_{y\to 0}\frac{4\cos(y+\frac{\pi}{2})}{\pi-2.(y+\frac{\pi}{2})}=\lim_{y\to 0}\frac{-4seny}{-2y}$$

$$=2\lim_{y\to 0}\frac{seny}{y}=2.1=2$$

Outro aluno, por sua vez, não compreendeu a passagem no denominador, uma vez que esta não envolveu a equivalência no ciclo trigonométrico [entre seno e cosseno]. Mas a dúvida foi logo dirimida por uma colega, que se antecipou ao professor:

Aluna: Ali... basta multiplicar por menos 2... vais ter *pi* menos *pi*...o que cancela e resta o menos 2*y*. (*registo de aula, 11 de março*)

7.4- Síntese

7.4.1 O percurso profissional e o contexto escolar

João leciona Matemática há aproximadamente vinte anos e, no momento, para além da docência em uma turma de 12.º ano, também exerce o cargo de adjunto do diretor. Afirma que foi a partir de uma experiência negativa que teve quando estudante do 10.º ano, nomeadamente a obtenção de uma nota negativa em Matemática (que considerou injusta), que passou a estudar Matemática por conta própria, levando-o a ter excelentes resultados e a querer prosseguir os estudos nesta área. Refere ainda que não tinha a certeza em continuar como professor após o período de estágio, mas devido às boas turmas e aos colegas espetaculares que teve nessa fase inicial, acabou decidindo continuar no ensino. Finalmente considera possuir um perfil mais próximo dos alunos do ensino secundário e avalia como muito importante o professor desse nível de ensino ter experiência na docência de Matemática em anos anteriores, acreditando que isso contribui tanto para uma visão mais alargada de tudo o que os alunos estão aprendendo, quanto para um maior conhecimento, pelo professor, das dificuldades encontradas pelos alunos.

Na visão de João, a escola tenta ser cada vez mais dinâmica apesar dos constrangimentos de ordem orçamental e também do envelhecimento da classe docente. Acredita que o grupo da Matemática trabalha bem e destaca a existência de um conjunto de professores mais antigos no grupo que está sempre à procura de coisas novas e que os colegas novos sentem-se bem acolhidos. Por fim, revela que no tocante à docência, de momento, está a trabalhar de modo mais isolado pelo fato de existir apenas uma turma de 12.º ano na escola.

7.4.2 Conceções em relação ao ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário

Para João, a presença de tópicos de Cálculo Diferencial no ensino secundário faz todo o sentido e é, na sua visão, pertinente. Para justificar tal posicionamento, alude dois aspetos: i) o primeiro relaciona-se com os alunos perceberem a existência de uma teoria subjacente e ii) o segundo, relaciona-se com as possibilidades da aplicação do CD em situações relacionadas à Cinemática. Para uma boa aprendizagem de CD, considera essencial o professor: i) em uma abordagem inicial, *não complicar* e ii) *passar confiança ao aluno*. Ao considerar o papel a desempenhar pelo aluno, menciona três aspetos: i) *perceber o conceito e não decorar*, ii) *praticar* e iii) *não desistir*.

7.4.3 Aspetos centrais da prática letiva no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial

No tocante à prática de sala de aula, foi possível identificar, a partir das observações realizadas, dois tipos de aula: i) aulas de introdução de um novo tópico e ii) aulas de exercícios. No que respeita a estrutura, as aulas do primeiro tipo apresentavam: i) *questionamentos iniciais dirigidos aos alunos*, ii) *apresentação de um vídeo sobre o tema, com pausas pontuais para clarificação*, iii) *construção de um resumo no quadro a partir do vídeo assistido*, e iv) *discussão de exemplos e proposta de exercícios*. Já as aulas do segundo tipo, por seu turno, estavam estruturadas em duas partes: i) *tempo para os alunos trabalharem nos exercícios* e ii) *resolução comentada no grande grupo*.

No que se refere à abordagem didática, a questão da construção da confiança do aluno em si próprio aparece como uma preocupação central de João. Ademais, tal preocupação parece estar intimamente relacionada com outros quatro aspetos identificados na sua abordagem didática, nomeadamente: i) ênfase na experimentação, ii) grau crescente de dificuldade, iii) questionamentos dirigidos aos alunos, e iv) apresentação de clarificações.

Capítulo 8

Professora Maria José

8.1 Apresentação

Maria José é professora há trinta e um anos. Atualmente leciona Matemática para o 3.º ciclo e para o ensino secundário em uma escola da região metropolitana de Lisboa. É professora efetiva nesta escola há 22 anos e, para além das atividades de docência em Matemática, também exerce a função de coordenadora de projetos do agrupamento de escolas a que pertence.

Realizei com a professora Maria José duas modalidades de entrevistas: entrevistas temáticas e entrevistas de reflexão sobre as aulas por mim assistidas. As entrevistas inscritas nesta última modalidade ocorreram imediatamente após as aulas assistidas e tiveram uma duração aproximada de 30 minutos, tendo por local a própria escola. Já em relação às entrevistas temáticas, estas foram realizadas em duas oportunidades e em locais distintos. A primeira entrevista temática foi devotada ao percurso profissional de Maria José e a segunda incidiu sobre o contexto escolar e também sobre as perspetivas da professora em relação ao ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário. Ambas as entrevistas tiveram uma duração aproximada de uma hora e trinta minutos.

As duas entrevistas temáticas ocorreram ao final do ano de 2019, com um intervalo de 15 dias. A primeira entrevista foi realizada no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. O local foi sugerido pela própria professora, uma vez que neste dia ela estaria no Instituto e dispunha de um tempo considerável para o efeito. O local, não por acaso, tem uma relação estreita com a questão do dinamismo e a procura por atualização por parte de Maria José, assunto de que trato na próxima seção.

Para esta primeira entrevista temática encontramo-nos eu e Maria José na biblioteca do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Como não era possível realizar a reserva antecipada de gabinetes, acabei por descobrir naquela ocasião que um gabinete somente iria estar disponível após três quartos de hora. Então decidimos nos dirigir para outro local, nomedamente para uma pequena sala que ficava ao fundo de um grande corredor e que dispunha de uma grande mesa e cadeiras e, para além de ser um local bem iluminado, era também bastante silencioso e portanto reunia as condições ideais para a realização da entrevista.

Esta primeira entrevista temática correu muito bem e apresentou uma boa fluência no seu desenvolvimento. Maria José mostrou-se bastante segura e tranquila durante toda a sua fala, demonstrando muita segurança em relação àquilo que dizia. Também foi percetível e digno de registo a forma emotiva com que a professora retratou as passagens mais significativas de sua trajetória como aluna e também dos seus primeiros anos na profissão, bem como quando fez referência aos seus antigos professores.

Cerca 15 dias depois dessa primeira entrevista, teve lugar a segunda entrevista temática, que decorreu na escola onde Maria José leciona. Era a segunda vez que eu ia até à escola. A entrevista foi previamente combinada com a professora para ser realizada após o período de aulas da tarde. Era uma quinta-feira, cheguei à escola com cerca de 20 minutos antes do horário combinado e esperei pela professora junto a um dos pavilhões. Encontrei-a já ao final de um período de uma semana de aulas, pois ela não tinha aulas às sextas, sendo que nesta ocasião apresentava-se muito rouca, quase afônica.

Porém, mesmo com a indisposição na sua voz, Maria José parecia alegre e disponível. Antes de irmos para a entrevista, ela realizou comigo uma espécie de passeio guiado pela escola, que na altura estava toda enfeitada para o Natal. Levou-me até outro pavilhão, que naquela oportunidade estava com uma exposição de obras de arte realizadas pelos alunos com materiais recicláveis. O prédio já estava fechado, mas mesmo assim, a professora conseguiu que uma funcionária o abrisse para que pudéssemos visitá-lo e lá assumiu o papel de "curadora" da exposição, mostrando-me detalhes e pormenores. Solicitei se podia fazer o registo fotográfico, ao que ela deu uma resposta afirmativa. Ao final, confidenciou-me que na próxima semana a escola receberia a visita do primeiro ministro de Portugal e que todos estavam animados com tal acontecimento. No entanto, logo a seguir emendou dizendo que estas exposições eram uma constante no dia a dia da escola e que esta realização não se devia somente à visita de uma autoridade. Após esta visita à escola, nos dirigimos para as sala onde decorreu a entrevista.

Esta segunda entrevista temática teve início numa pequena sala localizada na parte superior de um dos pavilhões, próximo à biblioteca da escola. A sala era pequena e destinava-se ao atendimento reservado dos pais pelos professores. Mas como pude perceber, esta sala parecia também atender a outros propósitos, pois quando lá chegamos, uma professora estava a concluir um aula de explicação individualizada a um aluno. Iniciamos a entrevista e transcorridos aproximadamente uns 30 minutos fomos interrompidos e tivemos de deixar a sala, uma vez que outra professora necessitava do espaço para atender a um pai de aluno. Seguimos então para uma sala localizada logo em frente. Esta sala, bem mais ampla que a primeira, era a sala dos diretores de turma. Era uma sala muito organizada com uma série de arquivos dispostos em armários e várias mesas com cadeiras. Ali a entrevista foi concluída e deixamos o local somente às 19 horas, horário em que a escola encerrava naquele dia.

A exemplo da primeira entrevista temática, a segunda entrevista, apesar dos constrangimentos inerentes à mudança de local e do problema de voz de Maria José, foi uma entrevista muito intensa e com boa fluência. A professora mostrou-se, novamente, uma boa informante e permaneceu muito à vontade, não apresentando qualquer constrangimento pelo fato de toda a nossa conversa ter sido gravada. Na oportunidade, como já referi, ela estava muito rouca, e por sorte, eu levava na ocasião uma pequena garrafa térmica contendo chá, que tão logo ofereci a ela e assim a nossa entrevista assumiu o tom de uma boa conversa com chá. Ademais, esta questão da voz da professora mostrou-se um desafio aquando da transcrição da entrevista, pois para além da voz rouca, em algumas ocasiões ela falava em um tom muito baixo. Todavia, isso não chegou a comprometer de um modo severo a qualidade da gravação, somente exigiu de minha parte despender mais tempo que o previsto na tarefa de transcrição da entrevista.

8.1.1 O percurso profissional

Maria José é natural da Madeira, local onde realizou toda a sua formação pré-universitária. Também lá iniciou os seus estudos universitários, nomeadamente os estudos conducentes ao grau de Licenciada em Ensino da Matemática, porém veio a concluir esta etapa formativa na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ao refletir sobre o período em que realizou a sua formação pré-universitária na Madeira, Maria José identifica nessa etapa formativa duas questões centrais e que viriam a exercer uma influência muito grande na sua escolha futura em ser professora de Matemática: i) *o papel relevante desempenhado pelos seus professores*, especialmente os professores de Matemática e ii) o contato, desde cedo, com *a experiência no ensino*, nomeadamente no auxílio aos seus colegas de turma de 1.º ciclo que apresentavam dificuldades em Matemática.

Ao comentar sobre os seus professores de Matemática, Maria José refere possuir memórias muito vivas de todos eles:

> Há pessoas que não nos ficam na memória e eu, todos os meus professores de Matemática ficaram na memória... eu não lembro de alguns professores de outras disciplinas, mas os de Matemática, lembro-me deles todos, todos.
>
> *(entrev. temática 1, p. 3)*

Maria José também refere que nunca sofreu um desencantamento com a Matemática e que isso, em grande medida, parece estar ligado ao fato de ter tido boas experiências com estes professores:

> Eu não sofri nunca um desencantamento porque.... todos os professores de Matemática que eu tive durante o meu percurso do 1.º ciclo ao secundário foram professores excecionais, uns mais tímidos, outros mais dinâmicos, mas professores mesmo muito, muito bons.
>
> *(entrev. temática 1, p. 2)*

Maria José considera que os professores marcam imenso os seus alunos e chega a vincar que os bons professores são uma referência para toda a vida: "eu acho que... ahm... os professores marcam-nos imenso... os bons professores são, sem dúvida, são uma referência na nossa vida" *(entrev. temática 1, p. 2).* E logo a seguir, começa a falar sobre cada um de seus professores de Matemática, elencando a suas principais características. Referindo-se ao 1.º ciclo, menciona que teve "uma professora primária que foi excelente" e sendo ela, Maria José, "a melhor aluna" e que também chegava sempre muito cedo à escola, em torno de uma hora antes do início das aulas, acabava por auxiliar a professora com os alunos mais "fracos" *(entrev. temática 1, p. 2):*

> Eu acabava por ser o auxílio dela porque ela colocava-me a ajudar os meus colegas, o meu pai ia me deixar à escola as 8 horas da manhã, as aulas só começavam as 9 horas... entre as 8 e as 9, ela delegava em mim, uma miúda de 7, 8, 9 [anos] porque eu estive a fazer o 1º ciclo até os 10 anos ahm... eu ficava dentro da sala, tinha outros para abrir a sala, eu ficava lá a cuidar do... a resolver problemas com os meus colegas, ajudá-los nos trabalhos de casa que eles não tinham feito e a tirar dúvidas.
>
> *(entrev. temática 1, p p. 1-2)*

Quanto à professora de 2.º ciclo, Maria José descreve-a como uma professora que "era alegre, ela ensinava a Matemática com alegria, ela vivia a Matemática com paixão" *(entrev. temática 1, p. 2)* e assim, dá a entender que teve uma boa sequência em Matemática entre o 1.º e o 2.º ciclos:

> Porque ela [a professora do 1.º ciclo] achava que os bons alunos não podiam ficar parados, então arranjava uns desafios para mim e colocava-me a ajudar os colegas ahm... eu chego ao 2.º ciclo, apanho esta professora completamente apaixonada pela Matemática ... foi completamente..."
>
> *(entrev. temática 1, p. 2)*

No tocante ao 3.º ciclo, Maria José menciona a sua mudança de escola, mas refere que continuou a ter professores de Matemática que a marcaram muito. Destaca um professor que teve no 8.º e 9.º anos que também percebeu logo cedo o seu gosto pela Matemática e então, a exemplo da professora do 1.º ciclo, dava-lhe desafios matemáticos extra:

> Ele fazia aquilo que a minha professora de 1.º ciclo fazia... ele percebeu que eu fazia os meus exercícios muito rapidamente, então dava-me sempre novos desafios... e ele dava-me desafios, às vezes, para levar para casa, outros para a própria aula, quando eu me despachava... ele adorava problemas e estava sempre a inventar problemas ou arranjar problemas para aqueles bons alunos.
>
> *(entrev. temática 1, p. 3)*

Para além de propor desafios matemáticos, este professor, segundo Maria José, também incentivava o trabalho em grupo com desafios matemáticos fora da sala de aula. Refere que, frequentemente, tinham o chamado "feriado", ocasião em que um professor faltava e os alunos não tinham aula, então ela e mais alguns colegas iam para a biblioteca enquanto outros optavam por ir brincar no pátio. Ao descobrir que iam à biblioteca, o professor de Matemática então "arranjava-nos uma série de problemas para nós não estarmos na biblioteca só a ler" *(entrev. temática 1, p. 4)*.

> Porque ele achava que ler só, que era uma coisa maravilhosa, mas achava que nós tínhamos que aproveitar o tempo para a Matemática e então dava-nos desafios e nós íamos resolver desafios de Matemática.
>
> *(entrev. temática 1, p. 4)*

Em relação ao ensino secundário, Maria José refere que teve duas professoras de Matemática. Uma que atuou no 10.º e 11.º anos, a quem classificou como "uma pessoa muito tímida" e que possuía uma certa "dificuldade em conseguir um diálogo direto com o aluno", mas que "explicava bem toda a matéria". Já em relação à professora do 12.º ano, classificou-a como uma "exclente professora" e que "puxava imenso por nós, desafiava-nos imenso" *(entrev. temática 1, p. 4)*.

Dada toda essa experiência enquanto estudante de Matemática no ensino pré-universitário, Maria José deixa claro que "sempre quis ser professora de Matemática" *(entrev. temática 1, p. 4)*. Chega inclusive a dizer que nunca teve dúvida quanto à carreira que pretendia seguir e, isso parece estar ligado, para além do gosto por resolver desafios e problemas matemáticos, também à experiência no ensino desta disciplina junto aos seus colegas de turma desde tenra idade, nomeadamente quando era estudante do 1.º ciclo:

> Eu sempre quis ser professora de Matemática [risos]... desde pequenina que eu queria ensinar Matemática, desde ahm... aquela altura que eu entrei ali para a escola e que... eu queria ser professora, quando, quando começam... quando eu deparo-me com aquela situação de ter que tirar dúvidas... ahm de colegas, problemas... eu não tive... eu nunca tive dúvidas do que eu queria fazer... e depois, achava divertido começar a resolver um desafio, um problema, um exercício e conseguir chegar ao fim... ahm, e se não conseguir, andar ali até conseguir chegar ao fim é... isto é que me apaixona mais na Matemática.
>
> *(entrev. temática 1, p. 5)*

Como já referi, Maria José iniciou seus estudos universitários na Madeira, porém veio a concluí-los na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Ao considerar a sua escolha pela Matemática, Maria José faz questão de vincar o seu gosto pelo ramo educacional:

> Quando fui para o curso de Matemática, comecei o curso no Funchal... as pessoas daqui da Faculdade de Lisboa iam lá, depois, por motivos pessoais, vim terminar o curso aqui [em Lisboa] e eu nunca tive dúvidas, eu nunca

> quis ir para a parte científica, eu sempre quis a parte educacional... nunca tive qualquer dúvidas em relação a isso.
>
> *(entrev. temática 1, p. 5)*

A vinda de Maria José para a capital, trouxe, segundo ela própria, uma série de desafios e dificuldades. Um deles foi a necessidade de conciliar o trabalho com os estudos universitários: "eu comecei a trabalhar e estudar" *(entrev. temática 1, p. 6)*. A professora classifica este primeiro ano como "um ano dificílimo" *(entrev. temática 1, p. 8)*, pois estava a dar aulas em uma escola e também frequentava as aulas da faculdade, sendo que estas últimas ocorriam em dois locais distintos: um destinado às disciplinas do ramo científico e outro onde eram cursadas as disciplinas do ramo educacional:

> A rede de transportes estava muito mal na zona onde eu estava a viver... eu levantava-me muito cedo, tinha as aulas do educacional na 24 de julho... comia uma sandes no autocarro, para conseguir depois ir dar aulas... e tinha que apanhar autocarro de outra empresa, obrigava-me a ter dois passes, que era muito caro... de outubro a dezembro, ahm, nós vínhamos da 24 de julho para cá, para cima, para ter aulas aqui no C1 [na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa]... as aulas no científico porque... ahm, na licenciatura pré-bolonha, nós fazíamos as cadeiras do científico aqui e as do educacional, que agora acho que o mestrado é feito aqui no Instituto de Educação, eram feitas, na altura, na 24 de julho.
>
> *(entrev. temática 1, p. 8)*

Segundo Maria José, os primeiros anos na capital foram muito marcantes em termos profissionais. Refere que lecionou Matemática para uma turma que tinha um aluno com problemas do foro mental, também possuia uma direção de turma e já no seu segundo ano, para além das obrigações com a faculdade, teve um acréscimo na carga horária:

> Logo no meu primeiro ano... com 19 anos... [tive] outro aluno com dificuldade do foro mental... com problemas do foro mental mesmo... ahm... e uma direção de turma... e uma direção de turma... muito complicado este ano... no ano seguinte, fiquei com, não com um horário, mas com um horário e meio, portanto em termos de horas... era uma sobrecarga tremenda para um professor... eu fazia a faculdade, dava as aulas.
>
> *(entrev. temática 1, p. 9)*

Apesar de todas as dificuldades enfrentadas nesse início profissional, Maria José reconhece o quanto aprendeu com estas situações novas: "tu chegas para ensinar, mas vais para aprender", "tu aprendes coisas que tinha se esquecido, tu aprendes a lidar com pessoas". Ao refletir sobre esse início profissional, evidencia a necessidade do professor ser empático, mas também ser, em algumas situações, disciplinador e refere que "para ensinar é preciso aprender a ensinar" *(entrev. temática 1, p. 9)*:

> Aprendes a lidar com adultos... com pais, com funcionários, e aprendes a lidar com adolescentes que é uma coisa difícil... porque é preciso ter, ser empático... é preciso ser empático... e ser empático no momento certo e ao mesmo tempo também... em algumas vezes, ser disciplinador em outras... e é preciso ensinar... e para ensinar é preciso aprender a ensinar.
>
> *(entrev. temática 1, p. 9)*

Ainda refletindo sobre o seu início profissional, Maria José menciona também a importância do auxílio dos colegas com mais experiência: "é preciso que as pessoas que nós apanhamos à nossa volta e com mais experiência do que nós... nos passem ahm... bons caminhos, bons exemplos" e também faz referência à valorização do professor: "o professor quando é valorizado também se sente bem" *(entrev. temática 1, p. 10)*. No tocante aos auxílios recebidos, menciona diretamente uma professora que estava a frente do grupo de Matemática, a quem compara com sua professora do 2.º ciclo:

> Mas a professora que estava a frente do grupo de Matemática era uma pessoa muito parecida com a minha professora do 2.º ciclo... e uma pessoa que teve muita atenção com o fato de eu vir de uma zona diferente, de estar em um meio grande quando vinha de um meio mais pequeno... fui parar em uma escola multiracial e ela explicou-me tudo... como lidar com pessoas.
>
> *(entrev. temática 1, p. 9)*

Passados alguns anos de sua chegada à Lisboa e já estando financeiramente mais estável, Maria José refere que resolveu parar por um ano de dar aulas, tendo em vista dedicar-se exclusivamente ao curso de Matemática, pois, na altura, ainda lhe faltavam algumas disciplinas. Uma vez realizadas estas disciplinas restantes, poderia então ir para estágio no ano seguinte e assim o fez:

> Houve um ano que eu parei, queria fazer estágio, faltavam-me algumas cadeiras para eu acabar o curso e eu decidi que... e na altura eu estava financeiramente... conseguia me aguentar um ano... ahm e então parei para poder fazer, para poder dedicar-me só às disciplinas que me faltavam aqui na faculdade para poder conseguir ir para estágio no ano seguinte e consegui... fiz estas disciplinas todas que me faltavam, no ano seguinte fui para o estágio.
>
> *(entrev. temática 1, p p. 12-13)*

Mesmo já possuindo uma experiência considerável em sala de aula, o período de estágio parece ter sido um momento muito marcante para Maria José, a ponto de suscitar mudanças na sua forma de ensinar: "até certas coisas eu passei a fazer diferente depois daquele estágio que eu tive"; "cheguei ao estágio e aprendi imenso" *(entrev. temática 1, p. 13).* Faz questão de deixar muito claro que o professor sempre tem algo a aprender e que, especialmente aquando do período formativo do estágio, não se pode ir com a convicção de que já se sabe tudo, mesmo já possuindo uma certa exeperiência no ensino:

> Portanto podia ter já dado aulas, estar habituada ao trabalho de escola, quando vai ao estágio, não vai com convicção de que já sabe tudo... não, continua a ter aprendizagem, tu me dizes assim hoje... tu já estás com 50 anos, já estás com 31 anos no ensino e já antes disso, deste aula no primário, tens mais alguma coisa para aprender? Eu digo tenho, totalmente, totalmente.
>
> *(entrev. temática 1, p. 15)*

Sobre o período de estágio, Maria José ressalta o papel importante desempenhado por uma de suas três orientadoras, destacando que de todos os coordenadores e chefes que teve ao longo de 31 anos, ela "foi a pessoa que deixou mais marcas, que foi muito marcante para mim". Essa orientadora, segundo refere, possuia uma "forma de ensinar própria, diferente" em que um grande espaço era dado ao aluno: "ela incentivava aquilo do porquê (...) incentivava ao raciocínio, ao pensamento crítico" *(entrev. temática 1, p. 15)*. Devido a todo este ambiente, na sua visão, foi possível experimentar muitas novidades no estágio, onde destaca o uso de jogos no ensino e também o uso da calculadora gráfica.

> Depois acabamos de desenvolver na escola coisas muito novas na altura... como por exemplo, fizemos uma sessão sobre a importância de se utilizar jogos no ensino (...) na altura, eu comprei uma calculadora gráfica e aprendi a trabalhar com ela e então comecei a utilizar nas aulas.
>
> *(entrev. temática 1, p. 14)*

Ainda considerando o período em que esteve em estágio, Maria José também destaca a importância dos momentos de reflexão e menciona como uma situação muito enriquecedora, e marcante para si, o fato de ter tido a oportunidade de trabalhar com o professor que na altura era o coordenador dos estágios: "e nós tínhamos várias reuniões com o professor Paulo Abrantes, que também é outra situação enriquecedora e que me marcou imenso" *(entrev. temática 1, p. 14).*

Convidada a refletir sobre quais mudanças e evoluções reconhece ao longo do seu percurso profissional, refere, de imediato, o gosto que adquiriu ao longo dos anos com o trabalho com projetos, com a resolução de problemas e com a modelação: "de trabalhar Matemática com projetos, com a resolução de problemas, com problemas ligados ao real, com modelação" *(entrev. temática 1, p. 16)*. Porém, tendo em vista essa sua predileção, indica também uma certa contrariedade com o programa de Matemática que está atualmente em vigor, não vendo nele um grande estímulo para o trabalho nestes campos:

> Este programa, que foi instituído, foi totalmente contra isso... contra o que é o trabalho de projeto, o desenvolvimento do espírito crítico, de reflexão, de ahm, o desenvolvimento do raciocínio, a modelação, de trabalhar a Matemática para a experiência prática, para a vida real... ahm... eu vejo matérias que vão apenas para cálculo e que não se faz uma ligação, os alunos desanimam, desmotivam porque não conseguem ver a aplicação.
>
> *(entrev. temática 1, p p. 16-17)*

Conforme é possível depreender a partir do excerto da entrevista anterior, Maria José, para além de enfatizar que o programa atual não contempla algo que compreende importante dentro do ensino da Matemática, também faz uma referência à desmotivação e ao desânimo dos alunos como uma consequência imediata disso. Considera ser preciso “haver alegria na Matemática, foi isto que me passaram e é isso que eu gosto de passar” *(entrev. temática 1, p. 17)* e vinca novamente o seu gosto com o trabalho com projetos:

> Eu adorei os anos em que eu ensinei com trabalho de projeto... eh pá, eu usei problemas, eh pá... era tão... era um ensino em que se aprendia os conteúdos, mas aprendia-se mesmo e não era preciso memorização, mecanização... aprendia-se e aprendia-se de forma que ahm... em que se gostava do que se estava a aprender.
>
> *(entrev. temática 1, p. 17)*

Por fim, Maria José menciona a necessidade de “haver alguma serenidade” por parte do professor e que busca trabalhar “segundo aquilo que me é dado” e para isso, realça a importância de suas experiências e vivências anteriores como docente: “então eu vou buscar a experiência que tenho de trás para lecionar essas matérias” *(entrev. temática 1, p. 18)*.

Ao falar da sua experiência, Maria José aproveita para abordar uma faceta que possui, segundo ela própria, “desde miúda”, que é justamente a questão de seu dinamismo. Refere que não consegue ficar satisfeita só com o trabalho da escola, necessita “de algo mais” e justifica esse “algo mais” não como uma simples questão de atualização profissional, mencionando que tal necessidade se relaciona com “encher o espírito... encher a alma” *(entrev. temática 1, p. 24)*. Assim, diz sempre buscar a participação em conferências, congressos e seminários e, em sua visão, estes momentos também servem para se buscar apoios e estabelecer parcerias, inclusive com pessoas de universidades, para realizar projetos com suas turmas ou então na sua escola.

Quanto à incidência, Maria José destaca que as formações, congressos e seminários em que busca participar estão sempre relacionados com a Matemática ou então com a tecnologia: “fui fazendo formações em tudo e mais alguma coisa, tudo ligado à

Matemática ou à tecnologia" *(entrev. temática 1, p. 25)*. Como uma consequência desse seu dinamismo, refere que muitos projetos e parcerias já estão em andamento e que envolvem suas turmas ou mesmo toda a escola. Destaca uma parceria desenvolvida com uma professora universitária, onde realiza um trabalho envolvendo geometria dinâmica com alunos do ensino secundário que participam de atividades no laboratório de geometria intuitiva e interativa de uma Universidade de Lisboa:

> Eu fiz formação na minha área e na área das tecnologias... eu fiz uma série de formações em Geogebra e portanto [a professora da universidade] convidou-me a trabalhar com ela ali na, no laboratório, de vez enquando, quando recebem lá turmas do secundário, eu vou dar apoio... e resolvemos problemas utilizando o Geogebra, o que é muito engraçado.
>
> *(entrev. temática 1, p. 25)*.

Numa tentativa de buscar explicitar melhor esse seu dinamismo, traduzido em uma busca constante por parcerias e novidades e o que isso representa para si em termos profissionais, Maria José resume em uma frase que, apesar de curta, procura traduzir esse seu sentimento: "é como se fosse o sal para a minha sopa" *(entrev. temática 1, p. 29)*. Ademais, enfatiza que esse seu gosto em aprender, para além de ser uma constante ao longo da vida, é também a influência que teve de uma professora, que mesmo não sendo professora de Matemática, deixou marcas importantes:

> Eu ia só te dizer que não foram só os professores de Matemática que me marcaram... há uma professora que apesar de não ter sido de Matemática, foi uma pessoa que também deixou algumas marcas... também pelo seu dinamismo... eu acabo por ser uma pessoa dinâmica em sala de aula, dinâmica em atividades, dinâmica no conhecimento, eu gosto de aprender... e isso manteve-se sempre ao longo de minha vida... de eu andar sempre em palestras, em atividades... eu preciso disto, eu preciso disso.. é como se fosse o sal para a minha sopa... ahm... foi uma pessoa de Físico-Química que eu tive no secundário, que era uma pessoa que estimulava imenso os alunos... todos aqueles professores que nos elevam e depois marcam-nos e essa, assim... essa pessoa foi uma pessoa que me marcou imenso.
>
> *(entrev. temática 1, p p. 29-30)*

Questionada sobre o que menos gosta no ensino, Maria José foi peremptória: "da parte burocrática" *(entrev. temática 1, p. 26)*. Em seguida, buscando explicitar mais o seu ponto de vista, refere que um tempo substancial do trabalho do professor é gasto com atividades de cunho administrativo e dá a entender que esse tempo seria melhor aproveitado se fosse dedicado ao trabalho com os alunos:

> Eu detesto ter que preencher papéis e cada vez nós temos mais papéis para preencher e isto é uma coisa horrível de se dizer [risos]... a sério, a sério [risos]... acho que... há papéis, acho que há burocracia a mais e que perdemos tempo, tanto tempo com burocracia que podia ser dedicado aos alunos.
>
> *(entrev. temática 1, p. 26)*

Ao refletir sobre o que mais gosta no ensino, Maria José é novamente assertiva: “aquilo que eu mais gosto... é de estar com os meus alunos, sem dúvida”. Considera muito animador para um professor conseguir “tocar de alguma forma” os seus alunos e também de ver neles “aquele crescimento” *(entrev. temática 1, p. 26)*. E para ilustrar o seu ponto de vista faz uso de um exemplo ocorrido em sala de aula há poucos dias:

> Eu, há dias, saí de uma sala, [os alunos] vieram cá para fora... achei que não iam ligar nenhuma para isso... e depois, estavam lá fora... eu fiquei na sala e eles vieram cá para fora... eles estavam cá fora, ainda não tinham ido embora... estavam cá fora a discutir um problema de sala de aula... um professor de Matemática, ver os alunos cá fora, sem irem embora a discutir um problema da aula, a discutir resoluções... tu fizeste assim, eu fiz assado, então é assim, não sei quê... podia ser assim, podia ser assado... e depois irem ter conosco... a aula já tinha terminado... é ótimo.
>
> *(entrev. temática 1, p. 26)*

Para ilustrar essa sua predileção em “estar com os alunos” e o quanto isso é importante para si, Maria José refere que ficou, recentemente, por um período de três anos fora da sala de aula, ocasião em que foi destacada para outras funções extra-docentes. Refere que quando comunicou essa sua decisão aos seus colegas, diz lembrar-se perfeitamente das palavras de um colega seu, mais experiente, e que agora já está reformado, que teria dito na altura: “eu sempre estive a olhar para ti e vi-te como professora e sempre rodeada de alunos e ligada ao ensino, tu tens a certeza de que não vai sentir a falta disso?” *(entrev. temática 1, p. 27)*.

Por fim, Maria José não só assume que sentiu muita falta do contato com os alunos durante estes três anos como chega ao ponto de afirmar de forma categórica: “a paixão da minha vida é a Matemática”. No entanto, e em ato contínuo, acaba por temperar e retificar essa sua afirmação, dando um relevo especial para a componente do ensino: “a paixão da minha vida é ensinar Matemática”*(entrev. temática 1, p. 27)*.

8.1.2 O contexto escolar

Durante os mais de 30 anos em que Maria José exerce a atividade docente, os últimos 22 foram exercidos na escola atual. Assim, considerando o tempo total de docência, mais de dois terços foram exercidos nessa escola, estando nela desde que se tornou efetiva após o término de seu estágio. Entretanto e conforme já mencionado,esteve afastada de suas atividades docentes da escola durante os últimos três anos. Contudo, deu a entender que apesar de estar a serviço de uma outra instituição, não se afastou totalmente da escola e do contato com os colegas: “durante os três anos, saíram e entraram pessoas, mas eu conheço as pessoas todas” *(entrev. temática 1, p. 23)*.

Ao longo de todas as nossas conversas, Maria José sempre se mostrou muito à vontade ao falar da sua escola, deixando sempre transparecer uma certa satisfação ao fazê-lo e também demonstrando um aprofundado conhecimento da estrutura escolar e das pessoas que aí trabalhavam. Esse seu conhecimento sobre a escola transcendia os níveis em que trabalhava e também à própria escola, tanto que ao retornar depois de três anos, assumiu a função de coordenadora de projetos. Ademais, essa coordenação de projetos não se limitava à escola, mas estendia-se a todo o agrupamento escolar, que compreende 5 escolas:

> Conheço os projetos todos... este ano, este ano entraram 140 projetos, alguns deles são mais atividades do que projeto... mas sei o que está a ser desenvolvido nas escolas todas... ahm, não consigo estar presente para... para assistir a todos, é impossível, pois eu tenho o meu horário... mas eu conheço as pessoas, sei que... quais são as pessoas mais dinâmicas, as pessoas mais eficazes, mais... ahm... conseguem levar o projeto como deve ser, quais são aquelas que estão apenas com uma atividade a que chamam de projeto... mas não é projeto, é atividade... sei também aquelas que querem, que estão apenas a fazer atividade este ano porque convém ou porque... ou aquelas que sistematicamente todos os anos entram em atividades. *(entrev. temática 1, p. 23)*

Esse estar à vontade não se limitava a falar sobre a escola, mas também o fato de nela permanecer. Esse último aspeto foi bastante perceptível nas duas oportunidades em que estive no ambiente escolar na companhia de Maria José. Na primeira oportunidade, mostrou-me muitas das dependências físicas da escola, inclusivamente um espaço dedicado às atividades de reforço escolar [no momento em que essas atividades decorriam] e apresentou-me a um grande número de colegas a que íamos encontrando durante os nossos deslocamentos. Não dei conta de reter os nomes, pois foram muitas pessoas apresentadas. No segundo encontro, conforme já mencionado, apresentou-me as dependências da escola que estavam a receber uma mostra de trabalhos artísticos dos alunos.

Nessas duas oportunidades, a forma como se relacionava com os colegas professores e demais funcionários é digna de nota. Observei, enquanto nos dirigíamos para o local da entrevista, um funcionário a consertar uma mesa de tênis em um dos espaços de recreação da escola e Maria José foi logo dizendo: “esse é o fulano... ele também é pai de uma aluna nossa” e chegou a nomear a aluna. Ao final do segundo encontro e já ao sair, após a nossa segunda entrevista temática, a professora deixou-se estar em conversa com outros colegas junto ao portão da escola. Já era noite e a escola estava a encerrar. Aproveitei a oportunidade para lá permanecer e captar esse ambiente vivido pela professora junto de seus colegas e assim o fiz. A conversa que mantiveram foi muito agradável e a ela se somou aquele funcionário antes referido. Durante a conversa e ao se referir a uma jovem funcionária que lá estava, Maria José foi logo dizendo “essa é uma de nossas artistas... ela é fadista”. No começo achei que se tratava de uma brincadeira da professora, entretanto a própria funcionária afirmou ser verdade e que, inclusivamente, já havia vencido alguns concursos televisivos, chegando a gravar alguns álbuns e, ao final, a funcionária confidou-nos a todos para uma apresentação que faria naqueles dias. Não assisti à apresentação da funcionária fadista e não pude aferir o seu talento, mas pude presenciar, isso sim, a forma envolvente e cúmplice com que Maria José se relacionava com os seus colegas no ambiente escolar.

Quando instada a fazer uma caracterização da escola, Maria José não demora muito a responder e caracteriza-a como sendo “uma escola extremamente organizada... muito organizada”. Ao procurar explicar essa caracterização, refere que isso ocorre “por causa das pessoas que aqui passam... em termos de organização... por parte da estrutura, da direção... é uma escola muito organizada”. Outra característica que apresenta, para além da organização é também o dinamismo “é uma escola muito dinâmica” *(entrev. temática 2, p. 20).* Para justificar essa segunda característica, faz referência aos projetos nas mais variadas áreas desenvolvidos pela escola:

> É uma escola muito dinâmica, basta pensar nos projetos em que a escola participa, em concursos e tudo mais... ahm... como eu te disse, como coordenadora de projetos, este ano temos 140 e tal projetos... ahm e isso é muito forte... ahm, temos projetos na área das artes, que é uma área muito forte... temos projetos na área das ciências... temos projetos nos cursos

> profissionais... temos projetos no ensino especial... em tecnologia. *(entrev. temática 2, p. 20)*

Outro elemento que, segundo a professora, joga um papel importante no dinamismo da instituição é a grande quantidade de concursos que a escola tem vindo a ganhar: "temos ganho imensos concursos". Como exemplo cita: "uma aventura literária também já ganhamos"; "ganhamos no ano passado o concurso do Gulbekian, foram 2500 euros"; "a nível de concurso de leitura, que vai a nível nacional também temos ganho", "a nível da ecologia, ganhamos imensas coisa, ganhamos medalhas verdes" *(entrev. temática 2, p. 21)*:

> Portanto há um dinamismo muito forte... ah, temos o grupo de teatro... que ganha também prêmios, neste momento tenho uma colega que se reformou e que é professora voluntária... e continua a trabalhar para a escola...ahm... ali [aponta para um canto da sala] há um prêmio que também ganhamos. *(entrev. temática 2, p. 22)*

Maria José mostra-se muita gratificada pelo trabalho que realiza na escola e refere que "há muito reconhecimento". Entretanto, chama a atenção que esse dinamismo e essa organização da escola não se deve somente aos professores: "e não são só os professores, temos também os funcionários". Menciona que os próprios funcionários enfeitam os seus pavilhões e também outras salas. Pude ver um bonito arranjo natalino na sala dos professores que, segundo referiu, foi confeccionado por uma funcionária: "se passares por aqui na altura do Carnaval, tu vais ver o trabalho que os funcionários fazem... hoje não dá, mas podes ver o trabalho que os funcionários estão a fazer aí pelos pavilhões" *(entrev. temática 2, p. 22).* Em relação a este trabalho de ornamentação da escola realizado pelos funcionários, refere que estes "não fazem só isso... as árvores de Natal, eles também fazem com coisas recicláveis" *(entrev. temática 2, p. 22)*:

> Há uma lareira, que não é uma lareira, mas um cartão pintado com uma folha de celofane e umas luzes por trás... eu tirei a fotografia porque foi a forma da funcionária enfeitar o pavilhão dela, porque cada um enfeita o seu pavilhão... mas não vão comprar coisas, elas fazem as coisas para enfeitar... na altura do Carnaval, elas... ahm... elas trabalham um tema.
>
> *(entrev. temática 2, pp. 22-23)*

Na sequência do relato sobre os funcionários, Maria José também cita o trabalho desempenhado pela associação de pais da escola. Na sua visão, esta associação é muito "empenhada" e é responsável pelo projeto das árvores com renda, que sempre é realizado na época natalícia. Pude comprovar a beleza de tais ornamentos também *in loco*, dado que a segunda entrevista foi realizada antes do Natal. Ademais, lembra a professora, a associação também realizou no último ano uma atividade teatral com uma peça que promovia a interculturalidade, uma das marcas da comunidade educativa que refere. Essa peça teatral que focava a interculturalidade, segundo Maria José, foi dinamizada por uma mãe de aluno, que também era atriz, em uma turma que possuía 17 nacionalidades e foi assistida por todas as escolas do agrupamento. Por fim, tendo em atenção a participação dos pais na escola, refere que isso "depende das turmas", tendo turmas com elevada participação dos pais e outras nem tanto.

8.2 O ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário (Matemática A)

Ao ser questionada sobre a pertinência ou não da presença de tópicos de Cálculo Diferencial no currículo de Matemática A do ensino secundário, Maria José revela, de modo assertivo, concordar com esta inserção. Refere, inicialmente, que essa presença parece ser razoável dado que os alunos de Matemática A "são alunos que têm como perspetiva ir para cursos de engenharia ou medicina" e acrescenta que "em Portugal, esses cursos têm no currículo universitário disciplinas de Cálculo" *(entrev. temática 2, p. 1)*.

Na sequência dessa sua resposta, a professora confere um caráter de *preparação* que essa disciplina deve, idealmente, assumir no ensino secundário tendo em atenção o prosseguimento dos estudos e também tendo em vista as elevadas taxas de reprovação nesta área nos cursos universitários. Contudo, lembra que "em uma primeira abordagem" a ser dada à disciplina, os conteúdos devem ser introduzidos "com calma" para que fiquem "bem assentes" *(entrev. temática 2, p. 1)* e para que os alunos tenham, assim, uma "base muito sólida" *(entrev. temática 2, p. 2)*:

> Tem que ser abordado com muito cuidado e com muita calma... o professor que está a lecionar isso no secundário precisa ter esse conhecimento que... ahm... os conteúdos têm que ser introduzidos com calma... e que têm que ficar bem assentes porque serão mais tarde trabalhados pela maioria desses alunos que prosseguirem o que, o que é regular... que é ir para a universidade em cursos de engenharia, de medicina.
>
> *(entrev. temática 2, p. 1)*

Maria José também refere que a presença de tais tópicos no ensino secundário (Matemática A) está relacionada "não só com aquilo que eles (os alunos) precisam para mais tarde" *(entrev. temática 2, p. 7)*, mencionando que esse conhecimento também "faz parte da cultura geral do indivíduo" *(entrev. temática 2, p. 8)*. Outro ponto de destaque que refere é o fato de se ter em atenção o curso ao qual os alunos pertencem, principalmente na hora do professor escolher problemas relacionados com o Cálculo Diferencial:

> A parte dos problemas, eles conseguem resolver problemas se tu explicares qual é o significado da derivada no contexto daquele problema, pronto... e há vários problemas, há problemas com distâncias, há problemas com... da Economia, da Fisico-Química, tem uma infinidade de problemas que tu podes utilizar... é preciso que o professor... os manuais têm imensos problemas, podes usar os problemas dos manuais, problemas de exames ou então tu próprio tens que fazer uma seleção com um problema... com um problema quase de cada área... por quê?... porque eu estou com a turma de Economia, mas eu posso estar com uma turma de ciências e tecnologia... se eu estiver com uma turma de ciências e tecnologia no ensino secundário, eu vou ter alunos que vão para a saúde, que vão para as engenharias... mas engenharias, tem imensas, tem Mecânica, tem Eletrotécnica, tem Informática, tem engenharia do Ambiente, tem... e na própria Economia tem Economia, tem Gestão, tem Contabilidade.
>
> *(entrev. temática 2, p. 8)*

8.2.1 Dificuldade dos tópicos de Cálculo Diferencial (CD) para os alunos

Quando confrontada com esta questão, Maria José começa por referir que "todas as situações que são um bocadinho mais abstratas são mais complicadas". Menciona que, dentre todos os tópicos de Cálculo Diferencial lecionados, o mais difícil para os alunos é, na sua perspetiva, a "definição de derivada em um ponto" *(entrev. temática 2, p. 7)*:

> Eles têm mais dificuldade em calcular, por exemplo, a derivada em um ponto... a taxa média de variação, sem problemas... entender a derivada em um ponto como um limite quando x se aproxima de um certo valor é sempre muito complicado... já os limites é uma matéria muito abstrata (...) A definição de derivada é... é a parte mais... ahm... difícil... depois, quando vamos para a equação da reta tangente, eles conseguem fazer, portanto, a parte da mecanização, de escrever o y igual a... e aquele m é a derivada naquele ponto... agora, agora perceber o que que é o declive, é outra situação... mais, entender graficamente onde é que há a derivada e onde é que não há a derivada é outra situação também, as vezes, difícil.
>
> *(entrev. temática 2, p. 7)*

É importante aqui destacar que ante a esta resposta de Maria José, nomeadamente que a parte relativa à definição de derivada de uma função em um ponto é um dos assuntos mais sensíveis e onde os alunos apresentam, na sua visão, maiores dificuldades, decidi que as observações das aulas deveriam justamente incidir sobre esta temática. A professora inclusivamente chegou a sugerir que a incidência das minhas observações ocorresse neste tópico. E foi justamente o que aconteceu. Abordo a parte relativa às aulas de Matemática envolvendo o Cálculo Diferencial na próxima seção:

> Então, pronto... é porque se calhar, tens que estar mesmo presente... naquela aula que eu der o conceito de derivada, eu tenho esta noção... espero estar errada... espero estar errada porque com o anterior programa já aconteceu isso... ahm... e portanto eu tenho sempre um grande cuidado ao lecionar isso... essa parte, de eles perceberem o que é a derivada em um ponto... fazem imensas perguntas e eu não sei se tem a ver com a abstração, como conseguir abstrair isso... porque é um conceito um bocadinho mais abstrato... é um conceito mais abstrato, não deixa de ser um conceito mais abstrato.
>
> *(entrev. temática 2, p. 12)*

Maria José parece relacionar a dificuldade dos alunos em perceber o conceito de derivada com o fato de "se conseguir abstrair" e também com a questão da maturidade dos alunos: "É pá... maturidade, maturidade... foi o que eu disse há bocado sobre aquela difculdade no perceber o conceito de derivada em um ponto" *(entrev. temática 2, p. 11)*. Na sequência, buscando ser mais específica e assim clarificar esse seu posicionamento, acrescenta que "é muito complicado... é a capacidade... é a maturidade do aluno nesta altura é muito importante" *(entrev. temática 2, p. 12)* e fala da sua turma de 11.º ano:

> Eles [os alunos] tiveram o 10.º ano que foi o primeiro ano a seguir ao 3.º ciclo... é uma adaptação... agora começaram o 11.º ano, sendo que isto estava ainda muito assim em alto relevo... e apanharam um balde de água fria... porque perceberam que este é um trabalho muito a sério com a Matemática A... e agora a partir do meio do mês de novembro começaram a ali com mais afinco e portanto eu disse vamos inserindo este ritmo... porque eu sei, espero sempre no secundário, a dada altura, eles começam... ahm... a entrar nos carris e a perceber como é que vão... porque mais vale eu perder algum tempo agora e mostrar que eles realmente têm que trabalhar, que convém que aprendam... para depois poupar tempo mais à frente.
>
> *(entrev. temática 2, p. 13)*

Conforme referido anteriormente, Maria José considerava a introdução da derivada em um ponto a parte mais difícil para os alunos no trabalho com os tópicos de Cálculo Diferencial. Entretanto, após o período de lecionação, isso parece não ter ocorrido. O fato da professora ter buscado uma aproximação entre os aspetos gráficos e algébricos (que procuro dar conta mais adiante) na lecionação deste tópico parece ter contribuído para o bom entendimento dos alunos. Entretanto, uma dificuldade sentida pelos alunos ocorreu na parte relativa ao trabalho com os *limites*. Assim, já ao final, considera que "a noção de limite tem que estar bem sabida" para que ocorra uma boa aprendizagem de Cálculo Diferencial.

Cumpre destacar que a recolha de dados compreendeu duas partes: i) na primeira parte, os dados foram recolhidos antes do confinamento provocado pelo COVID-19 e envolveu duas entrevistas temáticas (a primeira ocorrida no Instituto de Educação e a segunda, na escola) e 4 aulas presenciais (de 50 minutos cada), sendo 2 delas sobre trigonometria (que tiveram lugar na escola) e as outras 2 envolvendo uma oficina sobre o Geogebra (que tiveram lugar no laboratório de Informática de uma universidade de Lisboa); ii) na segunda parte, os dados já foram coletados no decurso desse confinamento e envolveu todas as aulas sobre tópicos de Cálculo Diferencial (5 aulas síncronas), assim como todas as entrevistas de reflexão. Apresento a seguir um excerto da penúltima aula do ano (já em um contexto de pandemia), onde a professora e os alunos fazem uma apreciação geral das aulas de Matemática. Na oportunidade, a dificuldade em relação aos limites foi mencionada, espontaneamente, por um aluno. Na parte final do excerto a professora dá a entender do constrangimento em relação ao tempo:

> Aluno: Professora, para mim... esta matéria até está a ser razoável... a taxa de variação, pronto... está a ser razoável... mas, por exemplo... a parte dos limites, houve uma parte em que eu não percebi nada ou quase nada porque era complicado.
>
> Aluna: Eu também.
>
> Aluno: Perceber através daqui... ou isto parava ou o computador ia abaixo, várias coisas.
>
> Professora: Mas treinaste...
>
> Aluno: Sim, sim, treinei.
>
> Professora: Treinaste as indeterminações? Treinaste... ahm... viste as aulas síncronas? Precisas de fazer mais revisão? Precisas que eu tire mais dúvidas? O que é que se passou aí nessa parte?
>
> Aluno: Eu assisti a todas as aulas síncronas... eu não faltei nenhuma...
>
> Professora: Não, estou a dizer assíncronas... foste ver os resumos das assíncronas?
>
> Aluno: Ahm... sim, sim.
>
> Professora: Até me arranjaram um resumo, antes de...

> Professora: Eu sei, eu sei... estou a dizer aqueles que eu te passei lá na classroom... não é muito fácil.
>
> Aluno: Eu não estou a falar das assíntotas... as verticais e horizontais eu percebi...
>
> Professora: Não, não... eu não estou a falar das assíntotas... estou a falar das aulas que estão lá com o material para as aulas as-sín-cro-nas... eu tenho que partilhar aqui para perceberes.

A professora então começa a partilhar o ecrã. Também menciona que a partir daquele momento quem quisesse poderia abandonar a aula e diz: "O computador foi abaixo uma vez, não foram muitas vezes." Passa então a mostrar os materiais, tais como as vídeoaulas disponíveis na plataforma. Quando a professora partilha o ecrã, o aluno se manifesta:

> Aluno: Eu sei do que a professora está a falar... eu vi a maior parte delas... eu vi, por exemplo... mas...
>
> A professora então mostra os vídeos sobre limites e questiona:
>
> Professora: Viste todos?
>
> Aluno: A maioria.
>
> *(registo de aula, 24 de junho)*

Aquando da nossa entrevista de reflexão sobre esta aula, solicitei a Maria José que refletisse sobre essa passagem em que o aluno referiu ter encontrado dificuldades em relação aos limites. Na sua reflexão, refere que "sem o exercício do cálculo de limite, claro que não compreende" (entrev. reflexão 4, p. 2) e menciona que o aluno em questão, diferentemente do que havia dito, não realizou muitos dos exercícios solicitados, dando a entender, assim, a necessidade (em face aos constrangimentos de tempo e das aulas serem a distância) de um maior trabalho autónomo dos alunos:

> Apesar de ter ali aquele material [as videoaulas]... estás a ver que o aluno acha que viu alguma coisa, mas ele não viu, quase não viu nada... quando muito viu ponto aderente e mais nada... a nível de exercícios, eu tenho ali na classroom um relatório do que ele fez... e ele não fez nada, não há quase trabalho autónomo nenhum na parte dos limites... e quando ele diz "ah, eu fiz", não fez, fez um exercício em 10 ou em 15.... e sem o exercício do cálculo de limite, claro que não se compreende.
>
> *(entrev. reflexão 4, pp. 1-2)*

8.2.2 O essencial para uma boa aprendizagem de Cálculo Diferencial

Na primeira oportunidade, por ocasião de nossa segunda entrevista temática, ao ser questionada sobre o que considerava ser essencial para uma boa aprendizagem do Cálculo Diferencial no ensino secundário, Maria José identificou logo que as questões relacionadas com as aplicações práticas deveriam, idealmente, ocupar um lugar de centralidade e que o seu desejo seria trabalhar nesta perspetiva "com as aplicações práticas e acho que seja... seria sempre ali a perspetiva" *(entrev. temática 2, p. 10)*:

> Não basta estar ali a ensinar aquilo, tem que ver para que que aquilo serve... eu considero que é preciso explicar para que que eu estou a calcular a derivada daquela coisa... sem eles perceberem no contexto do problema... eu tenho uma caixa, quero detrminar o volume máximo da caixa, por que que eu vou derivar? (...) Tem que explicar mesmo... para que... por que derivar?... por quê achar a primeira derivada?
>
> *(entrev. temática 2, p. 11)*

Entretanto, após lecionar a temática e ser confrontada com alguns cosntrangimentos, entre os quais a questão de não ter tido o tempo que julgava suficiente para abordar o assunto da forma como desejava, Maria José refere não ter conseguido chegar até à parte das aplicações e da resolução de problemas: "eu tenho pena, imensa pena de não chegar à resolução de problemas" *(entrev. reflexão 4, p. 2)*. Na visão da professora, "com a plicação da derivada à resolução de problemas práticos, isso tudo torna-se muito mais interessante" *(entrev. reflexão 4, p. 2)*.

Em sua visão e parecendo não se referir somente aos tópicos de Cálculo Diferencial, Maria José reflete sobre o papel dos alunos. No seu entendimento, os alunos "têm que desenvolver a maturidade, o raciocínio matemático, têm que aprender a pensar a Matemática" e refere ainda que estes devem "aprender Matemática sem ser só com a perspetiva de um exame" *(entrev. temática 2, p. 15)*. Após já ter lecionado a temática e novamente refletindo sobre o que considera ser essencial para a aprendizagem do Cálculo Diferencial, concentra-se então no que idealmente deve ser desempenhado pelo professor no ensino da temática.

Considerando o papel do professor no ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário, Maria José refere inicialmente três aspetos que em sua visão são muito importantes e que devem ser abordados pelo professor: (i) *A parte gráfica/visual*; (ii) *A parte algébrica* e (iii) O trabalho com um *exemplo prático*. Mas logo em seguida, refere ainda um quarto aspeto, nomeadamente a *resolução de problemas*. Quanto aos dois primeiros aspetos, defende (e cita o próprio exemplo) que o professor não deve se limitar somente à parte algébrica, nem tampouco ficar apenas com a parte visual. Defende isso para que o aluno tenha a capacidade de “passar de um para o outro” *(entrev. reflexão 4, p. 2)*:

> Não me limitei a fazer só o cálculo ali, algébrico... fui buscar ali... ahm... uma folha dinâmica, usar a folha Geogebra para eles visualizarem... achei que aquilo era extremamente importante ter algo dinâmico... porque dizer isso se aproxima de... algo que se aproxima de... é que eu acho que às vezes [risos] nem todos têm a maturidade de raciocínio de entender esse conceito... e etc., às vezes, a visualização, a parte visual... ahm... em vez de estarmos somente a trancrever como eu fiz com o quadro interativo, coloquei o limite quando *x* tende para *x* zero de *f* de *x* menos *f* de *x* zero... o que é muito importante, nós temos que também passar para a parte abstrata... esses dois aspetos... têm que lá estar... o que eu tenho é que fazer com que o aluno visualize e ao mesmo tempo que cresça... vá para a parte abstrata, para o raciocínio abstrato e portanto tem que ter atenção a essas duas partes, não podes só te deter à parte abstrata e também não pode só estar a trabalhar o raciocínio visual... e o aluno tem que passar de um para o outro, pronto.
>
> *(entrev. reflexão 4, p. 2)*.

Após falar sobre essa interação entre os aspetos gráficos e algébricos, a professora defende o trabalho com um exemplo “depois fazer o exemplo... o exemplo prático” e exemplifica: “vou pegar num exercício qualquer, num *f* de *x* igual a 3 *x* ao quadrado e agora vou derivar... já não estou na parte abstrata de fazer a demonstração teórica, que é mesmo aplicar à regra em uma função qualquer, pronto... isso também é necessário” *(entrev. reflexão 4, p. 4)*. A seguir ao exemplo prático refere que, idealmente, deve ocorrer um trabalho de resolução de problemas.

> E depois é a parte dos problemas, eles conseguem resolver problemas se tu explicares qual é o significado da derivada no contexto daquele problema, pronto... e há vários problemas, há problemas com distâncias, há problemas com... da Economia, da Fisico-Química, tem uma infinidade de problemas que tu podes utilizar.
>
> *(entrev. temática 2, p. 8)*

Uma última questão referida pela professora, esta mais transversal e não específica ao ensino do Cálculo Diferencial, mas que também contribui, segundo sua visão, para uma boa aprendizagem é o *bom relacionamento entre professor e alunos*. Refere que este relacionamento entre alunos e professor é “uma mais valia” no processo de ensino e aprendizagem. Procurando fazer-se entender, cita o exemplo da sua turma de 11.º ano, referindo que essa boa relação permite um “outro tipo de trabalho”, nomeadamente a realização de aulas extras fora do período letivo. Ao comentar sobre estas aulas, sublinha que não são obrigatórias e dá a entender que isso só seria possível através do bom relacionamento entre as partes *(entrev. reflexão 4, p. 2)*:

> Eu acho que o meu relacionamento entre professor e aluno é uma mais valia... e permite um outro tipo de trabalho porque, pronto... o definir uma aula que não é uma aula... no ano passado eu já fiz isso no final do 10.º ano... já não estávamos em período da aula, fiz uma marcação para fazer um resumo do 10.º ano, dúvidas que ficaram, etc... ahm... porque, em princípio, há uma continuidade pedagógica, agora nós já estamos a combinar isso... e combinamos depois com a disponibilidade deles... com a minha disponibilidade... sem entrar em stress por causa dos exames... e atenção, tem que ser com a vontade deles... tem que haver empenho deles... isso só se consegue sem aquela obrigação... tem que haver um bom relacionamento e um empenho por parte dos alunos... no ano pasado eles compareceram, penso que este ano eles também irão comparecer porque eles têm mesmo o interesse na matéria.
>
> *(entrev. reflexão 4, pp. 2-3)*

8.2.3 Tempo destinado ao estudo de tópicos de Cálculo Diferencial e os exames finais

Quando convidada a refletir sobre o tempo destinado ao estudo dos tópicos de Cálculo Diferencial (CD) no ensino secundário, Maria José começa por refletir sobre o que aconteceu com as suas aulas. Ao fazer tal reflexão é categórica ao afirmar: “o tempo não permitiu” fazer tudo o que pretendia fazer. Como principal constrangimento, indica o fato de as aulas terem sido todas a distância (aulas síncronas) aquando do trabalho com esta temática. Isso se deu devido à situação de emergência vivida no país devido à pandemia, situação que discuto com maior profundidade na seção referente às aulas por mim assistidas. Na apreciação da professora “esta situação que se vive, completamente atípica não permitiu fazer tudo que estava realmente planeado... ficou muita coisa aquém do que havia sido planeado no início do ano letivo” *(entrev. reflexão 4, pp. 4)*.

Entretanto, para além desse constrangimento que se tornou incontornável, nomeadamente o fato de se ter aulas a distância, também aconteceu uma significativa redução do número de aulas de Matemática. Ao refletir sobre isso, Maria José refere que essa falta de tempo de aula acabou por trazer constrangimentos na parte relativa aos limites, temática que não conseguiu lecionar “com o à-vontade” que desejava e que isso trouxe a necessidade de "um trabalho mais autónomo por parte dos alunos" *(entrev. reflexão 4, p. 1)*:

> Quando dei a parte dos limites... eu tive... não pude dar com o à-vontade que eu conseguiria dar porque tive menos tempo... ahm... porque... e teve de ser um trabalho mais autónomo por parte dos alunos... [inaudível] eles tiveram com horas presenciais, síncronas e a professora os carregou com tarefas e eles acabaram por descuidar o trabalho de Matemática, pronto.
>
> *(entrev. reflexão 4, p. 1)*

No que se refere ao exames finais de Matemática, Maria José é assertiva e afirma que não está "sempre a perspetivar aquilo que ensino com o exame", embora reconheça que "não posso deixar de pensar [no exame]" *(entrev. temática 2, p. 13)*. De modo resumido, refere o seguinte: "eu ensino os meus alunos para que aprendam e percebam o que é que estão a aprender... mas, de vez enquando, na aula, tenho que dizer: atenção, isto no exame costuma sair assim, assim, assim... ou seja, tem um exame para o final do ciclo" *(entrev. temática 2, p. 14)*.

Maria José reconhece que procura chamar a atenção dos alunos, durante a resolução de exercícios, para detalhes sobre a notação simbólica correta, sobre a atenção às unidades, tendo em atenção a cobrança realizada nos exames: "quando estou a resolver um exercício, se eles me perguntarem, eu digo que quando eles chegarem lá (no exame), não podem fazer isso" *(entrev. temática 2, p. 15)*. Entretanto, refere que isso não se deve somente ao fato de se ter um exame: "tu como professora, não chamas a atenção?... olhe, não troques o equivalente com o igual, não te esqueças de colocar as unidades, não te esqueças de indicar o número de casas decimais... eu faço isso com alunos de 7.º ano, e eles não têm exame" *(entrev. temática 2, p. 16)*.

> **Investigador:** Como se fosse um hábito?
>
> **Professora:** É um hábito... é um hábito... nós, professores de Matemática gostamos de ser um bocadinho picuínhas, queremos a simbologia, a notação matemática... ali bonitinha... nós temos uma linguagem própria... é como um professor de Português gosta que as vírgulas estejam no sítio correto... e nós professores de Matemática, também... é nossa pontuação, é nossa escrita... nós não estamos só... nós não somos professores de cálculo apenas, nós somos professores de Matemática e portanto também corrigimos essas pequenas coisas... e não precisa ser só para o exame.
>
> *(entrev. temática 2, p. 16)*

8.2.4 Apreciação sobre os tópicos de Cálculo Diferencial em Matemática A

Ao refletir sobre a ementa de tópicos de Cálculo Diferencial presente no atual programa de Matemática A, Maria José, inicialmente, considera difícil estabelecer um juízo a cerca da questão. Como justificação refere que “vai ser a primeira vez que vou lecionar o Cálculo Diferencial com este programa”. Assim, apesar de ter algumas questões pessoais, é somente “ao lecionar é que vou poder concluir... essa pergunta, eu se calhar só poderei responder mais tarde” *(entrev. temática 2, p. 3)*:

> Neste momento eu tenho uma perspetiva pessoal, de acordo com o que eu trabalhei com outros alunos, com dúvidas, com o que eu ouvi de colegas... ahm... agora e do programa anterior... deste novo programa, pronto... eu vi que introduziram os Osciladores Harmônicos, sei que continuam os problemas com a primeira derivada, a segunda derivada, por aí a fora... máximos e mínimos... ahm, mas agora como é que o aluno em sala de aula reage? O que que é necessário e o que que não é necessário? O que é que devia ser reduzido ou manter-se?
>
> *(entrev. temática 2, p. 3)*

Assim, Maria José considera que somente a partir da experiência concreta em sala de aula com o programa novo é que poderia “dar uma resposta mais completa”. Entretanto, refere que naquele momento estava a trabalhar a Trigonometria com os alunos e que não deixava de “ir à procura de como se fazia” acreditarndo na existência de “certas situações que tornam mais fáceis o raciocínio do aluno e a explicação” e parece indicar que situações estão relacionadas à sua experiência anterior.

Após ter lecionado as temáticas relacionadas ao Cálculo Diferencial no 11.º ano, convidei a professora a refletir novamente sobre o tema. Nessa segunda oportunidade, parece não discordar da ementa de conteúdos, não propondo acrescentar ou retirar algum assunto em particular. Entretanto, dessa vez, deixa claro que não considera necessário falar das chamadas funções de referência no estudo das derivadas e relaciona isso com a sua experiência anterior de ensino:

> A avaliação que eu faço é esta, portanto... e da parte das derivadas... eu aqui, esta parte... das derivadas das funções, eu não acho necessidade de falar de funções de referência... nós explicamos como é que são as regras de derivação, por que que eu hei de dizer que para o *x* ao cubo é uma função de referência?... Eu explico como é que é a derivada do *x* ao quadrado,

> depois explico, por exemplo... eu acho que tinha mais lógica explicar como é que se definia a derivada da potência... a partir daí, definindo a derivada da potência, consegue-se definir para *x* ao cubo, para *x* à quarta... por que que eu hei de dizer que o *x* ao cubo é uma função de referência?... Antigamente nós não falávamos ali da referência, simplesmente dávamos a derivada da constante, a derivada da função polinomial de grau um, do *x*... e a partir daí dávamos a derivada da potência e definíamos o *x* ao quadrado, o *x* ao cubo, o *x* à quarta, etc... a derivada do quociente, da derivada do quociente saía a derivada do um sobre *x*, etc... mas, pronto... como a derivada da raiz, a derivada da raiz vem da derivada da potência... eu sigo esta ordem e pronto.
>
> *(entrev. reflexão 4, p. 2)*

8.2.5 Possibilidades do uso de tecnologia no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial

Ao refletir sobre as possibilidades do uso de tecnologias, tais como calculadoras gráficas e softwares no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial, Maria José começa logo por referir que os professores, de um modo geral, não têm tantas facilidades assim com a tecnologia:

> E professores que não têm tanta... é mais uma coisa que eu vou dizer que não é politicamente correto... tanta facilidade com a tecnologia... que neste momento até estão em dificuldades com as máquinas, nas novas que têm vindo, de algumas marcas... e que nem formação têm para isso... terem que ir junto de cada aluno, não conseguem nem sequer com a máquina que a maioria tem, quanto mais com cada uma.
>
> *(entrev. temática 2, p. 19)*

Entretanto, ao considerar a si própria, refere que não "deixa de usar a tecnologia" e reforça que procura "usar a tecnologia para quase todos os conteúdos", não se limitando ao ensino do Cálculo Diferencial. De modo específico, no tocante ao uso de softwares educativos, refere ser "uma fã do Geogebra" e que realiza um uso contínuo dessa ferramenta para "imensas coisas" *(entrev. temática 2, p. 16)*.

Tendo em atenção às cálculadoras gráficas, menciona que "não há nada como fazer um cálculo analítico e depois buscar com a máquina", dando a entender que tais dispositivos são importantes para a verificação "a máquina [calculadora gráfica] facilita muito a verificação" *(entrev. temática 2, p. 16)*. Entretanto, menciona que a existência de muitas marcas de calculadoras gráficas no mercado acaba por representar um desafio a mais para o professor de Matemática:

> Nem todos os professores sabem trabalhar com todas as marcas... é como ter um telemóvel novo, quando eles trazem uma marca que eu não conheço, tenho que dizer: “olha tens que trazer o manual de instruções”... na minha intuição, daquilo que eu sei trabalhar com uma marca, pronto... para calcular o máximo eu faço isso... para calcular a interseção, faço isso... então tens que ir à procura... vou ao menu e tenho que procurar ... só que nem todas são assim tão intuitivas... as vezes temos que... e algumas são mais intuitivas do que aquelas que nós estamos... à espera... e quando tu tens uma turma... a minha turma tem só 20 alunos, como tu viste, mas tem turmas com 28 alunos... imagina o que é para o professor.
>
> *(entrev. temática 2, p. 16)*

Por fim, Maria José indica duas grandes possibilidades no uso das tecnologias no ensino do Cálculo Diferencial: (i) *permite ir mais além* e (ii) *permite aos alunos serem mais criativo*s. Quanto à primeira possibilidade, a professora refere que, com a tecnologia se consegue “perceber muito mais rapidamente”, é possível “efetuar cálculos muito mais rapidamente” e também permite “ver até outras soluções que não estavam a ver se não estivesse com a tecnologia”. Já em relação à segunda possibilidade, refere que “a tecnologia permite, as vezes, aos alunos serem mais criativos”, reforçando que essa é a sua “perspetiva” *(entrev. temática 2, p. 16)*.

Resumidamente, para Maria José faz todo o sentido o programa de Matemática A contemplar tópicos de CD. Em sua visão: (i) tal presença permite *preparar* os alunos do ensino secundário para o prosseguimento dos estudos, nomeadamente para a realização da disciplina de Cálculo durante os estudos universitários e que (ii) o conhecimento de tais tópicos faz parte da *cultura geral* do indivíduo. Acrescenta que essa primeira abordagem deve ser com muita “calma” para que os conteúdos fiquem “bem assentes”. Em sua perspetiva, de todos os tópicos de CD, o mais difícil para os alunos é a definição de derivada de uma função em um ponto e relaciona tal dificuldade com o nível de abstração inerente ao conceito e também com o grau de maturidade dos alunos. Refere quatro aspetos que o professor deve ter em atenção e que são essenciais, na sua visão, para uma boa aprendizagem de Cálculo Diferencial: (i) O aspeto *gráfico/visual*; (ii) A *parte algébrica*; (iii) O trabalho com um *exemplo prático*; e (iv) O trabalho com a *resolução de problemas*. Quanto a existência de um exame final, refere que não perspetiva aquilo que ensina com o exame, mas não perde de vista a sua existência. Por fim, menciona que não deixa de usar a tecnologia em suas aulas, fazendo uso regular da calculadora gráfica e do Geogebra e acredita que a tecnologia permite ir mais além e também contribui para a criatividade dos alunos.

8.3 As aulas de Matemática envolvendo tópicos de Cálculo Diferencial

As aulas que eu assisti decorreram em uma turma de 11.º ano de Matemática A. Maria José já lecionava Matemática para esta turma desde o 10.º ano. Conforme já mencionei, a professora referiu que a parte mais difícil para os alunos no Cálculo Diferencial era a parte relativa a derivada de uma função e um ponto. Tendo isso em atenção, achei interessante incidir a minha observação justamente na lecionação deste tópico. E foi justamente o que ocorreu, embora em um formato absolutamente diferente e inesparado, conforme relato logo a seguir.

Enquanto aguardava a lecionação da parte relativa à derivada de uma função, que só seria trabalhada no 3.º período, e sempre atendendo ao convite da professora, assisti a quatro aulas presenciais (de 50 minutos cada) sobre outras temáticas. Duas dessas aulas foram de exercícios sobre Trigonometria. Nessa oportunidade, a professora fez-me o convite aproveitando a minha estada na escola para que eu pudesse ver, segundo disse: "se a turma atende aos critérios para aquilo que pretendes". Apesar de não ser a temática visada, foi uma excelente oportunidade para captar outros elementos interessantes, tais como o ambiente da turma, a relação entre alunos e professora, além do fato dos alunos já irem se acostumando com a minha presença. As outras duas aulas ocorreram em outro local, nomeadamente em um laboratório de Informática de uma Universidade de Lisboa. Essas útimas aulas assumiram o formato de uma oficina sobre o Geogebra e foram ministradas por uma professora universitária e sua assistente.

No entanto, antes de Maria José lecionar a parte das derivadas, as aulas presenciais foram canceladas devido à pandemia de COVID-19. A partir desse momento, todas as aulas foram realizadas a distância. Embora a sua turma tenha voltado com algumas aulas presenciais no 3.º período, tal não ocorreu com a Matemática pelo fato desta disciplina não figurar no exame do final do 11.º ano e as aulas presenciais eram, em princípio, dedicadas somente às disciplinas de exame. Na altura, conversei com a professora e levei até ela o meu interesse em poder assistir alguma dessas aulas mesmo que fosse a distância, denominadas de aulas síncronas, pois a parte referente à prática da professora era de grande interesse dentro da minha investigação. Após conversarmos e atendendo a uma solicitação sua, reencaminhei formalmente o meu pedido para assistir as aulas e anexei os comprovativos de inscrição no doutoramento e também o parecer do Comitê de Ética do Instituto de Educação. Passado algum tempo, Maria José disse-me que a escola estava de acordo, mas que haveria uma condicionante: a de que todos os responsáveis dos alunos concordassem formalmente (mediante termo assinado) com a minha presença nas aulas.

Esse período de espera mostrou-se bastante complicado e a cada dia que passava, a minha inquietação era maior. A certa altura, entrei em contato com Maria José e ela disse-me que faltavam somente algumas assinaturas dos responsáveis dos alunos, mas que, entretanto, sem as quais não poderia avançar. Agradeci à professora e, desse modo, tive de esperar durante alguns longos dias pela confirmação, o que felizmente veio a acontecer. Assim, assisti às aulas durante as três últimas semanas de junho de 2020, totalizando cinco encontros com duração de 40 minutos à uma hora cada. Os assuntos tratados foram: taxa média de variação e taxa instantânea de variação de uma função, derivada de uma função em um ponto, interpretação geométrica da derivada, estudo da monotonia de uma função a partir do sinal da derivada e regras de derivação.

Como tive uma situação extraordinária do foro particular precisamente na altura das observações de aula, o que, potencialmente, poderia me impedir de assistir a alguma dessas aulas, solicitei atempadamente à Maria José a possibilidade dela vir a gravá-las em áudio ou em vídeo. A professora prontamente concordou e as aulas foram gravadas em vídeo sempre com a anuência de todos os alunos. Felizmente não precisei me ausentar de nenhuma aula e ainda contei com as preciosas gravações em vídeo, estas sempre disponibilizadas pela professora logo após cada aula. As gravações eram partilhadas pela professora por meio de um ficheiro no google drive e foram, posteriormente, integralmente por mim transcritas. Também após cada uma dessas aulas síncronas, realizei uma entrevista semi-estruturada de reflexão sobre a aula com a professora. Essas entrevistas foram àudio gravadas e também transcritas por mim.

O que apresento a seguir foi construído baseado nas observações diretas das aulas, nas entrevistas realizadas e também nas notas de campo que foram tomadas e está organizado em quatro itens, nomeadamente: i) A turma e a sala de aula; ii) A estrutura de aula; iii) As interações na aula e iv) O Cálculo Diferencial nas aulas. No item *A turma e a sala de aula*, trago algumas características da turma de 11.º ano em que recaíram as observações, bem como alguns elementos do contexto físico da sala de aula e do ambiente virtual usado. No item *A estrutura das aulas* apresento alguns elementos ligados à organização, estrutura e ambiente de trabalho. No item *As interações na aula* discuto os principais tipos de interações ocorridos em aula. Por fim, em *O Cálculo Diferencial nas aulas* realizo algumas considerações sobre os aspetos mais significativos relativos às diferentes dinâmicas de aula e atividades desenvolvidas.

8.3.1 A turma e a sala de aula

A turma de 11.º ano onde decorreram as observações de aula era composta por 20 alunos, sendo 10 rapazes e 10 raparigas. As aulas presenciais nesta turma decorreram no turno da tarde e, no que se refere à Matemática, eram três encontros semanais, totalizando cinco períodos com duração de 50 minutos cada período. Entretanto, com as aulas passando a ser realizadas a distância, a disciplina de Matemática sofreu uma redução significativa no tempo de aula: passando de três para dois encontros semanais. Ademais, cada um desses encontros passou a ter uma duração média de 40 minutos. Sobre essa redução da carga horária de Matemática, Maria José mostrou desacordo, mencionando alguns constrangimentos inerentes:

> E o que que se passou... eu tinha 3 horas de aula [três encontros semanais], passei a ter dois [encontros semanais]... quando dei a parte dos limites... eu tive... não pude dar com o à-vontade que eu conseguiria dar porque tive menos tempo... ahm... porque... e teve de ser um trabalho mais autónomo por parte dos alunos.
>
> *(entrev. reflexão 4, p. 2)*

Conforme já mencionado, na visão de Maria José a turma do 11.º ano era um tanto imatura "a minha turma é um bocadinho infantil [risos]" *(entrev. temática 2, p. 12).* Havia momentos de descontração, mas também de cobrança por parte da professora: "desculpem, eu dou-vos carinho, mas também passo-vos alguns raspanetes" *(entrev. temática 4, pp. 3-4)*. O clima de sala de aula era caracterizado por uma relação de bastante cumplicidade e franqueza entre alunos e professora. Na primeira (e única) aula presencial que assisti, antes de entrar em sala, a professora me confidenciou que os alunos haviam se portado mal em uma atividade realizada nos dias anteriores e que precisaria chamar a atenção deles logo no início. Então perguntou-me se, mesmo assim, eu queria estar presente nesta parte, ao que respondi que sim. Antes desse momento, porém, a professora me apresentou à turma e pediu que cada aluno se apresentasse. O seguinte excerto de aula dá conta dessas passagens:

> A professora inicia a aula com uma rápida apresentação minha e dos motivos por que estava ali. Logo quando cheguei, os alunos olharam-me com certo espanto: o que estava fazendo ali aquele adulto? Nas palavras da professora: “Ele não está aqui para avaliar ninguém e gostava que todos fizessem uma rápida apresentação”.
>
> Os alunos então disseram os seus nomes e idades e quando o faziam viravam-se para mim, pois eu estava sentado no fundo da sala. Durante a apresentação, a professora mostrou certa descontração, dizendo: “esta gosta de cantar”; “este gosta de fazer pose para fotografias”. A apresentação foi bem descontraída e por diversos momentos, os alunos e a professora riram.
>
> Concluída a apresentação dos alunos, a professora então fala: “Agora vamos falar de um assunto mais sério... não fiquei nada contente com o que ocorreu na última aula.” A professora menciona que eles deveriam ter mais responsabilidades em aula e não deveriam confundir os momentos, ou seja, que deveria haver momentos de descontração, mas também momentos de levarem as coisas a sério. Os alunos escutaram a professora em profundo silêncio. Concluído esse momento, a professora passa então a parte seguinte da aula: trabalho dos alunos em uma lista de exercícios do manual.
>
> *(registo de aula, 31 de outubro)*

Quanto ao espaço físico, a sala de aula era ampla, as mesas estavam dispostas em duplas e ocupavam quatro fileiras. Era um espaço com boa luminosidade e junto a uma parede havia mesas com quatro computadores. Também havia um computador junto à secretária da professora, estando este conectado a um aparelho de projeção. Mesmo no período de aulas presenciais, Maria José já fazia uso de um ambiente virtual Moodle para disponibilizar materiais aos alunos. Entretanto, quando as aulas passaram a ser a distância (aulas síncronas) essa plataforma Moodle praticamente deixou de ser usada e a professora passou a utilizar uma aplicação do Google, chamada *Classroom,* para o gerenciamento do conteúdo disponibilizado aos alunos. Já em relação à aplicação utilizada nessas aulas vituais para a comunicação em vídeo, a professora referiu que começou por utilizar o *Zoom,* mas que depois houve uma migração para outra aplicação, chamada *Meet* (também desenvolvido pelo Google), sendo esta última utilizada aquando de minhas observações.

8.3.2 A estrutura das aulas

As aulas observadas nas quais ocorreram a introdução de um conceito novo respeitaram uma estrutura de três momentos bem definidos: i) *Momento inicial*; ii) *Apresentação do conceito* e iii) *Resolução de exercícios*. A última aula, entretanto fugiu um pouco a esta estrutura, pois a professora dinamizou um trabalho de auto-avaliação com os alunos. O *momento inicial*, por seu turno, desdobrava-se em uma das três situações seguintes: 1) Diálogo preliminar entre a professora e os alunos sobre a temática a estudar; 2) Discussão de um exercício da aula anterior; ou 3) Revisão de conceitos anteriores. Estes dois últimos cumpriam a função de retomar a aula anterior de modo a ligá-la com a aula em questão "portanto, eu posso ir sempre remetendo para a aula anterior, ou seja, sabemos dessa ligação com a aula anterior" *(entrev. reflexão 4, p. 2)*.

O momento de *apresentação do conceito* era realizado pela professora no quadro interativo ou então era consolidado por meio da apresentação de um vídeo em que a professora realizava várias pausas para esclarecimentos e clarificações. Bastante comum durante esta segunda parte era o recurso à utilização de uma folha dinámica do Geogebra. A última parte, nomeadamente a *resolução de exercícios*, era dinamizada de duas maneiras: i) a resolução era feita de modo conjunto, com a professora a fazer questionamentos dirigidos aos alunos e depois a sistematizar no quadro interativo e/ou ii) havendo disponibilidade de tempo, os alunos realizavam os exercícios em aula e depois um aluno partilhava a sua resolução. Essa resolução era então discutida ao pormenor em grande grupo com a professora a perguntar detalhes para o aluno. Em seguida ela então sistematizava a resposta final no quadro interativo (tendo em conta as retificações apontadas durante a discussão realizada).

Apresento a seguir três excertos de uma aula observada que procuram dar conta desses três momentos. Como uma amostra do que seria o *momento inicial*, apresento um excerto representando um diálogo preliminar entre a professora e os alunos sobre taxa média de variação, temática a ser estudada logo na sequência da aula. Outro excerto, da mesma aula, procura dar conta de como ocorre a *apresentação do conceito*. Nele, a professora, por meio de um vídeo, realiza pausas pontuais com questionamentos dirigidos aos alunos tendo em vista a apresentação do conceito taxa média de variação. Finalmente, como representativo do momento de *resolução de exercícios*, apresento a resolução que a professora apresentou para um exercício em que os alunos sentiram dificuldade.

Momento inicial (diálogo preliminar entre professora e alunos)

Professora: Este conceito... no vosso 3.º ciclo, quando em Fisico-Química, alguém sabe o o que é taxa média de variação?

Alunos: [Silêncio].

Professora: Ou dão-me um exemplo, vamos começar por aí... vamos começar por aí... dar um exemplo da taxa média de variação... Para que serve?

Alunos: [Silêncio].

Professora: Por exemplo, quando eu vou conduzir um carro, o que vocês têm? O que vocês normalmente falam?

Alunos: [Mais de um fala ao mesmo tempo e o áudio fica inaudível].

Aluno: A velocidade.

Professora: A velocidade corresponde a calcular o quê?

Aluna: A variação...

Aluno: A distância pelo tempo.

Professora: A distância pelo tempo, exatamente. Então isso é o quê? Eu estou a calcular o quê?

Aluna: A velocidade média.

Professora: A velocidade média, certo. Então, a taxa média de variação está muito associada a essa, a esse conceito... a velocidade média. Ahm, e o exemplo que nós mais utilizamos é... daqui de Lisboa ao Porto são trezentos quilômetros, nós sabemos que normalmente vamos em três horas. Qual foi a velocidade média com que percorri essa distância?

Aluno: 100 quilômetros.

Professor: 100 quilômetros hora, OK.

(registo de aula, 9 de junho)

Apresentação do conceito (vídeo com interrupções)

EXECUÇÃO DO VÍDEO

Locutor: As operadoras de telecomunicações quando fazem um planeamento de uma rede têm de ter em consideração a variação do tráfego ao longo do dia. Seja *f* a função que traduz a variação do tráfego diário de internet durante uma semana usando telemóveis. Por exemplo, para determinarmos a variação do tráfego das 0 horas às 6 da manhã...

Professora [1.ª pausa no vídeo]: O que é que fazem?

Alunos: [Silêncio].

Professora: O que é que vocês fazem para calcular a variação do tráfego entre as 0 da noite e as 6 da manhã? Vamos olhar para aqui, para o gráfico [a professora então mostra no gráfico].

Aluno: A imagem do 6 menos a imagem do 0, sobre... 6 menos 0.

Professora: Exatamente, muito bem! Quem é que falou?

Alunos: Eu, o João.

Professora: João... portanto vocês vão observar esse espaço... e vão calcular a variação assim, certo? Calcular aqui a imagem do 0 [mostra no gráfico]... aqui, a imagem do 6 e eu vou dividir isso por este espaço de tempo... assim tal como fazíamos com a velocidade média... portanto, como é que eu calculo a velocidade média? Portanto, vou por os 300 quilômetros menos o 0, porque eu estou em Lisboa, sobre 3 horas menos 0 porque é o instante inicial...

Continuação do vídeo...

Locutor: Calculas *f* de 6 menos *f* de 0... por ser negativo, o valor indica que o tráfego diminuiu 3 por cento nesse intervalo de tempo. Mas se pretender saber qual foi a variação do tráfego em média por hora no mesmo intervalo de tempo, então divides a variação pela diferença entre o instante final e o inicial... o resultado é menos um meio, este valor é a taxa média de variação entre as 0 e as 6 horas. Nesse caso, significa que entre as 0 e as 6 horas, em média, o tráfego diminuiu 0,5 por cento por hora... repara que a reta secante ao gráfico nos pontos...

Professora: [2.ª interrupção do vídeo] O que é uma reta secante?

Aluno: [Inaudível] dois pontos.

Professora: Dois pontos, exatamente...

Continuação do vídeo:

Locutor: Tem declive igual ao da taxa média... portanto dada uma...

Professora: [3.ª interrupção do vídeo] Lembrem-se lá atrás que estávamos a falar do declive de uma reta?

Aluno: É claro, professora.

Professora: Então se é claro, diga lá.

Aluno: *y* dois menos *y* um sobre *x* dois menos *x* um.

Professora: O rapaz está espetacular! E o que são o *x* dois, o *y* um?

Aluno: Então, o *y* dois é o valor da reta...

Professora: São as coordenadas dos pontos que...

Aluno: Sim, professora.

Professora: De dois pontos da reta, está bem? Portanto a reta secante intersecta o gráfico em dois pontos e para calcular o declive? Nós temos as coordenadas desse ponto e desse outro [mostra no gráfico]... e então fazemos o quê? A ordenada deste menos a ordenada daquele... e a abscissa desse menos a abscissa daquele... De outra forma, como é que eu calculo o declive desta reta? Compare... olhe o que está aqui tracejado... estão a ver a minha mãozinha? O declive vai ser igual a este espaço aqui, a distância entre esses dois pontos... a dividir por essa distância aqui... são a diferença entre a abscissa do B, menos a abscissa do A, OK?

Recomeço do vídeo:

Locutor: Portanto, dada uma função *f* e dois pontos A e B do domínio, a taxa média de variação de *f* entre A e B...

Professora: [4.ª interrupção do vídeo] Vai ser igual a ter o quê? Falamos em taxa média de variação, o que que vocês identificaram aqui?

Aluno: É igual.

Professora: É igual. Portanto, a taxa média de variação é igual ao declive da reta? Tangente ou secante?

Alunos: Secante.

Recomeço do vídeo:

Locutor: Este quociente que representa o declive da reta secante ao gráfico de *f* nos pontos A e...

Professora: [5.ª interrupção do vídeo] Estão a ver aqui a diferença que eu falava, portanto... tem aqui estes dois pontos... e tem que a taxa média de variação é positiva, portanto tem ali o ponto B e o ponto A e eu vou calcular a diferença, aqui esta distância... essa distância aqui que corresponde ao *f* de B menos o f de A, ou seja, a imagem da abscissa do B menos a imagem da abscissa do A... portanto ficará *f* de B menos *f* de A e a dividir por esta distância aqui que é *b* menos *a*. Alguma dificuldade? Dúvidas? Querem fazer um "print screen"?

A professora então escreve no quadro interativo:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(registo de aula, 9 de junho)

<u>*Resolução de exercício*</u>

Professora: Há dificuldades?

Aluna: Eu tenho no [exercício] 134 ponto 2.

Redação do exercício 134.2: Determina k > 4 tal que a taxa média de variação de f entre 4 e k seja igual a 5.

Professora: Eu imaginei que sim... ia só ver aqui o enunciado... [a professora busca a questão e faz a leitura].

Professora: Então vamos começar por escrever o enunciado, está bem? Deixa eu ver uma coisa se já está a funcionar... já está [referindo-se ao quadro interativo].

Professora: Vocês dizem que... taxa média de variação entre 4 e *k* é igual a 5, OK?

A professora então escreve no quadro:

$$T_{mv}[4,5]=5$$

Professora: O que que é a taxa média de variação entre 4 e *k*? Vai ser o quê? O *f* de *k* menos o *f* de 4 sobre *k* menos 4 e isto é igual a 5.

A professora continua a escrever no quadro.

$$T_{mv}[4,5]=5$$
$$\frac{f(k)-f(4)}{k-4}$$

Professora: Portanto resolver esta equação, corresponde a isto, OK?

Professora: Quanto é que é o *f* de *k*? O *f* de *k* é igual ao quê?

Professora: Se fosse o *f* de 4, vamos começar pelo *f* de 4.

Aluna: É 0.

Professora: Como é que fazem? 4 ao quadrado menos 4 vezes 4 que é igual a 0.

A professora então escreve:

f(4) = 4^2 - 4 x 4 = 0

Professora: Então, o *f* de *k* é igual a ter o quê? *k* ao quadrado menos 4 vezes *k*, ou seja, 4k.

A professora então escreve:

$$f(k)=k^2-4k$$

Professora: Então... quando vão substituir aqui, aquela coisa ali, com aquele sinal de equivalente, isso é igual a ter o quê? Esses são os vossos cálculos auxiliares.

A professora, de modo análogo ao visto até aqui, ou seja, comentando e escrevendo na lousa digital procede à resolução da questão.

$$\frac{f(k)-f(4)}{k-4}=5 \Leftrightarrow \frac{k^2-4k}{k-4}=5$$
$$\Leftrightarrow \frac{k^2-4k}{k-4}-5=0$$

Professora: Isso é uma expressão racional, ou seja, estamos a ver conteúdos já dados anteriormente... posso mudar de página? Eu vou enviar isso para a vossa *classrom*.

Aluna: OK, professora.

Professora: O que eu tenho que fazer agora... eu tenho que reduzir aquilo ali ao mesmo denominador!

$$\frac{k^2-4k}{k-4}-5=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{k^2-4k-5k+20}{k-4}=0$$

Professora: Carolina, já consegues agora?

Aluna: [Silêncio].

Professora: Eu posso ir para o passo seguinte.

$$\frac{k^2-4k-5k+20}{k-4}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{k^2-9k+20}{k-4}=0$$

Professora: Como é que nós resolvemos uma expressão A sobre B igual a zero?

Aluno: É... A igual a zero e B diferente de zero.

Professora: Muito bem...

A professora então escreve o que o aluno acabou de dizer:

$$\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow$$
$$A=0 \wedge B \neq 0$$

Aluno: Ò stora, não dá para usar a fórmula resolvende e fatorizar e cortar... possivelmente?

Professora: Não vais cortar aqui nada, tu ainda estás com os limites... aqui não vais cortar nada.

A professora então escreve:

$$\frac{k^2-9k+20}{k-4}=0$$
$$\Leftrightarrow k^2-9k+20=0 \wedge k-4 \neq 0$$

A professora pergunta aos alunos se preferem que a questão seja concluída ou pode parar para que terminem em casa. Os alunos pedem para que a questão seja concluída. E assim a professora procede à resolução da parte final.

$$k^2 - 9k + 20 = 0 \wedge k - 4 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} \wedge k \neq 4$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{9 \pm 1}{2} \wedge k \neq 4$$
$$\Leftrightarrow k = 5 \vee k = 4 \wedge k \neq 4, k > 4$$
$$\Leftrightarrow k = 5, k > 4$$
$$\therefore k = 5$$

Professora: Dificuldades? Dúvidas?

Alunos: Não.

(registo de aula, 9 de junho)

8.3.3 As interações na aula

As interações ocorridas em aula foram, basicamente, entre a professora e os alunos. Estas interações podem ser classificada em três tipos: i) Questionamentos dirigidos à turma em geral (conforme os excertos anteriores dão conta); ii) Questionamento dirigido a um aluno em especial; e iii) Conversa particular entre a professora e um aluno. Essa conversa particular decorreu no final de uma aula, sendo que o aluno permaneceu por solicitação da professora. Os dois excertos a seguir procuram dar conta dos dois últimos tipos.

Questionamento dirigido a um aluno em especial

Professora: Não há? Por que será que aquilo ali deu 0 sobre 0? Agora não está a dar, mas se eu conseguir que lá chegasse... ao fim e ao cabo, esta taxa média de variação... quer dizer que este limite quando eu vou calcular inicialmente vai dar normalmente, quando temos aqui um polinómio... nós obtemos uma indeterminação do tipo 0 sobre 0... eu hoje gostaria de fazer um exercício convosco, está bem? E depois temos de levantar a indeterminação, como levantar uma indeterminação do tipo 0 sobre 0, o que que nós fazemos?

Alunos: [Silêncio].

Professora: E então? Ficou tudo mudo? Rita?

Aluno: Temos de fatorizar, stora.

Professora: És Rita? Não te chamas Rita, pois não?

Aluno: Não, pensei que perguntou a todos.

(registo de aula, 18 de junho)

<u>*Conversa particular*</u>

> Professora: Espera aí um bocadinho Diogo [enquanto isso, os outros alunos saem do ambiente].
>
> Diogo: Está bem.
>
> Professora: Quem é que ainda está? Rodrigo?
>
> Professora: O Diogo, eu estou um bocadinho preocupada porque tu tens falhado a entrega de vários exercícios...
>
> Diogo: Eu falhei estas duas semanas, não foi, stora?
>
> Professora: Pois... e agora tens de entregar os desta semana e os das outras duas semanas... eu não sei se tu tens dúvidas nas assíntotas ou não? Porque tu não entregastes os exercícios resolvidos e eu não pude corrigir as tuas resoluções.
>
> Diogo: Esta bem... eu sei, stora... [inaudível] tenho que estudar para os exames...
>
> Professora: Está bem, mas agora tens que... tu, com a parte de limites, de assíntotas, tu deixas de fazer os exercícios... agora quando chegas aqui à definição de derivada já não sabes determinar o limite... há aqui alguma... isso fica assim tudo encadeado... o conhecimento em Matemática vai sendo encadeado... portanto convém fazer os exercícios.
>
> Professora: O meu conselho é o seguinte... ahm... tentas ver se consegue fazer os que são para essa semana com a explicação que foi dada hoje... vai à Khan Academy ver também os vídeos que eu coloquei lá para vocês verem... e depois então... tendo dúvidas, voltas atrás e vai fazer os que estão lá atrás... qualquer coisa, amanhã podes mandar um whatsapp.
>
> Diogo: Está bem, stora.
>
> Professora: Nem que eu tenha que ligar aqui a *classroom* só para ti, OK... beijinho, tchau.
>
> Diogo: Obrigado e bom fim de semana.
>
> Professora: De nada... bom fim de semana.
>
> *(registo de aula, 18 de junho)*

8.3.4 O Cálculo Diferencial nas aulas

Assisti a cinco aulas de Maria José sobre tópicos de Cálculo Diferencial que se somaram a outras quatro já assistidas, entretanto, estas referentes à outras temáticas: duas sobre trigonometria e duas referentes a uma oficina de Geogebra que os alunos participaram. Apesar de não ser um número tão expressivo de aulas, o fato das aulas sobre o Cálculo Diferencial terem sido gravadas em vídeo permitiram-me aceder a uma riqueza muito grande de detalhes, o que certamente não seria possível sem este recurso. O acesso posterior a estas gravações aliado ao fato de eu ter assistido a todas as aulas e também ter sido eu próprio a realizar as transcrições colocaram-me em uma situação mais favorável no momento do trabalho analítico, o que, de certo modo, veio a compensar o fato de não ter tido a possibilidade de observar um número maior de aulas, tendo em conta os constrangimentos já referidos.

Na primeira aula (9 de junho) o assunto tratado foi taxa média de variação. Na aula seguinte, 17 de junho, o tema foi a derivada de uma função em um ponto. A terceira aula, do dia 18 de junho, deu continuidade ao estudo da derivada. A quarta e a quinta aulas ocorreram já na última semana de aulas, sendo já visível o cansaço da professora, especialmente na penúltima aula. Na quarta aula, a professora discutiu com os alunos um questionário de auto-avaliação que estava a elaborar, pedindo a opinião destes. Nesta aula foram trabalhadas as regras de derivação de algumas funções de referência e, já ao final, ocorreu um momento de discussão sobre o andamento das aulas de Matemática. Na quinta e última aula foi dada continuidade às regras de derivação, ocasião em que foi contemplada a derivada da soma, do produto e do quociente. Também foi discutido, já no final, o estudo da monotonia de uma função através do sinal de sua derivada (com recurso ao Geogebra). No final desta aula os alunos realizaram uma auto-avaliação. Durante este momento, atendendo a um pedido anterior da professora, me retirei do ambiente virtual e esta parte também não foi gravada.

8.3.4.1 Interação entre os aspetos gráfico/visual e algébrico

Conforme já mencionado, Maria José considera essencial, tendo em vista uma boa aprendizagem de Cálculo Diferencial, evidenciar a estreita relação entre os aspetos gráficos e algébricos em questão. A professora chegou a chamar a parte algébrica de "parte abstrata", sublinhando que não se poderia somente "se deter à parte abstrata".

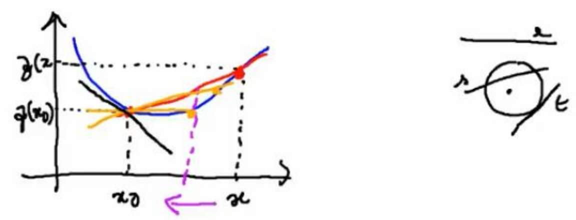
Entretanto, na mesma oportunidade, também referiu que o contrário também era verdadeiro, ou seja, não se deveria ficar somente na parte visual.

Desse modo, Maria José verbalizou durante nossas entrevistas uma importância idêntica aos dois aspetos e também ao fato de o aluno conseguir “passar de um para o outro” *(entrev. reflexão 4, p. 2)*. O que a professora verbalizou foi possível observar em sua prática de sala de aula. Apresento a seguir dois excertos de aula que procuram dar conta dessa preocupação. No primeiro excerto, a professora tinha planeado apresentar o conceito de derivada de uma função em um ponto usando o Geogebra. Entretanto, o programa acabou por falhar e a apresentação do conceito foi realizada de modo improvisado, com a professora a fazer uso do quadro interativo e a realizar as ilustrações à mão. Nele é possível verificar a sua preocupação em reforçar a conexão entre as duas dimensões (gráfica e algébrica). Maria José começa por apresentar graficamente uma reta secante ao gráfico da função e, após traçar várias retas secantes, chega à reta tangente à função em um ponto. Somente após este percurso, com forte apelo gráfico, é que as duas definições algébricas da derivada de uma função em um ponto como sendo um limite são apresentadas. O segundo excerto, da aula imediatamente a seguir, mostra a apresentação com o Geogebra que teria lugar no dia anterior. Nessa apresentação, a professora realça a ligação entre a parte gráfica e algébrica fazendo a aproximação entre as retas (com o rato) e evidenciando, na janela algébrica, o resultado dos declives.

> Professora: O que que nós temos... ahm... quando queremos calcular a derivada?
>
> Professora: Portanto, no último dia já falei que a derivada seria... ahm... portanto, que a taxa média de variação nós associamos à velocidade média. A derivada nós associamos à velocidade instantânea... ou seja num dado instante.
>
> Professora: Quando vocês têm um gráfico... vamos ver se isso sai assim mais ou menos, tem aqui um gráfico assim [desenha um esboço gráfico no quadro interativo]... vamos traçar aqui uma reta secante... tem aqui este ponto e este ponto... já agora lembrem-se do que que era uma reta secante... no 9.º ano quando vocês falaram em circunferências [faz algumas construções ao lado no quadro]... essa é uma reta exterior, essa aqui se eu conseguir desenhar bem será uma reta tangente e a secante será esta, está bem? Que toca em dois pontos ou intersecta a circunferências em dois pontos... portanto vocês vão ter... vamos chamar este ponto de *x* zero e esta abscissa aqui será um *x* qualquer... portanto eu vou ter somente as coordenadas de um ponto... vou ter o *f* de *x* zero e ali vou ter o *f* de *x*... tinha um vídeo que isto ficava muito mais giro, não consegui abrir nem o Geogebra, portanto... imaginem que eu quero a velocidade instantânea

num dado instante *x* zero... eu só vou ter as coordenadas desse ponto [aponta para o ponto em questão]... eu vou aproximar, agora que é a parte mais difícil... vou traçando várias retas, estão a perceber... tangentes, quer dizer secantes... a este ponto aqui [traça algumas retas secantes na cor roxa] até que eu vou ter essa reta aqui, que é tangente... e esta reta aqui [aponta para a reta tangente], o declive desta reta tangente vai me dar a derivada no ponto... então o que que é a derivada em um ponto... será igual... portanto eu vou aproximando, imaginem que este *x* vai se aproximando deste *x* zero... eu vou portanto... o *x* está aqui, eu traço esta reta secante, estão a perceber? Estão com dúvidas? Está a ser um bocadinho difícil... vou voltar um pouquinho aqui [apaga algumas das construções e reinicia a explicação]... imaginem o *x* aqui aproximando do *x* zero... eu vou encurtando esse intervalo, portanto... imaginem que o *x* está aqui, o que vocês vão traçar? Portanto, a reta secante, como é que seria? Seria uma coisa assim... se o *x* estivesse aqui, a reta secante seria essa assim... portanto eu vou aproximando cada vez mais o *x* de *x* zero, ou seja, eu quero ver o limite quando *x* tende para *x* zero... e depois, vai chegar o momento em que vai estar mesmo aqui no *x* zero e eu tenho então uma reta dessa forma que é a reta tangente... quando ela se aproximar vai ficar assim mais ou menos.

Ilustrações realizadas pela professora enquanto falava:



Professora: Portanto e o declive da reta tangente que é igual ao limite quando o *x* se aproxima de *x* zero... é que nós estamos a considerar o intervalo então vamos calcular essa variação é igual à derivada da função em um ponto.

Apresentação feita pela professora no quadro interativo enquanto falava:

$$m_t = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Professora: E esta é a definição que vocês têm que usar... só que existe outra definição, que também é muito utilizada no 12.º ano, que é vocês considerarem... vamos considerar um *h* que é igual a *x* menos *x* zero... e daqui sai o quê? Que o *x* vai ser igual a ter, resolvendo essa equação em ordem *x*, a *x* zero mais *h*, OK? E, além disso, se o *x* tende para *x* zero, então o *h* vai tender para o quê? Se o *h* é *x* menos *x* zero, essa diferença aqui vai dar quanto? Se o *x* se aproxima do *x* zero? O *x* vai se aproximando, se aproximando até coincidir com o *x* zero... o que vai acontecer ao *x*, vai ser igual ao?

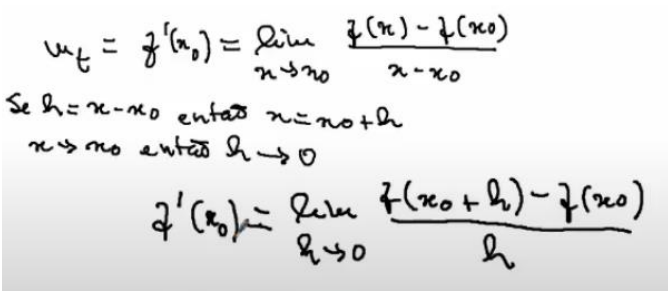
Aluno: *x* zero.

Professora: Então, se eles são iguais a diferença vai dar quanto?

Alunos: Zero.

Professora: Então vamos escrever esse limite de outra maneira, substituindo o *x* por *x* zero mais *h*... quero dizer que aquela definição pode ser escrita dessa maneira, que vai ser igual a ter o quê? limite quando *h* tende para zero... aqui o que que é igual ao *x*? *x* zero mais *h*... menos o *f* de *x* zero... sobre o *x* menos o *x* zero é o *h*... essa também é a derivada em um ponto de abscissa *x* zero... que é igual ao declive da reta tangente.

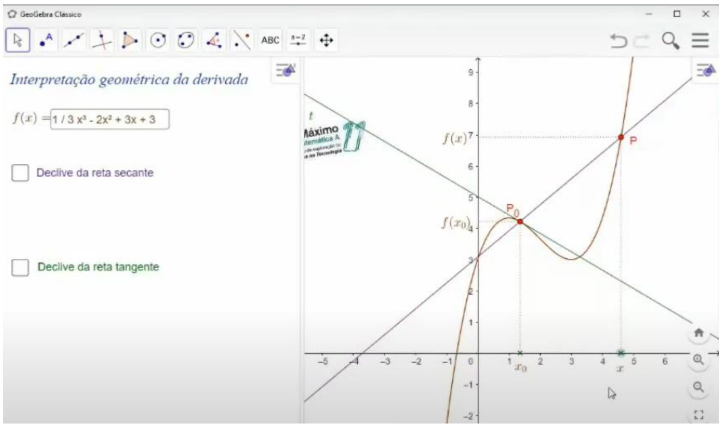
Apresentação feita pela professora ao explicar no quadro interativo:



Professora: Então nós temos estas duas definições, esta e esta... já vamos passar aos exercícios práticos... portanto eu gostaria aqui que vocês estão a tirar apontamentos que esta ali... a derivada é o declive da reta tangente ao gráfico no ponto de abscissa *x* zero.

(registo de aula, 17 de junho)

A professora partilha no ecrã uma animação do Geogebra envolvendo a interpretação geométrica da derivada.



Professora: Vamos ver primeiro este Geogebra... o que vocês têm ali a roxo? É a reta secante ou a reta tangente?

Aluno: Secante.

Professora: Corta o gráfico em dois pontos, aqui e aqui... e a verde?

Aluno: Tangente.

Professora: Tangente... o que que nós dissemos? Que a taxa média de variação era o declive desta reta [aponta para a reta secante]... e que a derivada neste ponto vai dar o declive desta reta quando ela intersecta o gráfico neste ponto [aponta para reta tangente e para o ponto de tangência desta com gráfico da função]... o negócio de que falei ontem de que ela ia se aproximando... eu queria vos mostrar isso... isso não funcionou muito bem... vamos tentar ver o que que acontece... quando o limite quando *x* tende para *x* zero, o que que vai acontecer... eu vou ligar aqui isto... então eles calcularam aqui o declive da reta secante e calcularam aqui o declive da reta tangente [mostra a folha de cálculos ao lado da janela gráfica].

Professora: Eu vou aproximar, estão a ver que ali está a mudar... o que vai acontecer quando *x* vai aproximando do *x* zero? O que aconteceu?

Aluno: Elas se sobrepuseram.

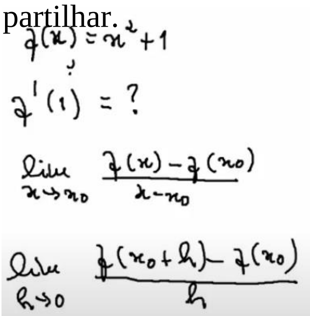
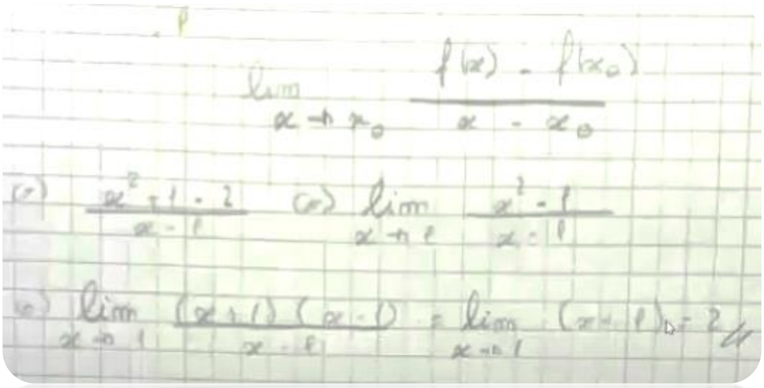
Professora: Sobrepuseram-se e temos os declive da reta tangente... estão a perceber... quando este *x* se aproxima ali... vai mudando, mudando até que... se sobrepõem... eu aqui não estou a obter o mesmo valor [dos declives] é que eu com o meu rato, eu nem sempre consigo ter a maleabilidade que eu gostaria... eu vou vos dar este Geogebra lá... deixa eu ver se consegui... ahm... consegui, consegui... ali deu zero sobre zero, portanto o que é que eu vou fazer? Eu vou colocar esse Geogebra na vossa... na vossa *classroom*... OK, pronto... dúvidas em relação a isso?

(registo de aula, 18 de junho)

8.3.4.2 Discutindo a resolução dos alunos

Algo absolutamente recorrente ao longo das aulas observadas foi o trabalho com exercícios. Na resolução destes exercícios, um espaço privilegiado era conferido às resoluções dos alunos e desdobrava-se, basicamente, em três momentos: i) primeiramente um aluno, de modo espontâneo ou convidado pela professora, partilhava a sua resolução; ii) em seguida, o aluno era convidado pela professora a explicar a sua resolução ou clarificar algum detalhe, indicando a passagem referida com o cursor; durante esse diálogo, a professora também dirigia questionamentos aos demais alunos na tentativa de que identificassem alguns erros e propusessem retificações; e, por fim, iii) a professora, tendo por base as discussões e retificações sugeridas na fase anterior, procedia à uma apresentação pormenorizada da solução do referido exercício no quadro interativo. O excerto a seguir procura dar conta dessa situação. Nesse excerto, o exercício em questão solicitava o cálculo da derivada da função $f(x) = x^2 + 1$ em $x = 1$ usando a definição da derivada em um ponto.

Resolução partilhada e discussão do exercício

> A professora escreve os dados da questão 136 e as duas definições para a derivada em um ponto e também indica os dois alunos que deveriam partilhar.
>
> 
>
> Professora: Podes partilhar.
>
> Aluno: Já saiu, stora?
>
> Professora: Ainda não... tens que clicar...
>
> Aluno: Ok... acho qua já vai dar [o aluno então apresenta a sua resolução para a questão].
>
> 
>
> Professora: [Observa a resolução do aluno] E vocês, depois, fazem isso... tudo a lápis... que dá muita mão [a visualização era bastante difícil]... OK, OK, fizeste ali a definição... onde é que está o *f* de *x* menos o *f* de *x* zero? E este equivalente vem donde? Vem daqui do lado? Pronto, então vais passar com o teu cursor que é para nós todos vermos... colocaste aqui a definição de derivada... isto é igual a *f* linha de *x* zero e depois tens na segunda linha...
>
> Aluno: Este aqui...

Professora: E, depois na segunda linha... seta para baixo... segunda linha, não está lá a tua seta... essa é terceira... segunda... estás a apontar para o limite... tens aqui uma coisa que é equivalente a *x* ao quadrado mais um menos um sobre *x* menos um.

Aluna: Faltou ali o limite.

Professora: Cá em cima... falta a palavra que...

Aluno: Isto aqui é um dois [aponta com o cursor].

Professora: A é... isso é um dois, não parece nada... mas falta aí qualquer coisa... o que que está a faltar aqui? O que é que está a faltar antes disso? E depois eu não sei da onde é que vem está equivalência.

Aluno: Do li – mi – te [quase inaudível].

Aluna: Posso dizer, professora?

Professora: Estás a perceber, falta o limite e depois esse equivalente aí não está a fazer nada...

Aluno: Sim... pois é igual só.

Professora: É igual a ter o quê? O *f* linha de?

Aluno: O quê? O quê?

Professora: O *f* linha igual ao limite de...

Aluno: De *x* a tender para um.

Professora: Bom... pois o *x* zero é um... então tinhas que escrever *f* linha de um igual ao limite quando *x* tende para um e aqui... onde foste buscar este dois?

Aluno: Então este é o cálculo de *f* de *x* zero...

Professora: Do *f* de um e onde é que está?

Aluno: Ahm, tinha que meter? Eu fiz os cálculos auxiliares, mas não os meti.

Professora: Mas tens que colocar os cálculos auxiliares...

Aluno: Mas era só substituir aqui este *x* por um... um ao quadrado dá um, mais um dá dois, ou seja, o *f* de um é igual a dois.

Professora: Muito bem... agora tu conseguistes explicar, mas quando estiver a corrigir... ao corrigir lá pelas duas da manhã, eu não vou acordar para ver isso.

Aluno: Sim, sim.

Professora: Não vais fazer uma apresentação oral, tens que colocar aí os cálculos auxiliares, OK?

Aluno: Sim.

Professora: Pronto... e isto aqui será equivalente?

Aluno: Não, era sempre igual, stora... eu é que meti...

Professora: Ahm bom... atenção a este pormenor... o limite quando *x* tende para um portanto um menos dois dá menos um... e agora faltava indicar aqui o quê?

Aluno: Como assim?

Professora: A indeterminação...

Aluno: Sim, sim...

Professora: Que tipo de indeterminação tens?

Aluno: É infinito sobre infinito.

Professora: Infinito sobre infinito?

Aluno: Penso que sim, stora.

Professora: Pensa lá um bocadinho... tu disses que o *x* tende para um... que é o limite quando *x* tende para um de *x* ao quadrado menos um sobre *x* menos um...

Aluna: É zero sobre zero.

Aluno: Exato.

Professora: Muito bem... substituis o *x* aqui por um fica um ao quadrado menos um que dá zero... e aqui também... substituindo o *x* por um também que dá zero sobre zero. E depois o quê? Podes fatorizar... onde tem o equivalente não é equivalente, é igual... ora este é um caso notável... é uma diferença de quadrados... portanto fica o limite quando *x* tende para um ... estes podes cortar, não é? Ficará o limite, aqui já está bem o igual... *x* a tender para um de *x* mais um... substituindo dá dois.

(registo de aula, 18 de junho)

<u>*Resolução pormenorizada apresentada pela professora:*</u>

Conforme é possível observar anteriormente, apesar de o aluno ter chegado à resposta correta, algumas sugestões são apresentadas pela professora aquando da discussão, nomeadamente: i) a escrita da função junto à definição de derivada utilizada; ii) a apresentação dos cálculos auxiliares; iii) o uso do sinal de igualdade ao invés do de equivalência; e iv) a escrita do tipo de indeterminação. A professora passa então a uma escrita pormenorizada da resolução e durante esse trabalho também responde uma dúvida de um aluno:

A professora insere um nova página e passa à resolução da mesma questão feita pelo aluno realçando todos os pormenores no quadro interativo.

Professora: Portanto o teu *f* de *x* é igual a *x* ao quadrado mais um... tu queres calcular o *f* linha de um e sabes que isso será igual ao limite quando *x* tende para um de *f* de *x* menos *f* de um sobre *x* menos um... isso é o primeiro passo que deveria estar aí escrito, OK?

Aluno: Sim, stora.

Professora: E agora isso...

Aluno [outro]: Stora, tenho uma dúvida.

Professora: Só um bocadinho, está bem?

Professora: Igual ao limite quando *x* tende a um de *x* ao quadrado mais um... e agora, eu faço aqui um cálculo auxiliar que é calcular o *f* de um... o *f* de um é igual a ter um ao quadrado mais um... que é igual a um mais um... que é igual a dois, portanto... isso é igual a dois... quem é que estava com a dúvida?

Aluno: Era eu, era eu... eu ainda não entendi por que o *x* tende para um?

Professora: Nós estamos a calcular o quê? O *f* linha de um... vamos ver a definição, olha aqui [a professora então volta no quadro interativo onde estava escrito a definição e mostra ao aluno].

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Professora: Isto é a definição... é a derivada no ponto de abscissa *x* zero. [Faz a leitura da definição ao aluno e acrescenta a notação *f* linha de *x* zero].

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Professora: Qual é o teu *x* zero aqui? É um.

Aluno: OK.

Professora: OK, percebido?

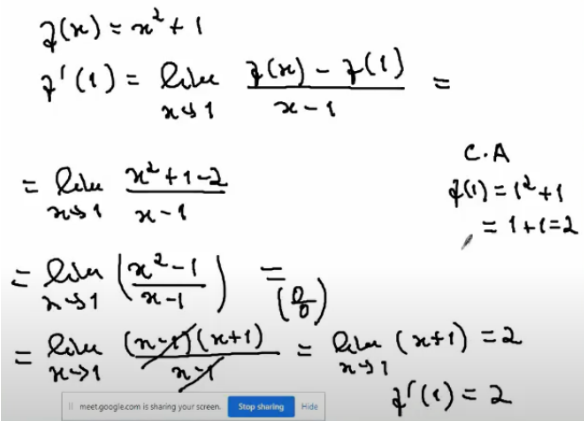
Aluno: Sim.

Professora: E esta daqui também será igual a ter o *f* linha de *x* zero... só que com o processo dos *h* [referindo-se à segunda definição]... portanto de ontem para hoje teríamos que estudar a matéria.

A professora então, após responder a dúvida do aluno, volta à resolução:

Professora: E isto aqui é igual a ter o quê? Portanto, ele trocou ali com uns equivalentes, iguais, etc... lembram-se da resolução dele? É o limite quando *x* tende para um de *x* ao quadrado menos um sobre *x* menos um... e isto é igual e vamos por aqui o tipo de indeterminação zero sobre zero... Estão a perceber os passinhos que faltavam? Portanto isso fica o limite, vamos fatorizar, essa fatorização não é complicada porque é um caso notável, mas se não fosse... em princípio, este aqui seria o zero do de cima... portanto isso fica *x* menos um, *x* mais um sobre *x* menos um... isso continua a ser a indeterminação do tipo zero sobre zero, mas já podemos fazer isso [procede ao cancelamento do fator *x* menos um]... portanto isso agora é igual ao limite quando *x* tende para um de *x* mais um, substituindo isto dá dois... e eu perguntei o que que quer isso dizer... isso quer dizer que o *f* linha de um é igal a dois... quer dizer o quê? Que o declive da reta tangente ao gráfico no ponto de abscissa *x* igual a um será dois, OK?

Construções feitas pela professora no quadro interativo:



(registo de aula, 18 de junho)

Durante uma entrevista de reflexão, Maria José referiu que esta forma de trabalhar em que problematiza as resoluções dos alunos é algo que já utilizava ainda quando as aulas eram presenciais: “acaba por ser... é a metodologia que eu utilizava, só que agora estamos com o computador, o aluno faz a partilha para os colegas... ahm... mostra e depois dão conta dos erros uns dos outros” *(entrev. reflexão 3, p. 3)*. Entretanto, quando as aulas eram presenciais, a professora colocava as questões ainda durante a resolução do aluno no quadro interativo e as retificações já eram apresentadas nesse momento, não havendo, assim, a necessidade da sistematização final que sempre teve lugar nas aulas síncronas. O seguinte excerto, extraído de uma aula presencial, procura dar conta disso:

Uma aluna vai ao quadro e apresenta a sua resolução para a questão 131 que possuía a seguinte redação: “Determina o valor exato de $\tan\alpha - sen\alpha$ sabendo que $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ e que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ ”.

A aluna inicia a apresentação da sua resolução para a questão no quadro interativo:

$\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$sen^2\alpha + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{1}{(16)} - \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{15}{16}$$

$$\Leftrightarrow sen^2\alpha = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} \underset{\alpha \in 2.^o Quadrante}{\Leftrightarrow} sen\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Após esta apresentação, a aluna continua, escrevendo ao lado da construção anterior:

$$ta\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}}$$

$$= -\sqrt{15}$$

$$\tan\alpha - sen\alpha$$

$$= -\frac{\sqrt{15}}{(4)} - \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{-4\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{-5\sqrt{15}}{4}$$

Nesse momento, a professora coloca algumas questões à turma:

Professora: Vamos aqui ver a solução... falta aí qualquer coisa... o quê?

Alunos: [Silêncio].

Professora: Atenção... lembrem-se dos exames.

A professora então escreve: “$sen\alpha > 0$” logo abaixo onde a aluna havia posto “$\alpha \in 2.^o Quadrante.$”

$$sen^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$sen^2\alpha + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{1}{(16)} - \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{15}{16}$$

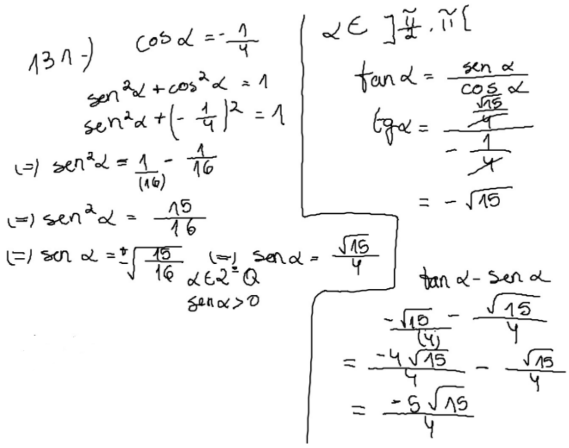
$$\Leftrightarrow sen^2\alpha = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} \underset{\substack{\alpha \in 2.^{o} Quadrante \\ sen\alpha > 0}}{\Leftrightarrow} sen\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

E logo acrescenta:

Professora: E mais... nessa altura dos exames, lá por junho, os professores que farão a correção estão um tanto cansados... portanto vocês devem apresentar a resolução de uma forma organizada e limpinha.

Nesse instante a professora vai até o quadro e coloca um traço a dividir as duas partes da questão que a aluna apresentou. É dado o sinal de intervalo.

Solução final apresentada no quadro interativo:



(registo de aula, 31 de outubro)

Essa resolução bem como todas as outras resoluções e construções realizadas no quadro interativo eram disponibilizadas aos alunos após a aula através de um email contendo em anexo o ficheiro da aula, onde também se indicava, em cada exercício, o nome do aluno que o realizou (essa informação foi aqui, deliberadamente, omitida).

8.3.4.3 Dedução algébrica

Para além de um destaque dado aos apoios visuais e gráficos, Maria José também conferiu uma importância significativa à dedução de alguns resultados algébricos. Referiu em uma aula: “não decoramos a fórmula, mas chegamos à fórmula” (registo de aula, 25 de junho). Os excertos a seguir procuram dar conta dessa preocupação da professora. No primeiro, dirigindo-se a um aluno, faz referência à importância de não decorar uma fórmula, mas de saber chegar até ela. O segundo excerto, mostra uma dedução algébrica propriamente dita, ocasião em que a professora procede à dedução da equação da reta fazendo uso dos resultados do estudo da derivada. A dedução parece ser acompanhada com atenção pelos alunos, uma vez que uma das alunas observa a ausência da variável *x* em um dos passos da dedução realizada, o que é logo corrigido pela professora.

> Professora: Estás a perceber o que eu quero dizer? Não é uma cábula que resolve as coisas, é preciso entender porque é que as coisas são assim... por isso é que as vezes dá-se a fórmula e depois explica-se como é que chegamos à fórmula... se tu perceberes como é que se chegou à fórmula, não precisa decorar a fórmula porque sabes como é que se chega lá, OK? Entendeste o que eu estou a querer dizer?
>
> Aluno: Sim, stora.
>
> Professora: Se tu achares que consegues resolver as situações de limites só com uma, com uma... como que tu disseste ontem? Com uma mnemónica, com uma cábula... não te resolve os problemas todos, tu precisas de entender como é que se fazem as coisas e ter algum treino, algum trabalho, muito trabalho, está bem? E persistência quase diária, está bem?
>
> *(registo de aula, 25 de junho)*

> Professora: Agora, há outro processo... vamos tentar deduzir aqui alguma coisinha [Abre uma nova página do quadro interativo].
>
> Professora: Então vamos começar... *y* igual a *mx* mais *b*... ora, o que que será aqui o meu *m*? É o *f* linha de *x* zero... e depois, o que que vocês fazem para achar o *b*? Vão substituir em um ponto que tem coordenadas *x* zero, *f* de *x* zero, certo? Então, o que é que vocês fizeram? Vieram aqui e substituiram o *y* por *f* de *x* zero... então conseguem descobrir o que que é igual ao *b*... *b* será igual a ter o quê? *f* de *x* zero menos *f* linha de *x* zero vezes *x* zero...esta é outra forma de descobrirem o *b*, está OK?
>
> Professora: Ahm... se eu substituisse aqui em cima, como é que ficaria a equação da reta? *y* igual a *f* linha de *x* zero vezes *x* mais *b*, e o que é o *b*? O *b* é *f* de *x* zero menos *f* linha de *x* zero vezes *x* zero.
>
> Professora: E isto parece assim um bocadinho complicado... mas eu passando este aqui para este lado... igual *f* linha de *x* zero, menos *f* linha de *x* zero vezes *x* zero... eu preciso de avançar a página, alguma dúvida até aqui?

$$y = mx + b$$
$$y = f'(x_0)\,x + b \qquad (x_0, f(x_0))$$
$$f(x_0) = f'(x_0) \times x_0 + b$$
$$b = f(x_0) - f'(x_0) \times x_0$$
$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0) \times x_0$$
$$y - f(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) \times x_0$$

Aluna: Está ali um *x* em cima e a professora pô-lo onde?

Professora: Espera aí... pronto... minha equação da reta é esta, certo?

Aluna: Certo.

Professora: Mas seu sei... como é que tu fizeste a bocado? Substituiste o *y* por e o *x* por ahm...

Aluna: Por um.

Professora: Por um, certo?

Aluna: Sim.

Professora: Portanto o que é o teu *x*... ao fim e ao cabo... quando tu tens um ponto estas são as coordenadas de um ponto... vais substituir ali o *x* por *x* zero e o *y* pelo *f* de *x* zero, ou seja, pela imagem do *x* zero... ok? E eu deduzia o que que era o *b*... o é isto aqui, assim... [destaca no texto], isto é o meu *b*.

Aluna: Uhum.

Professora: OK... depois o que é que eu fui fazer? Eu estou aqui tentar a chegar a outra equação que nós já falamos no ano passado... portanto se eu vier aqui acima... então fica o quê? *y* igual a *f* linha de *x* zero vezes *x* mais o *b*, que é esta coisa toda... passei este para este lado e ficou isto... e eu posso fazer o quê aqui? Por o quê aqui?

Aluna: Evidência.

Professora: Evidência o quê?

Aluno: [Inaudível].

Professora: Sim... desculpem-me lá, falta aqui um *x*... tens razão, foi a Rita?

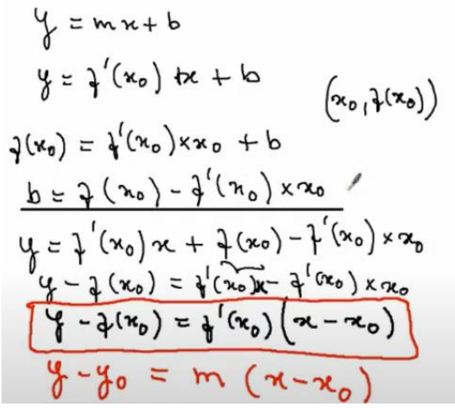
Aluna: Não, foi a Bruna.

Professora: Foi a Bruna... tens aqui razão... falta-me ali um *x* [a professora então procede a retificação – em destaque].

$$y = mx + b$$
$$y = f'(x_0)\,x + b \qquad (x_0, f(x_0))$$
$$f(x_0) = f'(x_0) \times x_0 + b$$
$$b = f(x_0) - f'(x_0) \times x_0$$
$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0) \times x_0$$
$$y - f(x_0) = f'(x_0)x - f'(x_0) \times x_0$$

Professora: E então agora o que eu posso fazer? Posso colocar aqui em evidência o... ahm... o *f* linha de *x* zero... não tinha reparado que não tinha posto o *x* ali... e ficará o que... *x* menos *x* zero...pronto, e esta expressão, que vai dar a equação da reta tangente também... e as vezes é mais fácil trabalhar por aqui. Se vocês se lembrarem, lembrem-se disso [escreve em vermelho logo abaixo]... do décimo ano que eu disse o ano passado que esta equação [aponta para a equação reduzida logo acima] também podia ser escrita desta forma [aponta para a expressão em vermelho]... Ao fim e ao cabo o que é o meu *y* zero... é a imagem do *x* zero... o que que é o *f* linha de *x* zero? é o *m*... vamos experimentar fazer por aqui, está bem?

Construção feita pela professora:



Professora: Isto é para chegar à dedução porque no 12.º ano... vocês estão a fazer exercícios... dá muito mais jeito ir por aqui.

(registo de aula, 18 de junho)

8.3.4.4 Encadeamento dos assuntos

O excerto anterior também dá conta do que Maria José chamou de "encadeamento" de assuntos matemáticos, ou seja, a dedução apresentada serviu também este propósito, como bem referiu: "mas achei interessante depois fazer esta dedução toda... achei que isso ficou bastante interessante... porque eu já tinha falado da equação reduzida nesta forma no 10.º ano... e assim fez um paralelismo" *(entrev. reflexão 3, p. 3)*. Nesse "paralelismo" parece ocorrer o encadeamento de um assunto já conhecido dos alunos, no caso concreto a equação reduzida da reta, com o assunto que está sendo estudado, neste caso a derivada da função em um ponto enquanto declive da reta tangente à função naquele ponto.

O excerto que apresento a seguir também vai neste sentido. Neste excerto de aula, a professora ao comentar sobre o assunto estudado naquele momento, nomeadamente as questões relativas à continuidade e à diferenciabilidade de funções faz um paralelo com a lógica, assunto já estudado pelos alunos em anos anteriores: "aqui foi relembrar um bocadinho a lógica para eles deduzirem que ela é descontínua, não tem derivada então se tiver derivada é contínua, pronto" *(entrev. reflexão 3, p. 3)*.

> Professora: Portanto eu estou a dizer se é descontínua isso implica que não tem derivada, certo? Estou fazendo a ligação de uma afirmação que implica a outra [e regista o seguinte]:
>
> $\sim q \Rightarrow \sim p$
>
> Professora: Isso é a mesma coisa que dizer o que? Que *p* implica *q*...
>
> $\sim q \Rightarrow \sim p$
> $p \Rightarrow q$
>
> Professora: Nós vimos que essas duas eram equivalentes... então como é que eu posso dizer isso de outra forma... uma função com derivada finita num ponto é contínua, está bem? Portanto o que que eu disse... ontem nós já vimos que se *f* é descontínua... se a função é descontínua então não tem derivada... mas esta afirmação nós vimos pela lógica que é equivalente a ter que o *p* implica *q*... então eu posso dizer o quê: Que se a função tem derivada finita em um ponto é contínua ou é diferenciável nesse ponto, OK?
>
> Professora: Portanto uma função real de variável real diz-se diferenciável em um ponto quando tem derivada finita nesse ponto... ahm... nesse momento vocês já podem ir até a página 107.
>
> *(registo de aula, 18 de junho)*

Em outro momento durante uma aula, Maria José chegou a afirmar de modo categórico que "o conhecimento em Matemática vai sendo encadeado" *(registo de aula, 18 de junho)* e por ocasião da penúltima aula assistida, durante uma conversa com os alunos sobre as aulas de Matemática (fazendo já uma avaliação destas aulas), a professora reforçou esta sua posição sobre o encadeamento entre os diversos assuntos: "este ano... não ficaram os conteúdos deste ano bem aprendidos... para ao ano dificilmente conseguirão... ahm... relembrar e conseguir perceber os conteúdos do próximo ano... *isso é uma cadeia matemática... e... o estudo é contínuo*" *(registo de aula, 24 de junho)*.

8.3.4.5 Fazendo revisões

Dentro do quadro do encadeamento entre os diversos assuntos matemáticos, Maria José parece conferir um papel significativo para as revisões que realiza em aula, conforme reforçou em uma das suas aulas:

> Portanto claro que sempre que nós damos uma nova matéria, *faço uma revisão*... eu hoje fiz uma revisão da última aula, mas ficamos aqui um bocadinho parados porque tinham esquecido a aula da quinta-feira passada e isso impediu que eu... ahm... por exemplo, eu tinha pensado ainda fazer um bocadinho mais... tinha planificado falar ainda de mais uma coisinha que não consegui... e isso não teve a ver aqui com o quadro, teve a ver porque eu fiquei aqui parada, assim, olha não responderam.
>
> *(registo de aula, 24 de junho)*

O excerto a seguir procura dar conta de uma destas revisões realizadas em aula pela professora. Na oportunidade a professora procura retomar o conceito de taxa média de variação, assunto tratado no dia anterior. Após realizado este momento de revisão e recomeço, ela passa então para a introdução de um novo conceito:

> Professora: Então vamos lá ver o que é que nós fizemos mais... no último dia... nós... deixe-me só inserir aqui mais uma página... nós falamos em duas coisas... em taxa média de variação e variação, lembram-se?
>
> Alunos: [Silêncio].
>
> Professora: O que que era a variação?
>
> Alunos: [Silêncio].
>
> Professora: O que que era a variação em um certo intervalo? Num intervalo *a b*... a variação seria o quê... o *f* de *b* menos o *f* de *a*, OK? [escreve no quadro interativo]
>
> Variação $[a,b]$
> $f(b) - f(a)$
>
> Professora: A taxa média de variação que corresponde à velocidade média... que é o declive da reta secante ao gráfico da função... portanto eu vou colocar aqui a função *f*, por exemplo... seria igual a ter *f* de *b* menos *f* de *a* sobre *b* menos *a*, OK? [escreve no quadro interativo]
>
> Variação $[a,b]$
> $f(b) - f(a)$
>
> $tmv_{[a,b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
>
> Professora: Até aqui está entendido? Então vamos passar para o outro conceito...

(registo de aula, 17 de junho)

8.4 Síntese

8.4.1 O percurso profissional e o contexto escolar

Maria José é professora de Matemática há 31 anos, tendo lecionado em cinco escolas diferentes. Está há 22 anos em uma escola da região metropolitana de Lisboa, onde leciona Matemática para o 3.º ciclo do ensino básico e ensino secundário, e atua como coordenadora de projetos do agrupamento. Identifica duas questões centrais da época em que era estudante que fizeram com que decidisse ser professora de Matemática: i) *o papel relevante desempenhado pelos seus professores*, especialmente os professores de Matemática, e ii) o contato, desde cedo, com *a experiência de ensino*. Define-se como sendo uma pessoa muito dinâmica e considera o dinamismo como uma de suas características centrais enquanto professora. Refere também que o que mais gosta no ensino é de estar com os alunos e do que menos gosta são as atividades administrativas e burocráticas.

No tocante ao contexto escolar, Maria José mostrou-se, nas diversas oportunidades, muito à vontade ao tecer comentários sobre a sua escola, demonstrando uma certa satisfação ao fazê-lo e também um aprofundado conhecimento da respetiva estrutura e das pessoas que lá trabalham. É de referir que, considerando o tempo total de docência da professora, mais de dois terços foram exercidos nessa escola, estando nela desde que se tornou professora efetiva. Quando solicitada a fazer uma caracterização da escola, indicou ser esta muito dinámica e organizada.

8.4.2 Conceções em relação ao ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário

Ao refletir sobre os tópicos de Cálculo Diferencial pertencentes ao currículo de Matemática A, Maria José mostra-se confortável com a ementa atual de conteúdos, não sugerindo qualquer acréscimo ou supressão. Entretanto, e tendo em atenção a situação atípica envolvendo a lecionação dessa temática na sua turma de 11.º ano, nomeadamente o fato das aulas terem sido realizadas a distância, considera que o tempo acabou por não permitir fazer tudo (e nem no formato) que tinha planeado.

De todos os tópicos, antes de lecionar, Maria José considerava que o mais difícil para os alunos seria a definição de derivada de uma função em um ponto, relacionando isso com a dificuldade que usualmente manifestam em abstrair o conceito e também à sua falta de maturidade. Contudo, o assunto apontado pelos próprios alunos como sendo o mais difícil foi a parte envolvendo limites. Atribuiu essa dificuldade aos constrangimentos resultantes da falta de tempo, o que levou a lecionar o referido tema sem o à-vontade que gostaria, e também à exigência de um maior trabalho autónomo dos alunos (trabalho este que nem todos acabaram por fazer).

Ao refletir sobre o que considera essencial para uma boa aprendizagem de Cálculo Diferencial, Maria José refere que o professor deve, idealmente, abordar quatro aspetos: (i) *a parte gráfica/visual*; (ii) *a parte algébrica*; (iii) o trabalho com um *exemplo prático*; e (iv) a *resolução de problemas* envolvendo a aplicação dos conceitos em situações práticas. Embora considerando como não sendo exclusivo para o ensino do Cálculo Diferencial, alude igualmente a necessidade de existir um *bom relacionamento entre o professor e os alunos*. Também visualiza grandes possibilidades no uso da tecnologia no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial, destacando a calculadora gráfica e, especialmente, o Geogebra. Destaca que, com o auxílio da tecnologia, o aluno pode ir mais além no estudo do tema e pode ser mais criativo do que se não utilizasse a tecnologia.

8.4.3 Aspetos centrais da prática letiva no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial

No que se refere à prática de sala de aula, tendo em conta as observações de aula e as entrevistas realizadas, foi possível identificar cinco aspetos principais: *i) interação entre os aspetos gráfico/visual e algébrico*, *ii) discutindo a resolução dos alunos*, *iii)* *dedução algébrica*, *iv) encadeamento dos assuntos*, e *v) fazendo revisões*. As aulas observadas em que um conceito novo era trabalhado apresentaram uma estrutura em três momentos: i) um *momento inicial* que podia tomar a forma de um diálogo preliminar entre professora e os alunos sobre o assunto a estudar, ou ainda ser concretizado por meio da discussão de um exercício ou uma revisão, situações estas em que se retomava a aula anterior; ii) em um segundo momento ocorria a *apresentação do conceito*, sendo concretizado pela professora no quadro interativo ou através de um vídeo que era pausado pela professora para questionar os alunos ou realizar clarificações; e iii) por fim, era dinamizada a *resolução de exercícios*, sendo estes realizados de modo conjunto pela professora e os alunos ou então ocorria a partilha da resolução de um aluno, o que era problematizado pela professora, realizando-se, ao final, uma sistematização escrita.

Capítulo 9

Conclusão

Este capítulo sistematiza as principais ideias que emergiram a partir da investigação realizada, tendo presente que, sendo este um estudo qualitativo dotado de um forte cariz exploratório, as conclusões aqui apresentadas têm sobretudo a preocupação de tentar ampliar a compreensão e o conhecimento sobre o fenômeno em estudo. E é justamente por ter presente esta preocupação que as ideias aqui sistematizadas envolvendo os participantes do estudo não têm a intenção de estabelecer qualquer tipo de comparação entre eles, avaliá-los ou ainda sugerir que algum tipo de generalização possa ser feita para o conjunto dos professores de Matemática.

O capítulo inicia-se com uma breve síntese do estudo, onde comento a incidência da investigação, a metodologia utilizada e os pressupostos assumidos, bem como os objetivos e as questões orientadoras do estudo. Em seguida, apresento as conclusões alcançadas, dividindo-as em três secções: (i) na primeira abordo as questões relativas ao percurso profissional e ao contexto escolar dos participantes; (ii) a segunda secção é dedicada às conceções dos professores em relação ao ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário; e (iii) na terceira secção trato das questões respeitantes à prática dos professores no ensino de tópicos de Cálculo Diferencial. Finalmente, apresento as considerações finais e algumas implicações do estudo.

9.1 Breve síntese do estudo

Esta investigação está inserida na área de pesquisa sobre o professor de Matemática e tem como objeto principal de análise as suas conceções em relação ao ensino de Cálculo Diferencial no ensino secundário. Outro objeto de interesse assumido na investigação é a prática profissional do professor no ensino deste tema. Ademais, algumas assunções teóricas são tomadas. Em primeiro lugar, o estudo assume o pressuposto de que as conceções possuem uma natureza essencialmente cognitiva (Ponte, 1992), ou seja, que as conceções atuam como uma espécie de filtro que permitem ao professor interpretar e dar sentido às diferentes situações com que se defronta no seu dia a dia, constituindo-se assim como elementos indispensáveis para estruturar e dar sentido e significado às coisas (Guimarães, 2003).

Desse modo, as conceções assumem um lugar de destaque na maneira como o professor define as suas opções didáticas e na forma como toma decisões na sua prática de sala de aula, sem, contudo, assumir que as conceções influenciam as práticas de modo direto e linear. Outro pressuposto aqui assumido é de que a relação entre conceções e prática é complexa, adimitindo-se a existência de uma influência mútua entre entre esses dois domínios. Finamente, um terceiro pressuposto assumido na investigação é o protagonismo curricular do professor (Canavarro, 2003) no trabalho que este realiza com um tema específico do programa de Matemática A, nomeadamente o Cálculo Diferencial, ou seja, assume-se que o professor não representa um elemento passivo que simplesmente coloca em prática um conteúdo do programa. Antes pelo contrário, é um profissional dotado de uma identidade e possuidor de um conhecimento próprio.

Tendo em conta esses pressupostos, a investigação foi realizada com o objetivo de identificar e compreender as conceções dos professores de Matemática sobre o ensino de Cálculo Diferencial (CD) no ensino secundário bem como os aspetos centrais da sua prática profissional no ensino deste tema. Com isso, dois aspetos ficam bem identificados. O primeiro, e o mais preponderante neste estudo, diz respeito às conceções do professor e o segundo, à sua prática.

Assim, tendo em vista estes dois aspetos, procuro responder às seguintes questões:

1) *Quais as conceções do professor em relação ao ensino de CD no currículo escolar do ensino secundário (Matemática A)?*

- Qual a conceção do professor sobre a inserção de tópicos do CD no currículo do ensino secundário?

- Qual a conceção do professor sobre o tempo destinado para sua abordagem?

- Qual a conceção do professor sobre a abordagem dos tópicos do CD?

- De que maneira o professor encara a articulação dos tópicos de CD com outras áreas do conhecimento?

- Qual a conceção do professor sobre o potencial de dispositivos tecnológicos (tais como calculadoras gráficas ou Ambiente de Geometria Dinâmica) como facilitadores da aprendizagem? Quais as razões para se fazer (ou não) uso destes dipositivos em aula?

2) *Como se caracteriza a exploração didática dos tópicos de CD pelo professor em termos de estrutura adotada, da abordagem seguida, das tarefas propostas e das representações matemáticas usadas?*

- Como as aulas são estruturadas?

- Qual é a natureza das interações ocorridas nas aulas (comunicação)?

- Que ênfases são conferidas pelo professor durante as aulas?

- De que tipo e como são trabalhadas as tarefas propostas pelo professor durante as aulas?

- De que forma os tópicos de CD são explorados do ponto de vista das representações? Existe a preponderância de alguma forma para representar?

Para além dos dois aspetos referidos, o estudo também incidiu sobre o percurso profissional e sobre o contexto escolar dos professores. Isso foi realizado no sentido de oferecer elementos que poderiam se prestar à contextualização e à compreensão das conceções e práticas dos professores à luz destes percursos e contextos.

O objetivo do estudo e a necessidade da apreciação dos significados produzidos pelos professores, levou-me a escolher uma opção metodológica qualitativa inscrita em um paradigma interpretativo. Para concretizá-la, optei pela realização de estudos de caso, considerando três professores que lecionam Matemática A para o ensino secundário: João, Mariana e Maria José, professores com uma considerável experiência de ensino da Matemática e muito bem integrados nas respetivas escolas, onde, aquando da recolha de dados, todos estavam há mais de dez anos .

Por meio da observação direta de aulas e também da realização de entrevistas, cada professor deu origem a um estudo de caso. Em cada caso realizei um breve retrato do docente incidindo sobre o seu percurso profissional e o contexto escolar. Na sequência abordei as questões concernentes às conceções e à prática do professor, sendo estes dois últimos ilustrados com diversos excertos referentes a episódios da sala de aula ou então a recortes de entrevistas. Privilegiei, deste modo, a dimensão narrativa do discurso na linguagem dos próprios professores e procurei, como o próprio paradigma metodológico sugere, proceder à sua interpretação. Após escrito, cada caso foi enviado para a apreciação dos professores tendo em vista dois objetivos: (i) a sua validação quanto a interpretação por mim realizada e (ii) também como salvaguarda das questões de ordem ética que anteriormente assumi com cada um dos professores.

9.2 Conclusões

9.2.1 O percurso profissional e o contexto escolar

Nesta seção sistematizo as questões relativas ao percurso profissional e ao contexto escolar a partir da perspetiva particular de cada um dos três professores participantes do estudo. Tanto em relação ao percurso profissional quanto ao contexto escolar, procuro identificar elementos de homogeneidade (convergências e semelhanças), bem como elementos de heterogeneidade (divergências e contrastes).

9.2.1.1 O percurso profissional

Mariana, João e Maria José, os três professores participantes deste estudo, são professores de Matemática em escolas secundárias da região metropolitana de Lisboa, sendo que, aquando da recolha dos dados, João leciona somente para este nível de ensino e as duas professoras, para além do ensino secundário, também lecionam Matemática para o ensino básico. Os três professores são licenciados em Matemática no ramo educacional. Mariana realizou os seus estudos universitários na Universidade do Porto e os outros dois concluiram esta etapa formativa na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, tendo Maria José iniciado os seus estudos ainda no Funchal.

Em comum, os três professores possuem um tempo considerável de experiência no ensino de Matemática tanto no ensino secundário como no ensino básico. Maria José é a mais experiente, possuindo 31 anos na atividade docente, sendo logo seguida por João com 20 anos e Mariana com 18 anos. Entretanto, a escolha em vir a ser professor foi distinta entre os três professores. João refere que a Matemática foi a sua segunda opção quando pretendia realizar os seus estudos universitários, sendo a área de Psicologia a sua preferida naquela ocasião. Com Mariana ocorreu algo similar: por influência de seu pai, pretendia realizar o curso de Engenharia Civil, mas mudou de ideia ao final do ensino secundário por influência de seu professor explicador, embora, como fez questão de salientar, a busca por aulas de explicação na altura não se deu porque possuía alguma dificuldade nessa disciplina, mas estava relacionada à preparação para o exame de Matemática. Já em relação a Maria José, o processo de escolha da profissão foi bem diferente, referindo que sempre quis ser professora de Matemática e que jamais cogitou seguir outra profissão.

O gosto pela Matemática e, nos casos das duas professoras, a própria escolha de serem professoras remonta às experiências enquanto estudantes no ensino pré-universitário. Comum aos três casos é a influência (tanto pela negativa quanto pela positiva) desempenhada pelos seus professores de Matemática no ensino pré-universitário. Em relação a este passado enquanto estudante no ensino pré-universitário, João refere que uma situação em especial acabou por espoletar em si o desejo em querer estudar Matemática por conta própria. Segundo ele, tal fato teve a ver com uma nota negativa recebida em Matemática logo no início do ensino secundário, nota esta que considerou injusta, pois, como fez questão de referir, outros alunos em situações análogas à sua tiveram outra classificação. Então, usando uma expressão sua, “como vingança” decidiu estudar Matemática sozinho, passando a ter um bom aproveitamento na disciplina a partir de então.

Mariana também refere que tinha discordâncias com a sua professora de Matemática do ensino secundário. Entretanto, não optou, a exemplo de João, por uma forma autoditada de estudo nessa disciplina. Foi em busca de aulas particulares tendo em vista a sua preparação para os exames finais, as chamadas explicações, ocasião em que teve contato com um professor que veio a mudar a sua relação com a disciplina. Inclusivamente, credita a esta experiência a sua “viragem” no processo de escolha profissional, ou seja, precisamente a partir dessa experiência, e por influência do professor, resolveu abandonar a ideia de cursar Engenharia Civil e querer cursar Matemática no seu ramo educacional.

Com Maria José aconteceu justamente o contrário dos outros dois professores, referindo que enquanto estudante nunca sofreu um desencantamento com a Matemática ou com algum professor e que possuiu, ao longo de toda a sua trajetória pré-universitária, excelentes professores. Relatou com muita vivacidade as suas memórias sobre todos seus professores de Matemática, deixando muito claro que todos, sem exceção, acabaram por influenciá-la de alguma maneira em relação ao fato de querer vir a ser professora (com uns vindo a exercer mais influência do que outros). Ao se referir a todos os professores que teve (não só os de Matemática) chegou a vincar que os bons professores, para além de deixarem marcas, são também uma referência para toda a vida. Uma dessas marcas, segundo referiu, deixada por uma de suas professoras foi justamente o fato de procurar ser uma pessoa dinâmica e que busca sempre aprender coisas novas, características que utilizou para se auto-definir atualmente enquanto professora.

Quanto ao início na profissão, todos referiram a passagem por muitas escolas. Mariana, que é natural da região Norte, chegou a fazer um verdadeiro périplo por Portugal, passando por cinco escolas diferentes no espaço de cinco anos, percorrendo neste período as regiões Norte, Centro e Sul do país. João, por seu turno, refere que buscou logo no início da carreira escolas localizadas em zonas mais “tranquilas”. Este professor refere como muito positiva a experiência logo após o período de estágio, mencionando que naquela altura ainda tinha dúvidas quanto a prosseguir na profissão docente. Entretanto, refere que teve boas turmas e colegas que classificou como “excelentes”, o que foi determinante, segundo observou, para decidir-se pela continuidade na carreira docente. Maria José refere um início na profissão muito atribulado por fatores diversos: estava em uma escola multicultural, trabalhava e estudava e ainda possuia alunos com necessidades especiais. Somado a isso tudo, ainda refere a questão da adaptação a uma cidade maior, pois vinha de uma cidade menor e com menos diversidade. Passado este período inicial, a professora confere uma importância muito grande ao seu período de estágio, classificando-o como muito marcante do ponto de vista formativo, ocasião em que aprendeu imenso e pode experimentar algumas novidades na altura, destacando o uso de jogos e também do uso da calculadora gráfica no ensino. Também reconhece, dentro da realização do estágio, o papel importante desempenhado por uma de suas orientadoras que acabou por influenciá-la na forma de ensinar, conforme observou, especialmente no espaço a dar ao aluno nas aulas e também no incentivo do raciocínio e do pensamento crítico do aluno.

As motivações e a forma de se estar na profissão atualmente são também bastante distintas conforme cada um dos professores. João parece sentir-se muito à vontade na profissão e a motivação para isso, segundo menciona, reside no fato de poder estar junto dos alunos e da possibilidade de verificar que estes estão a crescer e a construir o seu próprio conhecimento. Maria José segue em uma mesma direção, sendo mais enfática vincando que a paixão de sua vida é ensinar Matemática, sentindo-se muito motivada na profissão, o que a faz sempre ir em busca do que chamou de "algo mais". Uma posição diametralmente oposta é partilhada por Mariana, referindo que está menos motivada do que gostaria e alude, para isso, à falta de valorização a nível financeiro da carreira docente (menciona que os salários estão congelados na carreira há quase dez anos) e também o pouco respeito tanto dos alunos como da sociedade em geral pela classe docente. Devido a estes fatores, Mariana chega inclusivamente a colocar em questão o fato de continuar na profissão, aventando a possibilidade de uma outra alternativa no curto prazo.

Quando convidados a refletir sobre os momentos mais marcantes e significativos ao longo de suas carreiras profissionais, os três professores aludiram momentos distintos. João referiu como muito significativo o momento imediatamente após o estágio (em que referiu ter tido turmas e colegas de trabalho excelentes), fato que assumiu como determinante em querer continuar como professor. Mariana, por seu turno, fez referência ao período anterior ao estágio, momento em que esteve em muitas escolas e considerou como significativo o contato com outros colegas que estavam em uma situação similar à sua, nomeadamente o fato de estarem longe de casa. Por fim, Maria José reconhece o período de estágio como muito relevante para a sua fomação enquanto professora, destacando o contato que teve com uma de suas orientadoras. Embora os momentos tidos como mais significativos referidos pelos três professores sejam distintos, um ponto comum e a sublinhar é o fato destes envolverem o contato com outras pessoas (os próprios colegas de trabalho no caso de João e Mariana e a orientadora de estágio no caso de Mariana). Esses momentos significativos vivenciados pelos professores em contextos sócio-culturais parecem ter um importante papel na formação de suas conceções conforme referido por Ponte (1992), que concebe a formação das conceções como um processo tanto individual como social. Essas evidências estão também de acordo com

Cury (1999), que evidencia a importância das influências sócio-culturais que os professores sofrem ao longo de suas vidas na forma como concebem a Matemática.

Por fim, é possível afirmar que o trabalho envolvendo o percurso profissional dos professores superou em muito as expectativas iniciais. Primeiramente, os resultados dessa investigação, a exemplo dos estudos de Thompson (1982), Cury (1999), Handal (2003) e Barkatsas (2008), evidenciam a influência desempenhada pelas experiências prévias dos professores enquanto alunos nas suas conceções sobre a Matemática e também sobre o ensino.Os diversos momentos de reflexão dos professores sobre o seu passado mostraram-se também extremamente importantes na busca por uma maior compreensão sobre as suas experiências adquiridas. Este conjunto de experiências parece funcionar como uma espécie de capital adquirido pelos professores (Canavarro, 2003) e possui um papel de relevo no significado que estes dão atualmente à sua profissão. Por outro lado, esse trabalho mostrou-se extremamente gratificantes para os professores, que demonstraram muito gosto em falar de si, das pessoas que encontraram na profissão e também dos acontecimentos marcantes das suas vivências profissionais e escolares. Ademais, esse momento em que o investigador atuou como um ouvinte atento também serviu para aumentar o grau de confiança e cumplicidade entre investigador e investigado, algo imprescindível nos contornos assumidos dentro desta investigação.

9.2.2.1 O contexto escolar

Traço comum aos três professores é o tempo considerável de docência que cada um possui na escola atual e também o fato de cada um deles, para além da docência em Matemática, também exercer alguma atividade de coordenação/representação ou de gestão aquando do momento da recolha de dados. Mariana e João possuem em torno de dez anos de docência na mesma escola, sendo que a primeira é representante do grupo da Matemática e o segundo, para além de ter ocupado recentemente tal função, exerce um cargo de gestão, o cargo de adjunto do diretor. Maria José, por seu turno, está a 22 anos na escola atual e exerce a função de coordenadora de projetos. Estas funções para além da docência, parecem colocar cada um dos professores em uma posição privilegiada para considerar o contexto escolar, instrumentalizando-os ainda mais na tarefa de perspetivar a escola onde desempenham as suas funções. Entretanto, os pontos em comum param aí, de modo que a perspetiva de cada um em relação à escola mostra-se bastante distinta.

Mariana e João possuem visões contrastantes sobre a escola em que atuam. Para Mariana a escola é pouco dinâmica e associa esta condição a três fatores básicos: (i) desmotivação docente; (ii) desmotivação dos alunos; e (iii) falta de investimentos. A professora reforça que contribui muito para essa falta de dinamismo na escola o fato de, no momento, cada professor estar muito centrado em si próprio e, fazendo uma auto crítica, também se coloca nessa condição. João, por seu turno, possui um ponto de vista um tanto diferente, considerando que a escola tenta ser cada vez mais dinâmica, embora reconheça alguns constrangimentos, nomeadamente as dificuldades de ordem orçamental e também o envelhecimento da classe docente. Quanto à dupla função desempenhada, de docente e de gestor, João deixa claro a sua preferência pela primeira, referindo que tão logo quanto possível pretende voltar a atuar de modo exclusivo como docente. Entretanto, pondera que o professor, ao atuar em uma função de gestão, para além das dificuldades inerentes, passa a ter uma visão mais abrangente como as coisas funcionam na dinâmica escolar e acredita que todo o docente deveria passar por esta experiência para ter uma noção mais ampla da complexidade que envolve o ambiente escolar. Mariana, por sua vez, sente que muitas vezes o fato de ser representante do grupo de Matemática é mal entendido por alguns colegas. Cita, a título de exemplo, uma formação da qual participou e teve que assumir uma postura de delegar funções e tarefas aos colegas, embora tenha referido que estava a participar daquela formação na condição de colega e não como representante de grupo.

Maria José, refletindo sobre a sua escola, tendo em conta os seus já largos anos de experiência na instituição, caracteriza-a como sendo muito organizada e dinâmica, referindo o grande número de projetos e concursos que a escola tem vindo a participar nos últimos anos. A professora demonstra ter uma identificação muito grande com a escola justamente por esta questão do dinamismo (que considera ser uma característica tanto da escola como de si própria). Tal dinamismo aparece muito associado às atividades que exerce no âmbito da coordenação de projetos e nas parcerias que consegue realizar. Em uma dessas parcerias, por exemplo, conseguiu que seus alunos de 11.º ano participassem de uma oficina sobre o Geogebra no laboratório de uma universidade (ocasião que assiti), sendo que tal só foi possível por meio da parceria que a professora mantém, já há algum tempo, com a professora universitária responsável pelo laboratório.

Considerando os três casos em conjunto é possível concluir que o contexto escolar desempenha um papel essencial no modo como cada um dos professores vivencia a sua profissão. E dentro dessa forma particular de vivenciar a profissão docente, o contexto escolar pode atuar como algo limitante e representar alguns constrangimentos ou, por outro lado, pode significar oportunidades para o desenvolvimento profissional, como acontece com João que refere como uma mais valia a oportunidade de atuar em duas esferas: como docente e como gestor; ou como ocorre com Maria José no seu trabalho na coordenação de projetos e nas parcerias que estabelece. No caso desta última professora, uma fonte de motivação profissional parece advir justamente do trabalho colaborativo que desenvolve com os colegas (no âmbito dos projetos que coordena); das parcerias que consegue estabelecer para além da escola e também do reconhecimento que diz receber pelo trabalho realizado (uma forma de reconhecimento apontada pela professora ocorre quando a escola é premiada em algum concurso do qual participa).

9.2.2 Conceções dos professores em relação ao ensino do Cálculo Diferencial

Dou atenção nesta secção às principais semelhanças e diferenças que os três professores participantes manifestam tendo em vista um dos aspetos centrais deste estudo, nomeadamente as conceções do professor em relação ao ensino do Cálculo Diferencial. Desse modo, sistematizo as características fundamentais que marcam a forma particular com que cada professor perspetiva o ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário. A secção está organizada em três partes: (i) visão dos professores sobre a presença dos tópicos de Cálculo Diferencial no programa de Matemática A do ensino secundário; (ii) perspetiva dos professores sobre a abordagem ideal a dar no seu ensino e (iii) perspetiva dos professores sobre o emprego da tecnologia no ensino do Cálculo Diferencial.

9.2.2.1 Presença de tópicos de Cálculo Diferencial no ensino secundário

Esta subsecção é dedicada às perspetivas dos professores em relação à presença de tópicos de Cálculo Diferencial no programa de Matemática A do ensino secundário. Aborda, em um primeiro momento, a perspetiva geral dos professores em relação a tal presença, sendo seguida pelas visões dos professores sobre a ementa de tópicos e o tempo disponível para a lecionação. Por fim, contempla a perspetiva dos professores em relação às dificuldades e/ou facilidades encontradas pelos alunos no estudo de tais tópicos.

Perspetiva geral dos professores. Um ponto de convergência nos três professores é a concordância sobre a presença de tópicos de Cálculo Diferencial nos programas de Matemática A do ensino secundário. Entretanto, as razões aludidas pelos três professores para justificar esse posicionamento apresentam convergência e também divergência. Começo pelo ponto de concordância dos professores.

Cada um dos três professores parece conceber com uma certa naturalidade a presença de tais tópicos no programa de Matemática A. Uma razão para isso parece ser o fato do Cálculo Diferencial estar nos programas de Matemática A há bastante tempo conforme referem Aires e Vásquez (2005) para o conceito de derivada e Santos (2010) para o conceito de limite. Mariana, inclusivamente, refere que esses tópicos sempre estiveram inseridos no programa e considera até difícil fazer uma apreciação sobre a pertinência, dizendo que estaria em uma melhor posição para fazê-la caso tivesse a experiência da lecionação do programa sem e depois com os tópicos em questão. Para vincar o quanto é natural para si a presença de tais tópicos, relembra (da época em era aluna do ensino secundário) que quando prestou o exame final de Matemática, fato ocorrido há mais de 20 anos, a única questão que errou foi justamente uma questão que envolvia o estudo da derivada.

Vejamos agora os aspetos específicos de cada um dos professores. Maria José, ao justificar o seu ponto de vista, menciona dois fatores. Um primeiro está relacionado com a preparação dos alunos para o prosseguimento de seus estudos, nomeadamente no ensino superior. Entretanto, logo pondera que, sendo esta uma primeira abordagem, esses conteúdos devem ser introduzidos com “calma” para que fiquem bem assentes. Outro fator mencionado pela professora é que o conhecimento de tais tópicos faz parte do que chamou de “cultura geral do indivíduo”, reforçando que nunca é demais saber sobre alguma coisa nova.

Mariana, por seu turno, refere três razões principais para justificar a presença dos tópicos de Cálculo Diferencial nos programas de Matemática A. Em primeiro lugar, segundo a professora, tais tópicos dão um sentido maior para assuntos que os alunos já estudaram, tal como ocorre com o estudo da função quadrática, em que os alunos, sem o Cálculo, não fazem ideia do porquê da concavidade do gráfico ser voltada para cima ou para baixo. Em segundo lugar, visualiza a potencialidade para se realizar, no 12.º ano, o estudo analítico de uma função, mencionando as possibilidades para a construção de um esboço gráfico para uma função dada algebricamente. Por fim, refere que tal presença faz todo sentido pelo fato de a Matemática A ser dirigida a alunos que, de um modo geral, pretendem realizar cursos que terão as disciplinas de Cálculo e Álgebra.

A justificativa apresentada por João vai numa linha muito similar às duas primeiras razões apresentadas por Mariana. Para este professor, os tópicos de Cálculo Diferencial permitem mostrar ao aluno que "há uma teoria em que tudo se assenta" e para exemplificar esse seu ponto de vista, cita que com o Cálculo Diferencial não se estuda uma função "só por estudar", mas que os alunos conseguem perceber que há mecanismos relacionados ao Cálculo que permitem, por exemplo, encontrar os máximos e mínimos de uma função e com isso conseguem perceber que há uma teoria subjacente aquele resultado encontrado.

Os três professores partilham assim uma concordância com a presença de tópicos de Cálculo Diferencial no programa de Matemática A do ensino secundário e parecem ver tal inserção com certa naturalidade, dado que a presença já ocorre desde a época em que eram alunos. A justificativa referente à continuidade dos estudos no ensino superior é referida por Mariana e por Maria José, sendo que está última ainda refere que o estudo dessas temáticas também faz parte da cultura geral do indivíduo. Outro ponto de justificativa comum é o apresentado por Mariana e João que referem que o estudo de temas ligados ao Cálculo Diferencial permite aos alunos uma maior compreensão de outros assuntos matemáticos já estudados, citando o caso da função quadrática, em que existe uma teoria subjacente (relacionada ao Cálculo) que explica determinadas regras (como é o caso da concavidade do gráfico da função quadrática).

Sobre a ementa de tópicos e o tempo disponível. Todos os três professores parecem concordar com a atual ementa de tópicos de Cálculo Diferencial presentes no programa de Matemática A, não mencionando a necessidade do acréscimo ou supressão de alguma temática específica. Entretanto, aquando da coleta de dados, havia a possibilidade do acréscimo no programa da parte relativa ao Cálculo Integral com a introdução das Primitivas no 12.º ano. Esta questão mereceu a reflexão de João que estava, naquele momento, a lecionar para o 12.º ano. Na visão deste professor, caso tal inclusão se concretizasse seria algo muito complicado de se gerir tendo em conta o tempo disponível para a lecionação. Chegou inclusivamente a vincar que, em caso de inclusão, simplesmente não seria possível "lecionar com significado". Segundo refere, somente com os tópicos de Cálculo Diferencial já foi necessária uma reorganização da escola tendo em vista a disponibilização de um período semanal a mais de Matemática para o 12.º ano. Para o professor, tal deliberação ocorreu devido a três motivos: i) a turma estava em atraso com o conteúdo de derivadas, temática esta que deveria ter sido lecionada ainda no 11.º ano; ii) no 12.º ano os alunos fazem o exame final de Matemática A; e iii) a existência de uma única turma de 12.º ano na escola, o que facilitou a gestão desse crédito horário.

Mariana, por seu turno, refere que as Primitivas estavam como um ponto facultativo e, por não fazerem parte dos exames finais, praticamente não eram lecionadas por nenhum professor. No tocante ao tempo, a professora menciona que, antes de se ter mais aulas sobre o Cálculo Diferencial, considera como mais importante os alunos contarem com aulas de reforço em contexto extra aula, as quais poderiam funcionar, segundo a sua perspetiva, com um professor de Matemática a tirar dúvidas e auxiliar os alunos, que, por conta própria, procurassem esse serviço de apoio. Porém, na sequência também refere que isso seria muito difícil de se concretizar devido à falta tanto de professores como de crédito horário para o efeito.

Maria José parece seguir uma linha semelhante a Mariana, uma vez que concebe como importante algum reforço ou revisão em contexto extra sala de aula e com os alunos a buscarem tal atendimento por sua livre e espontânea iniciativa. Entretanto, para além de reconhecer como sendo importante tal apoio, procura concretizá-lo na medida do possível. Refere que já se reuniu com a sua turma de 10.º ano para fazer uma revisão geral fora do período letivo, ocasião que contou, segundo referiu, com uma expressiva participação dos alunos. Dado o êxito da experiência, refere que pretende fazer isso novamente com os mesmos alunos (agora no 11º ano), reforçando que a data sempre é acordada entre alunos e professora.

Assim, os três professores concordam com a atual ementa de tópicos de Cálculo Diferencial presentes no programa de Matemática A do ensino secundário. Entretanto, tanto João como Mariana parecem ser contrários a inserção das Primitivas no 12.º ano.

No tocante ao tempo, cada professor procura uma solução alternativa. No caso de João foi possível a atribuição de um crédito horário suplementar e a turma passou a contar com um período semanal a mais. Já Mariana e Maria José enfatizam que, para além de se ter mais períodos de aulas, melhor seria propiciar um atendimento aos alunos em um contexto extra aula, tendo os alunos a possibilidade de escolher frequentar ou não esses atendimentos.

Dificuldade ou facilidade para os alunos. No que concerne à questão de o aluno encontrar facilidade ou dificuldade no estudo dos tópicos de Cálculo Diferencial, a opinião dos três professores mostra-se bastante distinta. Na visão de Mariana, os tópicos referidos não representam uma dificuladade a mais para os alunos. Esta professora acredita que a dificuldade dos alunos não está diretamente relacionada com os tópicos de Cálculo Diferencial em si, mas sim no que está subjacente e exemplifica essa situação mencionando a dificuldade dos alunos com as operações envolvendo diferentes equações aquando do cálculo dos zeros da função. A dificuldade dos alunos relacionada ao conceito de função, recordemos, também é identificada por Olímpio Junior (2006) e por Ribeiro e Paulin (2020) com estudantes de Matemática ingressantes no ensino superior.

João, entretanto, reconhece que o trabalho inicial com o Cálculo Diferencial no ensino secundário é um tanto "teórico" e, por isso, mesmo os alunos podem achá-lo, logo no princípio, um pouco complicado. Entretanto, refere que após esta parte mais teórica e o professor disponibilizando um tempo considerável para a revisão, para o reforço e também quando se chega às aplicações, os alunos sentem-se mais à vontade no estudo. Refere também que os alunos podem encontrar algumas dificuldades com a linguagem simbólica e formal e que, uma preocupação sua é justamente a de não carregar muito nos formalismos, pelo menos num fase inicial do estudo.

Maria José, por seu turno, refere que dentre todos os tópicos de Cálculo Diferencial aquele em que os alunos sentem mais dificuldade é na definição de derivada de uma função em um ponto como sendo um limite. Na visão da professora esse conceito é um tanto abstrato e aliado ao que chamou de "falta de maturidade" dos alunos do ensino secundário, esse conceito acaba por ser o mais difícil para os alunos.

Assim, resumidamente, as visões dos três professores sobre a questão dos alunos terem facilidade ou dificuldade no estudo dos tópicos de Cálculo Diferencial vão desde o reconhecimento da não existência de dificuldades, ou quando estas existem, têm relação ao que está subjacente (conforme referido por Mariana), passando pelo reconhecimento de uma certa dificuldade com o formalismo durante o trabalho inicial sem, contudo, idendificar algum tema em específico (referido por João) e, finalmente, o reconhecimento da dificuldade dos alunos em um conceito específico, nomeadamente a definição de derivada de uma função como sendo um limite (conforme assinalado por Maria José).

9.2.2.2 Abordagem didática no estudo dos tópico de Cálculo Diferencial

Esta subsecção centra-se na visão dos professores sobre a abordagem didática que consideram como sendo a ideal no estudo dos tópicos de Cálculo Diferencial, dando atenção ao que acreditam ser o essencial para uma boa aprendizagem e também como perspetivam a articulação de tais tópicos com outras áreas do conhecimento.

O essencial para uma boa aprendizagem. Ao refletirem sobre o que consideram essencial para uma boa aprendizagem de Cálculo Diferencial no ensino secundário, os professores apresentam pontos comuns e também contrastantes. Um ponto de convergência apresentado pelos três professores parece ser uma maior ênfase nos aspetos conceituais do que nos aspetos procedimentais, embora os papeis a serem desempenhados pelo professor e pelos alunos sejam diferentes conforme a visão de cada um.

Para Mariana, a abordagem ideal a ser dada ao ensino do Cálculo Diferencial deve contemplar três fases. Em uma primeira abordagem, os alunos devem perceber os conceitos que estão envolvidos. A professora reforça que durante esta primeira abordagem, a mensagem deve ser passada aos alunos sem grandes formalidades e com um enfoque mais intuitivo. Em uma segunda abordagem, considera importante que o professor realize vários exemplos de aplicação do conceito tratado na fase anterior. E, por último, considera essencial que os alunos realizem um leque variado de exercícios em que seja possível realizar o encadeamento dos vários conceitos tratados.

As três fases que Mariana considera essenciais para uma boa aprendizagem do Cálculo Diferencial parecem estar bastante centradas na figura do professor. As duas primeiras são mais explícitas: o professor deve "passar a mensagem"; o professor deve "realizar vários exemplos". E, mesmo a terceira fase, o papel conferido ao aluno está longe de uma posição de centralidade. Entretanto, mesmo o aluno não ocupando uma posição de centralidade em nenhuma das três fases, o enfoque proposto pela professora está mais baseado na compreensão dos conceitos do que na parte procedimental. A professora reforça que os alunos devem "perceber os conceitos" e, no trabalho com os exercícios, realizar o encadeamento das várias matérias, desenvolvendo, segundo sua visão, o raciocínio e a resolução de problemas. Assim, considerando as orientações fundamentais relativas às conceções pedagógicas dos professores do modelo de Kuhs e Ball (1986), Mariana parece situar-se entre duas orientações: (i) *centrada no conteúdo com ênfase na compreensão conceptual* – onde ocorre uma ênfase por parte da professora na compreensão dos alunos sobre as relações entre os vários conceitos e também na lógica relacionada aos procedimentos*; (ii) centrada na organização da sala de aula*- com a professora a desempenhar um papel ativo e a dirigir todas as atividades de sala de aula, apresentando de modo claro o material da aula para a toda a turma. Aos alunos cabe ouvir atentamente a professora e cooperar seguindo as instruções.

Ao refletir sobre o que considera ideal para uma boa aprendizagem do Cálculo Diferencial, João parece indicar um foco maior no aluno, relacionando ações que idealmente devem ser realizadas pelo professor com as ações a serem realizadas pelo aluno. Na suavisão, o professor não deve complicar logo no início aquando do trabalho com o Cálculo. Esse "não complicar" significa essencialmente não assustar os alunos com o excesso de formalismo, ocasião em que o professor deve utilizar-se de exemplos simples a fim de que os alunos possam perceber os conceitos essenciais e não simplesmente decorá-los. Outro ponto que destaca é o fato de o professor dar confiança ao aluno, sendo que em sua visão a falta de confiança dos alunos é um grande problema para a aprendizagem. Esse "passar confiança" do professor está relacionado com o aluno ter um espaço para praticar (que denomina de espaço de experimentação) e, sobretudo, não desistir. Nesse momento de experimentação, segundo refere, os alunos podem tentar, errar, tentar de novo, além de poderem trocar impressões com os colegas ou receber algum auxílio do professor.

Maria José, por seu turno, antes de ponderar a respeito da abordagem que considera ideal para o ensino do Cálculo Diferencial, faz questão de mencionar o que pretende para os alunos. Em aspetos gerais, refere que os alunos devem desenvolver a maturidade, o raciocínio matemático e aprender a pensar a Matemática. A seguir, refere quatro aspetos que idealmente devem ser abordados pelo professor tendo em vista uma boa aprendizagem do Cálculo Difrencial: (i) a parte gráfica/visual; (ii) a parte algébrica;

(iii) o trabalho com um exemplo prático; e (iv) a resolução de problemas. No tocante aos dois primeiros, refere que a importância a dar pelo professor deve ser a mesma, destacando o desenvolvimento nos alunos do que chamou de raciocício visual e raciocínio abstrato. Finalmente, uma outra questão destacada pela professora, essa mais transversal e não específica ao Cálculo Diferencial, mas que contribui segundo sua visão para um bom ambiente de aprendizagem é o bom relacionamento entre professor e aluno.

Desse modo, considerando o modelo proposto por Kuhs e Ball (1986), João e Maria José parecem situar-se entre duas orientações: *(i) centrada no aluno* - com o professor a atuar como um facilitador e estimulador da aprendizagem dos alunos em que estes são considerados responsáveis por julgar a adequação de suas próprias ideias. O conhecimento é avaliado em termos da consistência entre as ideias construídas pelos alunos; (ii) *centrada no conteúdo com ênfase na compreensão conceptual* – em que se enfatiza a compreensão dos alunos sobre as relações entre os vários conceitos e à lógica subjacente aos procedimentos.

Os três professores parecem conferir uma ênfase maior aos aspetos conceituais do que aos aspetos procedimentais no trabalho com o Cálculo Diferencial. Em um primeiro momento durante este trabalho, os professores destacam a importância de o aluno compreender os conceitos, com Mariana e João a destacar que um excesso de formalismo (nessa fase) deve ser, de todo, evitado. Maria José, por seu turno, destaca nessa fase inicial a interação que idealmente deve ocorrer entre os aspetos gráficos e algébricos. Outro ponto comum destacado pelos três professores é o fato de se ter um tempo considerável para o aluno praticar com exercícios (não necessariamente em aula). Maria José ainda refere como uma mais valia o fato de se ter um bom relacionamento entre professor e alunos e João destaca como essencial o professor dar confiança aos alunos durante todo o trabalho a fim de que estes não desistam. Tendo em atenção o modelo de Perry, Howard e Tracey (1999), Mariana parece seguir uma categoria que estes autores denominam de *transmissão* - em que prevalece a visão de que o ensino e o aprendizado se dão através da transmissão de habilidades e conhecimentos do professor para o aluno. João e Maria José, por seu turno, parecem seguir a categoria que os autores denominam *centrada no aluno* – na qual os alunos se envolvem de modo ativo e constroem o seu próprio significado quando confrontados com experiências de aprendizado baseadas no desafio do conhecimento existente.

Articulação com outras áreas do conhecimento. Um ponto comum aos três professores é uma articulação dos tópicos de Cálculo Diferencial mais circunscrita à própria Matemática, ou seja, com assuntos próprios desta disciplina, como por exemplo conceitos geométricos tais como retas secantes e retas tangentes. No tocante à articulação com outras disciplinas escolares, foi comum aos três professores a citação da Física, nomedamente dos conceitos relacionados à Cinemática como a velocidade e a aceleração. As duas professoras chegaram inclusivamente a introduzir o conceito de taxa média de variação usando o exemplo da velocidade média. João chegou a mencionar a utilidade de tais tópicos no estudo da Cinemática, reforçando que nessas situações os alunos poderiam visualizar uma utilidade para a teoria. Entretanto, nenhum dos professores mencionou trabalhar com os referidos tópicos de uma forma mais próxima e articulada com outras disciplinas escolares ou com algum colega de outra área do conhecimento.

Mariana refere que é mais fácil para si ligar os assuntos do Cálculo Diferencial à Física, mencionando que teve essa disciplina até o 12.º ano e também teve aulas de Física na faculdade e, justamente por isso acredita ser mais fácil, dado que recorda-se dos principais conceitos trabalhados. A professora também refere que procura ter em atenção a questão das peculiaridades da turma em que está a lecionar, referindo que, caso tivesse uma turma de Economia (que não era o caso na altura), pretendia ir buscar alguns exemplos referentes ao crescimento de empresas ao invés de conceitos relacionados à Física, tal como a velocidade média.

Maria José também realizou uma referência explícita às peculiaridades da turma, referindo que em uma turma que não tenha Fisica-Química é um tanto complicado tentar carregar na ligação do Cálculo com conceitos da Física, tais como taxa média de variação, velocidade instantânea ou velocidade média. Considerando que a sua turma era uma turma de Economia, pretendia, ao trabalhar com a resolução de problemas, ir buscar exemplos ao nível das capitalizações. Entretanto, aquando da introdução do estudo da derivada fez uso da velocidade e, devido aos constrangimentos relacionados à falta de tempo, a parte da resolução de problemas não foi contemplada.

Os três professores parecem conceber a articulação dos tópicos de Cálculo Diferencial circunscrita à propria Matemática, de modo mais específico com temas ligados à Geometria. Entretanto, os três fazem referência explícita à possibilidade de articulação com temas ligados à Física, embora também reconheçam que é algo bastante pontual, sendo que nos casos de Mariana e Maria José isso somente se deu aquando da introdução do conceito de taxa média de variação, ocasião em que usaram a velocidade média como um exemplo de taxa média de variação.

9.2.2.3 Uso da tecnologia no ensino do Cálculo Diferencial

Nesta subsecção são apresentadas as perspetivas dos três professores em relação ao uso da tecnologia no ensino do Cálculo Diferencial, dando especial atenção à visão geral de cada um dos professores sobre a questão e também o modo como perspetivam o uso dos principais dispositivos e/ou aplicações.

Visão geral. Considerando o uso da tecnologia no ensino, os três professores apresentam em comum a visão de que os dispositivos tecnológicos são importantes no estudo do Cálculo Diferencial. Entretanto o grau de aderência de cada professor, os próprios dispositivos tecnológicos referidos e também a forma como perspetivam o uso é bastante distinta, conforme cada caso.

João, por exemplo, ao refletir sobre o emprego da tecnologia no ensino do Cálculo Diferencial, refere inicialmente o uso da calculadora gráfica. Embora reconheça a existência de outros dispositivos que poderiam ser utilizados, citando o Windowsplot e também o Geogebra, é categórico ao afirmar que estes acabam por fazer o que a calculadora gráfica faz. Desse modo, mesmo reconhecendo que alguns dispositivos possuem funcionalidades interessantes como animações, uso de cores e que o computador possa dar uma outra perspetiva aos alunos, refere que não é nada que a calculadora gráfica também não possa realizar e, assim, dá a entender que não há um ganho substancial em utilizar outros dispositivos para além da calculadora gráfica.

É de lembrar aqui que o uso da calculadora gráfica foi mencionado por João de um modo muito positivo aquando do início de sua carreira, ocasião em que disse ter auxiliado alguns colegas mais antigos no uso deste dispositivo (que era, segundo referiu, uma novidade na altura), configurando assim uma situação significativa para si. Quanto ao uso propriamente dito, refere inicialmente que faz um uso com muito cuidado, de modo a evitar que os alunos fiquem dependentes desta tecnologia. Essa preocupação do professor é também mencionada no estudo de Rocha (2012) que investigou a integração da calculadora gráfica no ensino da Matemática.

Mariana, por seu turno, também refere um uso quase que exclusivo da calculadora gráfica em suas aulas, embora reconheça que o uso dado em sua turma de 11.º ano foi basicamente em contextos de verificação. Refere que gostaria de utilizar a calculadora para além da verificação e que pretende fazê-lo no 12.º ano, reforçando que tal uso nesta altura também se prende com a realização do exame final de Matemática que possui questões que necessitam ser resolvidas recorrendo à calculadora gráfica.

Entretanto, diferentemente de João, Mariana refere existir um ganho no uso de outros dispositivos tecnológicos, citando o Geogebra. Como exemplo, menciona que a parte em que introduziu o conceito geométrico da derivada (no quadro), deveria idealmente ter sido realizada com o auxílio do Geogebra. Mas na sequência, aludiu que a falta de tempo (uma vez que já estava no final do período letivo) e também os constrangimentos logísticos da sala de aula acabaram por fazê-la optar pela não utilização. Mesmo não utilizando o Geogebra em suas aulas, reconhece a possibilidade do seu uso em várias situações referentes à parte dinâmica relacionadas ao Cálculo, como por exemplo nas animações envolvendo reta secante e reta tangente, o estudo da monotonia e também dos pontos máximos e mínimos de uma função.

Maria José, por sua vez, possui uma relação bastante próxima com a tecnologia. Lembremos que sempre teve interesse nesta área, vindo inclusivamente a realizar uma especialização e que busca, continuamente, atualizações e formações neste domínio. Reconhece que esse seu interesse e formação são fulcrais para a integração da tecnologia em suas aulas. Assim, Maria José parece estar muito à vontade em fazer uso de dispositivos tecnológicos em suas aulas e também partilhar estas novidades com colegas. Tal abordagem é compatível com a chamada tendência tecnológica no ensino do Cálculo descrita por Eichler e Erens (2014).

No tocante aos dispositivos propriamente ditos, Maria José mostra-se uma grande entusiasta do Geogebra, conferindo um uso regular desta ferramenta de geometria dinâmica em suas aulas de Cálculo Diferencial. Essa integração que confere a um recurso tecnológico, nomeadamente o Geogebra, parece ter um papel muito importante na interação realizada entre os aspetos visuais/gráficos com os aspetos algébricos dos conceitos de Cálculo trabalhados, interação esta que é muito cara para si.

Ademais, sempre que possível, Maria José participa de formações sobre o uso deste dispositivo e procura fazer o mesmo com a sua turma. Recordemos que a sua turma de 11.º ano chegou mesmo a participar de uma oficina de duas horas sobre o Geogebra no laboratório de uma universidade. Quanto à calculadora gráfica, dá a entender um uso mais em contextos de verificação e também menciona que o fato de se ter muitas marcas de calculadoras no mercado acaba por representar um desafio a mais para o professor de Matemática. Por fim, indica a existência, na sua perspetiva, de dois usos para a tecnologia dentro do ensino do Cálculo Diferencial: (i) com a tecnologia é possível ir muito mais além do que sem ela e (ii) a tecnologia também permite aos alunos serem mais criativos.

Resumidamente, os três professores reconhecem a importância do uso da tecnologia no ensino do Cálculo Diferencial, sendo comum o uso da calculadora gráfica em contextos de comprovação. João refere um uso exclusivo da calculadora gráfica, reforçando a importância de o aluno não desenvolver uma dependência da máquina. Mariana também confere um uso exclusivo da calculadora gráfica em aula e, embora reconhecendo as possibilidades do uso do Geogebra, não realiza uma integração dessa ferramenta em suas aulas. Maria José, por seu turno, reconhece que o uso da tecnologia permite ir muito mais além e também facilita a criatividade dos alunos. Com esta professora, que é uma grande entusiasta do uso da tecnologia, no geral, e do Geogebra, em particular, o uso deste dispositivo parece ter um papel muito importante na interação entre os aspetos visuais/gráficos com os aspetos algébricos no trabalho envolvendo os conceitos de Cálculo Diferencial. Para além dessa interação entre os aspetos visuais/gráficos e algébricos, o uso da tecnologia conferido pela professora parece ir ao encontro do que defende Richit (2010), nomeadamente que a tecnologia permite resgatar a natureza essencialmente geométrica e dinâmica do Cálculo, ao invés de uma abordagem essencialmente algébrica.

9.2.3 Aspetos centrais da prática profissional do professor

Nesta secção procuro dar conta dos aspetos centrais da prática profissional de cada professor obtidos a partir das entrevistas de reflexão e, principalmente, através da observação das aulas. A secção encontra-se organizada em duas partes. Na primeira parte são discutidos os aspetos gerais da exploração didática dos tópicos de Cálculo

Diferencial. Na segunda parte são discutidos alguns aspetos mais específicos e relacionados à exploração matemática realizada pelo professor.

9.2.3.1 Aspetos gerais da exploração didática

Esta subsecção aborda, em um primeiro momento, a estrutura das aulas observadas de cada professor, sendo seguida pelas interações ocorridas nestas aulas. Em um terceiro momento, contempla-se as características do trabalho envolvendo as tarefas propostas pelo professor e, por fim, a forma como cada professor perspetiva o exame final de Matemática.

A estrutura das aulas. As aulas de João podem ser categorizadas em dois tipos básicos: aulas de exercícios e aulas de apresentação de um conceito novo, sendo que as do primeiro tipo foram sensivelmente em maior número do que as do segundo tipo. As aulas onde ocorre a apresentação de um conceito novo respeitam, invariavelmente, a seguinte estrutura de quatro etapas: (i) primeiramente o professor realiza alguns *questionamentos iniciais dirigidos aos alunos* sobre o assunto a estudar. Na sua visão. esses questionamentos têm uma dupla função: apresentar uma razão para as coisas aparecerem e também encadear o assunto em questão com outros temas já estudados; (ii) em seguida o professor procede à *apresentação de um vídeo* onde o tema é apresentado (material geralmente retirado do manual escolar) e faz pausas para clarificações; (iii) após o vídeo, *o professor sistematiza no quadro uma síntese da teoria*. Essa síntese, na sua visão, tem a função de auxiliar os alunos a interiorizar o conceito, sendo os próprios alunos a fazerem alguns destaques em seus cadernos e também representa uma fonte para consultas posteriores e, por fim, (iv) *o professor discute alguns exemplos e encaminha os exercícios* a realizar.

As aulas de exercícios de João também apresentam uma estrutura bem definida em duas partes: (i) numa primeira parte dedica-se um *tempo expressivo para os alunos trabalharem nos exercícios*, ocasião em que o professor circula pela sala, permanecendo à disposição dos alunos para tirar dúvidas e prestar auxílio; nessas ocasiões os alunos geralmente trabalham em duplas; (ii) uma segunda parte envolve a *resolução comentada* *dos exercícios*; A resolução é apresentada no quadro pelo professor ou por algum aluno que se voluntaria ou é convidado pelo professor.

As aulas de Mariana em que um conceito novo é apresentado respeitam uma estrutura de três momentos: (i) inicialmente a professora procede *à apresentação do conceito em questão,* ocasião em que procura colocar um forte apelo intuitivo e, como faz questão de referir, sem maiores formalidades; (ii) na sequência, a professora procede à *discussão de um ou mais exemplos* em que o conceito antes referido é aplicado. Esses dois momentos, nomeadamente o da apresentação do conceito e da discussão de um exemplo ocupam quase a totalidade da aula; (iii) em um terceiro momento, já ao final da aula, é então proposta uma lista de exercícios para os alunos realizarem. Não é reservado muito tempo da aula para os alunos realizarem exercícios e nos momentos em que isso ocorre, a professora percorre a sala e presta auxílio aos alunos que trabalham em duplas. Quase que invariavelmente, é a professora quem procede à resolução de algum exercício no quadro.

Em relação a Maria José, lembremos que as aulas referentes aos tópicos de Cálculo Diferencial foram realizadas à distância (aulas síncronas). Estas aulas, no tocante à estrutura, apresentam três momentos bem definidos: (i) invariavelmente ocorre um *momento inicial* que, por seu turno, desdobra-se em umas das três situações: diálogo preliminar entre a professora e os alunos sobre a temática a estudar; discussão de um exercício da aula anterior ou então a revisão de conceitos anteriores; (ii) na sequência, a professora *apresenta um vídeo onde o conceito é apresentado* e realiza pausas para esclarecimentos e clarificações; e, por último. (iii) ocorre o trabalho com a *resolução de exercícios*. A resolução de exercícios é dinamizada de duas maneiras: de modo conjunto, mas com a professora a dirigir questionamentos aos alunos e sistematizar ou então com algum aluno a partilhar a sua resolução, sendo esta discutida no grande grupo e concluindo com uma síntese final realizada pela professora no quadro.

Assim, no que concerne à estrutura das aulas, os três professores apresentam pontos em comum e também diferenças significativas. Um ponto comum entre Maria José e João é a utilização de vídeos aquando da introdução de um conceito, com a realização de pausas para questionamentos, esclarecimentos e clarificações. Mariana, por seu turno, não chega a fazer uso deste recurso. Entretanto, mesmo no caso de Maria José e João há uma diferença, com João a realizar sempre uma síntese dos conceitos logo após o vídeo, o que não é realizado por Maria José. Também estes dois professores têm em comum o fato de fazerem alguns questionamento iniciais de modo a preparar a apresentação do vídeo e também conferirem um espaço significativo em suas aulas para os alunos trabalharem na resolução de exercícios (o que não ocorreu nas aulas de Mariana), além de se tentar a problematização a partir da resolução de um aluno, com João a fazer isso no momento da resolução comentada e Maria José aquando da partilha da resolução de um aluno.

As interações nas aulas. As interações ocorridas em aula envolvendo os três professores podem ser categorizadas em três tipos: (i) interação do professor com a turma; (ii) interação do professor com um aluno; e (iii) interação entre os alunos. Entretanto, tanto a predominância de algum dos três tipos quanto a ênfase conferida foram distintas conforme cada caso.

Mariana privilegia uma interação direta com a turma como um todo. Essa interação é dinamizada por meio de questionamentos que dirige à turma e ocorre tanto na introdução de um conceito novo, quanto durante os momentos de revisão e aquando do trabalho com os exercícios. O segundo tipo de interação mais comum é da professora com um aluno em particular, ocasião em que o aluno solicita a presença da professora e coloca alguma dúvida ou solicita algum tipo de esclarecimento. Também há, embora com menor expressão, a interação entre os alunos aquando da realização de exercícios. Entretanto, estas interações são mais espontâneas, com a professora não recomendado explicitamente que o trabalho seja assim realizado, ou seja, em pequenos grupos ou duplas.

João, por seu turno, também dinamiza os três tipos de interações. Entretanto a incidência maior dá-se nos dois últimos tipos, nomeadamente na interação do professor com um aluno e na interação entre os alunos. Isso ocorre muito associado ao relevo dado pelo professor à realização, em aula, dos exercícios pelos alunos. Quanto à interação do professor com um aluno individualmente, essa ocorre no momento da realização dos exercícios e antes do momento de discussão, e parece permitir ao professor fazer um apanhado das principais dúvidas, erros e soluções alternativas que os alunos apresentam para, em seguida, conduzir uma discussão no grande grupo onde estas questões são retomadas. Quanto ao segundo tipo, nomeadamente a interação entre os alunos, parece conferir uma mais valia para este tipo de interação por considerar que a linguagem mais próxima entre os alunos também pode ajudar na compreensão.

Maria José, para além de dedicar um tempo expressivo na interação com a turma, (sobretudo, por meio de questionamentos dirigidos à turma), também confere importância para a interação com um aluno em particular. É bastante comum, durante a fase de apresentação de um conceito ou então no momento em que o vídeo é pausado, que a professora dirija um questionamento a um aluno em específico. Isso é justificado pela professora pelo fato de no ambiente virtual (devido à proteção de dados) não se poder visualizar os alunos. Assim, para evitar que os alunos simplesmente entrem no ambiente virtual e passem a realizar outras coisas, a professora procede a estes chamamentos nominais. Chega mesmo a comparar essa situação de abandono de aula pelos alunos como que se estes chegassem, colocassem a mochila na secretária e saissem da aula. Também durante a fase de partilha da solução de um exercício por um aluno é realizada uma interação entre esse aluno e a professora, ocasião em que esta coloca questões na forma de perguntas e também pede esclarecimentos adicionais. Nesse diálogo, não raro a professora dirige questões à turma para que também possam identificar possíveis erros do colega ou então dar a sua opinião sobre a resolução apresentada.

Assim, a ênfase dada a cada um dos três tipos de interação pelos professores parece estar muito associada à estrutura e o foco que estes dão às suas aulas. Mariana parece privilegiar um contato direto com a turma, realizando questionamentos dirigidos à turma como um todo. Tal abordagem parece estar mais "centrada no professor" (Boaler, 2003). João parece colocar um foco maior nos alunos privilegiando um contato mais individualizado entre professor e aluno, o que, no seu entender, atende a um duplo propósito: prestar auxílio aos alunos, bem como identificar situações a explorar imediatamente a seguir. No caso de Maria José, a interação da professora com um aluno em especial parece estar muito associada à possibilidade de se problematizar as construções dos alunos e de se aprender (a partir da resolução destes) tanto a nível de estrutura como de conteúdo. Isso é compatível com as etapas "*criticar os exemplos do trabalho dos alunos" e "aperfeiçoar soluções"* descritas por Swan (2017). Nesses dois últimos casos, a interação privilegiada está diretamente relacionada com o foco pretendido, mais centrado no questionamento do professor (Boaler, 2003) e no discurso partilhado entre este e os alunos (Ponte & Serrazina, 2004).

Características do trabalho envolvendo as tarefas propostas. No tocante às tarefas propostas, João privilegiou, ao longo deste estudo, o trabalho com exercícios do manual escolar. Procurou durante este trabalho conferir um grau crescente de dificuldade, justificando isso com o fato de os alunos poderem ir ganhando confiança. O professor refere que o próprio manual traz uma graduação (ao lado de cada exercício) que vai desde um até três riscos, sendo os exercícios de um risco considerados mais fáceis, os de dois riscos de dificuldade moderada e os de três riscos de maior dificuldade. Menciona que os alunos ficam muito contentes quando conseguem resolver um exercício de três riscos por conta própria. Apesar de referir que a parte que os alunos gostam mais e acham mais interessante no Cálculo Diferencial é a aplicação que envolve a resolução de problemas, essa parte não chegou a ser apreciada em aula e o contexto dos exercícios trabalhados foi estritamente matemático. No tocante ao trabalho com os exercícios em aula, o professor procura não estruturar a sua resolução, deixando um trabalho significativo para o aluno.

De um modo análogo, Maria José menciona que uma questão central no trabalho com o Cálculo Diferencial é o trabalho envolvendo a aplicação dos conceitos na resolução de problemas, referindo que os alunos podem com isso ver um sentido para aquilo que estão a estudar. Entretanto esse trabalho não foi realizado, segundo a professora, devido aos constrangimentos relacionados com a falta de tempo. Desse modo, as tarefas propostas pela professora reduziram-se aos exercícios do manual escolar e ocorreram também em um contexto estritamente matemático. No trabalho de resolução propriamente dito, para além do enfoque do conteúdo em si, confere uma importância significativa à questão da apresentação da resposta pelo aluno, dando especial atenção para a organização e para o uso adequado da notação matemática.

Mariana, por seu turno, também privilegia o trabalho com exercícios do manual. Estes exercícios estão sempre relacionados com um contexto estritamente matemático. Não chegou a explorar a possibilidade da aplicação ao mundo real dos conceitos de Cálculo Diferencial, dizendo aos alunos, reiteradamente, que aquilo não "servia para nada", dando a entender que o trabalho envolvendo estes conceitos estava mais relacionado com a aquisição de competências transversais, tais como persistência, raciocínio lógico e abstração. No tocante ao trabalho com os exercícios em aula, procurou oferecer um maior grau de estrutura para a resolução, chegando, em algumas ocasiões, a propor um resumo com os passos que deveriam ser seguidos pelos alunos. A professora indica que esta maior estruturação (por ela conferida) está relacionada, de modo específico, com as dificuldades da turma, referindo que se fosse em outra turma, talvez esse trabalho não fosse necessário.

Considerando os três casos, as tarefas trabalhadas em aula são basicamente exercícios do manual escolar, possuindo esta categoria um caráter hegemônico (Ponte, 2005). Outro ponto em comum é o fato destes exercícios estarem circunscritos a um contexto estritamente matemático conforme descrito por Skovsmose (2000). Entretanto, mesmo estando em um contexto estritamente matemático, os três professores enfatizam a importância da conexão entre os diferentes conceitos envolvidos durante a resolução de um exercício (Stein & Smith, 1998) e privilegiaram mais a compreensão do que o desenvolvimento procedimental, o que é compatível com uma das finalidades do ensino da Matemática proposta por Swan (2017), nomeadamente a de desenvolver a compreensão conceptual dos alunos. Um ponto de diferença é o grau de abertura quanto à aplicabilidade desses conceitos a situações reais, com João e Maria José sendo favoráveis e Mariana não vendo muita importância. No tocante ao grau de estrutura conferido pelo professor durante a resolução, Maria José e João buscam deixar uma parte significativa do trabalho para o aluno, fornecendo apoios pontuais, o que é compatível com o nível intermediário de liberdade proposto por Boaler (2003). Já Mariana confere uma estrutura maior durante a resolução (Boaler, 2003), justificando para isso as dificuldades da turma.

O exame nacional de Matemática do 12.º ano. Com Mariana, a exemplo do que ocorre com uma das professoras do estudo de Canavarro (2003), o peso que o resultado do exame tem em relação ao acesso dos alunos à universidade parece constituir um elemento de enorme pressão. A professora chega mesmo a utilizar esse termo (pressão) para definir como se sente ao saber que os alunos farão o exame e que o resultado neste exame acaba por ser decisivo para a vida deles, nomeadamente para o prosseguimento de seus estudos. Mesmo atuando em uma turma de 11.º ano e sabendo que o exame será somente ao final do 12.º ano, reconhece que muitas de suas escolhas em sala de aula são tomadas tendo em vista o que é feito nos exames.

João, por seu turno, refere que no 12.º ano os exames estão em primeiro plano e que há um peso relevante conferido aos conteúdos de Cálculo Diferencial nesta prova. Entretanto, menciona que isso nem sempre é assim, ou seja, há momentos em que os exames estão em segundo plano e dá a entender que, durante esses momentos, trabalha com mais liberdade, sem, contudo se esquecer da existência dos exames. O fato de os alunos terem de prestar esse exame e a possibilidade de uma maior preparação foi determinante, segundo o professor, para que um crédito horário fosse disponibilizado à sua turma de 12.º ano, fazendo com que ficasse com um período a mais de Matemática por semana.

A relação de Maria José com os exames parece assumir uma outra dimensão. A professora é assertiva ao referir que não perspetiva as suas aulas em função da existência de um exame final. Menciona que um relevo maior deve ser conferido em aula à aprendizagem dos alunos para que estes consigam perceber o que estão a aprender e não e não se traduz em uma mera preparação para o exame. Entretanto, reconhece também que não se pode deixar de pensar que os alunos terão um exame final, mas que isso não deve limitar ou mesmo condicionar as escolhas e opções do professor.

Assim, a forma de perspetivar o exame final de Matemática é bastante distinta conforme cada professor. Mariana chega a se sentir pressionada pelo enorme peso conferido aos exames e João, embora não se sentindo tão pressionado, refere que ora os exames estão em primeiro plano, ora em segundo plano. Maria José, por seu turno, refere que não perspetiva as suas aulas tendo em vista os exames, embora diga ter sempre em mente que os alunos irão prestar esse exame.

9.2.3.2 Aspetos específicos da exploração didática realizada

Esta subsecção aborda primeiramente a conexão entre os conceitos matemáticos tratados. Em seguida trata do espaço dado ao aluno para elaborar, apresentar e justificar o seu raciocínio. Na sequência, contempla a interação entre os aspetos gráficos e algébricos. Por fim, trata da importância conferida à demonstração matemática pelos professores.

Conectando conceitos: o encadeamento de assuntos. Conforme referido anteriormente, as tarefas propostas pelos professores limitaram-se a exercícios do manual e ficaram mais circunscritas ao contexto estritamente matemático. Estando a abordagem dos tópicos de Cálculo Diferencial dentro de um contexto matemático mais estrito, os três professores procuraram estabelecer a conexão desses tópicos entre si e também entre esses e outros conceitos que já eram do conhecimento dos alunos.

João busca fazer a conexão entre os conceitos trabalhados principalmente durante a fase imediatamente anterior à apresentação de um conceito novo. Tal ocorreu, por exemplo, aquando da introdução da função logarítmica, ocasião em que o professor, durante os questionamentos iniciais, retomou o conceito de bijeção e de função inversa e, a partir da função inversa da função exponencial (já tratada em aula) ocorreu a introdução da função logarítmica. Refere que nesta etapa introdutória é possível, e também desejável, encadear o assunto em questão com algo que já é do conhecimento dos alunos. Isso prende-se, segundo o professor, com a ideia de que haja uma razão para as coisas aparecerem e, assim, o conceito não fique solto, aparecendo "do nada".

Mariana, por seu turno, parece conferir uma ênfase muito grande na conexão e encadeamento dos conceitos tratados. Segundo a professora, na Matemática acaba-se sempre por ver as mesmas coisas, mas de uma forma mais alargada e, nesse trabalho, a conexão entre os conceitos mostra-se fundamental. A título de exemplo, refere que o estudo da monotonia de uma função já era realizado desde o 10.º ano, sendo, contudo, realizado somente através da visualização gráfica e, a partir do conhecimento da derivada pelos alunos, isso é alargado, ou seja, os alunos conseguem estudar a monotonia de uma função sem a visualização gráfica, a partir apenas da sua definição algébrica. Na visão da professora, a conexão entre os conceitos trabalhados chega a ser uma necessidade, sendo que neste processo uma abordagem inicial mais intuitiva mostra-se também a mais adequada. Essa ênfase no encadeamento dos assuntos tratados prende-se, segundo a professora, ao fato de levar o aluno a perceber os conceitos (e não simplesmente decorá-los) e, para que isso ocorra, refere que os conceitos não podem estar isolados.

Maria José, durante um momento de sua aula, chegou a mencionar de modo direto que o conhecimento matemático vai sendo encadeado. Naquela oportunidade, a professora falava a um aluno sobre a necessidade de se estudar os limites, segundo referiu, "como deve ser" para que este pudesse compreender o assunto das derivadas. Chegou a cunhar um termo para se referir ao encadeamento dos assuntos matemáticos, chamando de "paralelismo" o encadeamento de um assunto que já era do conhecimento dos alunos com o assunto que estava a ser tratado. Esse "paralelismo" ocorre, por exemplo, quando a professora definiu a derivada de uma função em um ponto como sendo o declive da reta tangente à função naquele ponto e, na sequência, faz a dedução da equação da reta (assunto já tratado em anos anteriores) usando o conceito de derivada. Em outro momento, enquanto discutia a diferenciabilidade e descontinuidade de funções, buscou a linguagem da lógica, assunto já estudado, para organizar um quadro resumo.

Assim, os três professores parecem conferir uma importância significativa ao encadeamentos dos assuntos tratados em aula. João confere uma ênfase maior a este aspeto aquando da introdução de um conceito novo. Mariana confere uma ênfase na conexão e encadeamento dos assuntos durante toda a aula, reforçando que essa conexão para além de importante, é também necessária. Maria José, seguindo uma linha similar, refere que o conhecimento matemático vai sendo encadeado, enfatizando em aula o que chamou de "paralelismo", ou seja, o encadeamento de um assunto já conhecido dos alunos com o assunto tratado naquele momento.

Espaço para o aluno elaborar, apresentar e justificar o seu raciocínio. O espaço concedido ao aluno para a elaboração, apresentação e justificação de seu raciocínio foi bastante distinto conforme cada professor. Mariana mencionou em uma de nossas primeiras entrevistas que gostava de chamar ao quadro mais de um aluno para que este pudesse apresentar e justificar as suas linhas de raciocínio sobre a mesma questão, tendo em vista evidenciar que linhas diferentes de pensamento poderiam levar ao mesmo resultado, o que é compatível com a etapa "*comparar as estratégias de abordagens"* proposta por Swan (2017). Entretanto, isso não teve lugar em nenhuma das suas aulas, estando estas mais centradas na figura do professor, sendo este o principal responsável por apresentar a resolução dos exercícios no quadro. Desse modo, não ocorreram momentos dedicados à apresentação e justificação dos raciocínios que os alunos elaboravam a partir das questões propostas. Apesar de existir nas aulas um espaço para os alunos trabalharem nos exercícios, este trabalho foi conduzido de um modo guiado pela professora que conferia um considerável grau de estrutura durante a sua realização.

João, por seu turno, concedeu um espaço considerável em suas aulas para que os alunos pudessem elaborar, apresentar e justificar os seus raciocínios. Isso foi materializado, sobretudo, no trabalho com os exercícios em aula. João tinha a consciência de que os alunos trabalhavam muito pouco fora do ambiente de sala de aula, então dedicava um espaço importante da aula para esse fim. Nesse espaço, denominado pelo professor de "experimentação", os alunos tinham a possibilidade de tentar, errar, tentar de novo, tendo sempre a possibilidade de solicitar apoio ao professor ou mesmo trocar impressões com os colegas. O erro do aluno no processo de elaboração do seu raciocínio é considerado pelo professor como inevitável e trabalhar a partir destes erros, na sua visão, é importante para que os alunos ganhem confiança. Durante essa fase de experimentação, o professor parece mapear (enquanto se desloca pela sala e presta atendimento) as principais dificuldades e raciocínios adotados pelos alunos no trabalho de resolução para, em seguida, retomá-los na fase de discussão. No tocante à apresentação e justificação do raciocínio do aluno, estes dois domínios são considerados aquando da discussão dos exercícios no grande grupo. Os alunos são convidados ou então se voluntariam para tal e o professor questiona-os sobre o raciocínio apresentado e a turma toda é envolvida nessa discussão.

No caso de Maria José, o fato de as aulas de Cálculo Diferencial terem sido a distância acabou por prejudicar tanto o tempo dispensado quanto o apoio mais individualizado da professora aos alunos à elaboração de seus raciocínios. A professora considera que isso trouxe a necessidade de os alunos trabalharem mais autonomamente, o que nem sempre ocorreu. Entretanto, mostrou-se sempre muito disponível para tirar dúvidas dos alunos e organizou no próprio ambiente virtual um espaço especialmente concebido para que os alunos pudessem lá colocar as suas dúvidas e resoluções. Assim, o trabalho mais intenso acabou por recair na apresentação e justificação do raciocínio do aluno. Esse trabalho é desenvolvido predominantemente durante o momento da partilha da resolução dos alunos. Durante esse momento, um aluno apresenta a sua resolução (e a professora realiza a partilha de tela para que todos os alunos possam visualizar), sendo, em seguida, convidado a explicar e justificar o seu raciocínio em uma dinâmica que envolve toda a turma. Nesse processo, um enfoque grande é dado pela professora aos aspetos relativos à clareza da apresentação bem como do cuidado com a linguagem matemática adotada, sendo estes consolidados pela professora através de uma síntese final que escreve no quadro interativo. Em uma das situações, apesar de o resultado final apresentado pelo aluno estar correto, a professora realizou uma série de questionamentos ao aluno para que justificasse cada passo realizado, advertindo que o raciocínio adotado, apesar de correto, deveria também estar bem escrito em termos de clareza e apresentação. O erro do aluno também é abordado de um modo positivo pela professora, contendo potencial para espoletar uma discussão envolvendo a turma ou então, quando provocado por meio de um questionamento da professora, o aluno possa (por conta própria) tomar consciência do erro cometido.

Assim, o espaço concedido ao aluno para a elaboração, justificação e apresentação de seu raciocínio é distinto conforme cada um dos professores. Esse espaço é menos evidente nas aulas de Mariana, uma vez que estas parecem estar mais centradas na figura da professora. No caso de João, o espaço dado para a elaboração do raciocínio do aluno ocorre, predominantemente, durante a fase de "experimentação", já quanto à justificação e apresentação do raciocínio do aluno, estas ocorrem durante a fase de discussão, ocasião em que o aluno apresenta a sua resolução à turma. Maria José confere uma ênfase maior aos dois últimos domínios, nomeadamente a justificação e a apresentação do raciocínio do aluno, sendo estes dinamizados durante o momento da partilha da resolução do aluno, em que este é convidado a apresentar o seu raciocínio e a responder alguma questão relativa à apresentação. Assim, considerando o modelo teórico proposto por Potari e Jaworski (2002) e que apresenta *Tríade de Ensino* com os domínios: gestão da aprendizagem, sensibilidade ao aluno e desafio matemático, João e Maria José apresentam um nível considerável de sensibilidade ao aluno, o que, por seu turno, parece permitir ao aluno um espaço maior para elaborar, apresentar e justificar o seu raciocínio em aula. Mariana, por sua vez, parece enfatizar mais o domínio da gestão da aprendizagem em detrimento à sensibilidade ao aluno.

A interação entre os aspetos gráficos e algébricos. Mariana confere uma ênfase significativa à interação entre os aspetos gráficos e algébricos no trabalho com os tópicos de Cálculo Diferencial. A professora afirma que gosta, sempre que possível, mostrar as coisas graficamente aos alunos. A própria apresentação do conceito de derivada enquanto taxa instantânea de variação foi realizada com um forte apelo gráfico, sendo seguida pela sua definição algébrica. Em outro exemplo, após a discussão de um exercício que tratava da resolução algébrica envolvendo a derivada em um ponto (de uma função definida por ramos), a professora realizou a representação gráfica, evidenciando o ponto onde a função não era derivável.

Maria José também confere um grande relevo à interação entre esses dois aspetos. Assim como Mariana, buscou introduzir o conceito de derivada de uma função com um forte apelo gráfico, ocasião em que chegou a preparar uma animação no Geogebra para o efeito. Entretanto, tendo a animação vindo a falhar, ela, de um modo improvisado, procedeu a realização dos esboços gráficos à mão e, na aula seguinte apresentou aos alunos a tal animação. Considerando os aspetos gráficos e algébricos, refere como muito importante o aluno conseguir passar de um para outro e que o professor não deve privilegiar um aspeto em detrimento do outro. A forte ligação da professora com a tecnologia e o seu apreço pelo dispositivo de geometria dinâmica Geogebra parecem facilitar o seu trabalho de reforçar a interação entre os aspetos gráficos e algébricos, mesmo com o constrangimento do tempo.

No caso de João, em algumas situações a interação entre os dois aspetos era mais evidente do que em outras. Assim, por exemplo, no trabalho envolvendo as funções exponenciais e logarítmicas a interação era bem evidente, com o professor ora a enfatizar as construções gráficas das respetivas funções, ora as suas expressões analíticas. Entretanto, no trabalho envolvendo o cálculo de limites, a linguagem algébrica foi preponderante.

A interação entre os aspetos gráfico e algébrico é uma preocupação marcante de Mariana e Maria José no trabalho que desenvolvem. Nos dois casos tal interação é evidente na introdução do conceito de derivada. No caso de Maria José, o uso recorrente do Geogebra parece ser uma mais valia no sentido de consolidar tal interação. No caso de João, não se evidencia uma ênfase maior na interação entre os aspetos gráficos e algébricos, tendo a parte algébrica uma preponderância significativa no trabalho envolvendo o cálculo de limites.

Importância conferida à demonstração matemática. Mariana, embora faça referência à demonstração matemática, não confere um relevo maior em sua prática de sala de aula. Essa constatação é compatível com os resultados encontrados por Guimarães (2003) em que, apesar de haver alguma valorização (ao nível do discurso) desse processo em uma das professoras estudadas, ele é omitido em sua totalidade nas aulas. Uma razão para essa omissão, no caso de Mariana, parece estar associado uma certa resistência dos alunos à sua realização e também a própria dificuldade dos alunos na compreensão da necessidade de se fazer uma demonstração.

No caso de João, devido ao fato de suas aulas estarem mais ancoradas em uma componente do tipo experimental, com um espaço privilegiado para a realização de exercícios pelos alunos em aula, a demonstração matemática não ocupa um lugar de destaque. Em apenas uma das aulas foi realizado uma demonstração. Nessa ocasião foi realizada a demonstração de um produto notável (quadrado da soma), utilizando-se a via geométrica. Apesar deste ser um assunto do 3.º ciclo, para a maioria dos alunos em sala de aula essa parecia ser a primeira vez que estavam a ver aquela demonstração (um aluno chegou mesmo a realizar uma exclamação do tipo: "e eu que decorei isso"). A referida demonstração teve lugar na aula uma vez que o produto notável era muito utilizado no processo de determinação dos limites, assunto em questão.

Maria José, por seu turno, reconhece à demonstração matemática um lugar de grande relevo em sua prática de sala de aula. Essa centralidade conferida à demonstração parece estar também associada ao encadeamento dos assuntos que a professora procura realizar, tendo, assim, a demonstração também essa função, nomeadamente a de fazer o encadeamento e a conexão entre vários conceitos matemáticos. A professora refere tanto em entrevista como aos alunos em aula que não se deve decorar a fórmula, mas se chegar até ela. As demonstrações tratadas pela professora em aula assumiram o formato de dedução algébrica. Tal ocorreu, por exemplo, com a dedução da equação geral da reta utilizando-se a derivada como declive e também com duas das regras de derivação (das funções identidade e quadrática), estas últimas obtidas através da definição da derivada como sendo um limite.

Assim, para os três professores, a importância conferida à demonstração matemática nas aulas é distinta. No caso de Mariana, a demonstração não chega a se fazer presente nas aulas. Em relação a João também não é dado um destaque maior para esta componente. Entretanto, Maria José confere um papel de relevo à demostração matemática e utiliza-a de modo recorrente em suas aulas, ocasião em que reforça junto aos alunos a sua importância e necessidade.

9.3 Considerações finais, limitações e implicações do estudo

Inicio esta secção com algumas considerações de natureza metodológica sobre pontos fortes, limitações e sugestões que emergiram a partir do estudo realizado. Antes de mais nada, o estabelecimento do objetivo e das questões do estudo acabam por orientar, senão definir, a metodologia a utilizar. Com este estudo não foi diferente. Entretanto, a opção por uma abordagem metodológica qualitativa, inscrita em um paradigma interpretativo e materializada na realização de três estudos de caso, para além de mostrar-se adequada ante o objetivo estabelecido, também suscitou, ao longo do seu desenvolvimento, algumas questões mais específicas de que trato a seguir.

Um ponto forte no estudo realizado com os três professores foi, sem dúvida, a possiblidade facultada a estes de poderem proceder a validação do seu respetivo caso, tendo a possibilidade, inclusivamente, de solicitar a retificação ou supressão de alguma passagem. Esta validação foi realizada tendo presente duas coisas que julgo extremamente importantes em um estudo dessa natureza. Em primeiro lugar, prende-se à necessidade de se ter uma apreciação, ao nível das interpretações, realizadas pelos próprios sujeitos, uma vez que ninguém, para além destes, está em melhor posição para fazer tal apreciação ao nível interpretativo. Em segundo lugar, há uma questão de ordem ética muito importante que está relacionada, nomeadamente a questão do próprio sujeito poder ter acesso (em primeira mão e antes da publicação de artigo ou defesa acadêmica) e verificar se o que ali está escrito não atenta contra o acordo ético assumido com o investigador, considerando que este acordo configura uma pedra angular na realização de qualquer estudo dessa natureza.

Entretanto, a operacionalização dessa validação representou uma dificuldade adicional diretamente relacionada com a questão do tempo. Uma vez que só faz sentido os professores terem acesso ao referido material na medida em que não haja um hiato temporal significativo entre a coleta dos dados e a validação por parte destes, o que pode levar a uma diluição ao nível da memória e mesmo comprometer qualitativamente tal apreciação. Essa foi uma preocupação que tive e, apesar dos constrangimentos, o texto foi disponibilizado aos três professores passados alguns meses após a coleta dos dados. Desse modo e tendo em atenção futuras investigações a serem empreendidas neste domínio (e dentro deste paradigma), este estudo sugere vivamente a apreciação do texto final pelos próprios professores.

Este estudo, lembremos, tem como foco principal as conceções dos professores sobre o ensino de Cálculo Diferencial, mas também há o interesse na prática dos professores no ensino deste tema. Assim, para além de entrevistas temáticas também foram conduzidas observações de aula e entrevistas de reflexão sobre estas aulas. Entretanto, no tocante à prática do professor e a partir já da análise dos dados coletados, uma constatação pôde ser evidenciada, a de que teria sido muito significativo ter tido a possibilidade de aceder a outras vertentes da prática do professor, tais como a preparação de suas aulas, os processos formativos dos quais participa e as parcerias que estabelece com colegas e/ou agentes externos à escola. Concretamente, no caso de uma das professoras tais processos e parcerias estabelecidas fora do âmbito escolar parecem ter um impacto muito forte na sua prática de sala de aula. Assim, estes parecem vir a influenciar em um grau considerável tais práticas e um acesso direto a tais vertentes possibilitaria trazer contributos no sentido de tornar o “retrato” da professora ainda mais completo. A falta de acesso a estes domínios configura uma limitação deste estudo que é aqui reconhecida.

Uma última questão ao nível metodológico que a investigação acabou por suscitar é referente à identificação dos professores no estudo. Uma das professoras chegou a referir, mais de uma vez, o seu desejo de ser identificada. Essa é uma questão complexa que envolve por um lado o desejo, legítimo, do profissional de querer mostrar o seu trabalho e também aquilo que pensa sobre determinada matéria e, por outro, a questão de se garantir a proteção ao nível ético que o anonimato confere (Fiorentini & Lorenzato, 2009). Trata-se, assim, de uma questão de difícil gestão e que parece ainda não ser pacífica no seio da comunidade investigativa. Entretanto, na condição de investigador tive de tomar uma decisão e ela acabou por ser a de manter o pseudônimo da professora garantindo o seu anonimato. Tal decisão foi tomada no sentido de que a proteção quanto a possíveis constrangimentos deve, idealmente, vir antes de um desejo, embora legítimo, de reconhecimento. Muito embora também reconheça a complexidade dessa matéria e que futuros esforços devem ser devotados à questão, mesmo assim, no caso em concreto, a professora foi informada a cerca do que embasou a minha decisão e, ante aos argumentos apresentados, concordou com ela.

As conclusões deste estudo enfatizam dificuldade de se fazer uma distinção clara entre as conceções e o conhecimento do professor, tal como referem Pajares (1992) e Cooney (1999a). Tais conclusões vão ao encontro de uma posição defendida por Ponte e Chapman (2006), nomeadamente a de que as conceções fazem parte do conhecimento do professor. Assim, as decisões do professor não dependem exclusivamente do seu conhecimento pedagógico, mas também do que acreditam ser o assunto e da forma ideal com que este deve ser ensinado (Handal, 2003). Ademais, este estudo assume como um pressuposto básico o fato de as conceções possuirem uma natureza essencialmente cognitiva. Mas, a exemplo de McLeod (1992), mesmo assumindo que as conceções são amplamente cognitivas, também é aqui reconhecida a sua dimensão afetiva. Desse modo, como refere Günter (1999), parece que as cargas emocionais e as informações cognitivamente interpretadas quase nunca se deixam dissociar completamente.

No tocante às perspetivas dos professores em relação à presença de tais tópicos parece existir uma certa "naturalização" de tal presença. Isso pode ser explicado pelo longo período de tempo que estes tópicos estão presentes nos programas portugueses. Sobre essa matéria, Aires e Vásquez (2005) referem um cenário de afirmação e até de aumento dedicado ao ensino das derivadas nos programas do ensino secundário ao longo de todo o século passado (desde 1905). Estes autores referem que no espaço de aproximadamente um século somente uma reforma, a Carneiro Pacheco de 1936, suprimiu tal temática.

No tocante às aulas dos professores, as conclusões deste estudo apontam para um uso quase que exclusivo do exercício dos manuais em detrimento da utilização de tarefas mais variadas. Outro ponto a evidenciar é o trabalho dos tópicos de Cálculo Diferencial em contextos estritamente matemáticos sem uma interação com outras áreas do conhecimento ou então a possibilidade da aplicação destes conceitos em situações do mundo real (modelação). Contudo, mesmo nestes contextos estritamente matemáticos é dada uma ênfase significativa para a conexão entre os diferentes conceitos envolvidos, buscando-se relacionar o conceito tratado em questão com outros que já são do conhecimento dos alunos. Quanto a abordagem adotada pelos professores, esta parece estar mais focada em questões conceituais em detrimento de uma abordagem focada em técnicas procedimentais.

Contudo, o mérito de uma investigação não repousa somente em dar respostas às questões de estudo tendo em vista atender o objetivo delineado inicialmente. O próprio caminho seguido pode propiciar itinerários que conduzam à outras questões e, desse modo, também prospectar possibilidades para novas investigações. Ou seja, a força de um estudo não está somente em responder algumas perguntas, mas, sobretudo, poder dar origem a tantas outras. Esse foi, felizmente, o caso dessa investigação. Apresento a seguir quatro vertentes ou possibilidades para novas investigações neste domínio que emergiram a partir do estudo.

Guimarães (2003) refere que poucos estudos foram conduzidos em Portugal com foco nos professores do ensino superior, especialmente estudos centrados nas conceções e práticas desses professores. No estudo realizado por este autor já ocorreu a inclusão de dois matemáticos, professores do ensino superior, focado nas conceções desses professores sobre a Matemática e sobre a atividade matemática. Muito embora com estes professores, diferentemente das outras duas professoras do estudo, não houve a observação de aulas por parte do investigador. Assim, seria muito interessante a realização de estudos com foco nas conceções e práticas de professores de Cálculo Diferencial do ensino superior tendo em vista observar especificidades, pontos de convergência e também de divergência destes em relação às conceções e práticas de professores de Matemática do ensino secundário aqui retratados.

Um segundo ponto que este estudo suscita é o grau de influência dos antigos professores nas conceções (Barkatsas, 2008; Cury, 1999; Handal, 2003; Thompson, 1982) e também nas suas práticas. Foi recorrente nos três casos estudados a menção direta aos antigos professores do ensino pré-universitário, parecendo existir uma influência significativa por parte destes nas conceções sobre o ensino e até na forma de se estar na profissão. Assim, seria uma mais valia tentar perceber qual é o grau de influência dos antigos professores do ensino pré-universitário na formação e consolidação das conceções dos professores sobre o ensino e também na forma de se perspetivar a profissão.

Ainda considerando os antigos professores do ensino pré-universitário, em um dos casos deste estudo surgiu com muita força a influência do chamado professor explicador. No caso em concreto tal influência chegou a ser decisiva no momento da professora escolher a carreira que pretendia seguir. Tendo em atenção os professores explicadores, segundo Ponte (2008), estes profissionais atuam em Portugal como tutores privados contratados pelos encarregados de educação para dar apoio direto aos seus educandos. O mesmo autor sublinha a influência desses profissionais sobre as conceções dos alunos, de modo específico, sobre o que significa aprender Matemática. Entretanto, a influência desses profissionais ao nível das conceções ainda não recebeu uma atenção significativa por parte da pesquisa, existindo assim um campo a explorar.

Uma última questão a referir, esta mais relacionada com a prática dos professores, foi a ênfase dada, especialmente no caso das duas professoras deste estudo, na interação entre os aspetos gráficos e algébricos no trabalho com o Cálculo Diferencial, concretamente no trabalho envolvendo o conceito de derivada de uma função em um ponto. Ademais, a professora que pareceu integrar de um modo mais pleno esses dois aspetos foi justamente aquela que fez um uso mais intenso de recursos tecnológicos, nomeadamente do Geogebra. Assim, surge a pergunta de qual o papel que a tecnologia pode desempenhar na interação entre os aspetos gráficos e algébricos no trabalho com tópicos de Cálculo Diferencial no ensino secundário, especialmente no conceito de derivada de uma função em um ponto.

Referências Bibliográficas

Abelson, R. (1979). Differences between belief system and knowledge systems. *Cognitive Science*, *3*, 355-366.

Abrantes, P. (1986). *Porque se ensina Matemática: perspectivas e concepções de professores e de futuros professores*. Provas de aptidão pedagógica e de competência científica não publicadas, Universidade de Lisboa.

Aires, A. P. F., & Vásquez, M. S. (2005). O conceito de derivada no ensino secundário ao longo do século XX. In *História do ensino da Matemática em Portugal – Atas do XIII Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 101-120). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Amado, N. (1998). *Conceções e práticas de professores de Matemática do ensino secundário sobre avaliação.* Tese de Mestrado, Universidade do Algarve.

Arbaugh, F., Lannin, J., Jones, D.L., & Park-Rogers, M. (2006). Examining instructional practices in core-plus lessons: Implications for professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*, 517-550.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gomez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 97-140. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.

Ávila, G. (1991). O Grau. *Revista do Professor de Matemática***,** *18*, 1–9.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barkatsas, A. (2008). *Mathematics teachers' beliefs about teaching and learning*. Germany: VDM Verlag.

Barkatsas, A., & Malone, J. (2005). A typology of mathematics teachers' beliefs about teaching and learning mathematics and instructional practices. *Mathematics Education Research Journal*, *17*, 69–90. https://doi.org/10.1007/BF03217416

Barufi, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutoramento, Universidade de São Paulo.

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice: The case of the 'dance of agency. In *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA* (pp. 3-16). Honolulu: CRDG, College of Education, University of Hawai'i.

Boavida, A. (1993). *Resolução de problemas em educação matemática: contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores*. Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa. Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Boston, M. D., & Smith, M. S. (2011). A 'task-centric approach' to professional development: Enhancing and sustaining mathematics teachers' ability to implement cognitively challenging mathematical tasks. *ZDM Mathematics Education*, 43: 965. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0353-2

Bressoud, D., Camp, D., & Teague, D. (2012). *Background to the MAA/NCTM Statement on Calculus.* Disponível em https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Position-Statements/Calculus/ acesso em 21 de agosto de 2018.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and learning of calculus*. In Kaiser, G. (Ed). *ICME-13 Topical Surveys*, Hamburgo, Alemanha. DOI 10.1007/978-3-319-32975-8

Calderhead, J. (1987). Introduction. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers thinking* (pp. 1-19). London: Cassell.

Canavarro, A. P. (1993). *Conceções e práticas de professores de Matemática: três estudos de caso* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Canavarro, A. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: duas professoras, dois currículos*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Carvalho, J. P. (1996). O cálculo na escola secundária: Algumas considerações históricas. *Caderno CEDES*, *40*, 68-81.

Chapman, O. (2004). Facilitating peer interactions in learning mathematics: Teachers' practical knowledge. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Edits.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp. 191-198). Bergen, Norway: PME

Charalambous, C. Y. (2015). Working at the intersection of teacher knowledge, teacher beliefs, and teaching practice: A multiple-case study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*, 427-445.

Clark, C., & Peterson, P. (1986). Teachers' thought processes. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 255-296). New York, NY: Macmillan.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.) London: Routledge.

Cooney, T. J. (1985). A beginning teachers' view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16,* 324-336.

Cooney, T. J. (1999a). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 163–187.

Cooney, T. J. (1999b). Examining what we belief about beliefs. Paper presented at the conference, *Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics*, Oberwolfach, Germany, November 21 - 27, 1999. Disponível em DOI: 10.14760/TB-1999-45. Disponível em DOI: 10.14760/TB-1999-45

Cooney, T. J., Shealy, B. E., & Arvold, B. (1998). Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(3), 306–333.

Copur-Gencturk, Y., & Papakonstantinou, A. (2016). Sustainable changes in teacher practices: A longitudinal analysis of the classroom practices of high school mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*, 575-594.

Cury, H. N. (1999). Conceções e crenças dos professores de matemática: pesquisas realizadas e significado dos termos utilizados. *Bolema,12*(13), 29-43.

Dawkins, P. (2009). Concrete metaphors in the undergraduate real analysis classroom. In S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 819-826).

Delgado, M. J. (1993). *Os professores de Matemática e a resolução de problemas: Três estudos de caso*. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM

Denzin, Norman K. & Lincoln, Yvonna S. (2006). A disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In Denzin, Norman K. & Lincoln, Yvonna S. (org.). *O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens* (pp. 15- 47). Porto Alegre: Artmed.

Doerr, H. M. (2006). Examining the tasks of teaching when using students mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *62*, 3-24.

Eichler, A., & Erens, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus. *ZDM Mathematics Education*, *46*, 647-659.

Erickson F. (2012). Qualitative research methods for science education. In B. Fraser, K. Tobin, & C. McRobbie (Eds) *Second international handbook of science education*. Dordrecht: Springer.

Ernest, P. (1988, July). *The impact of beliefs on the teaching of mathematics*. Paper prepared for ICME VI, Budapest, Hungary.

Even, R., & Schwarz, B.B. (2003). Implications of competing interpretations of practice for research and theory in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 283-313.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 403–434.

Fernandes Filho, O. P. (2001). O desenvolvimento cognitivo e a reprovação no curso de engenharia. *In Anais do XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*. Porto Alegre: ABENGE.

Ferrini-Mundi, J., & Gaudard, M. (1992). Preparation or Pitfall in the Study of College Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 56-71.

Filho, A. F. S. (2016). *A aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral no Curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia: Um estudo de caso com uma turma do primeiro ano*. Tese de Doutoramento, Universidade do Minho.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2009). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.

Franco, P., & Longarezi, A. (2011). Elementos constituintes e constituidores da formação continuada de professores: contribuições da teoria da atividade. *Educação e Filosofia*, *50*, 557-582

Goetz, J., & LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. New York: Academic Press.

Good, T., Biddle, B., & Goodson, I. (1997). In The study of teaching: Modern and emerging conceptions (Eds.), *International handbook of teachers and teaching* (pp. 671-679). London: Kluwer.

Green, T. E. (1971). *The activities of teaching.* NY: MCGraw-Hill.

Guimarães, H. M. (1988). *Ensinar Matemática: conceções e práticas*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Guimarães, H. M. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: Um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Guimarães, H. M. (2010). Conceções, crenças e conhecimento: Afinidades e distinções essenciais. *Quadrante, 2*, 81-101.

Günter, T. (1999). Domain-specific belief and calculus – Some theorical remarks and phenomenological observation. Paper presented at the conference, *Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics*, Oberwolfach, Germany, November 21 - 27, 1999. Disponível em DOI: 10.14760/TB-1999-45

Handal, B. (2003): Teachers' mathematical beliefs: A review. *The Mathematics Educator*, *13*(2), 47-57.

Hersh, R. (1986). Some proposals for revising the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 9-28). Boston: Birkhauser.

Hughes-Hallet, D. (2006). What have we learned from calculus reform? The road to conceptual understanding. In N. Hastings (Eds.), *A fresh start for collegiate mathematics* (pp. 43–45). Washington, DC: MAA Press.

Jaworki, B., & Potari, D., (2009). Bridging the macro-micro divide: using an activity theory model to capture socio-cultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 219-236.

Kuhs, T. M. & Ball, D. L. (1986). *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills, and dispositions.* East Lansing: Michigan State University, Center on Teacher Education.

Lerman, S. (1999). Research on mathematics teachers' beliefs: A situated perspective. Paper presented at the conference, *Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics*, Oberwolfach, Germany, November 21-27, 1999. Disponível em DOI: 10.14760/TB-1999-45.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. In J. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina, & C. Loureiro (Eds.), *Desenvolvimento profissional dos professores de Matemática: Que formação?* (pp. 47-82). Lisboa: SPCE.

Loureiro, C. (1992). Calculadoras na educação matemática: Uma experiência de formação de professores. *Quadrante, 1*, 7-26.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualisation. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning (*pp. 575–596). New York, NY: MacMillan.

McLeod, D. (1999). Mathematical beliefs and curriculum reform. Paper presented at the conference, *Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics*, Oberwolfach, Germany, November 21 - 27, 1999. Disponível em DOI: 10.14760/TB-1999-45. Disponível em DOI: 10.14760/TB-1999-45

Menezes, L. (1995). *Conceções e práticas de professores de Matemática: contributos para o estudo da pergunta.* Tese de mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Merrian, S. B. (1988). *Case study research in education. A qualitative approach.* San Francisco: Jossey-Bass.

Ministério da Educação (2013). *Programa de Matemática A* (10.º, 11.º e 12.º anos). Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Mometti, A. L. (2007). *Reflexão sobre a prática: argumentos e metáforas no discurso de um grupo de professores de Cálculo*. Tese de Doutoramento em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

National Institute of Education (1975). Teaching as clinical information processing (Report of Panel 6, National Conference on Studies in Teaching). Washington, DC: National Institute of Education.

NCTM (2017). *Princípios para a Ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática*. Lisboa: APM.

Nespor, J. (1987). The role of beliefs in practice of teaching. *Journal of Curriculum Studies, 19,* 317-328.

Nisbet, S., & Warren, E. (2000). Primary school teachers' beliefs relating to mathematics, teaching and assessing mathematics and factors that influence these beliefs. *Mathematics Teacher Education and Development, 2*, 34–47.

Nóvoa, A. (1995a). Os professores e as histórias da sua vida. In A. Nóvoa (Ed.), *Vidas de professores* (pp. 12-30). Porto: Porto Editora.

Olimpio Junior, A. (2006). *Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: Uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática*. Tese de Doutoramento em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Oliveira, H., & Ponte, J. P. (1997). Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional dos professores de Matemática (comunicação). *Actas do VII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 3-23), Lisboa: APM

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 29-54.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of educational research, 62,* 307–332.

Patton, M. G. (2002). *Qualitative Research and Evaluation Methods* (3.ª ed.) Thousand Oaks, CA: Sage.

Pehkonen, E., & Törner, G. (1999). *Introduction to the abstract book for the Oberwolfach meeting on belief research.* Disponível em DOI: 10.14760/TB-1999-45

Pehkonen, E. (1999). Beliefs as obstacles for implementing an educational change in problem solving. Paper presented at the conference, *Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics*, Oberwolfach, Germany, November 21-27, 1999. Disponível em DOI: 10.14760/TB-1999-45.

Perry, B., Howard, P., & Tracey, D. (1999). Head mathematics teachers' beliefs about the learning and teaching of Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *11*, 39–57.

Peterson, P. L., Fennema, E., Carpenter, T. P., & Loef, M. F. (1989). Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction*, *6*, 1-40.

Petrou, M., & Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematics knowledge in teaching* (pp. 9-25). Dordrecht: Springer.

Ponte, J. P. (1992). A conceção dos professores de Matemática e processos de formação. In *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P. (1993a). *Professores de Matemática: das conceções aos saberes profissionais.* Comunicação apresentada no SIEM IV, Ponta Delgada, Açores.

Ponte, J. P. (1993b). A Educação Matemática em Portugal: Os primeiros passos de uma comunidade de investigação. *Quadrante, 2,* 95-128.

Ponte, J. P. (1994). O professor de Matemática: um balanço de dez anos de investigação. *Quadrante*, *3*(2), 79-114.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25,* 105-132.

Ponte, J. P., & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante*, *7*(1), 3-32.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, *13*(2), 51-74.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutiérrez & P. Boeno (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P. (2008). A investigação em educação matemática em Portugal: Realizações e perspectivas. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación em educación matemática* XII (pp. 55-78). Badajoz: SEIEM.

Ponte, J. P., Branco, N., Quaresma, M., Velez, I., & Mata-Pereira, J. (2012). Perspetivas teóricas no estudo das práticas profissionais dos professores de matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Práticas de ensino da Matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 267-279). Lisboa: SPIEM.

Ponte, J. P., Quaresma, M. e Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 65-86.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22*(2), 55-81.

Ponte, J. P. (Ed.) (2014). *Práticas profissionais dos professores de Matemática*. Disponível em: http://www.ie.ulisboa.pt/publicacoes/ebooks/praticas-profissionais-dos-professores-de-matemática acesso em 14/07/2018.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(1), 51-66.

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 351-380.

Potari, D., & Georgiadou–Kabouridis, B. (2009). A primary teacher's mathematics teaching: the development of beliefs and practice in different "supportive" contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*, 7-25.

Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 550–576.

Ribeiro, A., & Paulin, J. (2020). Uma Experiência de Ensino por meio do Uso de Tarefas: limites e possibilidades para a aprendizagem de Matemática em um contexto universitário. *Acta Scientiae*, *22*(2), 67-85, DOI: 10.17648/acta.scientiae.5411

Richt, A. (2010). *Aspectos conceituais e instrumentais do conhecimento da prática do professor de cálculo diferencial e integral no contexto das tecnologias digitais*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Sadler, P., & Sonnert, G. (2018). The path to college calculus: The impact of high school mathematics Coursework. *Journal for Research in Mathematics Education*, *49*(3), 292-329.

Santos, M. H. (2010). *Limite: um estudo sobre manuais escolares e exames, em Portugal*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho.

Savenye, W., & Robinson, R. (2001). Qualitative research issues and methods: an introduction for educational technologists. In D. Jonassen (Ed.), *Handbook of research for educational communications and technology* (pp. 1171- 1195). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Saxe, G. B. (1999). Professional development, classroom practices and students' mathematical learning: A cultural perspective. In O. Zaslavsky (Ed). *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-25-1-40), Haifa, Israel.

Schoenfeld, A. H. (1995). A brief biography of calculus reform. *UME Trends*, *6*(6), 3-5.

Schoenfeld, A. H. (2015). How we think: A theory of human decision making, with a focus on teaching. In S. J. Sho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-246). New York, NY: Springer.

Schön, D. A. (1991). *The reflective practitioner: How professional think in action*. Londres: Averbury.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, 4-14.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 14*, 66-91.

Smida, H., & Ghedamsi, I. (2006). Pratiques enseignantes dans la transition lycee/universite en analyse. In N. Bednarz (Ed.), *Actes du Colloque EMF 2006*, (pp. 1-24).

Spina, C. O. (2002). *Modelagem matemática no processo ensino aprendizagem do cálculo diferencial e integral para o ensino médio*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro. Brasil.

Stake, R. E. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M. K., & Smith, M. S., (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313-340.

Sullivan, P., Zevenbergen, R. & Mousley, J. (2005). Planning and teaching mathematics lessons as a dynamic, interactive process. In *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 249-257). Melbourne.

Swan, M. (2017). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão conceptual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática*, *144/145*, 67-72.

Tall, D., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and calculus. In M. K. Heid & G. M. Blume (Eds), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, Volume I: Research Syntheses (pp. 207-258). The Pennsylvania State University.

Thompson, A. (1982). *Teachers' conceptions o f mathematics and mahematics teaching: three case studies*. Tese de doutoramento, Universidade da Geórgia, Athens, EUA.

Thompson, A. (1984). The relationship of teacher's conceptions of Mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 105-127.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York, NY: Macmillan.

Universidade de Lisboa (2016). Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. *Diário da República*, 2.ª série – N.º 52 – 15 de março de 2016.

Vale, I. (1993). *Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de matemática: um estudo longitudinal de dois casos*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Van Fleet, A. (1979). Learning to teach: The cultural transmission analogy. *Journal of Thought,14,* 281-290.

Wilson, S. (1999). Mathematical and pedagogical conceptions of secondary teachers. Paper presented at the conference, *Mathematical beliefs and their impact on Teaching and Learning of Mathematics*, Oberwolfach, Germany, November 21 - 27, 1999. Disponível em DOI: 10.14760/TB-1999-45

Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso: Planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman.

Anexos

Anexo 1 – Guião da primeira entrevista temática

Percurso profissional

1) Como chegou à profissão de professor de Matemática?

2) Como foi o seu percurso de professor?

3) Lembra-se de algum aspecto/passagem significativo(a)?

4) Que mudanças, evoluções, reconhece ao longo do seu percurso?

5) Que responsabilidades sente como professor?

6) Em quais níveis trabalha atualmente? Existe uma preferência? Em caso afirmativo, justifique.

7) Do que mais gosta no ensino? E menos?

8) Qual é a sua principal motivação na profissão?

Anexo 2 – Guião da segunda entrevista temática

PARTE I

Contexto escolar

1) Há quanto tempo está exercendo a atividade docente nesta escola? Em quantas outras escolas já trabalhou?

2) Como caracteriza a sua escola? Quais os aspetos da dinâmica da escola que destacaria? Em que aspetos a escola poderia melhorar?

3) Como vê a participação dos pais na escola?

4) Como vê o papel dos órgãos de gestão?

5) Como caracteriza o grupo de Matemática (evolução da dinâmica do grupo, identificação com o grupo, natureza das atividades do grupo (mais ou menos formal))?

6)Trabalha de forma mais próxima com algum colega, dentro ou fora da escola?

7) Participa em organizações ligadas ao ensino ou ao ensino da Matemática? Quais? Por que razão participa ou não participa?

8) Já participou em encontros profissionais? Quais? Se sim, qual o balanço que faz dessa participação?

PARTE II

O ensino do Cálculo Diferencial no ensino secundário (Matemática A)

1) Acha adequada ou desadequada a inserção de tópicos do CD no currículo do ensino secundário de Matemática A? Porquê?

2) Acharia bem ou mal que o elenco de tópicos de CD do programa fosse reduzido? Porquê?

3) Acharia bem ou mal que o elenco de tópicos de CD do programa fosse reforçado? Porquê?

4) Considera que os tópicos de CD são, para os alunos, dos mais fáceis ou dos mais difíceis do programa?

5) Na sua perspetiva, o que deve o professor fazer para que o aluno tenha uma boa aprendizagem neste tópico?

6) Na sua perspetiva, o que deve o aluno fazer para ter uma boa aprendizagem neste tópico?

7)Na sua perspetiva, o tempo destinado para a abordagem do CD é o adequado? Caso negativo, o que proporia e porquê?

8) O Cálculo Diferencial ensinado, em sua visão, joga um papel relevante nos exames nacionais? Que influência os exames nacionais exercem nas suas escolhas pedagógicas?

9) Como vê o potencial da calculadora gráfica no ensino do CD? Acha que o seu uso traz vantagens ou inconvenientes? Costuma usar calculadora gráfica nas suas aulas? De que modo?

10) Já usou algum outro software educativo para o ensino do CD? Se não, porquê? Se sim, qual foi a sua experiência?

Anexo 3 – Guião da entrevista de validação

Apreciação da professora a partir do material escrito

1) Qual o seu grau de identificação com a professora ali retratada?

2) Identifica algum aspecto que considera mal tratado, sobretudo ao nível das interpretações e significados por mim construídos?

3) Existe no texto escrito alguma incorreção ou erro que deveria ser retificado?

4) Indicaria alguma clarificação e/ou tem alguma sugestão que entenda importante?

5) Qual o balanço que faz dessa sua participação no estudo? Tal participação apresentou algum desafio? Trouxe algum contributo para si?

Anexo 4 – Guião da entrevista de reflexão

Identificação da aula: Professora: A Turma: 11º ano Data:

Temática: Taxa média de variação de uma função.

1) Apreciação global da aula por parte da professora.

* Apreciação livre da aula pela professora.

2) Reflexões da professora sobre episódios específicos ocorridos na aula.

a) Explicação aos alunos (informá-los) sobre o assunto que irão estudar (o constrangimento em relação ao tempo e que os alunos irão estudar essa temática até o próximo ano).

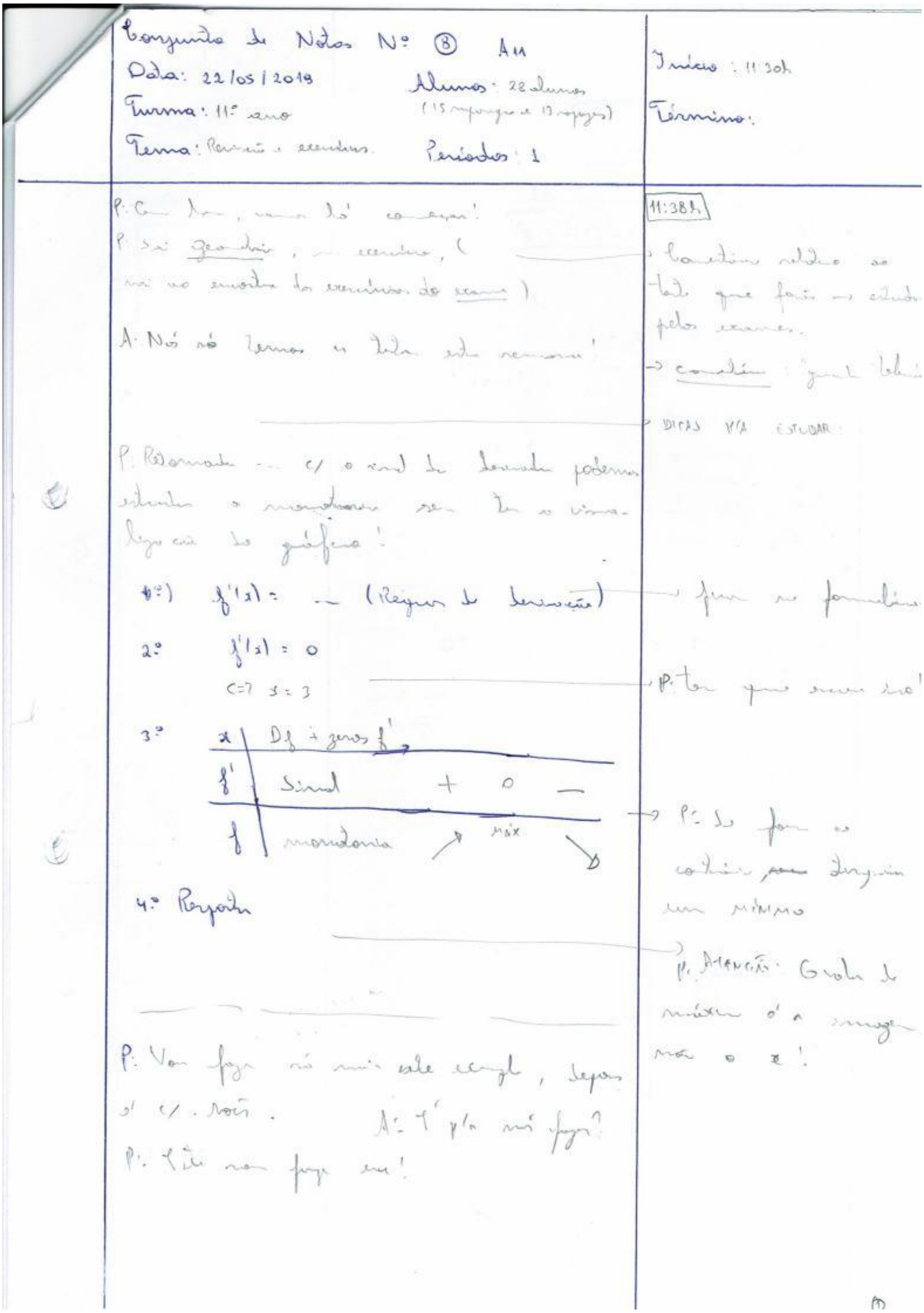
b) Aplicação da temática em estudo em outras áreas, nomeadamente na Física (velocidade e aceleração).

c) Foi possível observar um uso frequente de questionamentos (na forma de perguntas) dirigidos aos alunos. Que importância dá para estes questionamentos?

d) Exercícios para <u>consolidar</u>: "Agora ... para consolidar ... façam o exercício número 135 da página 95".

e) Uso da calculadora gráfica para a verificação visual (gráfica) do procedimento de cálculo (algébrico). Na sua visão, que papel a calculadora gráfica desempenha no estudo da temática?

Anexo 5 – Folha contendo a recolha de dados de observação (página 1)



Conjunto de Notas Nº 8 A11

Data: 22/05/2019 Alunos: 22 alunos (15 [illegible] e 13 [illegible])

Turma: 11º ano

Tema: Revisões e exercícios. Períodos: 1

Início: 11:30h

Término:

11:38h

P: Com [illegible], vamos lá começar!

P: Sai geometria, ... exercícios, ([illegible] dos exercícios do exame)

→ Conselhos relativos ao [illegible] que fazer ... estudo pelos exames.

A: Nós só temos a [illegible] esta semana!

→ conselhos: [illegible]

→ DICAS P/A ESTUDAR:

P: Relembrando ... c/ o sinal da derivada podemos estudar a monotonia sem ter a visualização do gráfico!

1º) $f'(x) = \ldots$ (Regras de derivação) → fazer no formulário

2º $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ → P: Tem que saber isto!

3º

x	D_f + zeros f'			
f'	Sinal	+	0	−
f	monotonia	↗	MÁX	↘

→ P: Se fosse ao contrário, ~~[illegible]~~ seria um MÍNIMO

4º Resposta

→ P: ATENÇÃO: Quando de máximo é a imagem não o x!

P: Vou fazer só mais este exemplo, depois é c/ vocês.

A: É p/a nós fazer?

P: Sim, não faço eu!

Anexo 6 – Registo do processo analítico envolvendo entrevistas

percebam como é que se chega lá ... eles, eles ... percebam como é que da taxa média de variação se chega à taxa instantânea (de variação) ... e facilmente, eles conseguem perceber que aquilo ali é um limite até porque trabalharam tanto esse conceito ... que é no limite, quando x tende para ... ah ... e, portanto ah ...a parte da ... deles, quando eles ... pronto, das regras não é ... falta, falta de tempo e também mesmo que tivesse tempo ... eles deduzirem as fórmulas, as regras de derivação, era ... aquilo era muito massudo para eles ... iria, iria passar a ideia de que aquilo muito difícil ... eles não têm que fazer aquilo ... ah ... mas é essencial que eles percebam porque que aquelas tabelas são construídas ... porque podemos concluir a monotonia atendendo ao sinal da derivada ... e isso vai porque eles sabem o sinal da derivada, da reta tangente ... e depois da reta tangente eles percebem o que é a reta tangente, então ... é a reta que melhor (se aproxima) ... portanto, se isso tudo tiver ... essa lógica ... eles percebem como é que de umas coisas chegamos às outras ... portanto acho essencial, que é pra aquilo fazer sentido ... e depois, é necessário muito, muito trabalho ... ainda exercícios muito variados ... que, que foi a parte que faltou mais ... eles deveriam ter mais tempo, mas o programa da Matemática é sempre muito extenso ... é sempre uma corrida contra o tempo ... sempre, sempre, sempre uma corrida contra o tempo ... ah, mas depois é fundamental que eles resolvam vários tipos de exercícios ... não pode ser sempre o mesmo, não é ... não pode ser sempre aquele exercício em que eles têm a função, derivam, zeros da derivada e concluem (bate com o dedo indicador na mesa) ... pode ser sempre isso ... mas tem que ser muitas vezes também ... pro processo ficar $\boxed{\textit{consolidado}}$ *... mas depois tem que haver outros ... essa que eles tem que uma coisa ... tem ... nesse caso têm uma, uma derivada e conseguem ali saber a ...a ... sei lá ... ou tem a monotonia e conseguem saber qualquer coisa sobre a derivada ... perguntas que não sejam tão diretas ... portanto, é essencial, ao meu ver ... em aula, é essencial, na primeira abordagem, eles percebam os conceitos ... e depois, na segunda abordagem é que eles têm que ver exemplos ... é importante o professor, em aula, dar vários exemplos de exercícios de aplicação e depois, é fundamental eles fazerem ali um leque de exercícios muito variados ... muito variados ...*

Percebam como é que se chega lá!

$\boxed{\text{ESSA LÓGICA}}$ – de umas coisas chega-se às outras.

$\boxed{\text{FAZER SENTIDO}}$

EXERCÍCIOS variados.

faltou

Muitos exercícios para o processo ficar CONSOLIDADO.

→ O que é ESSENCIAL para uma boa aprendizagem de CD:

(1.º) Na primeira abordagem – PERCEBER os conceitos.

(2.º) 2.ª abordagem – o prof dar vários EX. EXERCÍCIOS de aplicação (do conceito)

(3.º) Os alunos fazerem um leque de EXERCÍCIOS muito VARIADOS.

Investigador: *Exercícios diferentes?*

11

Anexo 7 – Registo do processo analítico envolvendo relatórios de aula

Data: 22 de maio de 2019

Turma: 11º ano

Aulas observadas: 1 período (de 50 minutos).

Temática: Estudo da monotonicidade de uma função

CO: Como cheguei mais cedo à escola (faltando uns 20 minutos para o início da aula), me dirigi à sala dos professores, local onde geralmente a professora já se encontra. Neste dia, não foi diferente. A professora já lá estava juntamente com um colega. Os dois estavam a corrigir testes. Cumprimentei a professora e disse para ficar à vontade em sua correção. Quando deu o sinal para o início da aula, nos dirigimos à sala.

A professora saúda a todos e faz alguns comentários relativos ao teste que os alunos terão na próxima semana. → INFORMES GERAIS: comentários sobre o teste.

Professora: Ora bem ... vamos lá guardar os telemóveis e começar!

Professora: Quanto ao teste ... sai geometria ... um exercício pelo menos ... vai ao encontro dos exercícios do exame ... portanto podem estudar pelas questões dos exames anteriores. → estudar pelas questões de exames anteriores

CO: A professora sugere fortemente que estudem as questões que saíram em exames anteriores ~~nessa parte~~, nomeadamente geometria.

Aluno: Mas professora ... nós "só" vamos ter quatro testes nesta semana. → Reclamação de um aluno.

CO: O comentário do aluno vai ao encontro do eu conversava com a professora nos corredores quando íamos para a aula. Segundo ela, este momento não é só cansativo para os professores, mas também para os alunos que se vêem muito sobrecarregados pela quantidade de testes finais.

Após este comentário referente ao teste que os alunos terão, a professora passa então ao tema da aula, nomeadamente uma revisão sobre o estudo da monotonia de uma função com o auxílio da derivada para em um momento posterior trabalharem em uma lista de exercícios. → TEMA DA AULA: Revisão sobre o estudo da monotonia de uma função c/ o auxílio da derivada

Professora: Retomando ... com o sinal da derivada podemos estudar a monotonia da função sem ter a visualização do seu gráfico.

Professora: Vamos organizar aqui o que temos de fazer para isso.

Nesse instante, a professora vai ao quadro e escreve:

1º) f(x) = ... (Regras de derivação)

✓

RETOMANDO: c/ o sinal da derivada é possível estudar a monotonia (sem ver o gráfico)

ORGANIZANDO

→ QUADRO RESUMO: os 4 passos.

1

1 AULA — ESTUDO DA MONOTONICIDADE DE UMA FUNÇÃO

* $\boxed{\text{ESTRUTURA DA AULA}}$

① INFORMES GERAIS: comentários sobre o Teste que irá ocorrer; dicas de questões a estudar.

② TEMA DA AULA: ESTUDO DA MONOTONICIDADE DE UMA FUNÇÃO

√ - RETOMANDO: Com o sinal da derivada é possível estudar a monotonia da função (sem visualizar o gráfico);

√ - ORGANIZANDO: escrita dos 4 passos (c o esquema)

1º) Regras de derivação ($f'(x)$)

2º) $f'(x) = 0$

3º) Tabela

4º) Resposta

√ - DISCUSSÃO DE UM EXEMPLO: $f(x) = \frac{x+3}{1-x}$ → ENVOLVENDO UMA FUNÇÃO RACIONAL.

- "Devemos fazer por partes."

- Alunos e construção dos passos para uma função polinomial.

√ - PROPOSIÇÃO DE UMA LISTA DE EXERCÍCIOS:

- Trabalho autônomo dos alunos;

- Auxílio individual;

- Interação entre os alunos;

- Exercícios para "CONSOLIDAR".