UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O PAPEL DO PROFESSOR NA CONDUÇÃO DA DISCUSSÃO MATEMÁTICA

Uma experiência com alunos do ensino secundário

Sílvia Relvas Dias

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialidade em Didática da Matemática

Dissertação orientada

pelo Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

2017

RESUMO

Este estudo pretende compreender como se carateriza e desenvolve a condução de discussões coletivas em torno da exploração matemática de tarefas de investigação sobre o estudo de Funções no 12.º ano do ensino secundário, com recurso à utilização da calculadora gráfica. O trabalho incide no tema II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II* na unidade de ensino sobre o tópico *Funções exponenciais e logarítmicas.* Pretende-se dar resposta às seguintes questões: (1) Que tipo de ações e com que frequências são utilizadas pela professora na condução da discussão matemática coletiva? (2) Que tipos de discussão são utilizados pela professora no desenvolvimento da aula? E (3) Que problemas e constrangimentos se colocam à professora no decurso das discussões em sala de aula? Foi analisado o trabalho em aula de uma professora experiente que leciona no 12.º ano do ensino secundário. O quadro conceptual apoia-se no modelo desenvolvido por Ponte, Mata-Pereira & Quaresma (2013) para as ações do professor na condução de discussões matemáticas, distinguindo entre *convidar*, *sugerir/informar*, *apoiar/guiar* ou *desafiar* os alunos para a realização da tarefa. A análise usa também o modelo desenvolvido por Henning, McKeny, Foley & Balong (2012) que referem três tipos distintos de discussão matemática: *enquadramento*, *conceptual* e *aplicação*. O estudo segue uma abordagem qualitativa interpretativa, na modalidade de observação participante. A recolha de dados inclui a gravação em vídeo das aulas onde decorreu este estudo.

Os resultados mostram que as discussões matemáticas coletivas usam sobretudo discussões do tipo *aplicação*, apesar de também se identificarem discussões de tipo *enquadramento* e *conceptual*. Os resultados mostram também que a discussão é fortemente marcada por ações de *apoiar/guiar*, que tanto surgem de ações *convidar* e *sugerir/informar*, como de ações *desafiar*; que as ações *apoiar/guiar* tanto se seguem umas às outras como alternam com ações *desafiar* e *sugerir/informar*, e têm uma grande importância na condução das discussões; que um segmento começa com uma ação *convidar* e usualmente termina com uma ação de *sugerir/informar*; e que são as ações *desafiar* que promovem um maior aprofundamento e compreensão dos conceitos e ideias matemáticas novas por parte dos alunos. Nas discussões surgem problemas que a professora procura enfrentar utilizando sobretudo ações que promovam a reflexão sobre ideias e estratégias, introduzam e aprofundem novos conceitos e ideias matemáticas ou avaliem conjeturas e ideias através da reformulação de questões já colocadas e solicitando a participação de outros alunos para avaliar as ideias em discussão.

Palavras-chave: Condução de discussões coletivas, ações do professor, tipos de discussão, tarefas de investigação com funções, calculadora gráfica, ensino secundário.

ABSTRACT

This study aims to understand the characteristics and development of whole class discussions regarding the mathematical exploration of investigation tasks for the study of the unit about Functions in grade 12, the final year of high school in Portugal, with the use of a graphic calculator. The study focuses on Unit II - *Introduction to Calculus II* for the teaching of the topic about *Exponential and Logarithmic Functions*. This study seeks to answer the following questions: (a) What kind of actions and with which frequency are used by the teacher in the conduction of whole class mathematical discussions? (b) Which types of discussion are used by the teacher to promote the lesson? And (c) Which problems and constrains does the teacher face during the discussions in the classroom? The work in class of an experienced teacher who teaches in grade 12 of high school was analyzed. The conceptual framework is based on a model developed by Ponte, Mata-Pereira & Quaresma (2013) that distinguishes among *inviting*, *suggesting/informing*, *supporting/guiding* and *challenging actions* to lead the students in performing the task. The framework is also based on the model developed by Henning, McKeny, Foley & Balong (2012), that distinguish three distinct types of mathematical discussion: *framework*, *conceptual* and *application*. The study follows a qualitative and interpretative approach with participant observation. The data collection includes video recording of the lessons where the study took place.

This study suggests that whole class mathematical discussions use mainly *application* discussions, despite also identifying *framework* and *conceptual* discussions. The results also show that whole class discussions are strongly marked by *supporting/guiding* actions, which both arise from *inviting* actions or *suggesting/informing* as well as *challenging* actions. Actions of *support/guidance*, which both follow each other as alternate with *challenging* and *suggesting/informing* actions, have a great importance in the discussions. A segment starts initially with an *invitation* action and usually ends with an action of *suggesting/informing*. The results also suggest that *challenging* actions promote a greater deepening and understanding of the mathematical concepts and ideas that are the objective of the lesson. In the discussions many problems arise to the teacher that seeks to face them using especially actions that promote the reflection on ideas and strategies used, introduce and deepens into new concepts and mathematical ideas or evaluate conjectures and ideas through the reformulation of questions already asked and requesting the participation of other students to evaluate the ideas under discussion.

Keywords: Collective mathematical discussions, the teacher's actions, types of discussion, research tasks with functions, graphic display calculator, high school.

AGRADECIMENTOS

Ao querido Professor João Pedro da Ponte pela sua constante e incansável disponibilidade, pela forma como me orientou, pelas suas sugestões e por todas as palavras de incentivo.

À querida professora participante e amiga com quem partilhei significativos momentos de trabalho colaborativo durante este projeto. Por todo o apoio, disponibilidade e carinho ao longo dos anos.

À Escola muito especial onde realizei este estudo por me ter dado as condições para o efetuar.

À minha Escola, Carlucci American International School of Lisbon por me ter possibilitado as condições para finalizar este projeto.

Aos alunos que participaram, pela colaboração e disponibilidade, bem como pelo empenho que demonstraram.

Aos meus pais, à minha irmã e restante família pelo incentivo, compreensão, apoio e carinho em todos os momentos.

Ao Mário, pelo apoio incondicional, pela compreensão, pela confiança e boa disposição.

A todos um muito obrigado!

Aos meus avós...à
avó Maria

Índice

Índice de anexos

Índice de tabelas

Índice de figuras

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta a minha motivação para a realização do presente estudo sobre a condução de discussões matemáticas coletivas no decorrer da exploração de tarefas de investigação com alunos do 12.º ano do ensino secundário. Identifico, ainda, os objetivos e questões do estudo e descrevo a sua organização.

1.1. Motivação para o estudo

O programa do 12.º ano de Matemática A (DES, 2001) aponta para o desenvolvimento do raciocínio e do pensamento científico, descobrindo relações entre conceitos, justificando processos de resolução, encadeando raciocínios, validando conjeturas e formulando generalizações. O programa refere que

> Com as novas famílias de funções [funções exponenciais e logarítmicas] surgem, também, novas oportunidades para cada estudante obter uma maior compreensão da matemática e suas aplicações, bem como para conectar e relacionar os novos conhecimentos com os já adquiridos em anos anteriores (quer dentro do mesmo tema quer com temas diferentes). É fundamental apresentar aos estudantes atividades diversificadas tendo-se em conta que a exploração com a utilização das várias tecnologias pode permitir discussões ricas, quer sobre o processo de modelação, quer sobre os conceitos matemáticos fundamentais, para além de facilitarem propostas aconselháveis de investigações. (p. 4)

O Programa refere ainda que “Os estudantes precisam de desenvolver a compreensão de procedimentos algébricos e utilizá-los (a par da utilização da calculadora) sem que para isso tenham que fazer exercícios repetitivos.” (p. 4). E termina afirmando que “A modelação com funções exponenciais e logarítmicas pode ser feita tanto usando capacidades específicas da calculadora gráfica" (DES, 2001, p. 4).

Ao longo dos meus 12 anos de atividade profissional tenho tido oportunidade de trabalhar com diferentes anos de ensino, diferentes currículos. Estas experiências têm contribuído para a concepção de materiais diversificados a utilizar na sala de aula e têm-me permitido desenvolver tarefas com recurso às novas tecnologias, nomeadamente no que diz respeito à exploração da calculadora gráfica, cujo uso é obrigatório no ensino secundário. O acompanhamento que tenho feito ao National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) e à Associação de Professores de Matemática (APM), particularmente no que respeita ao Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) e ao Grupo de Trabalho de Geometria (GTG), tem-me permitido o acesso a uma grande diversidade de materiais de ensino que considero poderem enriquecer a aprendizagem matemática dos meus alunos. Utilizo muito tarefas de exploração na introdução de novos conceitos pois valorizo o ensino pela descoberta. Estas tarefas desenvolvem capacidades que vão para além do cálculo simples ou memorização de definições e procedimentos (como os exercícios rotineiros) como a comunicação, o espírito crítico, a modelação e a demonstração (Ponte, 2005).

No entanto, na minha atividade profissional, quando proponho aos meus alunos um problema não rotineiro, sinto-os maioritariamente "perdidos", mostrando pouca persistência pela procura de uma ou várias soluções e falta de autonomia na escolha de uma estratégia a seguir para a resolução do problema. Os alunos, solicitam com frequência indicações e questionam se devem utilizar a calculadora gráfica ou qual a representação da função que melhor se adequa à situação apresentada. É difícil fazer com que compreendam que existem estratégias e abordagens alternativas a muitos problemas matemáticos e que cada aluno pode usar uma estratégia própria, explicando e testando as suas conjeturas. Sinto que a maioria dos alunos ainda considera o professor como um mero transmissor de conhecimentos de Matemática, devendo proporcionar-lhes muitos exercícios como modo de preparação para o exame nacional.

Em particular, no estudo das funções no ensino secundário, vejo que os alunos tendem a mecanizar técnicas (por exemplo, de derivação, de regras operatórias de exponenciais e logaritmos), que não dominam por completo e que aplicam sem compreender. Além disso, quando confrontados com situações problemáticas envolvendo relações funcionais, apresentam dificuldades, por exemplo, na leitura e interpretação de dados, na interpretação dos dados fornecidos pela calculadora gráfica, na interpretação de problemas contextualizados, no domínio de processos de resolução, e no estabelecimento de conexões com outros tópicos da Matemática ou de outras disciplinas, por exemplo da Física, Química, Economia.

Isto contrasta com a minha experiência enquanto aluna, pois sempre tive um gosto especial pela Álgebra. E, enquanto professora, considero que os conhecimentos sobre este tema continuam a ser fundamentais para compreendermos o mundo em que vivemos (DES, 2001), razão pela qual tento fazer com que os meus alunos compreendam a aplicação da Matemática na vida real, proporcionando-lhes tarefas desafiantes e contextualizadas que lhes permitam entender o significado da Matemática que trabalhavam na escola. Identifico-me com a perspetiva que a natureza das tarefas e o modo como são realizadas na sala de aula têm um papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem da Matemática (Ponte, 2005).

As orientações curriculares para o ensino desta disciplina têm acompanhado as tendências atuais de valorização da proposta de tarefas de exploração, investigação, da resolução de problemas tanto quanto possível em variados contextos de Matemática pura, semirealidade e realidade (Skovsmose, 2000) de forma a realçar o raciocínio matemático enquanto capacidade transversal na disciplina de Matemática. Esta forma de trabalho começa a reconhecer-se como perspetiva curricular de cunho exploratório e investigativo (*inquiry mathematics*) (Ponte, Nunes & Quaresma, 2012). No entanto, a ênfase nas tarefas desafiantes em sala de aula gera uma grande imprevisibilidade no trabalho do professor pois os alunos apresentam, discutem e debatem os seus raciocínios à medida que vão surgindo em sala de aula. Esta imprevisibilidade constitui um forte desafio para o professor (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Uma das etapas fundamentais para a prática profissional do professor com estas tarefas consiste na otimização da organização e condução das discussões coletivas que vão surgindo ao longo da sua realização. Em Portugal, tem-se dado atenção ao estudo de aulas que envolvem a realização de tarefas de natureza investigativa interligando as dimensões matemáticas e didáticas o que levou à identificação de vários papéis do professor (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998). Atualmente, a ênfase da investigação tem estado sobretudo nas questões relacionadas com a seleção das tarefas e com a comunicação na sala de aula salientando-se a natureza do questionamento, a negociação de significados e os processos de redizer (Ponte, Quaresma & Branco, 2012). Mais recentemente, a atenção tem-se focado nas ações do professor no decurso das discussões coletivas em aulas do ensino básico (Ponte, Mata-Pereira e Quaresma, 2013). No entanto, a condução de aulas discussão coletiva no ensino secundário ainda não foi muito estudada.

Facilitar discussões matemáticas coletivas com base nos conhecimentos prévios dos alunos, com o objetivo de promover aprendizagens matemáticas significativas, não é uma tarefa fácil para o professor. Este é um desafio que sinto com frequência na minha sala de aula pois nunca sei exatamente onde a discussão nos pode levar. Intriga-me perceber se poderei potenciar o raciocínio dos meus alunos através de alguma ação específica da minha parte, através do meu discurso, para que eles transitem de uma ideia inicial para a aprendizagem de novos significados e ideias matemáticas.

Neste sentido surgiu a minha vontade em estudar o papel do professor na promoção de discussões coletivas produtivas e significativas para a aprendizagem matemática de Funções exponenciais e logarítmicas no 12.º ano.

1.2. Objetivo do estudo

A comunicação, a linguagem e o discurso na sala de aula são dimensões de grande importância na prática profissional dos professores que têm vindo a adquirir grande visibilidade, dado condicionarem em grande medida o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Particularmente o papel do professor em torno destas dimensões, enquanto facilitador de discussões matemáticas coletivas produtivas é um campo que merece muita investigação.

Deste modo, o presente estudo tem por objetivo estudar a comunicação nas aulas de Matemática, procurando compreender como se carateriza a condução de discussões coletivas produtivas em torno de tarefas de exploração e investigação matemática sobre o estudo das funções no 12.º ano, com recurso à utilização da calculadora gráfica. O trabalho incide no subtópico II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II* do tópico *Funções exponenciais e logarítmicas*. Com este estudo pretendo dar resposta às seguintes questões de investigação:

1. Que tipos de discussão são promovidos pela professora durante a aula?
2. Que tipos de ações e com que frequência são realizadas pela professora na condução da discussão matemática?
3. Que problemas se colocam à professora no decurso das discussões em sala de aula?

Assim, pretendo contribuir para o aprofundamento do conhecimento na área da promoção de discussões matemáticas produtivas na abordagem de tarefas de exploração e investigação recorrendo à utilização das potencialidades da calculadora gráfica. Espero ainda que este estudo possa contribuir para o meu desenvolvimento pessoal e profissional, evoluindo ao nível do meu conhecimento científico e didático para potenciar a minha prática profissional ao proporcionar a condução de discussões coletivas produtivas e significativas para a aprendizagem dos meus alunos.

1.3. Organização do estudo

Neste capítulo introdutório apresento a minha motivação para a realização do estudo, indico o seu objetivo, apresento as questões de investigação e refiro a estrutura e organização da dissertação. No capítulo seguinte apresento o enquadramento conceptual desta investigação relativamente à comunicação, discussão matemática coletiva e papel do professor bem como os conteúdos que sustentam a unidade de ensino que serve de base a este estudo. De seguida, no capítulo 3, apresento a planificação das aulas realizada com destaque para a descrição das tarefas de natureza investigativa que lhes serviram de base. No capítulo 4 apresento as opções metodológicas que orientaram a investigação, os instrumentos de recolha de dados e o modo como estes foram analisados, bem como os participantes no estudo. No capítulo seguinte apresento a descrição e análise dos episódios das aulas que foram estudadas. Para concluir, faço uma síntese do presente estudo apresentando as suas principais conclusões em função das três questões de investigação inicialmente formuladas. No final apresento uma reflexão sobre o que significou para mim este estudo, sobre os possíveis contributos para a comunidade dos professores de Matemática, as limitações do estudo e ainda possíveis abordagens de estudo para o futuro.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONCEPTUAL

Este capítulo aborda temas-chave essenciais para o estudo das questões de investigação formuladas. Assim, discuto a noção de tarefa e passo em revista trabalhos sobre a comunicação matemática e a construção de significados, debruçando-me em especial sobre a discussão matemática e o papel do professor. Finalmente, apresento diversos modelos propostos para compreender o que se passa na sala de aula e para potenciar a aprendizagem dos alunos dando especial atenção aos modelos sobre discussões matemáticas.

2.1. Tarefas

2.1.1. Tarefas para promover a aprendizagem

Este estudo centra-se na análise do papel do professor na condução de discussões matemáticas, cuja natureza depende fortemente da seleção das tarefas. As orientações curriculares para o ensino da Matemática têm acompanhado as tendências atuais de valorização da proposta de tarefas de exploração e investigação e problemas aliado à discussão coletiva em sala de aula, realçando o raciocínio matemático enquanto capacidade transversal na disciplina de Matemática. Esta forma de trabalho de cunho exploratório e investigativo (*inquiry mathematics*) (Ponte, Nunes & Quaresma, 2012) tem conhecido crescente divulgação e assenta, antes de mais na noção de tarefa.

Vários autores têm-se debruçado sobre a natureza das tarefas a desenvolver na sala de aula e defendido a valorização dos problemas e das tarefas de investigação enquanto experiências de aprendizagem. Por exemplo, Stein e Smith (1998) indicam que uma tarefa é muitas vezes "dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular" (p. 1), podendo "envolver vários problemas relacionados ou um trabalho prolongado, sobre um único problema complexo" (p. 1).

Pólya (2003) afirma que se deve proporcionar aos alunos uma experiência matemática que se aproxime da atividade criativa dos matemáticos, enfatizando a resolução de problemas como essencial na atividade matemática. Segundo este autor, "aprender Matemática é fazer Matemática". Esta perspetiva leva a ver o conhecimento matemático como hipotético e falível, progredindo a partir de problemas, através de conjeturas e refutações (Davis & Hersh, 1995). A aprendizagem da Matemática pode ter assim uma forte vertente investigativa, na qual a exploração, a descoberta de estratégias, a tentativa e o erro são processos que assumem um papel fundamental (Braumann, 2002).

Pelo seu lado, Christiansen e Walther (1986) consideram que os exercícios são tarefas rotineiras para as quais existe um procedimento que conduz a uma solução já conhecida e afirmam que estes não devem ocupar um lugar central no ensino-aprendizagem. Pelo contrário, na sua perspetiva, a prioridade deve ser dada a atividades de construção, exploração e problemas, tarefas não rotineiras e abertas, para as quais os alunos não conhecem um procedimento de resolução.

Procurando caraterizar diferentes tipos de tarefa, Ponte (2005) considera que exercícios e problemas são tarefas fechadas, distinguindo-as pelo seu grau de desafio – o exercício com desafio reduzido e o problema com desafio elevado. Aponta ainda que nestas tarefas as questões são bem definidas pelo professor. Em contrapartida, considera que tanto as tarefas de exploração como as de investigação são abertas, cabendo aos alunos participar na formulação das questões – as tarefas de exploração apresentam um grau de desafio reduzido, enquanto as tarefas de investigação têm um grau de desafio elevado. Também Goldenberg (1999) defende a utilização de tarefas de investigação na aula de Matemática, levando os alunos a conjeturar, explorar conexões entre vários conceitos e matérias, descobrir processos de resolução e resultados e diversificar atividades. Para este autor importa que o aluno aprenda a ser um investigador perspicaz e, para isso, tem de fazer investigação. Também Santos et al. (2002) consideram que um ensino que incida sobre a resolução de tarefas rotineiras é desajustado, salientando igualmente que “aprender Matemática” deve consistir, essencialmente, em “fazer Matemática”, através de investigações e explorações.

Stein e Smith (1998) distinguem três fases através das quais passa qualquer tarefa. A primeira é o modo como as tarefas aparecem no currículo ou materiais curriculares; a segunda, o modo como são apresentadas pelo professor; e, por último, como são realizadas pelos alunos. As autoras consideram que a passagem de uma fase para outra pode alterar a natureza das tarefas. Desta forma, tarefas aparentemente ricas podem ser subaproveitadas e tarefas simples e rotineiras podem ser transformadas em tarefas matematicamente profícuas (Sierpinska & Kilpatrick, 1998), sendo tão importante a seleção de tarefas como a forma como estas são explorados na sala de aula.

Para Ponte et al. (1998), a realização de uma tarefa na sala de aula envolve três fases essenciais: (i) a apresentação da tarefa e o modo como o professor promove o envolvimento dos alunos; (ii) a realização da tarefa pelos alunos; e (iii) a discussão da investigação e reflexão final. Esta última fase de reflexão e discussão sobre o trabalho realizado permite o confronto de opiniões e a justificação e a tomada de consciência dos processos seguidos, tendo em conta que a aprendizagem não resulta só da atividade, mas também da reflexão sobre a atividade (Bishop & Goffree, 1986).

Ainda em Portugal, tem-se dado muita atenção ao estudo de aulas que envolvem a realização de tarefas de natureza investigativa interligando as dimensões matemáticas (em especial relativas à tarefa de investigação em causa) e didáticas (relacionadas com a organização do trabalho e a condução da atividade do aluno), o que levou à identificação de vários papéis do professor (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998).

Começando pela dimensão matemática, o estudo assinala vários papéis do professor, nomeadamente no momento em que seleciona, adapta ou elabora a tarefa de investigação a propor aos alunos, ao pensar matematicamente sobre ela, assumindo assim o raciocínio matemático do professor (prévio à aula) uma importância fundamental. Também durante a aula, as questões, conjeturas e argumentos propostos pelos alunos podem levá-lo a considerar novos aspetos da tarefa, envolvendo-se em raciocínio matemático adicional. Ao prosseguir a investigação, o seu raciocínio matemático desenvolve-se de forma análoga ao raciocínio matemático dos alunos onde também com frequência surgem oportunidades de estabelecer relações.

Analisando a dimensão didática, o estudo identifica as ações de ensino ao alcance do professor que permitem atingir os objetivos pretendidos, traduzindo-se essencialmente em três papéis fundamentais: desafiar, apoiar e avaliar que decorrem da lógica do desenvolvimento de qualquer atividade. O professor procura desafiar os alunos com situações e questões de modo a envolvê-los em trabalho investigativo, apoiando-os, colocando questões, fazendo comentários ou sugestões. Procura avaliar os progressos já realizados e eventuais dificuldades, recolhendo informação e, com base nisso, tomar a decisão de continuar, alterar algum aspeto ou mudar para outra fase do trabalho. Os autores consideram que as duas dimensões, a matemática e didática, não são independentes entre si e pelo contrário, cruzam-se.

Para além da diversidade de tarefas, a atividade matemática dos alunos é enriquecida pelo recurso a materiais diversos, nomeadamente à tecnologia. Assim, na elaboração das tarefas, deve promover-se a utilização da tecnologia, uma vez que esta "é essencial no ensino e na aprendizagem da Matemática; influencia a Matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos" (NCTM, 2007, p. 436). Em particular, a calculadora gráfica é um precioso auxiliar na realização de tarefas de investigação e de exploração. Segundo Kieran (2007), a calculadora gráfica ajuda claramente os alunos a melhorarem a sua compreensão do conceito de função e das suas propriedades, uma vez que facilita o desenvolvimento do pensamento algébrico, permitindo o estabelecimento de conexões entre expressões algébricas, tabelas e gráficos. No entanto, a autora refere que tal desenvolvimento não é automático, sendo importante ter em atenção a qualidade das tarefas, o ensino e o ambiente de aprendizagem em geral.

2.1.2. O papel do professor na realização das tarefas

Um aspeto extremamente relevante no processo de ensino-aprendizagem é o papel do professor. O recurso a problemas e tarefas de exploração e investigação requer adaptações educacionais no sentido de estimular o espírito investigativo nos alunos e impõe novas exigências ao professor, pressupondo que haja um certo à-vontade da sua parte para conseguir trabalhar naquilo que Skovsmose (2000) designa por "zona de risco", marcada por forte incerteza. Para o autor, as tarefas que o professor propõe devem suscitar a atividade dos alunos e, em cada momento, ele deve avaliar se a atividade dos alunos é aceitável ou se é preciso intervir no sentido de a alterar.

Pelo seu lado, segundo Ponte et al. (1998) é essencial que na seleção das tarefas propostas o professor estabeleça objetivos, de acordo com a especificidade da turma e com o contexto em que pretende que surjam na aula. Assim, as tarefas de investigação requerem do professor uma adequada gestão curricular, tendo em conta o seu conhecimento das capacidades e dificuldades dos seus alunos:

> O papel do professor na seleção dos problemas e das tarefas matemáticas relevantes é fundamental. Ao analisar e adaptar um determinado problema, ao antecipar as ideias matemáticas que dele possam emergir e as próprias questões dos alunos, os professores podem decidir se determinados problemas poderão ou não ajudar a sua turma a atingir os objectivos propostos (NCTM, 2007, p. 58).

Segundo Christiansen e Walther (1986), o professor deve envolver-se na seleção e na construção de tarefas para que estas sejam apropriadas aos objetivos a atingir. Na sua perspetiva, o envolvimento pessoal do professor na seleção da tarefa é um passo importante na planificação para a sua apresentação na aula, considerando que a sua função não é motivar os alunos para a atividade numa tarefa selecionada, mas sim selecionar tarefas que motivem os seus alunos para a atividade. Estes autores defendem que são necessárias mudanças no papel e na ação do professor, nomeadamente na importância que dão aos diferentes tipos de atividade (na estratégia aplicada e na sequenciação do processo de ensino) e no seu papel de mediação. Desta forma, o papel do professor deve ser "fornecer a direção e a mediação necessárias, num sentido vigotskiano, para que as crianças, por intermédio dos seus próprios esforços, assumam o controlo completo dos diversos propósitos" (Moll, 1996, p. 10), cabendo-lhe um papel de mediador entre o aluno e as situações de aprendizagem criadas.

Assim, deve ser dada aos alunos a possibilidade de realizarem tarefas de investigação, em contexto de sala de aula, uma vez que estas se revelam uma mais-valia como experiência de aprendizagem:

> As investigações matemáticas precisam de ocupar um lugar importante ao nível da experiência matemática dos alunos uma vez que elas proporcionam a vivência de processos característicos da Matemática – formular questões e conjecturas, testar conjecturas e procurar argumentos que demonstrem as conjecturas que resistiram a sucessivos testes – e têm importantes potencialidades educacionais (Santos et al., 2002, p. 2).

De salientar que existem diversas estratégias de ensino potencialmente adequadas ao fim pretendido e à situação concreta. Assim, “cabe ao professor conhecer as alternativas disponíveis e conhecer-se a si próprio, sabendo até que ponto é capaz de usar com confiança e desembaraço cada uma delas” (Ponte et al. 1997, p. 95).

2.2 A comunicação matemática e a construção de significado

A importância da comunicação no contexto específico da sala de aula de Matemática e nos vários níveis de ensino tem sido amplamente reconhecida (e.g., Bishop & Goffree, 1986; NCTM, 1994; Ponte & Santos, 1998; Ponte & Serrazina, 2000; Voigt, 1995; Yackel & Cobb, 1998). Trata-se de um tema que tem merecido grande atenção por parte dos educadores matemáticos nacionais e estrangeiros (Lampert & Cobb 2003; Menezes, 1995, 2005; Ponte & Serrazina, 2001). A importância do papel da comunicação na aprendizagem da Matemática tornou-se parte integrante das orientações da Educação Matemática:

> Através da comunicação, as ideias tornam-se objetos de reflexão, de refinamento, discussão e muito frequentemente alcançam modificações no raciocínio. O processo de comunicação ajuda também na construção e assimilação de significado das ideias tornando-as públicas. Quando os alunos são desafiados a pensar e raciocinar matematicamente e a comunicar os resultados dos seus raciocínios com os outros, aprendem a ser claros e a saber argumentar verbalmente e através da escrita as suas explicações. (NCTM, 2009, p.2)

Menezes (1995), por exemplo, considera que a comunicação que se estabelece na sala de aula envolve as interações verbais entre professores e alunos, usando tanto a língua materna como a linguagem matemática. Na verdade, a linguagem e o discurso na sala de aula são elementos de grande importância na prática profissional do professor, condicionando em grande medida o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Neste quadro, a natureza do questionamento, a negociação de significados e os processos de redizer (Ponte, Quaresma & Branco, 2012) têm sido focos de investigação.

Bishop e Goffree (1986) referem que a comunicação na sala de aula depende de um conjunto de fatores. Um deles é a linguagem do aluno, que ele traz do ambiente familiar e do seu contexto cultural. É um fator externo que muito influencia as interações na sala de aula e a apropriação de significados pelos alunos. Outros fatores, internos à sala de aula, são o discurso do professor, os seus gestos e atitudes, bem como a afinidade que se gera entre professor e aluno. Estes são aspetos fundamentais para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem. Nesta perspetiva, o professor não é único ator que intervém na constituição do ambiente de comunicação na sala de aula. Os alunos são também atores fundamentais e a sua predisposição para se integrarem nas propostas do professor pode ser muito variável. Assim sendo, a comunicação constitui um dos aspetos mais problemáticos da atividade profissional do professor.

Pelo seu lado, Brendefur e Frykholm (2000) indicam quatro perspetivas que podem ser utilizadas para analisar várias formas de comunicação em sala de aula: comunicação unidirecional; contributiva; reflexiva e instrutiva. A comunicação unidirecional é aquela em que o professor domina o discurso da sala de aula, expondo a matéria, levantando questões de carácter fechado e dando raras oportunidades aos alunos para comunicaram as suas estratégias, ideias e raciocínios. Esta perspetiva integra um modelo centrado no professor onde a forma de comunicação dominante consiste no professor a falar e o aluno a ouvir. A comunicação contributiva tem por foco as interações entre alunos e entre alunos e professor. Contudo a comunicação limita-se a assistência e partilha. Os autores referem que se podem incluir as interações informais que se geram entre os alunos quando estão a trabalhar em grupo na resolução de tarefas, como descrito por Cobb et al. (1997). Segue-se a comunicação reflexiva que, segundo os autores, tem por base uma conceção de comunicação mais complexa, também descrita por Cobb et al. (1997) como “discurso reflexivo”. Esta comunicação é semelhante à contributiva, pois os alunos partilham as suas ideias, estratégias e soluções com os colegas e professor. Mas, para além disso, professor e alunos usam essa partilha para mudar o foco do objeto de discussão na sala de aula.

> Este tipo de reflexão não ocorre no vazio. Os alunos “não começam espontaneamente a refletir todos no mesmo momento. Na verdade, a reflexão é apoiada e acontece através da participação no discurso” (Cobb et al., 1997, p. 264). Lampert (1990) acrescentou que este tipo de discurso reflexivo rico ocorre frequentemente quando os alunos procuram justificar ou refutar conjeturas colocadas pelos seus colegas. (Brendefur & Frykholm, 2000, pp. 127-128).

Por último a comunicação instrutiva envolve mais que interações entre alunos e professor. Esta categoria segue a ideia desenvolvida por Steffe e D’Ambrosio (1995) que afirma que cabe ao professor colocar situações novas que promovam o encorajamento à reflexão e que estas novas situações tragam força, argumentos, sustentabilidade, encorajamento e modificação da conceção que os alunos têm do significado matemático, alterando assim a compreensão que os alunos têm da Matemática.

Falando em significado matemático, Bishop e Goffree (1986) salientam que a aprendizagem matemática envolve sempre a construção progressiva de um quadro de significados através do qual o aluno evolui na sua apropriação pessoal do conhecimento matemático. Indicam ainda que o significado matemático se forma através do estabelecimento de conexões entre a nova ideia e os conhecimentos prévios do sujeito e que a negociação de significados tende a diminuir com o aumento do controlo exercido pelo professor sobre a dinâmica da aula. A construção de significados evolui por aproximações sucessivas, sendo a partilha apenas possível a partir do momento em que estes se tornam públicos ou visíveis (Siegel & Borasi, 1996). A questão da construção de significado matemático assume, assim, uma importância fundamental.

Bishop e Goffree (1986) sublinham a ênfase na natureza pessoal de qualquer novo conceito matemático. Referem que sendo o objetivo educacional partilhar e desenvolver o significado da Matemática, existem três conceitos chave a considerar: a atividade; a comunicação e a negociação. A atividade é escolhida para dar ênfase ao envolvimento do alunos mais com trabalho matemático do que com o conteúdo matemático apresentado pelo professor. A comunicação é escolhida por ser a razão fundamental de todo o ensino, é tanto o objetivo como o método, e é essencialmente sobre a troca de conhecimentos. Por último, a negociação é escolhida para dar ênfase diretamente ao processo através do qual, professor e aluno procuram atingir os respetivos objetivos.

Segundo Bishop e Goffree (1986), o significado matemático é obtido através do estabelecimento de conexões entre a ideia matemática particular em discussão e os outros conhecimentos pessoais do indivíduo. Uma nova ideia é significativa na medida em que cada indivíduo é capaz de a ligar com os conhecimentos que já tem. As ideias matemáticas formarão conexões de alguma maneira não só com outras ideias matemáticas mas também com outros aspetos do conhecimento pessoal. Cada professor possui um conjunto de significados, enquanto os alunos têm os deles, únicos para cada indivíduo. E para que o significado matemático seja partilhado é necessário que alunos e professor tornem os seus significados públicos e visíveis. Por exemplo, as questões colocadas pelos alunos, para além de darem importantes informações ao professor, mostram ao aluno que as suas ideias e construções são levadas a sério por este – um aspeto crucial no processo de negociação. O professor negociador terá de deixar claro que o desenvolvimento matemático dos alunos deve ter em conta o conhecimento que estes já possuem, para que sejam capazes de participar na negociação.

Bishop & Goffree (1986) referem que a representação de ideias matemáticas é um processo complexo. É provável que muitas capacidades de transformação de representações já tenham sido dominadas pelos alunos e agora precisem de reflexão na perspetiva da comunicação. Qualquer tipo de representação precisa de uso e familiarização para que seja compreendida e aceite pelo aluno. O traduzir e interpretar tem de ser desenvolvido largamente, de uma forma ativa e para a frente e para trás. As conexões entre representações necessitam ser continuamente evidenciadas. As tarefas relacionadas com a representação envolvem dar oportunidade aos alunos de usar uma variedade de tipos de representação e ganhar familiaridade com estas representações; tornar conscientes os processos de transformação de um tipo de representação noutra, encorajando a realização de atividades e a sua discussão; e tornar os alunos conscientes da natureza e do valor da "representação" em Matemática.

Para Bishop e Goffree (1986), partilhar significado através da comunicação consiste em alunos criarem os seus próprios significados, entenderem a Matemática de uma forma muito pessoal, não só os conteúdos matemáticos específicos, mas também a Matemática como disciplina. E é apenas através do encorajamento do professor para a comunicação entre todos os participantes da aula que é possível uma genuína partilha de significados matemáticos. Neste sentido, consideraram que existem dois tipos diferentes de comunicação: explicar e interpretar. O mais importante a aprender é como ser capaz de explicar o conteúdo, de forma clara, ao aluno. Explicar é um processo sem fim de representar relações entre a ideia que se está a explicar e outras ideias. Explicar relaciona-se intimamente com compreender e ao desenvolver uma explicação bem-sucedida estende-se a compreensão do outro. Muitas vezes, para o aluno, o explicar está associado ao "dizer" por parte do professor. Através de tais procedimentos o significado matemático pode ser comunicado.

A utilização do questionamento pelo professor mostra-nos que o que é importante no explicar é que as conexões sejam expostas – não necessariamente pelo professor. O aluno não é um aprendente passivo que absorve exposições, mas sim um participante ativo no processo de partilha – as questões subtis do professor podem focar esta atividade em conexões e no processo de as estabelecer. Para além do questionamento, o professor deve criar outras oportunidades para explicar, encorajando a reflexão a seguir a uma atividade. A fase reflexiva de uma atividade é a ocasião mais apropriada para ajudar a que sejam expostas conexões e significados. No desenvolvimento matemático do aluno, à medida que os problemas se tornam mais complexos, a comparação e reflexão sobre vários métodos de solução ou de "ataque" podem tornar-se extremamente produtivos. Assim, é preciso passar do entendimento do explicar como sendo "dizer" para um entendimento mais desenvolvido e expandido envolvendo uma conceção mais rica e mais geral de expor as conexões entre as ideias matemáticas.

Voltando a atenção para as várias tarefas do professor associadas com diferentes representações de ideias matemáticas, Bishop e Goffree (1986) indicam que o objetivo é que o professor encoraje o surgimento de conexões, para que os alunos possam partilhar conhecimento. O professor, ao desformalizar a representação, tenta tornar a ideia acessível aos alunos reformulando-a numa linguagem mais familiar, isto é, mais significativa. Contudo, o professor não impõe. Encoraja os alunos a tentarem usar diferentes representações familiares e ajuda-os a avaliá-las. Se o professor está genuinamente a tentar partilhar significado, então o que há a fazer é clarificar por que é necessária a interpretação e por que é útil uma representação diferente.

Para Bishop e Goffree (1986), para além das regras básicas para a aula está a preocupação do professor em desenvolver a partilha de significados. O professor que deseja promover a negociação como o modo predominantemente na sua sala de aula precisa de questionar e responder a questões; dar razões e pedir por razões; clarificar e pedir clarificação; dar analogias e pedir analogias; descrever e pedir por descrições; explicar e pedir explicações; dar e receber exemplos. A meta para o professor de Matemática é o desenvolvimento de significados matemáticos partilhados e isto inclui a clarificação de incompreensões matemáticas, a moldagem de linguagem matemática, encorajar a procura de atalhos e esquematização progressiva, e estimular a generalização e racionalização.

A comunidade de educação matemática tem procurado formas de combinar a escrita com o raciocínio e a argumentação nas aulas de Matemática (NCTM, 2000); o mesmo dilema é também enfrentado pelos educadores de ciências que procuram incluir estratégias de produção escrita que envolvam processos de raciocínio e argumentação na sala de aula. A *Science Writing Heuristic*, Heurística da Escrita Científica, de Hand (2008), é um exemplo de como atividades desse tipo promovem a aprendizagem dos alunos. Um dos principais focos desta abordagem é apoiar os professores na promoção da participação dos alunos nas tarefas investigativas; no enquadramento das suas questões; na proposta de métodos para direcionar as questões e na promoção de investigações adequadas. Esta abordagem também procura estrutura o pensamento científico dos alunos relativamente às relações entre as questões, dúvidas e evidências provenientes de atividades escritas. Baseado no sucesso obtido, Akkus e Hand (2010) desenvolveram a *Mathematics Reasoning Approach (MRA),* Abordagem de raciocínio matemático, para ajudar os professores na promoção da resolução de problemas dos alunos envolvendo simultaneamente a ação do aluno e do professor na sala de aula.

Segundo Akkus e Hand (2010), a MRA tem duas caraterísticas-chave: foi projetada para aumentar significativamente a quantidade e qualidade da interação dialógica no ambiente de sala de aula, estimulando os alunos para a negociação de significado, no diálogo com outros colegas onde o significado entre os indivíduos interage e/ou no monólogo (consigo mesmo) frequentemente através da escrita. A outra caraterística-chave da MRA são os dois modelos apresentados na tabela 1, para apoiar as atividades de sala de aula ao longo do ano letivo. O modelo de ensino da MRA fornece uma estrutura para os professores que combina diferentes aspetos do ensino-aprendizagem da Matemática, tais como, o conhecimento que os alunos e professor têm da Matemática (Yackel, 1998), métodos de negociação para a resolução de problemas e a introdução da escrita no ensino da Matemática. O modelo do aluno na MRA é uma tentativa de guiar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas e aumentar essas competências (habilidades) através do uso da escrita. O modelo consiste numa série de questões que os alunos devem ter em consideração quando estão envolvidos no processo de resolução de problemas. O modelo dos alunos lembra a heurística de Pólya e as suas quatro etapas (compreender o problema; estabelecer um plano; implementar o plano; e verificar) ou as quatro fases para a resolução de problemas propostas por Schoenfeld (análise; design [desenho], exploração e implementação). Contudo, uma caraterística que distingue este modelo e qualquer outro é o fato de pedir aos alunos para compararem as suas soluções com as dos seus pares e para refletirem na solução obtida após a discussão realizada na aula.

Tabela 1 - Modelo de abordagem do raciocínio matemático para o professor e alunos (retirado de Akkus & Hand, 2010).

Modelo para o professor	Modelo para o aluno
Preparação: - identificar as ideias principais da unidade; - fazer um mapa de conceitos que relaciona subconceitos com as ideias principais; - considerar os conhecimentos prévios dos alunos; - considerar as concepções alternativas que os alunos poderão fazer ao relacionar o seu conhecimento prévio com as ideias principais aprendidas em aula. **Durante a unidade:** **Conhecimento que os alunos têm da Matemática** Dar aos alunos oportunidade para discutirem as suas ideias - levar os alunos a colocarem as suas ideias para exploração no quadro **Conhecimento que os professores têm da Matemática** Usar o conhecimento para identificar todas as concepções alternativas que os alunos farão - guiar os alunos às ideias principais inicialmente identificadas durante a preparação **Negociação de ideias** - criar discussões em pequenos grupos e em grupo turma; **Escrita** - - Pedir aos alunos para escrever uma reflexão sobre o que aprenderam na unidade para um público real (Professor, pais, colegas de turma, colegas mais novos, etc.)	**Qual é a minha questão (problema)?** - Especifica o problema (quais são as questões que tenho de responder?) - Organiza a informação dada (Que informação é conhecida?) **O que posso afirmar sobre a solução?** - Usa frases completas para explicar como vais resolver o problema - Explica quais as estratégias que podes seguir O que fiz? - Que etapas segui para resolver o problema? - O meu método faz sentido? Porquê? Quais são os meus argumentos? - Porque escolhi este método/estratégia? - Como posso relacionar a minha solução com os dados iniciais? - Como sei se o meu método funciona? O que dizem os outros? - Como é que as minhas ideias/soluções se comparam com a dos outros? (colegas; manual, matemáticos) Reflexão - Como mudaram as minhas ideias? - - Estou convicto da minha solução? Porquê?

Num estudo realizado por Pugalee (2004) verificou-se que os alunos que escreveram sobre o seu processo de resolução de problemas tiveram resultados bastante melhores do que os alunos que apenas verbalizaram as suas resoluções. Este também é um indicador da importância de pedir aos alunos para escreverem o seu processo de resolução de problemas e é por isso que a MRA encoraja os alunos a apresentar a sua interpretação da Matemática em texto para diferentes audiências, como pais, pares e colegas mais novos.

O tipo de interação que o professor proporciona na sala de aula é muito importante para o desenvolvimento do significado matemático. Christiansen e Walther (1986) referem que os alunos, para além do trabalho individual, devem desenvolver trabalho de grupo, uma vez que a interação entre eles possibilita o confronto de estratégias e de pontos de vista. Também o trabalho em pares tem sido cada vez mais reconhecido como importante na aula de Matemática, uma vez que deste modo os alunos podem trocar impressões e discutir ideias para a concretização da tarefa proposta, proporcionando uma significativa interação entre eles. Estes modos de trabalho decorrem da importância das interações sociais, dada a sua influência no desempenho matemático dos alunos (Moll, 1996):

> Os alunos podem assim participar em dois níveis do discurso da aula – o coletivo e o que desenvolvem com o seu parceiro de aprendizagem. Trata-se de uma forma prática de trabalhar, que não exige, de um modo geral, alterações no espaço físico da sala de aula e que proporciona aos alunos uma certa margem de autonomia. É particularmente adequada quando a tarefa proposta é relativamente estruturada e não exige um elevado nível de concentração individual (Ponte et al., 1997, p. 94).

Numa aula com ênfase no trabalho de grupo e/ou a pares são mais evidentes os desafios profissionais relativos à comunicação e interação, quer do professor quer do aluno. Qualquer professor tem de aprender a lidar com os vários constrangimentos, que reduzem as possibilidades dentro da sala de aula, tais como o tempo, o espaço, o manual escolar, o programa, mas dentro destes constrangimentos, a questão mais importante para o professor é conhecer bem os alunos, para que seja capaz de imaginar e avaliar os potenciais valores de qualquer tarefa para eles.

Kounin (1970) refere que existe uma qualidade que permite distinguir os gestores mais efetivos da sala de aula dos menos efetivos. É a qualidade de conhecimento do que está a acontecer na sala de aula, para que os alunos também saibam que o professor sabe como correm as coisas. Outra qualidade é a sobreposição, pela qual o professor está apto a dar atenção a mais do que um fenómeno de imediato. A discussão efetiva, entre um grupo de qualquer tamanho, requer um comportamento disciplinar dos participantes para que, por exemplo, não falem todos ao mesmo tempo, mas a discussão na sala envolvendo 20 a 30 crianças requer uma grande capacidade do professor para que não degenere numa confusão ou num monólogo do professor. Ainda segundo Kounin (1970), o essencial é a natureza pública e partilhada da atividade e o professor deve constantemente gerir a aula para observar possíveis sinais de não compreensão e não envolvimento.

2.3. Discussões coletivas

As discussões coletivas são um momento de trabalho particularmente importante da aula de Matemática. Muitas inovações na Educação Matemática têm convidado os professores a criar ambientes de aprendizagem que propiciem o desenvolvimento intelectual dos alunos (Fennema & Franke, 1992) para que estes explorem ideias matemáticas, aprofundem o seu conhecimento dessas ideias e criem conexões dentro e fora da Matemática (Brown & Borko, 1992, NCTM, 1991), sentindo-se seguros e motivados a fazê-lo (Lampert, 1988). Subjacentes a estes princípios estão várias formas de comunicação, verbal e escrita, que facilitam e permitem o envolvimento com motivação dos alunos e professor na descoberta do conhecimento matemático rico e significativo (Hiebert, 1992; Silver & Smith, 1996). Cobb, Boufi, McClain e Whitenack (1997) sugerem que "o movimento da reforma atual em Educação Matemática coloca a ênfase no papel que a discussão em sala de aula pode ter no apoio ao desenvolvimento conceptual dos alunos" (p. 258). Considerando esta ênfase sublinham a importância que os professores valorizem o papel que a comunicação exerce enquanto veículo promotor do desenvolvimento do conhecimento matemático nos alunos.

Para Christiansen e Walter (1986) e também Ponte et al. (1998), a realização de uma tarefa envolve três fases essenciais: (i) a apresentação da tarefa pelo professor; (ii) o desenvolvimento do trabalho pela execução da tarefa pelos alunos; e (iii) a discussão/reflexão final da tarefa. Esta última fase permite o confronto de opiniões, a justificação e a tomada de consciência dos processos seguidos por parte dos alunos. É de notar que a ênfase na realização de tarefas desafiantes em sala de aula gera uma grande imprevisibilidade no trabalho do professor em especial nos momentos de discussão em que os alunos apresentam, discutem e debatem os seus raciocínios. A condução deste trabalho é um forte desafio para o professor (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Assim, um dos aspetos fundamentais da prática profissional do professor consiste na otimização da organização e condução das discussões coletivas relativas às tarefas propostas.

Segundo Sherin (2002), liderar uma discussão de modo eficaz envolve antecipar, gerir e dar sentido às respostas imprevisíveis e muitas vezes idiossincráticas de uma turma de alunos altamente diversificados, e ao mesmo tempo manter a discussão focada num conjunto específico de objetivos de ensino. Esta autora discute a tensão pedagógica que existe sempre que o professor procura utilizar as ideias matemáticas dos seus alunos como base para a discussão da aula enquanto simultaneamente assegura que a discussão é matematicamente produtiva. O grande desafio é encontrar o equilíbrio entre estas duas questões. Para a autora, levar os alunos a partilhar e explicar as suas ideias é fundamental. Ao professor cabe articular o processo e o conteúdo da discussão. O processo refere-se à forma como o professor e alunos interagem – quem fala com quem, quando, de que forma. O conteúdo, por sua vez, refere-se à "substância" que as ideias que os alunos apresentam na aula, e à profundidade e complexidade destas ideias em termos dos conceitos matemáticos em consideração. Mais ainda, o conteúdo da discussão também diz respeito à análise da proximidade a que estão as novas ideias trazidas pelos alunos e os objetivos curriculares do professor.

Por sua vez, Lobato, Clarke e Ellis (2005) propõem a reformulação do discurso dos professores em sala de aula, analisando o dilema que estes muitas vezes sentem ao ter de decidir quais as ações a tomar de forma a conduzir os seus alunos à descoberta matemática. No seu artigo, os autores reformulam o discurso de três formas: (a) em termos da função, envolvendo a atenção à intenção do professor, à natureza da ação docente e às interpretações feitas da ação do aluno, e não à forma das ações de comunicação dos professores; (b) em termos do conteúdo conceptual e não processual da nova informação; e (c) em termos da sua relação com outras ações e não como uma ação isolada. Esta reformulação procura resolver algumas das preocupações com o discurso no ensino e ajuda a estabelecer a legitimidade de fornecer novas informações numa perspetiva construtivista sobre a aprendizagem, estimulando as participações e construções matemáticas dos alunos, através da introdução de novas ideias matemáticas na discussão em sala de aula.

O modelo proposto por Stein et al. (2008) identifica cinco práticas que facilitam as discussões matemáticas pretendendo apoiar o professor na preparação e realização das discussões coletivas. Como se pode ver na figura 1, o modelo apresenta as cinco práticas por ordem sequencial: *antecipar*, *monitorizar*, *selecionar*, *sequenciar* e finalmente *conectar*.

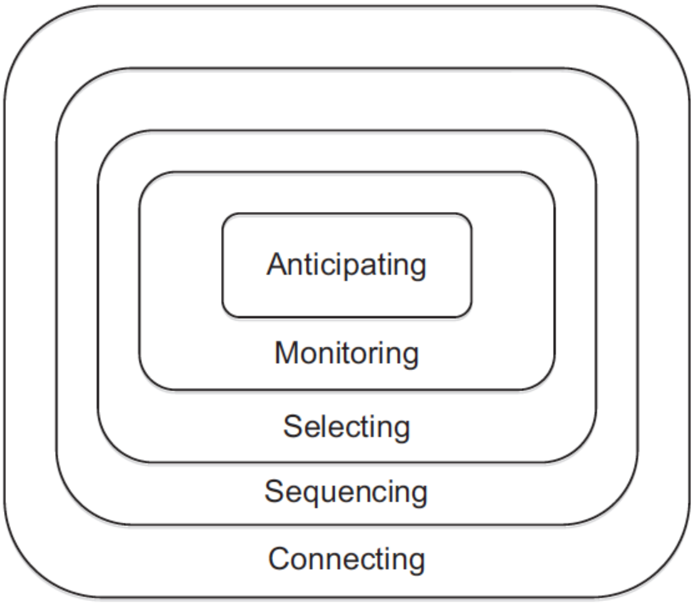


Figura 1 – Diagrama esquemático das cinco práticas que facilitam as discussões matemáticas (retirado de Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

A prática *antecipar* procura antever as estratégias e respostas que os alunos podem vir a usar para resolver as tarefas propostas na sala de aula (Lampert, 2001; Schoenfeld, 1998; Smith, 1996). Esta preparação vai muito além da simples verificação se a tarefa proposta tem o adequado nível de dificuldade, se é suficientemente interessante para os alunos, ou ainda se estes conseguirão obter a resposta correta. *Antecipar* envolve considerar as expetativas da forma como os alunos irão abordar e interpretar matematicamente a tarefa, da diversidade de estratégias, corretas e incorretas que poderão utilizar. O professor irá tentar perceber como poderá relacionar essas estratégias e interpretações com os conceitos matemáticos, representações, procedimentos e práticas que pretende que os seus alunos aprendam (Lampert, 2001; Schoenfeld, 1998). *Antecipar* requer que, no mínimo, o professor resolva as tarefas que irá propor aos seus alunos, não utilizando apenas uma estratégia de resolução mas sim trabalhando a tarefa utilizando a maior diversidade de estratégias possíveis para antever níveis de sofisticação na sua resolução e possíveis interpretações erradas do problema. Para além desta preparação os professores devem também ler literatura de investigação sobre respostas tipo apresentadas pelos alunos para tarefas similares. Esta preparação deve ainda apoiar-se no currículo de Matemática em vigor.

A segunda prática, *monitorizar,* consiste em prestar especial atenção ao raciocínio matemático utilizado pelos alunos na fase de exploração das tarefas propostas (Lampert, 2001; Schoenfeld, 1998). Ocorre nos momentos em que o professor vai circulando por entre os grupos que estão a trabalhar na tarefa. O objetivo desta fase é identificar potenciais estratégias e resoluções de alunos que possam ser apresentadas a toda a turma para serem discutidos, que possam trazer importantes desenvolvimentos para a aula, tendo em vista os objetivos propostos com a tarefa. Neste sentido, para além do professor identificar os alunos que se encontram a trabalhar ou que se encontram frustrados também é importante identificar as ideias matemáticas que estão "em jogo" na resolução e discussão da tarefa proposta. Isto significa que o professor deve procurar ativamente identificar a Matemática que os seus alunos estão a utilizar, quer na resolução, quer na discussão da tarefa proposta. Deve ainda avaliar a validade das ideias matemáticas que os alunos estão a utilizar e tomar significado dos raciocínios matemáticos por eles produzidos. Lampert (2001) refere que se observar e ouvir com atenção o trabalho desenvolvido pelos alunos na fase de monitorização, poderá com facilidade escolher *quem* e *o que* será o foco da discussão coletiva na sala de aula.

A terceira prática, *selecionar*, surge após as duas anteriores e visa que o professor escolha alunos específicos para partilharem o seu trabalho com a turma e desta forma trabalharem "pedaço(s) específico(s) de Matemática em cima da mesa" (Lampert, 2001, pg. 146). Esta fase ocorre quando o professor seleciona um aluno ou um grupo de alunos específicos para apresentarem o seu trabalho à medida que a discussão vai acontecendo. Em alternativa, o professor pode pedir voluntários e depois selecionar aquele aluno em particular que sabe poderá trazer contribuições para a discussão na sala de aula que envolvam os objetivos da aula. Esta é uma forma de manter o equilíbrio entre a tensão de "manter a discussão na direção pretendida e permitir que os alunos contribuam espontaneamente com o que consideram ser relevante" (Lampert, 2001, p. 174). Em todos estes processos de seleção o professor mantém o controlo de quais alunos irão apresentar as suas estratégias e assim selecionar as ideias matemáticas a explorar e desenvolver durante a discussão. Ao invés de deixar ao acaso os alunos a apresentar o trabalho desenvolvido, ao selecionar poderá escolher os conceitos matemáticos importantes a serem ilustrados, salientados e posteriormente generalizados. O professor pode ainda assegurar a discussão de erros frequentes que são cometidos ao trabalhar a tarefa e permitir que um aluno selecionado proceda à sua correção e justificação e ainda introduzir uma nova estratégia que não tenha sido desenvolvida por qualquer aluno na sala de aula. Caso surjam algumas estratégias não esperadas pelo professor, este poderá decidir desenvolver a questão, por exemplo numa próxima aula.

A quarta prática diz respeito a *sequenciar*. Após ter selecionado os alunos a apresentar o professor poderá escolher a ordem de apresentação do trabalho desenvolvido pelos alunos. Ao fazer esta sequenciação o professor poderá maximizar os objetivos planificados para a discussão na sala. Por exemplo, pode querer escolher a estratégia maioritariamente utilizada por quase todos os alunos e assim fazer com que o primeiro momento da discussão seja acessível para todos e só depois selecionar estratégias particulares que permitam validar o trabalho apresentado pelos alunos. Esta estratégia permite que os alunos desenvolvam uma compreensão mais aprofundada do problema e que irá permitir futuramente que entendam o significado matemático de estratégias de resolução mais complexas e únicas. Outra forma de sequenciar é selecionar uma estratégia que introduza uma incorreção e ao ser discutida pela turma permita que os alunos compreendam formas mais eficientes de "atacar" problemas similares. O professor poderá também sequenciar estratégias similares ou contrastantes a serem apresentadas uma após a outra para que seja mais fácil aos alunos comparar estratégias diferentes de resolução. Este processo de sequenciação permite que o professor não esteja à mercê das contribuições aleatórias dos alunos, mas sim selecionar os alunos numa determinada sequência por forma a tornar a discussão matematicamente mais coerente e previsível.

Estas quatro práticas ocorrem antes do início da discussão coletiva e visam prepará-la eficientemente. A quinta e última prática é a única que ocorre no decorrer da discussão. Consiste em *conectar* e tem por objetivo promover conexões matemáticas entre as diferentes respostas apresentadas pelos alunos e as ideias-chave que são o objetivo da aula. O professor pode ajudar os alunos na validação e justificação das conjeturas desenvolvidas, na avaliação crítica das estratégias utilizadas pelos alunos em função do objetivo da tarefa, procurando formas mais eficientes, precisas e eficazes de as trabalhar e ainda na identificação do tipo de padrões matemáticos que possam surgir. Pode também fazer com que os alunos identifiquem a mesma ideia-chave em estratégias de resolução aparentemente diferentes. Através de todas estas contribuições o professor pode fazer com que as apresentações dos alunos sejam construídas com base no trabalho apresentado pelo grupo anterior, estabelecendo conexões, articulando estratégias na procura de uma discussão mais significativa, produtiva e eficiente para assim serem trabalhadas as potenciais ideias matemáticas que são o cerne da aula.

Por sua vez, o trabalho desenvolvido por Henning, Mckeny, Foley e Balong (2012) procura investigar a relação existente entre o tipo de aula e o discurso promovido por um professor de Matemática, tendo desenvolvido uma representação esquemática, designada por *laço* que apresenta três tipos distintos de discussão – de *enquadramento*, *conceptual* e de *aplicação* – tendo por base o momento em que surge, o propósito de aula, o tipo de tarefa e os respetivos métodos de avaliação, como se pode ver na figura 2.

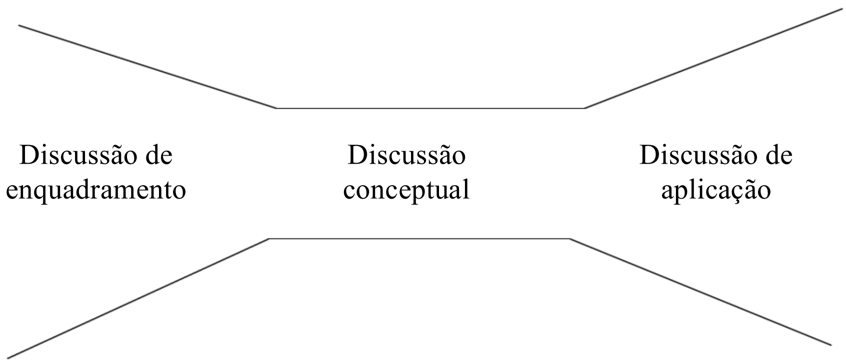


Figura 2 - Modelo com tipos de discussão matemática (adaptado de Henning, 2008).

A discussão de *enquadramento* ocorre habitualmente no início de uma unidade temática e tem por objetivo maximizar a participação dos alunos, rever conhecimentos prévios, fazer uma avaliação diagnóstica dos conhecimentos dos alunos e serve como sugestão inicial de trabalho. Nesta fase e apesar do conhecimento limitado que os alunos têm dos conceitos, é esperada uma elevada taxa de participação na discussão pois ocorre com a aplicação de conceitos já familiares e previamente aprendidos. Por isso, o lado esquerdo do laço é apresentado com a disposição aberto-fechado. A discussão *conceptual* visa envolver os alunos numa discussão matemática sobre novos conceitos, introduzindo vocabulário novo. Nesta fase, os alunos têm um conhecimento dos conceitos novos muito limitado fazendo com que a discussão seja habitualmente mais centrada no professor. Por isso, a faixa central mais estreita significa a ocorrência de discussões estruturadas, guiadas e apoiadas pelo professor. Por último surge a discussão de *aplicação* que procura ajudar os alunos na construção de novo conhecimento matemático, através de situações problemáticas e desafiantes através do recurso a tarefas de carácter mais complexo. Este terceiro tipo de discussão visa que os alunos apliquem conceitos matemáticos previamente aprendidos e que incorporem aspetos familiares da vida real. Deste modo, há a expectativa de um elevado nível de participação dos alunos na discussão, fazendo com que, no esquema, o lado direito do laço tenha uma aparência simétrica do lado esquerdo. Os resultados do estudo elaborado por Henning et al. (2008) sugerem a ocorrência de diferentes tipos de interações no discurso dos participantes nestes três tipos de discussão.

O trabalho desenvolvido por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) propõe um modelo de análise das discussões matemáticas que salienta o papel que podem assumir as ações do professor ao convidar, sugerir, apoiar/guiar ou desafiar os seus alunos para a apresentação da resolução de uma tarefa, como se pode ver na figura 3.

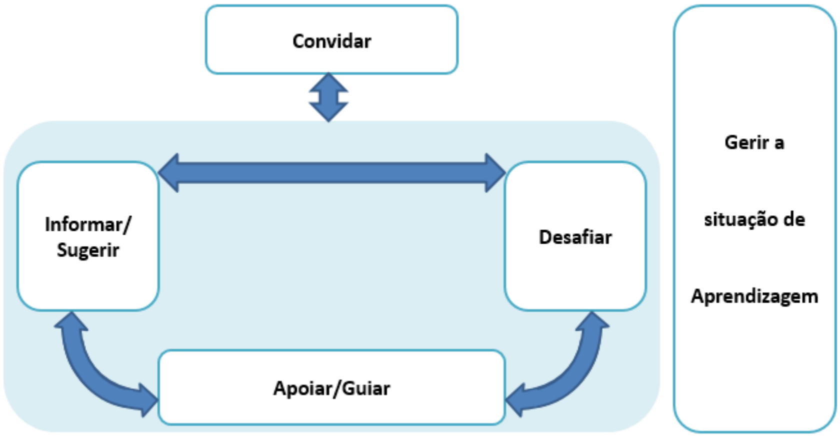


Figura 3 - Modelo das ações do professor na condução de discussões matemáticas (retirado de Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013).

Para os autores, *Convidar* proporciona o envolvimento inicial dos alunos num dado segmento da discussão. As ações apoiar/guiar, desafiar e informar/sugerir, são aquelas que surgem com mais frequência nas discussões matemáticas. Nas ações de *apoiar/guiar* o professor promove a continuação da participação dos alunos na resolução de um problema já iniciado, conduzindo os alunos de forma discreta ou explícita, através de questões ou através de outras intervenções. Em *informar/sugerir* o professor assume o papel de introduzir informação, proporcionar argumentos, ou validar respostas dos alunos. Em *desafiar* procura que sejam os alunos a assumir o papel da condução da discussão. Em *sugerir* o professor assume a responsabilidade integral do discurso matemático, em *apoiar* procura conduzir o aluno na resolução da tarefa e em *desafiar* coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar.

No estudo de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), a análise dos dados foi realizada por segmentos, onde cada um corresponde à realização de uma das questões do problema proposto ou à exploração de um aspeto específico de uma das questões. O modelo pressupõe dois tipos de ações por parte do professor – ações relacionadas com os tópicos e processos matemáticos e ações de gestão da aprendizagem, não relacionadas com aspetos matemáticos. Os resultados da investigação mostram que a discussão é fortemente marcada pelas ações de desafiar, que tanto surgem de ações de sugerir e guiar, como de ações anteriores de desafiar. Mostram também a importância das ações de guiar, que tanto se seguem umas às outras como alternam com ações de desafiar. Neste estudo, um segmento acaba usualmente com uma ação de sugerir que sintetiza os aspetos principais a registar pelos alunos. Na realização destas discussões surgem numerosos problemas que o professor precisa de enfrentar, alguns dos quais aparecem de forma recorrente.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

As decisões de carácter metodológico são de grande importância numa investigação. É preciso ponderar cuidadosamente o objetivo que se pretende alcançar e as questões do estudo, tendo em vista a adoção de uma metodologia adequada, que inclua uma criteriosa escolha dos participantes e uma adequada escolha dos métodos e instrumentos de recolha de dados. É ainda preciso pensar atentamente todo o processo analítico. São as opções tomadas a este nível que aqui se apresentam.

3.1. Opções metodológicas gerais

3.1.1. Paradigma e abordagem

Com este estudo pretendo compreender a natureza da comunicação matemática na sala de aula através do estudo das ações da professora na condução de discussões matemáticas durante a resolução de tarefas que motivem uma aprendizagem significativa e eficiente bem como conhecer os problemas que surgem à professora no decurso destas discussões. Com esta análise pretendo contribuir para o conhecimento da natureza do ambiente de ensino-aprendizagem na aula de Matemática.

Para atingir estes objetivos sigo uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa. Na verdade, pretendo estudar as questões formuladas a partir dos participantes em contexto natural, indo ao encontro do que é defendido na investigação qualitativa em Educação. Assim, este estudo insere-se no paradigma interpretativo, que, tal como diz Erickson (1986), se caracteriza pelo “interesse central no significado humano na vida social e na sua elucidação por parte do investigador” (p. 119). Erickson (1986) identifica como principais campos de interesse para a investigação interpretativa em educação na sala de aula como meio social organizado para a aprendizagem, tanto o ensino como “um aspeto, as apenas um aspeto do ambiente de aprendizagem reflexiva” (p. 120) como as perspetivas e os significados de professores e alunos.

Tenho também em conta as cinco caraterísticas da abordagem de uma investigação qualitativa, definidas por Bogdan e Biklen (1994): (i) A fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; (ii) Os dados recolhidos são descritivos; (iii) O interesse do investigador centra-se sobretudo nos processos e não nos resultados ou produtos; (iv) A análise dos dados é realizada de forma indutiva; e (v) O investigador interessa-se em compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. Estas características estão em grande medida presentes nesta investigação. Os principais participantes – a professora de Matemática do ensino secundário e os alunos – são observados por mim, enquanto investigadora, no papel de observadora participante, em contexto natural, tanto dentro como fora de aula. Eu própria sou o principal instrumento de recolha de dados, tirando apontamentos no diário de bordo, recorrendo a registos áudio e vídeo das aulas e à análise das transcrições das discussões geradas nos episódios de aula. Os dados recolhidos são principalmente de natureza descritiva, incluindo momentos de conversa com a professora conduzidas de modo informal e documentos de trabalho da professora. Como recomendam Bogdan e Biklen (1994), ao analisar os dados, procuro respeitar, tanto quanto possível, a forma como estes foram registados e transcritos. Durante o estudo, enquanto investigadora, procuro orientar o meu interesse, sobretudo, para as ações que conduzem ao desenvolvimento da comunicação na sala de aula, à forma como é gerida a discussão coletiva, e aos problemas que surgem na sua realização, sempre na perspetiva da professora. Após a recolha dos dados, analiso-os, partindo de episódios bem definidos, procurando estabelecer relações entre eles, numa perspetiva indutiva, ou seja, tomando como ponto de partida os dados que se vão agrupando e relacionando, na procura de aspetos específicos. Deste modo, a recolha de dados não tem como objetivo confirmar hipóteses prévias. Por último, enquanto investigadora, procuro apreender a perspetiva da professora participante neste estudo, realizando após as sessões de observação da aula momentos de reflexão sobre as dificuldades relativas à condução da discussão matemática na sala de aula.

3.1.2. Observação participante

Tendo por base a metodologia de tipo interpretativo e qualitativo e tendo em atenção os objetivos do estudo este assume a modalidade de observação participante. De acordo com Jorgensen (1989), esta modalidade de investigação é essencialmente adequada quando os significados dados pelos próprios atores são centrais no estudo a desenvolver. Na verdade, pretendo dar visibilidade à natureza da comunicação matemática na sala de aula com especial incidência nas ações da professora e nos problemas que enfrenta. O estudo é realizado no dia-a-dia da sala de aula e não num ambiente artificial e manipulado pela investigadora. Mas, para que os processos (ações e problemas na perspetiva da professora) em estudo possam ser observados na sala de aula, a investigação é realizada em colaboração com a professora participante. Assim, eu, enquanto investigadora, descrevi os objetivos do estudo à professora, salientando a importância das discussões matemáticas, referindo o tipo de tarefas que seria interessante usar como base para essas discussões. No entanto, para não influenciar o seu modo de agir, não indiquei pormenores sobrem o foco da minha observação. Assim, com a realização deste estudo, pretendo obter no final um produto de natureza descritiva e analítica. Importa ainda salientar que a sua realização não envolve a preocupação em generalizar os resultados. Os resultados obtidos dizem respeito, apenas, a esta professora na sua interação com os seus alunos, e poderão, eventualmente, contribuir para a realização de estudos futuros com outros participantes.

Segundo Jorgensen (1989), a definição da perspetiva de participação da investigadora, na sala de aula é determinante para o estudo, pois o papel do investigador enquanto observador determina o que pode ser observado. Segundo este autor, a participação do investigador enquanto observador pode ser representada num contínuo entre o completo *outsider* e o completo *insider*, não havendo uma localização neste contínuo que seja ideal ou perfeita. Assim, tendo em consideração os meus objetivos de estudo, o meu papel é maioritariamente de *outsider*. É a professora que assume a responsabilidade da condução da aula e eu, enquanto investigadora sou observadora dos processos que nesta ocorrem (ações da professora na condução das discussões e problemas emergentes), embora fazendo um acompanhamento das tarefas realizadas na sala de aula, tirando notas, gravando e por vezes dando discretamente apoio a alguns alunos durante (que não interfiram no estudo), numa atitude de colaboração. O objetivo central desta minha escolha é não influenciar a prática da professora em sala de aula. Deste modo, ainda que o meu papel na aula seja maioritariamente o de professora assistente da professora titular da turma no apoio aos alunos, nos momentos introdutórios, de conclusão e de discussão coletiva, tenho uma participação essencialmente de *outsider*.

O recurso à observação participante surge assim neste estudo como essencial para aceder a situações que envolvem processos relacionados com as ações da professora possibilitando a extensão do conhecimento existente sobre a natureza da comunicação matemática em sala de aula, nomeadamente em relação às ações do professor na condução de discussões.

3.2. Participantes

Um dos aspetos fundamentais num estudo qualitativo é a seleção e identificação dos participantes, tendo por base critérios devidamente justificados, decorrentes dos objetivos do estudo. Dado o objetivo desta investigação, defini que os participantes seriam a professora titular de uma turma de 12.º ano do ensino secundário e os alunos constituintes de uma das suas turmas.

Para a identificação da professora a convidar, estabeleci várias condições. A primeira condição foi lecionar o tema Funções no ensino secundário, preferencialmente na disciplina de Matemática A, dando garantia de se preocupar com o desenvolvimento deste tópico do currículo de Matemática e mostrar predisposição para refletir sobre a comunicação na sala de aula. A segunda condição foi apresentar disponibilidade para colaborar na investigação tendo em conta a eventual necessidade de fazer alterações na sua planificação letiva. A terceira condição era possuir experiência de ensino, pois seria expectável que nesse caso teria um conhecimento didático mais aprofundado e, por outro lado, que mostrasse confiança na participação num estudo desta natureza.

No início de outubro de 2013 procedi à recolha de informações em algumas escolas da região de Lisboa e ao levantamento dos professores que lecionam Matemática ao ensino secundário que se preocupem com o desenvolvimento da comunicação na sala de aula, nomeadamente com os problemas que coloca à sua prática profissional. Tendo em conta as informações recolhidas, convidei uma professora de uma escola da região da Grande Lisboa, com larga experiência de ensino (mais de 30 anos de docência), que estava a lecionar a disciplina de Matemática A no ensino secundário, mais especificamente no 12.º ano de escolaridade e que satisfazia todas as condições acima indicadas. A professora constitui uma referência para a investigadora na forma como tem definido ativamente a sua atuação no ensino da Matemática, sendo muito empenhada em dar o melhor de si aos seus alunos, mantendo uma preocupação constante no seu desenvolvimento profissional e colaborando com importantes grupos de trabalho ligados ao ensino da Matemática em Portugal.

A professora foi contatada em finais de outubro, tendo prontamente aceitado participar neste estudo. De acordo com as indicações de Bogdan e Biklen (1994), apresentei os objetivos do estudo e clarifiquei os papéis dos participantes. Pedi à professora que (1) permitisse a minha presença nas suas aulas que seriam filmadas para posterior transcrição, e onde dada a natureza do estudo, o meu papel de investigadora em sala de aula seria essencialmente de *outsider*, (2) se disponibilizasse para realizar entrevistas reflexivas após as aulas, assim como para me deixar colaborar na planificação das aulas, e (3) disponibilizasse alguns documentos (relação dos alunos da turma, horário) e tarefas propostas aos alunos, essenciais para o estudo.

A seleção da turma foi feita a partir das turmas da professora, tendo em atenção que seria importante existir de um ambiente de trabalho produtivo. A escolha da turma de Matemática A do 12.º ano do ensino secundário de Ciências e Tecnologias, composta por 24 alunos (20 rapazes e 4 raparigas) decorreu da sugestão da professora tendo em conta o desempenho e comportamento dos alunos. De acordo com as informações da professora, a turma é turbulenta e apresenta alunos com diferentes níveis de desempenho em Matemática, sendo por isso heterogénea em termos de aproveitamento. Contudo, pela sua experiência de trabalho com a turma (no primeiro período desse ano letivo, pois a turma não é de continuidade) considerou ser possível criar um bom ambiente de ensino-aprendizagem, pois os alunos respeitam a professora e os colegas. Ao longo do ano letivo a constituição da turma apenas sofreu pequenas alterações mantendo-se estável durante a concretização da unidade de ensino. A turma tinha quatro blocos semanais de noventa minutos e para a concretização deste estudo formaram-se oito grupos de três alunos.

3.3. Recolha e análise de dados

3.3.1. Recolha de dados

A recolha de dados foi integralmente realizada por mim. Teve início em dezembro de 2013. As aulas consideradas no estudo tiveram início no 2.º período, tempo programado para a lecionação do tema II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II* na unidade de ensino sobre o tópico *Funções exponenciais e logarítmicas*, com a previsão de nove blocos de 90 minutos.

Para esta recolha de dados são utilizados vários processos caraterísticos da observação participante, com destaque para a observação direta e a recolha documental. Segundo Bogdan e Biklen (1994), para que um estudo qualitativo seja bem-sucedido, é fundamental que o investigador observe e registe sistematicamente os acontecimentos, o mais objetivamente possível. A observação direta decorreu nas aulas da unidade de ensino, sendo estas aulas gravadas em áudio e vídeo para serem transcritas para posterior análise. A opção pela gravação pondera dois problemas: (i) a alteração do comportamento dos atores perante a câmara e (ii) a necessidade de transcrição. Para atenuar o efeito de alteração do comportamento dos participantes, realizaram-se duas aulas experimentais, previamente ao início do estudo, para que estes se familiarizassem com a presença da investigadora e do equipamento. Quanto à necessidade de transcrever as gravações das aulas, apesar do tempo despendido, as vantagens são muitas, dada a utilidade das transcrições para posterior análise, ilustrando os acontecimentos da aula de forma muito mais fiável do que usando registos escritos manualmente. A gravação em vídeo permite manter um registo detalhado das aulas que pode ser analisado repetidamente, sempre que necessário. Considerando ainda os objetivos do estudo foi ainda feita a transcrição das reflexões da professora, após as aulas observadas.

No estudo é ainda usado um diário de bordo, assumindo que este constitui um instrumento privilegiado “onde o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo” (Ponte, 2002, p. 18). Este diário de bordo contém anotações realizadas durante as aulas ou logo após as aulas, referentes a situações que pareceram relevantes e que se salientaram no decurso das aulas, e que podem vir a ser úteis para a investigação, nomeadamente as expetativas da investigadora antes das aulas, situações relevantes referentes ao desenvolvimento das tarefas e algumas reflexões sobre o decorrer do estudo. Estas situações mencionadas referem-se sobretudo a ações da professora na condução de discussões e no seu papel perante alguns problemas que foram surgindo. Os registos no diário de bordo assinalam ainda algumas ideias para as observações seguintes e alguma análise inicial dos dados recolhidos.

Por último, mas não menos importante, foi feita a recolha de documentação relativa à realização da investigação com o intuito de obter informação para melhor caraterizar o objeto de estudo. São exemplos desses documentos o horário da turma, a relação de alunos da turma e ainda consideradas para análise, as tarefas propostas durante a unidade de ensino em estudo realizadas pelos alunos.

3.3.2. Análise de dados

Pela natureza do estudo, a análise de dados assumiu um caráter essencialmente descritivo e interpretativo, procurando relações entre os dados específicos constituídos pelos diferentes materiais obtidos, numa perspetiva indutiva, sem a finalidade de provar hipóteses previamente formuladas ou generalizar.

Merriam (1988) refere que na investigação qualitativa, estas duas atividades decorrem muitas vezes em simultâneo, pois a análise começa no primeiro momento de recolha de dados, surgindo desde logo ideias para um segundo momento de recolha de dados, resultantes da reflexão sobre o observado. Assim, neste estudo, os processos de recolha e análise de dados ocorreram numa primeira fase ao mesmo tempo. Esta primeira análise levou a adaptações pontuais de acordo com o observado e o foco do estudo. Contudo, a análise decorreu de um modo mais sistemático e estruturado após a conclusão da recolha de dados, onde se incluiu "o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta de aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (Bogdan e Biklen, 1994, p. 205). Esta fase iniciou-se com a transcrição integral das gravações de sala de aula referentes aos momentos da discussão das tarefas, com o objetivo de analisar e interpretar os dados recolhidos.

Considerando os objetivos do estudo e tendo em conta a revisão de literatura, considerei duas categorias de análise. Na primeira, tipos de discussão promovidos pela professora durante os episódios das aulas, defini as subcategorias enquadramento; conceptual; e aplicação. Analisei os dados das transcrições das aulas tendo em consideração o modelo desenvolvido por Henning, McKeny, Foley e Balong (2012) que procura investigar a relação existente entre o tipo de aula e o discurso promovido por um professor de Matemática, tendo por base a sua posição sequencial, propósito de aula, tipo de tarefa e métodos de avaliação. A segunda categoria refere-se ao tipo de ações utilizados pela professora na condução da discussão matemática, onde usei as subcategorias convidar, sugerir/informar, apoiar/guiar, e desafiar. Os dados foram analisados das transcrições das aulas tendo em consideração o modelo desenvolvido por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) para análise das discussões matemáticas relativo à natureza das ações do professor no decurso de uma discussão; e (iii) Problemas com que a professora se depara no decurso de uma discussão, onde criei as subcategorias: ausência de conhecimentos prévios referente a um tema por parte dos alunos (que são necessários para a compreensão do novo tema); fraca participação dos alunos da turma; reduzida organização do trabalho realizado pelos alunos (que serve de base à discussão); tempo de realização e discussão da tarefa, superior ou inferior ao planificado; e, problemas técnicos relacionados com o computador.

A organização e interpretação dos dados recolhidos de acordo com as categorias referidas permite uma descrição do observado tendo em consideração os objetivos do estudo. Para enriquecer esta descrição e preservar a veracidade e fiabilidade das descrições, são incluídos excertos obtidos através dos vários processos de recolha de dados utilizados na observação participante. Após esta análise, na última fase, procedo à análise crítica do trabalho desenvolvido no estudo e reflito sobre a eficácia e pertinência do estudo para a compreensão e extensão do conhecimento relativamente à natureza da comunicação matemática em sala de aula, nomeadamente no que respeita às discussões coletivas.

3.4. Aspetos de natureza ética

Os procedimentos de autorização e aspetos de natureza ética para a realização deste estudo também foram considerados. Comecei por fazer o convite à professora participante e um pedido oral ao diretor da escola (que aceitou prontamente). Com o intuito de obter a cooperação da professora, apresentei os objetivos do estudo, definindo as condições de participação que se mantiveram até ao final da investigação. Realizei também um pedido por escrito de autorização aos encarregados de educação dos alunos da turma onde se realiza o estudo ou aos próprios alunos caso tivessem 18 ou mais anos de idade (Stake, 2009) para a sua participação voluntária neste estudo (ver anexo 1). Foram dados a conhecer os objetivos do estudo, assim como as suas implicações (Bogdan & Biklen, 1994). Nesta investigação é preservada a identidade da professora, dos alunos e da escola onde decorreu o estudo. Os nomes atribuídos aos participantes do estudo são pseudónimos.

CAPÍTULO 4

A UNIDADE DE ENSINO

Este capítulo indica como decorreu a unidade de ensino sobre a qual incide este estudo. Para isso, apresento a planificação da unidade e descrevo de forma pormenorizada as tarefas que nela constam, destacando os seus objetivos. Por fim, faço uma pequena descrição do modo como decorreram as aulas. A informação que consta no capítulo tem em vista dar a conhecer os objetivos da unidade de ensino e a dinâmica promovida na sala de aula.

4.1. Planificação da unidade de ensino

Encarando este estudo como um contributo para o conhecimento do papel do professor na condução de discussões matemáticas envolvendo tarefas de exploração e investigação, o estudo irá decorrer no 12.º ano do ensino secundário, no estudo do tema II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II* do programa de Matemática A (DES, 2001), especificamente no estudo das *Funções exponenciais e logarítmicas*. Esta unidade de ensino é colocada em prática numa turma tendo como principal objetivo promover situações de aprendizagem ricas e significativas, com recurso à utilização da calculadora gráfica, como auxiliar na exploração das tarefas propostas.

As orientações metodológicas gerais do programa de Matemática A do ensino secundário referem que:

> Com as novas famílias de funções (...) É fundamental apresentar aos estudantes atividades diversificadas (...) tendo-se em conta que a exploração com a utilização das várias tecnologias pode permitir discussões ricas, quer sobre o processo de modelação, quer sobre os

> conceitos matemáticos fundamentais, para além de facilitarem propostas aconselháveis de investigações.
>
> Os estudantes precisam de desenvolver a compreensão de procedimentos algébricos e utilizá-los (a par da utilização da calculadora) sem que para isso tenham que fazer exercícios repetitivos.
> A modelação com funções exponenciais e logarítmicas pode ser feita tanto usando capacidades específicas da calculadora gráfica (...) como por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor. (ME-DES, 1992, p. 4)

Na planificação da unidade de ensino, para além dos objetivos e indicações metodológicas presentes neste programa, foram consideradas as orientações curriculares constantes na brochura *Funções 12* (ME-DES, 1997) e também as recomendações das *Normas* do NCTM (2007).

Ao planificar a unidade, a professora procurou diversificar e otimizar o número de tarefas a discutir com os alunos. Contudo, dada a extensão do programa curricular e a "pressão" que a professora sente em terminar o programa que será avaliado no Exame Nacional, decidiu que em certos casos cada grupo de alunos trabalharia uma tarefa distinta e que esta seria apresentada e discutida em turma. Esta estratégia faria também com que as aulas não fossem repetitivas.

A investigadora já conhecia previamente o "estilo" de trabalho da professora. Sabia por isso que a professora procura criar um ambiente de aprendizagem da Matemática dinâmico e desafiante, utilizando tarefas de cunho investigativo, bem diferente do estilo tradicional que consiste essencialmente no professor explicar, mostrar um exemplo para a turma e pedir aos alunos para resolverem uma lista de exercícios e problemas. Conhecendo previamente o trabalho da professora, considerei ser mais real e interessante que a planificação da unidade de ensino fosse realizada exclusivamente pela professora.

A seleção das tarefas apropriadas é essencial para o ensino e a aprendizagem da Matemática e, consequentemente, para atingir os objetivos propostos com este estudo. Assim, as tarefas incluídas neste tema de ensino são adaptações de tarefas das brochuras de Funções 12 (ME-DES, 1997) e de tarefas propostas pelo grupo T3 da APM, para o programa de Matemática do ensino secundário (tabela 2).

Tabela 2 – Planificação da unidade de ensino.

Desenvolvimento do tema Funções exponenciais e Logarítmicas	Tarefas previstas	Modo de trabalho	N.º de aulas de 90’
▪ Função exponencial de base superior a um; crescimento exponencial; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = a^x$, com a > 1 ▪ Função logarítmica de base superior a um; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = \log_a x$, com a > 1. ▪ Regras operatórias de exponenciais e logaritmos. ▪ Utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais. ▪ Problemas de otimização	**Tarefa 1** – **Gripe Asiática** (realização o e discussão)	Grupos de 3 alunos	1
	Exercícios e problemas do manual	Individual e a pares	1
	Tarefa 2 – **Entre tangentes** (realização e discussão)	Grupo de 3 alunos	1
	Exercícios e problemas do manual	Individual e a pares	1
	Tarefa 3 – **Na linha com curvas** (realização e discussão)	Grupo de 3 alunos	1
	Exercícios e problemas do manual	Individual e a pares	1
	Tarefa 4 – **Demonstração da derivada do produto** (realização e discussão)	Grupo de 3 alunos	1
	Tarefa 5 – **Demonstração da derivada do quociente** (realização e discussão)	Grupo de 3 alunos	1
	Exercícios e problemas do manual	Individual e a pares	1

A unidade de ensino foi realizada início do 2.º período, sendo utilizados 10 blocos de 90 minutos. Tal como indicado na tabela 2, a professora tinha previsto a utilização de 9 blocos de 90 minutos contudo, os grupos que dinamizaram a apresentação das tarefas 2 e 3 precisaram de mais tempo para trabalhar, o que segundo a professora resulta de serem alunos fracos na disciplina de Matemática. Assim decidiu dar a cada grupo mais 45 minutos para realizarem a tarefa. Deste modo, a unidade de ensino demorou mais um bloco de 90 minutos, 45 minutos adicionais para a tarefa 2 e outros 45 minutos adicionais para a tarefa 3.

A opção pela adaptação de tarefas já existentes, em vez de criar novas tarefas, assentou no pressuposto de que os materiais disponibilizados se encontram de acordo com as orientações no programa de Matemática A do ensino secundário que evidencia a importância da resolução de problemas e das tarefas de exploração para estimular o raciocínio, referindo que estas tarefas facilitam as aprendizagens e reforçam a capacidade de raciocinar logicamente “pelas oportunidades de formular e testar conjeturas e de analisar contraexemplos, de avaliar a validade de raciocínios e de construir demonstrações" (ME-DEB, 2001, p. 21). Assim, a adaptação das tarefas favoreceu a focalização na estruturação ou reestruturação de questões que visavam promover discussões matemáticas que pudessem favorecer a aprendizagem do tema em estudo. Foram também realizadas pequenas alterações nas tarefas para as ajustar às caraterísticas da turma onde a unidade de ensino foi realizada.

Todo o tema das Funções exponenciais e logarítmicas que constam do tema Introdução ao Cálculo Diferencial II foi abordado seguindo a mesma linha metodológica e este estudo apresenta cinco das tarefas usadas. Foram selecionadas estas cinco tarefas pois permitem refletir diferentes níveis de atividade matemática, desde mais simples, como a tarefa 1, a mais difíceis e desafiantes, como as restantes quatro tarefas. A diversidade das tarefas prende-se com as orientações curriculares para o ensino do tema em estudo, nomeadamente, para a exploração de situações que envolvam situações da vida real através da modelação matemática; para a exploração mais conceptual da Matemática através da utilização de conexões matemáticas; e, para a exploração de situações que envolvam a demonstração de regras e teoremas que utilizamos com frequência e que é importante saber demonstrar (ver tabela 2).

4.2. Tarefas

As tarefas deste tema de ensino são apresentadas de seguida e encontram-se integralmente nos Anexos.

4.2.1. Tarefa 1 – Gripe asiática

A tarefa 1, "Gripe asiática" (anexo 2), surge no início deste tema, uma vez que pode estabelecer um elo entre uma situação da vida real e as funções exponenciais. Resulta de uma adaptação de uma tarefa proposta na brochura *Funções 12* (ME-DES, 1997). Com um caráter mais simples e fechado, esta tarefa deu início ao tema em estudo, dando aos alunos oportunidade de trabalhar vários conceitos matemáticos, algébrica e graficamente, permitindo uma exploração de várias estratégias de resolução.

Esta tarefa pretende reforçar os conceitos de variável e de função. Sendo a primeira tarefa a apresentar aos alunos nesta unidade, constitui uma oportunidade para rever as diferentes representações de uma função, destacando a utilidade de cada uma no contexto da situação. Desta forma podem ser exploradas algumas noções associadas ao conceito de função, como domínio, variável dependente e independente, monotonia e extremos. A tarefa vai ainda ao encontro de outro objetivo do programa, o uso de modelos matemáticos para representar situações da realidade e que consiste na "utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais" e "problemas de otimização" (DES 2001, pp. 4 e 6). Os alunos podem perceber melhor uma aplicação prática de uma função.

A tarefa é constituída por quatro alíneas, cada uma relativa a uma especificidade da função em estudo. A primeira diz respeito ao estudo da quantidade inicial da percentagem de população doente. Os alunos terão de perceber que devem substituir a variável t por zero (alguns alunos substituíram por 1, o que se veio a concluir que resultou de alguma ambiguidade na questão) e saber simplificar algebricamente. Os alunos poderiam também utilizar a calculadora gráfica e obtendo uma rápida resolução. A segunda alínea pretendia que os alunos percebessem que a questão envolve o cálculo do tempo e da percentagem de população de doentes em número máximo. A estratégia mais rápida seria recorrer às potencialidades da calculadora gráfica através da análise do gráfico da função dada. Numa estratégia algébrica mais elaborada, os alunos teriam de calcular a função derivada da função dada, fazer o cálculo dos zeros dessa função no domínio do contexto do problema e fazer estudo da tabela de sinais da função derivada para assim se chegar à solução pretendida. A terceira alínea implica a resolução de uma inequação envolvendo a função exponencial ou novamente recorrer à calculadora gráfica. A última alínea exigia uma simples substituição da varável t por 15 e simplificação. Na resolução desta tarefa a professora desafiou os alunos para que usassem uma das estratégias (algébrica ou gráfica) e que verificassem a resposta com a outra estratégia. A professora solicitou a apresentação oral do trabalho realizado pelos alunos. Estas apresentações constituíram o ponto de partida para uma discussão coletiva de forma a consolidar as aprendizagens.

4.2.2. Tarefa 2 – Entre tangentes

Na tarefa 2, "Entre tangentes" (anexo 3), os alunos investigam se será possível obter valores que transformem duas retas tangentes em retas perpendiculares. Esta tarefa resulta da adaptação de uma tarefa do grupo T3 da APM. Com um caráter mais aberto e de cunho investigativo, a tarefa deu continuidade ao tema em estudo. Os alunos têm a oportunidade de trabalhar conceitos matemáticos utilizando estratégias algébricas e recorrendo à calculadora gráfica. A tarefa é constituída por uma questão relativa a funções exponenciais e envolve cálculo diferencial na procura das equações de retas tangentes nos pontos de abcissa dados, utilizando parâmetros com valores reais, o que dificulta mais a sua resolução. Exige um nível de compreensão, raciocínio e reflexão sobre todos os dados da tarefa, num nível muito elevado.

Esta tarefa pretende reforçar o estudo da "função exponencial de base superior a um; o estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = a^x$, com a > 1"; e, as "regras operatórias de exponenciais e logaritmos" (DES 2001, p. 4), que constam do Programa oficial de Matemática A para o 12.º ano do ensino secundário.

Na resolução desta tarefa a professora encorajou o grupo de alunos para que procurassem ser o mais claros possível na explicação da questão à turma, na procura de justificações detalhadas para cada etapa, na elaboração de conjeturas relativas à resolução da tarefa e no teste das relações identificadas. A apresentação oral do trabalho realizado pelos alunos constituiu um ponto de partida para uma discussão coletiva de forma a consolidar as aprendizagens.

4.2.3. Tarefa 3 – Na linha com curvas

Na tarefa 3, "Na linha com curvas" (anexo 4), os alunos, recorrendo à calculadora gráfica e à manipulação algébrica, exploram famílias de funções. Na primeira questão pretende-se que os alunos estabeleçam uma conjetura sobre o lugar geométrico que obedece às condições da tarefa; e na segunda questão é pedida a justificação e demonstração do raciocínio. Esta tarefa resulta também da adaptação de uma tarefa do grupo T3 da APM e tem um caráter aberto e de cunho investigativo. Com a tarefa a professora procura dar continuidade ao tema em estudo, aprofundando o trabalho realizado com os alunos.

Tal como a tarefa 2, esta tarefa pretende também reforçar o estudo da "função exponencial de base superior a um; o estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = a^x$, com a > 1" e as "regras operatórias de exponenciais e logaritmos" (DES 2001, p. 4), que constam do Programa oficial de Matemática A para o 12.º ano do ensino secundário.

Assim, na resolução desta tarefa a professora desafiou um grupo de alunos para que procurem ser claros na explicação das questões à turma, dando justificações detalhadas para cada etapa, nas conjeturas relativas à resolução da tarefa e no teste das relações identificadas. A apresentação relativa à exploração da tarefa constituiu o ponto de partida para a discussão coletiva de forma a consolidar as aprendizagens.

4.2.4. Tarefa 4 – Demonstração da derivada do produto

A tarefa 4, que foi apresentada à turma pela professora oralmente, visa que os alunos experienciem a experiência de fazer e criar Matemática, através da procura da demonstração da derivada do quociente entre duas funções reais de variável real. Esta tarefa resulta de uma proposta apresentada pelas orientações curriculares do programa de Matemática A do ensino secundário, para o 12.º ano onde o objetivo é explorar "problemas de otimização" (DES 2001, p. 6).

Esta tarefa que constitui um desafio para os alunos, tem um caráter também aberto e de cunho investigativo. Com a tarefa, a professora procurou dar continuidade ao tema em estudo, procurando trabalhar a importância da demonstração matemática e partindo de casos particulares procurar a generalização formal.

4.2.5. Tarefa 5 – Demonstração da derivada do quociente

Assim como a tarefa 4, esta última tarefa 5, que foi apresentada à turma pela professora oralmente, visa que os alunos experienciem a experiência de fazer e criar Matemática, através da procura da demonstração da derivada do quociente entre duas funções reais de variável real. Esta tarefa resulta de uma proposta apresentada pelas orientações curriculares do programa de Matemática A do ensino secundário, para o 12.º ano onde o objetivo é explorar "problemas de otimização" (DES 2001, p. 6).

Esta tarefa, apesar de constituir um desafio para os alunos, foi de fácil resolução dada a resolução prévia da tarefa 4. Com um caráter igualmente aberto e com cunho investigativo, a professora procurou dar continuidade ao tema em estudo, reforçando a importância da demonstração matemática e partindo de casos particulares para a generalização formal.

4.2.6. Outras tarefas

Para além das tarefas apresentadas, os alunos realizaram, na sala de aula, exercícios e problemas do manual sempre que estes se relacionavam com os assuntos abordados. Deste modo, não perderam o contacto com o seu manual e este constituiu, também, um instrumento no qual podem apoiar a sua aprendizagem. Por diversas vezes foi, ainda, proposta a realização de exercícios e problemas do manual como trabalho de casa.

Considerando a importância da diversificação de tarefas na gestão curricular e na aprendizagem e visando a consolidação de conhecimentos adquiridos, a planificação inclui igualmente exercícios e problemas retirados do manual escolar adotado pela escola como se pode ver na tabela 2. Os exercícios e problemas escolhidos são de diferentes níveis de dificuldade, permitindo que os alunos ponham em prática os conhecimentos que vão adquirindo e conduzindo a uma melhor compreensão dos conceitos. Nesta seleção também foi tido em conta o contexto dos problemas, uma vez que em situações reais os alunos podem dar um significado às ferramentas matemáticas que estão a aprender

4.3. O trabalho na sala de aula

Durante a unidade de ensino a professora teve em atenção os três momentos considerados na literatura como essenciais para a realização de cada tarefa (Ponte, 2005). Assim, na apresentação de cada tarefa tentou esclarecer os seus objetivos, de forma tanto quanto possível clara para todos os alunos. Durante a realização da tarefa, procurou acompanhar as estratégias dos alunos, esclarecer eventuais dúvidas e, sobretudo, manter uma postura de encorajamento aos alunos. Por fim, procurou conduzir as discussões de modo a promover uma reflexão aprofundada sobre a atividade realizada. Estes momentos de discussão permitiram aos alunos exporem as suas dúvidas, apresentarem o seu trabalho e as suas conclusões, e refletirem sobre as estratégias utilizadas pelos colegas. A professora, enquanto moderadora das discussões, assumiu uma postura de interrogação, com o objetivo de levar os alunos a pensar. O seu papel era, ainda, o de clarificar e sistematizar as aprendizagens, tendo em vista que os alunos percebessem o que era realmente importante na realização da tarefa.

O trabalho desenvolvido na sala de aula durante a unidade de ensino foi muito semelhante ao realizado ao longo do restante ano letivo. As tarefas (maioritariamente de cunho exploratório e investigativo) foram apresentadas a cada grupo de alunos em suporte de papel. Cada grupo tinha de indicar a sua resolução e resposta numa folha própria e posteriormente proceder à apresentação, discussão e reflexão da sua tarefa. Foram também realizadas tarefas do manual adotado (maioritariamente exercícios e problemas).

Durante a resolução das tarefas, o papel da professora consistiu em acompanhar e orientar os alunos, esclarecendo dúvidas, ajudando-os a ultrapassar as suas dificuldades sempre que achasse adequado e desafiando-os a ir mais além. Foi percorrendo a sala, chegando junto dos grupos de alunos e solicitando-lhes que explicassem as suas estratégias e justificassem as suas conclusões. Colocou questões no sentido de clarificar raciocínios e respostas e de levar os alunos a argumentarem as suas posições. Quando os alunos manifestaram dificuldades, a professora procurou, por vezes, redizer as suas respostas, numa tentativa de relançar a reflexão sobre os conceitos matemáticos abordados ou colocar novas questões que conduzissem a novas reflexões e que apoiassem os alunos a esclarecer os seus raciocínios.

Na resolução da primeira tarefa, os grupos revelaram pequenas dúvidas e dificuldades semelhantes. Neste caso, a professora colocou as dúvidas à turma para que todos os alunos procurassem refletir sobre elas, ajudando a chegar ao esclarecimento coletivo. Nos restantes casos, a professora decidiu atribuir a mesma tarefa a cada dois grupos para que não houvesse repetição e para ter tempo de abordar todo o tema, pois considera importante fazer uma boa gestão curricular. Para estas tarefas foi feita uma discussão envolvendo toda a turma. Estas discussões não aconteceram sempre no mesmo momento da aula, sendo a sua duração variável. A professora foi sempre flexível, procurando respeitar os alunos. Nestes momentos de discussão, os alunos tinham oportunidade de partilhar as suas estratégias com os colegas e eram confrontados com outros pontos de vista. Podiam também ser apresentadas dúvidas, questões adicionais que procuravam questionar as várias estratégias e resoluções algébrica e gráfica. As principais conclusões surgiram a partir das discussões e do contributo de alunos e professora.

Para a familiarização e acompanhamento do trabalho realizado pelos alunos utilizando as potencialidades da calculadora gráfica, foi utilizado o viewscreen. Apesar da calculadora gráfica assumir um papel fundamental na exploração das tarefas propostas, os seus resultados foram confrontados com a resolução analítica sempre que a natureza do problema o aconselhava, enfatizando desta forma o trabalho com as diferentes representações de funções, bem como a conversão entre elas.

CAPÍTULO 5

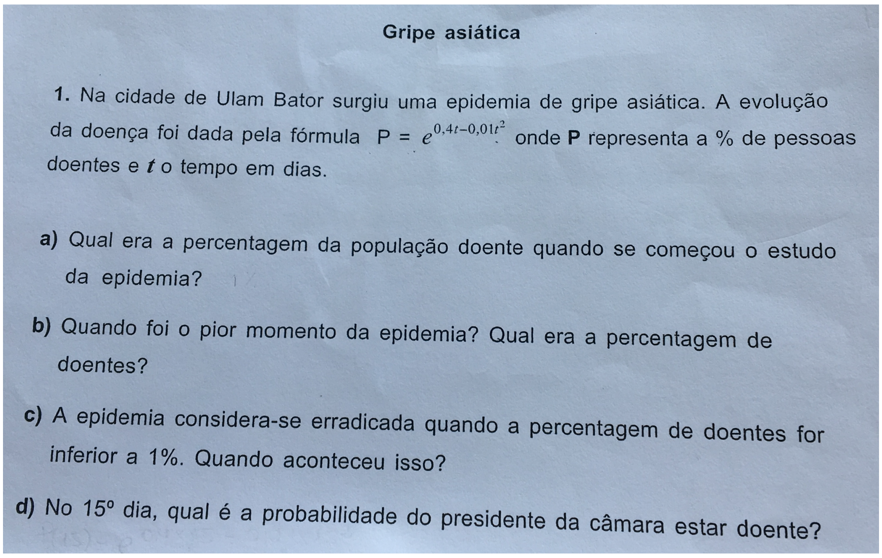
AS DISCUSSÕES NA SALA DE AULA

Neste capítulo descrevo e analiso quatro episódios de discussão, divididos por seis segmentos. Um segmento corresponde à realização de uma tarefa ou questão ou a um aspeto particular de uma discussão. Esta organização em episódios permite uma análise detalhada das intervenções da professora na condução das discussões matemáticas. Esta análise é feita segundo os modelos teóricos utilizados como base neste estudo, nomeadamente o modelo de Henning et al. (2012), que propõe três tipos distintos de discussões matemáticas, e o modelo de Ponte et al. (2013), que visa descrever as ações do professor na condução de uma discussão matemática.

5.1. Episódio 1

5.1.1. Os diálogos na sala de aula

Esta primeira situação diz respeito a uma discussão coletiva que visava aprofundar o estudo das funções exponenciais de base superior a 1 usando uma tarefa de modelação matemática intitulada *Gripe asiática* (figura 4). Antes dos segmentos apresentados, os alunos estudaram as propriedades da função exponencial identificando o seu domínio, contradomínio, monotonia, existência de zeros, estudo da existência de assíntotas. Os alunos usaram a representação gráfica através do recurso à calculadora gráfica e fizeram o estudo analítico. Na aula anterior os alunos resolveram a tarefa em grupo e a sua resolução é agora apresentada à turma no segmento 2. Antecedendo a discussão coletiva da resolução da tarefa, no segmento 1, a professora convida à revisão do conceito de função injetiva.



Gripe asiática

1. Na cidade de Ulam Bator surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi dada pela fórmula $P = e^{0,4t-0,01t^2}$ onde **P** representa a % de pessoas doentes e ***t*** o tempo em dias.

a) Qual era a percentagem da população doente quando se começou o estudo da epidemia?

b) Quando foi o pior momento da epidemia? Qual era a percentagem de doentes?

c) A epidemia considera-se erradicada quando a percentagem de doentes for inferior a 1%. Quando aconteceu isso?

d) No 15º dia, qual é a probabilidade do presidente da câmara estar doente?

Figura 4 – Tarefa1:Gripe asiática (adaptado da brochura Funções 12, DES, 1997).

Segmento 1. A professora pretendia que os alunos percebessem a distinção entre uma função exponencial de base superior a 1 e de base inferior a 1 e que compreendessem que essas funções são injetivas:

Professora: Ora vamos lá ouvir com atenção (...) O que é que quer dizer funções injetivas?

[A professora dirige-se para junto do Ricardo]

Ricardo: Funções injetivas significa o seguinte que…

Professora: Vamos lá ouvir! (...) Portanto o Ricardo vai dizer o que é uma função injetiva. Recordar! Portanto a função *y* igual a *a* elevado a *x* com a base maior que um é uma função injetiva. Com base inferior que 1 é uma função injetiva?

Ricardo: É!

Professora: Porquê?

Ricardo: Porque não deixa de… Bem vou explicar à minha maneira. É porque um objeto pode ter mais do que uma imagem, duas imagens neste caso.

A professora apercebendo-se que Ricardo não apresentou uma resposta válida sobre o que é uma função injetiva, redisse a resposta do aluno em jeito de questão para ver a reação dos restantes alunos:

Professora: Um objeto mais do que duas imagens?

Ricardo: Duas imagens! Hum… Disse ao contrário! Então é ao contrário. Uma imagem pode dois objetos.

[Risos contidos na turma. A professora dirige-se para o quadro enquanto fala com o Ricardo. Contudo, volta para trás para junto do Ricardo.]

Professora: Então se um objeto pode ter mais do que duas imagens!

Ricardo: Não uma imagem!

Ricardo já tinha mostrado não perceber muito bem o que é uma função injetiva e agora demonstrou também que não sabia explicar o que é uma função:

Professora: Então se um objeto tem mais do que uma imagem nem sequer é uma função! Numa função cada objeto tem uma e uma só imagem.

[A professora dirige-se ao quadro]

Ricardo: Então o que é que eu…

Colega do Ricardo: Deve ser ao contrário…

Ricardo: É o contrário então! O que é que é o objeto? É o *x*?

[Enquanto escreve no quadro a professora dirige-se à turma]

Professora: (...) Toda a gente tem de perceber bem o que é uma função injetiva.

Recorrendo ao quadro, a professora desenhou o gráfico da função $y = a^x, a > 1$ para que os alunos visualizem a função exponencial e assim apoiar a sua explicação:

Professora: (...) Esta por exemplo. É uma função injetiva porquê? És capaz de me explicar o que é és capaz de estar aí a dizer mal e se calhar estás a pensar bem? Diz o Ricardo que é porque um objeto tem mais do que uma imagem.

Ricardo: Então o objeto é o *x* não é?

Professora: Sim. Então está aqui um objeto x_1. [Representa um objeto x_1 no gráfico]

Ricardo: E o *y* então é a imagem, não é?

Professora: Sim. [E em simultâneo representa a respetiva imagem de x_1 no gráfico] Então e tem mais do que uma?

Ricardo: Não! Então é a imagem que pode ter mais do que um objeto!

Professora: Mas isso não é uma caraterística de uma função injetiva! Para ser função cada objeto tem uma e uma só imagem. Repara uma coisa? Se tiveres uma função assim!

A professora apoiou o aluno através do recurso ao quadro e à reformulação das questões que vai colocando, optando agora por mostrar um contraexemplo – uma função não injetiva (figura 5):

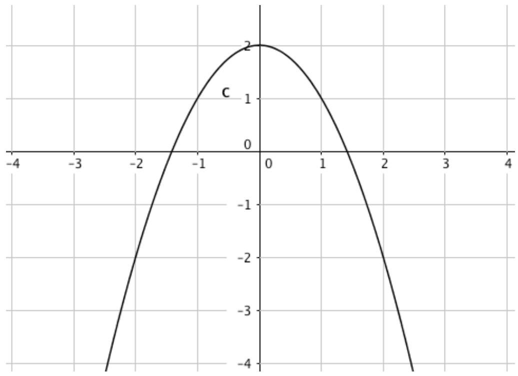


Figura 5 - Representação gráfica da função $y = -x^2 + 2$.

Professora: Esta é injetiva?

Ricardo: É.

[Outro aluno responde em simultâneo que sim. A professora olha para a turma em jeito de convite à participação.]

Professora: Esta é injetiva?

Daniel: Não!

Ricardo: Porquê?

Verificando que o convite à participação não foi suficientemente desafiador para a turma e que a discussão não progrediu, a professora resolveu explicar aos alunos:

Professora: Porquê? Porque aqui há um x_1 e um x_2 aos quais corresponde a mesma imagem.

[Enquanto explica a professora representa graficamente a correspondência.]

Ricardo: Ahhh… Já estou a perceber onde é que a professora quer chegar.

Em jeito de síntese e apontando para a figura 5, a professora redisse a definição de função injetiva apoiando-se no gráfico e usando também uma linguagem matemática formal:

Professora: Então porque é que esta é injetiva? (...) Porque se os objetos forem diferentes as imagens também vão ser diferentes umas das outras. Habitualmente escrevemos assim [escreve no quadro] $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Nesta isso não acontece!

[Apontando para a função quadrática anteriormente representada no quadro (figura 5)]

É impossível encontrar dois objetos diferentes que tenham imagem. [Há] Uma maneira fácil e rápida de ver, olhando para o gráfico, se uma função é ou não injetiva?

Para finalizar, a professora procurou rever com a turma uma alternativa fácil para verificar graficamente se uma função é ou não injetiva. Manuel correspondeu à sua questão:

Manuel: Fixar uma reta.

Professora: Imaginar uma reta horizontal a deslocar-se sobre o gráfico. Se ela intersetar o gráfico… Oh Ricardo presta lá atenção! Se ela intersetar o gráfico em mais do que uma vez significa que a função?

Turma: Não é injetiva!

Professora: Se ela intersetar o gráfico apenas uma vez [aponta para o gráfico da função exponencial que tinha desenhado inicialmente no quadro] significa que ela é uma função injetiva! Está recordado isto? Certo? [Olha para o Ricardo] Está esclarecido?

Ricardo: Eu disse o contrário!

Professora: Disseste uma coisa que nem sequer é função…

Ricardo: Mas já percebi professora!

Neste segmento identificamos diversos problemas com que a professora se depara, com os quais não contava, pois tratava-se apenas de fazer a revisão de um conceito anteriormente ensinado. Um primeiro problema diz respeito ao modo de rever um conceito que os alunos já tinham estudado. A professora decidiu lançar a discussão sobre o conceito procurando as contribuições dos alunos. Um segundo problema prendeu-se com a seleção de um aluno para dar início à discussão visto nenhum se ter oferecido. Como a discussão não estava diretamente relacionada com a resolução da tarefa, a professora decidiu selecionar um aluno que estava junto a ela e que é habitualmente participativo. Um terceiro problema com que a professora se depara foi a incapacidade do aluno selecionado definir uma função injetiva. Esta é uma situação que acontece muito frequentemente a qualquer professor na sua sala de aula. Neste caso, a professora, em vez de responder imediatamente ao aluno resolveu utilizar a oportunidade para dirigir essa mesma questão à turma. Percebeu, contudo, que nenhum dos alunos estava seguro da definição pelo que partiu para uma reconstrução conjunta do conceito com os alunos. Um quarto problema é que, para além disso, o aluno que serviu de interlocutor principal também confundiu a definição de função. De entre várias opções possíveis, como solicitar a participação de outro aluno, a professora decidiu focar a atenção da turma na representação gráfica de uma função injetiva e não injetiva. Esta abordagem conduziu a turma à avaliação da resposta do aluno e mostrou duas formas de identificar uma função injetiva.

Segmento 2. Concluída a fase de revisão, segue-se a apresentação e discussão coletiva das respostas dos alunos à tarefa apresentada (figura 4), dando origem a um novo segmento da discussão. Como a turma parece agora entender o conceito de injetividade, a professora avança com o convite à apresentação dos resultados obtidos pelo grupo de Tiago:

> *Professora:* (...) Então vamos lá retomar o problema! [Apaga o quadro] Voltar à situação…Prestem bem atenção à explicação deles (...) Tiago vá continua!
>
> [O Tiago e o colega de grupo estavam no quadro a escrever as suas resoluções enquanto o diálogo sobre as funções injetivas acontecia]
>
> *Tiago:* Ora então nós temos aqui a solução:
>
> [Aponta para o que está escrito no quadro $P(1) = e^{(0{,}4(1)-0{,}01(1)^2)} \approx 1{,}5\%$]
>
> Ora então a pergunta era qual a percentagem das pessoas infetadas no início, isto é, quando se começou o estudo da epidemia. Logo, ao fim do primeiro dia é só fazer uma substituição direta que dá 1,5%.
>
> [Começa burburinho na sala, estão a comentar a resolução uns com os outros]
>
> *Manuel:* Podes só explicar-me, mostrando no gráfico onde é que é o 1.º dia no gráfico?
>
> [O gráfico foi desenhado, inicialmente, no quadro para acompanhar a sua resolução]
>
> *Tiago:* É algures por aqui!
>
> [E aponta para o gráfico onde se vê que a variável *t* (dias) que representa a abcissa].
>
> *Manuel:* E porque é que não começaste no zero?
>
> *Tiago:* O quê? Ah porque não podes começar um estudo ao dia zero.

Alunos: Podes, podes! Claro que podes!

[Tiago olha para a turma meio confuso]

Manuel: As primeiras horas... Aliás tempo antes do 1.º dia também contam.

[De braços abertos e ombros encolhidos parece estar confuso]

Manuel: E agora?

Este primeiro momento de discussão coletiva revelou-se muito interessante para a professora pois desenvolveu-se integralmente sem a sua intervenção, sugerindo que os alunos já tinham algum hábito neste tipo de dinâmica de trabalho, revelando espírito crítico na análise de dados.

Ao longo do diálogo anterior a professora optou por não participar e apenas acompanhou o raciocínio dos alunos. Ao perceber que os alunos tinham chegado a um impasse decidiu informar e guiar o grupo na análise dos dados e possíveis respostas à alínea a):

Professora: Pronto é uma questão que já vamos discutir um bocadinho. (...)portanto há para já uma questão: Porque é que começaram no dia 1 e não no dia 0? Porque é que contaram o dia 1 no fim do dia? Não temos aqui informação relevante de Estatística para saber como é que isto foi considerado. Portanto digamos que poderemos admitir as duas possibilidades aqui num problema que está um pouco ambíguo. Se estivéssemos a fazer um estudo Estatístico e tivéssemos os dados todos, poderíamos saber exatamente como considerar.

Há algumas pessoas, e penso que a maior parte delas, eu também, pensou: Vou começar no instante zero a contagem! E o dia 1 é o fim do 1.º dia. Outros, o grupo do Tiago equacionou o problema de outra maneira! Vou pensar que o dia 1 é o 1.º dia, é a média…Não sei o que é que vocês pensaram? Mas é a média, o resultado ao fim do 1.º dia. Ou até poderiam pensar é a media no 1º dia das pessoas que estavam infetadas. Portanto, vamos ouvir o que eles pensaram e depois ouvir outras respostas! Está bem?

A professora deu continuidade à discussão apoiando o grupo na tarefa. De seguida, Tiago prosseguiu com a apresentação dos resultados das restantes alíneas sem qualquer problema, não se gerando discussão entre os alunos:

Tiago: A segunda pergunta[referindo-se à alínea b)] diz respeito ao pior momento da epidemia. Ou seja, quando é que a percentagem de doentes foi máxima! Indo ao gráfico da função e com a calculadora calculamos o máximo e vemos que obtemos o ponto A de coordenadas (20; 54,6). Ou seja, no dia 20, cerca de 54,6% das pessoas estava infetada.

No 3 [alínea c)] temos de calcular quando é que a percentagem de infetados foi inferior a 1. Interessa-nos este espaço aqui. [Apontando para a parte do gráfico que se encontra para a frente de t=40] Ou seja, pela calculadora, temos de ver as interseções da função com a reta y=1 e ver quando é que é menor. Vendo os pontos de interseção com a calculadora obtemos 2 pontos, B(0; 1); C(40; 0). Este aqui não nos interessa! [Aponta para o ponto B] E chegámos à conclusão que no quadragésimo dia 1% está infetada. Portanto a gripe começou a diminuir a partir do dia 40.

E depois na próxima também é uma resolução direta que era [Escreve no quadro P(15)≈ 42,5%] Tendo em consideração que todas as pessoas têm a mesma probabilidade de serem infetadas a probabilidade de uma pessoa estar infetada é cerca de 42,5%.

Como a apresentação dos restantes resultados decorreu sem qualquer problema, a professora decidiu aproveitar o tempo para explorar um pouco mais a questão que tinha sido levantada na alínea a):

Professora: Questões…[silêncio]não há? Quem considerou o instante t=0, as respostas às questões foram muito diferentes?

Manuel: Não professora! Os resultados foram os mesmos exceto na primeira alínea.

Antes de terminar, a professora afirma que a questão deveria estar mais explícita referindo que, contudo, habitualmente quando dizemos "t=0 dias" nos referimos ao instante inicial e "t=1 dias" se refere ao final do 1.º dia.

Neste segundo segmento não se verificaram grandes problemas. Salienta-se o primeiro momento de discussão coletiva na turma, sem a intervenção da professora, que levantou um primeiro problema: a questão do enunciado não estava claramente apresentada. Contudo, ao invés de ser um obstáculo, isto revelou-se uma boa oportunidade para discussão coletiva entre os alunos, tendo levado à reflexão sobre as implicações das situações em causa. A professora usou o momento para informar e guiar os alunos na interpretação dos possíveis cenários, levando ao esclarecimento da questão.

5.1.2. Análise

O primeiro segmento deste episódio diz respeito à revisão do conceito de injetividade que os alunos mostraram já não recordar. A discussão não estava associada a uma tarefa prévia. A professora inicia-a com um convite à turma e sente desde logo a necessidade de guiar e apoiar os alunos nas suas intervenções para se rever o conceito. O segundo segmento tem como ponto de partida uma tarefa, tendo a professora iniciado a discussão com uma ação de convite ao pedir aos alunos para que prestem atenção à explicação dada por um grupo. Contudo, talvez por esta ser a primeira tarefa proposta referente à nova unidade temática, os alunos mostram pouca autonomia e demonstram a necessidade de confirmação da professora na validação das suas intervenções.

Analisando o episódio quanto ao tipo de discussão, verificamos que o segmento 1 consiste numa discussão *de enquadramento* que ocorreu no início da unidade temática do estudo das funções exponenciais e logarítmicas, quando a professora procura rever um conhecimento prévio (o conceito de injetividade) fundamental para o desenvolvimento da nova unidade. No segmento 2 temos uma discussão *conceptual*, em que a professora procura envolver os alunos numa discussão matemática simples relativa à resolução da tarefa 1 que procura que os alunos resolvam equações e inequações envolvendo a função exponencial e que façam um estudo de otimização simples, ao procurar encontrar o máximo utilizando a primeira derivada da família da função exponencial dada. A professora pretendia ainda que os alunos utilizassem as potencialidades da calculadora gráfica para verificar e resolver os problemas propostos, usando uma estratégia tirando partido da representação gráfica, comunicando com clareza as suas conclusões e apresentando a resposta tendo em consideração o domínio apropriado no contexto do problema. Esta primeira tarefa marca o início do estudo das funções exponenciais, como se pode ver na tabela 3.

Tabela 3 – Análise das ações da professora na discussão do episódio 1 segundo os modelos utilizados.

Episódio 1		
		Ocorrências
Tipo de discussão	Enquadramento	Todo o segmento 1
	Conceptual	Todo o segmento 2
	Aplicação	Não há observação
Ações	1. Convidar	2
	2. Sugerir/ Informar	8
	3. Apoiar/ Guiar	13
	4. Desafiar	0
	Total	23

Neste episódio, a professora usa sobretudo ações de apoiar/guiar, seguindo-se sugerir/informar (ver na figura 6). Os números representados junto a cada seta correspondem à quantidade de passagens de uma ação para outra. Procuro também destacar na figura as ações mais frequentes, utilizando um círculo ou semicírculo. Ressaltam treze ações de apoiar/guiar dando origem a seis novas ações de apoiar/guiar e estas ações de apoiar/guiar dão muitas vezes origem a ações de sugerir/informar e vice-versa. Como a discussão não diz respeito a uma tarefa resolvida previamente pelos alunos, a professora sente a necessidade de apoiar os alunos a prosseguir com as suas intervenções. Observamos também oito ações de sugerir/informar onde uma delas resulta numa ação de convite. Apenas ocorreram duas ações de convidar, logo no início de cada um dos dois segmentos. A segunda ação de convidar tem como objetivo procurar que os alunos interpretem as questões, procurando a validação e justificação das suas respostas. Esta ação de convidar dá origem a uma nova ação de sugerir/informar, onde a professora assume a responsabilidade do discurso matemático, procurando introduzir novas questões aos alunos. Assim, esta discussão é fortemente marcada por ações de apoiar/guiar.

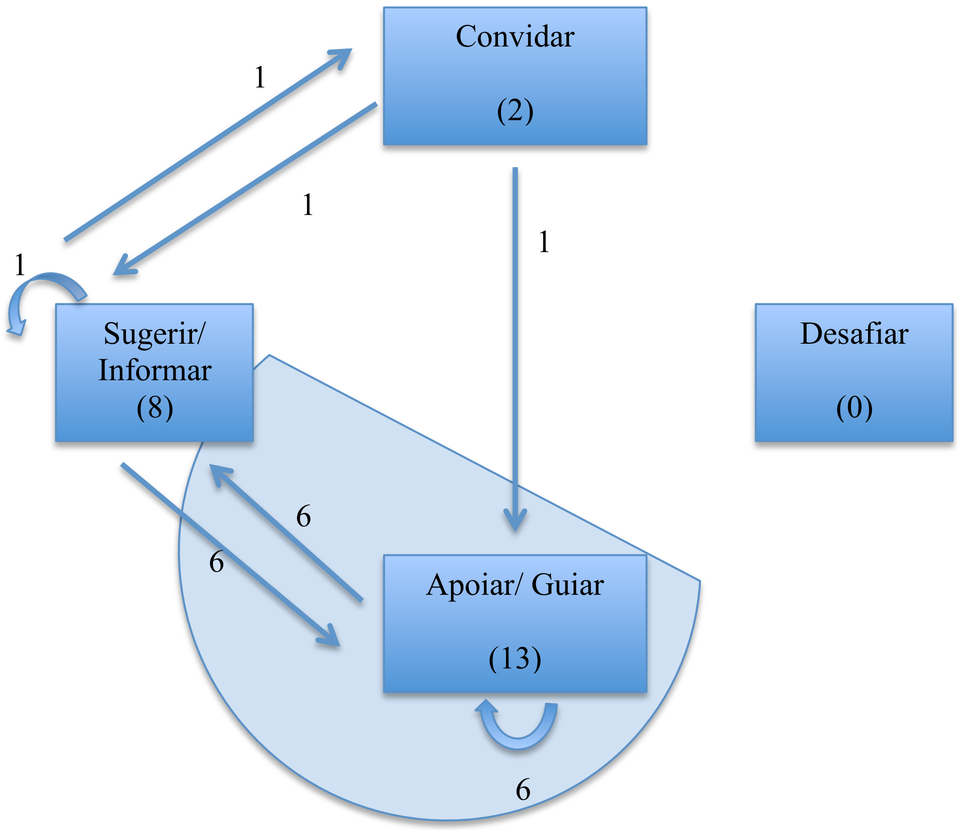


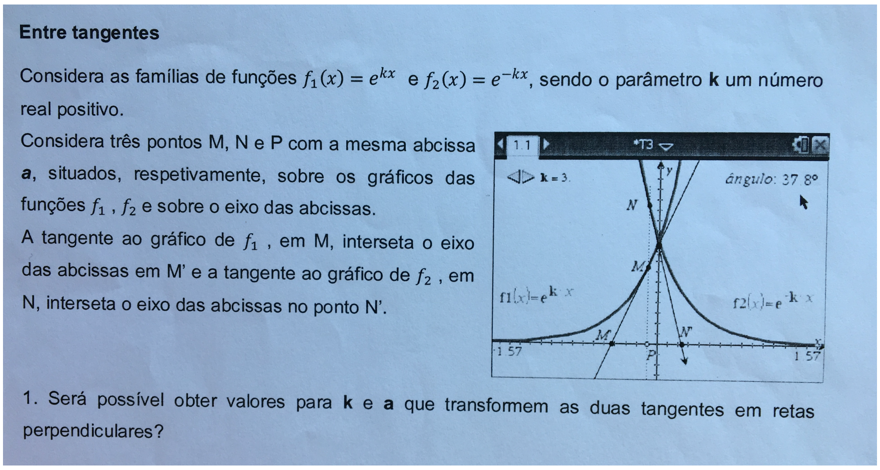
Figura 6 – Ações da professora na discussão do episódio 1.

Em resumo, fazendo a análise ao tipo de discussão, verificamos que o primeiro segmento é uma discussão de *enquadramento* que habitualmente ocorre no início da abordagem de um novo tema e onde o professor procura promover a participação dos alunos, revendo noções prévias e fazendo uma avaliação diagnóstica dos seus conhecimentos. O segmento 2 constitui uma discussão *conceptual* em que a professora procura envolver a turma na discussão matemática de uma tarefa. Nos dois segmentos que formam este episódio a professora inicia com uma ação de convite, alternando depois ações de apoiar e sugerir. A segunda ação de convite surge no início do segmento 2, onde a professora procura que os alunos validem os argumentos, terminando a discussão da tarefa com uma ação de apoiar. A professora não promoveu qualquer ação de desafiar durante o episódio 1.

5.2. Episódio 2

5.2.1. Os diálogos na sala de aula

Esta situação diz respeito a uma discussão coletiva que visa trabalhar a tarefa *Entre tangentes* (figura 7). A professora tinha distribuído a cada grupo da turma uma tarefa diferente, segundo ela com o objetivo de não haver repetição das apresentações, proporcionando uma discussão coletiva mais rica. Cada grupo teve cerca de vinte minutos para resolver a sua tarefa e mais dez minutos para organizar a apresentação.


Entre tangentes

Considera as famílias de funções $f_1(x) = e^{kx}$ e $f_2(x) = e^{-kx}$, sendo o parâmetro **k** um número real positivo.

Considera três pontos M, N e P com a mesma abcissa ***a***, situados, respetivamente, sobre os gráficos das funções f_1 , f_2 e sobre o eixo das abcissas.

A tangente ao gráfico de f_1 , em M, interseta o eixo das abcissas em M' e a tangente ao gráfico de f_2 , em N, interseta o eixo das abcissas no ponto N'.

1. Será possível obter valores para **k** e **a** que transformem as duas tangentes em retas perpendiculares?

Figura 7 – Enunciado da tarefa 2: Entre tangentes (adaptado de uma tarefa proposta pelo grupo T3 da APM).

Segmento 1. Nesta aula estava prevista a apresentação da tarefa pelo grupo de Tiago, mas a professora constatou que os alunos ainda estavam a trabalhar, dando dez minutos adicionais para terminarem e começar a discussão. Os restantes grupos de trabalho, que também estavam a trabalhar nas suas tarefas, aproveitaram o tempo extra para continuar a sua preparação. Já com dois alunos no quadro, para apresentar a resolução da tarefa, a professora disse:

> Professora: Vou dar dez minutos para o grupo que vai apresentar se preparar porque não têm o programa... e como não têm a TI Nspire.
>
> Tiago: Exatamente!
>
> Professora: E portanto estão a tirar as dúvidas. E os outros grupos, nestes dez minutos, os outros grupos vão continuar a fazer o trabalho. Eu penso que

os outros grupos, nomeadamente, o grupo do Carlos, Filipe, Henrique e do José...

José: Presente.

(...)

Professora: Portanto o que é que eu vou pedir? Que se sentem em grupo e que nestes dez minutos que eles vão ter, que comecem a trabalhar nos trabalhos que têm para terminar e eu vou tirar as dúvidas, está bem?

A professora dirigiu-se a um grupo de trabalho para os orientar e tirar as dúvidas e enquanto isso entraram vários alunos atrasados. A professora intervém:

Professora: Todos os grupos estão a trabalhar no trabalho, exceto os que estão aqui a preparar a apresentação (referindo-se aos dois alunos que estão no quadro) e se houver alguma dúvida, peçam! Depois da apresentação voltamos a trabalhar, que é para amanhã terminarmos as outras apresentações. Certo? Vá!

A professora voltou-se para prestar apoio ao grupo que se encontrava no início da sala. Entretanto, entraram mais alunos atrasados e a professora foi ajudando os grupos que iam pedindo apoio. Após alguns momentos de trabalho e organização a professora convidou a turma a participar, dando início à discussão. Este início foi marcado pela professora ao dar algumas informações relativas à tarefa e a apoiar o grupo na gestão da turma. Após a primeira participação do grupo, a professora interveio para apoiar dando sugestões ao aluno na forma como deveria direcionar a discussão:

Professora: Estão preparados? E vocês também estão preparados para fazer perguntas? Vou pedir aos grupos que estão sentados voltados para trás, para interromperem o que estão a fazer e se voltarem para a frente. Para toda a gente ver se está a ver no quadro, o que é projetado. A atividade que vamos fazer é *Entre Tangentes* e o Diogo Miranda, o Helder, o Tiago e o Bernardo vão fazer a apresentação e depois, o Daniel, o Hugo, a Nádia e o Rui vão acrescentar alguma coisa que queiram ou fazer perguntas. As regras, já sabem! Enquanto eles estão a apresentar, é silêncio absoluto e atenção e depois podem fazer perguntas, pôr os dedos no ar, etc. Portanto, podemos começar?

Helder: Então, no nosso problema nós temos duas funções que são: $f_1(x) = e^{kx}$ e $f_2(x) = e^{-kx}$. No enunciado é-nos dito que k tem de ser um número real positivo, ou seja, k tem que pertencer a $\mathbb{R}^+$. Dão-nos depois dois pontos: o ponto M e o ponto N e que têm igual abcissa e que eles chamam

$x=a$ e depois no gráfico mostram-nos também duas retas tangentes: a tangente *m'* e a tangente *n'*. Perguntam-nos: Para que valores de k e de a, é que as retas são perpendiculares.

Professora: Eu não sei se há alguém, deixa-me interromper um bocadinho. Como a maior parte das pessoas não leu o enunciado, não sei se toda a gente percebeu o enunciado ou se era melhor tu frisares bem o que é que é dado e o que é que se pretende saber, uma vez que não estiveram todos a trabalhar o enunciado. Tá bem Helder? O que é que é dado?

Helder: Dão-nos um gráfico com um k e dão-nos os pontos M e N...

A discussão prosseguiu com uma sugestão da professora para que a turma conseguisse acompanhar o problema:

Professora: Aponta lá no gráfico, ali no quadro, aponta lá com o dedo... Exatamente!

Helder: E tem também uma reta p e nessa reta p o x. O x não, os pontos M e N que têm a mesma abcissa, que é $x=a$.

Com o intuito de clarificar, a professora foi intervindo:

Professora: Portanto, uma reta vertical...

Helder: Exatamente! E depois, ao sabermos traçam as tangentes, que é a tangente *m'* e a tangente *n'* e perguntam para que valores de k e de a, é que as duas tangentes vão ser perpendiculares.

A professora foi sempre apoiando o grupo, complementando a informação dada para ficar mais clara, e desafiou o aluno ao colocar algumas questões centrais para o problema em questão:

Professora: Mas essas tangentes, deixa-me fazer só mais uma pergunta, eu também não tinha lido o enunciado e agora estão-me aqui a surgir aqui algumas dúvidas. Essas tangentes são onde? Num sítio qualquer?

Helder: Não! Essas tangentes são as tangentes dos dois gráficos: deste e deste. [apontando para as funções escritas no quadro]

Uma nova questão é devolvida ao aluno pela professora, em jeito de apoio e com vista a guiar a discussão:

Professora: Mas um gráfico só tem uma tangente? Num gráfico posso traçar infinitas tangentes...

Tiago: É a tangente de cada gráfico nos pontos *M* e *N*.

Professora: Ah, é a tangente daqueles pontos que vocês consideraram, o ponto *M* e o ponto *N*. Toda a gente percebeu bem o enunciado ou há alguma dúvida? Eu tinha algumas dúvidas, mas agora já tirei.

A discussão prosseguiu com a participação da turma e onde os alunos começaram a assumir o papel principal. A professora foi, no entanto, intervindo para comunicar matematicamente e com mais clareza, o que o grupo ia dizendo. Ricardo intervém:

Ricardo: Para que é que serve o ponto *P*?

Helder: O ponto *P* basicamente serve para indicar que os três pontos, o *M*, o *N* e o *P*, têm todos a mesma abcissa, quer dizer que estão todos na mesma reta.

Professora: Estão todos na mesma reta vertical, portanto, têm todos a mesma abcissa no ponto *P*. Muito bem, podem continuar!

Tiago: Agora, só a título de curiosidade. Utilizando a vossa intuição e agora só com valor de *k*, acham que, aumentando o *k* ou diminuindo o *k*, em qual das soluções conseguimos fazer com que as retas sejam perpendiculares? Têm aqui as expressões e se aumentarmos o *k*, neste caso aqui tá 3, aumentamos ou diminuímos... em qual das soluções é que as retas são perpendiculares? Alguma ideia? Uma intuição, um número ao calhas...

[Ninguém responde]

Tiago: Aumentando o valor de *k* ou diminuindo?

Ricardo: Diminuindo...

João: Diminuindo...

Tiago: Então, se aumentarmos, temos aqui o ângulo, que o Carlos vai fazer o favor de dizer, vai diminuindo ou vai aumentando?

Carlos: Vai diminuindo.

Tiago: Ou seja, o valor de *k* vai diminuindo. E até que valor? Para o lado direito?

Professora: Vai mais devagarinho e pede ao Carlos para te ajudar aí a ler o ângulo, porque cá atrás não se consegue ler.

Carlos: Neste momento, vai com um ângulo de 56º.

Tiago: E portanto, o *k* vai igual a...

Carlos: O *k* vai igual a 1, 9...

Tiago: 1,9...

Carlos: 1,9 correto.

Tiago: E agora?

Carlos: Neste momento o k... o ângulo tá a 75.3º e o k já vai no 1,3...

Tiago: E assim?

Carlos: Neste momento o k é igual a 1 e temos um ângulo de 90º.

Tiago: Se diminuirmos o k aumentamos o ângulo. Ou seja, chego à conclusão que o k tem que ser igual a 1. Mas será isto certo, ou não? E será que ao alterar o valor de a, e o ângulo deixamos que se mantenham perpendiculares. Ou seja, o valor de a é igual a este valor aqui? (apontando para o quadro) Alterando este valor, as retas mantêm-se perpendiculares ou não?

Alunos: Sim!

Tiago: Ou seja, olhando aqui para o gráfico... Só analisando graficamente, podemos concluir que o k será igual a 1 e desde que o valor de k seja 1, o valor de a não está dependente de nada, porque não há qualquer valor. Certo?

Carlos: Correto!

Tiago: Então, analiticamente... Como é que nós, analiticamente, vemos que duas retas são perpendiculares? Temos uma reta $y_1 = m_1x + b$ e o $y_2 = m_2x + k$. Olhando assim, como é que vemos que as retas são perpendiculares? O produto dos declives tem que ser *-1*, ou seja, $m_1 \times m_2 =$ *-1*. Resolvendo isto em ordem a um deles, ou seja, isolando um dos declives, podemos chegar à conclusão que o m_2 vai ser igual a *-1* sobre m_1. E vou substituir o m_2 por $y_2 = \frac{-1}{m_1}x + k$. Até aqui está tudo bem?

Para dar continuidade à participação dos alunos a professora procurou perceber se a turma se recordava da propriedade relativa a duas retas perpendiculares, aproveitando para informar e guiar a turma na revisão do conceito. Esta situação relembra uma discussão de *enquadramento* que tem por objetivo promover a participação dos alunos, rever conhecimentos prévios e fazer a avaliação diagnóstica dos seus conhecimentos:

Professora: Toda a gente se recordava desta propriedade, das retas perpendiculares? O declive de uma reta perpendicular é menos um sobre o declive da outra reta, não se recordavam?

Aluno: Não.

Professora: (...) Isto é importante, porque se duas retas são perpendiculares, os seus declives relacionam-se desta forma: o declive de uma é igual -1 sobre o declive da outra, certo? Ou seja, o produto é igual a -1.

Tiago: OK, pronto! Agora, relembrando que...

Daniel passou para o quadro da esquerda, para passar a resolução da tarefa e disse:

Tiago: Agora, relembrando o que é que o enunciado pede. Quer saber: qual é, destas retas, qual é a maneira que elas são perpendiculares. Ou seja, imaginem que isto são as equações das retas (apontando para as equações que tinha escrito no quadro), temos que pegar nestas equações e provar que elas estão perpendiculares para *k=1*, certo? Isto é só o enunciado. Ou seja, ao calcularmos o declive daquelas duas retas, o declive de um tem que ser igual a *-1* sobre o declive da outra. E, como é que através de uma função, conseguimos o declive de um ponto da reta tangente?

Aluno: Através da derivada.

Tiago: Da derivada, ou seja, a derivada de um ponto, do ponto a, vai ser igual ao declive da reta tangente, certo? Ou seja, $f'_1(a) \times f'_2(a) = -1$. O Helder vai avançando para adiantarmos... Ou seja...

Aluno: Não se vê bem!

Professora: Carrega mais um bocadinho.

Tiago: Ou seja, $m_1 \times m_2$ = *-1*, e substituindo m_2 vem:

[Tiago resolve a tarefa no quadro, com o auxílio do colega de grupo, o Helder: No quadro escreve: $m_1 = f'_1(a) \quad m_2 = f'_2(a)$.

Como $m_1 \times m_2$ = *-1* então sendo $m_2 = f'_2(a) = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{f'_1(a)}$.

As derivadas serão: $f'_1(x) \quad = (kx)'.e^{kx} = k.e^{kx}$

Logo $m_1 = f'_1(a) \quad = k.e^{ka}$ e $m_2 = f'_2(a). = -k.e^{-ka}$

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \Leftrightarrow -k.e^{-kx} = \frac{-1}{k.e^{kx}} \Leftrightarrow -k = \frac{-1}{k} \Leftrightarrow -k^2 = -1 \Leftrightarrow k^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow k = 1 \vee k = -1.]$$

Tiago: Olhem para o que está aqui escrito! (apontando para o quadro) Basicamente, o que eu estou a dizer é que o declive da segunda reta, ou seja, a derivada da segunda equação, que é esta aqui, (apontando para o quadro onde está: $m_2 = f'_2(a). = -k.e^{-ka}$) vai ter que ser igual *-1* sobre o declive da primeira reta, ou seja, a -1 sobre a derivada da primeira função, certo? As derivadas são estas aqui (apontando para o quadro onde está: $m_1 = f'_1(a) \quad = k.e^{ka}$e $m_2 = f'_2(a). = -k.e^{-ka}$)

e agora, substituímos os valores e vamos chegar ao valor de k e ao valor de a.

[O Helder continua a resolver a tarefa no quadro para que todos os alunos possam acompanhar o raciocínio do Tiago]

Tiago: Nós igualamos as funções, entretanto isto podemos cortar.

Nesta interação, a professora começou por pedir a Tiago que organizasse a informação no quadro. A professora promove no entanto o envolvimento de outros alunos da turma, guiando a sua participação:

Professora: Ó Tiago, talvez seja bom tu fazeres uma leitura, porque eu acho que há pessoal já desatento. Uma leitura na totalidade, essas coisinhas que o Helder andou aí a apagar no *x* e pôr outra coisinha por cima e tal... É que se não...

Tiago: Ou seja, como anteriormente chegamos à conclusão, que a derivada da função 2 no ponto *a*, tinha que ser igual a *-1* sobre a derivada da função 1 no ponto *a*, certo? Fomos ver quais eram as expressões das derivadas, segundo as regras de derivação que a professora deu na aula passada, e depois fomos substituindo isto aqui.

[Entretanto, Helder alterou a resolução da equação *m1* × *m2* = *-1* substituindo o valor de *x* por *a* e ficou:

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \Leftrightarrow -k.e^{-ka} = \frac{-1}{k.e^{ka}} \Leftrightarrow -k = \frac{-1}{k} \Leftrightarrow -k^2 = -1 \Leftrightarrow k^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 1 \vee k = -1]$$

Tiago: Nesta equação como $e^{-ka} = \frac{1}{e^{ka}}$ então os e^{ka} cortam na equação e assim conseguimos eliminar uma das incógnitas, o *a*. Ah e chegamos a dois valores possíveis para *k*, mas segundo o enunciado...

Ricardo: Como *k>0* então terá de ser *k=1*.

Tiago: Exato! *k=1*.

Ou seja, chegamos à conclusão que *k* vai ter que ser igual a *1* e o *a* o que vai ter que ser?

[Faz-se silêncio na sala]

Ricardo: Diz?

Tiago: Chegamos à conclusão que o *k=1* e *a* é igual a quê?

Aluna: Não interessa o valor...

Tiago: Não interessa o valor, porque desde que *k* seja 1, o *a* pode ser qualquer valor. Dúvidas?

Professora: Perguntas? (...)

Ricardo: Então e para *k* diferente de 1, portanto, *k* igual a 1 o valor de *a* não interessa, mas para o *k* diferente de 1 existe algum valor para *a*? Uma reta para a esquerda ou para a direita, existe algum valor mesmo que seja 99? Ou não?

Tiago: Não. Pela simples questão do enunciado. O *k=1*.

Professora: Ficaram satisfeitos? Daniel? Ficaram satisfeitos com a resposta?

Daniel: Sim!

Como não havia dúvidas, a professora decidiu desafiar a turma com uma questão que visava promover a reflexão e análise dos resultados observados por parte dos alunos:

Professora: Mais perguntas? Posso fazer uma pergunta? Então, mas o *k* é igual a 1 para quê?

Tiago: Não percebi a pergunta!

A professora volta a desafiar a reflexão dos alunos com a mesma questão. Tiago responde ao desafio e a professora prossegue apoiando a discussão:

Professora: Claro que tem de ser igual a 1, o *a* pode ser qualquer um, independentemente do valor de *a*, o valor de *k* tem que ser igual a 1. Mas tem que ser igual a 1 para quê?

Tiago: Então, porque as retas serem perpendiculares!

Professora: Ah, as retas são perpendiculares! É que eu acho que havia pessoal que já não se lembrava. Aliás, é que aquelas duas retas são tangentes em pontos que têm a mesma abcissa, só nesta circunstância, são perpendiculares. Naquele caso, que está no quadro, está o *x=0,25*, salvo erro, Carlos...

Ricardo: Ajuda aí...

Professora: *-0,25* é isso, não é?

Carlos: É *-0,25*.

Não estando totalmente convencida que os alunos tenham percebido que as retas são perpendiculares independentemente do valor que toma o parâmetro *p*, a professora volta a desafiar Tiago com uma nova questão:

Professora: *-0,25*. Então e se o *p* fosse *+0,25*? Se o *p* estivesse desse lado?

Tiago: Se estivesse desse lado as retas mantinham-se perpendiculares pois vimos que é independente do valor de *a* (neste caso consideram *p=a*).

Satisfeita com a discussão em torno da tarefa e para garantir que não ficavam questões por responder, a professora voltou a pedir à turma para colocar questões e a perguntar se alguém tinha dúvidas. Não existindo questões ou dúvidas, a professora fez uma avaliação positiva do trabalho desenvolvido pelo grupo e concluiu a discussão retomando a propriedade que parecia estar esquecida dos alunos. Nesta intervenção, voltou a referir a propriedade dizendo à turma que mais tarde voltariam a fazer a sua demonstração, salientando a importância de o fazer:

> Há alguma dúvida? Não há mais nenhuma questão para colocar? (...) Pronto, eu gostava então, acho que foi boa a apresentação, percebeu-se bem, acho que toda a gente percebeu. Portanto, acho que é uma boa apresentação para prepararem agora as duas próximas. Mas antes de preparem as duas próximas, eu gostava de dizer isto. Só chamar à atenção para esta propriedade, que é de facto do 11.º ano, como sabem este ano o exame também vai ter matéria do 11.º ano. Nós ainda vamos rever algumas questões relacionadas com a análise vetorial, que não tivemos de rever este ano e recordam-se que as regras para as retas perpendiculares significavam que as suas direções são perpendiculares e portanto, os vetores normais das retas também eram perpendiculares, ou os próprios vetores das retas eram perpendiculares mas, uma característica fica já, é que o declive de uma é igual a -1 sobre o declive da outra. E isto é uma das regras das retas perpendiculares. Nós quando fizermos a revisão voltaremos a provar. É importante saber!

Ao longo do episódio notamos diversos problemas com os quais a professora se depara. Em primeiro lugar, tem de decidir se devia esperar que os alunos terminassem a preparação da apresentação. Seguidamente, como os alunos que apresentam as conclusões da tarefa são demasiado sucintos e pouco claros, tem de recorrer a várias intervenções de apoio e informação para clarificar a informação por eles transmitida. Após estas interações assistimos aos primeiros desafios da professora pois sente que a turma começa a intervir mais e a perceber melhor a questão colocada na tarefa. Ao longo da discussão a professora depara-se ainda com o problema do modo como fazer o convite e desafio aos alunos. Neste caso, decide lançar um desafio à turma para promover a participação dos alunos. Contudo verificou-se que, no início, acaba por ser quase sempre Helder a intervir. Ainda durante a discussão, a professora tem, por diversas vezes, de decidir o que fazer perante contribuições pouco claras de alguns alunos que os restantes têm dificuldade em entender. Opta por pedir que escrevam no quadro com maior clareza, e pede ao aluno que repita o raciocínio. Além disso, rediz a informação dada pelo aluno ou coloca questões mais desafiantes para promover a reflexão da turma e posterior participação na discussão. Quase no final do episódio, a professora debate-se com um outro problema, pois sente que a turma pode não ter percebido a resolução apresentada pelos alunos. Tem ainda de decidir entre passar à fase seguinte ou explorar com maior profundidade, fazendo apelo a outras questões e dando novas informações sobre um futuro tópico a trabalhar (Análise Vetorial) relacionado com uma propriedade que parecia esquecida pela turma e que decide relembrar para que a discussão seja mais enriquecedora para os alunos.

5.2.2. Análise

Este episódio resulta da discussão em torno da tarefa denominada *Entre tangentes*, previamente trabalhada pelo grupo que apresenta a sua proposta de resolução. Verificamos que a discussão conduzida pela professora alterna entre o *conceptual*, quando promove a conexão entre as revisões da propriedade anteriormente estudada e as questões da tarefa, e a *aplicação*, quando promove o desafio da construção de novos conhecimentos com a exploração da tarefa. Existem ainda situações de *enquadramento* ao rever conhecimentos prévios, como se pode ver na tabela 4.

Tabela 4 – Análise das ações da professora na discussão do episódio 2 segundo os modelos utilizados.

Episódio 2		
		Ocorrências
Tipo de discussão	Enquadramento	Revisão da propriedade sobre retas perpendiculares
	Conceptual	Conexão entre as revisões e a tarefa
	Aplicação	Desenvolvimento da tarefa
Ações	1. Convidar	1
	2. Sugerir/ Informar	19
	3. Apoiar/ Guiar	28
	4. Desafiar	7
	Total	55

Neste episódio, a professora realiza sobretudo ações de apoiar/guiar, num total de vinte e oito. Estas ações devem-se à necessidade que a professora sente de apoiar o prosseguimento da discussão, visto ser uma tarefa nova para a turma. Seguem-se ações de sugerir/informar, dezanove. Estas ações de sugerir estão essencialmente associadas ao final de uma resolução, onde a professora procura sintetizar e salientar os aspetos que considera mais relevantes. A ação de convidar surge apenas uma vez, no início do segmento, para envolver os alunos na discussão. É de destacar que neste episódio ocorrem sete ações de desafiar que desempenham um papel muito importante para fazer avançar e aprofundar a discussão matemática. Estas ações são também promotoras de reflexão sobre argumentos para a validação de conjeturas e respostas dos seus alunos. Como exemplo estão algumas questões colocadas pela professora: “Essas tangentes são onde? Num sítio qualquer?”, “Então, mas o *k* é igual a 1 para quê?” Estas questões são fundamentais para elucidar o enunciado da tarefa e colocam os alunos num papel ativo na participação da discussão matemática.

A professora encerra a discussão com ações de informar e guiar os alunos. Como se pode ver na figura 8, as ações de apoiar/guiar dão origem a novas ações de apoiar/guiar e há uma grande ocorrência de movimentações entre as ações de sugerir/informar e as de apoiar/guiar. Analisando um pouco mais as ações de desafiar, verifica-se que dão origem a duas novas ações de desafiar e que há ações de desafiar que dão origem a ações de sugerir/informar e de apoiar/guiar. De salientar também que há seis ações de apoiar/guiar que resultam em ações de desafiar.

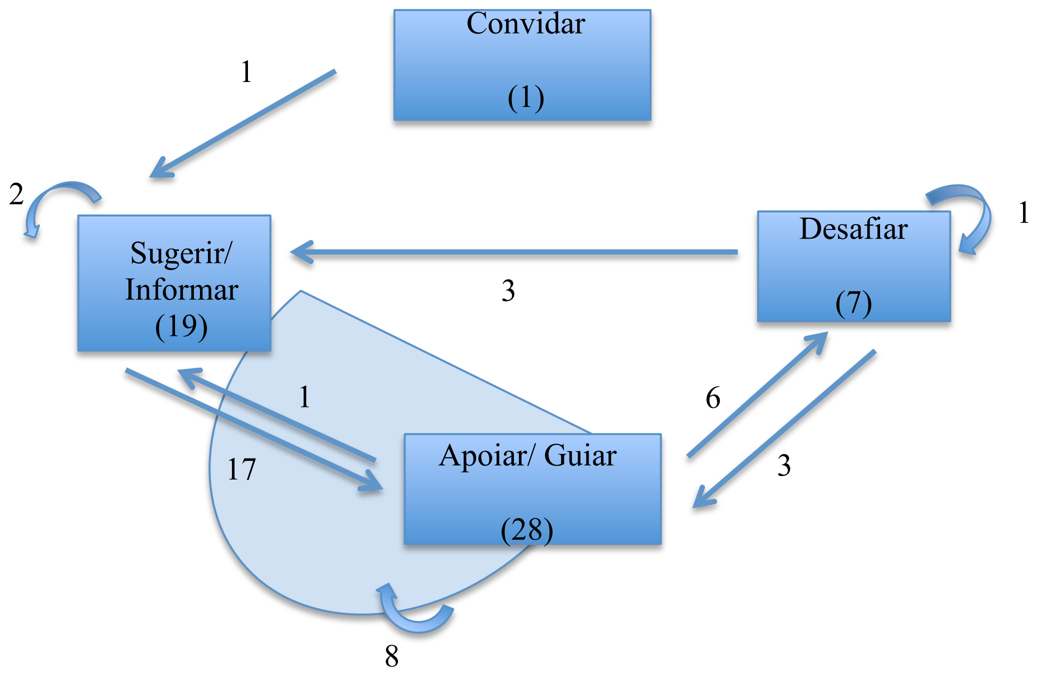


Figura 8 – Ações da professora na discussão do episódio 2.

Em resumo, identificamos neste episódio a presença dos três tipos de discussão. O primeiro momento, de *enquadramento,* ocorre quando a professora promove a revisão da propriedade que relaciona o declive entre duas retas perpendiculares. O segundo momento, *conceptual*, tem lugar quando a professora intervém com o objetivo de estabelecer uma conexão entre a revisão dos conhecimentos prévios e a tarefa. Por último, a presença do momento de *aplicação* surge quando a professora promove a discussão da resolução da tarefa. Analisando as ações da professora na condução da discussão, verificamos que o episódio é fortemente marcado por ações de apoiar/guiar mas apresenta um elevado número de ações sugerir/informar e de sete ações de desafiar, que tiveram um papel essencial na análise dos diversos passos da resolução da tarefa, em diversas fases do segmento. O facto das ações da professora se centrarem sobretudo em ações de apoiar/guiar pode ter a ver com o que referiu na reflexão pós aula:

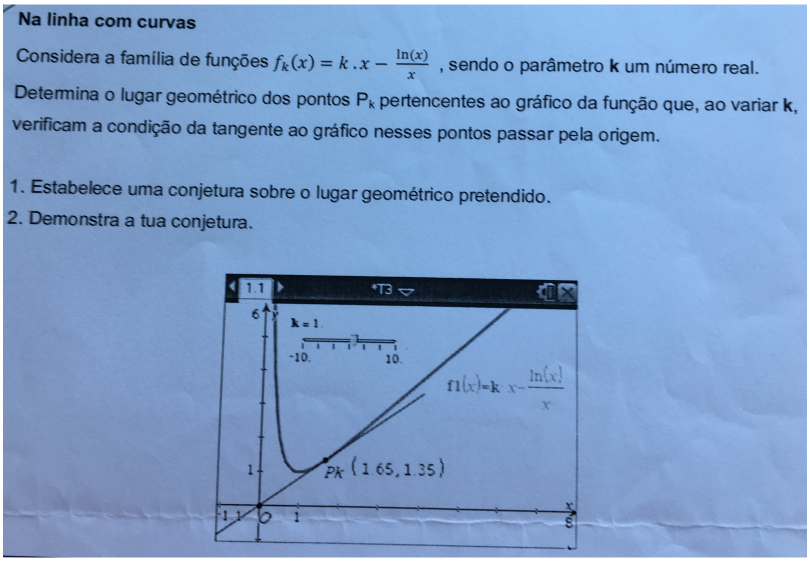
> Na próxima aula, os grupos que vão apresentar são grupos mais fracos, nomeadamente este grupo, que é um grupo de alunos muito fracos, alguns com negativa, mas que acho que se estiveram a esforçar (...)

Considerando que os alunos são fracos, a professora sentiu necessidade de os apoiar mais para que a discussão da tarefa prosseguisse.

5.3. Episódio 3

5.3.1. Os diálogos na sala de aula

Este episódio é constituído por um segmento da discussão coletiva em torno da tarefa *Na linha com curvas* apresentada na figura 9. A discussão apresentada neste segmento resultou do trabalho de um dos grupos estabelecidos na turma. No total, os alunos tiveram cerca de trinta minutos para resolver a tarefa e organizar a apresentação.



Na linha com curvas

Considera a família de funções $f_k(x) = k\,.x - \frac{\ln(x)}{x}$, sendo o parâmetro **k** um número real.

Determina o lugar geométrico dos pontos P_k pertencentes ao gráfico da função que, ao variar **k**, verificam a condição da tangente ao gráfico nesses pontos passar pela origem.

1. Estabelece uma conjetura sobre o lugar geométrico pretendido.
2. Demonstra a tua conjetura.

Figura 9 – Enunciado da tarefa 3: Na linha com curvas (adaptado de uma tarefa proposta pelo grupo T3 da APM).

Segmento 1. A aula iniciou com o grupo de alunos a preparar a apresentação no quadro e computador. Contudo, surgiu um pequeno incidente técnico e a professora auxiliou o grupo de trabalho. Passados nem cinco minutos, a questão foi resolvida e a professora deu início à discussão convidando a turma ao informar que se iria dar início à apresentação da ultima tarefa. As duas alunas vão preparando a apresentação da atividade, Sara e Maria, incluindo a resolução gráfica da tarefa:

> Professora: Pronto, houve aqui um pequeno incidente técnico (...) quando estiverem preparadas digam!
>
> Maria: Oh professora, ligou!

A professora dirige-se à aluna para a ajudar a ligar o projetor para que toda a turma possa acompanhar a resolução da tarefa:

> Professora: Já está a aparecer, talvez apagar a luz! Assim, vê-se melhor! Podemos começar? Pronto, vamos então ouvir a apresentação do último trabalho.
>
> Maria: Pronto, bom dia!
>
> Alunos: Bom dia!
>
> Maria: O nosso exercício era da linha com curvas. Deram-nos aqui uma função deste tipo (apontando para a função anotada no quadro

$f(x) = kx - \frac{lnx}{x}$, em que para além da variável de x vamos ter o parâmetro k também e dão-nos ainda o ponto P_k que vai pertencer, o ponto P pronto, que vai pertencer a esta função aqui. Uma das particularidades deste ponto P é que neste ponto vai passar uma tangente, que também vai passar pela origem, ou seja, qualquer que seja o valor de...

João: De k...

Maria: Da ordenada, pronto, das coordenadas do ponto P, a tangente que passar por esse ponto, vai sempre passar pela origem do gráfico. E por isso, o que nos perguntavam era: para determinar o lugar geométrico dos pontos P_k, pertencentes ao gráfico, ou seja, quando nós variávamos k naquela função, os pontos P_k obrigatoriamente a curva da função vai variar. E por isso, queriam-nos perguntar qual era o lugar geométrico, não sei se sabem corretamente a definição de lugar geométrico, é... Não? Então, um lugar geométrico é o conjunto de pontos que pode definir alguma forma, por exemplo uma reta, ou uma circunferência, ou qualquer coisa e por isso, ao variarmos k, vamos obter várias coordenadas de pontos P_k, por isso, se variássemos o k íamos ver que, pronto, a função ia variando, enquanto P_k, no sítio onde ele está, também ia variando.

João: Maria, disseste que se variássemos a coordenadas de ponto P_k, ia dar sempre à origem...

Maria: Sim, as... Não todas as... Portanto, como estás a ver nós ao variarmos o k, a abcissa fica a mesma, ou seja, o y das ordenadas é que muda. Portanto, ao variarmos o k conseguimos ver que o valor de P_k vai mudando e vai desenhando uma espécie de reta. Porquê? Porque tem a mesma abcissa ao longo do gráfico, quando mudamos o k e a abcissa podemos ver que... (Maria recorre à demonstração gráfica)

Desenha uma linha, uma reta vertical e pronto! Mas para provarmos isto com uma calculadora é fácil, mas analiticamente...

Após esta abordagem inicial, a professora percebeu que a questão central da tarefa podia não estar bem clara para a turma e que a discussão estava a centrar-se essencialmente em dois alunos. Pediu a Vítor que colocasse melhor a sua questão para que se clarificasse o problema em análise. Com esta interação a professora procurou apoiar a discussão de forma discreta:

Professora: É difícil...

Maria: Pois é difícil!

Professora: Mas penso que há aqui uma ou outra questão ainda sobre o enunciado e portanto, talvez o Vítor levante melhor a questão que é para não haver dúvidas sobre o enunciado. O que é que era dado e o que é que vocês descobriram e o que é que vão provar.

Sara: Nós tínhamos uma família de funções em que tínhamos uma variável *k* pertencente a *r*, portanto, e tínhamos um ponto *P* que pertence ao gráfico da função e a particularidade do ponto é que a reta tangente ao gráfico desse ponto passa pela origem.

Vítor: Sim, mas a Maria disse.

Sara: O quê?

Vítor: A Maria disse que podias alterar as coordenadas do ponto *P*.

Maria: Não são as coordenadas todas! Pronto, a abcissa do ponto *P* vai ficar na mesma, mas as ordenadas vão mudando, mas pronto...

Sara: Mas nós não sabíamos isso inicialmente, nós graficamente fomos alterando o *k* e alterando o ponto *P* ia mudando e o nosso objetivo era...

Após esta discussão, a professora interveio na discussão complementando a informação dada pela Maria de forma a guiar a discussão através de sugestões que foi acrescentando:

Professora: Ia mudando porque tinham a exigência da reta tangente passar pela origem, certo?

Sara: E nós tentámos descobrir se havia, se esse lugar geométrico era uma coisa específica ou se dependia do cálculo, era ir verificando graficamente que estava sempre dentro daquela reta, ou seja, a abcissa não estava. Mas diz que a abcissa é *1,75*, o que não é um número muito específico e então, nós fomos calculando analiticamente para perceber qual é esse valor. Portanto, sabemos que este ponto *P*, por um lado, pertence à função e por outro lado, pertence à reta tangente desse gráfico. Portanto, pertencendo à função sabemos que: nós chamamos *a* à abcissa desse ponto e sabemos que a ordenada vai ser $P\left(a, \frac{ka-lna}{a}\right)$ e por outro lado, como sabemos que pertence à reta tangente, fomos descobrir a função da reta tangente, num caso geral, que é um *k* qualquer. E para descobrir isso precisamos, porque sabemos que a equação da reta é $y= mx+b$, sabemos que $b=0$ porque é a nossa condição que passe na origem logo temos $y=mx$ e temos que descobrir o *m*. O *m*, como sabem, é o declive da reta e vai ser a derivada da função naquele ponto. Portanto, vou derivar a função, a derivada de *f(x)* vai ser a derivada de *kx* menos a derivada deste quociente $\left(\frac{lnx}{x}\right)$.

Sara resolveu $f'(x)$ no quadro e à medida que ia escrevendo, também foi explicando a resolução. No quadro apareceu: $f'(x) = k - \frac{(ln(x))'.x - x'.ln\,(x)}{x^2} = k - \frac{\frac{1}{x}.x - 1.ln\,(x)}{x^2} = k - \frac{1 - ln\,(x)}{x^2}$.

Sara: Alguma dúvida?

A aluna prosseguiu com a resolução da tarefa e simultaneamente, foi explicando o raciocínio oralmente:

Sara: Isto é a derivada da função mas para descobrir o declive da função temos de calcular a derivada na abcissa do ponto P. Sabemos que a abcissa do ponto P é a então substituindo vem $f'(a) = k - \frac{1-ln(a)}{a^2}$. E substituindo na equação reduzida da reta tangente fica $y = \left(k - \frac{1-ln(a)}{a^2}\right)x$. Portanto agora para descobrir o valor de a, para ver se a variava com k ou se era independente de k, qual era esse valor. Portanto nós sabemos que a derivada do ponto P é esta mas também como pertence à reta vai ser *P(a,* [Sara é interrompida]

A intervenção da professora permitiu uma resposta elaborada e completa apresentada pelo grupo. A interação de Sara demonstrou uma boa capacidade de raciocínio e autonomia. O grupo conseguiu de forma organizada explicar a questão.

Dando continuidade à discussão, surgiu uma pequena sugestão da professora para que o grupo pudesse de forma ainda mais clara, prosseguir com a resolução do problema. Sara mostrou-se preparada para continuar a discussão da tarefa:

Professora: Oh Sara talvez, como vais precisar do quadro, apaga a fórmula (...) o manual, página tal!

Sara: $P\left(a, \left(k - \frac{1-ln(a)}{a^2}\right)a\right)$. E, como sabemos que a ordenada do ponto P por um lado é isto e por outro é isto (apontando para o quadro onde tem $y = ka - \frac{lna}{a}$) teremos que $ka - \frac{lna}{a} = \left(k - \frac{1-ln(a)}{a^2}\right)a$ e desenvolvendo vem $\Leftrightarrow ka - \frac{lna}{a} = ka - \frac{a(1-lna)}{a^2}$. Aqui podemos cortar *ka* e verificamos que o a vai ter um valor independente de *k*, está provado. Podemos também cortar um a do numerador com este quadrado e fica $\frac{lna}{a} = \frac{1-lna}{a}$ os denominadores cortam e fica $ln(a) = 1 - ln(a) \Leftrightarrow ln(a) + ln(a) = 1 \Leftrightarrow 2\,ln(a) = 1 \Leftrightarrow lna^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = e \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{e}$ E, recorrendo à calculadora vimos que dá aproximadamente *1,65* como nos deu no gráfico. E assim vemos que os valores de *P* vão estar sempre na reta *x* igual a raiz de *e* que variando o *k* vai ser sempre essa a abcissa.

A professora manteve o apoio à discussão procurando fazer as conexões entre os vários momentos ou lançando novas questões que incentivassem ao raciocínio, como podemos assistir de seguida:

> Professora: Perguntas? (...)
>
> Vítor: Então e se fizermos variar o k, mas num ponto em que a abcissa fosse diferente?
>
> Sara: Aí já alterava a regra das raízes de e, que é que a tangente passe na origem. Pronto, se mudares a abcissa do ponto, a tangente já não passa mais aqui (apontando para a origem do referencial).
>
> Maria: OK.

A apresentação terminou e Maria levantou-se para ir para junto de Sara e responder às perguntas dos colegas e da professora. A discussão prossegue:

> Professora: Mais questões? Posso fazer eu algumas? Então, qual é a equação daquela reta que está ali, da qual estão ali apenas alguns pontinhos? Qual é a equação daquela reta?

Nesta última intervenção da professora assistimos a uma questão de desafio pois a resposta $x = \sqrt{e}$ exigia uma boa manipulação algébrica, um bom conhecimento das regras operatórias que envolvessem logaritmos e expoentes e preocupação na apresentação do valor exato e não apenas arredondado.

A discussão prosseguiu com o grupo a responder à questão e com uma nova intervenção da professora de informação seguida de desafio, ao qual o grupo corresponde:

> Maria: $x = \sqrt{e}$
>
> Professora: $x = \sqrt{e}$. Aquela questão que o Cameiro colocou. (...) O Carlos levantou, portanto, era uma condição do enunciado. Uma condição do enunciado, é que eu queria o conjunto dos pontos mas de tal maneira, que a reta tangente desse ponto passasse pela origem. Portanto, exigimos essa condição. Tenho mais uma questão, eu não percebo, sei pouco de logaritmos, não percebo porque é que $2\,ln(a) = 1$ é equivalente a $a^2 = e$.
>
> Sara: São as regras operatórias pois $2lna = 1 \Leftrightarrow lna^2 = 1 \Leftrightarrow lna^2 = lne \Leftrightarrow a^2 = e$.

Não foi possível registar por escrito o entusiasmo que se lia nas intervenções dos alunos. A discussão dos resultados obtidos na resolução da tarefa promoveu momentos importantes de aprendizagem. A professora continuou as interações procurando agora incutir na turma um maior rigor na justificação das etapas construídas, com recurso à comunicação oral utilizando uma linguagem matemática mais formal. Estas intervenções da professora serviram de apoio à discussão coletiva:

> Professora: São as regras operatórias. Pronto, só mais uma coisa. Quando vocês dizem “corto”, “corto”, “corto”, o que é isso? Corto com a tesoura?
>
> Sara: Quando temos uma igualdade, se temos aqui igual ou se passássemos.
>
> Professora: Esse corte é o quê? Não há nenhuma operação matemática que chama corte! Portanto, o que é que fazes? O que é que fazes?
>
> Sara: Então, isto passa a subtrair *ka-ka*.
>
> Professora: Passa a subtrair, portanto, *ka-ka* é igual a *0*. E no outro? Nesse outro corte?
>
> Sara: Temos o processo de *a* a dividir por *a* é *1*.
>
> Professora: Portanto, é a divisão do numerador e do denominador pelo mesmo, certo? Mais dúvidas? Ninguém tem dúvidas? Toda a gente... Está? Bom, então podem sentar (...)

A professora deu por terminada a discussão redizendo a resposta dada pela aluna para que a turma ficasse sem dúvidas.

Analisando o segmento, observamos que a professora se depara com alguns problemas. Um problema inicial relacionado com questões técnicas e que é resolvido com rapidez, obriga a professora a decidir se continuava com a apresentação ou se tomaria outro rumo na aula. Um segundo problema relaciona-se com a falta de clareza do grupo na sua explicação. Aqui a professora tem de decidir se responde ela, se faz alguma questão à turma ou a algum grupo para que os alunos tenham oportunidade de refletir na questão, ou se rediz a frase de algum aluno também para incentivar à reflexão sobre o que disse. Um terceiro problema é a fraca participação da turma na discussão, especialmente na fase final da apresentação da resolução da tarefa, o que leva a professora a fazer algumas questões mais desafiantes para provocar a reflexão e participação dos alunos, levando-os a uma análise mais profunda ao problema, de forma a compreenderem a tarefa.

Esta tarefa é discutida após várias aulas de trabalho em torno das regras operatórias que envolvem expoentes e logaritmos. É visível que a turma começa a estar mais preparada para participar na discussão em grupo de forma autónoma, mostrando-se mais à vontade nos conceitos em estudo. Os alunos parecem estar mais confiantes e as intervenções da professora são sobretudo de natureza desafiante e de apoio. Verifica-se que as intervenções dos alunos são mais longas do que no episódio anterior onde as intervenções da professora eram maioritariamente de sugestão e apoio.

5.3.2. Análise

Este episódio tem por base a tarefa *Na linha com curvas,* previamente trabalhada pelos alunos que apresentam os resultados. A tarefa é a segunda a ser discutida coletivamente pela turma. Como a professora referiu na reflexão pós aula:

> O meu objetivo era fundamentalmente, porque eles não tinham visto nada do ano anterior, aliás já viste as reações quando falo no ano anterior é assim. E portanto, o conceito de limite e o conceito de uma derivada de uma função num ponto e interpretação geométrica, era para eles uma confusão! E portanto, eu acho que com estes trabalhos, que alguns já foram um bocadinho difíceis, eles ficaram mais esclarecidos.

Analisando o episódio quanto ao tipo de discussão, verificamos que este consiste num momento de *aplicação* pois a discussão visa ajudar os alunos na compreensão da unidade temática através do recurso a uma tarefa desafiante e complexa, como se pode ver na tabela 5.

Neste episódio, a professora usa sobretudo ações de apoiar/guiar, num total de oito, seguindo-se de sugerir/informar, que foram seis. As ações de informar ocorrem essencialmente no final tendo a professora procurado sintetizar a informação mais relevante e identificar erros que os alunos cometem muito habitualmente, por forma a percebê-los e evitá-los. A ação de convidar ocorre apenas uma vez durante o episódio e ocorrem dois momentos com a ação de desafiar. Estas ações de desafio desempenham um papel importante no aprofundamento e compreensão de expoentes e logaritmos. Saber que a equação da reta é $x = \sqrt{e}$, requer uma boa compreensão e aplicação de regras de logaritmos, expoentes e radicais. A calculadora só fornece a resposta com facilidade, se o aluno souber o que colocar na calculadora. O valor exato apresentado requer uma boa manipulação algébrica. Analisando o episódio verificamos ainda que há três ações de apoiar/guiar que dão origem a novas ações de apoiar/guiar. Observam-se também várias movimentações de ações em torno de sugerir/informar e apoiar/guiar.

Tabela 5 – Análise das ações da professora na discussão do episódio 3 segundo os modelos utilizados.

Episódio 3		
		Ocorrências
Tipo de discussão	Enquadramento	Não há
	Conceptual	Não há
	Aplicação	Todo o segmento
Ações	1. Convidar	1
	2. Sugerir/ Informar	6
	3. Apoiar/ Guiar	8
	4. Desafiar	2
	Total	17

A figura 10 mostra o número de ocorrências de ações de cada tipo, assim como os movimentos entre as ações no episódio.

Em resumo, fazendo a análise ao tipo de discussão, verificamos que o episódio representa uma discussão de *aplicação* pois procura ajudar os alunos na construção de novo conhecimento matemático, através de uma situação problemática desafiante. No que respeita às ações do professor, esta discussão é fortemente marcada por ações de apoiar/guiar e de sugerir/informar. Registam-se ações de desafiar onde a professora procura questionar os alunos relativamente à sua compreensão das novas regras operatórias que envolvem expoentes e logaritmos. Ao saberem responder às questões colocadas pela professora, os alunos demonstram ser capazes de justificar e validar respostas.

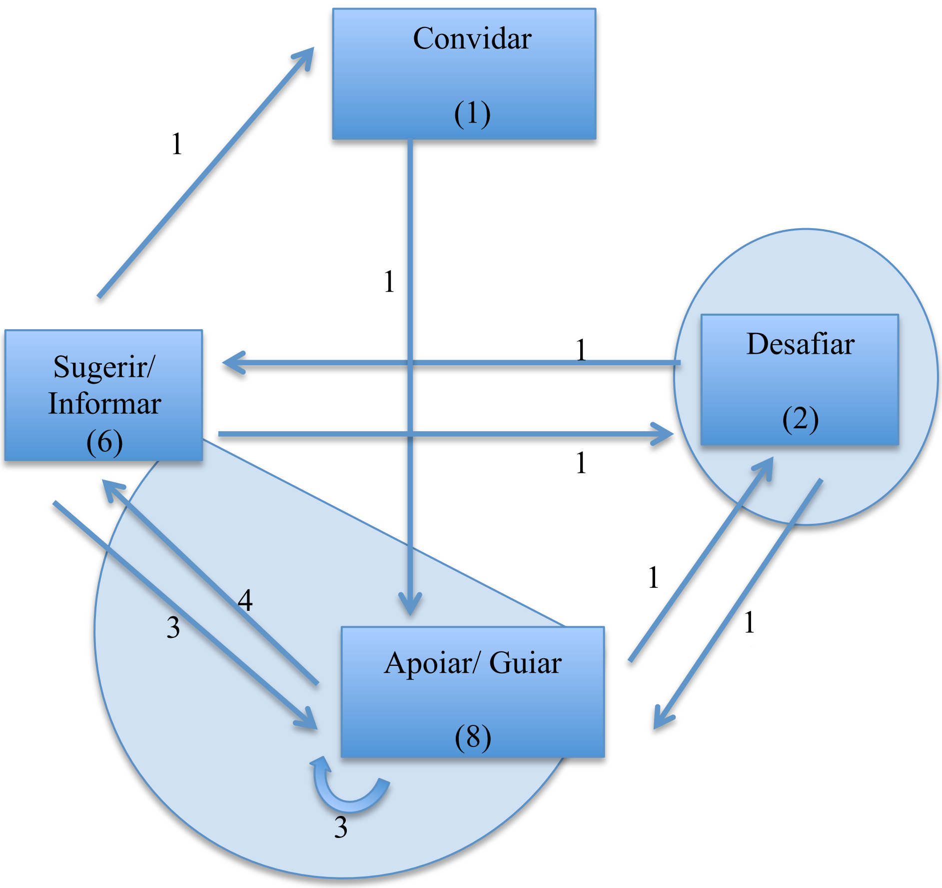


Figura 10 – Ações da professora na discussão do episódio 3.

5.4. Episódio 4

5.4.1. Os diálogos na sala de aula

Este episódio está dividido em dois segmentos distintos. O segmento 1 incide na demonstração da derivada do produto e o segmento 2 que incide na demonstração da derivada do quociente.

Segmento 1. Este episódio vem na continuidade do episódio 3 e, como referido anteriormente, tem como foco a demonstração da derivada do produto entre duas funções reais de variável real. Esta regra já tinha sido apresentada à turma pois consta do formulário disponibilizado pelo Instituto de Avaliação Educacional (IAVE) para os exames nacionais. Os alunos tiveram oportunidade de a utilizar na resolução de uma ou outra tarefa de aplicação, contudo a demonstração formal ainda não tinha sido feita. É o que iremos verificar de seguida.

De assinalar que o simples facto de terem sido os alunos a chegar à demonstração da derivada já é por si um desafio que a professora propôs aos seus alunos. Contudo este desafio imposto pela natureza da tarefa em si proposta pela professora aos seus alunos não é por mim, enquanto investigadora considerada uma ação de desafio verbal presente no momento da discussão. A professora iniciou a discussão com uma intervenção que visava convidar a turma para seguir a apresentação de um grupo:

> Professora: (...) Para resolver este problema [referindo-se à tarefa: *Na linha com curvas*],os dois grupos que tiveram que resolver este problema tiveram que usar a regra de derivação da derivada do quociente, que ainda não tínhamos trabalhado na aula e portanto, eu dei aos grupos foi informação da regra. Mas tal como temos feito com todas as outras questões de derivadas, e dado que no 12.º ano também temos tido essa preocupação, de sempre que possível provarmos aquilo que estamos a descobrir ou usar, os grupos que já não estavam a fazer nada, estiveram a tentar provar a regra, encontrar a regra, tentar provar a regrar da derivada do produto e do quociente, principalmente, do produto. Porque, eu sei que quando tiver $\frac{a}{b}$, isso é o mesmo que $a\times\frac{1}{b}$. Portanto, provavelmente quando tiver provado a regra do produto, a derivada do produto, tenho provado a do quociente. Aqui o grupo do Daniel e do Carlos vão colocar no quadro, estiveram a ler o livro, portanto, estiveram a fazer uma consulta no livro e vão apresentar a todos a regra da derivada do produto. E o grupo, o vosso grupo a seguir vai fazer alguns exercícios de aplicação e vai ver se eles se comportam bem...

A professora dirigiu-se ao grupo que ia fazer as tarefas de aplicação, enquanto os alunos aguardavam. Daniel e Carlos, levantaram-se, apagaram o quadro e prepararam-se para começar. A professora disse:

> Professora: Pronto vamos ouvir!
>
> Daniel: Pronto, foi-nos pedido...
>
> Joana: Bom dia!
>
> Daniel: Bom dia! Foi-nos pedido para demonstrar a regra para derivar o produto da função. Nós tínhamos $(f\times g)'(x) = f'(x)\times g(x) + g(x)'\times f(x)$. Isto é o que vamos demonstrar. Antes só de demonstrar, só aqui uma coisa para relembrar $(f\times g)(x) = f(x)\times g(x)$
>
> Professora: O marcador tenho ali, espera aí que dou-te. Pronto.

Daniel: O que ele tá a fazer... Vamos escrever a segunda parte da equação que queremos demonstrar segundo a definição de derivada.

[Daniel vai dando algumas indicações a Carlos]

Daniel: Portanto, temos:

$lim_{h\to o}\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}\times g(x) + lim_{h\to o}\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}\times f(x)$.

O que corresponde apenas à segunda parte de $(f\times g)'(x) = f'(x)\times g(x) + g'(x)\times f(x)$. Agora esta parte escrita sob a definição de derivada é [Referindo-se a $(f\times g)'(x)$] $lim_{h\to 0}\frac{(f\times g)(x+h)-(f\times g)(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\times g(x+h)-(f(x)\times g(x))}{h}$

Daniel apagou uma parte do quadro e Carlos prosseguiu com a demonstração escrita:

Carlos: Agora passas isso para ali... (apontando para o outro lado do quadro)

Daniel: Pronto e aqui está o passo genial que é considerar: $f(x+h) = f(x+h) - f(x) + f(x)$ que é a mesma coisa de adicionar nada: *-f(x) + f(x)*.

Seguidamente, Daniel demonstrou a resolução do limite da derivada de $f(x+h)$. Escreveu no quadro: $lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)+f(x)].g(x+h)-f(x).g(x)}{h}$:

Daniel: Agora menos *f(x)* mais *f(x)* corta, desaparece e mais nada!

Carlos: Não! Passas o *-f(x)* mais o *f(x)* para fora!

Carlos deu continuidade à resolução da tarefa, escrevendo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]g(x+h)+f(x)\times g(x+h)-f(x)\times g(x)}{h}$$

Daniel: Vocês perceberam o que é que Carlos escreveu aqui? Então, como é que daqui passa para ali(apontando para as duas etapas anteriores)? Vocês perceberam isto ou não? Alguém percebeu?

Não se conseguindo identificar os alunos que falaram, ouvem-se vários “eu não”.

A professora muito atenta à discussão, interveio, sugerindo uma explicação para o trabalho apresentado. Esta sugestão foi em jeito de desafio:

Professora: Vais ter que explicar!

Os alunos procuraram explicar:

Carlos: Passas este *f(x)* para fora e o outro fica dentro? E este.

Daniel: Ah! E multiplicas por este aqui (referindo-se a *g(*$x + h$))?

Carlos: Sim

Daniel: Ah ok. Este *f(x).*

Daniel prosseguiu com a explicação recorrendo ao quadro, resolvendo o limite quando h tende para zero de $[f(x+h)-f(x)]g(x+h)+\ f(x).g(x+h)-f(x)g(x)$ tudo sobre h. Explicou a tarefa de forma descontraída e foi colocando algumas questões aos colegas, para que estes também participassem:

Daniel: $lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.lim_{h\to o}\ g(x+h)+lim_{h\to 0}\frac{f(x).g(x+h)-f(x).g(x)}{h}$. E agora o que faço? (Olha para o colega)

Carlos: Agora pões o *f(x)* em evidência.

Daniel: Ah então pegando agora só no segundo termo fica $lim_{h\to 0}f(x).\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=lim_{h\to 0}f(x).lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$ $lim_{h\to 0}f(x).g'(x)$ ou seja, já está provado!

Antes de concluir a discussão, a professora perguntou se havia questões aproveitando a oportunidade para informar a turma sobre como habitualmente ocorre o processo de demonstração matemática. Salienta que é muito importante ser paciente, persistente. Que o importante é procurar relações, relacionar com outras questões, com conhecimentos prévios. Considera que este momento permitiu aos alunos colocarem-se no papel de investigadores matemáticos. A esta ação de apoio seguiu-se uma de informar, em jeito de conclusão:

Professora: Perguntas? Há alguma questão ou alguma dúvida? Pronto, provada a... O Daniel e o Carlos fizeram uma boa demonstração ali da derivada do produto, principalmente, acho que devo dizer isto, eu gostei! Mostraram como é preciso ter alguma paciência, eu acho que eles mostraram como também algumas pessoas não têm muita paciência para fazer uma demonstração. Querem logo a receita, ora não há! E a prova é, que em demonstrações mais complexas, às vezes os matemáticos andavam cegos a fazer as demonstrações, não é aqui o caso, mas pronto! Ora quando vos pedem, vocês... Deve ser uma coisa acessível, que está ao alcance mas, eu não posso querer fazer à primeira! Faço à primeira, tento a segunda, mesmo que eu tenha consultado o livro, que foi o caso, e eu tinha-vos dito... Eu tinha-lhes dito para eles, que deviam consultar o livro, mesmo assim, têm que perceber bem o que é que estão a fazer e depois, encontrar a minha forma de fazer! E eu penso que eles conseguiram os dois, ir fazendo ali a demonstração e ir interrogando as dúvidas que tiveram e portanto, mostraram como é que as pessoas devem pensar, fazer, voltar atrás, se dá mal, riscam e começam do princípio. Quem não fizer isso, não avança! Portanto, parabéns!

[Os alunos recebem uma salva de palmas, agradecendo. Em seguida, dirigem-se para os seus lugares]

Neste segmento, percebemos que as intervenções dos alunos se tornaram mais frequentes, elaboradas e longas sendo as intervenções da professora mais reduzidas e de natureza mais desafiante e de apoio à discussão. Não se colocaram grandes problemas à professora. Contudo, dado o carácter desafiante da questão inicial, a intervenção da professora poderia ter sido muito mais intensa e essencial. O grupo soube explicar-se com clareza e isso permitiu à professora ir lançando apontamentos de apoio, sugestão e algum desafio para dar continuidade à discussão. Neste segmento surgiram boas oportunidades para a professora salientar a importância da demonstração matemática. Concluída esta primeira fase seguiu-se deu-se origem à discussão relacionada com a demonstração da derivada do quociente entre funções reais de variável real, dando origem a um novo segmento da discussão.

Segmento 2. A professora iniciou a discussão convidando o novo grupo a apresentar a sua proposta de demonstração para a derivada do quociente entre funções reais de variável real. Referiu ainda que este grupo também chegou à demonstração da derivada do produto que foi apresentado por outro grupo no segmento 1 deste episódio. De seguida, deu algumas informações sobre a derivada do produto salientando as diferentes formas corretas de se representar matematicamente, usando terminologia adequada.

Ainda nesta intervenção ressalvou a diferença entre a derivada da soma e a do produto, erro muito comum entre os alunos, no início do estudo de cálculo diferencial:

> Professora: O grupo do Tiago, aqui do Bernardo, do Helder, do Ivo e do Diogo também tinha feito esta demonstração e agora vou pedir-lhes para avançarem um bocadinho e a partir da derivada do produto, deduzirem, de forma rápida, a derivada do quociente, que nós já utilizamos hoje e depois apresentarem o exercício. E temos pouco tempo, mas ainda temos tempo para fazer isso. Antes disso, eu só gostava de recordar que esta expressão, agora, (apontando para a expressão escrita no quadro: $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$), que faz parte do formulário, que vocês já têm o formulário de exame, e que está com as letras u e v. Portanto, a derivada de u vezes v é $u'v + uv'$ é necessário ser conhecida. Posso sempre usar o formulário e ver o que é, mas não me posso esquecer porque muitas vezes, como nós vimos até nos trabalhos de investigação, precisamos de calcular a derivada das funções, para várias coisas e não vamos estar a fazer por dedução, portanto, temos que começar a utilizar a fórmula, a regra rápida para calcular a derivada do produto. E, deixem-me só dizer mais uma coisa! Portanto, a derivada da soma era a soma das derivadas mas, a derivada do produto não é o produto das derivadas. É bom que tenham isso bem presente! Portanto, ninguém vai escrever que a derivada do produto é a derivada de uma, vezes a derivada da outra, porque já provamos que não é.

A professora é chamada por um aluno:

> Professora: Parece que há aqui uma dúvida ainda! Oh Daniel!

Rapidamente, a professora esclarece uma pequena dúvida de enunciado a um aluno e entretanto. No final da intervenção anterior, a professora terminou com uma ação que visava guiar e orientar um aluno. Tiago iniciou a demonstração partindo do princípio que $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times g(x)^{-1}$:

> Tiago: Para provarmos a derivada do quociente, eu vou pegar nesta derivada que o Daniel escreveu no quadro. Agora, temos a derivada da primeira, vezes a derivada do segundo, mais a derivada do segundo, vezes o primeiro, que é igual neste caso a $f'(x) \times g^{-1}(x) + (g^{-1}(x))' \times f(x)$.
>
> Ora, isto aqui, é a mesma coisa que:
>
> $$\frac{f'(x)}{g(x)} - g^{-1-1=-2}(x) \times g'(x) \times f(x) == \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{g'(x) \times f(x)}{(g(x))^2}$$
>
> Vou multiplicar o primeiro termo por g(x) para ter o mesmo denominador e fica:

$\frac{f'(x).g(x)}{(g(x))^2} - \frac{g'(x).f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$ *que é igual a* $\frac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{(g(x))^2}$.

A professora interrompeu subtilmente o trabalho de Tiago sugerindo que reescrevesse alguma informação no quadro pois parecia confusa. Aproveitou a oportunidade para informar e apoiar reforçando a importância do rigor e da clareza na utilização da correta terminologia matemática. Prosseguiu convidando o Tiago a recapitular o trabalho apresentado para esclarecer possíveis dúvidas dos colegas da turma:

> Professora: Talvez fosse bom tu agora recapitulares, porque eu acho que eles estão-se a perder. Deixa-me só fazer aqui uma chamada de atenção particular. Assim, parece que só o x é que está elevado a -1 (apontando para o quadro onde está escrito $g(x)^{-1}$), portanto, o que o Tiago está a fazer é que todo o *g(x)* é que está elevado a -1, isto é $(g(x))^{-1}$. Também não podemos escrever o -1 pequeno, se depois parece uma função inversa e não é! Portanto, é todo o *g(x),* eu não vou mudar em todo o lado. Mas já sabem o *g* que está escrito, é *g(x),* tudo elevado a -1, é $\frac{1}{g(x)}$, certo? É preciso chamar à atenção para isto. Recapitula.
>
> Tiago: Recapitulando, $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\times(g(x))^{-1}$. Temos aqui um produto, então aplicamos a derivação do produto, ou seja, a derivada do primeiro vezes o segundo, mais a derivada do segundo vezes o primeiro. Isto é a mesma coisa que isto (apontando para o quadro onde está
>
> $f'(x)\left(g(x)\right)^{-1} + f(x)[\left(g(x)\right)^{-1}]'$) e para fazer a derivada de uma potência é a base vezes o expoente elevado ao expoente menos 1 vezes a derivada da base vezes f(x). Simplificando, chegamos aqui
>
> $$f'(x)\left(g(x)\right)^{-1} - f(x)\left(g(x)\right)^{-2}g'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$
>
> e depois para fazer uma soma algébrica entre duas frações, temos que reduzir ao mesmo denominador e ao reduzir, chegamos a isto aqui
>
> $$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

A professora interveio muito subtilmente em jeito de apoio:

> Professora: Ou seja…

E Tiago não hesitou, continuando o seu raciocínio:

Tiago: Só uma pequena chamada de atenção, que aqui a ordem (apontando para o quadro *f'(x)* $\times g(x)$ - *g'(x)*$\times f(x)$), ao contrário daqui (apontando novamente para o quadro (*f'(x).g(x)+f(x).g'(x)*), é muito importante manter por causa do sinal menos.

Enquanto Tiago regressou ao seu lugar, a professora terminou este momento de discussão perguntando à turma se havia duvidas e aproveitando o momento para informar e guiar a turma:

Professora: Há alguma dúvida?

Pronto, então eu vou só escrever aqui as fórmulas como estão no formulário, que é para se irem habituando a consultar o formulário e não terem dúvidas. E no formulário, já sabem que as letras, já estivemos a ver isso, são *u* e *v* no formulário de exame e portanto, é o formulário que a gente vai usar. Portanto, verificamos que a derivada de *u* vezes *v* é: *(u.v)'= u'v + uv'*. E há uma vantagem em fixar isto por ordem, exatamente por aquilo que o Tiago disse, para depois aqui no produto tanto faz, é uma soma, portanto o que eu sei é que é a derivada de uma vezes a outra e depois ao contrário. Portanto, tanto faz! Mas no quociente é uma diferença já não é tanto faz e portanto, se eu escrever por ordem aquilo que eu tenho é: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-u\,v'}{v^2}$. Portanto, é exatamente o mesmo produto, o que é em vez de ser uma soma é uma subtração. Pronto, e como esta é a última aula, só temos 5 minutos e ainda vão fazer um problema. (...) Portanto, vamos ter que treinar um bocadinho a aplicação das derivadas para depois as podermos aplicar em problemas mais interessantes. E portanto, querem fazer um dos problemas? Quem é que quer? Quem é que vai ao quadro?

Esta intervenção da professora procurou também esclarecer os alunos sobre alguns erros comuns, alertando a turma para a importância da ordem pela qual escrevem os fatores no numerador, na derivada do quociente. Na continuação, a professora desafiou os alunos a aplicarem a regra que acabaram de demonstrar, num exercício de aplicação para treinar. É a primeira aula onde teriam oportunidade de trabalhar $\left(\frac{u}{v}\right)'$:

Helder: Professora, o que é que é para fazer? (...)

Professora: (...) Podemos só ver este exercício de aplicação, é um exercício tipo, só para treinar! (...) A função é $y = \frac{3x+1}{(x-1)^2}$ e pretende-se escrever a expressão da função derivada.

Helder vai resolvendo a tarefa e a professora vai escrevendo no quadro algumas recomendações: “Obrigatório: Estudar página 76 (88 e 89) e página 78 (95 e 96)”. A professora convidou a turma a ouvir o Helder:

Professora: Ok! Então vamos só ouvir o Helder num instante, (...), podes!

Helder começou a explicação à turma mas cometeu um erro na derivação de $3x$. Escreveu o seguinte: $y' = \frac{(3x+1)'.(x-1)^2-(3x+1)\left((x-1)^2\right)'}{[(x-1)^2]^2} = \frac{3x(x-1)^2-(3x+1).\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[3x(x-1)-2(3x+1)]}{(x-1)^4} = \frac{3x(x-1)-2(3x+1)}{(x-1)^3}$. Luís intervém:

Helder: Davam-nos a função $y = \frac{3x+1}{(x-1)^2}$ e pediam a derivada da função. Como é um quociente, é a derivada do primeiro que é a derivada do numerador, que é *3x*, vezes....

Luís: *3x*? Então mas a expressão é *3x+1*.

Nesse momento, a professora poderia ter dado a resposta mas decidiu redizer a resposta do aluno:

Professora: Pois *3x*.

Onde um colega interveio, corrigindo a afirmação do Helder:

Luís: É *3*.

Helder: pois é *3*. (altera na demonstração da tarefa e continua a explicação) vezes o segundo que é o denominador menos, o numerador vezes a derivada do denominador sobre $[((x-1)^2)^2]$. Depois, aqui como é a potência da potência multiplicam-se os expoentes e fica o $(x-1)^4$. Como depois temos *x-1* nos dois termos, podemos pôr o *(x-1)* em evidência para depois poder cortar com a potência do denominador e fica (apontando para o quadro: $\frac{3(x-1)-2(3x+1)}{(x-1)^3}$). Depois dá para simplificarmos (e escreve $\frac{3x-3-6x-2}{(x-1)^3} = \frac{-3x-5}{(x-1)^3}$).

Helder prosseguiu com a apresentação explicando claramente a estratégia de resolução e apresentando uma resposta simplificada. Para terminar a discussão, surgiu uma intervenção da professora em jeito de sugestão onde a professora aconselha a turma a aproveitar o Carnaval para praticar as regras de derivação para se sentirem mais confiantes na resolução de problemas mais interessantes.

> Professora: Há alguma dúvida? Deixem-me só dizer mais uma coisa, que é a última aula antes do carnaval. Portanto, além de virem bonitos, espero que não hajam disparates no intervalo, eles vieram para o carnaval! Gostava só que tomassem nota que é bom começar a estudar(...)

Neste segmento, os desafios à professora prenderam-se sobretudo com a preocupação com a clareza e organização do discurso oral dos seus alunos para que todos pudessem acompanhar e perceber as ideias em causa. Mostra preocupação com a formalidade da comunicação escrita ao alertar para as questões relacionadas com a forma correta de usar a terminologia matemática. Foi visível a sua preocupação em alertar os alunos para erros comuns, explicando a incorreção para que estes não os cometam, o que decorre provavelmente da sua alargada experiência de trabalho na preparação de alunos para esta unidade.

5.4.2. Análise

Este episódio resulta da ação com carácter desafiante que a professora propõe aos alunos e que consiste na demonstração da derivada do produto de funções reais de variável real (no segmento 1) e na demonstração da derivada do quociente (no segmento 2). Estas questões não estão relacionadas com nenhuma tarefa previamente trabalhada pelos alunos e apresentavam um cunho investigativo.

Analisando o episódio quanto ao tipo de discussão, verificamos que os segmentos 1 e 2 consistem num momento de *aplicação* pois os alunos têm oportunidade de aprender novos conheci

Ao analisar o quadro das ações realizadas pela professora na condução da discussão neste quarto episódio, que se encontra dividido em dois segmentos, verificamos a ocorrência de sobretudo ações de apoiar/guiar, num total de nove, onde três destas ações dão origem a novas ações de apoio. Seguem-se seis ações para sugerir/informar, seis ações que convidam a turma, onde duas delas dão origem a novos convites não apenas no início da discussão, ao contrário dos episódios anteriores. E, por último, registam-se duas ações de desafio ao longo deste episódio. Estas ações de desafiar são fundamentais para colocar os alunos no centro da exploração da tarefa. A professora procura com elas que os alunos tenham a oportunidade de aprofundar e refletir sobre argumentos e trabalhar a justificação matemática através do recurso à comunicação oral, pondo um aluno como *pivot* do discurso matemático na sala de aula dirigindo-se para os restantes colegas. Estas ações de desafiar procuram também que os alunos, por dedução, cheguem às demonstrações das derivadas do produto e do quociente. A generalização não é um processo fácil e exige compreensão dos conceitos matemáticos em particular, capacidade de conexão entre conceitos e persistência na procura da resposta. As maiores movimentações acontecem em torno das ações de apoiar/guiar que originam cinco novas ações de sugerir/informar.

Tabela 6 – Análise das ações da professora na discussão do episódio 4 segundo os modelos utilizados.

Episódio 4		
		Ocorrências
Tipo de discussão	Enquadramento	Não há observação
	Conceptual	Não há observação
	Aplicação	Segmentos 1 e 2
Ações	1. Convidar	6
	2. Sugerir/ Informar	6
	3. Apoiar/ Guiar	9
	4. Desafiar	2
	Total	23

Analisando as ações desafiar da professora, observamos que uma delas teve origem numa ação de sugerir/informar e outra de uma ação convidar. Por sua vez, as ações de desafiar dão origem a duas ações distintas: uma ação convidar e uma de apoiar/guiar (ver figura 11). Especificamente no segmento 2, percebemos que as intervenções da professora são muito subtis e que ocorre um maior número de ações do tipo apoiar/guiar e sugerir/informar.

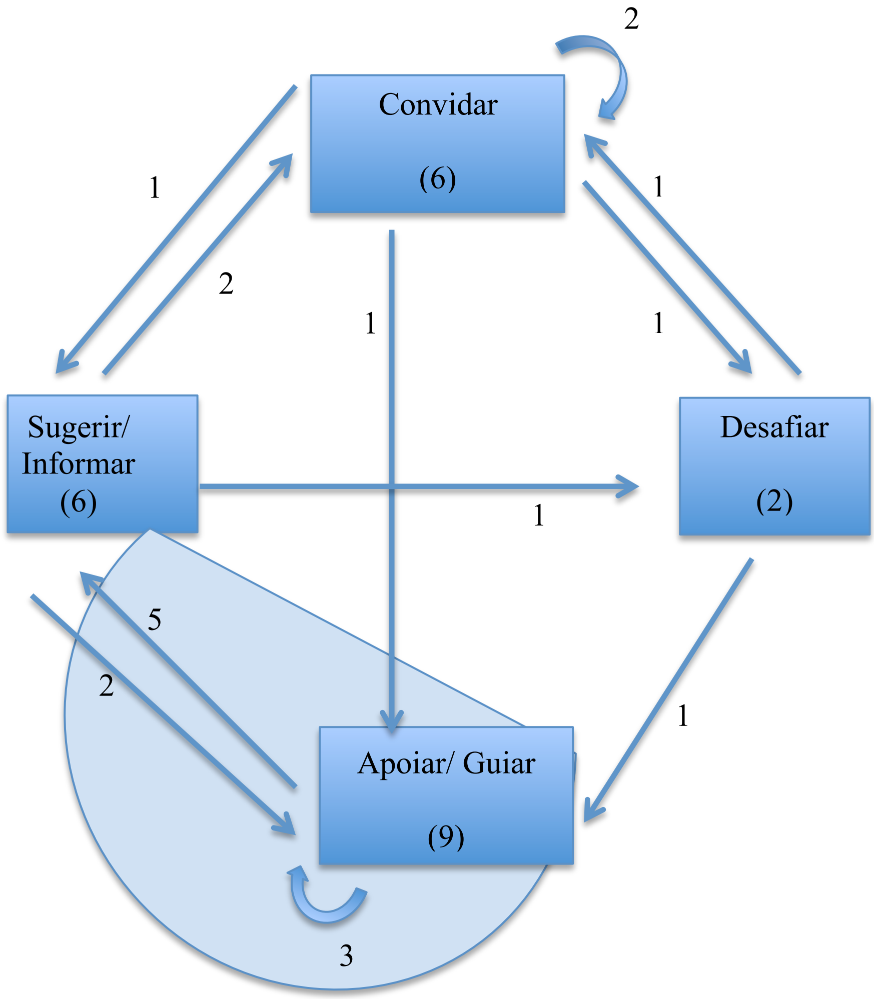


Figura 11 – Ações da professora na discussão do episódio 4.

Em resumo, verificamos que ambos os segmentos deste episódio consistem numa discussão de *aplicação* tendo em vista ajudar os alunos na construção de novo conhecimento matemático, através de situações problemáticas desafiantes. Analisando as ações da professora na condução da discussão matemática, verificamos que estas são sobretudo de apoiar/guiar, seguidas por ações de sugerir/informar e convidar. Ocorrem duas importantes ações desafiar que tendo em vista levar os alunos à construção de conhecimento matemático, demonstrando regras operatórias importantes.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Neste capítulo apresento uma síntese do estudo desenvolvido, onde recordo os seus objetivos, o quadro conceptual em que se apoia, a estrutura da unidade de ensino e a metodologia de investigação. De seguida, apresento as principais conclusões que emergem do estudo. Por fim, faço uma reflexão final sobre o trabalho realizado, que inclui uma reflexão pessoal sobre aprendizagens e dificuldades e onde formulo algumas recomendações e implicações.

6.1. Síntese do estudo

Sendo a comunicação e o discurso na sala de aula dimensões que estão a ganhar importância na prática profissional dos professores dado condicionarem o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem da Matemática e tendo como suporte as orientações presentes no programa do 12.º ano de Matemática A (DES, 2001) e recomendações das Normas do NCTM (2007), este estudo visa estudar o papel do professor enquanto facilitador de discussões matemáticas coletivas. Assim, o meu objetivo é estudar a comunicação nas aulas de Matemática, procurando compreender como se carateriza a condução de discussões coletivas produtivas em torno de tarefas de exploração e investigação matemática sobre o estudo das funções no 12.º ano, com recurso ao uso da calculadora gráfica. Com esta investigação pretendo dar resposta às seguintes questões de investigação:

1) Que tipos de discussão são promovidos pela professora durante a aula?

2) Que tipos de ações e com que frequência são realizadas pela professora na condução da discussão matemática?

3) Que problemas se colocam à professora no decurso das discussões em sala de aula?

O quadro conceptual em que esta investigação se apoia aborda quatro aspetos essenciais: (i) tarefas para promover a aprendizagem; (ii) o papel do professor na realização das tarefas; (iii) a comunicação matemática e a construção de significado; e (iv) as discussões coletivas. O primeiro aspeto pretende esclarecer a importância da seleção e diversidade das tarefas a utilizar na sala de aula para a promoção de discussões produtivas, evidenciando a diferente natureza que estas podem assumir assim como caraterizando os seus diferentes tipos. De seguida, apresento as diferentes fases que acompanham a implementação de tarefas, recorrendo sempre a literatura de investigação. O segundo aspeto visa salientar a importância fundamental que o professor tem na seleção e construção das tarefas que irá utilizar, tendo em conta a especificidade da turma e o contexto da sala de aula para proceder às adaptações educacionais necessárias. Para isso, é fundamental uma eficiente gestão curricular considerando as capacidades e dificuldades do grupo de alunos. Com o terceiro aspeto procuro fazer uma análise das investigações nacionais e internacionais que enfatizam a importância da comunicação matemática para promover a construção de significados matemáticos nos alunos. Esta secção apresenta diferentes definições do que se entende por comunicação matemática e quais as formas que pode assumir, passando para a análise dos diferentes tipos de comunicação, em função do objetivo pretendido. De seguida, é feita uma descrição do que é o significado matemático, explorando as formas de o obter e que habitualmente partem do estabelecimento de conexões entre ideias matemáticas e descrevendo a forma como se pode partilhar esses significados, por exemplo através da discussão. Ainda nesta secção apresento modelos pedagógicos que visam a abordagem de processos de raciocínio e argumentação na sala de aula entre professor e alunos. Por último, faço uma revisão dos trabalhos, nacionais e internacionais, realizados em torno das discussões matemáticas. Nesta secção apresento diferentes modelos pedagógicos propostos por vários autores, dando ênfase a dois deles em particular, que são utilizados como base de análise dos episódios das aulas observadas neste estudo. São eles, o modelo pedagógico com tipos de discussão matemática, proposto por Henning et al. (2012), e o modelo das ações do professor na condução de discussões matemáticas, proposto por Ponte et al. (2013).

A presente investigação incide no subtópico II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II* do tópico *Funções exponenciais e logarítmicas* desenvolvida no 12.º ano do ensino secundário. Na sua planificação, para além dos objetivos e indicações metodológicas acima mencionados, foram também consideradas as orientações curriculares constantes na brochura Funções 12 (ME-DES, 1997) e o quadro conceptual apresentado. A unidade de ensino é constituída por uma sequência de cinco tarefas de natureza investigativa intercaladas por blocos de aulas com vista à resolução de exercícios e de problemas de aplicação.

Com o intuito de compreender a natureza da comunicação matemática na sala de aula através do estudo das ações da professora na condução de discussões matemáticas durante a resolução de tarefas que motivem uma aprendizagem significativa e eficiente bem como conhecer os problemas que surgem à professora no decurso destas discussões, a metodologia utilizada neste estudo é de natureza qualitativa, seguindo o paradigma interpretativo. Esta investigação tem ainda por base a observação participante enquanto modalidade de investigação. A recolha de dados decorre numa turma do 12.º ano com um ambiente de trabalho produtivo e em que as tarefas são, maioritariamente, realizadas em pequenos grupos e posteriormente apresentadas à turma. Considerando os objetivos do estudo foi feita uma recolha documental relativa à realização da investigação: o horário da turma, relação de alunos da turma e tarefas propostas durante a unidade de ensino. Os dados são sobretudo por mim recolhidos na sala de aula, através de observação direta com recurso a registo áudio e vídeo das aulas da unidade de ensino, para posterior transcrição. Para além desses registos, foi ainda feita a transcrição das reflexões da professora, após as aulas observadas e foi mantido um diário de bordo das observações que pareceram mais relevantes, durante ou logo após as aulas que poderiam ser úteis para a investigação, assinaladas algumas ideias para as observações seguintes e feita uma análise inicial dos dados recolhidos.

A análise dos dados é realizada em duas fases, sendo a primeira fase realizada em simultâneo com a recolha de dados e a segunda fase, mais estruturada, após essa recolha. Dado que a natureza do estudo tem um propósito essencialmente descritivo e interpretativo, procurando relações entre os dados específicos, numa perspetiva indutiva, este não tem a finalidade de provar ou generalizar.

6.2. Principais conclusões

6.2.1. O desenvolvimento dos episódios

Em cada uma das situações descritas neste estudo a professora inicia o trabalho com um plano de ação bem definido. No primeiro episódio procura aprofundar o estudo das funções exponenciais de base superior a 1 usando uma tarefa de modelação matemática intitulada "Gripe asiática" (figura 4). Esta tarefa surge no início do tema, uma vez que pode estabelecer um elo entre uma situação da vida real e as funções exponenciais. Antecedendo a discussão coletiva da resolução da tarefa, no segmento 1, a professora promoveu uma revisão do conceito de função injetiva. Concluída essa fase de revisão, seguiu-se a apresentação e discussão coletiva das respostas dos alunos à tarefa (figura 4), dando origem ao segmento 2 da discussão.

Com esta tarefa a professora pretendia reforçar os conceitos de variável e de função e constitui uma oportunidade para rever as diferentes representações de uma função, destacando a utilidade de cada uma no contexto da situação. Desta forma, puderam ser exploradas algumas noções associadas ao conceito de função, como domínio, variável dependente e independente, monotonia e extremos. A tarefa foi ainda ao encontro de outro objetivo do programa, o uso de modelos matemáticos para representar situações da realidade e que consiste na "utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais" e "problemas de otimização" (DES 2001, pp. 4 e 6).

No segundo episódio a professora visava trabalhar a tarefa "Entre tangentes" (figura 7) procurando que os alunos investiguem se seria possível obter valores para k e a que transformem a reta tangente ao gráfico de f_1, em M e a reta tangente ao gráfico de f_2, em N, em retas perpendiculares, sendo a a abcissa dos pontos M, N e P e o parâmetro k um número real positivo.

Os alunos tiveram ainda a oportunidade de trabalhar conceitos matemáticos utilizando estratégias algébricas e recorrendo à calculadora gráfica. A tarefa era constituída por uma questão relativa a funções exponenciais e envolve cálculo diferencial na procura das equações de retas tangentes nos pontos de abcissa dados, utilizando parâmetros com valores reais, o que dificultou mais a sua resolução. A tarefa pretendia também reforçar o estudo da “função exponencial de base superior a um; o estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = a^x$, com $a > 1$” e as “regras operatórias de exponenciais e logaritmos” (DES 2001, p. 4), que constam do Programa oficial de Matemática A para o 12.º ano do ensino secundário.

No terceiro episódio a professora pretendia que a discussão coletiva ocorresse em torno da tarefa “Na linha com curvas” apresentada na figura 9. A discussão apresentada neste segmento resultou do trabalho de um dos grupos estabelecidos na turma. Nesta tarefa os alunos, recorreram à calculadora gráfica e à manipulação algébrica, para explorar famílias de funções. Com a tarefa, a professora procurou dar continuidade ao tema em estudo, aprofundando o trabalho realizado com os alunos. Tal como a tarefa anterior, esta tarefa pretendia também reforçar o estudo da “função exponencial de base superior a um; o estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = a^x$, com $a > 1$”, e as “regras operatórias de exponenciais e logaritmos” (DES 2001, p. 4), que constam do Programa oficial de Matemática A para o 12.º ano do ensino secundário.

O quarto e último episódio está dividido em dois segmentos distintos. No primeiro, a professora visava promover uma discussão coletiva em torno da demonstração da derivada do produto entre duas funções reais de variável real e no segundo promover uma discussão matemática sobre a demonstração da derivada do quociente também de duas funções. Neste episódio, a professora pretendia que os alunos vivessem a experiência de fazer e criar Matemática, realizando uma demonstração matemática. Esta tarefa resulta de uma proposta apresentada pelas orientações curriculares do programa de Matemática A do ensino secundário para o 12.º ano onde o objetivo é explorar “problemas de otimização” (DES 2001, p. 6).

Considerando os aspetos que ressaltam na concretização destes planos de ação pela professora, em articulação com o objetivo do estudo e as questões de investigação a que me proponho dar resposta, apresento seguidamente as principais conclusões referentes (i) aos tipos de discussão que são promovidas pela professora durante a aula; (ii) aos tipos de ações e com que frequência são utilizadas pela professora na condução da discussão matemática; e (iii) aos problemas que se colocam à professora no decurso das discussões em sala de aula.

6.2.2. Tipos de discussão promovidos pela professora

Ao longo dos quatro episódios analisados foram identificados os três tipos de discussão propostos no modelo de análise de Henning et al. (2012), *enquadramento*, *conceptual* e de *aplicação*. Ao longo de todo o segmento 1 do episódio 1 surge a discussão coletiva de tipo *enquadramento*, ao desenrolar-se toda a discussão em torno da revisão do conceito de injetividade e da definição de função. Por sua vez, o segmento 2 deste primeiro episódio resultou numa discussão de tipo *conceptual* tendo por base a primeira tarefa apresentada, que procurava a introdução de novos conceitos matemáticos relacionados com o estudo da monotonia e análise dos extremos de funções envolvendo funções exponenciais e logarítmicas e o reforço das diferentes formas de representar uma função, da análise do domínio e contradomínio de uma função, através da modelação matemática de uma situação da vida real.

Ao longo do episódio 2 foi identificado o tipo de discussão de *enquadramento* ao ser feito um primeiro momento de discussão em torno da revisão da propriedade sobre as retas perpendiculares. Seguiu-se um momento de discussão de tipo *conceptual* quando a professora procurou estabelecer uma conexão entre as revisões feitas e a tarefa apresentada. Por fim, surge um momento de discussão do tipo *aplicação* ao longo do desenvolvimento e discussão da resolução da tarefa.

Os episódios 3 e 4 foram ambos caraterizados por momentos de discussão de tipo *aplicação* pois visavam ajudar os alunos na compreensão da função exponencial de base superior a um e na aprendizagem das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = a^x$, com a > 1, assim como das regras operatórias de exponenciais e logaritmos que constam da unidade temática, através da exploração de uma tarefa de natureza mais complexa e desafiante.

A natureza das tarefas e o modo como foram realizadas, bem como a articulação com os objetivos curriculares, determinou e influenciou o tipo de discussão ocorrida. No início, quando o objetivo da professora era rever conceitos e o revisitar de estratégias anteriormente utilizadas surgem momentos de discussão de enquadramento. Quando a professora pretendia introduzir novos conceitos matemáticos, novas ideias e estratégias usou sobretudo momentos de discussão de tipo conceptual. Os momentos de discussão de tipo aplicação surgiram sobretudo com o objetivo de promover nos alunos as capacidades transversais de comunicação, de raciocínio, de argumentação e justificação de conjeturas e estratégias utilizadas, assim como o aprofundamento dos conceitos centrais no estudo do tema.

6.2.3. Tipos de ações da professora e frequência utilizada

O modelo de análise utilizado neste estudo sobre as ações do professor de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) não tem um carácter prescritivo, mas sim descritivo. Esta afirmação significa que o modelo não determina o que o professor deve ou não fazer, mas sim o que o professor pode fazer em situações diversas. Em determinadas situações pode ser adequado intervir com determinadas ações e noutras situações, pode ser mais apropriado usar outras ações bastante diferentes. No entanto, nos quatro episódios analisados verifica-se que as discussões evoluem em ciclos, marcados pelas várias questões das tarefas propostas ou por situações que, por vezes, surgem na discussão e que suscitam uma atenção específica e particular, situações que, no decorrer do estudo, foram designadas por segmentos.

À semelhança do estudo realizado por Ponte et al. (2013), constata-se que cada segmento se inicia usualmente com um convite e, perante as respostas dos alunos, a professora intervém sobretudo com ações de apoiar/guiar ou, por vezes, de desafiar. Quando as intervenções da professora são sobretudo para apoiar/guiar os seus alunos verificou-se que na condução da discussão a professora procurava essencialmente apoiar a participação dos alunos, sustentando e dando continuidade ao prosseguimento da discussão em curso. Por sua vez, quando as intervenções da professora eram sobretudo de desafio, observou-se que a condução da discussão esta procurava estender e aprofundar o conhecimento dos seus alunos, ao elevar o "nível" de reflexão em torno dos argumentos e justificações apresentados, ajudando na validação de conjeturas e respostas dos alunos. Verificou-se também que as ações de desafio da professora colocaram os alunos no centro da exploração da tarefa e, por conseguinte, como interlocutores principais das discussões matemáticas.

Ao analisar os quatro episódios verifica-se que os segmentos terminam com uma ação de sugerir/informar, sob a forma de síntese, que procura resumir os aspetos centrais trabalhados e que os alunos devem registar, podendo também identificar erros comuns habitualmente realizados pelos alunos, no sentido de os alertar para a sua verificação.

No final do episódio 1 a professora procurou reforçar o facto de, quando nada é dito em contrário, presume-se que o instante inicial é considerado t=0. E que quando nos referimos ao instante t=1 referimo-nos ao final do 1.º dia, se a variável t representar o tempo em dias. A primeira questão da tarefa 1 tinha levantado diferentes respostas por parte do grupo de alunos pois alguns consideraram o instante inicial t=0 e outros t=1. Por sua vez, no final do episódio 2 a professora procurou sintetizar a propriedade relativa a duas retas perpendiculares que os alunos provaram através da realização e discussão da tarefa 2 que é o facto do produto entre o declive de duas retas perpendiculares ser igual a -1. A professora aproveitou ainda a oportunidade para estabelecer a conexão com um tema que pretende voltar a abordar com os seus alunos – Análise vetorial –, relembrando que, quando duas retas são perpendiculares, os seus vetores diretores são normais. No final do episódio 3 a intervenção da professora foi reduzida e limitou-se a informar a turma sobre a questão central relativa à tarefa explorada e discutida. No final do episódio 4 a professora aproveitou a oportunidade para reforçar positivamente o trabalho e a discussão gerada pela turma e por salientar as caraterísticas pessoais de resiliência e persistência e paciência que se deve ter para se fazer uma demonstração matemática, caraterísticas essas demonstradas pelo grupo de trabalho.

As ações da professora são assim conduzidas por um objetivo principal que consiste em levar os alunos a aprender um assunto ou conceito matemático específico, aproveitando as ocasiões que surgem para rever e reforçar aprendizagens anteriores bem como aspetos de natureza transversal, como a capacidade de comunicar e justificar com clareza, ideias e raciocínios matemáticos. Tendo por suporte o modelo de análise de Ponte, Mata-Pereira e Quarema (2013) este estudo salienta o papel que as ações de apoiar/guiar têm no suporte e apoio ao desenvolvimento das ideias matemáticas pelos alunos da turma. Por sua vez, as ações de desafiar assumem um importante papel no aprofundamento e extensão da compreensão das ideias matemáticas que são o foco da aula.

Este estudo evidencia que um foco de análise específico nas ações da professora, identificando os problemas com que se depara na condução da aula, permite identificar a estratégia geral seguida, bem como o sucesso ou insucesso na sua concretização. Sem minimizar a importância da preparação prévia (Stein et al., 2008), evidencia também a importância da professora ser capaz de lidar com situações imprevistas como as que ocorreram ao longo dos quatro episódios analisados, nomeadamente, quando o interlocutor principal não se conseguiu exprimir com clareza; quando os alunos apresentaram resoluções incorretas à tarefa proposta; quando os alunos utilizaram estratégias não previstas na planificação inicial; quando os alunos intervieram na discussão mas essa intervenção não ocorreu no momento adequado, pois adicionou uma nova questão; quando a tecnologia não cooperou; e quando os alunos não participaram na discussão.

Fazendo uma análise reflexiva global das observações em torno das ações promovidas pela professora ao longo dos episódios, verifica-se que o nível dos alunos e a natureza das tarefas determina o tipo de intervenção por parte da professora. Quando a discussão ocorre próximo do início de um novo tema ou quando os interlocutores principais são alunos pouco autónomos, maior é a necessidade que a professora sente em apoiar e guiar a discussão matemática utilizando. Nestes casos as ações de desafiar não surgem ou surgem mais raramente. Quando a discussão ocorre numa fase intermédia ou mais no final da abordagem de um tema e quando os alunos envolvidos na discussão são mais autónomos, a professora, para além de utilizar ações de apoiar/guiar, usa com alguma frequência ações com o intuito de desafiar os alunos.

6.2.4. Problemas que se colocam à professora no decurso das discussões

Na concretização dos seus planos de ação, a professora depara-se com diversos problemas e constrangimentos, que em tudo são semelhantes aos identificados pelo estudo realizado por Ponte et al. (2013), alguns dos quais surgindo de forma recorrente, como (i) a seleção de um aluno para iniciar e contribuir para a discussão, (ii) o modo de agir quando um aluno questiona ou faz uma conjetura, (iii) o modo de agir perante diferentes opiniões e estratégias, (iv) decidir se deve, ou não, prosseguir com a discussão, (v) aprofundar, ou não uma resolução que os alunos dão por terminada, ou (v) o modo de agir perante uma situação de impasse, uma resolução incorreta ou uma explicação pouco clara.

Analisando em detalhe os quatro episódios, destaco de seguida, os problemas e constrangimentos que surgiram em cada um dos episódios, assim como a estratégia de ação da professora, perante cada um. No episódio 1 foram identificados cinco problemas: (i) decidir qual o modo de rever um conceito [injetividade] que os alunos aparentemente tinham esquecido. A professora decidiu lançar a discussão à turma procurando contribuições de outros alunos; (ii) decidir qual o aluno para iniciar a discussão. Aqui, a professora decidiu escolher o aluno que estava mais junto dela e que é habitualmente muito participativo; (iii) como agir perante a incapacidade de um aluno explicar uma ideia com clareza. Perante esta situação a professora decidiu não responder de imediato, relançou a mesma questão à turma na procura de mais e diferentes contribuições. Mas nenhum aluno conseguiu explicar-se com clareza. Decidindo partir para a reconstrução conjunta do conceito utilizando duas estratégias distintas: algébrica e gráfica. (iv) como agir quando o interlocutor principal não se exprime com clareza e traz para a discussão um aspeto adicional inesperado. A professora não esperava que para além do conceito de injetividade estar esquecido também o conceito de função estava confuso. Contudo, apesar de este problema ser ligeiramente parecido com o ponto (iii) a professora teve uma intervenção diferente. Decidiu ter o papel principal ao focar a atenção de toda a turma na representação gráfica de uma função injetiva e não injetiva, como ponto de partida. Esta abordagem permitiu à turma avaliar a resposta do aluno e mostrar representações distintas para identificar uma função injetiva.

Quanto ao episódio 2 foram identificados cinco problemas: (i) decidir se deveria esperar que os alunos terminassem a preparação da apresentação. A professora decidiu dar dez minutos adicionais para terminarem e posteriormente dar início à discussão. (ii) como agir quando os interlocutores principais são demasiado sucintos e pouco claros na discussão da tarefa. Aqui, a professora decidiu recorrer a várias intervenções de apoio com vista a guiar, complementar, "dar substância" às intervenções dos alunos. (iii) como convidar e desafiar os alunos a participarem na discussão. Decidindo lançar o desafio oralmente à turma para promover as suas participações. (iv) como agir quando apenas um aluno intervém na discussão. A professora decidiu recolocar o desafio à turma na procura de mais contribuições. (v) como agir quando surgem intervenções pouco claras e os restantes alunos parecem confusos. A professora decidiu pedir aos intervenientes principais que complementassem a discussão recorrendo ao quadro. Aqui pediu-lhes que escrevessem com clareza e pede para que repitam os seus raciocínios utilizando outras palavras. Contudo, também agiu redizendo a informação transmitida pelos alunos, colocando questões mais desafiantes para promover um maior esclarecimento à turma.

No episódio 3 surgiram três problemas: (i) como agir perante questões técnicas imprevistas. A professora conseguiu ultrapassá-las contudo poderia ter tido necessidade de recorrer a um plano de ação alternativo. (ii) como agir perante a falta de clareza nas explicações dadas. Aqui a professora decidiu, numa das vezes, ser ela a dar a resposta. Numa outra situação colocou uma nova questão à turma para promover a reflexão sobre a tarefa. E, numa outra oportunidade redisse o argumento do aluno na expectativa da turma validar a resposta do aluno. (iii) como agir perante a fraca participação da turma na discussão. A professora decidiu colocar mais questões e mais desafiantes, focando a atenção da turma nos aspetos relevantes da tarefa.

No episódio 4 apenas surgiu um constrangimento: como agir perante intervenções dos alunos matematicamente pouco formais. Perante esta situação a professora decidiu acompanhar a discussão lançando apontamentos que procuravam repetir as ideias dos alunos mas utilizando terminologia correta reformulando a linguagem utilizada pelos alunos na procura de um discurso matemático mais formal. Assim, verificamos que perante todos os problemas com que se depara, a principal estratégia usada pela professora é procurar que os alunos reflitam sobre as suas ideias e estratégias na resolução das tarefas propostas, introduzam novas ideias matemáticas, aprofundem ideias e conceitos em discussão ou avaliem conjeturas e ideias apresentadas pelos colegas. As suas ações passam frequentemente por reformular questões já colocadas, solicitar a participação de outros alunos ou da turma para avaliarem as ideias em discussão e por retomar questões anteriormente colocadas, mas que não considerou adequado serem discutidas no momento em que apareceram.

Ao surgirem problemas relacionados com a falta de clareza, rigor e organização do discurso oral, a professora procurou, em algumas ocasiões, redizer as frases utilizadas e as ideias transmitidas pelos alunos utilizando um discurso matematicamente mais formal, correto, rigoroso e com a sofisticação esperada de alunos do 12.º ano do ensino secundário.

Muitas das decisões e ações tomadas pela professora envolveram alguma flexibilidade na planificação prevista, tendo como principal objetivo que os seus alunos otimizassem as discussões e aprendizagens em torno de conceitos-chave relativos ao tema em estudo.

6.3. Reflexão final

6.3.1. Reflexão pessoal

A realização desta investigação contribuiu muito significativamente para o meu desenvolvimento enquanto professora e investigadora. Foi um estudo que me interessou essencialmente pela reflexão que me levou a fazer sobre a prática letiva e pela contribuição na ampliação do meu conhecimento na área da Educação Matemática. Ainda que os resultados deste estudo, pela sua natureza assumidamente exploratória com vista à caraterização das discussões não possam ser generalizados, espero que possam contribuir, tanto para professores como para investigadores, para um conhecimento mais aprofundado do papel do professor na condução de discussões matemáticas coletivas.

De sublinhar também que este estudo reforça a importância da realização de uma reflexão sistemática sobre a prática letiva com vista ao seu contínuo aperfeiçoamento, pois é minha convicção de que a investigação sobre a prática promove a construção de conhecimento profissional (Ponte, 2001).

Para os alunos, as tarefas de natureza investigativa propostas nesta unidade, proporcionaram momentos de discussão e reflexão que parecem ter contribuído para a aprendizagem do tema funções exponenciais e logarítmicas. Também parecem ter contribuído para aumentar a motivação dos alunos, uma vez que mesmo os alunos mais fracos se empenharam nas explorações e apresentações propostas ao longo de todo este estudo.

Para a comunidade de professores de Matemática, espero que este estudo proporcione um maior aprofundamento do conhecimento disponível sobre o papel do professor na condução de discussões matemáticas que se podem realizar a propósito do estudo das funções no 12.º ano do ensino secundário. Este estudo deixa como contributo uma sugestão de planificação para esta unidade de ensino que deve ser ajustada face às especificidades da turma em questão.

Ao longo do estudo fui sentindo pequenas dificuldades que se foram resolvendo através da planificação e realização da recolha e tratamento dos dados. Contudo, se tivesse de assinalar a maior dificuldade que senti na realização deste estudo diria que foi a conciliação da realização do estudo com a minha vida profissional. O facto de estar a trabalhar no último ano letivo noutra escola, com um programa diferente uma vez que se trata de uma escola internacional, e noutra área geográfica, dificultou muitas vezes a progressão do trabalho na escrita da dissertação em si. Mas, a redação deste capítulo mostra que, com persistência e organização, tudo é possível. Sinto que toda a leitura realizada em torno da literatura pertinente, a observação das aulas e as reflexões feitas em torno deste processo me ajudaram enquanto profissional a tomar decisões mais conscientes em sala de aula. Ou seja, me ajudaram a tomar decisões conscientes das suas repercussões que possam maximizam a aprendizagem dos meus alunos em função dos objetivos curriculares propostos.

6.3.2. Recomendações e implicações

O presente estudo, para além de caraterizar e procurar compreender como se desenvolvem alguns aspetos da prática do professor na condução de discussões matemáticas coletivas, permite também colocar novas questões que poderá ser interessante tentar explorar. Considero-as agrupadas em três grandes áreas. A primeira prende-se com a realização de estudos em aulas conduzidas com outros objetivos utilizando tarefas de diferente natureza, por exemplo tarefas (a) de investigação de cunho mais geométrico, (b) onde se dê mais expressão à fase de justificação e validação de resultados, e (c) de modelação de situações matemáticas.

A segunda questão remete para o estudo dos diversos estilos, relativamente ao modo de conduzir discussões matemáticas coletivas, por professores com e sem experiência de ensino, relacionando-os com as suas concepções da Matemática e do currículo e em diferentes níveis de ensino – do ensino primário ao universitário.

A terceira e última questão tem por foco estudos que podem procurar identificar os problemas e constrangimentos que se colocam ao professor na condução de discussões particularmente produtivas na consecução dos objetivos curriculares propostos nos vários níveis de ensino.

Os aspetos salientados nas conclusões sugerem também que a calculadora gráfica permitiu o confronto constante das várias formas de representar funções, o que parece ter contribuído para uma melhor compreensão das funções exponenciais e logarítmicas e das duas propriedades.

Nos episódios relatados neste estudo, as apresentações orais parecem ter contribuído para o desenvolvimento nos alunos das capacidades de comunicar matematicamente e de raciocinar justificando os processos utilizados. Ao mesmo tempo, as discussões e reflexões sobre as tarefas parecem ter contribuído para a clarificação do pensamento intuitivo e para a sua formalização.

Os quatro episódios relatados neste estudo referem-se à construção coletiva da compreensão em torno do tópico das funções exponenciais e logarítmicas, salientando a importância da aposta em tarefas de natureza investigativa e mais desafiadoras. Este estudo reforça assim a perspetiva que a resolução de tarefas de caráter investigativo contribui para o desenvolvimento do significado e raciocínio matemático dos alunos. Em futuras investigações, seria interessante considerar as discussões relativas a outros níveis de ensino e tópicos matemáticos e no ensino secundário ao estudo de outros tipos de funções e, considerando também alunos com diferente nível de desempenho.

REFERÊNCIAS

Akkus, R., & Hand, B. (2010). Examining teachers' struggles as they attempt to implement dialogical interaction as part of promoting mathematical reasoning within their classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*(4), 975-998.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 5-24). Lisboa: SPCE.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(2), 125-153.

Brown, C. & Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (209–242). New York, NY: Macmillan.

Christiansen, B., & Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. Howson, & M. Otte (Orgs.), *Perspective on mathematics education*. Dordrecht: D. Reidel.

Cobb, P., Boufi, A, McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 258–277.

Connolly, P., and Vilardi, T. (1989). *Writing to learn mathematics and science*. New York, NY: Teachers College Press.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

DES (2001). *Matemática A – Programas 10.º, 11.º e 12.º anos*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

Ernest, P. (1998). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. Em P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp.25-48). Lisboa: APM.

Fennema, E. & Franke, M. (1992). Teachers" knowledge and its impact. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, NY: Macmillan.

Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49) Lisboa: Projecto MPT e APM.

Henning, J. E., McKeny, T., Foley, G. D., & Balong, M. (2012). Mathematics discussions by design: Creating opportunities for purposeful participation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*, 453-479.

Hiebert, J. (1992). Reflection and communication: Cognitive considerations in school Mathematics reform. In W. Secada (Ed.), *International Journal of Educational Research* (pp. 439-456). Oxford: Pergamon.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation*. Newbury Park, CA: Sage.

Lampert, M. (1988). What can research on teacher education tell us about improving quality in mathematics education? *Teaching and Teacher Education*, *4*, 157-170.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, NJ: Yale University Press.

Lampert, M., & Cobb, P. (2003). *Communication and Language*. In Jeremy Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 237-249). Reston VA: NCTM.

Lobato, J., Clarke, D., & Ellis, A. B. (2005). Initiating and eliciting in teaching: A reformulation of telling. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(2), 101-136.

ME-DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

ME-DES (1997). *Funções 12.º ano*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

ME-DES (1992). *Programa de Matemática A do ensino secundário*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Menezes, L. (2005). Desenvolvimento da comunicação matemática em professores do 1.º ciclo no contexto de um projecto de investigação colaborativa. In A. Boavida et al. (Eds). *Actas do XVI SIEM* (pp. 349-365). Setúbal: APM.

Menezes, L. (1995). *Concepções e práticas de professores: Contributos para o estudo da pergunta*. Lisboa: APM.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. S. Francisco, CA: Jossey Bass.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC.

Moll, J. (1996). *Alfabetização possível: Reinventando o ensinar e o aprender.* Porto Alegre: Mediação.

Morgan, D. L. (1998). *Planning focus group*. Thousand Oaks, CA: Sage.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: IIE e APM (publicado originalmente em inglês em 1989).

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: IIE e APM. (publicado originalmente em inglês em 1991).

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas: Um aspecto novo do método matemático.* Lisboa: Gradiva (publicado originalmente em inglês em 1945).

Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática*, 85, 36-42.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES-ME.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2001). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante*, *7*(1), 3-32.

Ponte, J. P., Nunes, C. C., & Quaresma, M. (2012). Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem. In A. C. Silva, M. Carvalho & R. G. Rêgo (Eds.), *Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes* (pp. 49-74). Cuiabá: UFMT.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, *7*(2), 41-70.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 1*, 65-86.

Ponte, J. P.; Mata-Pereira, J.; Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22*(2), 55-81.

Ponte, J., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Pugalee, D. K. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of student's problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 55 (1-3), 27-47.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age.

Kounin, J. (1970). *Diacipline and group management in classroom*. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2.º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de Investigação* (pp. 83-106). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Schoenfeld, A. (1998). Toward a theory of teaching in context. *Issues in Education*, 1, 1-94.

Schoenfeld, A. H. (2000). Examining the complexity of teaching. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3).

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 205-233.

Siegel, M., & Barosi, R. (1996). Demystifying mathematics education through inquiry. In P. Ernest (Ed.) *Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematical education* (pp. 201-214). London: Falmer.

Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (1998). Continuing the search. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain* (pp. 524-548). Dordrecht, Kluwer.

Silver, E. A. & Smith, M. S. (1996). Building discourse communities in mathematics classrooms: A worthwhile but challenging journey. In *P. Elliott (Ed.). Communication in mathematics, K-12 and beyond* (pp. 20-28). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Skovsmose, O. (2000). *Cenários para investigação*. Bolema, *14*, 66-91.

Smith, J. P. (1996). Efficacy and teaching mathematics by telling: A challenge for reform. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 387–402.

Stake, R. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Steffe, L. P. & D'Ambrosio, B. (1995). Toward a Working Model of Constructivist Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 146-159.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313-340.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-202). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Yackel, E., & Cobb, P. (1998). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* *27*(4), 458-477.

Yackel, E. (2002). What can we learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior 21,*423-440.

ANEXOS

ANEXO 1

Exmº Sr. Encarregado de Educação
da turma 12.º X da ESXX

No âmbito do Mestrado em Educação - área de especialização em Didática da Matemática que frequento no Instituto de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa orientado pelo Professor Dr.º João Pedro Mendes da Ponte, venho por este meio solicitar autorização para a assistência e filmagem das aulas e a aplicação de um questionário e/ou pequena entrevista a alguns alunos da turma do seu educando , com o intuito de desenvolver o meu trabalho de investigação.

O projeto não implicará qualquer alteração no desenvolvimento normal previsto para as aulas e visará somente observar o trabalho desenvolvido pelos alunos e professora no campo da comunicação matemática, mais especificamente tendo como foco as discussões coletivas na sala de aula. Prevê-se que a filmagem das aulas decorra durante o tema II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II* na unidade de ensino sobre o tópico *Funções exponenciais e logarítmicas.*

As filmagens apenas serão visionadas por mim enquanto professora/ investigadora para trabalhar os vários argumentos dados pelos alunos e desta forma desenvolver a minha pesquisa que incide no tema da comunicação e discussão na sala de aula gerada pelos alunos e professora/alunos em torno das tarefas de investigação desenvolvidas.

No final, caso seja necessário esclarecer algum raciocínio feito pretendo aplicar um questionário e /ou realizar uma pequena entrevista a alguns dos alunos da turma.

Não pretendo de qualquer forma perturbar o normal funcionamento da sala de aula. Muito pelo contrário gostaria de estimular o raciocínio matemático e o poder de argumentação dos alunos assim como estimular a aprendizagem de caráter investigativo e exploratório que são ênfase no Programa de Matemática.

Agradeço, desde já, toda a atenção prestada à minha solicitação.

Lisboa, 20 de novembro de 2013

Com os melhores cumprimentos,

A professora: Sílvia Dias

✂__.__

Eu ____ encarregado de educação do aluno/a ____ n.º _____ da turma 12.º X venho por este meio autorizar/ não autorizar (por favor riscar o que não interessa) a gravação vídeo das aulas de Matemática.

Lisboa, ____/_____/2013

ANEXO 2

Tarefa 1 - Gripe asiática

1. Na cidade de Ulam Bator surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi dada pela formula $\boldsymbol{P(t) = e^{0,4t-0,01t^2}}$, onde $\boldsymbol{P}$ representa a % de pessoas doentes e $\boldsymbol{t}$ o tempo em dias.

a) Qual era a percentagem da população doente quando se começou o estudo da epidemia?

b) Quando foi o pior momento da epidemia? Qual era a percentagem de doentes?

c) A epidemia considera-se erradicada quando a percentagem de doentes for inferior a 1%. Quando aconteceu isso?

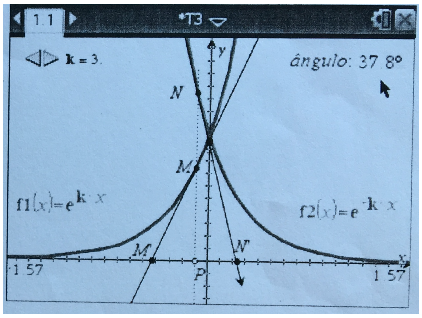
d) No 15º. dia, qual é a probabilidade do presidente da câmara estar doente?

(adaptado de uma tarefa proposta na brochura Funções 12 da DES, 1997)

ANEXO 3

Tarefa 2 - Entre tangentes

Considera as famílias de funções $f_1(x) = e^{kx}$ e $f_2(x) = e^{-kx}$, sendo o parâmetro k um número real positivo.



Considera três pontos M, N e P com a mesma abcissa a, situados, respectivamente, sobre os gráficos das funções f_1, f_2 e sobre o eixo das abcissas.

A tangente ao gráfico de f_1, em M, intersecta o eixo das abcissas em M' e a tangente ao gráfico de f_2, em N, interseta o eixo das abcissas no ponto N'.

1. Será possível obter valores para k e a que transformem as duas tangentes em retas perpendiculares?

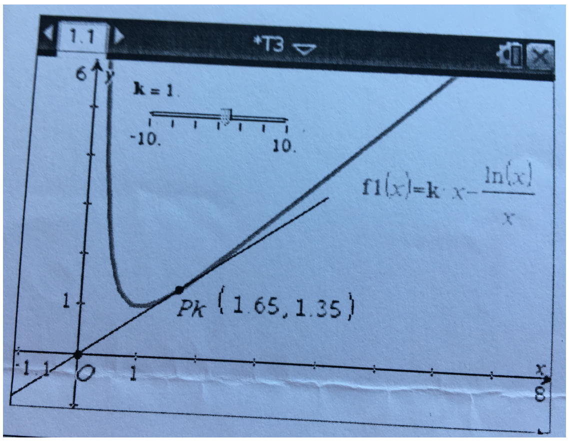
(adaptado de uma tarefa proposta pelo grupo T3 da APM)

ANEXO 4

Tarefa 3 - Na linha com curvas

Considera a família de funções $f_k(x) = kx - \frac{\ln(x)}{x}$, sendo o parâmetro k um número real.

Determina o lugar geométrico dos pontos P_k pertencentes ao gráfico da função que, ao variar k, verificam a condição da tangente ao gráfico nesses pontos passar pela origem.



1. Estabelece uma conjetura sobre o lugar geométrico pretendido.
2. Demonstra a tua conjetura.

(adaptado de uma tarefa proposta pelo grupo T3 da APM)