

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Física



Inércia, Espaço e Tempo
(com uma aplicação teórica que dispensa a Matéria Escura)

Manuel Baroso Xavier

Dissertação orientada pelos Professores Doutores

Paulo Crawford

Ricardo Coelho

Mestrado em Física

Especialização em Física Estatística e Não Linear

2015

What I cannot create, I do not understand.

Richard Feynman



Índice

Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	1
1. Inércia, Espaço e Tempo na mecânica newtoniana	5
1.1. O aparecimento da lei da inércia no século XVII.....	5
1.2. Insuficiências da lei da inércia newtoniana	7
2. Críticas conceptuais à mecânica newtoniana a partir do século XIX.....	11
2.1. Críticas ao espaço e tempo absolutos. O referencial inercial.	11
2.2. As críticas de Mach	18
2.3. Teorias relacionais da mecânica. Inércia relativa.	21
3. Reformulação da mecânica clássica enquanto teoria lógica e empiricamente adequada	27
3.1. Mecânica Relacional Clássica Restrita (MRCR).....	27
3.2. Mecânica Relacional Clássica Generalizada (MRCG).....	37
3.3. Uma aplicação da MRCG à dinâmica galáctica (hipótese alternativa à matéria escura).....	44
4. Investigações Futuras para o Paradigma Relativista.....	51
4.1. Relatividade restrita	51
4.2. Relatividade geral (e quatro princípios que guiaram Einstein na sua construção).....	54
Conclusões	63
Referências Bibliográficas	65

Agradecimentos

Aos meus orientadores Paulo Crawford e Ricardo Coelho por acreditarem na importância das abordagens histórica e filosófica à física.

Aos meus amigos chineses, especialmente ao Francisco Zhang, cuja maravilhosa e atenciosa amizade coincidiu com o período de realização desta dissertação.

Ao meu amigo André Viana cujo modelo de amizade me inspira.

Ao meu amigo Diogo Baltazar pela amizade, e por me ter ajudado a despertar do meu “sono dogmático”.

À Rita por acreditar em mim (e pela revisão do texto).

À minha irmã por me ir lembrando de o que é ser criança (e pela composição das figuras).

Aos meus pais pelo seu apoio e amor incondicionais.

Resumo

Apresenta-se, nesta dissertação, uma abordagem conceptual à física, partindo de conceitos fundamentais como os de inércia, espaço, tempo e movimento, procurando perceber até que ponto o seu esclarecimento teórico pode revelar uma nova compreensão da mundividência física. Procura-se encontrar na história da ciência ideias para alimentar a investigação. São discutidas as questões do espaço e tempo absolutos na teoria de Newton, bem como a importância da lei da inércia durante a revolução científica dos séculos XVI/XVII. De seguida, são consideradas as críticas à mecânica newtoniana, representadas especialmente pelas reflexões de Ernst Mach no século XIX. Apresenta-se uma teoria clássica alternativa, mais ou menos original, a Mecânica Relacional Clássica Generalizada (MRCG), que implementa termos puramente relacionais (incluindo o de inércia), os princípios da relatividade, de Mach e da equivalência, e que, em especial, tem como aplicação concreta a explicação da *flat region* em curvas de rotação de galáxias espirais como um efeito puramente dinâmico, sem necessidade de postular a matéria escura. Por fim, são deixadas algumas pistas para investigações futuras no domínio relativista, nomeadamente a necessidade de uma abordagem mais operacional à teoria da relatividade geral que clarifique a interpretação de coordenadas, a relação entre o princípio da relatividade e a equivalência entre referenciais inerciais, as transformações que relacionam referenciais inerciais e não-inerciais e a implementação da relatividade geral como uma teoria machiana. É minha convicção que a construção de teorias mais aptas da gravitação, incluindo teorias unificadoras com o mundo quântico, depende do esclarecimento aprofundado dos conceitos referidos.

Palavras-chave: Inércia, Espaço, Tempo, Matéria Escura

Abstract

A conceptual approach to Physics is presented in this dissertation, starting from fundamental concepts like those of inertia, space, time and motion, seeking to understand to what extent their theoretical clarification could reveal a new comprehension of the physical worldview. To fuel our investigation, we search for ideas in the history of science. The issues of absolute space and time in Newton's theory are addressed, as well as the importance of the law of inertia during the scientific revolution of the 16th/17th centuries. Next, the criticisms to newtonian mechanics are considered, especially those represented by the thoughts of Ernst Mach in the 19th century. A somewhat original classical theory is presented, Generalized Classical Relational Mechanics (GCRM), which implements purely relational terms (including that of inertia), the principles of relativity, Mach and equivalence, and which, in particular, has the concrete application of explaining the flat region of spiral galaxy's rotational curves as a purely dynamical effect, without the need of postulating dark matter. Finally, some clues for future investigations in the relativistic domain are suggested, namely, the need of an operational approach to General Relativity, which clarifies the interpretation of coordinates, the relationship between the principle of relativity and the equivalence of inertial reference frames, the transformations between inertial and non-inertial frames, and the implementation of the General Relativity as a machian theory. It is my conviction that the development of better theories of gravitation, including unified theories with the quantum world, depends on a deep clarification of the mentioned concepts

Keywords: Inertia, Space, Time, Dark Matter

Introdução

Nesta dissertação de escopo ambicioso, partirei de conceitos físicos muito gerais, de forma a investigar até que ponto um esclarecimento conceptual dos mesmos pode alumiar resultados concretos. São esses conceitos os de *inércia*, *espaço*, *tempo* e *movimento*. Uma compreensão adequada deles é naturalmente necessária se se pretender construir teorias adequadas da mecânica. O meu trabalho centrar-se-á sobretudo sobre a mecânica ao nível macroscópico, sendo o domínio quântico deixado de parte. No entanto, até mesmo no domínio pré-relativista, existem certos problemas que carecem de solução e que, se resolvidos, podem preparar o terreno para construções teóricas mais gerais e ambiciosas.

O meu método de investigação neste trabalho passa por ir beber a fontes históricas novas ideias. Isto porque tenho a convicção de que, nesta era frenética em que “publicamos mais rápido do que pensamos”¹, tem-se dado pouca ênfase ao pensamento crítico sobre os fundamentos da ciência, pensamento esse que era muito estimado até meados do século XX. Estou plenamente convicto de que um conhecimento da história da ciência pode sensibilizar o cientista na sua investigação, sugerindo-lhe novas perspectivas através das quais ele pode repensar problemas modernos. O trabalho do físico teórico Julian Barbour (n.1937)², de carreira pouco ortodoxa, mas muito rica, é um bom exemplo de como o interesse histórico pode ser proveitoso na investigação moderna.

O plano de trabalhos para esta dissertação é o seguinte. Num primeiro capítulo, discutir-se-á o surgimento da lei da inércia durante a revolução científica dos séculos XVI/XVII, e o seu papel primordial na mecânica de newton, lembrando também as dificuldades que os conceitos de espaço e tempo absolutos colocam à compreensão física do mundo. Depois, num segundo capítulo, analisar-se-ão as críticas que a mecânica newtoniana enfrentou a partir de meados do século XIX. Ernst Mach é um dos célebres homens que muito criticaram a dimensão metafísica da mecânica newtoniana. Esta análise centrar-se-á também no problema da definição de um referencial inercial, discutindo-se os trabalhos de Carl Neumann, Ludwig Lange, James Thomson, Peter Tait e Henri Poincaré. A vontade de abolir os absolutos newtonianos e de, em particular, tentar

¹ Wolfgang Pauli terá alegadamente dito a um colega: “I don’t mind you thinking slowly; I mind you publishing faster than you think”.

² Existem outros autores como Lee Smolin ou Carlo Roveli. No entanto, estou mais familiarizado com o trabalho de Barbour.

implementar uma “inércia relativa” motivou homens como Wenzel Hofmann, Hans Reissner e Erwin Schrödinger (estes dois últimos já depois do advento da relatividade geral) a proporem teorias da mecânica clássica que concretizavam aquilo que, mais tarde, Albert Einstein denominou como o “princípio de Mach”. Num terceiro capítulo, apresentar-se-á uma formulação da mecânica clássica, de forma a tentar torná-la empírica e logicamente adequada. Esta mecânica tem a vantagem de partir de um conceito primitivo novo, o de *corpo inercial*. Este corpo é um corpo que sente a experiência da imponderabilidade, e é o candidato a substituir o conceito de *partícula livre*. Na esteira das teorias de Hofmann, Reissner e Schrödinger, desenvolve-se um exercício de construção teórica, a Mecânica Relacional Clássica Generalizada (MRCG), onde os princípios de Mach, da relatividade e da equivalência são respeitados. Esta mecânica tem uma aplicação muito prometedora à dinâmica galáctica; sucintamente, a MRCG prevê uma *flat region* nas curvas de rotação das galáxias espirais que são, na atualidade, unanimemente explicadas através da hipótese *ad hoc* da existência de matéria escura. A MRCG dispensa a matéria escura, e explica a *flat region* como sendo um efeito dinâmico de uma nova teoria da inércia/gravitação (que não é a célebre MOND). Por fim, num último capítulo que pretende apenas sugerir pistas futuras, discutirei problemas no paradigma relativista, nomeadamente, a necessidade de uma abordagem mais operacional à teoria da relatividade geral que clarifique a interpretação de coordenadas, a relação entre o princípio da relatividade e a equivalência entre referenciais inerciais, as transformações que relacionam referenciais inerciais e não-inerciais e a implementação da relatividade geral como uma teoria machiana. Este capítulo é algo intrépido, na medida em que tece algumas críticas, sem contudo apresentar grandes alternativas. Decidi, assim mesmo, manter o seu estilo, esperando talvez que as intuições que lá figuram possam fazer sentido para o leitor com preocupações semelhantes às minhas.

Grande parte desta tese centra-se no “paradigma clássico” da física. Como já aludi, estou convicto de que nesse mesmo domínio existem problemas por resolver, que acabam por ser transportados para o domínio relativista ou quântico. A sua resolução no domínio clássico pode preparar o terreno para investigações futuras. Não sou a voz dissidente quanto a esta via de investigação. Basta consultar as referências bibliográficas para ter uma ideia da literatura (contemporânea) que procura respostas na história da ciência.

Encaro estas minhas investigações como embrionárias. As grandes coisas começam necessariamente pequenas. As conclusões que retirei deste trabalho terão, eventualmente,

de ser estendidas a uma teoria da gravitação mais ambiciosa e também a uma possível unificação com a Mecânica Quântica. Este é o caminho a seguir. Que o meu trabalho possa sugerir ideias positivas ao leitor, é o que eu desejo profundamente.

1. Inércia, Espaço e Tempo na mecânica newtoniana

1.1. O aparecimento da lei da inércia no século XVII

A lei da inércia é um dos enunciados basilares das teorias mecânicas clássicas e modernas (ao nível quântico, bem como relativista). Sucintamente, e como definição investigatória, poder-se-á avançar que a lei da inércia sugere a identificação de um certo tipo de movimento especial a que se pode chamar, apropriadamente, movimento *natural* — i.e. um movimento que um corpo adquire naturalmente, de forma não forçada. Identificado o movimento natural, todos os desvios a ele poderão ser vistos como movimentos *violentos*. Em princípio, um movimento violento necessitará de um agente *externo* que *cause* o desvio do estado cinemático natural.

A lei da inércia está certamente no epicentro das preocupações mais fundamentais relacionadas com o conceito primitivo de *movimento*. Para Aristóteles, como é sabido, o movimento era uma subcategoria do conceito mais lato de *mudança*. Na mundividência aristotélica, a realidade apresentava dois tipos de movimentos (de onde me inspirei terminologicamente): os naturais e os violentos. Os movimentos naturais eram todos aqueles determinados pela composição de um objeto nos vários elementos aristotélicos: no mundo sublunar, pelos 4 elementos, e no mundo supralunar, pelo elemento éter; um corpo térreo teria a tendência natural de cair em linha reta para ocupar o centro da Terra, um corpo aquoso teria a tendência para ocupar as áreas circundantes, etc., até ao elemento éter, cujo movimento natural era o circular, o mais perfeito de todos. Todos os movimentos observados que se desviavam do padrão eram identificados como sendo violentos. Por exemplo, uma caixa elevada do chão até a uma bancada era animada de movimento violento, na medida em que contrariava a sua tendência natural de cair verticalmente.

Uma observação crua e imediata de movimentos relativos parecia levar à conclusão de que estes se extinguíam rapidamente assim que um agente externo deixava de forçar o corpo atuado (e.g. uma bola lançada sobre o chão eventualmente parava). Esta lei aristotélica do movimento é, por vezes, modernamente enunciada através da proposição: “a força aristotélica é proporcional à velocidade, $F \propto v$ ”. O grande salto conceptual dos homens da revolução científica, como Galileu, consistiu na constatação de que, para além do *repouso*, o movimento também podia ser um *estado natural*, estado esse que se

perpetuaria na ausência de uma força. Assim, desenvolvendo algum pensamento abstrato, podia chegar-se à conclusão de que, na ausência de atrito, uma bola lançada sobre o chão prosseguiria no seu movimento desimpedido, até que algo a si exterior a parasse.

Newton acabaria por epitomar estas considerações na sua famosa *lei da inércia*, que ainda hoje pode ser enunciada na sua forma original, com muito proveito:

Todo o corpo persevera no seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha recta, a não ser na medida em que é obrigado a mudar o seu estado pelas forças que lhe são impressas. (Balola 2010: 32)³

Como se pode atestar, pelo menos qualitativamente, a distinção entre movimento natural e violento preservou-se desde o aristotelismo até à mecânica newtoniana. A diferença está na terminologia moderna e, mais importante, nos tipos de movimentos envolvidos: fala-se de movimento *inercial*, em vez de *natural*, sendo este retilíneo e uniforme, e de movimento *não-inercial*, em vez de *violento*, sendo este acelerado. O desvio quantitativo do movimento inercial é, em particular, dado pela *lei fundamental da dinâmica* que enuncia a força como proporcional à aceleração de um corpo, sendo a constante de proporcionalidade uma quantidade denominada *massa*.

Apesar de, estritamente, não se poder observar nenhum corpo que respeite a lei da inércia (já que parece ser tarefa difícil identificar um corpo livre), ela serve como arquétipo, como referência, cujos desvios podem então ser quantitativamente estudados através da lei fundamental da dinâmica. Poder-se-á talvez defender que a lei da inércia é assim verificada *indiretamente*. Isto, aliás, é patente nos exemplos que Newton apresenta no escólio à lei — são todos eles, surpreendentemente, movimentos não-inerciais:

Os projecteis perseveram nos seus movimentos a não ser na medida em que são retardados pela resistência do ar e impelidos para baixo pela força da gravidade. Um pião, cujas partes, devido à sua coesão, continuamente se retraem dos movimentos rectilíneos, não cessa de rodar a não ser na medida em que é retardado pelo ar. Porém, os corpos maiores dos planetas e dos cometas conservam, por mais tempo, os seus movimentos progressivos e circulares feitos em espaços menos resistentes. (*Id.*)

A importância da lei da inércia é clara, em particular, na construção da lei da gravitação universal newtoniana. De facto, a gravidade só pode ser encarada como uma força se se imaginar que, na sua ausência, os planetas seguiriam trajetórias retilíneas e

³ Tem-se também como referência habitual da fonte primária a tradução para inglês dos *Principia* (Cohen e Whitman 1999).

uniformes. Como esse não é o caso, deduz-se a natureza da força gravítica tendo em conta as trajetórias observadas (cónicas), como desvios das trajetórias inercias.

1.2. Insuficiências da lei da inércia newtoniana

Todas as reflexões acima escritas foram feitas sem olhar a grandes cuidados quanto ao *observador* que enuncia a lei da inércia. No enunciado newtoniano, nada é dito a esse respeito. Esta insuficiência não foi devidamente encarada até à segunda metade do século XIX.

O problema pode ser sugerido de uma forma muito simples: o movimento é, empiricamente, identificado como a variação da posição de um corpo ao longo do tempo, *medida por um segundo observador*. Ora, visto que um observador também é um corpo material que pode ter movimento arbitrário, como distinguir o movimento associado àquilo que é medido do movimento associado àquilo que mede, se, aparentemente, só se podem realizar medições cinemáticas *relativas*? Em particular, quais são os observadores que verificam a lei da inércia, e que tipo de movimento têm eles?

Estas dificuldades parecem ser exacerbadas pelos conceitos newtonianos de espaço e tempo absolutos, apresentados no célebre escólio às definições. Para Newton, os conceitos cinemáticos deviam ser divididos entre verdadeiros/aparentes e absolutos/relativos. Um movimento relativo ou aparente era um movimento que se devia ao estado cinemático relativo entre corpos, enquanto que um movimento verdadeiro/absoluto era um movimento de um corpo em relação ao espaço e tempo absolutos. Em particular, parece que, por defeito, a lei da inércia era enunciada em relação a estes dois últimos conceitos. Ora, como o próprio Newton afirma nos *Principia*, o espaço e o tempo absolutos estão vedados aos dados dos sentidos, o que coloca um problema à sua mecânica: como podemos ter acesso aos movimentos verdadeiros dos corpos? Ademais, tendo em conta o que foi dito no parágrafo anterior sobre o conceito de movimento, esta questão fará sequer algum sentido? Haverá algum conteúdo no conceito de movimento absoluto, ou serão todos os movimentos relativos?

Para Newton, não obstante as dificuldades enunciadas, existia uma forma de distinguir entre movimentos relativos e movimentos absolutos. Newton estava, aliás, muito interessado nesta questão, pois a então vigente mecânica de Descartes só permitia movimentos relativos. Segundo o que é dito nos *Principia*, os movimentos relativos e

absolutos podem ser distinguidos através de *causas* e *efeitos*. Um exemplo simples será ilustrativo.⁴ Imagine-se um navio atracado no cais, aprontando-se para zarpar. Quando o navio levanta âncora e içã as velas, acelera em direção ao alto mar. Ora, numa descrição puramente relativa do movimento, não há maneira de dizer se é o navio que se afasta do cais ou o cais do navio: ambas são descrições equivalentes. No entanto, alerta Newton, a *causa* do movimento está no navio: é a força do vento que atua nas velas (e não no cais). Assim, apesar de ser verdade que existe movimento relativo entre o cais e o navio, esse movimento é puramente accidental, sendo o navio que se move “verdadeiramente”, ao contrário do cais, que permanece no seu estado de movimento anterior. Quanto aos *efeitos*, Newton refere-se àquilo que hoje chamamos *efeitos não-inerciais*. O navio, ao ser atuado por uma força, desvia-se do movimento que tinha anteriormente, e isso pode ser sentido dentro do navio (por exemplo, pelos marinheiros) como uma aceleração de sentido oposto ao sentido do movimento. Assim, os marinheiros podem efetivamente dizer que são eles que aceleram “em absoluto”.

O exemplo apresentado nos *Principia* consiste na já célebre experiência do balde, que será talvez desnecessário detalhar mais uma vez. Resumidamente, nos estados inicial e final da experiência, o movimento relativo entre o balde e a água é nulo, mas existe uma diferença apreciável: no início, a superfície da água estava plana, no final, curva. Este é o efeito não-inercial que procuramos. Newton nota que a curvatura da água é um sinal do estado de rotação *absoluta* da água, i.e., rotação em relação ao espaço absoluto.

Relembremos que o nosso objetivo inicial era o de esclarecer em relação a que observador eram a lei da inércia e as leis da mecânica enunciadas. Por defeito, Newton parece interpretá-las em relação ao espaço e tempo absolutos. Surgiu assim a dúvida de como se poderia fazer sentido de um conceito como o espaço absoluto, já que ele não parece ser parte do mundo físico onde o movimento acontece. Como vimos, Newton argumenta que é possível identificar o espaço absoluto através de forças aplicadas e efeitos não-inerciais. Se é verdade que esta explicação de Newton revela algo muito importante sobre a natureza do movimento, não é verdade que ela resolva o enigma do espaço absoluto.

Para se perceber porque não é resolvida a insuficiência já suprarreferida, podemos remeter-nos a um resultado dos próprios *Principia*: o corolário V às leis do movimento.

⁴ Este exemplo não é de Newton.

Este corolário é, modernamente, referido como o “princípio da relatividade de Galileu”.

Lê-se:

Corolário V: Os movimentos entre si de corpos incluídos num dado espaço são os mesmos, quer aquele espaço esteja em repouso, quer se mova uniformemente em linha recta sem movimento circular. (Balola 2010: 39)

Modernamente, diz-se que, no contexto da física clássica, as leis da mecânica são invariantes para transformações de Galileu. Isto significa que existe um conjunto de observadores que, localmente, não se conseguem distinguir entre si através de uma qualquer experiência física. Galileu foi provavelmente o primeiro autor a enunciar esta intuição de uma forma muito clara. Nos seus *Diálogos sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo*, de 1632, fez notar que um marinheiro confinado na cabine de um navio que cruza o mar com velocidade constante não tem maneira de determinar localmente (i.e., sem olhar pela janela) se está de facto a navegar ou ainda parado no cais.

Ora, esta constatação coloca um problema delicado ao sistema newtoniano. De facto, se é verdade que parece ser possível afirmar que existem acelerações absolutas (relembre-se o que foi dito sobre as *causas* e os *efeitos*), o mesmo não se pode dizer quanto a velocidades. Recuperando o exemplo do navio: se, como vimos, um marinheiro não pode saber se está ancorado no cais ou se navega livremente pelo oceano, muito menos pode determinar com que velocidade (constante) se move em relação a esse palco elusivo chamado “espaço absoluto”. Resumindo, estados de velocidade e repouso absolutos (i.e., em relação ao espaço e tempo absolutos) parecem ser completamente indetermináveis. Isto é o suficiente para tornar problemáticos os conceitos absolutos de espaço e tempo.

Na segunda metade do século XIX, diversos autores encararam esta incoerência muito seriamente. Aquilo que tinham em comum, motivados certamente por um fervor filosófico instrumentalista e empirista, era a vontade de erradicar da física aquilo a que por vezes chamavam os “absolutos metafísicos de Newton”. Em especial, o espaço e tempo absolutos seriam supérfluos se se conseguisse obter um método geral para determinar os observadores referidos no corolário V (observadores inerciais). Esses observadores seriam, em princípio, aqueles que verificariam a lei da inércia. A mecânica de Newton ficaria assim bem fundamentada, sem recorrer a conceitos metafísicos.

Discutamos então em que consistiram algumas destas críticas.

2. Críticas conceptuais à mecânica newtoniana a partir do século XIX

2.1. Críticas ao espaço e tempo absolutos. O referencial inercial.

Em 1870, Carl Neumann (1993) apresentou um artigo onde discutiu as insuficiências da teoria newtoniana. Para o autor, a lei da inércia era ininteligível, já que não especificava em relação a que referencial tinha uma partícula livre uma trajetória retilínea, e em relação a que escala temporal ela se deslocava uniformemente (ecos do que já foi abordado acima). Identificadas estas incoerências, Neumann reformulou a lei da inércia num conjunto de princípios e definições. O primeiro princípio postula a existência de um corpo primordial que o autor denomina “Corpo Alfa”. A primeira definição define “movimento” como mudança de posição em relação a este corpo. De certa forma, o Corpo Alfa de Neumann joga o papel do espaço absoluto de Newton.⁵ O segundo princípio postula que uma partícula livre segue uma trajetória retilínea em relação ao Corpo Alfa. O terceiro princípio avança que, dadas duas partículas livres, a espaços iguais percorridos por uma equivalem sempre espaços iguais percorridos pela outra. A segunda definição define “tempos iguais” como aqueles correspondentes aos espaços iguais percorridos por uma dessas partículas. De certa forma, para Neumann, o relógio ideal é a partícula livre.

A utilidade do conceito de Corpo Alfa é dúbia, mas a segunda definição de Neumann é tida habitualmente como bastante útil⁶, pois parece disponibilizar à mecânica uma forma objetiva de definir tempos iguais, que não recorre a “movimentos imperfeitos” para construir relógios (e.g. dia sideral, período do pêndulo etc.). De facto, na discussão sobre o tempo que figura no escólio dos *Principia*, Newton relembra que “[é] possível que não haja nenhum movimento igual, pelo qual o tempo possa ser rigorosamente medido”. Dada a definição de Neumann, frases como “a rotação da Terra abrandar” são transformadas em “uma partícula livre percorre um espaço menor no dia sideral n do que

⁵ Neumann declara que tinha tanta legitimidade em postular um “corpo alfa” como os físicos contemporâneos tinham em postular entidades não observáveis como o fluido elétrico ou o éter luminoso.

⁶ Veja-se, por exemplo, (DiSalle 2009).

no dia sideral $n + 1$ ". Ficam assim esclarecidas, em termos lógicos, proposições que envolvam o verbo "mover" ou equivalentes.⁷

Dito isto, não deixa de ser questionável o valor pragmático da construção de Neumann. Se é verdade que o autor alertou para problemas importantes e que, em especial, contribuiu para um esclarecimento lógico da lei da inércia, nenhum físico define *tempo* em relação a essas questionáveis entidades chamadas "partículas livres". Para mais, em último caso, o que verdadeiramente importa é a nossa sensação fisiológica da passagem do tempo, que está na base de qualquer convenção quando se define um relógio primordial.⁸

Num artigo de 1885, Lange (2014) reconheceu a utilidade da definição de escala temporal de Neumann como substituto do tempo absoluto newtoniano, mas afirmou que o mesmo não se podia dizer quanto ao conceito de Corpo Alfa. Foi sua intenção, nesse artigo, fazer uma extensão do trabalho de Neumann e igualmente abolir o conceito de espaço absoluto.

A chave para entender o raciocínio de Lange é a seguinte: Lange demonstrou matematicamente que, dados as trajetórias de até três partículas (mas não mais) num referencial arbitrário S, essas trajetórias podem sempre ser vistas como retilíneas num outro referencial S' (nada é dito sobre a velocidade a que essas trajetórias são percorridas). Ora, se esse é o caso, é uma questão de convenção dizer que uma partícula se desloca retilineamente, sendo necessário, para isso, estipular convencionalmente que três partículas o fazem, para que uma quarta (ou mais) possa ser comparada em relação às três primeiras.

⁷ Em termos linguísticos, o verbo "mover" tem de ter um argumento encabeçado pela locução preposicional "em relação a", isto é: "x move-se em relação a y".

⁸ Quando Galileu realizou os seus estudos de queda livre através do movimento de uma bola num plano inclinado, utilizou um relógio a água (clepsidra). O relógio consistia num recipiente com água tampado. A contagem do tempo iniciava-se quando se removia a tampa, e a água vertia para um segundo recipiente. Consoante a quantidade de água apreciada no segundo recipiente, mais ou menos tempo teria passado. Medir o "tempo" consiste simplesmente em processos deste tipo. A sensação fisiológica de tempo de Galileu dizia-lhe certamente que, para volumes iguais de água vertida, teriam passado tempos iguais. Outras crenças razoáveis estão na base da utilização do mesmo relógio de água para comparações entre resultados *viz.*, que os recipientes não alteravam drasticamente a sua forma com o tempo, que a água não alterava a sua densidade ou composição química, etc. Em geral, que, dadas as mesmas condições físicas, o mesmo "processo" ocorreria, e, portanto, o mesmo "tempo" passaria. Poderíamos então perguntar: "como temos a certeza que para volumes de água iguais passam tempos iguais? Será que podemos confirmar essa hipótese com um segundo relógio, por exemplo, uma ampulheta?". Mas então a mesma questão seria remetida para a ampulheta: como sabemos que a ampulheta mede tempos iguais? Etc.

Esboçemos rapidamente a sua demonstração.⁹ Tendo como referência a seguinte configuração geométrica no espaço euclidiano:

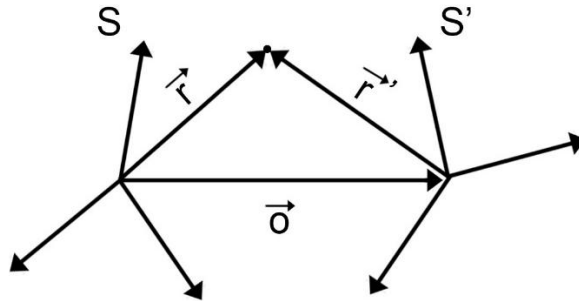


Figura 1

escreve-se, em geral, para os vetores envolvidos:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{o}$$

Sugiro que se introduza uma notação apropriada que evidencie em relação a que referencial (base) são os vetores projetados:

$$\begin{cases} \vec{u}^{(S)} & , \text{vetor projetado sobre } S \\ u^{(S')} & , \text{vetor projetado sobre } S' \end{cases}$$

Tendo em conta esta notação, $\vec{r}^{(S)}$ é a posição da partícula em relação a S, e $\vec{r}'^{(S')}$ a posição da partícula em relação a S', enquanto que $\vec{r}^{(S')}$ e $\vec{r}'^{(S)}$ não têm nenhum significado físico em especial.

A relação entre as coordenadas do vetor em duas bases diferentes é dada por uma matriz de transformação. Neste caso, a matriz é de rotação, já que se escolhem referenciais com eixos ortonormados e réguas iguais:

$$\begin{aligned} \vec{r}^{(S)} &= \mathcal{R} \vec{r}'^{(S')} \\ \mathcal{R}\mathcal{R}^T &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

⁹ Ver, por exemplo, (Giulini 2002) e (Pfister 2014).

A posição da partícula varia no tempo. Cada observador mede o tempo com o seu relógio. No caso não-relativista, os observadores chegam à conclusão de que os seus relógios se relacionam entre si através da transformação $t^{(S)} = at^{(S')} + b$. Se ambos os observadores usarem relógios do mesmo tipo e os acertarem, pode considerar-se $t^{(S)} = t^{(S')} = t$.

Escreve-se, finalmente:

$$\vec{r}^{(S)}(t) = \mathcal{R}(t)\vec{r}'^{(S')}(t) + \vec{\delta}^{(S)}(t)$$

A demonstração de Lange consiste em provar que, até ao máximo de três partículas, é sempre possível determinar um referencial que veja as trajetórias como retilíneas. Nada é dito sobre a velocidade com que as partículas percorrem essas retas (a uniformidade será determinada por um relógio de Neumann, o que não faz parte desta demonstração). Isto equivale a deixar a dependência em t desconhecida. Suponha-se então que existem n partículas com movimentos arbitrários em S descritos por funções vectoriais $\vec{r}_i^{(S)}(t)$. Impõe-se que, no referencial S' , essas partículas tenham movimento retilíneo $\vec{r}'^{(S')}(t) = \vec{a}_i^{(S')} + \vec{b}_i^{(S')} \varphi_i(t)$. Por exemplo, se $\varphi_i(t) = v_i t + \frac{a_i}{2} t^2$ as retas seriam uniformemente aceleradas, etc.

Dada a natureza da matriz $\mathcal{R}(t)$, o seguinte sistema de equações contém toda a informação empírica em jogo:

$$\begin{cases} \vec{r}_i^{(S)}(t) = \mathcal{R}(t) \left[\vec{a}_i^{(S')} + \vec{b}_i^{(S')} \varphi_i(t) \right] + \vec{\delta}^{(S)}(t) \\ \mathcal{R}(t) \mathcal{R}^T(t) = \mathbb{I} \end{cases}$$

A primeira expressão contém $3n$ equações (3 dimensões espaciais por partícula) e a segunda, pela ortogonalidade da matriz, tem 6 equações. No total obtêm-se assim $3n + 6$ equações. Quanto às incógnitas, têm-se n de $\varphi_i(t)$, 9 de $\mathcal{R}(t)$ e 3 de $\vec{\delta}^{(S)}(t)$, no total, $9 + 3 + n = 12 + n$. Para $n > 3$ o sistema fica indeterminado, por isso, tal como se pretendia demonstrar, é necessário $n = 3$.

Alicerçado neste resultado, Lange reconstruiu a lei da inércia da seguinte forma: tenham-se três partículas *livres*; o referencial que as vê com trajetórias retilíneas diz-se

um “referencial inercial”¹⁰; com base da definição de Neumann, podemos escolher uma dessas partículas como “relógio inercial”; por fim, o conteúdo físico da lei da inércia deve ler-se: “em relação a um referencial inercial e um relógio inercial, uma quarta partícula livre tem movimento retilíneo e uniforme.” Assim, segundo Lange, os conceitos de espaço e tempo absolutos tornam-se dispensáveis, pois a lei da inércia fica bem definida em relação ao referencial inercial e ao relógio inercial assim construídos.

Mais uma vez, poder-se-á questionar a validade de uma construção que encara como não problemático o conceito de partícula livre. De facto, se fosse fácil identificar uma partícula livre, bastaria apenas uma para definir um referencial inercial! O referencial inercial seria simplesmente aquele que veria a partícula livre com movimento retilíneo e uniforme. O resultado de Lange só é interessante para o caso geral em que não se sabe se as partículas são livres ou não, i.e., quais são, em geral, as forças em jogo.

Note-se como os conceitos de referencial inercial e partícula livre parecem ser duas faces da mesma moeda. O que é uma partícula livre? — uma partícula livre de forças. Como se sabe que uma partícula é livre de forças? — se tiver movimento retilíneo e uniforme em relação a um referencial inercial. O que é um referencial inercial? — um referencial que vê uma partícula livre com movimento retilíneo e uniforme. A circularidade deste raciocínio é verdadeiramente desconfortável.¹¹

Haverá uma solução para este problema inveterado? Em termos concretos, será possível definir uma partícula livre independentemente de um referencial inercial? Creio que sim, como irei sugerir na minha fundamentação da mecânica newtoniana. Mas antes de lá chegarmos, exploremos ainda as considerações de outros autores sobre esta problemática.

Em paralelo, na tradição britânica, James Thomson lançou um desafio (1884): dado um conjunto de partículas livres, como determinar, somente a partir das posições relativas entre estas, o referencial (inercial) que as vê com movimento retilíneo e uniforme? Peter Tait resolveu o problema prontamente (1884). O cenário é o seguinte: imagine-se que um observador longínquo capta fotografias das partículas a estudar. Essas fotografias são entregues a um outro observador que nada sabe sobre os instantes de tempo em que elas foram tiradas. Os únicos dados de que dispõe são as posições mútuas presentes nas várias

¹⁰ Lange sugeriu, por questões práticas e constrangimentos matemáticos, que essas partículas sejam emitidas simultaneamente de um ponto, de forma não colinear.

¹¹ O matemático Gottlob Frege (1961 [1886]), interessado nas questões formais da lógica, alerta para esta falácia num artigo em resposta ao de Lange.

fotografias e a informação de que as partículas são livres. Tait demonstrou que, a partir de três partículas, são necessárias no mínimo *quatro* fotografias para encontrar um referencial que as veja com movimento retilíneo e uniforme.

Façamos também esta demonstração.¹² Centrar-me-ei no caso em que existem três partículas, o que bastará para trazer ao de cima a substância que subjaz a este exercício.

Têm-se, então, várias fotografias de três partículas tiradas em tempos desconhecidos (mas ordenados), t_q , $1 \leq q \leq k$. Quanta informação está contida nestas fotografias? Para além de não se saber em relação a que escala de tempo foram elas obtidas, assumo-se que também não é dada nenhuma escala espacial *a priori*. Nesse caso, deve começar-se por convencionar uma unidade de medida espacial; seja ela a distância entre a primeira e segunda partículas na primeira fotografia, $r_{12}(t_1) = 1[E]$; segue-se que todas as restantes distâncias ficam determinadas a partir desta. Com esta definição, que se impunha necessária, a primeira fotografia só oferece 2 dados, pois uma das distâncias foi arbitrariamente tida como unidade. Todas as outras fotografias fornecem 3 dados: as distâncias relativas das partículas medidas em unidades $[E]$. Concluindo, no total têm-se $3k - 1$ dados associados às distâncias $r_{ij}(t_q)$.

Pelo “princípio da relatividade de Galileu” a origem do referencial desconhecido pode ser feita coincidir com a primeira partícula. Note-se, de seguida, que 2 pontos são suficientes para se desenhar uma reta e 3 pontos não colineares são suficientes para se construir um plano. Tenha-se como referência a primeira fotografia. O eixo zz pode ser definido positivo como a reta que passa pelas partículas 1 e 2 nessa fotografia t_1 . Por sua vez, pode-se construir o plano yOz de forma a que a partícula 3 fique na sua metade positiva. O eixo dos xx vem, naturalmente, perpendicular a este plano (o sentido positivo fica à escolha). Como se poderá atestar, tudo isto pode ser realizado sem qualquer impedimento, visto que existem sempre liberdades de escolha na construção de um referencial (*viz.* posição e orientação).¹³

Em relação à construção da escala temporal, pode seguir-se o raciocínio de Neumann, e usar-se a trajetória de uma das partículas para definir um relógio. Assim, constrói-se a escala temporal de modo a que a primeira fotografia coincida com a origem

¹² Ver, por exemplo, (Barbour 2010) e (Giulini 2013).

¹³ Creio que a minha construção é o mais geral possível, ao contrário da de Tait ou a de Barbour. Tait, por exemplo, constrange o movimento da partícula 2 ao eixo dos zz . Isto implica um cenário em que, no passado ou no futuro, as partículas colidem, apesar de este cenário ser completamente contingente.

do tempo, e que o tempo que decorre até a segunda fotografia corresponda a uma unidade temporal, isto é:

$$\begin{aligned}t_1 &= 0 \\t_2 - t_1 &= 1[T]\end{aligned}$$

Dada esta unidade, escolhe-se, por exemplo, a partícula 2 como relógio de Neumann.

Sintetizando, as posições das partículas em relação ao referencial vêm:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1(t) &\equiv 0, \forall t \\ \vec{r}_2(t_1 = 0) &= r_2(0)\vec{e}_z = r_{12}(0)\vec{e}_z = \vec{e}_z \\ \vec{r}_3(t_1 = 0) &= r_{3y}(0)\vec{e}_y + r_{3z}(0)\vec{e}_z\end{aligned}$$

Ora, procura-se um referencial tal que $\vec{r}_i(t) = \vec{a}_i + \vec{v}_i t$. As três equações anteriores fornecem alguma informação sobre os \vec{a}_i e \vec{v}_i (notando $\vec{r}_i(0) = \vec{a}_i$):

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{a}_2 &= \vec{e}_z \\ \vec{a}_3 &= a_{3y}\vec{e}_y + a_{3z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

Ficam então por determinar a_{3y} , a_{3z} e as velocidades das partículas 2 e 3, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 , que perfazem 6 incógnitas. Neste subtotal existem assim 8 incógnitas. Como foi notado anteriormente, têm-se $3k - 1$ dados $r_{ij}(t_q)$, o que fornece o mesmo número de equações para as incógnitas em questão:

$$r_{ij}(t_q) = \|\vec{r}_i(t_q) - \vec{r}_j(t_q)\|$$

Estamos agora em condições de saber quantas fotografias são necessárias para construir o referencial onde estas partículas têm movimento retilíneo e uniforme. O número total de incógnitas é $8 + k - 2$, pois, excetuando os casos das duas primeiras, os tempos das fotografias são desconhecidos (e a serem determinados em relação ao relógio de Neumann definido pelo movimento de uma das partículas). Assim, apenas a partir de $k = 4$ o número de equações (11) excede o número de incógnitas (10). Fica resolvido o problema.

Este resultado é, de alguma maneira, surpreendente, pois o movimento das partículas no referencial inercial tem velocidade constante e, em princípio, bastariam dois

instantes para definir a velocidade (diferença do espaço a dividir pela diferença do tempo). Esta insuficiência deve-se ao facto de nem a escala espacial nem a escala temporal estarem definidas *a priori*, sendo elas próprias definidas durante a determinação do referencial de inércia, como se pôde atestar durante a nossa demonstração. De certa forma, a lei da inércia *é que define* as escalas de espaço e tempo, algo que é comum às propostas de Neumann e Lange.¹⁴ Independentemente desta questão, a solução de Tait, apesar de útil, também não resolve o problema da determinação de partículas livres.

O trabalho destes vários autores ajudou, certamente, a clarificar melhor o conteúdo da lei da inércia. No entanto, creio que Ernst Mach terá sido o autor que melhor identificou os pressupostos da mecânica newtoniana, e o que subjazia à enunciação da lei da inércia. Vejamos em que consiste a sua crítica.

2.2. As críticas de Mach

As críticas de Ernst Mach (1919 [1901]) centram-se, tal como no caso dos autores já discutidos, nos conceitos absolutos da mecânica newtoniana. Resumidamente, os conceitos de espaço, tempo, movimento e inércia absolutos não são acessíveis empiricamente. Assim, o espaço deve existir enquanto mera relação entre corpos; o tempo enquanto mera comparação de movimentos, em que um deles serve de unidade convencional; o movimento também só deve ser “relativo a” – nada se pode deslocar “em absoluto”; mais do que isso, e nisto Mach é revolucionário, a inércia também deve ser definida na relação mútua entre corpos, em especial, deverá ter-se em consideração “o resto do universo” na determinação do movimento inercial local destes.

A mecânica newtoniana tinha, segundo Mach, sido construída com base num conjunto de constatações empíricas que, falaciosamente, tinham sido estendidas ao domínio do abstrato, para lá dos limites adequados. A lei da inércia era, na verdade,

¹⁴ Pessoalmente, não creio que esta via seja muito frutuosa: as escalas de espaço e tempo devem ser, por assim dizer, *externas* à determinação das leis da natureza, pois estas são o resultado das nossas descobertas. Julian Barbour, cuja uma das imagens de marca é a abolição do conceito de tempo como entidade independente, discordaria desta opinião (ver, por exemplo, (Barbour 2010)). A programática de Barbour procura definir os conceitos de espaço e tempo em função das leis da natureza. Esta via parece deixar-nos numa situação precária, pois as leis da natureza foram sempre descobertas tendo em conta réguas e relógios definidos *ab initio*, exteriormente (mas não necessariamente independentemente, como a teoria da relatividade sugere) à investigação científica propriamente dita. Mais do que isso: se as escalas temporais e espaciais são definidas a partir de leis da natureza que conhecemos, como poderemos alguma vez descobrir leis novas?

enunciada em relação à Terra (aproximadamente) e em relação às estrelas distantes, mas *nunca* em relação ao espaço absoluto. De facto, sem o pano de fundo das estrelas fixas, teria sido muito difícil construir a lei da gravitação universal; isto porque as observações astronómicas mostram que as trajetórias dos planetas são cónicas *em relação às estrelas distantes*, e não em relação ao indeterminável espaço absoluto. Estas considerações podem ser levadas mais longe: se a lei da inércia é na verdade enunciada em relação ao resto do universo, de que maneira pode a configuração espacial e mássica deste influenciar a natureza da lei? Por outras palavras, que consequências terá uma teoria que recorre apenas a conceitos relativos sobre a lei da inércia?

Por exemplo, Newton afirmava que a Terra assumia uma forma achatada, ou que a água do balde giratório encurvava, porque ambos eram animados de movimento de rotação em relação ao espaço absoluto. Numa teoria do espaço absoluto, é possível distinguir o cenário em que a Terra roda e as estrelas distantes estão fixas do cenário em que a Terra está fixa e as estrelas distantes rodam; no primeiro, os efeitos centrífugos achatam a Terra, no segundo não. Ora, dada a contenda de Mach, este raciocínio é falacioso. O embargo que o autor lhe apresenta pode ser encapsulado num comentário famoso:

The universe is not twice given, with an earth at rest and an earth in motion; but only once, with its relative motions, alone determinable. It is, accordingly, not permitted us to say how things would be if the earth did not rotate. (Mach 1919: 232)

Assim, aquilo que compunha dois cenários distintos para Newton, constitui um só cenário para Mach. Para além disso, Mach alerta para o facto de que a única informação que a experiência do balde nos dá é a de que a rotação relativa da água em relação ao balde não produz forças centrífugas, mas que essas forças *são* produzidas pela rotação relativa da água em relação à Terra e às estrelas distantes. Acrescenta:

No one is competent to say how the experiment would turn out if the sides of the vessel increased in thickness and mass till they were ultimately several leagues thick. (*Id.*)¹⁵

¹⁵ Como é sabido, no contexto da teoria da relatividade geral, um corpo em rotação “arrasta” os referenciais inerciais locais circundantes. Este efeito é denominado “efeito de Lens-Thirring”. Efeitos deste tipo mostram que, nesta teoria, a inércia é certamente *influenciada* pela matéria circundante, se bem que, para desalento daqueles que, como Einstein, esperavam uma teoria que implementasse o chamado “princípio de Mach”, não a *determine totalmente*. Discutirei estas questões no último capítulo.

As consequências para a lei da inércia são importantes. Ao invés de se avançar que uma partícula livre se desloca sem aceleração pelo espaço absoluto, poder-se-á, como Mach sugere, avançar que uma partícula livre se desloca sem aceleração *média* em relação ao resto do universo. Esta última afirmação, segundo o autor, é matéria de facto e não recorre a nenhum conceito metafísico como o de espaço absoluto. Em consequência, se o universo não tivesse a configuração vigente, poderia dar-se o caso de uma partícula livre ser animada por um qualquer outro movimento médio em relação ao resto do universo.¹⁶ Eventualmente, durante as suas reflexões, Mach parece propor um substituto para a lei da inércia canónica. Dadas as massas de todos os corpos do universo e todas as distâncias relativas entre estes, escreve:

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = 0$$

Nesta fórmula, a média é ponderada pelas massas dos corpos, o que significa que a inércia da partícula teste será mais ou menos influenciada dependendo da massa dos corpos circundantes. O que quer que seja que Mach pretendesse com esta alternativa, ela parece ser uma tentativa de uma nova lei dinâmica. Um pequeno cálculo mostra que esta fórmula se reduz à lei da inércia newtoniana no nosso universo. Divida-se o universo em duas partes: o nosso sistema solar (com N corpos) e o “resto do universo”. Vem:

$$\sum_i m_i = M_{ru} + \sum_{j=1}^N m_j$$

Se modelarmos o resto do universo como uma esfera concêntrica a uma distância muito grande r_{ru} da nossa partícula de teste e do sistema solar, vem para esta equação de Mach:

$$\frac{M_{ru}}{M_{ru} + \sum_{j=1}^N m_j} r_{ru}'' + \frac{\sum_{j=1}^N m_j \ddot{r}_j}{\sum_i m_i} = 0$$

¹⁶ Na sua obra, em apêndice, Mach comenta entusiasticamente o trabalho de Lange relativamente ao artigo que já discutimos, se bem que coloque reservas à certeza de que, dado uma distribuição universal de massa diferente, o movimento inercial de uma quarta partícula em relação ao referencial de inércia seja retilíneo e uniforme.

Ora, o fator da primeira parcela é ≈ 1 pois a massa do resto do universo é muito maior do que a massa do sistema solar. No caso em que não haja forças (por exemplo, no caso em que a gravidade pode ser desprezada), $\ddot{r}_j = 0$ e vem:

$$\ddot{r}_u = 0$$

que é, segundo Mach, a verdadeira “lei da inércia”, ou seja, enunciada em relação às estrelas distantes. No caso de haver forças, devemos igualar $m_j \ddot{r}_j$ ao seu somatório.

A equação de Mach tem o inconveniente de ser escalar, enquanto que as forças são grandezas vetoriais. Na verdade, esta constatação remete-nos para as chamadas “teorias relacionais” da mecânica, que só recorrem a grandes relativas como a distância escalar entre corpos e suas derivadas r_i , \dot{r}_i , \ddot{r}_i . Esta restrição é necessária já que, como é argumentado pelos seus defensores, o conhecimento de um vetor posição \vec{r} pressupõe um referencial do espaço absoluto, que determina uma orientação e localização absolutas. Vejamos, num último subcapítulo que antecede as minhas reflexões sobre a mecânica newtoniana, o tipo de visão epistemológica que uma teoria relacional da mecânica oferece.

2.3. Teorias relacionais da mecânica. Inércia relativa.

Como vimos no subcapítulo anterior (cf. 2.2.), a lei da inércia e, por extensão, as leis da mecânica são enunciadas localmente em relação às estrelas distantes. Imaginemos o seguinte cenário: se não houvesse estrelas distantes (ou se elas estivessem, por exemplo, obstruídas por poeira) às quais remeter as observações astronômicas, como seria estudado o sistema solar? Este cenário é, por exemplo, investigado por Poincaré em *Ciência e Hipótese* (1905 [1902]). Em princípio, os únicos dados disponíveis para os astrônomos seriam as distâncias mútuas entre os planetas r_{ij} e respectivas taxas de variação. Será que neste caso, sem um referencial de fundo que identifique os corpos com vetores \vec{r}_i (isto é, a posição no espaço a três dimensões), a nossa física teria o mesmo poder preditivo? Poincaré nota que não. Isto é, a nossa física celeste não seria um problema de valores iniciais até às segundas derivadas. Um exemplo desta situação está, por exemplo, presente na célebre resolução de Lagrange do problema de três corpos.¹⁷ Lagrange, ao estudar a

¹⁷ Barbour (2010) nota que o ensaio de Lagrange estava provavelmente presente na mente de Poincaré quando este identificou o problema em questão.

dinâmica do triângulo formado por três corpos celestes, chega a três equações que contêm *terceiras* derivadas das arestas (distâncias relativas r_{ij}). Seriam, assim, necessários mais dados iniciais, incluindo as acelerações \ddot{r}_{ij} , para conhecer a evolução do sistema no tempo.¹⁸

Esta aparente insuficiência de teoria celeste relacional pode até, na verdade, ser evidenciada no problema mais simples de dois corpos. Poincaré alerta para esse mesmo facto. A equação que rege a distância mútua r é:

$$\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 0$$

com μ a massa reduzida, e l é o momento angular, que é conservado, e que está associado à constante de área da 2ª lei de Kepler que seria o que os astrónomos mediriam. Existe também uma equação diferencial para o ângulo, mas, visto que não há nenhum referencial de fundo, os astrónomos só têm acesso a esta primeira equação. Ora, é óbvio que não basta conhecer r e \dot{r} no instante inicial para se resolver o problema, pois fica em falta a constante l . De facto, para estes astrónomos, não há maneira de, através da observação de um só ponto, distinguir se um corpo está, por exemplo, no periélio ou afélio de uma trajetória elítica ($\dot{r} = 0$), ou se este se encontra num ponto de viragem de uma trajetória reta (igualmente $\dot{r} = 0$, mas $l = 0$).

Será esta insuficiência inultrapassável, ou resulta ela de uma análise inadequada do conceito de movimento? Inclino-me para a última hipótese, e creio que ela pode ser resolvida, por razões que apresentarei no próximo capítulo. Antes disso, exploremos uma outra dificuldade que uma teoria relacional deve resolver, e que surge, uma vez mais, da inexistência de um referencial absoluto *a priori* ao qual remeter os movimentos. Esta dificuldade está relacionada com o conceito de *energia cinética*. Se, em geral, os potenciais de interação, como o potencial gravítico, dependem da distância mútua entre partículas, a energia cinética necessita de um palco de fundo que vê as velocidades das partículas em questão. Se este palco de fundo não existir, como deve o conceito de energia cinética ser interpretado numa teoria relacional?

¹⁸ Eventualmente, Lagrange remete as posições dos corpos ao referencial absoluto usual (identificado com as estrelas distantes) de tal forma que a questão do movimento relativo não é relevante no seu ensaio.

Em 1904, Hofmann publicou um artigo (1995) onde esta questão é abordada.¹⁹ A sua análise é, *grosso modo*, a seguinte: tenham-se dois corpos A e B; na presença de um referencial absoluto, distingue-se a energia cinética de A e a energia cinética de B. Imagine-se agora que estes dois corpos vão colidir e que a sua energia cinética vai ser armazenada numa mola que atua na direção do movimento, de maneira a que os corpos permaneçam em repouso mútuo depois da colisão. Em relação a um referencial absoluto, dir-se-ia que a mola realizou mais trabalho a parar a partícula com mais energia cinética e menos trabalho a parar a partícula com menos. No fundo, isto é consequência do resultado da energia cinética total de um sistema ser a soma das energias cinéticas individuais das suas partes. No entanto, num relato puramente relativo do movimento, não se pode dizer qual dos corpos tem mais energia cinética. Na verdade, só deverá existir *uma* energia cinética relacional entre A e B. Caso contrário, repare-se: da perspectiva do corpo A, o corpo B teria energia cinética $T_B = \frac{1}{2}m_B v^2$ e a mola armazenaria energia potencial correspondente; da perspectiva do corpo B, o corpo A teria energia cinética $T_A = \frac{1}{2}m_A v^2$ e a mola armazenaria uma energia potencial distinta – dependendo da perspectiva, teríamos duas situações físicas distintas: a mola seria comprimida diferentemente consoante a análise fosse feita da perspectiva do corpo A ou B. Esta conclusão é insatisfatória, donde se conclui, no contexto de uma mecânica relacional, a necessidade de repensar o conceito de energia cinética. Hofmann propõe que esta quantidade seja proporcional ao produto das massas. Ela poderá, em princípio, depender da distância mútua entre as partículas:

$$T_{AB} = f(r_{AB})m_A m_B v_{AB}^2$$

A energia cinética torna-se assim um conceito puramente relativo como, por exemplo, a energia potencial gravítica entre dois corpos.

Reissner, num artigo de 1915 já inserido na era relativista (1995), nota que a velocidade presente na energia cinética relacional só deverá ter uma componente radial, pois, segundo o autor, para duas partículas, só faz sentido haver movimento na linha que as une (só na presença de uma terceira partícula, que forme um plano conjuntamente com

¹⁹ Este artigo ficou conhecido por Einstein ter citado a redefinição aí presente da lei da inércia. Lê-se: “Every body is subject to the law of conservation of its relative state of motion or rest with respect to all the other bodies in space; its actual behaviour is then a resultant of all the individual influences.” Notem-se as reminiscências com a equação de Mach acima discutida.

as duas primeiras, se poderá definir uma outra direção espacial). Assim, com $v_{AB} = \dot{r}_{AB}$, escreve-se:

$$T_{AB} = f(r_{AB})m_A m_B \dot{r}_{AB}^2$$

Num artigo de 1925, Schrödinger (1995), já depois do advento da teoria da relatividade geral, nota que, apesar das intenções iniciais de Einstein, a teoria da relatividade geral *não respeita* o princípio de Mach devidamente. Num exercício ilustrativo que deveria, eventualmente, ser estendido à teoria da relatividade, Schrödinger tenta implementar o princípio de Mach numa teoria clássica. Fazendo uso de ferramentas já introduzidas por Hofmann e Reissner (em particular, é escolhida a função $f(r) \propto \frac{1}{r}$), é mais ambicioso, pois procura investigar a dinâmica do sistema solar numa cosmologia *machiana*. Modelando o universo como uma esfera oca, calcula os efeitos da nova energia cinética sobre uma partícula de teste que se move numa vizinhança em torno do centro dessa esfera. Adequadamente, a lei da inércia como “movimento retilíneo e uniforme” surge como um caso particular do movimento local em relação ao resto do universo, tal como tínhamos deduzido acima, utilizando a equação de Mach. Para além disso, introduzindo um segundo corpo gravítico que joga, por exemplo, o papel do Sol no sistema solar, é possível deduzir a precessão do periélio de Mercúrio, que é assim, neste contexto, interpretado como um efeito *machiano* (e clássico!).

Como teorias clássicas, estas tentativas são apenas o primeiro passo para uma compreensão adequada dos conceitos de *movimento e inércia*²⁰ que, na minha opinião, nem mesmo a teoria da relatividade geral conseguiu esclarecer completamente. É de estranhar que o próprio Einstein, tendo lido certamente os artigos de Hofmann e Schrödinger, não tenha sido influenciado por eles.²¹ Discutiremos estas questões no último capítulo.

Qualquer nova teoria do espaço e do tempo tem de comportar os avanços conceptuais da teoria da relatividade que, não obstante o que se disse anteriormente, são inquestionáveis. No entanto, acredito que mesmo no contexto da mecânica newtoniana

²⁰ Ainda estão presentes os conceitos de tempo e simultaneidade absolutos, bem como interações instantâneas à distância.

²¹ Para uma análise muito interessante sobre este facto conspícuo ver um artigo muito útil de Barbour (2007).

há problemas a esclarecer e que, se resolvidos, podem facilitar a transição para uma teoria relativista mais reforçada. Sintetizando o que foi dito até este momento, identifico três desafios essenciais que uma teoria clássica relacional deve encarar. São eles:

- (1) Uma definição geral, logicamente coerente, e empiricamente acessível, do conceito de *referencial inercial*. Já abordei esta questão quando remeti ao trabalho de Neumann, Lange e Tait.
- (2) O esclarecimento do que são coordenadas relacionais num espaço euclidiano, e um método para as implementar devidamente na teoria. Esta necessidade é primordial se quisermos abandonar o conceito de espaço absoluto. Relembrem-se as críticas de Mach e as reflexões de Poincaré.
- (3) A implementação de uma inércia relativa, algo que parece ser sugerido pela abolição do espaço absoluto. Aqui remeto para Mach e as teorias de Hofmann, Reissner e Schrödinger.

Estas questões não são respondidas, nem no contexto clássico, nem no relativista. Apresento, assim, a minha proposta, que visa responder a estes desafios no primeiro caso.

3. Reformulação da mecânica clássica enquanto teoria lógica e empiricamente adequada

3.1. Mecânica Relacional Clássica Restrita (MRCR)

Irei começar por resolver os pontos (1) e (2) apresentados no final do último capítulo (cf. 2.3.). A sua resolução permitir-nos-á obter aquilo que denominei como *Mecânica Relacional Clássica Restrita* (MRCR). Quando o ponto (3) for resolvido, obter-se-á a *Mecânica Relacional Clássica Generalizada*. Neste última teoria, a gravidade terá um papel preponderante. Isto porque a gravidade, tal como a teoria da relatividade geral sugere, pode ser identificada como um efeito inercial, e não como uma força. As considerações que se fizerem sobre ela são, até certo ponto, transponíveis para o conceito de *inércia relativa* das teorias de Mach, Hofmann, Reissner e Schrödinger.

Comecemos então por nos centrarmos no conceito de referencial inercial (ponto 1). Neumann, Lange e Tait contribuíram para esclarecer o problema da determinação geral de um referencial de inércia, mas a necessidade de recorrer a partículas livres parece problemática porque, para se identificar uma partícula livre, é necessário *ab initio* saber o que é um referencial inercial (relembre-se o que foi discutido sobre Lange). Proponho então um conceito mais útil que substituirá este último:

Definição: um corpo inercial é um corpo rígido imponderável.

Encaro o conceito de “imponderabilidade” como um conceito primitivo. Poder-se-ia avançar a crítica: “porque não era o conceito de partícula livre primitivo?” Não tenho uma resposta objetiva a esta questão: apenas porque eu não o intuo dessa forma. Será muito difícil saber se um corpo inerte é imponderável. No entanto, um ser senciente pode saber, pelo menos idealmente, se é imponderável ou não:

*Definição: um observador inercial é um observador rígido que sente a experiência da imponderabilidade.*²²

²² Creio que a ousadia desta definição está em reconhecer a importância da experiência sensível de um observador na determinação da realidade física, algo que durante séculos tem sido incompatível com os “métodos de terceira pessoa” que a ciência implementa, isto é, métodos que pressupõem uma realidade objetiva exterior ao ser humano.

Um observador inercial não sente, por assim dizer, o seu estado de movimento, ou, mais geralmente, o seu estado dinâmico.²³ Os seus movimentos físicos são desimpedidos em todas as direções, e não há nenhuma sensação fisiológica que ele associe àquilo que ele entende por movimento.²⁴ A verdade é que é mais fácil dar exemplos deste conceito pela negativa, i.e., através daquilo que ele não é: um observador num carro acelerado deixa de se sentir imponderável na direção horizontal, quando é impelido contra o assento do carro; um observador em rotação em relação às estrelas distantes também não será, segundo o que proponho, um observador inercial, pois ele sente os efeitos centrífugos do seu movimento. Poderia dar-se contingentemente o caso de não existir um único observador (ou corpo) imponderável no universo, e mesmo assim o conceito seria útil, como veremos. De todo o modo, é possível existirem observadores inerciais, sendo o caso mais óbvio o dos astronautas em órbita que não sentem o seu peso. Por agora, a minha exposição ignorará a presença da gravitação. No entanto, é claro que a imponderabilidade de um observador em queda livre sugere que a gravidade é um efeito inercial.

Note-se que é possível fazer a transição de um observador inercial para um corpo inercial. Sempre que, *localmente*, um observador se sente imponderável, i.e., é um observador inercial, um corpo imediatamente junto a este, e parado em relação a si, também é inercial (por exemplo, o satélite onde os astronautas habitam).

Com este novo conceito em mãos, podemos definir, de forma não falaciosa e não circular, o conceito de *referencial inercial*:

Definição: um referencial inercial é um corpo inercial munido de réguas e um relógio rigidamente a si ligados.

Não encaro a definição de um relógio como problemática. Um relógio é simplesmente um movimento periódico adotado convencionalmente para medir outros movimentos.²⁵ É suficiente, no contexto clássico, adotar-se um relógio localmente, pois o tempo é absoluto. Podemos, por exemplo, considerar que um evento “acontece” no instante que o relógio mede, tendo em conta atrasos de sinal. Esta definição também obvia

²³ Digo “mais geralmente” pois um corpo pode não ser imponderável e mesmo assim estar parado em relação aos corpos circundantes. Este comentário ficará eventualmente esclarecido.

²⁴ Existem efeitos fisiológicos (locais, portanto) muito concretos que revelam algo sobre o estado de movimento/dinâmico de um observador: o chamado “enjoo de movimento” é uma condição que dá informações ao ser padecente sobre o seu estado de movimento.

²⁵ Assume-se, como é habitual, que um relógio é ideal, na medida em que não é afetado pela aceleração a que é sujeito.

a necessidade de se definir uma rede de relógios sincronizados para medir o tempo, algo que só se impõe no contexto da relatividade restrita.

Note-se que as definições apresentadas só remetem para medições locais. Em particular, nada se disse quanto aos movimentos que corpos inerciais a distâncias diferentes uns dos outros têm entre si. Podemos agora, dadas as novas definições, reescrever a lei da inércia newtoniana, de uma forma totalmente relacional, como:

*Lei Restrita da Inércia: um corpo inercial tem movimento retilíneo e uniforme em relação a qualquer outro corpo inercial; ou: um corpo inercial tem movimento retilíneo e uniforme em relação a um referencial inercial.*²⁶

Quanto à determinação à distância de corpos inerciais, há algumas coisas a dizer. Afirmer que um corpo à distância é inercial (que é o mesmo que dizer que este pode compor um referencial inercial) pode ser matéria de pura especulação, que remonta às dificuldades identificadas nas construções de Lange e Tait (isto é, aquelas associadas à identificação de partículas livres pela sua cinemática relativa). No entanto, repare-se que a minha definição resolve o problema. A sua vantagem está em lembrar que a determinação de um corpo inercial pode ser feita *localmente*. Construindo um referencial inercial com esse corpo inercial, e considerando também a lei relacional da inércia, segue-se que qualquer outro corpo que tenha movimento retilíneo e uniforme em relação a esse referencial é um corpo inercial. Isto será sempre verdade, mesmo numa teoria que implemente a inércia relativa de Hofmann, e afins. A diferença estará no tipo de movimento que figura na lei relacional da inércia, isto é, o tipo de movimento que corpos inerciais têm em relação uns aos outros (aí terá de ser enunciada uma “lei generalizada da inércia”, cuja versão acima enunciada é um caso concreto).

A definição que apresentei de referencial de inércia leva-nos à discussão sobre o que são coordenadas, e como medir o movimento em relação a certas coordenadas (cinemática). Na senda de uma mecânica relacional, isto equivale a resolver o ponto (2). Para isso, é útil começar por fazer sobressair um padrão conspícuo: todos os autores que aderem à mundividência relacional parecem assumir que a única variável empírica acessível é a distância mútua entre corpos r_{ij} . Mesmo autores modernos como Julian

²⁶ Neste enunciado deve entender-se que o corpo inercial como um “todo” tem movimento retilíneo e uniforme, i.e., o corpo em todas as suas partes constituintes. O centro de massa de um corpo em rotação livre pode ter movimento retilíneo e uniforme em relação a um corpo inercial, mas o corpo no seu todo não partilha desse movimento, e portanto não será um corpo inercial.

Barbour aceitam este pressuposto. Este tipo de paradigma leva a considerações peculiares, como se pode ler, por exemplo, no artigo de Reissner já citado:

In contrast, there is no sense in speaking of an acceleration of [two] points in any other direction [i.e. uma direção que não seja a radial].

[...]

Finally, one can say that the space of two mass points has one dimension.

Space first becomes multidimensional through the addition of other mass points; in other words, accelerations and velocities in a direction different from the line joining the first two mass points first become detectable when further masses are present.

(Reissner 1995: 136)

Por exemplo, para um relacionista, se um sistema for composto por duas partículas, só faz sentido dizer que estas se movimentam na linha que as une, pois não existe nenhuma referência externa (e.g. espaço absoluto) que determine o movimento em qualquer outra direção.

Não posso concordar com esta conclusão. Considerando apenas corpos pontuais, talvez ela faça sentido, já que um corpo pontual não tem dimensão. No entanto, um corpo rígido tem volume e forma, e portanto é possível, em princípio, definir localmente um referencial coordenado de modo a que o movimento de um segundo corpo possa ser descrito a três dimensões. Atente-se à figura 2 — para um relacionista, as duas configurações entre os corpos A e B são idênticas: estes estão à mesma distância um do outro. No entanto, é claramente possível dizer que, numa configuração, o corpo B está do lado da face escura do corpo A, e que na outra o corpo B está do lado da face clara.

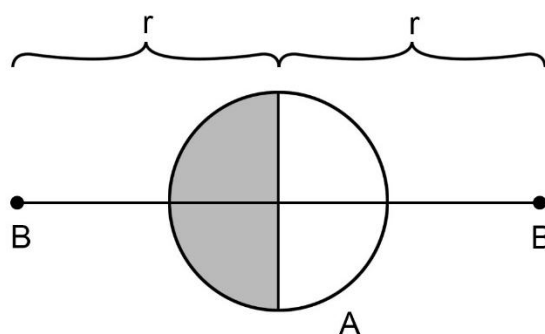


Figura 2

Na verdade, é sempre possível um observador num corpo A determinar que o movimento de um corpo B compreendeu uma mudança angular θ (fig. 3). Podemos até ir mais longe: é muito mais fácil, no contexto da mecânica relacional, medir ângulos do que medir distâncias, pois os ângulos medem-se localmente, e as distâncias não. No contexto da relatividade restrita, a medição instantânea de ângulos é até muito mais conveniente: a taxa de variação de um ângulo é sempre uma medição de tempo próprio, pois é sempre o mesmo relógio que a faz, enquanto que, para se medir distâncias, são necessários dois relógios sincronizados.

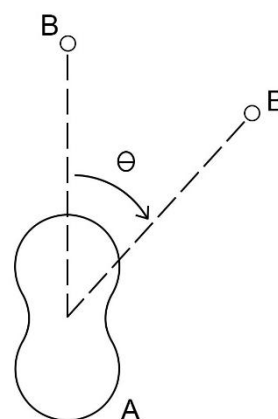


Figura 3

Resumindo, a conclusão central é a seguinte: numa mecânica relacional, não se tem somente acesso às distâncias relativas entre os corpos, sendo perfeitamente possível determinar a posição no espaço a três dimensões de um dado corpo em relação a outro. Daqui se segue que, apesar de não fazer sentido falar da orientação ou posição espacial “absoluta” de um sistema, faz sentido falar da orientação ou posição espacial de uma parte do sistema em relação à sua parte complementar.²⁷

A razão pela qual esta conclusão não parece ser normalmente obtida consiste provavelmente na dificuldade, a partir de observações puramente cinemáticas entre dois corpos, em determinar qual o movimento associado a cada corpo (ou seja, recuperando um exemplo já discutido: quem se move — o navio ou cais?). Visto que a teoria que proponho começa por definir de forma independente um corpo inercial, este dilema desvanece-se. Para isso, basta lembrarmos mais uma vez como a lei da inércia vem enunciada: fazendo referência apenas aos movimentos relativos entre corpos inerciais.

Para finalizar, relembremos que a transformação que relaciona as observações de diferentes referenciais inerciais é a chamada transformação de Galileu. Como na nossa teoria ainda existe tempo absoluto, escreve-se simplesmente:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{v}t$$

²⁷ Seria interessante, e eu tentei-o sem sucesso, construir uma teoria que postulasse uma energia cinética infinitesimal entre massas pontuais onde figurasse apenas a distância radial r , $dT = f(r)dm dm' \dot{r}^2$, e onde uma energia cinética entre corpos volúmicos onde figurasse o vetor \vec{r} , $T = f(r)mm' \vec{r}^2$, surgisse como uma grandeza *emergente*.

em que \vec{v} é a velocidade relativa entre os referenciais. Finalmente, porque um corpo inercial, dada a sua imponderabilidade, não consegue determinar localmente o seu estado de movimento em relação a outros corpos (relembre-se o exemplo de Galileu do marinheiro na cabine do navio), enuncia-se:

***Princípio da Relatividade de Galileu:** as leis da mecânica são as mesmas para todos os referenciais inerciais. As observações destes referenciais relacionam-se pela transformação $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{v}t$.*

Cabe agora discutir os *desvios* à lei da inércia. Esta lei, na sua versão restrita, deve ser entendida como o estabelecimento da equivalência entre as proposições: “um corpo é inercial” e “esse corpo tem movimento retilíneo e uniforme em relação a qualquer outro corpo inercial”. Se negarmos uma destas proposições, negamos a sua complementar. Imaginemos que o movimento relativo entre dois corpos não é retilíneo e uniforme. Segue-se que pelo menos um dos corpos não é um corpo inercial! O inverso também é verdadeiro: sabendo que um corpo não é inercial, sabe-se, pela Lei Restrita da Inércia, que ele não terá movimento retilíneo e uniforme em relação a qualquer corpo inercial. Por oposição às definições primárias, podemos definir um **corpo não-inercial** como um corpo que não é imponderável, um **observador não-inercial** como um observador que não sente a experiência da imponderabilidade, e um **referencial não-inercial** como um corpo não-inercial com um conjunto de réguas e um relógio rigidamente ligados a si. Pela negação da lei da inércia, vem: “um corpo não-inercial não tem movimento retilíneo e uniforme em relação a qualquer outro corpo inercial; ou: um corpo não-inercial não tem movimento retilíneo e uniforme em relação a um referencial inercial”. Esta negação sugere a seguinte definição:

*Definição: diz-se que um corpo não-inercial é atuado por **forças**.*

A presença de forças é, por assim dizer, equivalente à inexistência de imponderabilidade num corpo não-inercial. Visto que, pela negação da lei da inércia, um corpo não-inercial não tem movimento retilíneo e uniforme em relação a qualquer outro corpo inercial, diz-se que o *desvio* do movimento retilíneo e uniforme é causado por uma força. Esse desvio pode ser devidamente quantificado, o que nos permite chegar à conhecida lei fundamental da dinâmica. Para a enunciarmos, é necessário introduzir o conceito de *massa*. Note-se que até agora não foi necessário fazermos uso dele. Isto é

assim porque o comportamento “inercial” dos corpos é desimpedido, enquanto que a massa mede, por assim dizer, a “resistência” que os corpos têm à mudança do movimento que adquirem naturalmente.

Imagine-se a seguinte experiência de pensamento. Começa-se por ter três corpos A, B e C. Num estado inicial todos estes corpos são inerciais e estão parados entre si. O corpo A pode ser o referencial inercial. O corpo B é equipado com um qualquer mecanismo que “empurra” outros corpos, acelerando-os. Diz-se que o corpo B exerce uma força. Como é sempre necessário fazer convenções, toma-se a força exercida por B como unidade de medida $F_B = 1[F]$. Da perspectiva de A, quando B atua sobre C, os últimos dois corpos são postos em movimento. A aceleração que B imprime a C é sempre a mesma, a_{BC} .²⁸ Note-se que a aceleração é a única quantidade empírica em jogo, isto é, a única que pode ser medida diretamente, através da régua e relógio (pode ser usado um estroboscópio para facilitar, programado pelo relógio em A para tirar fotografias em tempos iguais). Por outro lado, as “forças” são apenas conceitos abstratos úteis, mas que não são medidos empiricamente (quanto muito, apenas “indiretamente” através da aceleração). Ora, dado um outro corpo B' que acelera C, chega-se à conclusão de que a aceleração impressa a C é diferente, $a_{B'C}$. A força de B' é definida por:

$$F_{B'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_{B'C}}{a_{BC}} F_B$$

Se, por sua vez, o mesmo corpo B atuar sobre corpos diferente C, C', C''... chegar-se-á à conclusão de que este imprime acelerações diferentes em corpos diferentes.²⁹ Este facto sugere que se pode associar a cada corpo uma nova grandeza chamada *massa*, que mede, por assim dizer, a resistência de um certo corpo à mudança do movimento estipulado pela lei da inércia: retilíneo e uniforme. Definimos a massa de um corpo C como o quociente entre a força impressa por B, e a aceleração adquirida:

$$m_C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_B}{a_{BC}} (= \frac{F_{B'}}{a_{B'C}} = \dots)$$

²⁸ Considere-se que o intervalo Δt em que a força atua é suficientemente pequeno para a aceleração ser considerada instantânea.

²⁹ Teremos que basear-nos na crença de que B imprime sempre a mesma força, i.e., que, se o corpo C for atuado por B, adquire sempre a mesma aceleração em todas as instâncias. Caso isso não se verifique, há duas hipóteses: ou B não atua da mesma forma, ou o corpo C sofreu alguma transformação (ou a escala do nosso relógio e da nossa régua alterou-se!).

As consequências operacionais desta definição são úteis. Um corpo com o dobro da massa terá metade da aceleração sob a mesma força. Em geral, dada a massa de um corpo (determinada/definida anteriormente) e uma força (em unidade convencional), pode prever-se a aceleração que o corpo vai adquirir.

Como já se disse, da perspectiva do corpo A, quando o corpo B atua sobre o corpo C, ambos entram em movimento. Isto é confirmado tanto por A, como pelos próprios corpos B e C que, localmente, deixam de ser inerciais enquanto são acelerados (observadores montados em B e C deixariam de sentir a experiência da imponderabilidade enquanto B atuasse sobre C). Imagine-se agora que se determinam as massas de corpos B' e C através da força impressa por B, e deixa-se B' atuar sobre C. Tal como quando B atuava sobre C, ambos aceleravam, para B' e C acontecerá o mesmo, mas com as acelerações correspondentes, $a_{B'}$ e a_C . Multiplicando respetivamente pelas massas, deverá obter-se a igualdade:

$$m_C a_C = m_{B'} a_{B'}$$

Ora, dada a definição de massa, isto equivale a dizer que a força que atua em B' tem um par igual que atua no sentido oposto em C. Fica então encontrada a lei do par ação-reação na sua forma habitual.

A lei fundamental da dinâmica pode ser enunciada se for feito mais algum trabalho. Embora estas definições já sugiram $F = ma$, elas são apenas definições. A qualidade de lei empírica está na possibilidade de determinar F , m e a independentemente, de forma a que tais quantidades possam ser relacionadas *contingentemente*.³⁰ Ora, é efetivamente possível estudar diferentes tipos de forças, de maneira a testar as suas dependências em certas grandezas físicas. Por exemplo, uma mola imprime uma aceleração variável a um corpo, consoante a posição deste em relação ao ponto de equilíbrio da mola. Conhecendo a massa do corpo, determinada anteriormente da forma já explicada, pode conhecer-se a dependência da força (chamemos-lhe *elástica*) na posição:

³⁰ De facto, existe um debate antigo na filosofia da ciência sobre o estatuto da lei fundamental da dinâmica. É ela uma definição ou uma lei? Afirmará ela algo contingente como “amanhã o sol vai nascer” ou somente algo tautológico como “um careca não tem cabelo”? Gostaria de me debruçar sobre esta questão, e, em geral, sobre a estrutura lógica da teoria que estou a construir. Mas deixemos isso para uma outra oportunidade.

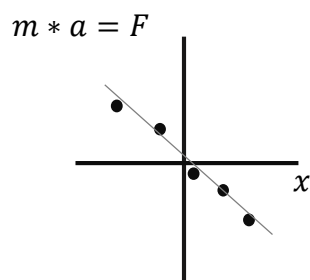


Figura 4

de onde se tira então $F = -kx$, a célebre “lei de Hooke”. Em geral a lei fundamental da dinâmica relaciona as forças assim determinadas com a massa e aceleração de um corpo arbitrário. Enunciemos (com um nome um pouco diferente do habitual):

*Lei Restrita da Dinâmica: um corpo não-inercial desvia-se do movimento retilíneo e uniforme medido num referencial inercial. Dada a massa desse corpo e a natureza das forças que sobre ele atuam, escreve-se:*³¹

$$\sum \vec{F}[\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t] = m\ddot{\vec{r}}(t)$$

Resta, por fim, resolver uma questão. No caso de não termos em nossa posse um corpo inercial, como estudar o movimento de outros corpos? Por exemplo, diz-se que a Terra é um referencial não-inercial pois roda em relação às estrelas. Experiências como a do pêndulo de Foucault sugerem de facto que esta roda em relação aos restantes corpos.³² Em geral, como poderemos, a partir *apenas* do estudo local da Terra, construir um referencial inercial abstrato? Digo “abstrato” pois este referencial não estará realmente associado a um corpo material.

Um resultado da teoria que agora temos em mãos é que as leis newtonianas habituais se verificam em relação a corpos inercias (não em relação ao espaço absoluto).

³¹ Esta lei, no contexto relativista, é alterada, pois o resultado da aplicação de uma força depende da velocidade do corpo atuado (por vezes diz-se que é mais difícil acelerar um corpo em andamento). A situação parece-me, na verdade, ainda mais complicada, pois, como vimos, a determinação de forças depende do estado de movimento relativo dos corpos. Esta questão merece investigações futuras.

³² É um facto que se poderia assumir a presença de uma força misteriosa que atuasse sobre o pêndulo. Isto é lembrado, por exemplo, ainda no século XIX, por Robert Muirhead (1887), que diz que seria sempre possível postular uma força que simulasse os efeitos não-inercias à superfície terrestre e cujo par ação-reação estivesse nas estrelas longínquas. No entanto, é muito mais simples assumir simplesmente que a Terra roda em relação a essas estrelas. Poincaré, em *Ciência e Hipótese*, está convicto de que, de facto, este é um falso problema, pois as equações da física assumem sempre uma forma mais simples num referencial inercial, e isso saltaria à vista de qualquer físico.

Assim, por exemplo, um giroscópio livre montado num corpo não-inercial conserva a sua direção inicial em relação a um referencial inercial. O outro dispositivo de que necessitaremos é o chamado “dinamómetro”, um medidor de forças composto por uma mola de constante elástica conhecida. Assim, enuncia-se:

*A determinação de um **referencial inercial abstrato** (RIA) pode ser feita a partir de um referencial não-inercial (RNI) através de um giroscópio e um dinamómetro rigidamente ligados ao corpo não-inercial, na origem do referencial. Estes dois dispositivos devem ser suficientemente pequenos, de forma a não afetarem a dinâmica do corpo.*³³

Dado o princípio da relatividade de Galileu, existirão certamente certas liberdades de escolha quanto à orientação e posição do RIA em relação ao RNI.

Faça-se o eixo dos zz do RIA coincidir com o vetor normalizado do eixo do giroscópio \vec{g} . Tem-se:

$$\begin{aligned}\vec{g}^{(RIA)} &= \mathcal{R}(t) \vec{g}^{(RNI)}(t) \\ (0,0,1) &= \mathcal{R}(t) \vec{g}^{(RNI)}(t)\end{aligned}$$

Os dados empíricos são $\vec{g}^{(RNI)}(t)$. A orientação do RIA em relação ao RNI fica determinada pelo conhecimento de $\mathcal{R}(t)$ ³⁴. Ora, a equação precedente consiste em 3 equações, uma para cada dimensão, e $\mathcal{R}\mathcal{R}^T = \mathbb{I}$ consiste em 6 equações independentes. $\mathcal{R}(t)$ tem 9 incógnitas por isso o sistema é determinado e a orientação fica conhecida.

Calibrado o dinamómetro em experiências anteriores, a força por ele registada pode ser usada para encontrar o movimento translacional do RNI em relação ao RIA. Como o corpo não-inercial é que é afetado por forças, faz mais sentido estudar a sua trajetória em relação ao RIA a calcular, isto é, a evolução da sua origem, dada pelo vetor $\vec{d}(t)$. Os dados empíricos são a força medida pelo dinamómetro $\vec{F}^{(RNI)}$, que é a mesma força que desvia o RNI da sua trajetória inercial. Conhecida a massa m_d do dinamómetro, tem-se pela lei da dinâmica:

³³ A utilização de giroscópios para determinar referenciais inerciais foi proposta no século XIX pelo físico austríaco Heinrich Streintz. Lange, no seu artigo de 1885, criticou a metodologia de Streintz com base em circularidade lógica. No entanto, lembre-se que também já argumentei que a construção de Lange incorre na falácia da “partícula livre”.

³⁴ A velocidade angular de um vetor solidário com RIA, como \vec{g} , pode ser conhecida a partir da matriz de rotação.

$$\vec{F}^{(RIA)}(t) = m_d \frac{d^2 \vec{\sigma}^{(RIA)}(t)}{dt^2}$$

$$\mathcal{R}(t) \vec{F}^{(RNI)}(t) = m_d \frac{d^2 \vec{\sigma}^{(RIA)}(t)}{dt^2}$$

o que nos permite conhecer $\vec{r}_o^{(RIA)}(t)$. A subdeterminação deste referencial, já prevista pelo princípio de relatividade de Galileu, é encapsulada nas duas constantes de integração que vão surgir ao resolver a equação diferencial precedente.

Por exemplo, este exercício pode ser levado a cabo implementando um referencial (não-inercial) em qualquer ponto da superfície terrestre. Chegar-se-á à conclusão de que o conjunto de RIA's calculados têm movimento retilíneo e uniforme em relação às estrelas distantes, como seria de esperar.

Se se desejar comparar o estudo do movimento de uma partícula arbitrária a partir de um referencial não-inercial com um inercial, isso é possível desde que conheçamos as transformações entre ambos. Na aceleração relativa ao referencial não-inercial figurarão os habituais termos centrífugos, de Coriolis, e outros.

É finda a exposição da teoria restrita. Esta é uma teoria relacional, que apela apenas a medições empíricas e não necessita de coordenadas em relação ao espaço absoluto para descrever o mundo físico.

3.2. Mecânica Relacional Clássica Generalizada (MRCG)

Em relação à teoria precedente, a novidade da próxima teoria está na generalização do conceito de inércia. Assim, supõe-se que o movimento inercial dos corpos inerciais é determinado pelas suas configurações relativas, sendo possível que este divirja do retilíneo e uniforme. Nesta teoria, a gravidade surge também como um efeito inercial, dado o princípio de equivalência de Einstein.

A dificuldade acrescida nesta teoria está, muito sucintamente, nos chamados “efeitos de maré”. Como o movimento de um corpo inercial em relação aos seus homólogos pode, em princípio (relembre-se em particular a natureza da gravidade), depender da distância, as partes que compõem um corpo rígido podem não ter todas o mesmo movimento inercial. Esta dificuldade é a mesma que o princípio da equivalência

de Einstein enfrenta em campos gravíticos não-uniformes. Por vezes, enuncia-se em alternativa um princípio da equivalência infinitesimal, que só é verificado localmente.

Visto que o campo inercial varia com a distância, podem surgir forças de maré no interior de qualquer corpo, o que certamente põe alguns problemas à minha definição de “corpo inercial” como um corpo imponderável. Vamos, no que se segue, assumir que continuam a existir corpos inerciais, de maneira a que as escalas espacial e temporal sejam suficientemente pequenas para os efeitos de maré poderem ser desprezados. A apresentação de um critério matemático e preciso desta situação fica, por agora, por apresentar.

A hipótese de que o movimento inercial de um corpo pode depender da sua posição relativa em relação ao resto do universo é um dos enunciados possíveis do famoso “princípio de Mach”. Escrevamos, então, de uma forma o mais abrangente possível:

***Princípio de Mach:** o movimento inercial de um corpo inercial em relação ao “resto do universo” é determinado por esse mesmo universo.*

Terá, naturalmente, de ser apresentada uma teoria que determine, geralmente, esse mesmo movimento inercial.

Adotemos a energia cinética de Schrödinger. A diferença da teoria que apresento para esta última está no facto de a velocidade não se resumir a \dot{r} , podendo ser expressa a três dimensões (lembre-se a resolução do ponto (2)). Para isso, temos apenas de escolher um referencial inercial assente num qualquer corpo inercial. Escreve-se, geralmente, agora também com a gravitação que tudo permeia, para o Lagrangiano entre dois corpos inerciais:

$$L = I \frac{\mu_1 \mu_2 v^2}{r} + G \frac{\mu_1 \mu_2}{r}$$

A I chamo a “constante de inércia universal” e a G a “constante de gravitação universal”. Note-se que esta constante não é a constante habitual. A essa chamo G_L “constante de gravitação local”, por razões que vamos entender. As massas μ são constantes, e também não são as massas a que estamos habituados. A massa habitual terá de ser recuperada, como um efeito machiano devido ao “resto do universo”.

Entretanto, para um sistema de N corpos inerciais, teremos de ter em consideração os pares de potenciais inercial e gravítico. É necessário também escolher um referencial inercial. Instale-se o referencial inercial no corpo i . Escreve-se:

$$L^{(S_i)} = \sum_{\substack{j,k \\ j < k}}^N \frac{\mu_j \mu_k}{|\vec{r}_{ji}^{(S_i)} - \vec{r}_{ki}^{(S_i)}|} \left(I \left| \dot{\vec{r}}_{ji}^{(S_i)} - \dot{\vec{r}}_{ki}^{(S_i)} \right|^2 + G \right)$$

As trajetórias inerciais do sistema em relação ao referencial inercial i são dadas pelas equações de Euler-Lagrange.³⁵

Por fim, a lei da inércia pode ser generalizada da seguinte forma:

Lei Generalizada da Inércia: *o movimento inercial de um corpo inercial em relação ao resto do universo é determinado por esse mesmo universo. Dado pelo menos um corpo inercial que possa servir de referencial inercial (S_i), a dinâmica entre pares de partículas é dada pelo lagrangiano $L^{(S_i)}$:*

$$L^{(S_i)} = \frac{\mu_j \mu_k}{|\vec{r}_{ji}^{(S_i)} - \vec{r}_{ki}^{(S_i)}|} \left(I \left| \vec{v}_{ji}^{(S_i)} - \vec{v}_{ki}^{(S_i)} \right|^2 + G \right)$$

Os efeitos machianos desta teoria podem ser evidenciados com um modelo simples do universo.³⁶ Para isso, estudemos o movimento de uma corpo livre, de massa μ , num universo, em média, estático. Podemos começar por assumir que, por exemplo, da perspectiva do nosso sistema solar, o universo é homogêneo e isotrópico³⁷, e que, concordantemente com

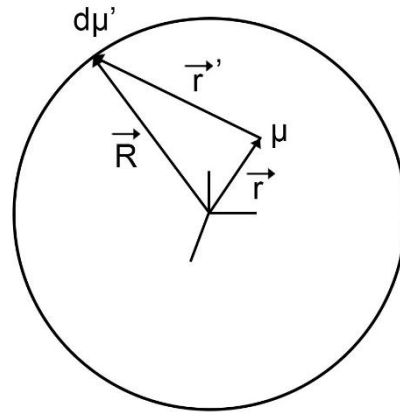


Figura 5

³⁵ Visto que esta nova mecânica implica uma energia cinética distinta, não é claro que as equações E-L sejam adequadas e que mesmo descrevam a dinâmica do sistema. Assumiremos sempre que sim. Numa outra oportunidade tentarei investigar a axiomática desta nova mecânica.

³⁶ Este modelo simples é em quase tudo idêntico àquele que Schrödinger apresenta no seu artigo de 1925. Em geral, as investigações seguintes são somente exploratórias, faltando-lhes o rigor de uma teoria definitiva.

³⁷ Se quisermos ter em conta, como o faremos de seguida, considerações à escala galáctica, esta aproximação já não é boa. Em geral, a “partícula cosmológica” para o qual o universo é tido como homogêneo e isotrópico costuma ser a galáxia, e não a estrela.

esta assunção, a sua massa está uniformemente distribuída por uma superfície esférica a distância R (fig. 5). Imaginemos que existe um corpo parado no centro deste universo. Dada a natureza dos potenciais inerciais e gravíticos, é claro que este corpo é inercial, isto é, uma partícula parada no centro de um universo destes é um corpo imponderável, pois o efeito total do potencial é zero. Este corpo é então o nosso referencial inercial. Tenha-se agora um outro corpo muito próximo deste, de maneira que a sua distância mútua é $\ll R$.

Qual o seu movimento devido ao resto do universo, em relação ao referencial inercial escolhido? Desprezamos a interação mútua entre os corpos (é por isso que lhes chamamos “livres”).

O lagrangiano do sistema é:

$$L = \mu \int_{\text{universo}} [I\dot{r}'^2 + G] \frac{d\mu'}{r'}$$

Ora, visto que o nosso universo é estático, $\dot{r}' = (\vec{R} - \dot{\vec{r}}) \Rightarrow \dot{r}' = -\dot{\vec{r}}$. Também $r' \approx R$. Fica:

$$L = \mu \frac{I\dot{r}^2 + G}{R} \int_{\text{universo}} d\mu'$$

$$L = \mu_U \frac{I}{R} \mu \dot{r}^2 + \frac{G}{R} \mu \mu_U$$

O segundo termo é uma constante que não afetará a dinâmica do sistema. Assim, o lagrangiano fica:

$$L = \frac{\mu_U I}{R} \mu \dot{r}^2$$

Este lagrangiano resume-se à energia cinética que conhecemos se:

$$\frac{\mu_U I}{R} \mu = \frac{m}{2}$$

sendo m a massa habitual que se mede localmente. Note-se como a lei da inércia retilínea e uniforme é deduzida, não sendo um postulado, tal como Mach sugeria!

Agora, se quisermos recuperar a forma usual do potencial gravítico teremos:

$$G\mu\mu' = G_L mm'$$

Esta expressão sugere:

$$\sqrt{G}\mu = \sqrt{G_L}m$$

Exprima-se a massa do universo em unidades G_L , isto é, $m_U = \sqrt{G/G_L}\mu_U$. É possível que haja aqui uma incongruência, pois, consoante o ponto do universo, G_L é diferente. No entanto, sugere-se medir m_U em unidades de massa locais. Isto será talvez o que está em jogo quando se afirma que a Via Láctea tem x unidades de massa solar m_O , ainda que, na nossa teoria, a massa universal seja na verdade μ e não m . Estas considerações levam a

$$G_L = \frac{G}{I} \frac{R}{2m_U}$$

Mesmo sem realizar uma estimativa concreta, os cálculos anteriores sugerem que a massa e a constante de gravitação ao nível local são determinadas pelo “resto do universo”. Resta obter uma forma de estimar as quantidades presentes de forma a atestar esta igualdade. Um teste cru será realizado no próximo subcapítulo (cf. cap. 3.3).

Ainda antes de fecharmos este capítulo, resta dizer que, nesta teoria, a lei fundamental da dinâmica também necessita de uma correção. Isto porque, dada a variação do movimento inercial com a posição, uma força já não aparece sempre que haja aceleração em relação a outros corpos, mas sim, em geral, sempre que o corpo se desvia do seu movimento inercial. Por exemplo, imaginemos que uma nave espacial liga os seus propulsores de forma a estar parada em relação à Terra. A nave deixa de ser um corpo inercial, e portanto sente uma força; o seu movimento não é o movimento inercial (queda-livre). Mas então concluímos que, caso geral, pode haver uma força mesmo que um corpo esteja parado em relação a outro. O conceito que é necessário introduzir é o de **aceleração local/própria**, isto é, a aceleração com que um corpo se desvia do seu movimento inercial.

A suposição forte que faremos é a de que um movimento inercial é sempre conhecido dadas somente a posição e velocidade do corpo.³⁸

Tenha-se então um referencial inercial que observa um segundo corpo. Para cada posição e velocidade que o segundo corpo adquire, há um determinado movimento inercial que lhe é próprio. Existe então um conjunto contínuo de trajetórias inerciais do qual o corpo se vai desviando. É nesse desvio que surge a força. Seja a trajetória atual do corpo $\vec{r}(t)$. A trajetória inercial tem a dependência:

$$\vec{r}_I = \vec{r}_I[\vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0), t]$$

Consideremos as diferenças entre as trajetórias atual e inercial a partir de um tempo t_0 , expandidas à volta desse instante:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) - \vec{r}_I(t) &= \vec{r}(t_0) + \dot{\vec{r}}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{\vec{r}}(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \dots \\ &\quad - \left[\vec{r}_I(t_0) + \dot{\vec{r}}_I(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{\vec{r}}_I(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

Mas como, por hipótese, $\vec{r}_I(t_0) = \vec{r}(t_0)$, $\dot{\vec{r}}_I(t_0) = \dot{\vec{r}}(t_0)$, tem-se para a diferença das trajetórias:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_I(t) = \frac{[\ddot{\vec{r}}(t_0) - \ddot{\vec{r}}_I(t_0)]}{2}(t - t_0)^2 + \dots$$

Isto é, as trajetórias só diferem a partir de termos de segunda ordem (nas acelerações). Definimos $\ddot{\vec{r}}_L(t) = \ddot{\vec{r}}(t) - \ddot{\vec{r}}_I(t)$ como a aceleração local. Esta aceleração é aquela associada ao que o dinamómetro mete (podemos também chamar-lhe “acelerómetro”, se estivermos a referir-nos a esta aceleração). Entenda-se: esta aceleração nunca é observada diretamente, apenas inferida. A aceleração acessível empiricamente é sempre $\ddot{\vec{r}}(t)$. Podemos então enunciar para a nova lei fundamental da dinâmica:

***Lei Generalizada da Dinâmica:** um corpo não-inercial desvia-se do movimento inercial medido num referencial inercial. Dado o movimento*

³⁸ Relembrem-se as reflexões de Poincaré em *Ciência e Hipótese*. Queremos uma teoria dinâmica com poder preditivo até às segundas derivadas, o que parece ser razoável. O que encerra esta exigência...?

inercial de que o corpo se desvia, a massa desse mesmo corpo e a natureza das forças que sobre ele atuam, escreve-se:

$$\sum \vec{F}[\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t] = m\ddot{\vec{r}}_L(t)$$

Onde $\ddot{\vec{r}}_L(t) = \ddot{\vec{r}}(t) - \ddot{\vec{r}}_I(t)$, com $\ddot{\vec{r}}_I(t)$ a aceleração da trajetória inercial de que o corpo se desvia.

Naturalmente que se recupera a mecânica newtoniana habitual, se se tiver como movimento inercial o retilíneo e uniforme, isto é, $\ddot{\vec{r}}_I(t) = 0$.

É também importante fazer notar que, localmente, a MRCG contém a MRGR. Se dois corpos inerciais estiverem muito próximos, eles terão, em relação ao resto do universo, um comportamento inercial semelhante.³⁹ Assim, numa escala de tempo e espaço apropriada, ambos se movem entre si com movimento retilíneo e uniforme, etc. Este resultado não é mais do que consequência de um pressuposto matemático: que as trajetórias e os “campos” que os corpos sentem são contínuos. Assim, a retilinearidade e a uniformidade encontram-se na curvilinearidade e na não-uniformidade, mas não o oposto.⁴⁰ A uma escala suficientemente ampliada (que, quanto muito, só é limitada pela escala quântica de Planck), o movimento retilíneo e uniforme pode ser sempre recuperado. Esta constatação justifica, aliás, a importância central que este movimento tem na física.

Por fim, note-se que, na MRCG, o princípio da relatividade de Galileu também deixa de se aplicar. Em geral, existirá um grupo de transformações entre referenciais inerciais que dependerão do movimento inercial gerado pelas partículas no seu todo. Einstein procurou generalizar o princípio da relatividade, afirmando que todos os observados são equivalentes. É óbvio, mesmo numa perspectiva puramente clássica, que os observadores não são todos equivalentes, como a lei da dinâmica generalizada mostra. O princípio da relatividade de Einstein está associado a dois outros princípios. Um deles, que é aquele que, na verdade, está na base da MRCG, é o princípio da equivalência. O cerne deste princípio é o de que existe um conjunto de referenciais que não se distinguem

³⁹ Isto é verdade se os corpos não se influenciarem inercialmente de forma significativa, isto é, se forem ambos “partículas de teste”. A escala a que esta aproximação se aplica é menor entre, por exemplo, a Terra e um satélite.

⁴⁰ A expansão de uma curva em série de Taylor é espelho disso mesmo. Este resultado também é útil no contexto de geometrias riemmanianas (que são localmente planas), e na relatividade geral, cujo espaço-tempo é localmente o de Minkowski.

entre si. O segundo princípio em que Einstein se baseou foi o da “covariância geral”. Este princípio já está inserido numa mundividência física diferente: aquela que vê o espaço(-tempo) como sendo descrito por uma métrica. Visto que, em geral, uma métrica pode ser descrita arbitrariamente, surge o problema de interpretação das coordenadas usadas. Todas estas questões serão abordadas no capítulo sobre relatividade (cf. cap. 4).

3.3. Uma aplicação da MRCG à dinâmica galáctica (hipótese alternativa à matéria escura)

Dada a teoria exposta, ela pode ser posta à prova em concreto. Existe um domínio em que a mecânica clássica ainda é aplicada com proveito: a dinâmica galáctica, onde as velocidades relativas das estrelas são baixas em relação à velocidade da luz. Um dos problemas mais misteriosos neste domínio é o da matéria escura. A matéria escura é postulada *ad hoc* de forma a que as previsões da teoria relativas às curvas de rotação galácticas sejam compatíveis com a observação. A alternativa à matéria escura consiste em teorias do tipo MOND, que propõe uma modificação da teoria clássica num domínio restrito. A mecânica que se expos no capítulo anterior é uma mecânica modificada, e por isso será útil deduzir as suas previsões no que respeita as curvas de rotação de galáxias.

Para modelarmos uma galáxia, só necessitamos de conhecer a sua forma e o seu perfil de densidade. Depois, estudamos a dinâmica de uma partícula de teste num qualquer ponto dentro dessa galáxia, partícula essa que representa uma estrela. A interação resultante será a soma das contribuições de todas as estrelas distantes para a dinâmica da partícula teste. As estrelas distantes dentro da galáxia podem ser modeladas, em média, como um contínuo de massa com um perfil de densidade contínuo. O potencial gravítico entre a partícula teste e um elemento de massa é naturalmente $dV = -G_L m dM / r'$.⁴¹

Numa primeira aproximação, de forma a tornar os cálculos mais imediatos, consideremos uma galáxia a duas dimensões e com simetria esférica. Centrar-me-ei em galáxias espirais, que são aquelas para as quais se observam curvas de rotação. Para

⁴¹ Claro que uma estrela na posição do elemento dm também se move, mas a aproximação sugerida é a de que, como um todo, a galáxia tem uma densidade média em cada ponto inalterável.

galáxias espirais sem bojo proeminente, apenas com um disco, o modelo axialmente simétrico 2D é uma boa primeira aproximação.⁴²

Comecemos por deduzir o resultado restrito para depois o comparar com o resultado generalizado, onde a inércia é relativa. Note-se que aqui só interessa modelar uma galáxia a partir da matéria luminosa observada, sem que se recorra a qualquer tipo de matéria escura. O resultado restrito será, como é conhecido, incompatível com os dados da observação.

Assumimos que um corpo no centro da galáxia é imponderável, e que por isso compõe um referencial inercial. Mais uma vez, dada a distribuição média de massa constante em cada ponto, tem-se $\dot{\vec{r}}' = (\vec{\rho} \dot{-} \dot{\vec{r}}) \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = -\dot{\vec{r}}$. O lagrangiano da partícula livre, neste referencial, em coordenadas polares, é:

$$L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + G_L m \int_M \frac{dM}{r'(\vec{r}, \vec{\rho})}$$

$$L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + G_L P(\vec{r})$$

O integral potencial $P(\vec{r})$ deve ser avaliado sobre toda a galáxia. Dado um perfil de densidade axialmente simétrico $\sigma(\rho)$, tem-se:

$$P(\vec{r}) = 2\pi \int_0^\infty \frac{\sigma(\rho)}{r'(\vec{r}, \vec{\rho})} \rho d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^r \frac{\sigma(\rho)}{r'(\vec{r}, \vec{\rho})} \rho d\rho + 2\pi \int_r^\infty \frac{\sigma(\rho)}{r'(\vec{r}, \vec{\rho})} \rho d\rho$$

Aqui podemos fazer uso de dois teoremas, que foram demonstrados por Newton nos *Principia*, na sua linguagem geométrica. Modernamente, é comum denominar estes teoremas por *Newton's Shell Theorems*: (i) dado um corpo esfericamente simétrico, o potencial que atua sobre a partícula de teste é igual àquele que seria gerado caso a massa do corpo estivesse toda concentrada no seu centro; (ii) dado um corpo oco esfericamente simétrico, o potencial no seu interior é igual em todo o lado, dependendo apenas do raio do corpo. Quantitativamente, temos então:

⁴² Esta é uma aproximação muito crua que terá de ser sofisticada, mas que, como veremos, apresenta resultados qualitativos reveladores.

$$\begin{aligned}
P(r) &= 2\pi \int_0^r \frac{\sigma(\rho)}{r} d\rho + 2\pi \int_r^\infty \frac{\sigma(\rho)}{\rho} \rho d\rho \\
&= \frac{M(r)}{r} + 2\pi \int_r^\infty \sigma(\rho) d\rho
\end{aligned}$$

Podemos agora calcular o movimento da partícula de teste. Como interessam apenas, para o cálculo das curvas de rotação, trajetórias circulares, impõe-se $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Vem para a equação de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
r\dot{\theta}^2 + G_L \frac{dP(r)}{dr} &= 0 \\
v^2 + rG_L \left(-\frac{M(r)}{r^2} \right) &= 0 \\
v_r^2(r) &= \frac{G_L M(r)}{r}
\end{aligned}$$

Este é o resultado habitual para uma curva de rotação de uma distribuição de massa esférica. Passemos agora a deduzir o resultado homólogo no contexto da teoria generalizada. O lagrangiano passa a ser:

$$\begin{aligned}
L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) &= [I(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + G] \int_u \frac{d\mu}{r'(\vec{r}, \vec{\rho})} \\
L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) &= [I(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + G] \sqrt{G_L/G} \int_M \frac{dM}{r'(\vec{r}, \vec{\rho})} \\
L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) &= [I(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + G] P(r)
\end{aligned}$$

A equação para trajetórias circulares é:

$$\begin{aligned}
2Ir\dot{\theta}^2 P(r) + [Ir^2\dot{\theta}^2 + G] \frac{dP(r)}{dr} &= 0 \\
2Ir\dot{\theta}^2 P(r) - [Ir^2\dot{\theta}^2 + G] \frac{M(r)}{r^2} &= 0 \\
2Iv^2 P(r) - [Iv^2 + G] \frac{M(r)}{r} &= 0
\end{aligned}$$

$$v_g^2(r) = \frac{G}{I} \frac{M(r)}{2rP(r) - M(r)}$$

Esta é a curva de rotação generalizada. Basta então escolher um perfil de densidade adequado para calcular as curvas. Entenda-se: esta densidade só deverá ter em conta as observações que fazemos de matéria luminosa. Ora, observações astronómicas dos discos de galáxias espirais notam um decaimento exponencial do perfil de brilho.⁴³ Assumindo que a galáxia é composta por matéria semelhante (e.g. estrelas da sequência principal), o perfil de densidade da galáxia é proporcional ao perfil de luminosidade, sendo a constante de proporcionalidade um *mass-to-light ratio* a determinar. Podemos então assumir, a partir do centro galáctico, para a densidade (em unidades de massa local):

$$\sigma(\rho) = \sigma_0 e^{-\frac{\rho}{r_e}}$$

em que r_e consiste numa escala específica da galáxia. Para a massa tem-se:⁴⁴

$$M(r) = 2\pi\sigma_0 r_e [r_e - e^{-\frac{r}{r_e}}(r_e + r)]$$

E calculando o integral do potencial $P(r)$ vem:

$$rP(r) = M(r) + 2\pi\sigma_0 r_e r e^{-\frac{r}{r_e}}$$

Comparemos então as curvas de rotação para os casos restrito e generalizado ($x = \frac{r}{r_e}$):

$$v_r^2(r) = 2\pi G_L \sigma_0 r_e \left[\frac{1}{x} - e^{-x} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right]$$

$$v_g^2(r) = \frac{G}{I} \left[\frac{\frac{1}{x} - e^{-x} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)}{\frac{1}{x} - e^{-x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)} \right]^{45}$$

$$v_r(r) = \sqrt{2\pi G_L \sigma_0 r_e} f(x)$$

$$v_g(r) = \sqrt{\frac{G}{I}} g(x)$$

⁴³ Ver o artigo canónico (Freeman 1970) ou (Corbelli e Salucci 2000).

⁴⁴ Como a queda é exponencial, a massa total da galáxia é finita.

⁴⁵ O limite assintótico da função é 1.

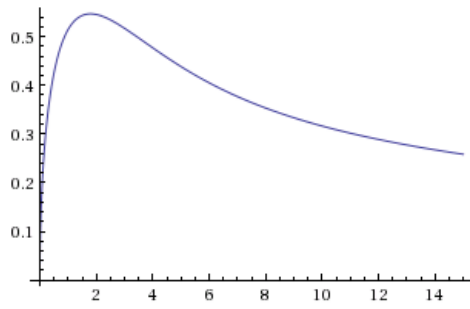


Figura 6. Curva de rotação prevista no caso restrito

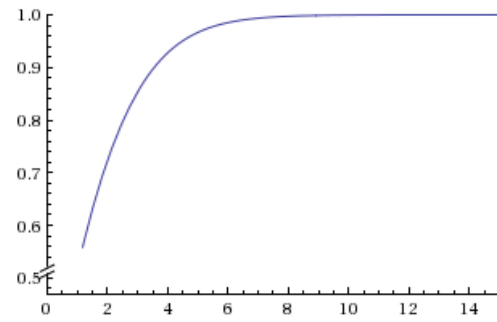


Figura 7. Curva de rotação prevista no caso generalizado

Uma curva de rotação típica para uma galáxia espiral, como a NGC 3198, é (Begeman 1989):

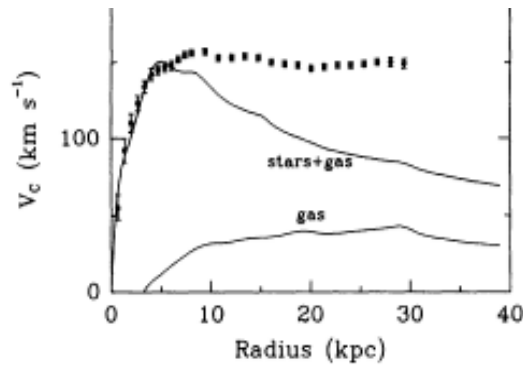


Figura 8. Curvas de rotação da galáxia NGC 3198

As curvas a escuro são as previsões teóricas utilizando a teoria restrita. O pontilhado é a observação. Note-se como a teoria generalizada reproduz qualitativamente a *flat region* da curva de rotação, sem necessidade de recorrer a matéria escura!

É também possível fazer uma estimativa da quantidade $\frac{I}{G}$, dadas as velocidades típicas na *flat region* $v \sim 10^5 m/s$. Daqui se retira $\frac{I}{G} \sim 10^{-10} m^{-1}.s$. Um cálculo ulterior pode ser feito, tendo em conta a expressão já deduzida:

$$G_L = \frac{G}{I} \frac{R}{2M}$$

$$R = G_L \frac{I}{G} 2M$$

Por exemplo, para uma galáxia como a Via Láctea $M \sim 10^{12}$ *massas solares*. Inserindo $G_L = 6,67 * 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ vem:

$$R \sim 10 \text{ kpc}$$

Este R pode ser interpretado como uma distância característica que determina a inércia local. As distâncias características de galáxias como a nossa são, efetivamente, na ordem das dezenas de kpc. Assim, este cálculo (grosseiro) sugere que a inércia local do sistema solar é maioritariamente influenciada pela Via Láctea, tendo o restante universo um papel menor.

As conclusões a retirar deste subcapítulo são as seguintes: uma compreensão mais sofisticada do conceito de inércia, que leva a uma alteração da energia cinética, permite-nos, mesmo no contexto da teoria clássica, reproduzir as curvas de rotação de galáxias, sem necessitar de matéria escura. Se se aceitarem estas consequências da MRCG, que são uma hipótese alternativa à matéria escura, então a teoria da relatividade geral também precisa de ser modificada para, no limite, recuperar o limite clássico generalizado (e não o clássico restrito).⁴⁶ Esta será a via de investigação a seguir, se se quiser uma compreensão relativista da inércia e da gravidade mais completa.

⁴⁶ Arrisco mesmo dizer que é bem possível, pelas mesmas razões que foram aduzidas para a matéria escura, que a energia escura também possa ser um conceito supérfluo, e que as observações intergalácticas possam ser compatibilizadas com uma teoria nova.

4. Investigações Futuras para o Paradigma Relativista

4.1. Relatividade restrita

As investigações do capítulo anterior poderão constituir um ponto de vista para repensar a teoria da relatividade. Dado o âmbito limitado deste trabalho, abordarei as questões relativistas apenas conceitualmente e de forma simplificada, oferecendo algumas pistas sobre aquilo que gostaria de investigar numa fase posterior.

No âmbito da teoria da relatividade restrita, uma das grandes novidades que envolvem a inércia é a sua equivalência com a energia. De resto, as questões problemáticas sobre a definição de um referencial inercial são semelhantes, ainda que surjam com uma roupagem distinta. O conceito de *corpo inercial* como um corpo imponderável continua a servir o seu fim, ainda que o conceito de *corpo rígido* apresente dificuldades.

A definição de *referencial inercial* deve ser sofisticada. Esta exigência prende-se com a famosa dificuldade, adereçada por Poincaré e Einstein, de definir *simultaneidade* e, em geral, o tempo de um evento que acontece à distância. Para isso, como se sabe, é necessária a construção de uma rede de relógios distribuídos espacialmente, que podem ser sincronizados adequadamente como Einstein o descreve no seu artigo de 1905. Assume-se que isto é sempre possível entre referenciais inerciais restritos, isto é, referenciais inerciais que têm movimento retilíneo e uniforme entre si.

Entretanto, a lei da inércia retilínea e uniforme é preservada, se bem que as transformações que relacionam vários corpos inerciais não sejam as de Galileu, mas sim as de Lorentz. Efetivamente, podem procurar-se as transformações mais gerais que transformem linhas retas em linhas retas, e, conjuntamente com o princípio da relatividade e o fecho para o grupo de transformações, chegar à conclusão de que só há duas hipóteses: as transformações de Galileu e as de Lorentz (Pelissetto e Testa 2015).

A prioridade que se segue é a de conhecer as transformações gerais que relacionam referenciais inerciais e não-inerciais. No contexto clássico, mediante a presença do tempo absoluto, as transformações são facilmente obtidas, nelas constando os habituais termos centrífugos, de Coriolis e afins. Por outro lado, no domínio relativista, este problema é

não trivial.⁴⁷ A questão está essencialmente relacionada com o problema da sincronização de relógios. Terá, em princípio, que se impor que o referencial não-inercial transporte consigo um conjunto de relógios sincronizados, ainda que, dada a sua aceleração, a sincronização de Einstein não possa ser utilizada para os sincronizar; isto é, a velocidade de ida e volta da luz não é sempre a mesma no referencial não-inercial, ainda que, não obstante, ela localmente seja sempre c .⁴⁸

Um conceito necessário para resolver o problema é o de *referencial co-móvel*. Este conceito poderia ter sido introduzido no domínio clássico, mas a sua utilidade surge no domínio relativista. Um referencial co-móvel é um referencial inercial auxiliar que se move com a velocidade \vec{v} do referencial não-inercial em determinado instante, em relação ao referencial inercial base.

Assumimos então que o referencial não-inercial é localmente indistinguível de um referencial inercial co-móvel apropriado. Ora, por hipótese, o referencial inercial vê as réguas do referencial não-inercial contraídas. No caso mais simples a uma dimensão, tem-se:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{o}$$

$$x = x' + o$$

$$x^{(S)} = x'^{(S')} + o^{(S)}$$

E como, num dado instante, as réguas transportadas por S' estão contraídas, escrevemos:

$$x^{(S)} = \frac{x'^{(S')}}{\gamma(\dot{o})} + o^{(S)}$$

Reorganizando e fazendo cair os índices dos referenciais:

$$x'(x, t) = \gamma[\dot{o}(t)][x - o(t)]$$

⁴⁷ Ver, por exemplo, (Nelson 1987), (Rowland 2006), (Lusanna 2013).

⁴⁸ Ver (Petkov 2005) para um capítulo interessante sobre a propagação da luz em referenciais não-inerciais e a necessidade de se introduzir uma “velocidade da luz coordenada média” e uma “velocidade da luz própria média”.

Para obtermos a transformação no tempo é necessário arranjar um método de sincronização de relógios em S' , algo altamente não trivial. Em geral, sabe-se que para uma trajetória arbitrária do referencial não-inercial se tem:

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{o}^2(t)}{c^2}} dt$$

É pelo menos certo que, entre dois referenciais inerciais, devemos, seguindo este método, recuperar as transformações de Lorentz. Efetivamente, dado $o(t) = vt$ e, mais importante, a sincronização de Einstein para relógios, deduz-se facilmente:

$$t'(x, t) = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Dada a falta de uma compreensão aturada e geral de métodos de sincronização de relógios e da sua significância, ficam por determinar as transformações gerais entre o referencial inercial e não-inercial. Talvez não faça sentido falar em sincronia de relógios acelerados, mas será pelo menos possível comparar as medições de relógios acelerados a distâncias diferentes, desde que eles tenham sido sincronizados previamente quando tinham movimentos inerciais, através do método de sincronia de Einstein.

Note-se finalmente que, num referencial acelerado, se se emitirem dois sinais luminosos da origem em sentidos opostos, na direção do movimento, e se eles forem refletidos de novo, depois de percorrem distâncias iguais, não voltam à origem em simultâneo, ao contrário do que acontece entre dois referenciais inerciais. O desfasamento dos sinais pode ser calculado no referencial inercial, onde temos relógios sincronizados, e depois, visto que o tempo de retorno dos sinais é uma medida de tempo próprio em S' , podemos usar a expressão que relaciona o tempo próprio em S' com o tempo coordenado em S para obter algumas pistas sobre a forma de sincronizar relógios em S' .

Uma compreensão completa das transformações entre referenciais inerciais e não inerciais permitir-nos-ia talvez esclarecer problemas como aqueles associados ao conceito de corpo rígido e também ao efeito de Sagnac.⁴⁹

⁴⁹ Sobre explicações e reinterpretções do efeito de Sagnac ver, por exemplo, (Selleri 1997), (Klauber 1998), (Petkov 2005).

4.2. Relatividade geral (e quatro princípios que guiaram Einstein na sua construção)

No contexto da relatividade restrita pode dizer-se que o **princípio da relatividade (PR)** é verificado da seguinte forma: atendendo ao facto de que diferentes corpos inerciais (por extensão, referenciais inerciais) têm movimentos retilíneos e uniformes entre si, e que as transformações que relacionam as suas coordenadas são as transformações de Lorentz, diz-se que as leis da física são as mesmas entre estes referenciais inerciais. O **PR** assim enunciado fornece-nos também uma heurística para investigar novas leis: as leis da física que nos interessam são aquelas que são *covariantes* para transformações de Lorentz, isto é, leis que, expressas no mesmo tipo de coordenadas (cartesianas, polares, etc.), mantêm a sua forma matemática em qualquer referencial inercial restrito, isto é, um referencial inercial que tem movimento retilíneo e uniforme em relação aos restantes referenciais inerciais. Sucintamente:

***Princípio da Relatividade Restrito:** as leis da física são as mesmas para todos os referenciais inerciais restritos. As observações destes referenciais relacionam-se pelas transformações de Lorentz. Diz-se que as leis são covariantes para transformações deste tipo.*

Ora, Einstein, depois de construir a teoria da relatividade restrita, movido pelo desejo de estender a equivalência entre referenciais inerciais a todos os tipos de referenciais, dedicou-se a trabalhar numa teoria da relatividade geral. Esta teoria seria geral na medida em que estenderia o **PR** a todo e qualquer referencial com qualquer tipo de movimento. A necessidade de estender o **PR** é, efetivamente, sugerida pelo **princípio da equivalência (PE)**, como Einstein notou perspicazmente. Um observador em queda livre no campo gravítico terrestre não se distingue localmente de um observador numa zona do espaço sem campo gravítico. Mas o primeiro observador é claramente acelerado em relação à Terra (e ao resto do universo). Ora, isto sugere que observadores com movimentos que não o retilíneo e uniforme também possam não se distinguir de observadores inerciais restritos. Daí a necessidade de estender o **PR** para outro tipo de observadores.

Note-se que no contexto da MRCG esta exigência é cumprida. O **PE** está embutido na teoria desde o início. A MRCG afirma explicitamente que corpos inerciais não têm de ter movimento retilíneo e uniforme entre si. O tipo de movimento que têm entre si fica

por determinar pelo lagrangiano adequado, sendo este sugerido pelo **princípio de Mach (PM)**, isto é, o princípio que nos diz que o movimento de um corpo inercial em relação ao resto do universo é determinado por esse mesmo universo. Veja-se então como os três princípios **PE**, **PM** e **PR** podem ser perfeitamente respeitados numa teoria clássica, algo que Einstein não acreditava ser possível.⁵⁰

Ora, é verdade que a extensão do **PR** é sugerida pelo **PE**. Einstein apercebeu-se claramente deste facto. No entanto, é controverso querer generalizar o **PR** para *qualquer tipo de referencial*. De certa maneira, poder-se-á dizer que Einstein procurou concretizar este objetivo. Veja-se por exemplo o que é dito no seu livro *O Significado da relatividade*:

É objetivo essencial da teoria geral da relatividade libertar a Física do conceito de “sistema de inércia” (ou sistemas de inércia). Este conceito é pouco satisfatório pela seguinte razão: sem qualquer fundamentação segura, ele singulariza certos sistemas de coordenadas entre todos os que podem ser imaginados. Exige assim que as leis da física sejam apenas válidas para tais sistema de inércia (por exemplo, a lei da inércia e a lei da constância da velocidade da luz). (2003: 145-6)

No contexto da relatividade geral há uma distinção clara entre referenciais (localmente) inerciais e referenciais não-inerciais: os que seguem as geodésicas do espaço-tempo são os primeiros, os que se desviam das geodésicas os segundos. Assim, tal como é unanimemente reconhecido, não se pode dizer que, no contexto da relatividade geral, todos os referenciais são equivalentes⁵¹.

Um dos caminhos pelos quais Einstein tentou generalizar o **PR** foi através do **Princípio da Covariância Geral (PCG)**. Este princípio surge num contexto muito específico: aquele onde o espaço e o tempo estão embutidos numa métrica espaço-temporal. De facto, a passagem da relatividade restrita para a Geral parece resultar daquilo que John Norton denominou proveitosamente como “colisão de geometrias” (Norton 1999). Como se sabe, a abordagem de Felix Klein à geometria, encapsulada no seu *Erlangen Programm*, consistia em procurar o grupo de transformações que deixava certas quantidades geométricas invariantes. Por outro lado, Riemann introduziu *ab initio* a sua métrica. A teoria da relatividade restrita, na sua génese, era uma teoria puramente algébrica, na medida em que ela apresentava certas transformações (de Lorentz) que deixavam quantidades geométricas (as leis da física) invariantes. Ora, ao passar para a

⁵⁰ Barbour chama repetidamente a atenção para esta questão no que toca ao **PM**, (1974) e (2007).

⁵¹ Para referências e discussão ver (Norton 1993). Dieks (2006) tenta vindicar a equivalência entre referenciais perante uma interpretação mais sofisticada do **PR** e do **PCG**.

teoria da relatividade geral, Einstein fez uso dos métodos da geometria diferencial riemanniana, tentando, contudo, em simultâneo, conservar a interpretação da geometria de Klein, de forma a generalizar o princípio da relatividade. Como Norton escreve:

[...][In] formulating a space-time theory based on an invariant line element [$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$], Einstein had left the geometric tradition of Klein and entered that of Riemann. Klein's group-based method of discerning the physically real no longer functions without significant modification. Therein lie the interpretative woes that Einstein brought on his head. (*Ibid.*: 139)

De facto, se na relatividade restrita é óbvio que ds^2 é uma quantidade invariante *deduzida* das transformações entre referenciais inerciais, essa mesma quantidade não preserva esta interpretação no contexto da relatividade geral. Pessoalmente, em investigações futuras, gostaria de recuperar a ênfase no **PR** como um princípio que seleciona um conjunto de referenciais onde as leis da física são as mesmas. Mas essa não parece ser a tónica atual. Por exemplo, escreve Norton (ênfase minha):

[...][S]pecial relativity admits a non-trivial symmetry group, the Lorentz group, which maps inertial frames of reference into one another. The spacetimes of general relativity in general admit no symmetries. In general relativity, the closest analog of an inertial frame of reference is a frame in free fall. It is represented by a congruence of timelike geodesics. *In general, a transformation that maps one freely falling frame or reference into another will not be a symmetry of the metrical structure. Therefore spacetime observers of the first frame will see different metrical properties in spacetime than will those of the second.* The indistinguishability required for the equivalence of frames does not obtain. (1993:839)

Partilho uma intuição: talvez estejamos a procurar a simetria no sítio errado. Isto é, talvez seja útil procurar nas transformações que mapeiam um referencial em queda livre noutra, quantidades algébricas que não variem, tal como $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$ (e por extensão as leis da física) é uma quantidade algébrica invariante do grupo de Lorentz. As leis da física seriam também covariantes para estas transformações mais gerais.⁵²

Há mais questões associadas ao **PCG**. Como se sabe, até a teoria newtoniana pode ser escrita numa forma covariante.⁵³ Para mim, isto é suficiente para lançar dúvidas quanto à utilidade deste princípio, mesmo sabendo que muitos relativistas veem na

⁵² Se isto pode ser feito no domínio da MRCG (com um tempo absoluto), então a dificuldade acrescida no domínio da relatividade geral será a da presença de geometrias não-euclidianas e a do tempo relativo e sincronização de relógios.

⁵³ Relembre-se o trabalho de Kretschmann logo após Einstein obter a relatividade geral. Para uma discussão extensiva sobre o **PCG** ler o célebre artigo de Norton (1993).

covariância geral da teoria da relatividade uma vantagem. Entretanto, ao **PCG** vem amiúde associada uma insistência, repetida muitas vezes em manuais de física, na necessidade de escrever as equações físicas independentemente de coordenadas, porque a física não pode depender do referencial em que as leis são escritas. Pelo contrário, creio que as leis da física devem depender explicitamente de coordenadas, (i) porque a ciência é construída de homens para homens, e homens fazem experiências em laboratórios e observatórios onde recorrem a coordenadas; e (ii) porque efetivamente existe um conjunto de referenciais especiais, chamados inerciais, onde as leis da física se exprimem “naturalmente” e, portanto, as leis da física devem ser escritas nas coordenadas desses mesmos referenciais. O facto de o **PCG** também não distinguir entre sistemas de coordenadas e referenciais (a que podem estar associados muitos sistemas de coordenadas diferentes) parece-me um ponto fraco de qualquer teoria que nele se baseie.

Muito geralmente, não me parece que a insistência em escrever uma teoria que não dependa de coordenadas encerre algo de proveitoso. Também me parece que uma teoria física deve ser escrita em coordenadas que têm uma interpretação empírica direta, já que, muito naturalmente, para as leis serem testadas será necessário medir tempos e espaços de uma forma muito concreta. Einstein não seguiu este caminho, muito pelo contrário. Nas suas notas autobiográficas realça a importância do **PE** como princípio guiador para a generalização da relatividade restrita, algo de que se apercebeu tão cedo como 1907. Mas acrescenta:

Why were another seven years required for the construction of the general theory of relativity? The main reason lies in the fact that it is not so easy to free oneself from the idea that co-ordinates must have an immediate physical meaning. (1949: 67)

Sem dúvida que Einstein se refere a um problema espinhoso. Uma coisa é certa: o espaço não tem de ser euclidiano, e isso traz novas nuances à física do espaço e do tempo.

Note-se, por fim, que o facto de o espaço entre corpos não ter de ser euclidiano sugere na verdade que o espaço é algo que *existe* independentemente dos corpos, isto é, existe, por assim dizer, um espaço absoluto. Isto porque, na verdade, é uma questão empírica a determinação da curvatura intrínseca do espaço onde nos movemos. Para clarificar o que quero dizer, imaginemos o seguinte cenário: existem apenas três corpos no espaço vazio, e pretendemos fazer uma viagem entre eles, partindo do primeiro, para o segundo, até chegar ao terceiro, de volta ao primeiro. Esta viagem em circuito fechado permite-nos, como é conhecido pelos resultados da geometria diferencial, saber se nos

movemos num espaço intrinsecamente curvo, ou não. A curvatura do espaço pode ser qualquer uma, e ela pode ser determinada nesta nossa viagem (como a curvatura da superfície do planeta Terra o foi, por exemplo). Mas se, para os mesmos três corpos, a curvatura do espaço pode ser qualquer uma, isto significa que o *espaço* é certamente alguma coisa distinta dos três corpos! Ainda mais simplesmente: se existe uma coisa chamada *curvatura*, e essa coisa não se reduz à matéria, então existe algo que *está a ser curvado*: o espaço, que já lá está antes da matéria. Aliás, uma das interpretações de Einstein do **PM** era a de que o espaço deve ser algo que atue sobre a matéria, mas que também possa ser atuado por ela. Efetivamente, a relatividade geral sugere que a curvatura do espaço é influenciada (ainda que não determinada totalmente, como veremos) pela matéria e energia circundantes.⁵⁴

A questão referida acima sobre o espaço absoluto está, na verdade, relacionada com as interpretações *relacionalistas* e *substantialistas* do espaço-tempo⁵⁵. Como vimos, a MRCG é uma teoria relacional, na medida em que emprega apenas termos relativos, incluindo o termo “inércia”. No entanto, se pusermos a hipótese de o espaço entre as partículas ser curvo, esta entidade parece ganhar, digamos, uma existência própria. Se é verdade, como faz Julian Barbour e como a MRCG exemplifica, que é possível construir uma teoria clássica relacionalista, as exigências no domínio relativista são outras. Isto porque as distâncias r_{ij} entre as partículas dependem da curvatura do espaço-tempo (devem ser interpretadas como distâncias próprias num espaço não-euclidiano).

O facto de a teoria da relatividade geral não colocar muita ênfase nos observáveis r_{ij} faz dela, por assim dizer, uma teoria que descreve sobretudo o espaço-tempo, não sendo tanto uma teoria dinâmica como a mecânica clássica. Isto é enfatizado, por exemplo, por Julian Barbour aquando da discussão dos comentários de Poincaré em *Ciência e Hipótese* sobre a necessidade das leis da física conterem apenas segundas derivadas, de forma a que as condições iniciais sejam a posição e a velocidade (lembrar a discussão do capítulo 2). Esta era uma das formulações do princípio da relatividade para Poincaré. Escreve Barbour (ênfase meu):

⁵⁴ É bem possível que estas minhas conclusões acabem por, na verdade, contradizer a MRCG. Porque afinal existe alguma coisa para lá da matéria a que se chama espaço, e talvez faça sentido pensar no movimento em relação ao espaço e não só em relação a corpos. Por isso, afirma-se por vezes que a gravitação tem graus de liberdade independentes (associados à curvatura do espaço em si).

⁵⁵ Para um relato atualizado ver (Pooley, 2014).

Mention should also be made here of the rather vague way in which Einstein formulated the relativity principle. He invariably simply said that the laws of nature, the form of which he deliberately left vague, must take the same form in all frames of reference. He never attempted anything like the subtly refined formulation proposed by Poincaré based on identification of the kind of initial data needed to predict the future uniquely. A strength of Poincaré's approach is that it avoids the vicious circle inherent in Einstein's approach whereby the status and origin of the necessary distinguished frames (the local existence of which is still needed in general relativity despite the general covariance of that theory) is left open. In Poincaré's approach, the question of the distinguished frames of reference does not arise, since he formulated the initial value problem deliberately in such a way that they do not enter into it at all. *For some reason or other, Einstein never seems to have thought of general relativity as a dynamical theory and Poincaré's comments seem to have made no impression on him.* (2007: 599-600)

Também como já se disse, neste mesmo artigo Barbour chama a atenção para o facto de Einstein nunca ter considerado as teorias machianas de Hofmann, Reissner e Schrödinger. Para Barbour, estas teorias eram um exemplo de como é possível, no domínio clássico, dispensarmos sistemas de coordenadas⁵⁶, algo que Einstein via como uma complicação.⁵⁷ A verdade é que o propósito de Mach era basear toda a física em medições relativas. Como escreve Barbour:

The difference between Mach and Einstein can be summarized very simply: Mach wanted to eliminate coordinate systems entirely, Einstein wanted to show that all coordinate systems were equally valid. Given the tremendous success of the special theory of relativity, which established the equivalence of all coordinate systems in uniform motion relative to each other, and the promise offered by the equivalence principle for extension to accelerated motion, it is very easy to see why Einstein became so totally committed to his approach and took virtually no notice of the alternative. (*Ibid.*: 594)⁵⁸

⁵⁶ Para Barbour, dispensar sistemas de coordenadas significa assentar a física nos dados empíricos r_{ij} . Eu acrescento, como argumentei no capítulo 3, que uma teoria relacional também deve comportar os ângulos entre corpos, medidos relativamente a um qualquer deles.

⁵⁷“Moreover, the alleged difficulty to which Einstein refers, that of dispensing with coordinate systems, is simply nonexistent. Both Hofmann and Reissner did dispense with coordinate systems in the formulation of their proposed law and worked directly with only the distances of material points from each other instead of coordinates.” (Barbour 2007:576)

⁵⁸ Para sugerir ao leitor que estas citações e concomitante discussão sobre a génese da relatividade não têm apenas um valor histórico ou arqueológico, cito Barbour (meu ênfase): “*I hope and believe that nearly all the articles in this book will have not only historical and philosophical interest but also serve a useful purpose for current research.* It is widely agreed that the greatest current problem that has to be solved in theoretical physics is that of the relationship between quantum theory and the general theory of relativity. It is my conviction [...] that general relativity is deeply Machian in a sense that unfortunately Einstein never managed to pinpoint accurately and that precisely this very Machian nature of general relativity is the main cause of the difficulties that stand in the way of its quantization. *I therefore hope*

Para finalizar, discutamos mais algumas questões sobre o **PM** no contexto da relatividade geral. Como foi dito, a MRCG do capítulo anterior concretiza o **PM**; uma partícula sozinha não tem energia cinética nem potencial e não faz sentido falar da sua posição no espaço, duas partículas têm energias cinética e potencial entre si e só faz sentido falar do espaço relativo entre elas, etc. Também concluímos que a massa e a constante de gravitação locais dependem do resto do universo, um resultado assaz machiano. O trabalho desenvolvido nesta tese baseia-se na linha de pensamento de Mach, Hofmann, Reissner e Schrödinger. Como já disse, é conspícuo que Einstein, tendo certamente lido os artigos de Hofmann e Schrödinger em questão, tenha sido grandemente insensível à abordagem machiana destes. Nunca Einstein tentou implementar o princípio de Mach na sua teoria da relatividade geral segundo as vias destes cientistas.⁵⁹

Einstein, no seu artigo cosmológico de 1917, tentou implementar o **PM** à escala do universo. Ao desenvolver a sua teoria da gravitação, tinha-se mostrado insatisfeito perante o facto de as condições de fronteira das métricas do espaço-tempo serem o espaço de Minkowski, solução que, na sua opinião, continuava a desempenhar o papel do espaço absoluto que ele pretendia abolir. A sua solução, no seu artigo cosmológico, foi abolir o próprio infinito, postulando um universo esférico fechado, de forma a que as condições de fronteira ficassem bem definidas em qualquer ponto. Contudo, as soluções posteriores de de Sitter e outros, que mostraram que as equações de Einstein tinham soluções cosmológicas sem matéria, malograram o seu objetivo de implementar o **PM**, princípio esse que Einstein acabaria por abandonar. Na verdade, poder-se-á até dizer que o simples facto de as equações de Einstein permitirem a solução do espaço-tempo de Minkowski na ausência de matéria refuta a implementação do **PM**.

Muito geralmente, existem duas razões pelas quais a teoria da relatividade geral não é uma teoria machiana. Primeiro, existe o já referido problema da escolha das condições de fronteira, que por defeito são o espaço-tempo plano. Em segundo lugar, a definição do tensor energia-momento *não é* independente da métrica, o que frustra o objetivo de a métrica ser totalmente definida pela distribuição de matéria e energia (ver, por exemplo, [Lehmkuhl 2008]). Isto é muito claramente sugerido por definições típicas do tensor

that the present article will have not only historical relevance but also help to clarify some central issues of current research." (2007: 571)

⁵⁹ Mais uma vez, atente-se à análise de Barbour já supracitada (2007).

energia-momento que dependem explicitamente da métrica., como o de um fluido perfeito com pressão:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$$

Para finalizar e resumir, gostaria de deixar algumas pistas soltas para uma programática de investigação, mesmo sabendo que me faltam argumentos (este capítulo é incipiente), e que para muitos relativistas algumas destas questões estão encerradas/não fazem sentido:

- (1) **Investigar o conceito de espaço-tempo, à luz do debate relacionalista/substantialista.** Repensar a sua utilidade. O espaço e o tempo podem influenciar-se mas são coisas distintas. O espaço (não o espaço-tempo) será riemanniano (com curvatura intrínseca determinável), localmente medido com régua (régua infinitesimal e ângulos seriam os conceitos de espaço primitivos); o tempo deve ser medido com relógios a sincronizar devidamente;
- (2) **Formular a Teoria da relatividade como uma abordagem mais operacional, de forma a clarificar o problema da interpretação das coordenadas.** Efetivamente, o espaço e o tempo são, empiricamente, conceitos muito distintos. Seria importante, como é o caso na teoria clássica, que, ao falarmos de coordenadas do espaço e do tempo, a teoria tivesse uma relação imediata com o empírico, já que no laboratório se fazem medições em concreto;
- (3) **Colocar a tónica no princípio da relatividade como um princípio que relaciona referenciais inerciais onde as leis da física são as mesmas.** Formular as leis da física naturalmente em referenciais inerciais e investigar as leis gerais de transformação que as relacionam. Tal como no caso restrito, as leis físicas entre referenciais inerciais são covariantes perante as transformações de Lorentz; no caso em que há movimentos inerciais mais gerais também haverá um grupo de transformações que torna as leis da física covariantes entre esses referenciais;
- (4) **Investigar as transformações entre referenciais inerciais e não inerciais.** Isto permitir-nos-ia, por exemplo, clarificar o efeito de Sagnac, que alguns ainda não consideram unanimemente esclarecido. Entretanto, note-se que um movimento

não-inercial tem de ser sempre causado por uma força. Assim, a força não está presente sempre que existe aceleração, mas sim sempre que existe um desvio ao movimento inercial;

- (5) Tentar investigar, à luz, por exemplo, das considerações de Julian Barbour, **até que ponto é que a teoria da relatividade geral é machiana**, e como poderá ela recuperar no limite clássico a MRCG e não a mecânica newtoniana. Note-se que a MRCG explica as curvas de rotação de galáxias sem necessidade de apelar à matéria escura

Estas são as coordenadas de investigação que acho interessantes para futuros estudos, esperando igualmente que se tornem promissoras aos olhos do leitor depois da leitura desta dissertação.

Conclusões

No capítulo 1, apresentou-se a mecânica newtoniana, e os problemas conceptuais que ela colocou relacionados com a inércia, o espaço e o tempo. No capítulo 2, foram discutidas algumas das críticas que a mecânica newtoniana enfrentou e continua a enfrentar. Sugeriu-se, em particular, que o espaço, o tempo e a inércia absolutos poderiam ser abolidos. No capítulo 3, apresentei uma reformulação, mais ou menos original, da mecânica clássica, através da qual estou convicto de ter resolvido o problema da lei da inércia e do referencial de inércia no contexto clássico, especialmente no que toca à introdução dos conceitos de “corpo inercial” e “observador inercial”. A aplicação da MRCG à dinâmica galáctica sugere, espero, que a matéria escura pode ser reinterpretada como um efeito dinâmico de uma teoria machiana clássica. Isto sugere que a relatividade geral também necessita de reformulações, para no limite clássico ser recuperada a MRCG.⁶⁰ Será que a energia escura também poderá ser reinterpretada como um efeito dinâmico de uma nova teoria da inércia/gravitação? Por fim, no capítulo 4 apresentaram-se algumas pistas e reflexões para investigações futuras no domínio da relatividade. Acrescento ainda o seguinte: visto que a MRCG, uma teoria clássica, implementa os princípios de Mach, da equivalência e da relatividade (este último no domínio da mecânica clássica), o que há então de tão particular na teoria de Einstein? Primeiro, a presença de geometrias não-euclidianas. Em segundo lugar, a constância da velocidade da luz local. Mas mais importante que isso, creio que a resposta está no conceito de tempo. Não será por acaso que autores como Julian Barbour e Lee Smolin veem na compreensão do tempo o passo derradeiro para unificar a gravitação e a mecânica quântica.

Finda esta dissertação, em retrospectiva, reparo que há momentos em que ela se revela mais sistemática, e outros em que se revela mais caótica e exploratória. Estou certo de que nem sempre fui coerente. Muitas vezes partilhei apenas certas intuições para as quais não tenho justificações. Enfim, resta-me dizer que, se o leitor se revir na minha vontade de investigar os fundamentos da física, e se, em especial, reconhecer em si mesmo as intuições que eu aqui expus, então espero que possamos trabalhar em conjunto numa qualquer oportunidade.

⁶⁰ Como disse Barbour algures, aquando das suas próprias investigações sobre modelos machianos clássicos (1974), uma teoria machiana clássica estará para uma teoria da gravitação derradeira como o modelo do átomo de hidrogénio de Bohr esteve para a mecânica quântica.

Referências Bibliográficas

- BALOLA, Raquel. 2010. *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural: A lei de inércia*. Tese de mestrado em estudos clássicos. Faculdade de Letras da Universidade de Lisboa.
- BARBOUR, Julian e Herbert Pfister (cords.). 1995. *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity*. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser.
- BARBOUR, Julian. 1974. Relative-distance Machian theories. *Nature* 249: 328.
- . 2007. Einstein and Mach's Principle. Em *The Genesis of General Relativity* 3, de Jürgen Renn (coord.). Dordrecht: Springer, 569-604.
- . 2010. The Definition of Mach's Principle. *Foundations of Physics* 40, 9-1: 1263-1284.
- BEGEMAN, K. G. 1989. HI rotation curves of spiral galaxies. *Astron. Astrophys.* 223, 47-60.
- COHEN, I. Bernard e Anne Whitman. 1999. *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Berkeley, Los Angeles e Londres: University of California Press.
- CORBELLI, Edvige e Paolo Salucci. 2000. The extended rotation curve and the dark matter halo of M33. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 311: 411-447.
- DIEKS, Dennis. 2006. Another look at general covariance and the equivalence of reference frames. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 37: 174-191.
- DISALLE, Robert. 2009. Space and Time: Inertial Frames. Em *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* Winter, de Edward N. Zalta (coord.), URL=<http://plato.stanford.edu/archives/win2009/entries/spacetime-iframes/>.
- EINSTEIN, Albert. 1949. Autobiographical Notes. Em *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, de Paul Arthur Schilpp (coord.). Evanston, Illinois: The Library of Living Philosophers.
- . 2003. *O Significado da relatividade*. Tradução de Mário Silva. Lisboa: Gradiva.
- FREEMAN, K. C. 1970. On the Disks of Spiral and S0 Galaxies. *The Astrophysical Journal* 160: 811-830.

- FREGE, Gottlob. 1961 [1886]. About the Law of Inertia. *Synthese* 13, 4: 350-363 [tradução do original alemão por Rose Rand].
- GIULINI, Domenico. 2002. Das Problem der Trägheit. *Philosophia Naturalis* 39: 343-374.
- . 2013. Instants in physics – point mechanics and general relativity. *arXiv:1306.0338[physics.hist-ph]*.
- HOFMANN, Wenzel. 1995 [1904]. Motion and Inertia. Em *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, de Julian Barbour e Herbert Pfister (cords.). Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 128-133 [comentários e tradução parcial do original alemão por Barbour].
- KLAUBER, Robert D. 1998. New Perspectives on the Relativistically Rotating Disk and Non-time-orthogonal Reference Frames. *Found. Phys. Lett.* 11:405-443.
- LANGE, Ludwig. 2014 [1885]. On the Law of Inertia. *Eur. Phys. J. H.* 39, 2: 251-262 [traduzido do original alemão por Herbert Pfister].
- LEHMKUHL, Dennis. 2008. Mass-energy-momentum: only there because of spacetime? *British Journal for the Philosophy of Science* 62, 453-488.
- LUSANNA, Luca. 2013. Non-Inertial Frames in Special and General Relativity. *Proceedings of the SIGRAV School "Gravity: Where Do We Stand?"*, 2009, Villa Olmo (Como), cords. V. Gorini, U. Moschella And R. Peron.
- MACH, Ernst. 1919 [1901, 4ed]. *The Science of Mechanics*. Chicago, Londres: The Opening Court Publishing Co. [traduzido do original alemão por Thomas J McCormack].
- MUIRHEAD, Robert. 1887. The Laws of Motion. *Phil. Mag. S. 5* 23: 473-489.
- NELSON, Robert A. 1987. Generalized Lorentz transformation for an accelerated, rotation frame of reference. *Journal of Mathematical Physics* 28: 2379-2383.
- NEUMANN, Carl. 1993 [1870]. On the Principles of the Galilean-Newtonian Theory. *Science in Context* 6, 1: 355-368 [tradução do original alemão por Gideon Freudenthal].
- NORTON, John D. 1993. General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute. *Rep. Prog. Phys.* 56: 791-858.

- . 1999. Geometries in Collision. Einstein, Klein and Riemman. Em *The Symbolic Universe*, de Jeremy Gray (coord). Oxford New York: Oxford University Press, 128-144.
- PELISSETTO, Andrea e Massimo Testa. 2015. Getting the Lorentz transformations without requiring an invariant speed. *American Journal of Physics* 83: 338-340.
- PETKOV, Vesselin. 2005. Propagation of Light in Non-Inertial Reference Frames. Em *Relativity and the Nature of Spacetime*, de Vesselin Petkov. Berlin: Springer, 191-241.
- PFISTER, Herbert. 2014. Ludwig Lange on the Law of Inertia. *Eur. Phys. J. H.* 39, 2: 245-250.
- POINCARÉ, Henri. 1905 [1902]. *Science and Hypothesis*. New York: The Walter Scott Publishing Co., Ltd [tradução do original para inglês por William John Greenstreet].
- POOLEY, Oliver. 2014. Substantialist and Relationalist Approaches to Spacetime. Em *The Oxford Handbook of Philosophy of Physics*, de Robert Batterman (cord.). Oxford New York: Oxford University Press, 522.
- REISSNER, Hans. 1995 [1915]. On the Relativity of Accelerations in Mechanics. Em *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, de Julian Barbour e Herbert Pfister (cords.). Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 134-146 [tradução do original alemão por Barbour].
- ROWLAND, David R. 2006. Noninertial observers in special relativity and clock synchronization debates. *Foundations of Physics Letters*. 19, 2: 103-126.
- SCHRÖDINGER, Erwin. 1995 [1925]. The Possibility of Fulfillment of the Relativity Requirement in Classical Mechanics. Em *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, de Julian Barbour e Herbert Pfister (cords.). Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 147-158 [tradução do original alemão por Barbour].
- SELLERI, F. 1997. Noninvariant One-Way Speed of Light and Locally Equivalent Reference Frames. *Found. Phys. Lett.* 10: 73-83.
- TAIT, Peter. 1884. Note on Reference Frames. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, July 7*: 104-106.

THOMSON, James. 1884. On the Law of Inertia; The Principle of Chronometry; And the Principle of Absolute Cinural Rest, And of Absolute Rotation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh XII*: 379-389.