Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Pensamento Algébrico: O sentido de símbolo e de variável em alunos do 8.º ano de escolaridade

Filipe Eduardo Rosário Leal Silva

Mestrado em Ensino da Matemática

2012

Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Pensamento Algébrico: O sentido de símbolo e de variável em alunos do 8.º ano de escolaridade

Filipe Eduardo Rosário Leal Silva

Orientador: Professora Doutora Leonor Santos

Coorientador: Professora Doutora Helena Sezinando

Mestrado em Ensino da Matemática

2012

Ao meu Avô e à

minha amiga e professora

Ivone Cristino, os meus dois

mentores para a vida.

Agradecimentos

"Pela sua afetividade, pelo modo como tem o coração ao pé da boca e a lágrima ao canto do olho, pela sua integridade e, principalmente pela sua qualidade como homem, como profissional e como cidadão, já não há muita gente assim" (Manuel Alegre)

A realização deste trabalho não teria sido possível sem a colaboração e incentivo de diversas pessoas. Gostaria, por este facto, de expressar toda a minha gratidão e consideração a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para que esta tarefa se tornasse uma realidade. A todos quero manifestar os meus sinceros agradecimentos.

As minhas primeiras palavras de agradecimento têm de ir, forçosamente, para os meus pais. Sem o amor, carinho e todo o apoio que sempre me deram ao longo dos anos possivelmente não estaria aqui. Se por um lado me deram liberdade para escolher o meu caminho, simultaneamente mostraram-me desde cedo que essa liberdade tinha de acarretar sentido de responsabilidade e de perseverança, obrigado por esse, entre outros, ensinamentos.

Em seguida as minhas palavras têm de ir para a Professora Leonor Santos, minha orientadora, pela forma como me acompanhou ao longo deste trabalho, pela competência, sabedoria, disponibilidade total e simpatia que sempre manifestou ao longo deste percurso. Tenho a agradecer, ainda, as incontáveis críticas construtivas, sugestões e o rigor que me ajudaram a crescer e a levar este trabalho a bom porto.

Não posso deixar de agradecer à minha coorientadora, Professora Helena Sezinando, pela sua cordialidade e palavras de apoio ao longo destes dois anos em que trabalhámos em conjunto. Quero, também, agradecer à Professora Hélia Oliveira por todo o apoio e por me ter disponibilizado alguns textos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Tenho de deixar aqui também os meus sinceros agradecimentos ao Nuno Candeias por mim ter recebido nas suas aulas, pela amizade, disponibilidade e pelos ensinamentos constantes que me permitiram realizar a minha investigação sem restrições. Uma palavra de reconhecimento a todos os membros da comunidade escolar da Escola Básica 2.º e 3.ºciclos Vasco Santana que me receberam da melhor forma.

Para a concretização deste estudo, há que enaltecer a participação dos alunos da turma que me receberam a meio do ano de uma forma muito afetuosa, generosa e colaborativa. Antevejo um futuro brilhante para todos eles.

A chegada a este momento deveu-se a dezassete anos de aprendizagem, por isso uma referência especial a todos os estabelecimentos de ensino que me receberam e me ofereceram um ensino de qualidade. Um agradecimento especial ao Departamento de Matemática da FCUL, em especial à Professora Elisa Simões, que me ajudaram a dar os primeiros passos nesta tarefa gratificante que é ensinar.

Não posso deixar de agradecer a todos os professores que me deram um pouco de si, que me ensinaram mais do que teorias, que me prepararam para a vida e que me contagiaram com o "bichinho" de querer ser professor. Uma referência especial à professora Ivone Cristino que se tornou uma grande amiga e um exemplo a seguir desde o primeiro dia em que foi minha professora, pela sua amizade, disponibilidade, partilha constante e, acima de tudo, por me incentivar e acreditar em mim. Se um dia for metade do professor que ela é, dou-me por muito feliz.

Quero deixar um agradecimento especial à minha família, porque se eu sou o que sou devo muito a eles que me ensinaram a partilhar sem esperar nada em troca, obrigado por existirem na minha vida.

Não posso deixar de destacar a minha madrinha Célia que é mais do que uma segunda mãe para mim, tenho que lhe agradecer pelos conselhos, generosidade, apoio e amor incondicional com que regou a nossa ligação todos os dias.

Quero agradecer ao meu avô por ter sido um exemplo de vida, por todas as palavras sábias, ensinamentos e lições de vida que me ofereceste, obrigado por teres sido a melhor pessoa que jamais conheci e por me teres ensinado tanto.

De seguida não posso de deixar passar em claro todos os meus amigos que sempre me acompanharam, porque a amizade é mais do que uma palavra, é uma ligação inevitável que nos faz sorrir com as coisas simples da vida. Como é lógico não vou falar de todos mas não posso deixar de dizer umas palavras a alguns. Pelas mais diversas razões, tenho de agradecer ao João, meu companheiro de casa, pelo apoio, paciência e companheirismo e à Marina pelas palavras sábias, disponibilidade, incentivo e generosidade. Um agradecimento especial também à Ana, à Andreia, à Carmelita, à Lília, à Mariana, à Marta, à Raquel e à Sofia.

Aos meus colegas de Mestrado, em especial à Ana e à Vanessa, tenho de agradecer pelos bons momentos passados juntos, pela partilha de experiência, pela interajuda constante e pela amizade que nasceu e é para a vida.

Por último, mas não em último, à minha grande amiga e companheira de estágio Joana que foi um apoio crucial, obrigado pelos conselhos, momentos de partilha, desabafos, sorrisos e pela tua enorme dedicação e entrega à nossa amizade.

Mais uma vez a todos os meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Este estudo procura compreender a aprendizagem de alunos do 8.º ano na resolução de equações literais e nas expressões algébricas e, em particular, o modo como desenvolvem, neste contexto, o seu pensamento algébrico nele incluindo o sentido de símbolo e de variável. Com este intuito, procurei compreender em que medida os alunos aplicam os processos de resolução das equações de 1.º grau na resolução de equações literais; quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos, e como lidam com elas, no estudo das equações literais e das expressões algébricas; e que sentido de símbolo, e de variável, revelam os alunos na forma como resolvem questões envolvendo equações literais e expressões algébricas.

O estudo assenta numa metodologia qualitativa, baseando-se na lecionação de oito aulas e em entrevistas a três alunos da turma. Os principais instrumentos utilizados na recolha de dados foram a entrevista, a observação de aulas e a recolha documental.

A análise dos dados recolhidos evidencia que os alunos desenvolveram o seu pensamento algébrico. Estes recorrem aos princípios de equivalência ao resolverem equações literais, cometendo, porém, alguns erros de tipos distintos. São, também, percetíveis dificuldades na interpretação das letras e na alteração do papel atribuído ao símbolo "=". Os alunos evidenciam ter um sentido de símbolo apurado, no entanto existem ainda aspetos a melhorar, essencialmente no trabalho com equações literais. Apesar de possuírem o sentido de incógnita, estes alunos ainda se encontram muito apegados à Álgebra como Aritmética generalizada.

Palavras-chave: Aprendizagem matemática, pensamento algébrico, sentido do símbolo, equações literais, expressões algébricas.

Abstract

This study pursuits the understanding of the learning process of eight grade students when solving literal equations and algebraic expressions and, in particular, the way they develop, in the context, their algebraic thought, where it's included the sense of symbol and variable. With this intuit, I tried to understand in what measure the students apply the first degree equations resolution process in solving literal equations; which are the main difficulties presented by the students – and how the deal with them – when studying literal equations and algebraic expressions; and what sense of symbol and of variable the students show in the way how they solve questions, involving literal equations and algebraic expressions.

The study is based on a qualitative methodology, basing itself on eight lectures and in the interviews of three students of the class. The mains instruments used in the date collection were the interview, class observation and document compilation.

The analysis of the collected date shows that the students developed their algebraic thought. They resort to the principals of equivalence when they solver literal equations, making, however, different kind of mistakes. Some difficulties are also perceived when it comes to interpret the letters and the change of the part given to the symbol "=". The students show a sharp sense of symbol, however, there are some aspects to be improved, essentially when it comes with working with literal equations. Even though they have a sharp sense of unknown, these students are still too attached to Algebra as generalized Arithmetic.

Key-Words: Mathematics learning, algebraic thinking, sense of symbol, literal equations, algebraic expressions.

Índice

Índice de Anexos

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Capítulo I

Introdução

"Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência"
(Irene de Albuquerque)

Com o Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007), a Álgebra assume um novo lugar de destaque no ensino e aprendizagem da Matemática, deixando de ser encoberta pelos restantes temas matemáticos. Ao passar a ser considerada um tema, a Álgebra passa a ser vista de uma forma mais ampla, o que permite uma valorização do pensamento algébrico ao ponto de o propagar às orientações transversais do currículo.

A aprendizagem da Álgebra tem um papel muito importante na formação dos alunos. Tal como refere o NCTM (2008, p. 1),

> A Álgebra é uma maneira de pensar e um conjunto de conceitos e habilidades que permitem aos estudantes generalizar, criar um modelo, e analisar situações matemáticas. A Álgebra providencia uma maneira sistemática de investigar relações, ajudando a descrever, organizar e compreender o mundo. Apesar de aprender a usar Álgebra e fazer com que os estudantes sejam melhores a resolver problemas, estes conceitos e habilidades importantes levam o seu tempo a ser desenvolvidas. O seu desenvolvimento começa cedo e deveria ser um dos enfoques da instrução da matemática desde o pré-escolar até ao secundário. Conhecer a Álgebra abre portas e expande oportunidades, encorajando um largo leque de ideias matemáticas que são úteis em muitas profissões e carreiras. Todos os alunos deveriam ter acesso à Álgebra e aos meios para a estudar.

Olhando para a Álgebra como “uma forma específica de pensar e de ler o mundo e não apenas como um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas, percebe-se a importância crescente atribuída à aquisição de significados da Álgebra” (Nabais, 2010, p. 48), pois é na linguagem algébrica que se encontra uma poderosa ferramenta. Contudo, pode ser nela que os alunos encontram uma barreira grave para progredir na aprendizagem da Álgebra.

Ao longo desta secção, apresento as minhas motivações pessoais e o contexto que me levaram à realização deste estudo e descrevo, também, os objetivos e questões de investigação da problemática em estudo. Por último, faço referência à organização deste documento.

Motivações pessoais e contexto do estudo

A Matemática sempre foi uma ciência mágica, um constante jogo de manipulações de símbolos, de números, de variáveis, tendo sido neste ambiente viciante que encontrei a verdadeira paixão por esta arte e decidi tomá-la como pano de fundo da minha vida. A arte de ensinar é das coisas mais gratificantes que existem, ver nos olhos das crianças a descoberta e ter a hipótese de contribuir para o seu futuro são alguns dos motivos que me levaram a enveredar por este ramo da matemática.

No entanto, é também neste jogo de manipulações que muitos alunos se perdem e acabam por se desinteressar por esta disciplina. Pergunto-me como uma mesma caraterística pode arrebatar corações e prendê-los à musicalidade associada à matemática e ao mesmo tempo criar uma barreira tão difícil de transpor por alguns alunos.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 8), “a simbologia algébrica e a respetiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas. No entanto, esta grande potencialidade do simbolismo é também a sua grande fraqueza. Esta vida própria tem tendência a desligar-se dos referentes concretos iniciais e corre o sério risco de se tornar incompreensível para o aluno”. Perante este risco, sempre tive curiosidade em estudar um pouco mais este tema, em compreender o porquê destas dificuldades e que estratégias adotar para as contornar.

Um dos principais motivos da minha escolha deve-se à restrição dos tópicos matemáticos a trabalhar ao longo dos 2.º e 3.º períodos do 8.º ano de escolaridade e, tendo sido aconselhado pela professora Doutora Leonor Santos, decidi optar pelo grande objetivo do estudo da Álgebra no ensino, desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, com especial enfoque na capacidade de manipulação de símbolos que daí advém.

Perante estas restrições, considero que tive bastante sorte pois direcionaram-me para a área que mais me alicia na matemática e permitiram-me trabalhar com equações, não simples equações mas as que envolvem uma infinidade de soluções contrariamente à primeira ideia que se tem de equação onde apenas se procura uma solução, um valor para a incógnita. O trabalho com equações e com expressões algébricas sempre me deliciou enquanto aluno, passava horas a resolver equações, funcionava como um simples jogo, um passatempo, e nunca compreendi porque é que os meus colegas não lidavam bem com esta inserção das letras no meio dos números.

Deste modo, uma vez que a Álgebra é das áreas da Matemática que mais me seduz e como gosto de desafios que exijam de mim, que me levem para campos onde não estou tão seguro, decidi enveredar por este caminho, um caminho onde procuro compreender um pouco melhor que sentido os alunos atribuem aos símbolos e às variáveis.

Objetivo e questões de investigação do estudo

O Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) apresenta como principal propósito de ensino: "desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos bem como a capacidade de interpretar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos" (p. 57) e, deste modo, no âmbito da unidade didática a lecionar, o meu estudo incidirá na compreensão do pensamento algébrico dos alunos.

O desenvolvimento do sentido de símbolo e da noção de variável é algo sobre o qual o atual Programa de Matemática se debruça e refere como sendo importante de tratar ao nível da Álgebra no 3.º ciclo. De acordo com estas indicações, dentro do pensamento algébrico, irei procurar compreender que sentido de símbolo e de variável os alunos do 8.º ano de escolaridade evidenciam.

Assim sendo, o presente trabalho de cariz investigativo tem como principal objetivo compreender a aprendizagem de alunos do 8.º ano na resolução de equações literais e nas expressões algébricas, e em particular o modo como desenvolvem, neste contexto, o seu pensamento algébrico nele incluindo o sentido de símbolo e de variável. Tendo em conta este objetivo, formulei as seguintes questões:

i) Em que medida os alunos mobilizam conceitos e propriedades matemáticas das equações de 1.º grau na resolução de equações literais?

ii) Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo das equações literais e das expressões algébricas? Em particular, quais as principais dificuldades dos alunos na compreensão das alterações dos papéis desempenhados pelas variáveis e pelo sinal de igual? Como procuram resolver as dificuldades evidenciadas?

iii) Que sentido de símbolo revelam os alunos na forma como resolvem questões envolvendo equações literais e expressões algébricas?

iv) Que sentido de variável revelam os alunos na forma como resolvem questões envolvendo equações literais e expressões algébricas?

O estudo apresentado foi desenvolvido no âmbito da lecionação dos subtópicos “Equações Literais”, “Expressões algébricas” e ”Operações com Polinómios”, numa turma do 8.º ano da Escola Básica com 2.º e 3.º ciclo Vasco Santana, ao longo de treze aulas de quarenta e cinco minutos que decorreram no início do terceiro período do ano letivo de 2011/12.

Organização do estudo

Este estudo é composto por diversos capítulos, desenvolvidos tendo em conta os objetivos e a unidade didática em que se enquadra.

No segundo capítulo intitulado "Ensino e Aprendizagem da Álgebra", encontra-se o enquadramento curricular e didático onde faço uma breve revisão da literatura relacionada com o ensino da Álgebra, com especial foque no pensamento algébrico e no sentido do símbolo e de variável.

No capítulo seguinte "A Unidade de Ensino", irei apresentar a unidade de ensino subjacente a este estudo onde procuro descrever as características essenciais dos alunos da turma, explicitar alguns conceitos matemáticos envolvidos. Nesta secção, procuro, também, explicitar e justificar as estratégias de ensino utilizadas, tal como apresentar as tarefas e planificações da sequência de aulas a lecionar. Ainda neste capítulo descrevo sucintamente as aulas realizadas.

O quarto capítulo que se intitula "Métodos e procedimentos de recolha de dados" procura apresentar e justificar a escolha de determinados instrumentos de recolha de dados em detrimento de outros.

A "Apresentação e Análise de Dados" surge como quinto capítulo, onde procuro analisar os dados recolhidos tendo em conta a problemática definida.

Para finalizar, no sexto capítulo, "Reflexão sobre o trabalho realizado", procuro responder às questões de investigação tal como refletir sobre a minha prática letiva e as aprendizagens adquiridas com a realização deste estudo.

Capítulo II

Ensino e Aprendizagem da Álgebra

"Para mim, a Matemática começou-se a complicar
quando os números e o alfabeto começaram a namorar"
(Anónimo)

Diversos estudos têm-se debruçado sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra, como é o caso de Ponte *et al.* (2009) e de Kieran (1992), evidenciando a importância atribuída atualmente a este campo da matemática e ao desenvolvimento do pensamento algébrico, um conceito que surge como novidade no Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007). Na tentativa de responder à questão "O que é a Álgebra?", surgem as mais diversas respostas: a Álgebra é uma disciplina escolar, aritmética generalizada, uma linguagem, uma ferramenta, uma cultura, uma forma de pensar ou uma atividade. A dificuldade em clarificar este conceito é transportada para o ensino e aprendizagem da Álgebra.

Ao considerarmos a Álgebra como um "conjunto de regras de transformação de expressões e processos de resolução de equações de 1.º e 2.º grau e de sistemas de equações" (Ponte *et al.*, 2009, p. 7-8), os símbolos constituem o seu objeto central. A Álgebra, em Portugal e noutros países, tem sido considerada essencialmente como o ensino da manipulação de expressões simbólicas, seja transformando-as em expressões equivalentes, seja resolvendo equações. Porém, segundo Kaput (1999), este campo da matemática deve ser entendido de uma forma completamente diferente da habitual. O cenário atual do ensino da Álgebra em Portugal é um reflexo de como a Álgebra evoluiu com o passar dos tempos, tornando-se assim necessária uma breve revisão das diversas conceções da Álgebra e da Álgebra escolar para melhor compreender o que hoje acontece com o ensino desta área científica.

No presente capítulo pretendo fazer uma breve revisão de literatura relacionada com o ensino e aprendizagem da Álgebra. Numa primeira secção, procuro sintetizar algumas investigações sobre a evolução histórica da Álgebra e as suas diferentes perspetivas e, em especial, da Álgebra escolar. Tendo em conta as questões deste estudo, na segunda secção procuro revisitar alguns artigos relativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico, à existência do sentido do símbolo e da noção de variável por parte dos alunos. A terceira parte deste capítulo refere-se às estratégias de resolução das equações e às dificuldades que os alunos manifestam na aprendizagem da Álgebra.

A evolução histórica da Álgebra

A Álgebra nem sempre foi tal como hoje a conhecemos. Tem-se vindo a afastar de formulações em texto para dar lugar a uma linguagem essencialmente simbólica, caminho esse extremamente longo, cerca de dois mil anos. O desenvolvimento deste campo de conhecimento prende-se com o contributo cultural dado por diversos povos: egípcios, babilónios, gregos, chineses, hindus, árabes, entre outros (Fiorentini, Miorim & Miguel, 1993). As origens da Álgebra situam-se na formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas usadas desde a Antiguidade. Evoluindo aos poucos, com o surgimento do conceito de equação, a Álgebra passa a ser entendida como o estudo da resolução de equações, onde surge o nome do, considerado por alguns, pai da Álgebra, Diofanto de Alexandria (séc. II a.C.).

Ainda que inicialmente Álgebra se referisse a equações, atualmente esta palavra tem um significado mais amplo e na tentativa de se chegar a uma definição consensual é fundamental considerar duas fases, as quais se distinguem tanto cronologicamente como concetualmente: (i) a Álgebra antiga ou elementar; e (ii) a Álgebra moderna ou abstrata. A fase da Álgebra antiga remete para o período de 1700 a.C. a meados do século XIX d.C. e caracteriza-se, essencialmente, pela invenção gradual do simbolismo e pela resolução de equações por diversos métodos.

Foram vários os povos dos vários cantos do mundo que contribuíram para o avanço e a compreensão da Álgebra. Um exemplo desses é o povo islâmico que, no século IX d.C., pegando no material já desenvolvido pelos babilónios e combinando-o com a herança grega da geometria criaram uma nova Álgebra na qual se destaca a noção de prova. Os islâmicos procuraram justificar através da geometria as regras algébricas descobertas até então, pois acreditavam que as únicas provas reais eram geométricas (Katz, 1998).

Segundo Katz (1998) e Baumgart (1994), o termo "Álgebra" é uma variante latina da palavra árabe, *al-jabr,* a qual surge apenas alguns séculos mais tarde, num trabalho de al-Khowarizmi (790-840) que se intitulava *Hisab al-jabrw'al-muqabalah*. O termo, *al-jabr*, significa "restauração" ou "reposição", referindo-se à adição do mesmo número a ambos os membros de uma equação, enquanto o termo *al-muqabalah* significa "comparação" e traduz a simplificação de uma equação por redução de termos semelhantes. Contudo, não se depreenda daqui que a Álgebra é invenção dos Árabes, uma vez que as suas origens esfumam-se na noite dos tempos (Silva & Paulo, 1968).

Ainda no mundo islâmico, no século XI, o matemático al-Karají dedicou-se ao estudo sistemático da Álgebra de expoentes. Apesar dos matemáticos mais antigos, como Diofanto, já tivessem trabalhado com potências de incógnitas superiores a três, foi este o primeiro a compreender que essas potências poderiam ser aumentadas indefinidamente. Através desta descoberta, al-Karají estabeleceu procedimentos gerais para adicionar, subtrair e multiplicar monómios e polinómios (Katz, 1998).

Os herdeiros diretos dos trabalhos islâmicos foram os algebristas da Europa medieval, nos quais se destaca o famoso Leonardo de Pisa (1170-1250), um dos primeiros escritores europeus de Álgebra e responsável pela famosa sucessão de Fibonacci. A sua obra *Liberabbaci* não apresenta quaisquer progressos em relação à matemática islâmica, simplesmente é o meio de apresentar esta matemática à Europa.

No século XIV começaram a ter lugar muitas transformações na economia europeia que acabaram por se refletir na matemática. Uma revolução comercial, impulsionada pelas exigências das Cruzadas, obrigou os mercadores a perceber um pouco mais de matemática, surgindo uma nova classe de profissionais, os abacistas que desenvolveram técnicas algébricas engenhosas para resolver problemas complexos (Katz, 1998). É neste século, também, que a Álgebra chega a Portugal através de Pedro Nunes (1502-1578) que escreveu o *Libro de Algebra* e no qual começa a surgir uma exposição mais abstrata da Álgebra.

Em resposta à impossibilidade de encontrar uma solução geral para uma equação com coeficientes arbitrários de grau superior ao 4.º, surge, na segunda metade do século XIX, a Álgebra moderna. Esta tem o seu início com a Teoria de Grupos, devida, em parte a Gauss e, fundamentalmente a Galois, e estende os seus horizontes ao estudo das estruturas algébricas abstratas como grupo, espaço vetorial, anel e corpo e para o estudo de equações não algébricas, ou seja, equações diferenciais e equações envolvendo objetos matemáticos como funções (Ponte *et al.*, 2009).

Segundo Fiorentini *et al.* (1993), esta distinção concetual da Álgebra está relacionada com a mudança qualitativa da natureza do objeto de investigação, a qual evidencia duas perspetivas distintas de encarar a Álgebra: como Aritmética generalizada ou como sistema simbólico postulacional. Para estes autores, esta mudança

> considera como referência o momento em que se teve a clara perceção de que o objeto de investigação desse campo do conhecimento matemático ultrapassava o domínio do estudo das equações e das operações clássicas sobre quantidades generalizadas, discretas ou contínuas, para centrar-se no estudo das operações arbitrariamente definidas sobre objetos abstratos, não necessariamente interpretáveis em termos quantitativos; isto é, sobre estruturas como grupos, anéis, corpos, etc. (Fiorentini *et al.*, 1993, p.78)

É importante referir que houve um desenvolvimento do simbolismo algébrico ao longo dos tempos. Kieran (1992) resume-o em três etapas: a *retórica*, a *sincopada* e a *simbólica*. A primeira etapa corresponde à época anterior a Diofanto e caracteriza-se pelo uso de descrições em linguagem corrente no processo de resolução de problemas particulares e por uma total ausência de símbolos. A Álgebra do Egito, tal como a da Babilónia, encontra-se neste patamar. Nas equações lineares, por exemplo, era usado um método de resolução que consistia numa estimativa inicial seguida de uma correção final (Método da falsa proposição). Dentro desta etapa, no século V a.C., a Álgebra grega formulada pelos pitagóricos e por Euclides aparece associada ao termo *Álgebra geométrica* num contexto em que as formas tinham supremacia em relação aos números, acreditando-se que "as grandezas geométricas eram muito mais completas do que o conjunto dos números racionais" (Silva & Paulo, 1968).

Alguns séculos depois, Diofanto inicia a fase *sincopada* com a introdução de letras para representar quantidades desconhecidas. Segundo Kieran (1992), o problema dos algebristas residia essencialmente na procura da identidade para as letras e não tanto na busca de uma forma para expressar o geral, daí a autora apelidar esta etapa também de *lacónica*.

No século XVI, com François Viète (1540-1603), surge a terceira etapa, a fase *simbólica*, caraterizada pela utilização de letras para as quantidades conhecidas e para as incógnitas e pela formulação de regras para relações numéricas. Esta fase ficou marcada pela invenção, em 1557, do símbolo "=" por Robert Recorde e pela publicação de "*Ars Magna*", escrito por Girolamo Cardano, que continha as soluções para as equações cúbicas e a solução para as equações quárticas.

Ao mesmo tempo que se desenvolve a teoria das equações algébricas, começa a desenvolver-se também o conceito de função como uma correspondência entre os valores de duas variáveis, surgindo em primeiro lugar as funções algébricas (polinomiais e racionais) e logo de seguida as ditas transcendentes que dão origem a um novo ramo da Matemática – a Análise Infinitesimal (Ponte *et al.*, 2009). A figura seguinte apresenta uma visão geral das fases de desenvolvimento da linguagem algébrica:

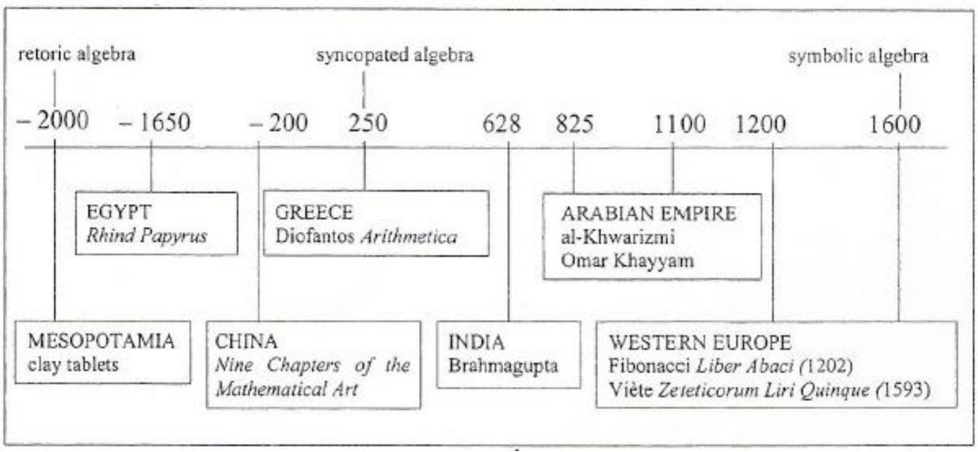


Figura 1 – Fases de desenvolvimento da linguagem algébrica (Nabais, 2010, p. 26)

De acordo com o que Silva & Paulo (1968) referem no Compêndio de Álgebra para o 7.º ano,

> a história da álgebra não termina portanto aqui: segue, acompanhando a história do homem sobre a Terra. O desenvolvimento da Álgebra, como a da matemática em geral, prossegue nos nossos dias, para um futuro imprevisível, de maneira cada vez mais ampla e mais profunda. (Tomo II, p. 220)

A Álgebra é um dos grandes ramos da matemática, ao lado da Geometria e da Análise Infinitesimal. O seu progresso e crescimento têm influenciado tanto matemáticos como investigadores na área da educação, os quais tiram partido disso para efetuar determinadas mudanças fulcrais no ensino da Álgebra.

Perspetivas da Álgebra e da Álgebra Escolar

Usiskin (1988), ao tentar responder à questão "O que é a Álgebra Escolar?", refere a relação deste tema com a compreensão do significado atribuído às "letras" e respetivas operações e considera que os alunos iniciam o estudo da Álgebra somente quando contatam pela primeira vez com as variáveis. Contudo, no que concerne à educação matemática, alguns investigadores têm-se debruçado ao longo dos anos sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra, identificando diferentes conceções do modo como esta é ensinada nas escolas.

A natureza de qualquer campo da matemática está relacionada com os objetos com que esse campo trabalha. Assim sendo, ao questionarmo-nos sobre quais os objetos fundamentais da Álgebra, a resposta "expressões e equações" seria satisfatória há acerca de trezentos anos, contudo atualmente esta resposta está incompleta. A Álgebra trabalha com relações matemáticas abstratas que tanto podem ser expressas por equações, inequações ou funções como podem ser representadas por outras estruturas definidas por operações ou relações em conjunto. A ideia de que a Álgebra consiste no trabalho com expressões, tratando-se de um conjunto de regras de transformação de expressões e processos de resolução de equações ainda perpetua como é visível nos programas de Matemática da década de 90 (Ponte *et al.*, 2009).

Nesta linha, defende-se que o objeto central da Álgebra são os *símbolos*, sendo plausível encarar o trabalho em Álgebra como a manipulação de símbolos e de expressões algébricas, onde a matemática não passa de um jogo de símbolos sem significados. Efetivamente, não podemos minimizar a importância dos símbolos, uma vez que a simbologia algébrica e a respetiva sintaxe caraterística desta área científica ganham vida própria, tornando-se poderosas ferramentas na resolução de problemas. Contudo, é também nesta potencialidade que se encontra a sua grande fraqueza quando são utilizados símbolos de forma abstrata, sem significado, levando a um jogo de manipulações caraterizado pela prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas, como sucedeu no movimento da Matemática moderna (Ponte *et al.*, 2009).

Este movimento, que trazia uma nova conceção de Álgebra, foi severamente criticado. Segundo Ponte *et al.* (2009), alguns críticos defendiam que os símbolos literais devem ter algum significado numa fase inicial, salientando a quantidade de interpretações incorretas que poderiam surgir na aprendizagem da linguagem algébrica. Diversas investigações feitas na área, como por exemplo Kaput (1999), justificam as dificuldades sentidas pelo facto de os programas de Álgebra estarem muito centrados na simbologia e na aplicação de regras, tal como por este campo surgir um pouco isolado dos restantes temas matemáticos.

A partir da década de 80, surgiu uma nova conceção de Álgebra onde o *pensamento algébrico* ganha destaque. Contudo, ainda na década de 90, a Álgebra elementar, a par de outros tópicos recentes como probabilidades e estatística, surgiam sempre no final dos manuais escolares, nos capítulos que os professores geralmente não tratavam por falta de tempo, o que levava a uma currículo repetitivo promovendo uma imagem negativa da matemática e tornando-se incapaz de dar aos alunos bases adequadas para a matemática dos anos seguintes (NCTM, 1991). Quando nos confrontamos com o programa de 1991 anterior ao presentemente em vigor, a palavra Álgebra raramente surge ao longo deste, enquanto que a noção de pensamento algébrico não é referida em nenhuma parte. Os temas contemplados gora pela Álgebra no programa atual, surgiam no programa anterior associados ao tema Números e Cálculo, no tópico Variáveis e Cálculo Algébrico e no que diz respeito a indicações metodológicas, o anterior programa já salientava a importância da introdução gradual do conceito de variável, contudo enfatizava a ideia de resolver metodicamente as equações:

> A utilização de variáveis, ponto sempre delicado da entrada na álgebra, será feita gradualmente, desde a análise de fórmulas e relações entre grandezas já familiares aos alunos até às operações com polinómios simples, necessárias à resolução de condições. A

> pesquisa de soluções (ou de seus valores aproximados) de uma condição dada, quando forem quase imediatas ou não se conheça um método de resolução, é um dos processos cuja utilização tem consequências importantes, para lá do próprio tema. Estuda-se a resolução metódica de equações dos 1.º e 2.º graus, de inequações do 1.º grau, de sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, sempre que possível no contexto de um problema (DGEBS, 1991, p. 184).

Quando analisamos os Princípios e as Normas para a Matemática Escolar de 2007, a Álgebra ganha tal importância no currículo escolar ao ponto de se afirmar que "todos os alunos deveriam aprender álgebra" (p. 39), uma vez que os métodos e as ideias algébricas fundamentam o trabalho matemático em muitas áreas e a competência algébrica revela-se importante na vida adulta, quer no trabalho como preparação para o ensino superior. Até aqui a Álgebra não era referida antes do 3.º ciclo ou do ensino secundário, mas no NCTM (2007) surge a ideia de que a aprendizagem deste ramo da matemática deve começar logo nos primeiros anos de escolaridade, permitindo assim um programa de álgebra mais ambicioso para o 3.º ciclo e o secundário. Com esta inovação, a noção intrínseca de Álgebra Escolar tem obrigatoriamente de mudar na cabeça dos alunos e, acima de tudo, na dos professores:

> Muitos adultos identificam a álgebra aprendida na escola como uma manipulação de símbolos, (…) [mas atualmente a álgebra escolar] é mais do que a manipulação de símbolos. Os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados para registar ideias e tirar ilações face a certas situações. (NCTM, 2007, p. 39)

Atualmente, o grande objetivo do estudo da Álgebra nos ensinos básico e secundário é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, onde se inclui, nomeadamente a capacidade de manipulação de símbolos. O Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007), tal como o NCTM (2007), preconizam o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos desde cedo. As Normas para a Álgebra defendem que os programas de ensino, no que se refere a este ramo da matemática, deverão habilitar os alunos para a compreensão de padrões, relações e funções, a representação e análise de situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos, o uso de modelos matemáticos na representação e compreensão de relações quantitativas e para a análise da variação em diversos contextos. Assim sendo, no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objetos mas principalmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato (Ponte *et al.*, 2009).

Oliveira (2009) acredita que a inserção do pensamento algébrico é a grande diferença entre o programa atual e os programas do ensino básico anteriores no que diz respeito às seguintes ideias: (i) os alunos começam a pensar algebricamente desde o início do seu percurso escolar; (ii) a capacidade de generalização é um aspeto fundamental na Álgebra e ganha ao ser promovida desde o início do ensino básico; (iii) a utilização do simbolismo algébrico deve ser progressiva recorrendo a múltiplas representações; (iv) a forte articulação e continuidade entre os vários tópicos da Álgebra.

A investigação didática da Álgebra tem sofrido alterações com o evoluir da própria conceção do que se entende por Álgebra Escolar. Kieran (2006) refere três grupos temáticos, dentro dos quais enquadra as principais linhas de investigação nos últimos trinta anos, conforme a figura 2:

Período de tempo	Grupo temático que surgiu
1977 a 2006	1.Transição da Aritmética para a Álgebra, variáveis e incógnitas, equações e sua resolução, e *word problems*.
Meio da década de 80 a 2006	2.Utilização de ferramentas tecnológicas e foco na múltipla representação e generalização.
Meio da década de 90 a 2006	3.Pensamento algébrico dos alunos do ensino básico, enfoque no binómio professor/ensino da álgebra, e modelos de situações físicas e outros ambientes dinâmicos da álgebra.

Figura 2 – Principais linhas de investigação em Álgebra Escolar nos últimos trinta anos (Adaptado de Kieran, 2006, p.12, in Nabais, 2010, p. 34)

A transição da Aritmética para a Álgebra é o foco do primeiro grupo temático. Este defende que os alunos, no seu trabalho algébrico, utilizam as regras aprendidas na Aritmética mas evidenciam distanciamento das mesmas. Segundo Stacey & MacGregor (1999), os alunos ao resolverem problemas optam pelos métodos aritméticos em detrimento dos algébricos.

Ao emergir, na década de 80, a ideia de que o conhecimento é construído de forma ativa pelo aluno levou os investigadores a debruçarem-se sobre a utilização das novas tecnologias como ferramentas úteis na aprendizagem da Álgebra, surgindo assim o segundo grupo temático. De acordo com Nabais (2010), a Álgebra deixou de ser vista como o estudo e resolução de equações para se tornar num tema mais amplo, abrangendo o estudo das funções e suas representações, bem como situações de contexto real e *wordproblems*.

O terceiro grupo temático surge a meio da década de 90 e carateriza-se pela análise do pensamento algébrico dos alunos do ensino básico. Com a extensão da Álgebra das equações às funções e aos modelos de situações da vida real, tornou-se necessário proceder a ajustamentos no ensino de modo a incluir explorações de cunho algébrico na escolaridade básica. É também nesta década que os investigadores começam a debruçar-se com mais intensidade nas práticas dos professores e no próprio ensino da Álgebra (Nabais, 2010).

Nabais (2010) conclui que as diversas investigações realizadas ao longo dos anos não são estanques, com respostas acabadas, antes pelo contrário, vão sendo progressivamente retomadas, analisadas e enriquecidas ao mesmo tempo que surgem novas problemáticas. Refere, ainda, que a forma como os alunos aprendem Álgebra altera-se ao mesmo tempo que evolui a forma de a ensinar.

A Álgebra não pode ser vista simplesmente como uma manipulação simbólica pois caso isso aconteça, esta terá pouca relevância no quotidiano, levando ao desinteresse dos alunos na aprendizagem deste tema matemático. Torna-se, assim, fundamental tornar relevante para os alunos tal como clarificar os professores quanto ao que verdadeiro significado da Álgebra. Esta necessidade vem justificar a promoção do pensamento algébrico no atual Programa de Matemática do Ensino Básico.

A Álgebra e o Pensamento Algébrico

Na educação matemática, não existe grande consenso sobre o que significa pensar algebricamente. De acordo com Kaput (1999), o pensamento algébrico, mais do que manipular expressões e resolver equações, envolve as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas. A introdução à Álgebra deve ser feita através de generalizações com base nas experiências dos alunos e jamais pela aprendizagem descontextualizada de regras de manipulação simbólica.

Assim sendo, este autor identifica cinco aspetos do pensamento algébrico, intrinsecamente relacionadas entre si:

(i) A *generalização e formalização de padrões e restrições*, em que considera a generalização como sendo um alargamento da comunicação e do pensamento para além das situações concretas e a formalização como sendo a expressão dessa generalização numa linguagem mais ou menos formal;

(ii) A *manipulação de formalismos*, guiada sintaticamente, em que critica os exercícios rotineiros e sem significado presentes no ensino da manipulação algébrica que não contribuem em nada para a aprendizagem com compreensão;

(iii) O *estudo de estruturas abstratas*, defendendo que estas devem ser ensinadas para a compreensão, partindo das experiências dos alunos e relacionando-as com outros temas matemáticos;

(iv) O *estudo de funções, relações e de variação conjunta*, considerando ser possível ensinar a noção de função logo no início da escolaridade sem recorrer a fórmulas ou valores numéricos;

(v) A *utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos.*

Mais recentemente, Kaput (2008) refere novamente estes cinco aspetos, designando os dois primeiros como “aspetos nucleares” da Álgebra, os restantes três designa-os como “ramos” deste domínio com expressão na Matemática Escolar.

Lins e Gimenez (1997) referem que pensar algebricamente significa produzir significado para as situações e apontam dois objetivos essenciais para o ensino e aprendizagem da Álgebra: permitir que os alunos produzam significados para a Álgebra e desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente. Para alcançar estes objetivos, os autores acreditam que as tarefas a realizar pelos alunos devem ter em conta os campos concetuais já adquiridos e proporcionar uma evolução gradual de novos conceitos.

Ponte *et al.* (2009) defendem que aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Resumir a atividade algébrica à manipulação simbólica equivale a reduzir a riqueza da Álgebra apenas a uma das suas facetas.

Segundo os mesmos autores, o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas (Quadro 1). Em relação à primeira vertente *Representar*, esta refere-se à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação, nomeadamente sistemas cujos carateres primitivos têm uma natureza simbólica. A segunda vertente *Raciocinar* prende-se com o relacionar, o generalizar e o deduzir. Por último, a terceira vertente *Resolver problemas* inclui modelar situações e passar pelo uso de diversas representações de objetos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios.

Quadro 1- Vertentes fundamentais do pensamento algébrico
(Ponte *et al.*, 2009, p.11)

Representar	Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais
	Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa
	Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos
Raciocinar	Relacionar (em particular, analisar propriedades)
	Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras
	Deduzir
Resolver problemas e modelar situações	Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação)

Perante isto, o NCTM (2007) refere que tornar o pensamento algébrico acessível a todos os alunos é um desafio que se coloca à educação matemática. No programa de matemática para o ensino básico (DGIDC, 2007), o pensamento algébrico assume uma posição de destaque, surgindo como uma competência a desenvolver desde o primeiro ciclo. Associado ao significado atribuído a este conceito surge o uso de simbologia e de variável.

Interpretação de símbolos e expressões

Atribuir sentido aos símbolos é um dos problemas fundamentais na aprendizagem da Álgebra. Contudo o simbolismo é parte essencial da Matemática e não podemos dispensá-lo. A Álgebra acrescenta novos símbolos à Aritmética, tal como "⇔", e envolve uma alteração no significado de alguns dos símbolos existentes, como seja o caso do "=" e do "+".

Em relação ao símbolo "=", a mudança de significado acarreta grandes dificuldades para os alunos, uma vez que estes estão habituados, na Aritmética, a encarar a expressão $5 + 7 =$ como indicando uma operação que é preciso fazer. Quando surge, em Álgebra, $x + 5 = 7$, esta não representa uma operação, mas sim uma condição, em que se coloca a pergunta de qual o valor que satisfaz esta igualdade (Ponte *et al.*, 2009).

Os símbolos permitem expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada (Sfard & Linchevski, 1994), tal como facilitam o distanciamento em relação aos elementos semânticos que representam, ganhando independência e tornando-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas (Rojano, 1996, in Matos & Ponte, 2008, p.196).

Em Álgebra, uma letra pode ser usada das mais diversas formas. Küchemann (1981, in Kieran, 1992) descreve seis níveis de interpretação e uso das letras:

(i) *Letra avaliada:* a letra assume um valor numérico desde o princípio. Exemplo: Qual é o valor de a se $a + 7 = 9$?

(ii) *Letra não considerada:* a letra é ignorada ou a sua existência é reconhecida mas não lhe é atribuído significado. Exemplo: Se $n - 246 = 762$, então $n - 247 =$…?

(iii) *Letra como objeto:* a letra é entendida como um símbolo para um objeto concreto ou como um objeto concreto. Exemplo: O cálculo do perímetro de um quadrado é $4l$, onde l é o comprimento do lado do quadrado;

(iv) *Letra como incógnita:* a letra é vista como um número específico mas desconhecido. Exemplo: Dada a equação $3x + 5 = 8$, qual é o valor de$x$?

(v) *Letra como número generalizado:* a letra é vista como uma representação de vários números e não de apenas um. Exemplo: Se $c + d = 12$ e c é menor que d, que podes afirmar acerca de c?

(vi) *Letra como variável:* a letra é entendida como a representação de uma série de valores desconhecidos e reconhece-se uma relação sistemática entre dois conjuntos de valores. Exemplo: Qual das expressões é maior, $3n$ ou $n + 3$? Justifica.

Küchemann (1981, in Kieran, 1992) refere, ainda, que a catalogação apresentada encontra-se ordenada por ordem crescente de dificuldade e que, quando um aluno for capaz de trabalhar com a letra como variável, significa que este compreendeu o uso das letras na totalidade.

Desenvolvimento do sentido de símbolo

Segundo Castro e Castro (1997), o símbolo é um ente que se toma como substituto de algo, ao qual se chama referente. Este pode tomar uma variedade de formas, desde objetos concretos a marcas escritas no papel e pode representar desde conceitos simples a outros mais complexos.

Arcavi (1994, 2006) é um outro autor que se tem dedicado à Álgebra e ao seu sentido, utilizando a expressão "sentido de símbolo". Este não atribui uma definição precisa e única ao sentido de símbolo, caracterizando-o como sendo uma apreciação, uma compreensão, um instinto complexo e multifacetado em relação aos símbolos. Segundo Arcavi (1994, 2006), os símbolos são o instrumento principal da Álgebra e ter sentido do símbolo é dar significado a esses símbolos, para além de permitir aos alunos serem capazes de decidir quando os símbolos são úteis e quando devem ser utilizados, para evidenciar relações, mostrar a generalidade e fazer conjeturas.

No sentido de clarificar o significado de sentido de símbolo, este autor lista um conjunto de comportamentos do indivíduo, que revelam a existência do sentido do símbolo:

(i) Compreensão sobre o poder dos símbolos, tendo-os presentes e disponíveis;
(ii) Perceção de quando os símbolos não devem ser considerados seja em detrimento de uma representação mais adequada à situação envolvida, seja para encontrar uma solução mais elegante ao problema proposto;
(iii) Avançar além da manipulação algébrica, completando-a com a leitura dos significados das representações simbólicas envolvidas na resolução de um problema;
(iv) Ter consciência de que informações gráficas ou verbais podem ser expressas algebricamente tal como ter a capacidade de construir a expressão algébrica tendo em consideração as condições apresentadas;
(v) Ter a capacidade de selecionar uma representação simbólica para um problema;
(vi) Entender a constante necessidade de procurar significados nos símbolos e nas operações algébricas na resolução de um problema;
(vii) Compreender que os símbolos podem desempenhar diferentes papéis em função do contexto e construir uma ideia dessas diferenças.

Grossmann, Gonçalves e Ponte (2009), referido e adaptado em Grossmann e Ponte (2011), apresentam um quadro de referência para analisar o sentido de símbolo tendo em conta quatro categorias: expressões algébricas, equações, problemas e funções, tal como sugere o Quadro 2.

Quadro 2 - Quadro de referência do sentido de símbolo
(Grossmann & Ponte, 2011)

Expressões Algébricas	Estar familiarizado com os símbolos e o seu significado.
	Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente.
	Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstrata (sentido do número para sentido de símbolo).

	Criar uma expressão simbólica para um determinado objetivo.
Equações	Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos.
	Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados.
	Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado.
	Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais.
	Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar.
Problemas	Decidir se é útil recorrer ao símbolo.
	Criar uma expressão simbólica que traduza a situação.
	Interpretar o símbolo no contexto do problema.
	Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas.
	Generalizar.
Funções	Utilizar o símbolo para estabelecer relações quantitativas.
	Escolher a representação simbólica adequada.
	Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos.
	Utilizar o símbolo para modelar situações.
	Compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes.
	Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões.
	Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático.

Analisando o quadro, na categoria das expressões algébricas:

- *Estar familiarizado com os símbolos e o seu significado* – Ter sentido de símbolo passa por conhecer os símbolos algébricos e saber como estes são utilizados, ou seja, combinar e utilizar estes no trabalho com expressões algébricas perante um contexto adequado.

- *Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente* – Ser capaz de expressar a linguagem corrente através de símbolos é uma das vertentes fundamentais do sentido de símbolo.
- *Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstrata* – Esta passagem ao ser feita em compreensão das propriedades específicas da linguagem algébrica evidencia um sentido de símbolo forte. Apesar de ser mais fácil trabalhar com números, é importante recorrer à letra e às suas interpretações.
- *Criar uma expressão simbólica para um determinado objetivo* – A sensibilidade está presente no sentido de símbolo quando é necessário escolher à partida os símbolos para resolver uma questão ou para exprimir com clareza uma condição, isto é, para atingir os objetivos.

Passando à categoria relativa ao sentido de símbolo nas equações:

- *Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos* – Uma análise inicial dos símbolos presentes e a capacidade de prever resultados mostram a existência de um sentido do símbolo apurado.
- *Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados* – A aplicação dos procedimentos da resolução de equações permite uma transformação e simplificação de objetos matemáticos, o que também evidencia um sentido de símbolo forte.
- *Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado* – O sentido de símbolo pressupõe que a manipulação simbólica seja acompanhada da compreensão do que se está a trabalhar e da verificação constante se o trabalho realizado está a conduzir ao objetivo ambicionado.
- *Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais* – Ao validar as equivalências que vão surgindo no decorrer da manipulação algébrica e ao evidenciar uma capacidade para encontrar outros significados que possam surgir das equivalências estão a demonstrar um sentido de símbolo desenvolvido.

- *Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar* – Um mesmo símbolo pode ser interpretado de forma diferente consoante o contexto em que se insere e esta interpretação é determinante no desenrolar do trabalho algébrico.

Continuando a analisar o quadro apresentado por Grossmann & Ponte (2011), agora em relação aos problemas:

- *Decidir se é útil recorrer ao símbolo* – Resolver problemas pode, ou não, envolver o recurso ao símbolo, portanto ter sentido de símbolo é ser capaz de decidir se sim ou não.
- *Criar uma expressão simbólica que traduza a situação* – A criatividade de combinar os símbolos com frases simbólicas que contenham em si o problema é uma vertente essencial do sentido de símbolo.
- *Interpretar o símbolo no contexto do problema* – Ter sentido de símbolo é compreender o papel do símbolo no problema.
- *Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas* – Ao recorrer ao símbolo para confirmar o que a intuição inicial prevê, estamos perante um sentido de símbolo apurado.
- *Generalizar* – Ter sentido do símbolo pressupõe generalizar, recorrendo ao símbolo e à capacidade deste poder representar qualquer valor.

Por último, o sentido de símbolo também surge no estudo das funções:

- *Utilizar o símbolo para estabelecer relações quantitativas* – Os alunos mostram ter sentido de símbolo quando compreendem como as relações funcionam.
- *Escolher a representação simbólica adequada* – Ao selecionar a melhor representação simbólica de uma função para analisar uma determinada situação tendo em conta o objetivo pretendido é caraterístico de um sentido de símbolo aprimorado.
- *Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos* – Ter sentido do símbolo pressupõe compreender como varia uma

determinada expressão simbólica quando se varia um dos seus parâmetros, tendo sempre presente o papel do símbolo na expressão.

- *Utilizar o símbolo para modelar situações* – Um sentido do símbolo apurado permite olhar para uma função como uma representação da realidade, podendo com esta analisar-se o presente e até mesmo prever o futuro.
- *Compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes* – Estabelecer a relação entre os símbolos e o seu papel em determinado contexto é fundamental no desenvolvimento do sentido de símbolo.
- *Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões* – Ser capaz de interpretar os símbolos, reconhecendo o seu poder na aprovação/ reprovação de uma conjetura evidencia um sentido de símbolo apurado.
- *Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático* – Ter sentido do símbolo é ser flexível na movimentação entre as diferentes representações, tal como compreender cada uma delas.

O sentido de símbolo apurado resulta do conjugar da instrução matemática e da própria lógica interior do aluno, surgindo com a capacidade de ver as ideias abstratas que se escondem atrás dos símbolos, ou seja, “os símbolos algébricos não falam por si, o que realmente vemos neles (…) depende do que estamos preparados para reparar e no que somos capazes de apreender” (Sfard & Linchevsky, 1994, p. 192).

Schoenfeld & Arcavi (1988) criticam o ensino da Matemática no qual se encara a utilização de variáveis como algo que, após alguma prática, os alunos percebem sem ambiguidades. Estes consideram a construção do conceito de variável um processo complexo que merece atenção particular no cenário escolar, considerando-o como um tópico central no ensino-aprendizagem da Matemática. Arcavi (1994) defende que o simbolismo algébrico deve ser introduzido desde cedo em determinadas situações nas quais os alunos possam apreciar o seu poder na expressão, generalização e justificação de fenómenos aritméticos. Na mesma linha, Castro & Castro (1997) explicam que muitas das dificuldades dos alunos na Matemática se devem a um realce prematuro no simbolismo sem ter em atenção a real compreensão do seu significado matemático e, por isso, é necessário estabelecer conexões entre o símbolo e o significado a ele associado. De forma a dar resposta a estas dificuldades, o NCTM (2007) aconselha a introdução desde cedo das diversas utilizações dos símbolos literais, nomeadamente como incógnita, número generalizado e variável, defendendo, ainda, que os alunos devem compreender os diversos significados e usos das letras, através da representação de quantidades, sobretudo na resolução de situações problemáticas. Para Arcavi (1994), os alunos devem criar uma intuição que lhes permita interpretar aspetos implícitos nos símbolos e antecipar o que pode decorrer das ações que desencadeiam sobre eles.

Deste modo, durante o ensino básico, as atividades realizadas pelos alunos devem contribuir para o desenvolvimento do sentido de símbolo por parte dos alunos. Continuando a valorizar o simbolismo, mas promovendo a sua apropriação em contextos de trabalho significativos, quer de cunho matemático, quer relativos a situações extra-matemáticas, a aprendizagem da Álgebra requer a compreensão dos seus conceitos fundamentais (Ponte *et al.*,2009).

A noção de variável

Enquanto na Aritmética, as letras representam abreviaturas ou unidades de medida, na Álgebra são valores a descobrir ou variáveis (Stacey & MacGregor, 1999). Torna-se imprescindível discutir este conceito de variável, uma vez que o processo de compreensão do conceito de variável é deveras complexo devido ao próprio conceito ser multifacetado.

Segundo Caraça (1984), o conceito de variável possui só por si um carácter algo contraditório, devido ao facto deste se tratar de um símbolo representativo de qualquer um dos elementos de um conjunto. Note-se que, acabando por ser "suscetível de os representar a todos, (…) a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto" (Caraça, 1984, p. 127-128).

Tendo em atenção que a variável é um símbolo arbitrário, o seu contexto e o referente com o qual se relaciona, independentemente do símbolo utilizado, decidem o aspeto matemático da variável (Peral & Gómez, 2003, in Nabais, 2010, p.27). Estes autores referem, ainda, que "a combinação das três componentes, símbolo, referente e contexto, e dos papéis, semântico, sintático e matemático contribui para a interpretação das variáveis, pelos alunos (…) podendo uma alteração no contexto ou no referente afetar, eventualmente, o papel matemático da variável" (Nabais, 2010, p. 27).

Usiskin (1988) salienta cinco utilizações distintas do conceito de variável relativas à interpretação da letra em cinco equações diferentes (Quadro 3).

Quadro 3 - Utilizações do conceito de variável
(Adaptado de Oliveira & Torrado, 2009)

Igualdade	**Designação**	**Papel representado pelas variáveis**
$A = cl$	Fórmula	A, c e l representam quantidades relacionadas, com a área de um rectângulo em que A representa a área, c o comprimento e l a largura.
$10 = 5x$	Equação	x é a incógnita.
$senx = cosx.tgx$	Identidade	x é o argumento de uma função (pode ser substituído por qualquer valor pertencente ao domínio de cada uma das funções)
$1 = n.\frac{1}{n}$	Propriedade	Generalização de um padrão aritmético (o produto de um número pelo seu inverso é 1). n indica o exemplo de um modelo.
$y = kx$	Função	x é o argumento de uma função, y o valor da função e k uma constante ou parâmetro (dependendo de como a letra é usada).

Qualquer uma das cinco igualdades referidas acima têm a mesma forma, uma vez que em cada expressão o produto de dois números é igual a um terceiro. Porém, consoante o seu papel e diferente uso das variáveis em causa, atribui-se-lhes uma denominação própria. A compreensão do conceito de variável ultrapassa a simples realização de operações com letras e símbolos. Acarreta também a compreensão das razões pelas quais funcionam e onde conduzem os procedimentos e a capacidade de estabelecer relações entre os diversos aspetos assumidos pela variável.

Usiskin (1988) defende que “as finalidades da Álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com conceções diferentes da Álgebra que correspondem à diferente importância relativa aos diferentes usos das variáveis” (p. 11). Para clarificar a sua ideia, identifica quatro conceções distintas da Álgebra (Quadro 4):

(i) Álgebra como Aritmética generalizada – esta perspetiva encara as variáveis como generalizadoras de modelos. Nesta conceção, os alunos, apesar de não possuírem ainda o sentido de incógnita, espera-se que utilizem as variáveis como instrumentos para traduzir e expressar a ideia de generalidade construída na Aritmética.

(ii) Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas – espera-se que o aluno, ao se dar relevância aos procedimentos que possibilitam a resolução de certos tipos de problemas, consiga traduzir simbolicamente o enunciado do problema e resolver e simplificar a expressão obtida. Segundo Usiskin (1988), os alunos têm bastante dificuldade na passagem da aritmética para a álgebra, uma vez que a tradução de um prolema para linguagem simbólica implica diversas vezes um raciocínio inverso ao que é utilizado para resolver um problema de natureza aritmética.

(iii) Álgebra como estudo de relações entre quantidades – esta conceção surge em oposição às duas anteriores pois a variável passa a ser entendida como um argumento ou como um parâmetro. É nesta perspetiva que surgem noções como variável independente, variável dependente e função.

(iv) Álgebra como estudo de estruturas – de acordo com esta perspetiva, a variável não passa de um símbolo arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades (grupos, anéis, corpos, por exemplo), são encaradas como *sinais no papel*, sem nenhuma referência numérica.

Quadro 4 - Conceção da Álgebra e sua relação com o uso das variáveis (Adaptado de Oliveira & Torrado, 2009)

Conceção da Álgebra	Uso das variáveis
Álgebra como Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Álgebra como estudo de relações entre quantidades	Argumentos, parâmetros (relacionar, fazer gráficos)
Álgebra como estudo das estruturas matemáticas	Objetos arbitrários de uma estrutura pré-estabelecida (manipular, justificar)

Usiskin (1988) realça a abrangência da Álgebra e de como esta não se pode reduzir a qualquer uma destas conceções de forma isolada, uma vez que esta assenta na generalização da Aritmética, acompanha a resolução de problemas, descreve e analisa as relações entre quantidades e facilita a compreensão de estruturas matemáticas.

Segundo Küchemann (1981, in Kieran, 1992), a noção de variável torna-se pouco clara para o aluno, levando a que, mesmo quando interpreta a letra como a representação de um número, o aluno tem uma grande propensão a atribuir um valor fixo para esta letra.

Estratégias de resolução de equações do 1.º grau

A compreensão do conceito de equação envolve a perceção de múltiplos aspetos por parte dos alunos tais como o sinal de igual e de número desconhecido. Linchevski (1995) refere a hipótese de se realizar um trabalho pré-algébrico relativo ao tema equações em que sejam abrangidas as seguintes áreas:

(i) Desenvolver a noção de solução através de oportunidades para realizar a substituição de números por letras (verificação numérica);

(ii) Lidar com equações equivalentes através da substituição;

(iii) Construir esquemas cognitivos através de atividades reflexivas que permitam que os alunos usem os seus procedimentos espontâneos próprios;

(iv) Praticar a formulação de equações como uma atividade complementar para a resolução de equações.

O contato com equações fica facilitado com este trabalho pré-algébrico que permite aos alunos fazerem as suas experiências e até discutir os resultados uns dos outros. Estas ações facilitam o processo de compreensão das regras práticas de resolução de equações e qual a sua justificação tal como facilita a proximidade dos alunos com os conceitos de solução de uma equação e de equações equivalentes.

Kieran (1992) defende que os alunos iniciantes na Álgebra devem utilizar vários métodos intuitivos para resolver equações. No entanto, no que se refere ao trabalho com equações, sejam elas literais ou não, algumas das estratégias de resolução de equações com uma ou mais variáveis estão identificadas e classificadas em investigação na área. Kieran(1992) classificou-as nos seguintes tipos:

(i) *Uso da realidade*: para resolver a equação $5 + b = 8$, usa-se o facto de 5mais3 ser 8;

(ii) *Uso de técnicas de contagem:* considerando a equação referida acima, conta-se 5,6,7,8, portanto são necessários 3 para ir do 5 ao 8;

(iii) *Cobertura (cover-up):* para resolver a equação $2x + 9 = 5x$, considera-se que $2x + 3x = 5x$, logo $3x$ tem de ser 9. Assim x é 3;

(iv) *Desfazer (undoing):* para resolver a equação $2x + 4 = 18$, começa-se pelo lado direito e, usando a ordem da direita para a esquerda, desfaz-se cada operação;

(v) *Substituição por tentativa e erro:* para resolver a equação $2\mathrm{x} + 5 = 13$, tenta-se com diferentes valores até encontrar o correcto;

(vi) *Transposição* de termos de um membro para outro, com mudança de sinal;

(vii) *Realização da mesma operação em ambos os membros.*

O estudo das equações literais aparece noutro patamar de complexidade algébrica, complexidade essa associada aos diferentes papéis desempenhados pelas duas letras, em que uma surge como a incógnita e outra como um parâmetro. A aprendizagem destes diferentes papéis têm de se ir fazendo progressivamente com contextos reais e significativos para os alunos.

De acordo com Chazan & Yerushalmy (2003), este tipo de equações tem o seu destaque no facto de, ao isolar uma das variáveis, se alterar significativamente o modo como a equação em causa é interpretada. Apesar de argumentarem que a resolução de equações literais do 1.º grau é significativamente diferente da resolução de equações numéricas do 1.º grau com uma incógnita, a grande diferença não se encontra na estratégia de resolução, uma vez que resolver uma equação literal em ordem a uma das variáveis corresponde a isolar a incógnita numa equação numérica. A diferença reside na obtenção da solução, que passa a ser um conjunto de pares ordenados que respeitam a equação em vez de um valor numérico específico.

Erros e dificuldades na aprendizagem da Álgebra

Segundo Ponte *et al.* (2009), grande parte das dificuldades dos alunos na resolução de equações derivam dos erros que são cometidos no trabalho com expressões algébricas, resultantes da não compreensão do significado dessas expressões ou das suas condições de equivalência.

A manipulação simbólica e a simbolização fazem parte de uma vertente muito importante no desenvolvimento do pensamento algébrico. A linguagem algébrica acarreta algumas dificuldades sentidas pelos alunos. Booth (1984, in Matos & Ponte, 2008, p.199) categoriza-as em três áreas principais: (i) a interpretação das letras; (ii) a formalização dos métodos usados e (iii) a compreensão de notações e convenções.

Pesquita (2007) aponta aspetos mais específicos para as dificuldades manifestadas pelos alunos tais como:

(i) Dificuldade em dar sentido a uma expressão algébrica;
(ii) Não distinguir a adição aritmética $(3 + 6)$ da adição algébrica $(3 + x)$;
(iii) Não ver a letra como a representação de um número;
(iv) Atribuição de um significado concreto às letras;
(v) Dificuldade para pensar numa variável como significando um número qualquer;
(vi) Interpretações diferentes para as ações que correspondem aos símbolos + e = na Aritmética e na Álgebra;

(vii) Significados distintos para algumas letras na Aritmética (por exemplo, 2m em Aritmética significa 2 metros e em Álgebra é o dobro de m);

(viii) Dificuldade em passar da linguagem natural para a linguagem algébrica.

No caso mais concreto das equações do 1.º grau, Kieran (1992) agrupou os erros cometidos pelos alunos em três tipos:

(i) *Eliminação:* resulta da realização de uma generalização excessiva de algumas operações matematicamente válidas em domínios restritos. Um exemplo desse erro é simplificar $39x - 4$ como $35x$ ou $2xy - 2x$ como y;

(ii) *Troca de membros (switching addends):* por exemplo, se se considerar a equação $x + 37 = 150$, a resolução passa pela transformação em $x = 37 + 150$;

(iii) *Redistribuição (redistribution):* considerando a equação $x + 10 = 25$, os alunos subtraem 10 ao primeiro membro e adicionam 10 ao segundo, $x + 10 - 10 = 25 + 10$.

Hall (2002) acrescenta à catalogação dos erros, apresentada por Kieran (1992), os seguintes tipos de erros cometidos pelos alunos:

(iv) *Troca de operação inversa (Other Inverse Error):* perante a equação $3x - 3 + 2 = 12 - 3$, os alunos utilizam a operação inversa da adição, em vez da operação inversa da multiplicação, obtendo assim $x + 2 = 9$;

(v) *Transposição:* os alunos generalizam uma "regra" que funciona numa determinada situação $\left(\frac{x}{2} = 5 \Leftrightarrow x = 10\right)$ na equação $\frac{x}{2} + 3 = 5 \Leftrightarrow x + 3 = 10$;

(vi) *Omissão*: os alunos não efetuam as mesmas operações nos dois membros da equação. Exemplo: $5x + x + 2 = 3x + 12 \Leftrightarrow 6x + 2 - 2 = 3x + 12$;

(vii) *Divisão*: considerando a equação $3x = 10$, os alunos calculam mal o quociente, obtendo $x = 3{,}1$;

(viii) *Ausência de estrutura:* os alunos utilizam “regras” criadas pelo próprio aluno. Exemplo: $5x + x + 2 = 3x + 12 \Leftrightarrow 3 + 2 = 3x - 8$;

Mais especificamente nas equações literais, Panizza, Sadvsky e Sessa (1999, in Campos, 2010), referem que os alunos têm a ideia que a equação deve ter uma única solução e não reconhecem a equação linear com duas variáveis como um objeto que define um conjunto infinito de pares de números.

Muitas vezes, os alunos aplicam as regras de resolução de equações que julgam ter compreendido e quando surgem raciocínios errados como os catalogados por Hall (2002) e Kieran (1992), os alunos mostram que não compreenderam os procedimentos, apenas os decoraram. Deste modo, cabe ao professor identificar situações onde os alunos evidenciem ausência de compreensão do significado matemático da equação, e procurar estratégias de ensino que possam contribuir para uma aprendizagem significativa dos alunos.

Síntese

A Álgebra é uma das mais antigas áreas da matemática. Provém da Antiguidade e nem sempre foi vista da mesma forma. Começou por ser reduzida ao estudo da resolução de equações, com o pai da Álgebra, Diofanto de Alexandria, e evoluiu até ao estudo das operações arbitrariamente definidas sobre objetos abstratos. A acompanhar esta evolução houve, segundo Kieran (1992), um desenvolvimento do simbolismo algébrico, desde a total ausência de símbolos até à sua utilização para múltiplas funções: para representar quantidades conhecidas e, também, incógnitas e, ainda, para formular regras para relações numéricas.

O ensino-aprendizagem da Álgebra é também influenciado por este progresso estonteante da Álgebra e do simbolismo algébrico e, uma vez que a natureza de qualquer campo matemático está relacionada com os objetos com que esse campo trabalha, o que se ensina e como se ensina os conteúdos algébricos mudaram ao longo dos anos. A Álgebra Escolar tem estado associada à construção de expressões simbólicas e das suas regras de manipulação e transformação, tal como processos de resolução de equações. Contudo, assistiu-se nos últimos anos a uma valorização progressiva da capacidade de interpretar e generalizar recorrendo aos símbolos.

Na década de 80, surge uma nova conceção de Álgebra onde se destaca o pensamento algébrico. Este vem assim alargar o conceito tradicional de Álgebra, incluindo processos como a generalização de relações da Aritmética e processos que se podem representar através de formas alternativas à notação simbólica, como a linguagem natural, as tabelas e os gráficos.

Quando se fala em pensamento algébrico é consensual a necessidade de inseri-lo no currículo, mas não há grande consenso sobre o que significa pensar algebricamente. Entre as várias definições que procuram caraterizar o pensamento algébrico, Kaput (1999) refere que este envolve a manipulação de expressões e resolução de equações mas, principalmente, envolve as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas. O NCTM (2007) salienta a importância de tornar o pensamento algébrico acessível a todos os alunos, considerando ser um desafio fulcral para a educação matemática.

Associado ao pensamento algébrico surge a necessidade de refletir sobre como interpretar os símbolos utilizados. Os símbolos permitem expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e auxiliam no processo de independência destes com o seu distanciamento em relação à linguagem natural que representam, tendo em atenção que uma letra pode ser usada das mais diversas formas em Álgebra.

Perante esta riqueza simbólica associada à Álgebra, surge a expressão "sentido do símbolo", a qual Arcavi (2006) não define, apenas carateriza-o como sendo uma apreciação, uma compreensão, um instinto complexo e multifacetado em relação aos símbolos. Alguns autores, como Grossmann (2011), referem alguns comportamentos do indivíduo que permitem concluir sobre a existência do sentido do símbolo, como a capacidade de selecionar uma representação simbólica em detrimento de outra, a compreensão dos diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar, a perceção da constante necessidade de procurar significados nos símbolos e a compreensão sobre o poder dos símbolos, tendo-os sempre presentes e disponíveis. Castro & Castro (1997) referem que muitas das dificuldades dos alunos se devem a um destaque prematuro no simbolismo sem ter o cuidado sobre a verdadeira compreensão do seu significado matemático, sendo crucial estabelecer conexões entre o símbolo e o significado associado a este.

O conceito de variável é também um conceito muito importante no ensino e aprendizagem da Álgebra, mas difícil de definir devido ao seu caráter multifacetado e ao facto de se tratar de um símbolo representativo de qualquer um dos elementos de um conjunto (Caraça, 1984). Usiskin (1988) refere cinco utilizações distintas do conceito de variável relativas à interpretação da letra, sendo nesta diversidade que surge uma barreira por vezes difícil de ultrapassar e o aluno acaba muitas vezes por atribuir um valor fixo à variável quando esta representa valores a descobrir.

Em Álgebra, o desenvolvimento do símbolo pode ocorrer quando se resolve uma equação, pois a sua compreensão assenta em múltiplos aspetos como o sinal de igual e de número desconhecido e para uma melhor compreensão é importante realizar um trabalho pré-algébrico no início do estudo deste tema. Apesar de considerar importante que os alunos recorram a métodos intuitivos para resolver equações, Kieran (1992) identificou algumas estratégias de resolução de equações com uma ou mais variáveis às quais os alunos recorrem no processo de aprendizagem tais como a substituição por tentativa e erro e a realização da mesma operação em ambos os membros. No caso do estudo das equações literais revela-se mais complicado no sentido em que as variáveis podem tomar diferentes papéis – incógnita ou parâmetro – e, portanto, é necessário acrescentar um passo inicial na resolução da equação que tem como base isolar a incógnita numa equação numérica.

Quando passamos da Aritmética para a Álgebra, surgem algumas dificuldades na aprendizagem dos alunos como a inserção de novos símbolos, a mudança de significado de alguns símbolos já utilizados na Aritmética, as interpretações distintas para o sinal de igual e a dificuldade em compreender os diferentes usos das letras. Os alunos demonstram ter também dificuldade em compreender os procedimentos algébricos na resolução de equações, acabando simplesmente por decorá-los o que leva ao aparecimento de raciocínios errados.

Capítulo III

A Unidade de Ensino

Este estudo tem por base a minha intervenção letiva numa turma do 8.º ano de escolaridade da Escola Básica 2.º e 3.º ciclos Vasco Santana. Esta decorreu no início do 3.º Período, entre 19 de Abril e 9 de Maio do presente ano letivo 2011/2012.

Neste capítulo, apresento uma breve caraterização da escola e da turma e reflito sobre a unidade de ensino em causa à luz do programa de Matemática, sobre as estratégias de ensino e a sequência de tarefas adotadas. Ainda nesta secção apresento alguns conceitos e propriedades matemáticas fundamentais ao desenvolvimento do tópico pelo qual estou responsável. Para finalizar, descrevo sucintamente as várias aulas lecionadas no âmbito da minha intervenção letiva.

Caraterização da escola e da turma

Caraterização da escola

A Escola Básica 2.º e 3.º ciclos Vasco Santana é uma das sete escolas pertencentes ao Agrupamento de Escolas Vasco Santana. Este agrupamento contempla os três níveis de ensino básico e pré-escolar e foi homologado em Abril de 2004. A Escola Cooperante funciona como escola sede do agrupamento e iniciou o seu funcionamento em 1997/98. Situa-se no Bairro dos Bons Dias, freguesia da Ramada, concelho de Odivelas, numa zona urbana recente, marcada por um acentuado crescimento demográfico.

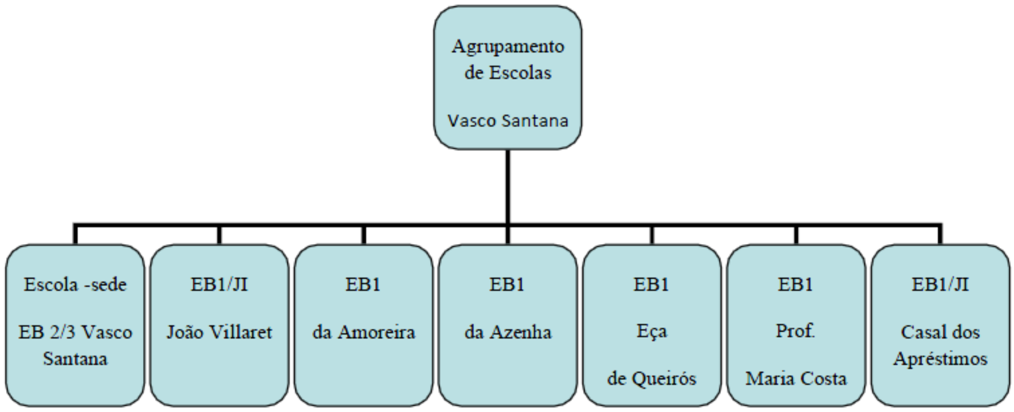


Figura 3 – Estabelecimentos do Agrupamento de Escolas Vasco Santana (Projeto Educativo, 2010 p. 8)

A escola cooperante é composta por um edifício com três blocos interligados, um pavilhão gimnodesportivo e um campo desportivo. A escola tem uma aparência bastante acolhedora e integra salas de informática, um Centro de Recursos, zonas ajardinadas e de recreio.

Segundo o Projeto Educativo de Escola (2010), no passado ano letivo frequentavam a escola 37 turmas, sendo 24 do 2.º ciclo e 13 do 3.º ciclo, que englobava cerca de 936 alunos, em que apenas 321 são alunos do 3.º ciclo de escolaridade. Uma vez que a escola foi edificada para uma população de 750 alunos, esta encontra-se superlotada o que obriga à transferência de alunos de 7.º ano para a Escola Secundária da Ramada, permitindo assim o acolhimento de todos os alunos do 5.º ano.

Os alunos provêm, maioritariamente, da classe média, existindo algumas situações de casos sociais graves e até problemáticos. Existem cerca de 74 alunos com necessidades educativas especiais a frequentar esta escola que tem como principal objetivo desenvolver práticas pedagógicas de inclusão educativa e social tal como promover a igualdade de oportunidades e a preparação de uma transição da escola para o emprego de crianças e jovens com necessidades educativas especiais de caráter permanente.

No passado ano letivo, 2009/2010, o corpo docente era composto por 164 docentes, em que 57% pertenciam ao quadro de Escola/Agrupamento e 93% tinham como habilitações literárias a licenciatura e 4% o mestrado.

Caraterização da turma

A turma participante é constituída por 28 alunos, dos quais treze são raparigas e quinze são rapazes. A idade dos alunos, recolhida no início do ano letivo, varia entre os treze e os catorze anos, sendo que 23 alunos têm treze anos e, somente, cinco alunos têm catorze anos.

A turma foi formada, no 7.º ano de escolaridade, por alunos provenientes de diferentes turmas do 6.º ano, contendo quatro alunos que repetiram o 7.º ano. No 8.º ano, a turma mantém-se praticamente inalterada, com a exceção de dois alunos que reprovaram, de um aluno que foi transferido este ano para a turma e uma aluna que surgiu no decorrer do segundo período proveniente de outra escola. No presente ano letivo, não existem repetentes e existe ainda um aluno que está integrado num Programa Educativo Individual, pelo que a avaliação é adequada às características do aluno.

De um modo geral, a turma é bastante heterogénea em relação ao aproveitamento mas, em relação ao comportamento, não existe nenhum caso de mau comportamento a assinalar. São alunos bem comportados, bastante participativos e interessados no percurso escolar, tornando-se até um pouco competitivos.

Em relação aos Encarregados de Educação, estes possuem habilitações literárias muito diversificadas, desde o 1.º ciclo ao doutoramento (Figura 4), variando estas com as diferentes profissões que exercem tais como professores, diretores de serviços, empregado de limpeza e cozinheiros.

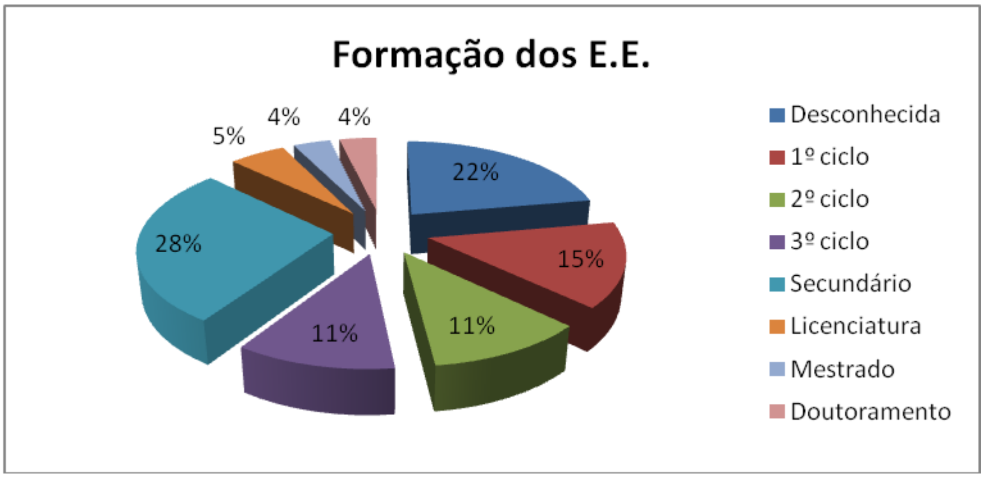


Figura 4 – Formação Académica dos Encarregados de Educação

Em relação ao aproveitamento escolar, os resultados obtidos no final do primeiro período estão representados na Figura 5 que se segue, sendo notório o facto de a turma ter bons resultados:

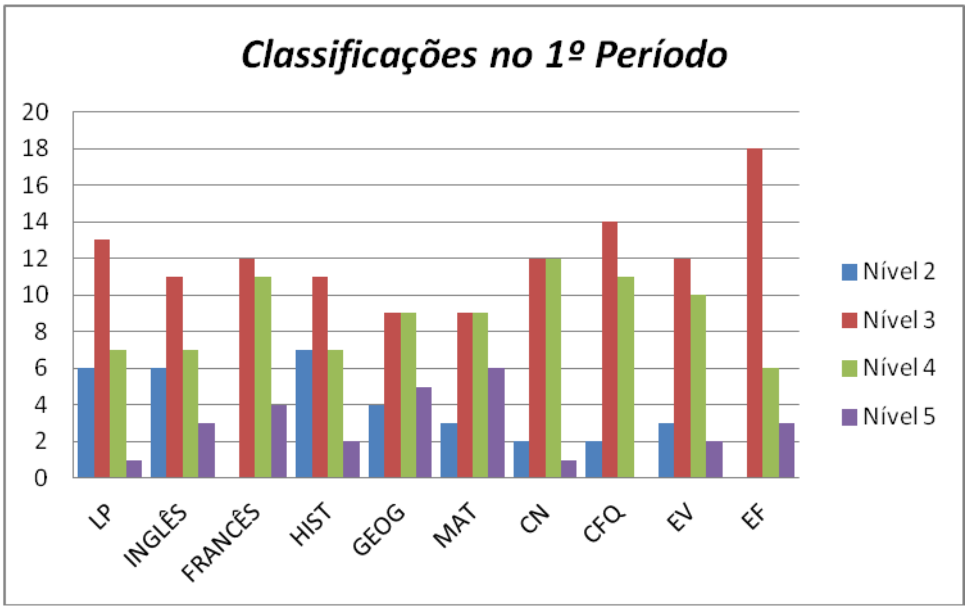


Figura 5 – Classificações dos alunos no 1º Período

Em relação à disciplina de Matemática, o professor cooperante acompanha-os como professor de Matemática desde o 7.º ano de escolaridade. Os alunos mostram bastante interesse pela disciplina, tentam terminar as tarefas o mais rápido possível e não deixam a discussão em turma avançar enquanto não forem esclarecidas as suas dúvidas. A turma está habituada a trabalhar em pares e raramente trabalha em grupos com mais de três elementos. O bom desempenho na disciplina de Matemática é visível, sendo esta uma das disciplinas em que os alunos obtiveram melhores resultados, tendo tido uma média de 3,67 (numa escala de 1 a 5) e uma taxa de insucesso muito pequena, 11,1%.

A Figura 6 sintetiza os resultados escolares da turma na disciplina de Matemática no 1.º período.

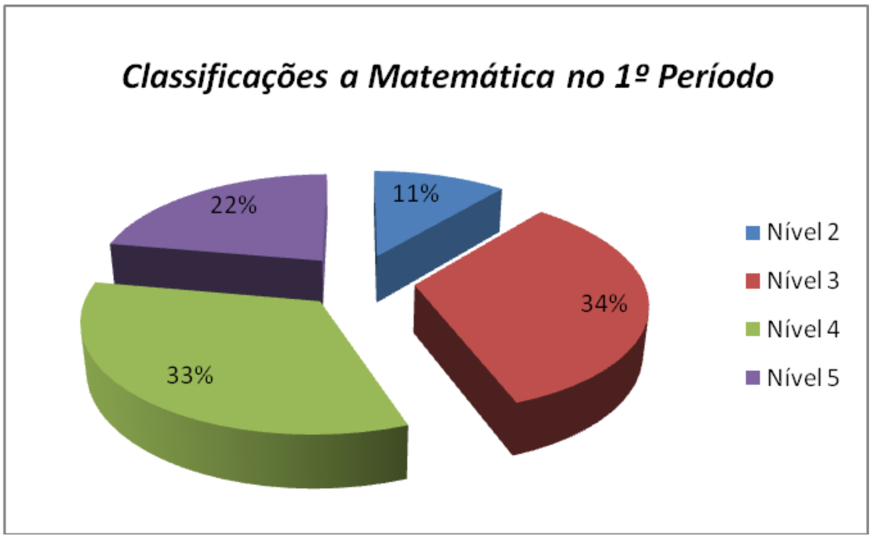


Figura 6 – Classificações a Matemática no 1º Período

Em relação ao 2.º Período, o aproveitamento escolar não sofreu grandes modificações. Houve um aumento de alunos com nível 2 no geral mas, em contrapartida, também houve maior número de alunos com nível 5. As médias das classificações às várias disciplinas variam entre 3,18 e 3,89 (numa escala de 1 a 5). A Figura 7 mostra a distribuição dos alunos pelos vários níveis de aproveitamento às várias disciplinas:

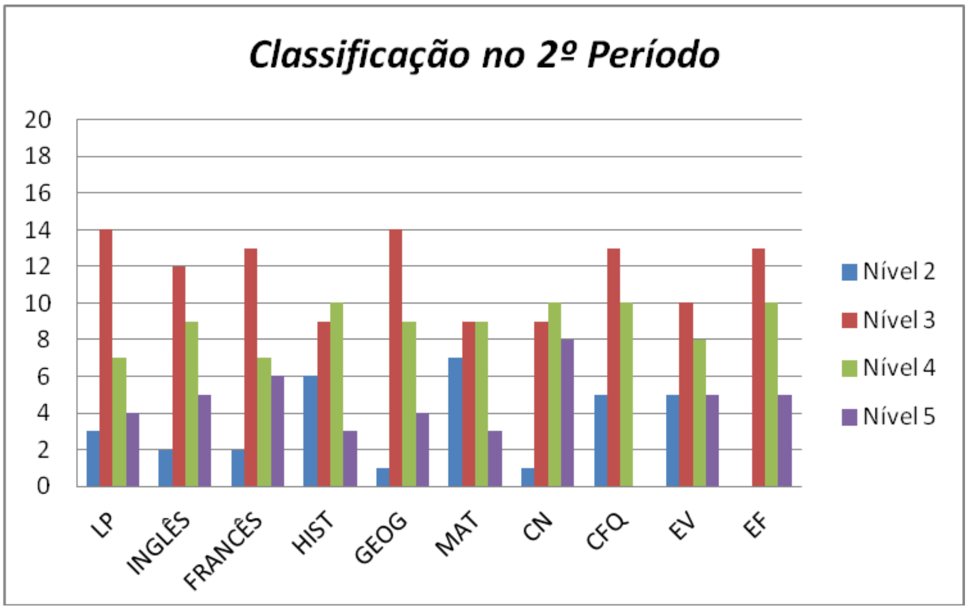


Figura 7 – Classificações dos alunos no 2º Período

Em relação à disciplina de Matemática, no decorrer do 2.º Período houve um teste intermédio implementado pelo Ministério da Educação, o qual representou o primeiro contato destes alunos com testes deste género, levando, assim, a uma descida brusca em algumas notas. O início do estudo da Álgebra também contribuiu para esta descida, uma vez que os alunos dizem ter mais dificuldades neste tema matemático e evidenciam um menor interesse quando comparado com o estudo de outros temas.

No entanto, os resultados continuam a ser bastante satisfatórios, apesar da percentagem de alunos de nível 2 ter aumentado para mais do dobro e a de alunos de nível 5 ter diminuído para metade daquela que se verificou no 1.º período, a média da turma continua positivo, sendo de 3,29 (numa escala de 1 a 5).

A Figura 8 sintetiza os resultados escolares da turma na disciplina de Matemática no 2.º período.

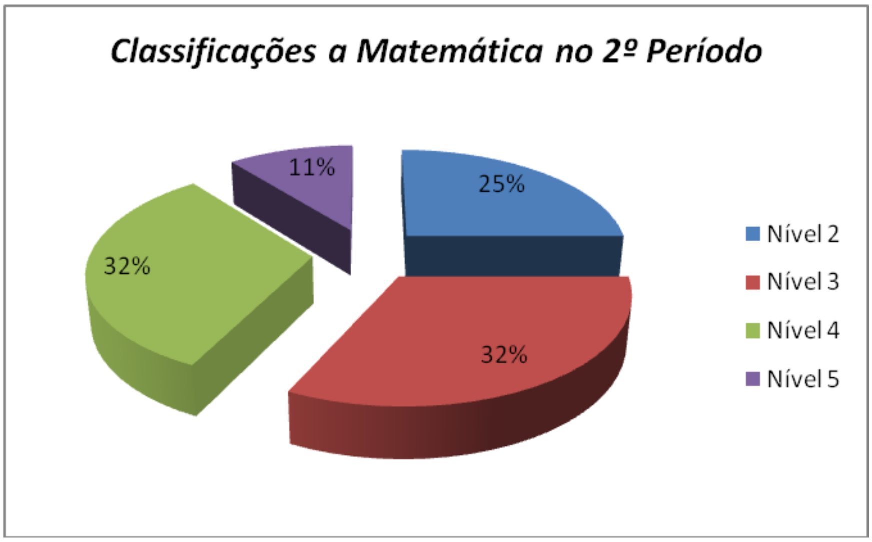


Figura 8 – Classificações a Matemática no 2º Período

No final do ano letivo os resultados da turma voltaram a melhorar, uma vez que não houve nenhum aluno a ter negativa e aumentou o número de alunos com nível 5, sendo que no final a turma ficou com média de 3,64 (Figura 9). Na reunião final de ano, os professores da turma enalteceram as qualidades dos alunos, tanto a nível escolar como humano, tendo-se decidido que nenhum aluno ficaria retido no 8.º ano.

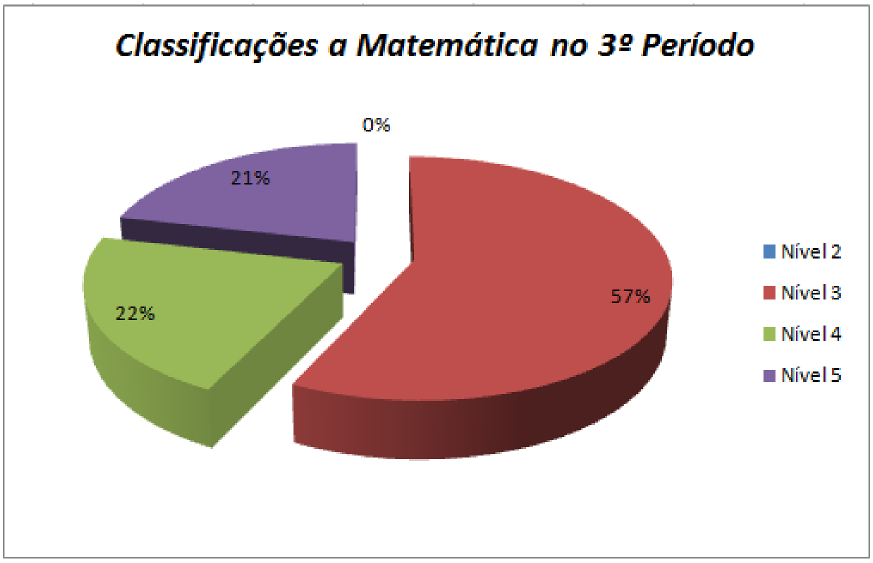


Figura 9 – Classificações a Matemática no 3.º Período

Da observação direta das aulas de Matemática, esta turma está constantemente a dar evidências de ser uma turma bastante interessada, participativa, energética, agarra em qualquer desafio que lhe proponham e apresentam uma diversidade de estratégias ricas, preferindo sempre que lhes seja proposta uma tarefa desafiadora e imprevisível do que tarefas rotineiras e de resposta fechada. Durante o trabalho autónomo, evidenciam existir uma relação muito positiva entre os elementos do grupo de trabalho, gostam de chamar os professores para confirmar resultados e mostrar que estão a conseguir, pedindo muitas vezes para irem apresentar a sua resolução ao quadro. O ambiente em sala de aula é deveras amistoso. Não existe aquele sentimento de desinteresse imediato por se tratar de uma aula de Matemática. Entram e saem da aula com um sorriso contagiante.

Proposta Pedagógica

Ao longo desta seção enquadro a proposta pedagógica no atual programa de Matemática e clarifico alguns conceitos e propriedades matemáticas associadas ao tema escolhido para este estudo. Explicito, ainda, algumas estratégias de ensino tal como o modo como foi organizada a intervenção na turma e justifico a escolha das tarefas utilizadas em sala de aula.

A Unidade de Ensino no Programa

O presente estudo teve lugar no primeiro ano de implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) no 8.º ano de escolaridade a nível nacional. Esta proposta pedagógica insere-se no tema Álgebra, nos tópicos Sequências e Regularidades e Equações, concretamente nos subtópicos "Equações Literais", "Expressões Algébricas" e "Operações com polinómios" e foi lecionada tendo em conta as orientações curriculares do programa atual.

O atual Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) promove a Álgebra a tema programático e o pensamento algébrico surge como um dos eixos fundamentais do ensino-aprendizagem a par do pensamento geométrico, do trabalho com dados e do trabalho com números e operações. Este ramo da Matemática é introduzido nos 2.º e 3.º ciclos, apesar de no 1.º ciclo já se contemplar uma iniciação ao pensamento algébrico.

O pensamento algébrico toma um papel central no ensino da Álgebra e torna-se numa nova preocupação a ter em conta pelos educadores. A sua importância é tal que este surge associado ao propósito principal de ensino da Álgebra em cada ciclo, como é o caso do 3.º ciclo em que este passa por "Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos" (DGIDC, 2007, p. 55).

Desde cedo se pede que os alunos desenvolvam o seu pensamento algébrico, começando pela investigação de sequências e padrões geométricos. Já no 2.º ciclo este trabalho é expandido e pede-se que os alunos explorem padrões, determinem termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação através do estudo da relação entre os termos. A própria generalização das propriedades das operações aritméticas surge como uma ferramenta importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

De acordo com o Programa de Matemática (DGIDC, 2007), quando os alunos chegam ao 3.º ciclo, o estudo das relações, nomeadamente da proporcionalidade direta e inversa, são aprofundadas e inicia-se o estudo das equações dos 1.º e 2.º graus e sistemas de equações do 1.º grau, tal como das inequações.

No caso da turma contemplada para este estudo, esta apenas foi abrangida pelo atual programa no 7.º ano. Os alunos contataram com equações do 1.º grau a uma incógnita pela primeira vez no final do 7.º ano e, nos dois períodos iniciais do 8.º ano, voltaram a trabalhá-las e com sistemas de equações do 1.º grau. Ainda no 8.º ano, posterior à minha intervenção, trabalharam equações do 2.º grau incompletas com uma incógnita.

No decorrer das aulas selecionadas para este estudo, surgirá a oportunidade de aprofundar os conhecimentos sobre expressões algébricas e de contatar com equações literais e com operações com polinómios, dando atenção aos casos notáveis da multiplicação de binómios.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) refere que, no âmbito do subtópico "Equações Literais", o aluno deve "resolver equações literais em ordem a uma das letras", uma vez que se resume a resolver equações do 1º grau utilizando as regras de resolução, conteúdo trabalhado no 7.º ano de escolaridade.

Por sua vez, em relação às "Expressões algébricas" e "Operações com polinómios", o Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) define como objetivos específicos:

(i) Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados;
(ii) Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral;
(iii) Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra;
(iv) Simplificar expressões algébricas;
(v) Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação;
(vi) Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios.

Os dois primeiros objetivos surgem como revisão do trabalho de sequências realizado no 7.º ano de escolaridade e como rampa de lançamento para o desenvolvimento das operações com polinómios, em especial, para a compreensão dos casos notáveis da multiplicação de binómios.

Inserido neste subtópico, aparece ainda a referência de que os alunos devem distinguir "variável" de "constante" e de "parâmetro", tal como distinguir "expressão algébrica", "equação" e "fórmula", conceitos importantes para a resolução das equações literais.

Este mesmo programa apresenta um conjunto de recomendações metodológicas no trabalho com expressões algébricas:

> A aprendizagem das operações com monómios e polinómios, e da simplificação de expressões algébricas, deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida, por exemplo, efetuando cálculos a partir de expressões algébricas substituindo as letras por valores numéricos. É conveniente usar expressões algébricas para representar problemas, usando letras para designar incógnitas ou variáveis, e introduzir expressões com variáveis ligadas a um contexto (...) pela sua complexidade, justifica que os alunos explorem situações variadas em que surjam letras (…) e discutam os seus significados. (DGIDC, 2007, p. 57)

Para compreender o pensamento algébrico dos alunos e o sentido que estes dão ao símbolo e à variável é importante ter também em consideração as capacidades transversais, dando especial destaque à comunicação matemática, no que se refere a "traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa" e "exprimir resultados, processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios" (DGIDC, 2007, p. 64).

Assim sendo, na planificação das aulas inseridas neste estudo tive em conta não só os conteúdos associados a estes subtópicos, mas também os conteúdos programáticos com que os alunos já tiveram contacto até ao momento, com especial ênfase, nos restantes subtópicos do tópico Equações, trabalhados ao longo do 7.º ano e do segundo período do 8.º ano. Em suma, os principais objetivos a ter em conta encontram-se resumidos abaixo (Quadro 5).

Quadro 5 - Objetivos específicos do Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007)

Subtópicos	Objetivos específicos	Notas
Sequências e Regularidades: Expressões	• Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos	• Os alunos devem distinguir "variável" de "constante" e de "parâmetro".

Algébricas	matemáticos adequados; • Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral; • Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra; • Simplificar expressões algébricas;	• Propor a simplificação de expressões como $x-(4-2x)$ e $-x^2-x+3x^2$.
Equações: Equações Literais Operações com polinómios	• Resolver equações literais em ordem a uma das letras; • Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação; • Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios;	• Distinguir "expressão algébrica", "equação" e "fórmula". • Propor a resolução de equações literais como $F=\frac{9}{5}C+32$ em ordem a C. • Propor a adição algébrica e a multiplicação de polinómios como (i) $2x-1 \; e \; 3x+2$ (ii) $x+2 \; e \; x^2-3x+2$ • Os alunos devem utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios tanto no cálculo numérico como na factorização de polinómios. Por exemplo, $87^2=(80+7)^2=80^2+2\times 80\times 7+7^2$

		e $(x+3)^2-4=(x+3)^2-2^2=(x+1)(x+5)$
Capacidades transversais	• Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa; • Exprimir resultados, processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;	

Conceitos e propriedades matemáticas relativas à unidade

Dentro da matemática, a Álgebra surge como o ramo que estuda a manipulação formal de equações, operações matemáticas, polinómios e estruturas algébricas. Sendo este o tema matemático sobre o qual este estudo se debruça, apresento em seguida os conceitos e propriedades matemáticas trabalhadas ao longo desta unidade didática, tal como outros que, apesar de não serem diretamente tratados nas aulas lecionadas, são fundamentais para a compreensão dos restantes.

Tendo em conta o tema da unidade de ensino, conceitos como equação, expressão algébrica, monómio e polinómio são merecedores de ser analisados e de ser aqui definidos. As definições que surgem de seguida baseiam-se no Compêndio de Álgebra (1968), de Sebastião e Silva e de Silva Paulo.

Ao perguntar "Quais são os números que, tomados como valores da variável na igualdade, transformam esta igualdade numérica verdadeira?", a igualdade adjacente a esta questão passa a ser considerada como uma equação. Deste modo, uma *equação* é toda a igualdade cujos membros contêm uma ou mais variáveis, denominadas por incógnitas e que representam quantidades desconhecidas. Ao lado esquerdo da igualdade chamamos *primeiro membro* e ao lado direito *segundo membro*.

Quando a equação tem apenas uma incógnita chama-se *raiz* ou *solução* da equação a todo o número que, ao ser atribuído à incógnita, transforme a equação numa igualdade numérica verdadeira. Consoante o número de soluções de uma equação, podemos classificá-la, ou seja, se uma equação tiver uma ou mais soluções diz-se *possível* ou *resolúvel* e caso não tenha nenhuma solução diz-se *impossível* ou *insolúvel*.

Duas equações dizem-se *equivalentes* quando toda a raiz da primeira é raiz da segunda e, reciprocamente, toda a raiz da segunda é raiz da primeira, ou quando ambas são impossíveis.

Resolver uma equação possível trata-se de encontrar a sua solução ou as suas soluções, o que leva a considerar equações equivalentes durante o processo de resolução. Assim sendo, a passagem de uma equação a outra que lhe seja equivalente, denominada por *transformação de equivalência*, pode ser de diferentes tipos, que se baseiam nos seguintes princípios:

(i) *1.º Princípio de Equivalência:* Ao substituir um dos membros duma equação por uma expressão equivalente a esse membro, obtém-se uma equação equivalente à primeira. As seguintes transformações são exemplos das que se baseiam neste princípio:
   - Desembaraçar a equação de parênteses e
   - Reduzir os termos semelhantes.

(ii) *2.º Princípio de Equivalência:* Quando se soma a mesma expressão a ambos os membros de uma equação, obtém-se uma equação equivalente à primeira..

(iii) *3.º Princípio de Equivalência:* Se multiplicarmos ambos os membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtém-se uma equação equivalente à primeira. Entre as transformações que se baseiam neste princípio estão as seguintes:
   - Desembaraçar de denominadores (quando estes são números inteiros), multiplicando ambos os membros pelo menor múltiplo comum dos denominadores e
   - Passar um fator numérico de um membro para o outro, com inversão.

Dentro das equações, chama-se *equação do 1.º grau numa incógnita* x, ou *equação linear*, a toda a equação que, por aplicação dos princípios de equivalência, se pode reduzir à forma $ax + b$ sendo a, b números reais quaisquer em que $a \neq 0$.

Generalizando o conceito de equação, surge o conceito de equação literal. Uma *equação literal* é uma igualdade em que figuram duas espécies de letras ou símbolos literais, umas que consideramos designativas de quantidades conhecidas ou dadas (*parâmetros*) e outras que consideramos designativas de quantidades desconhecidas ou *incógnitas*.

Resolver uma equação literal é determinar a incógnita como função explícita do parâmetro, ou seja, consiste no processo de isolar a incógnita num dos membros da equação e para isso mantêm-se os princípios de equivalência enunciados anteriormente.

Uma *fórmula* é uma equação literal, associada normalmente ao uso mais rotineiros como a fórmula das áreas, ou dos volumes.

Podemos ainda definir um caso particular das equações literais, as *equações lineares em duas incógnitas* x *e* y como sendo toda a equação em x e y que, pelos princípios de equivalência, se possa reduzir à forma $ax + by = c$ sendo os valores de a, b e c números quaisquer. A *solução* da equação é todo o agrupamento de números que, como valores de x e y, transformam a equação numa igualdade numérica verdadeira. Este tipo de equações tem uma infinidade de soluções.

Uma *expressão algébrica* é qualquer expressão com números e/ou letras em que todas as operações nela indicadas estão incluídas entre as seguintes: adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz.

Um *monómio* é uma expressão algébrica em que as operações indicadas sobre as variáveis são, quanto muito, multiplicações, podendo então ser um número ou o produto de um número por variáveis. São exemplos de monómios, as expressões: $\frac{3}{2}x^2y^7, -x^2, \sqrt{2}$.

Quando um monómio não é somente um número, é constituído por duas partes: uma parte numérica, o *coeficiente*, e uma parte constituída por letras, a *parte literal*. Por outro lado, quando o monómio é um número, diz-se que este não tem parte literal. O *grau* de um monómio é a soma dos expoentes das variáveis que constituem a sua parte literal.

Dois monómios dizem-se *semelhantes* quando têm a mesma parte literal. Os monómios semelhantes podem ser adicionados, para isso adicionam-se os coeficientes e mantém-se a parte literal. Em relação à multiplicação, quaisquer monómios podem ser multiplicados, obtendo-se assim um novo monómio.

Um *polinómio* é toda a expressão que se obtém ligando por notação aditiva vários monómios, que passam a chamar-se *termos* do polinómio. Como casos particulares, temos que um polinómio com dois termos diz-se um *binómio* e com três termos diz-se um *trinómio*.

O *grau* de um polinómio é o maior dos graus dos monómios que o constituem. Quando um polinómio não tem termos semelhantes diz-se um *polinómio reduzido*.

Para adicionarmos dois ou mais polinómios basta adicionar os termos semelhantes. Por outro lado, para subtrair dois polinómios há que considerar o *polinómio simétrico*, polinómio cujos termos são os simétricos dos termos do polinómio dado, e adicionar ao primeiro o polinómio simétrico do segundo. Na adição e subtração, o grau do polinómio resultante nunca pode ser superior aos graus dos polinómios iniciais.

Na multiplicação, para se multiplicar dois polinómios basta utilizar a propriedade distributiva da multiplicação e o grau do polinómio resultante do produto de dois polinómios é igual à soma dos graus dos polinómios iniciais. Contudo, existem situações particulares em que a multiplicação pode ser feita de uma forma mais rápida como é o caso do *Quadrado da diferença* e da *Diferença de quadrados*.

No primeiro caso, o *Quadrado da diferença*, tem-se que para quaisquer valores a e b, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. A interpretação desta igualdade pode seguir um raciocínio geométrico, considerando-se o seguinte quadrado (Figura 10) se lado $a+b$:

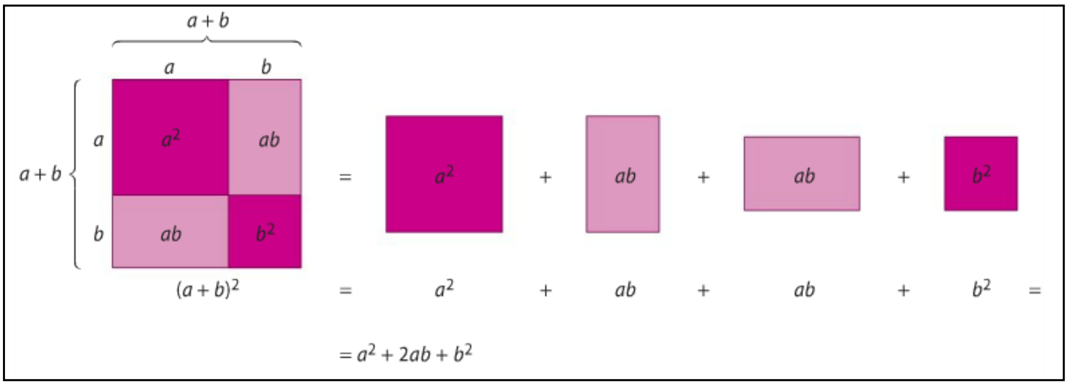


Figura 10 – Interpretação geométrica do Quadrado da diferença
(Magro *et al.*, 2011, vol. II, p. 36)

Tem-se, ainda, como caso particular de $(a+b)^2$ o desenvolvimento de $(a-b)^2$ em que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Já, no segundo caso, a *Diferença de quadrados* diz que, para quaisquer valores de a e b, se tem $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Novamente, considerando a seguinte figura, esta tem área$a^2 - b^2$, mas se a decompusermos e reagruparmos obtemos um retângulo com área igual a $(a+b)(a-b)$.

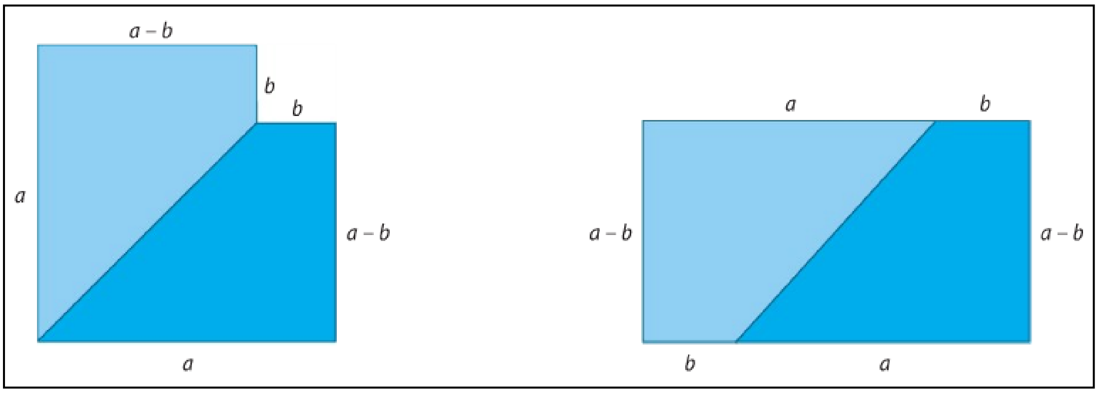


Figura 11 – Interpretação geométrica da Diferença de Quadrados
(Magro *et al.*, 2011, Vol. II, p. 37)

Perante um polinómio, podemos ainda, quando possível, proceder à sua *factorização*, ou seja, escrevê-lo como um produto de dois ou mais fatores. Esta operação pode ser feita através da aplicação da propriedade distributiva ou através da aplicação dos casos notáveis da multiplicação, como se pode visualizar nos seguintes exemplos:

(i) $3x^2 + 6x = \mathbf{3} \times x \times x + 2 \times \mathbf{3} \times x = \mathbf{3}x(x+2)$

(ii) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times 3x + 3^2 = (x-3)^2 = (x-3)(x-3)$

A organização da unidade de ensino

Segundo Abrantes (1985), planificar passa obrigatoriamente por "refletir sobre a ação que se vai levar a cabo, decidir sobre os principais objetivos dessa ação, escolher processos adequados para atingir esses objetivos" (p. 1). Ao planificar uma unidade didática, existem diversos fatores a ter em conta, como por exemplo o facto de não bastar escolher as tarefas. É fundamental selecionar uma sequência para implementar as tarefas.

A elaboração das planificações das aulas para este estudo tiveram em conta não só as planificações a médio e longo prazo entregue pelo professor cooperante como também as caraterísticas da turma e dos alunos.

As planificações elaboradas (Anexo I) dizem respeito a 5 aulas de 90 minutos e 3 aulas de 45 minutos, num total de 8 blocos de aulas. A concretização das aulas referidas teve início a 19 de Abril e prolongou-se a 9 de Maio de 2012.

Cada aula foi preparada tendo em conta os objetivos específicos, as dificuldades evidenciadas pelos alunos e os conhecimentos prévios destes. Foram também pensadas com o objetivo de responder às questões de investigação relativas a este estudo.

Tal como era espetável e Abrantes (1985) prevê ao referir que "o professor deve planear cuidadosamente as ações de ensino-aprendizagem e, ao mesmo tempo, (…) deve ser flexível na execução do seu plano de trabalho" (p. 1), a planificação das aulas sofreu algumas alterações com o decorrer da lecionação.

O quadro seguinte (Quadro 6) apresenta uma planificação geral das aulas lecionadas que foram integradas no estudo.

Quadro 6 - Planificação geral da unidade de ensino

	Subtópico	**Calendarização**	**Objetivos específicos**	**Tarefas**
1	Equações Literais	19 de Abril (90 min.)	• Resolver equações literais em ordem a uma das letras;	<u>Tarefa 2</u> Equações Literais
2		20 de Abril (45 min.)		
3	Operações	26 de Abril	• Compreender os diferentes papéis	<u>Tarefa 3</u>

	com polinómios	(90 min.)	dos símbolos em Álgebra • Simplificar expressões algébricas • Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação	Expressões algébricas e operações com polinómios
4		27 de Abril (45 min.)		
5		02 de Maio (90 min.)		
6		03 de Maio (90 min.)	• Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios – Quadrado do Binómio	<u>Tarefa 4</u> O quadrado do Binómio
7		04 de Maio (45 min.)		
8		09de Maio (90 min.)	• Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios – Diferença de Quadrados	<u>Tarefa 5</u> Diferença de Quadrados

Estratégias de Ensino

De acordo com o NCTM (2007, pp. 17-19), ensinar bem Matemática é "uma tarefa complexa, e não existem receitas fáceis (…) Ensinar bem Matemática envolve a criação, o enriquecimento, a manutenção e a adaptação do ensino de modo atingir os objetivos matemáticos, a captar e a manter o interesse dos alunos e a envolvê-los na construção ativa do conhecimento matemático", sendo assim fundamental adotar e compreender estratégias.

Segundo Roldão (2010), o conceito de estratégia de ensino assenta numa conceção global, intencional e organizada, de uma ação ou conjunto de ações tendo em vista a consecução das finalidades de aprendizagem visadas. Deste modo, uma estratégia não é sinónimo nem de tarefa nem de atividade, as quais podem ser partes integrantes da estratégia, desde que o seu uso seja orientado para dar sequência à conceção global em causa.

Apesar de existirem diferentes tipologias de estratégias que ajudam a clarificar a natureza das ações docentes e possibilitam a sistematização do seu estudo, não é deveras produtivo catalogá-las, uma vez que a estratégia atuante consiste na ação organizada e pensada pelo professor, única para cada situação, embora possa referenciar-se a um ou outra tipologia (Roldão, 2010). Segundo esta autora, intencionalidade, coerência e modos de organização e avaliação fundamentados são as peças-chave de uma estratégia de ensino.

O papel do professor é primordial na escolha das estratégias de ensino a adotar. Segundo o NCTM (2007), os alunos aprendem Matemática através das experiências que os professores propiciam.

> Os professores estabelecem e alimentam um ambiente que conduz à aprendizagem da matemática através das decisões que tomam, das conversas que moderam e do ambiente físico que criam. São as ações dos professores que encorajam os alunos a pensar, a questionar, a resolver problemas e a discutir as suas ideias, estratégias e soluções. O professor é responsável pela criação de um ambiente intelectual, no qual o raciocínio matemático sério constitui a norma. Sendo mais do que um ambiente físico de meses, quadros e posters o ambiente da sala de aula transmite mensagens subtis acerca do que é valorizado na aprendizagem e no fazer matemática. (NCTM, 2007, p. 19)

Para tal, os professores devem saber e compreender a Matemática que ensinam, devem ser capazes de utilizar os seus conhecimentos de forma flexível no decorrer das suas atividades letivas, tal como, é sua função a escolha de materiais, de estratégias, a estruturação da aula e a condução e negociação de significados. As decisões tomadas pelo professor nunca podem pôr de parte os conhecimentos que este tem sobre os alunos.

Deste modo, uma estratégia materializa-se na atividade do professor, o que ele vai fazer, e na atividade do aluno, o que o professor espera que o aluno faça, e tem de prever um tempo para a realização dessas atividades (DGIDC, 2007).

As estratégias a adotar para a realização das tarefas e para o próprio desenrolar das aulas dependem inquestionavelmente dos objetivos pensados para cada momento da aula. Da mesma forma, qualquer estratégia programada não está livre de ser modificada, ou melhor, adaptada face às dificuldades encontradas pelos alunos.

Neste estudo, adotei várias estratégias que foram selecionadas tendo em conta a problemática definida, o tema matemático e os alunos do estudo, procurando não alterar a dinâmica habitual da turma.

A maioria das aulas lecionadas seguiram a estrutura habitual duma aula em que o principal objetivo é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Isto é, contou com quatro partes: a apresentação da tarefa, o trabalho autónomo dos alunos e, por último, a discussão coletiva e síntese das ideias principais com toda a turma, podendo estes dois últimos momentos se repetirem várias vezes na mesma aula.

Numa primeira fase, ocorre a apresentação, por parte do professor, da tarefa a realizar, dos seus objetivos e da metodologia de trabalho a adotar, esclarecendo qualquer dúvida que surja em relação ao enunciado da tarefa. Esta fase deve ser curta e motivadora para impulsionar o trabalho autónomo dos alunos.

Rapidamente o centro da aula passa para os alunos, sendo este o momento onde os alunos trabalham autonomamente e onde o professor deve tomar uma postura passiva, circulando pela sala e dando apoio aos alunos que o solicitarem. Na tentativa de evitar responder diretamente às questões colocadas pelos alunos, o professor deve procurar responder com outras perguntas, obrigando os alunos a pensar um pouco mais sobre o assunto. Caso haja necessidade ou surjam algumas dúvidas persistentes, pode-se interromper o trabalho autónomo dos alunos para um momento de discussão intermédia.

Em relação aos modos de trabalho, os alunos podem trabalhar em grupo com o objetivo de discutir ideias, em pares, e até mesmo individualmente, em momentos de consolidação. Tendo em conta as caraterísticas das salas de aula, da turma e a forma de trabalho com que os alunos estão habituados, optei maioritariamente pelo trabalho a pares. Os pares são constituídos no início de cada período pela diretora de turma, surgindo apenas pequenas modificações ao longo do período, e são pensados tendo em conta os níveis académicos nas várias disciplinas, o comportamento e a interajuda entre alguns alunos.

Após ter dado tempo aos alunos para trabalharem sozinhos/grupo, é crucial passar para uma discussão coletiva, em grande grupo, permitindo assim aos alunos refletirem sobre a sua atividade, contribuindo para a sua aprendizagem e para o desenvolvimento do seu sentido do símbolo e de variável. Os alunos são chamados a apresentar o seu trabalho para que, em grande grupo, se possa analisar as estratégias consideradas por estes e, deste modo, promover o desenvolvimento das capacidades de argumentar, comunicar e raciocinar, permitindo, também, uma análise mais significativa das situações matemáticas trabalhadas e um confronto de ideias.

Neste momento da aula, o professor deve ter um papel de dinamizador, moderador e orientador da partilha de ideias, provocando os alunos de modo a que todos tenham um papel ativo na discussão. É imprescindível que o professor garanta que sejam esclarecidas todas as dúvidas que persistam, sejam corrigidos todos os erros cometidos e que seja feita uma síntese dos conceitos e conclusões obtidas, sempre com o auxílio dos alunos.

A meu ver, para desenvolver o pensamento algébrico dos alunos é, também, importante garantir a diversidade de tarefas, desde tarefas de exploração até aos simples exercícios de consolidação. Uma vez que este estudo procura compreender como os alunos desenvolvem o sentido de símbolo e de variável, as tarefas que envolvem a análise do erro estão presentes na minha planificação, tal como tarefas que visem a comunicação matemática, enquanto capacidade de interpretar e expressar ideias matemáticas. Depois de selecionadas as estratégias e as tarefas, é importante repensar quais as estratégias que mais se adequam a cada uma das tarefas escolhidas.

Para o tópico das Equações Literais, indo ao encontro da Brochura de Álgebra (Ponte *et al.*, 2009), a introdução deste tema deve ser feita recorrendo às fórmulas já conhecidos dos alunos, tanto da Geometria como da Física. Daí ser interessante propor aos alunos, por exemplo, uma tarefa que relacione as várias escalas de temperatura e pedir-lhes o valor da temperatura numa escala sabendo outra.

Outro tipo de tarefas promotoras de aprendizagem, onde é, também, possível compreender o sentido do símbolo e de variável dos alunos e ao mesmo tempo trabalhar com equações literais, são as tarefas onde lhes é pedido que expliquem o significado das variáveis.

O trabalho com Expressões Algébricas, segundo Ponte *et al.* (2009), precisa de uma atenção específica, de modo a que os alunos percebam com que objeto estão a trabalhar, que operações podem efetuar e que equivalências podem obter. Para trabalhar este objetivo, é necessário propor aos alunos tarefas de simplificação e manipulação algébrica e tarefas em que tenham que identificar o erro em operações com polinómios e corrigi-lo.

Com vista a aprofundar o estudo das relações algébricas e a sua simbolização, fundamentais para o desenvolvimento da linguagem algébrica, é impreterível trabalhar as sequências e regularidades. Recorrendo ao que os alunos sabem de sequências, é possível estabelecer conexões e trabalhar as operações com polinómios (adição e multiplicação algébrica) tendo como ponto de partida a determinação do termo geral duma sequência.

Em relação aos casos notáveis da multiplicação de binómios, que surge com especial importância no estudo das expressões algébricas, a compreensão deste tema pode ser, por um lado, facilitada recorrendo à interpretação geométrica, por exemplo, a partir da determinação da área do quadrado na sua totalidade ou a partir de uma dada decomposição. Por outro lado, os casos notáveis também podem ser trabalhados a partir de uma pequena tarefa de investigação proposta aos alunos, onde eles investiguem as regularidades existentes quando, por exemplo, se subtraem quadrados perfeitos consecutivos (Ponte *et al.*, 2009).

É importante referir a necessidade de existir alguns trabalhos de casa para que os alunos possam adquirir destreza na manipulação de expressões algébricas, na resolução de equações literais, tal como consolidar os conhecimentos adquiridos na aula. Algumas destas foram retiradas do próprio manual utilizado pela turma, que pode servir como um ótimo instrumento de trabalho, quando bem utilizado.

Considero fulcral que em algum momento da lecionação seja dado feedback aos alunos por parte do professor e vice-versa. Em específico neste estudo, procurei dar-lhes algum feedback ao longo das aulas a meu encargo.

As tarefas apresentadas neste estudo são o ponto de partida para a aprendizagem de novos conceitos e representações e para o desenvolvimento do pensamento algébrico, do sentido de símbolo e de variável por parte dos alunos.

As Tarefas utilizadas

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007), o professor tem o dever de proporcionar aos seus alunos momentos de aprendizagem com diferentes tipos de tarefas, umas com questões mais rotineiras e outras com questões mais desafiantes e exploratórias.

As tarefas que propus aos alunos foram elaboradas de forma a contemplar todos os objetivos específicos associados aos subtópicos lecionados, tal como as capacidades transversais que surgem no currículo. Foram, também, construídas de maneira a que os alunos as realizassem tendo por base conhecimentos prévios. Tendo, também, em conta a problemática definida e o tema onde se enquadra este estudo, as tarefas propostas incidiram em questões que permitissem tirar ilações sobre o sentido do símbolo e da variável nos alunos tal como desenvolver o seu pensamento algébrico.

Os alunos devem explorar situações variadas em que surjam letras e discutam os seus significados. É importante recorrer a expressões algébricas para representar problemas, usando letras para designar incógnitas ou variáveis, tal como é vantajoso inserir um contexto associado às variáveis. Para além disso, "a aprendizagem das operações com monómios e polinómios, bem como a simplificação de expressões algébricas, deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos aluno compreender a manipulação simbólica envolvida" (Saraiva, Pereira & Berrincha, 2010, p. 9). Deste modo, para abordar este tema foram elaboradas 6 tarefas (Anexo II) que envolviam exercícios, problemas, explorações e pequenas investigações, em que uma delas foi enviada para trabalho de casa na semana anterior à minha intervenção e outra das tarefas foi utilizada para realizar uma entrevista semiestruturada a um grupo de alunos e foi construída tendo em conta as restantes tarefas realizadas em aula. Em seguida, serão analisadas cada uma destas tarefas com o objetivo de justificar a sua aplicação neste estudo.

Tarefa 1: "Rever Equações"

Esta tarefa surge como ponto de partida deste estudo, uma breve revisão de equações do 1.º grau a uma incógnita. Foi proposta na semana anterior à minha lecionação para ser feita como trabalho de casa, individualmente (Anexo I).

A tarefa é constituída por uma única questão com três alíneas onde era pedido que resolvessem três equações do 1.º grau a uma incógnita. As equações são bastante acessíveis no entanto cada uma delas visava uma transformação diferente de equivalência de equações. A primeira equação exige o desembaraçar de parênteses, enquanto na segunda era necessário desembaraçar de denominadores, conteúdo aprendido pelos alunos somente no 2.º Período deste ano letivo. Por último, a terceira equação surge com o intuito de chamar à atenção do sinal menos imediatamente antes de uma fração.

No que toca a este estudo, esta tarefa foi inserida com o objetivo de compreender como os alunos resolvem as equações do 1.º grau a uma incógnita, para mais tarde compreender como os alunos mobilizam estes conceitos e propriedades utilizadas para a resolução de equações do 1.º grau a várias incógnitas, ou seja, de equações literais.

Com esta tarefa (Anexo II) pretendi que os alunos iniciassem o trabalho com equações literais, com base somente em conhecimentos anteriores e sem ser necessário introduzir qualquer conteúdo matemático. O principal objetivo desta tarefa era que os alunos resolvessem equações literais em ordem a uma das letras e calculassem o valor de uma das variáveis atribuindo um valor à outra.

De acordo com a Brochura de Álgebra (Ponte *et al.*, 2009), este conteúdo deve ser introduzido recorrendo a fórmulas já conhecidas dos alunos. Assim, a questão 1 surge num contexto associado a medições de temperatura, permitindo assim uma ligação com questões do dia-a-dia.

A questão 1.1. requer que a partir da equação dada inicialmente, que relaciona a temperatura expressa em graus Celsius com a temperatura em graus Fahrenheit, os alunos atribuam dois valores à temperatura em graus Celsius e obtenham essa mesma temperatura expressa na unidade Fahrenheit. Com esta questão, procura-se que os alunos comecem a compreender este tipo de equações e o facto de existirem várias soluções para a mesma equação ao contrário do que estão habituados, consoante o valor da temperatura em Celsius que se escolha obtém uma temperatura em Fahrenheit a partir de uma mesma equação.

Na questão 1.2, surge pela primeira vez a noção de resolver uma equação em ordem a uma das letras. Com a questão 1.3., os alunos têm de recorrer ao resultado da questão anterior, servindo assim para salientar a vantagem de se resolver uma equação em ordem a uma das letras.

Os alunos ao resolverem a questão 1.4 trabalham a ideia de que numa equação literal qualquer uma das letras pode funcionar como incógnita. Há que ter em conta o contexto da equação.

Continuando com a conversão de temperaturas, a questão 2 carece da interpretação do enunciado para que se possa traduzir da linguagem natural presente neste para linguagem matemática, funcionando também como auxílio na generalização e construção de uma expressão algébrica.

Já a questão 3 procura sintetizar as relações entre as três escalas de temperatura, permitindo ainda estabelecer conexões com sistemas de equações a duas incógnitas.

A questão 4 baseia-se em dados recolhidos da Internet, uma situação real, uma vez que a interpretação de dados é uma competência que os alunos devem adquirir ao longo do seu percurso a Matemática. Com esta questão, os alunos podem perceber de que forma a Matemática pode intervir em questões do quotidiano.

Na questão 5 pretende-se que os alunos identifiquem o erro e sejam críticos no que diz respeito à resolução apresentada. Mais do que resolver mecanicamente, procura-se que os alunos compreendam a manipulação algébrica e as transformações associadas à resolução de equações.

Por último, a questão 6 é de carácter mais rotineiro. Contempla exercícios típicos em que se pede para resolver uma equação em ordem a uma das variáveis sem qualquer contexto real.

Esta tarefa foi projetada para ser resolvida em duas aulas, uma de noventa minutos e outra de quarenta e cinco minutos. O modo de trabalho pensado foi o de trabalho em pares.

Tarefa 3: “Expressões Algébricas e Operações com Polinómios”

Esta tarefa surge com o intuito de permitir aos alunos aprender a simplificar expressões algébricas e a efetuar operações com polinómios: adição algébrica e multiplicação (Anexo II). Permite, ainda, um primeiro contato com a factorização de polinómios, ou seja, pôr em evidência os fatores comuns. Nesta tarefa, é importante também os alunos utilizarem os conhecimentos prévios adquiridos relativos à determinação do termo geral de uma sequência.

A questão 1 pretende que os alunos trabalhem com a manipulação e simplificação de expressões algébricas, tal como atribuam significados aos símbolos utilizados (questões 1.1. e 1.2.), ou seja, permite desenvolver o sentido do símbolo. Esta primeira questão está mais orientada, o que permite aos alunos tomar contato com diversos conceitos e propriedades algébricas. Estabelecer conexões com conceitos anteriores, como o de perímetro e de área, permitem adicionar monómios sem que seja necessário formalizar o conceito.

Na questão 2, ao recorrer ao que os alunos sabem de sequências, é possível estabelecer conexões e trabalhar as operações com polinómios tendo como ponto de partida a determinação do termo geral de uma sequência (questão 2.3), para a qual se torna necessário determinar alguns termos concretos da sequência trabalhada (questão 2.1 e 2.2.). A sequência utilizada permite reforçar a ideia de simplificar os termos semelhantes e com a questão 2.4 dá-se ênfase à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de expressões algébricas.

Depois das questões 1 e 2, passa-se de questões com algum suporte concreto para outras de caráter mais abstrato onde surgem polinómios sem que estes estejam associados a figuras ou a qualquer outro contexto não matemático. Na questão 3, os alunos devem descobrir os erros cometidos em operações com polinómios, uma vez que é importante que os alunos percebam com que objetos estão a trabalhar, que operações podem efetuar e que equivalências podem obter.

Antes de passar à questão 4, é fundamental proporcionar aos alunos uma pequena introdução aos conceitos de monómio e polinómio, bem como dos termos, parte literal, coeficiente, grau e monómios semelhantes.

Na questão 4, a adição algébrica surge de modo quase natural depois dos alunos já terem trabalhado anteriormente com simplificação de expressões algébricas em casos simples. Em relação à multiplicação de expressões algébricas, as alíneas presentes resolvem-se recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Esta tarefa foi projetada para ser resolvida em duas aulas de noventa minutos, nas quais o modo de trabalho pensado foi o de trabalho em pares.

Tarefa 4: “O Quadrado do Binómio”

Na tentativa de dar continuidade às operações com polinómios, em particular à multiplicação de dois binómios, esta tarefa permite aos alunos explorar o desenvolvimento do quadrado do binómio recorrendo a regularidades numéricas e a sequências pictóricas (Anexo II).

Uma vez que os alunos já estão familiarizados com as terminologias associadas às sequências, o que se pretende com esta tarefa é que os alunos trabalhem com sequências com maior complexidade que envolvam expressões algébricas do segundo grau.

Na primeira parte, as primeiras alíneas requerem a determinação de termos de uma sequência, em primeiro lugar termos de ordem baixa seguido de termos de ordem mais elevada para que os alunos sintam a necessidade de uma expressão algébrica que funcione como termo geral da sequência. Com a questão 1.3., os alunos são encorajados a validar a conjetura de que a diferença de dois quadrados perfeitos consecutivos é um número ímpar, recorrendo à linguagem algébrica.

Na segunda parte da tarefa, as sequências surgem como resposta ao enunciado apresentado, permitindo estabelecer uma conexão entre as figuras e as expressões algébricas obtidas. A inclusão da tabela na questão 1.1. teve o intuito de ajudar na organização da informação, dado que o enunciado trabalha com vários objetos simultaneamente.

A questão 1.2. sugere a contabilização do número total de árvores através de dois processos distintos, onde se pede que calcule o termo de ordem doze com os ambos os processos. Na questão 1.3. procura-se que os alunos compreendam que os dois processos são equivalentes e as expressões algébricas que representam o seu termo geral também o são. Com esta última questão, ao pedir para mostrar algebricamente que as duas expressões são equivalentes, pretende-se promover uma consciencialização de que podem desenvolver rapidamente a expressão que traduz o quadrado de um binómio através da fórmula$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, observada nesta questão.

Esta tarefa foi projetada para ser resolvida em uma aula de noventa minutos, podendo ser trabalhada em pares ou em pequenos grupos de trabalho, onde as ideias e as estratégias podem ser muito mais diversificadas.

Tarefa 5: "A Diferença de Quadrados"

Esta tarefa serve como introdução ao caso notável da multiplicação – diferença de quadrados – e procura levar os alunos à sua descoberta, compreensão e utilização (Anexo II). Vindo no seguimento da tarefa "O Quadrado do Binómio", esta tem uma estrutura muito semelhante e procura-se que os alunos construam a fórmula da diferença de quadrados seguindo passos equivalentes aos que seguiram no quadrado do binómio.

Tal como na tarefa anterior, surgem dois processos distintos para calcular o pretendido no enunciado que acabam por ser algebricamente equivalentes. A questão 1.1. inclui uma tabela para completar com os primeiros termos e o termo geral pois esta ajuda na organização da informação dado que o enunciado apresenta dois processos. Quando se pede para calcular os primeiros termos pelos dois processos é importante que os alunos não se centrem no resultado, mas sim no processo de obter esse resultado tal como, pelo segundo processo, devem ter em atenção a ordem dos fatores que surgem na expressão para facilitar a generalização e a descoberta do termo geral.

Na questão 1.2. é pedido que os alunos determinem certos termos da sequência sem que haja a figura representativa da situação apresentada para que estes recorram às expressões algébricas encontradas. Tal como na tarefa anterior, a questão 1.3. procura que os alunos compreendam que as expressões algébricas resultantes dos dois processos são equivalentes e que facilmente se mostra isso através da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Por último, a questão 2 surge como consolidação e aplicação de ambos os casos notáveis aprendidos, obrigando os alunos a escolher entre a diferença de quadrados e o quadrado do binómio.

Tal como a anterior, esta tarefa foi projetada para ser resolvida em uma aula de noventa minutos, podendo ser trabalhada em pares ou em pequenos grupos de trabalho.

Tarefa 6: "Equações Literais e Operações com Polinómios"

A tarefa 6 foi construída com o objetivo de ser aplicada na entrevista a decorrer somente com três alunos da turma (Anexo II). Desta forma, a tarefa engloba vários tópicos matemáticos como as equações literais e a simplificação de expressões algébricas, tendo sido elaborada com o intuito de retirar informações pertinentes para procurar dar resposta às questões do estudo.

Na primeira questão surge uma equação literal com duas variáveis cujas questões englobam o cálculo do valor de uma variável, conhecida a outra, e a resolução da equação em ordem a uma das variáveis.

A questão dois apresenta uma equação literal com três variáveis, cujas alíneas dizem respeito à interpretação das letras tendo em conta o contexto e à construção de uma fórmula que relacione uma variável com as restantes. Na última alínea, é pedida uma fórmula aos alunos, a qual pode ser entendida como uma equação literal, que consiste em criar relações simbólicas entre as três variáveis e depois resolver a equação em ordem a uma das variáveis.

A terceira questão requer a descoberta do erro cometido nas operações com polinómios, permitindo analisar até que ponto os alunos compreendem os objetos com que estão a trabalhar e as equivalências entre expressões algébricas. Por último, a questão quatro requer a capacidade de simplificação de expressões algébricas, tal como a aplicação dos casos notáveis da multiplicação.

Esta tarefa é para ser realizada após as aulas lecionadas por mim na turma e, depois de os alunos responderem às suas questões, irei entrevistá-los, com base na tarefa, para melhor compreender as suas estratégias e dificuldades no tema matemático em questão.

Descrição das aulas lecionadas

19 de Abril de 2012 (90 minutos)

A aula iniciou-se normalmente uma vez que os alunos já estavam à espera que fosse eu a dar a aula. Comecei por escrever o sumário no quadro para dar tempo de alguns alunos chegarem à aula e se sentassem. Quando já estavam sentados, conversei um pouco com eles sobre o que íamos falar naquela aula e referi a necessidade de resolver a tarefa da aula a caneta e, caso houvesse erros, corrigi-los a lápis, algo contrário ao que estes estão habituados.

Logo após distribuir as tarefas (Tarefa 2) os alunos começaram a ler o enunciado e, imediatamente, começaram a chamar os professores pois tiveram alguma dificuldade no primeiro contato com as equações literais e com a existência de duas incógnitas. Depois de alguns esclarecimentos, começaram a trabalhar com um bom ritmo, sendo apenas necessário interromper o trabalho autónomo a pares para esclarecer que "resolver em ordem a" é o mesmo que "isolar uma das incógnitas".

A resolução da tarefa prolongou-se por mais dez minutos do que eu esperava, pois chegada a hora apercebi-me que alguns alunos estavam muito atrasados, tendo optado por despender mais algum tempo para o trabalho autónomo destes uma vez que apesar das dificuldades iniciais, estes estavam empenhados na resolução da tarefa.

Quando me apercebi que a maior parte da turma tinha chegado à questão 3, pedi-lhes para pararem com o que estavam a fazer e para se concentrarem todos na resolução. Contrariamente ao que tinha previsto, optei por fazer logo uma síntese dos conteúdos relacionados com as equações literais, apresentando-lhes outros exemplos de equações deste tipo e chamando a atenção para os aspetos mais significativos do trabalho com estas.

A correção e discussão correram bem. Os alunos foram ao quadro resolver algumas questões e explicar o que fizeram. A questão 1.3. permitiu que os alunos expusessem duas resoluções, uma recorrendo à equação inicial e outra recorrendo a uma equação literal equivalente em ordem a F, e a partir destas tirar conclusões sobre qual a mais vantajosa. A meu ver, há ainda muitos aspetos a melhorar nesta fase da aula: a organização no quadro, a capacidade de não responder às minhas próprias perguntas, dar a palavra ao máximo de alunos.

Quando terminámos a correção da questão 3, a aula estava quase a acabar. Pedi-lhes para continuarem a resolver a tarefa, mas entretanto tocou. Os alunos começaram a arrumar, tendo sido recolhidas as resoluções das tarefas, antes de saírem.

A planificação não foi seguida à risca em relação aos tempos mas penso que os objetivos foram cumpridos.

20 de Abril de 2012 (45 minutos)

A segunda aula começou com uma maior fluidez que a anterior mas sendo somente de 45 minutos não se torna tão produtiva como uma de 90 minutos. Após ter escrito o sumário, devolvi aos alunos as tarefas recolhidas no dia anterior e pedi-lhes para continuarem a resolução da tarefa onde tinham ficado no dia anterior, tendo em atenção que o objetivo daquela aula era serem resolvidas as questões 4, 5, 6a) e 6d) da Tarefa 2.

Uma vez mais o trabalho autónomo dos alunos demorou mais alguns minutos do que os estipulados. Os alunos chamaram bastantes vezes os professores pois estavam com algumas dificuldades em resolver equações em ordem a uma das incógnitas, sem qualquer contexto. Como a aula estava prestes a acabar, tive que interromper o trabalho dos alunos para passarmos à correção em grande grupo, turma.

O momento da correção ficou reduzido a dez minutos o que não permitiu que se corrigissem todas as questões, tendo havido a necessidade de fazer uma correção mais centrada no professor, na medida em que apenas o professor escreveu no quadro e os alunos apenas lhe iam dizendo o que fazer. A questão 4 levou mais algum tempo para que os alunos compreendessem verdadeiramente o que estavam a fazer, enquanto na questão 5 houve a necessidade de clarificar os erros presentes no enunciado.

Quando deu o toque, rapidamente foram distribuídos o trabalho para casa e um desafio matemático semanal (Anexo II) no qual os alunos devem pensar durante a semana para ser discutido na aula seguinte. As tarefas foram novamente recolhidas.

26 de Abril de 2012 (90 minutos)

O objetivo desta terceira aula prendia-se com a simplificação de expressões algébricas, permitindo um primeiro contato com as operações com polinómios, tanto no que diz respeito à adição algébrica, como à multiplicação entre um monómio e um polinómio e entre polinómios.

A aula iniciou-se dentro da normalidade com a escrita do sumário no quadro e logo após a recolha dos trabalhos de casa de alguns alunos, distribuí a tarefa (Tarefa 3) pelos alunos, referindo a metodologia de trabalho. Os alunos trabalharam em pares.

Uma vez que a turma tem alunos com ritmos de trabalho muito diferenciados, entreguei apenas parte da tarefa, somente as questões 1 e 2, as quais estavam contempladas na planificação para serem resolvidas e discutidas nesta aula. Como é habitual, os alunos começaram a resolver a tarefa e a sentir a necessidade de chamar os professores para tirarem dúvidas, a maior parte das vezes para aprovação da sua estratégia por parte do professor.

Durante cerca de cinquenta minutos, os alunos resolveram a tarefa (questão 1 e 2) tendo tido mais dificuldades em resolver a questão 2 que necessitava de conhecimentos com sequências numéricas e termos gerais.

Apesar de existirem alunos que ainda não tinham chegado ao termo geral da sequência da questão 2, passámos à discussão pois, como constatei no final, cinquenta minutos é tempo mais que suficiente para ocupar somente com o trabalho autónomo dos alunos, provocando situações em que alguns alunos já tinham terminado a tarefa há algum tempo e outros deixaram-se vencer pelo cansaço e, apesar de não terem concluído a tarefa, já não estavam a dedicar o seu tempo à realização desta.

Quando iniciei a discussão, apercebi-me que não iria cumprir a planificação e, portanto, optei por deixar que a discussão se desenvolvesse sem o incómodo do controlo de tempo. As duas primeiras alíneas da questão 1 foram corrigidas no quadro pelo professor com o auxílio dos alunos, uma vez que achei importante que os alunos tivessem acesso a uma resposta bem construída da segunda alínea. As restantes alíneas foram corrigidas por vários alunos no quadro, solicitando-lhes sempre que explicassem o seu raciocínio aos colegas. A questão 1.4. permitiu a exploração de várias estratégias de resolução para o cálculo de uma área. Os alunos referiram duas por iniciativa própria e o professor questionou-os quanto à possibilidade de utilizarem a fórmula da área do trapézio, a qual foi apresentada no quadro.

Em relação à questão 2, um aluno foi apresentar a primeira alínea e explicou à turma qual a lei de formação que identificou. Outro aluno quando foi apresentar a resolução da questão 2.2, explicou como obteve os seus resultados de acordo com duas estratégias, leis de formação, distintas. Outro aluno quis apresentar uma terceira estratégia diferente, mas que levava à mesma resposta. Como a compreensão desta alínea era fundamental para a seguinte em que se pedia o termo geral da sequência, solicitei a uma terceira aluna que apresentasse a sua resolução que era semelhante à dos colegas mas tinha o rigor matemático necessário para se passar de um determinado termo conhecido para o termo geral.

Após esta aluna ter explicado como fez e ter dado uma primeira ideia de como tinha pensado na alínea em que pedia o termo geral, a aula terminou e foram recolhidas todas as tarefas dos alunos.

27 de Abril de 2012 (45 minutos)

Sendo uma aula de apenas quarenta e cinco minutos, tinha como objetivo concluir a discussão da tarefa da aula anterior, discutir os resultados obtidos pelos alunos nos desafios matemáticos propostos e, caso houvesse tempo, consolidar o trabalho com equações literais.

Depois de escrito o sumário e de distribuídas as tarefas recolhidas no dia anterior, continuou-se a discussão da questão 2 onde se tinha ficado na aula anterior.

Uma vez que a aula era só de quarente e cinco minutos, optei por fazer uma discussão mais centrada no professor, no que se refere ao registo das conclusões no quadro.

Para recuperar as estratégias referidas e trabalhadas na aula anterior, desenhei no quadro a figura 9 (questão 2.2) e a resolução apresentada pela última aluna a ir ao quadro na aula anterior. Perante estes dois dados, a turma inteira respondeu bem quando foi necessário generalizar para a figura de ordem n, ou seja, para escrever o termo geral das sequências trabalhadas.

O passo seguinte foi escrever estes termos gerais na forma simplificada sem o recurso a parênteses. Este momento gerou algumas questões nos alunos e bastantes dificuldades em aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Quando foi necessário aplicar duas vezes esta propriedade no termo geral $(n+1)(n+2)$ houve ainda mais dificuldades, o que me levou a desenvolver com eles esta multiplicação, aplicando primeiro a propriedade distributiva para um e só depois para outro polinómio, para que pudessem compreender a "receita" de multiplicar cada um dos termos do primeiro parênteses por cada um dos termos do segundo parênteses e somar todos os resultados das multiplicações. Apercebi-me que depois desta perceção, os alunos precisavam de treino para compreenderem realmente o processo de cálculo presente neste tipo de expressões algébricas e, por isso, passei alguns exercícios semelhantes no quadro para os alunos experimentarem.

Devido às dificuldades apresentadas pelos alunos, acabei por não avançar para a discussão dos desafios matemáticos, nem para a consolidação das equações literais. O resto da aula serviu para os alunos colocarem em prática a propriedade distributiva e à medida que iam conseguindo foram chamando os professores para verificar os seus resultados.

02 de Maio de 2012 (90 minutos)

Na continuação das aulas anteriores, esta aula incidia na simplificação de expressões algébricas e operações com polinómios. O grande objetivo desta aula era clarificar alguns conceitos associados aos monómios e aos polinómios, tal como adicionar e multiplicar polinómios.

A aula iniciou-se com a discussão dos resultados obtidos pelos alunos nos desafios matemáticos da primeira semana. Para o desafio das flores foi um aluno apresentar a sua resolução e comentou-se em turma a possibilidade de existir outra solução. No que diz respeito ao desafio dos terrenos, foram dois alunos apresentar a sua solução e em turma discutimos a possibilidade de existirem outras soluções corretas.

Cerca das 14h00, comecei uma breve exposição dos conceitos de monómio e polinómio, referindo alguns exemplos e registando tudo no quadro para que os alunos passassem no caderno. Aproveitei para esclarecer outros termos associados ao conceito de monómio, acompanhando-os sempre de exemplos inventados pelos alunos. Depois de registado no caderno a exploração destes conceitos, informei os alunos de alguns exercícios do manual que ficariam como trabalho de casa.

Depois desta exposição centrada no professor, os alunos iniciaram o trabalho autónomo com a continuação da tarefa 3. Os alunos começaram a resolver as questões 3 e 4 e foram surgindo algumas dúvidas, primeiro por falta de compreensão do enunciado e depois por dificuldades na compreensão do papel dos símbolos no contexto das operações com polinómios.

Uma vez que os tempos já não estavam a ser cumpridos e os alunos precisavam de mais tempo para vencerem as suas próprias dificuldades e avançarem na tarefa, optei por não interromper o trabalho deles para realizar uma discussão em grupo e deixei que os alunos trabalhassem sozinhos na tarefa até dar o toque.

Quando deu o toque, despedi-me dos alunos e recolhi as tarefas para poder analisar as suas dificuldades e erros cometidos para insistir neles na próxima aula em que se trabalhasse aquela tarefa.

03 de Maio de 2012 (90 minutos)

Esta aula tinha como objetivo introduzir o primeiro caso notável da multiplicação, o do quadrado do binómio.

A aula começou dentro da normalidade com alguns atrasos por parte de alguns alunos. Após escreverem o sumário, comecei por lhes perguntar se ainda se lembravam o que era um binómio e houve alguns alunos que se predispuseram a dizer alguns exemplos de binómios. Depois desta breve revisão do conceito, apresentei-lhes a tarefa do manual que iria ser trabalhada ao longo da aula (Tarefa 4), informando-os sobre os tempos de trabalho autónomo e sobre a metodologia de trabalho que seria diferente da que estes estavam habituados. Eles iam trabalhar em grupos de quatro, conforme a planta da turma naquela sala.

Os alunos começaram imediatamente a resolver a primeira parte da tarefa que consistia numa pequena investigação sobre a diferença de quadrados perfeitos consecutivos. As duas primeiras alíneas foram resolvidas rapidamente uma vez que apenas pediam alguns termos específicos. Contudo, a resolução da terceira alínea já foi mais demorada, uma vez que alguns grupos não tinham optado pela melhor estratégia nas alíneas anteriores para agora descobrir o termo geral, e outros grupos tinham construído a sequência até aos termos pedidos sem compreenderem a sua construção. Devido a esta dificuldade, dei mais tempo para resolverem a primeira parte antes de passarmos à discussão em turma, o que permitiu aos alunos que tinham escolhido a estratégia correta avançar para a resolução da parte 2 da tarefa.

Quando a maioria da turma já tinham alguma ideia para responder à última alínea da primeira parte, pedi que se virassem para o quadro e quando a turma acalmou iniciámos a discussão. Os alunos apresentaram no quadro as suas resoluções, havendo sempre mais do que um grupo a interagir em cada alínea devido à diversidade de estratégias, procurando da minha parte direcionar as estratégias deles para uma maior facilidade na descoberta de uma expressão que representasse a regra encontrada na questão em causa. Na última alínea, dois alunos apresentaram a sua expressão e a turma chegou à conclusão que se tratavam de expressões equivalentes.

Após esta conclusão, os alunos iniciaram a parte 2 da tarefa. Como a primeira alínea tinha uma tabela para ser preenchida, os alunos não tiveram dificuldades nesta parte e resolveram-na de forma mais rápida do que a esperada. Houve até alguns alunos que, verificando terem terminado a tarefa antes do tempo, remeti-os para o manual para lerem sobre o quadrado do binómio e praticarem com alguns exercícios de simplificação de quadrados de binómios.

Quando faltavam quinze minutos para a aula terminar, os alunos terminaram o que estavam a fazer e voltaram-se para o quadro para corrigirmos a segunda parte da tarefa que novamente correu dentro da normalidade. Apenas na última questão surgiram algumas dúvidas quando solicitei que, para além de apresentarem duas expressões algébricas equivalentes, tinham que provar que estas eram equivalentes entre si. Uma aluna com a ajuda dos elementos do seu grupo conseguiu prová-lo algebricamente.

Após a conclusão da discussão, procurei sintetizar as aprendizagens retidas com a tarefa para que os alunos chegassem em conjunto à fórmula do quadrado do binómio mas deu o toque e tive que terminar a aula.

04 de Maio de 2012 (45+45 minutos)

Esta aula foi planificada para quarenta e cinco minutos mas, como a professora a seguir faltou, ficámos com os alunos mais quarenta e cinco minutos extra. A primeira parte da aula teve como principal objetivo concluir a aula anterior, sintetizar a fórmula do quadrado do binómio e praticá-la com alguns exercícios simples, enquanto a segunda parte serviu para explorar com mais atenção as dificuldades e erros cometidos pelos alunos na adição e multiplicação de polinómios.

Iniciei a aula, relembrando as conclusões obtidas em ambas as partes da tarefa do dia anterior e pedi aos alunos que completassem alguns exemplos de aplicação do quadrado do binómio tendo em conta os obtidos no dia anterior. Como os alunos estavam a responder bem aos meus pedidos, solicitei-lhes que me ajudassem a completar um caso mais geral, mas aí já senti algumas dificuldades por parte dos alunos, acabando por decidir pedir-lhes que aplicassem a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para chegarem a alguma conclusão.

Quando chegaram em conjunto à fórmula do quadrado do binómio, pedi-lhes que concluíssem sozinhos sobre a fórmula de $(a-b)^2$, pedido esse que foi concretizado com alguma facilidade e registado no quadro por um aluno. Após terem registado ambas as fórmulas no caderno, pedi-lhes que as aplicassem em algumas expressões algébricas que passei no quadro.

Os alunos dedicaram-se a esta tarefa até ao final da aula quando interrompi o trabalho para lhes entregar outro desafio semanal para pensarem em casa, dando o toque logo em seguida. Como a outra professora não tinha avisado de que ia faltar, optei por concluir a tarefa apresentada no quadro e alguns alunos foram ao quadro corrigir. Depois disto, entreguei as tarefas sobre Operações com Polinómios que tinha recolhido na quarta-feira passada e andei de lugar em lugar a chamar à atenção sobre alguns erros cometidos pelos alunos na simplificação de expressões algébricas, enquanto os alunos iam avançando na resolução da tarefa até a aula terminar.

09 de Maio de 2012 (90 minutos)

Na continuação das duas aulas anteriores, esta aula tinha como objetivo trabalhar os casos notáveis da multiplicação, neste caso com enfoque no caso da diferença de quadrados.

A aula iniciou-se normalmente com a apresentação do sumário. Após os alunos passarem-no para o caderno, questionei-os sobre os desafios apresentados nas duas semanas anteriores (Anexo II), o desafio da Diana que conta um segredo e do Sr. Pereira que tem animais. Surgiu, imediatamente, um grupo de alunos que queria explicar como tinha pensado no primeiro desafio, mas perante a dificuldade de se expressarem, foi sugerido que se fizesse uma espécie de diagrama de árvore no quadro para compreender como o segredo se propagava e a partir daí rapidamente chegaram à resposta do desafio. Em relação ao segundo desafio, constatei que a maior parte dos alunos não tinha compreendido o enunciado. Portanto, optei por esclarecer melhor o problema, dando alguns exemplos concretos e pedi-lhes que pensassem mais um pouco nele em casa. Num outro dia retomaríamos a discussão sobre o desafio do Sr. Pereira.

Para acalmar o borborinho causado pela discussão dos resultados dos desafios, decidi fazer com eles um ponto da situação das aulas anteriores e resumir no quadro os casos notáveis da multiplicação que eles haviam aprendido nas aulas passadas. Depois disso, distribui uma tarefa e indiquei os tempos de trabalho autónomo, em pares, dos alunos para cada uma das partes da tarefa.

Em relação à tarefa da Diferença de Quadrados, os alunos não tiveram qualquer dificuldade em preencher a tabela da primeira alínea da questão 1 enquanto só utilizavam casos concretos mas, ao surgir o caso geral, os alunos tiveram algumas dificuldades em perceber como relacionar os valores da sequência, principalmente pelo segundo processo em que precisavam de compreender que estavam a multiplicar a soma de dois números pela diferença desses mesmos dois números. Depois de chamar à atenção para verem os casos particulares e como se obtinham os termos pelo segundo processo sabendo apenas os lados dos quadrados das figuras, os alunos conseguiram compreender a relação e utilizá-la em situações concretas (alínea 2). A última alínea desta questão pedia para mostrar algebricamente a fórmula da diferença de quadrados, o quer foi encarado com facilidade uma vez que já o tinham feito para as fórmulas do quadrado do binómio.

Praticamente toda a turma conseguiu resolver a questão 1, dentro do tempo estipulado, sem cometerem grandes erros. Deste modo, a discussão foi rápida e acabou por ser mais correção do que discussão. Não existiam estratégias diferentes também devido ao caráter fechado da questão.

Finalizada a discussão, o resto da aula serviu para eles praticarem todos os casos notáveis da multiplicação com a questão 2 em que apareciam todos misturados e, assim, os alunos tinham que primeiramente perceber qual o caso notável a utilizar. Antes de tocar, ainda foram corrigidas algumas alíneas desta questão no quadro.

Capitulo IV

Métodos e procedimentos de recolha e análise de dados

O objetivo a atingir com este estudo, a natureza dos dados recolhidos e a forma como estes vão ser analisados, de forma a responder às questões enunciadas, são influenciados diretamente pela metodologia utilizada neste estudo. Segundo Biklen & Bogdan (2003), os dados incluem os elementos necessários para pensar de forma adequada e profunda acerca dos aspetos do tema que pretendemos explorar e sendo este um estudo substancialmente qualitativo não podemos limitar-nos a um único método de recolha de dados.

Este estudo tem um carácter investigativo e, portanto, é crucial ter cuidado e não confundir o papel enquanto professor da turma e enquanto investigador. Sendo a aprendizagem dos alunos a minha preocupação central, não posso perder a noção do que este estudo me exige, uma forte capacidade de reflexão e análise, ou seja, esta ideia baseia-se naquilo que Perrenoud (1999) designa por prática reflexiva:

> (…) um profissional reflexivo aceita fazer parte do problema. Reflete sobre sua própria relação com o saber, com as pessoas, o poder, as instituições, as tecnologias, o tempo que passa, a cooperação, tanto quanto sobre o modo de superar as limitações ou de tornar seus gestos técnicos mais eficazes. Enfim, uma prática reflexiva metódica inscreve-se no tempo de trabalho, como uma rotina. Não uma rotina sonífera; uma rotina paradoxal, um estado de alerta permanente. Por isso, ela tem necessidade de disciplina e de métodos para observar, memorizar, escrever, analisar após compreender, escolher opções novas. (Perrenoud, 1999, in Campos, 2010, p.42)

Esta atitude é fundamental para se exercer a função de professor investigador mas sozinha não chega. Este tipo de prática reflexiva tem que ser rotineira e atualizada constantemente perante reflexões anteriores.

Ao longo deste capítulo são apresentadas as opções metodológicas tomadas no presente estudo, tal como os instrumentos utilizados para recolha de dados e a sua análise.

Opções metodológicas

A natureza de um estudo e as características inerentes à sua realização estão condicionadas imediatamente pelas opções metodológicas adotadas e, perante esta investigação, torna-se necessário adotar uma metodologia de tipo qualitativo e descritivo.

Toda a investigação baseia-se em orientações teóricas, evidenciando um certo modo de entendimento do mundo e permitindo-nos identificar os aspetos que, para nós, se revelam importantes. Assim, a adequação da metodologia utilizada neste estudo comprova-se com a presença das características essenciais para as investigações de natureza qualitativa que, segundo Bogdan & Biklen (2003), são as seguintes: (i) os dados são recolhidos no ambiente natural e o investigador é o principal instrumento na sua recolha; (ii) os dados recolhidos são essencialmente de natureza descritiva, (iii) o investigador está mais interessado no processo do que nos resultados ou nos produtos; (iv) os dados são analisados de forma indutiva e (v) é dada especial importância à compreensão dos significados construídos pelos participantes.

Segundo Teixeira (2011), um estudo qualitativo comporta características próprias:

(vi) Tem como objetivo de estudo uma entidade bem definida: um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma turma, uma pessoa, ou uma entidade social;

(vii) Pretende responder aos “comos” e aos “porquês” que caraterizam o objeto do estudo;

(viii) Utiliza uma variedade de instrumentos e estratégias de recolha de dados (observações diretas e indiretas, entrevistas, questionários, registos de áudio e vídeo, diários, cartas, entre outros);

(ix) Tem um forte cunho descritivo que conduza a uma análise;

(x) Procura identificar padrões, não testa hipóteses;

(xi) Gera novas hipóteses, novas teorias e novas questões para futura investigação;

(xii) Baseia-se no trabalho de campo;

(xiii) O investigador é o principal instrumento de recolha de dados.

Assim, uma investigação qualitativa procura compreender o acontecimento em estudo, como é o mundo do ponto de vista dos participantes e assenta num contexto de descoberta em torno das questões propostas e não no contexto da prova, e ao mesmo tempo procura desenvolver teorias mais genéricas do fenómeno observado, isto é, o investigador explora, descreve ou explica os factos como sucederam para que se possam comprovar ou contrastar efeitos e relações presentes no caso.

Após a recolha, o entendimento do investigador acerca dos materiais recolhidos é fundamental para a análise. Daí o investigador ser considerado o instrumento principal da sua própria investigação.

Este estudo é qualitativo e interpretativo na medida em que procura descrever a forma como os alunos revelam sentido de símbolo e de variável, tal como compreender a forma como os alunos recorrem a conhecimentos prévios e interpretam as dificuldades que sentem no estudo das equações literais e das expressões algébricas.

Participantes no estudo

Numa investigação qualitativa, a escolha dos participantes é um fator crucial para o desenvolvimento do estudo. Há que selecionar os participantes de forma a que estes sejam representativos da turma, mas ao mesmo tempo apresentem singularidades e diferenças entre eles.

Este estudo foi realizado numa turma de 8.º ano de escolaridade, constituída por 28 alunos. Todos os alunos participaram na investigação, contudo selecionei um grupo restrito de alunos, mais concretamente três alunos, para analisar em mais detalhe.

Os alunos escolhidos para uma análise mais detalhada das suas intervenções foram escolhidos de acordo com os seguintes critérios: participação na aula; qualidade do discurso; e aproveitamento na disciplina distintos. Perante os objetivos definidos e a metodologia escolhida, optei por selecionar três alunos de ambos os sexos, todos eles participativos na aula mas com aproveitamento distinto, um com algumas dificuldades em ter sucesso à disciplina e os outros dois com bons resultados à disciplina de Matemática. Passo a apresentar os alunos selecionados:

Alfredo – É um rapaz de 13 anos, pouco interventivo mas bastante atento. É colega de mesa da Sara, apresentada em seguida, e não tem qualquer problema em pedir ajuda à colega. É um aluno que gosta de participar quando tem a certeza que não vai falhar, gosta de o mostrar ao professor e aos colegas. O Alfredo tem algumas dificuldades a Matemática, parece esforçar-se bastante, mas não conseguido atingir níveis positivos, tendo tido nível 2 ao longo do ano.

Guilherme – É um rapaz de 13 anos, muito interessado e participativo nas aulas de Matemática. Nota-se que tem algumas dificuldades, mas ligeiras, devido a uma falta de bases do ano anterior. Tem um gosto particular pela competição e pela discussão de resultados. O Guilherme não tem vergonha de questionar o professor ou a turma sobre qualquer assunto que lhe suscite dúvidas. Aliás não deixa a aula avançar sem que compreenda os assuntos que estão a ser tratados, questionando constantemente até perceber, tornando-se muito efusivo com as suas vitórias particulares. No primeiro período, o Guilherme obteve nível 5 à disciplina, porém no segundo período desceu para nível 4.

Sara – É uma aluna de 13 anos, bastante atenta e participativa, sendo uma das alunas que mais participa e vai ao quadro por vontade própria. A Sara é bem comportada e gosta de ajudar o colega de mesa Alfredo, trabalhando bastante bem com ele, motivando-o constantemente. É uma aluna que costuma estudar e realizar todos os trabalhos de casa. Apesar da sua participação em aula ser bastante rica e interessante, o sucesso não é tão visível nos testes, não conseguindo atingir as notas que fazem jus à sua prestação em aula. A Sara foi uma aluna de nível 4 ao longo do ano.

Tendo em atenção questões de ordem ética, foi solicitada uma autorização (Anexo III) aos encarregados de educação dos alunos para a utilização dos dados recolhidos. Apenas utilizei os dados dos alunos que me entregaram a autorização assinada pelos seus encarregados de educação.

Instrumentos de recolha de dados

De acordo com Cohen, Manion & Morrison (2000), a utilização de vários instrumentos de recolha de dados possibilita um confronto dos dados obtidos a partir de diversas fontes e informantes, o que confere maior fiabilidade ao estudo, diminuindo a possibilidade do investigador distorcer a imagem da realidade que está a investigar.

Nesta secção, descrevo os principais instrumentos utilizados na recolha de dados para desenvolver o presente estudo que neste caso, tendo em conta o objetivo e as questões de investigação, são a entrevista, a observação de aulas e a recolha documental de produções dos alunos.

Entrevista

A entrevista é um dos instrumentos privilegiados para a recolha de dados, uma vez que esta é utilizada na "recolha de dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo" (Bogdan & Biklen, 2003, p. 134).

A entrevista serviu para recolher informação a partir dos próprios alunos entrevistados sobre as suas dificuldades, tal como sobre o sentido que estes atribuem ao símbolo e à variável. Permitiu, também, retirar informações sobre a evolução dos alunos e a superação, ou não, das suas dificuldades perante a unidade de ensino em causa.

As entrevistas, associadas a este estudo, decorreram após a lecionação da unidade didática e foram realizadas aos três alunos selecionados. Estas entrevistas ocorreram com a autorização dos encarregados de educação. Como a disponibilidade dos alunos fora do período de aulas é reduzida, as entrevistas foram realizadas no horário de aulas de Matemática posteriores à minha lecionação, tendo sido necessário deslocar-me com os alunos para outra sala. Os participantes realizaram, numa primeira fase, uma tarefa matemática individual e, numa segunda fase, conversei com os alunos sobre o trabalho desenvolvido por eles, inquirindo-os sobre as suas escolhas, conversa essa que foi áudio-gravada.

Uma entrevista nos moldes desta é uma entrevista semiestruturada pois permite adaptar as questões a colocar em função das respostas que os alunos vão dando, o que possibilita ao entrevistador um melhor conhecimento do aluno, das suas aprendizagens e eventuais conceções erróneas e das suas estratégias na resolução das tarefas, favorecendo uma melhor compreensão do seu pensamento algébrico e do sentido do símbolo (Nabais, 2010). Desta forma, tornou-se fundamental refletir sobre as questões do estudo para saber o que deveria aprofundar na entrevista, tal como delinear o tipo de questões a colocar aos alunos, questões essas que se centrem não só no esclarecimento e justificação das estratégias, mas também nas dificuldades sentidas pelos alunos.

Na tentativa de compreender como cada questão da tarefa a utilizar me podia ajudar a dar resposta às questões do estudo, elaborei um quadro (Quadro 7) onde defino os objetivos de cada questão e identifico quais as questões do estudo que procuro responder recorrendo àquelas questões da tarefa.

Quadro 7 - Objetivos da Tarefa a aplicar na Entrevista

Questões da tarefa		**Objetivos específicos das questões**	**Questões do estudo**
1.	**a)**	• Identificar dificuldades na determinação do valor de uma das variáveis conhecido o outro; • Verificar o significado atribuído à substituição de uma variável por um valor;	ii) e iii)
	b)	• Identificar dificuldades na determinação do valor de uma das variáveis conhecido o outro; • Verificar que significado os alunos atribuem a uma variável;	ii) e iii)
	c)	• Identificar dificuldades na resolução de uma equação literal em ordem a uma variável;	i), ii) e iii)

		• Verificar se interpretam o símbolo como uma entidade geral e indeterminada que pode assumir qualquer valor; • Verificar se utilizam os conhecimentos das equações de 1.º grau na resolução de uma equação literal;	
	d)	• Compreender como valorizam o ato de isolar uma variável; • Identificar dificuldades na determinação do valor de uma das variáveis conhecido o outro;	ii)
2.	**a)**	• Compreender como interpretam e qual o significado que atribuem às letras e a uma expressão algébrica, tendo em conta o contexto; • Identificar dificuldades ao nível da interpretação das letras;	ii) e iii)
	b)	• Identificar dificuldades; • Compreender como valorizam o ato de isolar uma variável;	ii)
	c)	• Identificar dificuldades na construção de uma fórmula; • Compreender como valorizam o ato de isolar uma variável dada a equação literal; • Verificar se utilizam os conhecimentos das equações de 1.º grau na resolução de uma equação literal;	i) e ii)
3.		• Identificar dificuldades na simplificação de expressões algébricas; • Compreender se estão familiarizados com os símbolos e com o seu significado • Compreender se estão familiarizados com as expressões algébricas, com as operações que podem efetuar e com as equivalências que podem obter;	ii) e iii)
4.		• Identificar dificuldades na simplificação de expressões algébricas; • Compreender se estão familiarizados com os símbolos e com o seu significado • Compreender se estão familiarizados com as expressões algébricas, com as operações que podem efetuar e com as equivalências que podem obter;	ii) e iii)

Mais concretamente, as entrevistas decorreram nos dias 9, 10 e 17 de Maio, tendo sido o primeiro dia dedicado à realização autónoma da tarefa por parte dos alunos e nos seguintes, durante a aula de Matemática, foram realizadas as entrevistas semiestruturadas tendo em conta as escolhas e prestações dos alunos. Na minha opinião, as entrevistas correram bem. Os alunos tentaram explicar o seu raciocínio e as suas opções. Como queria perceber como os alunos lidavam com as dificuldades e os erros cometidos, entreguei-lhes uma cópia da tarefa em branco e durante a entrevista caso encontrassem um erro podiam alterar a sua resolução, registando a nova resolução na cópia da tarefa, ou seja, em certos momentos os alunos tiveram a capacidade de, confrontados com os seus erros, ultrapassá-los e aprender com estes.

Observação de aulas

As técnicas de observação permitem a investigação de fenómenos nos seus contextos de ocorrência natural. A observação de aulas pode ser participante ou não participante. A observação participante implica a inserção do investigador na população ou na sua organização ou comunidade, para registar comportamentos, interações ou acontecimentos, envolvendo-se assim nas atividades que está a estudar (Evalsed, 2009). Este estudo exige uma observação participante, visto ser investigador e professor da turma ao mesmo tempo. Contudo, o papel de professor prevalece sobre o de investigador, não permitindo o imediato registo descritivo e sistemático de situações importantes a registar.

A observação de aulas, enquanto instrumento de recolha de dados, é importante pois estimula os participantes a refletir sobre algumas das suas experiências decorridas na preparação e concretização das aulas. Neste estudo, em particular, a observação teve como objetivo caraterizar melhor a turma no que se refere ao modo como os alunos se relacionam em grupo e reagem às tarefas, como lidam com as dificuldades surgidas e, ainda, como os alunos mostram evidências da manifestação do pensamento algébrico, do sentido do símbolo e da variável.

Ao longo das oito aulas que lecionei, procedi à observação participante. Retirei algumas notas que considerei pertinentes, da forma mais fiel e detalhada possível, recorrendo a um "diário de bordo" que me facilitou a análise posterior dos registos efetuados. Quando se recorre ao uso de diários de bordo, "onde o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, em como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo. (…) o mais importante não é recolher muitos dados, mas recolher dados adequados ao fim que se tem em vista e que sejam merecedores de confiança." (Ponte, 2002, p. 18).

Segundo Bogdan & Biklen (2003), é fundamental, no final, anotar aquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decorrer das aulas, pois só assim é possível um estudo bem-sucedido. Como desempenhei simultaneamente o papel de investigador e de professor, as anotações permitiram-me analisar com clareza mais tarde os diferentes momentos da aula. Deste modo, no final de cada aula procurei recordar e descrever os episódios mais marcantes da aula para responder às questões do estudo, optando por introduzir logo alguns comentários sobre algumas situações marcantes tal como procurei transmitir para o papel algumas das aprendizagens vivenciadas por mim.

Apesar de procurar registar de forma sistemática os episódios presenciados em aula, foi muito complicado uma vez que não tinha somente essa função. Estava ocupado com o decorrer propriamente dito da aula em si e, perante isto, optei por recorrer também ao "registo por interposta pessoa", ou seja, solicitei o auxílio da minha colega de estágio para tirar anotações sobre as intervenções dos alunos, tanto no trabalho autónomo, como nas discussões coletivas.

Recolha Documental

A recolha documental foi escolhida com o objetivo de compreender as estratégias de resolução e as dificuldades que os alunos possam encontrar no sentido do símbolo e da variável, tal como compreender como os alunos mobilizam conhecimentos prévios para os novos conteúdos. Para além destes objetivos, esta escolha prende-se também com o facto de que analisando as resoluções das tarefas por mim propostas torna-se possível efetuar comparações entre elas e analisar a evolução ocorrida nos alunos, em especial, no que respeita ao desenvolvimento do pensamento algébrico, muito embora esteja consciente do curto período de tempo da minha intervenção.

A recolha documental pode incluir as produções dos alunos, os seus cadernos diários, os trabalhos de casa e os registo efetuados no quadro durante as aulas lecionadas. A análise destes documentos permite ter a noção do trabalho que os alunos realizam e identificar estratégias, raciocínio e conhecimentos que mobilizam.

Neste estudo, a recolha documental cingiu-se à recolha das resoluções escritas de todas as tarefas realizadas pelos alunos da turma, tanto em sala de aula, como em casa, ao longo das aulas desta unidade temática. As resoluções da tarefa aplicada na entrevista constituem outro momento de recolha de dados para este estudo.

Esta recolha acompanhou toda a minha intervenção, pois apenas com uma análise mais aprofundada e cuidada é que é possível selecionar as tarefas recolhidas a inserir no meu estudo. Houve, no entanto, alguns constrangimentos na resolução das tarefas feitas em aula, uma vez que os alunos procuram apagar os seus raciocínios quando estão errados e corrigi-los. Perante esta possibilidade, solicitei aos alunos que resolvessem as tarefas a esferográfica e, somente durante a discussão coletiva, usassem lápis para modificar ou completar as resoluções feitas anteriormente, o que apesar de não ser natural para estes foi interiorizado rapidamente.

Análise de dados

A análise de dados procura utilizar os dados recolhidos com o objetivo de responder às questões colocadas neste estudo. Deste modo, a análise de dados incidiu sobre as produções escritas de vários alunos e, em especial, dos três alunos entrevistados, das transcrições das entrevistas e de alguns diálogos em aula e, por último, da análise de algumas questões do teste aplicado após a minha intervenção.

Sendo este estudo caraterizado por uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa, a análise de dados surge com um caráter descritivo e interpretativo. Depois de organizar e dividir todo o material recolhido, procurei estabelecer relações entre essas mesmas categorias. Numa fase posterior, optei por apresentar os dados em duas categorias tendo em conta as questões do estudo: processos de resolução de equações e sentido do símbolo e de variável. As dificuldades evidenciadas pelos alunos não foram destacadas na análise dos dados, uma vez que estas surgem, tanto na análise dos processos de resolução de equações, como na análise do sentido do símbolo e de variável.

Dentro da categoria dos processos de resolução de equações, organizei os dados de acordo com os três princípios de equivalência apresentados por Silva & Paulo (1968) e com o processo de isolar uma das incógnitas.

O sentido do símbolo e de variável pode ser analisado tanto no trabalho com equações como com expressões algébricas. Deste modo, a categoria do sentido do símbolo e de variável foi organizada em duas vertentes, o trabalho com equações e com expressões algébricas e, ainda dentro destas vertentes, segui o quadro referência apresentado em Grossmann, Gonçalves e Ponte (2009) que refere algumas ações que permitem tirar ilações sobre o sentido do símbolo.

Dentro da subcategoria das equações, o sentido do símbolo nos alunos evidencia-se em diversos aspetos tais como quando o aluno está a sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos, ao fazer uma análise inicial dos símbolos e ao prever alguns resultados. A aplicação dos procedimentos de resolução de equações e a validação das equivalências, encontrando outros significados que possam surgir das equivalências, são também bons indicadores do sentido do símbolo dos alunos. Outro indicador reside no facto de que mais do que manipular algebricamente, é importante manter uma visão geral do que se está a fazer, acompanhando-a de uma compreensão e verificação constante para que estas manipulações não sejam despojadas de significado. Ainda inserido nesta subcategoria, um indicativo da existência do sentido do símbolo desenvolvido baseia-se na compreensão dos diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar, interpretando-os de forma diferente conforme o seu contexto.

No trabalho com expressões algébricas, os indicadores a analisar são semelhantes: conhecer bem os símbolos algébricos, saber utilizá-los, combiná-los e utilizá-los perante um contexto adequado; expressar a linguagem corrente através de símbolos; passar do sentido do número para o sentido do símbolo, do concreto para o abstrato acompanhada duma compreensão das propriedades específicas da linguagem algébrica; e escolher símbolos para exprimir uma condição de forma clara, para atingir os objetivos pretendidos.

Para além disso, dentro de cada tópico estruturei a análise dos dados seguindo sempre a mesma ordem de apresentação, alunos entrevistados – Alfredo, Guilherme e Sara – e em seguida a turma em geral.

Capítulo V

Apresentação e Análise de Dados

Neste capítulo, tendo em conta as questões formuladas no presente estudo, procuro apresentar e analisar os dados recolhidos que consistem nas produções de algumas tarefas realizadas pelos alunos nas aulas e numa entrevista de cariz individual.

Esta análise reporta-se, maioritariamente, à entrevista realizada no final da unidade didática a três alunos, de nomes fictícios, Alfredo, Guilherme e Sara. No entanto, recorro a algumas produções dos alunos realizadas em aula e no teste proposto no final da minha lecionação (Anexo II). Procuro, também, fazer uma análise mais geral do desempenho da turma na tentativa de complementar as respostas às questões de investigação.

Alguns diálogos apresentados são fruto de transcrição das entrevistas realizadas e de alguns diálogos em sala de aula que foram registados no momento pela minha colega de estágio.

Processos usados na resolução de equações literais

Um dos principais objetivos deste estudo é compreender até que ponto os alunos mobilizam conceitos e propriedades matemáticas das equações do 1.º grau na resolução de equações literais, e para isso passo a analisar algumas tarefas, tendo por base de análise os princípios de equivalência de equações.

1.º Princípio de Equivalência

Na resolução de equações, aplicar este princípio baseia-se na substituição dos membros de uma equação por uma expressão equivalente a esse membro, estando aqui inseridas as transformações de desembaraçar a equação de parênteses e reduzir os termos semelhantes.

O Alfredo, na resolução de equações literais, aplica corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição quando se depara com um sinal menos antes de uma fração (Figura 12). Contudo, nas suas resoluções de equações a uma incógnita, este aluno comete esse erro frequentemente (Figura 13).

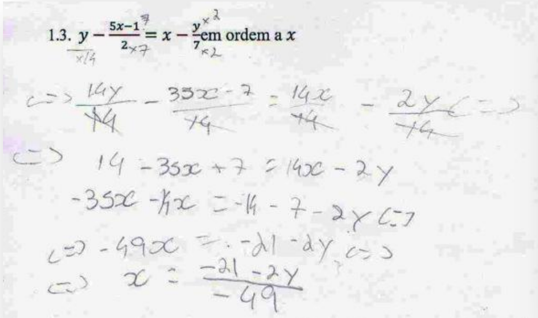


Figura 12 – Resolução do Alfredo à questão 6.5. da Tarefa 2

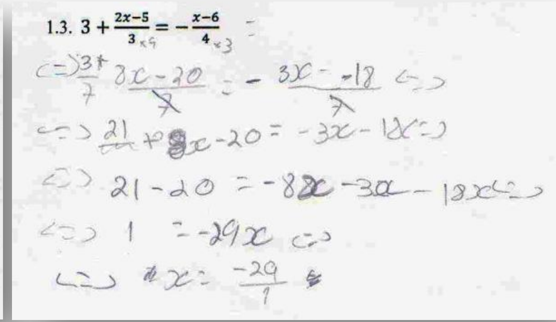


Figura 13 – Resolução do Alfredo à questão 1.3. da Tarefa 1

Nas equações lineares, equações a uma incógnita, o Alfredo, ocasionalmente, em vez de multiplicar, soma os termos associados à propriedade distributiva (Figura 14), o que evidencia falta de aquisição e compreensão desta propriedade.

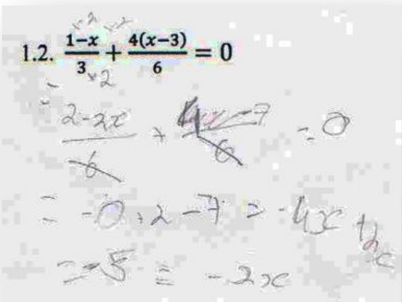


Figura 14 – Resolução do Alfredo à questão 1.2. da Tarefa 1

Em relação à redução de termos semelhantes, o Alfredo aplica corretamente esta transformação, tanto nas equações literais, como nas equações do 1.º grau. Em algumas situações, no decorrer da resolução, o aluno perde algumas partes literais dos termos e começa a trabalhar com eles como sendo somente números (Figura 12).

O Guilherme, ao contrário do Alfredo, não aplica corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição quando tem um sinal menos antes de uma fração na resolução de equações literais (Figura 15).

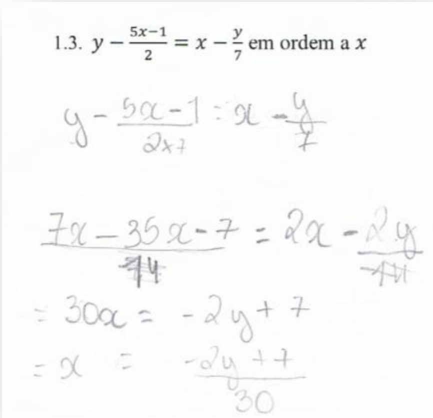


Figura 15 – Resolução do Guilherme à questão 6.5. da Tarefa 2

No entanto, quando se analisam as suas resoluções das equações lineares, estas evidenciam uma compreensão total do 1.º princípio de equivalência, pois o aluno aplica corretamente as transformações de desembaraçar parênteses e de reduzir termos semelhantes, tal como se pode observar na figura 16.

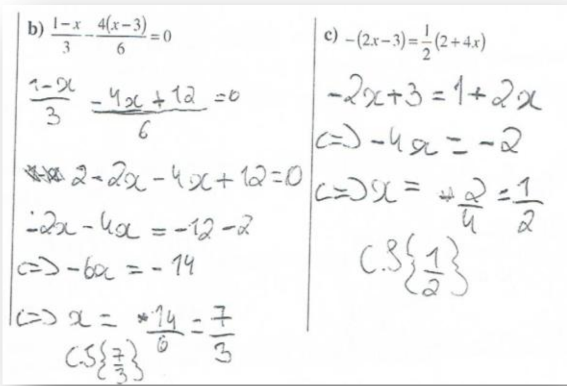


Figura 16 – Resolução do Guilherme à questão 1 do Teste

A Sara aplica corretamente o 1.º princípio de equivalência, tanto na resolução de equações literais, como de equações de 1.º grau a uma incógnita. Ao longo da sua resolução vai apresentado todos os passos em que substitui um membro da equação por uma expressão equivalente (Figuras 17 e 18).

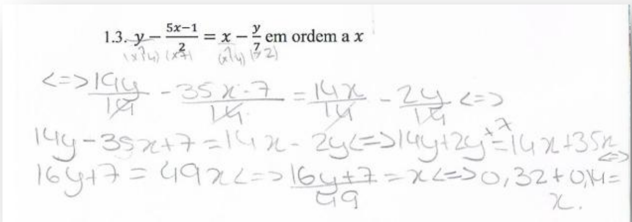


Figura 17 – Resolução da Sara à questão 6.5 da Tarefa 2

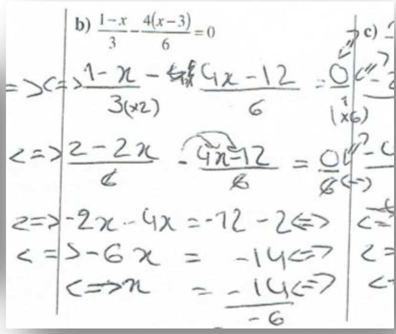


Figura 18 – Resolução da Sara à questão 1 do Teste

A maior dificuldade evidenciada no geral pela turma, tanto na resolução de equações literais, como na de equações a uma incógnita, reside em desembaraçarem-se do sinal menos quando este surge antes de uma fração. Cerca de 75% da turma não realiza esta transformação corretamente tal como ilustra a figura 19.

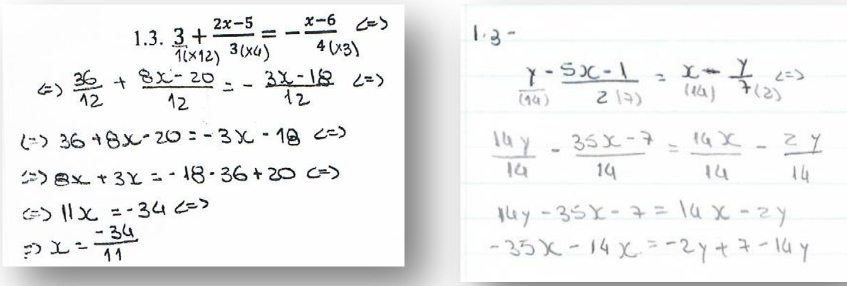


Figura 19 – Resoluções de um aluno às questões 1.3 da Tarefa 1 e 6.5. da Tarefa 2

No que diz respeito ao desembaraçar de parênteses, o sucesso da turma já é mais evidente, pois a maioria dos alunos aplica corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Este princípio de equivalência também é aplicado corretamente pela maioria da turma na resolução de equações de qualquer tipo no se refere à redução de termos semelhantes, à exceção de um aluno que soma termos com partes literais distintas (Figura 20).

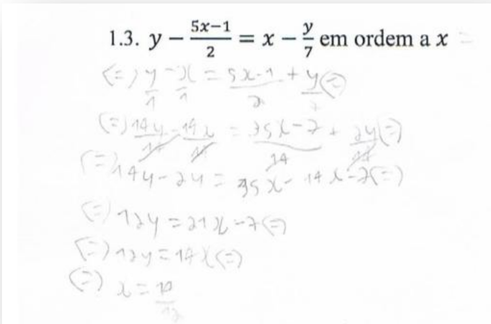
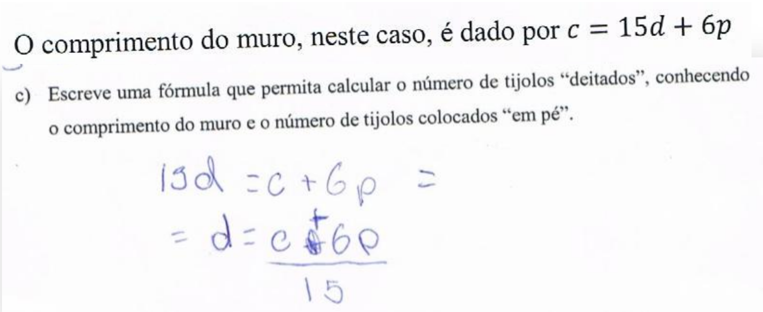


Figura 20 – Resolução de um aluno à questão 6.5. da Tarefa 2

2.º Princípio de Equivalência

Este princípio refere que quando se soma a mesma expressão a ambos os membros de uma equação, obtém-se uma equação equivalente à primeira, o que na prática se verifica quando um dos membros de uma equação é a soma de duas ou mais expressões, obtém-se uma equação equivalente à primeira, passando para o outro membro uma qualquer dessas expressões com o sinal trocado.

O Alfredo, durante a entrevista, não aplica corretamente este princípio quando se pede para resolver uma equação em ordem a uma determinada incógnita tal como ilustra a figura 21:


O comprimento do muro, neste caso, é dado por $c = 15d + 6p$

c) Escreve uma fórmula que permita calcular o número de tijolos "deitados", conhecendo o comprimento do muro e o número de tijolos colocados "em pé".

$15d = c + 6p =$

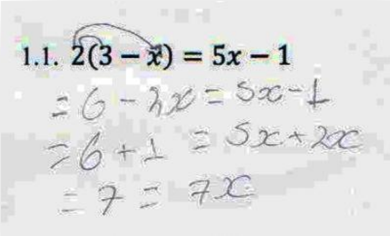
$= d = \frac{c + 6p}{15}$

Figura 21 – Resolução do Alfredo à questão 2c da Tarefa 6

Apesar de não o aplicar corretamente, o Alfredo enuncia o princípio:

> **Professor**: E podes passar coisas para os outros membros em equações?
> **Alfredo**: Sim. Desde que altere o sinal. Por exemplo, aqui o v estava num membro, estava $v =- 300t + 2100$, logo se eu passei de membro, tem que ficar –v.
> (…)
> **Alfredo**: A fórmula que é c=15d+6p.
> **Professor**: Como é que vais fazer?
> **Alfredo**: Em ordem a d.
> (…)
> **Alfredo**: Passei o 15d para um membro e depois pus c+6p.
> **Professor**: E ficou como?
> **Alfredo**: 15d=c+6p.

Estes erros apresentados parecem dever-se ao facto de o Alfredo realizar os passos de forma muito rápida, uma vez que, como se observa no exemplo seguinte, ele aplica o princípio corretamente na resolução de equações literais (Figura 22) e de equações do 1.º grau com uma incógnita (Figura 23).



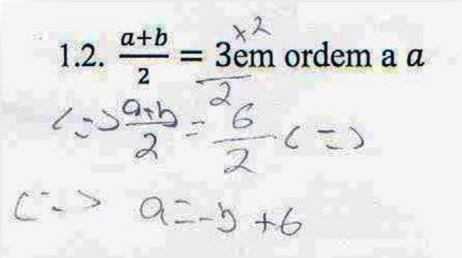


Figura 22 – Resolução do Alfredo à questão 1.1 da Tarefa 1

Figura 23 – Resolução do Alfredo à questão 6.2 da Tarefa 2

No caso do Guilherme, durante a entrevista, este evidencia saber o segundo princípio de equivalência:

> **Guilherme**: Depois peguei no v, que tinha sinal mais, e passei-o para o segundo membro como - v.

De acordo com o exemplo apresentado em seguida, o Guilherme mostra, não só saber o princípio, mas também conseguir pô-lo em prática na resolução de equações literais (Figura 24).

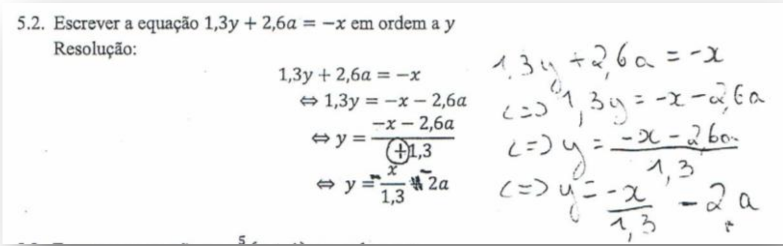


Figura 24 – Resolução do Guilherme à questão 5.2 da Tarefa 2

A Sara, também, aplica corretamente o princípio de equivalência em causa tanto nas equações literais como nas equações lineares (Figura 25).

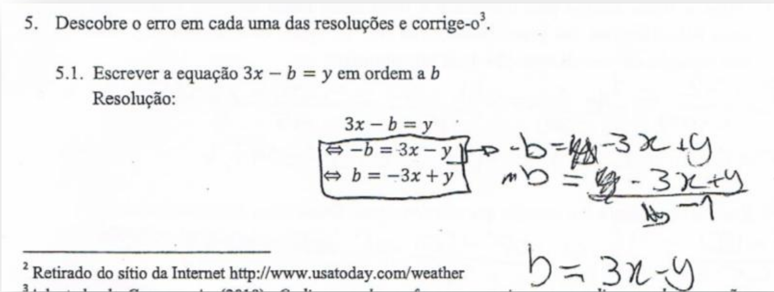


Figura 25 – Resolução da Sara à questão 5.1 da Tarefa 2

Em relação ao panorama geral da turma, a maioria dos alunos aplica corretamente este princípio de equivalência, salvo algumas exceções em que os alunos, quando passam um termo de um membro para o outro, separam o coeficiente da parte literal do monómio, deixando um deles num membro e passando o outro para o outro membro com sinal trocado. Este erro é cometido apenas nas equações literais, tal como ilustra a figura seguinte.

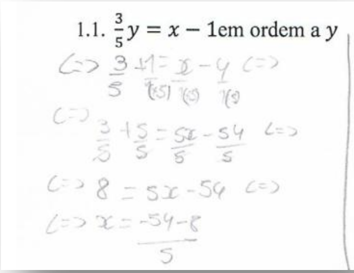


Figura 26 – Resolução de um aluno à questão 6.3 da Tarefa 2

3.º Princípio de Equivalência

Ao multiplicarmos ambos os membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtém-se uma equação equivalente à primeira. Este princípio é o terceiro princípio de equivalência e abrange transformações como o desembaraçar de denominadores e passar um fator numérico de um membro para o outro com inversão.

O Alfredo põe em prática as transformações abrangidas por este princípio de uma forma correta na resolução de equações literais, sem qualquer hesitação tal como ilustra a figura 12, apresentada anteriormente.

No entanto, quando se analisam as equações lineares resolvidas por este aluno no início da lecionação, verifica-se que o Alfredo fazia alguma confusão com o desembaraçar de denominadores, somando em vez de multiplicar para encontrar denominadores em comum (Figura 27). Curiosamente, quando se olha para as equações lineares resolvidas depois da lecionação, o Alfredo já aplica corretamente este princípio tal como o faz nas equações literais (Figura 28).

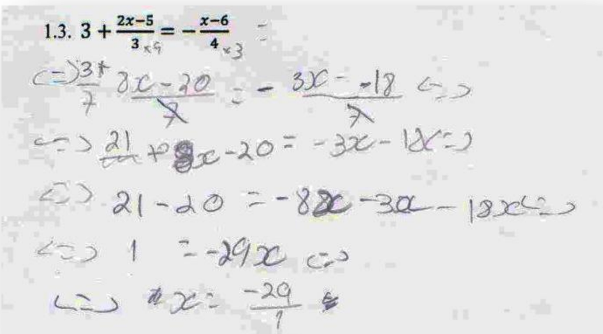


Figura 27 – Resolução do Alfredo à questão 1.3 da Tarefa 1

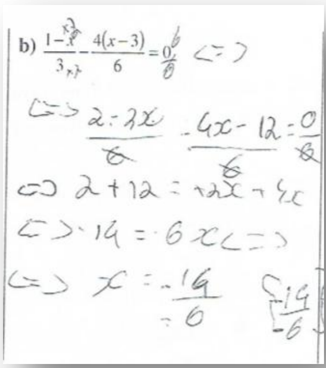


Figura 28 – Resolução do Alfredo à questão 1 do Teste

O Guilherme, ao desembaraçar-se de denominadores nas equações literais, não o faz corretamente, "cortando" os denominadores sem que todos os termos da equação estejam com o mesmo denominador, tal como se verifica na figura seguinte:

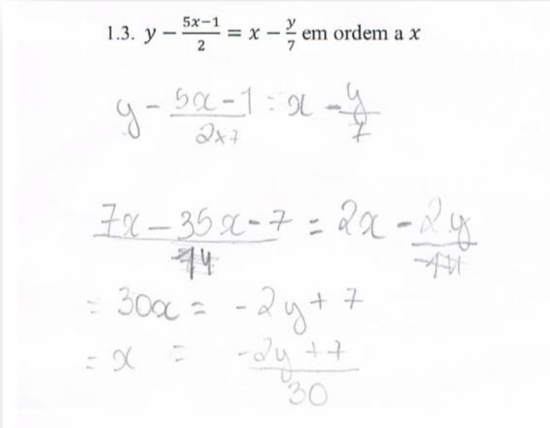


Figura 29 – Resolução do Guilherme à questão 6.5 da Tarefa 2

No entanto, o aluno aplica sem qualquer hesitação o princípio na resolução de equações lineares, reduzindo todos os termos ao mesmo denominador e só depois desse passo é que se desembaraça deles (Figura 30).

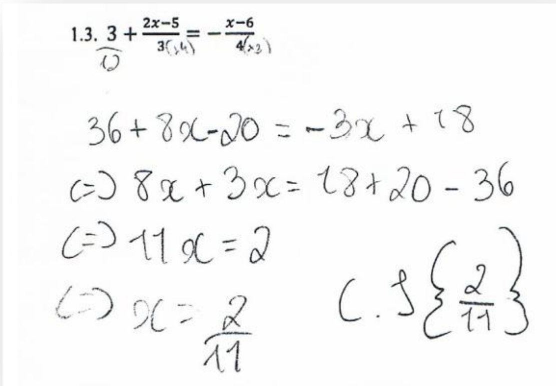


Figura 30 – Resolução do Guilherme à questão 1.3 da Tarefa 1

Em relação à passagem de um fator numérico de um membro para outro da equação com inversão, o aluno aplica corretamente o princípio, tanto nas equações literais, como nas lineares, enunciando a regra prática ainda durante a entrevista:

> **Guilherme**: Aqui estava a multiplicar, então vai passar para o outro lado a dividir…

Tal como nos princípios anteriores, a Sara aplica este princípio corretamente na resolução de equações literais (Figura 31).

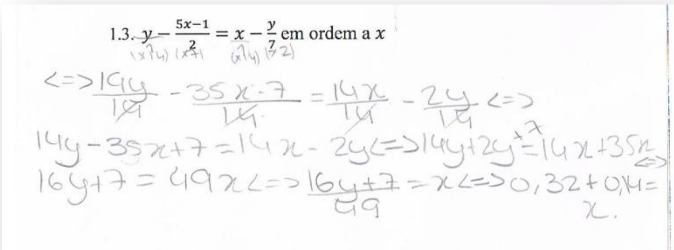


Figura 31 – Resolução da Sara à questão 6.5 da Tarefa 2

Na resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita, a Sara também tem um desempenho quase exemplar, uma vez que aplica corretamente o princípio mas, por vezes, comete o erro de passar o fator numérico que estava a multiplicar, a dividir, mas com o sinal trocado, tal como sugere a figura seguinte.

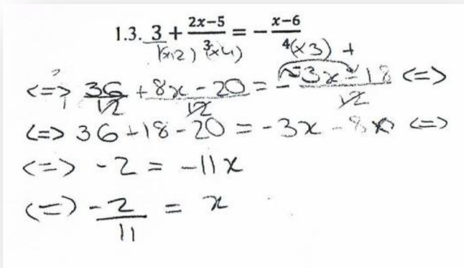


Figura 32 – Resolução da Sara à questão 1.3 da Tarefa 1

Quando se analisam as resoluções da turma em geral, os alunos têm ainda algumas dificuldades em desembaraçar as equações de denominadores, principalmente quando um dos membros tem termos com e sem denominadores, tanto nas equações literais, como nas lineares. Existem alguns alunos que se desembaraçam somente dos denominadores dos termos que já tinham denominadores inicialmente, outros reduzem todos os termos ao mesmo denominador, mas não afetam o numerador da fração (Figura 33) e existem, ainda, outros que reduzem ao mesmo denominadores somente os termos numéricos (Figura 34).

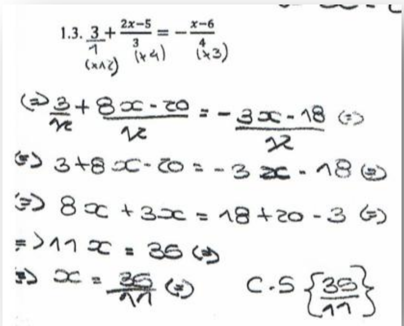


Figura 33 – Resolução de um aluno à questão 1.3 da Tarefa 1

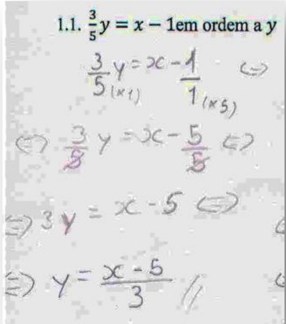


Figura 34 – Resolução de um aluno à questão 6.3 da Tarefa 2

Para além destes erros, existem alunos que cometem o erro de colocar um denominador debaixo da parte literal de um termo quando o seu coeficiente já tem denominador (Figura 35).

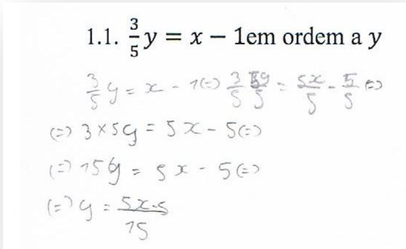


Figura 35 – Resolução de um aluno à questão 6.3 da Tarefa 2

Ainda neste princípio, existe um aluno que, com as equações literais, antes de se desembaraçar dos denominadores, passa termos do numerador da fração para o outro membro, como se verifica na figura seguinte.

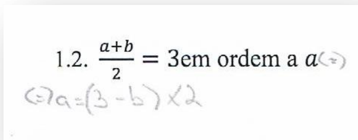


Figura 36 – Resolução de um aluno à questão 6.2 da Tarefa 2

Em relação à passagem do fator numérico com inversão, a turma no geral realiza esta transformação corretamente, à exceção de um pequeno grupo de alunos que ao passar o fator numérico por inversão, apresentam o inverso do valor que estaria correto, ou por vezes o simétrico do inverso (Figura 37).

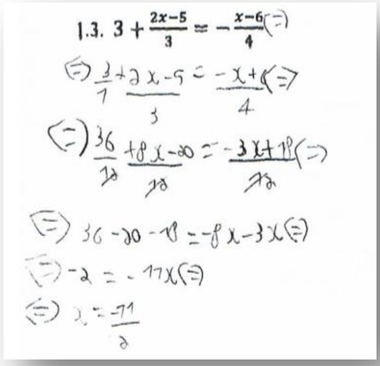


Figura 37 – Resolução de um aluno à questão 1.3 da Tarefa 1

Escrever em ordem a uma das incógnitas

Destaco o processo de escrever uma equação em ordem a uma das incógnitas dos princípios de equivalência, uma vez que é um passo muito importante e novo na resolução das equações literais. A maioria dos alunos refere, tal como vemos nas transcrições seguintes, que escrever em ordem a uma das incógnitas é isolar uma das variáveis.

Professor: O que te pedia esta alínea?
Sara: Para resolver a equação em ordem a t, ou seja, para isolarmos o t.

Alfredo: "Resolve a equação apresentada em ordem a t", que era para o isolar o t…
Professor: Como se isola uma incógnita?
Alfredo: Tira-se a letra do pé das outras. Ou põe-se num membro diferente, pronto.

O Alfredo isola corretamente o termo com a incógnita pretendida, independentemente de ter uma equação com uma única variável ou com duas variáveis. Ao longo da entrevista, este foi claro na importância de isolar a incógnita, tentando explicar os passos para este processo na resolução da alínea c da primeira questão em que se pedia para escrever em ordem a t, a equação $v = -300t + 2100$.

Professor: E como é que isolas o t? Passo a passo. O que tens de fazer primeiro?
Alfredo: Separar o 300 do t.
Professor: É a primeira coisa que fazes?
Alfredo: Mudar o t de membro.
Professor: Como é que se isola uma incógnita?

Alfredo: Tira-se a letra do pé das outras. Ou põe-se num membro diferente, pronto. Então era pôr $t = \frac{v+2100}{-300}$, que é para isolar o t.
Professor: Como é que esse 2100 ficou no mesmo membro que o v?
Alfredo: Para isolar o t, tinha que ficar o t sozinho, sem nenhuma letra ao pé.
Professor: Então o que fizeste?
Alfredo: Então passei o t para um lado. Tirei o 300…
Professor: Antes do 300.
Alfredo: Passei o t para um lado e o resto tudo para o outro. E depois só podia ficar o t. Para ficar o t, o 300 para passar para o outro membro, tinha que ser a dividir. Então ficou $\frac{v+2100}{-300}$.
Professor: Então puseste o v e o 2100 para o mesmo membro. E depois o -300 a dividir. E já está o t isolado?
Alfredo: Sim.

Guilherme efetua corretamente o processo de isolar uma incógnita aquando das equações lineares, contudo perante a equação literal presente na entrevista, ele perde a noção do que significa isolar e dos próprios princípios de equivalência (Figura 38), não conseguindo perceber o seu erro nem quando explica a sua resolução durante a entrevista.

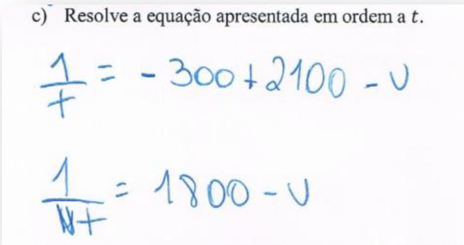


Figura 38 – Resolução do Guilherme
à questão 1.c da Tarefa 6

Professor: Na alínea c pedia-te para resolver a equação em ordem a t. O que é resolver em ordem a t?
Guilherme: Isolar a incógnita t.
Professor: E o que tens de fazer para isolar a incógnita t?
Guilherme: O t estava a multiplicar no segundo membro, mudei para o primeiro membro a dividir. Depois peguei no v, que era mais e passei para o segundo membro como $-v$. Então ficou $1/_t$ e depois fiz as contas do segundo membro.
Professor: E isolaste o t? O t ficou sozinho?
Guilherme: Ficou.
Professor: $1/_t$? Isso é o t ficar sozinho?

Guilherme: Há outra forma? Não vejo outra forma. Porque se estava a multiplicar, tem que estar a dividir e se fosse só t não estaria a dividir.
Professor: O que farias se aqui estivesse um 0 no lugar do v?
Guilherme: Ficava ${}^{0}/_{t}$.
Professor: É isso que fazes nas equações? Como resolvias a equação $0 = -300t + 2100$?
Guilherme: Aqui estava a multiplicar, então vai passar a dividir e vai ficar ${}^{0}/_{t}$ que é 0.

A Sara mostra ser perentória na ideia que ela tem de isolar uma incógnita:

Professor: O que te pedia a alínea c?
Sara: Para resolver a equação em ordem a t, ou seja, para isolarmos o t.
Professor: E o que fizeste?
Sara: A partir da equação eu escrevi: $v - 2100 = -300t$ e depois coloquei $\frac{v-2100}{-300} = t$.

E, apesar de se enganar algumas vezes na incógnita a isolar, a Sara procede eficazmente quando procura isolar uma determinada incógnita.

Na turma, existem alguns alunos que consideram que a equação deve ter apenas uma única solução e uma única incógnita, acabando por desaparecer com uma das incógnitas durante o processo de resolução (Figura 39).

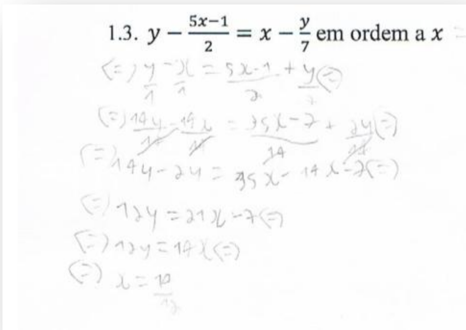


Figura 39 – Resolução de um aluno à questão 6.5 da Tarefa 2

Alguns alunos, quando lhes é pedido para escreverem em ordem a uma das incógnitas, escolhem um dos termos em que se encontra a incógnita pretendida e isolam apenas esse termo, sem que antes somem termos com a mesma parte literal, tal como se verifica na figura seguinte.

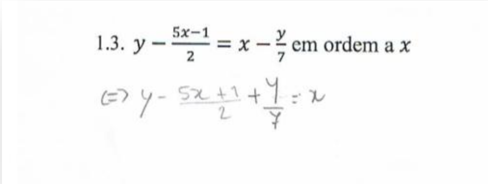


Figura 40 – Resolução de um aluno à questão 6.5 da Tarefa 2

Para além disto, existe alguns alunos que num primeiro momento de concretização deste processo perdem por completo noção dos princípios de equivalência e começam a tentar isolar a incógnita sem respeitar qualquer regra de transformação de equações equivalentes (Figura 41).

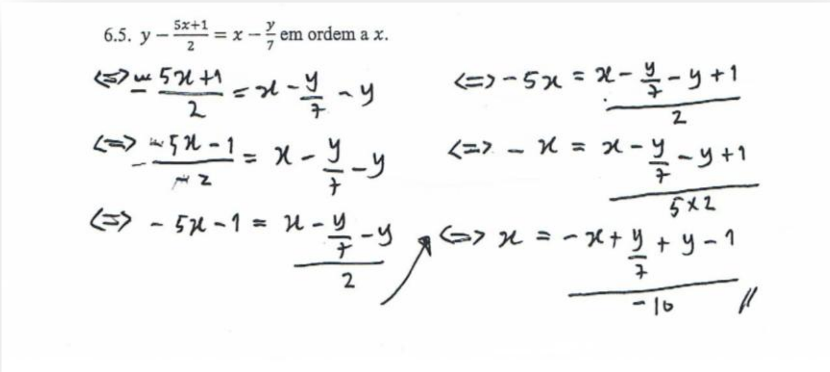


Figura 41 – Resolução do aluno X à questão 6.5 da Tarefa 2

No entanto, este mesmo aluno quando termina a sua resolução apercebe-se dos erros cometidos e reinicia uma nova resolução desta vez com a aplicação correta dos princípios de equivalência (Figura 42).

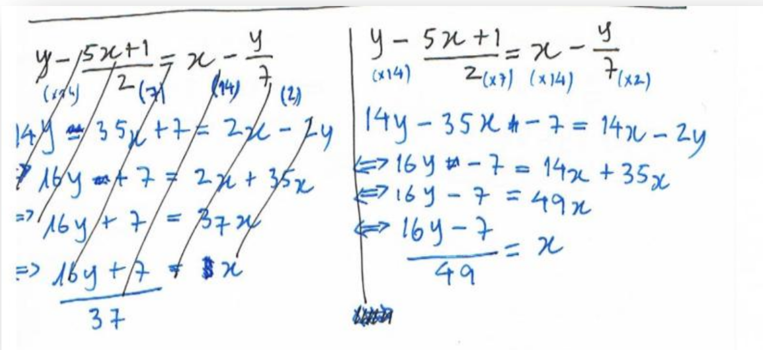


Figura 42 – Resolução do aluno X à questão 6.5 da Tarefa 2

Sentido de Símbolo e de Variável

Indo ao encontro de duas das questões deste estudo, procuro analisar que sentido de símbolo e de variável os alunos revelam no trabalho com equações literais e expressões algébricas. Deste modo, irei analisar algumas intervenções e tarefas dos três alunos entrevistados e da turma em geral na procura de evidências do sentido de símbolo, tendo em conta o quadro referência apresentado em Grossmann, Gonçalves e Ponte (2009), incidindo apenas nas categorias de expressões algébricas e equações.

Equações literais

Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos

O Alfredo, durante a entrevista, na resolução da questão 1, dá evidências de compreender o significado de alguns símbolos utilizados (Linha 2), no entanto tem alguma dificuldade em expressar-se quanto ao significado de outros (Linhas 9 e11):

1. **Professor:** O que é o t?
2. **Alfredo:** É os anos após a compra do computador.
3. (…)
4. **Professor:** Então que representa o v?
5. **Alfredo:** O valor do computador.
6. **Professor:** O valor computador… quando?
7. **Alfredo:** Antes da compra.
8. **Professor:** Então se o v é sempre o valor do computador na hora da compra, é sempre o mesmo?
9. **Alfredo:** Sim. Na hora da compra, mas vai desvalorizando com o tempo.
10. (…)
11. **Alfredo:** É o preço total do computador depois da compra. Com o decorrer dos anos, desvalorizou.

Este aluno, ao longo da entrevista sobre esta questão, prevê os resultados no sentindo em que compreende a relação entre as variáveis e reconhece que existe uma relação linear entre estas:

Professor: Qual é a relação que tens entre o valor e o tempo?
Alfredo: O valor do computador diminui com o tempo.
Professor: Tens mesmo uma expressão para essa relação?
Alfredo: Sim. $v = -300t + 2100$.

No caso do Guilherme, este faz uma análise inicial dos símbolos, não se limitando a ler a equação presente no enunciado, mas a enunciá-la à sua maneira:

> **Guilherme:** O v era o valor do computador, o t é os anos que vão tirando dinheiro após a sua compra.
> **Professor:** Portanto tens uma expressão que os relaciona. Que expressão é essa?
> **Guilherme:** O valor do computador é igual a –300 euros vezes o tempo que vai passando, mais 2100 que é o preço do computador.

O Guilherme interiorizou a informação toda do enunciado, referindo que o preço do computador vai diminuindo à medida que o tempo passa. Para além disso, o aluno refere ainda o significado do termo $-300t$:

> **Guilherme:** Eu sei que o $-300t$ é o preço que vai tirando à medida que o tempo passa.

No que se refere à Sara, esta, numa análise inicial, compreende que a equação estabelece uma relação linear entre o preço do computador e o tempo decorrido da sua compra.

> **Sara:** Fala que o valor de um computador ia diminuindo à medida que os anos passavam. Na alínea a) pedia para calcular o valor do computador quando t=0 ou seja, que tinham passado 0 anos.

A turma começa imediatamente a resolver as questões sobre equações literais sem analisar primeiro os símbolos e a equação em si e depois acabam por surgir algumas ideias erradas para a aplicação das fórmulas.

> **Aluno em Aula:** Isto é os Fahrenheit $\frac{F-32}{9}$ e isto é os Celsius $\frac{C}{5}$, mas faço C está para 5 como $F-32$ está para 9 e onde ponho o 100?

<u>*Manipular simbolicamente utilizando os processos adequados*</u>

Alfredo tem ainda algumas dificuldades na aplicação dos princípios de equivalência e no ato de isolar uma variável. A maior parte das vezes deve-se ao facto dele apresentar somente o resultado final e realizar os passos intermédios de cabeça (Figura 43).

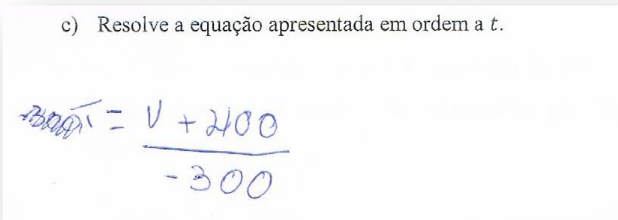
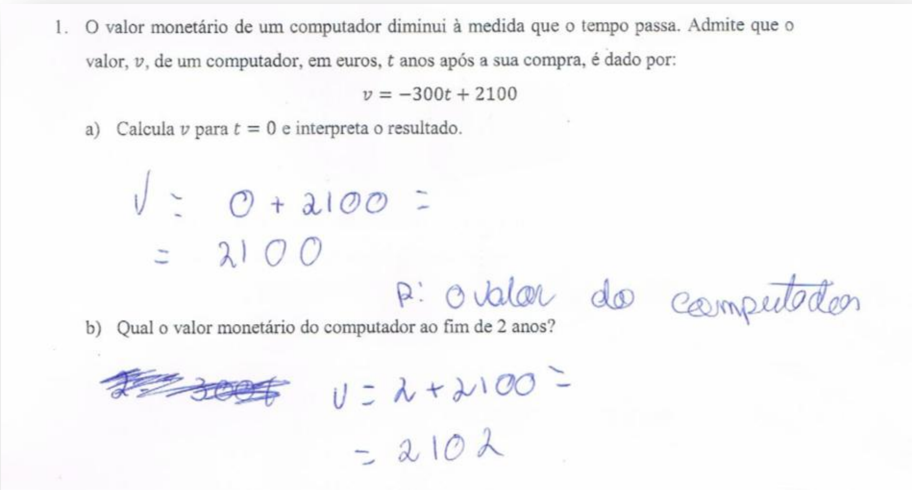


Figura 43 – Resolução do Alfredo à questão 1.c da Tarefa 6

As duas primeiras alíneas da entrevista pediam o cálculo do valor da variável t, contudo este pedido vinha explicito de duas formas distintas – “$t = 0$” ou “ao fim de dois anos” – para analisar se esta diferença vinha influenciar as respostas dos alunos.

O Alfredo dá a entender que percebeu o que é pedido e que aplicou corretamente o princípio substituindo t por 0. No entanto, quando passa para a alínea em que o t é diferente de zero, constatei que este faz a substituição de forma incorreta pois substitui -300t por 2 em vez de substituir o t (Figura 44). Durante a entrevista, Alfredo mantém o erro:

> **Professor:** O que fizeste?
> **Alfredo:** Passei o t para 0. Em vez de estar –300t, estava 0. Ficou 0+2100 que é igual a 2100**.**
> (…)
> **Alfredo:** “Qual o valor monetário do computador ao fim de 2 anos?” Se no primeiro era 0, agora era alterar o 0 para 2. Pelo que o valor era igual a 2+2100.
> **Professor:** E estás a dizer que tens que fazer como?
> **Alfredo:** Alterar o -300t por 2.
> **Professor:** Porquê?
> **Alfredo:** Porque me pedem o valor ao fim de dois anos.
> **Professor:** E porque é que alteras o 300t?
> **Alfredo:** Porque o 300 está relacionado com o t.


1. O valor monetário de um computador diminui à medida que o tempo passa. Admite que o valor, v, de um computador, em euros, t anos após a sua compra, é dado por:

$$v = -300t + 2100$$

a) Calcula v para $t = 0$ e interpreta o resultado.

V = 0 + 2100 =
= 2100
R: O valor do computador

b) Qual o valor monetário do computador ao fim de 2 anos?

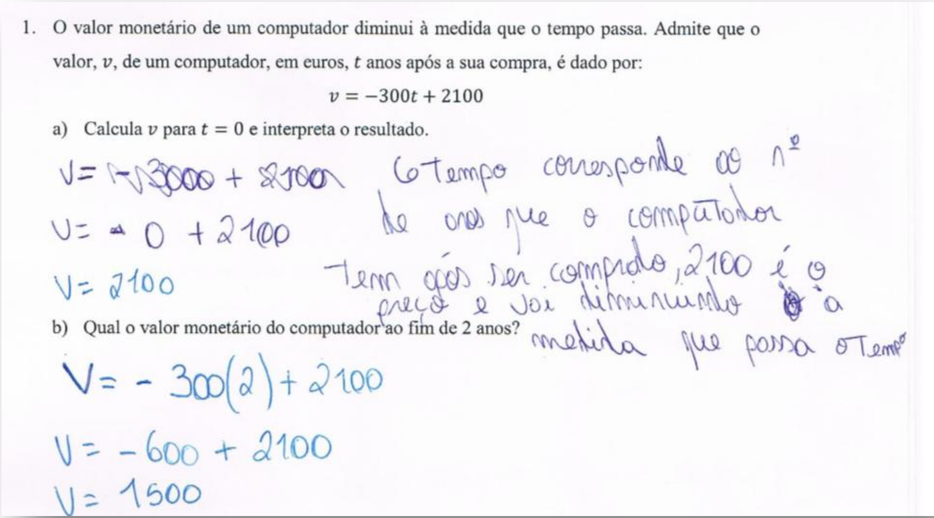
V = 2 + 2100 =
= 2102

Figura 44 – Resolução do Alfredo às questões 1.a e 1.b da Tarefa 6

Na substituição das variáveis por valores concretos, o Alfredo tem algumas dificuldades como se constata mais à frente na entrevista quando lhe é dado um valor de v e ele quer substituir o valor inicial do computador, 2100, por esse valor.

> **Alfredo:** Eles querem saber que, sendo o preço do computador 525, quanto tempo decorreu desde a sua compra. Alterando o valor 2100 para 525 ficava v= –300…

Para o Guilherme, a situação é diferente pois a substituição por um valor numérico nas duas primeiras alíneas é feita corretamente. Na resolução da primeira alínea, o Guilherme inicialmente tinha feito confusão na representação posicional da variável, no entanto riscou esta resolução e apresentou a versão correta (Figura 45).


1. O valor monetário de um computador diminui à medida que o tempo passa. Admite que o valor, v, de um computador, em euros, t anos após a sua compra, é dado por:

$$v = -300t + 2100$$

a) Calcula v para $t = 0$ e interpreta o resultado.

~~V= -3000 + 2100~~
V= 0 + 2100
V= 2100

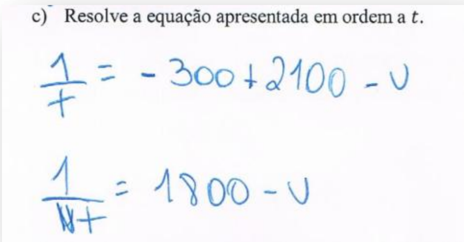
O tempo corresponde ao nº de anos que o computador tem após ser comprado, 2100 é o preço e vai diminuindo à medida que passa o tempo

b) Qual o valor monetário do computador ao fim de 2 anos?

V= - 300(2) + 2100
V= - 600 + 2100
V= 1500

Figura 45 – Resolução do Guilherme às questões 1.a e 1.b da Tarefa 6

Tal como foi alvo de análise no subcapítulo dos processos de resolução, o Guilherme manipula incorretamente os símbolos na resolução de equações literais quando lhe é pedido que resolva uma equação em ordem a uma das variáveis (Figura 46).


c) Resolve a equação apresentada em ordem a t.

$$\frac{1}{t} = -300 + 2100 - v$$

$$\frac{1}{t} = 1800 - v$$

Figura 46 – Resolução do Guilherme à questão 1.c da Tarefa 6

A Sara aplica corretamente, salvo algumas distrações, os procedimentos de resolução de equações tal como ilustra a figura seguinte.

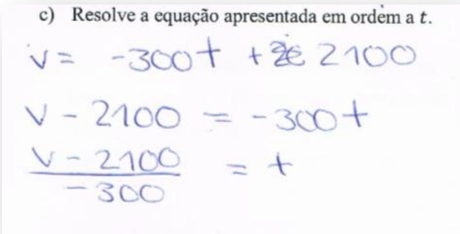


Figura 47 – Resolução da Sara à
questão 1.c da Tarefa 6

Contudo, quando se pede à Sara para substituir uma das variáveis, esta não consegue cumprir este objetivo de uma forma tão eficaz como quando resolve a equação em ordem a uma das variáveis. Na primeira alínea, a Sara substitui o valor numérico da variável t no coeficiente da variável e como esta toma o valor 0, o resultado final é o mesmo (Figura 48).

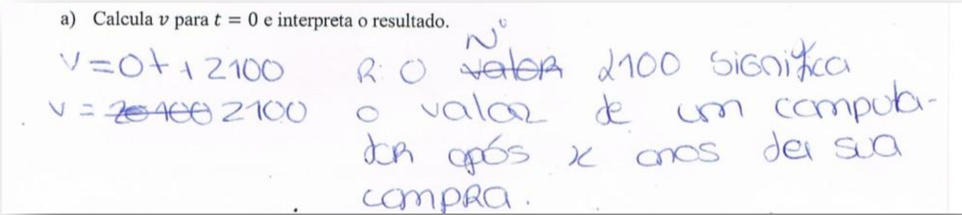


Figura 48 – Resolução da Sara à questão 1.a da Tarefa 6

Sara: Eu escrevi $v = 0t + 2100$ e como $0t$ é como se fosse nada fiquei com o 2100.
Professor: Mas tu queres calcular o valor de v quando…
Sara: Quando $t = 0$.

Quando passa para a alínea b, a Sara reparou que, em vez de substituir o coeficiente como tinha feito em cima e achava estar bem, substituiu todo o monómio que tinha como parte literal o t, e imediatamente começou a modificar a sua resolução para algo semelhante à alínea a (Figura 49).

Sara: O 2 é quanto tempo passou. É o t.
Professor: O que tens que fazer ao t?
Sara: Multiplicá-lo por 2?
Professor: Multiplicar? Mas assim continuas a ter duas incógnitas.
Sara: Não, porque se eu multiplicar o –300t por 2, ficar –600t.
Professor: Então e o v?
Sara: Sim…
Professor: Se o t representa o tempo, o 2 é o quê?
Sara: É o tempo. Então, substitui-se.
Professor: Vamos ver então se assim já funciona.

Sara: (a aluna resolve mais uma vez o exercício) Substituí o –300t por menos –2t.

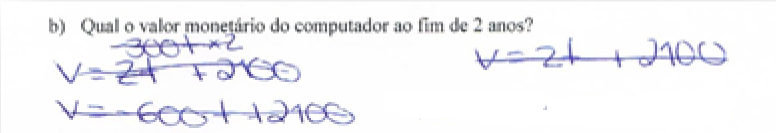


Figura 49 – Resolução da Sara à questão 1.b da Tarefa 6

Depois de avançar um pouco na entrevista e da Sara substituir corretamente a variável em outra equação, voltou-se a esta alínea, mas a Sara continuou com dificuldades em perceber o que estava incorreto, por isso voltou à sua resolução inicial. Somente com algum questionamento, esta aluna conseguiu resolver corretamente esta alínea (Figura 50).

Professor: O que fizeste ao 525?
Sara: Substituí o v por 525.
Professor: Vamos fazer uma pausa então. Substituíste o v por 525. Estão a te dar valor para variável v. Agora volto a perguntar-te: queres mudar alguma coisa na alínea b?
Sara: Temos de substituir o $-300t$ por 2.
Professor: Estás a dizer que temos de substituir o $-300t$ por 2. Porquê?
Sara: Não. Só se ficar $-300 \times t \times 2$.
Professor: E porque é que fica lá o t e acrescentas o 2? Se estás a pôr lá o 2, sem tirar nada, não estás a alterar a equação?
Sara: Acho que a estou a mudar. Então se na alínea d, só substituímos o v, aqui só substituímos o t por 2. Em vez de ficar vezes t fica só vezes 2.

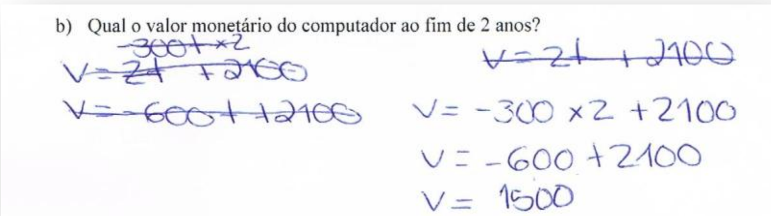


Figura 50 – Resolução da Sara à questão 1.b da Tarefa 6

Na alínea d, a Sara já faz a substituição corretamente mas como o coeficiente da variável a substituir é 1 não se pode concluir sobre a compreensão do ato de substituir por parte da Sara.

Em relação à turma no geral, esta tem algumas dificuldades em aplicar corretamente os procedimentos de resolução de equações, tanto literais como lineares, tal como se analisou no subcapítulo anterior. A substituição de variáveis pelos valores numéricos pedidos correu bem, talvez por estes terem feito somente algo do género em aula na primeira aula de equações literais enquanto os três alunos referidos acima foram alvo de uma entrevista extra.

Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado

O Alfredo, apesar de ter bastantes dificuldades no processo de substituição de variáveis por valores em concreto, como consegue estabelecer relação entre as variáveis, ao realizar a entrevista foi encontrando facilmente os erros pois os seus resultados não iam ao encontro do contexto do problema.

Imediatamente após ter calculado o v para t=2, o Alfredo não concorda com a sua resolução pois sabe que o valor do computador não pode ser superior ao valor inicial. No entanto tem algumas dificuldades em corrigir o seu erro:

> **Alfredo:** O computador passado dois anos só aumentou… 2€. E o preço devia ter diminuído! O valor não pode aumentar. Se vai desvalorizar…

Quanto ultrapassa esta dificuldade (Figura 51), só fica satisfeito com o resultado quando este satisfaz a relação entre as variáveis presentes na questão:

> **Alfredo:** Eu primeiro quis substituir o 300. Mas agora quero fazer o 300… $-300 \times 2t$. Não, t não. Que ao t corresponde o 2, porque o 2 é a variável do tempo. Então 2 + 2100. Isto é igual a $-600 + 2100$, que é igual a 1500.
> **Professor:** E com esse valor, já concordas?
> **Alfredo:** Sim. Desvalorizou à medida que o tempo passou.

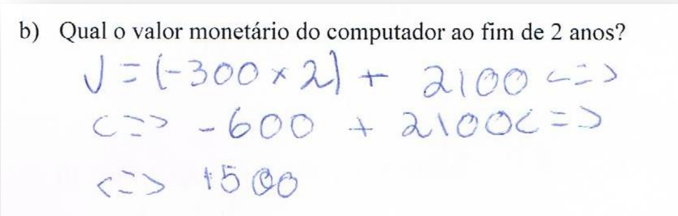


Figura 51 – Resolução do Alfredo à questão 1.b da Tarefa 6

Do mesmo modo, o Alfredo apercebeu-se do seu erro na manipulação da equação necessária na alínea d quando obteve um valor negativo para o tempo:

> **Alfredo:** O valor monetário desceu, diminuiu.
> **Professor:** E o tempo?
> **Alfredo:** Aumentou. Então ali na conta há alguma coisa que está mal! Porque tem que ser mais.

Ao escrever uma equação em ordem a uma das incógnitas, o Guilherme comete algumas falhas na manipulação algébrica, como foi analisado no ponto anterior, sem se questionar sobre a validade das suas opções perante os resultados obtidos, os quais não faziam qualquer sentido no contexto da questão. Contudo, em relação ao processo de substituição, este já é bem-sucedido, pois valida os resultados obtidos tendo em conta a relação entre o valor do computador e os anos após a sua compra.

Ainda na entrevista, o Guilherme resolveu a alínea d da primeira questão sem recorrer à equação apresentada e aos métodos de resolução de equações. Este faz passo a passo de acordo com a sua interpretação da questão, mostrando ter compreendido por completo o enunciado.

> **Guilherme:** O preço atual do computador é 525€ e tinha que saber quanto tempo decorreu desde a sua compra. Então fiz o preço do computador menos o preço atual.
> **Professor:** O preço do computador quando?
> **Guilherme:** 2100.
> **Professor:** Quando?
> **Guilherme:** Quando foi comprado!
> **Professor:** Menos…
> **Guilherme:** Menos 525, que é o preço do computador, que deu 1575. Dividi por 300, que meu deu os anos que passaram.
> **Professor:** E quantos anos passaram?
> **Guilherme:** Cinco anos e três meses.

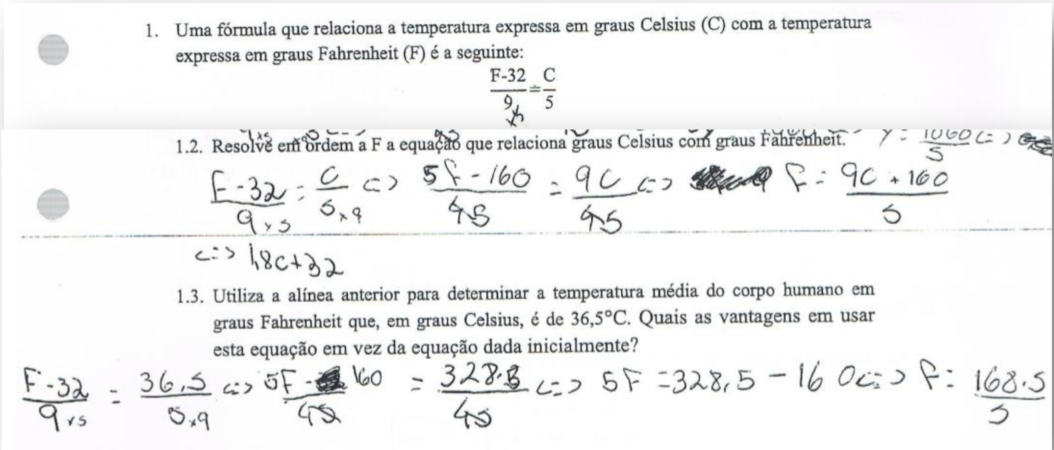
A Sara, como se analisou no tópico anterior, teve bastantes dificuldades na substituição de valores numéricos nas variáveis, não compreendendo a substituição feita nem se questionando se o valor obtido fazia, ou não, sentido no contexto do enunciado. Somente depois de resolvido corretamente é que a Sara conseguiu justificar o porquê de estar mal e referir o facto de nem fazer sentido no contexto.

> **Professor:** Já faz sentido no contexto do problema?
> **Sara:** Sim, porque à medida que o tempo passa, o preço reduz.
> **Professor:** O que estavas a fazer mal?
> **Sara:** Em vez de estar a multiplicar o -300×2, estava logo a fazer o $2 + 2100$. Mas assim o preço ficava mais alto e tudo.

Os restantes alunos da turma não têm por hábito verificar se os resultados obtidos fazem sentido no contexto do problema, acabando muitas vezes por fazer simplesmente manipulações algébricas.

<u>*Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais*</u>

O Alfredo, antes da entrevista, não recorria às equações escritas em ordem a uma das variáveis para substituir a outra variável por um valor. Recorria sempre à equação literal inicial (Figura 52).



1. Uma fórmula que relaciona a temperatura expressa em graus Celsius (C) com a temperatura expressa em graus Fahrenheit (F) é a seguinte:

$$\frac{F-32}{9} = \frac{C}{5}$$

1.2. Resolve em ordem a F a equação que relaciona graus Celsius com graus Fahrenheit.

$\frac{F-32}{9_{\times 5}} = \frac{C}{5_{\times 9}} \Leftrightarrow \frac{5F-160}{45} = \frac{9C}{45} \Leftrightarrow F = \frac{9C+160}{5}$

$\Leftrightarrow 1{,}8C+32$

1.3. Utiliza a alínea anterior para determinar a temperatura média do corpo humano em graus Fahrenheit que, em graus Celsius, é de 36,5°C. Quais as vantagens em usar esta equação em vez da equação dada inicialmente?

$\frac{F-32}{9_{\times 5}} = \frac{36{,}5}{5_{\times 9}} \Leftrightarrow \frac{5F-160}{45} = \frac{328{,}5}{45} \Leftrightarrow 5F = 328{,}5-160 \Leftrightarrow F = \frac{168{,}5}{5}$

Figura 52 – Resolução do Alfredo à questão 1.3 da Tarefa 2

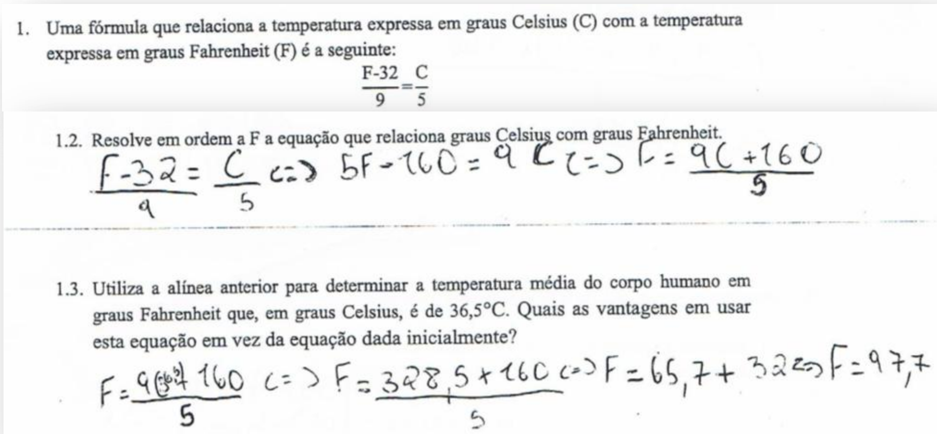
No entanto, na tarefa respeitante à entrevista, o Alfredo toma a equação inicial e a equação escrita em ordem a t como sendo duas equações equivalentes e já utiliza a segunda para substituir o v por 525.

Ainda, na alínea d da primeira questão, depois de se aperceber que cometeu algum erro para o tempo ter dado negativo, ele consegue arranjar uma nova equação não equivalente à obtida que funciona e que é equivalente à inicial mas não consegue justificar o porquê de aquela ser a correta e não a outra, apesar de ter a certeza disso:

> **Alfredo:** Aqui diz que passaram 5… alterando os sinais, em vez de ser $t = 525 + 2100$, ficando $t = 525 - 2100$ aqui dava 5,25 em vez de dar 8,75.
> **Professor:** Então, mas então aqui foste à expressão e alteraste um menos. Em que expressão é que alteraste ali um menos?
> **Alfredo:** Em vez de ser $t = 525 + 2100$…
> **Professor:** Mas onde é que foste buscar essa expressão?

Alfredo: À inicial que era $v = -300t + 2100$… Não, tinha ido buscar a c, que era para resolver a equação em ordem a t. Se eu queria saber o tempo, tinha que isolar o t.
Professor: E o que é que alteraste nessa equação?
Alfredo: Alterei que em vez de ser $v + 2100$ era $v - 2100$.
Professor: E podes fazer isso assim se te apetecer, nas equações?
Alfredo: É que… assim está mais. E para a d tem que estar um menos.
Professor: Não consegues perceber de onde vem esse menos?
Alfredo: Não.

Durante as aulas, o Guilherme recorreu às equações escritas em ordem a uma das incógnitas quando estas lhe facilitavam os cálculos e rentabilizam o tempo de resolução (Figura 53).



1. Uma fórmula que relaciona a temperatura expressa em graus Celsius (C) com a temperatura expressa em graus Fahrenheit (F) é a seguinte:

$$\frac{F-32}{9}=\frac{C}{5}$$

1.2. Resolve em ordem a F a equação que relaciona graus Celsius com graus Fahrenheit.

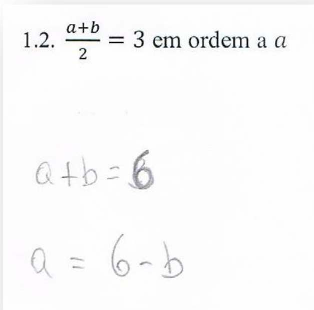
$\frac{F-32}{9}=\frac{C}{5} \Leftrightarrow 5F-160=9C \Leftrightarrow F=\frac{9C+160}{5}$

1.3. Utiliza a alínea anterior para determinar a temperatura média do corpo humano em graus Fahrenheit que, em graus Celsius, é de 36,5°C. Quais as vantagens em usar esta equação em vez da equação dada inicialmente?

$F=\frac{9(36,5)+160}{5} \Leftrightarrow F=\frac{328,5+160}{5} \Leftrightarrow F=65,7+32 \Leftrightarrow F=97,7$

Figura 53 – Resolução do Guilherme à questão 1.3 da Tarefa 2

Este aluno raramente valida as equivalências entre equações, recorrendo ao símbolo de equivalente tal como se verifica no exemplo seguinte.



1.2. $\frac{a+b}{2}=3$ em ordem a a

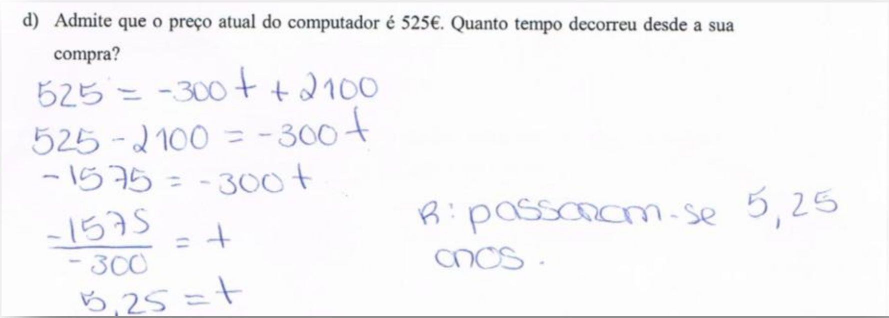
$a+b=6$

$a=6-b$

Figura 54 – Resolução do Guilherme à questão 6.2 da Tarefa 2

De igual forma, a Sara também não valida a equivalência entre equações através do símbolo de equivalente. Na alínea d, apesar de referir que fez o mesmo que na alínea c, esta não recorre à equação de cima para fazer a substituição direta mas sim à equação inicial, substituindo e só depois isolando a variável t (Figura 55).

> **Sara:** Fiz a mesma coisa que na c. Voltei a isolar o t, fazendo 525 – 2100, que dava 1565, depois dividi esse valor por –300, que dava o valor do t, que era 5,25.



d) Admite que o preço atual do computador é 525€. Quanto tempo decorreu desde a sua compra?

$525 = -300t + 2100$

$525 - 2100 = -300t$

$-1575 = -300t$

$\frac{-1575}{-300} = t$

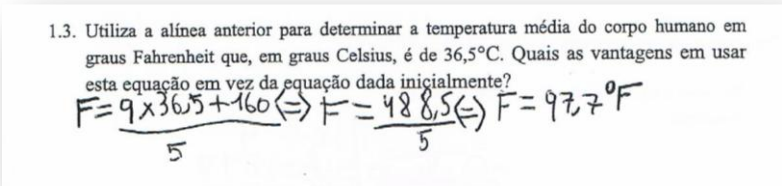
$5,25 = t$

R: passaram-se 5,25 anos.

Figura 55 – Resolução da Sara à questão 1.d da Tarefa 6

A turma, no geral, tem por hábito validar constantemente equações equivalentes e grande parte da turma recorre a equações equivalentes à inicial que já estejam escritas em ordem à variável que lhes interessa e somente aí fazem a substituição necessária para obter um resultado para a outra variável (Figura 56).

> **Aluno em Aula:** Então para isolar o C podemos usar esta $5F - 160 = 9C$, são todas iguais as equações, posso usar esta e não começar com a de cima.



1.3. Utiliza a alínea anterior para determinar a temperatura média do corpo humano em graus Fahrenheit que, em graus Celsius, é de 36,5°C. Quais as vantagens em usar esta equação em vez da equação dada inicialmente?

$F = \frac{9 \times 36,5 + 160}{5} \Leftrightarrow F = \frac{488,5}{5} \Leftrightarrow F = 97,7°F$

Figura 56 – Resolução de um aluno à questão 1.3 da Tarefa 2

<u>Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar</u>

Para o Alfredo, como a variável v, quando $t = 0$, representa o valor do computador antes da compra, quando lhe é solicitado o tempo decorrido para que o valor atual do computador seja de 525, ele confunde este com o valor inicial do computador e substitui num primeiro momento o 2100 por 525. Somente quando é questionado sobre o porquê é que ele se relembra que o v é o valor do computador, t anos após a sua compra.

O Guilherme, ao explicar oralmente o que significa o v quando $t = 0$, é bastante claro e objetivo. No entanto, a sua interpretação por escrito (Figura 57) é um pouco confusa e, até mesmo, distinta da interpretação oral.

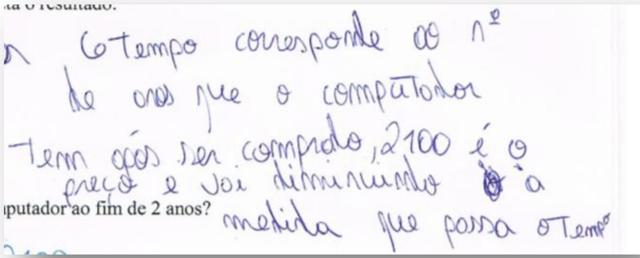


Figura 57 – Resolução do Guilherme à questão 1.a da Tarefa 6

Professor: E esse valor é o quê?
Guilherme: É o valor do computador no momento da compra.

Do mesmo modo, a Sara oralmente consegue-se expressar de forma mais clara do que por escrito, tal como se vê na alínea a da primeira questão onde insere uma nova incógnita x para se conseguir expressar.

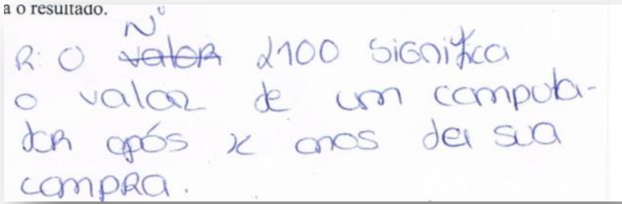
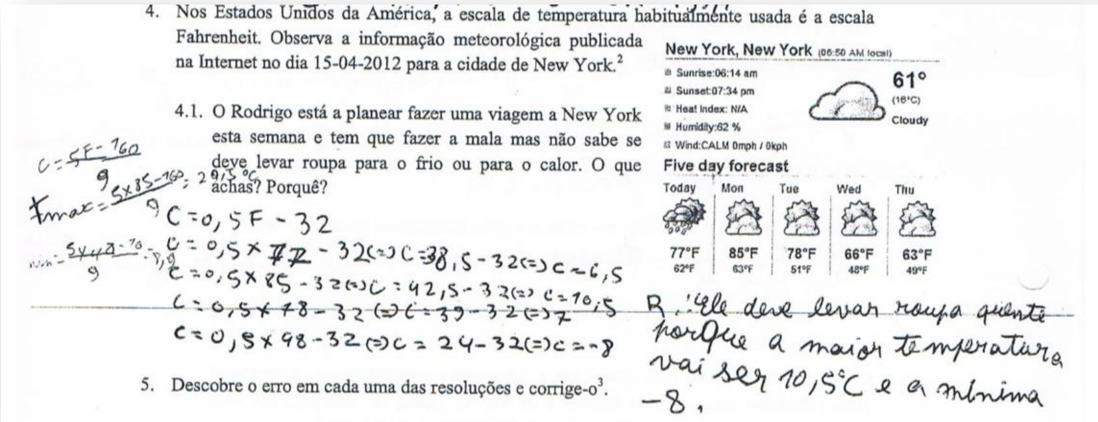


Figura 58 – Resolução da Sara à questão 1.a da Tarefa 6

Existem alguns alunos da turma que perdem a noção do significado das variáveis e do seu contexto, interpretando incorretamente os resultados obtidos e não os relacionando com os dados iniciais do problema. A figura seguinte diz respeito à resolução de um aluno que obtém temperaturas negativas, o que não fazia muito sentido tendo em conta as imagens da meteorologia. Apesar de haver a possibilidade de estarem erradas, o aluno não questionou os seus resultados (Figura 59).


4. Nos Estados Unidos da América, a escala de temperatura habitualmente usada é a escala Fahrenheit. Observa a informação meteorológica publicada na Internet no dia 15-04-2012 para a cidade de New York.[2]

New York, New York (06:50 AM local)
Sunrise:06:14 am
Sunset:07:34 pm
Heat Index: N/A
Humidity:62 %
Wind:CALM 0mph / 0kph
61° (16°C) Cloudy
Five day forecast
Today 77°F 62°F | Mon 85°F 63°F | Tue 78°F 51°F | Wed 66°F 48°F | Thu 63°F 49°F

4.1. O Rodrigo está a planear fazer uma viagem a New York esta semana e tem que fazer a mala mas não sabe se deve levar roupa para o frio ou para o calor. O que achas? Porquê?

C = 0,5F – 32
C = 0,5 × 77 – 32 (=) C = 38,5 – 32 (=) C = 6,5
C = 0,5 × 85 – 32 (=) C = 42,5 – 32 (=) C = 10,5
C = 0,5 × 78 – 32 (=) C = 39 – 32 (=) 7
C = 0,5 × 48 – 32 (=) C = 24 – 32 (=) C = –8

R.: Ele deve levar roupa quente porque a maior temperatura vai ser 10,5°C e a mínima –8.

5. Descobre o erro em cada uma das resoluções e corrige-o[3].

Figura 59 – Resolução de um aluno à questão 4 da Tarefa 2

Expressões algébricas

<u>*Estar familiarizado com os símbolos e o seu significado*</u>

Em relação às expressões algébricas, o Alfredo tem dificuldades em explicar o significado dos símbolos no contexto, apesar de saber trabalhar com eles. Na entrevista, ao resolver a questão 2.b o aluno não consegue explicar o significado de 15d (Figura 60).

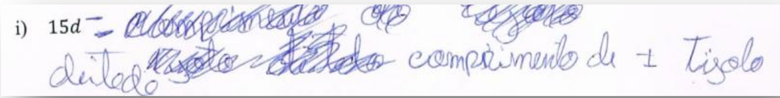

i) 15d – deitado comprimento de 1 tijolo

Figura 60 – Resolução do Alfredo à questão 2.a da Tarefa 6

No entanto, ao longo da entrevista dá evidência de que tem a ideia correta na cabeça, mas não consegue expressá-la. Quando o consegue, acaba sempre por tirar conclusões erradas:

Professor: E o que é que significa o 15d?
Alfredo: É o… o comprimento de um tijolo deitado.
Professor: O 15?
Alfredo: Sim.
Professor: Mas eu estou a perguntar o que é o 15d.
Alfredo: O comprimento de um tijolo d, de deitado.
Professor: De um tijolo deitado?
Alfredo: Sim. O 15d… por exemplo, se nós quiséssemos saber… o muro tinha, 30cm. Se nós quiséssemos saber quantos tijolos deitados eram, fazemos 15x2.
Professor: Então, o 15d, representa o quê?

Alfredo: O comprimento dos tijolos deitados. De um tijolo deitado.
Professor: De um ou dos tijolos deitados?
Alfredo: De um. (…) 15 é o comprimento de… Cada tijolo mede 15. E eu para não estar a escrever 15 mais 15 mais 15, fazia 15 vezes o número de tijolos.
Professor: Então o 15d é o quê?
Alfredo: É o comprimento de um tijolo deitado.
(…)
Alfredo: Dá o número de tijolos deitados. Não, o comprimento dos tijolos deitados que existem no muro.
(…)
Alfredo: É 15 vezes o número de tijolos deitados que há no muro. (…) O comprimento dos tijolos que há no muro. O comprimento dos tijolos deitados.

No entanto, com algumas questões, o Alfredo chega à resposta correta (Figura 61).

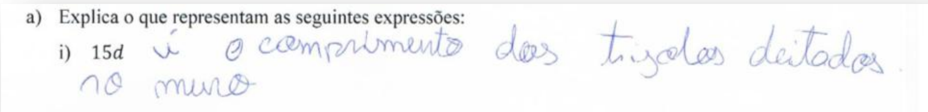

a) Explica o que representam as seguintes expressões:
i) $15d$ é o comprimento dos tijolos deitados no muro

Figura 61 – Segunda resolução do Alfredo à questão 2.a da Tarefa 6

Apesar das dificuldades em explicar o significado de 15d, o Alfredo consegue explicar o que significa a variável d no contexto do problema e refere que a variável a alterar no problema é o d. A variável p, quando surge, já não é alvo de dificuldade:

Alfredo: O 15. O 15 é o comprimento de um tijolo deitado. Depois o d vai ser no muro. Quantos tijolos deitados com 15cm vão existir no muro.
(…)
Professor: E o que é que estás a fazer?
Alfredo: Estou a alterar o d.
Professor: A alterar porquê?
Alfredo: Consoante o número de tijolos.
Professor: Mudas o d. Então o d é o quê?
Alfredo: É o número de tijolos existentes no muro. O número de tijolos deitados que ela vai usar.
(…)
Professor: E o p?
Alfredo: É o número existente tijolos em pé no muro.

No decorrer da entrevista, consegue explicar o significado da expressão $15d$ +6p de uma forma mais rápida que a expressão anterior. No entanto, inicialmente fez confusão com a largura e o comprimento dos tijolos dispostos tanto em pé como deitados e na sua primeira resolução parece ter interpretado a letra d como abreviatura de “deitado” e p “em pé”. (Figura 62).

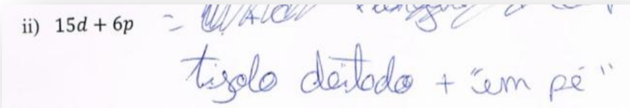


Figura 62 – Resolução do Alfredo à questão 2.a da Tarefa 6

> **Professor:** E o 15d+6p?
> **Alfredo:** É o comprimento dos tijolos deitados, mais a largura dos tijolos em pé.
> (…)
> **Professor:** Então o 15d+6p?
> **Alfredo:** É o comprimento do muro com os tijolos deitados e em pé.

No trabalho com expressões algébricas, o Alfredo tem algumas dificuldades em desligar-se do trabalho com equações e, por isso, na simplificação de expressões algébricas recorre aos procedimentos de resolução de equações como o desembaraçar de denominadores sem mostrar qualquer dúvida de que o pode fazer de igual forma independentemente da estrutura algébrica a trabalhar:

> **Alfredo:** Colocaram os denominadores iguais. Isto depois cortando os denominadores fica $x - 2 - 2x$.
> **Professor:** E podes cortar os denominadores?
> **Alfredo:** Sim, se forem todos iguais.

Ao contrário do Alfredo, o Guilherme consegue explicar o significado de cada uma das expressões presentes na tarefa da entrevista, tendo apenas alguma dificuldade em largar-se de uma linguagem mais matemática para uma linguagem do dia-a-dia. Este, durante a entrevista, apresenta uma resposta mais completa do que durante a resolução, referindo quando se trata do número de tijolos “deitados” e/ou “em pé” (Figura 63).

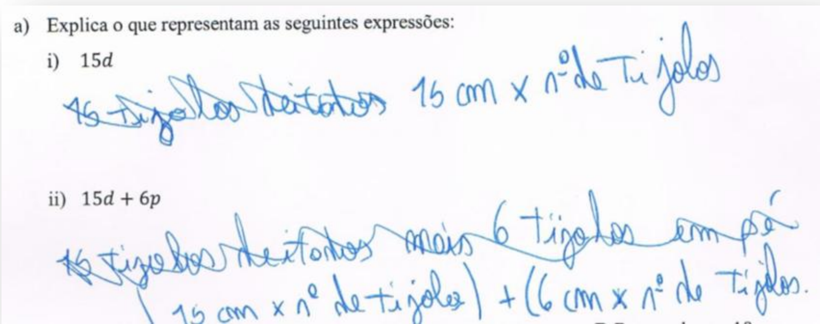


Figura 63 – Resolução do Guilherme à questão 2.a da Tarefa 6

Guilherme: Eu pus que 15d é 15cm vezes o número de tijolos deitados.
Professor: E então se eu te pedisse para me dizeres sem vezes. O que é o 15cm vezes o número de tijolos deitados?
Guilherme: Eu acho que é o comprimento de um tijolo deitado.
Professor: De um só?
Guilherme: Neste caso, não. Aqui o d corresponde à variável: 1, 2, 3…
Professor: Então é de quantos tijolos deitados?
Guilherme: Só um. Não… pode ser um número qualquer de tijolos. Não diz um valor determinado.
Professor: E na ii?
Guilherme: Fiz a mesma coisa que tinha feito aqui, que era 15cm vezes o número de tijolos deitados mais 6cm vezes o número de tijolos em pé.
Professor: E não poderias dizer outra coisa dessa expressão? O que representa essa expressão?
Guilherme: O comprimento do muro.

Tal como o Alfredo, o Guilherme comete o mesmo erro em relação ao desembaraçar de denominadores na simplificação de expressões algébricas, para além de que mostra ter dificuldades na redução de uma expressão ao mesmo denominador (Figura 64).

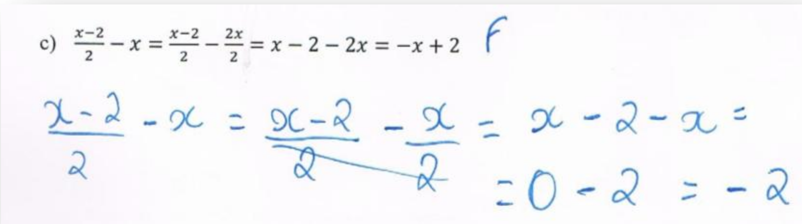


Figura 64 – Resolução do Guilherme à questão 3.c da Tarefa 6

Em relação à Sara, esta também tem alguma dificuldade em expressar o significado atribuído a 15d e, tal como o Alfredo, começa por defender que se trata do comprimento de um tijolo, mas rapidamente passa para o significado correto:

Sara: Eu penso que 15d é o comprimento de cada tijolo.
(…)
Professor: E tu estás a dizer que 15d é uma abreviatura de quê?
Sara: 15 vezes d.
Professor: É o comprimento de um tijolo?
Sara: Deitado. De todos os tijolos deitados.

Em relação ao significado atribuído à expressão 15d+6p, a Sara refere que representa o comprimento do muro ao mesmo tempo que fala em ser a soma do comprimento e da largura dos tijolos. O facto de falar em comprimento do muro pode não representar a compreensão da expressão algébrica, mas sim a sua identificação com a informação fornecida pelo enunciado (Figura 65).

Figura 65 – Resolução da Sara à questão 2.a da Tarefa 6

> **Sara:** $15d + 6p$. Eu escrevi que era o comprimento, somado com a largura dos tijolos. Mas só deitados.
> **Professor:** Então $15d + 6p$ é o quê então?
> **Sara:** É o comprimento do muro.
> **Professor:** Que é obtido?
> **Sara:** Através dos tijolos em pé e dos tijolos deitados.
> **Professor:** E o que é que contribui nos tijolos deitado?
> **Sara:** Nos tijolos deitados 15 centímetros, isto é o seu comprimento. Mas se fosse de pé eram 6 por cada tijolo.

Tal como os alunos anteriores, a Sara tem dificuldades em compreender que a manipulação dos símbolos difere das equações para as expressões (Figura 66).

> **Sara:** (…) cortei o dois porque já estava com o mesmo denominar e fiquei com $x - 2 - 2x$.
> **Professor:** Porque é que podes cortar os dois denominadores?
> **Sara:** Porque são denominadores iguais e já não precisamos de fazer contas com eles.

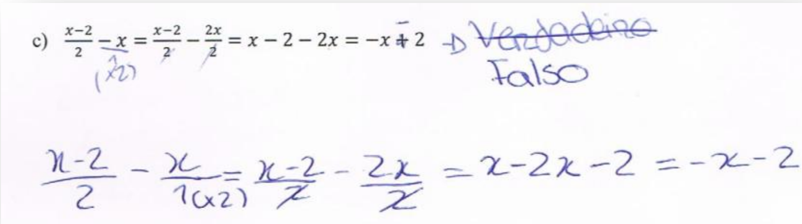
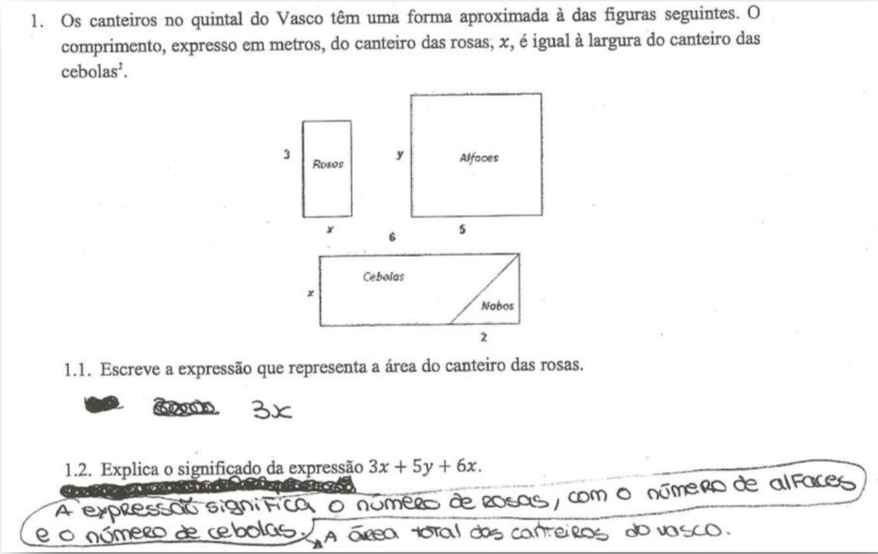


Figura 66 – Resolução da Sara à questão 3.c da Tarefa 6

Em relação à turma, esta na sua maioria conhece os símbolos algébricos e sabe como utilizá-los. No entanto, existe uma grande dificuldade por parte de alguns alunos em dizer o que significa uma determinada expressão algébrica, mesmo quando a variável é definida no enunciado (Figuras 67 e 68).


1. Os canteiros no quintal do Vasco têm uma forma aproximada à das figuras seguintes. O comprimento, expresso em metros, do canteiro das rosas, x, é igual à largura do canteiro das cebolas[1].

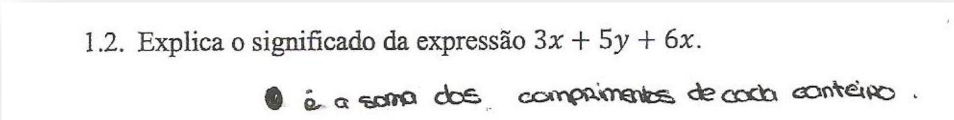
1.1. Escreve a expressão que representa a área do canteiro das rosas.

3x

1.2. Explica o significado da expressão $3x + 5y + 6x$.

A expressão significa o número de rosas, com o número de alfaces e o número de cebolas. A área total dos canteiros do vasco.

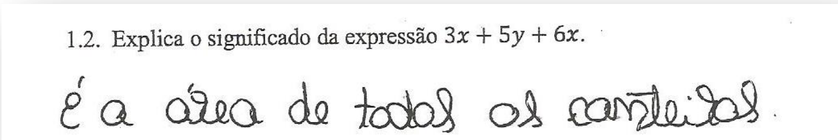
Figura 67 – Resolução de um aluno à questão 1 da Tarefa 3


1.2. Explica o significado da expressão $3x + 5y + 6x$.

é a soma dos comprimentos de cada canteiro.

Figura 68 – Resolução de um aluno à questão 1.2 da Tarefa 3

Ainda nesta questão, apesar de se encontrar estas dificuldades, a maioria da turma consegue exprimir-se relativamente às áreas dos canteiros no quintal do Vasco (Figura 69).

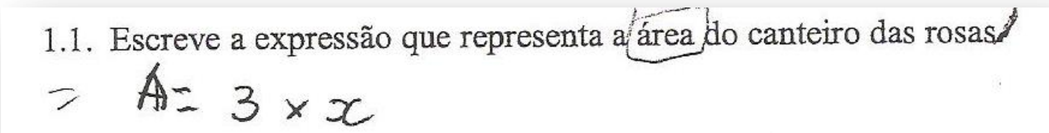

1.2. Explica o significado da expressão $3x + 5y + 6x$.

É a área de todos os canteiros.

Figura 69 – Resolução de um aluno à questão 1.2 da Tarefa 3

<u>*Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente*</u>

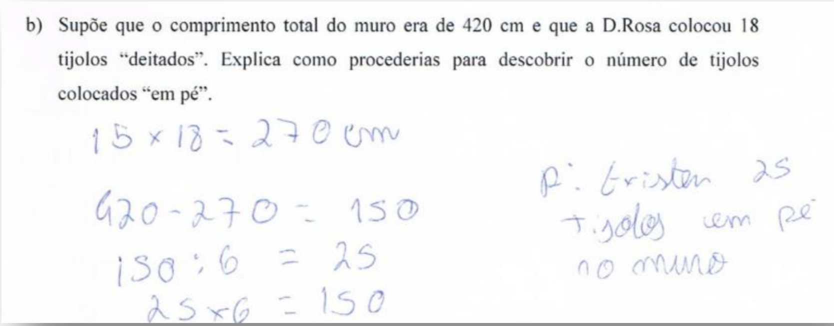
O Alfredo, ao longo das aulas, consegue traduzir facilmente os enunciados para linguagem simbólica (Figura 70).


1.1. Escreve a expressão que representa a área do canteiro das rosas.

$\rightarrow$ $A = 3 \times x$

Figura 70 – Resolução do Alfredo à questão 1.1 da Tarefa 3

Durante a entrevista, este aluno resolve a questão que exigia uma certa tradução para linguagem simbólica sem recorrer a qualquer símbolo. Baseia-se somente na sua interpretação do enunciado, descrevendo por palavras suas como faria a substituição dos valores numéricos sem recorrer a uma expressão algébrica (Figura 71).



b) Supõe que o comprimento total do muro era de 420 cm e que a D.Rosa colocou 18 tijolos "deitados". Explica como procederias para descobrir o número de tijolos colocados "em pé".

15 × 18 = 270 cm

420 - 270 = 150

150 : 6 = 25

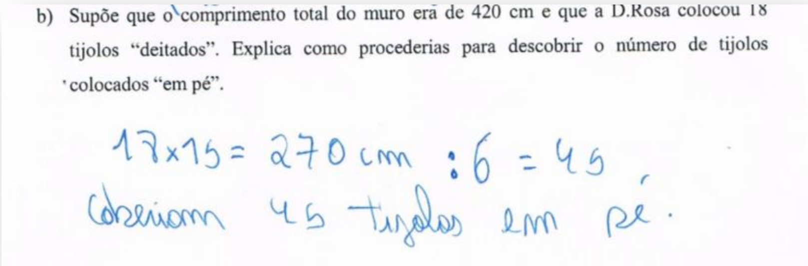
25 × 6 = 150

R: Existem 25 tijolos em pé no muro

Figura 71 – Resolução do Alfredo à questão 2.b da Tarefa 6

Alfredo: Sei que o muro tem 420cm, que tem 18 tijolos deitados. Pelo que fazia 15x18.
Professor: 15x18 porquê?
Alfredo: Para saber o comprimento dos 18 tijolos deitados no muro. Dá 270.
Professor: E os 270 é o quê?
Alfredo: É o comprimento dos 18 tijolos deitados no muro. (…) Então agora faço assim para saber a diferença entre os dois, fazia 420-270=150.
Professor: Isso é o quê?
Alfredo: É os centímetros que faltam para completar os 420 cm do muro.
Professor: Vão ser completados por tijolos…
Alfredo: Em pé. Então agora fazia 150/6 que me ia dizer quantos tijolos…
Professor: O que é o 6?
Alfredo: É o comprimento de um tijolo em pé. Se eu fizer 150/6 dá 25, 25 é o número de tijolos de pé que há no muro.

No caso do Guilherme, este tem algumas dificuldades em traduzir de linguagem corrente para linguagem simbólica, o que provoca alguma confusão da sua parte na relação entre as informações existentes no enunciado (Figura 72).



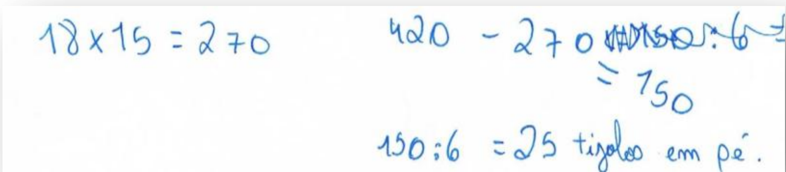
b) Supõe que o comprimento total do muro era de 420 cm e que a D.Rosa colocou 18 tijolos "deitados". Explica como procederias para descobrir o número de tijolos colocados "em pé".

17x15 = 270 cm : 6 = 45,
Colocariam 45 tijolos em pé.

Figura 72 – Resolução do Guilherme à questão 2.b da Tarefa 6

Guilherme: Pus que eram 18 tijolos deitados, que têm o comprimento de 15cm. Então multipliquei 18 vezes 15, que deu 270. 270 a dividir pelos 6cm dos tijolos de pé, foi dar 45. Pelo que seriam 45 tijolos em pé.
Professor: O que são os 270?
Guilherme: É os 18 tijolos deitados. O comprimento dos tijolos deitados.
Professor: E foste dividir por 6?
Guilherme: Porque era o comprimento de um tijolo em pé.
(…)
Guilherme: Ah! Ah, já percebi. Ela quer saber quantos é que dá para… Ah, posso fazer também… Faço 420-270 e divido o que dá, que é 150, por 6, vai dar 25.
Professor: Deu a mesma coisa que tu fizeste?
Guilherme: Não. Esta que acabei de fazer está certa. Porque me esqueci dos 420.
Professor: E o que são os 420?
Guilherme: É o comprimento total do muro. Estava a fazer os 270 como se fosse o comprimento total.

No entanto, quando tenta explicar a sua estratégia compreende o seu erro e apresenta uma nova resolução sem recorrer a expressões algébricas, opta, tal como o Alfredo, por descrever por palavras e apresentar somente os cálculos auxiliares (Figura 73).



18x15 = 270   420 - 270
= 150
150:6 = 25 tijolos em pé.

Figura 73 – Nova Resolução do Guilherme à questão 2.b da Tarefa 6

A Sara, tal como os colegas, não tem grandes dificuldades em traduzir para linguagem simbólica (Figura 74).

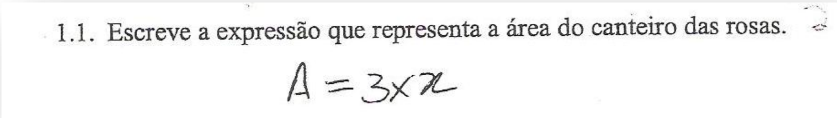


Figura 74 – Resolução da Sara à questão 1.1 da Tarefa 3

No entanto, em enunciados em que não seja pedido diretamente para utilizar simbologia, a Sara recorre à descrição da sua estratégia, apresentando os cálculos auxiliares (Figura 75).

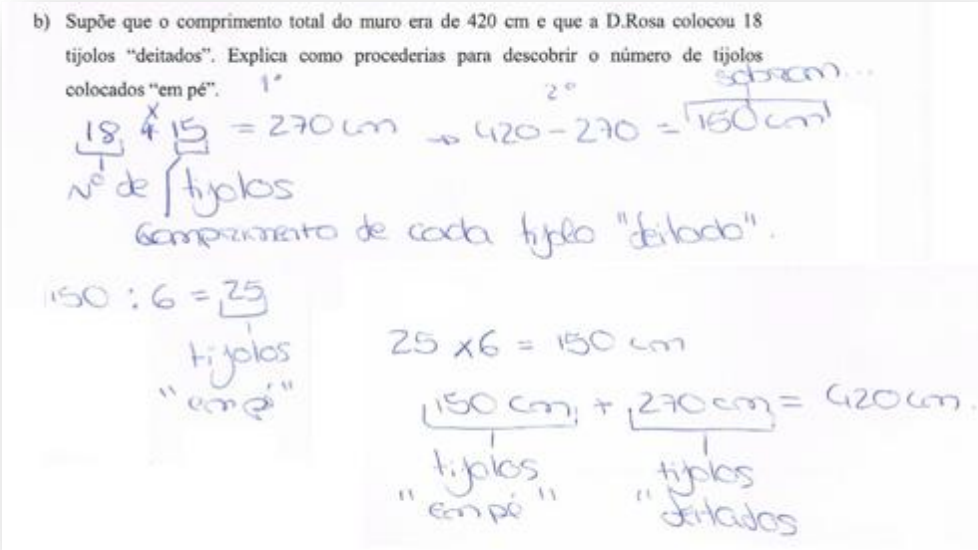


Figura 75 – Resolução da Sara à questão 2.b da Tarefa 6

Os restantes alunos da turma não evidenciam grandes dificuldades em traduzir da linguagem corrente para a linguagem simbólica. Existem, no entanto, alguns alunos que ao exprimirem através de símbolos a área pedida num exercício, confundem-na com o perímetro, não conseguindo atingir o objetivo de traduzir corretamente, através de símbolos, a área.

Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstrata

Quando se deixam os números e se começa a trabalhar com letras, o Alfredo consegue aplicar as propriedades aprendidas com os números na simplificação de expressões algébricas. Este aluno aplica corretamente, por exemplo, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição nas expressões algébricas, optando sempre por recorrer a esta propriedade mesmo quando está perante um caso notável da multiplicação, o quadrado do binómio, onde poderia recorrer simplesmente à fórmula deduzida na aula (Figura 76).

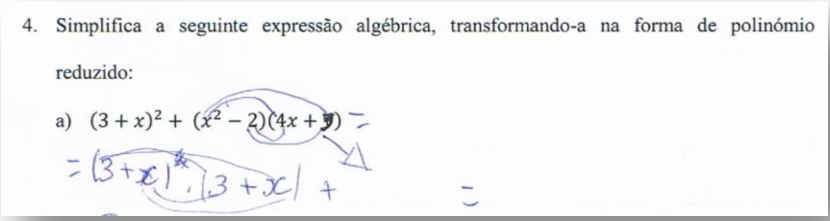


Figura 76 – Resolução do Alfredo à questão 4 da Tarefa 6

O Alfredo comete alguns erros na simplificação de expressões algébricas, mas quando tenta explicar durante a entrevista os seus passos na resolução, apercebe-se de alguns erros cometidos e justifica-os imediatamente:

> **Alfredo:** A outra expressão fiz $x^2 \times 4x$ que dá $5x^2$. (…) Porque o x já veio do x^2 e depois fiz metade de… Não, fica $4x^3$?
> **Professor:** O que te parece?
> **Alfredo:** Fica. Porque já temos dois x's e se juntarmos mais um, fica $4x^3$. Não é $5x^2$ mas $4x^3$.

No caso do Guilherme, este também não parece ter dificuldades em passar de uma estrutura concreta para uma mais abstrata. Manipula corretamente os símbolos e recorre à fórmula do quadrado do binómio em vez de desenvolver o quadrado num produto de dois termos. Tal como o Alfredo, numa estrutura mais abstrata, reconhece os seus erros quando tenta explicar cada passo dado na simplificação de expressões algébricas (Figura 77):

> **Professor:** E de onde vem este $4x^2$?
> **Guilherme:** Vem do… Ah! Já está mal!
> **Professor:** Está mal porquê?
> **Guilherme:** Porque… na multiplicação… na adição é que não se faz nada com os outros, mas aqui como está como se fosse x vezes x vezes x, é como se fosse x^3.
> **Professor:** E depois foste juntando o quê?
> **Guilherme:** Os que eram iguais. Não, os que tinham as partes literais iguais.

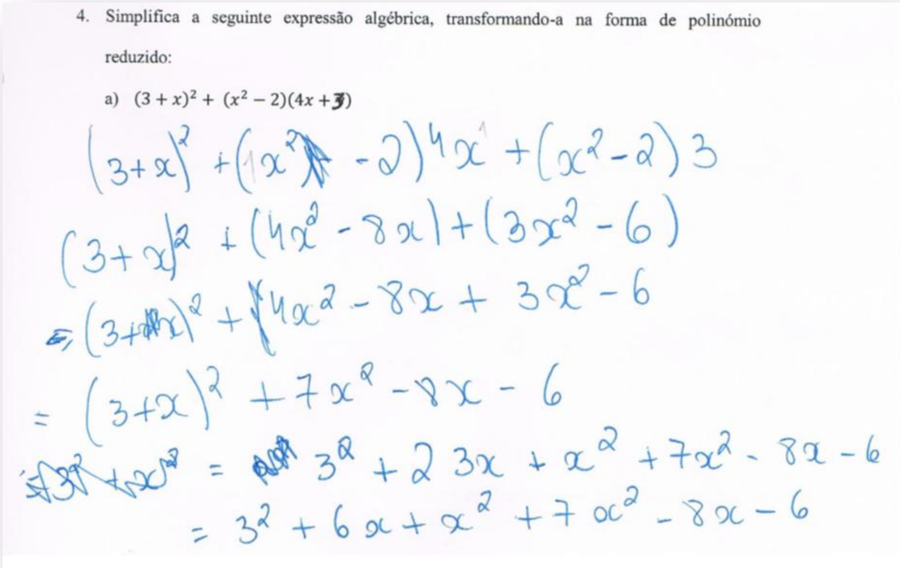


Figura 77 – Resolução do Guilherme à questão 4 da Tarefa 6

Quando trabalha com estruturas abstratas, como as expressões algébricas, as resoluções da Sara mostram que esta aluna faz alguma confusão, quando surgem uns parenteses, entre a multiplicação e a adição de expressões algébricas (Figura 78).

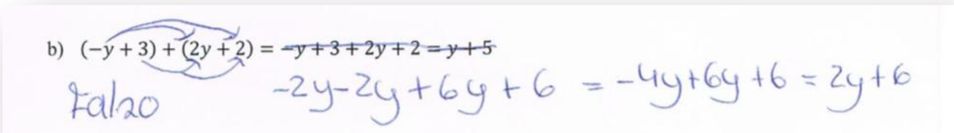


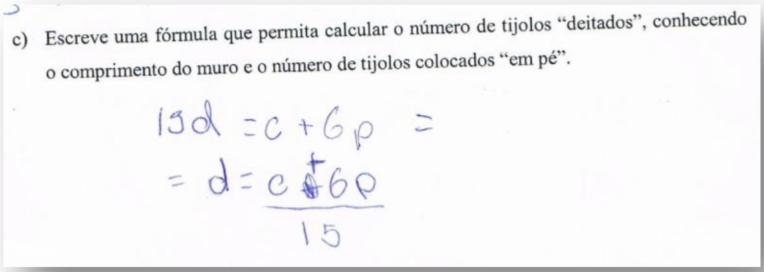
Figura 78 – Resolução da Sara à questão 3.b da Tarefa 6

> **Sara:** Depois na segunda parte, que era $(x^2-2)\times(4x+3)$, fiz o mesmo que na alínea b da pergunta 3.

Os restantes alunos da turma também têm algumas dificuldades em passar do concreto para o abstrato, em passar dos números para a manipulação de expressões algébricas com letras. No entanto, num panorama geral, a turma consegue trabalhar com estruturas abstratas.

<u>*Criar uma expressão simbólica para um determinado objetivo*</u>

Quando foi pedido ao Alfredo que apresentasse uma fórmula havendo determinadas condições, este conseguiu fazê-lo recorrendo à fórmula dada no enunciado inicial. O Alfredo recorreu a esta fórmula, manipulou-a e isolou a letra d, de maneira a obter uma nova fórmula que lhe permitisse calcular, de imediato, o número de tijolos deitados sabendo o comprimento do muro e o número de tijolos em pé. Apesar de ter cometido alguns erros na manipulação algébrica, este aluno conseguiu criar uma expressão simbólica como pretendido (Figura 79).


c) Escreve uma fórmula que permita calcular o número de tijolos "deitados", conhecendo o comprimento do muro e o número de tijolos colocados "em pé".

$15d = c + 6p =$

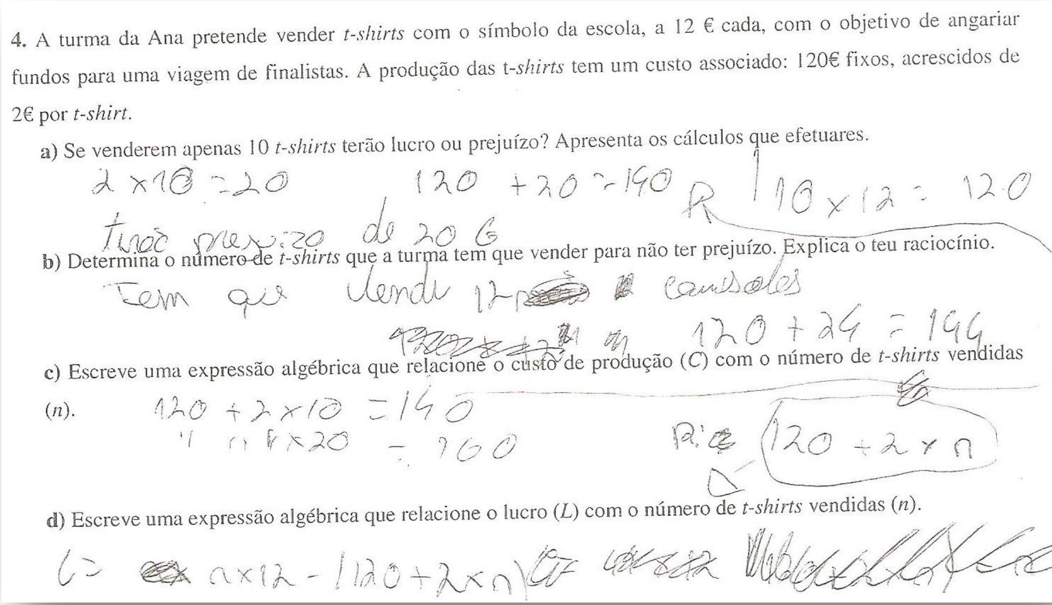
$= d = \frac{c + 6p}{15}$

Figura 79 – Resolução do Alfredo à questão 2.c da Tarefa 6

Este aluno pegou na informação contida no enunciado inicial e manipulou-a algebricamente para obter uma expressão que satisfizesse a fórmula pedida, uma expressão que lhe desse imediatamente o número de tijolos deitados:

> **Alfredo:** "Escreve uma fórmula que permita calcular o número de tijolos "deitados", conhecendo o comprimento do muro e o número de tijolos colocados "em pé"."
> **Professor:** Que informação é que tens?
> **Alfredo:** O 15d, o 6p e o comprimento. E a fórmula que é $c = 15d + 6p$.
> **Professor:** E o que queres saber?
> **Alfredo:** Já sei os em pé, agora quero saber os deitados.
> **Professor:** Como é que fizeste?
> **Alfredo:** Fiz em ordem a d.
> (…)
> **Professor:** E ficou como?
> **Alfredo:** $15d = c + 6p$. E depois tirando o 15 fica: $d = \frac{c+6p}{15}$.

No teste realizado após a intervenção, o Alfredo dá mostras de conseguir trabalhar a um nível mais abstrato e relacionar os dados do enunciado para criar as expressões algébricas pedidas (Figura 80).


4. A turma da Ana pretende vender *t-shirts* com o símbolo da escola, a 12 € cada, com o objetivo de angariar fundos para uma viagem de finalistas. A produção das t-*shirts* tem um custo associado: 120€ fixos, acrescidos de 2€ por *t-shirt*.

a) Se venderem apenas 10 *t-shirts* terão lucro ou prejuízo? Apresenta os cálculos que efetuares.

2 x 10 = 20   120 + 20 = 140   R   10 x 12 = 120

tinoc prejuizo de 20 €

b) Determina o número de *t-shirts* que a turma tem que vender para não ter prejuízo. Explica o teu raciocínio.

Tem que vender 12   camisolas

120 + 24 = 144

c) Escreve uma expressão algébrica que relacione o custo de produção (*C*) com o número de *t-shirts* vendidas (*n*).

120 + 2 x 10 = 140

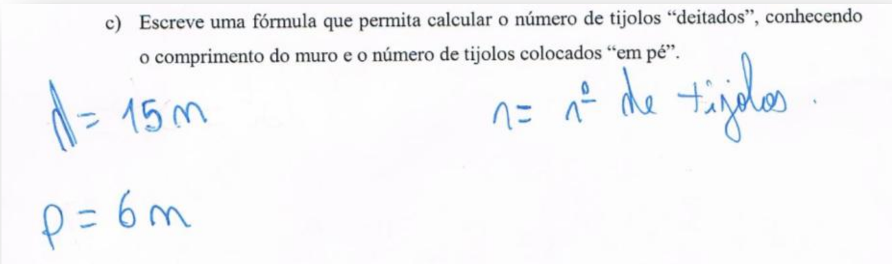
R: 120 + 2 x n

d) Escreve uma expressão algébrica que relacione o lucro (*L*) com o número de *t-shirts* vendidas (*n*).

L = n x 12 - (120 + 2 x n)

Figura 80 – Resolução do Alfredo à questão 4 do Teste

Em relação ao Guilherme, este cria uma nova fórmula de acordo com a informação do enunciado da alínea em causa. Não utiliza informação alguma sobre o comprimento do muro, e cria uma nova variável para representar o número de tijolos (Figura 81).


c) Escreve uma fórmula que permita calcular o número de tijolos "deitados", conhecendo o comprimento do muro e o número de tijolos colocados "em pé".

d = 15m   n = nº de tijolos.

p = 6m

Figura 81 – Resolução do Guilherme à questão 2.c da Tarefa 6

A resolução do Guilherme é curiosa uma vez que tinha resolvido corretamente uma alínea anterior onde lhe pediam para explicar o que significava 15d e, nesta alínea, ele acaba por apresentar uma expressão semelhante à anterior mas com um significado completamente diferente:

> **Professor:** O que fizeste?
> **Guilherme:** Que os tijolos deitados eram igual aos 15cm de comprimento vezes o número de tijolos.

Durante a entrevista, o Guilherme lembrou-se também de outra hipótese para resolver esta questão que consistia em escrever uma fórmula onde figuravam os valores dados no enunciado da alínea anterior, sem se aperceber que estes valores eram hipotéticos, aceitando-os como sendo os valores reais associados ao muro em questão:

> **Guilherme:** Ou podia fazer 420=15…
> **Professor:** Porquê 420?
> **Guilherme:** Fui buscar aqui…
> **Professor:** Podes ir à alínea anterior buscar informação?
> **Guilherme:** Sim. Posso usar a fórmula 420=…

No teste, o Guilherme também tem alguma dificuldade em exprimir com clareza uma determinada condição. Quando lhe pedem uma expressão algébrica que relacione o lucro com o número de *t-shirts* vendidas, ele utiliza o facto de ser necessário vender, pelo menos, 13 *t-shirts* para não ter prejuízo na fórmula do custo de produção (Figura 82).

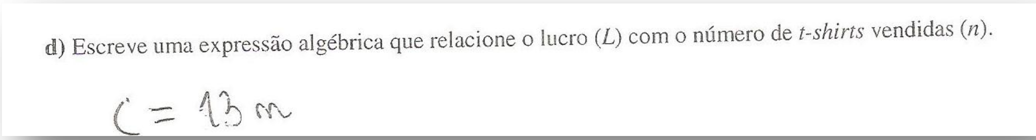


Figura 82 – Resolução do Guilherme à questão 4.d do Teste

A Sara, inicialmente, também não conseguiu escolher os símbolos para resolver a questão em que se pedia uma fórmula. Começou por considerar que o muro era só formado por tijolos deitados e foi vendo caso a caso como se comportava para estabelecer uma condição (Figura 83), como explica:

> **Sara:** Primeiro, comecei por fazer uma tabela e fui escrevendo o número de figuras. Por exemplo, se fosse um tijolo deitado, tinham 15cm. Se fossem dois, já tinha 30. Ou seja, multiplicava sempre por 2. O primeiro número, por exemplo 15x1=15, para o primeiro tijolo. Se fosse 15x2 para dois tijolos, já dava 30cm.

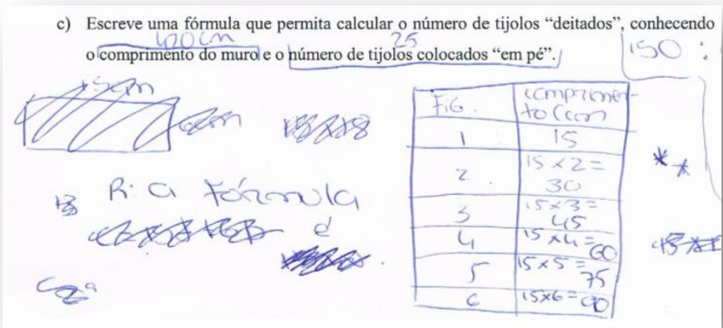


Figura 83 – Resolução da Sara à questão 2.c da Tarefa 6

Numa segunda etapa, tal como o Guilherme, a Sara quis escrever uma fórmula recorrendo aos valores numéricos dados na alínea anterior, mas rapidamente reformulou a sua resolução escrevendo uma fórmula tendo em conta a expressão presente no enunciado inicial (Figura 84).

Professor: Mas tu sabes que o muro…
Sara: Tem 420cm.
(…)
Sara: 420…Não, $c = 15d + 6$p.
(…)
Sara: Tínhamos que descobrir os deitados e os que estavam em pé eram 25.
Professor: Porquê 25?
Sara: Porque na alínea anterior dizia para descobrir o número de tijolos colocados em pé.
(…)
Sara: Não. Depois pensei melhor e tentei fazer através da expressão dada.
Professor: Qual é a expressão?
Sara: $\mathrm{c} = 15\mathrm{d} + 6\mathrm{p}$. O comprimento do muro é igual ao número de tijolos deitados vezes quinze, mais seis vezes o número de tijolos em pé.
Professor: O que queres saber?
Sara: Os tijolos deitados. Então usei o 15d.
Professor: Usaste o 15d? Só?
Sara: Sim. Mas no fim fiz: $\frac{\mathrm{c}-6\mathrm{p}}{15} = \mathrm{d}$, porque temos que descobrir quantos tijolos deitados eram.

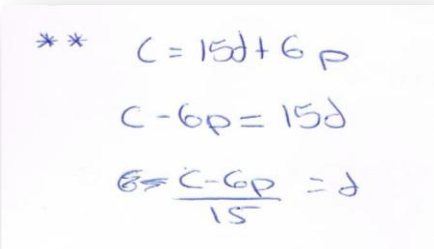


Figura 84 – Segunda resolução da Sara à questão 2.c da Tarefa 6

No teste, a Sara não consegue estabelecer uma relação entre o lucro e o número de *t-shirts* vendidas pois não recorre a toda a informação presente no enunciado (Figura 85).

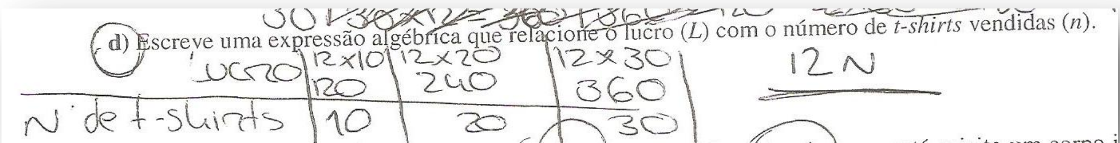
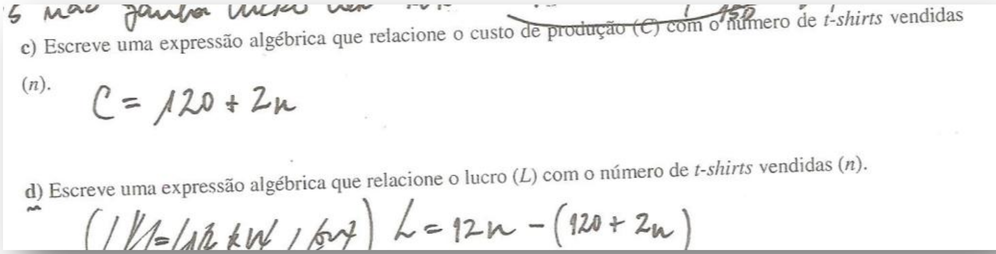


Figura 85 – Resolução da Sara à questão 4.d do Teste

A maioria dos restantes alunos da turma consegue escolher corretamente os símbolos para escrever as expressões algébricas pedidas no teste (Figura 86).



c) Escreve uma expressão algébrica que relacione o custo de produção (C) com o número de *t-shirts* vendidas (n).

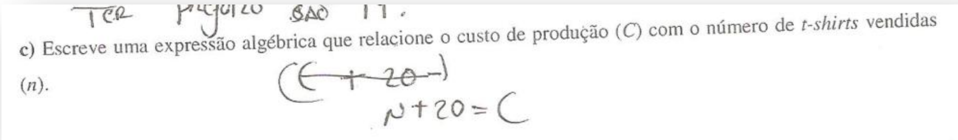
$C = 120 + 2n$

d) Escreve uma expressão algébrica que relacione o lucro (L) com o número de *t-shirts* vendidas (n).

$L = 12n - (120 + 2n)$

Figura 86 – Resolução de um aluno às questões 4.c e 4.d do Teste

No entanto, existem alguns alunos que apresentam expressões algébricas que, apesar de utilizarem os símbolos necessários, não fazem muito sentido no contexto do problema (Figuras 87 e 88).

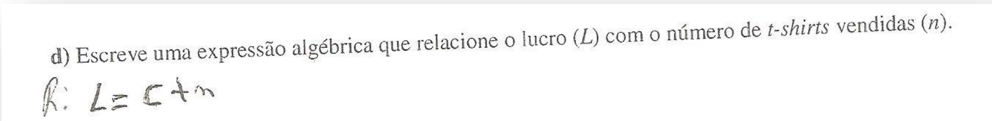


c) Escreve uma expressão algébrica que relacione o custo de produção (C) com o número de *t-shirts* vendidas (n).

$\cancel{C + 20}$

$n + 20 = C$

Figura 87 – Resolução de um aluno à questão 4.c do Teste



d) Escreve uma expressão algébrica que relacione o lucro (L) com o número de *t-shirts* vendidas (n).

R: $L = C + n$

Figura 88 – Resolução de um aluno à questão 4.d do Teste

Capítulo VI

Reflexão sobre o trabalho realizado

No presente capítulo, a partir da análise de dados efetuada, apresento as principais conclusões obtidas que procuram responder às questões de investigação e termino com uma reflexão pessoal sobre esta experiência, nomeadamente as aprendizagens realizadas e de que forma estas contribuíram para o meu futuro profissional e para a minha maneira de lidar com o ensino e aprendizagem da Álgebra.

Síntese do Estudo

Com este estudo, procuro compreender a aprendizagem de alunos do 8.º ano na resolução de equações literais e nas expressões algébricas e, em particular, o modo como desenvolvem, neste contexto, o seu pensamento algébrico nele incluindo o sentido do símbolo e de variável. Para isso, procuro dar resposta às seguintes questões:

i) Em que medida os alunos mobilizam conceitos e propriedades matemáticas das equações de 1.º grau na resolução de equações literais?

ii) Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo das equações literais e das expressões algébricas? Em particular, quais as principais dificuldades dos alunos na compreensão das alterações dos papéis desempenhados pelas variáveis e pelo sinal de igual? Como procuram resolver as dificuldades evidenciadas?

iii) Que sentido de símbolo revelam os alunos na forma como resolvem questões envolvendo equações literais e expressões algébricas?

iv) Que sentido de variável revelam os alunos na forma como resolvem questões envolvendo equações literais e expressões algébricas?

A lecionação das aulas analisadas neste estudo ocorreu no início do 3.º Período numa turma do 8.º ano de escolaridade. A unidade didática em causa foi Equações, Sequências e Regularidades, em particular o estudo das equações literais e de expressões algébricas no que se refere às operações com polinómios.

A metodologia adotada é de natureza qualitativa e para a recolha de dados, recorri à recolha documental, nomeadamente a resolução das tarefas realizadas pelos alunos, à observação de aulas com recurso ao diário de bordo, registo áudio e registo por interposta pessoa e, por último, à entrevista a três alunos da turma selecionados.

A análise de dados foi construída tendo em conta as questões do estudo e tomou para categorias de análise os processos usados nas equações literais e o sentido de símbolo e de variável presentes, quer nas equações literais, quer nas expressões algébricas.

Principais conclusões

Este estudo teve como ponto de partida a formulação das questões de investigação, tendo sido desenvolvido e pensado sempre com essas questões bem presentes. Deste modo, este subcapítulo surge como o culminar do trabalho desenvolvido em volta das questões de investigação, procurando dar respostas e refletir sobre estas.

Em que medida os alunos mobilizam conceitos e propriedades matemáticas das equações de 1.º grau na resolução de equações literais?

Os alunos recorrem a regras práticas de resolução de equações do 1.º grau manifestando algumas dificuldades na aplicação dos princípios de equivalência. Note-se, no entanto, que algumas dessas dificuldades devem-se à não compreensão dos princípios de equivalência ainda no trabalho com equações lineares.

No geral, o sucesso dos alunos na aplicação destes princípios não é constante. Existem diversos alunos que são incoerentes nas suas produções escritas, ora aplicam corretamente os princípios de equivalência, ora criam novos princípios adulterando os verdadeiros o que, segundo Nabais (2010), revela que os alunos, na resolução de equações do 1.º grau, podem ter aprendido a aplicar regras de manipulação ou procedimentos que julgam ter compreendido, mas com a mudança do tipo de equações surgem processos incorretos que revelam falta de compreensão do verdadeiro significado matemático destes princípios e, até mesmo, do conceito de equação.

Olhando para cada um dos princípios de equivalência em separado, no que diz respeito ao primeiro princípio de equivalência, a turma aplica corretamente este princípio na resolução de equações literais, tanto ao desembaraçar de parenteses como ao somar termos semelhantes. Contudo, a transformação aprendida no início deste ano letivo, aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição quando se está perante um sinal menos antes de uma fração, não é aplicada corretamente nas equações literais e, até mesmo, na resolução de equações lineares existem algumas falhas por parte de grande percentagem dos alunos da turma.

Uma vez que o segundo princípio de equivalência já foi apreendido no sétimo ano, os alunos demonstram já estar bastante familiarizados com este na resolução de equações do 1.º grau e conseguem fazer, sem quaisquer problemas, a ponte para as equações literais.

O terceiro princípio de equivalência é, sem dúvida, aquele onde os alunos sentiram mais dificuldade em adaptá-lo para as equações literais. Associado a este princípio, surgem muitos mais erros, sendo que alguns deles só surgem nas equações literais, como é o caso da inversão do fator numérico. Alguns alunos, como é o caso do Guilherme, que conseguiam aplicá-lo corretamente nas equações lineares, perdem completamente a noção deste princípio quando se deparam com equações literais. Contudo, existem, também, alunos como o Alfredo que só começam a aplicar este princípio corretamente na resolução de equações literais e só aqui o compreendem de tal forma que, após o surgimento das equações literais, este princípio começa a ser aplicado corretamente também nas equações lineares. Este facto questiona de forma muito significativa o pressuposto tantas vezes defendido de que a aprendizagem se faz de forma linear, isto é, do mais simples para o mais complexo.

Tendo em conta as várias transformações associadas aos princípios de equivalência, pode-se verificar que as transformações apreendidas mais recentemente, tais como desembaraçar de denominadores e existência do sinal negativo antes de uma fração, são alvo de um maior número de falhas por parte dos alunos na resolução de equações literais, possivelmente devido ao facto destas não terem sido bem consolidadas aquando da sua aprendizagem na resolução de equações do 1.º grau durante este ano letivo.

A existência de mais do que uma incógnita leva à necessidade de um primeiro passo fundamental na resolução de equações literais, no qual os alunos começam por isolar uma das variáveis e resolver em ordem a esta variável. É neste simples processo que grande parte dos alunos se perde, levando, por vezes, a uma completa perda de noção dos princípios de equivalência e de como aplicá-los. O facto de alguns alunos isolarem corretamente a incógnita pretendida não implica necessariamente a compreensão deste processo. Por vezes, limitam-se a decorá-lo como uma "receita" e acabam por falhar em algumas resoluções. No entanto, existe um grande grupo de alunos que evidencia ter compreendido este processo ao simplificar a sua maneira de pensar. Para eles, isolar uma variável consiste simplesmente em isolar a incógnita como numa equação linear, em que as restantes variáveis são vistas como números e manipuladas como tal.

Indo ao encontro do defendido por Chazan &Yerushalmy (2003), a resolução de equações literais assenta nas mesmas estratégias de resolução das equações lineares do 1.º grau, pois resolver em ordem a uma das variáveis corresponde a isolar a incógnita numa equação linear. No entanto, considero que o simples facto de existir mais do que uma letra diferente leva a alguma confusão por parte dos alunos que não têm bem presentes e compreendidos os princípios de equivalência.

Em suma, o trabalho com princípios de equivalência e regras práticas de resolução de equações do 1.º grau é crucial na resolução de equações literais, no entanto, é igualmente importante a compreensão, por parte dos alunos, do significado da equação e de solução.

Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo das equações literais e das expressões algébricas? Em particular, quais as principais dificuldades dos alunos na compreensão das alterações dos

papéis desempenhados pelas variáveis e pelo sinal de igual? Como procuram resolver as dificuldades evidenciadas?

No estudo das equações literais e das expressões algébricas, os alunos apresentam algumas dificuldades em duas das três áreas categorizadas por Booth (1984), na interpretação das letras e na formalização dos métodos usados, sobrando a categoria associada à compreensão de notações e convenções onde os alunos desta turma demonstram estar à vontade.

Os alunos em análise têm ainda algumas dificuldades na aplicação dos princípios de equivalência na resolução de equações, tanto lineares, como literais, o que em grande parte se parece dever às falhas existentes na manipulação algébrica de expressões algébricas, por não compreenderem as condições da sua equivalência, o significado destas expressões e por estarem ainda demasiado apegados ao trabalho desenvolvido em Aritmética (Ponte *et al.*, 2009).

Uma das grandes dificuldades evidenciadas por estes alunos, em particular pelo Alfredo e pela Sara, e já referida por Pesquita (2007), reside na atribuição de um significado concreto às letras tendo em conta o seu contexto. Estes alunos interpretam a letra como abreviatura de um objeto, em vez de a interpretarem como a quantidade associada a esse objeto.

Os alunos demonstram, também, dificuldades em dar sentido a uma expressão algébrica, em usar a linguagem natural para descrever como estão a pensar e em interpretar a expressão traduzida numa determinada equação. O passar da linguagem natural para a linguagem simbólica é também um aspeto onde os alunos manifestam algumas dificuldades, até mesmo quando não é preciso criar uma expressão algébrica de raiz, tal como dá conta o Guilherme durante a entrevista.

A substituição de uma variável por um valor numérico na resolução de equações literais é outra das grandes dificuldades demonstradas por estes alunos, levando-os a cometer erros como a substituição do valor numérico no coeficiente da variável ou a representação posicional, sendo a Sara um exemplo de aluno que tem grandes dificuldades nesta área.

No trabalho com expressões algébricas é evidente a dificuldade crescente em trabalhar com estruturas mais abstratas e a não compreensão da noção de equivalência de expressões, levando estes alunos a cometerem alguns erros na simplificação de expressões algébricas quando procuram aplicar as propriedades das operações aprendidas no estudo da Aritmética. Devido ao seu carácter mais abstrato, surgem algumas dificuldades na compreensão do facto de $x \times x$ ser x^2 e não $2x$ como lhes parece mais intuitivo, dificuldades essas que são ultrapassadas com a experimentação de casos concretos.

A alteração dos papéis desempenhados pelo sinal de igual provoca outro grande obstáculo na aprendizagem dos alunos, pois estes têm uma dificuldade enorme em compreender as diferentes interpretações deste sinal aquando do trabalho com expressões algébricas ou com equações (Ponte *et al.*, 2009). Enquanto nas expressões algébricas, o sinal de igual não representa uma igualdade, mas sim uma relação de equivalência onde duas expressões são equivalentes se assumirem o mesmo valor para um determinado valor de x, nas equações este sinal representa uma igualdade entre duas expressões em que alguns valores são desconhecidos. A barreira criada por esta diversidade de interpretações do significado atribuído ao sinal de igual leva a que os alunos recorram aos princípios de equivalência para simplificar expressões algébricas, desembaraçando-as de denominadores, como se de equações se tratassem.

Esta dificuldade relacionada com o significado do sinal de igual aumenta com o estudo das equações literais, uma vez que a solução de uma equação passa a ser um conjunto de pares ordenados que respeitam a equação, em vez de um valor numérico específico. No entanto, a maioria destes alunos conseguiu contornar esta dificuldade, compreendendo que para um determinado valor numérico de uma variável, existe um valor diferente para as outras variáveis.

Os alunos demonstram ainda ter algumas dificuldades no trabalho com equações literais devido à alteração dos papéis desempenhados pelas variáveis, pois da existência de uma única variável passamos para a existência de várias, das quais uma representa a incógnita e as restantes parâmetros. Alguns alunos desta turma não reconhecem a equivalência entre uma equação literal na forma implícita e na forma explícita, pois não recorrem à equação resolvida em ordem a uma variável para determinar um valor dessa mesma variável.

Durante as entrevistas, os alunos foram lidando com as dificuldades evidenciadas e procuraram ultrapassá-las com sucesso. Ao relerem as suas resoluções e tentarem explicar o que estavam a pensar e como tinham resolvido, os alunos em causa foram-se deparando com alguns erros e conseguiram corrigi-los sozinhos, compreendendo o que tinham feito mal. Quando lhes colocava algumas questões sobre as suas resoluções e repetia em forma de questão o que eles me haviam dito, os alunos apercebiam-se das suas falhas e procuravam ultrapassar as suas dificuldades, revendo todos os pormenores do enunciado e tirando ilações em voz alta, sendo esta estratégia bastante evidente quando lhes era pedido para dar sentido a uma determinada expressão algébrica.

Que sentido de símbolo revelam os alunos na forma como resolvem questões envolvendo equações literais e expressões algébricas?

Apesar de Arcavi (1994) referir que há muito mais no sentido de símbolo do que um catálogo de comportamentos, independentemente de quão completo este possa estar, a análise feita de acordo com as categorias apresentadas por Grossmann, Gonçalves e Ponte (2009) permite concluir que não é possível destacar um aluno que tenha um sentido de símbolo mais desenvolvido que os restantes alunos da turma, uma vez que estes mostram ser bastante distintos e os seus aspetos fortes são diferentes. Por exemplo, a Sara consegue traduzir facilmente a linguagem corrente para a simbólica, enquanto o Guilherme revela destreza na substituição de valores numéricos e na manipulação simbólica utilizando os procedimentos adequados.

A turma, no geral, revela ter um sentido de símbolo menos apurado no trabalho com equações literais quando comparado com o revelado nas expressões algébricas. Um dos aspetos fortes desta turma é sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos, dando consistência às suas respostas recorrendo ao próprio símbolo.

Os alunos revelam destreza na manipulação simbólica, apesar de por vezes se depararem com dúvidas em procedimentos relativamente simples mas fundamentais que colocam em risco o resultado final, como é o caso do Alfredo e da Sara que manifestam grandes dificuldades na substituição do valor numérico da variável na equação literal.

No que diz respeito a manter uma visão global evitando cair em manipulações destituídas de significado, a maioria dos alunos, em algumas situações, mantém uma visão global do que estão a trabalhar tendo em conta o contexto das tarefas. Um sentido de símbolo apurado requer uma verificação constante da resposta que pode ser feita por uma simples substituição de valores, sendo que neste ponto, o Alfredo mostra um sentido de símbolo mais desenvolvido que os restantes alunos entrevistados. No entanto, estes alunos ainda estão muito apegados à simples manipulação simbólica.

A falta de segurança em conceitos e procedimentos básicos leva a que os alunos entrevistados não identifiquem equações equivalentes e não reconheçam a equivalência entre a equação na forma implícita e na forma explícita, não recorrendo à equação resolvida em ordem a uma variável para determinar um valor dessa mesma variável. Em relação aos restantes alunos da turma, estes identificam equações equivalentes simples, no entanto revelam dificuldade em interpretar algumas situações que careçam da compreensão dessa mesma equivalência.

Os alunos compreendem os diferentes papéis que o símbolo desempenha em função do contexto, contudo falta-lhes sentido de símbolo na análise de algumas situações. Apesar do trabalho com expressões algébricas ser o que apresenta melhores resultados globais, apenas o Guilherme, durante a entrevista, compreende o significado de alguns símbolos ainda que, na maioria dos casos, este significado não pareça fortemente incorporado e seja uma mistura de linguagem matemática com linguagem corrente. Os outros dois alunos entrevistados têm dificuldades em atribuir um sentido às letras, tendo em conta o seu contexto, interpretando-as por vezes como a inicial de um objeto no lugar da quantidade associada a esse objeto.

Os alunos evidenciaram ainda algumas dificuldades na passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. Procuraram resolver as tarefas sem recorrer ao auxílio dos símbolos puramente matemáticos, utilizando-os somente na justificação das suas estratégias.

Outro resultado surpreendente prende-se com a passagem de uma estrutura concreta para uma mais abstrata, passar do sentido do número para o sentido de símbolo. Os alunos desta turma trabalham bem com o símbolo literal, revelando neste aspeto uma sólida passagem da Aritmética para a Álgebra (Ponte *et al.*, 2009) e uma correta aplicação das propriedades aprendidas com expressões numéricas no trabalho com expressões algébricas. Do mesmo modo, estes alunos conseguem criar expressões adequadas que simbolizem uma dada situação, interpretar e representar uma situação utilizando linguagem simbólica, revelando um sentido de símbolo desenvolvido.

Analisando os vários aspetos, verifica-se que os alunos possuem um desenvolvimento do sentido de símbolo considerável. No entanto, tal como alerta Arcavi (1994), apesar do sentido de símbolo compreender diversos aspetos de alguma forma interligados, o facto de um deles estar numa fase relativamente avançada de desenvolvimento, não significa que o mesmo ocorra com os outros. De acordo com Sfard e Linchevsky (1994), o sentido de símbolo apurado resulta do conjugar da instrução matemática e da própria lógica interior do aluno, surgindo com a capacidade de ver as ideias abstratas que se escondem atrás dos símbolos. Os três alunos entrevistados revelam estar a meio desta caminhada de conjugação, sendo que o Alfredo sobressai pela sua lógica interior, enquanto o Guilherme e a Sara revelam uma forte instrução matemática.

Assim sendo, os dados apontam para uma maior facilidade no trabalho com expressões algébricas em comparação com as equações literais. Estes demonstram, também, uma heterogeneidade quanto ao sentido de símbolo dos alunos, sendo, no entanto, visível a existência de um desenvolvimento do sentido de símbolo razoável por parte de cada aluno e, acima de tudo, torna-se evidente a necessidade de continuar a trabalhar nessa direção, contactando com atividades que contribuam para o desenvolvimento do sentido de símbolo.

Que sentido de variável revelam os alunos na forma como resolvem questões envolvendo equações literais e expressões algébricas?

Segundo Schoenfeld e Arcavi (1988, p. 426), é “a subtileza e dificuldade da ideia de variável” que torna pouco acessível aos alunos a sua compreensão da letra e da forma como esta varia em diferentes contextos. A maior parte das dificuldades sentidas ao nível da Álgebra resultam da não compreensão do sentido de variável.

Os alunos desta turma revelam ter algum sentido de variável uma vez que compreendem a noção de variável, sabem que esta é a representação de um número e não atribuem um valor fixo à variável. Contudo, existiram alguns momentos de hesitação na entrevista por parte do Guilherme e da Sara em que estes pensaram, por instantes, que uma das variáveis da questão representava um determinado valor fixo só porque numa alínea anterior lhes era dado esse valor para aquela variável.

Apesar de evidenciarem ainda alguma dificuldade em trabalhar com equações literais, estes alunos conseguem lidar com as variáveis de forma diferenciada tendo em conta o seu papel e diferentes usos relativos à interpretação da letra na equação. Numa equação literal, a variável não representa uma simples incógnita, tal como nas equações lineares. Há uma grande diferença na obtenção de solução. Em vez de se obter como solução um valor numérico específico, obtemos uma "expressão algébrica que não faz parte, em si mesma, do conjunto solução da equação, embora possa gerar pares ordenados que fazem parte desse conjunto" (Ponte *et al.*, 2009, p. 105). Esta mudança de papel foi bem interiorizada pelos alunos desta turma que rapidamente perceberam a diversidade de valores que as variáveis podem tomar e tiveram em conta esse facto durante a resolução de equações literais.

Apesar de terem assimilado facilmente esta nova ideia de variável, os alunos têm ainda algumas dificuldades no sentido de variável, pois este ultrapassa a simples realização de operações com letras e símbolos, implica também a compreensão das razões pelas quais funcionam e onde levam os procedimentos e a capacidade de estabelecer relações entre os diversos aspetos assumidos pela variável. O Guilherme, por exemplo, tem bastantes dificuldades em traduzir simbolicamente o enunciado da tarefa enquanto o Alfredo tem algumas dificuldades na realização de operações com letras e símbolos.

Os diferentes usos das variáveis estão diretamente associados às várias conceções de Álgebra. No percurso de aprendizagem da Álgebra, os alunos começam por encarar a Álgebra como Aritmética generalizada, durante a qual apesar de não possuírem ainda o sentido de incógnita, utilizam as variáveis como instrumentos para traduzir e expressar a ideia de generalidade construída na Aritmética (Usiskin, 1988). Com a progressão no trabalho com a Álgebra, esta passa a ser vista como o estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, onde os alunos devem ser capazes de traduzir simbolicamente o enunciado do problema e resolver, e simplificar, a expressão obtida. Os alunos desta turma encontram-se nesta etapa, pois apesar de conseguirem aplicar certos procedimentos, cometem ainda algumas falhas na aplicação destes procedimentos.

A conceção seguinte de Álgebra passa pelo estudo das relações entre quantidades onde a variável passa a ser entendida como um argumento ou como um parâmetro. O trabalho com equações literais permite iniciar este estudo, contudo existem ainda alguns alunos que devido às dificuldades existentes no trabalho da

Álgebra como o estudo de procedimentos, ainda não conseguiram atingir este patamar que permite relacionar várias variáveis.

De acordo com Usiskin (1988), o trabalho com a Álgebra não se pode reduzir a uma das conceções de Álgebra, é essencial interligá-las e desenvolver a sua aprendizagem da Álgebra recorrendo às suas várias conceções. Estes alunos estão no caminho certo para conseguir trabalhar com as várias conceções, uma vez que já conseguem generalizar com base na Aritmética, aplicar corretamente os procedimentos para resolver certos tipos de problemas e estão a trabalhar no sentido de conseguir descrever e analisar as relações entre quantidades.

Sendo a aprendizagem do conceito de variável um processo difícil e lento, estes alunos estão no caminho certo para desenvolverem o seu sentido de variável e tirarem deste as mais vantajosas ferramentas para o trabalho com a Álgebra.

Reflexão final

Ao terminar este relatório, considero importante refletir sobre as aprendizagens obtidas com a realização deste estudo, tanto para a minha futura carreira profissional, como para a minha vida pessoal enquanto ser humano. No meu entender, os alunos aprenderam com a minha intervenção, mas sem qualquer dúvida, eu aprendi imenso com estes quinze dias. Retirei muita informação útil para as minhas futuras aulas e relembrei-me do porquê de ter escolhido esta profissão, a oportunidade de ver o sorriso de um jovem quando consegue perceber a magia por detrás da Matemática.

Desde o momento que soube onde iria realizar a minha investigação, cresceu dentro de mim um nervoso miudinho, fiquei curioso em relação à reação dos alunos à minha presença na sala de aula, em particular se iriam evitar-me por já terem criado uma relação com o professor da turma. Contudo, eles aceitaram-me com normalidade, tendo-se mostrado disponíveis e recetivos à minha ajuda, colocando-me dúvidas. Como balanço final, posso dizer que foi muito gratificante trabalhar com estes alunos, pois são muito empenhados, curiosos, exigentes e disponíveis para atender aos meus pedidos.

As aulas lecionadas por mim não foram perfeitas, como seria aliás de esperar. Deste modo, tornaram-se uma oportunidade única para aprender. Pude experimentar múltiplas estratégias, refletindo quais delas funcionaram e em que momentos as poderia inserir numa aula. Para conseguir tirar o máximo partido desta experiência, foram fundamentais os comentários e as sugestões dos professores que me acompanharam, levando-me a refletir sobre os mais diversos aspetos relativos às minhas aulas, os quais me passariam ao lado, se não fosse este acompanhamento constante, tais como os conselhos sobre a forma de adaptar as minhas planificações perante as dificuldades dos alunos e a gestão dos momentos de discussão.

A realização de um trabalho de cunho interpretativo como este exigiu uma atitude de questionamento permanente e responsabilização pelas diversas escolhas com que me deparei. A análise de dados, num primeiro momento, foi uma das partes mais difíceis de realizar, talvez pela dificuldade em selecionar dados perante a quantidade de materiais recolhidos. No fim, a análise de dados mostrou ser uma etapa fundamental. Levou-me a perceber e a descobrir muita informação encoberta pela dinâmica de uma aula. Temos uma noção completamente diferente da aprendizagem dos nossos alunos quando temos oportunidade de analisar as suas produções e não nos limitarmos às perceções que vamos adquirindo no decorrer de uma aula.

Ao longo desta investigação, tive a oportunidade de refletir sobre as questões deste estudo, sobre as suas implicações para a minha prática profissional, tal como sobre a possibilidade de ter organizado a minha intervenção de outra forma para melhorar a aprendizagem dos alunos e para me permitir tirar conclusões ainda mais profunda. Como é óbvio, devido à minha reduzida inexperiência de prática de ensino, fui-me deparando com diversas coisas que poderia ter feito de outra forma, para conseguir mais informações interessantes para dar resposta às questões. Do mesmo modo, ao analisar as produções dos alunos fui-me apercebendo que algumas tarefas poderiam ter sido melhor aproveitadas para ultrapassar as dificuldades evidenciadas pelos alunos.

Em relação ao sentido de símbolo, os aspetos a este associado sobre os quais me baseei para construir as categorias de análise foram e ser-me-ão extramente úteis no trabalho com os alunos, permitindo uma identificação mais afinada destas dimensões visíveis no seu trabalho oral e escrito. Uma das maiores aprendizagens que fiz com este trabalho foi a de que não se pode catalogar um aluno como tendo ou não tendo sentido de símbolo. Um aluno tem sempre sentido de símbolo, pode estar mais, ou menos desenvolvido para a situação escolar em que se encontra inserido.

Depois desta experiência enriquecedora, fiquei deveras interessado em investigar algo mais sobre este tema, em especial sobre o sentido de símbolo nos alunos. Com o programa de Matemática do Ensino Básico atualmente em vigor e os percursos temáticos adotados, o 8.º ano de escolaridade fica caraterizado por ser um ano bastante rico no que diz respeito à Álgebra. Por isso, numa próxima oportunidade, gostaria de tentar analisar de que forma evolui o sentido de símbolo dos alunos ao longo do 8.º ano de escolaridade para tentar traçar um perfil de evolução, procurando perceber que atividades matemáticas contribuem para um maior desenvolvimento do sentido de símbolo.

Enquanto futuro professor, acredito que toda esta experiência foi bastante enriquecedora e que será relembrada todos os dias da minha vida para que eu me possa tornar um profissional melhor e, acima de tudo, um ser humano melhor, pois no fim de contas ser professor é acalentar sonhos, realizar desejos, mostrar caminhos, partilhar alegrias, conviver com as tristezas, transformar planos em realidade.

Referências

Abrantes, P., (1985). *Planificação no ensino da Matemática*. Texto de apoio à disciplina de Didática da Matemática II no ano letivo de 2010/2011.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14(3*), 24-35.

Arcavi, A. (2006). El desarrolo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Baumgart, J. (1994). *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: Álgebra.* S. Paulo: Atual editora.

Biklen, S. & Bogdan, R. (2003). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor: Nfer-Nelson.

Campos, A. R. M. (2010). *O discurso do professor no ensino e aprendizagem das equações literais no 8.º ano, no âmbito da experimentação do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico* (Relatório de prática de ensino supervisionada – Universidade de Lisboa).

Caraça. B. J. (1984). *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: Sá da Costa.

Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. In L. Rico (Coord.), *La educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-122). Barcelona: Editorial Horsori.

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Shifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 123-135). Reston, VA: NCTM.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2000). *Research methods in education.* Londres: Routledge & Falmer.

Direção Geral do Ensino Básico e Secundário (1991). *Organização curricular e Programas, vol. I.* Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf).

Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (2011). *Sequências e equações – proposta de sequências de tarefas para o 8.ºano – 3.º ciclo.* Lisboa: DGIDC (http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/056-cadeia_sequencias-e-equacoes.pdf).

Evalsed (2009), Manual Técnico II: Métodos e Técnicas de Avaliação – A Recolha de Dados: Técnicas de observação. (Retirado em Junho 12, 2012 de www.observatorio.pt/item1.php?lang=0&id_channel=16&id_page=548).

Fernandes, C. F. (2011). *Equações de 1.º grau – Estratégias e erros na resolução e simplificação de equações de 1.º grau.* (Relatório de prática de ensino supervisionada – Universidade de Lisboa).

Fiorentini, D., Miorim, A. & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar… a educação algébrica elementar. *Pro-posições, 4(1),* 78-90.

Grossmann, M. T. (2011). *O sentido do símbolo em alunos do ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem da Álgebra.* (Dissertação da Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Grossmann, M. T. & Ponte, J. P. (2011). O sentido do símbolo de um aluno e a álgebra do 12.º ano. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale, J.P. Ponte, (Eds.). *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Póvoa de Varzim: SPIEM..

Grossmann, M. T., Gonçalves, A. S. & Ponte, J. P. (2009). Um enquadramento do sentido de símbolo no 3.º ciclo. *Atas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (p. 547). Braga: Universidade do Minho.

Hall, R. (2002). *An analysis of errors made in the solution of simple linear equations.* (Retirado em Janeiro 17, 2012 de http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome15/hall_errors.pdf).

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D.W.Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Katz, V. J. (1998). *História da Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian (obra original em inglês, publicada em 2010).

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.) *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: Murray.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14,* 113-120.

Lins, R. C. & Gimenez, J. (1997). *Perspetivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus.

Magro, F. C., Fidalgo, F. & Louçano, P. (2011). *PI8 Matemática 8.º Ano Volume 2*. Lisboa: Asa Editores.

Matos, A. & Ponte, J. P. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8.ºano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11 (002),* 195-231.

Matos, A., Silvestre A. I., Branco, N. & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L.B. Nieto (Eds.), *Investigación en Matemática Educativa XII (*pp. 505-516). Badajoz: SEIEM.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática: Plano de Organização do Ensino - Aprendizagem: 3º ciclo do ensino básico.* (vol. II). Lisboa: Imprensa Nacional.

Moura, A. R. L. & Sousa, M. C. (2005). O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: Dois olhares diferentes. *Zetetiké, 13(24),* 11-45.

Nabais, M. (2010). *Equações do 2.º grau. Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano.* (Dissertação da Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, disponível em repositorio.ul.pt).

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM (obra original em inglês, publicada em 1989).

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM (obra original em inglês, publicada em 2000).

NCTM (2008). *Algebra: What, When, and for Whom. A position of the National Council of Teachers of Mathematics.* (Retirado em Março 8, 2012 de http://www.nctm.org/uploadedFiles/About_NCTM/Position_Statements/Algebra%20final%2092908.pdf).

Nogueira, D. & Viseu, F. (2011) O sentido do símbolo de alunos do 10.º ano de escolaridade. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale, J.P. Ponte, (Eds.).

Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática. Póvoa de Varzim: SPIEM.

Oliveira, C. & Torrado, G. (2009). *Resolução de tarefas envolvendo equações literais: um estudo no 9.ºano.* (Trabalho realizado no âmbito da disciplina Didática dos Números e da Álgebra do Mestrado em Didática da Matemática).

Oliveira, H. (2009). A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, 105, 83-86.

Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (1999) La ecuación linear com dos variables: entre la unicidade y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias,* 17 (3), 453-461.

Peral, L., & Gómez, J. (2003). Concepto de variable; dificultades de su uso a nível universitário. *Mosaicos Matematicos,* 11, 109-114.

Perrenoud, P. (1999). Formar professores em contextos sociais em mudança, Prática reflexiva e participação crítica (Tradução de Denice Barbara Catani). In Revista Brasileira de Educação, 12, 5-21. Acedido em 04 de Março de 2012, em: http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_1999/1999_34.html#Heading3.

Pesquita, I. (2007). *Álgebra e Pensamento Algébrico de Alunos do 8.º Ano.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Pesquita, I. & Ponte, J. P. (2006). Dificuldades dos alunos do 8.º ano no trabalho em Álgebra. *Atas de XV Encontro de Montegordo da SPCE*. Lisboa: SPCE.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/npmeb/Brochura_Algebra_ (Set2009). pdf).

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (p. 5-28). Lisboa: APM.

Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas Vasco Santana (Retirado em Março 12, 2012 de http://agvsantana.crie.fc.ul.pt/).

Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 55-62). Dordrecht: Kluwer.

Roldão, M. C. (2010). *Estratégias de Ensino. O saber e o agir do professor*. Vila Nova de Gaia: Fundação Manuel Leão.

Saraiva, M. J., Pereira, M. N. & Berrincha, R.I. (2010) *Sequências e expressões algébricas. Aprendizagem da resolução de equações a partir de igualdades numéricas.* Projecto IMLNA – Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra. Lisboa. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and piftalls of reification: The case of álgebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Silva, J. S. & Paulo, J. D. S. (1968) *Compêndio de Álgebra 1.º Tomo*. Braga: Livraria Cruz.

Silva, J. S. & Paulo, J. D. S. (1968) *Compêndio de Álgebra 2.º Tomo*. Braga: Livraria Cruz.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18(2*), 149-167.

Schoenfeld, A.H. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher. 81(6),* 420-427

Teixeira, C. (2011). *Resolução de problemas em Contexto Geométrico – O Estudo de Triângulos no 7.º Ano* (Relatório de prática de ensino supervisionada – Universidade de Lisboa).

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebras*, *K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Anexos

ANEXO I – Planificação da 1.ª aula

Tema: Álgebra

Unidade Temática: Sequências e Regularidades. Equações.

Subtema: Equações Literais

Sumário	**Ano/Turma: 8ºD**
Equações Literais: resolução de uma ficha de trabalho.	**Lição n.º** 126/127 **Data:** 19-Abril-2012 **Hora:** 08h20min – 09h50min

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Resolver equações literais em ordem a uma das letras;
- Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa;
- Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Compreender as noções de equação e solução de uma equação e identificar equações equivalentes;
- Resolver equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução;
- Resolver sistemas de equações pelo método de substituição;

TAREFAS (Anexo II)

- Tarefa 2: Equações Literais

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Trabalho a pares;
- Discussão e síntese em turma:
    - O aluno terá um papel de comunicador, explicitando e justificando as

estratégias utilizadas;
- O professor terá um papel orientador, garantindo a existência de:
    - Intervenções ordeiras
    - Rigor de linguagem
    - Síntese dos principais conteúdos

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- **1º Momento – Entrada (5 min.)** **[08h20-08h25]**
    - Os alunos entram na sala de aula.
    - O professor escreve o sumário.

- **2º Momento – Apresentação da Tarefa (5min.)** **[08h25-08h30]**
    - O professor informa os alunos sobre a metodologia de trabalho.
    - O professor distribuiu uma ficha por cada aluno.
    - O professor informa os alunos sobre as fases de trabalho e os tempos disponíveis;

- **3º Momento – Resolução da Tarefa (30 min.)** **[08h30-09h00]**
    - Nesta primeira fase da resolução de tarefa, os alunos devem resolver da questão 1 à 3.
    - Os alunos trabalham em pares.
    - O professor circula pela sala.
    - O professor regista interações entre alunos, questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere interessantes para a discussão.
    - O professor deve responder às dúvidas dos alunos, questionando os colegas do grupo e colocando questões ao próprio aluno para que este consiga chegar sozinho ao esclarecimento da sua dúvida;
    - Ao fim dos 30 minutos, mesmo que nem todos os alunos tenham chegado à questão 3, o professor deve começar a correção.

- **4º Momento – Correção e Discussão da Tarefa (20 min.)** **[09h00-09h20]**
    - O professor intervém para:
        - Incentivar os alunos a participar na discussão de forma a complementarem o trabalho dos colegas e apresentarem resoluções alternativas.
        - Promover/Dinamizar a discussão solicitando justificações

fundamentadas;
    - Melhorar a clareza e o rigor no discurso;
  - O professor deve ter em atenção se:
    - São apresentadas todas as resoluções distintas que existam;
    - Ficam esclarecidas as dúvidas dos alunos;
  - Os alunos dirigem-se ao quadro sempre que:
    - Surjam dificuldades por parte de vários alunos;
    - Exista uma resolução que deva ser registada por todos;

- **5º Momento – Síntese dos conteúdos (10 min.)** **[09h20-09h30]**
  - O professor deve formalizar o trabalho desenvolvido com equações literais;
  - O professor deve esclarecer que uma equação literal é uma equação em que figuram duas ou mais variáveis.
  - O professor deve referir outras relações presentes na natureza e na matemática que podem ser apresentadas sobre a forma de equação literal (por exemplo: $v = \frac{d}{t}$ em que d distância e t tempo; $P = 2c + 2l$ onde P é o perímetro de um retângulo.
  - O professor deve insistir com o facto de os alunos já terem trabalhado com equações literais na resolução de sistemas de equações.

- **6º Momento – Resolução da Tarefa (15 min.)** **[09h30-09h45]**
  - Nesta fase, os alunos continuam a resolver a tarefa.
  - Os alunos trabalham em pares.
  - O professor circula pela sala.
  - O professor regista interações entre alunos, questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere interessantes para a discussão.
  - O professor deve responder às dúvidas dos alunos, questionando os colegas do grupo e colocando questões ao próprio aluno para que este consiga chegar sozinho ao esclarecimento da sua dúvida;

- **7º Momento – Encerramento (5min.)** **[09h45-09h50]**
  - O professor recolhe as fichas de trabalho.
  - O professor dá por terminada a aula e os alunos saem.

RECURSOS

- Papel e material de escrita

• Calculadora

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO
 	
FORMATIVA:
• A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:
    • Interesse demonstrado durante a aula.
    • Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/discussão da tarefa.
    • Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
    • Uso da terminologia e simbologia adequada.
    • Comportamento na sala de aula
• Construção de uma grelha de observação do trabalho dos alunos onde se pretende sintetizar:
    • Questões feitas pelos alunos;
    • Erros mais frequentes;
    • Diferentes resoluções;
• Elaboração de um diário de bordo

ANEXO I – Planificação da 2.ª aula

<table>
<tr><td colspan="2">

Tema: Álgebra

Unidade Temática: Sequências e Regularidades. Equações.

Subtema: Equações Literais

</td></tr>
<tr><td>

Sumário

Equações Literais: continuação da aula anterior.

</td><td>

Ano/Turma: 8ºD
Lição n.º 128
Data: 20-Abril-2012
Hora: 13h35min – 14h20min

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Resolver equações literais em ordem a uma das letras;
- Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa;
- Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Compreender as noções de equação e solução de uma equação e identificar equações equivalentes;
- Resolver equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução;
- Resolver sistemas de equações pelo método de substituição;

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

TAREFAS (Anexo II)

- Tarefa 2: Equações Literais

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Trabalho a pares;
- Discussão e síntese em turma:
  - O aluno terá um papel de comunicador, explicitando e justificando as

</td></tr>
</table>

estratégias utilizadas;

- O professor terá um papel orientador, garantindo a existência de:
    - Intervenções ordeiras
    - Rigor de linguagem
    - Síntese dos principais conteúdos

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- **1º Momento – Entrada (5 min.)** **[13h35-13h40]**
    - Os alunos entram na sala de aula.
    - O professor escreve o sumário.
    - O professor entregue as fichas de trabalho do dia anterior

- **2º Momento – Resolução da Tarefa (15 min.)** **[13h40-13h55]**
    - Nesta primeira fase da resolução de tarefa, os alunos devem concluir a tarefa (exceto questão 6 b), c) e e)).
    - Os alunos trabalham em pares.
    - O professor circula pela sala.
    - O professor regista interações entre alunos, questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere interessantes para a discussão.
    - O professor deve responder às dúvidas dos alunos, questionando os colegas do grupo e colocando questões ao próprio aluno para que este consiga chegar sozinho ao esclarecimento da sua dúvida;
    - Ao fim dos 15 minutos, mesmo que nem todos os alunos tenham chegado ao final, o professor deve começar a correção.

- **4º Momento – Correção e Discussão da Tarefa (15 min.)** **[13h55-14h10]**
    - O professor intervém para:
        - Incentivar os alunos a participar na discussão de forma a complementarem o trabalho dos colegas e apresentarem resoluções alternativas.
        - Promover/Dinamizar a discussão solicitando justificações fundamentadas;
        - Melhorar a clareza e o rigor no discurso;
    - O professor deve ter em atenção se:
        - São apresentadas todas as resoluções distintas que existam;

- Ficam esclarecidas as dúvidas dos alunos;
- Os alunos dirigem-se ao quadro sempre que:
  - Surjam dificuldades por parte de vários alunos;
  - Exista uma resolução que deva ser registada por todos;

- **5º Momento – Apresentação do Desafio Semanal (5 min.)** **[14h10-14h15]**
  - O professor informa que todas as sextas-feiras irá entregar um pequeno desafio para pensarem durante a semana, para ser discutido na próxima aula.
  - O professor apresenta o desafio.

- **6º Momento – Encerramento (5min.)** **[14h15-14h20]**
  - O professor recolhe as fichas de trabalho.
  - O professor informa sobre o trabalho de casa (Questões 6 b), c) e e) da Ficha)
  - O professor dá por terminada a aula e os alunos saem.

RECURSOS

- Papel e material de escrita
- Calculadora

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

FORMATIVA:

- A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:
  - Interesse demonstrado durante a aula.
  - Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/discussão da tarefa.
  - Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
  - Uso da terminologia e simbologia adequada.
  - Comportamento na sala de aula
- Construção de uma grelha de observação do trabalho dos alunos onde se pretende sintetizar:
  - Questões feitas pelos alunos;
  - Erros mais frequentes;
  - Diferentes resoluções;
- Elaboração de um diário de bordo

ANEXO I – Planificação da 3.ª aula

Tema: Álgebra **Unidade Temática:** Sequências e Regularidades. Equações. **Subtema:** Expressões algébricas. Operações com polinómios.	
Sumário Expressões algébricas. Resolução de uma ficha de trabalho.	**Ano/Turma: 8ºD** **Lição n.º** 129/130 **Data:** 26-Abril-2012 **Hora:** 08h20min – 09h50min
OBJECTIVOS ESPECÍFICOS • Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra; • Simplificar expressões algébricas; • Efetuar operações com polinómios (adição algébrica e multiplicação); • Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa; • Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;	
CONHECIMENTOS PRÉVIOS • Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados; • Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral; • Simplificar expressões algébricas que envolvam a adição de monómios;	
TAREFAS (Anexo II) • Tarefa 3: Expressões Algébricas e Operações com polinómios. • Desafios Semanais.	
METODOLOGIA DE TRABALHO	

- Trabalho a pares;
- Discussão e síntese em turma:
  - O aluno terá um papel de comunicador, explicitando e justificando as estratégias utilizadas;
  - O professor terá um papel orientador, garantindo a existência de:
    - Intervenções ordeiras
    - Rigor de linguagem
    - Síntese dos principais conteúdos

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- **1º Momento – Entrada (5 min.)** **[08h20-08h25]**
  - Os alunos entram na sala de aula.
  - O professor escreve o sumário.

- **2º Momento – Apresentação da Tarefa (3 min.)** **[08h25-08h28]**
  - O professor informa os alunos sobre a metodologia de trabalho.
  - O professor distribuiu uma ficha por cada aluno.
  - O professor informa os alunos sobre as fases de trabalho e os tempos disponíveis.

- **3º Momento – Resolução da Tarefa (40 min.)** **[08h28-09h08]**
  - Nesta primeira fase da resolução de tarefa, os alunos devem resolver a questão 1 e a 2.
  - Os alunos trabalham em pares.
  - O professor circula pela sala.
  - O professor regista interações entre alunos, questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere interessantes para a discussão.
  - O professor deve responder às dúvidas dos alunos, questionando os colegas do grupo e colocando questões ao próprio aluno para que este consiga chegar sozinho ao esclarecimento da sua dúvida.
  - Ao fim dos 40 minutos, mesmo que nem todos os alunos tenham chegado ao final da questão 2, o professor deve começar a correção.

- **4º Momento – Correção e Discussão da Tarefa (30 min.)** **[09h08-09h38]**
  - O professor intervém para:

- Incentivar os alunos a participar na discussão de forma a complementarem o trabalho dos colegas e apresentarem resoluções alternativas.
- Promover/Dinamizar a discussão solicitando justificações fundamentadas.
- Melhorar a clareza e o rigor no discurso.

- O professor deve ter em atenção se:
  - São apresentadas todas as resoluções distintas que existam.
  - Ficam esclarecidas as dúvidas dos alunos.
  - Os alunos compreendem o processo de simplificar expressões algébricas.
- Os alunos dirigem-se ao quadro sempre que:
  - Surjam dificuldades por parte de vários alunos.
  - Exista uma resolução que deva ser registada por todos.

- **5º Momento – Desafio Matemático – Discussão dos resultados (10 min.) [09h38-09h48]**
  - O professor questiona os alunos sobre quem conseguiu resolver o desafio da semana passada.
  - Os alunos com resoluções diferentes apresentam-nas à turma.

- **6º Momento – Encerramento (2min.) [09h48-09h50]**
  - O professor recolhe as fichas de trabalho.
  - O professor dá por terminada a aula e os alunos saem.

RECURSOS

- Papel e material de escrita
- Calculadora

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

FORMATIVA:

- A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:
  - Interesse demonstrado durante a aula.
  - Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/discussão da tarefa.
  - Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
  - Uso da terminologia e simbologia adequada.

    - Comportamento na sala de aula

- Construção de uma grelha de observação do trabalho dos alunos onde se pretende sintetizar:
    - Questões feitas pelos alunos
    - Erros mais frequentes
    - Diferentes resoluções
- Elaboração de um diário de bordo

ANEXO I – Planificação da 4.ª aula

Tema: Álgebra

Unidade Temática: Sequências e Regularidades. Equações.

Subtema: Equações Literais

Sumário	**Ano/Turma: 8ºD**
Resolução de exercícios envolvendo expressões algébricas e equações literais.	**Lição n.º** 131 **Data:** 27-Abril-2012 **Hora:** 13h35min – 14h20min

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Resolver equações literais em ordem a uma das letras;
- Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Compreender as noções de equação e solução de uma equação e identificar equações equivalentes;
- Resolver equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução;

TAREFAS (Anexo II)

- Tarefa 2: Equações Literais
- Tarefa 3: Expressões algébricas e Operações com Polinómios
- Desafios Semanais

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Trabalho a pares;
- Discussão e síntese em turma:
  - O aluno terá um papel de comunicador, explicitando e justificando as estratégias utilizadas;
  - O professor terá um papel orientador, garantindo a existência de:

- Intervenções ordeiras
- Rigor de linguagem
- Síntese dos principais conteúdos

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- **1º Momento – Entrada (5 min.)** **[13h35-13h40]**
  - Os alunos entram na sala de aula.
  - O professor escreve o sumário.
  - O professor entregue as fichas de trabalho da semana anterior.

- **2º Momento – Correção e Discussão da Tarefa 3 (10 min.)** **[13h40-13h50]**
  - Correção das questões 3.3 e 3.4.
  - O professor intervém para:
    - Incentivar os alunos a participar na discussão de forma a complementarem o trabalho dos colegas e apresentarem resoluções alternativas.
    - Promover/Dinamizar a discussão solicitando justificações fundamentadas.
    - Melhorar a clareza e o rigor no discurso.
  - O professor deve registar as resoluções das alíneas em falta, dando especial atenção à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

- **3º Momento – Desafio Semanal – Discussão dos resultados (10 min.)** **[13h50-14h00]**
  - O professor questiona os alunos sobre quem conseguiu resolver o desafio da semana passada.
  - Os alunos com resoluções diferentes apresentam-nas à turma.

- **4º Momento – Equações literais (18 min.)** **[14h00-14h18]**
  - Uma vez que os alunos não terminaram a tarefa 2 e sentiram algumas dificuldades em resolver equações literais, deverão concluir a tarefa.
  - A correção será feita em paralelo com a resolução da tarefa.
  - Os alunos que terminarem a tarefa antes, deverão resolver algumas equações literais propostas pelo professor (escritas no quadro).

- **5º Momento – Desafio Semanal e Encerramento (2 min.)** **[14h18-14h20]**

- O professor entrega o desafio da semana.
- O professor recolhe as fichas de trabalho.
- O professor dá por terminada a aula e os alunos saem.

RECURSOS

- Papel e material de escrita
- Calculadora

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

FORMATIVA:

- A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:
  - Interesse demonstrado durante a aula.
  - Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/discussão da tarefa.
  - Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
  - Uso da terminologia e simbologia adequada.
  - Comportamento na sala de aula.
- Construção de uma grelha de observação do trabalho dos alunos onde se pretende sintetizar:
  - Questões feitas pelos alunos.
  - Erros mais frequentes.
  - Diferentes resoluções.
- Elaboração de um diário de bordo.

ANEXO I – Planificação da 5.ª aula

Tema: Álgebra **Unidade Temática:** Sequências e Regularidades. Equações. **Subtema:** Expressões algébricas. Operações com polinómios.	
Sumário Monómio e Polinómio. Operações com Polinómios: adição e multiplicação de polinómios.	**Ano/Turma: 8ºD** **Lição n.º** 132/133 **Data:** 02-Maio-2012 **Hora:** 13h35min – 15h05min
OBJECTIVOS ESPECÍFICOS • Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra; • Simplificar expressões algébricas; • Efetuar operações com polinómios (adição algébrica e multiplicação); • Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;	
CONHECIMENTOS PRÉVIOS • Simplificar expressões algébricas que envolvam a adição de monómios;	
TAREFAS (Anexo II) • Tarefa 3: Expressões Algébricas e Operações com polinómios. • Desafios Semanais. • Manual (páginas 35 e 48)	
METODOLOGIA DE TRABALHO • Trabalho a pares. • Discussão e síntese em turma: • O aluno terá um papel de comunicador, explicitando e justificando as estratégias utilizadas.	

- O professor terá um papel orientador, garantindo a existência de:
    - Intervenções ordeiras
    - Rigor de linguagem
    - Síntese dos principais conteúdos

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- **1º Momento – Entrada (5 min.)** **[13h35-13h40]**
    - Os alunos entram na sala de aula.
    - O professor escreve o sumário.

- **2º Momento – Desafio Matemático – Discussão dos resultados (12 min.)** **[13h40-13h52]**
    - O professor questiona os alunos sobre quem conseguiu resolver os desafios das semanas passadas.
    - Os alunos com resoluções diferentes apresentam-nas à turma.

- **3º Momento – Discussão dos conceitos Monómio e Polinómio (18 min.)** **[13h52-14h10]**
    - O professor faz uma exposição no quadro sobre o que é um monómio e um polinómio, apresentando-os como conceitos distintos.
    - Através de exemplos concretos, o professor irá apresentar os vários conceitos que acompanham o conceito de monómio: coeficiente, parte literal, grau, monómio simétrico, monómios semelhantes.
    - Sempre que possível, o professor deve pedir a participação dos alunos.
    - Para consolidar esta discussão, os alunos deverão fazer como trabalho de casa o exercício 1 da página 48 e o exercício 4 da página 35 do manual.

- **4º Momento – Apresentação da Tarefa (3 min.)** **[14h10-14h13]**
    - O professor informa os alunos sobre a metodologia de trabalho.
    - O professor distribuiu uma ficha por cada aluno.
    - O professor informa os alunos sobre as fases de trabalho e os tempos disponíveis.
    - Os alunos continuam a tarefa da passada Quinta-feira (questões 3 e 4).

- **5º Momento – Resolução da Tarefa (30 min.)** **[14h13-14h43]**

- Os alunos devem resolver as questões 3 e 4.
- Os alunos trabalham em pares.
- O professor circula pela sala.
- O professor regista interações entre alunos, questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere interessantes para a discussão.
- O professor deve responder às dúvidas dos alunos, questionando os colegas do grupo e colocando questões ao próprio aluno para que este consiga chegar sozinho ao esclarecimento da sua dúvida.

- **6º Momento – Correção e Discussão da Tarefa (20 min.) [14h43-15h03]**
  - O professor intervém para:
    - Incentivar os alunos a participar na discussão de forma a complementarem o trabalho dos colegas e apresentarem resoluções alternativas.
    - Promover/Dinamizar a discussão solicitando justificações fundamentadas.
    - Melhorar a clareza e o rigor no discurso.
  - O professor deve ter em atenção se:
    - São apresentadas todas as resoluções distintas que existam.
    - Ficam esclarecidas as dúvidas dos alunos.
  - Os alunos dirigem-se ao quadro sempre que:
    - Surjam dificuldades por parte de vários alunos.
    - Exista uma resolução que deva ser registada por todos.

- **7º Momento – Encerramento (2 min.) [15h03-15h05]**
  - O professor recolhe as fichas de trabalho.
  - O professor dá por terminada a aula e os alunos saem.

RECURSOS

- Papel e material de escrita
- Calculadora

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

FORMATIVA:

- A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/discussão da tarefa.
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
- Uso da terminologia e simbologia adequada.
- Comportamento na sala de aula.

- Construção de uma grelha de observação do trabalho dos alunos onde se pretende sintetizar:
    - Questões feitas pelos alunos.
    - Erros mais frequentes.
    - Diferentes resoluções.
- Elaboração de um diário de bordo.

ANEXO I – Planificação da 6.ª aula

Tema: Álgebra

Unidade Temática: Equações.

Subtema: Operações com polinómios.

Sumário	
Casos notáveis da multiplicação: o quadrado de um binómio. Resolução de uma ficha de trabalho.	**Ano/Turma: 8ºD** **Lição n.º** 134/135 **Data:** 03-Maio-2012 **Hora:** 08h20min – 09h50min

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Efetuar operações com polinómios (adição algébrica e multiplicação);
- Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios;
- Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Determinar termos de uma sequência;
- Determinar o termo geral de uma sequencia;
- Simplificar expressões algébricas;
- Compreender a noção de expressões algébricas equivalentes;
- Operar com polinómios: adição algébrica e multiplicação;

TAREFAS (Anexo II)

- Tarefa 4: O quadrado do binómio (Manual pg. 36).

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Trabalho em grupos de 4 elementos.
- Discussão e síntese em turma:

- O aluno terá um papel de comunicador, explicitando e justificando as estratégias utilizadas;
- O professor terá um papel orientador, garantindo a existência de:
    - Intervenções ordeiras
    - Rigor de linguagem
    - Síntese dos principais conteúdos

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- **1º Momento – Entrada (5 min.)** **[08h20-08h25]**
    - Os alunos entram na sala de aula.
    - O professor escreve o sumário.

- **2º Momento – Apresentação da Tarefa (5 min.)** **[08h25-08h30]**
    - O professor informa os alunos sobre a metodologia de trabalho: trabalho em grupos de 4 elementos e a tarefa está dividida em duas partes.
    - O professor distribuiu uma ficha por cada aluno.
    - O professor informa os alunos sobre as fases de trabalho e os tempos disponíveis;

- **3º Momento – Resolução da Tarefa (Parte I) (20 min.)** **[08h30-08h50]**
    - Os alunos devem resolver a questão 1;
    - Os alunos trabalham em grupo.
    - O professor circula pela sala.
    - O professor regista interações entre alunos, questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere interessantes para a discussão.
    - O professor deve responder às dúvidas dos alunos, questionando os colegas do grupo e colocando questões ao próprio aluno para que este consiga chegar sozinho ao esclarecimento da sua dúvida;

- **4º Momento – Correção e Discussão da Tarefa (Parte I) (15 min.)** **[08h50-09h05]**
    - O professor intervém para:
        - Incentivar os alunos a participar na discussão de forma a complementarem o trabalho dos colegas e apresentarem resoluções alternativas.
        - Promover/Dinamizar a discussão solicitando justificações

fundamentadas;
    - Melhorar a clareza e o rigor no discurso;
  - O professor deve ter em atenção se:
    - São apresentadas todas as resoluções distintas que existam;
    - Ficam esclarecidas as dúvidas dos alunos;
  - Os alunos dirigem-se ao quadro sempre que:
    - Surjam dificuldades por parte de vários alunos;
    - Exista uma resolução que deva ser registada por todos;

- **5º Momento – Resolução da Tarefa (Parte II) (20 min.)** **[09h05-09h25]**
  - Os alunos devem resolver a questão 2;
  - Os alunos trabalham em grupo.
  - O professor circula pela sala.
  - O professor regista interações entre alunos, questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere interessantes para a discussão.
  - O professor deve responder às dúvidas dos alunos, questionando os colegas do grupo e colocando questões ao próprio aluno para que este consiga chegar sozinho ao esclarecimento da sua dúvida;

- **6º Momento – Correção e Discussão da Tarefa (Parte II) (15 min.)** **[09h25-09h40]**
  - O professor deve realçar a equivalência das expressões algébricas obtidas;
  - O professor intervém para:
    - Incentivar os alunos a participar na discussão de forma a complementarem o trabalho dos colegas e apresentarem resoluções alternativas.
    - Promover/Dinamizar a discussão solicitando justificações fundamentadas;
    - Melhorar a clareza e o rigor no discurso;
  - O professor deve ter em atenção se:
    - São apresentadas todas as resoluções distintas que existam;
    - Ficam esclarecidas as dúvidas dos alunos;
  - Os alunos dirigem-se ao quadro sempre que:
    - Surjam dificuldades por parte de vários alunos;
    - Exista uma resolução que deva ser registada por todos;

- **7º Momento – Síntese do Quadrado do Binómio (9 min.)** **[09h40-09h49]**
    - Com a discussão gerada, o professor deve promover a consciencialização por parte dos alunos de que se pode desenvolver rapidamente a expressão que traduz o quadrado do binómio;
    - O professor deve proporcionar o estudo do quadrado de uma diferença recorrendo à manipulação algébrica de que $a - b = a + (-b)$;
    - O professor deverá registar as duas fórmulas no quadro para que os alunos as passem;
    - Caso ainda haja tempo, o professor deverá apresentar alguns binómios para que os alunos ponham em prática as fórmulas obtidas;

- **8º Momento – Encerramento (1 min.)** **[09h49-09h50]**
    - O professor dá por terminada a aula e os alunos saem.

RECURSOS

- Papel e material de escrita
- Calculadora

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

FORMATIVA:

- A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:
    - Interesse demonstrado durante a aula.
    - Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/discussão da tarefa.
    - Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
    - Uso da terminologia e simbologia adequada.
    - Comportamento na sala de aula
- Construção de uma grelha de observação do trabalho dos alunos onde se pretende sintetizar:
    - Questões feitas pelos alunos;
    - Erros mais frequentes;
    - Diferentes resoluções;
- Elaboração de um diário de bordo

ANEXO I – Planificação da 7.ª aula

Tema: Álgebra **Unidade Temática:** Equações. **Subtema:** Operações com polinómios.	
Sumário Resolução de exercícios com polinómios.	**Ano/Turma: 8ºD** **Lição n.º** 136 **Data:** 04-Maio-2012 **Hora:** 13h35min – 14h20min

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Efetuar operações com polinómios (adição algébrica e multiplicação);
- Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios;
- Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Simplificar expressões algébricas;
- Compreender a noção de expressões algébricas equivalentes;
- Operar com polinómios: adição algébrica e multiplicação;

TAREFAS (Anexo II)

- Tarefa 3: Expressões algébricas e Operações com Polinómios
- Tarefa 4: O Quadrado do Binómio.
- Manual (pg. 48)
- Desafios Semanais.

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Trabalho em pares.
- Discussão e síntese em turma:
    - O aluno terá um papel de comunicador, explicitando e justificando as

estratégias utilizadas;

- O professor terá um papel orientador, garantindo a existência de:
    - Intervenções ordeiras
    - Rigor de linguagem
    - Síntese dos principais conteúdos

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- **1º Momento – Entrada (5 min.)** **[13h35-13h40]**
    - Os alunos entram na sala de aula.
    - O professor escreve o sumário.

- **2º Momento – Conclusão da Tarefa 4 (15 min.)** **[13h40-13h55]**
    - O professor deve promover a consciencialização por parte dos alunos de que se pode desenvolver rapidamente a expressão que traduz o quadrado do binómio;
    - O professor deve proporcionar o estudo do quadrado de uma diferença recorrendo à manipulação algébrica de que $a - b = a + (-b)$;
    - O professor deverá registar as duas fórmulas no quadro para que os alunos as passem;
    - O professor deverá apresentar alguns binómios para que os alunos ponham em prática as fórmulas obtidas;

- **3º Momento – Correção da Tarefa 3 (20 min.)** **[13h55-14h15]**
    - O professor deve solicitar aos alunos para corrigirem a questão 3 e 4, insistindo em alguns erros cometidos por estes;
    - Caso se corrija a tarefa toda, o professor deverá propor a resolução da questão 2 da página 48;
    - O professor deve responder às dúvidas dos alunos, questionando os colegas do grupo e colocando questões ao próprio aluno para que este consiga chegar sozinho ao esclarecimento da sua dúvida;

- **4º Momento – Desafio Matemático e Encerramento (5 min.)** **[14h15-14h20]**
    - O professor entrega o desafio semanal.
    - O professor dá por terminada a aula e os alunos saem.

RECURSOS

- Papel e material de escrita
- Calculadora

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

FORMATIVA:

- A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:
    - Interesse demonstrado durante a aula.
    - Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/discussão da tarefa.
    - Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
    - Uso da terminologia e simbologia adequada.
    - Comportamento na sala de aula
- Construção de uma grelha de observação do trabalho dos alunos onde se pretende sintetizar:
    - Questões feitas pelos alunos;
    - Erros mais frequentes;
    - Diferentes resoluções;
- Elaboração de um diário de bordo

ANEXO I – Planificação da 8.ª aula

Tema: Álgebra

Unidade Temática: Equações.

Subtema: Operações com polinómios.

Sumário	**Ano/Turma: 8ºD**
Casos notáveis da multiplicação: a diferença de quadrados.	**Lição n.º** 137/138 **Data:** 09-Maio-2012 **Hora:** 13h35min – 15h05min

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Efetuar operações com polinómios (adição algébrica e multiplicação);
- Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios;
- Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Determinar termos de uma sequência;
- Determinar o termo geral de uma sequência;
- Simplificar expressões algébricas;
- Compreender a noção de expressões algébricas equivalentes;
- Operar com polinómios: adição algébrica e multiplicação;

TAREFAS (Anexo II)

- Tarefa 5: A Diferença de Quadrados.
- Desafios Semanais.

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Trabalho em pares.
- Discussão e síntese em turma:
    - O aluno terá um papel de comunicador, explicitando e justificando as

estratégias utilizadas;

- O professor terá um papel orientador, garantindo a existência de:
    - Intervenções ordeiras
    - Rigor de linguagem
    - Síntese dos principais conteúdos

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- **1º Momento – Entrada (5 min.)**[13h35-13h40]
    - Os alunos entram na sala de aula.
    - O professor escreve o sumário.

- **2º Momento – Discussão dos Desafios Matemáticos (10 min.)**[13h40-13h50]
    - O professor questiona os alunos sobre quem conseguiu resolver os desafios das duas semanas anteriores.
    - Os alunos com resoluções diferentes apresentam-nas à turma.

- **3º Momento – Apresentação da Tarefa (5 min.)**[13h50-13h55]
    - O professor informa os alunos sobre a metodologia de trabalho.
    - O professor distribuiu uma ficha por cada aluno.
    - O professor informa os alunos sobre as fases de trabalho e os tempos disponíveis;

- **4º Momento – Resolução da Tarefa (25 min.)** [13h55-14h20]
    - Os alunos devem resolver a questão 1;
    - Os alunos trabalham em pares.
    - O professor circula pela sala.
    - O professor regista interações entre alunos, questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere interessantes para a discussão.
    - O professor deve responder às dúvidas dos alunos, questionando os colegas do grupo e colocando questões ao próprio aluno para que este consiga chegar sozinho ao esclarecimento da sua dúvida;

- **5º Momento – Correção e Discussão da Tarefa (15 min.)** [14h20-14h35]
    - O professor intervém para:
        - Incentivar os alunos a participar na discussão de forma a

complementarem o trabalho dos colegas e apresentarem resoluções alternativas.

        - Promover/Dinamizar a discussão solicitando justificações fundamentadas;
        - Melhorar a clareza e o rigor no discurso;
    - O professor deve ter em atenção se:
        - São apresentadas todas as resoluções distintas que existam;
        - Ficam esclarecidas as dúvidas dos alunos;
    - Os alunos dirigem-se ao quadro sempre que:
        - Surjam dificuldades por parte de vários alunos;
        - Exista uma resolução que deva ser registada por todos;

- **6º Momento – Síntese da Diferença de Quadrados (10 min.)** **[14h35-14h45]**
    - Com a discussão gerada, o professor deve promover a consciencialização por parte dos alunos de que se pode desenvolver rapidamente a expressão que traduz a diferença de quadrados;
    - O professor deverá registar as duas fórmulas no quadro para que os alunos as passem;

- **7º Momento – Resolução da Tarefa (19 min.)** **[14h45-15h04]**
    - Os alunos devem resolver a questão 2;
    - Os alunos trabalham em pares.
    - O professor circula pela sala.
    - O professor regista interações entre alunos, questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere interessantes para a discussão.
    - O professor deve responder às dúvidas dos alunos, questionando os colegas do grupo e colocando questões ao próprio aluno para que este consiga chegar sozinho ao esclarecimento da sua dúvida;

- **8º Momento – Encerramento (1min.)** **[15h04-15h05]**
    - O professor dá por terminada a aula e os alunos saem.

RECURSOS

- Papel e material de escrita
- Calculadora

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

FORMATIVA:

- A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:
    - Interesse demonstrado durante a aula.
    - Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/discussão da tarefa.
    - Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
    - Uso da terminologia e simbologia adequada.
    - Comportamento na sala de aula
- Construção de uma grelha de observação do trabalho dos alunos onde se pretende sintetizar:
    - Questões feitas pelos alunos;
    - Erros mais frequentes;
    - Diferentes resoluções;
- Elaboração de um diário de bordo

ANEXO II – Tarefa 1

	Agrupamento de Escolas Vasco Santana *8.º* *Rever Equações*	**Matemática**
Nome:____ **N.º** ___		

1. Resolve cada uma das equações:

1.1. $2(3-x)=5x-1$

1.2. $\frac{1-x}{3}+\frac{4(x-3)}{6}=0$

1.3. $3+\frac{2x-5}{3}=-\frac{x-6}{4}$

ANEXO II – Tarefa 2

Agrupamento de Escolas Vasco Santana **8.º** Equações Literais	**Matemática**

Nome:____ **N.º** ___

A medição da temperatura é feita usando uma escala. As três mais conhecidas e utilizadas são as escalas **Celsius** (°C) [1701-1744], **Fahrenheit** (°F) [1686-1736] e **Kelvin** (K) [1824-1907]. Em Portugal, por exemplo, usamos a escala Celsius enquanto na Inglaterra usam a de Fahrenheit[1].


Fahrenheit


Celsius


Kelvin

1. Uma fórmula que relaciona a temperatura expressa em graus Celsius (C) com a temperatura expressa em graus Fahrenheit (F) é a seguinte:

$$\frac{F-32}{9}=\frac{C}{5}$$

   1.1. Sabendo que, na escala Celsius, a água passa do estado líquido para o estado sólido a 0°C e que a água entra em ebulição a 100°C, calcula na escala Fahrenheit as temperaturas a que estes processos ocorrem.

   1.2. Resolve em ordem a F a equação que relaciona graus Celsius com graus Fahrenheit.

   1.3. Utiliza a alínea anterior para determinar a temperatura média do corpo humano em graus Fahrenheit que, em graus Celsius, é de 36,5°C. Quais as vantagens em usar esta equação em vez da equação dada inicialmente?

   1.4. Resolva em ordem a C a equação que relaciona graus Celsius com graus Fahrenheit.

2. A conversão de graus Celsius para graus Kelvin é feita da seguinte forma: adicionar 273 aos graus Celsius.

   2.1. A água congela aos 0°C e entra em ebulição aos 100°C. Quais são os valores correspondentes na escala Kelvin?

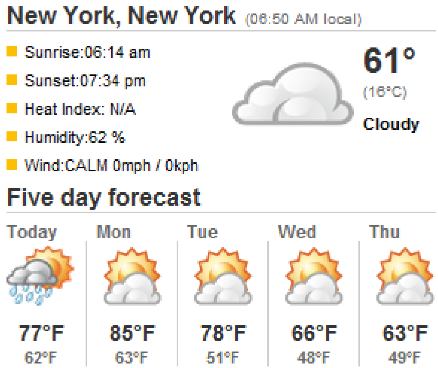
---

[1] Adaptado de "Proposta de Sequências de Tarefas para o 8.º ano"- DGIDC

2.2. Escreve uma expressão algébrica que permita converter uma temperatura em graus Celsius para graus Kelvin.

3. Encontra uma fórmula que permita converter diretamente uma temperatura expressa em graus Kelvin para graus Fahrenheit.

4. Nos Estados Unidos da América, a escala de temperatura habitualmente usada é a escala Fahrenheit. Observa a informação meteorológica publicada na Internet no dia 15-04-2012 para a cidade de New York.[2]



4.1. O Rodrigo está a planear fazer uma viagem a New York esta semana e tem que fazer a mala mas não sabe se deve levar roupa para o frio ou para o calor. O que achas? Porquê?

5. Descobre o erro em cada uma das resoluções e corrige-o[3].

5.1. Escrever a equação $3x - b = y$ em ordem a b
Resolução:

$$\begin{aligned} &3x - b = y \\ \Leftrightarrow\ &-b = 3x - y \\ \Leftrightarrow\ &b = -3x + y \end{aligned}$$

5.2. Escrever a equação $1{,}3y + 2{,}6a = -x$ em ordem a y
Resolução:

$$\begin{aligned} &1{,}3y + 2{,}6a = -x \\ \Leftrightarrow\ &1{,}3y = -x - 2{,}6a \\ \Leftrightarrow\ &y = \frac{-x - 2{,}6a}{-1{,}3} \\ \Leftrightarrow\ &y = \frac{x}{1{,}3} + 2a \end{aligned}$$

5.3. Escrever a equação $y = \frac{5}{2}(x + 1)$ em ordem a x
Resolução:

[2] Retirado do sítio da Internet http://www.usatoday.com/weather

[3] Adaptado de Campos, A. (2010). *O discurso do professor no ensino e aprendizagem das equações literais no 8.º ano, no âmbito da experimentação do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico* (Relatório de prática de ensino supervisionada – Universidade de Lisboa).

$$y = \frac{5}{2}(x+1)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x + 1$$
$$\Leftrightarrow y - 1 = \frac{5}{2}x$$
$$\Leftrightarrow 2y - 2 = 5x$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}y - \frac{2}{5} = x$$

6. Resolve cada uma das equações:

6.1. $2x + y = -3x$ em ordem a x

6.2. $\frac{a+b}{2} = 3$ em ordem a a

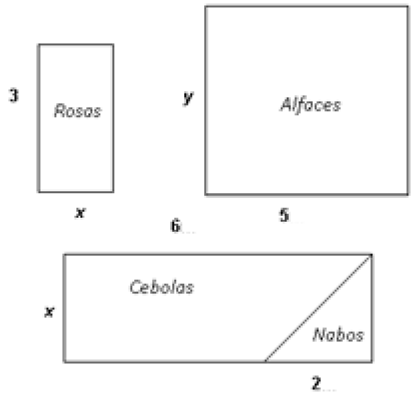
6.3. $\frac{3}{5}y = x - 1$ em ordem a y

6.4. $\frac{xy}{2} = \frac{2}{5}$ em ordem a x

6.5. $y - \frac{5x+1}{2} = x - \frac{y}{7}$ em ordem a x.

Agrupamento de Escolas Vasco Santana
8.º
Expressões algébricas e Operações com Polinómios
Matemática
Nome:____ **N.º** ___

1. Os canteiros no quintal do Vasco têm uma forma aproximada à das figuras seguintes. O comprimento, expresso em metros, dos canteiros das rosas, x, é igual à largura do canteiro das cebolas[1].



1.1. Escreve a expressão que representa a área do canteiro das rosas.

1.2. Explica o significado da expressão $3x + 5y + 6x$.

1.3. Qual das expressões seguintes representa a expressão da alínea anterior simplificada?

(A) $8y + 6x$ (B) $9x + 5y$ (C) $3x + 11y$ (D) $14x$

1.4. Qual das expressões seguintes representa a área reservada apenas às cebolas? Justifica a tua opção.

(A) $6x - 2$ (B) x (C) $5x$ (D) $5x - 2$

1.5. Se $x = 2$ e $y = 4$ qual a quantidade de rede necessária para cercar o canteiro das rosas. E para cercar o canteiro das alfaces?

[1] Adaptado de Campos, A. (2010). *O discurso do professor no ensino e aprendizagem das equações literais no 8.º ano, no âmbito da experimentação do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico* (Relatório de prática de ensino supervisionada – Universidade de Lisboa).

2. A Sofia gosta muito de construir sequências de figuras com retângulos nas folhas quadriculadas do seu caderno de Matemática. Observa a seguinte sequência de figuras que ela construiu[2]:

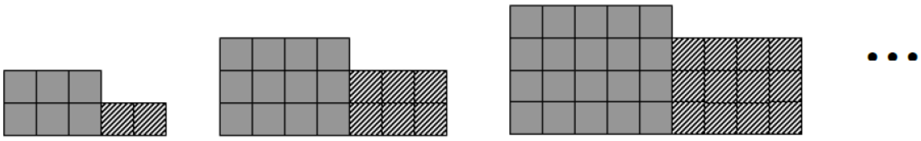


Figura 1 Figura 2 Figura 3

2.1. Calcula quantos quadradinhos às riscas e quantos quadradinhos cinzentos vai ter a figura 4?

2.2. Quantos quadradinhos às riscas vai ter a 9.ª figura? E quadradinhos cinzentos? Indica os cálculos que efetuaste.

2.3. Quantos quadradinhos cinzentos e quantos quadradinhos às riscas vai ter a figura de ordem $\boldsymbol{n}$?

2.4. Escreve na forma mais simplificada (sem o uso de parênteses):

2.4.1. O termo geral da sequência de quadradinhos às riscas;

2.4.2. O termo geral da sequência de quadradinhos cinzentos;

2.4.3. O termo geral da sequência do número total de quadradinhos.

3. Verifica, em cada alínea, se as expressões apresentadas são ou não equivalentes. Nos casos em que isso não se verifica, corrige de modo a torná-las equivalentes[3]:

3.1. $(3 + c) + (8 - 5c) + (2 - c) = 3c + 3c + 1c = 7c$

3.2. $(3 - x) + (2 + 3x) = 3 - x + 2 + 3x = 5 - 2x$

3.3. $2(a + 5) = 10a$

3.4. $2(x^2 - 3x + 1) = 2x^2 - 3x + 1$

[2] Adaptado de “Proposta de Sequências de Tarefas para o 8.º ano”- DGIDC

[3] Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). Álgebra no Ensino Básico. Lisboa: DGIDC (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/npmeb/Brochura_Algebra_ (Set2009). pdf).

3.5. $3(2+a)+2(3+a)=6+3a+6+2a=5a+12$

3.6. $y-(5-y)=y-5-y=2y-5$

3.7. $\frac{1}{2}(2x+1)+x=\frac{2}{2}x+\frac{1}{2}+x=x+\frac{1}{2}+x=2x+\frac{1}{2}$

4. Simplifica as seguintes expressões algébricas transformando-as na forma de polinómio reduzido[4]:

4.1. $2+(2y-3)-5y$

4.2. $x-(4-2x)$

4.3. $-x^2-x+3x^2$

4.4. $-5b(3b-a-4)$

4.5. $(-2x^2+4+3x)x$

4.6. $(2a-1)(3a+2)$

4.7. $(x+2)(x^2-3x+2)$

[4] Adaptado de "Proposta de Sequências de Tarefas para o 8.º ano"- DGIDC

ANEXO II – Tarefa 4

Agrupamento de Escolas Vasco Santana **8.º** *O quadrado do binómio*[1]	**Matemática**
Nome:____ **N.º** ___	

Parte I

1. Na seguinte sequência, cada termo resulta da diferença de dois quadrados perfeitos consecutivos.

Linha 1	$4 - 1 = 3$
Linha 2	$9 - 4 = 5$
Linha 3	$16 - 9 = 7$

1.1. Descobre os dois termos correspondentes às linhas 7 e 10.

1.2. Descobre o termo correspondente à linha 20, isto é, o vigésimo termo.

1.3. Escreve uma expressão que represente a regra encontrada anteriormente. Explica o teu raciocínio.

Parte II

1. O Sr. Magno tem um pomar com pereiras ( ) que se encontram dispostas segundo um padrão quadrangular. Para proteger as suas árvores do vento, plantou amieiros ( ) em seu redor.
Esta situação está ilustrada nos diagramas abaixo, onde se pode observar a disposição das pereiras e dos amieiros. Nos diagramas estão também visíveis quatro oliveiras ( ) que o Sr. Magno usa como marcos para delimitar o seu terreno.

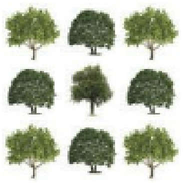


Diagrama 1

Diagrama 2

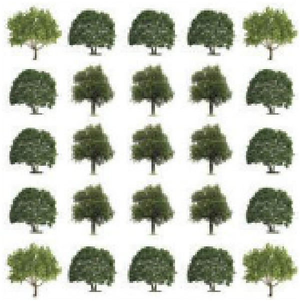


Diagrama 3

1.1. Copia para o teu caderno a tabela seguinte e completa-a.

Diagrama	Número de pereiras	Número de amieiros	Número de oliveiras
1	1	4	4
2	4	8	
3	9		
4			
5			
...	...	...	...
Termo geral			

1.2. O número de árvores do pomar pode ser contabilizado de duas formas:

- pela soma do número de pereiras, amieiros e oliveiras;
- pelo número de árvores existentes num dos lados do terreno quadrangular.

Calcula, pelos dois processos indicados, o número total de árvores da 12ª figura.

1.3. Descobre duas expressões algébricas equivalentes que sejam termos gerais da sequência do número total de árvores. Mostra, algebricamente, que as duas expressões são equivalentes.

[1] Retirado do manual "PI8 – Matemática 8.ºano" - ASA Editores

ANEXO II – Tarefa 5

Agrupamento de Escolas Vasco Santana

8.º

A diferença de quadrados[1]

Matemática

Nome:______________________________ **N.º** ___

1. Entre as diversas construções de quadrados e quadradinhos, a Sofia pintou um quadrado cinzento dentro de um quadrado branco e o seu colega João construiu um retângulo com o mesmo número de quadradinhos que ela deixou em branco. Esta situação está ilustrada abaixo.

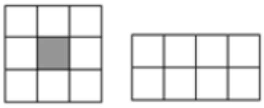


Figura A

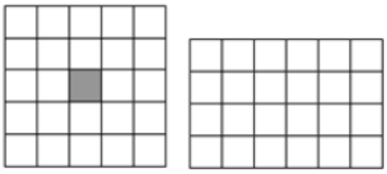


Figura B

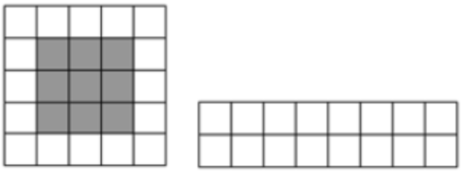


Figura C

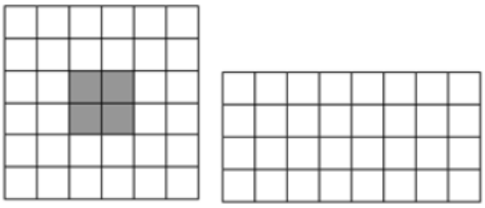


Figura D

A contagem do número total de quadradinhos brancos por dois processos:

<u>1.º Processo:</u> No quadrado, fazer diferença entre o número total de quadradinhos e o número de quadradinhos cinzentos;

<u>2.º Processo:</u> No retângulo, multiplicar o número de quadradinhos do comprimento pelo número de quadradinhos da sua largura.

1.1. A tabela seguinte sugere uma forma de organizar a contagem do número de quadradinhos brancos pelos dois processos. Completa-a.

Figura	Lado do quadrado grande	Lado do quadrado cinzento	Primeiro processo	Segundo processo
A	3	1	$3^2 - 1^2$	4×2
B				
C				
D				

[1] Adaptado de "Proposta de Sequências de Tarefas para o 8.º ano"- DGIDC

Qualquer	a	b		

1.2. Usando as expressões algébricas da tabela, determina, pelos dois processos, o número de quadradinhos brancos de:

1.2.1. Um quadrado com 8 quadradinhos de lado e um quadrado cinzento no seu interior, com 2 quadradinhos de lado.

1.2.2. Um quadrado com 9 quadradinhos de lado e um quadrado cinzento no seu interior com 5 quadradinhos de lado.

1.3. Mostra que $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

2. Usando os casos notáveis da multiplicação de binómios transforma cada expressão algébrica num polinómio reduzido.

2.1. $(x+5)(x-5)$

2.2. $(x+3)^2$

2.3. $(3a-7)(3a+7)$

2.4. $(2-5y)^2$

2.5. $\left(\frac{4}{5}-3a\right)\left(\frac{4}{5}+3a\right)$

2.6. $\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2$

ANEXO II – Tarefa 6

Agrupamento de Escolas Vasco Santana
8.º
Equações Literais e Operações com polinómios[1]

Matemática

Nome:____ **N.º** ___

1. O valor monetário de um computador diminui à medida que o tempo passa. Admite que o valor, v, de um computador, em euros, t anos após a sua compra, é dado por:

$$v = -300t + 2100$$

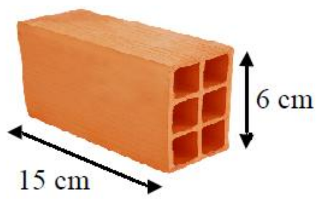
1.1. Calcula v para $t = 0$ e interpreta o resultado.

1.2. Qual o valor monetário do computador ao fim de 2 anos?

1.3. Resolve a equação apresentada em ordem a t.

1.4. Admite que o preço atual do computador é 525€. Quanto tempo decorreu desde a sua compra?

2. Para construir um pequeno muro no seu jardim, a D.Rosa pensou em usar alguns tijolos que sobraram de uma outra obra que fez em casa.



A D. Rosa pretende colocar alguns tijolos “em pé” e outros deitados”, aleatoriamente.

O comprimento do muro, neste caso, é dado por $c = 15d + 6p$

[1] Adaptado de Oliveira, C. & Torrado, G. (2009). *Resolução de tarefas envolvendo equações literais: um estudo no 9.ºano.*

2.1. Explica o que representam as seguintes expressões:

2.1.1. $15d$

2.1.2. $15d + 6p$

2.2. Supõe que o comprimento total do muro era de 420 cm e que a D. Rosa colocou 18 tijolos "deitados". Explica como procederias para descobrir o número de tijolos colocados "em pé".

2.3. Escreve uma fórmula que permita calcular o número de tijolos "deitados", conhecendo o comprimento do muro e o número de tijolos colocados "em pé".

3. Verifica, em cada alínea, se as expressões apresentadas são ou não equivalentes. Nos casos em que isso não se verifica, corrige de modo a torná-las equivalentes:

3.1. $x(x-3) = x + x - 3 = 2x - 3$

3.2. $(-y+3) + (2y+2) = -y + 3 + 2y + 2 = y + 5$

3.3. $\frac{x-2}{2} - x = \frac{x-2}{2} - \frac{2x}{2} = x - 2 - 2x = -x + 2$

4. Simplifica a seguinte expressão algébrica, transformando-a na forma de polinómio reduzido:

4.1. $(3+x)^2 + \ (x^2-2)(4x+3)$

ANEXO II – Questões do Teste de Avaliação

6.º Teste de Avaliação de Matemática

16 de maio 2012

Nome: ________________________________

N.º ______

Prof.: [redacted]

Classificação:

____

Assinatura do Encarregado de Educação:

____

1. Resolve as seguintes equações:

a) $\frac{x}{3}+6=x$

b) $\frac{1-x}{3}-\frac{4(x-3)}{6}=0$

c) $-(2x-3)=\frac{1}{2}(2+4x)$

(…)

4. A turma da Ana pretende vender *t-shirts* com o símbolo da escola, a 12 € cada, com o objetivo de angariar fundos para uma viagem de finalistas. A produção das t-*shirts* tem um custo associado: 120€ fixos, acrescidos de 2€ por *t-shirt*.

a) Se venderem apenas 10 *t-shirts* terão lucro ou prejuízo? Apresenta os cálculos que efetuares.

b) Determina o número de *t-shirts* que a turma tem que vender para não ter prejuízo. Explica o teu raciocínio.

c) Escreve uma expressão algébrica que relacione o custo de produção (C) com o número de *t-shirts* vendidas (n).

d) Escreve uma expressão algébrica que relacione o lucro (L) com o número de *t-shirts* vendidas (n).

ANEXO II – Desafios Semanais

Agrupamento de Escolas Vasco Santana

8.º

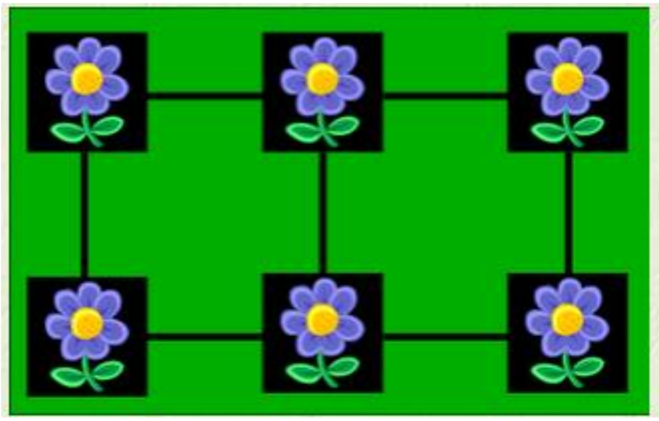
Desafio da Semana

Matemática

Nome:____ **N.º** ___

<u>Desafio 1:</u>

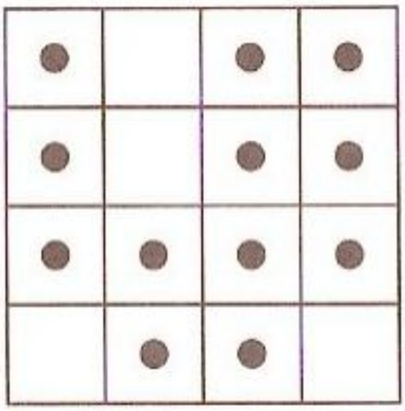
Num canteiro foram plantadas 6 flores que formam dois quadrados. Pretende-se plantar mais uma flor a obter um novo quadrado. Onde deve ser plantada essa flor?



<u>Desafio 2:</u>

Um lavrador vai dividir o terreno abaixo representado pelos seus quatro filhos. Pretende que as parcelas atribuídas sejam geometricamente iguais e que cada uma delas contenha o mesmo número de árvores (representadas por pontos).

Como deverá o lavrador dividir o terreno?



Agrupamento de Escolas Vasco Santana

8.º

Desafio da Semana

Matemática

Nome:____ **N.º** ___

Desafio 3:

A Diana sabe um segredo. Um dia resolve contá-lo a três colegas. Cada um deles, por sua vez, no dia seguinte conta o segredo a três colegas diferentes. E o segredo continuou a ser contado da mesma maneira.

a. Quantas pessoas ficam a saber do segredo pela primeira vez no 10º dia?
b. Quantas pessoas sabem o segredo passados 12 dias?

Agrupamento de Escolas Vasco Santana

8.º D

Desafio da Semana

Matemática

Nome:____ **N.º** ___

Desafio 4:

O Senhor Pereira possui uma cabra, uma ovelha e uma vaca. A ração que comprou é suficiente para alimentar a cabra durante doze semanas. A mesma ração é suficiente para alimentar a ovelha durante seis semanas, ou para alimentar a vaca durante três semanas. Durante quanto tempo pode o Senhor Pereira alimentar os seus três animais com a ração que comprou?

ANEXO III – Autorização dos Encarregados de Educação

ESCOLA E. B. 2.º, 3.º Ciclos Vasco Santana

8º Ano, Turma [redacted] – Matemática: 2011/2012

Ex.$^{\text{mo(a)}}$ Sr.$^{\text{(a)}}$
Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, da Universidade de Lisboa, estou a desenvolver um estudo sobre o pensamento algébrico, com enfoque no sentido do símbolo e de variável nos alunos. Para a recolha de dados optei pela gravação em áudio de algumas aulas e pela realização de uma entrevista e venho por este meio solicitar a sua autorização para incluir o seu educando no meu estudo.

Os dados recolhidos serão usados exclusivamente como materiais de trabalho estando garantida a privacidade e anonimato dos participantes.

Agradeço a sua colaboração e solicito que assine a declaração em baixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la ao professor de Matemática.

Com os melhores cumprimentos.

Ramada, 16 de Março de 2012

Eu, ____ declaro que autorizo o meu educando ____ N.º ______ do 8ºD, a participar no estudo conduzido pelo Dr. Filipe Silva no âmbito da sua dissertação de Mestrado.

Ramada, _____ / _____ / __________

Assinatura:

____

ANEXO III – Pedido de Autorização da Direção da Escola

Ex.mo(a) Sr.(a)
Diretora da
Escola Básica do 2.º e 3.º ciclo Vasco Santana

Filipe Eduardo Silva, aluno do Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, da Universidade de Lisboa, vem, por este meio, solicitar a sua autorização para observar e lecionar no 8.º ano de escolaridade da turma D, a unidade de Equações e Regularidades, no âmbito de uma investigação individual que culminará com o relatório de Mestrado.

O relatório *"Pensamento Algébrico: o sentido de símbolo e de variável nos alunos do 8.º ano de escolaridade"* visa investigar de que forma a unidade de ensino baseada no estudo das equações literais e expressões algébricas contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico e do sentido de símbolo e de variável dos alunos de uma turma de 8º ano de escolaridade.

Fico à inteira disposição de V. Exa. para complementar toda a informação que julgue oportuna.

Agradecendo desde já a sua colaboração, subscrevo-me com os melhores cumprimentos,

Atenciosamente

Filipe Silva