UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

O (Novo) Programa de Matemática do Ensino Básico e o desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico Triângulos e quadriláteros

Um estudo em turmas piloto do 7.º ano

Maria Alexandra Cordeiro Rolo Mendes Pinheiro Janela

Mestrado em Educação
Área de especialização em Didáctica da Matemática

2012

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

O (Novo) Programa de Matemática do Ensino Básico e o desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico Triângulos e quadriláteros

Um estudo em turmas piloto do 7.º ano

Maria Alexandra Cordeiro Rolo Mendes Pinheiro Janela

Dissertação orientada pela Professora Doutora:
Susana Paula Graça Carreira

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação
Área de especialização em Didáctica da Matemática

2012

Resumo

O desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos constitui o foco da presente investigação. Para melhor compreender, aprofundar e concretizar o objecto de investigação, formulei linhas orientadoras, que se relacionam entre si: (i) o modo como as tarefas e a sua exploração ajudam os alunos no desenvolvimento do raciocínio geométrico e na compreensão das propriedades e das relações das figuras geométricas; (ii) o papel do Geogebra como ferramenta de apoio aos processos de raciocínio; e (iii) a influência e contributo da sequência organizada de tarefas do tópico Triângulos e Quadriláteros no desenvolvimento do raciocínio geométrico.

O quadro teórico assenta em três eixos principais que orientam a análise dos dados e são tidos em conta nas conclusões do estudo: a) o *raciocínio geométrico*, com ênfase na sua caracterização e no papel da visualização nesse raciocínio; b) os *ambientes de geometria dinâmica*, salientando as suas potencialidades e o seu papel enquanto ferramenta de apoio ao processo de ensino e de aprendizagem da Geometria; e c) o *significado matemático*, numa perspectiva de aprendizagem, em que se abordam aspectos relacionados com o significado, a compreensão e as representações.

A metodologia adoptada segue uma abordagem qualitativa e interpretativa. A recolha de dados foi feita em duas turmas piloto do 7.º ano de escolaridade, no âmbito da experimentação do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007), durante o tópico Triângulos e Quadriláteros, sendo estudadas as duas turmas e, de forma mais aprofundada, duas alunas de cada turma.

Os resultados mostraram que a sequência organizada de tarefas e a maneira como foram desenvolvidas em sala de aula, envolvendo a interacção entre os alunos, entre as professoras e os alunos e os momentos de discussão, foram fundamentais para a compreensão dos conceitos geométricos envolvidos. Por outro lado, a utilização dos ambientes de geometria dinâmica possibilitou a interacção dos alunos com desenhos dinâmicos. Este processo contribuiu para o desenvolvimento da capacidade de visualização e do raciocínio espacial e, consequentemente, do raciocínio geométrico.

Palavras-chave: Geometria; raciocínio geométrico; ambientes de geometria dinâmica; compreensão; aprendizagem.

Abstract

The development of students' geometrical reasoning is the focus of this research. To better understand, deepen and materialize the object of research, I have formulated the following interrelated guidelines: (i) how the proposed tasks and their exploration help students in developing geometrical thinking and understanding geometric properties and relationships in geometric figures; (ii) the role of GeoGebra as a tool to support the process of reasoning, and (iii) the influence and contribution of an organized sequence of tasks for the topic Triangles and Quadrilaterals in the development of geometrical reasoning.

The theoretical framework is based on three main principles that guide the analysis of data and are taken into account in the conclusions of the study: a) *geometrical reasoning*, with emphasis on its characteristics and the role of visualization in this reasoning; b) *dynamic geometry environments*, highlighting its potential and its role as a tool to support the teaching and learning of geometry; and c) *mathematical meaning* from a learning perspective, which addresses aspects related to meaning, understanding and representations.

The methodology follows a qualitative and interpretative approach. Data collection was done in two pilot classes of grade seven, under the experimental curriculum of mathematics for middle school (Ministério da Educação, 2007), in the topic of Triangles and Quadrilaterals, where both the two classes were studied and, in more depth, two students from each class.

The results showed that the organized sequence of tasks and the way these were implemented in the classroom, involving interaction between students, between teachers and students and moments of collective discussion, were fundamental to the understanding of the geometry concepts involved. Moreover, the use of dynamic geometry environments enabled students' interaction with dynamic drawings. This process contributed to the development of students' visualization skills and spatial reasoning, and therefore of their geometrical reasoning.

Keywords: Geometry; geometrical reasoning; dynamic geometry environments; understanding; learning.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Susana Carreira, pelo empenho, pela forma responsável e crítica com que acompanhou a realização deste estudo, pelas discussões sempre muito profícuas, encorajadoras, com as quais tenho aprendido imenso e, no fim, ficava sempre com um sorriso nos lábios e uma satisfação enorme, por terem sido momentos muito estimulantes e enriquecedores, pelo incentivo constante e, pelo material bibliográfico que me disponibilizou, sem o qual não teria sido possível realizar este estudo.

À minha "encarregada de educação", que sempre acreditou em mim, pela disponibilidade e incentivo permanente para levar até ao fim este trabalho e, acima de tudo, pela amizade.

À Graziela e à Cristina pela disponibilidade, pela preciosa ajuda, pelos momentos de discussão e por me terem permitido participar no seu trabalho e nas reflexões ao longo do ano. Foi, sem dúvida, um grande ensinamento.

Aos meus pais, sempre, pela ternura e pelo amor.

Ao Filipe, a quem dedico a minha tese de mestrado com muito amor e carinho, pelo apoio, incentivo, carinho que sempre me deu, pelo tempo que disponibilizou com ternura, apesar de não o ter, para discutir e ler com o seu olhar exterior este trabalho e pelos seus contributos sempre oportunos e pertinentes. Por me ter ensinado que tudo o que parece longe, afinal está perto.

Índice Geral

Índice das Figuras

Índice dos Quadros

Capítulo I

Introdução

Este capítulo apresenta as motivações e as circunstâncias que me estimularam a fazer este trabalho; também aqui formulo o problema e as questões deste estudo, bem como descrevo a estrutura organizativa mediante a qual caminharei no sentido de encontrar possíveis respostas para as questões de investigação.

1.1 Motivações

Caminhante, não há caminho
Faz-se o caminho ao andar.
António Machado

Ao longo da minha carreira de professora de Matemática, tenho mantido um interesse particular na análise e compreensão da forma como os alunos pensam, identificam e interpretam aquilo que constroem. Este interesse tem-me permitido levantar muitas questões e criou uma vontade crescente de estudar os mecanismos que lhe estão subjacentes. Esta vontade estende-se também ao desenvolvimento de uma actividade matemática em sala de aula que facilite o envolvimento dos alunos na experimentação e exploração, na procura de generalizações, na elaboração de conjecturas e na resolução de problemas. Pretendo, portanto, perspectivar uma actividade matemática em que os alunos participem activamente na formulação e compreensão das ideias e dos conceitos matemáticos em estudo. Com este enquadramento, surgem duas motivações fundamentais para o desenvolvimento do presente estudo, que explicito de seguida.

A primeira é combater de forma intransigente e frontal a sensação generalizada, expressa abertamente por pais, professores (incluindo de Matemática) e políticos, de que os alunos, hoje, sabem menos Matemática. Defendo, pelo contrário, que os alunos sabem mais e melhor Matemática.

Hoje é exigido ao aluno muito mais no que diz respeito ao saber matemática. Saber matemática já não se resume a treinar exercícios de forma isolada, a reproduzir procedimentos de cálculo ou demonstrações, já nem se limita a um conhecimento memorizado de termos e conceitos matemáticos. Actualmente, para que o aluno consiga desenvolver determinada tarefa, ele está obrigado a mobilizar não só os conhecimentos necessários, como a desenvolver a capacidade de os identificar e utilizar perante situações concretas. A "aquisição" de conhecimentos é enquadrada numa perspectiva que valoriza o desenvolvimento de capacidades de pensamento e de atitudes face à Matemática.

Este quadro de aprendizagem contrasta com o ambiente em que, há 30 ou 40 anos, os alunos se limitavam a reproduzir o que memorizavam de uma forma estática e sem ligação entre os diferentes assuntos e resolviam exercícios rotineiros de modo a mecanizar os procedimentos de cálculo. Nos dias de hoje, os alunos dificilmente aceitam uma prática desta natureza. Os desafios que a sociedade lhes coloca, no seu dia-a-dia, fá-los ter consciência de que necessitam de desenvolver um conjunto de conhecimentos e de capacidades para conseguirem responder-lhes. Por isso, dificilmente aceitam ser sujeitos passivos, em que recitam e replicam o que o professor diz. Gostam de ser activos na sala de aula, apreciam que lhes proporcionem situações e problemas significativos para explorarem e raciocionarem, discutirem e apresentarem ideias. Sentem que assim aprendem melhor.

Nesse sentido, é difícil aceitar que o insucesso em Matemática é inerente à própria disciplina. É frequente ouvirmos que o insucesso em Matemática é motivado por um ambiente socio-cultural e económico desfavorecido ou é reflexo da falta de pré-requisitos ou da incapacidade, preguiça e falta de atenção dos alunos. Questiono se estas duas últimas causas são verdadeiras e completas, as verdadeiras razões porque acontecem e por que motivo há este aparente alheamento dos alunos. Especialmente porque se o aluno for o caminhante do verso de António Machado, então o caminho que ele faz ao andar, é aquele que o professor lhe proporciona.

É este sentimento e preocupação constante que me tem motivado, enquanto professora, a procurar proporcionar uma actividade matemática em sala de aula centrada no aluno e, por outro lado, a analisar e compreender a forma como os alunos pensam e raciocinam, bem como as ideias que constroem perante aquilo que lhes é proposto.

A segunda razão está relacionada com a actividade que desenvolvi entre 2005 e 2010, quando fiz parte da equipa de Matemática da Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, departamento do Ministério da Educação.

Neste período, o ensino da Matemática mereceu a maior atenção do Ministério da Educação com o lançamento, no início de Junho de 2006, do Plano de Acção para a Matemática (PAM), entre 2006 e 2009, que teve como principal objectivo promover o sucesso dos alunos em Matemática, através da melhoria do ensino e da aprendizagem nesta disciplina. Este Plano surge na sequência dos resultados insatisfatórios atingidos pelos alunos portugueses no PISA 2003 e nos Exames Nacionais de Matemática do 9.º ano, de 2005.

O PAM foi constituído por 6 acções que contemplavam 15 medidas. Uma dessas acções (4.ª acção), "Proceder ao Reajustamento e às Especificações Programáticas para a Matemática em todo o Ensino Básico", incluiu como medida o reajustamento dos Programas de Matemática do Ensino Básico, em vigor desde 1991.

Dada a falta de harmonização entre o que está preconizado no Currículo Nacional do Ensino Básico (CNEB) e os Programas de Matemática dos três ciclos de ensino, em vigor na altura, era urgente um reajustamento destes Programas, adoptando o CNEB como documento de referência.

A execução desta medida incluiu a homologação do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), em Dezembro de 2007. Foi adoptada esta designação, porque, de facto, existe pela primeira vez um único documento com o programa de Matemática para os três ciclos de ensino, com uma identificação clara do que deve ser feito em cada um dos ciclos. Por outro lado, esta opção de um documento único foi importante, dado que a linguagem, a formulação das finalidades de ensino e os objectivos gerais, os temas matemáticos e as capacidades transversais são comuns em todos os ciclos de ensino, possibilitando, deste modo, uma melhor articulação vertical entre os diversos ciclos (aliás, bem expressa no Programa).

Esta nova realidade no PMEB e o facto de incluir em todos os ciclos a Geometria como tema matemático, focando a necessidade de desenvolvimento do sentido espacial dos alunos e colocando ênfase na visualização e no raciocínio geométrico, criou um quadro profundamente motivador para a escolha da Geometria como área de estudo.

Este cenário foi consonante com as minhas motivações já descritas, enquanto professora de Matemática, e pelo facto de constatar que a Geometria é um tema que necessita de um maior aprofundamento dos conhecimentos científicos e didácticos, em comparação com os outros temas matemáticos. Esta realidade é explicada, em parte, pela deficiente formação inicial dos professores ao longo dos anos nesta área. Por outro lado, da análise que realizei aos resultados dos Exames de Matemática de 2005 do 9.º ano de escolaridade[1] (DGIDC, 2006, não publicado), constatei que 55% dos alunos revelaram um fraco desempenho no tema de Geometria e quando se analisaram os itens do Exame que envolveram o tema Geometria e o Raciocínio verificou-se que 77% dos alunos ou não responderam ou obtiveram nível zero. Estes eram itens em que se requeria que os alunos explicassem um raciocínio, envolvendo a escrita de informação matemática ou interpretassem e relacionassem mais do que um tipo de representação.

Por isso, encontro neste trabalho uma oportunidade para analisar e compreender como os alunos aprendem Geometria, tendo em atenção as indicações metodológicas preconizadas no PMEB, e como é que a actividade matemática realizada na sala de aula contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, ou seja, para que o aluno atinja o propósito de ensino definido para a Geometria.

Evoquei apenas razões de natureza pessoal que motivaram a realização deste estudo, porque, de facto, foram estas as preocupações que me conduziram para este caminho. No entanto, ao ler artigos relacionados com esta temática, percebi que a Geometria é uma área ainda carente de investigação e em que é necessário desenvolver

---

[1] Estes resultados fazer parte de um relatório que a DGIDC elaborou, em 2006, sobre os resultados dos exames dos 9.º ano de escolaridade realizados em 2005, intitulado "Análise dos resultados dos exames de Língua Portuguesa e de Matemática do 9º ano do Ensino Básico" e não foi publicado.

estudos que ajudem a compreender, de uma forma mais aprofundada, como se desenvolve o pensamento geométrico dos alunos. Como referem Rodrigues e Bernardo (2011) num artigo publicado nas Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática:

> (...) a Geometria continua a ser uma área carente de investigação, e onde os resultados de estudos empíricos podem, e devem, imperiosamente, ser acolhidos, no sentido de uma compreensão mais aprofundada da forma como se desenvolve o pensamento geométrico dos alunos, desde os níveis mais básicos de escolaridade aos mais avançados, assim como das implicações didácticas emergentes. Esta é uma área onde os alunos revelam dificuldades de diversa ordem (Battista, 2007), o que por si só, justifica a pertinência da investigação incidente na mesma. (Rodrigues e Bernardo, 2011, no prelo)

Esta constatação fortaleceu ainda mais a minha vontade de investir e dar continuidade ao meu trabalho nesta área da educação matemática, nomeadamente para tentar compreender como é que os alunos estruturam mentalmente as suas experiências matemáticas e como é que raciocinam com estas estruturas, no decurso da sua aprendizagem, em particular no que se refere ao raciocínio geométrico.

1.2 Problema e questões do estudo

O meu estudo pretende analisar e compreender, tendo em atenção as indicações metodológicas preconizadas no PMEB, como é que a actividade matemática realizada na sala de aula contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos.

A fase de concepção e planeamento deste estudo colocou-me, desde logo, questões práticas pertinentes, majoradas pela insuficiente investigação nesta área, em particular: Que procedimentos deveria desencadear de forma a conseguir levar a cabo o estudo pretendido? Que ferramentas e metodologias deveria utilizar para melhor sustentar a análise dos dados recolhidos? Como estruturar o processo de investigação no terreno, para caracterizar de forma efectiva as questões em análise, visando a sustentabilidade das conclusões?

Nesse momento, assumi o papel do caminhante, do verso de António Machado, daquele que não conhece e aposta em fazer o caminho. Na procura de respostas às questões levantadas optei por uma possibilidade que envolveu a escolha do primeiro tópico matemático do tema Geometria a ser trabalhado no 3.º ciclo, pelas turmas piloto[2] deste ciclo de ensino, com o PMEB.

A experiência de ensino sobre a qual foquei o estudo foi desenvolvida em duas turmas piloto do 7.º ano de escolaridade, no tópico "Triângulos e Quadriláteros" e assentou na proposta de uma sequência organizada de tarefas com recurso ao Geobegra e com resolução de problemas, baseando-se num ensino exploratório na sala de aula.

Tendo em vista as finalidades da investigação, estabeleceu-se a seguinte questão como o problema do estudo:

De que forma o processo de aprendizagem dos alunos no tópico Triângulos e Quadriláteros, apoiado em uma sequência organizada de tarefas exploratórias com recurso ao Geobegra, contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico?

Para melhor compreender e aprofundar esta questão, desdobrei a mesma noutras questões orientadoras, por forma a conseguir focar os pontos importantes do estudo e a identificar os conceitos fundamentais para a construção do quadro teórico conceptual que suportasse a análise e interpretação dos dados. Essas questões orientadoras são as seguintes:

i) Como é que os alunos exploram as tarefas propostas? Como é que discutem as relações geométricas encontradas?
ii) Como é que a exploração das tarefas ajuda os alunos a compreender e utilizar as propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano?
iii) Que papel tem o Geogebra como ferramenta de apoio aos processos de raciocínio?
iv) De que forma a aprendizagem do tópico contribui para desenvolver o raciocínio geométrico dos alunos?

---

[2] As turmas piloto foram turmas que iniciaram o PMEB, homologado em Dezembro de 2007, no ano lectivo 2008/2009 antes do início da sua generalização no ano lectivo seguinte. Num total existiram 40 turmas piloto: 10 turmas do 1.º ano de escolaridade; 10 turmas do 3.º ano; 10 turmas do 5.º ano; e, 10 turmas do 7.º ano de escolaridade.

Para responder às questões colocadas, os objectivos que se identificaram para este estudo são:

a) Descrever e analisar as actividades matemáticas desenvolvidas na sala de aula.
b) Analisar o contributo do Geogebra como ferramenta de apoio no desenvolvimento da actividade matemática e na compreensão das propriedades e relações de figuras geométricas.
c) Identificar e interpretar as ideias construídas pelos alunos, relativamente aos tópicos matemáticos em estudo.
d) Compreender como é que a aprendizagem do tópico matemático contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

1.3 Estrutura organizativa do estudo

O presente estudo está organizado em seis capítulos.

O primeiro capítulo contém a introdução, a motivação e a conceptualização do estudo em causa.

No capítulo dois, faço uma contextualização do ensino da Geometria no currículo de Matemática do ensino básico, em que abordo os aspectos relacionados com as finalidades para o ensino da Matemática, para além de analisar, em particular, o lugar da Geometria no currículo.

No capítulo três, que corresponde ao quadro teórico conceptual, pretendo construir uma perspectiva teórica, desenvolvendo as principais ideias e conceitos relevantes no tema de investigação, que ajude na análise dos dados e na sustentação das conclusões, de modo a atingir os objectivos do estudo e, consequentemente, responder às questões colocadas. Assim, este capítulo está dividido em três pontos. O primeiro refere-se ao raciocínio geométrico, à sua caracterização e ao papel da visualização nesse raciocínio. O segundo ponto foca os ambientes de geometria dinâmica, salientando as suas características, bem como o seu papel enquanto ferramenta de apoio no ensino e na aprendizagem da Geometria. O último ponto, é relativo ao significado matemático, numa perspectiva de aprendizagem em que se salientam aspectos relacionados com a compreensão e as representações matemáticas.

No capítulo quatro, descrevo as opções metodológicas consideradas, nomeadamente o processo de recolha de dados, a caracterização dos participantes e os procedimentos de análise dos dados. Apresento, também, a proposta curricular, referindo as tarefas e os seus princípios gerais, a planificação do tópico Triângulos e Quadriláteros e, ainda, a caracterização do Geogebra, ambiente de geometria dinâmica utilizado pelos alunos nas aulas.

No capítulo cinco descrevo e analiso os dados recolhidos, à luz do quadro teórico conceptual proposto no capítulo três.

No capítulo seis, sintetizo as principais conclusões do estudo, tendo em conta as questões levantadas e os seus objectivos, e faço uma reflexão final sobre a investigação que inclui as suas potenciais repercussões e os desafios que encerra, levantando algumas ideias para futuras investigações.

Capítulo II

Geometria no currículo actual

A matemática é aprendida para adicionar, subtrair, dividir e multiplicar… A matemática ajudar-nos-á mais tarde a obter bons empregos e a trabalhar bem nos nossos trabalhos. Eu, na realidade, não gosto de matemática, mas ela é necessária.

Esta afirmação de uma criança de 11 anos, retirada de um estudo realizado por Leone Burton (1994) quando lhe foi pedido para descrever a Matemática, revela a forma como a criança a sente e como se relaciona com ela.

Esta descrição da Matemática mostra que aquela criança a encara, não só como uma ciência completamente desenquadrada da sua vida presente, mas também como um filtro social para a obtenção de um "bom" emprego e, consequentemente, para a sua progressão profissional.

Esta opinião, muito comum junto dos jovens e crianças, é consequência da forma como a Matemática é normalmente apresentada, como sendo um saber que foi construído por outros e, portanto, sem lugar para a intuição, para a experimentação ou para a descoberta. Os conceitos são transmitidos aos alunos como elementos já formalizados e não como resultado das suas acções e da sua reflexão sobre eles. Por outro lado, esta situação veicula uma visão da Matemática como ciência acabada, indiscutível e que é apenas compreensível e utilizável por alguns, enfatizando a imagem da matemática como um filtro.

Assim, sabendo que muito do que ocorre na aula de Matemática está relacionado com o modo como se encara a aprendizagem desta, e que, por sua vez, esta visão é influenciada pela forma como se entende o que é a Matemática, neste ponto discutirei as finalidades do ensino da Matemática. Encaminharei esta discussão, abordando questões relacionadas com a concepção da Matemática como ciência e a sua natureza e, consequentemente, apresentarei um posicionamento relativamente à Matemática da sala de aula, que denominarei como Matemática escolar.

A importância desta discussão é realçada por Freudenthal (1991) quando refere que a educação matemática é influenciada de um modo determinante pela imagem que se tem da Matemática:

> Quem perfilha uma imagem da Matemática exterior ao mundo — um sistema dedutivo ou um catálogo de fórmulas — é provável que sistematize ou interprete o ensino da Matemática com o mesmo espírito. Por outro lado, todo aquele que experimenta a Matemática como algo em construção, vibrando com os impulsos do mundo e da sociedade, inclinar-se-á para ensinar da mesma forma (…). (p. 131)

Tendo por base este último modo de encarar a Matemática, abordarei aspectos relacionados com a Matemática escolar e as finalidades do seu ensino. Por fim, em torno desta perspectiva e dado o tema deste estudo, analisarei a Geometria no currículo de Matemática.

2.1 A Matemática

O que penso da matemática afecta a maneira como a apresento.
(Hersh, 1997, p. 41)

Quando se pretende estudar questões relacionadas com a Matemática, emergem de imediato questões como: Afinal, o que é a Matemática? Quais as características específicas da Matemática? Como é que essas características produzem impacto no ensino e aprendizagem da Matemática?

Neste ponto não é minha intenção abordar todas estas questões. A preocupação central é analisar a questão “o que é a Matemática?”. É reconhecido por muitos matemáticos, filósofos e educadores que a concepção que cada um tem sobre a Matemática, influencia o que se considera que deve ser o seu ensino e aprendizagem.

A pergunta parece ser inocente, no entanto levanta inúmeras questões e, por isso, a sua abordagem pode ser feita a vários níveis, o que significa que a resposta não é imediata nem simples. Uma vez que o propósito deste estudo não é aprofundar o conhecimento relacionado com a natureza da Matemática, esta questão será olhada do ponto de vista da filosofia da Matemática.

A Matemática tem sido objecto de várias definições ao longo do tempo, influenciadas por diferentes opções filosóficas e contextos socioculturais.

No início do século XX, a filosofia da matemática focou de forma intensiva as questões relacionadas com os fundamentos do conhecimento matemático e com a forma de como instituir este conhecimento como certo, incontestável e livre de qualquer dúvida. De acordo com Ernest (1994/96), as escolas platonista, formalista e intuicionista tentaram responder dentro de uma estrutura racional do pensamento baseado numa lógica inerente ao paradigma euclideano. Viam a Matemática como um corpo rigidamente hierárquico, objectivo, absoluto e infalível. Contudo, nenhuma teve sucesso. Ao longo do tempo, este tipo de perspectiva foi gradualmente sendo posta em causa. Por exemplo, os teoremas de Godel mostraram que o sistema axiomático formal nunca pode ser visto como finalizado. Uma outra razão está relacionada com a insatisfação de alguns matemáticos, filósofos e investigadores de outras áreas, ao verem a matemática limitada a estas questões.

Como consequência, uma nova tradição na filosofia da matemática emergiu. Segundo Ernest (1994/96), esta está preocupada em descrever a Matemática, as práticas dos matemáticos, a sua história, as suas aplicações e o lugar da Matemática na cultura humana. Muitos filósofos e matemáticos têm contribuído para esta nova tradição, como Davis e Hersh (1985/95), Tymoczko (1986), Wittgenstein (1956) e Lakatos (1976).

> 1. A Matemática é humana. Faz parte de e assenta dentro da cultura humana. Não é (…) objectiva e não é uma realidade abstracta.
>
> 2. O conhecimento matemático não é por natureza infalível. Como a ciência, a matemática pode avançar fazendo erros e corrigindo-os. O Falibilismo é brilhantemente argumentado em Provas e Refutações de Irme Lakatos.
>
> (…)
>
> 5. Os objectos matemáticos são uma certa variedade de objectos sociais-culturais-históricos. Eles são distintivos. Podemos falar de matemática a partir da literatura ou religião. Contudo, os objectos matemáticos partilham ideias, parte da cultura ou uma significante sub-cultura — como Moby Dick na literatura. (Hersh, 1994/96, p. 14 e 15)

Mais recentemente, a adicionar a este grupo, há um outro conjunto de investigadores de outras áreas que têm contribuído para as questões da caracterização da Matemática. Este grupo inclui historiadores, antropólogos, sociólogos e educadores especializados em educação matemática.

> (…) um número crescente de investigadores têm tido em consideração a natureza da matemática nas suas investigações, incluindo Bloor (1976), Livingston (1986) e Restivo (1992) da sociologia; Ascher (1991), D'Ambrosio (1985) (…) dos estudos culturais e da etnomatemática; da história da matemática, Aspray e Kitcher (1988), (…) e Gillies (1992); e Bishop (1988), Ernest e Skovsmose (1994) da educação (Ernest, 1998, p. xii)

A obra-prima de Lakatos, *Prova e Refutações*, foi sem dúvida uma inspiração para muitos destes investigadores. Escrita sob a influência de Popper, seguindo a sua teoria do conhecimento científico, defende que este conhecimento é hipotético, falível e que "a ciência progride, a partir de problemas, pelo jogo entre factos, conjecturas e refutações." (Ponte e outros, 1997, p. 29).

Um dos efeitos desta obra foi o ataque ao formalismo e ao platonismo: (i) apresenta um professor e os seus alunos, em vez de símbolos e regras de combinação; (ii) e, apresenta um choque de visões, com argumentos e contra-argumentos, em vez de um meio construído a partir dos primeiros princípios. Tal como é referido por Davis e Hersh (1995), Lakatos apresenta a Matemática a desenvolver-se a partir de um problema e de uma conjectura, com uma teoria a tomar forma diante dos nossos olhos, no calor do debate e do desacordo, dando a dúvida lugar à certeza e, depois, à dúvida renovada. Portanto, opõe-se determinantemente à ideia da Matemática como um produto acabado e infalível, esquecendo todo o processo desenvolvido até lá chegar.

> (…) também a matemática, tal como as ciências naturais, é falível, e não induvidável; também ela se desenvolve pela crítica e correcção de teorias, que nunca estão totalmente livres de ambiguidades ou da possibilidade de erro ou engano. Partindo de um problema ou de uma conjectura, existe uma pesquisa simultânea de demonstrações e contra-exemplos. Novas demonstrações explicam contra-exemplos antigos e novos contra-exemplos ameaçam demonstrações antigas. Para Lakatos, "demonstração" neste contexto de matemática informal não significa um processo mecânico, que conduz à verdade numa cadeia inquebrável desde as hipóteses até às conclusões. Significa antes explicações, justificações, elaborações que tornam a conjuntura mais plausível, mais convincente, ao mesmo tempo que vai ficando mais pormenorizada e precisa sob a pressão dos contra-exemplos. (Davis e Hersh, 1995, p. 324)

Deste pequeno extracto realça-se que o grande contributo de Lakatos foi focalizar a sua análise, não na matemática formalizada — aquela que se encontra apenas em artigos, livros e revistas — mas na matemática informal, no processo de desenvolvimento e descoberta que é a matemática conhecida dos matemáticos. Também, Hersh (1997) faz esta distinção quando refere que a matemática tem frente (face visível) e costas (face escondida):

> A frente da matemática é aberta a todos; as costas são restringidas às pessoas que estão dentro (matemáticos). A frente é a matemática na sua forma final — artigos, livros, revistas. As costas são a matemática ao longo do trabalho dos matemáticos, que dizem nos seus escritórios ou numa mesa de café.
>
> (…)
>
> A face visível da matemática é formal, precisa, ordenada e abstracta. É partida em definições, teoremas e conclusões.
>
> A face escondida da matemática é fragmentada, informal, intuitiva e tentativa. Tentam isto ou aquilo, diz-se "talvez" ou "parece-se com". (p. 36)

Tal como Lakatos, Hersh realça a face escondida da matemática. Para ele, a Matemática é humana e, tal como a ciência, a matemática avança, cometendo erros, corrigindo e re-corrigindo-os.

Seguindo o exemplo de Hersh, também os outros investigadores acima referidos, partilham da ideia de que na matemática os contextos de descobertas e justificações interpenetram-se. Como consequência, questões sociais e culturais devem ser admitidas como tendo um papel essencial nesta discussão. Neste sentido, novas metáforas têm sido exploradas: matemática como uma cultura (Bishop, 1988); matemática como um sistema social (Restivo, 1993); e matemática como uma conversação (Ernest, 1994/96).

Bishop defende que "a matemática tem agora de ser compreendida como um tipo de conhecimento cultural, que todas as culturas geram, mas não precisa necessariamente de ter a mesma aparência de um grupo cultural para outro. Tal como todas as culturas humanas geram linguagem, crenças religiosas, rituais, etc., também parece que todas as culturas humanas geram matemática." (Bishop, 1988, em Burton, 1994, p. 72). Isto significa que todas as culturas, em todos os lugares, estão envolvidas em algum tipo de actividade matemática, pois, desde os primeiros tempos, o ser humano tem a necessidade de responder às pressões da sua sociedade. Por exemplo, o Calculus de Newton foi uma ferramenta da teoria da gravitação, que ajudou a compreender o movimento das estrelas e dos planetas – aspecto muito importante para as nações com tradições marítimas.

Uma outra perspectiva é apresentada por Restivo (1993) quando advoga, por um lado, que a matemática possibilita um meio para os indivíduos controlarem e explicarem situações complexas, quer naturais, quer artificiais, e para comunicarem sobre tais situações. Por outro lado, a matemática é um sistema de conceitos, em que estes são representações e elaborações colectivas, uma vez que são concebidas, desenvolvidas, sustentadas e alteradas através do trabalho social em contextos sociais. Daí a metáfora da matemática como um sistema social.

Quanto ao posicionamento de Ernest (1994/96), este argumenta que a conversação atravessa a matemática de formas múltiplas e profundas. Para se compreender este argumento, é necessário a clarificação da palavra conversação. Ernest, defende que a conversação surge a três níveis:

- a nível interpessoal, onde as pessoas, de uma maneira ou de outra, partilham "formas de vida". Portanto aqui envolve o discurso directo, sendo que este nível de conversação é um dos modos mais básicos de interacções humanas interpessoais.

- a nível cultural. A humanidade vive num mundo de ideias. Estas crescem e desenvolvem-se através da conversação. Esta larga escala de conversação é a soma de conversações interpessoais na cultura oral.

- por último existe a conversação privada internalizada. Alguns teóricos, como Vygotsky, argumentam que o pensamento por si próprio é conversação internalizada.

Todas estas três formas de conversação são sociais nas suas manifestações (nível interpessoal e cultural) e sociais na origem (nível intrapessoal). A partir desta ideia do que é conversação, o propósito de Ernest (1994/96) foi adoptá-la "como uma noção básica epistemológica de uma filosofia construtivista social da matemática". Esta decisão teve em consideração dois aspectos:

> Primeiro há a ideia Wittgensteiniana de "formas de vida", são as pessoas a partilharem actividades situadas no mundo (…). Isto é a condição da vida

> humana, e subsequentemente do discurso e de todas a formas do conhecimento. Segundo, há a suposição de que o discurso e a linguagem jogam um papel essencial na génese, aquisição, comunicação, formulação e justificação de todo o conhecimento, incluindo, em particular, o conhecimento matemático. (p. 37)

Paralelamente a todas estas posições, a Matemática é também histórica, na medida em que as experiências matemáticas e a história da Matemática não podem ser vistas independentemente do tempo. Por exemplo, a Aritmética e a Geometria emergiram em consequência das actividades sociais na civilização antiga.

Contudo, importa realçar que as preocupações práticas não contam toda a história da Matemática, mas são uma componente que dá continuamente forma à sua história. Daí, Restivo et al. (1993) sugerir que a crescente "importância, tipo, intensidade ou campo de acção de preocupações práticas na sociedade, estimulará a actividade matemática e aumentará a possibilidade de novos e interessantes resultados." (p. 15)

Em síntese, a Matemática é uma actividade humana, faz parte e manifesta-se dentro da cultura humana, pois tem sido a forma que o Homem tem encontrado para organizar e recriar a realidade em que vive. Esta organização é uma consequência da necessidade de compreender para intervir e para criar.

> Matemática é como o dinheiro, a guerra ou a religião — não é física, não é mental, mas social. Lidar com a Matemática (ou dinheiro ou religião) é impossível em termos puramente físicos — polegadas e libras — ou em termos puramente mentais — pensamentos e emoções, hábitos e reflexões. Só pode ser feito em termos sociais-históricos-culturais. Isto não é controverso. É um facto da vida. (Hersh, 1997, p. 248)

2.2 Finalidades para o ensino da Matemática

Toda a noção de "cultura da matemática escolar" implica uma aceitação da ideia que a matemática exerce uma influência única no contexto de sala de aula no qual o assunto é ensinado e pensado.

(Nickson, 1994, p. 7)

Se se perguntar a alguém onde está a Matemática ou onde se pode encontrá-la, a resposta a estas questões, salvaguardando algumas excepções, é bastante redutora. A resposta mais frequente é: “está nos livros de matemática” ou “está na aula de matemática”. Muito raramente são apontadas situações fora do âmbito do ensino da matemática.

Esta realidade é consequência sobretudo de mitos que se criam em relação à Matemática que são difíceis de quebrar, como por exemplo: a Matemática é um corpo de conhecimento infalível, objectivo, abstracto, independente das condições sociais, culturais e políticas. Por isso, a Matemática foi tornada esqueletizada e fossilizada e, como afirma Hersh (1997), “um jogo sem significado”.

Esta situação deriva, em parte, do facto de, durante muitas décadas, a filosofia da matemática mais defendida ter sido o formalismo. A defesa continuada e persistente desta filosofia implicou a importação, notoriamente marcada pelo movimento da “Matemática Moderna” durante os anos 60, da notação da teoria de conjuntos e da axiomática para as escolas, dado que esta doutrina formalista advoga que a Matemática é um sistema axiomático expresso na linguagem da teoria de conjuntos. Para o formalismo, o que conta é o modo como se manuseiam os símbolos e não o seu significado e, nesse sentido, mesmo havendo um ganho a nível do rigor, perdeu-se na compreensão das ideias e dos conceitos matemáticos. Importa referir, por exemplo, que este tipo de axiomática fez parte do programa de matemática do ensino secundário até ao início da década de 90.

Uma das razões para o fracasso da reforma da Matemática Moderna está relacionada com o facto de a aprendizagem ser concebida por via de transmissão e absorção e não por construção (APM, 1990). Os alunos fazem matemática num ambiente em que são sujeitos passivos, ou seja, os alunos estão na aula para aceitar o que o professor quer, sabe e transmite. As curiosidades dos alunos ficam “à porta da sala” e estes limitam-se a utilizar as regras que são manuseadas e transmitidas, interiorizando-as sem nenhuma boa razão.

Estes aspectos negativos emergiram de uma forma acentuada com a democratização do ensino. Aprender, saber e compreender é um direito humano e este direito não pode ser destruído pela maneira como a Matemática é vista e ensinada. Por este facto, houve a necessidade de orientar o ensino para a democratização do conhecimento, mais precisamente, de se caminhar para uma matemática escolar de todos e para todos. Portanto, para além de reflectir a perspectiva da Matemática referida no ponto anterior, a matemática escolar deve também proporcionar aos alunos experiências e actividades significativas e diversificadas que lhes dêem a oportunidade de intervir activamente na sala de aula. Para tanto, a matemática escolar deve assegurar um ambiente em que os alunos se sintam livres para arriscar as suas tentativas e ideias quando estão a resolver os problemas matemáticos que lhes são colocados, abordando-os como desafios onde participam e não como formalismos estáticos que devem aceitar e replicar.

> Um dos principais objectivos dos programas de matemática escolar consiste em fomentar a autonomia dos alunos e a aprendizagem com compreensão suporta este objectivo. Os alunos aprendem mais e melhor quando controlam a sua aprendizagem através da determinação dos seus próprios objectivos e da avaliação do seu progresso. Quando desafiados com tarefas criteriosamente seleccionadas, os alunos tornam-se confiantes na sua capacidade de lidar com problemas difíceis, ansiosos por chegar à resposta certa por eles mesmos, flexíveis na exploração de ideias matemáticas e na experimentação de caminhos alternativos, com vontade e perseverança. (NCTM, 2000/2007, p. 22)

Neste sentido, o currículo de Matemática deve ser coerente com estes princípios. As finalidades e os objectivos do ensino da Matemática devem exprimir e priviligiar a importância da compreensão matemática e proporcionar uma visão adequada da Matemática e da sua actividade. Esta visão deve contribuir para estimular a curiosidade e desenvolver a capacidade do aluno de usar a matemática para formular, analisar e resolver problemas, "para raciocinar e comunicar, assim como a auto-confiança necessária para fazê-lo." (Abrantes et al., 1999, p. 18). Por outro lado, o currículo de Matemática deve reflectir o seu contributo no desenvolvimento científico e tecnológico, bem como a sua importância histórica, cultural e social.

O Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em Dezembro de 2007, está elaborado tendo em consideração o referido no parágrafo anterior. O ensino da Matemática, nos três ciclos de escolaridade básica, está orientado para duas finalidades.

> a) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.

> b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência. (Ministério da Educação, 2007, p. 3)

Este Programa, na sua primeira finalidade, pretende que o aluno desenvolva a compreensão dos conceitos matemáticos e relações e a capacidade para os mobilizar e utilizar na análise, na interpretação e na resolução de problemas em contextos diversificados. Mesmo não estando explícito, os autores do Programa subentendem que esta finalidade deve ser, também, entendida para incluir o desenvolvimento quer da "capacidade de abstracção e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos", quer da "capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega." (p. 3)

A segunda finalidade está orientada para o desenvolvimento do gosto pela Matemática e da autonomia do aluno, bem como para a compreensão da Matemática como uma actividade humana.

> (...) desenvolvimento nos alunos de:
>
> autoconfiança nos seus conhecimentos e capacidades matemáticas, e autonomia e desembaraço na sua utilização;
>
> (...)
>
> compreensão da Matemática como elemento da cultura humana, incluindo aspectos da sua história;
>
> capacidade de reconhecer e valorizar o papel da Matemática nos vários sectores da vida social e em particular no desenvolvimento tecnológico e científico; (...). (Ministério da Educação, 2007, p. 3)

Em síntese, o ensino da Matemática tem como finalidade, por um lado, a compreensão dos conceitos Matemáticos para que o aluno seja capaz de utilizar o conhecimento de forma flexível, aplicando-o de forma adequada na resolução de situações em contextos diversificados. Por outro lado, tem como finalidade assegurar que o aluno consiga elaborar conclusões, raciocínios e argumentações, comunicando-as, descrevendo-as e explicando-as de uma forma organizada e clara, para estruturar o seu pensamento e para partilhar e confrontar essas ideias com os outros. Consequentemente, esta orientação conduz a uma visão da Matemática como uma ciência que não é isolada, mas totalmente integrada na actividade do ser humano e que tem um património histórico, cultural e social que tem atravessado toda a civilização.

2.3 A Geometria no currículo de Matemática

O currículo, como se referiu no ponto anterior, deve ser coerente, integrando as ideias matemáticas relevantes e as grandes finalidades da educação que são valorizadas em cada época. Por isso, "nenhum currículo pode ser concedido como definitivo." (APM, 1990).

Na realidade, as alterações curriculares que têm existido ao longo dos anos reflectem as tendências existentes em cada época. Os anos 40 e 50 são marcados por um ensino que valorizava a memorização e a mecanização, em que o importante era saber de cor as demonstrações de teoremas e fazer exercícios. Um exemplo deste paradigma são os célebres livros de Palma Fernandes. Nos anos 60, com o movimento da "Escola Moderna", os currículos são profundamente reformulados com a introdução de novas matérias e a eliminação de matérias consideradas tradicionais. Em Portugal, este movimento teve impacto no ensino secundário e foi protagonizado por Sebastião e Silva.

> (...) contemplando novas matérias que se pretendiam introduzir (Iniciação à Lógica, Estruturas Algébricas, Álgebra Linear, Probabilidades e Estatística...) e articulando-as com as matérias tradicionais (Iniciação à Análise Infinitesimal, Trigonometria, Cálculo Algébrico, Geometria Analítica). (...) e sem deixar cair o essencial dos temas habitualmente tratados neste nível. Ao contrário do que acontecia em muitos outros países, em que se privilegiava exclusivamente a perspectiva da Matemática pura, Sebastião e Silva empenhava-se em mostrar a importância das aplicações da Matemática, (...). (Ponte, 2003, p. 26)

No que respeita aos métodos de ensino, Sebastião e Silva revelou também preocupações pedagógicas, criticando o método expositivo de ensino, defendendo uma metodologia de ensino pela redescoberta. Como referia este autor (citado por Ponte, 2003):

> O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta. (p. 26)

Este movimento deixou uma renovação de temas e uma abordagem mais actual dos conceitos e, também, alguma preocupação com as aplicações da matemática, mostrando uma certa interligação das ideias matemáticas. Contudo, a Geometria continuou a ser vista como um tema auxiliar da Álgebra Linear, sem grande interesse para o currículo. Tinha apenas o papel de ilustrar o carácter axiomático e dedutivo da Matemática.

Este posicionamento pouco relevante da Geometria no ensino pode ter sido, como refere Nunes (2011), consequência da sua perda de importância nas investigações matemáticas ao longo do século XX. Como refere esta autora, tal situação começou com David Hilbert quando apresentou vinte e três problemas que deveriam ser a preocupação central da Matemática do século XX, em que apenas três deles eram relativos à Geometria Discreta. Também, em 1976, num Simpósio de Matemáticas Puras foram apresentados "vinte e oito conjuntos de problemas, mas nenhum deles se referia à área da Geometria." (p. 39).

Contudo, Freudenthal, nos artigos que escreveu sobre este assunto, opõe-se ao afastamento da Geometria dos currículos escolares, argumentando que a forma como está contemplada – destinada a ser utilizada como um veiculo para ensinar Lógica – dá uma visão distorcida deste tema matemático.

Num artigo escrito em 1971, com recomendações para o ensino da Geometria, Freudenthal defende que a Geometria "tem evoluído como um importante meio de compreensão e organização do fenómeno espacial" (p. 286). Este foi um dos motivos que o levou a assumir que o ensino da Geometria deve centrar-se na construção de modelos conceptuais. Por outro lado, as crianças desde muito cedo devem começar a manipular material concreto em situações específicas e as estruturas dedutivas devem surgir de acordo com a maturidade e o nível em que os alunos são capazes de analisar as situações, em vez de a Geometria ser imposta como um sistema preconcebido.

Num outro artigo intitulado "Principais problemas da educação matemática", Freudenthal (1981) identifica vários problemas e um deles é relacionado com o ensino da Geometria. Este educador matemático acredita que o melhor caminho para aprender Geometria é permitir que a criança ou o aluno tome gradualmente consciência da sua compreensão intuitiva do espaço. Freudenthal defende que a Geometria é o ambiente espacial matematizado e este envolve o espaço em si e os objectos e os acontecimentos dentro dele. Para Freudenthal, tudo começa com a compreensão do espaço e das relações dentro do mesmo, vendo, ouvindo e manipulando, porque só é possível à criança ou ao aluno verbalizar a linguagem convencional, em termos de definições, teoremas e provas, se experienciar as situações e os assuntos em si, permitindo-lhe reflectir sobre a sua intuição espacial perante os desafios propostos.

A investigação que tem sido desenvolvida, desde os anos 80, pelos educadores matemáticos (e não só) na área da Geometria tem trazido conhecimento relevante sobre a sua importânica nos currículos de Matemática dos ensinos básico e secundário, corroborando as ideias defendidas por Freudenthal.

Da análise de alguns desses estudos conclui-se que aprender geometria pela memorização e mecanização é superficial e muito limitado. Por exemplo, se um aluno memorizar que um quadrado tem quatro lados iguais, dificilmente será capaz de distinguir um quadrado de um losango. O seu conhecimento em relação às propriedades dos quadriláteros está reduzido a um conjunto de definições que dificulta a distinção entre os diferentes quadriláteros.

Estes mesmos estudos revelam que a geometria contribui, entre outros aspectos, para o desenvolvimento da visualização e do pensamento crítico e, por outro lado, esta capacidade de visualização, fazendo uso de diagramas e modelos geométricos para a interpretação e resolução problemas, contribui para o desenvolvimento da resolução de problemas.

Dada esta mudança de paradigma relativamente ao papel que a Geometria deve ter no currículo de Matemática, neste ponto procurarei desenvolver algumas ideias sobre a importância e as recomendações actuais para o ensino da Geometria e analisar o Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) à luz destas perspectivas.

2.3.1 Recomendações actuais

Goldenberg et al. (1998) apresentaram duas razões para encarar a Geometria como conteúdo importante de ensino: (1) a Geometria pode ajudar os alunos a ver as conexões na Matemática; (2) a Geometria pode ser o caminho ideal para desenvolver "*hábitos mentais*" ("*Habit-of-mind*", versão original).

Muitas noções matemáticas compreendem-se melhor e são também melhor comunicadas, utilizando modelos geométricos. Por exemplo, as representações geométricas podem ajudar os alunos a compreenderem as fracções, a utilização de um rectângulo para representar um produto possibilita o estudo de múltiplos e divisores, a decomposição possibilita o estudo de áreas ou operações com polinómios. Como refere Battista (1999), a Geometria é uma fonte de riqueza para a compreensão dos conceitos aritméticos, algébricos e estatísticos.

Apesar de Goldenberg e al. terem referido apenas as conexões com a Matemática, pode-se acrescentar a esta razão que a Geometria proporciona, igualmente, uma melhor apreciação do mundo em que vivemos. Está presente em variados campos da sociedade, como na arquitectura, no design, na arte ou na mecânica. Ao mesmo tempo, aparece naturalmente, por exemplo, na estrutura do sistema solar, nas formações geológicas ou nas plantas e flores, em que as formas geométricas, como representações, têm um papel importante no estudo destes elementos. Por outro lado, como referem Abrantes et al. (1999) o conhecimento das formas geométricas é importante na vida quotidiana.

> (...) o conhecimento básico das formas geométricas é importante na vida quotidiana, para uma pessoa se orientar, estimar formas e distâncias, fazer medições indirectas ou apreciar a ordem e a estética na natureza e na arte. É também importante na comunicação, por exemplo, para dar e receber informações relativas ao modo de se chegar a um dado lugar. (Abrantes et al., 1999, p. 69)

No que respeita à segunda razão, Goldenberg et al. (1998) defendem que a Geometria é uma área que está bem colocada para que os alunos desenvolvam "*hábitos mentais*" que lhes dão poder matemático[3]. Mais do que outras áreas, pode ser usada para descobrir e desenvolver diferentes modos de raciocínio, para aprender a procurar invariantes e para desenvolver argumentos construtivos. Duval (1998) reforça esta ideia, salientando que o ensino da Geometria deve focar-se em desenvolver as capacidades de

[3] Para Goldenberg et al. (1998) uma pessoa com poder matemático realiza experiências de pensamento (experiências mentais, experiências de raciocínio); inventa coisas; olha para padrões; faz conjecturas; descreve coisas formal ou informalmente; pensa sobre métodos, estratégias, algoritmos e processos; visualiza coisas; procura explicar porque é que as coisas são as que vê; e, argumenta sobre o fenómeno intelectual.

representação visual e de raciocínio, realizando experiências que favoreçam a sinergia entre estes dois processos. Estas experiência devem envolver, por isso, actividades que encorajem e ajudem o aluno a: (i) procurar e encontrar padrões; (ii) fazer e a melhorar conjecturas; (iii) representar e a passar de uma representação para outra e estabelecer relações entre as diversas representações (estas são acções importantes para a construção de imagens mentais); (iv) desenvolver o raciocínio, nomeadamente o raciocínio espacial; (v) e, procurar e construir argumentos lógicos, coerentes e sólidos.

Battista (2007) considera que a Geometria, como conteúdo de ensino, "é uma complexa rede de interligações entre conceitos, formas de pensamento e sistemas de representações que são utilizados para conceptualizar e analisar ambientes espaciais físicos e imaginados" (p. 843) e acrescenta que o raciocínio geométrico consiste principalmente na invenção e utilização de sistemas conceptuais formais para investigar formas e espaço. Como exemplo, escreve que os matemáticos, para analisarem e definirem vários tipos de quadriláteros, aplicam um sistema conceptual baseado em propriedades. Destaca, ainda, que o pensamento geométrico mais relevante é o raciocínio espacial "que é a capacidade para 'ver', para investigar e para reflectir sobre os objectos espaciais, imagens, relações e transformações" (Battista, 2007, p. 843).

Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2000/2007), do NCTM, está patente a necessidade e a importância do ensino da Geometria. Apresentam a Geometria como uma área em que os alunos podem aprender as formas e estruturas geométricas e a analisar as suas características e relações e realçam que a "Geometria constitui um contexto natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos" (p. 44). Do mesmo modo que Duval (1998) e Battista (2007) argumentaram, é afirmado que as ideias geométricas são úteis na representação e resolução de problemas em situações do quotidiano e em outras áreas da Matemática, uma vez que as representações geométricas ajudam o aluno a dar significado e a clarificar a informação em diversas situações.

Em síntese, é amplamente assumido que a Geometria deve ter um lugar de destaque no ensino da Matemática, devendo ser dado especial relevo ao desenvolvimento do raciocínio geométrico enquanto propósito principal do ensino da Geometria.

2.3.2 Geometria no Programa de Matemática do Ensino Básico

O Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), homologado em Dezembro de 2007, apresenta como propósito de ensino central, em Geometria, ao longo de todo o ensino básico, o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos, com ênfase na visualização e compreensão de propriedades de figuras geométricas (ver Quadro 2.1).

Quadro 2.1. Propósito principal de ensino da Geometria, nos três ciclos do ensino básico

PMEB - Propósito principal de ensino Geometria		
1.º Ciclo	**2.º Ciclo**	**3.º Ciclo**
Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras no plano e no espaço, a noção de grandeza e respectivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas geométricos e de medida em contextos diversos.	Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão das propriedades de figuras no plano e no espaço, a compreensão de grandezas geométricas e respectivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversos.	Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras no plano e no espaço, a compreensão das transformações geométricas e da noção de demonstração, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades para resolver problema em contextos diversos.

Da leitura do Quadro 2.1, verifica-se que não há diferenças substanciais no propósito de ensino para a Geometria nos três ciclos do ensino básico. Pode-se interpretar que há uma evolução no desenvolvimento das capacidades e dos conhecimentos relacionados com o sentido espacial. Nos 1.º e 2.º ciclos, pela forma como está escrito o propósito de ensino, pode-se inferir que o desenvolvimento do sentido espacial terá por base a exploração, manipulação e experimentação de materiais. No 3.º ciclo, já é referida a compreensão das transformações geométricas e a noção de demonstração, que significa a introdução de raciocínios indutivos e dedutivos e argumentações formais.

Tal como é defendido nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2000/2007), também no PMEB a Geometria é mais do que definições; consiste na descrição e compreensão de relações e raciocínios. Sobre os raciocínios, é evidente que ao longo dos ciclos de ensino há uma transição de um raciocínio informal para um raciocínio gradualmente mais formal. Estes aspectos estão bem evidenciados nos objectivos gerais de aprendizagem, que identificam o que os alunos devem desenvolver e ser capazes de fazer no âmbito da Geometria (ver Quadro 2.2).

Quadro 2.2. Objectivos gerais de aprendizagem para a geometria, nos três ciclos do ensino básico

PMEB – Objectivos gerais de aprendizagem Geometria		
1.º Ciclo	**2.º Ciclo**	**3.º Ciclo**
- desenvolver a visualização e ser capazes de representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço e identificar propriedades que as caracterizam; - ser capazes de identificar e interpretar relações espaciais; - ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar no âmbito deste tema.	- compreender propriedades das figuras geométricas no plano e no espaço; - desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar; - ser capazes de analisar padrões geométricos e desenvolver o conceito de simetria; - ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em situações que envolvam contextos geométricos.	- desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar; - compreender e ser capazes de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço; - compreender e ser capazes de usar as relações de congruência e semelhança de triângulos; - compreender a noção de demonstração e ser capazes de fazer raciocínios dedutivos; - ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos e trigonométricos.

As crianças, quando chegam à escola, têm já muitas noções intuitivas sobre o espaço e um conhecimento das formas. É partindo desta realidade e da experiências das crianças que se deve começar o trabalho em Geometria e, em particular, o desenvolvimento do sentido espacial.

Analisando os objectivos de aprendizagem para a Geometria definidos para os primeiros anos (ver Quadro 2.2), o PMEB estabelece que no 1.º ciclo, os alunos devem ser capazes de representar, descrever e construir figuras e identificar as propriedades que as caracterizam. Pretende-se, ainda, que os alunos a partir das suas vivências e da experimentação em actividades concretas, através da construção e manipulação de representações físicas, utilizando materiais manipuláveis, desenvolvam a visualização e, ainda, que identifiquem e interpretem relações espaciais.

Este conhecimento informal e as noções intuitivas desenvolvidas no 1.º ciclo, são objecto de análise e de aprofundamento nos restantes ciclos. Como se pode constatar, no 2.º ciclo requer-se que os alunos compreendam as propriedades das figuras geométricas, isto é, os alunos devem ser capazes de entender o significado das propriedades e das relações e interligá-las. No 3.º ciclo, pretende-se, para além desta compreensão, que os alunos mobilizem esse conhecimento e o utilizem para analisar e elaborar raciocínios geométricos, nomeadamente raciocínios dedutivos. Portanto, é importante possibilitar aos alunos situações de raciocínio hipotetico-dedutivo. Ainda, neste ciclo, os alunos devem ampliar o estudo das figuras, nomeadamente dos triângulos, através do estudo das relações de congruência e semelhança, bem como das razões trigonométricas no triângulo rectângulo.

Da leitura do Quadro 2.2, pode-se ainda salientar que no 2.º ciclo os alunos devem ser capazes de analisar padrões geométricos e desenvolver o conceito de simetria. No PMEB as transformações geométricas são introduzidas de um modo informal no 1.º ciclo, em que a reflexão é a isometria estudada e utilizada no estudo dos frisos. No 2.º ciclo é aprofundado o estudo da reflexão e rotação, de modo a que os alunos compreendam as noções de simetria axial e rotacional e identifiquem as simetrias numa figura. Por fim, no 3.º ciclo, este tema é aprofundado com o estudo da translação e a clarificação da simetria como propriedade de uma figura e com o estudo das propriedades das isometrias.

A nível da resolução de problemas, e do comunicar e racionar matematicamente, observando o Quadro 2.2, pode-se afirmar que no 1.º ciclo já devem ser operacionalizados no âmbito do tema. No 2.º ciclo devem ser consideradas situações que envolvam contextos geométricos e, no 3.º ciclo, devem também ser incluídos contextos trigonométricos.

Para terminar, e após a análise dos tópicos e objectivos específicos do tema da Geometria, importa destacar que as capacidades transversais, apesar de estarem sempre presentes no propósito de ensino e nos objectivos gerais de aprendizagem, a sua falta nesta parte do PMEB pode desvalorizar o seu papel no trabalho em Geometria. Por isso, importa ressalvar que é fundamental e imprescindível que o trabalho sobre os tópicos de Geometria seja realizado em articulação com todas as dimensões do PMEB, nomeadamente, finalidades, objectivos gerais de aprendizagem e capacidades transversais.

Em suma, as orientações curriculares do PMEB, para além de conferirem um lugar de destaque à Geometria, considerando-a um dos quatro temas matemáticos em estudo, aponta a importância do desenvolvimento da visualização e do raciocínio espacial, enquanto propósito principal do ensino da Geometria. Assim, pode-se afirmar que o PMEB é convergente com as várias orientações curriculares actuais que encaram a Geometria como uma área de excelência para o desenvolvimento do raciocínio matemáticos dos alunos.

Capítulo III

Quadro teórico conceptual

Neste capítulo não pretendo fazer uma revisão de literatura sobre os temas relacionados com este estudo, mas antes construir uma perspectiva teórica que me ajude na análise de dados e nas conclusões, de forma a responder às questões colocadas e, consequentemente, atingir os objectivos que propus para esta investigação.

No seguimento desta opção, divido o capítulo em três pontos. O primeiro, antecedido de um ponto inicial sobre o raciocínio em Matemática, diz respeito ao raciocínio geométrico, à sua caracterização e ao papel da visualização nesse raciocínio. O segundo ponto centra-se nos ambientes de geometria dinâmica, salientando as suas características e o seu papel enquanto ferramenta de apoio ao processo de ensino e de aprendizagem da Geometria. Por fim, há um ponto relativo ao significado matemático, numa perspectiva de aprendizagem, em que se salientam aspectos relacionados com a compreensão e as representações.

3.1 Raciocínio em Matemática

Antes de começar a analisar a natureza do raciocínio em Matemática é importante ter em consideração os dois princípios do pensamento humano que a ciência cognitiva oferece, não só para se compreender e clarificar este termo, mas sobretudo para compreender como é que o aluno constrói, através do raciocínio, o significado matemático. Segundo, Battista (2007), esses princípios são:

Princípio 1: A mente humana constrói significados em vez de os receber;

Princípio 2: O indivíduo constrói novo conhecimento e compreende-o baseando-

-se naquilo que já sabe e pensa.

Deste modo, transportando estes princípios para a Matemática, para compreender e aprender matemática é necessário que seja o aluno a construir os significados para as ideias matemáticas e que essa construção seja baseada no conhecimento do aluno e nas suas formas de raciocínio. Isto significa que o raciocínio é um elemento chave na construção dos significados matemáticos. Mais, desta constatação emerge que o racíocinio não é visto na sua noção tradicional "como abstracto e etéreo", mas antes, "como real, físico e imaginativo" (English, 1997a, p. 4).

Para English (1997a), a partir desta perspectiva, o raciocínio matemático implica a existência de múltiplos raciocínios que envolvem estruturas que emergem e subsistem a partir das experiências físicas realizadas ao interagirmos com o ambiente. Por outro lado, a autora refere que o raciocínio matemático é imaginativo no sentido em que utiliza dispositivos que estruturam estas experiências concretas e as transforma em modelos para o pensamento abstracto. Estes "dispositivos de pensamento" incluem as analogias, as metáforas, as imagens, a metonímia e o imaginário.

Esta perspectiva apresentada por Lyn English, está em consonância, conforme é salientado por Yackel & Hanna (2003), com as de outros educadores matemáticos como Krummheuer (1995), Cobb (1994) e Saxe (1991) que tomam uma perspectiva social, focando-se nos aspectos comuns do raciocínio e de outras actividades matemáticas.

> (...) o raciocínio matemático é uma actividade comum na qual os alunos participam e interagem uns com os outros para resolver problemas. (Yackel & Hanna, 2003, p. 228)

Portanto, neste sentido, e dado que a Matemática é constituída através de um raciocínio real e imaginativo, a explicação e a justificação são aspectos chave da actividade matemática na sala de aula.

Analogamente, para Kilpatrick e Swafford (2004), numa publicação do National Research Council, intitulada "Ajudar a criança a aprender Matemática", o raciocínio é visto como a utilização da lógica para explicar e justificar a solução de um problema ou para ampliar o conhecimento a partir de qualquer coisa conhecida. Assim, o raciocínio é também olhado como um processo para obter conclusões com base em evidências ou suposições prévias.

> O raciocínio é a cola que mantém a matemática junta. Pelo pensamento sobre as relações lógicas entre conceitos e situações, os alunos podem caminhar através dos elementos de um problema e ver como eles se encaixam uns nos outros. (...) Uma das melhores formas de os alunos melhorarem o seu raciocínio é explicar ou justificar as suas soluções a outros. (Kilpatrick & Swafford, 2004, p. 14)

Uma outra investigadora, Susan Russell (1999), defende esta ideia quando advoga que "o raciocínio matemático leva a uma teia interligada de conhecimento matemático dentro de um domínio matemático" (p. 1) e que o desenvolvimento "dessa teia de compreensões matemáticas é a fundação daquilo a que chamamos 'memória matemática', que muitas vezes se refere como consciência matemática e que proporciona as bases para a compreensão dos problemas matemáticos." (p. 1)

Para esta autora, o raciocínio é o que se utiliza para pensar sobre "as propriedades dos objectos matemáticos e desenvolver generalizações que se aplicam aos objectos – números, operações, objectos geométricos ou conjuntos de dados" (p. 1). Por consequência, raciocínio matemático é essencialmente ligado ao desenvolvimento, à justificação e ao uso de generalizações matemáticas.

Em síntese, o raciocínio matemático está na base de toda a actividade matemática e, em função da sua complexidade, do modo como se exerce e da sua multiplicidade de significados, importa perceber aquilo que o sustenta e sobre o qual se desenvolve. Esta clarificação, assente numa perspectiva social e de actividade humana fundamental, permitirá criar melhores condições para conduzir a actividade matemática que o mesmo origina.

Concluindo, o raciocínio matemático é um processo de pensamento, que emerge a partir da experiência do aluno, para explicar, justificar e argumentar, para si próprio e para os outros, conjecturas, ideias matemáticas e ideias que ele próprio apresenta, bem como para escolher certos caminhos ou percursos durante a resolução de problemas. Assim, as "principais funções do raciocínio são compreender, explicar e convencer" (Hershkowitz, 1998, p. 29).

3.2 Raciocínio em Geometria

Ao longo de décadas, a geometria foi ensinada num contexto em que era valorizado o raciocínio dedutivo que servia para mostrar ou verificar afirmações geométricas e mostrar a sua universalidade. Esta visão valorizava a prova escrita e o produto final. Este aspecto era mais importante do que o processo de provar, negligenciando as principais funções do racicínio referidas no ponto anterior.

A investigação que tem sido desenvolvida tem procurado criar ambientes de aprendizagem centrados no aluno que o ajudem a sentir a necessidade de explicar as suas ideias. Esses ambientes tendem a proporcionar situações em que os alunos tenham de debater diferentes visões e interpretações, escolhendo argumentos que os ajudem a convencer os seus pares.

Hershkowitz (1998), para sustentar esta ideia, começa um artigo, salientando um trabalho de doutoramento, realizado por Orly, que não chegou a ser finalizado. Esta investigação tinha como objectivo procurar as dificuldades que os alunos apresentavam ao sustentar afirmações em Geometria. Após dois anos de trabalho, a investigadora percebeu que uma das razões para estas dificuldades estava relacionada com as desvantagens da forma clássica de ensinar a geometria euclidiana. Por este facto, começou a experimentar outras estratégias com a intenção de criar situações onde o acto de convencer e argumentar era fundamental, proporcionando momentos para se debaterem diferentes conjecturas dentro da mesma situação. Os alunos tinham liberdade para escolher diversos tipos de argumentos com vista a tentarem convencer-se uns aos outros.

> Esta abordagem pedagógica reflecte uma considerável mudança, em curso na comunidade da educação matemática, para o desenvolvimento do raciocínio em Matemática como um todo e do raciocínio em Geometria, em particular (...). (Hershkowitz, 1998, p. 29)

3.2.1 Caracterização do raciocínio geométrico

Nesta abordagem pedagógica os alunos passam a ser parceiros na descoberta de factos geométricos e de relações geométricas, pela exploração e experimentação e pelo raciocínio indutivo. Por outro lado, o raciocínio dedutivo passa a ser, nesta perspectiva, um processo para compreender e explicar as conjecturas descobertas indutivamente e para, assim, serem validadas. Além disso, "o raciocínio dedutivo, torna-se um meio para convencer os outros da validade da conjectura descoberta" (Hershkowitz, 1998, p. 32). Este processo colaborativo, sustentado pela experimentação e indução, que recorre igualmente à dedução, torna-se no raciocínio geométrico que é a ferramenta para o processo de elaboração de prova, um processo em que tanto o raciocínio indutivo como o dedutivo têm um papel central.

Para Duval (1998), o raciocínio em geometria é um processo que permite conseguir novo conhecimento a partir de informações dadas. Esse novo conhecimento é utilizado para provar, explicar e estender o conhecimento existente.

MacCrone et al. (2010) defendem que o raciocínio geométrico envolve a exploração activa de meios através dos quais os alunos consigam investigar características das formas, propriedades comuns de uma família de formas ou uma variedade de caminhos para modelar formas. Por isso, referem que há quatro elementos chave no raciocínio geométrico que incluem o seguinte:

- *Conjecturar sobre objectos geométricos*. Analisar configurações e raciocinar indutivamente sobre relações para formular conjecturas.

- *Construção e validação de argumentos geométricos*. Desenvolver e avaliar argumentos dedutivos (formais e informais) sobre figuras e as suas propriedades que permitem compreender situações geométricas.

- *Múltiplas abordagens geométricas*. Analisar situações matemáticas, utilizando transformações, abordagens sintéticas e sistemas de coordenadas.

- *Conexões geométricas e modelação*. Usar ideias geométricas, incluindo a visualização espacial, em outras áreas da Matemática, noutras disciplinas e em situações do mundo real. (MacCrone et al., 2010, p. 1)

Na mesma linha de pensamento, Battista (2007) salienta que o raciocínio geométrico consiste principalmente na invenção e utilização de sistemas conceptuais formais para investigar as formas e o espaço. Como exemplo, Battista sustenta que os matemáticos aplicam um sistema conceptual baseado em propriedades para definir e analisar vários tipos de quadriláteros e triângulos. Refere, ainda, que o raciocínio geométrico inclui, por um lado, a construção e a investigação de imagens para responder a questões sobre elas e, por outro lado, a transformação e a realização de operações sobre as imagens e a preservação das imagens ao serviço de outras operações mentais. Assim, "o raciocínio geométrico não só é a 'entrada' para o raciocínio geométrico formal, mas também proporciona ferramentas cognitivas fundamentais para a análise geométrica formal" (Battista, 2007, p. 844).

A partir desta concepção de raciocínio resulta que as imagens que se constroem mentalmente, os esquemas ou outras representações, são essenciais no desenvolvimento do raciocínio. Por esta razão, Battista (2007) afirma que a abstracção é fundamental no raciocínio geométrico e define três formas especiais para a mesma: (a) Estruturação espacial, que é o acto mental de construir ou de abstrair a forma de um objecto ou de um conjunto de objectos, identificando a natureza do mesmo e as suas componentes; (b) Modelos mentais, que são um conjunto de abstracções, integradas para formar representações mentais e que são utilizadas para interpretar e raciocinar sobre situações; e (c) Um esquema, que é uma sequência organizada de acções que foram construídas a partir da experiência e podem ser aplicadas em resposta a situações similares.

Um aluno pensa sobre uma situação problemática em geometria, manipulando objectos, utilizando ambientes de geometria dinâmica ou activando modelos mentais que lhe permitam simular interacções para que possa explorar possíveis cenários e, assim encontrar soluções para um problema. Por esta razão, e pelo que foi dito nos dois parágrafos anteriores, Battista (2007) refere que uma espécie de raciocínio fundamental é o raciocínio espacial.

> (...) raciocínio espacial é a capacidade para 'ver', para investigar e para reflectir sobre os objectos espaciais, imagens, relações e transformações. (Battista, 2007, p. 843)

Clements e Battista (1992) assumem que o raciocínio espacial consiste num conjunto de processos cognitivos em que são construídas e manipuladas representações mentais de objectos, relações e transformações. Por este motivo, é essencial para o pensamento científico, dado que é utilizado para representar e manipular informação para a resolução de problemas. Para se perceber melhor esta concepção, os autores dão como exemplo a compreensão do conceito de rectângulo. Para compreender o conceito de rectângulo e as suas propriedades é necessário que os alunos analisem a relação espacial dos lados de um rectângulo, que significa perceber lados "opostos" e distingui-los dos lados "adjacentes".

Similarmente, Pittalis e Christou (2010) consideram o raciocínio espacial como uma forma de actividade mental que permite ao aluno criar imagens espaciais e manipulá-las para resolver problemas. Esta actividade mental é o que Battista e Clements (1996) definiram como estruturação espacial, que consiste no acto mental de construção de uma estrutura ou de uma forma para um objecto ou um conjunto de objectos. Salientam, ainda, que o desenvolvimento desta estruturação não é um simples procedimento. Há alunos no 3.º ciclo que falham na estruturação espacial. Por exemplo, referem que a dificuldade dos alunos em enumerarem os cubos que encaixam numa caixa é explicada pela falta de estruturação espacial e pela incapacidade de coordenar e integrar um modelo mental unificado de vistas diferentes de uma estrutura, neste caso de uma caixa.

Muitos investigadores, com o propósito de analisar o raciocínio espacial, têm identificado componentes que ajudam a compreender a natureza deste tipo de raciocínio. Bishop (1983), citado por Clements e Battista (1992), sugere duas componentes espaciais. A primeira diz respeito à capacidade de interpretar informação de figuras que envolve a análise e a compreensão de representações visuais e de vocabulário. A segunda é a capacidade para o processamento visual que envolve a manipulação e transformação de representações visuais e imagens e a tradução das relações abstractas e da informação dentro da representação visual.

Estas duas componentes espaciais estão presentes na maioria dos trabalhos de investigação (Bishop, 1980; Harris, 1981; MacGee, 1979; Kimura, 1999, citado por Pittalis e Christou, 2010; Sarama e Clements, 2009) tornando-se nas características fundamentais do raciocínio espacial: orientação espacial e a visualização espacial.

Orientação espacial, segundo Sarama e Clements (2009), envolve a compreensão e a exploração das relações entre diferentes posições dos objectos no espaço, ou seja, entre as posições dos objectos no espaço com respeito às suas próprias posições. Como refere Mendes e Delgado (2008), ao adoptarem na sua publicação os conceitos estabelecidos no Projecto TAL[4], a orientação está relacionada com "a capacidade de determinarmos a nossa posição no espaço relativamente a outros objectos com a ajuda de termos/conceitos elementares, tais como: direcção, ângulo, distância, paralelismo, coordenadas" (p. 15).

> Orientar inclui também a capacidade para interpretar um modelo de uma situação espacial, tomado a partir de um ponto de vista. Por exemplo, uma criança, ao observar a imagem de um objecto terá de procurar a posição que deverá assumir para poder visualizar esse objecto daquela forma. (Mendes e Delgado, 2008, p. 15)

3.2.2 A visualização no raciocínio geométrico

Como foi referido, as perspectivas para o ensino e aprendizagem da geometria valorizam a componente visual dos aspectos matemáticos e geométricos Em particular, dão destaque à visualização no processo de ensino e aprendizagem da geometria, bem como à sua importância no processo de construção de significados matemáticos (ver ponto 3.4). Por outro lado, como realça Presmeg (2006), citada por Pittalis e Christou (2010), a investigação em educação matemática tem enfatizado o papel dos processos de visualização no desenvolvimento do raciocínio geométrico. Portanto, analisar e compreender o que é a visualização é um aspecto importante não só para a clarificação deste conceito, mas também para estudar e perceber a sua importância no desenvolvimento do raciocínio geométrico, capacidade fundamental na aprendizagem da Geometria.

A percepção humana é muito visual, por isso o recurso a aspectos visuais e representações em tarefas matemáticas é natural e é uma parte integrante do desenvolvimento dessas tarefas. Esta forma de agir é o que Guzmán (2002) chama de visualização matemática: levar em consideração as possíveis representações concretas dos objectos que se manipulam de modo a ter uma abordagem mais eficiente às relações que se trabalham num determinado contexto para se descobrir as relações abstractas importantes na realização de uma tarefa.

---

[4] Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Buys, K. (Eds.). (2005). *Young children learn measurement and geometry (TAL Project)*. Freudenthal Institute, Utrecht University, The Netherlands.

Arcavi (2003), após uma análise de ideias relacionadas com a visualização e articulando-a com as definições dadas por alguns autores, assume que a visualização "é a capacidade de interpretação, de utilização e de reflexão sobre as figuras, as imagens, os diagramas nas nossas mentes, no papel ou em ferramentas tecnológicas, com o propósito de representar e comunicar informação, pensar sobre e desenvolver ideias até então desconhecidas e avançar com (novos) entendimentos" (p. 217).

Concepção semelhante é apresentada por Gal e Linchevski (2010) quando referem que a visualização, na sua generalidade, é a capacidade para representar, generalizar, comunicar e reflectir sobre informação visual e, nesse sentido, tem um papel fundamental, senão o mais importante, na compreensão da geometria. Por seu lado, Duval (1998) salienta que a visualização é um dos três processos cognitivos independentes que cumprem as funções epistemológicas específicas em Geometria: visualização, construção (a partir de ferramentas) e raciocínio.

> (...) processo de visualização no que respeita à *representação do espaço* para a ilustração de uma afirmação, para a exploração heurística de uma situação complexa, para um olhar sinóptico sobre ele ou para uma verificação subjectiva; (...)" (Duval, 1998, p. 38)

A visualização é, portanto, baseada na produção de representações semióticas que mostram as relações e a organização das relações entre unidades representacionais. Isto significa que não aparece apenas no início do pensamento matemático, mas também na descoberta de novas relações entre objectos matemáticos e na descrição e comunicação dos processos que são característicos da actividade matemática.

Neste sentido, o processo de visualização, como é referido por Guzmán (2002), baseia-se na interacção com as pessoas e na imersão e enculturação nos contextos sociais e históricos da matemática.

> Visualização é, portanto, não uma visão imediata das relações, mas antes uma interpretação do nosso pensamento que é apresentado e que podemos fazer apenas quando tivermos aprendido a ler apropriadamente o tipo de comunicação que nos é oferecida. (Guzmán, 2002)

Este aspecto é também salientado por Arcavi (2010), quando refere que ao nível da visualização existem diversas variáveis que têm influência na maneira como se vê as diferentes representações. Advoga que aquilo que se vê não é determinado apenas pela quantidade ou qualidade de conhecimento prévio "que é directo aos nossos olhos", mas é também, em muitos casos, determinado pelo contexto em que a observação é feita. Em diferentes contextos, o “mesmo” objecto visual pode ter diferentes significados, mesmo para os especialistas. Para se compreender melhor este ponto de vista, o autor apresenta a seguinte situação: o que se vê quando se traçam três linhas paralelas?. Se não for dito nada sobre o contexto, provavelmente poderá pensar-se no paralelismo da geometria euclidiana. Mas considere-se estas mesmas linhas paralelas sobre um eixo cartesiano. Para pessoas que não estão dentro da matemática, ou que são principiantes e nunca ouviram falar em eixos cartesianos, esta situação pode ser não mais do que a mesma figura com duas linhas extras. Para os especialistas, por exemplo, isto significa muito mais, tendo por base o mundo conceptual da representação cartesiana de funções. As linhas não são agora meros objectos, passam a ser representações gráficas de funções lineares e a partir daqui podem fazer-se leituras tendo em consideração os aspectos inerentes a estes conceitos.

Guzmán (2002) identificou diversos tipos de visualização, realçando que não são os únicos que existem, nomeadamente:

- Visualização isomórfica – quando os objectos podem ter uma correspondência “exacta” com as representações que se elaborarem desses objectos. Isto significa que é possível estabelecer um conjunto de regras para interpretrar os elementos da representação visual e as relações matemáticas dos objectos que representam. Por exemplo, a modelação matemática pode ser em muitos casos uma visualização isomórfica;
- Visualização homomórfica – neste tipo de visualização alguns elementos têm certas relações comuns que reproduzem suficientemente bem as relações entre objectos abstractos e, deste modo, dão o necessário suporte ao raciocínio. Este processo é muitas vezes importante para ajudar, ou melhor, guiar a mente nos processos matemáticos, como numa investigação ou no estabelecimento de conjecturas ou na prova;
- Visualização analógica – neste caso substitui-se mentalmente os objectos que se estão a trabalhar por outros em que seja possível relacioná-los entre si de uma forma análoga e em que o seu comportamento é conhecido ou mais fácil de manipular, porque já foi explorado;

- Visualização por diagramas – neste caso os objectos mentais e as suas relações comuns relativamente aos aspectos que interessam ser estudados são representados meramente por diagramas que constituem uma ajuda útil no processo de pensamento.

Há muitos obstáculos e objecções que têm dificultado a colocação da necessária ênfase na visualização como um dos objectivos centrais nos currículos. Uma das objecções está relacionada com o facto de se considerar que a visualização leva ao erro. Tal como refere Guzmán (2002), a utilização incorrecta da visualização pode levar a erros. No entanto, sustenta que esta possibilidade não pode ser um argumento válido contra a sua eficiência nos diferentes processos da actividade matemática, sabendo-se igualmente que "técnicas" mais formais também conduzem a erros, raciocínios incompletos e a resultados falsos.

Ao nível dos obstáculos, Guzmán (2002), citando Eisenberg e Dreyfus, salienta que pelo facto de ser um processo intelectual, a visualização terá de ser desenvolvida desde muito cedo. Para isso, é fundamental uma imersão e familiarização com tarefas adequadas, por exemplo, de descodificação de imagens. Quando este tipo de actividade está ausente, dificilmente se consegue desenvolver a visualização.

Arcavi (2003) evidencia as dificuldades em torno da visualização, classificando-as em três categorias principais: culturais, cognitivas e sociológicas. As dificuldades culturais referem-se às crenças e valores sobre o que significa a Matemática e o fazer Matemática, o que é legítimo ou aceitável e o que não é. A controvérsia dentro da comunidade matemática conduz a afirmações do tipo "isto não é Matemática". Esta situação tem repercussões no ensino, nomeadamente através dos materiais para a sala de aula, que não incluem tarefas que envolvam a visualização. Sobre esta atitude Presmeg, citada pelo mesmo autor, caracteriza-a como a "desvalorização" da visualização que conduz a escassas práticas de sala de aula que incluam e valorizem a visualização como uma parte integrante de fazer matemática.

No âmbito das dificuldades cognitivas, o autor destaca duas. A primeira inclui, entre outras coisas, a discussão simplista sobre se o "visual" é mais fácil ou mais difícil.

> Quando a visualização actua sobre imagens conceptualmente ricas, a exigência cognitiva é certamente elevada. Além disso, o raciocínio com

> conceitos em cenários visuais pode implicar que não existem sempre rotinas processualmente 'seguras' às quais recorrer.
>
> Consciente ou inconscientemente, tais situações podem ser rejeitadas pelos alunos (e possivelmente também pelos professores), dado o seu poder ser muito arriscado, escorregadio ou impreciso. (Arcavi, 2003, p.235)

A segunda dificuldade cognitiva surge da necessidade de se conseguir uma tradução flexível entre as representações visuais e analíticas da mesma situação (que está no cerne da compreensão de muita Matemática). Aprender para compreender e ser capaz de manipular múltiplas representações pode ser um processo penoso para os alunos.

No que respeita às dificuldades sociológicas, uma delas é a mesma que Guzmán refere, ao citar Eisinberg e Dreyfus, quando estes consideram as questões de ensino. Uma outra dificuldade está relacionada com a existência de alunos na aula de matemática com várias origens culturais e, portanto, diferentes experiências prévias.

Em síntese, o raciocínio geométrico requer a reconstituição de imagens em termos de modelos mentais estruturados, de forma apropriada para investigar as formas e o espaço. Daí que o modelo cognitivo de Duval (1998) relativo ao pensamento geométrico faça notar que este envolve a visualização, a construção e o processo de raciocínio.

A visualização, apesar destas dificuldades e objecções, não está apenas relacionada com o propósito de ilustrar qualquer coisa. Inclui "um conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeia, e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objectos" (Matos & Gordo, 1993, p. 13). Começa, também, a ser reconhecida como uma componente chave do raciocínio, da resolução de problemas e mesmo da prova.

Concluindo, pelo que foi dito anteriormente, importa salientar que o desenvolvimento do raciocínio geométrico e da visualização, tal como muitos estudos têm indicado, pode ser melhorado e conseguido se estes processos forem parte integrante da actividade matemática dos alunos. Bishop (1980), por exemplo, verificou que os alunos do primeiro ciclo que utilizavam materiais manipuláveis tinham melhores resultados nos testes de capacidade espacial do que os alunos que não utilizavam estes materiais.

3.3 Ambientes de geometria dinâmica no ensino e na aprendizagem da Geometria

As tecnologias têm tido um papel determinante no processo de mudança cultural, social e económica da sociedade. A sua evolução e a disseminação das ferramentas que a integram, têm preenchido completamente o nosso quotidiano e têm revolucionado todas actividades e interacções sociais. É rara a profissão que não esteja dependente de algum tipo de tecnologia ou ferramenta tecnológica e, cada vez com maior incidência e profundidade, tudo o que acontece e está para acontecer, passa pelas redes sociais. Temos, vivemos e continuamente desenvolvemos uma sociedade baseada na tecnologia e, por isso, é uma inevitabilidade e uma condição essencial à sustentabilidade social ter cidadãos tecnologicamente competentes que compreendam os modelos e as funções que sustentam as diferentes tecnologias, utilizando-as de forma a maximizar o seu potencial.

Dada esta dimensão tecnológica, quando se pensa no ensino e na aprendizagem da Matemática e, em particular, da Geometria, temos de forçosamente considerar uma dimensão tecnológica que é reforçada pelo facto da Geometria ser uma das áreas que tem sido mais influenciada pelo recente progresso do software, nomeadamente o de geometria dinâmica.

Com isto não se pretende que se substitua o tradicional papel e lápis ou quadro e giz, mas pode-se "transformar e expandir possibilidades de representação, simulação, cálculo, etc. e abrir novas perspectivas de análise" (Matos, 2008, p. 77). Mas, como Amado (2007) refere, ao citar Smith (2002), as tecnologias utilizadas de modo inapropriado não melhoram significativamente as aprendizagens. Ou seja, o computador por si só não faz coisa alguma.

> O facto de se juntar a calculadora ou o computador a uma aula tradicional pode torná-la superficialmente melhor ou pior, mas não levará a uma mudança relevante. Se for melhor, provavelmente, é porque os alunos encontraram formas criativas de utilizar a tecnologia que não tinham sido planeadas pelo professor; se for pior, é porque foi dispendido tempo e esforço numa tarefa completamente dissociada da tecnologia e, portanto despropositada. Esta última é uma das situações que leva professores a

> pensar que a utilização das tecnologias pode consumir demasiado tempo e comprometer o cumprimento dos programas. (Amado, 2007, p. 110)

Portanto, é naquilo que se faz com a tecnologia e com as ferramentas por ela propiciadas que se deve centrar a atenção. Deve olhar-se para as utilizações específicas da tecnologia em contextos específicos. Nomeadamente, em contextos que envolvam um ambiente de aprendizagem poderoso que permita o desenvolvimento de capacidades num determinado domínio, a construção de processos de aprendizagem que possibilitem a compreensão alargada e profunda e a implementação de estratégias e métodos de ensino que promovam esses processos de aprendizagem.

Tudo isto mostra que é fundamental, neste quadro teórico, perceber como é que os ambientes de geometria dinâmica funcionam e podem ser usados, bem como as suas implicações no processo de ensino e de aprendizagem. Esta compreensão deve ser procurada através de uma apreciação das suas características e mais valias na aprendizagem da Geometria,

3.3.1 Características dos ambientes de geometria dinâmica

As possibilidades gráficas e computacionais de certas ferramentas tecnológicas, nomeadamente de geometria dinâmica, permitem a realização de transformações e operações sobre objectos matemáticos, disponibilizando ambientes intuitivos, largamente interactivos e, nalguns casos, promovendo a partilha e disseminação da experiência em tempo real, que permitem a obtenção de retorno imediato sobre as acções efectuadas e o acompanhamento gradual da evolução da transformação ou operação.

Os ambientes de geometria dinâmica (AGD) são editores gráficos que possibilitam ao utilizador desenhar diagramas geométricos e arrastá-los pelo ecrã. Estes diagramas podem ser construídos com base em primitivas geométricas que têm objectos geométricos relevantes e relações. Por exemplo, no *Geogebra*, ao escolhermos no menu o item "Mediatriz" e seleccionarmos com o rato dois pontos ou um segmento, a mediatriz desse segmento (definido pelos dois pontos) é desenhada no ecrã. Se arrastarmos estes elementos, a mediatriz acompanha esse arrastamento como objecto dependente. Esta funcionalidade de arrastamento permite que os diagramas sejam continua e intuitivamente movimentados, mantendo intactas as relações geométricas que foram utilizadas para a sua construção, assim como todas as propriedades geométricas implícitas. Como refere Battista (2007), é útil esta possibilidade de arrastamento dos diagramas, dado que ajuda o aluno a desenvolver a compreensão matemática das propriedades geométricas, uma vez que percebe, apesar da movimentação, que as características fundamentais do diagrama permanecem inalteradas, acedendo assim de forma intuitiva à compreensão de que essas propriedades são invariantes.

Um outro aspecto focado por Gonzaléz e Herbst (2009) como importante num AGD é a incorporação da funcionalidade de "medição" em combinação com o arrastar. Esta funcionalidade foi considerada uma poderosa ferramenta no estudo que conduziu, porque permitiu que os alunos investigassem as relações entre um quadrilátero e o que resulta da ligação dos pontos médios do quadrilátero inicial. Através da medição disponibilizada automaticamente, como parte integrante do AGD, sobre um diagrama geométrico, os alunos utilizaram valores numéricos e reuniram dados sobre as relações entre estes objectos geométricos. Por outro lado, pelo facto de conseguirem arrastar e em simultâneo medir, conseguiram, de forma intuitiva e sem esforço adicional, coleccionarem dados que os ajudaram a estabelecer as referidas relações. Com estas constatações, estes investigadores reforçam que a medição disponibilizada nos AGD permitiu que os alunos aprofundassem mais a sua investigação, estabelecendo que, mesmo que não promova a transformação de congruência necessária para uma abordagem teórica das figuras geométricas, a sua capacidade para mudar a atenção das formas para as propriedades pode "ser a semente para os alunos descobrirem novas ideias matemáticas e irem mais longe do que a percepção visual" (Gonzaléz e Herbst, 2009, p. 179).

O *feedback* (ou retorno ao utilizador) é também uma característica muito importante dos ambientes de geometria dinâmica. Ajuda a distinguir diagramas desenhados de uma forma empírica de diagramas que resultam da utilização de primitivas geométricas. Por exemplo, se um quadrado é desenhado no ecrã como composto por quatro segmentos paralelos dois a dois, aparentemente temos um quadrado. Mas, esta aparência do quadrado é destruída quando um dos vértices for arrastado. Portanto, o processo de construção do quadrado (ou de qualquer diagrama que represente um objecto geométrico) requer comunicar com o computador a sequência de objectos geométricos e de construções que são necessárias realizar a partir dos menus do AGD correspondentes às primitivas geométricas. Como salienta Piteira (2000), estes menus de construção, obrigam os alunos, em determinados momentos, a pensar como construir novos desenhos e a avaliar o que tinham feito.

Coelho (2000) constatou, no seu estudo, que as estratégias de tentativa e erro, que ocorreram a partir do retorno obtido, permitiram que gradualmente os alunos deixassem as primitivas de puro desenho para obterem construções resistentes ao arrastamento. No mesmo artigo, salienta também que Junqueira (1995) observou o mesmo percurso nos alunos. Ou seja, ambas as autoras constataram que o *feedback* desempenhou um papel essencial na construção das figuras geométricas.

> (...) o feedback visual exerceu um importante papel na passagem de desenho a figura e que terá contribuído para os alunos se inserirem em estruturas mais profundas da Geometria, visto a resistência à manipulação directa os ter obrigado a processos de construção sustentados nas propriedades das figuras. (Coelho, 2000, p. 56)

Nesta linha, Laborde (1998) assume que a interacção entre as características do arrastamento e o *feedback*, em termos de aprendizagem, "promove o uso de propriedades geométricas para desenhar diagramas e, deste modo, o uso de conhecimento geométrico" (p. 115).

Estas características do AGD permitem que se considere que este funcione como um artefacto mediador, como mostra Jones (2001) ao revelar o impacto de mediação que esta ferramenta tem na sua utilização, nomeadamente quando afirma:

> O aluno compreende que a ordem em que os objectos foram criados conduz a uma hierarquia de dependência funcional dentro de uma figura.
>
> As restrições da robustez de uma figura sob arrasto ficam ligadas com a utilização de pontos de intersecção para tentar segurar a figura junta.
>
> A natureza "dinâmica" do software influência a forma como a explicação é dada pelos alunos. (Jones, 2001, p. 80)

Esta constatação permite ainda referir que o AGD, como salienta Piteira (2000) ao citar Kuutti (1996), constitui um meio facilitador da actividade, na medida em que atribui poder ao aluno no processo de transformação dos objectos.

3.3.1.1 *Diagrama dinâmico versus diagrama estático*

Nos ambientes de geometria dinâmica os diagramas resultam de uma sequência de primitivas, expressas em termos geométricos, escolhidas pelo utilizador. Um aspecto interessante destes diagramas é a sua quasi-independência do utilizador (Laborde, 2005), dado que quando o utilizador arrasta um elemento do diagrama, este é modificado de acordo com a geometria da sua construção e não a partir do pretendido pelo utilizador. Esta situação não acontece no caso dos diagramas estáveis, que podendo ser feitos com papel e lápis, podem ser levemente distorcidos pelo indivíduo de modo a satisfazer as suas expectativas.

Os diagramas dinâmicos, quando arrastados, são vistos como geradores de numerosos exemplos. Por exemplo, como refere Battista (2007), ao citar Marrades e Gutiérrez (2000), uma vantagem do AGD é a possibilidade de os alunos construírem diagramas complexos e poderem realizar, em tempo real, uma série de transformações daqueles diagramas. Deste modo, os alunos têm acesso a uma variedade de exemplos que dificilmente poderiam ter por meios não computacionais (ou mesmo ambientes computacionais estáticos) que geram diagramas estáticos.

Gonzaléz e Herbst (2009) salientam os resultados obtidos por diversos investigadores segundo os quais os alunos, ao trabalharem com diagramas dinâmicos, conseguem desenvolver um tipo de actividade matemática diferente do que quando trabalham com diagramas estáticos. Para exemplificar, estes autores referem que Chazan e Yerushalmy (1998) argumentaram que os alunos descobrem características dos objectos geométricos através do arrastamento. Assim, "permitindo aos alunos que identifiquem invariantes nos diversos casos, os diagramas dinâmicos têm o potencial de envolver os alunos no processo de fazer conjecturas" (p. 159). Por outro lado, estes diagramas dinâmicos e a utilização de ferramentas de AGD, segundo Jones (2000), citado por Gonzaléz e Herbst (2009), capacitam os alunos para fazerem construções e criam em simultâneo um fenómeno de "matematização progressiva" dos alunos, uma vez que com a ajuda destas ferramentas os alunos têm uma compreensão intuitiva e construtiva das propriedades geométricas.

Importa, ainda, acrescentar que os diagramas dinâmicos que são arrastáveis também ajudam os alunos a desenvolverem a compreensão matemática das propriedades, porque estas propriedades são invariantes perante o arrastamento e esta situação não é alcançável num desenho estático (Battista, 2007).

> (...) Laborde reclama que a propriedade espacial de arrastar desenhos " pode emergir como uma invariante no movimento enquanto que isto pode não ser perceptível (visível) num desenho estático. (Battista, 2007, p. 884)

Em suma, tal como tem sido sugerido pelas diferentes investigações realizadas, a interação dos alunos com diagramas dinâmicos é diferente daquela que têm com diagramas estáticos. A principal diferença reside no facto de os alunos poderem arrastar os diagramas dinâmicos e ver como as imagens e medidas mudam quando estes são arrastados. Os investigadores defendem, por isso, que esta situação permite aos alunos encontrar características dos objectos geométricos que podiam permanecer escondidas nos diagramas estáticos.

3.3.1.2 Desenho e figura

Após diversas leituras e análise dos diferentes artigos relacionados com os ambientes de geometria dinâmica, constata-se que cada autor tem adoptado uma terminologia com a qual se identifica e que melhor se adequa aos estudos que realiza no âmbito da utilização destes ambientes. Esta terminologia diz respeito a conceitos fundamentais na utilização de AGDs e na sua aplicação ao ensino da Geometria, como desenho, figura, construções, entre outros. Por conseguinte, para este estudo é fundamental clarificar dois conceitos: desenho e figura.

Neste estudo vou adoptar a terminologia discutida no IX Seminário de Investigação em educação Matemática, dedicado ao Ensino e Aprendizagem da Geometria. Neste encontro, assumiu-se (Coelho e Saraiva, 2000) que desenho é uma representação externa e figura é uma representação mental do objecto. A figura é o significado, a interpretação, a escolha e o sentido que o indíviduo atribui quando cria a representação mental do objecto ou do conceito. O desenho é o significante, é o que comunica, ou seja, é a imagem, o diagrama, o gesto que se usa para representar externamente o objecto ou o conceito. Tomando como exemplo o quadrado, o seu significante pode ser o diagrama dinâmico (desenho) que é construído e arrastado num ambiente de geometria dinâmica, proporcionando, assim, descobertas de relações geométricas. Por consequência, dar um significado (figura) pode passar por se considerar que o quadrado é um rectângulo cujos lados têm todos o mesmo comprimento ou um paralelogramo, pois os seus lados são paralelos dois a dois, ou um quadrilátero cujos quatro lados são iguais e formam ângulos rectos, entre outros significados. Assim, o significado ou figura materializa o sentido que cada indivíduo dá ao resultado e mensagem proveniente da representação externa.

Esta é umas das razões para reforçar a importância dos diagramas e desenhos no ensino e na aprendizagem da Geometria, desenvolvidos em ambientes de geometria dinâmica, porque constituem ambientes propiciadores da descoberta de propriedades e relações geométricas. A observação de regularidades, enquanto se processa a manipulação e o arrastamento do desenho, possibilita a descoberta e a exploração de conjecturas e, deste modo, como realça Olive (1992), citado por Coelho e Saraiva (2000), permite "aumentar a compreensão das relações entre os conceitos geométricos que levam progressivamente o aluno a pensar de um modo mais geral e abstracto" (p. 38), refinando e aprofundando, assim, o sentido que o indivíduo dá à figura do objecto ou conceito em estudo.

Em síntese, podemos constatar que os alunos quando fazem construções utilizando estes ambientes, em particular quando realizam o arrastamento para testar e validar conjecturas, podem, como é referido por Gonzaléz e Herbst (2009): (1) organizar o seu pensamento relativamente às relações entre os objectos geométricos e as noções teóricas em geometria; (2) avançar para abstracções e generalizações; e (3) adquirir experiência com objectos geométricos e com as suas conexões que os capacita para a possibilidade de justificar relações entre objectos geométricos e, eventualmente, produções de prova de teoremas. Portanto, o AGD é um meio propiciador para o desenvolvimento da compreensão geométrica.

3.3.2 Implicações dos ambientes de geometria dinâmica no ensino e na aprendizagem da Geometria

Dada a importância e relevância da utilização educativa dos ambientes de geometria dinâmica, muitos são os documentos de orientações curriculares para o ensino da Matemática que reforçam a necessidade de recorrer a estes ambientes.

> O desenho, a manipulação e a construção no computador de objectos geométricos permitem a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso de raciocínio formal. Actualmente, ferramentas computacionais, designadas por ambientes de geometria dinâmica (*Cabri-Geometre, Geometer's Sketchpad,...*) são geradoras de uma nova abordagem no ensino e aprendizagem da geometria. Permitem a construção e a manipulação de objectos geométricos e a descoberta de novas propriedades desses objectos, através da investigação das relações ou medidas que se mantêm invariantes. (Abrantes e outros, 1999, p. 68)

> Os alunos devem recorrer a *software* de Geometria Dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação. (...) Tanto os recursos computacionais, como os modelos geométricos concretos permitem desenvolver a intuição geométrica, a capacidade de visualização e uma relação mais afectiva com a Matemática. (Ministério da educação, 2007, p. 51)

Na realidade, a utilização destes recursos tem implicações no ensino da Matemática, em particular da Geometria, nomeadamente ao nível dos objectivos gerais do ensino da Matemática e do propósito principal de ensino da Geometria, do Programa de Matemática do Ensino Básico (2007).

No que respeita aos objectivos gerais de ensino da matemática, os AGD podem contribuir para a sua concretização, dado que, se utilizados de uma forma adequada, entre outras funções, podem ajudar os alunos:

- no desenvolvimento da *compreensão matemática*, em particular auxiliando os alunos a entender o significado dos conceitos, a reconhecer regularidades e a compreender relações, porque proporcionam a criação de contextos, que como foi referido anteriormente, permitem o desenvolvimento de processos reflexivos sobre a actividade de conjecturar e de compreender relações, possibilitando, por isso, uma tomada de consciência dos diferentes conceitos que estão a ser abordados e um refinamento do próprio processo de pensamento. Isto porque, como refere Laborde (2005), a partir da análise de alguns estudos, os AGD quebraram a separação tradicional entre a acção (como manipulação associada à observação e descrição) e a dedução (como actividade intelectual separada dos objectos específicos) e fortaleceram os movimentos entre os domínios espaciais e teóricos.

- a lidar com as ideias matemáticas em diversas *representações*, nomeadamente a traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra e a elaborar e usar as representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas. Para isso, os alunos necessitam de lidar com diversos tipos de representação. O carácter dinâmico do AGD potencia a exploração de representações dos objectos geométricos (e não só) e a sua inter-relação. O facto de possibilitar a exploração de problemas e conceitos matemáticos e executar procedimentos rotineiros de forma mais rápida, confere aos alunos uma maior disponibilidade para tomar decisões, reflectir e analisar as diferentes formas de representação. A projecção ou a discussão propiciada por esta reflexão e análise é expressa através de notações que envolvem a linguagem formal da matemática e as criadas e partilhadas pelos alunos. Este processo conduz a uma actividade matemática mais participada. As representações dos diagramas dinâmicos, incluindo as formas gestual e linguística, têm de ser discutidas e mediadas para que a comunicação seja efectivada e o significado das ideias e conceitos matemáticos sejam compreendidos e partilhados por todos. Portanto, o ADG potencia a combinação e a articulação de diferentes tipos de representação e maximiza a capacidade de criação de significados mais facilmente assimilados.
- no desenvolvimento do *raciocínio* matemático, em particular, a reconhecerem e a apresentarem generalizações matemáticas e exemplos e contra-exemplos de uma afirmação, a desenvolverem e a discutirem argumentos matemáticos e a formularem e a investigarem conjecturas matemáticas. Como Battista (2007) refere, citando Mariotti (2001), o AGD proporciona a exploração das configurações geométricas e a identificação de conjecturas. Em consequência, os alunos necessitam de comunicar estas descobertas e conjecturas. Essa comunicação pode envolver a justificação de raciocínios que os alunos elaboraram para chegarem àqueles resultados, apresentando argumentos para as opções tomadas durante a actividade matemática. Paiva (2008), referindo Fonseca (2004), diz que os AGD, quando bem explorados, ajudam os alunos no desenvolvimento do seu raciocínio e melhoram o seu poder de argumentação.

Relativamente ao propósito principal de ensino para a Geometria, que "constitui a orientação principal de fundo que deve nortear o ensino" (Ministério da Educação, 2007, p. 1) deste tema matemático, no 3.º ciclo do ensino básico, é apresentado o seguinte:

> Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a compreensão das transformações geométricas e da noção de demonstração, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos. (Ministério da Educação, 2007, p. 51)

Pretende-se, portanto, que os alunos desenvolvam, entre outros aspectos, a visualização e o raciocínio geométrico e compreendam e sejam capazes de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas.

A construção e a modificação dos desenhos e os movimentos inerentes ao AGD possibilitam uma mais fácil visualização das propriedades e das relações geométricas, que pode passar inicialmente por uma fase de conjectura, testagem e justificação. A manipulação dos desenhos favorece a criação de imagens mentais, contribuindo, assim, para o desenvolvimento da capacidade de visualização e de raciocínio espacial.

Muitos investigadores têm manisfestado preocupação com a forma como o AGD é utilizado em sala de aula. Argumentam que não deve ser conceptualizado como uma ferramenta para meramente fazer de uma forma mais rápida, melhor ou num grau maior do que já se fazia, por exemplo, com o papel e lápis numa abordagem tradicional do ensino da Geometria (Battista, 2007) ou, como muitos professores referem, para melhorar a atmosfera de sala de aula, aumentar a motivação dos alunos e para mostrar muitos exemplos de imediato.

O AGD deve ser conceptualizado para ser utilizado num ambiente ou contexto em que seja possível que os alunos explorem imagens ou desenhos que conduzam à discussão, análise e comunicação das suas descobertas. De forma a assegurar este foco e uma actividade produtiva (Sinclair, 2003), é fundamental, entre outros aspectos, repensar a natureza das tarefas a realizar em sala de aula, bem como a sua gestão e a interacção entre os diferentes intervenientes (Amado, 2007).

Seguindo a proposta de Laborde (1993), referenciada por Jones (2001), o desafio para os alunos é produzir desenhos que fazem uso das relações geométricas, em vez de um desenho, que apenas olha para o que é requerido e falha no teste de arrastamento. Nesse sentido, propõe que se deve conceber problemas ou situações que envolvam tarefas de "caixa-preta" (1998). Estas são tarefas que envolvem a interpretação de desenhos em ambientes de geometria dinâmica (no caso dos estudos desta investigadora foi usado o Cabri-Geometre) e a sua construção por meio de primitivas geométricas do *software*. Estas situações envolvem uma diversidade de operações, nomeadamente a exploração de desenhos desconhecidos e do seu comportamento quando arrastados no AGD e uma análise das propriedades geométricas, que ficam invariantes quando estes são movimentados ou a verificação de quando é que uma propriedade geométrica de um desenho é satisfeita.

Este tipo de tarefas "parece contribuir, de uma forma muito apropriada, para a construção de relações entre propriedades espaciais e visuais, por um lado, e do conhecimento geométrico, por outro" (Laborde, 1998, p. 119).

Sistematizando, as tarefas devem ser cuidadosamente concebidas de modo a encorajar os alunos a trabalharem a Geometria, utilizando o AGD como ferramenta, de modo a que, através das suas potencialidades, possam explorar conjecturas, pensar em conceitos, propriedades e relações geométricas. Por outro lado, importará criar um ambiente de sala de aula que potencie a explicação matemática das conclusões que os alunos vão retirando da actividade matemática, proporcionada pelo *feedback* do AGD. A partir da interacção com os diagramas dinâmicos os alunos podem fazer progressos na formulação de explicações matemáticas e chegar a conceitos, propriedades e relações geométricas (Jones, 2001). Todos estes aspectos são importantes no desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Apesar de não ser objecto deste estudo, importa referir que a gestão destas tarefas, em sala de aula, envolve algum nível de incerteza em termos do trabalho do aluno e, também, do seu pensamento durante a actividade. Por isso, durante a concepção das tarefas é importante que o professor antecipe as respostas dos alunos, preparando diversas soluções para as tarefas recorrendo a diversas estratégias e elaborando questões a colocar aos alunos e decisões a tomar para ajudá-los a ultrapassar impasses que surjam durante a actividade. Desta forma, o professor estará activamente a precaver situações imprevistas que minam o processo de construção do significado e a aprendizagem.

Em conclusão, os ambientes de geometria dinâmica são importantes ferramentas no desenvolvimento do raciocínio geométrico, pois permitem a construção e a manipulação de figuras geométricas, a experimentação e a observação. Mas para isso, por um lado, é fundamental um investimento no conhecimento dos princípios e das características do AGD que está a ser utilizado, para que se possam construir tarefas e actividades conducentes à criação efectiva, progressiva e estruturada do conhecimento geométrico. Por outro lado, importa conceber tarefas adequadas, em que o AGD é parte integrante da actividade matemática, de modo a potenciar o desenvolvimento do pensamento do aluno e, em particular, uma aprendizagem significativa da Geometria.

3.4 O significado matemático numa perspectiva de aprendizagem

> "Encontrar formas de construir a matemática dos alunos em vez de as ignorar" (Noss, 1994)

Este apelo de Richard Noss alerta para a necessidade de compreender como é que os alunos estruturam mentalmente as suas experiências matemáticas e como é que raciocinam com estas estruturas na aprendizagem. Esta preocupação coloca algumas questões: como é que os alunos constroem significados matemáticos em situação de sala de aula? Que ideias matemáticas são relevantes na construção desses significados? Como compreender essas ideias matemáticas construídas pelo aluno em actividade?

As ideias matemáticas, que são resultado de uma coordenação de significados, podem ser uma palavra, um esquema ao qual está associado uma ideia, um gráfico ou um gesto, que emergem das experiências vividas pelo aluno. Desta forma, a construção de conceitos matemáticos pode ser vista como uma extensão da forma de pensar e de interpretar essas experiências.

Esta perspectiva sobre o processo de construção do significado matemático em situações de aprendizagem, acarreta a necessidade de se clarificarem alguns conceitos com que se decide abordar este tema, uma vez que não há aspectos definidores para se compreender o pensamento matemático do aluno, o que se tem são aspectos característicos que nos ajudarão a compreender essa construção das ideias matemáticas.

Para melhor se perceber esta concepção, Mason (1987) utiliza a metáfora da viagem para se referir ao pensamento matemático, quando diz que o pensamento matemático é como ir numa viagem:

> Fazer matemática com outros é como fazer uma viagem em conjunto, com todos os entendimentos e desentendimentos que têm os viajantes. Escrever sobre matemática é como escrever o relato da viagem realizada. Ensinar matemática envolve ser um guia e simultaneamente um viajante experimentado que ouve criticamente os novos relatos. A metáfora incorpora o papel dos símbolos como o desbravar do caminho e as imagens que se vêm da janela, e enfatiza a importância tanto da construção pessoal do significado como da imagem mental em ser matemático. Sugere também que comunicar ideias matemáticas é como mostrar fotografias das férias a um amigo — tu podes ver, ouvir, cheirar a partir de uma remeniscência associada a cada fotografia, enquanto que o teu amigo tem que raciocinar para poder perceber o que é mostrado. (Mason, 1987, p. 77)

Esta metáfora, que é bastante interessante, permite identificar alguns dos conceitos que é necessário clarificar e desenvolver neste capítulo. Se o professor se posicionar como sendo o guia ou o viajante experimentado, tem de ter consciência das imagens que o viajante – aluno – constrói e os critérios que cria, à medida que vai descrevendo a sua viagem – desenvolve o seu pensamento matemático e constrói as ideias matemáticas – para decidir como partilhar essa imagem. Isto implica que, do ponto de vista da aprendizagem, a nossa preocupação terá de girar em órbita da compreensão das ideias construídas pelo aluno e ver como é que ele constrói esses signifcados, de forma a ajudá-lo no percurso do desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Portanto, por um lado, é essencial abordar-se o que se entende por compreensão. Tal como refere Carreira (1998), Sierpinska (1994) realça que a palavra compreensão "comporta uma grande obscuridade e reforça esta ideia quando sugere, por exemplo, que compreender o fenómeno do pôr-do-sol ou compreender uma descrição poética do ocaso são experiências mentais evidentemente diferentes" (Carreira, 1998, p. 106). Por outro lado, quando as preocupações se centram na compreensão dos significados ou na construção desses significados, há a necessidade de esclarecer esta relação entre a noção de significado e compreensão. Por último, importa abordar o papel das representações, uma vez que esta é uma forma de descrever o que acontece nos processos mentais do aluno e um meio para melhor compreender as suas ideias matemáticas na actividade de construção de conhecimento. Não pretendo, em todo o caso, enveredar por uma discussão minuciosa relativamente ao estudo das representações em Matemática, que constitui um tema complexo e alvo de considerável teorização no campo da Educação Matemática, optando por abordar este tema de forma sintética no sentido de me ajudar a tomar as representações como meio de aceder às ideias e ao raciocínio dos alunos.

3.4.1 Compreensão: o que é?

Quando se utiliza a palavra "compreensão", colocam-se sempre algumas dúvidas, sendo aliás muitas vezes afirmado que esta palavra é muito poderosa. Na realidade ao consultar um dicionário[5] a palavra compreensão aparece como acto ou efeito de compreender ou acto ou facto de perceber, aprender alguma coisa. Portanto, a compreensão aparece como um acto e, como tal, a experiência mental e emocional de compreender fenómenos depende da situação. Deste modo, e seguindo a posição de Sierpinska (1994), assume-se que a "compreensão" pode ser vista como uma experiência ou uma potencial experiência mental. Por exemplo, "quando se diz que uma pessoa, que conhece as tabelas da multiplicação, compreende que 7 vezes 9 é 63, pode-se afirmar que, naquele momento, considera que 7 vezes 9 e 63 são iguais, ou que é capaz de o fazer em qualquer altura, por ter reflectido já sobre isso no passado" (Sierpinska, 1994, p. 2).

Este exemplo mostra que existem experiências mentais efectivas, ou seja, actos de compreensão, e algo mais abrangente, "uma compreensão", que tem a ver com uma potencial experiência para o acto de compreensão quando necessário. Deste modo, tais actos, independentemente do seu nível, parecem pertencer à área do conhecimento: são o recurso para a actividade do conhecer.

Um outro aspecto a considerar, em especial na educação, é o chamado processo de compreensão. O processo de compreensão é entendido como uma actividade cognitiva que tem lugar ao longo de grandes períodos de tempo, no qual se vão

[5] Dicionário de Língua Portuguesa Contemporânea, da Academia das Ciências de Lisboa

realizando actos de compreensão que possibilitam adquirir compreensões para posteriormente serem utilizadas no desenvolvimento da actividade.

Na Matemática fala-se muito em compreender um conceito matemático, como volume, função ou derivada, mas quando se refere a compreensão de um dado conceito, que aspectos se está a salientar? Carreira (1998) advoga que há pelo menos duas perspectivas distintas em que esta preocupação se enquadra.

> Uma delas, assume o ponto de vista segundo o qual um conceito é um objecto teórico acabado, com uma existência própria, que pode ser denominado, definido ou descrito de alguma forma, que está relacionado com outros conceitos e pode ser interpretado no contexto de várias situações.
>
> Uma outra possibilidade será admitir que a compreensão de um conceito está na capacidade de dar sentido àquilo que está na base do próprio conceito, isto é, o conceito está compreendido na medida em que ele emergir como resultado da compreensão de uma dada situação. Desse modo, a compreensão consistiria, fundamentalmente, em descobrir o que está na origem do conceito. (Carreira, 1998, p. 107)

Isto significa que a compreensão de um conceito matemático pode consistir em identificar algumas propriedades características do objecto de compreensão, por exemplo, do conceito de derivada, ou então este conceito pode ser compreendido a partir de um fenómeno ou situação, isto é, a sua compreensão pode consistir em encontrar a explicação sobre os motivos de determinado acontecimento, por exemplo a passagem de uma taxa de variação média a uma taxa de variação instantânea, na análise da variação de uma função.

É muito importante esta distinção, "entre 'o que se compreende' e 'a base sobre a qual se compreende'" (Carreira, 1998, p. 107), uma vez que tem implicações muito objectivas na aprendizagem da matemática. No que se refere à compreensão de relações geométricas, parece muito clara esta distinção. Compreender a ideia de mediatriz de um segmento é certamente diferente se essa ideia for baseada na definição formal de mediatriz ou se for baseada na análise de propriedades desta recta em situações de manipulação de uma figura num ambiente de geometria dinâmica. Por exemplo, compreender que a mediatriz de qualquer corda de uma circunferência passa pelo centro é um acto de compreensão com importantes reflexos no "que se compreende" sobre o conceito de mediatriz e ao mesmo tempo sobre propriedades das cordas de uma circunferência, sobre o conceito de equidistância entre pontos, sobre relações de perpendicularidade, etc.

Esta ideia, da base sobre a qual se desenvolve a compreensão, está portanto em relação muito estreita com o que foi discutido relativamente ao potencial dos AGDs. Os actos de compreensão que podem ser realizados com base no arrastamento de figuras, na construção das mesmas a partir de primitivas geométricas, na análise de relações disponíveis pela medição automática, e na observação dos efeitos obtidos pela manipulação (retorno do software) constituem parte essencial da compreensão que os alunos desenvolvem acerca dos conceitos, propriedades dos objectos e relações geométricas.

3.4.2 Relação entre compreensão e significado

A maior parte da investigação nesta área era inicialmente feita em torno da compreensão dos alunos sobre objectos matemáticos (como por exemplo, limites, números negativos) e fragmentos da linguagem matemática (por exemplo, argumentos do tipo "se … então"), pelo que a metodologia utilizada estava muito agarrada ao conteúdo matemático e a dados relacionados com a capacidade de abstracção e com a medida de competência e, consequentemente, davam muito pouca atenção ao *conhecimento prévio* do aluno. Assim, durante bastante tempo, a investigação foi dominada pela observação cuidada dos erros cometidos pelos alunos. Nos anos 80, quando a investigação qualitativa começou a ser considerada na educação matemática, passou a haver uma preocupação com as estratégias de resolução dos alunos, nomeadamente à volta da resolução de problemas. Só muito recentemente, na década de 90, foram publicados trabalhos nesta área, dos quais realço o estudo desenvolvido por Carreira (1998). Tal como esta autora, para desenvolver o meu estudo, preciso de clarificar com algum grau de precisão a ideia de significado para depois procurar uma relação entre este conceito e a compreensão.

Não se pretende aqui discutir o significado da palavra "significado", mas sim analisar o significado de qualquer coisa. Por exemplo, uma pergunta como "qual é o significado de triângulo equilátero?" faz todo o sentido. Da mesma maneira, perguntar "o que é significado?" não tem muito interesse mas a questão "o que é que tem significado?" já é pertinente, principalmente em termos da compreensão matemática dos alunos em determinada situação.

De acordo com Sierpinska (1994) parece ser o signo que é o portador de significado para o indivíduo que o interpreta, sendo que Eco (1973/1997) o encara como o elemento fundamental do processo de significação. Para Charles S. Peirce, o signo é uma representação: substitui qualquer coisa por outra. Neste sentido, signo é a relação triádica – representação que é uma mediação entre dois elementos por um terceiro (ver figura 3.1).

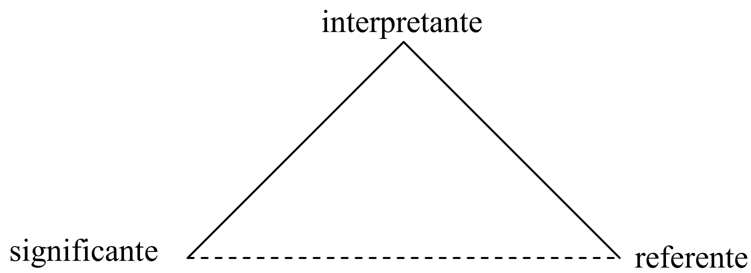


Figura 3.1. Esquema utilizado por Carreira (1997) para o triângulo semiótico

Para melhor se entender estas relações e o processo de significação, considere-se o conceito de triângulo equilátero. O significante "triângulo equilátero" não significará nada para alguém que não conheça o código linguístico português. Para lhe explicar o significado de "triângulo equilátero" pode-se, caso se conheça o seu código linguístico, fornecer-lhe um interpretante, por exemplo, "equilateral triangle", em inglês. Pode-se também dar uma explicação baseada nas propriedades relacionadas com o triângulo equilátero, por exemplo, figura com três lados iguais e três ângulos iguais, ou mostrar um desenho onde esteja representado um triângulo equilátero, ou apontar diversos objectos relacionados com a sua experiência e que tenham forma do triângulo equilátero, ou ainda dar outros interpretantes. Todos estes interpretantes fazem com que esse alguém construa uma ideia de triângulo equilátero e seja capaz, noutras situações, de reconhecê-lo e utilizá-lo como significante na sua linguagem, inclusivé como interpretante para outros significantes. Portanto, "o significado de um signo só pode ser interpretado por outro signo, que é o interpretante" (Sierpinska, 1994, p. 14).

A teoria de Peirce sobre o processo de significação sublinha dois aspectos essenciais sobre o significado. O primeiro é a ideia de que o significado não é dado, mas antes implica uma interpretação por parte do sujeito, isto é, a construção de um sentido (interpretante) que estabelece a ligação o significante (palavra, expressão, símbolo, notação, esquema, figura, gesto, imagem, etc.) e o objecto (referente) a que este se refere; portanto, segundo a sua teoria há a presença de uma terceira entidade mediadora na produção do significado. Então, dizermos que um triângulo equilátero é aquele que tem os lados e os ângulos todos iguais, não é sinónimo de "transmitir" ou "revelar" o significado de triângulo equilátero que outro sujeito irá simplesmente "adquirir". Em segundo lugar, esta teoria pressupõe uma evolução contínua na construção do significado. Quer isto dizer que cada interpretante se constitui como um novo signo que pode, por sua vez, ser alvo de novas interpretações e assim por diante, num processo infinito. Por exemplo, "ângulos todos iguais", quando referente a triângulo equilátero, pode constituir-se como um interpretante para um outro signo, designadamente "ângulos de 60º", ao associar-se a esse interpretante a referência à soma dos ângulos internos de um triângulo. Trata-se assim de perspectivar o significado como uma cadeia de interpretantes que se vão sucedendo em novos processos de significação e alargando o significado de cada signo: triângulo equilátero, ângulos todos iguais, ângulos de 60º, etc., etc.

De forma a tornar consistente a ligação entre significado e compreensão, admite-se que o objecto de compreensão é o mesmo que o objecto de significado: é o signo. Assim, quando se fala em compreender um conceito ou uma ideia, pensa-se que o conceito e a ideia são a base da compreensão e aquilo que se pretende com a compreensão é o significado dos signos que para nós representam essas ideias e conceitos.

Sierpinska (1994) salienta que, por um lado, a compreensão pode ser a obtenção de significado ou sentido (saber a verdade). Por outro lado, a compreensão pode ser a interpretação de tudo aquilo para o qual o pensamento é direccionado num acto intencional, podendo ser verdadeiro ou falso, onde a compreensão revela um significado (é um movimento daquilo que o texto diz para aquilo de que o texto fala).

> Para Sierpinska (1994), compreender não é equivalente a captar o significado, ou seja, a compreensão não pode ser equiparada à assimilação (correcta ou incorrecta) do significado. Ao invés, o significado resulta da compreensão, isto é os significados de um determinado conceito, ideia ou problema, representam uma certa forma de compreensão que está intimamente ligada à extracção de certas características essenciais do

> conceito, ideia ou problema, mediante actos de compreensão. (Carreira, 1998, p. 107)

3.4.3 Representações

Uma forma de melhor compreender as ideias e conceitos matemáticos construídos pelos alunos é estudar as representações que estes utilizam ou produzem, uma vez que estas ajudam a perceber o que se passa "dentro do aluno". Por exemplo, Sierpinska (1994) refere as representações como as bases da compreensão.

Nos últimos anos têm surgido alguns estudos sobre a representação na aprendizagem da matemática e, consequentemente, diversas abordagens sobre o conceito de representação.

Como refere Domingos (2001), para Rico, representar é substituir, isto é, consiste em dar presença a algo que está ausente. Esta noção vai na linha da definição apresentada por Davis et al. (1982) que, de acordo com Janvier (1987), tem a seguinte formulação:

> Uma representação pode ser uma combinação de qualquer coisa escrita no papel, qualquer coisa existente em forma de objecto físico e uma combinação de ideias construídas cuidadosamente nas nossas mentes. (p. 68)

Contudo, Janvier (1987) acredita que este conceito tem de ser alargado e refere que a representação pode ser olhada como um tipo de iceberg em forma de estrela que mostra um vértice de cada vez. "A tradução pode consistir em ir de um ponto para o outro. Esta descrição de representação tem a vantagem de insistir numa característica global e "inseparável" de um conjunto de ilustrações" (p. 69) (figura 3.2).

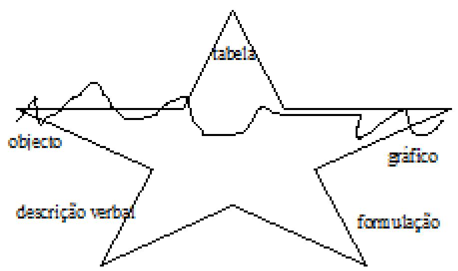


Figura. 3.2. Esquema apresentado por Janvier (1987) para definir representação

Para se compreender as representações que o aluno constrói, vários autores (entre outros, Dufour-Janvier e Bednarz, 1987; Hiebert e Carpenter, 1992) distinguem representação externa de representação interna ou representação mental.

A primeira diz respeito a estruturas simbólicas externas, como palavras, diagramas, gráficos, equações, que têm a finalidade de representar externamente uma "certa" matemática. A representação interna ou representação mental inclui as construções do aluno, bem como a sua linguagem, as suas imagens mentais e representações espaciais, as suas estratégias, que correspondem a formulações internas que construíram sobre as ideias ou conceitos matemáticos.

Deste modo importa entender as representações internas do aluno, de forma a ser-se capaz de analisar como é que este representa internamente os conceitos – as suas explicações do significado, as relações estruturais que desenvolve e, como é que liga as diferentes representações umas com as outras.

Contudo, importa ter em atenção que "uma representação não se representa a si própria – necessita de se interpretar e, para ser interpretada, necessita de um intérprete". (Glasersfeld, 1987, p. 216). Por exemplo, mesmo uma fotografia não é uma imagem de qualquer coisa até que uma pessoa descreva as cores e as formas que identifica e que percebe a partir das coisas já construídas em experiências prévias.

Um outro aspecto também a salientar é que não se consegue observar directamente nenhuma representação interna, no entanto podemos fazer inferências sobre as representações internas, na base da sua interacção com, discurso sobre ou na produção da representação externa, não esquecendo, como salienta Mason (1987), que existe um desfasamento entre "ver" qualquer coisa, ser capaz de a "dizer" e ser capaz de "escrever" o que se disse em figuras, diagramas, palavras e símbolos.

Resumindo, é fundamental compreender-se os raciocínios que o aluno desenvolve durante a sua actividade e interagir com ele de forma a clarificar significativamente as suas representações internas. Por outras palavras, é importante acompanhar e discutir o processo de construção das ideias matemáticas desenvolvidas pelo aluno, que estão a ter lugar entre a manipulação e a expressão das imagens mentais do aluno (isto é, das suas experiências interiores).

Assumindo a mesma linha de pensamento de Lakoff e Johnson, como é referido por English (1997a), deveremos encarar o raciocínio como incorporado e imaginativo e não, segundo a noção tradicional de raciocínio, como algo "abstracto e desincorporado". Assim, de acordo com esta perspectiva, por um lado, o raciocínio, envolve estruturas que emergem das nossas experiências corpóreas a partir da forma como interagimos com o ambiente. Por outro lado, é imaginativo no sentido em que utiliza muitos planos que estruturam as nossas experiências concretas as transforma em modelos para o pensamento abstracto. Por isso, para estes autores, estas "ferramentas de pensamento" incluem as analogias, as metáforas e as imagens.

3.4.3.1 __Analogias__

Um sinónimo de analogia é "relação de semelhança entre objectos diferentes, quer por motivo de semelhança, quer por motivo de dependência causal"[6]. Deste modo, o raciocínio por analogia é normalmente definido pelo raciocínio através do qual se infere, de uma semelhança comprovoda, uma não comprovada, ou seja, é "geralmente definido como a transferência de informação estrutural a partir de um sistema, a origem, para outro sistema, o alvo (Gentner, 1983, 1989; Vosniadou, 1989)" (English, 1997a, p. 5). Esta transferência de conhecimento é feita a partir de processos de correspondência, pelo que implica encontrar correspondências relacionais entre os dois sistemas. Portanto, a analogia concreta ou baseada em imagens é a origem e o conceito a ser aprendido é o alvo. Desta forma, a analogia pode ser um espelho da estrutura do conceito e, como tal, "permite que o aluno utilize a estrutura da representação para construir o modelo mental do conceito" (English, 1997b, p. 198).

Concretizando, esta autora, dá um exemplo de como a interacção entre a origem e o alvo cria uma nova estrutura, quando são utilizados blocos de base 10 para trabalhar o significado do numeral de dois dígitos, o 27 (ver Figura 3.3).

---

[6] Este sinónimo para analogia foi retirado do Dicionário da Porto Editora

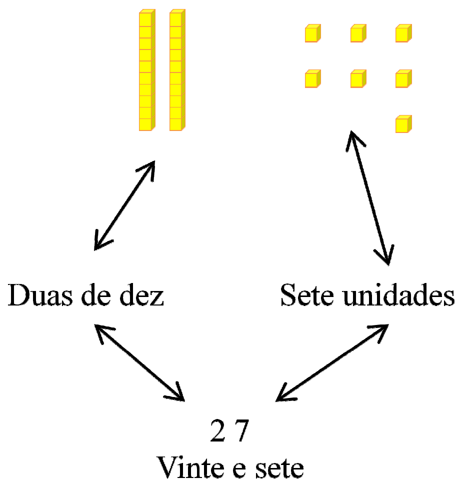


Figura 3.3. Representação analógica de um número de dois dígitos (English, 1997b, p. 198)

Aqui, os dois blocos de 10, representam o dígito 2 no lugar das dezenas do numeral, ou seja, existe *mapeamento* da origem, os dois blocos de 10, ao alvo, o dígito 2. Analogamente, os 7 blocos simples, representam o 7 no lugar das unidades do numeral. Para que o aluno faça este *mapeamento* é fundamental que compreenda a estrutura de origem e seja capaz de reconhecer a correspondência entre a origem e o alvo, isto é, não pode existir ambiguidade nos mapeamentos que são feitos. Portanto, este tipo de actividade com representações de base 10, permite que o aluno desenvolva um modelo mental de número simbólico.

Um outro processo de raciocínio por analogia que Rattermann (1997) salienta é a utilização do conhecimento do aluno para transformá-lo em novo conhecimento. Por exemplo, Davis e Maher (1997) descreveram uma experiência, que realça este tipo de analogia, na qual alunos do 1º ciclo conjecturaram e "demonstraram" alguns teoremas sobre números pares e ímpares: par + par = par; ímpar + par = ímpar; e, ímpar + ímpar = par. Para os alunos desenvolverem estas ideias, a professora ajudou-os a construir representações mentais que lhes fossem tão familiares, que as pudessem utilizar de maneira original e criativa. Na escola onde decorreu esta actividade, os alunos saíam da sala de aula e andavam pelos corredores em pares de dois e, por vezes, este arranjo era modificado, porque quando faltava um aluno, o seu par ficava sozinho. Portanto, os alunos estavam muito familiarizados com esta situação. Desta forma, a professora definiu um número como par se no grupo de alunos todos tiverem par. Um número era ímpar se tal grupo tivesse um aluno sozinho. Foi a partir desta situação que a professora trabalhou os teoremas sobre números pares e ímpares. Esta experiência ilustra como utilizando experiências de vida dos alunos é possível pensar sobre situações matemáticas.

Resumindo, neste ponto, apresentei uma possível abordagem ao raciocínio por analogia, assumindo uma abordagem construtivista, que contém aspectos da teoria Piagetiana e de Vygostsky, como é expresso seguidamente:

> (…) visão construtivista Piagetiana, a qual propõe que a criança encontra activamente, depois de uma minuciosa pesquisa, conhecimento, em vez de absorver passivamente informação a partir do ambiente. (…) A influência Vygostskiana é particularmente evidente na concepção dos professores como guias que levam os alunos a chegarem ao seu próprio conhecimento, em vez de se considerarem especialistas que transmitem os seus conhecimentos para alunos passivos. (Rattermann, 1997, p. 259)

3.4.3.2 Metáforas conceptuais

Quando se fala em metáfora, associa-se normalmente este conceito a uma característica da linguagem, a uma figura de estilo, em vez de ser vista como uma forma de pensamento ou acção. Mas Lakoff e Johnson (1980) têm notado, pelo contrário, que a metáfora está impregnada no dia-a-dia, não apenas na linguagem, mas também no pensamento e nas acções. Defendem que os conceitos que guiam o pensamento não são apenas objectos do intelecto, dominam também as funções de todos os dias, uma vez que estruturam o que compreendemos, como os obtemos no mundo e como os relatamos a outros. Deste modo, o nosso sistema conceptual, isto é, a nossa maneira de pensar, desempenha um papel central na definição da nossa realidade de todos os dias. Como defendem que o nosso sistema conceptual é metafórico, então a forma como pensamos, como agimos e experimentamos é uma questão de metáforas.

> Uma imensa rede de metáforas segundo as quais vivemos está profundamente incutida nos nossos pensamentos, ideias e linguagem, dando-lhes forma e estruturando as nossas acções e modos de conceber o mundo. A introdução de novos conceitos metafóricos e o abandono de outros corresponde geralmente a uma mudança de linguagem, que não é mais do que a revelação de uma alteração do nosso sistema conceptual e das percepções e acções a que esse sistema pode dar origem (Crowther, 1993). (Carreira, 1998, p. 89)

Se se pensar na Matemática, também esta tem uma natureza metafórica (Sierpinska, 1994), pois muitos dos “nomes dados a determinados conceitos guardam os traços das metáforas que anunciaram a sua existência" (Carreira, 1998, p. 117). É o caso, por exemplo, dos termos sucessão limitada ou triângulo escaleno[7]. Não é de estranhar que muitos termos matemáticos sejam de natureza metafórica, uma vez que muita da aritmética e da geometria emergiram de actividades sociais da vida de todos os dias[8].

> (…) muita da matemática nasceu de problemas directamente relacionados com a experiência humana e é uma expressão humana, uma construção social, não será de estranhar que diversos termos matemáticos sejam ricos em imagens e metáforas e tenham uma natureza fundamentalmente metafórica. (Carreira, 1998, p. 113)

Pelas razões expressas faz todo o sentido abordar as metáforas conceptuais que se caracterizam por serem uma correspondência entre dois domínios conceptuais. Trata-se de uma forma de compreender os conceitos menos claramente delineados e, normalmente menos concretos, em termos dos conceitos mais delineados e mais concretos, geralmente mais próximos da nossa experiência. Isto significa que a maioria dos conceitos são compreendidos em função de outros, a partir da construção de uma estrutura de correspondência que estabelece uma relação entre objectos do domínio-origem e objectos do domínio-alvo.

Concretizando o que se disse anteriormente, desenvolvem-se alguns exemplos variados de metáforas conceptuais que retirei do estudo desenvolvido por Lakoff e Johnson (1980), no qual analisaram pormenorizadamente a imensa variedade de metáforas que existem no nosso sistema conceptual.

---

[7] Segundo Carreira (1998), Lopez-Real (1990) nota que a palavra escaleno resulta da palavra grega *skalenos*, que significa coxo. Um triângulo escaleno, que tem os lados todos diferentes é, metaforicamente, um triângulo coxo.

[8] O desenvolvimento da aritmética está associado a problemas de cálculo, a taxas, como também a problemas artísticos e actividades de astronomia. A geometria está relacionada com o estudo da terra, com a construção e a engenharia. Segundo Restivo (1993), apesar de ser uma conjectura controversa, Seidenberg argumenta que formas fundamentais da geometria como o círculo tiveram origem em actividades sociais.

Exemplo 1: Tempo é dinheiro

Partindo do princípio que há conceitos metaforicamente estruturados e que as expressões metafóricas na nossa linguagem estão ligadas a estes conceitos, isso significa que podemos utilizar expressões linguísticas para estudar a natureza destes conceitos que estruturam as nossas actividades diárias. O conceito metafórico, TEMPO É DINHEIRO, é um bom exemplo, porque é reflectido na nossa linguagem diária por uma variedade de expressões:

- Tu estás *a desperdiçar* o meu tempo.
- Este instrumento *salvar-te-á* horas.
- Eu não *tenho* o tempo para *dar-te*.
- Como é que tu *despendes* o teu tempo nestes dias?
- Eu tenho *investido* muito tempo nela.
- Eu não *tenho tempo suficiente* para *despender* para aquilo.
- Tu estás a *correr fora* do tempo.
- Eu *perdi* muito tempo quando estive doente.
- *Muito obrigado pelo* seu tempo.

Evidentemente, que esta metáfora só faz sentido na nossa cultura ocidental, onde, por um lado, o trabalho é associado com o tempo que leva a fazer qualquer coisa e o tempo é precisamente quantificado, onde é costume pagar às pessoas à hora, semana ou mês e, por outro lado, na nossa sociedade o dinheiro é fundamental para a nossa sobrevivência, influencia a nossa forma de estar na vida, posiciona-nos perante o meio em que vivemos, etc.

Exemplo 2: Sente-se no lugar junto do senhor de castanho

Nem sempre é fácil identificar um certo tipo de metáforas principalmente se não se estiver enquadrado num contexto para se compreender o que se pretende com determinada metáfora.

Numa situação isolada esta metáfora não tem qualquer sentido, visto que a expressão "lugar junto do senhor de castanho" não é uma forma convencional de se referir a um objecto. Mas a afirmação faz todo o sentido no contexto em que está a ser utilizada. No seguimento deste tipo de afirmações que não têm sentido ou significado fora do contexto, tem-se outras afirmações onde uma frase simples pode significar diferentes coisas para diferentes pessoas. Por exemplo, "o produto que se obtém é irracional". Para um professor de Matemática isto significa que o resultado de uma multiplicação entre dois números é um número irracional. Enquanto que para um director de uma empresa, esta afirmação pode querer dizer que o resultado (produto) a que chegaram na elaboração de um projecto não faz sentido nenhum (irracional).

Exemplo 3: Mais é para cima e Menos é para baixo ou Feliz é para cima e Triste é para baixo

O tipo de metáfora que retrato neste exemplo tem uma base nas nossas experiências físicas e culturais e tem a ver com uma certa orientação espacial, como, neste caso, cima-baixo, ou dentro-fora, frente-trás, central-periférico.

Na Matemática, em particular, muitos conceitos são baseados em metáforas que têm uma base física ou cultural. Especificando melhor, pode-se pensar que o conceito metafórico "número irracional" tem uma base cultural, uma vez que este termo está associado a números que são dizimas infinitas não periódicas, no qual não se consegue encontrar um padrão de repetição, não se traduzindo numa razão.

Existem ainda outros conceitos metafóricos que têm uma base física, bastando pensar no conceito de "tangente", uma vez que tanger significa tocar. Esta situação reflecte-se na definição de tangente como sinónimo de tocar num só ponto, de uma forma precisa e única.

> Construímos metáforas para ligar as nossas experiências corpóreas de qualquer coisa ao nosso pensamento mais abstracto e para "dar forma, estrutura e significado para a nossa imaginação". (Lim, citando Sfard, 1997, p. 47)

*3.4.3.3 **Imagens***

Quando se fala em imagem, pensa-se normalmente numa figura ou fotografia. Contudo, este termo está associado a significados muito mais poderosos, nomeadamente o de representação, reprodução de uma forma ou um objecto, representação criada por um artista através de uma obra de arte, representação da imaginação ou a reprodução mental de alguém. Isto significa que imagem pode ser vista de diversas formas, por exemplo, concreta, dinâmica e reveladora de padrões.

Para Presmeg (1997), uma imagem visual "é uma construção mental que representa (torna visível) informação visual ou espacial" (p. 303). Esta definição está em consonância com a dada por Wheatley (1997):

> (…) uma imagem é uma construção mental (…). As imagens são construídas fora da experiência diária e podem ser representadas na ausência de sensações e podem também ser transformadas. (p. 282)

As imagens ajudam o raciocínio matemático, porque as suas estruturas internas podem ser figurativamente estendidas para desenvolver a compreensão das relações formais entre vários conceitos e proposições. Este processo é realizado através de projecções metafóricas (metáforas e analogias), "que são utilizadas para mapear imagens (que estruturam o espaço) em modelos abstractos (que estruturam os conceitos). Porque as imagens são directamente compreendidas em termos de experiências físicas e as metáforas utilizadas no processo de mapeamento são criadas pelas estruturas dessas experiências" (English, 1997a, p. 10).

Wheatley cita diversos investigadores para referir a importância do racicínio visual na actividade matemática, por um lado chama a atenção de que este tipo de raciocínio tem um papel importante no trabalho diário de um matemático, situação que é geralmente desconhecida, uma vez que frequentemente omitem os diagramas e as imagens na apresentação das demonstrações. Por outro lado, os estudos realizados por estes investigadores, revelam o poder do raciocínio apoiado em imagens na resolução de problemas matemáticos, ao mostrarem que os alunos que utilizavam imagens nos seus raciocínios tinham mais sucesso na resolução de problemas não rotineiros do que aqueles que se apropriavam de tarefas realizadas por meio de procedimentos rotineiros.

Em suma, as imagens desempenham dois poderosos papéis: são construções que têm as suas próprias estruturas e são utilizadas de uma maneira metafórica para estruturar conceitos complexos.

Em sintese final, quando se procura encontrar formas de compreender a matemática construída pelo aluno, assumo que as representações têm um papel importante nesta tarefa, visto que ajudam a tomar consciência das imagens e ideias matemáticas desenvolvidas pelo aluno e, desta forma, a entrar no seu mundo "matemático" em vez de arrastá-lo para dentro do mundo matemático. E, assim, é possível ajudar o aluno, interagindo com ele, a construir os conceitos matemáticos.

Para terminar, outras perspectivas têm surgido neste tipo de investigação, à volta da compreensão e construção de conceitos matemáticos. Por exemplo, a influência dos aspectos afectivos e emocionais[9] na construção de significados, que exercem um poder muito forte sobre a cognição, podem mudar ou impedir a compreensão em Matemática. Apesar de não se abordar esta perspectiva (que levaria a uma outra investigação), estudos que envolvam os aspectos afectivos e emocionais trarão contributos importantes para a compreensão destes fenómenos.

[9] Quando refiro aspectos afectivos e emocionais estou a pensar nas emoções do aluno, nas atitudes, crenças e valores sobre a Matemática e sobre eles próprios em relação à Matemática.

Capítulo IV

Metodologia

Neste capítulo, começo por apresentar as opções metodológicas do estudo caracterizadas por seguirem uma abordagem qualitativa e interpretativa. Apresento uma descrição do contexto em que o estudo decorre, as estratégias de recolha de dados e os procedimentos para a sua análise. De seguida, descrevo a proposta curricular que inclui os princípios gerais em que assenta, tendo como base o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007), a planificação do tópico Triângulos e Quadriláteros e, em particular, as tarefas.

4.1 Opções metodológicas

Quivy e Campenhoudt (2003) definem metodologia como o conjunto dos procedimentos e instruções de trabalho, desde os procedimentos teóricos à implementação dos diagnósticos técnicos, que o investigador adopta de modo a conhecer e dar a conhecer a realidade.

Atendendo ao objectivo deste estudo – investigar a forma como o processo de aprendizagem dos alunos, apoiado numa sequência de tarefas, com recurso ao Geobegra, contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico – a metodologia qualitativa de natureza interpretativa surge como a opção mais adequada. A investigação qualitativa é particularmente indicada em estudos que ocorrem em ambientes muito próprios, ricos de pormenores e particularidades, das quais se extraem acontecimentos que se exploram e analisam, dando-se ênfase a significados decorrentes desses acontecimentos e processos que envolvem os participantes. Uma das principais características da investigação qualitativa é a imersão do investigador no contexto e a perspectiva interpretativa da condução da investigação.

Bodgan e Biklen (1994), por seu turno, apresentam como principais características da abordagem qualitativa e interpretativa, as seguintes:

a) a fonte directa dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o principal instrumento de recolha de dados;

b) os dados recolhidos são na sua essência descritivos;

c) o investigador interessa-se mais pelos processos do que pelos produtos;

d) os dados são analisados de forma indutiva;

e) o ponto de vista dos participantes é muito importante.

Tais características estão presentes neste estudo. De facto, a sala se aula surge como a principal fonte de dados, tendo a investigadora constituído o instrumento principal de recolha de dados, quer através de observação, de entrevistas ou de recolha de informação documental.

4.1.1 Contexto do estudo

Na sequência da homologação do Programa de Matemática para o Ensino Básico, em Dezembro de 2007, a Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular criou um Plano de Implementação composto por sete medidas, sendo uma delas a criação de 40 turmas-piloto, no ano lectivo de 2008/09, distribuídas pelas diversas Direcções Regionais de Educação de Portugal Continental, para a experimentação do Programa (Ministério da Educação, 2007). Para leccionar estas turmas, foram convidados professores de Matemática com currículo relevante, de reconhecido mérito e experiência profissional.

Este estudo é realizado em duas turmas-piloto do 7.º ano, numa escola da região norte do país. As professoras A e B são professoras das referidas turmas, trabalham colaborativamente há muitos anos e têm uma cumplicidade invulgar. Planificam as aulas em conjunto, discutem as tarefas e, após a concretização das mesmas em sala de aula, realizam uma reflexão conjunta sobre a actividade matemática dos alunos, a gestão de aula e, de um modo geral, sobre as suas práticas. O trabalho de assessoria em sala de aula, preconizado pelo Plano da Matemática, veio dar um grande impulso a estas práticas. A gestão do trabalho em pares ou em grupo e a dinamização da actividade dos alunos ficam mais facilitados pelo trabalho com duas professoras que partilham a mesma visão do processo de ensino e aprendizagem e o mesmo modelo de sala de aula. Por outro lado, a assessoria em sala de aula facilita também o esclarecimento de dúvidas colocadas pelos alunos e o desenvolvimento ou a exploração de ideias que eles vão realizando.

Como afirma a professora B, "cada uma de nós tem a sua turma, mas como estamos sempre as duas em ambas as turmas, para os alunos, somos as professoras deles" e acrescenta "todo o trabalho realizado pelos alunos, incluindo os testes de avaliação, são corrigidos por nós [as duas professoras], sem distinguirmos se são meus alunos ou da [professora A]".

Para além deste envolvimento na experimentação do PMEB (Ministério da Educação, 2007), cada uma destas professoras tem o seu percurso profissional marcado pela participação em numerosos projectos e experiências, no âmbito do ensino da Matemática. A professora A, por exemplo, participou na elaboração do Programa de Matemática do Ensino Secundário, em 1997. Ao longo dos seus percursos profissionais, ambas têm sido responsáveis por diversas acções de formação no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática. Além disso, são uma presença assídua em encontros relacionados com o ensino da Matemática, onde partilham frequentemente as suas experiências, ideias e propostas de trabalho. Mostram-se sempre disponíveis para partilhar as suas reflexões com outros colegas.

As professoras A e B aceitaram, sem hesitação, o desafio para leccionarem em turmas-piloto do Programa de Matemática para o Ensino Básico. Para além do seu dinamismo e gosto por novos desafios, ambas revelam afinidade com as orientações curriculares presentes no PMEB (Ministério da Educação, 2007). A participação nesta experiência piloto permitiu-lhes trabalhar com um grupo de professores de todo o país envolvido na experimentação e a oportunidade de participar em momentos de formação concebida e realizada com os autores do Programa. Este aspecto, como reconheceram, foi um importante contributo para o desenvolvimento profissional de cada uma destas docentes. Por outro lado, permitiu-lhes um conhecimento e uma compreensão mais aprofundada das orientações curriculares, dos tópicos matemáticos, dos recursos a utilizar no processo de ensino/aprendizagem e da gestão curricular do PMEB.

As turmas

O presente estudo desenvolveu-se em duas turmas-piloto do 7.º ano de escolaridade numa escola secundária do Porto. A turma A é composta por 27 alunos: onze rapazes e dezasseis raparigas, com idades compreendidas entre os 12 e os 14 anos. De acordo com o Projecto Curricular de Turma (PCT), todos os alunos frequentam pela primeira vez o sétimo ano de escolaridade e quase todos "manifestam ambição de prosseguir estudos" (PCT, 7.º A, 2008, p. 9).

A turma B é igualmente constituída por 27 alunos: doze rapazes e quinze raparigas com idades entre os 12 e os 14 anos. Todos os alunos frequentam pela primeira vez o sétimo ano de escolaridade e pretendem prosseguir para o ensino superior. A maioria dos alunos manifestou desejo em continuar os estudos em áreas que envolvem a disciplina de Matemática (PCT, 7º B, 2008).

Os alunos destas turmas frequentam, pela primeira vez esta escola, pelo que não possuíam um conhecimento anterior das suas características. Contudo, dadas as características da metodologia de trabalho preconizadas pelo PMEB, as professoras desde o início do ano lectivo, insistiram em aspectos relacionados com hábitos e métodos de trabalho, que facilmente constataram que os alunos não dominavam. Os alunos mostraram desconhecer o trabalho em grupo ou a pares. Percebeu-se igualmente que os alunos revelavam pouca autonomia, falta de hábito em explicar os raciocínios ou pouca persistência para levar uma tarefa ao fim, desistindo com alguma facilidade e muita vezes aguardavam pelas professoras para lhes explicarem ou darem alguma indicação que os ajudasse na sua resolução.

> A maioria dos alunos apresenta muita dificuldade na interpretação e compreensão de enunciados e textos. O seu vocabulário é muito pouco variado. Têm todos muita dificuldade em exprimir os seus raciocínios ou conclusões. Revelam todos muito pouca autonomia e pouca concentração no trabalho. (PCT, 7.º A, 2008, p. 11)

Também, a professora da turma B, no diagnóstico dos alunos, salienta que a maioria mostra dificuldade "em analisar, interpretar, ficando numa atitude passiva." (PCT, 7.º B, 2008, p. 13)

No entanto, esta atitude foi sendo alterada ao longo do tempo. Progressivamente, os alunos foram mostrando mais receptividade, empenho e interesse pelas estratégias e pelas propostas apresentadas pelas professoras. A vontade em participar nas aulas era evidente quando estive presente em ambas as turmas, a partir de Fevereiro de 2009.

Esta mudança de atitudes ao longo do primeiro período foi determinante, para o desenvolvimento das actividades nos momentos seguintes. Perante a apresentação de uma nova tarefa, os alunos começavam a trabalhar em pares e solicitavam a ajuda das professoras apenas quando surgiam dúvidas ou diferentes opiniões e precisavam de esclarecimentos para ultrapassarem os impasses. Foi muito interessante observar esta evolução por parte dos alunos no que respeita à autonomia, hábitos e métodos de trabalho.

Acrescento, ainda, que nestas duas turmas não existiam alunos indisciplinados ou com um total desinteresse pela actividade realizada em sala de aula.

Relativamente ao desempenho escolar, a turma A, no primeiro período, revelou um aproveitamento satisfatório: 44% dos alunos teve nível 2; 34% nível 3; 11% nível 4; e, 11% nível 5. A turma B teve, também, um aproveitamento bastante positivo, dado que 65% dos alunos teve nível positivo (27% nível 3; 26% nível 4; 12% nível 5).

Em ambas as turmas, as professoras referem que os níveis menos satisfatórios estão relacionados com a dificuldade que os alunos têm na interpretação dos problemas, porque em alguns casos, se lhes explicarem o que se pretende, os alunos conseguem resolver o problema. Por outro lado, referem, ainda, a dificuldade dos alunos em mobilizar alguns conhecimentos na resolução de problemas. No entanto, constatam que em situações de resposta directa ou de aplicação imediata ou que envolvam apenas procedimentos, os alunos têm um desempenho positivo. Por isso, as professoras salientam que, na aula de Matemática e em Estudo Acompanhado, vão continuar a propor tarefas e a desenvolver uma actividade com os alunos que contribua para a melhoria da sua capacidade de interpretação e de comunicação de ideias (oral e escrita).

As alunas

Apesar de ter em consideração as produções de vários alunos e o ambiente geral de trabalho, na sala de aula, este estudo centra-se, mais incisivamente, em duas alunas de cada uma das turmas.

Para a selecção das duas alunas, em cada uma das turmas, optei por não fazer uma escolha pautada por critérios específicos, não tendo sido necessário restringir-me a um subconjunto de alunos dispostos a colaborar, pois todos os alunos mostraram desejo e vontade em participar. Uma vez que o foco do estudo reside em conhecer de que forma o processo de aprendizagem contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, optei por uma selecção aleatória, tirando ao acaso dois números entre os números dos alunos de cada turma. Em seguida dou a conhecer as alunas envolvidas neste estudo: Joana e Matilde (nomes fictícios) da turma A, e Marta e Maria (nomes fictícios) da turma B.

Joana e Matilde da turma A. São alunas que participam nas aulas, mas raramente de forma espontânea. Fazem-no apenas quando é solicitada a sua participação. Como refere a professora, "parecem não estar habituadas a participar de forma activa na sua aprendizagem em Matemática e as suas intervenções são pouco claras" (PCT, 7.º A, 2008, p. 11). Esta atitude das alunas, face ao aprender Matemática, está relacionada com as suas vivências nas aulas. Joana afirma que gosta de Matemática deste a escola primária.

> *Na primária já começávamos a fazer aquelas continhas pequeninas. Eu sempre gostei de Matemática... Agora é um bocado mais exigente, complicado...*

Quanto a Matilde, esta aluna refere que:

> *Eu também gostei logo na primária de fazer aqueles exercícios todos, mas agora também há matérias que gosto mais e matérias que gosto menos, que estamos a dar. (...) Eu gosto mais de geometria e essas coisas, mas não gosto muito de resolver exercícios, daqueles que se tem de explicar muitas coisas.*

As duas alunas confessaram, em simultâneo, e sorrindo, que não gostam muito de explicar porque é algo que consideram muito difícil.

Questionadas acerca do seu gosto por estudar em casa, ambas mostraram uma opinião semelhante, tendo a Joana começado por afirmar:

> *Eu na matemática gosto muito de estudar porque é mais resolver exercícios e não tem tanto que se escrever é só ir fazendo muitos exercícios para ir treinando...*

Ao que Matilde, acrescentou quase, ao mesmo tempo:

> *Pois é mais fácil…*

As palavras de Joana e Matilde levam-me a concluir que ambas gostam de resolver exercícios dos que não necessitam de explicação, em particular, apreciam os que as ajudam a "treinar". Talvez as alunas estivessem mais habituadas a um trabalho que envolvia predominantemente a utilização de procedimentos na resolução de exercícios e raramente as situações em que tivessem de apresentar os seus raciocínios. Aliás, referem mesmo que não gostam destes problemas, porque é difícil terem de explicar como os resolvem. Esta situação de dificuldade a nível da comunicação matemática (escrita e oral) parece natural se tivermos em conta que terá sido um tipo de trabalho pouco valorizado anteriormente na sua aprendizagem da Matemática.

No final do primeiro período, do ano lectivo em que decorreu este estudo, Joana e Matilde, obtiveram ambas nível cinco, o que revela um bom desempenho em Matemática. Neste período tinham sido trabalhados os Números Inteiros e as Sequências, temáticas do agrado destas alunas, em particular de Matilde, como referiu na entrevista.

Marta e Maria da turma B. Estas duas alunas são empenhadas e participam nas actividades de sala de aula. Em termos de aproveitamento têm um bom desempenho. No final do 1.º período, a Marta teve nível 5 e a Maria teve nível 4. São alunas cujo gosto pela Matemática está relacionado com os temas em estudo. Na entrevista referiram que, dependendo das "matérias", gostam mais ou menos desta disciplina.

Quando procurei saber como estudavam Matemática, responderam que costumavam fazer exercícios de aplicação e consolidação sobre os conteúdos matemáticos. Para estas duas alunas, é a primeira vez que contactam com tarefas de natureza exploratória. Esta situação é corroborada, também, pela forma como as alunas respondem à pergunta 8 da entrevista que lhes fiz inicialmente (ver Anexo III) que se baseia numa questão matemática de natureza mais investigativa. As suas respostas foram pouco cuidadas, pouco profundas, sem exploração e explicação dos raciocínios, o que pode ser uma evidência de desconhecimento de tarefas desta natureza. Em relação a este tipos de tarefas Maria confessou que:

> *Sim, eu gosto de as fazer, porque a professora nos põe a tentar descobrir como é que é....*

Mas afirmaram que nos anos anteriores nunca tinham resolvido tarefas daquele tipo. E explicaram como trabalhavam a Matemática nos anos anteriores; em particular, Marta referiu que:

> *Eu, por exemplo, eu estudava o livro, ia fazer alguns exercícios que a professora mandava do livro também, trabalhos de casa antigos e assim...*

Maria esclareceu como era o seu trabalho em Matemática nos anos anteriores, afirmando:

> *No meu livro tinha problemas por graus... o primeiro era mais fácil e depois o último era o mais difícil e eu costumava fazer assim para...*

De notar, ainda, que as alunas gostam da actividade matemática que envolve tarefas de natureza exploratória. Colocadas perante o desafio de preparar uma aula de Matemática, responderam de acordo com os seus gostos pessoais. Marta apresentou a sua proposta:

> *Eu gosto de fazer fichas...*

Mas Maria tem outra preferência, afirmando "eu gosto das tarefas." E explicou a razão da sua preferência:

> *Eu gosto das tarefas, porque no início não sabemos e depois vamos fazendo e vamos descobrindo aquilo.*

Marta também afirmou gostar das tarefas que realizava na sala de aula.

4.1.2 Recolha de dados

A recolha de dados decorreu no ano lectivo de 2008/09 em duas turmas-piloto de uma mesma escola. Os dados foram recolhidos pela própria investigadora que recorreu a diversas estratégias e fontes de dados como é recomendado num estudo de natureza qualitativa (Denzin & Lincoln, 1994).

<u>*Entrevistas*</u>

A entrevista é um instrumento de recolha de dados que consiste em obter informação através do questionamento directo de cada participante. A intenção do investigador nesta situação não é manter uma conversa qualquer, mas uma conversa em que pretende recolher determinada informação específica, razão pela qual as entrevistas devem basear-se num guião que ajude o investigador a conduzir a sua conversa com vista a obter a informação relevante para o seu estudo. Como tal, as entrevistas podem assumir um formato mais ou menos estruturado. A mais frequente é aquela em que entrevistador e entrevistado conversam pessoalmente acerca de um determinado tema com um determinado propósito (Merriam, 1998). As entrevistas realizadas neste estudo foram preparadas previamente através de um guião, mas procurei deixar que as alunas entrevistadas seguissem a sua linha de raciocínio, intervindo apenas quando elas se afastavam do assunto em questão.

Neste estudo foram realizadas duas entrevistas conjuntas a cada par de alunas das turmas A e B, uma antes da experiência e a outra no final do ano lectivo, depois de terminada a última tarefa (ver Quadro 4.1). Para cada uma das entrevistas foi criado um guião (Anexo III).

Na primeira entrevista procurei recolher informação acerca da relação dos alunos com a Matemática e em particular relativamente ao tema de Geometria. Procurei ainda saber com que materiais tinham os alunos trabalhado em anos anteriores e se já tinham utilizado o computador na aula de Matemática.

A segunda entrevista, que teve lugar depois de terminar o ano lectivo, a partir de um conjunto de questões relacionadas com o tópico Triângulos e quadriláteros (ver Anexo II), teve como objectivo averiguar o que significou para as alunas a actividade matemática desenvolvida durante a sequência de tarefas organizada no âmbito deste tópico do currículo.

Observação

A observação é um dos mais antigos e importantes métodos de recolha de dados. Nos estudos em educação, em particular, designadamente quando a sala de aula é o ambiente natural de obtenção de dados, a observação é uma estratégia indispensável. A principal vantagem desta abordagem consiste no facto de permitir recolher dados ricos e pormenorizados, resultantes da presença do investigador nos contextos naturais de actuação dos participantes e da captação de informação na própria linguagem dos participantes. A observação permite ao investigador recolher dados de uma forma espontânea e com uma maior autenticidade em comparação com os outros métodos. Através da observação, o investigador pode aperceber-se de factos familiares ou rotineiros para os participantes envolvidos nos contextos que de outra forma não seriam detectados. Matos e Carreira (1994) destacam a importância do observador em detectar factos ou situações que poderão passar despercebidos aos participantes, por serem demasiado triviais para os próprios participantes, mas que podem ser importantes para o estudo.

Através da observação pretendo "compreender o ambiente natural onde vivem os participantes, sem o alterar ou manipular" (Gay, Mills & Airasian, 2006, p. 413), o que permitirá descrever e interpretar os diversos episódios de sala de aula com maior autenticidade.

Apesar de este método de recolha de dados apresentar algumas limitações, nomeadamente pela possibilidade de provocar alterações no comportamento das pessoas observadas e de o investigador poder distorcer o fenómeno observado, estas podem ser minimizadas através de uma acção prolongada do observador no campo e do confronto das expectativas do investigador com o que está a ser observado.

Existem vários graus de participação do investigador na observação que faz dos fenómenos a investigar (Lessard-Hébert, 1996). Neste estudo, a opção pela observação directa não participante que ficou a dever-se ao facto de não querer interferir com o decorrer das aulas das turmas-piloto.

As aulas observadas foram gravadas em áudio e parcialmente transcritas para posterior análise. Foram também registadas notas de campo das observações realizadas, sob a forma de diário de bordo. Foram observadas nas duas turmas-piloto um total de 11 aulas do tópico Triângulos e Quadriláteros, correspondendo a 4 aulas da turma A e 7 aulas da turma B, ocorridas entre final de Fevereiro de 2009 e final de Maio de 2009, como se especifica no Quadro 4.1.

Recolha documental

A obtenção de documentos autênticos, numa investigação de natureza qualitativa, é salientada pela generalidade dos teóricos e geralmente referenciada nas investigações que se enquadram neste paradigma. Os documentos constituem meios de perceber o ponto de vista dos intervenientes, por meio da escrita ou por meio de registos que assumem formas colectáveis, como é o caso de ficheiros informáticos ou materiais digitais. Em qualquer dos casos, a recolha documental não dispensa um importante papel do investigador, que é o de ler nas entrelinhas e o de procurar compreender o que outros viveram e fizeram, num dado momento, que conduziu ao registo produzido.

No caso de uma investigação que decorre no ambiente de sala de aula, onde está presente a utilização do computador na realização de tarefas, para além do trabalho realizado pelos alunos, com papel e lápis, nos seus cadernos, a recolha documental requer ser complementada com uma observação atenta pois muito do que fica registado ou é expresso nas construções realizadas através do uso do Geogebra, requer dados adicionais para uma leitura informada e completa dos significados que os documentos transportam consigo. Ao mesmo tempo, implica conhecer a identidade dos participantes e entender, por exemplo, o que os leva a exprimir determinados factos nas suas produções escritas e a omitir outros ou o que a sua linguagem escrita tende a reter dos diálogos e interacções orais com os demais intervenientes na sala de aula.

Ludke & André (1986) descrevem vários dos processos que podem ser adoptados pelos investigadores para realizarem a análise de documentos. Em todos eles, há um ponto comum que passa pela selecção e síntese da informação pertinente, face aos objectivos do estudo e tendo em conta o contexto e os demais dados obtidos. Em geral, a leitura e releitura dos documentos é um trabalho essencial para a organização e classificação dos dados. Mas não menos importante é a identificação de temas, de ocorrências significativas, de elementos informativos, de indicadores, categorias, etc. Muitas vezes este processo inicia-se com a colocação de notas, com a realização de esquemas, com a listagem de ideias-chave, e vai prosseguindo de modo a ganhar estrutura, num processo claramente indutivo.

Neste estudo, os documentos recolhidos incluem: os planos curriculares de cada uma das turmas (PCTs), os enunciados das tarefas propostas no tópico Triângulos e Quadriláteros, as produções escritas dos alunos relativas às tarefas propostas, os ficheiros Geogebra gravados em cada uma das tarefas que envolveram o uso do software, registos escritos das professoras de cada turma e alguns documentos contendo reflexões das professoras acerca das aulas realizadas (ver Quadro 4.1).

Quadro 4.1. Instrumentos e fontes de recolha de dados

Instrumento de recolha de dados	Entrevistas	Realização das tarefas do tópico triângulos e quadriláteros							Entrevistas finais
		T2 - Ângulos internos e externos	T3 - Resolução de problemas em triângulos	T4 - Critérios de congruência de triângulos	Tarefa de consolidação - Manual escolar	T5 - Usando critérios de congruência	T7 - Quadriláteros: construção, diagonais e ângulos	T10 - Problemas com quadriláteros	
Cenário		Turma A	Turma A	Turmas A e B	Turma B	Turma B	Turma B	Turma B	
Datas	Meados de Fevereiro de 2009	26 de Fevereiro de 2009	3 de Março de 2009	5 e 9 de Março de 2009	12 e 17 de Março de 2009	19 de Março de 2009	7 de Maio de 2009	26 de Maio de 2009	Meados de Junho de 2009
Fontes de dados	* Áudio * Produções das alunas	* Documentos da professora * Produções dos alunos; * Registos de observação e de balanço/ análise realizado em diálogo com as professoras	* Áudio; * Vídeo; * Produções dos alunos	* Áudio; * Vídeo; * Ficheiros Geogebra; * Registos de observação e de balanço/ análise realizado em diálogo com as professoras	* Áudio; * Produções dos alunos; * Registos de observação e de balanço/ análise realizado em diálogo com as professoras	* Áudio; * Produções dos alunos; * Registos de observação e de balanço/ análise realizado em diálogo com as professoras	* Áudio; * Vídeo; * Ficheiros Geogebra; * Folha de registo dos alunos	* Áudio; * Vídeo * Produções dos alunos; * Registos de observação e de balanço/ análise realizado em diálogo com as professoras	* Áudio

4.1.3 Procedimento de análise de dados

Depois de feita a transcrição de todos os registos áudio e vídeo, a primeira etapa da análise de dados consistiu em separá-los em duas grandes classes: os dados referentes às aulas que envolveram a utilização do Geogebra em tarefas exploratórias e os dados relativos às aulas que se basearam na resolução de problemas. Cada um destes conjuntos de dados foi igualmente ordenado no tempo, tendo em vista perceber a evolução dos alunos das duas turmas e, em particular, das alunas que foram observadas de forma mais focada.

No caso das aulas que decorreram com base no recurso ao Geogebra, juntei os diálogos das alunas na realização das tarefas e as correspondentes construções que efectuaram no Geogebra, complementando estes registos com as minhas notas do diário de bordo. A articulação destes dados permitiu-me, então, compreender as estratégias e o trabalho dos alunos e dar sentido aos vários passos que foram executando, às suas hesitações, dúvidas, estratégias, formas de abordar as questões, conclusões obtidas, reacções das alunas no decurso da tarefa, etc. O mesmo se passou com os dados relativos às aulas que não incluíram o uso do Geogebra, em que procurei anotar aspectos da abordagem seguida pelas alunas, as suas tentativas, os sucessos e insucessos, o modo como se apoiavam mutuamente, etc.

Por fim, consultei as observações das professoras e algumas reflexões produzidas pelas mesmas, nas situações em que tinha estes documentos, para "validar" algumas das minhas interpretações acerca da actividade dos alunos e das aprendizagens desenvolvidas e do modo como as aulas tiveram reflexo nessas aprendizagens, procurando, assim, examinar a coerência das minhas ideias.

Por fim, iniciei o trabalho de estruturação dos dados, em episódios que apresentassem unidade e coesão, seguindo uma lógica essencialmente descritiva, em que fui combinando a narrativa dos acontecimentos com excertos de diálogos, exemplos de produções dos alunos, imagens destinadas à clarificação do tipo de ambiente e de trabalho em curso (como é o caso das fotografias) e o meu comentário analítico, em que procurei elucidar a minha interpretação dos processos presentes na actividade dos alunos.

No caso dos episódios que se referem à utilização da tecnologia, foquei a minha atenção na interacção dos alunos com o Geogebra, em busca de evidências que revelassem de que forma esta tecnologia apoiou os alunos no desenvolvimento das tarefas e trouxe contributos importantes para a sua compreensão dos conceitos tratados e para a forma como abordaram as questões propostas.

Nos episódios que emergiram das aulas de resolução de problemas, dei especial ênfase aos diálogos dos alunos e às suas resoluções, mantendo a atenção dirigida para o modo como mobilizavam os conhecimentos, em particular, as propriedades e relações geométricas relevantes e como desenvolviam o seu raciocínio geométrico a partir desse conhecimento.

4.2 Proposta curricular

Neste ponto descrevo os princípios gerais da proposta curricular que inclui os objectivos de aprendizagem previstos para a Geometria do 3.º ciclo do ensino básico, em particular no tópico Triângulos e Quadriláteros, e as capacidades transversais a desenvolver e as orientações metodológicas, destacando-se as ideias matemáticas e didácticas mais importantes e relevantes para o tópico em estudo.

Seguidamente, apresento a planificação elaborada pelos professores das turmas piloto das regiões centro e norte do país, constituída por uma sequência organizada de tarefas, destacando os seus objectivos específicos. Por fim, faço uma breve descrição do ambiente de geometria dinâmica – o Geogebra – utilizado para apoiar os alunos no desenvolvimento de algumas tarefas.

4.2.1 Princípios gerais da proposta curricular

O Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007), como referido na introdução do presente estudo, constitui um reajustamento do Programa de Matemática para o ensino básico datado de 1991, em que se adoptou como documento de referência o Currículo Nacional do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2001).

A proposta curricular assenta no PMEB que tem como uma das suas finalidades o desenvolvimento nos alunos de (Ministério da Educação, 2007, p. 3):

- compreensão de conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos e da capacidade de os utilizar na análise, interpretação e resolução de situações em contexto matemáticos e não matemático;
- capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação matemática;
- capacidade de abstracção e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos;
- capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega.

Nesse sentido, em termos de objectivos gerais de ensino, nesta proposta curricular, os alunos devem ser capazes de: (i) reconhecer as figuras geométricas básicas; (ii) usar instrumentos matemáticos, como transferidores e computadores; (iii) compreender o significado dos conceitos; (iv) reconhecer regularidades e compreender relações; (v) acompanhar e analisar um raciocínio ou estratégia matemática; (vi) traduzir a informação apresentada numa forma de representação para outra; (vii) elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas; (viii) usar a linguagem matemática para expressar as ideias matemáticas; e (ix) descrever e explicar, oralmente e por escrito, as estratégias e procedimentos matemáticos que utilizam e os resultados a que chegam.

No que respeita ao tema de Geometria, no 3.º ciclo, pretende-se que os alunos desenvolvam o "sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço" (Ministério da Educação, 2007, p. 51) e sejam capazes de utilizar esses conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversos. Mais especificamente, esta proposta deve ajudar os alunos a:

- desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os utilizar;
- compreender e ser capazes de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço;
- compreender e ser capazes de utilizar as relações de congruência;
- ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos.

Com vista a que os alunos atinjam estes objectivos, é importante proporcionar aos alunos uma actividade matemática que envolva a realização de diferentes tipos de tarefas, acompanhadas de uma clarificação clara sobre o que se pretende e se espera do trabalho dos alunos. Assim, a proposta deve contemplar situações, em contextos matemáticos e não matemáticos, que envolvam a exploração de um conceito, bem como a consolidação e o aprofundamento do mesmo. Estas situações incluem também o desenvolvimento das capacidades transversais, através da promoção da resolução de problemas, do raciocínio e da comunicação matemática. Em relação a esta última capacidade transversal, as representações devem assumir um papel importante ao envolverem, sempre que possível, durante a actividade matemática, mais do que uma forma de representação.

4.2.2 Planificação do tópico triângulos e quadriláteros: as tarefas

A elaboração da sequência organizada de tarefas e a sua planificação, pelos professores das turmas piloto das regiões norte e centro, tem por base os princípios definidos no ponto anterior e o tópico triângulos e quadriláteros do 3.º ciclo constantes do PMEB, bem como os materiais de apoio ao professor, em versão *draft*, para o 3.º ciclo, "Triângulos e quadriláteros" (Ponte, Oliveira e Candeias, 2008).

No âmbito do tópico Triângulos e Quadriláteros devem ser trabalhadas diversas propriedades dos triângulos e quadriláteros. No que respeita aos triângulos, são desenvolvidas tarefas tendo em vista os alunos conhecerem as propriedades relativas à soma dos ângulos internos e externos de um triângulo e compreenderem e utilizarem os critérios de congruência de triângulos. Sobre os quadriláteros, as tarefas contemplam a classificação dos quadriláteros, a sua construção, tendo em consideração as condições dadas, e a investigação das suas propriedades, com especial atenção ao paralelogramo.

Deste modo, a planificação que se baseia numa estratégia de ensino e aprendizagem exploratórios, em que uma parte importante da construção do conhecimento e da sua descoberta é realizada pelo aluno (Ponte, 2005), contempla tarefas de natureza exploratória. A sua resolução visa proporcionar aos alunos experiências significativas em que o desenvolvimento dos conceitos e a sua formalização é concretizada, com o contributo dos alunos, possibilitando que elaborem estratégias, formulem conjecturas e descrevam e justifiquem esses processos. Assim, este tipo de tarefa contribui, também, para o desenvolvimento da auto-confiança dos alunos e a sua autonomia. Por outro lado, a planificação inclui igualmente problemas e exercícios. A resolução de exercícios é importante para a consolidação e mobilização dos conhecimentos matemáticos aprendidos. A resolução de problemas, para além de contribuir para essa consolidação dos conhecimentos, possibilita o desenvolvimento do raciocínio matemático, da capacidade de compreender o problema, de seleccionar e colocar em prática estratégias de resolução e do sentido crítico, no momento de verificar a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados.

Tendo em vista o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática dos alunos, a actividade a realizar em sala de aula valoriza o trabalho em pares e os momentos de discussão colectiva que têm por base o trabalho desenvolvido pelos alunos e a reflexão realizada por eles a propósito da actividade. Durante esta discussão, os alunos são levados a apresentar, explicar e justificar as suas conclusões e soluções, utilizando uma linguagem natural e matemática. Estes momentos são utilizados, também, para a sistematização e formalização dos tópicos e subtópicos matemáticos trabalhados.

Para fomentar a comunicação escrita os alunos efectuam registos escritos da sua actividade matemática, apresentam de forma escrita as resoluções dos problemas e elaboram pequenos textos e relatórios.

Nas tarefas de natureza exploratória, os alunos irão recorrer a ambientes de geometria dinâmica, nomeadamente ao Geogebra, e materiais manipuláveis como ferramentas de apoio ao desenvolvimento da sua actividade matemática.

O Quadro 4.2 apresenta a sequência organizada de tarefas que compõe a unidade de ensino do tópico Triângulos e Quadriláteros, em que consta o nome da tarefa, o tempo dedicado à sua resolução. que inclui a sua apresentação, o trabalho autónomo dos alunos e o momento de discussão colectiva e a síntese dos conceitos trabalhados, bem como os subtópicos matemáticos envolvidos, as aprendizagens visadas, que correspondem aos objectivos de aprendizagem que se têm em vista com a realização da tarefa, e os materiais que apoiam o desenvolvimento da actividade matemática.

Nesta sequência organizada de tarefas recorre-se ao Geogebra, *software* livre de geometria dinâmica, como ferramenta de apoio ao desenvolvimento da actividade matemática do aluno. O Geogebra permite efectuar construções, utilizando, entre outras opções, pontos, rectas, segmentos de recta, vectores e circunferências. Pode-se alterar todos estes objectos dinamicamente depois de realizada a construção. Permite, também, ao utilizador transformar as figuras, arrastando um ou mais elementos que estão na base da sua construção, possibilitando a observação das propriedades que permanecem inalteradas e as que deixam de se verificar. Por outro lado, permite medir comprimentos, ângulos, perímetros e áreas e efectuar cálculos com essas medidas.

O Geogebra tem três folhas de trabalho: a Folha Algébrica, a Folha Gráfica e a Folha de Cálculo (ver Figura 4.1).

Na Folha Gráfica, utilizando as opções disponíveis na barra de ferramentas, pode-se realizar construções, efectuar medidas e escrever texto, expressões, equações, coordenadas, etc.

Na Folha Algébrica visualiza-se a representação algébrica de todo o objecto construído na Folha Gráfica. Os objectos matemáticos são organizados em duas classes: objectos livres e objectos dependentes. Quando se cria um novo sem que se use qualquer um existente é classificado como objecto livre. Se, caso contrário, o objecto novo for criado com recurso a outros existentes é considerado como objecto dependente.

Quadro 4.2. Planificação da sequência organizada de tarefas do tópico Triângulos e quadriláteros

Tarefa	**Natureza da tarefa**	**Duração** (blocos de 90 min)	**Subtópicos**	**Aprendizagens visadas**	**Material**
Tarefa 0 - Rede de rectas paralelas - Ângulos	Exercícios	1	- Ângulos verticalmente opostos - Ângulos correspondentes - Ângulos alternos internos	- Identificar ângulos verticalmente opostos, ângulos correspondentes e ângulos alternos internos - Justificar a natureza dos ângulos, utilizando linguagem própria	Transferidor
Tarefa 1 - Construção de triângulos	Tarefa de exploração	1	- Iniciação dos alunos ao ambiente de Geometria Dinâmica - Classificação de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos	- Tomar contacto com as características do Geogebra - Saber manusear o Geogebra - Relembrar as classificações de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos	Geogebra
Tarefa 2 - Ângulos internos e externos	Tarefa de exploração	2	- Soma dos ângulos internos e externos de um polígono de n lados	- Formular, testar e demonstrar conjecturas relacionadas com a soma das amplitudes dos internos de um polígono e com a soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo e de outros polígonos - Exprimir resultados, processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios	Geogebra
Tarefa 3 - Resolução de problemas em triângulos	Problemas	1	- Resolução de problemas em triângulos	- Resolver problemas envolvendo a soma dos ângulos internos e externos de um triângulo - Identificar os dados, as condições e o que se pretende com o problema - Conceber e colocar em prática uma estratégia de resolução, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados	
Tarefa 4 - Casos de congruência de triângulos	Tarefa de exploração	2	- Casos de congruência de triângulos	- Compreender a noção de congruência de triângulos - Conhecer e compreender os critérios LLL, LAL e ALA de congruência de triângulos - Compreender um contra-exemplo - Interpretar informação, ideias e conceitos representados de diversas formas	Geogebra

Tarefa 5 - Usando critérios de congruência Exercícios do manual escolar	Exercícios e Problemas	1	- Resolução de problemas, envolvendo os critérios de congruência de triâgulos	- Conhecer e consolidar os critérios de congruência de triângulos - Utilizar os critérios de congruência de triângulos na resolução de problemas e na justificação de propriedades de figuras - Identificar os dados, as condições e o que se pretende com o problema - Conceber e colocar em prática uma estratégia de resolução, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados	
Tarefa 6 - Elaborando demonstrações	Problemas	1	- Resolução de problemas em triângulos - Demonstração	- Utilizar os critérios de congruência de triângulos na elaboração de demonstrações - Fazer demonstrações simples - Identificar os dados, as condições e o que se pretende com o problema - Conceber e colocar em prática uma estratégia de resolução, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados	Esquadro
Tarefa 7 - Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos	Tarefa de exploração	1	- Propriedades e construção de quadriláteros	- Construir um rectângulo e um paralelogramo - Investigar as propriedades dos quadriláteros - Identificar propriedades dos quadriláteros - Exprimir as propriedades e ideias matemática, oralmente e por escrito, utilizando a simbologia e vocabulários próprios	Geogebra
Tarefa 8 - Investigando quadriláteros e pontos médios	Tarefa de investigação	2	- Propriedades dos quadriláteros	- Identificar quadriláteros - Reconhecer as propriedades dos quadriláteros - Estabelecer relações relativas a situações propostas - Elaborar demonstrações simples - Exprimir resultados e ideias matemáticos, por escrito, utilizando vocabulário próprio	Geogebra
Tarefa 9 - Problemas com quadriláteros	Problemas	1	- Propriedades dos quadriláteros - Critérios de congruência de triângulos - Soma das amplitudes dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros	- Utilizar critérios de congruência de triângulos e propriedades dos quadriláteros na resolução de problemas e na justificação de propriedades de figuras - Exprimir processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios	Materiais manipulativos

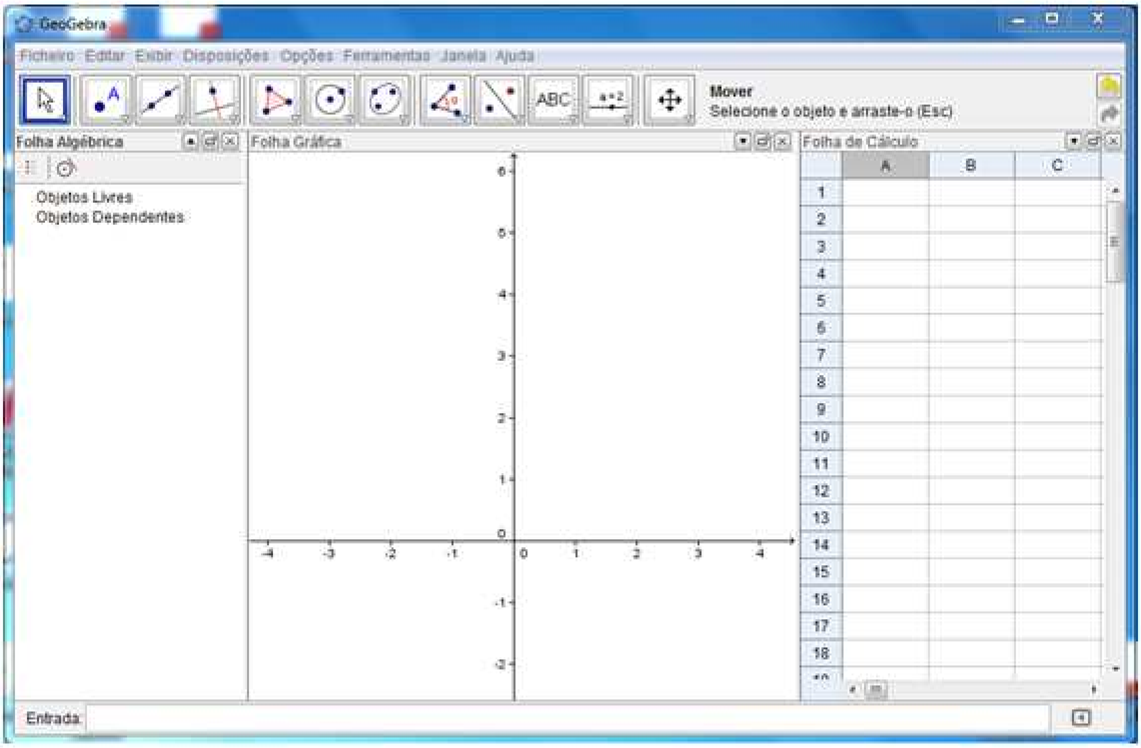


Figura 4.1. Janela do Geogebra

Na Folha de Cálculo, nas suas células, pode-se inserir não só números, mas também todo o tipo de objectos matemáticos suportados pelo Geogebra. Se possível, é mostrado imediatamente na Folha Gráfica a representação gráfica do objecto inserido nas células. Acrescenta-se que, por defeito, os objectos desta Folha são classificados como objectos auxiliares na Folha Algébrica.

O Geogebra apresenta, ainda, um campo de entrada de texto, em que é possível escrever coordenadas, equações, funções e comandos que, clicando na tecla *enter*, estes são mostrados na Folha Gráfica.

A característica mais notável do Geogebra é permitir visualizar nas três Folhas os objectos matemáticos, ou seja, possibilita mostrá-los em três diferentes representações: graficamente (pontos, construções, gráficos de funções,...), algebricamente (coordenadas dos pontos, as funções, as equações,...) e nas células da Folha de Cálculo. Todas as representações do mesmo objecto estão ligadas dinamicamente e modificam-se, adaptando-se automaticamente às alterações realizadas em qualquer uma dessas representações, independentemente da forma como esses objectos foram inicialmente criados.

Esta característica é muito importante, dado o papel que as representações têm vindo a assumir nas orientações curriculares para o ensino da Matemática. Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2000/2007) dedicam uma norma específica à representação matemática em todos os ciclos de ensino, salientando que deve ser desenvolvido um processo de ensino e de aprendizagem de modo a que os alunos sejam capazes de:

- Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
- Seleccionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
- Usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos. (NCTM, 2000 e 2007, p. 422)

O PMEB valoriza, igualmente, as representações matemáticas ao apresentar como um dos objectivos gerais do ensino da Matemática: “os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas *representações* (...)” (Ministério da Educação, 2007, p. 4). Por outro lado, nas orientações metodológicas, salienta-se que os alunos ao trabalharem com diversas representações compreendem “que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas, e a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada. (Ministério da Educação, 2007, p. 9).

Para terminar, a gestão curricular começa no planeamento da unidade e termina na gestão de ensino e de aprendizagem, em tempo real, feita durante a aula. Esta gestão, como refere Ponte (2005), “é um processo complexo de tomada de decisões com base em informação que o professor vai recolhendo” (p. 31). Por isso, é tão difícil conseguir-se, por vezes, concretizar a planificação inicialmente elaborada, mesmo tendo em consideração todos os factores que envolvem a sua realização, como sejam, entre outros, a estratégia de ensino, a actividade do aluno e do professor, os modos de trabalho e as tarefas.

Este facto foi observado nesta unidade e nas turmas em que decorreu o estudo, pois as professoras, durante a realização das primeiras tarefas, pelo facto de verem os alunos empenhados na sua concretização, preocupados em efectuarem uma boa exploração dessas tarefas para depois apresentarem as suas ideias e as discutirem, resolveram dar-lhes mais tempo do que o previsto na planificação e, como consequência, decidiram suprimir as tarefas 6 e 8 da planificação (ver Quadro 4.2). Mesmo sabendo que estas tarefas eram importantes em termos da demonstração e que proporcionavam o aprofundamento de alguns dos subtópicos, a atitude dos alunos fez com que alterassem a planificação inicial. Como refere, no final, a professora A, com a concordância total da professora B: "todos queriam trabalhar, fazer todas as construções e estavam a consegui-lo fazer... o clima de trabalho era muito bom. Todos queriam muito mostrar que conseguiam dar resposta ao solicitado. Ora como uma das minhas principais preocupações é a aprendizagem dos alunos e o conseguir incrementar a sua motivação para a disciplina, alterei, conscientemente, a planificação inicial".

Capítulo V

Apresentação e análise de dados

Neste capítulo, em que apresento os dados recolhidos e faço a sua análise à luz do quadro teórico, começo por dar uma perspectiva do conhecimento prévio de Geometria revelado pelas alunas de cada turma sobre as quais recaiu uma observação mais atenta. Para isso irei socorrer-me dos dados obtidos através da entrevista inicial realizada, no âmbito da qual coloquei várias questões centradas em tarefas de Geometria.

No que respeita à análise dos dados, optarei pela organização de episódios em torno de alguns dos subtópicos do tópico Triângulos e Quadriláteros. Estes episódios estão divididos em duas partes, com excepção de um, porque não envolve o uso do Geogebra. A primeira parte é relativa à utilização do Geogebra na actividade matemática dos alunos e a outra está relacionada com a forma como estes mobilizam o conhecimento e raciocinam na resolução de problemas.

5.1 O conhecimento geométrico anterior

Um aspecto importante para enquadrar a análise dos dados relativos às aulas realizadas, tem a ver com o conhecimento geométrico no início do trabalho em sala de aula das alunas que foram alvo de observação mais incisiva. Da análise das respostas das alunas *Joana* e *Matilde*, da turma A, às questões colocadas na entrevista inicial, designadamente às que se centravam em tarefas geométricas, (Anexo III) constata-se que têm facilidade no manuseamento de objectos de medição, como é o caso do transferidor. As alunas não tiveram dificuldade em medir e em desenhar ângulos, bem como têm clara a noção de ângulo e a classificação de ângulos. É interessante verificar que a Matilde, para explicar um erro cometido na medição da amplitude de um ângulo, recorre à noção de ângulo, em particular de ângulo agudo, para referir que se utilizou a graduação errada do transferidor (ver Figura 5.1). A Joana justifica também através da utilização incorrecta do transferidor na medição da amplitude de um ângulo (ver Figura

5.2). Verifica-se que a Matilde mobiliza aqui o conhecimento de ângulo agudo, enquanto que a Joana recorre à utilização do transferidor, certamente porque era o que estava a usar na altura em que respondia à questão.

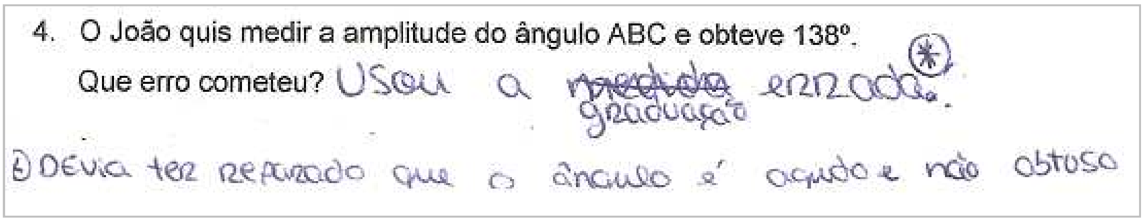

4. O João quis medir a amplitude do ângulo ABC e obteve 138º.
Que erro cometeu? Usou a ~~medida~~ graduação errada. (*)
(*) Devia ter reparado que o ângulo é agudo e não obtuso

Figura 5.1. Resposta da Matilde da turma A à questão 4

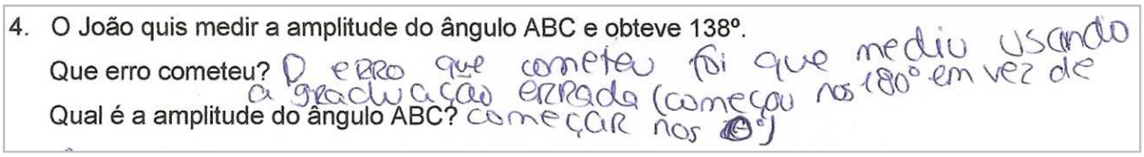
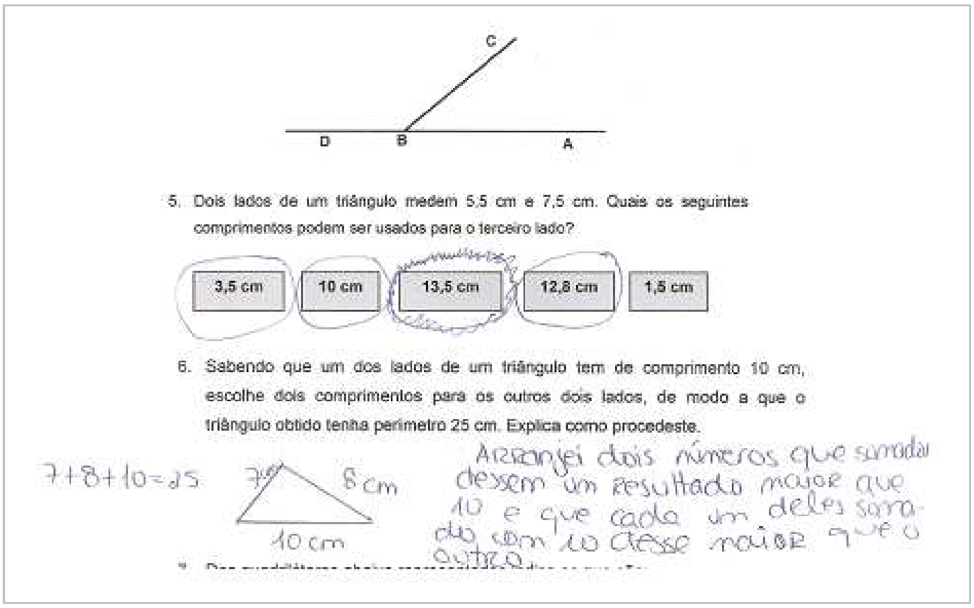

4. O João quis medir a amplitude do ângulo ABC e obteve 138º.
Que erro cometeu? O erro que cometeu foi que mediu usando a graduação errada (começou nos 180º em vez de começar nos 0º)
Qual é a amplitude do ângulo ABC?

Figura 5.2. Resposta da Joana da turma A à questão 4

Observa-se que a Joana consegue identificar a propriedade da Desigualdade Triangular para escolher os comprimentos possíveis para o terceiro lado do triângulo (questão 5) e para escolher os dois comprimentos para os lados de um triângulo, sabendo o perímetro e um dos lados, como se pode ver pela resposta da aluna à questão 6 (ver Figura 5.3).



5. Dois lados de um triângulo medem 5,5 cm e 7,5 cm. Quais os seguintes comprimentos podem ser usados para o terceiro lado?

3,5 cm	10 cm	13,5 cm	12,8 cm	1,5 cm

6. Sabendo que um dos lados de um triângulo tem de comprimento 10 cm, escolhe dois comprimentos para os outros dois lados, de modo a que o triângulo obtido tenha perímetro 25 cm. Explica como procedeste.

7+8+10=25

7 cm, 8 cm, 10 cm

Arranjei dois números que somados dessem um resultado maior que 10 e que cada um deles somado com 10 desse maior que o outro.

Figura 5.3. Resposta da Joana às questões 5 e 6

A Matilde, por sua vez, sabe que há uma relação entre os lados de um triângulo, mas não a consegue identificar. Analisando a resposta à questão 5 (ver Figura 5.4), repara-se que existe uma indecisão sobre que lados escolher. Depois opta pela escolha de um dos lados, que é o menor, que soma a um dos que era dado e verifica que a soma é menor do que o outro lado dado.

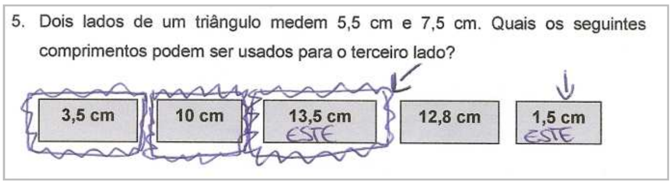


Figura 5.4. Resposta da Matilde à questão 5

Aliás, na resposta à questão 6, não há a preocupação em verificar se com os dois lados que escolheu consegue, ou não, formar triângulo. Mesmo, sem utilizar a propriedade da Desigualdade Triangular, a aluna não tenta criar uma imagem mental ou visualizar como se forma um triângulo, notando-se que a Matilde revela algumas dificuldades em termos do uso da visualização. A resposta à questão 1 (ver Anexo III) ajuda a este diagnóstico, uma vez que inicialmente identifica cinco triângulos na figura e depois de ver que a Joana identifica sete triângulos, risca e substitui a resposta, também por sete triângulos, quando compreende que é este o número correcto.

A Joana conseguiu identificar os 7 triângulos na figura da questão 1, pelo que se pode inferir que soube usar a sua capacidade de visualização. Este aspecto é corroborado pela forma como responde à questão 8 (ver Anexo III), em que procura desenhar o segundo segmento de forma correcta para obter as diferentes figuras geométricas.

Figura 5.5. O losango desenhado pela Joana na resposta à questão 8

Repare-se que a aluna primeiro desenha um segmento e depois apaga, porque na posição em que o colocou verifica, sem desenhar, que não consegue construir um losango (ver Figura 5.5). Portanto, utiliza aqui a sua capacidade de visualização na resolução desta questão. O mesmo não acontece com a Matilde. Por exemplo, o rectângulo que a Matilde desenha é igual ao quadrado que fez anteriormente.

Quando se pediu às alunas para identificarem os quadriláteros representados na questão 7 (ver Anexo III), verificou-se que as alunas conseguiram referenciar os quadriláteros mais comuns (paralelogramo, rectângulo, losango e quadrado) e conseguiram estabelecer algumas relações entre esses quadriláteros, nomeadamente que o quadrado é um caso particular do rectângulo e que estes dois quadriláteros são casos particulares do paralelogramo. No entanto, não foram capazes de estabelecer a relação entre o losango e o quadrado, ao não referenciarem o quadrado, também, como um caso particular do losango. Por outro lado, constata-se pela resposta das alunas que não identificaram a propriedade dos trapézios ao escolherem um quadrilátero sem lados paralelos e/ou côncavo. Pode-se especular que as alunas escolheram estes dois quadriláteros como trapézios, porque eram os únicos que não tinham sido ainda seleccionados, mas se tivessem a certeza da propriedade que define um trapézio certamente que não os seleccionariam. Acrescente-se que também não escolheram os paralelogramos como trapézios.

Por fim, constata-se que as alunas não estão habituadas a tarefas de natureza exploratória ou investigativa. Na questão 8 (ver anexo III), as alunas limitaram-se a desenhar um segundo segmento que permitisse obter apenas os únicos quadriláteros evocados no enunciado, não demonstrado qualquer curiosidade em explorar outros quadriláteros e não explicaram que posição devia ter o segundo segmento por forma a obterem os diferentes quadriláteros, pois essa explicação levaria a trabalhar as características das diagonais de quadriláteros. Portanto, as alunas abordaram esta tarefa como um exercício, não procurando explorá-la de modo a descobrirem algumas propriedades das diagonais dos quadriláteros, o que mostra a sua falta de hábito de realização de tarefas de natureza exploratória.

Em suma, a Matilde e a Joana são alunas com um óptimo aproveitamento, empenhadas e muito interessadas nas tarefas que lhes são propostas, no entanto, nesta fase, ainda não apresentam grande persistência e curiosidade em desenvolver tarefas de natureza mais exploratória, devido a não ser uma prática na sua actividade matemática, até este momento da sua vida escolar, bem como revelam alguma dificuldade em explicar alguns raciocínios. No que respeita, mais especificamente, ao conhecimento geométrico, verifica-se que a Matilde tem mais dificuldade em situações que envolvem a visualização do que a Joana e em identificar algumas propriedades de figuras planas, como os triângulos e os quadriláteros. A Joana revelou as mesmas dificuldades da

Matilde a nível dos quadriláteros. As alunas não conseguiram, ainda, identificar algumas propriedades e estabelecer algumas relações entre os quadriláteros. Por fim, as alunas não têm dificuldade em manusear instrumentos de medição e de desenho.

Relativamente ao conhecimento geométrico das alunas Marta e Maria, da turma B, verifica-se que, durante a resolução das tarefas em que utilizaram o transferidor, régua e compasso, não tiveram qualquer dificuldade no seu manuseamento.

A Marta revela dificuldades a nível da visualização. Na figura da questão 1 (ver Anexo III) identificou apenas os quatro triângulos que são logo visíveis e, por outro lado, na questão 9 não foi capaz, a partir da representação que fez, de visualizar que a parte sombreada é um quarto do rectângulo (ver Figura 5.6). Envolveu-se em cálculos, que estão correctos, mas a sua interpretação conduziu a uma conclusão errada. Presume-se que, a partir da utilização dos cálculos, limitou-se a manipulá-los, deixando de parte o que significavam na sua representação e, por isso, a resposta não foi a adequada. Repare-se que a aluna subdividiu o rectângulo em triângulos iguais aos sombreados e bastava utilizar a visualização para responder à questão. Em vez disso, recorreu à percentagem.

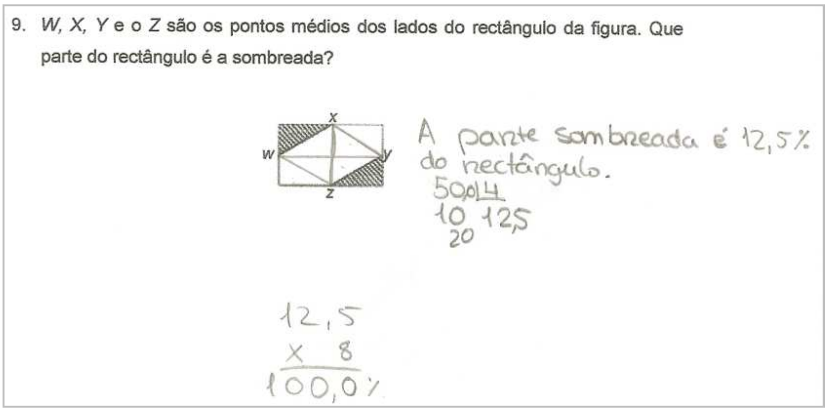


Figura 5.6. Resposta da Marta à questão 9 colocada na primeira entrevista

A Maria, pelo contrário, conseguiu utilizar bem a visualização. Na questão 1, identificou os sete triângulos e, na 9, utilizou a representação que fez para responder correctamente à questão (ver Figura 5.7).

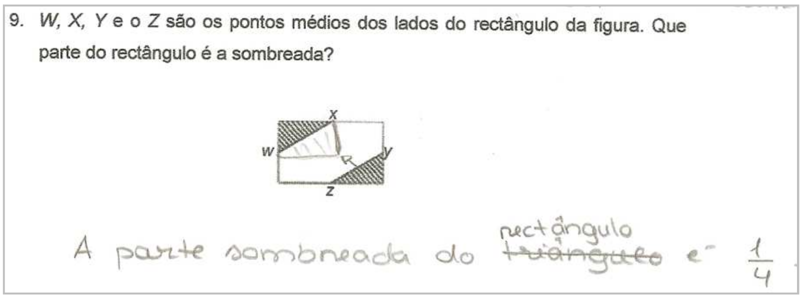


Figura 5.7. Resposta da Maria à questão 9 colocada na primeira entrevista

No que concerne às questões relacionadas com os triângulos, a Marta não foi capaz de utilizar a propriedade da Desigualdade Triangular, na questão 5, mas respondeu correctamente, desenhando os triângulos com os comprimentos dados e indicou os comprimentos do terceiro lado que permitiriam construir o triângulo. Por sua vez, a Maria sabe que existe uma propriedade dos triângulos que relaciona os seus três lados, mas não foi capaz de a utilizar correctamente, pois considerou que a soma dos comprimentos de dois lados é menor do que o comprimento do terceiro lado (ver Figura 5.8).

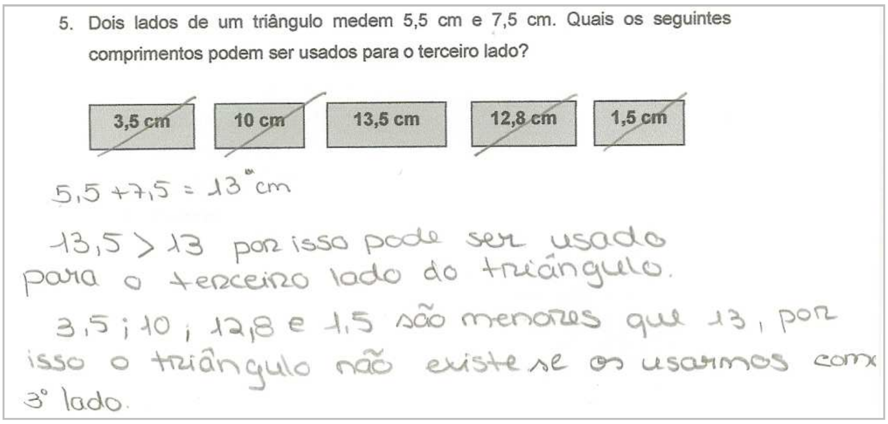


Figura 5.8. Resposta da Maria à questão 5 colocada na primeira entrevista

Nos quadriláteros, as alunas revelaram que não são capazes de classificar os quadriláteros, conhecer as propriedades e estabelecer relações entre estas figuras.

Em síntese, constata-se que as alunas têm um bom desempenho, são participativas e interessadas nas tarefas que são propostas, manifestando particular interesse pelas de natureza exploratória (este ano realizadas pela primeira vez). A Maria faz uso da sua capacidade de visualização na resolução das tarefas, enquanto que a Marta demonstra alguma dificuldade em utilizar esta capacidade. As duas alunas não foram capazes de identificar propriedades dos triângulos e dos quadriláteros e de estabelecer relações entre os quadriláteros, pelo que tiveram dificuldade em responder às questões relacionadas com estas figuras, em particular as respeitantes aos quadriláteros.

5.2 O Geogebra na actividade matemática dos alunos

A sequência organizada de tarefas exploratórias, como se referiu na metodologia do estudo, tem quatro tarefas com recurso ao Geogebra. Neste ponto, são apresentadas três dessas tarefas sob a forma de episódios. Em cada um destes episódios descrevem-se os diversos registos efectuados sobre as tarefas.

5.2.1 Ângulos internos e externos

O episódio *Ângulos internos e externos* corresponde à tarefa 2 da sequência organizada de tarefas elaborada para trabalhar o tópico Triângulos e Quadriláteros (ver Anexo I), que decorreu durante três blocos de 90 minutos, na turma A, estando prevista para dois blocos.

A actividade começou com a distribuição da tarefa, sem grandes considerações sobre a mesma. A professora A apenas referiu que a tarefa era com o Geogebra e deu indicações aos alunos de como teriam de organizar o seu trabalho. Começavam pelas questões 1 e 2, depois abria-se um espaço para discussão colectiva e, por fim, retomavam a tarefa com as questões 3 e 4 e, posteriormente, haveria nova discussão colectiva em que se debateriam as conclusões. As duas primeiras questões e a respectiva discussão decorreria durante o bloco de 90 minutos e as restantes questões seriam trabalhadas na aula seguinte.

Entretanto, depois desta introdução e de os alunos terem a tarefa, a professora A, como é habitual numa aula que envolve o uso do computador, escolheu um conjunto de comandos sucintos para trabalhar em conjunto com os alunos no início da aula, a partir do quadro interactivo. No caso desta actividade, decidiu ensinar os comandos para se escrever um texto na folha do Geogebra e optou, também, por ensinar as instruções para obter a soma dos ângulos internos de uma figura, de modo a que o registo dessa soma ficasse na folha gráfica, porque se os alunos escrevessem na barra de comandos apenas a soma dos ângulos, esta instrução iria para a parte da álgebra do Geogebra e poderia trazer dificuldades na concretização da tarefa. Assim, explicando este comando aos alunos, a probabilidade desta situação acontecer seria menor e o importante era que os alunos centrassem a sua atenção na realização da tarefa.

Seguidamente, os alunos, a trabalhar em pares, abriram o Geogebra instalado nos portáteis e começaram a ler a primeira questão. Foi a segunda vez que utilizaram este programa de geometria dinâmica, pelo que ainda não o dominavam bem.

Todos os grupos começaram por construir o triângulo na folha do Geogebra e desenhar os ângulos internos do triângulo. Verificou-se que, mesmo só tendo utilizado este software uma vez, quando realizaram a tarefa 1 (ver Anexo I), os alunos manifestaram poucas dificuldades na selecção dos itens do Menu. Clicavam no menu e procuravam a opção correcta que lhes permitisse realizar as construções e colocar a informação necessária junto das figuras que os ajudassem na resolução da tarefa, como por exemplo, as medidas das amplitudes dos ângulos. A este respeito, observou-se que a maioria dos grupos quando seleccionou a opção *ângulo* e escolheu os três pontos para desenhar o ângulo interno do triângulo, obteve o ângulo externo. De imediato apagaram e repetiram a operação, corrigindo o erro inicial e seleccionando os três pontos no sentido do ponteiro dos relógios.

Na construção do triângulo, a maioria dos alunos optou por fazer como estava no enunciado, ou seja, por construir um triângulo e arrastar um dos vértices para obter um outro triângulo e facilmente conseguiram chegar à conclusão de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, como se constata pelas descrições das conclusões elaboradas pelos alunos (ver Figura 5.9).

Em cada grupo de trabalho começámos por construir um triângulo no programa GeoGebra, medimos os seus ângulos internos e adicionámos as medidas. De seguida, arrastámos um vértice de modo a obter um novo triângulo, medimos novamente a soma das medidas e reparamos que a soma não se altera

No inicio da tarefa começamos por construir um triângulo, de seguida medimos as amplitudes dos seus ângulos e adicionamos as medidas obtidas. Depois com o rato arrastamos um vértice do triângulo de modo a obter um novo triângulo e verificamos que ao arrastar um lado do triângulo as amplitudes dos ângulos mudam mas a soma das amplitudes mantém-se sempre igual, porque a soma dos ângulos internos e sempre de 180°.

Figura 5.9. Conclusões de dois grupos da turma A sobre a questão 1

Um grupo de alunos resolveu fazer mais triângulos na folha gráfica do Geogebra, como se confirma pela Figura 5.10. No entanto, arrastaram, também, um dos vértices em cada um dos triângulos.

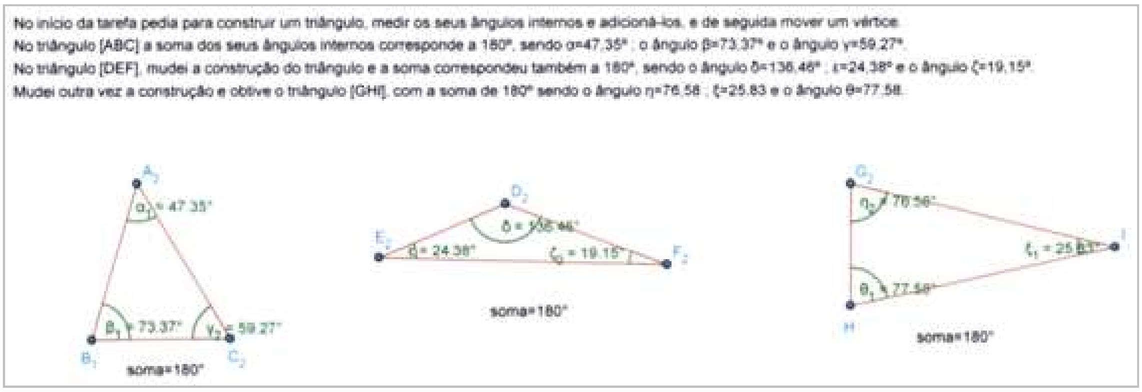


Figura 5.10. Resolução da questão 1 de um grupo

Nesta fase, os alunos tiveram mais dúvidas em situações que não tinham propriamente a ver com a realização das construções, mas com gravar o ficheiro ou escrever as conclusões junto às construções.

Entretanto, passaram para a questão 2 (ver Anexo I). Os grupos abriram uma outra folha do Geogebra e começaram a ler a questão. Escolheram a opção do menu *Polígono* para construir o triângulo e desenharam os ângulos internos. Depois, na mesma folha desenharam um quadrilátero, seleccionando, mais uma vez, a opção *Polígono*. De seguida, marcaram os ângulos internos e traçaram o segmento de recta, entre um dos vértices e o outro não consecutivo. Fizeram o mesmo procedimento para o pentágono e para o hexágono.

O ritmo dos alunos era diferente, mas todos estavam a conseguir fazer as construções na folha do Geogebra.

Uns grupos, à medida que iam terminando cada uma das construções com a informação necessária, preenchiam a tabela que estava na folha da tarefa. Outros fizeram primeiro as construções dos polígonos com a informação necessária e, só depois, começaram a preencher o quadro que estava na folha da tarefa e a retirar a respectiva conclusão (ver Figura 5.11).

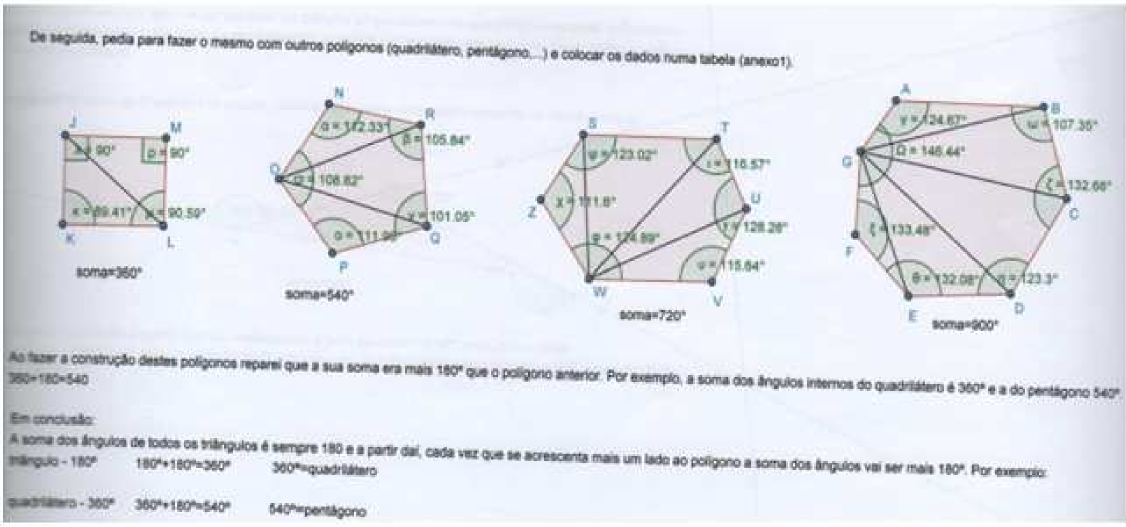
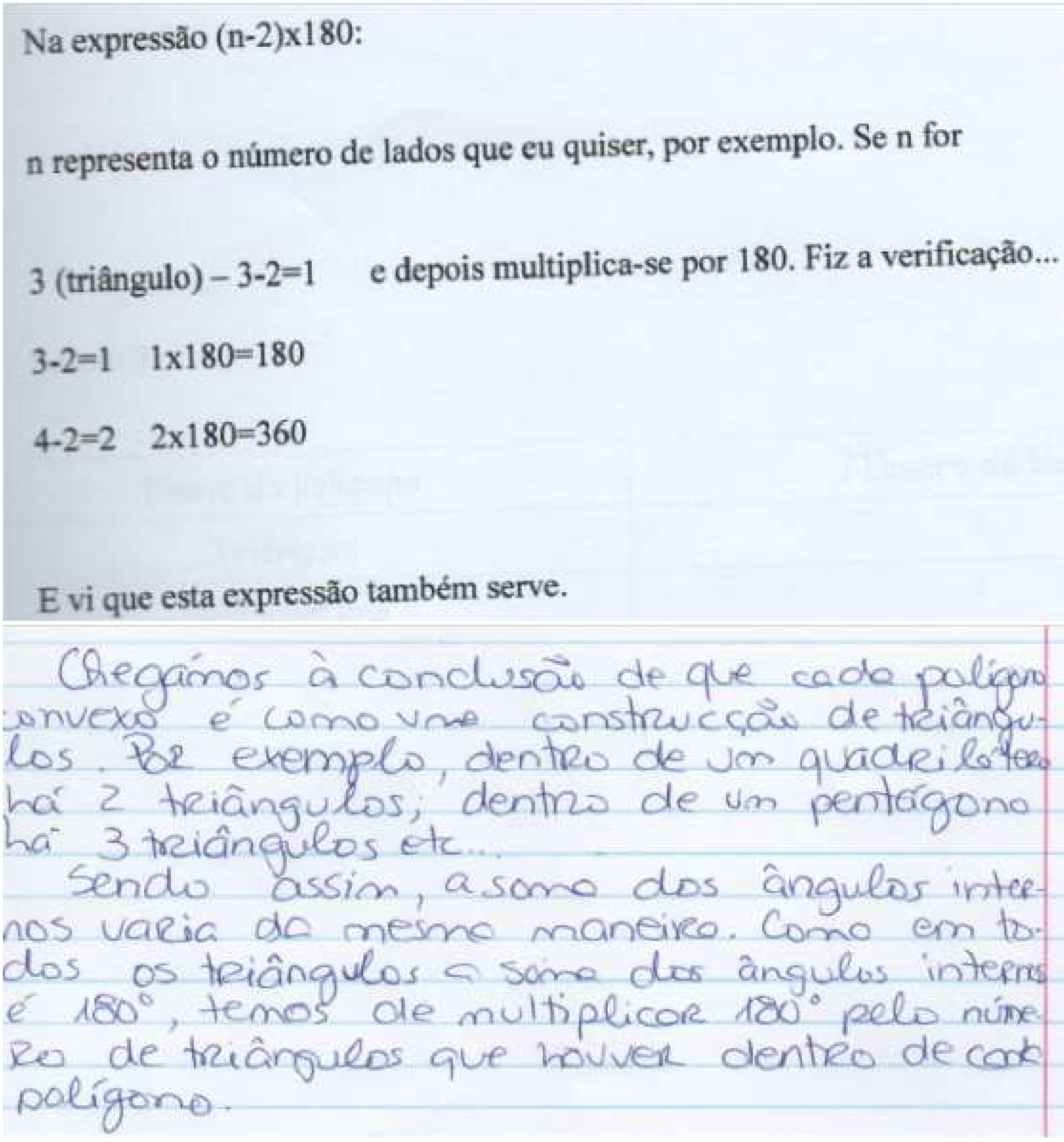


Figura 5.11. Resolução da questão 2 de um grupo

Nesta fase passavam sessenta minutos de aula e a professora A teve a necessidade de interromper o trabalho que os alunos estavam a realizar para dizer que teriam de passar ao momento de discussão. No entanto, os grupos pediram, com insistência, mais tempo, porque ainda não tinham terminado as construções ou estavam a preencher o quadro da questão 2. Um dos grupos, que ainda estava nas construções, por exemplo, teve um problema durante a resolução desta tarefa. As construções “desapareceram” da folha gráfica do Geogebra e os alunos não tinham gravado ainda o seu trabalho. Então, decidiram fazer de novo.

Perante esta insistência dos alunos e, pelo facto de constatar que estavam todos muito empenhados na actividade que estavam a desenvolver e de sentir que todos os alunos queriam mostrar as suas conclusões e chegar a respostas, a professora A decidiu alterar a planificação e dar mais tempo aos alunos, passando a discussão das duas questões para a aula seguinte.

Durante o período em que estavam a preencher a tabela da questão 2 na folha da tarefa, verificou-se que os alunos não tiveram dificuldade no seu preenchimento e conseguiram chegar à conclusão pretendida, como se pode confirmar pelos registos dos alunos, conclusões e justificações (ver Figura 5.12).



Na expressão (n-2)x180:

n representa o número de lados que eu quiser, por exemplo. Se n for

3 (triângulo) – 3-2=1 e depois multiplica-se por 180. Fiz a verificação...

3-2=1 1x180=180

4-2=2 2x180=360

E vi que esta expressão também serve.

Chegámos à conclusão de que cada polígono convexo é como uma construcção de triângulos. Por exemplo, dentro de um quadrilátero há 2 triângulos; dentro de um pentágono há 3 triângulos etc...
Sendo assim, a soma dos ângulos internos varia da mesma maneira. Como em todos os triângulos a soma dos ângulos internos é 180°, temos de multiplicar 180° pelo número de triângulos que houver dentro de cada polígono.

Figura 5.12. Conclusão da questão 2, de dois grupos da turma A

A segunda aula começou com a discussão colectiva. Este momento foi dinamizado pela professora A, começando por perguntar que conclusão tinham obtido na primeira questão e todos os grupos manifestaram interesse em dar a sua resposta.

Pediu, então, a vários alunos que explicassem a sua conclusão. Desta discussão, em consequência do que os alunos tinham observado durante a resolução da actividade, resultou a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo. No meio da discussão, a Joana disse que sabia como demonstrar esta conclusão. A professora A solicitou que a aluna fosse ao quadro explicar para a turma. A Joana desenhou um triângulo e traçou uma recta que passava por um vértice do triângulo e era paralela ao lado oposto. Deu nome aos ângulos internos (ver Figura 5.13).

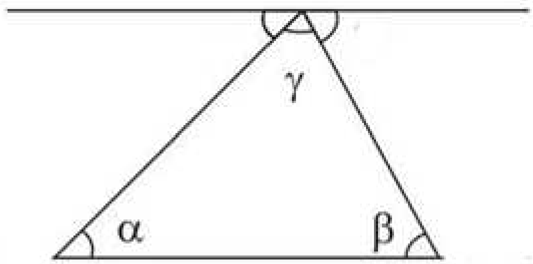
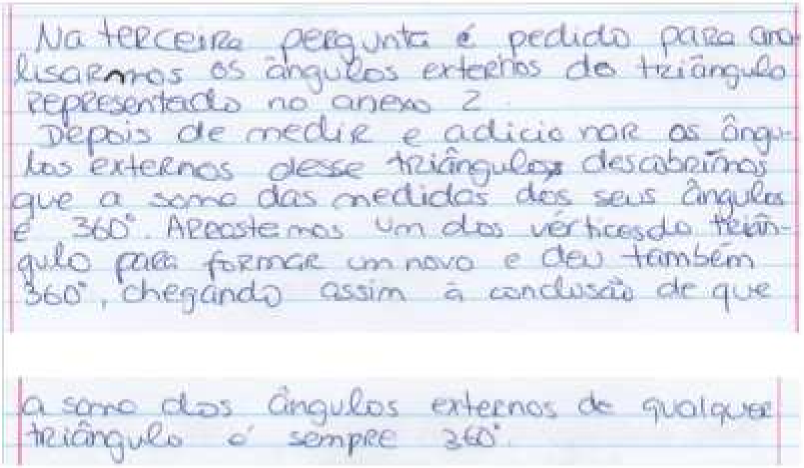


Figura 5.13. Esquema que a Joana fez no quadro para explicar a demonstração

Depois desenhou os dois ângulos que se formam entre os lados do triângulo e a linha traçada e disse que aqueles ângulos eram iguais aos dois ângulos de "baixo" do triângulo. Justificou, afirmando que eram ângulos alternos internos e que, portanto, eram iguais (os alunos trabalharam estas noções na tarefa introdutória, ver Anexo I). Juntando os três ângulos de cima, obtinha-se 180º (ângulo raso, como refere depois a aluna).

Após esta discussão que demorou trinta minutos, os alunos abriram o Geogebra e passaram para as questões 3 e 4. À semelhança do que tinha acontecido com as questões 1 e 2, os alunos começaram por desenhar um triângulo e seguir as instruções do enunciado da questão. Os ritmos de trabalho foram diferentes, mas todos conseguiram fazer a construção e medir os ângulos externos. Foram referindo que a soma dos ângulos externos era 360º e estabeleceram como conjectura que a soma dos ângulos externos de um triângulo é 360º. Mais uma vez, verificou-se que uns alunos desenharam apenas um triângulo e arrastaram um dos vértices para obterem outros triângulos, como se constata pela descrição de um grupo de alunos (ver Figura 5.14). Outros optaram por desenhar mais do que um triângulo para confirmarem as suas conclusões (ver Figura 5.15).



Na terceira pergunta é pedido para analisarmos os ângulos externos do triângulo representado no anexo 2.
Depois de medir e adicionar os ângulos externos desse triângulo descobrimos que a soma das medidas dos seus ângulos é 360°. Arrastemos um dos vértices do triângulo para formar um novo e deu também 360°, chegando assim à conclusão de que

a soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é sempre 360°.

Figura 5.14. Descrição da resolução da questão 3 e conclusão de um grupo

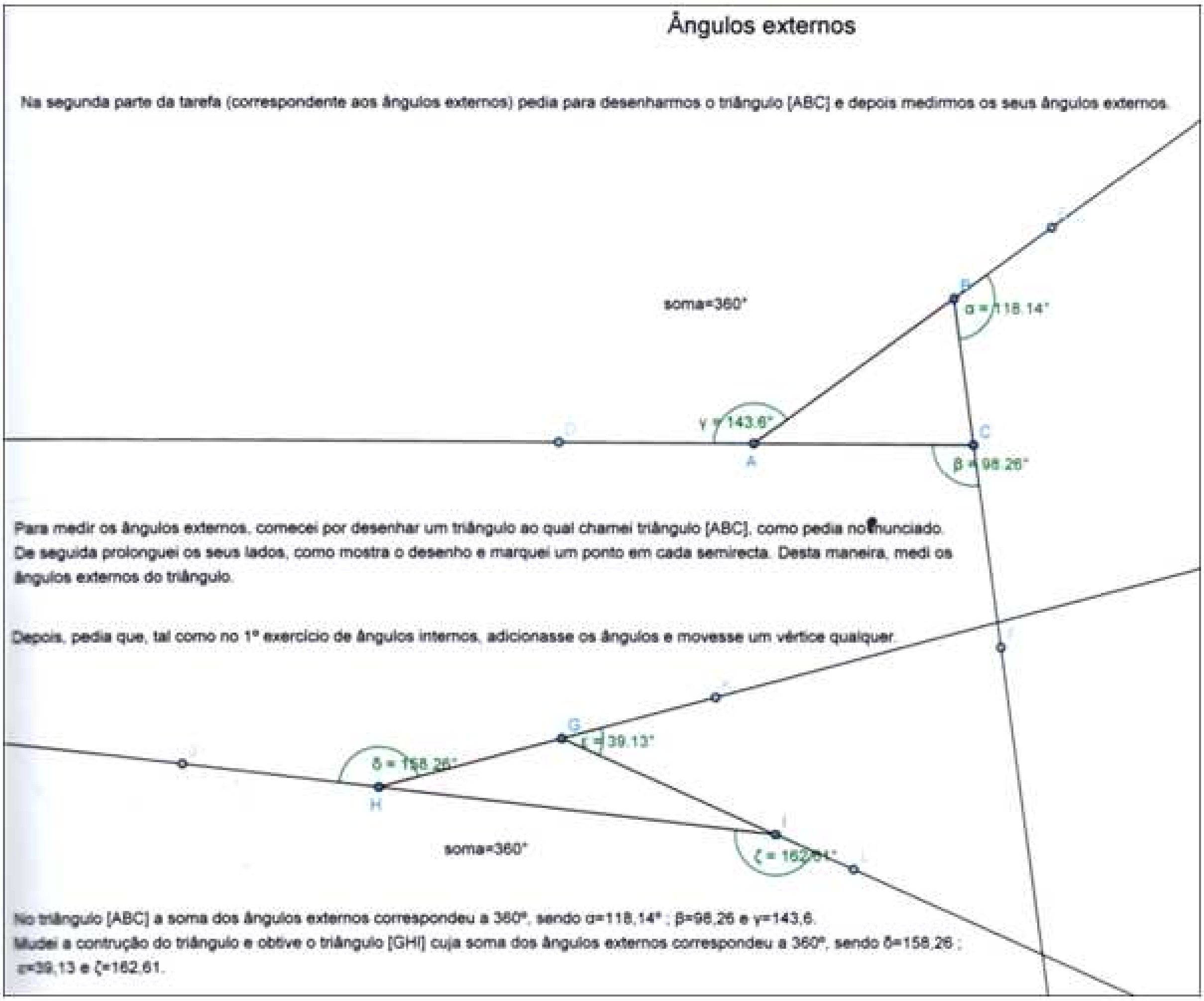
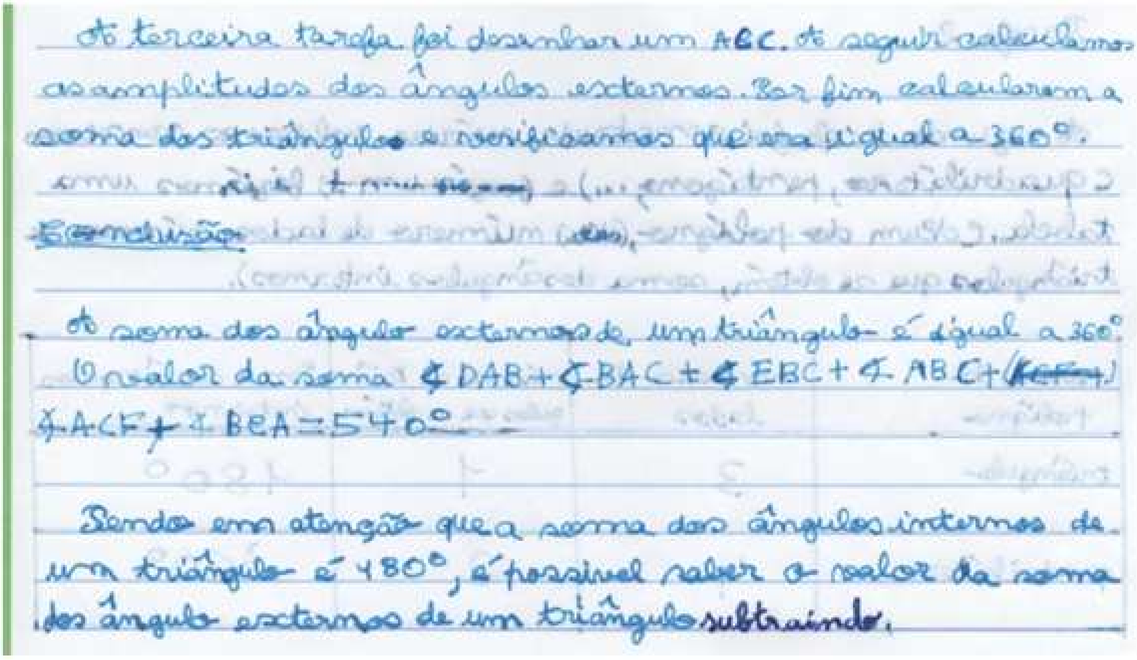


Figura 5.15. Resolução da questão 3 e conclusão de um grupo

Na questão 3.2, os alunos mediram as amplitudes dos ângulos enunciados, efectuaram a soma pedida e conseguiram verificar que eram três ângulos rasos, ou seja, 540º e que subtraindo a soma dos ângulos internos do triângulo obtinham 360º, conseguindo assim compreender a conjectura a que tinham chegado na alínea anterior (ver Figura 5.16).



A terceira tarefa foi desenhar um ABC. A seguir calculamos as amplitudes dos ângulos externos. Por fim calcularam a soma dos triângulos e verificamos que era igual a 360º.

Conclusão:

A soma dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360º

O valor da soma ∢ DAB + ∢ BAC + ∢ EBC + ∢ ABC + ∢ ACF + ∢ BCA = 540º

Sendo em atenção que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, é possível saber o valor da soma dos ângulos externos de um triângulo subtraindo.

Figura 5.16. Resposta de um grupo à questão 3.2

O ritmo de trabalho, como aconteceu em outras questões, foi diferenciado. As professoras respeitaram os tempos de cada grupo, porque percebia que os alunos estavam a compreender o trabalho que estavam a desenvolver. Sentiu a necessidade de apoiar mais uns grupos do que outros, não a nível do uso do Geogebra, mas na discussão das conjecturas e conclusões. Por vezes, os alunos precisavam da concordância das professoras para saber se estavam no caminho certo ou a escrever correctamente as suas ideias. Na generalidade os grupos estavam autonomamente a realizar a actividade.

Os alunos iniciaram posteriormente a questão 4. Abriram uma nova folha do Geogebra, construíram os polígonos, desenharam os ângulos externos e mediram as respectivas amplitudes (ver Figura 5.17).

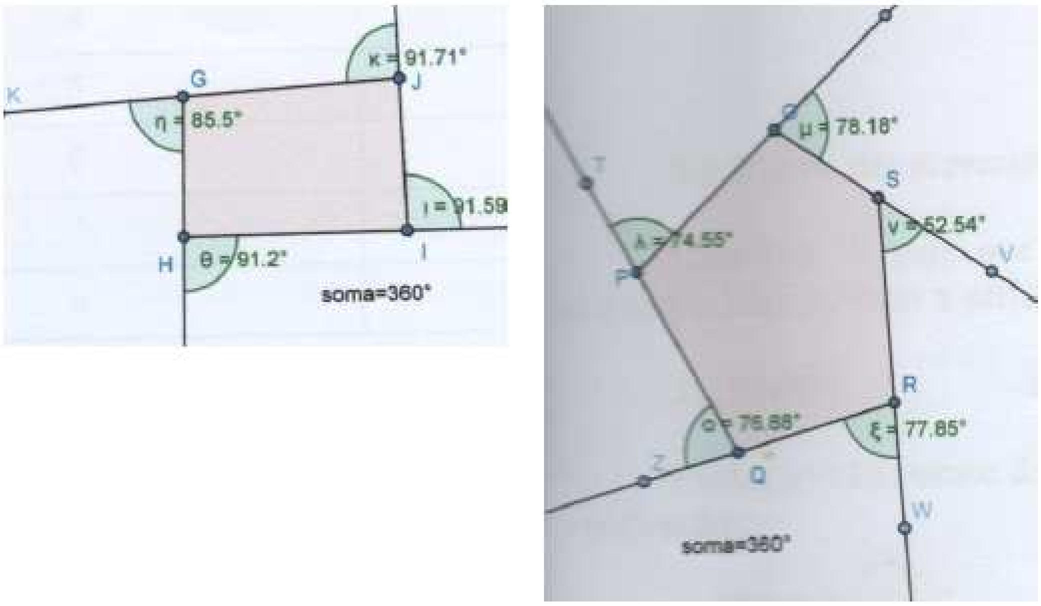


Figura 5.17. Algumas construções de um grupo para responder à questão 4

Utilizando a barra de ferramentas, como o fizeram nas outras questões, os alunos somaram as amplitudes desses ângulos, registaram na tabela da folha da tarefa e concluíram que a soma dos ângulos externos era 360º (ver Figura 5.18).

Vi então que a soma dos ângulos externos é sempre 360º, seja qual for o polígono..

A cada polígono de n lados a soma dos ângulos externos é sempre a mesma, porque, a soma dos ângulos externos é sempre de 360º.

Figura 5.18. Respostas de dois grupos à questão 4.

Alguns grupos iniciaram a resolução desta questão quase no final da aula, pelo que a terceira aula, dedicada a esta tarefa, começou com alguns grupos a terminarem a questão 4 e outros a melhorarem as suas respostas. A professora A, mais uma vez, decidiu dar tempo adicional aos alunos para terminarem a tarefa, porque reconheceu que mesmo os "mais fracos" estavam envolvidos na actividade e estavam a conseguir explorá-la e a tirar conclusões.

Seguiu-se o período de discussão das questões 3 e 4. Este período, dinamizado pela professora A, permitiu que os grupos explicassem as suas construções e conclusões. Verificou-se que a maioria dos alunos compreendeu as conjecturas e as demonstrações da tarefa *Ângulos internos e externos*, como depois se constatou nos relatórios elaborados pelos diferentes grupos. Estes relatórios foram elaborados na terceira aula, após a discussão das questões. Durante a elaboração dos relatórios, os alunos solicitaram muito o apoio das professoras para saberem se estavam a fazer bem ou para perguntar o que deviam colocar. Os alunos apresentaram alguma dificuldade na sua elaboração, o que é natural, dado que era a primeira vez que lhes era pedido para elaborarem um relatório.

5.2.2 Critérios de congruência de triângulos

O episódio *Critérios de congruência de triângulos* decorre com base na tarefa dedicada a este tema (ver Anexo I), que correspondeu a duas aulas de noventa minutos em cada uma das turmas. Este episódio, que abrange as duas turmas, é dividido em dois cenários e as observações focaram-se na actividade desenvolvida pelas duas alunas escolhidas das respectivas turmas.

Cenário da turma A

Como habitualmente acontecia, a aula começou com a distribuição da tarefa *Critérios de congruência de triângulos*, mas desta vez a professora A não apresentou a tarefa oralmente, nem fez uma introdução. Os alunos leram a tarefa, ligaram os portáteis e abriram o Geogebra.

A Joana e a Matilde perceberam que tinham de construir triângulos a partir das condições dadas e registar na tabela as medidas dos triângulos construídos.

Começaram a construir o triângulo com as condições dadas na alínea 1. A Joana, que estava no momento a fazer a construção, marcou um ponto e uma circunferência de centro nesse ponto e raio 8 cm, fixou um ponto sobre a circunferência e desenhou o segmento de recta. De seguida, escolheu a opção *Rotação*, seleccionando o ponto B1 para uma rotação de 60º e obtendo o ponto C1. Depois escolheu no menu do Geobegra a opção *Ângulo com amplitude fixa* e marcou o ângulo com amplitude de 60º. Por fim, a Joana seleccionou a opção *Polígono* e traçou o triângulo definido pelos três pontos (A1, B1 e C1) que estavam na folha gráfica. Fizeram as restantes medições e registaram na tabela da tarefa. Mas, antes da medição, a Matilde diz que é óbvio que os ângulos têm uma amplitude de 60º, sem explicar essa razão. Quando solicitam as medidas dos lados, a Matilde reage de uma forma um pouco aborrecida por terem realizado esta acção sem necessidade.

Matilde: Agora temos de ver quanto é que medem os lados. É óbvio que os ângulos medem todos 60.

(Depois de medirem os lados.)

Matilde: Burra, ele é equilátero. Tem os lados todos iguais.

Joana: OK. Agora vamos apontar.

(Vão passar para o segundo triângulo da alínea 1.)

Joana: Tem de ser igual, o triângulo.

Joana: Ah, pois não.

Ainda na mesma folha do Geogebra, optaram por fazer um novo triângulo com as mesmas condições estabelecidas na alínea 1. Nesta segunda construção, seguiram o mesmo procedimento do primeiro triângulo, mas depois de marcarem o ângulo de amplitude 60º, seleccionaram a opção *Semi-recta* e traçaram-na a partir do ponto A (ver Figura 5.19). Mediram os lados e as amplitudes dos ângulos e registaram na folha. Mostraram satisfação por terem encontrado outro triângulo.

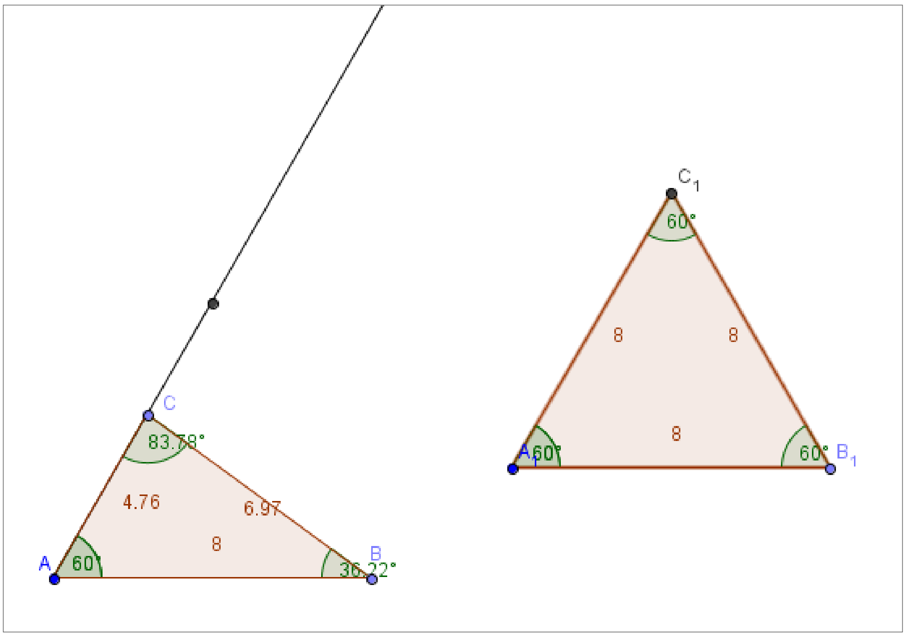


Figura 5.19. Construção da alínea 1 no Geogebra

As alunas gravaram o ficheiro e abriram outra folha no Geogebra para iniciarem a alínea 2. Até a esse momento não solicitaram a ajuda das professoras. Começaram por construir o segmento AB. Desta vez não recorreram à circunferência para fixar o segmento com o comprimento definido. Optaram por seleccionar no Menu *Segmento (Ponto, Comprimento)* para fazer o segmento de comprimento 8 cm (AB). Seguidamente, a Matilde referiu: "Agora temos de fazer o ângulo de 60, mas depois ele tem aqui o AC". Após esta afirmação, as alunas indicaram em A o ângulo com a amplitude de 60º e traçaram a semirecta com origem em A e com a inclinação do ângulo marcado. Sem dificuldades e hesitações, marcaram a circunferência de centro em A e raio 6 e seleccionaram o ponto de intersecção entre essa circunferência e a semirecta. Por fim, traçaram o triângulo (ver Figura 5.20) e efectuaram os procedimentos necessários para terem a informação das restantes medidas do triângulo e registaram na folha.

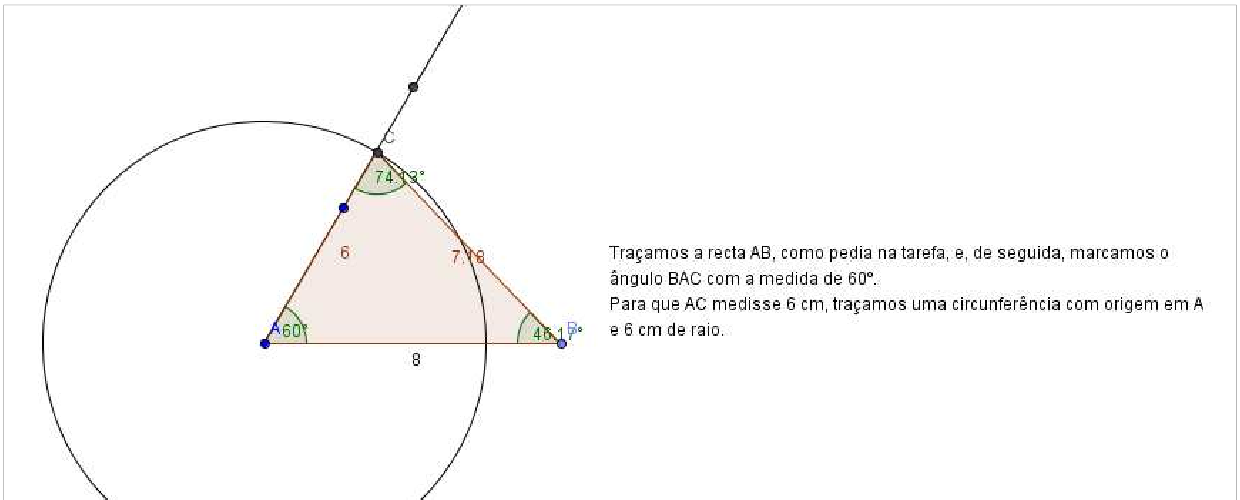


Figura 5.20. Construção da alínea 2 no Geogebra

A Joana iniciou a construção do segundo triângulo. Quando terminaram essa construção verificaram que não conseguiram fazer um triângulo diferente. Ficaram a olhar para o ecrã, tentando perceber o que tinham feito. Surgiu um momento de impasse e, por isso, chamaram pela primeira vez a professora. Nesta fase tinham passado sensivelmente 45 minutos de aula.

Joana: Espera aí. Isto não dá para fazer de outra maneira. Se tens a medida de dois o outro tem de ser a união.

Matilde: Espera aí, vai ao outro vai ao outro ...

Joana: Vamos voltar a fazer e depois logo vimos.

(Voltaram a fazer o triângulo.)

Matilde: AB é 8

(...)

Joana: Agora temos de unir os dois de qualquer maneira.

Matilde: Sim, mas podemos mexer.

Joana: Não, não podemos. (a aluna quer dizer que o facto de mexerem e arrastarem o triângulo, as medidas do triângulo não alteram)

Joana: Fazemos só este e dizemos que não conseguimos fazer mais.

(Joana chama a professora.)

As professoras, entretanto, estavam a dar apoio a outros grupos e demoraram alguns minutos para conseguirem chegar junto das alunas. Nesse período, elas tentaram ultrapassar a dificuldade. Desfizeram o triângulo que tinham construído e voltaram a fazer essa construção; olhavam para as diferentes opções do menu e chegaram à conclusão que não conseguiam fazer um triângulo diferente. Quando a professora B apareceu, as alunas mostraram confiança e convicção relativamente à resolução da alínea 2 quando a Joana disse: "Já não temos dúvidas, era só há bocado". As alunas gravaram o ficheiro e abriram outra folha gráfica do Geogebra para iniciarem a construção da alínea 3.

À semelhança do que aconteceu nas outras alíneas, as alunas começaram por desenhar o segmento de recta CA com comprimento 10 cm, o ângulo BAC de amplitude 50º e fixaram a semirecta com a inclinação do ângulo. Depois, marcaram a circunferência de centro em A e raio 8 cm. Assim que fizeram este procedimento, pararam e hesitaram. A Joana disse: "Agora temos de unir estes dois de qualquer maneira" (apontou para os pontos B e C). A hesitação aconteceu porque repararam que o segmento BC não respeitava a condição dada e perceberam que estavam a fazer o caso anterior. Viram, por isso, que não estavam a executar correctamente algum passo da construção e decidiram apagá-la, desfazendo o que tinham feito para tentarem perceber onde estava o erro.

As alunas fizeram uma nova construção, começando por traçar o segmento com comprimento 10 cm e a circunferência de centro em A e raio 8 cm. A Joana seleccionou a opção *Semirecta* fixou a origem no ponto A e arrastou-a ao longo da circunferência sem saber bem onde a devia fixar, até que decidiu apagar. Após um diálogo entre as alunas, a Matilde sugeriu que se construísse o ângulo de 50º em C. A Joana seguiu a sugestão e quando estvam a desenhar o triângulo, apagaram porque repararam que, novamente, uma das condições não era verificada. A Matilde soprou. Apagaram a construção e recomeçaram outra. Estavam claramente num processo de tentativa e erro.

A Joana voltou a traçar o segmento AC de comprimento 10 cm e como continuavam com dúvidas, voltaram a olhar para a tarefa e a Joana, com satisfação, disse: “Nós estávamos a fazer mal. Temos de marcar a circunferência em C”. Fizeram este procedimento e a Matilde, apontando para a circunferência e percorrendo-a com o dedo, afirmou: “Mas, oito podem ser estes todos”. As alunas olharam para o ecrã e começaram a tentar marcar o ângulo e conseguiram identificar em que vértice deviam posicionar a sua origem (ver Figura 5.21).

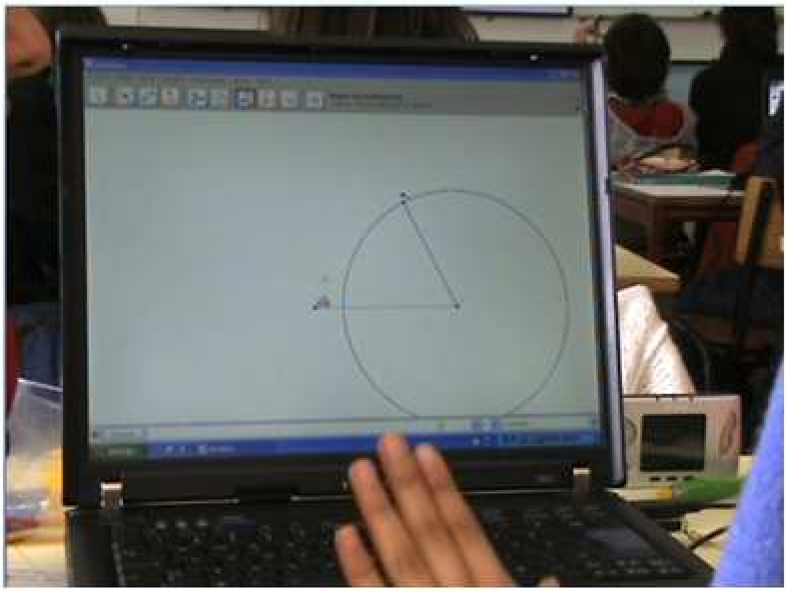


Figura 5.21. Joana e Matilde a construírem o(s) triângulo(s) da alínea 3

Seguidamente, as alunas começaram a discutir como traçar o triângulo, em particular o terceiro lado do triângulo.

Matilde: Ah, podemos prolongar aqui (aponta para o ponto A e com o dedo prolonga até ao ponto que está isolado que marca o ângulo de 50º)

Joana: Ah, já percebi. (Marca o segmento que vai de A até ao ponto isolado).

Contudo, voltaram a ter dúvidas e chamaram a professora. Entretanto, percebem que têm de fazer a intersecção entre o segmento que traçaram e a circunferência e marcam esse ponto de intersecção (ver Figura 5.22).

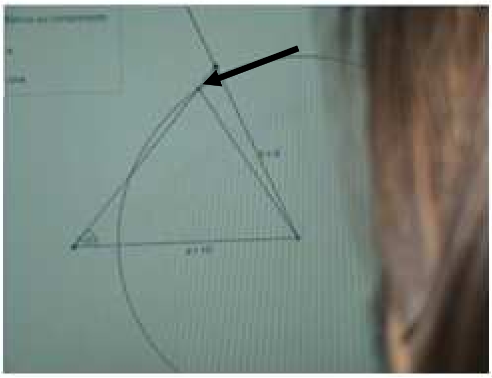


Figura 5.22. Marcação do ponto de intersecção

A professora B chegou e começou a discutir a resolução com as alunas.

Professora B: Então qual é a solução, alguém me consegue explicar? Contem lá.

(As duas alunas riem-se.)

Professora B: Então, onde é que está a solução? Qual é o vértice B?

Joana: É este. (apontando para a intersecção que marcou.)

Professora: É esse. Porquê?

Joana: Porque tem 8 cm de CB e 50º.

Professora B: Sim. É único? Não há mais nenhuma solução?!

Joana: Não.

Professora B: Olha bem para lá.

Joana: Acho que não.

Professora B: Olhem bem para lá.

(A Matilde aponta para a intersecção entre o "lado AB" e a circunferência que ainda não tem o ponto de intersecção marcado.)

Professora B: Decidam-se. Não estou a perceber.

Matilde: É aqui. (apontando para o ponto que tinha indicado). Dá para pôr este aqui.

Joana (com a seta do cursor, aponta para as duas intersecções): Dá aqui e aqui.

Professora B: Força, coloca lá o ponto e explica porquê. Explica lá.

As alunas marcaram o segundo ponto de intersecção, marcaram os dois triângulos e usaram as opções do menu do Geogebra para medir os lados e as amplitudes dos ângulos dos triângulos (ver Figura 5.23). Perante esta explicação, através da construção no Geogebra, a professora B disse: "Muito bem!". A Matilde agradeceu e riram-se por terem conseguido. Passaram as medidas para a folha de registo e, com satisfação, a Joana disse: "Somos uma grande dupla! Agora vamos lá." E a Matilde reafirmou a sorrir: "Vamos lá, Bia!". Quando pretendiam começar a alínea 4 da tarefa tocou para a saída.

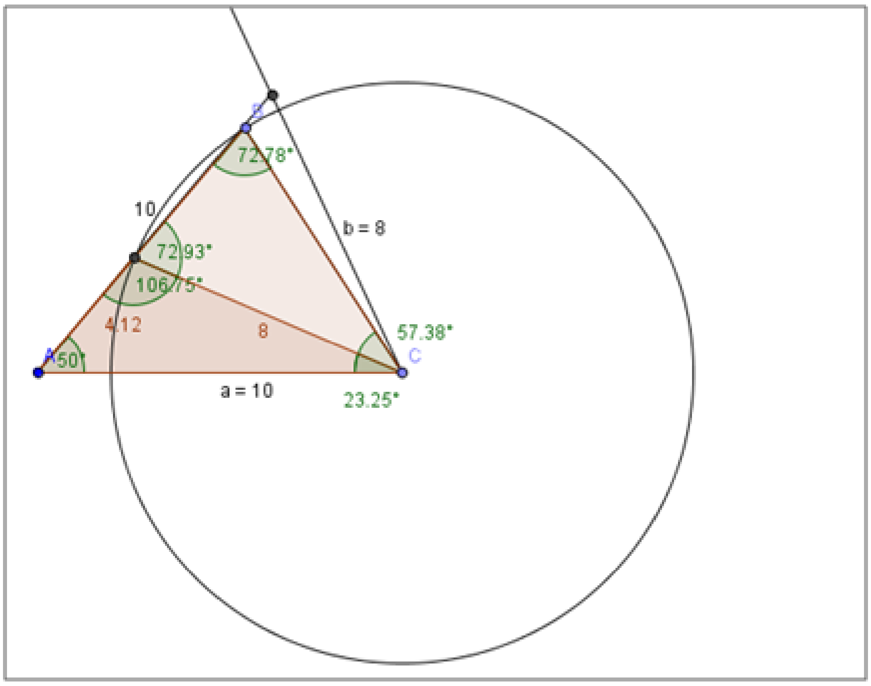


Figura 5.23. Construção da alínea 3 no Geogebra

A segunda aula começou com a professora A a fazer um ponto de situação do trabalho desenvolvido e informou que os alunos tinham mais trinta minutos para finalizar as construções e passar à fase de discussão com toda a turma.

As alunas retomaram a alínea 4 da tarefa. Conseguiram construir o triângulo sem qualquer dificuldade (ver Figura 5.24). Mediram as amplitudes dos ângulos e registaram na folha.

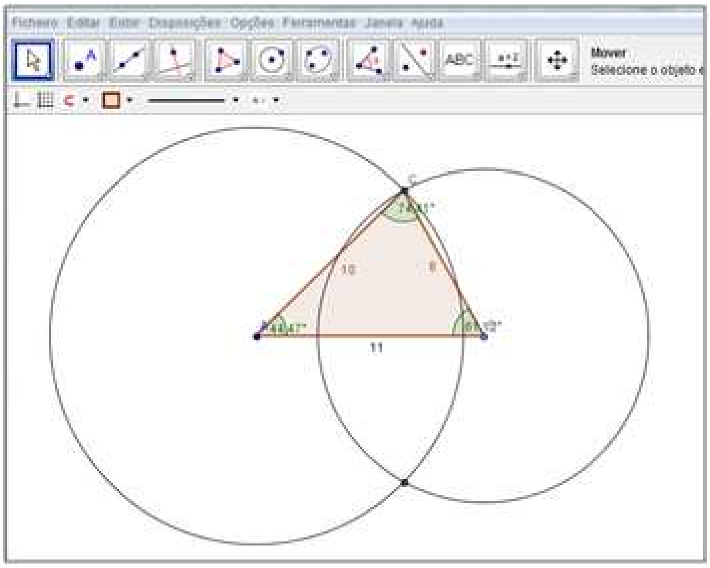


Figura 5.24. Construção da alínea 4 da tarefa.

Após esta construção, a Joana referiu que tinham de fazer o outro triângulo, no entanto, a Matilde de imediato disse: “É igual. As medidas são exactamente iguais. Só podes fazer este.”. A Joana não ficou muito convencida e tentou começar a construir outro triângulo. Quando começou este procedimento, reparou que a Matilde tinha mesmo razão, porque estava a fazer o mesmo triângulo. Desta vez não chamaram a professora para confirmar a resolução da alínea 4 e abriram uma nova folha no Geogebra para avançarem para a alínea 5.

Nesta fase foi nítido o à-vontade que as alunas tinham com o Geogebra, pelo menos com as opções que tinham de usar na resolução desta tarefa. Mais uma vez, sem dificuldade, na construção da alínea 5, traçaram o segmento de recta AB com 8 cm, definiram em cada um dos extremos os respectivos ângulos e traçaram as semirectas. Fixaram o ponto de intersecção e construíram o triângulo (ver Figura 5.25). Neste período de tempo não houve diálogo, as alunas gravaram o ficheiro e registaram na folha as medidas do triângulo obtido.

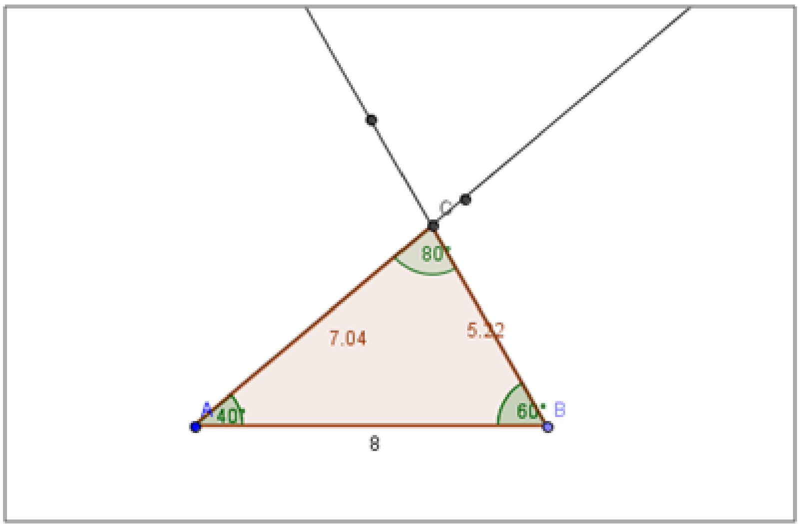


Figura 5.25. Construção da alínea 5 no Geogebra

O tempo estava a passar, quase a atingir os 30 minutos de aula, por isso as alunas sentiram tinham de se apressar a fazer a última alínea. Abriram uma nova folha do Geogebra e automaticamente, como tinha acontecido em alíneas anteriores, as alunas começaram por marcar o ponto para seguidamente fazerem o segmento de recta com um determinado comprimento. Então, repararam que nesta situação não era dada essa condição, pelo que hesitaram um pouco para retomar a construção do triângulo. Decidiram colocar dois pontos e marcaram 100º "no ponto" do lado direito (ponto B) e 15º no "ponto A". Seguidamente, traçaram uma recta passando pelos pontos A e B, a semirecta com origem em B, passando pelo ponto que definia os 100º e fizeram o mesmo procedimento no ponto A. Depois desta construção, a Joana com uma expressão de consolação afirmou: "Então, qual é a dificuldade?! Está aqui (apontou para o ponto de intersecção das duas semirectas para indicar que era o terceiro ponto do triângulo).". Seleccionaram logo no menu a opção *Polígono* para desenhar o triângulo, sem antes fixarem o ponto de intersecção. Optaram por fazê-lo no momento em que estavam a construir o triângulo. Reparam, então, que este procedimento não estava correcto, uma vez que o ângulo em C não tinha uma amplitude de 65º. Rapidamente, viram em que passo tinham cometido o erro e desfizeram a construção até à marcação das semirectas, fixando de seguida o ponto de intersecção entre elas. Voltaram a desenhar o triângulo e, desta vez, viram que o ângulo em C tinha 65º. As duas alunas de imediato disseram com muita satisfação: "Yes!". A professora A, entretanto, chegou e perguntou em que caso estavam, responderam que no último, sem perguntarem se estavam a fazer bem as construções. Continuaram a sua actividade, registando as medidas do triângulo construído na tabela. Depois, em vez de arrastarem um dos vértices do triângulo para confirmarem se era, ou não, possível obter mais triângulos nestas condições, decidiram construir outro triângulo em baixo (ver Figura 5.26). Repararam que neste caso dá para fazer mais triângulos, tal como referiu Joana: "Dá para fazer dois. Dá para fazer imensos.".

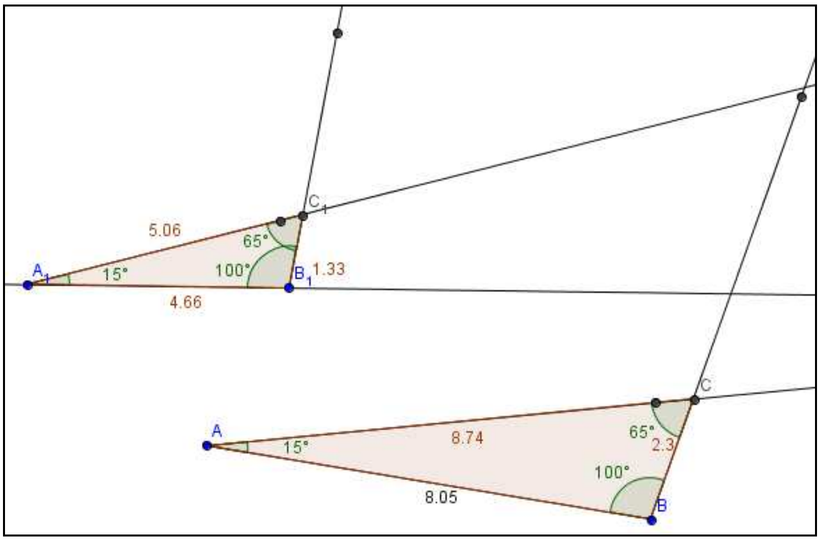


Figura 5.26. Construção da alínea 6 no Geogebra

Neste período da aula, as professoras pediram aos alunos que escrevessem as conclusões para iniciarem a discussão da tarefa. A maioria dos alunos participou com vivacidade neste momento, mostrando e explicando as suas construções. Verificou-se que, nas situações em que foi possível mais do que uma construção, houve grupos que optaram por arrastar o triângulo construído e mostrar que havia outros com medidas diferentes, enquanto que os restantes grupos, como a Joana e a Matilde, decidiram construir mais do que um triângulo.

Em síntese, os alunos com o apoio do Geogebra construíram triângulos a partir de determinadas condições e, a partir dessas construções, conjecturaram e concluíram em que situações conseguiam apenas construir um triângulo, como dizia a Joana para referir que os triângulos eram iguais: "Este triângulo é o mesmo". A maioria dos grupos, incluindo as alunas observadas, construíram sempre um segundo triângulo, em vez de arrastarem um dos vértices do triângulo para observarem a existência, ou não, de outros triângulos com as condições previamente definidas.

Durante o período de discussão, foi possível observar que todos os grupos tinham conseguido chegar às mesmas conclusões. A professora A pediu que os alunos identificassem em que condições tinha sido possível construir apenas um triângulo.

Perante os resultados alcançados pelos alunos, e durante o diálogo, a professora realçou os conceitos de congruência de triângulos e os critérios LAL, LLL e ALA de congruência de triângulos. A maioria dos alunos compreendeu a noção de congruência, dado que sem dificuldade usaram esse vocabulário durante o resto da discussão, e os critérios de congruência, bem como a sua nomenclatura. Por exemplo, na discussão das alíneas 2 e 3, em que o caso dois é o LAL e o três é o LLA, a maioria alunos percebeu que para os triângulos serem congruentes era necessário que o ângulo dado estivesse entre os dois lados também dados, o que não acontecia na alínea 3. As construções elaboradas pelos alunos tiveram influência nesta discussão, porque os ajudaram a visualizar o posicionamento do ângulo face aos lados e a perceber a sua influência para a inexistência de mais triângulos no caso 2. Aqui também foi muito importante a forma como a professora conduziu a discussão, quando perguntou se o caso da alínea 3 não era igual ao anterior e, logo de seguida, questionou o porquê, o que despoletou a troca de ideias sobre a posição do ângulo.

Cenário da turma B

No princípio da aula, a professora B distribuiu e apresentou a tarefa, explicando o que se pretendia que os alunos fizessem. De seguida, os alunos abriram o Geogebra instalado nos portáteis, leram a tarefa e começaram a construção da alínea 1.

A Maria e a Marta começaram por traçar o segmento AB de comprimento 8 cm. Depois, a partir da opção *Rotação,* fizeram a rotação de 60º do ponto B com centro em A e marcaram os segmentos de recta AC e BC. Obtiveram um triângulo equilátero. Seguidamente, construíram um segundo triângulo, começando por marcar um segmento de recta com um comprimento de 8 cm e depois outro com 6 cm; depois, a partir de um dos extremos do primeiro (ponto D), fixaram o ângulo EDF e arrastaram o ponto F até conseguirem que o ângulo EDF tivesse uma amplitude de 60º. Por fim, traçaram o terceiro segmento de recta unindo os pontos F e E (ver Figura 5.27). Ficaram satisfeitas com a suas construções e registaram os valores na tabela. Não se preocuparam com o facto de, no segundo triângulo, a condição da amplitude do ângulo EDF não se manter se arrastassem o vértice. Portanto, não tiveram em consideração uma das indicações do enunciado da tarefa quando é referido que as construções "devem manter as suas propriedades quando os vértices são arrastados”. Assim, as alunas não validaram a suas construções de acordo com as indicações da tarefa.

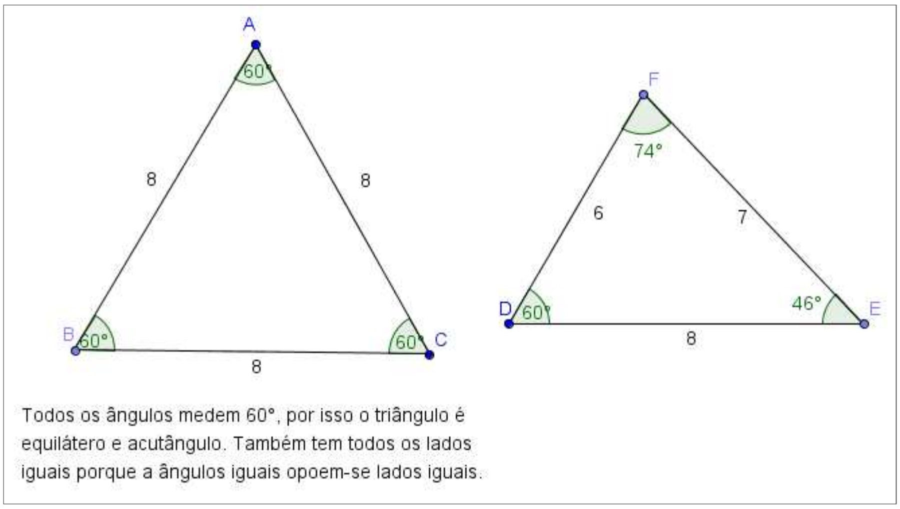


Figura 5.27. Construção da alínea 1, elaborada pela Maria e Marta

Foi interessante verificar que os grupos optaram por resoluções diferentes. Por exemplo, observou-se que alguns grupos optaram por construções “mais económicas”, que envolveram menos passos e, neste caso, mais correctos, porque arrastando os vértices do triângulo, as condições dadas mantinham-se inalteradas. Aproveitaram o primeiro triângulo desenhado (ver Figura 5.28), colocaram um ponto C_1 na semirecta que traçaram para terem a condição da amplitude do ângulo BAC e, a partir da opção *Polígono*, construíram o segundo triângulo.

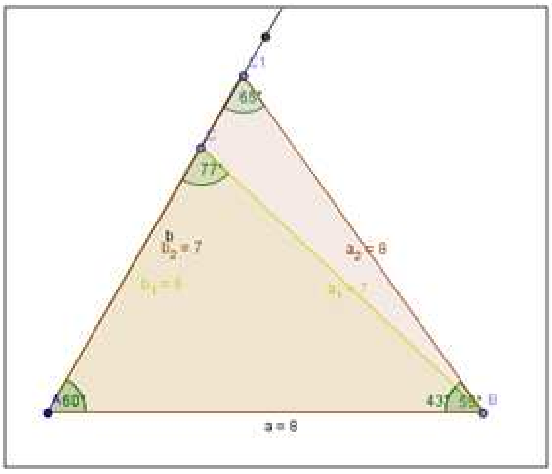


Figura 5.28. Construção da alínea 1, elaborada pela Rita e Carolina

À semelhança do que aconteceu na outra turma, os alunos não esperavam pelas professoras para confirmarem as suas construções. O mesmo aconteceu com a Maria e a

Marta. Assim que terminaram a construção, registaram as medidas na folha, gravaram o ficheiro e passaram para a alínea 2.

As alunas começaram por traçar o segmento AB de comprimento 8 cm, de modo análogo ao da alínea anterior. Seguidamente, optaram pela rotação do ponto B, com centro em A, de amplitude 60º, e fixaram uma recta a passar pelo ponto A e pela imagem de B resultante da rotação. Entretanto, hesitaram, dado que tinham mais de uma condição. Viram que um delas era o comprimento de mais um lado e marcaram a circunferência de centro em A e raio 6 cm. Depois, fixaram um ponto nessa circunferência, mas repararam que não respeitava a outra condição da amplitude do ângulo BAC. Apagaram e traçaram um segmento de recta AC de comprimento 6 cm e arrastaram o ponto C até à recta (ver Figura 5.29).

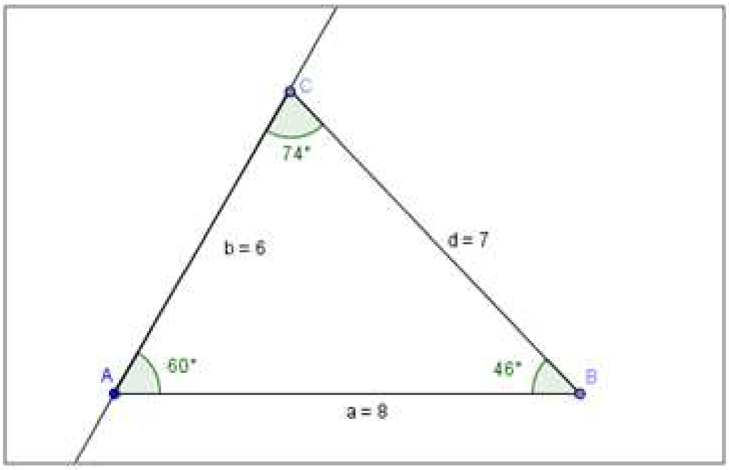


Figura 5.29. Construção da alínea 2, elaborada pela Maria e Marta

Nesta situação, as alunas voltaram a não verificar se as condições dadas se mantinham durante o arrastamento de um dos vértices do triângulo. Limitaram-se a passar para a folha de registo as medidas do triângulo. Se o tivessem feito, veriam que a amplitude do ângulo BAC se alterava, dado o tipo de construção realizada. O ponto C deveria ter resultado da intersecção da recta AC com a circunferência de centro em A e raio 6 cm, para se manterem as condições dadas quando se arrastasse um dos vértices do triângulo.

Como continuavam autonomamente o seu trabalho, não chamaram nenhuma das professoras para analisarem e validarem as suas construções. Passaram para a construção do segundo triângulo. Fizeram os mesmos procedimentos da construção anterior e referiram que só conseguiam fazer aquele triângulo, porque, como disse a

Maria: “O ponto C só pode ser aqui. O segmento é 6 e o ângulo tem de ser 60”. Depois desta afirmação da Maria, apagaram a segunda construção e mantiveram apenas a primeira. Registaram na tabela as mesmas medidas do primeiro triângulo.

É interessante referir que, também nesta alínea, houve grupos que efectuaram outro tipo de construção que verificava as condições dadas quando se arrastava um dos vértices do triângulo (ver Figura 5.30).

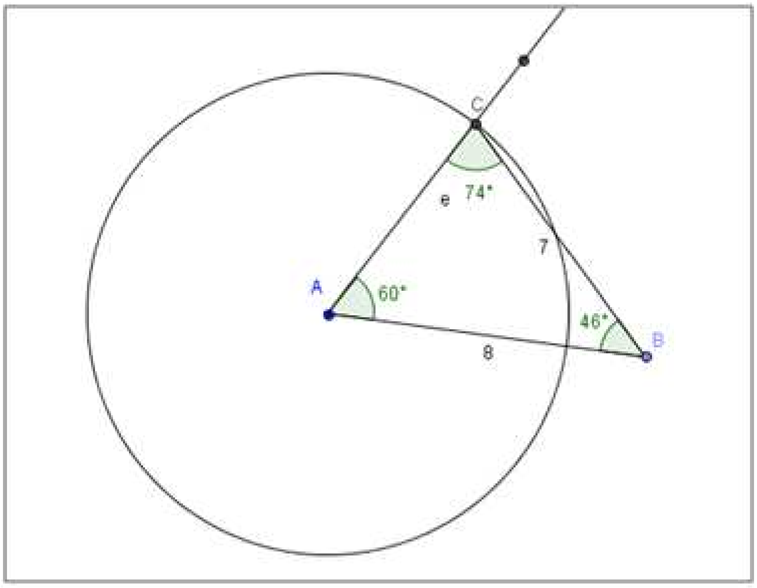


Figura 5.30. Construção da alínea 2, elaborada pelo Bernardo e pela Vera

Neste momento, a aula estava a terminar, mas a Maria e a Marta ainda iniciaram a alínea 3. Começaram por desenhar o segmento C_1B_1 de comprimento 8 cm e, depois, o segmento C_1A_1 de comprimento 10 cm. Entretanto, tocou para a saída e as alunas gravaram o ficheiro para continuar na aula seguinte.

Na segunda aula, que foi na semana seguinte, as alunas retomaram o seu trabalho abrindo o ficheiro Geogebra da alínea 3. Continuaram a construção, traçando o segmento de recta B_1A_1 e os ângulos internos do triângulo com as respectivas amplitudes. Depois arrastaram o vértice A_1 até que a amplitude do ângulo $C_1A_1B_1$ atingisse os 50º.

A professora B chegou e quis acompanhar o que as alunas estavam a fazer.

Professora B: Em que caso estão?

Maria: No três.

Professora B: O três?! Não há outra forma de fazer? CA, onde está o vosso CA?

Maria: Começámos pelo CB que mede 8.

Professora B: Começaste pelo CB que mede 8, também está certo. Depois BAC que mede 50 e depois puseram aquele (aponta para CA) a medir 10. Como é que puseram aquele a medir 10?

Marta: Fizemos o segmento.

Professora B: Como é que eu consigo ter todos os segmentos de comprimento 10? Não é todos os segmentos, é todos os pontos. Vocês para descobrirem o ponto... qual é que foi o último ponto a descobrirem?

Marta: O A.

Professora B: Não acho, então não percebi a vossa construção. Vamos lá ver, então, o que fizeram? CB, 8 cm... Esperem, venho já.

A professora teve de interromper por um instante, mas as alunas ficaram a pensar na construção e naquilo que a professora tinha mencionado. Apagaram a construção e fizeram outra, efectuando os mesmos passos. Entretanto, a professora voltou e quis cuidadosamente perceber a construção.

Professora B: Ok, deixem-me ver um bocadinho a construção de início. Como é que começaram?

Maria: Começámos por construir CB.

Professora B: CB, 8 de acordo.

Maria B: Depois fizemos o CA.

Professora B: Sim. O CA que mede 10.

Marta: Depois descobrimos qual era a amplitude 50.

Professora B: Mas, há uma coisa. Vamos lá ver se eu me entendo. O CB mede 8, estamos de acordo. E depois, tu dizes-me que construíste este segmento. É isso. Porque é que ele está assim e não está mais assim ou mais assim?

Maria: Por causa deste aqui. (aponta para o ângulo BAC)

Professora B: Mas, quando tu fores traçar aquele, tu já tinhas aquele ponto. Tu para traçares aquele ângulo tinhas aquele ponto. Como é que tu encontraste aquele ponto?

Maria: Aquele é o A.

Professora B: Vocês começaram por CB que mede 8 e depois construíram o...

Maria: CA.

Professora B: O CA que mede 10. Mas tomaram uma atitude. Quer dizer, puseram-no assim ou podiam ter posto de outra maneira, definiram um ângulo.

Maria: Pois, pusemos aqui e depois estivemos a rodar.

Marta: Estivemos a mexê-lo até chegar a 50º.

Professora B: O vosso CB é 8, o CA é 10 e o BAC, ah.... E agora conseguem ter a certeza que não há outro triângulo?

A professora instada para se deslocar a outros grupos, deixou as alunas a pensarem na questão que lhes colocou. Sem conseguirem dar uma resposta imediata, as alunas decidiram fazer uma nova construção. Continuaram a cometer as mesmas incorrecções na construção do segundo triângulo (ver Figura 5.31), mas concluíram que era possível construir mais do que um triângulo naquelas condições.

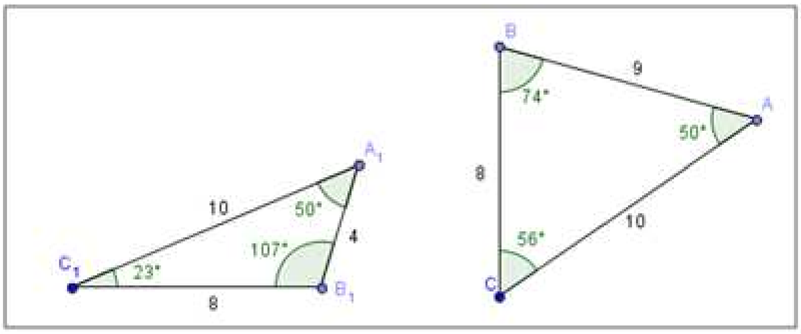


Figura 5.31. Construção da alínea 3, elaborada pela Maria e Marta

Com esta situação, as alunas atrasaram-se um pouco, mas isso não as impediu de manterem o seu ritmo de trabalho. Não chamaram a professora para validar a construção e seguiram para a alínea 4, efectuando os mesmos procedimentos dos casos anteriores, ou seja, de acordo com as condições dadas, as alunas construíram os três segmentos (ver

Figura 5.32) e arrastaram os segmentos CB e AD, respectivamente, até conseguirem unir os vértices de forma a obter o triângulo. Entretanto, tentaram construir o segundo triângulo, mas verificaram que era o mesmo. Concluíram, por isso, que naquelas condições, com os três lados dados, conseguiam apenas construir um triângulo.

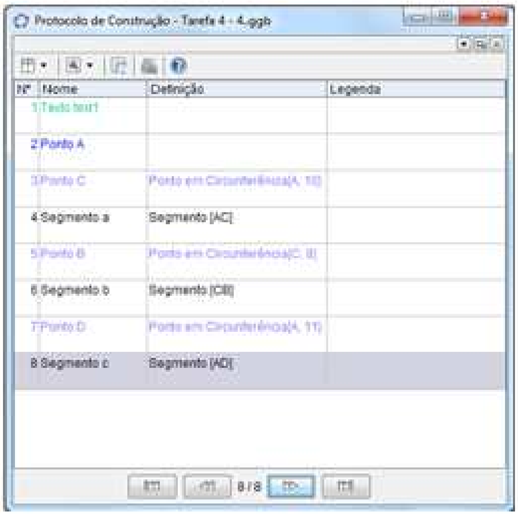


Figura 5.32. Protocolo de construção da alínea 4, elaborada pela Maria e Marta

À semelhança do que aconteceu nas outras alíneas, houve grupos que efectuaram correctamente a construção. Quando arrastavam o triângulo, este não se desmanchava e mantinha as condições dadas (ver Figura 5.33).

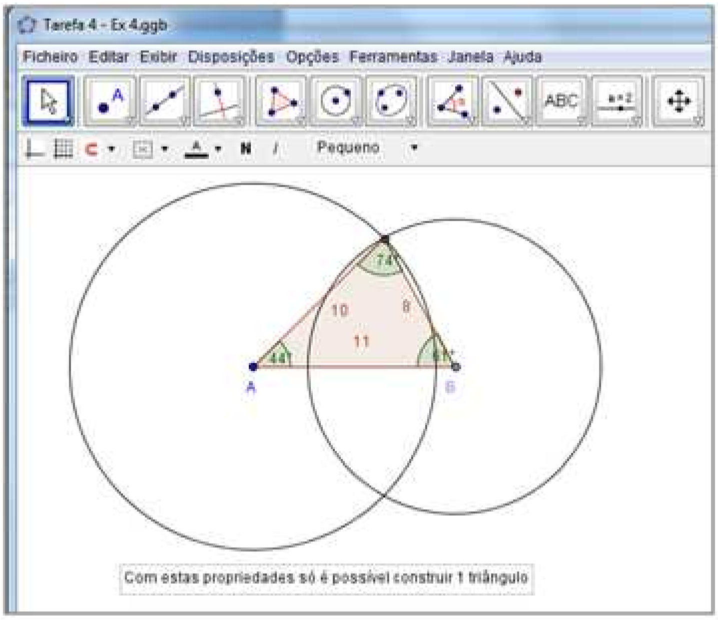


Figura 5.33. Construção da alínea 4 no Geogebra, elaborada pelo Pedro e Salomé

Uma vez que estava a terminar a segunda aula com esta tarefa, a professora B optou por fazer um ponto de situação e adiar a discussão da actividade para a aula seguinte. De notar que a Maria e a Marta não conseguiram efectuar na aula as alíneas 5 e 6, mas a maioria dos alunos terminou a alínea 5, pelo que a professora pediu aos alunos para terminarem as construções em casa e enviarem-lhas por email.

Sobre a discussão realizada, foi interessante verificar a sua semelhança relativamente à desenvolvida na turma A. A professora B abriu aleatoriamente alguns ficheiros com as construções efectuadas pelos alunos e pediu aos seus autores para explicarem o processo de construção e, ainda, as suas conjecturas e conclusões. Nesta fase, a professora aproveitou para descrever e explicar de uma forma mais pormenorizada a construção da alínea 3, dado que foi aquela em que os alunos tiveram mais dificuldades e precisaram de mais ajuda. Este momento de discussão possibilitou, ainda, que os alunos percebessem a diferença entre a alínea 2 e a alínea 3 (ou seja, os casos LAL e LLA, que não é um caso de congruência)

Durante as apresentações, a professora introduziu o conceito de congruência.

Professora B: Conclusão do segundo caso. Com estas condições... Marta qual é a conclusão que estás a escrever no teu caderno? Força.

Marta: Com estas condições, existe apenas um triângulo.

Professora B: Como é que dizemos que estes triângulos todos são?

Marta: Geometricamente iguais.

Professora B: Geometricamente iguais. Ou uma palavra muito nova para vós. Olhem para o título.

Alunos: Congruentes.

Professora B: Então, como é que podemos escrever esta conclusão? Utilizando já estas expressões, esta linguagem... O que é que conhecemos no segundo caso?

Matilde: Professora, pus parecida com da Marta

Professora B: Diz, força.

Marta: Com estas condições, só conseguimos construir um triângulo, ou seja, os triângulos são congruentes.

Professora B: (...) dizes muito bem. Dois triângulos ou mais que se construam... Como continuar a seguir?

(espera)

Alunos: Todos os triângulos...

Professora B: Que se construírem nestas condições…

Alunos: São congruentes.

Professora B: São congruentes. O que é isso de são congruentes? Já me esqueci.

Alunos: São geometricamente iguais.

No período de síntese do trabalho realizado, a professora estabeleceu, a partir das conclusões dos alunos, os critérios de congruência de triângulos com a terminologia LAL, LLL e ALA.

Em suma, relativamente às construções elaboradas em cada uma das alíneas, a Maria e a Marta, ao contrário de outros grupos, não tiveram a preocupação de verificar e validar se as suas construções correspondiam ao solicitado no enunciado e se eram, ou não, construções robustas. Observou-se que as alunas construíram os triângulos a partir dos segmentos desenhados que arrastavam até obterem as condições dadas nas diferentes alíneas, para seguidamente os unirem de forma a obter o triângulo. As alunas ficaram satisfeitas com as construções realizadas, mesmo depois de verem outras elaboradas por outros grupos e de observarem que quando arrastavam os desenhos, os triângulos não se desmanchavam e mantinham as condições dadas nas diferentes alíneas.

5.2.3 Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos

Este episódio é sobre a tarefa *Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos* (ver Anexo I), que decorreu durante uma aula de 90 minutos, na turma B, no início de Maio, após as férias da Páscoa, sensivelmente um mês depois do episódio anterior.

Assim que os alunos se sentaram e abriram os computadores portáteis, a professora B distribuiu a tarefa e explicou como iria decorrer a aula. A primeira hora seria para os alunos realizarem a tarefa autonomamente e a última meia hora para discussão das conclusões. Enquanto os alunos resolviam a questão 1, as professoras instalaram o ficheiro Geogebra "quadrilateros" (ver Anexo I) em cada um dos portáteis para resolverem a questão 2.

A Maria e a Marta abriram o Geogebra e iniciaram a construção do paralelogramo marcando os pontos A e B e traçando o segmento de recta AB. Seguidamente, fixaram um ponto C aleatoriamente na folha gráfica, traçaram a recta paralela a AB passando pelo ponto C e marcaram um ponto E nesta recta. Traçaram, depois, a recta AC e a recta paralela a esta a passar pelo ponto B. Entretanto, pararam a construção e escreveram o título da tarefa na folha gráfica. A professora B apareceu, observou a construção e deu *feedback* referindo: "Até agora está bem. Falta ali o ponto de intersecção das duas rectas" e sugeriu às alunas que deixassem apenas visível o paralelogramo na folha gráfica quando disse: "Depois vamos esconder as rectas. Vamos ficar só com os segmentos de recta direitinhos. Vocês sabem fazer isso?". As alunas ficaram em silêncio, pensando na pergunta da professora e responderam que não, mas a Marta teve uma expressão – "Ai que estranho" – de quem tinha a sensação de saber fazer, mas naquele momento não se lembrar. A professora não explicou como se fazia este procedimento, porque teve de ir a outro grupo.

As alunas completaram a construção, fixando o ponto de intersecção entre a recta paralela a AE passando pelo ponto B e a recta paralela a AB passando por E, obtiveram o ponto D e marcaram, em seguida, os segmentos de recta BD, DE e EA.

Depois as alunas ficaram a pensar no que a professora disse sobre esconder as rectas e começaram a percorrer o menu do Geogebra e a ver se tinham alguma funcionalidade que as permitisse fazer essa operação. Após algumas tentativas, conseguiram descobrir como fazer o procedimento. Esconderam as rectas e deixaram apenas visível o paralelogramo na folha gráfica (ver Figura 5.34).

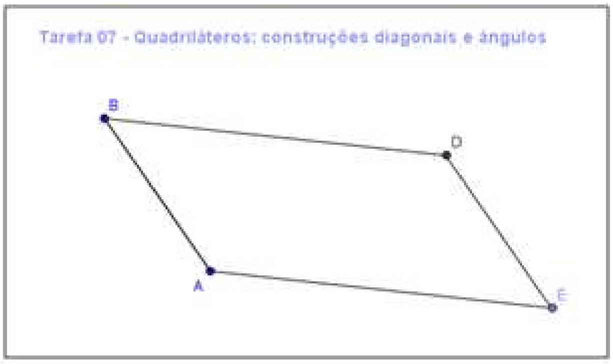


Figura 5.34. Paralelogramo construído no Geogebra pela Maria e Marta

De notar, que houve uma evolução na forma como as alunas trabalharam nesta tarefa com o Geogebra, em comparação com o episódio anterior. Desta vez, as alunas preocuparam-se em validar a sua construção, quando arrastaram os vértices do paralelogramo e viram que mantinha a sua forma. Verificou-se, também, nesta fase uma maior destreza das alunas na manipulação e utilização dos menus do Geogebra.

Satisfeitas com o paralelogramo desenhado, gravaram o ficheiro e abriram uma nova folha no Geogebra para construir o rectângulo. Tal como tinham procedido anteriormente, as alunas começaram por marcar dois pontos A e B e o segmento de recta AB. Traçaram duas rectas perpendiculares a AB, uma passando pelo ponto A e a outro por B. De seguida fixaram um ponto C na recta perpendicular a AB que passava no ponto A, um outro ponto D na outra recta perpendicular e traçaram o segmento de recta CD. Olharam para o que tinham construído e repararam que não estava correcto, decidiram escondê-la, em vez de a apagar. Optaram, então, por traçar uma recta paralela a AB passando pelo ponto C. Seleccionaram no menu a opção *Intersectar dois objectos* e escolheram a recta paralela a AB e a recta perpendicular a AB passando pelo ponto B e obtiveram o ponto E. Seguidamente, traçaram os segmentos BE e CE e esconderam as rectas que ajudaram na construção do rectângulo.

A professora B chegou para ver o que estavam a fazer e, dando conta que terminaram o rectângulo, pediu para ver o protocolo de construção. Verificou que as alunas tinham procedido correctamente na sua elaboração pelo que disse: “Muito bem.” A Marta respondeu, referindo que “este é mais fácil do que os outros” e a professora de uma forma positiva retribuiu com um “maravilha”.

Passavam 40 minutos da aula quando as alunas passaram para a questão 2 (ver tarefa no Anexo I). Sem lerem o enunciado da tarefa, apenas olharam para as características que estão no quadro, abriram o ficheiro “Quadriláteros” (ver Anexo I), observaram as figuras e decidiram chamar a professora.

Marta: Estes dois são opostos e são iguais.

Professora A: Sim. Qual é a vossa dúvida?

Maria: Aqui diz lados opostos congruentes.

Professora A: e o que quer dizer lados opostos congruentes?

Maria: São lados iguais.

Professora A: Muito bem. Então, o que têm de fazer?

Marta: Ver nestas figuras se os lados opostos são congruentes.

Professora A: Muito bem. Continuem... Não tinham lido bem o enunciado.

Depois deste diálogo, as alunas decidiram identificar cada um dos quadriláteros, escrevendo o nome respectivo debaixo de cada um deles (ver Figura 5.35).

Figura 5.35. Maria e Marta a identificarem os quadriláteros

Para preencher o quadro da tarefa, correspondente à questão 2.1, as alunas escolheram uma estratégia diferente de alguns grupos. Em vez de observarem um quadrilátero e verificarem a existência, ou não, das características apontadas na tabela, optaram por observar se cada um dos quadriláteros tinha, ou não, aquela característica.

Marta: Lados opostos congruentes.

Maria: O quadrado, o rectângulo e o losango têm lados opostos congruentes. E o paralelogramo obliquângulo?

Marta: Sim. E o trapézio isósceles também. (responde enquanto manipula o trapézio e aponta para os lados que são congruentes.)

Antes, dessas observações e manipulação dos quadriláteros, as alunas liam as características e procuravam compreender e esclarecer uma à outra o seu significado, de modo a fazerem a mesma interpretação e ser mais fácil identificar as diferentes características em cada um dos quadriláteros.

Marta: O que são ângulos opostos congruentes?

Maria: São ângulos...

Marta: Ah. Já sei. Estão em frente e são iguais.

Maria: Sim.

Após esta clarificação, as alunas identificaram os quadriláteros que tinham e os que não tinham ângulos opostos congruentes.

Estavam a terminar esta parte quando foram interrompidas pelo colega que estava à frente.

Aluno: Meninas, este aqui...

Marta: Sim.

Aluno: Sabes qual é o trapézio isósceles?

Maria: É este. (apontando para o trapézio isósceles na folha do Geogebra)

Aluno: Desde quando é que este é paralelo?! (aponta para os lados não paralelos)

Maria: Mas, estes opostos são. (aponta para as bases)

Aluno: Estes dois são, mas estes dois não (apontando para os lados esquerdo e direito do trapézio).

Maria: Não, mas ele não pede todos, ele só pergunta se tem. Imagina este, é isósceles, tem sempre pelo menos um (a aluna aqui como estava mais adiantada, estava a referir-se aos lados opostos congruentes).

Aluno: Mas, não tem todos.

Maria: Sim, mas... basta uma.

Neste diálogo, a dúvida não estava relacionada com a compreensão do conceito de lado oposto congruente, mas com a interpretação da característica "lados opostos congruentes". Se tinham de ser todos os pares de lados opostos ou se bastava uma situação de lados opostos congruentes para se colocar o sim no rectângulo do quadro.

Estas explicações e esclarecimentos que as alunas iam dando ao colega, ajudaram-nas a consolidar e a clarificar melhor as suas ideias e a confirmarem que as suas respostas estavam correctas. A professora A chegou e quiseram mostrar à professora que estavam também a discutir características dos quadriláteros com um colega de outro grupo, aproveitando para verificarem se estava certo o que tinham dito. Entretanto, a professora pediu às alunas para que passassem para as diagonais e sugeriu que as traçassem nos quadriláteros.

À semelhança do que aconteceu com as outras características, as alunas tiveram a necessidade de clarificar o significado de diagonais que se bissectam. Aproveitaram a presença da professora para fazer o esclarecimento.

Marta: Professora, mas bissectam-se é quando passam pelo meio... (aqui a aluna pretende dizer quando as diagonais se intersectam no ponto médio)

Professora A: Sim, continuem...

As alunas traçaram as diagonais de todos os quadriláteros. Foram manipulando e observando os diferentes quadriláteros e facilmente conseguiram identificar aqueles que tinham diagonais que se bissectavam.

Maria e Marta: As diagonais bissectam-se neste, neste, neste e neste. (apontando sucessivamente para o quadrado, rectângulo, losango e paralelogramo obliquângulo).

Professora A: É isso mesmo. Muito bem.

Seguidamente, continuando a arrastar e a observar os quadriláteros, as alunas preencheram o quadro no que respeita às diagonais perpendiculares e diagonais congruentes.

É de assinalar que, durante a manipulação dos quadriláteros, as alunas ficaram admiradas com algumas situações. Por exemplo, durante a manipulação do trapézio escaleno, diziam que não tinha diagonais perpendiculares, mas encontraram uma situação em que estas ficaram perpendiculares quando a base menor media 5 e um dos lados tinha a mesma medida. Não estavam à espera que existisse um trapézio escaleno com diagonais perpendiculares e mostraram uma certa admiração, a julgar pela expressão que a Maria utilizou: Olha, são perpendiculares".

Neste momento, o aluno do outro grupo voltou a interrompê-las com dúvidas:

Aluno: O que são diagonais perpendiculares?

Maria: São diagonais que fazem um ângulo recto. Fazem um ângulo de 90º.

Aluno: Ou seja, 90º entre isto, ok? Aponta no ecrã do computador das colegas para as diagonais do quadrado e faz com a mão o ângulo recto entre as duas diagonais)

Marta: Certo.

O aluno agradeceu e as alunas disseram "*Bye*". As alunas demonstravam confiança no trabalho que estavam a desenvolver e pretendiam continuar com a tarefa. Nesta altura, observando os outros grupos sentiram que iam atrasadas. Havia grupos que estavam na questão 2.2, a discutir as características de cada um dos quadriláteros que ajudavam a distingui-los dos restantes.

Rapidamente, começaram a analisar os eixos de simetria. Verificaram a existência de um ou dois eixos de simetria em cada um dos quadriláteros e registaram na tabela. Procederam exactamente da mesma forma em relação aos lados e ângulos iguais das figuras. Neste momento, a professora informou a turma que faltava pouco tempo para a aula terminar e, por isso, deviam começar a escrever as conclusões.

Sobre a última característica da tabela – a soma dos ângulos internos – escreveram de imediato 360º em todos os espaços da tabela, sem observarem os quadriláteros, como consequência das conclusões que tinham tirado de uma tarefa anterior relativa à soma dos ângulos internos de um polígono (ver Figuras 5.36 e 5.37).

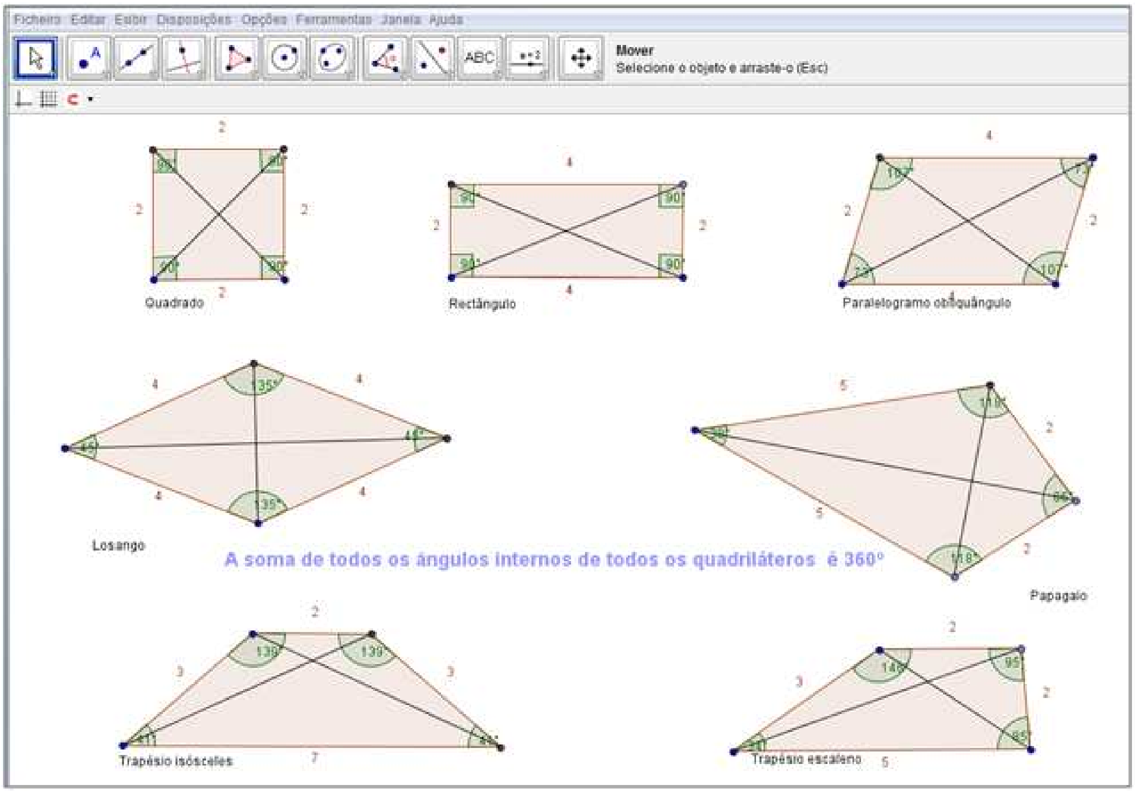


Figura 5.36. Ficheiro "quadriláteros" trabalhado pelas alunas durante a questão 2.1

2.1. Completa a tabela com 'sim' (que significa *sempre*) ou 'não' (que significa *nem sempre*).
Utiliza as medidas que achares necessárias (lados, ângulos, diagonais, ...)

	Quadrado	Rectângulo	Losango	Paralelogramo obliquângulo	Trapézio isósceles	Trapézio escaleno	Papagaio
Lados opostos paralelos	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Não
Lados opostos congruentes	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Não
Ângulos opostos congruentes	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
Diagonais bissectam-se mutuamente	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não
Diagonais perpendiculares	Sim	Não	Não	Sim	Não	Não	Sim
Diagonais congruentes	Sim	Sim	Não	Sim	Sim	Não	Não
Um eixo de simetria	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
Dois eixos de simetria	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não
Todos os lados iguais	Sim	Não	Sim	Não	Não	Não	Não
Todos os ângulos iguais	Sim	Sim	Não	Não	Não	Não	Não
Soma dos ângulos internos	360°	360°	360°	360°	360°	360°	360°

Figura 5.37. Tabela preenchida pela Maria e a Marta como resposta à questão 2.1

As alunas estavam a começar a questão 2.2 quando tocou para a saída, pelo que não conseguiram identificar características únicas em cada um dos quadriláteros que os distinguisse dos outros. No entanto, como já se referiu, houve grupos de alunos que conseguiram, sem terminar todos os quadriláteros, encontrar algumas dessas características. Alguns grupos escreveram essas conclusões no caderno e outros directamente na folha gráfica do Geogebra (ver Figura 5.38)

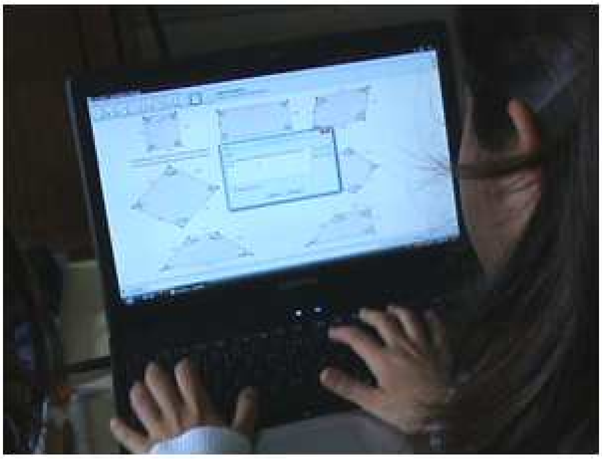


Figura 5.38. Conclusões de um grupo, escritas na folha gráfica do Geogebra

Uma vez que o grupo de alunas que foi observado não realizou a questão 2.2, não se consegue obter aqui o registo de muitas destas características. No entanto, pela observação da actividade das professoras em sala de aula, é de salientar que muitos grupos inicialmente descreviam as características de cada um dos quadriláteros, traduzindo o que tinham colocado na tabela, mas com a intervenção das professoras, explicando o que se pretendia com a questão, os alunos começaram a procurar características que diferenciavam cada quadrilátero dos restantes. Esta parte foi, também, um desafio para os alunos e demorou algum tempo. Por isso, a professora passou a discussão da tarefa para a aula seguinte.

Um grupo, por exemplo, referiu que "o que distingue o rectângulo dos outros quadriláteros é ter todos os ângulos iguais e as diagonais não são perpendiculares" (ver Figura 5.39).

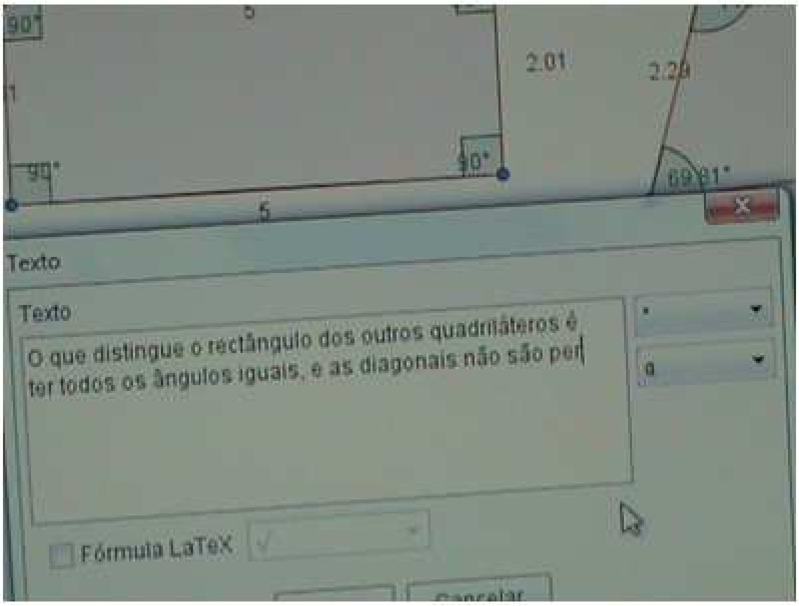


Figura 5.39. Conclusão de um grupo sobre a característica que distingue o rectângulo dos restantes quadriláteros

Outro grupo, que completou o seu trabalho em casa e depois o colocou na plataforma *Moodle* descreve algumas características, que resultaram da visualização das diferentes propriedades, como: "o quadrado tem todos os lados iguais, tem todos os ângulos iguais, tem mais de dois eixos de simetria e as diagonais são iguais"; "o papagaio tem as diagonais perpendiculares e tem um eixo de simetria"; ou, "o trapézio escaleno não tem lados iguais, não tem ângulos iguais e não tem diagonais que se bissectem mutuamente".

Em síntese, as alunas nesta tarefa, relativamente à construção do paralelogramo e do losango, revelaram uma maior facilidade na manipulação do Geogebra e do seu menu de comandos, utilizando sem dificuldade o conceito de perpendicularidade e paralelismo entre rectas para a construção dos quadriláteros. Por outro lado, ao contrário do que tinha acontecido na congruência de triângulos, as alunas preocuparam-se em verificar se as figuras não se desmanchavam e se mantinham a sua forma quando arrastavam os vértices.

Por último, interpretaram bem o que se pretendia com a questão 2.1 (ver Anexo III), seguindo uma estratégia interessante na sua resolução. Primeiro, identificaram os quadriláteros, escrevendo o respectivo nome junto de cada um. Posteriormente antes de começarem a arrastar e a manipular cada um dos quadriláteros para observarem as diferentes características, as alunas interpretavam cada uma dessas características, clarificando entre elas o seu significado. Deste modo, conseguiram compreender bem o seu sentido e sem dificuldade, quando mexiam em cada um dos quadriláteros, observaram a existência, ou não, das diferentes características. Não tiveram tempo, no entanto, de terminar a tarefa, pelo que não tiraram as conclusões pedidas na questão 2.2.

5.3 Raciocínio em problemas de Geometria

Neste subcapítulo são descritos três episódios que decorreram nas aulas seguintes aos episódios do ponto anterior, com excepção do último que decorreu três semanas depois da aula sobre a tarefa *Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos*. Estes episódios incidem portanto sobre a resolução de problemas propostos na sequência organizada de tarefas exploratórias.

5.3.1 Resolução de problemas em triângulos

Este episódio decorreu durante uma aula de 90 minutos, da turma A, dedicado à tarefa *Resolução de problemas em triângulos* (ver anexo III), que envolve a temática dos ângulos internos e externos, e foca-se na actividade desenvolvida pelas duas alunas, Joana e Matilde.

Na aula seguinte à que incidiu sobre ângulos internos e externos de um polígono, com recurso ao Geogebra, as professoras propuseram um conjunto de problemas relacionados com esta temática, que tinha como principal objectivo a mobilização de conceitos e propriedades por parte dos alunos que os ajudasse na resolução desses problemas, como sejam, a soma dos ângulos internos e externos de um polígono e o facto de ângulos verticalmente opostos ou formados por lados paralelos terem a mesma amplitude.

No início da aula, a professora A distribuiu a tarefa e na introdução enfatizou, por várias vezes, a necessidade e a importância de os alunos na resolução dos problemas explicarem os seus raciocínios de modo a que se conseguisse perceber como chegavam aos resultados. Salientou que têm de conseguir comunicar as suas ideias e explicar os seus argumentos e raciocínios, de uma forma clara e organizada, para que todos sejam capaz de compreender o que é dito.

Os alunos, a trabalhar em pares, começaram a ler o enunciado num ambiente tranquilo, sem barulho, revelador do empenho e vontade em resolver a tarefa.

A Joana e a Matilde leram o enunciado e antes de interpretarem o problema, decidiram desenhar o triângulo da questão 1.1 (ver Anexo I). Nesse desenho, apesar de utilizarem a régua, a Joana preocupou-se apenas em fazer um esboço da representação que estava no enunciado, uma vez que no seu caderno desenhou um triângulo rectângulo ABC, com o ângulo recto em C, situação que não se verifica no enunciado do problema (ver Figura 5.42).

Após o desenho, começam a interpretar a figura para encontrarem a amplitude do ângulo DEB. Nesta fase, procuraram individualmente encontrar uma estratégia de resolução do problema. A Matilde começou por escrever que "a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º", mas depois ficou a pensar e que a "soma dos ângulos internos do triângulo [ACB] é 180º". A partir deste momento, hesitou um pouco sobre o que devia escrever, pelo que observou a figura, fazendo vários gestos com o lápis percorrendo a figura, tentado encontrar a amplitude do ângulo EDB para conseguir utilizar a relação da soma dos ângulos internos do triângulo e determinar o ângulo pretendido.

As alunas começam a discutir a discutir as suas ideias, dizendo o seguinte:

Matilde: A amplitude deste ângulo (aponta com o lápis para o ângulo ACB) é igual ao ângulo que queremos, porque os lados são paralelos, mas eu não sei este ângulo (o ângulo ACB).

Nessa altura, a Joana com o lápis percorre os triângulos no caderno da Matilde.

Joana: Não precisas de explicar este (aponta para o ângulo ACB), precisas de explicar este (aponta para o ângulo CAB).

Joana: Este (aponta para o ângulo EDB) é 60º (e escreve na figura do caderno da Matilde), porque é paralelo a este (aponta para o ângulo CAB). Agora, 40 mais 60 dá 100 e depois 180 menos 100.

Matilde: Sim, mas também pode ser este triângulo grande (aponta para ACB). Consigo saber este (aponta para o ângulo ACB) e depois este (aponta para DEC) é paralelo a este (aponta para o ângulo ACB) e fico a saber o ângulo.

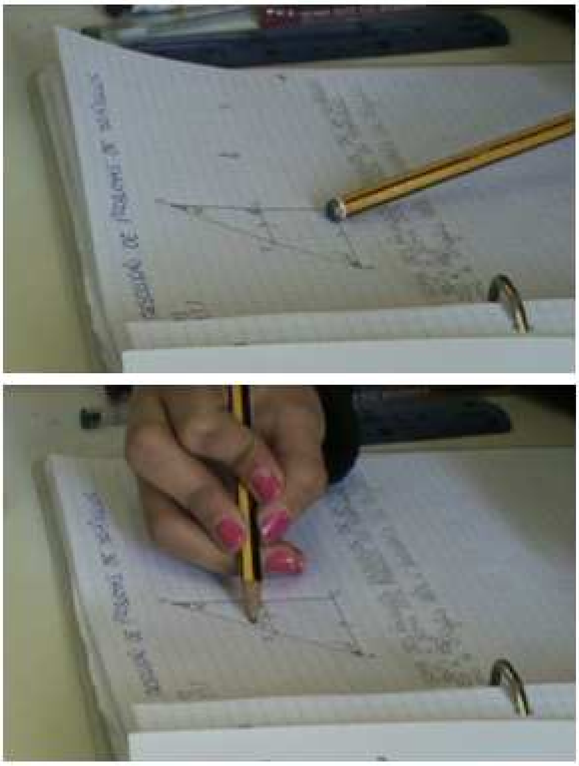


Figura 5.40. As alunas a discutirem a resolução do problema no caderno da Matilde

Após esta discussão, as alunas retomaram a resolução do problema nos seus cadernos. A Matilde demorou um pouco, procurando encontrar a melhor forma de explicar o seu raciocínio. Optou por seguir a sua estratégia, partindo do triângulo maior, e apagou a amplitude do ângulo EDB que a Joana tinha escrito no seu caderno. Do mesmo modo, a Joana decidiu seguir a sua estratégia de resolução da questão 1.1 (ver Figuras 5.41 e 5.42).

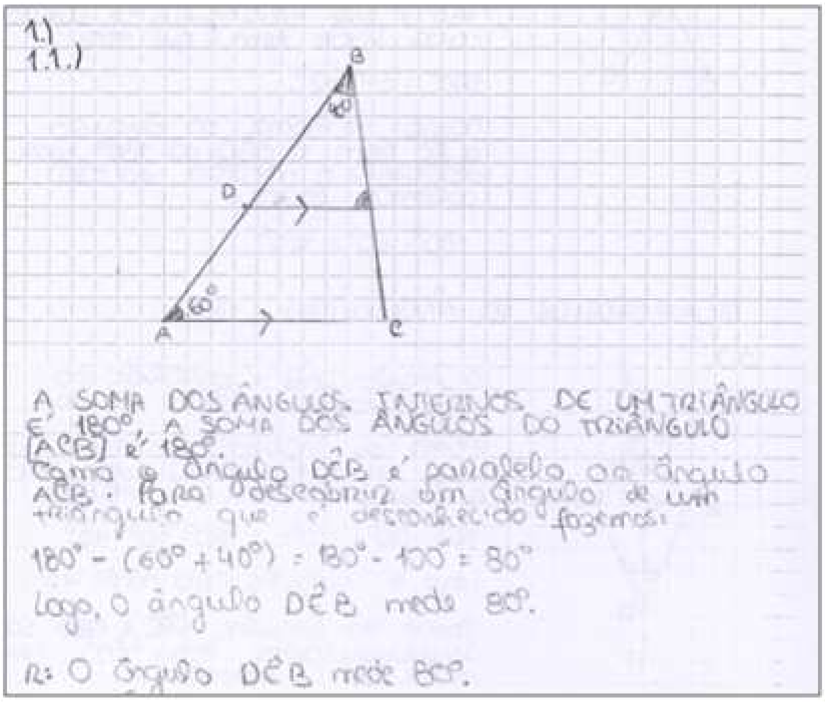


Figura 5.41. Resolução da Matilde da questão 1.1

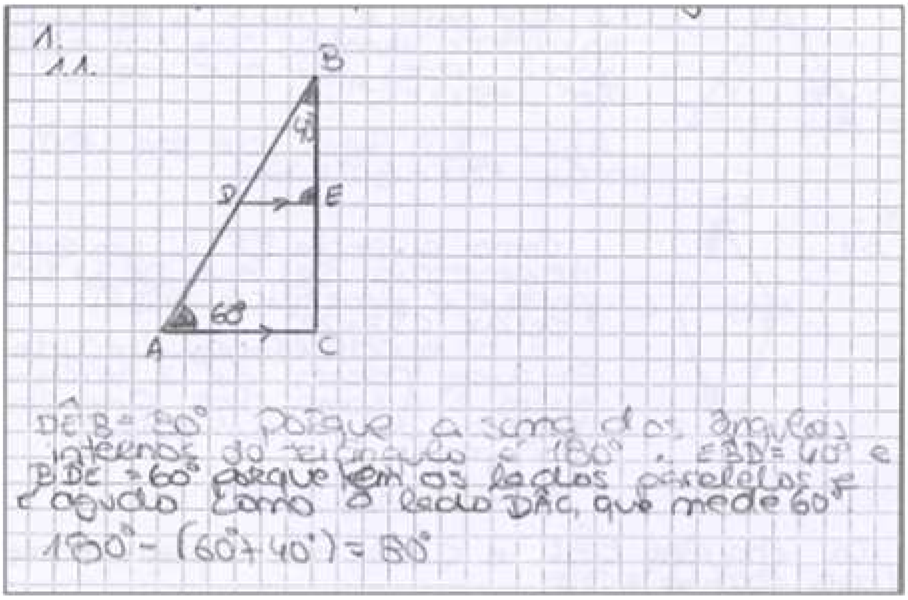


Figura 5.42. Resolução da Joana da questão 1.1

Em ambas as resoluções há algumas incorrecções, nomeadamente na resolução da Matilde quando referiu que os ângulos são paralelos e na notação utilizada. No caso da nomenclatura a aluna misturou a notação que utilizava em anos anteriores com a que as professoras utilizavam e, por isso, é natural esta confusão. Também, a Joana apresentou na sua resolução uma pequena imprecisão na justificação da amplitude do ângulo BDE. No entanto, percebe-se perfeitamente os raciocínios que as alunas apresentaram na justificação da determinação da amplitude do ângulo.

As alunas passaram para a questão seguinte. À semelhança do que aconteceu anteriormente, começaram a desenhar a figura no caderno. A professora A aproximou-se e sugeriu que interpretassem o problema a partir da imagem que está na tarefa para não perderem tanto tempo. No entanto, as alunas preferiram continuar a desenhar as figuras. Como disse a professora, as alunas estavam a perder muito tempo com este procedimento, em detrimento da compreensão do enunciado e estavam a atrasar-se relativamente a outros grupos. De realçar que o ambiente na aula continuava calmo, com os alunos a realizarem os problemas de forma empenhada, solicitando as professoras, em algumas situações, apenas para confirmarem e validarem os seus raciocínios.

A Matilde demorou mais tempo e quando terminou já a Joana tinha pensado no problema e resolvido mentalmente. A Joana optou, por primeiro tentar resolver o problema e posteriormente passar para o caderno.

Quando a Matilde terminou o desenho não teve tempo para pensar no problema e quando olhou para a folha da tarefa da Joana, em vez de tentar interpretar o enunciado, virou-se para a Joana e disse: “Não estou a perceber este.”. Nessa altura, a Joana chegou a folha da tarefa para mais perto da Matilde, apagou o que tinha escrito para explicar e resolver o problema com a colega. Mas, entretanto, a Matilde a olhar para o enunciado, disse: “Já percebi.” De qualquer forma, a Joana decidiu explicar o seu raciocínio:

> *Joana: Este é paralelo a este (aponta com o lápis para os ângulos CAB e BED), então este é 60º (aponta para o ângulo CAB), então 60º mais 40º dá 100º. Então, este é 80º (aponta para o ângulo ABC). Agora, estes ângulos são verticalmente opostos (aponta para o ângulo ABC e DBE e escreve 80º no ângulo DBE) e este tem 80º (e escreve que o ângulo BDE tem 40º). Este tem (aponta para o ângulo FDE) 180 menos 40 (e escreve 140º na folha da tarefa). Agora tenho de explicar (ela diz isto no sentido de que tem de escrever a resposta).*

Seguidamente, as alunas escreveram a suas resoluções nos cadernos. Verificou-se que a Joana, com o auxílio da imagem, explicou de uma forma clara o seu raciocínio à Matilde. Contudo, quando escreveu a sua resolução no caderno não a elaborou de uma forma completa. Esqueceu-se de indicar a amplitude do ângulo FDE que estava escrita na folha da tarefa. (ver Figuras 5.43 e 5.44)

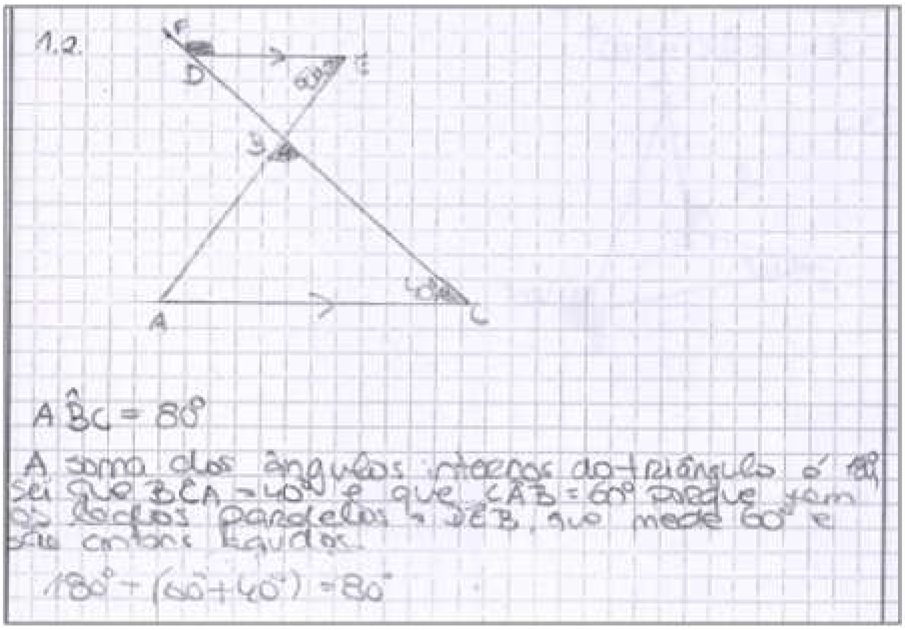


Figura 5.43. Resolução da Joana da questão 1.2

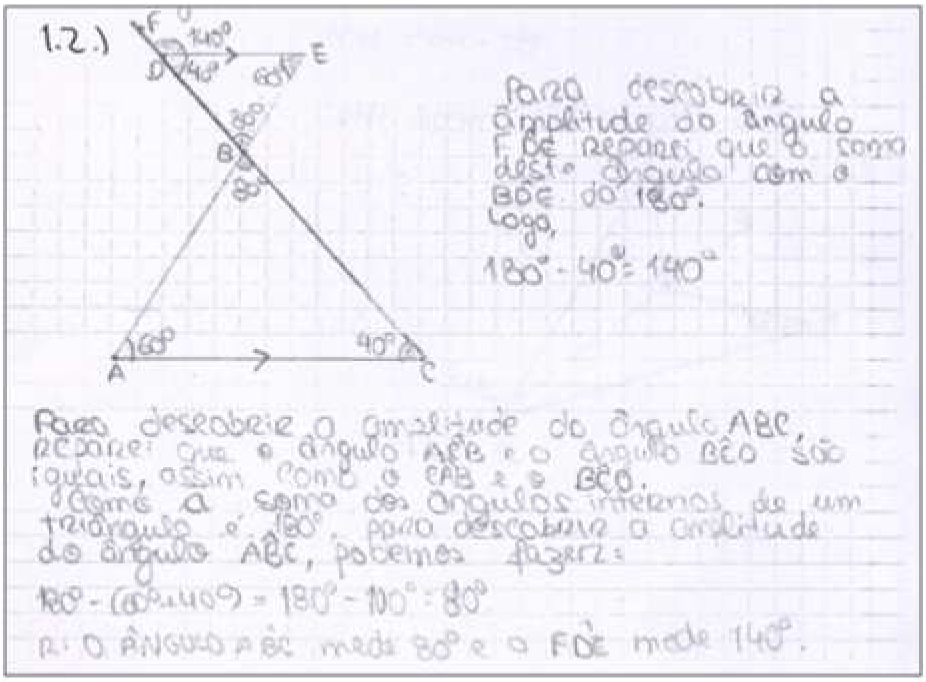


Figura 5.44. Resolução da Matilde da questão 1.2

A explicação da Joana relativamente à amplitude do ângulo ABC estava correcta, mas ficaria mais completa se referisse que os ângulos ABC e DEB são ângulos alternos internos e, por isso, têm a mesma amplitude. Esta propriedade foi trabalhada na aula sobre a tarefa *Rede de rectas paralelas – Ângulos*. No caso da Matilde, respondeu completamente à questão, no entanto, em termos de notação continuou a cometer as mesmas incorrecções e na argumentação apresentada não explica a razão pela qual os ângulos ACB e BDE (na resolução a aluna colocou erradamente ângulo BED) são congruentes, assim como os ângulos CAB e BED.

Neste momento, estavam sensivelmente a meio da aula, pelo que as professoras começaram a ficar preocupadas com o tempo e tentaram apressar um pouco os alunos na resolução dos problemas, mas sem insistir muito, porque verificavam que os alunos, aos seus ritmos, estavam concentrados na resolução dos problemas e a procurarem escrever justificações correctas. Dadas as dificuldades em escrever essas justificações, os alunos demoravam mais algum tempo na sua concretização.

Na questão 2, as alunas voltaram a efectuar o mesmo procedimento. Desenharam a figura no caderno e iniciaram a discussão da tarefa. Como se pode constatar pelo diálogo seguinte, as alunas interpretaram correctamente a situação, encontraram uma estratégia adequada e apresentaram um raciocínio claro na resolução deste problema.

Joana: O triângulo é equilátero.

Matilde: Tem os lados todos iguais...

Joana: (quase em simultâneo) Os ângulos têm 60, 60, 60... Fazes 180 menos 60.

A partir desta conversa, as alunas escreveram no seu caderno a sua resolução. No entanto, a Matilde enquanto a escrevia, hesitou um pouco. Nessa altura, a Joana explicitou novamente o que tinham referido, acrescentando que os ângulos internos do triângulo equilátero são de 60º, porque “180 a dividir por três é 60”. Com esta dica, a Matilde retomou a sua resolução, colocando esta última observação da Joana na sua resposta (ver Figuras 5.45 e 5.46).

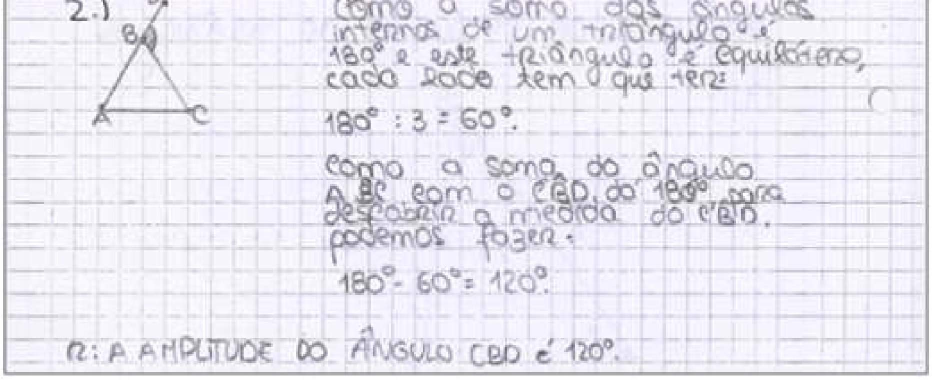


Figura 5.45. Resolução da Matilde da questão 2

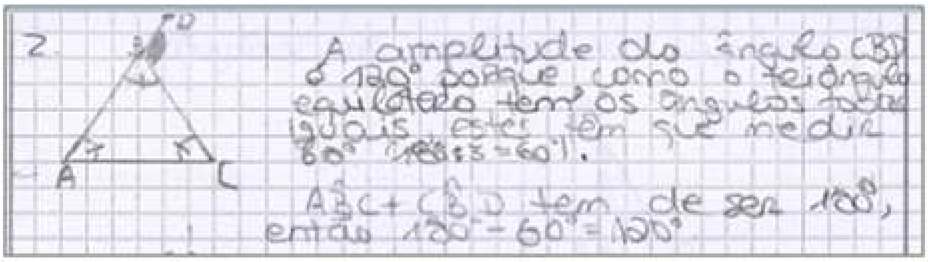


Figura 5.46. Resolução da Joana da questão 2

Passaram, de imediato, para a questão 3.1, seguindo o mesmo processo das alíneas anteriores. Enquanto a Joana procura logo interpretar a figura a partir da folha da tarefa, a Matilde volta a fazer primeiro o desenho no seu caderno, perdendo assim tempo para pensar na sua resolução. Isto fez com que a Joana já soubesse como resolver o problema, mas quis esperar pela Matilde para responderem juntas.

Joana: Vá, estou à espera para fazermos isto juntas.

Joana: Percebeste?

Matilde: Deixa-me pensar. (começa com o lápis a percorrer a figura que fez no caderno e a tentar estabelecer relações. Mas, não demora muito tempo...)

(Passado um tempo.)

Matilde: Este aqui é igual a este (apontando para os ângulos ABC e ADC, do desenho no seu caderno. A forma como fez o desenho levou a que fizesse esta observação).

Joana: Não.

Matilde: Então, não estou a perceber.

Joana: Sabes que este também é 120º (aponta para o ângulo BCD). Sabes que este é 20º (aponta para a parte em falta do ângulo ADC), porque este é eixo de simetria...

Matilde: Então este tem de ser 40º (aponta para o ângulo DBC). Correcto?

Joana: Sim, estes são 40º os dois...

Matilde: Então, este aqui (apontando para o ângulo pedido, ângulo EBC) é 180º menos 40º?

Joana: Sim.

Após este diálogo, as alunas começaram a escrever a resolução no caderno, explicitando os seus raciocínios. Houve alguns momentos de hesitação por parte da Matilde, mas com pequenos esclarecimentos entre as alunas, conseguiu escrever a sua resolução, apesar da imprecisão em justificar que os ângulos DAB e DCB são congruentes (ver fig. Figura 5.47). A Joana optou por apresentar uma resolução diferente. Partiu da existência do eixo de simetria para justificar a congruência entre esses ângulos (ver Figura 5.48).

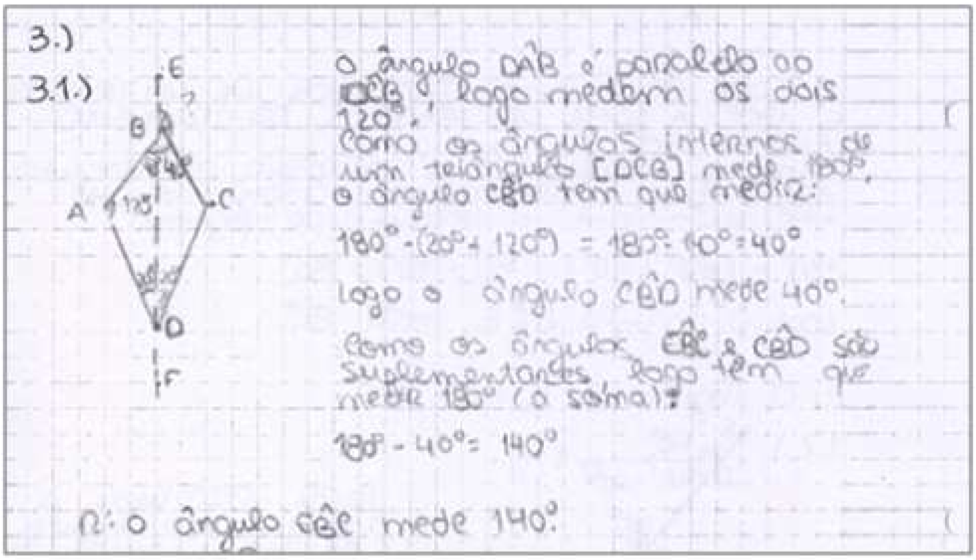


Figura 5.47. Resolução da Matilde da questão 3.1

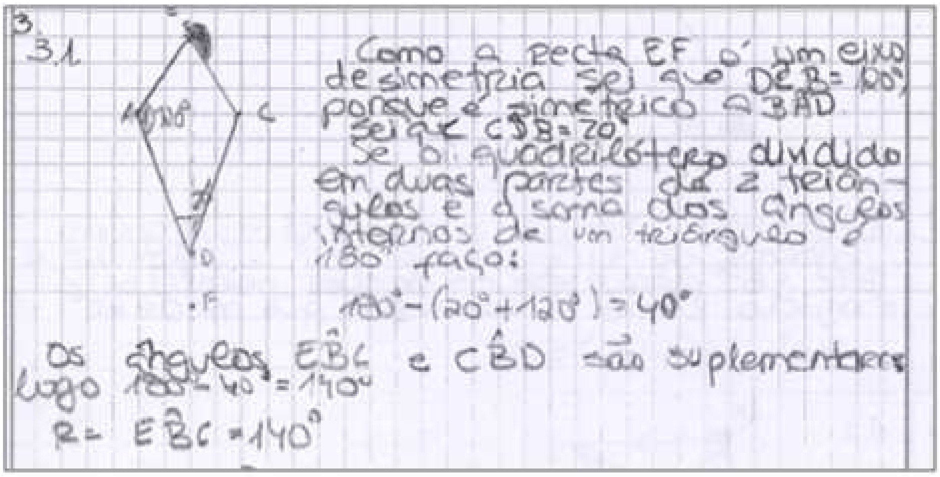


Figura 5.48. Resolução da Joana da questão 3.1

A professora B aproximou-se das alunas, observou as resoluções verificando os resultados e, sem as analisar em detalhe, disse: “As meninas são umas máquinas a fazer estes exercícios, têm tudo direitinho. Era fácil ou difícil?”. A Joana respondeu que “para já é fácil” e a Matilde foi um pouco mais contida referindo: “está a ser normal”.

Quando estavam a desenhar a figura da questão 3.2, tocou para a saída, pelo que os problemas seguintes ficaram para a aula de Estudo Acompanhado (EA). Na próxima aula de Matemática teriam de começar a tarefa relacionada com a congruência de triângulos. Como referiram as professoras, as duas tarefas anteriores levaram mais tempo do que tinham previsto no planeamento do tópico, por isso decidiram utilizar o EA para terminar os problemas e discutir algumas das resoluções dos alunos com toda a turma. As professoras decidiram deixar que os alunos continuassem a resolver, em pares, os problemas, apoiando-os quando solicitavam ou verificando e validando as suas resoluções. Todos os grupos estavam empenhados na tarefa e não quiseram interrompê-los para promover a discussão com toda a turma, porque sabiam que nesse momento quebravam as dinâmicas dos grupos e não teriam a atenção de todos os alunos.

Em síntese, as alunas, tal como toda a turma, estiveram bastante empenhadas na resolução dos problemas propostos na tarefa. Seguiram uma estratégia idêntica no início, quando começavam por desenhar as figuras de cada problema no caderno e só depois pensavam na sua resolução, de forma individual, para seguidamente discutirem as suas ideias e explicitarem os seus raciocínios que ajudavam a argumentar acerca dos resultados obtidos. No entanto, a Joana, no segundo problema, optou por olhar primeiro para a figura no enunciado da folha e interpretar a situação, procurando depois uma estratégia de resolução. Deste modo, conseguiu perceber os problemas mais rapidamente do que a Matilde que continuava a consumir tempo, desenhando as figuras no caderno e só depois iniciava a sua interpretação. Como referiu a professora A, as alunas estavam a perder bastante tempo na elaboração dos desenhos no caderno. Caso não tivessem feito os desenhos, provavelmente teriam tido tempo de fazer mais um ou dois problemas. Percebe-se que as alunas pretendiam ter no caderno toda a resolução completa incluído as figuras. Como se pode observar nas resoluções, a Joana, mesmo fazendo a interpretação da figura a partir do enunciado, na elaboração da resposta desenhava-a sempre por uma questão de clareza. Contrariamente, a Matilde utilizava as figuras que desenhava no caderno para interpretar o problema, o que na interpretação da questão 3.1 se revelou prejudicial. O papagaio que desenhou no caderno era muito idêntico a um losango, razão que a levou a achar que dois dos ângulos eram iguais. Caso tivesse utilizado a figura do enunciado, não teria, provavelmente, feito esta afirmação.

As alunas mostraram que conseguem apresentar estratégias e raciocínios coerentes e claros, pela forma como escreveram as suas respostas aos problemas. Contudo, cometeram algumas imprecisões de linguagem, quer escrita quer oral, o que é natural nesta faixa etária e num momento em que estavam a começar a explicitar os seus raciocínios. Esta actividade é complexa. As alunas têm de traduzir para a linguagem, oral e escrita, as imagens e as representações que têm em mente, resultando, muitas delas, da mobilização de conceitos e propriedades trabalhados há relativamente pouco tempo. Não há, ainda, por isso, a possibilidade de uma apropriação efectiva dos mesmos. No entanto, há uma situação que, mesmo sendo de pormenor, importa realçar neste episódio. A Joana, sempre que usou o facto de ângulos com lados paralelos terem a mesma amplitude, teve sempre o cuidado de acrescentar que eram agudos. Este é um aspecto interessante, porque mostra que a aluna tem esta relação entre ângulos bastante bem clarificada. Note-se que dois ângulos com lados paralelos ou são congruentes ou suplementares. Como a Joana referiu que ambos eram agudos, então só podiam ser considerados congruentes.

5.3.2 Resolução de problemas: critérios de congruência de triângulos

Neste episódio, em torno da resolução de problemas que envolve os critérios de congruência de triângulos, não é possível considerar os dois cenários (alunas da turma A e alunas da turma B), como foi feito atrás, neste subtópico, relativamente ao uso do Geogebra na actividade matemática realizada. Envolve, portanto, apenas a turma B e decorre durante duas aulas e meia de 90 minutos.

A primeira aula e meia é dedicada à resolução de questões do manual escolar (ver Anexo I), em que a partir dos dados das figuras, constituídas por triângulos, os alunos tinham de justificar que os mesmos eram congruentes. A segunda aula, que aconteceu na semana seguinte, correspondeu à tarefa 5 *Usando critérios de congruência* da sequência organizada de tarefas (ver Anexo I).

Como foi referido no episódio do ponto 5.2.2, a discussão da tarefa *Critérios de congruência de triângulos* e a sua síntese teve de passar para a aula que seria dedicada aos problemas. Essa discussão decorreu durante 45 minutos, pelo que os alunos começaram a resolver as questões do manual na segunda metade da aula. Como disse a professora B, que sentiu os alunos um pouco cansados: “Muito bem. Vamos ver se vamos fazer exercícios. Vocês já não podem mais, é verdade”. Após esta afirmação, a professora deu indicação para que os alunos iniciassem o exercício 8 (ver Anexo I) do manual escolar, referindo que pretendia, como era habitual, recolher as resoluções no final da aula.

Os alunos começaram a fazer os exercícios num ambiente tranquilo, acompanhados pelas professoras que insistiam para que fizessem tudo “direitinho” e apresentassem correctamente os seus argumentos.

A Maria e a Marta, quando os colegas começaram os exercícios do manual, estavam, ainda, a discutir o “segundo caso” de congruência de triângulos, o LAL. Esta situação surgiu porque a Marta necessitou de clarificar a diferença este critério e o caso 3 (ver tarefa 4) que também tem dois lados dados e um ângulo.

> *Maria: Aqui a propriedade do que tu sabes, é o que a professora estava a dizer. Tu sabes é que nestas condições, com estas condições, ou seja, dizeres assim, que o lado AB tem 8, que o lado AC tem 6 e que o ângulo formado entre eles tem 60º, só consegues construir um triângulo. Todos os que construíres são geometricamente iguais, não é?! É o que tu sabes. Por exemplo, podias dizer agora que tens aqui um triângulo com 8, com 6 e com 50º de amplitude entre estes dois lados, também só consegues construir um triângulo, nessas condições. Qual é que é a diferença, tu há bocadinho disseste uma coisa interessante, é que o ângulo, onde é que ele anda...*
>
> *Marta: Que o ângulo não é...*
>
> *Maria: Ahh...*
>
> *Marta: O ângulo é entre os dois lados.*
>
> *Maria: Percebeste. É isso. O ângulo que tens é entre os dois lados.*

Este momento ajudou a Maria a uma melhor apropriação do critério LAL e a Marta a compreender esse critério e a importância do posicionamento do ângulo para a aplicação do mesmo.

As alunas começaram a ler o exercício 8 do manual escolar. Durante uns instantes, individualmente, tentaram compreender a alínea 8.1. Assim que sentiram estar na posse da informação para resolverem o problema, iniciaram a troca de ideias que conduziu à sua resposta.

Maria: Temos 30, 30. (a aluna quer dizer os ângulos em cada um dos triângulos).

Marta: Dois lados 4, 4 e 5, 5.

Maria: Então?

Marta: Temos o 2 (o que ela quer dizer é que temos o caso 2, critério LAL).

Maria: Porquê?

Marta: Porque têm, os lados que sabemos são iguais. Porque tem dois lados geometricamente iguais e tem um ...

Maria: Tem dois lados iguais.

Marta: E um ângulo, quer dizer, são os três, mas este é entre eles. E um ângulo entre eles que é comum.

Maria: O ângulo formado entre eles...

Marta: É comum.

Maria: Ou seja?

Marta: Têm a mesma amplitude.

Maria: Muito bem.

Satisfeitas com a conversa, começaram a escrever a resolução no caderno, explicando a amplitude de 30º do ângulo EFG e salientando a situação que lhes permitiu afirmar que os triângulos eram congruentes, sem escreverem explicitamente caso LAL (ver Figuras 5.49 e 5.50).

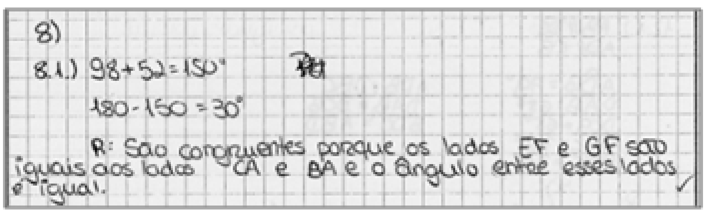


Figura 5.49. Resposta da Marta à questão 8.1 com a validação da professora

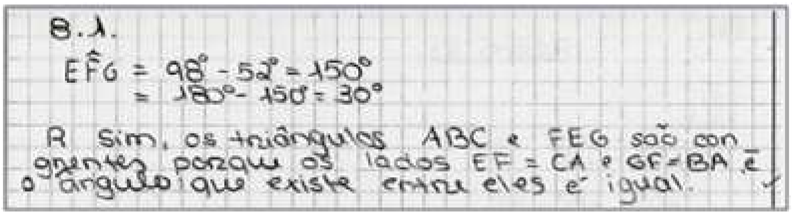


Figura 5.50. Resposta da Maria à questão 8.1 com a validação da professora

Chamaram a professora para confirmarem se o procedimento e a resposta à questão 8.1 estavam correctos.

Professora B: Conta Marta.

Marta: Aqui, nós podemos, concluímos que os triângulos são iguais, porque os...

Marta e Maria: Os lados são iguais e o ângulo entre eles...

Professora B: Parece-me uma boa maneira de dizer, explica lá o que queres dizer. É o ângulo...

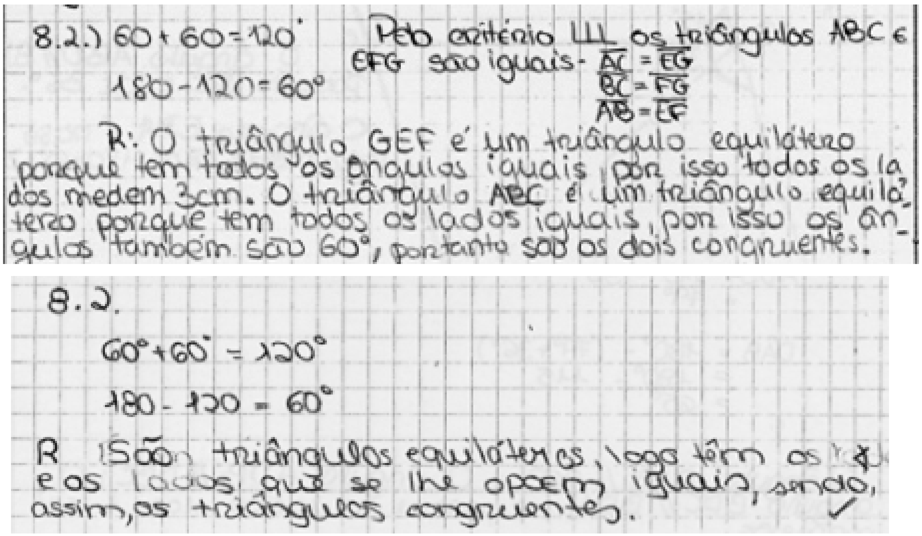
Marta: Este aqui... (aponta para o de 30º)

Professora B: Que está...

Marta e Maria: Entre estes lados...

Professora B: Gosto dessa maneira de escrever, muito bem. Sim, senhor.

Com este reforço positivo, as alunas entusiasmadas continuaram a sua actividade, passando para a questão 8.2 (ver Anexo I). A reacção da Marta, assim que fez a leitura, foi: "Este é fácil". E, de imediato, a Maria referiu que "é um triângulo equilátero que tem todos os lados iguais e os ângulos medem todos 60º". A partir desta afirmação, as alunas escreveram a sua resposta e decidiram justificar utilizando o critério LLL (ver Figura 5.51).



8.2.) 60+60=120°
180-120=60°

Pelo critério LLL os triângulos ABC e EFG são iguais - $\overline{AC}=\overline{EG}$, $\overline{BC}=\overline{FG}$, $\overline{AB}=\overline{EF}$

R: O triângulo GEF é um triângulo equilátero porque tem todos os ângulos iguais por isso todos os lados medem 3cm. O triângulo ABC é um triângulo equilátero porque tem todos os lados iguais, por isso os ângulos também são 60°, portanto são os dois congruentes.

8.2.
60°+60° = 120°
180-120 = 60°

R: São triângulos equiláteros, logo têm os ∡ e os lados que se lhe opoem iguais, sendo, assim, os triângulos congruentes.

Figura 5.51. Respostas à questão 8.2. Primeira é da Marta e a segunda da Maria

Note-se que a Marta é mais consistente na apresentação do seu argumento. Na sua justificação, explica porque é que o triângulo da direita é equilátero e acrescenta que tem lado 3, por isso, os dois triângulos ABC e EFG são congruentes. Para esta aluna, não basta que sejam triângulos equiláteros, têm de ter também o mesmo comprimento do lado.

A Maria apresentou uma resposta com uma pequena incorrecção. Refere que os triângulos são congruentes porque são equiláteros, mas não acrescenta na justificação que têm o mesmo lado. Contudo, um pouco mais tarde, melhora a sua justificação, ao reparar que a Marta, colocava os critérios na resposta. Assim, no final, acrescentou às suas respostas, no caderno, os critérios.

Entretanto, a professora decidiu corrigir com toda a turma a questão 8.1, devido às dúvidas que existiam relativamente às justificações e à identificação dos critérios de congruência de triângulos. Contudo, as alunas não seguiram essa discussão, dando continuidade ao seu trabalho e passaram para a alínea 8.3 (ver Anexo I). Quando iniciaram a interpretação desta questão, tocou para a saída. A professora B informou que continuariam este exercício na aula seguinte e relembrou que entregassem as questões resolvidas.

Na aula seguinte, a professora B retomou o exercício 8, fazendo um ponto de situação das respostas que tinha visto. Referiu que alguns argumentos apresentados tinham incorrecções e estavam um pouco confusos. Consequentemente, decidiu começar com a discussão acerca de como se pode verificar/provar se dois triângulos são congruentes. Como me disse a professora B, foi importante voltar ao exercício 8, porque na aula anterior "não tinha tido muito sucesso".

Após este momento com toda a turma, os alunos, em pares, recomeçaram o exercício 8. A Maria e a Marta, releram a alínea 3 e, sem hesitação, começaram a dialogar sobre a resposta.

Marta: Vamos saber o ângulo ACB. 70 mais 45 que é igual a 115...

Maria: 65. (está a referir-se à amplitude do ângulo ACB)

Chega a professora.

Professora A: E a alínea 3?

Marta: São iguais, porque o lado AB mede 4,5...

Professora A: Sim.

Marta: E tem um ângulo que mede 45, o ângulo BAC mede 45 e o outro mede 70 e o EG é 4,5, o EGF é 45º e o outro é 70.

Professora A: Sim. Que caso se encaixa aqui?

Marta: É o caso 5. (refere-se ao critério ALA)

Professora A: É o 5. Muito bem, está certo. É isso mesmo.

Marta: Como é que eu escrevo?

Professora A: Tens de escrever como disseste. O lado AB é igual ao lado EG, aquele ângulo tal e tal é igual a... e assim. Portanto, tens de escrever como me disseste e tens de apresentar aquele cálculo.

Escreveram, então, nos seus cadernos a resolução desta alínea (ver Figura 5.52). Neste caso, deram exactamente a mesma resposta. Depois dos cálculos, justificaram a congruência de triângulos e, a seguir, acrescentaram o critério utilizado.

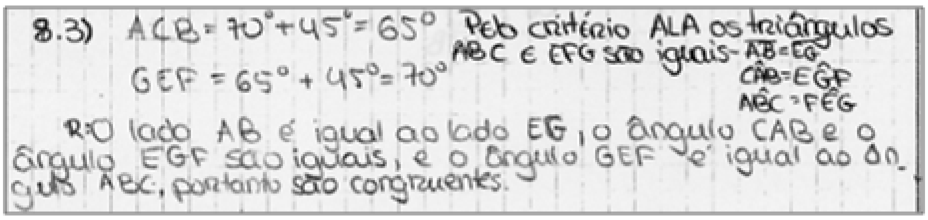

8.3) ACB = 70° + 45° = 65° Pelo critério ALA os triângulos ABC e EFG são iguais - AB = EG
GEF = 65° + 45° = 70° CÂB = EĜF
ABC = FÊG
R: O lado AB é igual ao lado EG, o ângulo CAB e o ângulo EGF são iguais, e o ângulo GEF é igual ao ângulo ABC, portanto são congruentes.

Figura 5.52. Resposta da Marta à questão 8.3

Passaram rapidamente à questão seguinte (ver Anexo I). Desta vez, não conseguiram, tal como tinha acontecido nas alíneas anteriores, observar logo que critério poderiam utilizar para justificar a congruência dos triângulos. A Marta, em relação a esta situação, disse: "Agora é mais difícil", mas a Maria retorquiu referindo: "Espera, tem calma". E com esta afirmação, voltaram a olhar para os dois triângulos e a Maria começou a adiantar um argumento: "Tens dois lados iguais. Os ângulos vão ser iguais." A Marta confirmou a afirmação, acrescentando: "Pois é. Temos de ver se dá 75". As alunas perceberam que o triângulo era isósceles, pelo que as amplitudes de ângulos opostos a lados iguais, eram também iguais. Foi a partir desta constatação que fizeram os cálculos no caderno para justificar que os dois triângulos eram congruentes (ver Figuras 5.53 e 5.54).

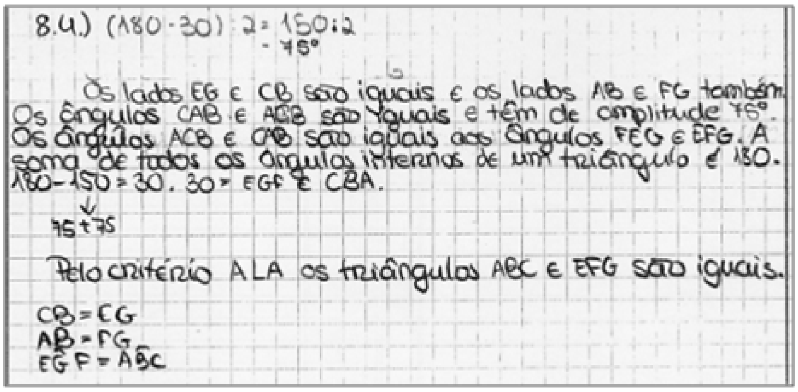


Figura 5.53. Resposta da Marta à questão 8.4

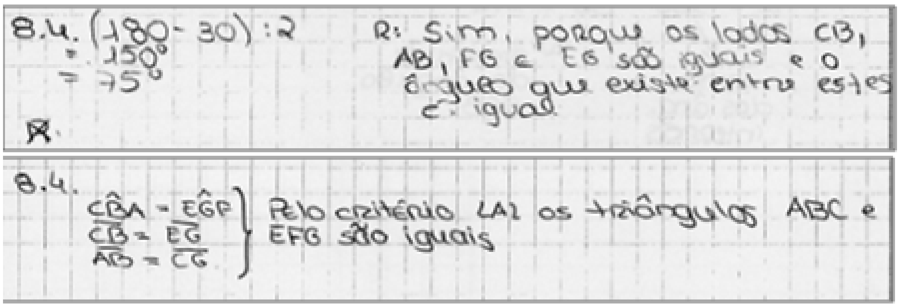


Figura 5.54. Resposta da Maria à questão 8.4

As alunas tiveram nesta última alínea algumas incorrecções e imprecisões que não aconteceram anteriormente. Não há dúvida de que percebem perfeitamente que os triângulos eram congruentes, mas não tiveram o cuidado de voltar a ler as respostas que deram. A Marta respondeu correctamente, inclusivamente explicou a amplitude do ângulo EGF para mostrar que tem a mesma do ângulo ABC, no entanto, em vez de se referir ao critério LAL que é o que efectivamente utiliza para argumentar a congruência entre os triângulos, escreve “critério ALA” que também poderia ter utilizado, mas para isso teria de se referir a outras condições. A Maria, por sua vez, tem uma incorrecção na expressão, esquecendo-se de colocar o cálculo de 150:2, que poderá ser mera distracção. Depois da resposta dada, acrescentou o critério de congruência de uma forma clara e explícita.

Terminada esta questão, as alunas começaram a conversar um pouco. Percebia-se que estavam já um pouco cansadas de fazerem este exercício. Talvez, por isso, nesta última questão, não mostrassem tanto cuidado na resposta como nas anteriores.

Tinham decorrido sensivelmente 45 minutos, quando se começou sentir um ambiente de sala de aula mais instável, com alguns alunos a falarem entre si de outros assuntos não relacionados com a actividade matemática que estavam a desenvolver. Por isso, a professora dirigiu-se para a frente da sala, interrompendo os alunos, para referir que naquele momento iria ser aberta a discussão das restantes questões do exercício 8, uma vez que a grande maioria tinha terminado. Este momento não demorou muito, apenas serviu para os alunos validarem as suas respostas, que nalguns casos já tinham feito com as professoras, e para frisar a importância de destacarem as situações respectivas quando aplicam os critérios de congruência de triângulos. De seguida, a professora sugeriu aos alunos, que abrissem novamente o manual escolar e realizassem o exercício 12 da página 67. Estiveram até ao final da aula a resolver estes exercícios.

Na segunda aula, voltou-se à sequência organizada de tarefas, para efectuarem a tarefa 5 *Usando critérios de congruência* (ver Anexo I). A professora distribuiu a tarefa, pedindo aos alunos para a lerem e começarem a resolver os problemas.

A Maria e a Marta leram o problema, mas não perderam muito tempo em tentar compreendê-lo. Após uma leitura e uma interpretação superficial da figura, a Maria chamou a professora.

Maria: Professora.

Professora B: Diz.

Maria: A afirmação está correcta. É verdade, porque os dois triângulos têm um ângulo de 90º e estas duas linhas são paralelas.

Professora B: Não. Isso é o que queremos, elas são paralelas, mas são iguais? Tu queres mostrar que este é igual a este (aponta para AF e CD). Olha para o enunciado, o que é que diz? (a professora está a referir-se também ao titulo da tarefa).

Maria: Hmmm...

Professora B: Então, se vamos usar os critérios, o que temos de procurar?

Alunas: Já percebemos.

Professora B: Então, façam lá.

No problema, as alunas identificaram que tinham dois triângulos, mas depois ficaram um pouco perdidas sem saber bem o que fazer. Por isso, chamaram a professora e deram uma resposta não fundamentada. Caso tivessem lido o título da tarefa, a sua atitude face à abordagem do problema teria sido diferente, como se percebe pelo diálogo acima. Um dos problemas com esta dificuldade inicial esteve relacionado com o facto de se ter colocado uma situação sem se ter referido directamente que tópico matemático mobilizar, tal como tinha acontecido com os exercícios da aula anterior. As alunas ainda estavam aparentemente nesse registo. Assim que a professora deu a dica para olharem para o enunciado, as alunas conseguiram perceber a tarefa.

Com a observação da professora sobre o problema do agrimensor e após terem percebido o que se pretendia, as alunas analisaram a figura a partir de um outro olhar, ou seja, começaram a procurar condições que lhes permitissem utilizar os critérios de congruência de triângulos.

Marta: Temos um ângulo igual, não temos mais nada.

Maria: Nós sabemos um ângulo e um lado.

Marta: Qual lado?

Maria: Estes. (aponta para AE e EC)

(...)

Maria: Estes ângulos aqui são iguais. (aponta para os ângulos FEA e CED)

Marta: Como é que sabes?

Maria: Sei lá, têm que ser.

Continuaram a observar a figura, tentando encontrar uma forma de justificar que os triângulos FAE e EDC são congruentes. Decidiram chamar novamente a professora para que esta validasse o que tinham verificado e as ajudasse a encontrar a outra condição, que aliás a Maria identificou no diálogo quando afirmou que "estes ângulos aqui são iguais (aponta para os ângulos FEA e CED)", mas não deram continuidade ao raciocínio, dado que não conseguiram justificar a igualdade dos ângulos.

Maria: Esta linha fez o meio deste lado.

Professora B: Então, se este fez o meio quem é igual a quem?

Alunas: O segmento CE é igual ao segmento EA.

Professora B: Mais.

Maria: E o EF é igual ao ED.

Professora B: Porquê?

Maria: Porque o E está no meio.

Professora B: Mas isso, vais saber quando eles são congruentes. Mas, antes, enquanto que tu disseste que o CE é igual ao EA, sabemos porquê. Agora esses ainda não sabemos.

As alunas continuaram a insistir nos lados e a professora foi alertando para a sua impossibilidade. Até que deu uma sugestão.

Professora B: Vamos lá aos ângulos.

Marta: Este ângulo é de 90º (aponta para o ângulo ECD) e é igual a este (aponta para o ângulo EAF).

Professora B: Que mais ângulos são iguais? Tá aí mesmo na carinha.

Maria: Este é igual a este (aponta para os ângulos CED e FEA).

Professora B: Então, qual é o caso de congruência de triângulos que vamos usar?

Maria: É o ALA.

Professora B: Depois disso, tudo escrito. Há muita coisa para escrever. Depois disso tudo, o que é que temos a certeza? Que os dois triângulos são...

Alunas: Congruentes.

Professora B: Então podes pôr um em cima do outro. Então, como consequência disso é que os segmentos, como podes colocar um em cima do outro. Quem é que fica igual a quem?

Marta: O AE e o CE, o FE e ED e o FA e o CD.

Professora B: Isso mesmo. Muito bem. Está feito aqui deste lado.

A partir desta discussão, as alunas escreveram no caderno a resolução do problema. É de destacar que, enquanto escreviam, explicavam uma à outra o que estava a ser feito para clarificarem as suas ideias. Não escreveram nada neste problema que não fizesse sentido para elas (ver Figuras 5.55 e 5.56).

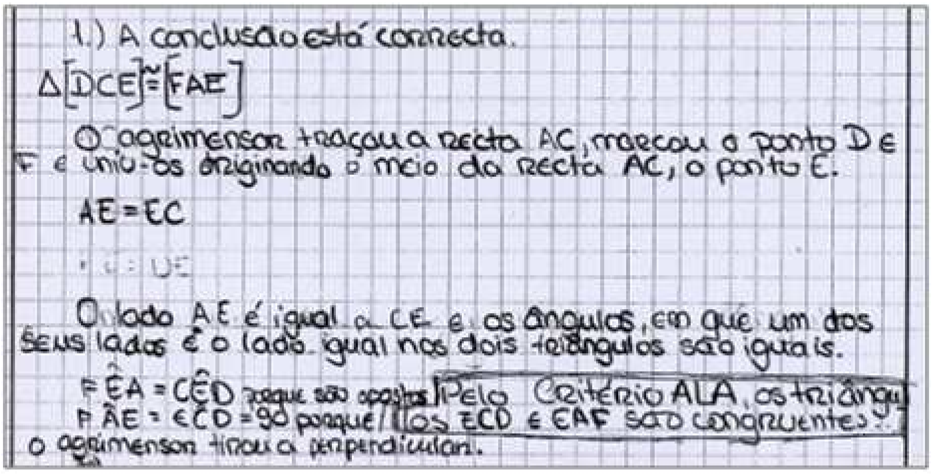
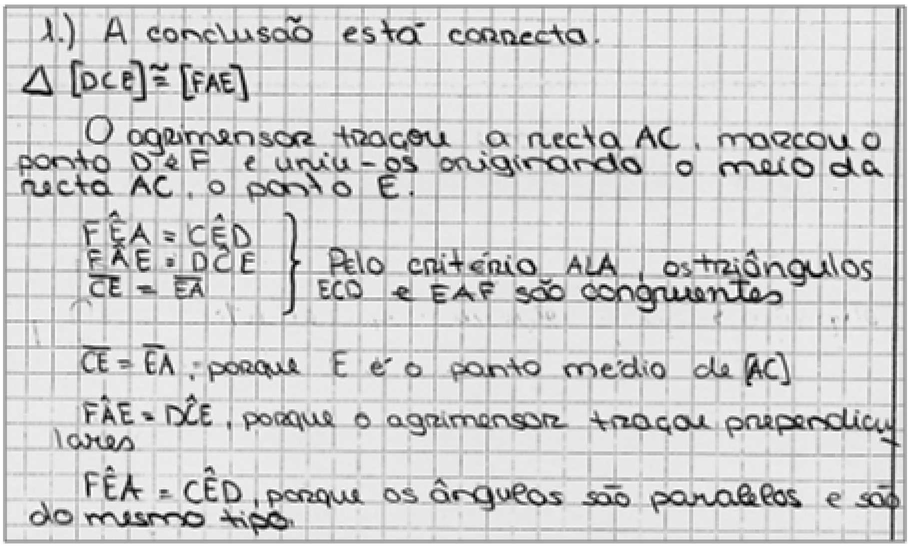


Figura 5.55. Resposta da Marta ao problema do agrimensor



1.) A conclusão está correcta.

Δ [DCE] $\cong$ [FAE]

O agrimensor traçou a recta AC, marcou o ponto D e F e uniu-os originando o meio da recta AC, o ponto E.

$F\hat{E}A = C\hat{E}D$
$F\hat{A}E = D\hat{C}E$
$\overline{CE} = \overline{EA}$
} Pelo critério ALA, os triângulos ECD e EAF são congruentes

$\overline{CE} = \overline{EA}$, porque E é o ponto médio de [AC]

$F\hat{A}E = D\hat{C}E$, porque o agrimensor traçou prependiculares

$F\hat{E}A = C\hat{E}D$, porque os ângulos são paralelos e são do mesmo tipo.

Figura 5.56. Resposta da Maria ao problema do agrimensor

A professora, durante o diálogo com as alunas, disse-lhes como poderiam escrever em linguagem matemática que dois triângulos eram congruentes. As alunas adoptaram essa notação, como se pode observar nas resoluções. Esqueceram-se apenas de colocar o símbolo de triângulo atrás de [FAE].

As alunas apresentaram a mesma resolução, mas com uma organização diferente. Ambas têm a mesma incorrecção sobre o método que o agrimensor usava para determinar a largura de um rio. A resposta da Maria é mais clara na justificação da igualdade dos segmentos CE e EA, mas a Marta justifica mais correctamente a igualdade das amplitudes dos ângulos FEA e CED, quando refere que são ângulos opostos (deveria ter escrito verticalmente opostos). A Maria justifica essa igualdade escrevendo que os “ângulos são paralelos do mesmo tipo”. Cometeu um erro de linguagem, porque deveria ter escrito que são ângulos com lados paralelos. Contudo, neste caso, a resposta mais correcta foi a da Marta.

Esta diferença na justificação da igualdade da amplitude daqueles ângulos, pode estar relacionada com o facto de, no momento do diálogo com a professora, não ter sido explicitado o argumento que permitiu concluir que os ângulos FEA e CED tinham a mesma amplitude. Quando a Marta referiu que a amplitude dos ângulos era igual, a professora confirmou essa igualdade sem ter sido dada uma justificação. Também, antes, no diálogo entre as alunas, referiram esta situação, mas não conseguiram justificá-la. Por isso, quando escrevem a resolução, cada uma coloca a justificação que lhe parece mais correcta.

Tinham passado mais de 45 minutos da aula quando as alunas iniciaram o segundo problema (ver Anexo I). Assim que leram o problema, conseguiram, sem dificuldade, identificar o critério de congruência para justificar que os triângulos eram congruentes e, consequentemente, deduzir a igualdade entre os lados AB e DE. As alunas chamaram a professora para validar a sua argumentação.

Maria: Acho este mais fácil.

As duas alunas: Este lado é igual a este (e apontam para os lados BC e CD). Este lado é igual a este (apontam para os lados AC e CE).

Maria: E os pontos são colineares, têm linhas rectas. Portanto, estes ângulos têm de ser iguais.

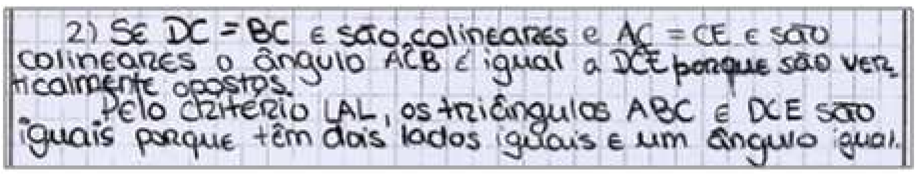
Professora B: Ok. E os ângulos são iguais, porquê?

Maria: Porque são verticalmente opostos.

Marta: Tem dois lados iguais e um ângulo igual, portanto, os triângulos são congruentes.

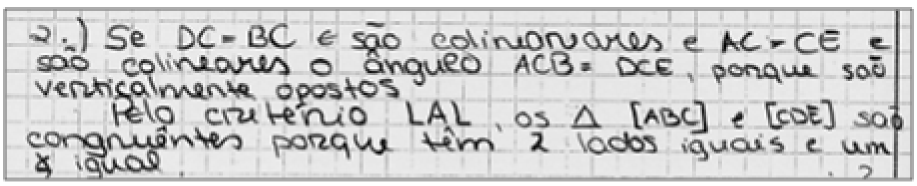
De notar que, neste diálogo, a Maria utiliza já o termo ângulos verticalmente opostos para justificar que dois ângulos naquela posição têm a mesma amplitude. No problema anterior, utilizou um outro argumento igualmente adequado.

Após esta troca de ideias, tal como fizeram sempre, as alunas escreveram no seu caderno a resolução do problema (ver Figuras 5.57 e 5.58).



2) Se DC = BC e são colineares e AC = CE e são colineares o ângulo ACB é igual a DCE porque são ver-
ticalmente opostos.
Pelo critério LAL, os triângulos ABC e DCE são iguais porque têm dois lados iguais e um ângulo igual.

Figura 5.57. Resolução da Marta do problema 2



2.) Se DC = BC e são colinoriares e AC = CE e são colineares o ângulo ACB = DCE, porque são verticalmente opostos
Pelo critério LAL, os Δ [ABC] e [CDE] são congruentes porque têm 2 lados iguais e um ∡ igual.

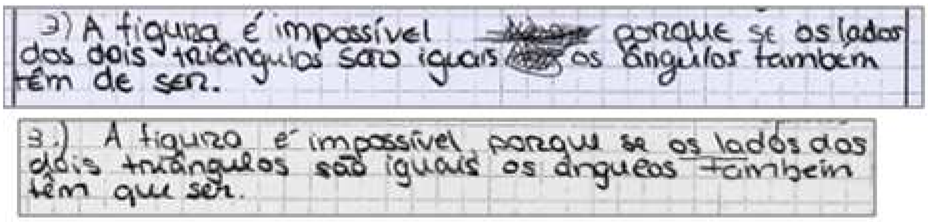
Figura 5.58. Resolução da Maria do problema 2

Sobre o problema, é compreensível que as alunas tenham dito que este era mais simples. Como se pôde constatar, no problema anterior, estiveram bastante tempo para se apropriarem das condições e compreenderem o que se pretendia. Assim, que ultrapassaram essa situação, a resolução do problema teve um desfecho mais simples. Este problema é idêntico ao primeiro e as condições dadas são mais explicitas do que na situação anterior.

A resolução das alunas está simples e correcta. Há uma pequena incorrecção na nomenclatura utilizada pela Marta e, por isso, não foi valorizada. Podiam, no entanto, no final, quando referiram que os triângulos eram congruentes, ter concluído que os lados AB e DE eram iguais.

Relativamente ao terceiro problema (ver Anexo I), assim que as alunas olharam para o enunciado e observaram a figura, disseram logo que a figura estava “errada”.

Identificaram, com facilidade, o critério LLL para justificar que os triângulos eram congruentes, pelo que as amplitudes dos ângulos tinham de ser iguais. No entanto, na resolução que escreveram, a argumentação tem incorrecções, verificando-se que foi feita sem a mesma atenção e cuidado que tinha ocorrido nas resoluções anteriores (ver Figura 5.59).


3) A figura é impossível porque se os lados dos dois triângulos são iguais os ângulos tambem têm de ser.

3.) A figura é impossível porque se os lados dos dois triângulos são iguais os ângulos tambem têm que ser.

Figura 5.59. Resoluções da Marta e da Maria, respectivamente, do problema 3

As alunas não discutiram, desta vez, o que tinham escrito, pelo que omitiram algumas explicações que eram necessárias para terem uma resolução mais consistente. Não explicaram a igualdade entre os lados e o motivo, isto é, o critério de congruência que oralmente tinham referido, para afirmar que os ângulos tinham de ser iguais e também não realçaram porque é que dois desses ângulos em cada um dos triângulos eram iguais. Portanto, pode-se constatar que o argumento apresentado pelas alunas não é o adequado.

Quando estavam a começar a ler o problema 4, tocou para a saída e a professora pediu aos alunos para terminarem os problemas em casa para depois discutirem as resoluções no início da aula seguinte.

Em síntese, como se pôde constatar ao longo do episódio, o método seguido pelas alunas para a resolução dos problemas, passou primeiro pela leitura do problema, em que cada uma procurava compreender o enunciado, e pela observação das figuras para identificarem um caminho e desenvolverem um raciocínio que lhes permitisse estabelecer uma estratégia de resolução que traduzisse eficientemente os seus argumentos. Foi interessante verificar que as alunas discutiam sempre as ideias que retiravam da visualização das figuras, conseguindo, deste modo, aperfeiçoar ao longo do episódio as suas resoluções, uma vez que corrigiam mutuamente as explicações dadas. Acrescenta-se que, ao contrário do que aconteceu no episódio da congruência de triângulos com recurso ao Geogebra, as alunas solicitaram em cada uma das questões a presença da professora para validar as suas resoluções, o que permitiu, como se pode constatar pelos diálogos, a clarificação das ideias das alunas que obviamente teve impacto nas suas respostas.

Um outro aspecto a realçar tem a ver com o tipo de tarefas propostas às alunas. Quando a professora solicitou que os alunos fizessem o exercício do manual em que lhe foi pedido que justificassem porque é que os triângulos eram geometricamente iguais, as alunas não tiveram dificuldade em compreender de imediato o que se pretendia, respondendo, em seguida, às questões. No entanto, quando foram colocados problemas que não referiam directamente os conceitos a aplicar, as alunas tiveram mais dificuldade na abordagem à situação. Assim, que a perceberam, mais uma vez resolveram os problemas do mesmo modo que fizeram os exercícios do manual.

Por fim, no que se refere às resoluções das alunas, pode-se constatar que foram sendo mais consistentes ao longo do episódio. Apresentam um nível de raciocínio e argumentação elaborado, em que conseguiram explicitar de uma forma clara as ideias que construíram, resultantes da visualização das figuras e da mobilização dos conceitos, bem como das relações entre objectos. Contudo, há algumas excepções, que coincidiram com as resoluções do final de cada uma das aulas. Nestes casos, as alunas, talvez pela saturação e cansaço, não discutiram as respectivas resoluções e não tiveram a preocupação de verificar a coerência e consistência das mesmas relativamente aos seus raciocínios.

5.3.3 Problemas com quadriláteros

O terceiro episódio deste subcapítulo refere-se à actividade desenvolvida pelos alunos da turma B, com especial incidência nas alunas Maria e Marta, durante a tarefa *Problemas com quadriláteros* da sequência organizada de tarefas dos “Triângulos e quadriláteros” (ver Anexo I). Decorreu numa aula de 90 minutos, aproximadamente, um mês e meio, após a tarefa *Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos* com recurso ao Geogebra (último episódio do subcapítulo anterior).

A professora B começou a aula com algumas observações sobre o planeamento da semana de trabalho, dada as alterações que foram necessárias efectuar relativamente às aulas de Matemática.

Tinham passado 15 minutos de aula quando a professora distribuiu a tarefa e os quadrados de acetato de vários tamanhos verdes e vermelhos. Não fez qualquer introdução à tarefa, apenas referiu que podiam pedir mais quadrados, caso precisassem de outros tamanhos.

A Maria e a Marta começaram por preparar o material e identificar a folha de registo. Após a leitura da primeira questão (ver Anexo I), a Marta pegou nos dois quadrados e manipulou-os de modo a obter um losango. Contudo, durante estes movimentos dos quadrados reparou que tinha um triângulo e tentou começar a registar (ver Figura. 5.60), interrompendo-o quando a Matilde mexeu e arrastou o quadrado pequeno de forma a fazê-lo coincidir com a primeira imagem do enunciado da questão 1 e obtendo o losango.

Figura 5.60. Marta, manipulando os quadrados, obteve um triângulo

Entretanto, perceberam que descobriram dois polígonos por sobreposição, mas sentiram-se um pouco perdidas sobre o que fazer, o que revela uma ausência de estratégia que as ajudasse a resolver a questão. Esta situação foi confirmada pela atitude das alunas que continuavam a manipular os quadrados, verificando que obtinham outros polígonos sem os identificar, mas sem convicção sobre o trabalho que estavam a realizar. Até que houve um momento em que referiram que conseguiram obter quadrados e a Maria afirmou: "Dá para fazer losango. Ele tem as propriedades todas do losango". No entanto, depois desta afirmação, voltaram a hesitar e pararam sem saber como prosseguir o trabalho que estavam realizando e como lidar com a informação que tinham recolhido. Por isso, decidiram chamar a professora. Quando chegou as alunas apenas confirmaram com a professora se o polígono sobreposto era um losango, não solicitando qualquer apoio em termos de estratégia e caminho para a continuidade da actividade.

Maria: Professora, isto também pode ser considerado um losango?

Professora B: Diz-me só o polígono que estás a dizer? (a aluna aponta para o polígono). Sim, concordo contigo é um losango, em particular é um quê?

Alunas: Um quadrado.

Professora B: Um losango é sempre um quadrado?

Maria: Não.

Professora B: E um quadrado é sempre um losango?

Alunas: Sim.

Maria: Todos os quadrados são losangos, mas nem todos os losangos são quadrados.

Professora B: Muito bem.

A professora, como estava muito pressionada por outros grupos que não paravam de solicitar a sua presença, não verificou o trabalho que as alunas estavam a desenvolver, pelo que não se apercebeu da ausência de uma estratégia de resolução, causada pela dificuldade em compreender o que se pretendia com a tarefa, e consequentemente, da desorientação das alunas durante a actividade.

Nesta fase, as alunas decidiram desenhar as figuras que obtiveram com os dois quadrados, começando pelo losango que resultou da sobreposição do quadrado menor. A Maria incluiu no seu registo a conclusão a que tinha chegado com a professora sobre os losangos (ver Figura 5.61).

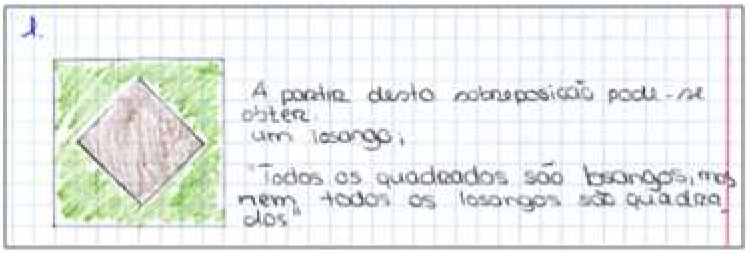


Figura 5.61. Registo da Maria do losango

A Marta como foi mais rápida a desenhar as figuras e ia manipulando os quadrados para obter outros polígonos por sobreposição. Neste momento, as alunas definiram uma estratégia que consistia em procurar os polígonos que estavam no enunciado da questão e pela mesma ordem. Deste modo, após o desenho da figura que tinha como polígono sobreposto o triângulo isósceles, manipularam novamente os quadrados de forma a conseguirem ter um pentágono (ver Figura 5.62) e registaram na folha, à semelhança do que tinham feito com o losango e o triângulo isósceles.

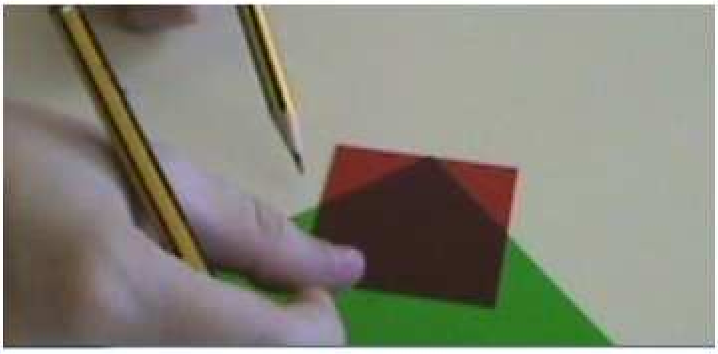


Figura 5.62. Pentágono obtido por sobreposição do quadrado pequeno

As alunas demoraram um pouco a efectuar os desenhos, dado que resolveram utilizar uma régua de 50 cm e pintar as figuras dos desenhos. Gastaram, deste modo, muito tempo nesse registo, sem a preocupação de perceberem, por exemplo, se conseguiam obter outro triângulo por sobreposição dos quadrados, para além do triângulo isósceles. Limitavam-se apenas a procurar os polígonos descritos no enunciado da questão e a registá-los na folha de resolução.

Entretanto, a professora B, durante a sua passagem pelos grupos, verificou que, apesar de estarem a manipular os quadrados e a encontrar diferentes polígonos sobrepostos, os alunos não estavam a efectuar registos, nem a procurá-los com uma estratégia definida, ou seja, essa acção estava a ser realizada de uma forma aleatória. Assim, decidiu intervir para toda a turma, com vista a focar os alunos no objectivo da tarefa e a orientá-los na actividade que estavam a desenvolver.

Professora B: Os diversos grupos, claro que estão a fazer diversas soluções, claro que vocês estão a fazer várias explorações. Mas, dentro dos quadriláteros, Matilde, relembra lá de que quadriláteros já falámos. Diz.

Matilde: Losango.

Professora B: Perfeito. Quais são as características do losango?

Matilde: Tem as diagonais perpendiculares, os ângulos opostos iguais,...

Outro aluno: Os lados iguais.

Professora B: Muito bem! Vamos lá, que outros quadriláteros conhecem?

Após um tempo sem resposta, a professora insiste na pergunta.

Aluno: Rectângulo.

Aluna: Trapézio e paralelogramo.

Outro aluno: Papagaio.

Professora B: Muito bem. Estão a ver, há muito para procurar, já viram?! E que tipo de triângulos conhecem?

Aluna: Isósceles, equilátero e escaleno.

Professora B: Isso é quanto aos lados, e quanto aos ângulos?

Aluna: Rectângulo, acutângulo e obtusângulo.

Professora B: Estão a ver, então há muito para procurar... Vamos lá, não quero que comecem a dispersar. Ainda há muito para fazer.

A partir desta intervenção da professora, uns grupos começaram a procurar triângulos e outros quadriláteros. Mas ainda sem uma estratégia bem definida e sem perceberem a necessidade de encontrar justificações para salientarem que não era possível, por exemplo, construir todos os triângulos. As professoras, apercebendo-se desta situação e dificuldade, ficaram mais tempo nos grupos para apoiar o trabalho dos alunos, colocando questões como "Conseguem obter um triângulo?", "Que tipo de triângulo?" ou "Conseguem obter outros triângulos? Porquê?".

No entanto, a Maria e a Marta, pelo facto de estarem de volta dos seus registos, não prestaram atenção à abordagem da professora, continuando a seguir o seu caminho, procurando obter o hexágono. Assim, a Marta voltou a manipular os quadrados até conseguir esse polígono por sobreposição de um dos quadrados (ver Figura 5.63).

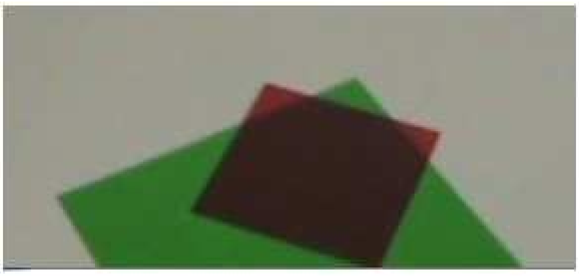


Figura 5.63. Hexágono obtido por sobreposição do quadrado menor

Nesta fase não havia diálogo entre as alunas, cada uma estava a efectuar os seus registos, desenhando as figuras e pintando-as. A Maria estava muito atrasada nos seus desenhos, pelo que não reparou que a Marta já tinha o hexágono feito e registado, nem que estava a aguardar que ela terminasse os seus registos. Após este impasse, a Marta disse "vamos ver se conseguimos fazer o octógono" e, nesta sequência, ao mexerem no quadrado pequeno referiram que "com este já não dá para fazer". Por isso, chamaram a professora, que confirmou que com aquele quadrado não era possível obter um octógono por sobreposição. Foi buscar um outro quadrado maior e disse-lhes: "É importante que refiram que com este [quadrado pequeno] não é possível fazer o polígono [octógono] e justifiquem porque não é possível".

As alunas conseguiram sem dificuldade obter o octógono, contudo não seguiram o pedido da professora sobre a justificação. Desenharam, à semelhança do que estavam a concretizar com o outro quadrado, a figura obtida, salientando apenas que estes novos desenhos resultaram da utilização de um outro quadrado (ver Figura 5.64).

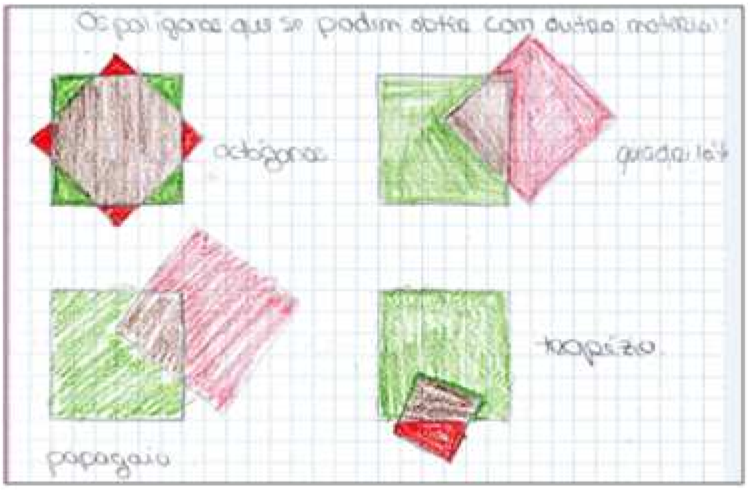


Figura 5.64. Registos da Marta dos polígonos obtidos por sobreposição, com o quadrado "novo"

Os restantes desenhos podiam ter sido conseguidos com o quadrado mais pequeno, mas como as alunas estavam a seguir os exemplos do enunciado da questão, utilizaram o quadrado maior para continuar a actividade. Verifica-se, por isso, que a atenção das alunas nesta tarefa está apenas centrada na obtenção dos polígonos por sobreposição, sem a preocupação de explicarem as razões para não conseguirem outros polígonos ou de não conseguirem, por exemplo, com o quadrado mais pequeno obter o octógono.

Estava-se a meio da aula quando a professora refere que "precisamos de discutir a primeira questão". Contudo, os alunos estavam embrenhados nos registos e não prestaram atenção ao pedido da professora. Para forçar a discussão, porque estavam atrasados de acordo com o plano de aula, a professora dirigiu-se para a frente da sala e iniciou o diálogo.

Professora B: Vamos lá. Há conclusões interessantes sobre triângulos. Quem quer começar? Agora vamos estar todos atentos. Força Rafael, vamos lá. O que nos vais dizer sobre triângulos? Força.

(O Rafael foi para o quadro interactivo tentar mostrar como fez, mas surge uma dificuldade técnica em rodar os quadrados, pelo que a professora opta por utilizar os quadrados de acetato que os alunos têm na sua mesa).

Rafael: Tenho um triângulo isósceles.

Professora B: Triângulo isósceles, porquê?

Rafael: Tem dois lados iguais.

Professora B: Isso é quanto aos lados. E quanto aos ângulos?

Rafael: Rectângulo.

Professora B: Porquê?

Rafael: O ângulo recto é formado pelos lados do quadrado.

A professora não solicitou que o Rafael justificasse a igualdade dos lados, como aconteceu com os ângulos, porque uma das diagonais do quadrado sobreposto coincidia com o lado do quadrado que estava debaixo.

Na continuidade desta discussão, a professora salientou que o Pedro e a Salomé tinham chegado a uma conclusão interessante e pediu-lhes para partilharem com a turma.

Pedro: Não se pode obter triângulos equiláteros, porque só se pode obter triângulos rectângulos.

Professora B: E porque é que não pode haver equiláteros?

Pedro: Porque os triângulos equiláteros não podem ter ângulos rectos.

Professora B: Mas, porquê?

Pedro: Porque têm os lados todos iguais e os ângulos todos iguais. Têm de ser 60 graus.

A professora perguntou a toda a turma se estava tudo registado, referindo que se estava a sintetizar e a arrumar as ideias. A Maria e a Marta continuavam a efectuar os seus desenhos, pelo que não participaram nem prestaram atenção à discussão.

O momento de discussão prosseguia, com a professora a questionar: "Se continuarmos nesta ordem de ideias, com as coisas arrumadas na nossa cabecinha, vamos para qual?". Os alunos responderam "para os quadriláteros". No entanto, foram mostrando um octógono, um pentágono, um hexágono, etc. Nesta altura, a professora referiu que "estavam a fugir aos quadriláteros" e o Ricardo foi ao quadro mostrar um quadrilátero.

Professora B: Muito bem, agora o Ricardo e a seguir o Pedro. E estamos a fugir aos quadriláteros.

Ricardo: É um trapézio.

Professora B: Porque é que é um trapézio?

Ricardo: Tem dois lados opostos paralelos.

Professora B: Porque é que são paralelos esses lados?

Ricardo: Porque são os lados opostos do quadrado.

Professora B: Muito bem. Vamos continuar nos quadriláteros.

Outro aluno, o Paulo, foi mostrar o papagaio, porém a professora, nesta altura, observou que os alunos estavam a ficar desatentos, salientando que "acho que estão a ficar um bocadinho saturados". Por esta razão e pela preocupação com o tempo (tinha passado uma hora e cinco minutos), uma vez que queria ainda discutir a questão 2 que envolvia uma demonstração, solicitou que os alunos fossem imediatamente para a questão seguinte, após a apresentação de mais dois polígonos.

Tal como tinha acontecido no diálogo anterior, a Maria e a Marta continuaram a não participar na discussão da questão 1. Pelo facto de não terem prestado atenção, não começaram a questão 2, prosseguindo com os registos. Neste período, as alunas estavam desconcentradas, a fazer os desenhos na folha de uma forma automatizada, sem se preocuparem em escrever as conclusões e os argumentos apresentados para o facto de não ser possível construir outros polígonos. Por exemplo, chegaram ao trapézio, mas não distinguiram que trapézio era possível obter, nem anotaram a conclusão do Ricardo, como a professora tinha solicitado (ver Figura 5.64).

Assim que terminaram os registos, começaram a ler a questão 2 (ver Anexo I), pegaram nos quadrados e manipularam-nos, mas como as alunas já estavam pouco atentas e algo dispersas, não conseguiam resolver este problema, tendo dificuldade em encontrar a relação entre as áreas referidas no enunciado. Neste momento, a professora B informou que quem tivesse terminado a questão 2, deveria passar para a questão 3 (ver Anexo I). Assim, as alunas decidiram passar para a questão 3, desistindo de resolver a questão 2.

Uma vez que as alunas já tinham realizado situações idênticas, não foi difícil estabelecerem uma estratégia para encontrar as amplitudes dos ângulos solicitados. A Marta observou o desenho e escreveu as amplitudes dos ângulos conhecidos, nomeadamente dos ângulos relativos aos quadrados. Seguidamente, utilizaram as propriedades: (i) amplitudes de ângulos verticalmente opostos são iguais (referem que as amplitudes de ângulos de ângulos de lados paralelos são iguais); (ii) soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º; (iii) soma dos ângulos interno de um triângulo é 180º (ver Figura 5.65).

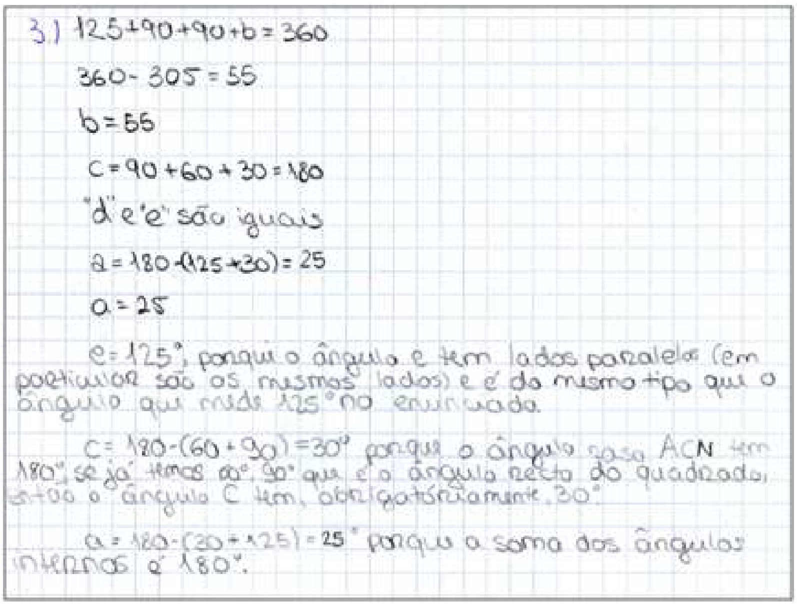

3.) 125+90+90+b=360
360-305=55
b=55
c=90+60+30=180
"d" e "e" são iguais
a=180-(125+30)=25
a=25
e=125°, porque o ângulo e tem lados paralelos (em particular são os mesmos lados) e é do mesmo tipo que o ângulo que mede 125° no enunciado.
c=180-(60+90)=30° porque o ângulo raso ACN tem 180°, se já temos 60°, 90° que é o ângulo recto do quadrado, então o ângulo C tem, obrigatoriamente, 30°.
a=180-(30+125)=25° porque a soma dos ângulos internos é 180°.

Figura 5.65. Resolução da Marta da questão 3

Relativamente à questão 2 (ver Anexo I), foi interessante verificar que houve outros grupos que procuravam encontrar uma relação entre a área sombreada e a área do quadrado menor, manipulando os quadrados de acordo com as indicações do enunciado. Durante este processo, os grupos conseguiram conjecturar que a área sombreada era um quarto em relação à área total do quadrado menor. Contudo, mesmo rodando várias vezes o quadrado menor sobreposto ao maior, a maioria dos grupos constatou apenas a conjectura para um caso particular em que os lados do quadrado menor ficavam paralelos. Quando rodavam não conseguiam justificar porque é que essa relação se mantinha.

Houve dois grupos que conseguiram demonstrar a relação entre a área sombreada e a área do quadrado menor, para qualquer posição que este tivesse relativamente ao maior.

O Ricardo, quando rodou o quadrado menor, apercebeu-se de que o que "se perde" de um lado "ganha-se" no outro e desenhou dois triângulos (ver Figura 5.66). Chamou a professora, para validar a sua ideia.

Ricardo: Se rodarmos continua com a mesma área.

Professora B: Mas, porquê?

Ricardo: Dá sempre a mesma área.

Professora B: Qual é a relação?

Ricardo: É um quarto. O que aumenta aqui, diminui aqui. O que se perde aqui é o que se ganha aqui.

Professora B: Convence-me. Porque desenhaste os triângulos?

Ricardo: Para saber a área. Os dois triângulos são iguais. Este lado vai andar o mesmo. Os ângulos são congruentes.

Professora B: E como chegas à conclusão que os dois triângulos são congruentes? Qual a matéria que vão utilizar para justificar?

Ricardo: A congruência. LAL

Quando o Ricardo tentava mostrar este critério, constatou que para os lados OD e OB não tinha evidências para afirmar que eram iguais. Hesitou um pouco, olhou para a figura que tinha desenhado e passado algum tempo, voltou a chamar a professora para referir que era o caso ALA (ver Figura 5.66).

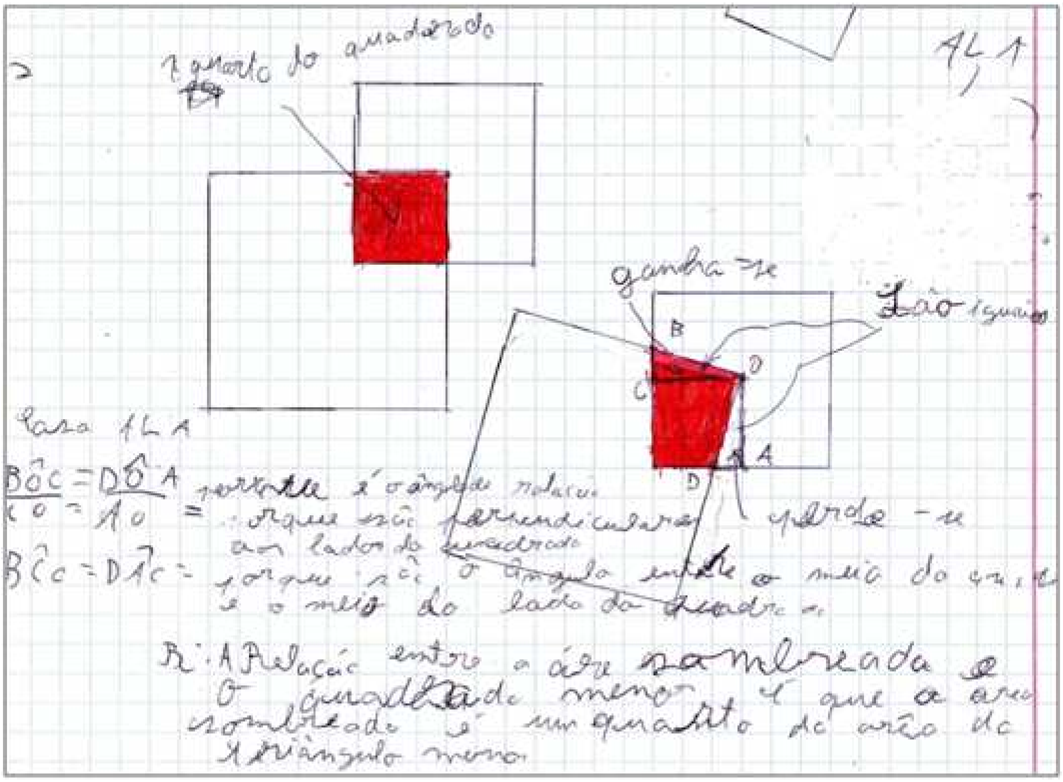


Figura 5.66. Demonstração da conjectura da questão 2, elaborada pelo Ricardo

A aula estava a terminar, mas a professora ainda conseguiu dialogar sobre a conjectura com os alunos, no caso particular referido anteriormente, deixando para a aula seguinte a discussão da demonstração e a questão 3.

Em síntese, mais uma vez, assim que a tarefa foi distribuída, os alunos leram-na autonomamente e começaram a manipular os quadrados de forma a obterem os diferentes polígonos por sobreposição de um dos quadrados. O ambiente, à semelhança do que aconteceu em outras aulas, estava tranquilo e era visível o empenho e o entusiasmo dos alunos na actividade matemática. Em particular, a Maria e a Marta, também de uma forma determinada, iniciaram a actividade, procurando os polígonos que estavam no enunciado da questão 1. Assim que obtiveram o primeiro, ficaram sem saber bem o que fazer, pelo que houve uma certa hesitação, até que decidiram começar a organizar os seus registos e os desenhos das figuras que traduziam a sobreposição dos quadrados. Acontece que com estes registos, que quiseram fazer com algum rigor, perderam muito tempo e o foco da tarefa. Ou seja, limitaram-se a procurar os polígonos que estavam no enunciado e a desenhar as figuras, sem ter em consideração a necessidade de justificar e encontrar argumentos para o facto de não ser possível obter por sobreposição alguns polígonos. Para estas alunas, o propósito desta tarefa foi apenas encontrar os polígonos e desenhar as figuras. Também o facto de não terem estado atentas às discussões que decorreram no âmbito desta questão, ajudou a que não alterassem a sua estratégia de resolução desta tarefa. No entanto, houve outros grupos que para além dos registos, não tão rigorosos, tiraram algumas conclusões que envolveram a utilização de um vocabulário próprio e o conhecimento de algumas propriedades dos polígamos, como se pôde testemunhar através dos diálogos.

Esta estratégia de resolução das alunas conduziu a uma saturação com o trabalho que estavam a desenvolver, o que provocou desatenção, falta de empenho, vontade e concentração para interpretarem e compreenderem a questão 2 que envolvia uma demonstração. Depois de a lerem, resolveram deixá-la para mais tarde e saltaram para a questão três, idêntica a outras que já tinham resolvido em anteriores aulas. Resolveram-na sem dificuldade, mobilizando os conhecimentos e as propriedades dos polígonos necessárias para a concretização da tarefa.

Sobre a questão 2, a maioria dos grupos conseguiu conjecturar que a área sombreada era um quarto da área do quadrado menor para um caso concreto. Contudo, houve alguns grupos que tentaram demonstrar esta conjectura para as diversas posições do quadrado, tendo em consideração as condições enunciadas, rodando-o e procurando encontrar uma justificação. Foi neste processo que os alunos se aperceberam que os ângulos junto do quadrado menor, que obtinham por rotação, eram congruentes. Esta percepção ajudou-os a fixar "os olhos" neste movimento, conseguindo visualizar dois triângulos. Depois recorrendo à congruência de triângulos conseguiram demonstrar a relação pretendida.

Para terminar, importa referir que um dos objectivos da questão 1, nomeadamente que os alunos fossem capazes de utilizar as propriedades dos quadriláteros na justificação das propriedades de figuras, não foi totalmente conseguido. Mais precisamente, uma boa parte dos alunos não foi capaz de justificar porque não se pode obter um dado polígono, a partir da manipulação dos quadrados. Pode-se interpretar o facto, considerando que os alunos não têm ainda uma compreensão clara das propriedades, por exemplo, dos quadriláteros. Porém, pode-se salientar uma outra hipótese que está relacionada com a tarefa e com o facto de não ter havido uma maior análise desta questão em concreto.

Trata-se de uma questão que tem um claro cariz investigativo. Os alunos estavam habituados a tarefas exploratórias, mas até a este momento não tinham tido a oportunidade de realizar uma actividade marcadamente investigativa. Por isso, poderia ter sido importante uma apresentação mais detalhada da tarefa, realçando o seu objectivo e, possivelmente, levando os alunos a pensar numa abordagem à tarefa. Note-se que os alunos estavam a manipular os quadrados e a obter os polígonos de forma aleatória, sem uma estratégia. Quando a professora B se apercebeu desta situação, fez questão de interromper o trabalho dos alunos e, por meio de questões, chamou-lhes a atenção para que primeiro procurassem todos os triângulos e quadriláteros que conheciam, bem como outros polígonos com mais lados. Foi a seguir a esta observação, que muitos grupos conseguiram encaminhar e reorganizar a sua estratégia. Deste modo, começaram a organizar as ideias para justificarem a impossibilidade de se obter alguns polígonos.

No que respeita à tarefa, dado que não houve uma introdução sobre o que se pretendia, é de questionar se uma formulação ligeiramente diferente poderia ter ajudado mais os alunos. Esta interrogação emerge da atitude da Maria e da Marta face à estratégia escolhida para a sua resolução. As alunas optaram por procurar apenas os polígonos que estavam no enunciado. Porquê? Possivelmente, as alunas interpretaram que eram apenas aqueles, dado que nada sugeria pensar noutros. Um outro aspecto está relacionado com a ordem pala qual que se colocaram os exemplos dos polígonos. O enunciado enumera-os de uma forma aleatória, também sem critério. Provavelmente, foi propositado, mas se se optou por evidenciar exemplos de polígonos, então talvez a existência de um critério, do menor para o maior número de lados, por exemplo, tivesse contribuído para uma melhor interpretação da questão por parte dos alunos.

Capítulo VI

Resultados e Conclusões

Face aos resultados obtidos nesta investigação, considero que existem evidências de que o processo de aprendizagem dos alunos no tópico específico Triângulos e Quadriláteros, quando apoiados numa sequência organizada de tarefas e recorrendo ao Geogebra, contribui para o desenvolvimento da sua capacidade de raciocínio geométrico. Vou suportar esta afirmação através da apresentação dos resultados e conclusões que retirei dos dados analisados, demonstrando de uma forma descritiva e interpretativa, a melhoria da capacidade de raciocínio geométrico dos alunos. As conclusões estão ainda baseadas na perspectiva desenvolvida no quadro teórico conceptual, sobre o contributo do Geogebra no desenvolvimento da actividade matemática e na compreensão das propriedades e relações de figuras geométricas, bem como na importância da utilização de uma sequência organizada de tarefas na compreensão das ideias matemáticas e no desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Termino com uma reflexão sobre a investigação decorrente do estudo e sobre o que significou para mim a sua realização enquanto professora.

6.1 O Geogebra no desenvolvimento da actividade matemática e na compreensão das propriedades e relações de figuras geométricas

Vou organizar e expor as conclusões recorrendo à filtragem das observações realizadas no estudo através de três lentes de diferentes graduações que representam três olhares sobre a actividade desenvolvida na sala de aula. A primeira lente permite uma visão mais ampla da sala de aula e salienta os aspectos mais relevantes que contribuíram para um ambiente de trabalho harmonioso e tranquilo, importante para explorarem empenhadamente as temáticas em estudo. Aplico de seguida uma lente mais apertada, que me permite focar a interacção entre os alunos, entre os alunos e as professoras e a dinâmica de sala de aula. Por último, coloco uma lente que me permite um olhar microscópico sobre a actividade matemática dos alunos com o Geogebra.

Olhando de uma forma abrangente para a sala de aula, concluo que a organização preliminar e a disponibilização de meios adequados e devidamente configurados para a realização das tarefas foram factores críticos para o sucesso. A existência de portáteis na aula de Matemática, configurados, ligados e preparados, um por mesa, foi determinante para que as aulas começassem num ambiente tranquilo, com o mesmo ritmo de uma aula sem computadores, em que os alunos entram e retiram o seu material, aguardando que a professora distribua a tarefa. Este ambiente é diverso daquele que se verifica, a maioria das vezes, quando se deslocam os alunos para uma sala de computadores ou Laboratório. Nestes casos, o início das aulas é pautado por uma certa instabilidade, porque os alunos não sabem onde se sentar e conversam enquanto aguardam pela intervenção da professora. Este factor de instabilidade que demora, por vezes, algum tempo a normalizar, é inibidor de que se realizem mais actividades com recurso ao computador pelo tempo que se perde na fase inicial da aula até que se estabeleça um ambiente que permita o desenvolvimento da actividade matemática.

O facto de se recorrer a portáteis e levá-los para o ambiente em que os alunos trabalham normalmente, ajudou a que não alterassem os seus hábitos e a sua forma de trabalho na aula de matemática, pelo que o seu comportamento foi exactamente o mesmo no início da aula, independentemente de terem computadores em cima da mesa.

Mesmo estando os alunos habituados a trabalhar a pares, a disposição de sala com um portátil por mesa, reforçou esta possibilidade. Revelou-se um aspecto positivo e importante para a dinâmica e a interacção entre os pares de alunos na concretização das tarefas. Permitiu-lhes que trabalhassem ao seu ritmo e, assim, adquirissem uma maior confiança em si próprios. Como disse a Professora A "todos queriam trabalhar, fazer todas as construções e estavam a consegui-lo fazer", mesmo os alunos com maiores dificuldades e pior desempenho em Matemática. Esta forma de trabalho, a pares, possibilitou também que os alunos discutissem entre eles as situações e os obstáculos que iam enfrentando durante a actividade e só recorreram às professoras quando não foram capazes de ultrapassá-los. Revelaram, por isso, uma maior autonomia, ao procurarem identificar por si próprios as questões e os problemas que se levantaram durante as construções no Geogebra, resolvendo-os sozinhos. Mostraram também enorme autonomia a explorar as propriedades e regularidades, a formular conjecturas e a fazer as respectivas verificações, claramente um resultado da capacidade acrescida de interacção e entreajuda proporcionada pelo trabalho em pares que era sustentado por um ambiente adequado à tarefa.

Aplicando a lente para focar as observações sobre as interacções entre os alunos, entre os alunos e o Geogebra e entre os alunos e as professoras, verifico que os alunos durante a actividade com o Geogebra discutiram as ideias, apontando para o ecrã ou verbalizando, expressando quer as dificuldades quer as soluções. Estas discussões foram bastante significativas para os alunos na apropriação das ideias que estavam a explorar. Foi visível que estavam convictos das conclusões a que chegaram nas diferentes tarefas. Isso é confirmado posteriormente na resolução dos problemas, nomeadamente nos casos dos problemas com triângulos e de congruência de triângulos, quando utilizaram as diferentes propriedades dos triângulos para resolverem as situações propostas.

Um outro ponto relevante foi a rapidez na apropriação do funcionamento do Geogebra. Os alunos, ao longo das aulas, demonstraram dominar a utilização deste *software*. Como refere a Professora B: "Têm [os alunos] uma autonomia relativamente ao Geogebra fantástica". Isto é evidenciado nos episódios, em várias situações, durante a sua utilização. Os alunos, quando não conseguiram obter os resultados ou construções desejadas, pensaram em caminhos alternativos diferentes do que inicialmente tinham definido, de modo a conseguirem chegar ao resultado pretendido. Foi o que aconteceu, por exemplo, no episódio dois com o Geogebra, na Congruência de triângulos, quando a Joana e a Matilde iniciaram a alínea três da tarefa quatro (ver Anexo I). Começaram a fazer a construção do triângulo seguindo um procedimento, mas depois constataram que não era verificada uma das condições pelo que decidiram seguir um outro caminho para obterem a construção que satisfizesse todas as condições.

Essa autonomia dos alunos em relação ao Geogebra ou a facilidade com que o utilizam está relacionada, com o facto de, em nenhum momento, ter sido distribuído um guião com instruções e indicações para o seu uso ou de como poderiam efectuar as construções. As professoras, no início de cada aula, durante cinco minutos, explicavam alguns comandos do Geogebra que eram importantes para a concretização da tarefa e, de seguida, cada par de alunos efectuava as suas construções de acordo com as condições dadas. Interagindo com o *software*, os alunos iam aplicando as suas ideias de modo a chegarem ao resultado. Este aspecto é também abordado por Junqueira (1995), que salienta o efeito contraproducente que a utilização de um guião pode trazer no desenvolvimento de uma tarefa, quando refere que o recurso sistemático ao guião pelos alunos, os inibiu de procurarem fazer as construções de forma autónoma. Salienta que os guiões conduziram a um certo "adormecimento" da capacidade de reflexão dos alunos e, por isso, à dificuldade de muitos em lidar com situações que exigiam outros processos, porque funcionavam de uma forma automática, "sem que os alunos tivessem muito explícitas as propriedades e relações geométricas que lhes estavam subjacentes" (p. 224). O que aparentemente parecia dar confiança aos alunos para validarem as suas construções, trouxe algumas dificuldades porque não chegaram a compreender as relações envolvidas no processo de construção. Esta lacuna impediu-os de ultrapassar os problemas encontrados na sua actividade e não conseguiram chegar ao resultado esperado. Neste estudo, percebi que a inexistência de um guião possibilitou o aparecimento de construções diferentes, fruto de processos autónomos e criativos, o que enriqueceu posteriormente o diálogo e a discussão sobre essas construções.

Este estudo revela também que é fundamental circular junto dos alunos e recolher informação sobre as construções ou resoluções que estão a ser realizadas pelos mesmos. É necessário discuti-las à medida que vão surgindo, recorrendo ao questionamento, mesmo que os alunos não solicitem a presença do professor. No caso de não se conseguir observar todas as resoluções dos alunos, é importante que estas sejam recolhidas para as analisar e, posteriormente, promover a necessária discussão com os alunos.

Destaco este aspecto porque foram observadas situações em que os alunos encontraram um processo de construção das figuras que não era o adequado, mas mostraram-se confiantes do resultado que obtiveram e, por isso, não sentiram a necessidade de verificar se a construção não se desmanchava quando era arrastada, nem de chamar o professor para a validar. Ficaram satisfeitos com o resultado, não só pela aparência visual, mas também por terem obtido a resposta à questão.

O episódio dois dos Critérios de congruência de triângulos, com o Geogebra, no cenário da turma B, mostra uma situação deste tipo quando as alunas Maria e Marta constroem os triângulos que são pedidos na tarefa quatro (ver Anexo I). As alunas construíram os triângulos a partir dos segmentos que desenharam com os comprimentos dados e depois arrastaram-nos até obterem as restantes condições, como a amplitude de alguns ângulos internos do triângulo. No entanto, se arrastassem um dos vértices do triângulo, teriam verificado que este se desmanchava. Ainda assim, não sentiram essa necessidade, dado que conseguiram obter a resposta que pretendiam. Se uma das professoras tivesse pedido para observar o protocolo de construção do Geogebra, ou se após a aula o tivesse analisado, teria verificado que a construção não estava correcta e poderia ter discutido com as alunas essa construção. Aliás, a Professora B no episódio da construção dos rectângulo e do paralelogramo da tarefa sete (ver Anexo I) pediu que as alunas mostrassem o protocolo e, questionando-as, percebeu que, neste caso, os procedimentos que as alunas seguiram estavam correctos e as alunas, por sua vez, aprofundaram o seu conhecimento relativamente às propriedades dos paralelogramos e dos rectângulos.

Este momento possibilitou que as alunas explicitassem aspectos importantes dessas propriedades. Por exemplo, as alunas sabem que os rectângulos têm ângulos rectos, porém a construção não foi feita com base nesta propriedade, mas a partir da perpendicularidade dos lados. Será que ligaram o conceito de ângulo recto e perpendicularidade para fazerem a construção? Não há uma evidência explícita para responder a esta questão. Contudo, não é isso que importa mais porque quero realçar que este tipo de discussão, entre as alunas e a professora, pode não ter conduzido a nenhum novo conhecimento mas, como salienta Battista (2007), o facto de terem de aplicar conceitos anteriores em novas situações requer a sua interiorização, tornando-os mais poderosos através do estabelecimento destas conexões e, assim, enriquecendo e aprofundando o conhecimento.

Conclui-se portanto que é fundamental a análise e posterior discussão das construções realizadas com os alunos para que estes consigam efectuar construções que cumpram os requisitos definidos e, de forma mais relevante, contribuindo para o estabelecimento de relações entre propriedades e para o desenvolvimento do conhecimento geométrico.

Para terminar este olhar sobre as interacções, constato que é fundamental, no final de uma tarefa que envolva a utilização do Geogebra com o objectivo de se estabelecer propriedades e relações relativas a figuras geométricas, promover momentos que devem incluir a apresentação, a discussão e a reflexão dos resultados e a respectiva síntese com as conclusões, de modo a ajudar os alunos a organizarem, a interiorizarem e a apropriarem-se dos conceitos trabalhados.

Nos episódios um e dois com o Geogebra foi proporcionado esse momento que ajudou os alunos na clarificação e na apropriação das propriedades estudadas, como se pode constatar nos posteriores episódios um e dois relacionados com a resolução de problemas em que as alunas conseguem mobilizar os conhecimentos aprendidos e apropriados nas tarefas de exploração. O mesmo já não aconteceu no episódio três dos quadriláteros com o Geogebra. Neste caso, não houve esse momento final de discussão para se analisar a alínea dois da tarefa sete (ver Anexo I). Os alunos preencheram a tabela, identificaram algumas características, mas não houve uma reflexão e uma síntese sobre as características de cada um dos quadriláteros que o tornavam único, nem se estabeleceu uma hierarquia entre os quadriláteros, aspecto importante no estudo destas figuras geométricas. Assim, os alunos não conseguiram apropriar-se nem compreender as suas propriedades, limitando-se apenas a conhecer algumas características dos quadriláteros. Esta constatação é corroborada no episódio sobre a tarefa *Problemas com quadriláteros*, quando os alunos, em particular as alunas observadas, não conseguiram estabelecer uma estratégia adequada de resolução da alínea 1 (ver Anexo I), porque revelaram dificuldade em mobilizar as propriedades dos quadriláteros. O mesmo não aconteceu com as restantes alíneas desta tarefa. Os alunos conseguiram identificar os conceitos necessários para resolverem os problemas que estavam relacionados com os critérios de congruência de triângulos e a soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero.

Por último vou colocar a lente que me permite um olhar sobre a actividade que os alunos realizam com o Geogebra. No que respeita à Geometria, este software pode ser trabalhado de duas maneiras. Os alunos constroem os desenhos e desenvolvem a actividade matemática inerente a essas construções ou o professor disponibiliza desenhos e os alunos exploram o seu comportamento quando os manipulam para fazerem uma análise de propriedades e das relações geométricas. Neste estudo, os alunos trabalharam estas duas vertentes com o Geogebra, de acordo com os objectivos das tarefas e, independentemente da estratégia de utilização, o Geogebra provou ser uma ferramenta crucial de apoio na compreensão das propriedades e relações de figuras geométricas.

Com base no quadro teórico, considerando os três episódios que envolveram a utilização do Geogebra, posso aferir que o *feedback* visual que os alunos obtiveram enquanto interagiram com o programa foi fundamental para que conseguissem chegar, às construções pretendidas, fazendo e refazendo os desenhos. Além disso, à medida que foram utilizando esta ferramenta, os alunos conseguiram obter construções mais resistentes e utilizar, de uma forma mais adequada, as propriedades geométricas para efectuarem essas construções e, deste modo, criar construções mais económicas, no sentido de utilizarem menos procedimentos.

Como se pode constatar nos episódios dedicados à utilização do Geogebra, existiram diversos momentos em que estas situações ocorreram. No episódio dois, dos critérios de congruência de triângulos, por exemplo, a Matilde e a Joana, da turma A, na construção dos triângulos da alínea três, desenharam um segmento de recta e um ângulo de acordo com as condições dadas e, ao marcarem, seguidamente, a circunferência de centro em A e raio oito, hesitaram e pararam, porque repararam que, pelo *feedback* do Geogebra, um dos segmentos do triângulo não verificava a condição pedida. Fizeram e refizeram, até que a Matilde, pela observação constante das tentativas e pela análise dos erros que não permitiam a construção correcta, repara que estavam a proceder de forma incorrecta pois em vez de marcarem a circunferência em A tinham de a marcar com centro em C, para que as condições se verificassem.

As observações realizadas neste estudo fornecem dados que permitem evidenciar que o *feedback* do Geogebra contribuiu para que os alunos deixassem de fazer alguns procedimentos ou passos desnecessários, o que conduziu a construções mais "económicas". A Joana e a Matilde, por exemplo, no episódio dois, no primeiro triângulo que desenharam para obedecer à condição imposta de que um dos ângulos internos tinha de ter uma amplitude de 60º, recorreram à rotação do ponto de um dos extremos do segmento de recta de um dos lados do triângulo. Quando construíram o segundo triângulo, realizaram o mesmo procedimento e também recorreram à opção da marcação do ângulo interno de 60º. Verificaram pelos seus passos e pelo *feedback* que a rotação, neste caso, era dispensável, pelo que na alínea dois da mesma tarefa, apenas utilizaram o procedimento da marcação do ângulo. Ocorreram outras situações em que não foi apenas a diminuição de um procedimento, mas a utilização do primeiro triângulo construído para desenharem o segundo triângulo, ou seja, a não construção de dois triângulos separados, que diminuiu bastante o número de passos na concretização da construção. Este processo aconteceu nas duas turmas em diversos grupos, como se pode verificar na descrição do episódio.

Portanto, posso concluir, como é evidenciado também por outros estudos, que a natureza dinâmica do Geogebra, dando um *feedback* imediato aos alunos que resulta da interpretação que faz das indicações dadas, permite que estes percebam o erro, reflictam e, interagindo constantemente com o *software*, refaçam a sua estratégia e, assim, construam um conhecimento sólido no processo de atingir o resultado pretendido. Por conseguinte, esta acção proporciona uma melhor apropriação das propriedades e relações geométricas e, consequentemente, permite que os alunos mobilizem e utilizem esse conhecimento geométrico em diversos contextos.

Um outro aspecto que contribui, de uma forma significativa, para uma melhor apropriação das propriedades e relações geométricas em estudo, é a possibilidade de os alunos puderem arrastar e medir os desenhos, uma funcionalidade inerente ao *software* utilizado.

Em todos os episódios podemos evidenciar situações que corroboram a afirmação do parágrafo anterior, mas vou focar apenas três situações que me permitem ir ao encontro do referenciado no quadro teórico e que é sustentado por Gonzaléz e Herbst (2009). No episódio três "Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos", com o Geogebra, os alunos tinham de analisar se os quadriláteros verificavam, ou não, algumas características. A partir de um ficheiro disponibilizado com os desenhos dos diferentes quadriláteros, os alunos arrastaram-nos para validarem a existência de determinadas características, como por exemplo se os lados opostos dos quadriláteros são paralelos, se são congruentes, se as diagonais se bissectam ou se os ângulos opostos são congruentes. Este arrastamento permite que os alunos observem uma infinidade de quadriláteros e, deste modo, permite-lhes que validem visualmente e intuitivamente as diferentes características, dado que o arrastamento mantém intactas as relações geométricas que foram utilizadas na sua construção. Com este movimento, os alunos conseguiram validar, ou não, algumas das características dos quadriláteros e, desse, modo ter um conhecimento mais profundo das propriedades de cada um desses quadriláteros.

Um outro aspecto importante foi a possibilidade de os alunos terem tido acesso às medidas dos lados e amplitudes dos ângulos dos quadriláteros, dado que com estes valores, conseguiram verificar a congruência dos lados e dos ângulos dos quadriláteros.

A combinação do arrastar e do medir do Geogebra foi muito importante para que os alunos conseguissem explorar as propriedades dos quadriláteros. Mas esta acção conjunta foi ainda mais poderosa no episódio "Ângulos internos e externos", quando foi solicitado que os alunos estabelecessem conjecturas sobre a soma dos ângulos internos do triângulo e de outros polígonos e a soma dos ângulos externos. Como se pode constatar no episódio, esta combinação foi determinante porque permitiu que os alunos investigassem as regularidades da soma dos ângulos internos e dos ângulos externos de um polígono e chegassem às respectivas conjecturas.

Portanto, este estudo mostra evidências do que salientei no quadro teórico, referenciando Gonzaléz e Herbst (2009) sobre o contributo importante do arrastar e do medir do Geogebra. Estas características, em conjunto, dão a possibilidade de os alunos utilizarem os valores numéricos e reunirem esses dados, à medida que vão arrastando, aspectos que os ajudam a estabelecer as relações dos objectos geométricos. Acrescento, ainda, que as observações realizadas pelos alunos sobre os polígonos, através do arrastamento com as medidas, permitiu-lhes aprofundar a sua investigação ao conseguirem demonstrar as respectivas conclusões e conjecturas. Não ficaram, assim, apenas pela percepção visual que os levaram a chegar às mesmas.

Em síntese, este estudo evidencia que estas características do Geogebra contribuem para uma compreensão mais ampla das propriedades e relações das figuras geométricas, porque os alunos podem comprovar essas propriedades e relações geométricas no domínio do visual e geométrico e, também, no domínio das relações numéricas. Por seu turno, este conhecimento alargado capacita os alunos para justificar e produzir demonstrações de algumas das conjecturas, como aconteceu com os ângulos internos e externos de um polígono, em particular do triângulo. Além disso, posso concluir que o significado de vários conceitos geométricos, como o de congruência de triângulos, por exemplo, e à luz da teoria semiótica de Peirce, foi sendo construído com base numa maior variedade de interpretantes, isto é, de formas diversas de exprimir o que isso significa, gerando sucessivamente novos interpretantes que se foram encadeando para dar significado ao conceito de congruência e aos casos de congruência que foram estudados. Em certos momentos, notou-se nas alunas observadas uma dissonância entre o uso da notação e a ideia que pretendiam traduzir mas foi visível que, na maior parte dos casos, as alunas interpretavam correctamente, mesmo que a simbologia usada não fosse sempre perfeita. É importante sublinhar que a aprendizagem deste e de outros tópicos de Geometria envolve uma linguagem, uma simbologia e uma notação próprias, a que se junta ainda a própria linguagem do software. A apropriação dessa linguagem faz-se progressivamente e requer uma preocupação com o seu uso sistemático. Mas o significado é o grande motor que permite avançar na aquisição dessa linguagem. É no significado que está o cerne da compreensão e os dados obtidos permitem reconhecer que o trabalho realizado produziu resultados muito consistentes ao nível da compreensão dos conceitos e das propriedades geométricas trabalhados.

Um outro aspecto que emerge da utilização do Geogebra é a sua influência no desenvolvimento actividade matemática dos alunos neste tópico matemático. Na demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo, os alunos recorreram à representação geométrica e às propriedades e relações geométricas. A representação geométrica que a Joana utilizou na demonstração foi consequência da observação dos comportamentos e das representações dos objectos matemáticos durante a manipulação dos triângulos no Geogebra, verificando que seria mais fácil demonstrar geometricamente a conjectura.

No entanto, na demonstração das somas dos ângulos externos de um triângulo, mesmo que a tarefa em si permita esse caminho, os alunos recorreram às relações numéricas. Para eles, neste caso, foi mais fácil demonstrarem algebricamente do que a partir das propriedades e relações geométricas, dada a forma como as representações dos desenhos estavam disponíveis na folha do Geogebra. De novo, podemos assinalar a importância de ter disponíveis diferentes interpretantes para a mesma ideia geométrica e a sua capacidade de abrirem vários caminhos para a construção dos significados em Geometria.

De acordo com o quadro teórico deste estudo e outra literatura, o desenho, que está na folha gráfica do Geogebra e que resulta de uma sequência de primitivas geométricas disponibilizadas neste *software* e escolhidas pelos alunos, é um tipo de mediador (Laborde, 1993) para as figuras geométricas. Quando os alunos arrastam um elemento desse desenho, o seu comportamento é determinado segundo a geometria da sua construção e não de acordo com o que o aluno pretende. Esta interacção entre os alunos e os desenhos dinâmicos no AGD é diferente da que têm com os desenhos estáticos do papel e lápis, em que controlam o seu resultado, pois são eles que agem sobre o desenho e podem fazer as alterações que quiserem, mesmo distorcê-los, de modo a obterem o resultado e satisfazer as suas expectativas.

A esta interacção entre os alunos e o AGD, Moreno-Armella, Hegdus e Kaput (2008) chamam co-acção. A introdução desta ideia de co-acção significa que os alunos guiam o AGD através de indicações e, simultaneamente, são guiados pelo AGD a partir do *feedback* e das informações, quando este executa os procedimentos resultantes das acções dos primeiros. Os alunos arrastam um desenho, por exemplo, o vértice de um quadrilátero, o AGD re-actua sobre esta acção, produzindo um novo quadrilátero. Esta re-acção pode estimular uma nova acção dos alunos. Portanto, os alunos e o AGD re-actuam entre si (Moreno-Armella e Hegdus, 2009).

Esta co-acção não se fica apenas pela sucessão de interacções entre os alunos e o AGD. Estas acções resultam da natureza executável das representações externas (Moreno-Armella e Hegdus, 2009), isto é, das figuras geométricas. Para além da dinâmica dessas representações, resultantes dos processos de interacção, há uma outra qualidade que é a diversidade de representações para o mesmo objecto geométrico. Como consequência, o conhecimento matemático que emerge deste ambiente de geometria dinâmica é diferente daquele que emerge do ambiente de papel e lápis (Moreno-Armella e Hegdus, 2009). Essas representações influenciam o modo como os alunos desenvolvem a compreensão dos conceitos matemáticos e, por isso, transformam a sua interacção com a Matemática. Os alunos usam as representações que melhor se adequam, na sua perspectiva, para a demonstração ou justificação das suas conjecturas ou conclusões. Esta evidência também se verificou nos estudos desenvolvidos por Nunes (2010) e Canário (2011), em tópicos de Geometria e de Álgebra, respectivamente. Por outras palavras, as funcionalidades do software conferem ao aluno a liberdade de optar por abordagens mais “geométricas”, mais “numéricas” ou mais “algébricas”, conforme se detém em aspectos da construção (relações e condições dos elementos da figura) ou em aspectos dos valores de medições ou em aspectos da representação algébrica por meio de equações cartesianas.

Para terminar, esta interacção dos alunos com as diferentes representações do mesmo objecto no Geogebra, bem como o dinamismo dos desenhos, ajudou-os na compreensão e na resolução de problemas, como se pode constatar pelos episódios relativos à resolução de problemas. O dinamismo dos desenhos, enquanto os alunos os manipulam, obriga-os a processar internamente diversas imagens mentais, num espaço de tempo pequeno, de forma a interiorizarem a informação e criarem outras imagens mentais que ajudam o aluno a re-actuar com o *software* com vista a alcançar o resultado pretendido. Este processo contribui para o desenvolvimento da capacidade de visualização e do raciocínio espacial. A forma como os alunos abordaram e interpretaram os problemas revela que essa capacidade de visualização facilitou a interpretação dos desenhos dos problemas e a identificação das relações geométricas que faziam parte da solução.

6.2 Contributo das tarefas para a compreensão das ideias matemáticas e para o desenvolvimento do raciocínio geométrico

Neste ponto, à semelhança do que fiz anteriormente, vou recorrer a duas perspectivas distintas para apresentar as principais conclusões, em função das questões e objectivos do estudo. A primeira perspectiva foca-se sobre a sequência organizada de tarefas, que decorre da gestão em sala de aula e da actividade matemática dos alunos durante a realização das mesmas. A segunda foca a actividade dos alunos, a partir da exploração das tarefas e da sua discussão, em que evidencio, com base no quadro teórico conceptual, o modo como os alunos interpretam, realizam as tarefas e discutem os seus resultados e, consequentemente, como é que essa actividade matemática contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e para a compreensão das propriedades e relações das figuras geométricas.

A sequência organizada de tarefas, como referi no capítulo da metodologia, foi elaborada tendo em vista ajudar os alunos a atingir os objectivos preconizados no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) e levando em consideração as orientações metodológicas presentes no mesmo documento. A estratégia de ensino e de aprendizagem implementada, de natureza exploratória, centrada na actividade dos alunos, em que estes não se limitaram a apresentar os resultados, mas tiveram sempre de os explicar e justificar, como se constata em todos os episódios, revelou-se essencial para que os alunos se apropriassem, com compreensão, do tópico em estudo. Esta conclusão será evidenciada nos parágrafos seguintes.

A organização das tarefas, pela sua estruturação e coerência, em que é proposta uma tarefa de natureza exploratória para abordar cada um dos tópicos, seguida de uma outra, envolvendo a resolução de problemas, associada à dinâmica de sala de aula, foi determinante para o empenho e envolvimento dos alunos.

Ficou evidente que o ambiente de aprendizagem centrado nos alunos e a existência de momentos de trabalho autónomo, fê-los responsabilizarem-se pelo seu acto de aprender. O ambiente de trabalho, tanto nas aulas em que recorreram à tecnologia como nas de resolução de problemas, foi sempre pautado pela vontade de aprender e pelo entusiasmo na actividade que estavam a realizar, manifestando empenho, envolvimento e urgência em mostrar que estavam a conseguir resolver as situações propostas.

Os dados mostram que esta atitude está relacionada com as tarefas propostas, que se revelaram significativas para os alunos. Estes demonstraram interesse pela sua aprendizagem durante a actividade matemática desenvolvida. Percebeu-se que o envolvimento dos alunos se deveu às tarefas em si e à sua concretização na sala de aula e não apenas ao uso da tecnologia introduzida. Os alunos viram a tecnologia, neste caso o Geogebra, como uma ferramenta facilitadora que se tornou parte integrante da sua actividade. Reconheceram o seu valor porquanto os ajudou, através da experimentação, a descobrir as propriedades e as relações dos objectos geométricos, de um modo que não seria possível com ferramentas como o papel e o lápis. Este aspecto é referido explicitamente pela Matilde e pela Joana, na entrevista final, quando a Joana disse "é mais fácil [referindo-se ao Geogebra] do que estar ali com o lápis" e, um pouco mais à frente, reforçou com o comentário "não temos de estar a utilizar o compasso e o transferidor, é mais rápido e fácil e fica mais específico no computador". A aluna, com esta expressão, salienta que os desenhos, no Geogebra, ficam mais correctos e bem efectuados e com as medidas mais exactas. A mesma ideia é corroborada pela Matilde quando disse que "no computador é muito mais exacto". Uma outra vantagem revelada pelas alunas é o carácter dinâmico deste software.

Joana: Interagimos com o computador, nós podemos mexer na figura.

Investigadora: Mexer?! (...) Portanto, ficas só com uma figura quando trabalhas com o computador?

Matilde: Não, posso fazer várias... (quer dizer que quando arrasta obtém várias "figuras")

Repare-se que as alunas, como testemunhei na entrevista, gostam de trabalhar com computadores mas não encaram a tecnologia apenas como factor de motivação, consideram que é importante o contributo que traz para a realização das tarefas.

Esta percepção é significativa, porque revela que um factor importante reside na natureza das tarefas que se apresentam aos alunos. Abandonámos o paradigma de que a utilização da tecnologia motiva os alunos, que cria um bom ambiente de trabalho e ajuda no empenho dos alunos. A tecnologia, em função da sua ubiquidade e disseminação, é vista como um recurso para pensar e facilitar, a partir da experimentação, o desenvolvimento das tarefas e a compreensão das ideias matemáticas. Trazemos agora para primeiro plano as tarefas que se propõem aos alunos e a sua harmonia com as potencialidades oferecidas pela tecnologia. Essas tarefas têm, além disso, de ter em consideração os princípios do pensamento humano que descrevo no início do quadro teórico. Têm de ser concebidas de modo a que sejam os alunos a construir os significados dos conceitos matemáticos em estudo e que essa construção tenha por base os conhecimentos e o modo de pensar dos alunos. Este aspecto é evidenciado pelas alunas na entrevista. Por exemplo, a Maria da turma B disse: "gosto das tarefas, porque no início não sabemos e depois vamos fazendo e vamos descobrindo aquilo".

Porém, como vimos pelos episódios relacionados com a resolução de problemas, não bastam as tarefas exploratórias e a sua resolução para a apropriação e compreensão dos tópicos matemáticos em estudo. É fundamental proporcionar momentos de discussão e de reflexão com toda a turma, tendo por base o trabalho desenvolvido pelos grupos, seguidos de uma sistematização e formalização dos tópicos trabalhados. Caso contrário, como já referi no ponto anterior da conclusão, a apropriação e a compreensão das ideias matemáticas pode ficar comprometida, como aconteceu com os quadriláteros. Pelo facto de não ter existido uma discussão final e uma sistematização da actividade realizada durante a tarefa dos quadriláteros com o Geogebra (ver episódio 5.2.3), os alunos ficaram com uma ideia de algumas propriedades dos quadriláteros, mas não se detiveram em identificar as propriedades que são únicas de cada tipo de quadrilátero. Por exemplo, os alunos não compreenderam que para se definir um trapézio, basta que o quadrilátero tenha dois lados paralelos. O mesmo não aconteceu com os ângulos internos e externos de um triângulo, nem com os critérios de congruência de triângulos. Durante a realização destas tarefas houve momentos de discussão e sistematização e formalização dos tópicos matemáticos trabalhados, que se revelaram fundamentais para a sua apropriação e compreensão.

Tomando a segunda perspectiva, relacionada com a actividade matemática desenvolvida pelos alunos, concluo que as tarefas contribuíram para o desenvolvimento da capacidade de visualização e do raciocínio geométrico. Isso ocorreu não apenas com as tarefas que envolveram a utilização do Geogebra, como referi no ponto anterior, mas também com as tarefas dedicadas à resolução de problemas. Os alunos tiveram de recorrer sistematicamente a estas capacidades. Como se pode averiguar pelos episódios, os alunos para estabelecerem a sequência organizada de acções que lhes permitiu explicar e justificar, oralmente e por escrito, as resoluções dos problemas, primeiro construíram mentalmente as imagens, desenhando figuras no caderno ou apenas observando-as, identificaram a sua natureza e a informação que podia ser utilizada para interpretar as possíveis propriedades e relações geométricas existentes e, posteriormente, desenvolveram as ideias que lhes permitiram encontrar as soluções. Após esta fase de construção e de manipulação mental das imagens que lhes permitiu ter uma visão das relações geométricas e descobrir as que interessavam para resolver a tarefa, estabeleceram o caminho a percorrer. Só depois desta interiorização, através das representações mentais, explicitaram e justificaram a solução do problema, tanto oralmente com os colegas e como na apresentação escrita da resolução.

Acrescento que esta sequência organizada de tarefas permite que os alunos analisem configurações e raciocinem indutivamente sobre relações para formular conjecturas, como aconteceu com os ângulos internos e externos de um polígono e, em particular dos triângulos, ou os critérios de congruência de triângulos. Cria, também, situações para que os alunos desenvolvam argumentos dedutivos sobre as propriedades e relações geométricas, como se verificou com as demonstrações das somas dos ângulos internos e externos de um triângulo ou no problema da tarefa *Problemas com* *quadriláteros* (ver Anexo I) em que se pede para demonstrar a relação entre a área sombreada e a área do quadrado menor. Nas questões colocadas nas tarefas, os alunos são sempre solicitados a analisarem situações e a utilizar as propriedades e relações geométricas, como acontece nas tarefas dedicadas aos problemas.

Este facto possibilitou que os alunos, em todas as situações, reconstituíssem modelos mentais estruturados de forma a investigar as propriedades e relações geométricas ou resolver problemas, envolvendo essas propriedades. Portanto, os processos do desenvolvimento do raciocínio geométrico e da visualização foram parte integrante da actividade matemática dos alunos, pelo que as tarefas contribuíram para o seu desenvolvimento.

Um outro aspecto está relacionado com a compreensão das propriedades e relações das figuras geométricas. Como referi no quadro teórico, não há métodos claros, nem uma teoria consistente que nos permita compreender o pensamento dos alunos, pois não se consegue observar directamente uma representação interna das situações que lhes são propostas. O que se tem são indicadores que estão relacionados com as acções dos alunos e que permitem fazer inferências sobre as suas representações internas, na base da sua interacção com, discurso sobre ou produções dos alunos. Contudo, como se sabe, há sempre um desfasamento entre aquilo que está na mente dos alunos e o que eles nos conseguem transmitir ou são capazes de escrever, dada a dificuldade que têm na comunicação das suas ideias e as próprias características da linguagem falada ou escrita. Esta dificuldade é referida pelas alunas na entrevista, quando salientam que "não gosto muito de explicar. Porque nós já sabemos como é que fazemos, mas é muito difícil estar a explicar". Esta afirmação revela que as alunas constroem as representações internas, mas sentem que é difícil partilhá-las.

A consciencialização deste obstáculo, pelas professoras e pelos alunos, levou a que, em todos os momentos, fosse relembrada a necessidade de os alunos explicarem e justificarem os seus raciocínios e as professoras acompanhassem, interagissem e discutissem, através do questionamento, as construções e resoluções desenvolvidas pelos alunos de forma a compreenderem a relação que está a ter lugar entre o que elas observam e a expressão das imagens mentais dos alunos. Esta interacção foi evidente ao longo dos episódios descritos no ponto anterior e fundamental para se compreender as ideias dos alunos e como é que eles as constroem no percurso do desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

A compreensão de um conceito é vista ou como um acto que identifica algumas características do objecto em estudo ou como uma experiência, na medida em que esta emerge como resultado da vivência de uma dada situação onde o conceito se manifesta. Partindo desta definição, estão asseguradas evidências que me permitem afirmar que os alunos compreenderam as propriedades e relações dos triângulos, nomeadamente as relativas aos ângulos e aos critérios de congruência. No entanto, relativamente aos quadriláteros essa compreensão não é tão evidente. Os alunos revelaram dificuldade em identificar propriedades dos quadriláteros que os tornam únicos, ou mesmo, em estabelecer algumas propriedades que os permitam caracterizar, classificar ou estabelecer uma hierarquia entre eles.

Ficou bem expressa, nos dados obtidos, em particular na resolução dos problemas, a forma como os alunos lidaram com os conceitos matemáticos presentes neste tópico, desenvolvendo e aprofundando a sua compreensão. Foram expressos actos de compreensão, a partir dos quais os conceitos, como os ângulos internos e externos de um triângulo ou os critérios de congruência de triângulos, estiveram empreendidos de significação. Repare-se na forma como as alunas resolveram os problemas envolvendo os triângulos ou o Ricardo da turma B, no episódio dos problemas com quadriláteros, demonstrou a relação entre a área sombreada e a área do quadrado menor. Isto mostrou que os alunos alargaram os seus processos de compreensão para além da definição formal ou da sua utilização em procedimentos rotineiros.

Em síntese, a sequência organizada de tarefas e a maneira como foram exploradas em sala de aula, envolvendo a interacção entre os alunos, entre as professoras e os alunos e os momentos de discussão, foram fundamentais para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos no tópico Triângulos e Quadriláteros. O facto de os alunos terem explorado as propriedades e as relações das figuras geométricas, de se ter insistido para que os alunos explicassem e justificassem constantemente as suas ideias, de se ter criado momentos de discussão dessas ideias e respectiva sistematização e, posteriormente, de se propor a resolução de problemas, ajudou a uma maior apropriação e consciencialização e, consequentemente, compreensão do tópico em estudo.

6.3 Reflexões sobre a investigação

O estudo realizado, tendo em consideração as conclusões apresentadas nos dois pontos anteriores, permite-me inferir que a tríade – composta por i) tarefas, ii) estratégia exploratória de ensino-aprendizagem iii) questionamento e discussão sobre o trabalho dos alunos – foi fundamental para o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos e para a compreensão das propriedades e relações das figuras geométricas. Importa sublinhar que as dimensões desta tríade não funcionam de forma independente e isolada, pelo contrário estão forte e profundamente interligadas. O funcionamento de cada uma destas dimensões está dependente da existência das restantes. Por exemplo, só é possível desenvolver uma estratégia de cunho eminentemente exploratório se as tarefas forem elaboradas tendo em conta o trabalho prático, experimental e autónomo dos alunos e se se promoverem momentos de reflexão e discussão sobre o trabalho desenvolvido pelos alunos.

Importa realçar que poderia acrescentar uma quarta dimensão que está relacionada com a tecnologia. Como ficou evidenciado ao longo do estudo, a utilização dos ambientes de geometria dinâmica, em particular do Geogebra, foi essencial para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e para a compreensão dos tópicos matemáticos que compõem a sequência organizada de tarefas. No entanto, não considerei esta dimensão, uma vez que o Geogebra é considerado um recurso que se torna parte integrante da actividade matemática dos alunos. Esta dimensão está, portanto, integrada nas tarefas. Estas foram conceptualizadas para a utilização pedagógica e consistente de um ambiente de geometria dinâmica.

Uma outra ideia que emerge deste estudo, que é defendida por diversos investigadores, como Hershkowitz (1998) ou Jones (2001), é considerar o raciocínio geométrico como o alicerce, como a base de sustentação, para a aprendizagem da geometria. Como se pode constatar, foi a partir do raciocínio geométrico que os alunos conseguiram desenvolver um processo de organização e de execução de acções mediante o qual os elementos de um contexto (desenhos no Geogebra, elementos de um problema) foram transformados em propriedades e relações geométricas.

Por outro lado, o raciocínio geométrico, sendo um processo que envolve a construção e a manipulação de representações mentais de objectos e relações para resolver as situações, torna necessária a comunicação dessa informação, contribuindo assim para a aprendizagem e para o desenvolvimento de uma linguagem matemática adequada. A explicitação dos raciocínios requer a comunicação matemática, oral ou escrita, para representar externamente as imagens e representações mentais elaboradas e para exprimir os resultados, os processos e as ideias que compõem esses raciocínios. Este processo, que é demorado, envolve a utilização da linguagem matemática apropriada, nomeadamente notação, simbologia e vocabulários próprios da Geometria.

Portanto, os alunos estão a desenvolver o raciocínio geométrico e, simultaneamente, estão a aprender os conceitos geométricos, a linguagem apropriada da geometria, as propriedades e as relações das figuras geométricas.

Para terminar, a realização deste estudo foi muito gratificante e constituiu um importante momento de aprendizagem porque me permitiu aprofundar o conhecimento matemático, didáctico e científico numa área da Matemática que me é muito cara e simultaneamente desafiante.

Este trabalho foi, igualmente, estimulante e deu-me muita satisfação, dado que foi ao encontro de uma das minhas motivações pessoais para a sua concretização. Permitiu-me afirmar que há condições e que é possível colocar em prática o actual Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007), seguindo as suas orientações metodológicas, a partir da combinação das três dimensões referidas anteriormente.

Por fim, o que procurei explicitar e evidenciar, neste estudo, foi o modo como o processo de aprendizagem dos alunos no tópico Triângulos e Quadriláteros, a partir das tarefas com recurso ao Geogebra, teve um papel crucial no desenvolvimento do raciocínio geométrico. Por outro lado, não sendo objecto desta investigação, pude constatar a importância do papel das representações na aprendizagem da Geometria. Dada a sua relevância e o modo como a representação em Geometria assume contornos muito característicos, defendo que esse é um tema que merece ser aprofundado e investigado. Em particular, poderá emergir dos resultados deste estudo uma questão para futuros trabalhos de investigação que tentaria perceber a forma como os alunos lidam com representações dinâmicas e estáticas, como as coordenam e em que medida umas influenciam a utilização das outras. Em suma, julgo importante estudar como se faz a transição das representações mediadas pelo computador para as representações mediadas pelo papel e lápis e vice-versa. Dada a sua importância para promover uma aprendizagem significativa e de qualidade da Geometria, é um tópico que merece ser aprofundado e investigado.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre currículos do ensino básico*. Lisboa: ME-DEB.

Almiro, J. (2010). Os quadriláteros no Programa de Matemática do Ensino Básico: Uma reflexão sobre a prática. In GTI (Ed), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 175-208). Lisboa: APM.

Amado, N. (2007). *O Professor Estagiário de Matemática e a Integração das Tecnologias na Sala de Aula. Relações de Mentoring numa Constelação de Práticas*. (Tese de Doutoramento, Universidade do Algarve). Lisboa: APM.

APM (1990). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 215-241.

Battista, M. (1999). Geometry results from the Third International Mathematics and Science Study. *Teaching Children Mathematics,* **5**(6), 367-373.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 843-907). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. T. (2009). Highlights of Research on Learning School Geometry. In T. Crane & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*. (NCTM, 2009 Yearbook), (pp. 91-108). Reston, VA: NCTM.

Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its culture context. *Educational Studies in Mathematics*, **19**(2), 179-191.

Boavida, A. et al. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico – Programa de Formação Contínua para Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos.* Porto: Porto Editora.

Burton, L. (1994). Whose culture includes mathematics?. In S. Lerman (Ed.), *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom*, (pp. 69-83). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Canário, F., Amado, N. & Carreira, S. (2011). O Geogebra na construção de modelos matemáticos: Uma experiência no estudo da variação linear. *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM. (No prelo).

Candeias, N. e Ponte, J. P. (2008). Aprender geometria utilizando um ambiente de geometria dinâmica. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 313-325). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Carreira, S. (1997). A insustentável leveza do saber. In APM (Ed.), *Actas do Profmat 97*, (pp. 93-99). Lisboa: APM.

Carreira, S. (1998). *Significado e aprendizagem da Matemática: Dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (p. 420-464). New York: Macmillan.

Clements, D. (2003). Teaching and Learning Geometry. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.). *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics*, (pp. 151-178). Reston: NCTM.

Coelho, M. I. & Saraiva, M. (2000). Tecnologias no ensino/aprendizagem da geometria. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos, (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da geometria*, (pp. 35-60). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Costa, C. (2000). Visualização, veículo para a educação em geometria. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos, (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da geometria* (pp. 157-184). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Davis, R. B. & Maher, C. A. (1997). How Students Think: The Role of Representations. In L. D. English, (Ed.), *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and Images* (pp. 93-115). London: LEA.

Davis, P. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Del Grande, J. (1990). Spatial Sense. *Arithmetic Teacher*, **37**(6), 14-20.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (Eds). (1994). *Handbook of Qualitative Research*. Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani, (Eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*, (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

English, L. D. (1997a). Analogies, Metaphors and Images: Vehicles for Mathematics Reasoning. In English, L. D. (Ed.), *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and Images*, (pp. 3-18). London: LEA.

English, L. D. (1997b). Children's Reasoning Processes in Classifying and Solving Computational World Problems. In English, L. D. (Ed.), *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and Images*, (pp. 191-220). London: LEA.

English, L. D. (1999). Reasoning by Analogy: A Fundamental Process in Children's Mathematical Learning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio, (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. (NCTM, 1999 Yearbook) (pp. 22-36). Reston, VA: NCTM.

Ernest, P. (1994/96). The Dialogical Nature of Mathematics. In P. Ernest, (Ed.). *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*, (pp. 33-48). London: The Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany: State University of New York Press.

Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics*, **3**, 413-435.

Freudenthal, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 133-150.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, **74**, 163-183. (Published online: 26 February 2010).

Gafanhoto, A. P. & Canavarro, A. P. (2011). Utilização e conciliação de diversas representações das funções em sala de aula. *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Lisboa: APM. (No Prelo).

Gay, L. R., Mills, G. E. & Airasian, P. (2006). Educational research: Competencies for analysis and applications (8.ª edição). Upper Saddle River: Pearson.

Glasersfeld, E. (1987). Preliminaries to any theory of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (pp. 215-226). Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum Associates.

Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A. & Mark, J. (1998). A Role for Geometry in General Education. In R. Lehrer & D. Chazan, (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 3-43). London: LEA.

González, G. & Herbst, P. G. (2009). Students' Conceptions of Congruency Through the Use of Dynamic Geometry Software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14, 153-182.

Gravemeijer, K. P. (1998). From a Different Perspective: Building on Students Informal Knowledge. In R. Lehrer & D. Chazan, (Eds.), *Designing Learning*

Environments for Developing Understanding of Geometry and Space, (pp. 45-66). London: LEA.

Guzmán, M. (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)*. Hersonissos, Crete, Greece.

Herbst, P. (2004). Interactions with Diagrams and the Making of Reasoned Conjectures in Geometry. *ZDM*, **36**(5), 129-139.

Hersh, R. (1994/96). Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics. In Ernest, P. (Ed.). *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*.(pp. 11-20). London: The Falmer Press.

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics, really?*. New York: Oxford University Press.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana & V. Villani, (Eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*, (pp. 29-37). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Janvier, C. (Ed) (1987). *Problems of Representation in the Teaching and the Learning of Mathematics*. London: LEA.

Jones, K. (1998). Deductive and intuitive approaches to solving geometrical problems. C. Mammana & V. Villani, (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*, (pp. 78-83). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jones, K. (2000). Providing a Foundation for Deductive Reasoning: Students' Interpretations when Using Dynamic Geometry Software and their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics*, **44**, 55-85.

Jones, K. (2002), Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*, (pp. 121-139). London: Routledge Falmer.

Junqueira, M. (1995). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos. Um estudo no 9.º ano de escolaridade*. (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Kilpatrick, J. & Swafford, J. (Eds). (2004). *Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer-based environment. In C. Mammana & V. Villani, (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*, (pp. 113-121). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C. (2000). Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving. *Educational Studies in Mathematics*, **44**, 151-161.

Laborde. C. (2005). The Hidden Role of Diagrams in Students' Construction of Meaning in Geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles & O. Skovsmose, (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 157-179). New York: Springer.

Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 36-50). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations. The logical of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. London: The University of Chicago Press.

Lakoff, G. & Nunez, R. E. (1997). The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and Images* (pp. 21-89). London: LEA.

Lessard-Hébert, M. (1996). *Pesquisa em Educação*. Lisboa: Instituto Piaget.

Loureiro, C. (2009). Geometria no Novo Programa do Ensino Básico. Contributos para uma gestão curricular reflexiva. *Educação e Matemática*, **105**, 61-66.

Ludke, M. & André. M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

Malkevitch, J. (1998). Finding room in the curriculum for recent geometry. In C. Mammana & V. Villani, (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*, (pp. 18-25). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Malkevitch, J. (2009). What Is Geometry?. In Crane, T. e Rubenstein, R. (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*. (NCTM, 2009 Yearbook), (pp. 3-16). Reston, VA: NCTM.

Mason, J. (1987). Representing representing: Notes following the conference. In C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (pp. 207-214). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Matos, J. F. (2008). Mediação e colaboração na aprendizagem em Matemática com TIC. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 76-88). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Matos, J. F. & Carreira, S. (1994). Estudos de caso em educação matemática – problemas actuais. *Quadrante*, Vol. 3, Nº 1, p. 19-53.

Matos, J. M. & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática*, **26**, 13-17.

McCrone, S. M., King, J., Orihuela, Y. & Robinson, E. (2010). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making in Geometry*. Reston, VA: NCTM.

Mendes, M. F., & Delgado, C. (2008). *Geometria. Textos de Apoio para Educadores de Infância*. Lisboa: ME-DGIDC.

Merriam, S. (1998). *Case study research in education: a qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J. & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, **68**, 99-111.

Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. J. (2009). Introduction: the transformative nature of "dynamic" educational technology. *ZDM Mathematics Education*, **41**, 397-398.

Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. J. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM Mathematics Education*, **41**, 505-519.

NCTM (2000/2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nickson, M. (1994). The Culture of the Mathematics Classroom: An Unknown Quantity?. In S. Lerman, (Ed.), *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom* (pp. 7-36). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Noss, R. (1994). Sets, Lies and Stereotypes. In S. Lerman, (Ed.), *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom*, (pp. 37-50). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Nunes, D. (2011). *O Significado Matemático na Geometria do 7.º ano com recurso ao Geogebra: Uma Perspectiva Semiótica*. (Tese de Mestrado, Universidade do Algarve).

Olive, J. (2000). Implications of using dynamic geometry for teaching and learning. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos, (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da geometria* (pp. 7-33). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Oliveira, H. & Domingos, A. (2008). Software no ensino e aprendizagem da Matemática: algumas ideias para discussão. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 279-285). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Paiva, J. (2008). *Uma experiência educacional: Avaliação do trabalho com Geometer's Sketchpad na aula de Matemática*. (Tese de Mestrado, Universidade do Algarve).

Pires, M. & Ferreira, R. A. (2009). A experimentação do novo Programa de Matemática – Reportagem no 7.º ano, no Porto. *Educação e Matemática*, **105**, 73-79.

Pitalis, M. & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, **75**(2), 191-212.

Piteira, G. & Matos, J. F (2000). Ambientes dinâmicos de geometria como artefactos mediadores para a aprendizagem da geometria. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos, (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da geometria*, (pp. 157-184). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: ME-DES.

Ponte, J. P. & Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2003). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In *O ensino da Matemática: Situação e perspectivas* (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Oliveira, P. & Candeias, N. (2008). *Triângulos e quadriláteros. Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7º ano*. ME-DGIDC. (versão *Draft*).

Presmeg, N. C. (1997). Generalization Using Imagery in Mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and Images* (pp. 299-312). London: LEA.

Quivy, R. & Campenhoudt, L. (2003). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.

Rattermann, M. J. (1997). Commentary: Mathematical Reasoning and Analogy. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and Images* (pp. 247-264). London: LEA.

Restivo, S. (1993). The Social Life of Mathematics. In S. Restivo, J. Bendegem & R. Fischer (Eds), *Math Words. Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education* (pp. 247-278). Albany: State University of New York Press.

Restivo, S. (1994/96). The Social Life of Mathematics. In P. Ernest, (Ed.). *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*, (pp. 209-220). London: The Falmer Press.

Rodrigues, M. & Bernardo, M. (2011). Ensino e Aprendizagem da Geometria. *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM. (No prelo)

Russel, S. (1999). Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. (NCTM, 1999 Yearbook), (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM.

Sarama, J. & Clements, H. D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Routledge: Taylor & Francis.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Sinclair, M. P. (2003). Some Implications of the Results of a Case Study for the Design of Pre-Constructed, Dynamic Geometry Sketches and Accompanying Materials. *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 289-317.

Sternberg, R. J. (1999) The Nature of Mathematical Reasoning. In L. V. Stiffe & F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. (NCTM, 1999 Yearbook), (pp. 37-44). Reston, VA: NCTM.

Straesser, R. (2001). Cabri-Géometre: Does Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its Teaching and Learning?. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **6**, 319-333.

Tymoczko, T. (1994/96). Sructuralism and the Post-modernism in the Philosophy of Mathematics. In P. Ernest (Ed.). *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*, (pp. 49-53). London: The Falmer Press.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais*. Lisboa: IIE.

Villers, M. (2009). Defining in Geometry. In T. Crane & R. Rubenstein, (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*. (NCTM, 2009 Yearbook), (pp. 189-203). Reston, VA: NCTM.

Yakel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and Proof. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter, (Eds.). *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics*, (pp. 227-236). Reston: NCTM.

Yu, P., Barrett, J. & Presmeg, N. (2009). Prototypes and Categorical Reasoning: A Perspective to Explain How Children Learn about Interactive Geometry Objects. In T. Crane & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*. (NCTM, 2009 Yearbook), (pp. 109-125). Reston, VA: NCTM.

Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with Images in Mathematical Activity. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and Images* (pp. 281-297). London: LEA.

Anexos

Anexos

Anexo I

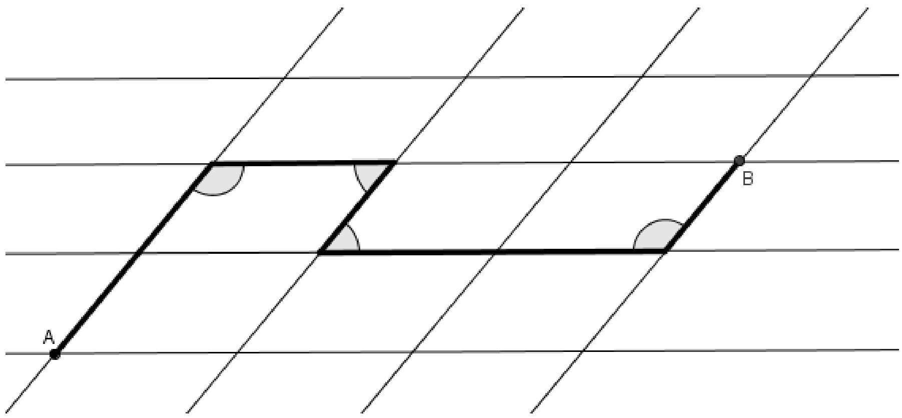
Sequência Organizada de Tarefas para o tópico Triângulos e Quadriláteros

Tarefa 0 - Rede de rectas paralelas - Ângulos

Nas figuras seguintes estão representadas rectas paralelas, quatro com uma direcção e quatro com outra.

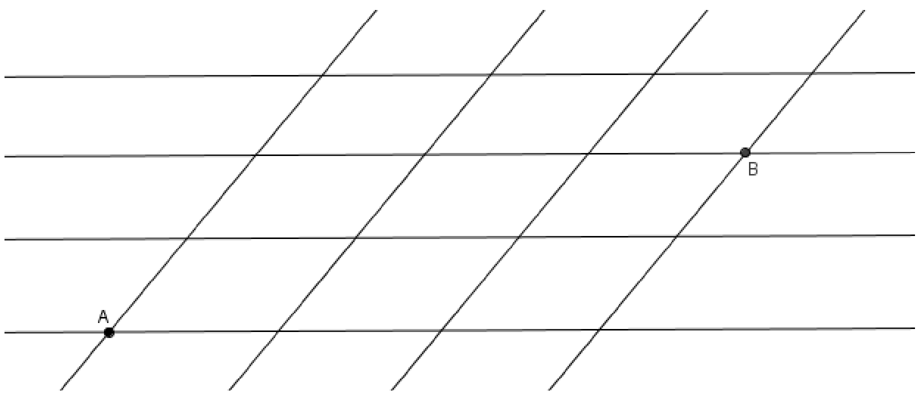
Nesta tarefa pretende-se que marques caminhos entre os pontos A e B, percorrendo sempre as rectas representadas, mas tendo em conta algumas condições.

Em todas as alíneas, ao desenhares o caminho considera somente os menores ângulos formados pelos vários segmentos de recta representados, conforme esquema seguinte:

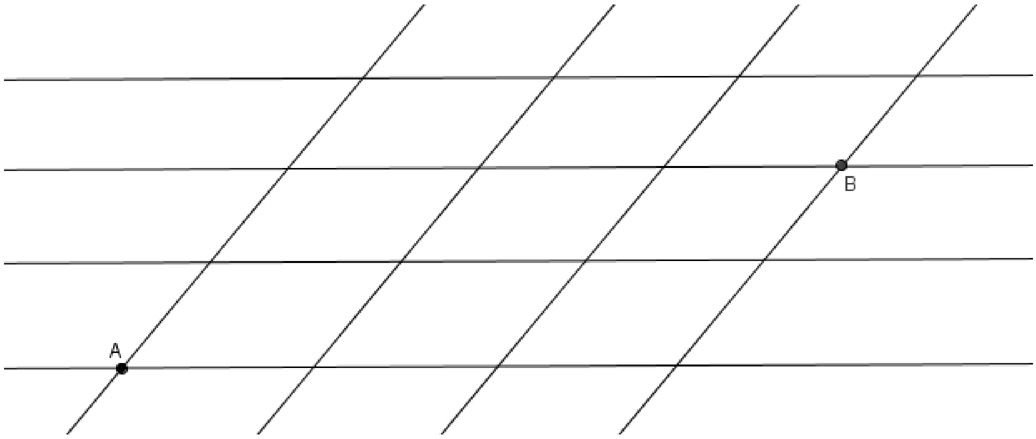


1. Marca um caminho na figura seguinte entre os pontos A e B de modo que soma das amplitudes dos ângulos considerados seja inferior a 150º.

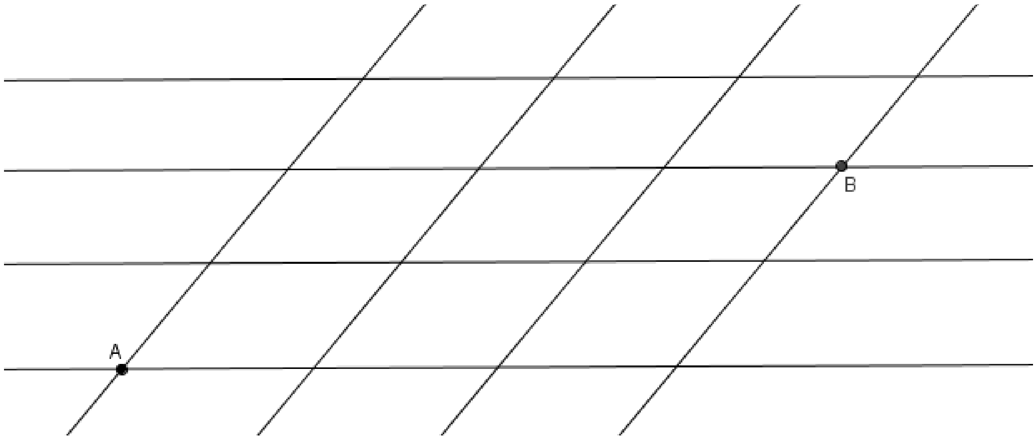
Não te esqueças que podes medir os ângulos usando um transferidor.



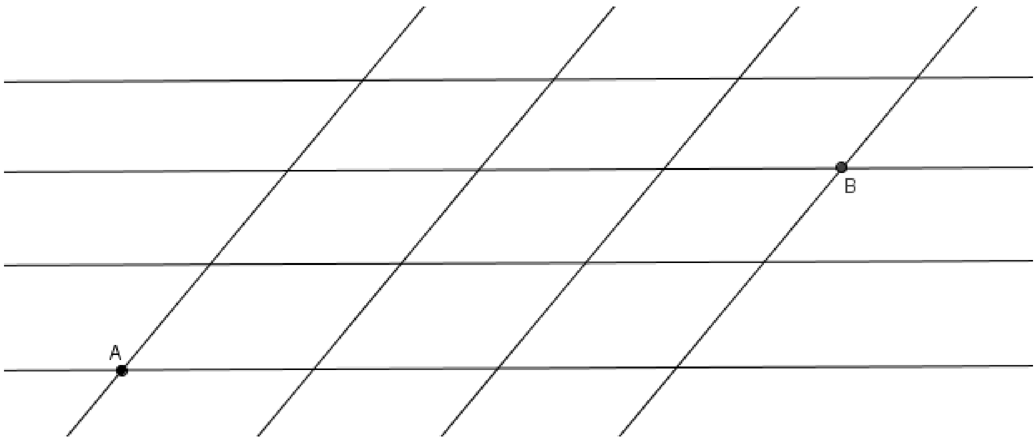
2. Marca um caminho de A para B de maneira que a soma das amplitudes dos ângulos considerados seja igual a 180º. Marca-o na figura seguinte.



3. Constrói agora um trajecto de A para B de modo que a soma das amplitudes dos ângulos seja igual a 360º. Marca-o nesta figura.



4. Constrói agora um trajecto de A para B de modo que a soma das amplitudes dos ângulos seja igual a 720º. Marca-o nesta figura.



5. Nesta figura encontras ângulos com a mesma amplitude? Quantos?

ESCOLA SECUNDÁRIA XXXXXXX

Disciplina de Matemática - 7º Ano de Escolaridade

Bom Trabalho!

Triângulos e Quadriláteros

Tarefa 1 - Construção de triângulos

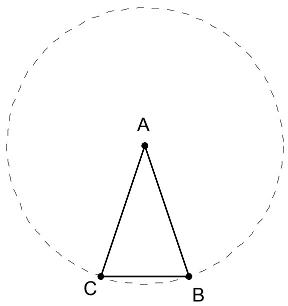
O software de geometria dinâmica permite fazer construções "reais" de figuras, isto é, figuras que mantêm a sua forma quando arrastadas.

1. Constrói um triângulo ABC como mostra a figura.

1.1. Qual a medida dos lados e dos ângulos internos do triângulo?

1.2. Classifica o triângulo quanto aos lados e quanto aos ângulos.

1.3. Há alguma relação entre os ângulos? Se sim, qual?

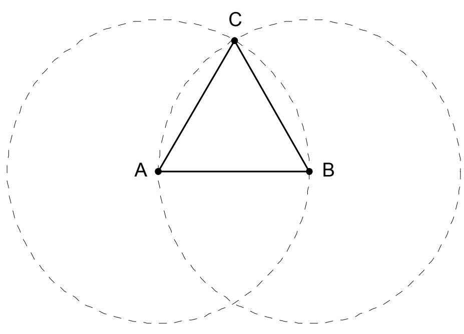


2. Constrói um triângulo ABC como mostra a figura.

2.1. Qual a medida dos lados e dos ângulos internos do triângulo?

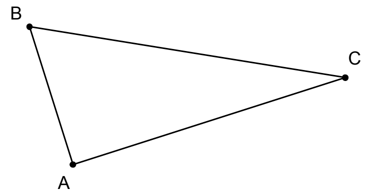
2.2.Classifica o triângulo quanto aos lados e quanto aos ângulos.

2.3. Há alguma relação entre os ângulos? Se sim, qual?

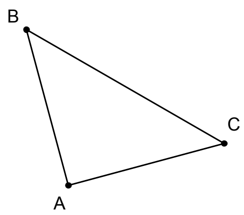


3. As construções seguintes devem manter as suas propriedades quando os vértices são arrastados.

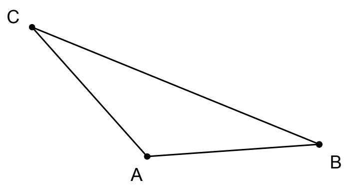
3.1. Constrói um triângulo rectângulo. Descreve como procedeste.



3.2. Constrói um triângulo rectângulo que também seja isósceles. Descreve como procedeste.



3.3. Constrói um triângulo obtusângulo que também seja isósceles. Descreve como procedeste.



Sugestão: Para construíres o ângulo obtuso podes recorrer à rotação definida por um ângulo superior a 90º.

Bom Trabalho!	**ESCOLA SECUNDÁRIA XXXXXXX** **Disciplina de Matemática - 7º Ano de Escolaridade**

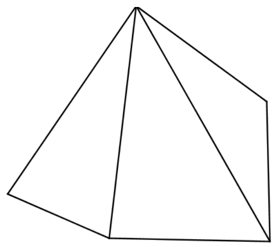
Tarefa 2 - Ângulos internos e externos

1. Constrói um triângulo. Mede as amplitudes dos seus ângulos internos e adiciona as medidas obtidas.

Arrasta um vértice qualquer de modo a obter um novo triângulo. Verifica o que se passa com as amplitudes dos ângulos e com a respectiva soma. Escreve uma conjectura sobre o que observas.

2. Procede de igual modo para outros polígonos convexos (quadrilátero, pentágono, …) e preenche a seguinte tabela.

Na terceira coluna deves colocar o número de triângulos que se obtém traçando todas as diagonais por um vértice; por exemplo, no pentágono, obténs 3 triângulos.



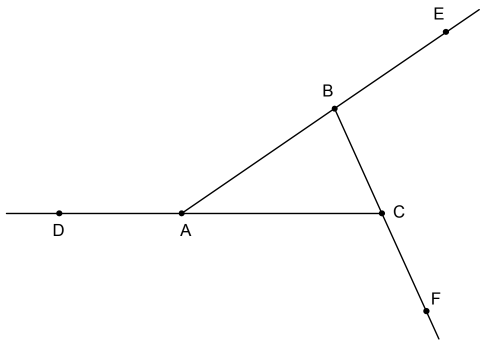
Nome do polígono	Número de lados	Número de triângulos que se obtém	Soma dos ângulos internos
Triângulo			
Quadrilátero			
Pentágono			
Hexágono			
Polígono de *n* lados			

Num pequeno texto sintetiza as justificações e a conclusão.

3. Os polígonos também têm **ângulos externos**.

No triângulo ABC, em baixo, um dos ângulos externos é o ângulo DAB que se obtém construindo a semi-recta CA (prolongando o lado AC) e o ponto D exterior ao segmento de recta AC.

São igualmente ângulos externos os ângulos EBC e FCA.



3.1. Mede e adiciona as amplitudes dos ângulos DAB, EBC e ACF. Arrasta um dos vértices do triângulo e escreve uma conjectura sobre o valor da soma dos ângulos externos de um triângulo.

3.2. Considera o triângulo ABC da figura.

3.2.1. Qual é o valor da soma $\angle DAB + \angle BAC + \angle EBC + \angle ABC + \angle ACF + \angle BCA$?

3.2.2. Tendo em atenção que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, é possível saber o valor da soma dos ângulos externos de um triângulo?

3.2.3. A conclusão que tiraste na alínea anterior permanece válida se considerarmos outro triângulo? Porquê?

4. Procede de modo análogo para outros polígonos convexos e preenche a tabela seguinte

Nome do polígono	**Número de lados**	**Soma dos ângulos externos**
Triângulo		
Quadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		
Polígono de *n* lados		

Num pequeno texto sintetiza as justificações e a conclusão.

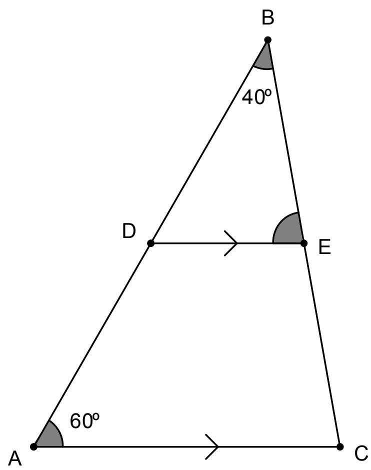
Bom Trabalho!	**ESCOLA SECUNDÁRIA XXXXXXX** **Disciplina de Matemática - 7º Ano de Escolaridade**

Tarefa 3 – Resolução de problemas em triângulos

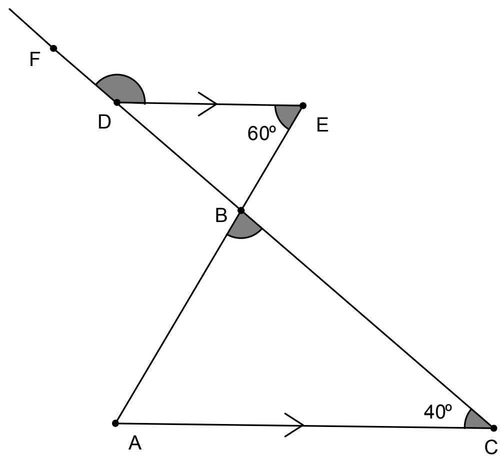
Responde às seguintes questões apresentado os cálculos que efectuares.

1. Nas figuras seguintes estão representados os triângulos **ABC** e **DBE**, em que os lados **AC** e **DE** são paralelos.

1.1. Qual é a amplitude do ângulo **DEB**?

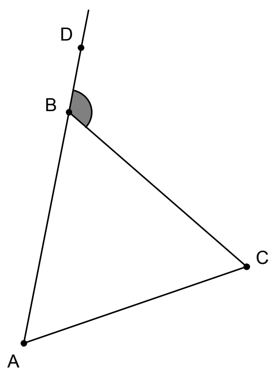


1.2. Qual é a amplitude do ângulo **ABC** e do ângulo **FDE**?



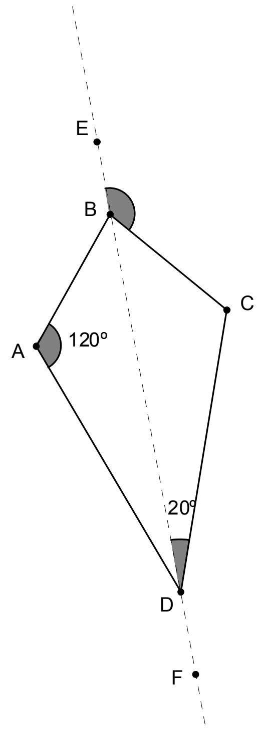
2. Na figura seguinte está representado um triângulo ABC.

O triângulo ABC é equilátero. Qual é a amplitude do ângulo CBD?

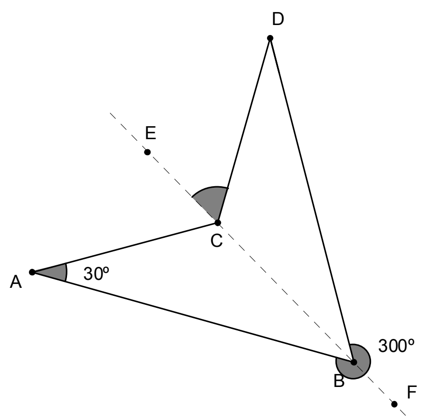


3. Nas seguintes figuras a recta EF é um eixo de simetria do quadrilátero ABCD.

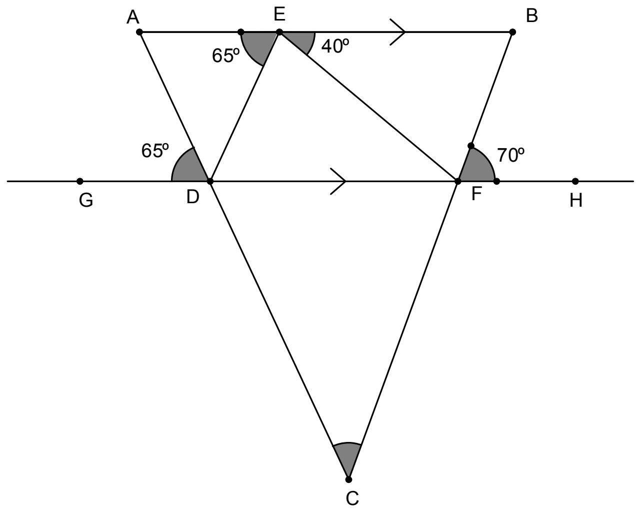
3.1. Qual é a amplitude do ângulo EBC?



3.2. Qual é a amplitude do ângulo ECD?



4. Na seguinte figura estão representados os triângulos ABC e DEF. A recta GH é paralela ao lado AB. Qual é a amplitude do ângulo ACB?



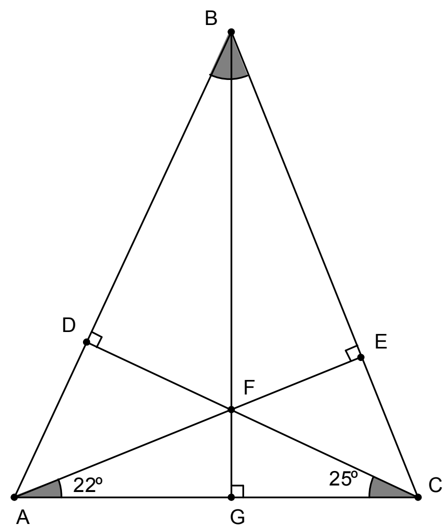
5. Na seguinte figura está representado o triângulo ABC, que respeita as seguintes condições:

DF é perpendicular a AB (DF $\perp$ AB)

GF é perpendicular a AC (GF $\perp$ AC)

EF é perpendicular a BC (EF $\perp$ BC)

Qual é a amplitude do ângulo ABC?



Tarefa 4 - Critérios de congruência de triângulos

As construções seguintes devem manter as suas propriedades quando os vértices são arrastados.

Para cada uma das alíneas constrói, se possível, dois triângulos de vértices A, B e C de acordo com os dados indicados.

Regista na tabela em baixo os valores dos comprimentos dos lados do triângulo e as medidas das amplitudes dos ângulos formados por eles.

1.
AB = 8 cm
∠ BAC = 60º

2.
AB = 8 cm
∠ BAC = 60º
AC = 6 cm

3.
CA = 10 cm
CB = 8 cm
∠ BAC = 50º

4.
CA = 10 cm
CB = 8 cm
AB = 11 cm

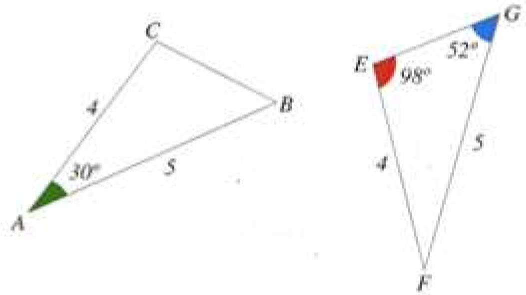
5.
AB = 8 cm
∠ BAC = 40º
∠ ABC = 60º

6.
∠ BAC = 15º
∠ ABC = 100º
∠ ACB = 65º

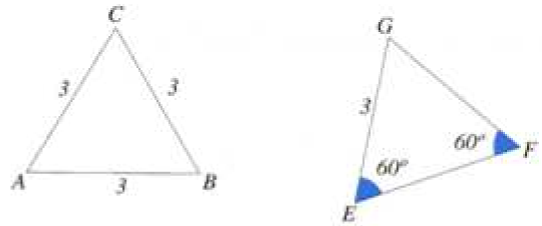
Alíneas	AB	BC	CA	∠ BAC	∠ ABC	∠ ACB
1						
1						
2						
2						
3						
3						
4						
4						
5						
5						
6						
6						

8. Atendendo aos dados das figuras, justifica que os pares de triângulos são geometricamente iguais.

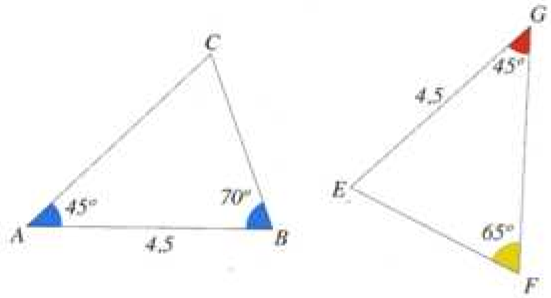
8.1.



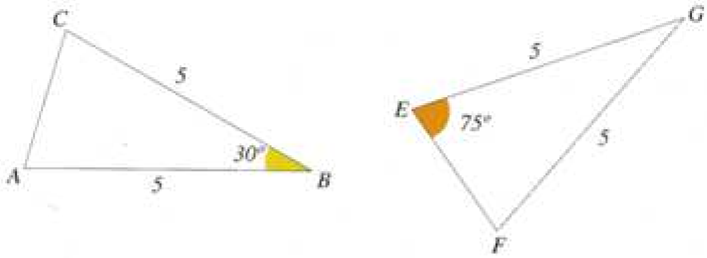
8.2.



8.3.



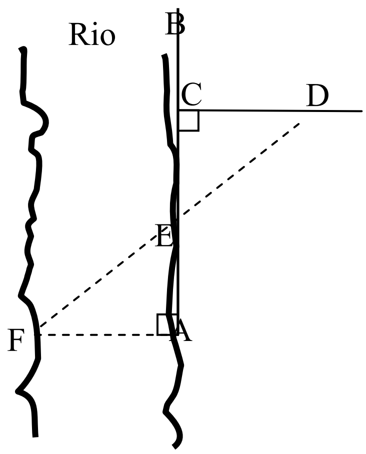
8.4.



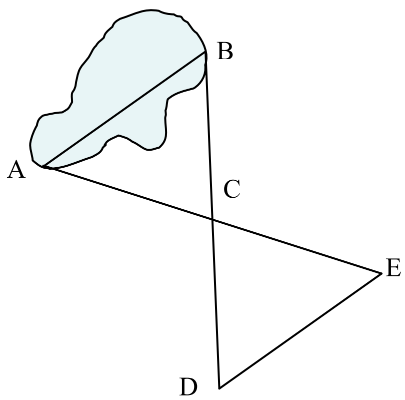
Bom Trabalho!	**ESCOLA SECUNDÁRIA XXXXXXX** **Disciplina de Matemática - 7º Ano de Escolaridade**

Tarefa 5 - Usando critérios de congruência

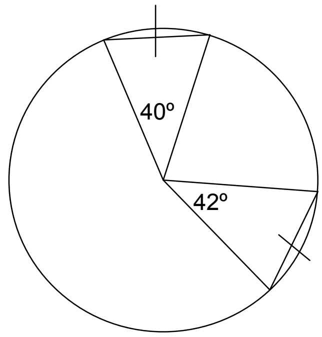
1. Um agrimensor romano (cerca de 180 d.C.) usou triângulos congruentes para determinar a largura de um rio numa determinada zona do seu leito. Vejamos de modo resumido em que consistiu o seu método. Traçou uma recta AB ao longo da margem onde se encontrava. Num ponto C tirou uma perpendicular CD a AB. Colocou uma estaca no ponto médio, E, de AC. De A traçou uma recta imaginária perpendicular a AC. De D observou os pontos E e F de modo que os pontos D, E e F fossem colineares. Concluiu que $\overline{CD} = \overline{AF}$. Esta conclusão está correcta? Porquê?



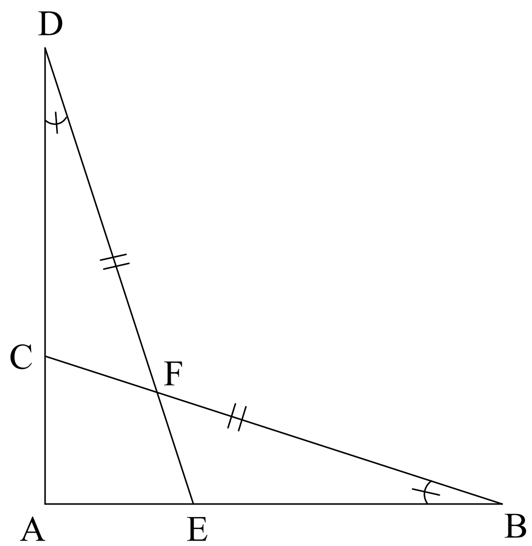
2. Pretende calcular-se a distância entre dois pontos A e B situados à beira de um lago artificial. Para tal, colocaram-se estacas em A e B e num ponto C apropriado. Colocou-se outra estaca em D de modo que os pontos B, C e D sejam colineares e $\overline{CD} = \overline{BC}$. De modo análogo colocou-se um estaca em E tal que A, C e E sejam colineares e $\overline{AC} = \overline{CE}$. Mostra que, com esta construção, podemos concluir que $\overline{AB} = \overline{DE}$.



3. Explica porque a figura seguinte é impossível.



4. Observa a figura em que $AB \perp AD$ e $AB \equiv AD$.



Indica, justificando

a) Um triângulo congruente com ADE.

b) Um triângulo congruente com FDC.

Bom Trabalho!	**ESCOLA SECUNDÁRIA XXXXXXX** **Disciplina de Matemática - 7º Ano de Escolaridade**

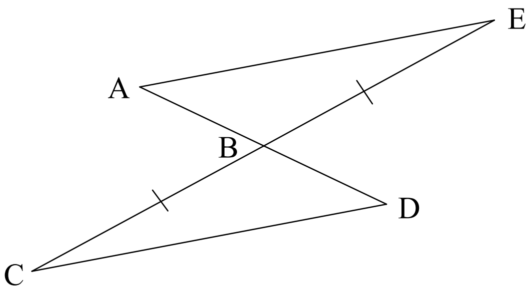
Tarefa 6 - Elaborando demonstrações

1. Um esquadro de pedreiro é constituído por duas 'réguas' perpendiculares, conforme figura. Marca um ângulo qualquer BAC e divide-o em duas partes iguais como fazem os pedreiros, utilizando somente um esquadro. Como não tens um esquadro de pedreiro utiliza um esquadro qualquer em sua substituição. (ver sugestão)

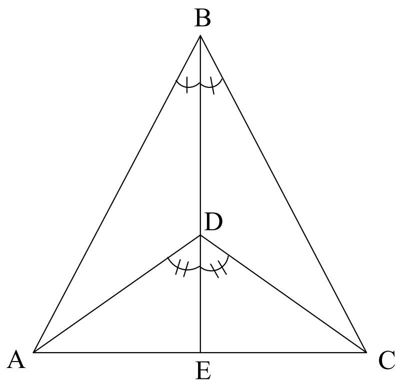
Explica como procedeste e demonstra que o teu procedimento é correcto.

Sugestão: Começa por marcar a partir do vértice A segmentos com o mesmo comprimento nos lados do ângulo.

2. Os segmentos de recta AE e CD são paralelos e B é o ponto médio de CE. Mostra que os segmentos de recta AB e DB são congruentes.



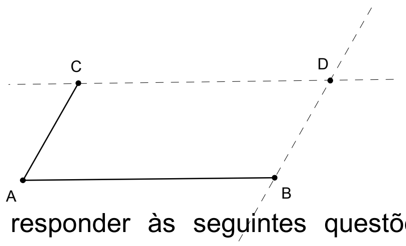
3. Nas condições da figura, mostra que os segmentos AD e CD são congruentes. Que outras congruências são válidas?

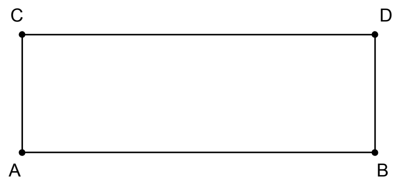


Bom Trabalho!	**ESCOLA SECUNDÁRIA XXXXXXX** **Disciplina de Matemática - 7º Ano de Escolaridade**

Tarefa 7 - Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos

1. Constrói um paralelogramo e um rectângulo de tal forma que quando se arrastar qualquer um dos seus vértices estes quadriláteros mantenham a sua forma.





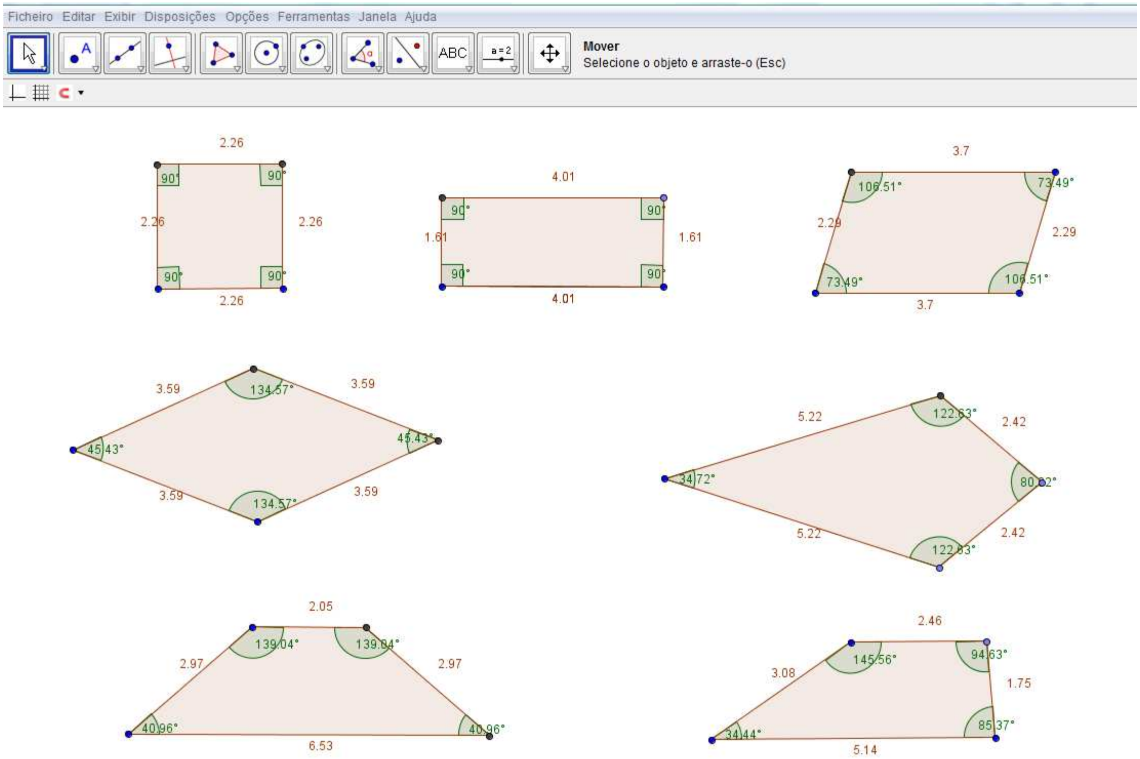
2. Para responder às seguintes questões considera, para além do paralelogramo e do rectângulo, o quadrado, o trapézio isósceles e o escaleno, o losango e o papagaio. Para isso abre o ficheiro "quadriláteros".

2.1. Completa a tabela com 'sim' (que significa *sempre*) ou 'não' (que significa *nem sempre*).Utiliza as medidas que achares necessárias (lados, ângulos, diagonais, …)

	Quadrado	Rectângulo	Losango	Paralelogramo obliquângulo	Trapézio isósceles	Trapézio escaleno	Papagaio
Lados opostos paralelos							
Lados opostos congruentes							
Ângulos opostos congruentes							
Diagonais bissectam-se mutuamente							
Diagonais perpendiculares							
Diagonais congruentes							
Um eixo de simetria							
Dois eixos de simetria							
Todos os lados Iguais							
Todos os ângulos iguais							
Soma dos ângulos internos							

2.2. Quais são as características que cada um destes quadriláteros tem que o torna único?

Ficheiro Geogebra "quadriláteros" utilizado pelos alunos para realizar a questão 2 da Tarefa 7 – Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos.

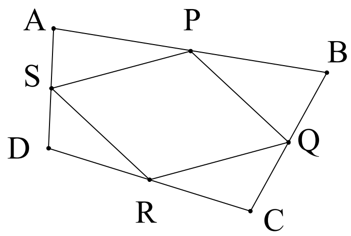


Tarefa 8 - Investigando quadriláteros e pontos médios

Responde às questões elaborando um relatório de acordo com o guião da página seguinte.

1. Constrói um quadrilátero ABCD à tua escolha e marca os pontos médios dos seus lados a que iremos chamar P, Q, R e S.

Une os pontos médios de lados consecutivos. Que quadrilátero obtiveste?



2. Investiga o que se passa se o quadrilátero inicial for um quadrado, um losango, um paralelogramo, …

Escreve as tuas conjecturas e tenta justificá-las.

3. Que relação existe entre o perímetro do quadrilátero PQRS e o comprimento das diagonais do quadrilátero ABCD?

Tenta encontrar uma justificação para o resultado que encontraste.

4. Que relação existe entre as áreas dos polígonos PQRS e ABCD?

Tenta encontrar uma demonstração para a conclusão a que chegaste.

Guião para a elaboração de um relatório

Um relatório é um trabalho escrito que descreve uma situação, analisando-a e criticando-a. Pretende-se que no relatório refiram não apenas as conclusões a que chegaram mas todos os procedimentos utilizados para chegar a essas conclusões.

Na elaboração do relatório deves ter em conta, entre outros, os seguintes aspectos:

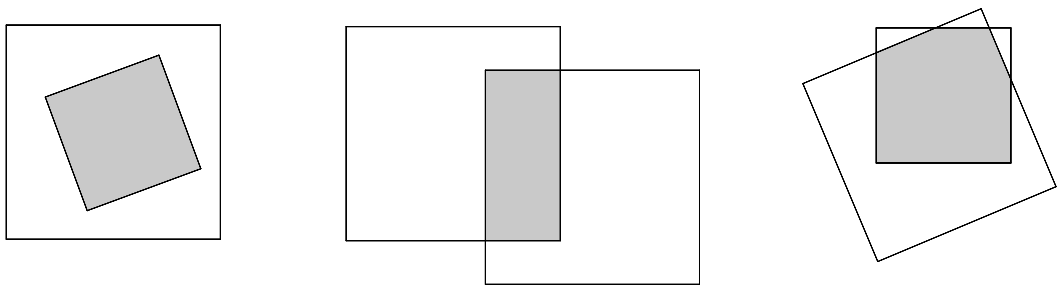
- Identificação do aluno ou grupo de alunos
- Título do trabalho e data da entrega
- Objectivo do trabalho incluindo as questões levantadas
- Descrição do processo de investigação, incluindo esboços de figuras ou esquemas das tentativas realizadas e das dificuldades encontradas
- Conclusões e respectiva justificação sintética
- Apreciação da tua intervenção no trabalho
- Bibliografia consultada, caso exista

Sugestões para a elaboração do relatório:

- Tirar apontamentos detalhados durante a realização das tarefas
- Mais importante do que as conclusões a que chegaram é o processo que utilizaram para lá chegar, incluindo os erros que cometeram em termos de conjecturas e o modo como os ultrapassaram
- No final deve ser incluído um pequeno resumo das conclusões

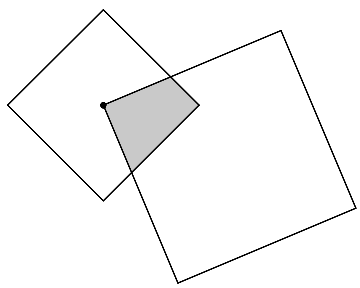
Tarefa 8 - Problemas com quadriláteros

1. A sobreposição de dois quadrados, não necessariamente com o mesmo lado, gera um novo polígono (ver exemplos na figura).



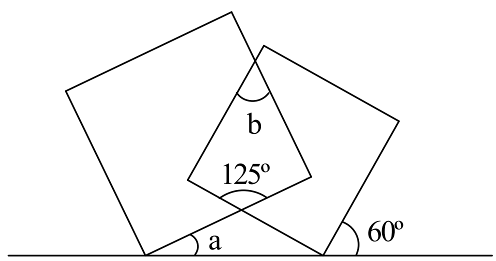
Que polígonos se podem obter por sobreposição? Losangos, triângulos isósceles, pentágonos, hexágonos, octógonos, decágonos, papagaios, trapézios? Explica porque não se pode obter um dado polígono.

2. Dois quadrados sobrepõem-se como mostra a figura.



Um dos vértices do quadrado maior coincide com o centro do quadrado menor. Qual é a relação entre a área sombreada e a área do quadrado menor? Demonstra-a.

3. Na figura estão representados uma recta e dois quadrados sobrepostos. Calcula as medidas dos ângulos **a** e **b**.



Anexo II

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo(a). Sr(a).

Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) ________________________ do 7.º ano da Escola Secundária com 3.º Ciclo XXXXXXXXXXX

A Geometria é um tema fundamental no currículo da Matemática e gostaríamos de perceber melhor como é que o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico influência a aprendizagens dos alunos, em particular, como é que o processo de aprendizagem dos alunos contribui para o desenvolvimento do seu sentido espacial.

Para concretizar este propósito será necessário proceder à gravação áudio e video das aulas e de entrevistas gravadas aos alunos.

Assim, e tendo em conta que é garantido o anonimato dos alunos, torna-se importante ter o seu acordo na participação do seu educando nesta actividade. De igual modo, nos colocamos à sua inteira disposição, para qualquer esclarecimento que deseje.

Agradecemos a sua colaboração e solicitamos que assine a declaração em baixo e que a devolva pelo seu educando.

Porto, 9 de Fevereiro de 2009

Com os melhores cumprimentos

Declaro que concordo que o meu educando_________________________________

____participe nesta actividade desenvolvida pelas professoras Alexandra Pinheiro e (*nome da professora da turma*).

Data:_____________ Assinatura: ____

Anexo III

Guiões das Entrevistas

Guião da primeira entrevista aos alunos

Data de realização da primeira entrevista:

Identificação e caracterização do aluno:

Nome do aluno:____________________

Idade: __________

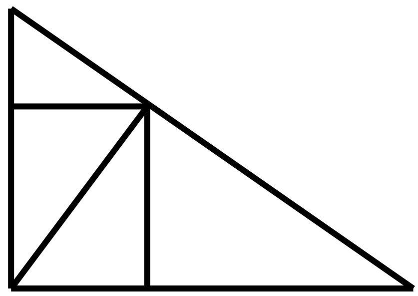
Repetiu algum ano? Qual? ___________________

Perguntas ao aluno

- Como tem sido o teu percurso em relação à Matemática? E como te vês como aluno?
- Como estudas Matemática?
- Qual foi a aula de Matemática que mais gostaste? Porquê?
- E a que menos gostaste? Porquê?
- O que é que já estudaste em Geometria em anos anteriores?
- O que mais gostaste nestas aulas de Geometria? E o que menos gostaste? Porquê?
- Já alguma vez utilizaste computadores nas aulas de Geometria? E outros materiais?

Tarefas para o aluno responder:

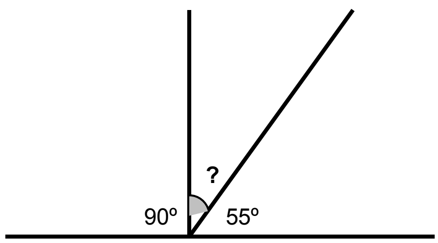
1. Observa a figura ao lado.
   Quantos triângulos estão na figura?



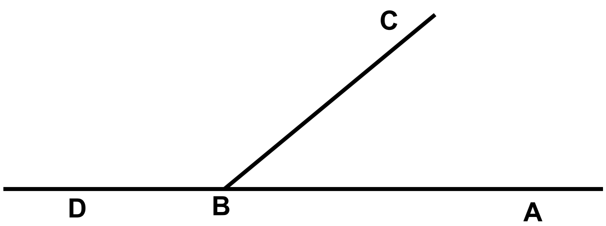
2. Usando um transferidor desenha dois ângulos com as seguintes amplitudes:

100º	**40º**

3. Calcula a amplitude do ângulo assinalado com (?).



4. O João quis medir a amplitude do ângulo ABC e obteve 138º.
   Que erro cometeu?



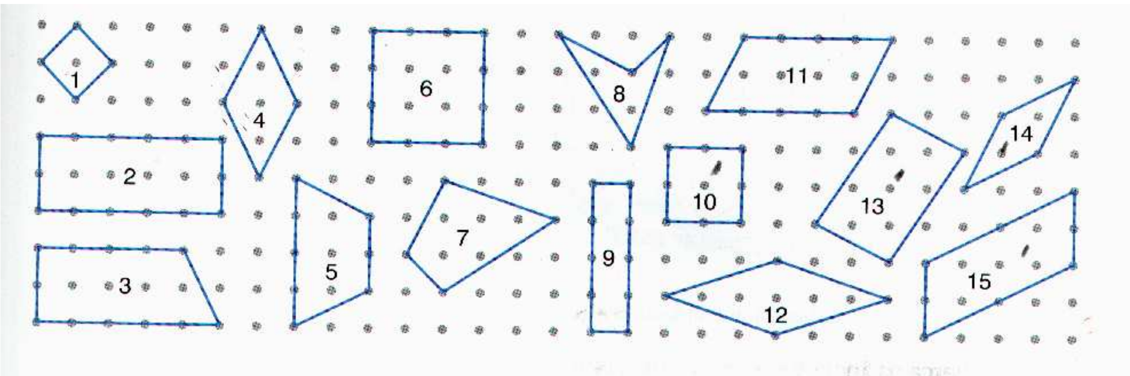
   Qual é a amplitude do ângulo ABC?

5. Dois lados de um triângulo medem 5,5 cm e 7,5 cm. Quais os seguintes comprimentos podem ser usados para o terceiro lado?

3,5 cm	**10 cm**	**13,5 cm**	**12,8 cm**	**1,5 cm**

6. Sabendo que um dos lados de um triângulo tem de comprimento 10 cm, escolhe dois comprimentos para os outros dois lados, de modo a que o triângulo obtido tenha perímetro 25 cm. Explica como procedeste.

7. Dos quadriláteros abaixo representados indica os que são:
   a. Paralelogramos;
   b. Rectângulos;
   c. Losangos;
   d. Trapézios;
   e. Quadrados.



8. Na figura 1 está representado um segmento de recta:

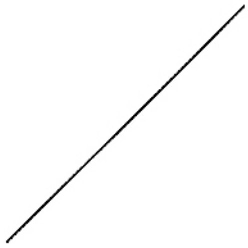
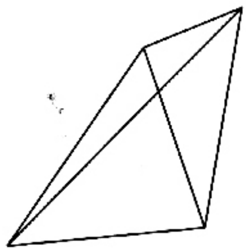


Figura 1

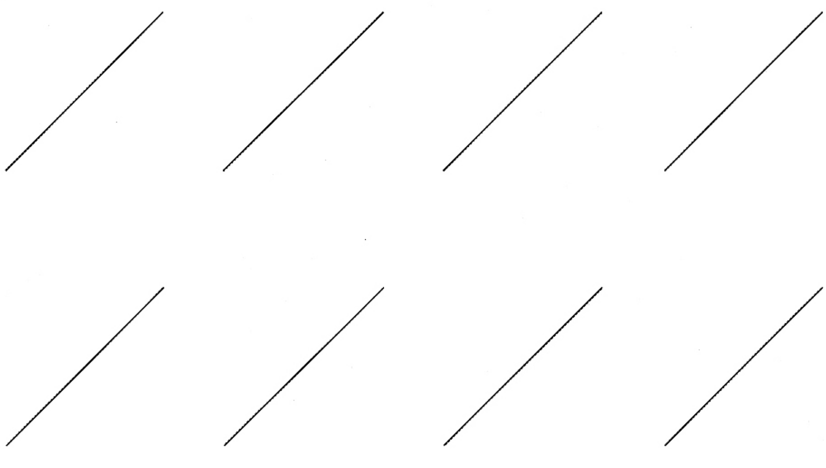
Se traçares um novo segmento de recta que cruze o primeiro e unires as extremidades destes dois segmentos de recta, obténs um quadrilátero, como podes ver na figura 2:

Figura 2

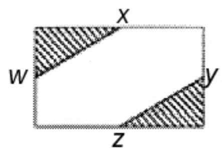


Na figura 2, podes reparar que os dois segmentos de recta não têm o mesmo comprimento. E podes notar, também, que nenhum deles é cruzado ao meio pelo outro.

Como deverás desenhar o segundo segmento de recta se quiseres obter um papagaio? E se quiseres obter um paralelogramo? E um rectângulo? E um losango? E um quadrado? **Faz as tentativas que quiseres e escreve as tuas respostas**



9. *W, X, Y* e o *Z* são os pontos médios dos lados do rectângulo da figura. Que parte do rectângulo é a sombreada?



Questões a colocar às alunas na segunda entrevista

- O que gostastes de trabalhar mais nas aulas de geometria? Porquê?
- O que gostastes de trabalhar menos nas aulas de geometria? Porquê?
- Achas que as actividades propostas te ajudaram na compreensão dos tópicos de geometria? Porquê?
- Sentiste que o trabalho desenvolvido foi eficaz em termos da tua aprendizagem? Porquê?
- Em que parte da geometria tiveste mais dificuldade? E menos? Porquê?