SOBRE ALGUNS PROBLEMAS

DA

TEORIA DAS CADEIAS DE MERCADOS

AUGUSTO DE MACEDO SÁ DA COSTA

SOBRE ALGUNS PROBLEMAS DA TEORIA DAS CADEIAS DE MERCADOS

Dissertação para doutoramento
em ciências económicas e financeiras

LISBOA
1947

A meus pais e
a minha mulher.

ÍNDICE

Nota prévia 11
1. Divergência e diferenciação vertical 19
- **1.0. Introdução** 19
- **1.1. Mercado intermediário** 21
- **1.2. Cadeias de mercados** 29
- **1.3. Divergência e diferenciação vertical** 39

2. Divergência e diferenciação horizontal 45
- **2.0. Introdução** 45
- **2.1. Composição de mercados e de cadeias** 46
- **2.2. Divergência e diferenciação horizontal** 51
- **2.3. Decomposição de cadeias de valências constantes** 56

3. Crise e cadeia de mercados 67
- **3.0. Introdução** 67
- **3.1. Depressão e expansão numa cadeia de mercados** 69
- **3.2. Cadeias de mercados sem depressões** 84

4. Divergência, crise e objectivos da actividade de uma cadeia de mercados 87
- **4.0. Introdução** 87
- **4.1. O lucro como objectivo da actividade de uma cadeia de mercados** 88
- **4.2. Necessidade da planificação da actividade dos mercados de uma cadeia** 91

5. Bibliografia 93

NOTA PRÉVIA

O trabalho presente é de índole acentuadamente teórica.

Sem que isso possa de modo algum assegurar eventual interesse a este estudo, parece já não haver dúvidas sobre a necessidade e o interesse deste tipo de trabalhos. Está longe, evidentemente, de ser esta a única classe de trabalhos necessários ao estudo dos problemas económicos concretos, cuja resolução efectiva deve ser o fim último e sempre presente da investigação em economia. Outros tipos de estudos, não menos necessários, com muito maior frequência que os primeiros merecedores da atenção do economista, se estabelecem a ligação natural e indispensável entre o trabalho teórico e os problemas reais, nem por isso daqueles prescindem, sem correr o risco de faltar-lhes, simultâneamente, um orientador e um integrante, um estímulo e um inovador.

Cabe aqui, sem dúvida, a referência de algumas afirmações que sublinham este ponto de vista, não com o brilho discutível dos títulos académicos de quem as fez, mas com a autoridade que decorre dos méritos inequívocos da obra científica realizada, quer no domínio teórico em causa, quer fora dele.

É o professor E. Böhler, devotado ao estudo dos problemas concretos, quem afirma:

«Ohne eine theoretische Durchdringung der volkswirtschaftlichen Zusammenhänge werden die wirtschaftlichen und gesellschaftlichen Probleme der nächsten Jahre, die Aufrechterhaltung der Beschäftigung, die Verbesserung des Lebensstandards und die drängenden sozialen Probleme nicht gelöst werden können» (1).

E foi E. Lundberg quem escreveu algures (2):

«The ultimate purpose of all economic theory is to analyse changes in economic life with respect to time. The subject of the explanation may be price, production, and sales of a particular product in a partial market, or total income, employment, and production in a whole country. In each case the analysis aims at the fitting the possible and actual changes in prices, production, income, employment, etc. into a rational system of explanation».

---

(1) E. Böhler (1). (Veja-se a Bibliografia).

(2) E. Lundberg (1).

E, se assim é, se por um lado se reputa indispensável uma «penetração» teórica das relações económicas e por outro lado se considera necessária a inclusão dos resultados da análise dos fenómenos económicos num sistema racional de explicação, não causa surpresa que se seja forçado a adoptar o método matemático.

Então, sem se aceitar o tom exagerado de C. F. Roos (1), *há que partilhar, indubitàvelmente, a opinião de G. C. Evans:*

«It is not a question as to wether mathematics is desirable or not in such a subject. We are in fact forced to adopt the mathematical method as a condition of further progress» (2).

E, a este respeito é indispensável ter sempre presente a bem fundada observação do professor M. Dobb (3):

---

(1) «One might well venture the opinion that the chief reason why so much has been written on economic theory and so little advancement made is that economists know so little of mathematics. Almost without exception those economists who have made lasting contributions to economic theory have been mathematicians or economists who have known considerable mathematics.» — C. F. Roos (1, pág. 11).

(2) G. C. Evans (1, pág. 113).

(3) M. Dobb (1, pág. 183-184).

«What has here been said in criticism is not intended to deny that mathematical economics may have much to contribute to the refinement of implications and clarification of assumptions. Nor is it to deny that the subjective attitudes of individuals play a rôle as links in the chain of economic events, and hence have a place in any complete analysis of economic phenomena. But it is to say that so long as mathematical technique retains its servitude to a particular mode of thought, the concepts which it fashions are calculated to veil rather than to reveal reality. For this mode of thought, which is enshrined in the subjective theory of value, first creates for us a realm where disembodied minds hold communion with etherealized objects of choice, and then, unmindful of the distance between this abstract world and reality, seeks to represent the relations which it finds in this realm as governing the relations which hold in actual economic society and as controlling the shape which events must have under any and every system of social institutions. This is to confuse thought and to distort reality. It is to have everything

standing on its head. To emancipate economic thought from this heritage is a task that is long overdue.»

* * *

Duas observações devem ser feitas quanto à forma do presente estudo — não tem pretenções eruditas, nem de extensão.

Como parece normal, procurou-se dizer pela forma mais curta apenas o essencial à compreensão dos resultados e limitou-se ao indispensável a citação de autores. Portanto, evitou-se sistemàticamente considerações redundantes e não se utilizou o conhecido processo da exibição de uma erudição banal para avultar trabalho que se não fez.

Foi-se talvez um pouco longe demais no cumprimento destas normas e não se explicitou, porventura, suficientemente a ligação com o quadro concreto de que se isolou o objecto deste estudo. Servirá de atenuante o facto de tal ligação estar patente nos trabalhos em cuja linha este se coloca, que reduziria, por consequência, a descrição dessa relacionação a simples repetição de coisas triviais por já terem sido *ditas algures e cuja leitura permitirá avaliar com justeza o interesse dos problemas aqui tratados.*

* * *

Num trabalho que o tempo e o mérito tornaram clássico, A. Aftalion (1) *examinou a divergência dos movimentos dos mercados de meios de produção e de bens de consumo, isto é, o facto de que um acréscimo da procura de bens de consumo implica um acréscimo desproporcionado da procura de meios de produção.*

Na linha de outros trabalhos sobre o mesmo assunto, B. Chait (2) *submeteu o facto referido a um estudo mais exigente e em condições mais realistas.*

Mostrar que alguns resultados importantes enunciados por B. Chait têm de ser substituídos uns, limitados a casos especiais outros, é um dos objectivos do trabalho presente.

(1) A. Aftalion (1).

(2) B. Chait (1). V. também B. Chait. (2) e L. Hibbert (1).

Prosseguiu-se este fim nos dois primeiros capítulos, nos quais se procurou, simultâneamente, esclarecer certos elementos fundamentais da teoria das cadeias de mercados não suficientemente precisados por aquele autor e fazer dessa mesma teoria uma construção rigorosa no que respeita às linhas condutoras aos resultados a aferir ou a estabelecer.

Nos dois últimos capítulos examina-se o condicionalismo da propagação numa cadeia de mercados das expansões e depressões da sua actividade, evidencia-se o facto da divergência de movimentos já referida ser uma consequência da organização dos mercados que deve ser considerada pelo critério determinante da actividade destes, se se pretende eliminar o que ela pode comportar de indesejável, e, por fim, confronta-se o critério do lucro com o da organização racional e com o propósito da actividade dos mercados.

* * *

Aproveito esta ocasião para manifestar o meu reconhecimento:

Ao professor F. Gonseth, da Escola Politécnica Federal de Zurique, por todos os ensinamentos e sugestões de que beneficiei durante dois anos.

Ao País que, por intermédio do Instituto para a Alta Cultura, me facultou os meios materiais indispensáveis ao meu estágio na Suiça.

Ao Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, nas pessoas dos professores do primeiro grupo, especialmente, o professor Bento Caraça, a cuja intervenção devo apoio no pedido de bolsa de estudos no estrangeiro e, como assistente que fui, dispensa necessária do serviço durante o estágio.

Abril de 1947.

1. Divergência e Diferenciação Vertical

1.0. INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por fim o estudo do efeito da diferenciação vertical das cadeias de mercados sobre a divergência dos seus movimentos.

No parágrafo **1.1** estuda-se o mercado intermediário, no parágrafo **1.2**, as cadeias de mercados e no parágrafo **1.3** analisam-se as relações entre a diferenciação vertical das cadeias de mercados e a divergência dos movimentos destes.

O resultado essencial deste capítulo é o de que deve ser condicionada a afirmação «si on allonge la série envisagée d'industries d'une unité, chaque fois du chef de cette adjonction, l'ébranlement parti de la première industrie se trouvera renforcé par son passage à travers le nombre croissant d'industries intermédiaires» (1). Para chegar a este resultado, tomou-se sob uma forma diferente, mas equivalente, a noção de divergência de um mercado dada

---

(1) B. Chait (1, pág. 60) (V. Bibliografia).

por B. Chait (1) e estendeu-se esta noção às cadeias de mercados pela forma que parece ser a mais natural. Obteve-se assim uma definição precisa de divergência de uma cadeia de mercados, que nada tem de comum com a que B. Chait (2) apresenta e é incompatível com as noções de fluxo de saída e de divergência de um mercado.

No final do parágrafo **1.3** é dado um exemplo de uma diferenciação vertical de uma cadeia de mercados que não implica um aumento, seja da divergência, seja do seu módulo.

---

(1) «Pour le marché final, comme pour le marché non-final, il y a divergence entre le flux de sortie et le flux d'entrée, chaque fois que leur opérateur est différent de 1». — B. Chait (1, pág. 77).

(2) «Nous définissons la sensibilité d'un marché par rapport à un autre, comme le quocient des variations relatives pendant l'unité de temps qu'ont subie leurs flux de sortie respectifs. Lorsque leurs variations sont égales entre elles, nous dirons que les mouvements des marchés en question sont parallèles et que la sensibilité est égale à l'unité. Quand ces variations sont inégales, il y a divergence et la sensibilité est plus grande que l'unité». — B. Chait (1, pág. 110-111).

1.1. MERCADO INTERMEDIÁRIO

No que se segue são considerados como equivalentes os termos «bem» e «bem económico» e admite-se que, dadas duas classes de bens económicos, há sempre uma unidade com a qual é possível medi-las.

Definição 1. *Mercado* — todo o conjunto de bens económicos que se renova apenas por admissão e exclusão de bens.

Definição 2. *Fluxo de entrada* de um mercado na época t — a quantidade de bens admitidos no mercado no intervalo t, $t+dt$, referida à unidade de tempo.

Definição 3. *Fluxo de saída* ou *actividade* de um mercado na época t — a quantidade de bens excluídos do mercado no intervalo t, $t+dt$, referida à unidade de tempo.

Os dois fluxos de um mercado são, em virtude da definição, funções positivas do tempo. Supõe-se que são funções contínuas, admitindo derivadas contínuas até à ordem necessária.

Definição 4. *Mercado intermediário* — todo o mercado tal que os bens excluídos são idênticos aos bens admitidos, relativamente a um determinado conjunto de caracteres.

Todo o mercado pode ser encarado como mercado intermediário. Com efeito, basta tomar como conjunto de caracteres relativamente aos quais os bens admitidos são idênticos aos bens excluídos o conjunto que define bem económico.

No que se segue escrever-se-á, abreviadamente, mercado em vez de mercado intermediário, embora todo o mercado seja aqui encarado como mercado intermediário.

Definição 5. *Stock* de um mercado na época t — a quantidade de bens que pertence ao mercado nesta época t.

Se $z_1(t)$ representar o fluxo de saída de um mercado na época t, então representar-se-á por $Z(t)$ o stock do mesmo mercado na mesma época, expresso na unidade que serviu na definição do fluxo.

O mercado de fluxo de saída $z_1(t)$, stock $Z(t)$ e fluxo de entrada $z_2(t)$, representar-se-á por $m=(z_1, Z, z_2)$.

Para o mercado $m=(z_1, Z, z_2)$ qualquer, a definição 1 permite escrever a igualdade

$$1) \qquad \int_{t_0}^{t} z_2(u)du = \int_{t_0}^{t} z_1(u)du + \Big[Z(u)\Big]_{t_0}^{t}$$

O stock de um mercado, em virtude da definição, é uma função não negativa do tempo e, em virtude da hipótese admitida sobre a continuidade e derivabilidade dos fluxos de um mercado, é também uma função contínua que admite derivadas contínuas até à ordem necessária.

Derivando ambos os membros de 1) obtém-se

$$2) \qquad z_2(t) = z_1(t) + Z'(t).$$

Esta relação traduz a *lei do mercado intermediário*.

Definição 6. *Igualdade de mercados*. Dois mercados dizem-se iguais num intervalo se nesse intervalo:

a) os seus fluxos de saída são idênticos, e

b) os seus stocks são idênticos.

Definição 7. *Mercado estacionário* num intervalo — todo o mercado de stock constante nesse intervalo.

Definição 8. *Mercado* α — todo o mercado cujo stock é uma função só do fluxo de saída do mesmo mercado, função contínua e admitindo derivadas contínuas até à ordem necessária.

O stock de um mercado α não tem fins especulativos e possui, portanto, um carácter puramente funcional — comercial ou técnico [1].

Para os mercados α a lei do mercado intermediário pode ser posta sob a seguinte forma

$$2\alpha) \qquad z_2(t) = z_1(t) + F'(z_1).z_1'(t)$$

por ser

$$Z(t) = F[z_1(t)].$$

Definição 9. *Mercado* β — todo o mercado cujo stock é igual ao produto do fluxo de saída do mercado por uma constante.

Definição 10. *Módulo* de um mercado β — a razão constante do stock para o fluxo de saída do mercado.

O módulo de um mercado β é, por definição, positivo.

A introdução do mercado β impõe-se, desde logo, por uma razão de simplicidade — o mercado β é de todos os mercados α não estacionários o mais simples. Depois, observe-se que num mercado α o stock tem por fim assegurar o funcionamento contínuo do mercado, apesar das interrupções que se constatem na admissão. Assim [2], se $a(t)$ é a duração máxima de todas as interrupções pos-

---

(1) B. Chait (1, pág. 63-64).
(2) B. Chait (1, pág. 65-69).

síveis da admissão e se $z_1(t)$ é o fluxo de saída que o stock $Z(t)$ deve alimentar, então ter-se-á

$$Z(t) = \int_{t}^{t + a(t)} z_1(u)\,du \simeq a(t).z_1(t).$$

Conforme se supõe o factor $a(t)$ reduzido a uma constante, a uma função periódica ou a uma função não periódica nem constante, assim se considera o mercado imerso numa economia estacionária, de módulos cíclicos ou evolutiva (1). Desde que não sejam consideradas épocas muito afastadas, pode admitir-se que $a(t)$ se reduz a uma constante, mesmo numa economia não estacionária. Por fim, as verificações estatísticas que puderam fazer-se(2) conduziram a resultados que, pelo menos, não forçam a uma revisão imediata da hipótese: os mercados observados são mercados β.

Para os mercados β a lei do mercado intermediário toma a forma

$$2\beta) \qquad z_2(t) = z_1(t) + a.z_1'(t) \qquad (3)$$

com

$$Z(t) = a.z_1(t).$$

1. *O módulo de um mercado β é a medida do intervalo durante o qual o stock no seu início pode manter um fluxo de saída constante e igual ao seu valor no início do intervalo, sem o concurso do fluxo de entrada que se tornou nulo.*

---

(1) B. Chait (1, pág. 42-44 e 88-106).
(2) B. Chait (1, IV — Vérifications statistiques, pág. 132-167).
(3) B. Chait (1, pág. 76-77).

Fazendo em 1)

$$z_2(u) = o, \quad z_1(u) = z_1(t_0) \text{ para } t_0 \leqslant u < t,$$

$$Z(t_0) = a.z_1(t_0) \text{ e } Z(u) \geqslant o \text{ para } u \leqslant t,$$

obtém-se

$$o = (t - t_0).z_1(t_0) - a.z_1(t_0)$$

e por ser

$$z_1(t_0) > o,$$

tem-se finalmente

$$a = t - t_0.$$

2. *Nos pontos de máximo (mínimo) do fluxo de saída de um mercado* β, *de módulo não nulo os dois fluxos são iguais e o fluxo de entrada é decrescente (crescente)* [1].

Seja o mercado β, $m = (z_1, a.z_1, z_2)$. Nos pontos de máximo (mínimo) de $z_1(t)$ tem-se, em virtude das hipóteses feitas, $z_1'(t) = o$. Portanto,

$$z_2(t) = z_1(t) + a.z_1'(t) = z_1(t),$$

naqueles pontos, o que demonstra a primeira parte do enunciado.

Seja $n=2m$, m inteiro e positivo, a ordem da derivada de $z_1(t)$ de menor ordem que não se anula num ponto de máximo (mínimo) de $z_1(t)$. Então tem-se

$$m \geqslant 1,$$
$$z_1'(t) = z_1''(t) = \cdots = z_1^{(n-1)}(t) = o$$
$$z_1^{(n)}(t) < o \quad (> o).$$

---

(1) B. Chait (1, pág. 85-86).

Derivando sucessivamente $n-1$ vezes os dois membros de 2β) e tendo em conta os resultados precedentes, obtém-se

$$z_2'(t) = z_1'(t) + a.z_1''(t) = o$$

$$\ldots$$

$$z_2^{(n-2)}(t) = z_1^{(n-2)}(t) + a.z_1^{(n-1)}(t) = o$$
$$z_2^{(n-1)}(t) = z_1^{(n-1)}(t) + a.z_1^{(n)}(t) < o \quad (> o)$$

e por ser $n-1 = 2m-1$, $z_2(t)$ é decrescente (crescente) no ponto de máximo (mínimo) de $z_1(t)$ considerado.

3. *Nos pontos em que o fluxo de saída de um mercado* β, *de módulo não nulo, é estacionário e crescente (decrescente) os dois fluxos do mercado são iguais e o fluxo de entrada é mínimo (máximo).*

Seja o mercado β, $m = (z_1, a.z_1, z_2)$. Se $z_1(t)$ é estacionário, então $z_1'(t) = o$ e, por 2β),

$$z_2(t) = z_1(t) + a.z_1'(t) = z_1(t),$$

o que demonstra a primeira parte.

Seja $n=2m+1$, $m \geqslant 1$, inteiro, a ordem da derivada de $z_1(t)$ de menor ordem não nula num dos pontos considerados. De

$$z_1'(t) = z_1''(t) = \cdots = z_1^{(n-1)}(t) = o$$
$$z_1^{(n)}(t) > o \quad (< o)$$

segue-se que

$$z_2'(t) = z_2''(t) = \cdots = z_2^{(n-2)}(t) = o$$
$$z_2^{(n-1)}(t) = a.z_1^{(n)}(t) > o \quad (< o),$$

portanto, $z_2(t)$ é nesses pontos mínimo (máximo).

Das definições de fluxo de saída e de entrada de um mercado segue-se que os acréscimos da exclusão e da admissão de um mercado $m=(z_1, Z, z_2)$ durante o intervalo t, $t+dt$ são, a menos de infinitésimos de ordem superior à primeira relativamente a dt, $z_1(t)dt$ e $z_2(t)dt$. A razão de tais acréscimos é, no limite, igual à razão dos dois fluxos.

Definição 11. *Sensibilidade* de um mercado — a razão do seu fluxo de entrada para o seu fluxo de saída.

Representar-se-á por $s(t)$ a sensibilidade na época t do mercado $m=(z_1, Z, z_2)$. Tem-se

3) $$s(t)=\frac{z_2(t)}{z_1(t)}=1+\frac{Z'(t)}{z_1(t)}.$$

Consequências imediatas da definição 11:

1. A sensibilidade de um mercado é bem definida em todo o intervalo de definição do mercado, pois neste intervalo o fluxo de saída é sempre positivo.

2. A sensibilidade de um mercado é sempre positiva.

3. Tem-se $s(t) \gtreqless 1$ conforme fôr $Z'(t) \gtreqless o$.

4. $s(t) \equiv s$ constante se e só se

$$Z''(t).z_1(t) - Z'(t).z_1'(t) \equiv o.$$

5. $s(t) \equiv 1$ se e só se o mercado é estacionário.

Para os mercados β as três últimas consequências tomam a forma seguinte:

3β. $s(t) \gtreqless 1$ conforme fôr $z_1'(t) \gtreqless o$.

4β. $s(t) \equiv s$ constante se e só se

$$z_1(t) = c.e^{t(s-1)/a},$$

com $c > o$ constante arbitrária e a módulo do mercado.

5β. $s(t) \equiv 1$ se e só se $z_1(t) \equiv z_1$ constante.

Definição 12. *Divergência* de um mercado — a diferença entre a sensibilidade deste mercado e a sensibilidade do mercado estacionário que tem o mesmo fluxo de saída. Representando por $d(t)$ a divergência do mercado $m = (z_1, Z, z_2)$, tem-se

$$4) \qquad d(t) = s(t) - 1.$$

Consequências imediatas da definição 12:

1. Tem-se sempre $d(t) > -1$.
2. $d(t) \gtreqless o$ conforme fôr $Z'(t) \gtreqless o$.
3. $d(t) \equiv d$ constante se e só se

$$Z''(t).z_1(t) - Z'(t).z_1'(t) \equiv o.$$

4. $d(t) \equiv o$ se e só se o mercado é estacionário.

Para os mercados β as três últimas consequências tomam a forma:

2β. $d(t) \gtreqless o$ conforme fôr $z_1'(t) \gtreqless o$.

3β. $d(t) \equiv d$ constante se e só se

$$z_1(t) \equiv c.e^{d.t/a},$$

$c > o$ constante arbitrária, e a módulo do mercado.

4β. $d(t) \equiv o$ se e só se $z_1(t) = z_1$ constante.

1.2. CADEIAS DE MERCADOS

Neste parágrafo e nos seguintes supõe-se que os fluxos e os stocks dos mercados que se consideram estão expressos nas mesmas unidades.

Definição 1. *Débouché* de um mercado — todo o mercado que admite directamente bens excluídos do mercado dado.

Definição 2. *Débouché exclusivo* de um mercado — todo o débouché deste mercado que não admite senão bens excluídos deste.

Sejam $z(t)$ o fluxo de saída de um mercado e $z_i(t)$ o fluxo de entrada de um dos seus débouchés (considerando apenas os bens excluídos do primeiro mercado). A menos de infinitésimos de ordem superior à primeira relativamente a dt, durante o intervalo t, $t+dt$, a exclusão do mercado cresce de $z(t)dt$ e a admissão do débouché, relativa a este mercado, cresce de $z_i(t)dt$. Portanto, no limite, a importância do débouché considerado, relativamente ao conjunto dos débouchés do mercado dado, é medida por

$$\frac{z_1(t)}{z(t)}.$$

Definição 3. *Valência de um débouché* relativa a um dos mercados de que ele é um débouché — o quociente

$$\frac{z_i(t)}{z(t)}$$

do fluxo de entrada do débouché dos bens excluídos do mercado considerado, pelo fluxo de saída deste mercado.

Se o débouché é exclusivo, a sua valência é o quociente do fluxo de entrada do débouché pelo fluxo de saída do mercado de que ele é débouché.

Resulta imediatamente da definição 3 que, se $v_i(t)$, $i=1, 2, \ldots n$, são as valências de todos os débouchés de um mercado, se tem:

1. $o < v_i(t) \leqslant 1, \quad i=1, 2, \ldots n.$
2. $\sum_{i=1}^{n} v_i(t) = 1.$

Definição 4. *Cadeia de mercados* — conjunto ordenado de *n* mercados, sendo cada elemento um débouché do seguinte.

Definição 5. *Ordem* de uma cadeia — o número de mercados que pertencem à cadeia.

Definição 6. *Grau* de um mercado de uma cadeia — o ordinal do mercado no conjunto que define a cadeia.

Representar-se-á por

$$C = (z_{11}, Z_1, z_{12} : z_{21}, Z_2, z_{22} : \ldots : z_{n1}, Z_n, z_{n2})$$

a cadeia de ordem *n*, composta pelos mercados

$$m_i = (z_{i1}, Z_i, z_{i2})$$

com o grau *i*, $i=1, 2, \ldots n$.

Definição 7. *Cadeia com exclusivo* — toda a cadeia de que cada mercado é débouché exclusivo do mercado seguinte.

Se a cadeia C é uma cadeia com exclusivo, tem-se sempre

$$z_{p2}(t) \leqslant z_{p+1\,1}(t), \quad p=1,\, 2,\, \ldots\, n-1$$

e pode ser representada por

$$C=(z_1, Z_1, v_2 z_2 : z_2, Z_2, v_3 z_3 : \ldots : z_{n-1}, Z_{n-1}, v_n z_n : z_n, Z_n, z_{n+1})$$

com

$$z_{p\,1}(t) \equiv z_p(t), \quad p = 1,\, 2,\, \ldots\, n,$$
$$z_{n2}(t) \equiv z_{n+1}(t)$$

e $v_p(t)$ a valência do mercado de grau $p - 1$ relativa ao mercado de grau p, $p=2,\, 3,\, \ldots\, n$.

Definição 8. *Cadeia a monovalência* — toda a cadeia com exclusivo tal que a valência de cada mercado relativa ao que se lhe segue é idêntica à unidade.

A cadeia C a monovalência representar-se-á simplesmente por

$$C = (z_1, Z_1, z_2 : z_2, Z_2, z_3 : \ldots : z_n, Z_n, z_{n+1}).$$

Definição 9. *Cadeia a polivalência* — toda a cadeia com exclusivo que não é a monovalência.

No que se segue considera-se apenas cadeias com exclusivo.

Segundo a lei do mercado intermediário (2) parágrafo **1.1**) tem-se para os $p(\leqslant n)$ primeiros mercados de uma cadeia com exclusivo, de ordem n,

$$v_2(t).z_2(t) = z_1(t) + Z_1'(t)$$
$$v_3(t).z_3(t) = z_2(t) + Z_2'(t)$$
$$\ldots$$

$$v_{p+1}(t).z_{p+1}(t) = z_p(t) + Z_p'(t) \qquad (^1)$$

e, por eliminação de $z_2(t)$, $z_3(t)$, ... $z_p(t)$,

$$1) \quad v_{p+1}(t).z_{p+1}(t) = \frac{z_1(t)}{v_2(t)\ldots v_p(t)} + \frac{Z_1'(t)}{v_2(t)\ldots v_p(t)} +$$

$$+ \frac{Z_2'(t)}{v_3(t)\ldots v_p(t)} + \cdots + \frac{Z_{p-1}'(t)}{v_p(t)} + Z_p'(t).$$

Se a cadeia é a monovalência, o fluxo de entrada do mercado de grau p é dado por

$$1') \qquad z_{p+1}(t) = z_1(t) + \sum_{i=1}^{p} Z_i'(t)$$

que se obtém de 1) fazendo

$$v_2(t) \equiv v_3(t) \equiv \cdots \equiv v_p(t) \equiv 1.$$

Observação: O fluxo de entrada do mercado de grau p de uma cadeia a monovalência é idêntico ao fluxo de entrada do mercado de grau p da cadeia obtida da anterior permutando os stocks dos p primeiros mercados, visto que o segundo membro de 1') é uma função simétrica de Z_1', Z_2', ... Z_p'.

---

(1) Cfr.

$$z_2(t) = v_2(t)[z_1(t) + Z_1'(t)]$$
$$z_3(t) = v_3(t)[z_2(t) + Z_2'(t)]$$
$$\ldots$$
$$z_{n+1}(t) = v_{n+1}(t)[z_n(t) + Z_n'(t)]$$

que é para o nosso caso, com as notações aqui adoptadas, o que se encontra em B. Chait (1, pág. 121). As suas equações são, evidentemente, incorrectas porque as notações, segundo se afirma, conservaram o mesmo significado. Este erro é a origem das conclusões falsas sobre as relações entre a divergência e a diferenciação horizontal.

Definição 10. *Igualdade de cadeias com exclusivo* — Duas cadeias com exclusivo dizem-se iguais se:

a) têm a mesma ordem,

b) os stocks e as valências dos mercados do mesmo grau são respectivamente idênticos,

c) os fluxos de saída dos mercados de primeiro grau são idênticos.

Seja *C* uma cadeia com exclusivo, de mercados β de valências constantes, então

$$C = (z_1,\ a_1 z_1,\ v_2 z_2 : z_2,\ a_2 z_2,\ v_3 z_3 : \ldots$$
$$\ldots : z_{n-1},\ a_{n-1} z_{n-1},\ v_n z_n : z_n,\ a_n z_n,\ z_{n+1})$$

e a igualdade 1) toma a forma

$$2)\quad v_{p+1} z_{p+1}(t) = \frac{1}{v_2 . v_3 \ldots . v_p} \sum_{i=o}^{p} z_1^{(i)}(t) \sum_{(i)}^{p} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_i}$$

onde

$$z_1^{(o)}(t) = z_1(t), \qquad z_1^{(i)}(t) = \frac{d^i}{dt^i} z_1(t)$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots\ p$$

e por

$$\sum_{(o)}^{p} a_k = 1, \qquad \sum_{(i)}^{p} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ p)$$

se representa a soma de todos os produtos dos módulos a_1, a_2, ... a_p tomados *i* a *i* sem repetição (portanto, k_1, k_2, ... k_i é uma das combinações *i* a *i* dos índices *1, 2, ... p*).

Com efeito, 2) é verdadeira para $p=1$ por ser

$$v_2 z_2(t) = z_1(t) + a_1 . z'_1(t).$$

Suposta 2) verdadeira para o grau $p - 1$, tem-se

$$v_p z_p(t) = \frac{1}{v_2 . v_3 . \ldots v_{p-1}} \sum_{i=o}^{p-1} z_1^{(i)}(t) \sum_{(i)}^{p-1} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_i}$$

e calculemos $v_{p+1} z_{p+1}(t)$. Obtém-se

$$v_{p+1} z_{p+1}(t) = z_p(t) + a_p . z_p'(t) =$$

$$= \frac{1}{v_2 . v_3 . \ldots v_p} \sum_{i=o}^{p-1} z_1^{(i)}(t) \sum_{(i)}^{p-1} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_i} +$$

$$+ a_p \frac{1}{v_2 . v_3 . \ldots v_p} \sum_{i=o}^{p-1} z_1^{(i+1)}(t) \sum_{(i)}^{p-1} a_{k_1} a_{p_2} \ldots a_{k_i}$$

ou

$$= \frac{1}{v_2 . v_3 . \ldots v_p} \left[z_1(t) + \sum_{i=1}^{p-1} z_1^{(i)}(t) \left\{ \sum_{(i)}^{p-1} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_i} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + a_p \sum_{(i-1)}^{p-1} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_{i-1}} \right\} + z_1^{(p)}(t) a_p \sum_{(p-1)}^{p-1} a_1 a_2 \ldots a_{p-1} \right]$$

e, por ser

$$\sum_{(i)}^{p} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_i} = \sum_{(i)}^{p-1} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_i} + a_p \sum_{(i-1)}^{p-1} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_{i-1}}$$

tem-se

$$v_{p+1} z_{p+1}(t) = \frac{1}{v_2 v_3 \ldots v_p} \left[z_1(t) + \sum_{i=1}^{p-1} z_1^{(i)}(t) \sum_{(i)}^{p} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_i} + \right.$$

$$\left. + z_1^{(p)}(t) \sum_{(p)}^{p} a_1 a_2 \ldots a_p \right] =$$

$$= \frac{1}{v_2 v_3 \ldots v_p} \sum_{i=o}^{p} z_1^{(i)}(t) \sum_{(i)}^{p} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_i} .$$

Observação: Têm fluxos de entrada idênticos os mercados de mesmo grau p de uma cadeia com exclusivo de mercados β, de valências constantes, e da cadeia que se obtém da anterior permutando as valências e permutando os módulos dos mercados de graus *1*, *2*, ... *p*. É uma consequência do facto do segundo membro de 2) ser uma função simétrica de v_2, v_3, ... v_p, e de a_1, a_2, ... a_p.

Se a cadeia com exclusivo, de mercados β e valências constantes, é uma cadeia a monovalência, o fluxo de entrada do mercado de grau *p* é dado por

2') $$z_{p+1}(t) = \sum_{i=0}^{p} z_1^{(i)}(t) . \sum_{(i)}^{p} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_i}$$

que se obtém de 2) fazendo

$$v_2 = v_3 = \dots = v_p = 1.$$

1. *Se* C *é uma cadeia com exclusivo, de mercados* β, *de valências constantes, tais que os fluxos de saída dos mercados de graus* 2, 3, ... p, *para o conjunto dos seus débouchés que não pertencem à cadeia, são constantes, então*

$$z_1(t) = c_1 + c_2 e^{-t/a_1}$$

e

$$c_1 = v_2 z_2 = v_2 v_3 z_3 = \dots = v_2 v_3 \dots v_p z_p.$$

De $v_i(t) \equiv v_i$, $i = 2, 3, \dots p$, resulta

$$1 - v_i(t) \equiv 1 - v_i \equiv \overline{v}_i, \quad i = 2, 3, \dots p.$$

O fluxo de saída do mercado de grau *i* ($i = 2, 3, \dots p$), para o conjunto dos seus débouchés que não pertencem a *C*,

$$[1 - v_i(t)]\, z_i(t) \equiv \overline{v}_i z_i(t)$$

é constante por hipótese, portanto $z_i(t) \equiv z_i$ constante,

$i = 2, 3, \ldots n$. De

$$v_2 z_2 = z_1(t) + a_1 . z_1'(t)$$

segue-se que

$$z_1(t) = c_1 + c_2 . e^{-t/a_1}$$

com $c_1 = v_2 z_2$. De

$$v_{i+1} z_{i+1} = z_i(t) + a_i . z_i'(t) = z_i \qquad i = 2, 3, \ldots p - 1,$$

e

$$c_1 = v_2 z_2,$$

resulta

$$c_1 = v_2 z_2 = v_2 v_3 z_3 = \ldots = v_2 v_3 \ldots v_p z_p.$$

Definição 11. *Sensibilidade de grau p* de uma cadeia com exclusivo — a razão entre o fluxo de saída do mercado de grau *p* e o fluxo de saída do primeiro mercado da cadeia [1].

2. *A sensibilidade de grau* p *de uma cadeia com exclusivo é o quociente do produto das sensibilidades dos* p — 1 *primeiros mercados pelo produto das* p — 1 *primeiras valências.*

Seja $S_p(t)$ a sensibilidade de grau *p* de uma cadeia com exclusivo, então

---

[1] Cfr. «Nous définissons la sensibilité d'un marché par rapport à un autre, comme le quocient des variations relatives pendant l'unité de temps qu'ont subie leurs flux de sortie respectifs.»

«Sensibilité d'un marché par rapport à un autre est le quocient de la division de l'un par l'autre de leurs flux d'entrée ou de sortie respectifs.» — B. Chait (1, pág. 110 e 322).

$$S_p(t) = \frac{z_p(t)}{z_1(t)} = \frac{1}{v_2(t)\,v_3(t)\ldots v_p(t)} \cdot \frac{v_2(t)\,z_2(t)}{z_1(t)} \cdot$$

$$\cdot \frac{v_3(t)\,z_3(t)}{z_2(t)} \ldots \frac{v_p(t)\,z_p(t)}{z_{p-1}(t)}$$

$$= \frac{s_1(t)\,s_2(t)\ldots s_{p-1}(t)}{v_2(t)\,v_3(t)\ldots v_p(t)} .$$

Se a cadeia é a monovalência, tem-se

$$S_p(t) = s_1(t)s_2(t)\ \ldots\ s_{p-1}(t).$$

3. *A sensibilidade de grau* p *de uma cadeia com exclusivo, de mercados* β, *de valências constantes, é idêntica à sensibilidade de mesmo grau* p *da cadeia que se obtém da precedente permutando entre si as valências e entre si os módulos dos* p — 1 *primeiros mercados da cadeia dada.*

É uma consequência da definição 11 e do facto do segundo membro de 2) ser uma função simétrica dos módulos e das valências.

4. *A sensibilidade de grau* p *de uma cadeia a monovalência é idêntica à sensibilidade de mesmo grau* p *da cadeia obtida da primeira permutando os stocks dos seus* p — 1 *primeiros mercados.*

É uma consequência da definição 11 e do facto do segundo membro de 1') ser uma função simétrica das primeiras derivadas dos stocks dos mercados.

Definição 12. *Divergência de grau p* de uma cadeia com exclusivo — a diferença entre a sensibilidade de grau p da cadeia dada e a sensibilidade do mesmo grau p da cadeia da mesma ordem, cujos mercados são todos estacionários, cujo primeiro mercado tem fluxo de saída idêntico ao do primeiro mercado da cadeia dada, e com as mesmas valências.

Segundo 1) o fluxo de saída do mercado de grau p da segunda cadeia é

$$\frac{z_1(t)}{v_2(t)\,v_3(t)\,\ldots\,v_p(t)}$$

então a sensibilidade de grau p desta cadeia é

$$\frac{1}{v_2(t)\,v_3(t)\,\ldots\,v_p(t)}.$$

Representando por $D_p(t)$ a divergência de grau p da cadeia dada de sensibilidade de grau p $S_p(t)$ tem-se

$$3)\qquad D_p(t) = S_p(t) - \frac{1}{v_2(t)\,v_3(t)\,\ldots\,v_p(t)} = \frac{s_1(t)\,s_2(t)\,\ldots\,s_{p-1}(t) - 1}{v_2(t)\,v_3(t)\,\ldots\,v_p(t)}.$$

Em especial, se a cadeia é a monovalência, obtém-se

$$D_p(t) = S_p(t) - 1.$$

A partir destes resultados é possível obter para a divergência enunciados análogos a **3** e **4**, para a sensibilidade.

Definição 13. *Sensibilidade* de uma cadeia de ordem n — a sua sensibilidade de grau n.

Definição 14. *Divergência* de uma cadeia de ordem n — a sua divergência de grau n.

1.3. DIVERGÊNCIA E DIFERENCIAÇÃO VERTICAL.

Considere-se uma cadeia com exclusivo de ordem n

$$C=(z_1, Z_1, v_2 z_2 : z_2, Z_2, v_3 z_3 : \dots : z_{n-1}, Z_{n-1}, v_n z_n : z_n, Z_n, z_{n+1})$$

Definição 1. *Inserção de valência $v(t)$ e grau p em C de um mercado de stock Z dado em função do tempo ou do seu fluxo de saída* — a transformação da cadeia C numa outra de ordem $n+1$, cujos mercados têm por esta ordem os stocks

$$Z_1, \dots Z_{p-1}, Z, Z_p, \dots Z_n$$

e as valências

$$v_2(t), \dots v_{p-1}(t), v(t), v_p(t), \dots v_n(t)$$

e cujo primeiro mercado tem o fluxo de saída $z_1(t)$.

Definição 2. *Adjunção de valência $v(t)$ a C de um mercado de stock Z dado em função do tempo ou do seu fluxo de saída* — a inserção de valência $v(t)$ e grau $n+1$ em C desse mercado.

Em virtude de **3**, **4** e 3) do parágrafo **1.2**, o estudo dos efeitos da inserção sobre a sensibilidade ou a divergência reduz-se ao dos efeitos da adjunção.

Sejam $S(t)$ e $D(t)$ a sensibilidade e a divergência de C e sejam $S^*(t)$ e $D^*(t)$ a sensibilidade e a divergência de C^* transformada de C pela adjunção de valência $v(t)$ do mercado de stock $Z(t)$. Seja

$$\bar{v}(t) = 1 - v(t).$$

1. $S^*(t) \gtreqless S(t)$ *conforme fôr* $\bar{v}(t) z_n(t) + Z_n'(t) \gtreqless o.$

Com efeito, observe-se que $S(t)$ é a sensibilidade de grau n da cadeia C^* e que

$$S^*(t) = \frac{s_1(t)s_2(t) \ldots s_n(t)}{v_2(t)v_3(t) \ldots v_n(t)v(t)}$$

Portanto, tem-se

$$S^*(t) = S(t)s_n(t)/v(t),$$

donde

$$S^*(t) \gtreqless S(t)$$

conforme fôr

$$s_n(t) \gtreqless v(t) \quad \text{ou} \quad z_{n+1}(t) \gtreqless v(t)z_n(t)$$

ou ainda

$$z_n(t) + Z_n'(t) \gtreqless v(t)z_n(t).$$

Se a adjunção é de valência unidade, a condição reduz-se a

$$Z_n'(t) \gtreqless o.$$

Se os mercados de C são todos mercados β e de valências constantes a condição toma a forma

$$\bar{v}(t) \sum_{i=o}^{n-1} z_1^{(i)}(t) \sum_{(i)}^{n-1} a_{k_1} \ldots a_{k_i} +$$

$$+ a_n \sum_{i=o}^{n-1} z_1^{(i+1)}(t) \sum_{(i)}^{n-1} a_{k_1} \ldots a_{k_i} \gtreqless o$$

e reduz-se a

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_1^{(i+1)}(t) \sum_{(i)}^{n-1} a_{k_1} \ldots a_{k_i} \gtrless 0$$

se a adjunção é de valência unidade.

2. $D^*(t) \gtrless D(t)$ *conforme fôr*

$$v_2(t)v_3(t) \ldots v_n(t) \left[\bar{v}(t)z_n(t) + Z_n'(t) \right] \gtrless \bar{v}(t)z_1(t).$$

Com efeito, de

$$D^*(t) = S^*(t) - \frac{1}{v_2(t) \ldots v_n(t)v(t)}$$

e de

$$D(t) = S(t) - \frac{1}{v_2(t) \ldots v_n(t)}$$

resulta sucessivamente

$$D^*(t) - D(t) = S^*(t) - S(t) - \frac{1}{v_2(t) \ldots v_n(t)v(t)}$$

$$= \frac{z_{n+1}(t)}{v(t)\, z_1(t)} - \frac{z_n(t)}{z_1(t)} - \frac{\bar{v}(t)}{v_2(t) \ldots v_n(t)v(t)}$$

$$= \frac{z_n(t) + Z_n'(t)}{v(t)\, z_1(t)} - \frac{z_n(t)}{z_1(t)} - \frac{\bar{v}(t)}{v_2(t) \ldots v_n(t)v(t)}$$

$$= \frac{\bar{v}(t)z_n(t) + Z_n'(t)}{v(t)z_1(t)} - \frac{\bar{v}(t)}{v_2(t) \ldots v_n(t)v(t)}$$

e, visto ser

$$v_2(t) \ldots v_n(t)v(t)z_1(t) > 0,$$

tem-se

$$D^*(t) \gtrless D(t)$$

conforme

$$v_2(t) \ldots v_n(t) \left[\bar{v}(t)\, z_n(t) + Z_n'(t) \right] \gtrless \bar{v}(t)\, z_1(t).$$

Se a adjunção é de valência unidade, esta condição reduz-se a

$$Z_n'(t) \gtrless o.$$

Se os mercados de *C* são todos mercados β e de valências constantes a condição toma a forma

$$\bar{v}(t) \sum_{i=o}^{n-1} z_1^{(i)}(t) \sum_{(i)}^{n-1} a_{k_1} \ldots a_{k_i} +$$

$$+ a_n \sum_{i=o}^{n-1} z_1^{(i+1)}(t) \sum_{(i)}^{n-1} a_{k_1} \ldots a_{k_i} \gtrless \bar{v}(t) z_1(t)$$

que se reduz a

$$\sum_{i=o}^{n-1} z_1^{(i+1)}(t) \sum_{(i)}^{n-1} a_{k_1} \ldots a_{k_i} \gtrless o$$

se além disso a adjunção é de valência unidade.

3. *Se* $S^*(t) \leqslant S(t)$, *então* $D^*(t) < D(t)$.

Por hipótese tem-se

$$\bar{v}(t) z_n(t) + Z_n'(t) \leqslant o$$

e por ser

$$v_2(t) \ldots v_n(t) > o,$$

é

$$v_2(t) \ldots v_n(t) [\bar{v}(t) z_n(t) + Z_n'(t)] \leqslant o.$$

Finalmente, visto ter-se

$$\bar{v}(t) z_1(t) > o,$$

é, por **2**,

$$D^*(t) < D(t).$$

Definição 3. *Diferenciação vertical* de uma cadeia com exclusivo — uma sucessão de inserções na cadeia dada.

Por razões já citadas, é sempre possível, no estudo dos efeitos da diferenciação vertical sobre a sensibilidade ou a divergência de uma cadeia, substituir todas as inserções por adjunções numa ordem qualquer.

Os resultados que precedem mostram que, em geral, uma diferenciação vertical nem sempre faz aumentar a divergência de uma cadeia (1).

O exemplo seguinte mostra que há:

1. Diferenciações verticais que se não reduzem a uma única inserção e que conduzem a uma diminuição da divergência da cadeia.

2. Diferenciações verticais que implicam uma diminuição do módulo da divergência.

Seja a cadeia definida para $t \geqslant o$ por

$$C_1 = (2 - e^{-t}, 2\,(2 - e^{-t}), 2 + e^{-t}:$$

$$: 2 + e^{-t}, \frac{1}{2}\,(2 + e^{-t}), \; 2 + \frac{1}{2}\,e^{-t})$$

e consideremos as cadeias que desta se obtêm pela adjunção de valência *1* de um mercado β de módulo *4*, seguida da

(1) Cfr. «Si on allonge la série envisagée d'industries d'une unité, chaque fois du chef de cette adjonction, l'ébranlement parti de la première industrie se trouvera renforcé par son passage à travers le nombre croissant d'industries intermédiaires. L'ébranlement arrivera considérablement amplifié au bout opposé de la chaine d'industries solidaires qu'on aura eu soin d'étendre de proche en proche, d'un élément. L'effet étant cumulatif, la divergence des mouvements est censée atteindre une valeur très élevée. De sorte que l'interférence entre la première industrie du groupe de consommation et la dernière du groupe des industries de capitaux dépassera en ampleur celle que les auteurs présument être communément dans le système simplifié de deux groupes de marchés non différentiés verticalement, ramenés chacun à une entité simple et élémentaire.» — B. Chait (1, pág. 60).

adjunção de valência *1* de um mercado de stock qualquer, definidas para $t \geqslant o$ por

$$C_2 = (C_1 : 2 + \frac{1}{2} e^{-t},\ 4(2 + \frac{1}{2} e^{-t}),\ 2 - \frac{3}{2} e^{-t})$$

$$C_3 = (C_2 : 2 - \frac{3}{2} e^{-t},\ Z,\ z,).$$

As divergências de C_1, C_2 e C_3 são

$$D_1 = 2 \frac{e^{-t}}{2 - e^{-t}},$$

$$D_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{e^{-t}}{2 - e^{-t}},$$

$$D_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-t}}{2 - e^{-t}}$$

e para $t > o$, tem-se

$$D_1 > D_2 > D_3$$

e

$$| D_1 | > | D_2 | > | D_3 |.$$

2. Divergência e diferenciação horizontal.

2.0. INTRODUÇÃO.

Neste capítulo procura-se determinar o efeito da diferenciação horizontal de uma cadeia sobre a sua divergência.

Com este fim introduz-se no parágrafo **2.1** a operação de composição de cadeias que está relacionada de um modo muito simples, analisado no parágrafo **2.2**, com a diferenciação horizontal dos mercados de uma cadeia. As condições sob as quais uma diferenciação horizontal implica um aumento ou uma diminuição da divergência são estabelecidas no parágrafo **2.2**.

O resultado a assinalar aqui é o de que a diferenciação horizontal de uma cadeia não conduz necessàriamente a uma diminuição da divergência tomada no sentido de B. Chait(1) de todos os mercados efectivamente diferenciados.

No último parágrafo estuda-se a cadeia de valências constantes.

---

(1) «Dans un marché différencié horizontalement ou à polyvalence, les réactions subies de la part d'un de ses débouchés sera ressentie dans une mesure affaiblie, donc à l'encontre de l'effet de la différentiation verticale.»

«L'action de la différentiation horizontale tend à atténuer à modérer, à l'opposé de celle de la différentiation verticale, les répercutions des mouvements des marchés sur ceux de leur marché fournisseur qui est leur confluent.» — B. Chait (1, pág. 62-63).

2.1. COMPOSIÇÃO DE MERCADOS E DE CADEIAS.

Definição 1. *Composição de mercados.* Dados dois mercados

$$m_1 = (x_1, X, x_2) \quad e \quad m_2 = (y_1, Y, y_2),$$

diz-se composição dos dois mercados o mercado

$$m = (x_1 + y_1, X + Y, x_2 + y_2)$$

e escreve-se

$$m = m_1 + m_2.$$

A composição de mais de dois mercados é definida por recorrência,

$$m_1 + m_2 + m_3 = (m_1 + m_2) + m_3$$

e assim por diante.

Não há necessidade de fazer restrições sobre os bens de que se trata nos mercados a compôr para que a sua composição seja um mercado intermediário. É o facto dos bens excluídos serem idênticos aos admitidos, que caracteriza o mercado intermediário. Assim, se

$$E_1, E_2, \ldots E_n$$

são os conjuntos de atributos característicos dos bens dos mercados

$$m_1, m_2, \dots m_n,$$

o conjunto dos atributos que caracteriza os bens da sua composição é

$$E = E_1 . E_2 . \dots E_n$$

que é, pelo menos, o conjunto dos atributos que caracteriza qualquer bem económico.

1. *A composição de mercados* β *cujos fluxos de saída são linearmente independentes é ainda um mercado* β *se e só se os módulos dos mercados são todos iguais.*

Sejam *n* mercados β

$$m_i = (z_{i1}, a_{i1} z_i, z_{i2}), \quad i = 1, 2, \dots n,$$

cujos fluxos de saída são linearmente independentes.

Se

$$a_i = a, \quad i = 1, 2, \dots n,$$

a composição

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = (\sum_{i=1}^{n} z_{i1}, a \sum_{i=1}^{n} z_{i1}, \sum_{i=1}^{n} z_{i2})$$

é evidentemente um mercado β de módulo *a*.

Suponhamos agora que a composição

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = (\sum_{i=1}^{n} z_{i1}, \sum_{i=1}^{n} a_i z_{i1}, \sum_{i=1}^{n} z_{i2})$$

é um mercado β de módulo a. Então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i z_{i1} = a \sum_{i=1}^{n} z_{i1}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a) z_{i1} = o$$

e, porque os fluxos de saída dos mercados dados são linearmente independentes por hipótese, segue-se que

$$a_i = a, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

2. *A composição de mercados todos com a mesma sensibilidade (portanto, com a mesma divergência) tem a sensibilidade (divergência) comum.*

Sejam n mercados

$$m_i = (z_{i1}, Z_{i2}, z_i), \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

com a mesma sensibilidade $s(t)$. Porque num conjunto de razões iguais a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes como qualquer antecedente para o seu consequente, a sensibilidade da sua composição é

$$s^*(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{i2}(t)}{\sum_{i=1}^{n} z_{i1}(t)} = \frac{z_{12}(t)}{z_{11}(t)} = s(t).$$

Definição 2. *Composição de cadeias.* Dadas duas cadeias com exclusivo, de ordens $m+n$ e n ($m \geqslant o$),

$$C_1 = (x_1, X_1, v_2 x_2 : x_2, X_2, v_3 x_3 : \ldots : x_{m+n}, X_{m+n}, x_{m+n+1})$$
$$C_2 = (y_1, Y_1, w_2 y_2 : y_2, Y_2, w_3 y_3 : \ldots : y_n, Y_n, y_{n+1})$$

diz-se composição das duas cadeias dadas a cadeia com exclusivo

$$C = (x_1,\ X_1,\ v_2 x_2 : \ldots : x_m,\ X_m,\ v_{m+1} x_{m+1} :$$
$$x_{m+1} + y_1,\ X_{m+1} + Y_1,\ v_{m+2} x_{m+2} + w_2 y_2 : \ldots$$
$$\ldots : x_{m+n} + y_n,\ X_{m+n} + Y_n,\ x_{m+n+1} + y_{n+1})$$

e escreve-se

$$C = C_1 + C_2.$$

A composição de mais de duas cadeias define-se por recorrência,

$$C_1 + C_2 + C_3 = (C_1 + C_2) + C_3$$

e assim por diante.

3. *A composição de cadeias a monovalência é uma cadeia a monovalência se e só se todas as cadeias são da mesma ordem.*

Sejam p cadeias a monovalência todas de ordem n

$$C_i = (x_{i1},\ X_{i1},\ x_{i2} : \ldots : x_{in},\ X_{in},\ x_{in+1})$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots\ p.$$

A sua composição é a monovalência porque a composição conserva a exclusividade e o fluxo de entrada do mercado de grau q $(q = 1,\ 2,\ \ldots\ n - 1)$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{i\ q+1}$$

é igual ao fluxo de saída do mercado de grau $q + 1$.

Agora, seja a monovalência a composição de cadeias não todas da mesma ordem. Por hipótese, há entre as cadeias a compor pelo menos duas de ordens diferentes.

Sejam $m+n$ e n $(m > o)$ as ordens de duas das cadeias dadas C_1 e C_2. Então, na composição, o fluxo de entrada do mercado de grau m é

$$x_{m+1}(t) + \sum_{i=1}^{r} z_i(t)$$

e o fluxo de saída do mercado de grau $m+1$ é

$$x_{m+1}(t) + y_1(t) + \sum_{i=1}^{s} \zeta_i(t)$$

onde $z_i(t)$ é o fluxo de entrada do mercado de grau $\nu_i - n$ da cadeia de ordem $\nu_i \geqslant n+1$, e $\zeta_i(t)$ o fluxo de saída do mercado de grau $\mu_i - n + 1$ da cadeia de ordem $\mu_i \geqslant n$. Então $s \geqslant r$ e

$$x_{m+1}(t) + y_1(t) + \sum_{i=1}^{s} \zeta_i(t) - \left[x_{m+1}(t) + \sum_{i=o}^{r} z_i(t) \right] \geqslant$$

$$\geqslant y_1(t) > o.$$

Portanto, a cadeia não pode ser a monovalência.

2.2. DIVERGÊNCIA E DIFERENCIAÇÃO HORIZONTAL.

Definição 1. *Diferenciação horizontal* de uma cadeia com exclusivo — a sua composição com cadeias a monovalência de ordens inferiores à da cadeia dada.

1. *A transformada de uma cadeia com exclusivo por uma diferenciação horizontal é sempre uma cadeia a polivalência.*

Seja uma cadeia com exclusivo, a monovalência ou a polivalência,

$$C=(z_1, Z_1, v_2 z_2 : z_2, Z_2, v_3 z_3 : \ldots : z_{n-1}, Z_{n-1}, v_n z_n : z_n, Z_n, z_{n+1})$$

de ordem n e seja F a composição das cadeias que definem uma diferenciação horizontal de C. Seja $m<n$ a ordem de F e $y_1(t)$ o fluxo de saída do seu mercado de primeiro grau. Como a composição de cadeias é uma operação associativa, a transformada de C pela diferenciação horizontal considerada é

$$\overline{C} = C + F.$$

O fluxo de entrada do mercado de grau $n-m$ de $\overline{C}$ é

$$v_{n-m+1}(t) z_{n-m+1}(t) \leqslant z_{n-m+1}(t)$$

e o fluxo de saída do mercado de grau $n-m+1$ de $\overline{C}$ é

$$z_{n-m+1}(t) + y_1(t) > z_{n-m+1}(t)$$

porque

$$y_1(t) > 0.$$

Estas desigualdades mostram que $\overline{C}$ é uma cadeia a polivalência.

2. *A sensibilidade* $\overline{S}(t)$ *de* $\overline{C}$ *é sempre maior do que a sensibilidade* $S(t)$ *de* C.

Visto que F é de ordem m, seja $y_m(t)$ o fluxo de saída do seu mercado de grau m, então

$$\overline{S}(t) = \frac{z_n(t) + y_m(t)}{z_1(t)} = \frac{z_n(t)}{z_1(t)} + \frac{y_m(t)}{z_1(t)} =$$

$$= S(t) + \frac{y_m(t)}{z_1(t)} > S(t)$$

porque

$$y_m(t) > 0 \quad \text{e} \quad z_1(t) > 0.$$

Sejam

$$\omega_2(t), \omega_3(t), \ldots \omega(t)$$

as valências de $\overline{C}$ e seja

$$F = (y_1, Y_1, w_2 y_2 : y_2, Y_2, w_3 y_3 : \ldots$$
$$\ldots : y_{m-1}, Y_{m-1}, w_m y_m : y_m, Y_m, y_{m+1}).$$

Então, tem-se

$$\omega_i(t) = v_i(t) \qquad i = 2, 3, \ldots n-m$$

$$\omega_{n-m+1}(t) = \frac{v_{n-m+1}(t)z_{n-m+1}(t)}{z_{n-m+1}(t) + y_1(t)}$$

$$\omega_{n-m+i}(t) = \frac{v_{n-m+i}(t)z_{n-m+i}(t) + w_i(t)y_i(t)}{z_{n-m+i}(t) + y_i(t)}, \quad i = 2, 3, \ldots m.$$

É evidente que

$$\omega_{n-m+1}(t) < v_{n-m+1}(t)$$

$$\omega_{n-m+i}(t) \gtrless v_{n-m+i}(t) \quad \text{se} \quad v_{n-m+i}(t) \lesseqgtr w_i(t)$$

$$i = 2, 3, \ldots m \qquad (^1).$$

Sejam

$$V(t) = v_2(t)v_3(t) \ldots v_n(t)$$

$$\Omega(t) = \omega_2(t)\omega_3(t) \ldots \omega_n(t).$$

3. *A divergência* $\overline{D}(t)$ *de* $\overline{C}$ *é maior, igual ou menor do que a divergência* $D(t)$ *de* C *conforme fôr*

$$\frac{y_m(t)}{z_1(t)} + \frac{1}{V(t)} \gtreqless \frac{1}{\Omega(t)}.$$

---

(1) Estas desigualdades mostram que a acção da diferenciação horizontal sobre as valências não tem sempre o mesmo sentido. Assim, não é, em geral, verdadeiro que «dans un marché différentié horizontalement ou à polyvalence, les réactions subies de la part d'un de ses débouchés sera ressentie dans une mesure affaiblie» (B. Chait, 1, pág. 62). Mas, isto é sem dúvida verdadeiro não só se «les autres débouchés du marché... restent, à cet instant, à peu près constants» (B. Chait, 1, pág. 63), mas também, sem ser verificada esta condição, se o mercado é, por exemplo, de grau n — m+1 ou de grau superior e monovalente antes da diferenciação.

Por ser

$$D(t) = \frac{z_n(t)}{z_1(t)} - \frac{1}{V(t)}$$

tem-se

$$\overline{D}(t) = \frac{z_n(t) + y_m(t)}{z_1(t)} - \frac{1}{\Omega(t)} =$$

$$= \frac{z_n(t)}{z_1(t)} - \frac{1}{V(t)} + \frac{y_m(t)}{z_1(t)} + \frac{1}{V(t)} - \frac{1}{\Omega(t)} =$$

$$= D(t) + \frac{y_m(t)}{z_1(t)} + \frac{1}{V(t)} - \frac{1}{\Omega(t)}$$

e

$$\overline{D}(t) \gtreqless D(t)$$

conforme fôr

$$\frac{y_m(t)}{z_1(t)} + \frac{1}{V(t)} \gtreqless \frac{1}{\Omega(t)} .$$

Se C e F são cadeias a monovalência esta condição toma a forma

$$\frac{z_{m-m+1}(t)}{z_1(t)} \cdot \frac{y_m(t)}{y_1(t)} \gtreqless 1.$$

4. *Se* $V(t) < \Omega(t)$ *então* $\overline{D}(t) > D(t)$.

Com efeito, de

$$V(t) < \Omega(t)$$

resulta

$$\frac{1}{V(t)} > \frac{1}{\Omega(t)}$$

e, por ser

$$y_m(t) > o \quad e \quad z_1(t) > o,$$

obtém-se

$$\frac{y_m(t)}{z_1(t)} + \frac{1}{V(t)} > \frac{1}{\Omega(t)}$$

portanto, por **3**,

$$\overline{D}(t) > D(t).$$

2.3. DECOMPOSIÇÃO DE CADEIAS DE VALÊNCIAS CONSTANTES.

Neste parágrafo considera-se uma cadeia com exclusivo, de valências constantes.

Definição 1. *Decomposição* de uma cadeia — todo o conjunto de cadeias a monovalência cuja composição é a cadeia dada.

1. *Toda a cadeia com exclusivo, de valências constantes, admite uma decomposição.*

Seja a cadeia de valências todas constantes

$$C = (z_1, Z_1, v_2 z_2 : z_2, Z_2, v_3 z_3 : \dots$$
$$\dots : z_{n-1}, Z_{n-1}, v_n z_n : z_n, Z_n, z_{n+1}).$$

O conjunto de cadeias a monovalência

$$C_i = (x_{ii}, X_{ii}, x_{ii+1} : x_{ii+1}, X_{ii+1}, x_{ii+2} : \dots : x_{in}, X_{in}, x_{in+1})$$
$$i = 1, 2, \dots n$$

onde se tem

$$x_{ii}(t) = \bar{v}_i z_i(t) \qquad i = 1, 2, \dots n$$
$$X_{ij}(t) = \bar{v}_i v_{i+1} \dots v_j Z_j(t) \qquad j = i, i+1, \dots n$$
$$i = 1, 2, \dots n$$
$$\bar{v}_1 = 1, \quad \bar{v}_i = 1 - v_i \qquad i = 2, 3, \dots n$$

é uma decomposição de C.

Com feito C_i é uma cadeia se e só se

$$X_{ij}(t) \geqslant o$$
$$x_{ij}(t) > o, \quad j = i,\ i+1,\ \ldots\ n.$$

Ora

$$X_{ij}(t) = \overline{v}_i\, v_{i+1}\ \ldots\ v_j\, Z_j(t) \geqslant o$$

porque

$$Z_j(t) \geqslant o$$
$$o < v_k \leqslant 1, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots\ n.$$

Então C_1 é sempre uma cadeia porque

$$x_{11}(t) = z_1(t) > o,$$
$$x_{12}(t) = x_{11}(t) + X_{11}'(t) = z_1(t) + Z_1'(t) = v_2\, z_2(t) > o$$

e de

$$x_{1j}(t) = v_2\ \ldots\ v_j\, z_j(t)$$

resulta

$$x_{1j}(t) > o$$
$$x_{1j+1}(t) = x_{1j}(t) + X_{1j}'(t) = v_2\ \ldots\ v_j\, z_j(t) + v_2\ \ldots\ v_j\, Z_j'(t) =$$
$$= v_2\ \ldots\ v_j\,[z_j(t) + Z_j'(t)] = v_2\ \ldots\ v_j\, v_{j+1}\, z_{j+1}(t) > o.$$

Para C_i, $i = 2,\ 3,\ \ldots\ n$, tem-se

$$x_{ii}(t) = \overline{v}_i\, z_i(t) > o$$

conforme fôr $v_i \leqslant 1$, porque $z_i(t) > o$. Então para que C_i seja uma cadeia é necessário que $v_i < 1$. Seja agora $v_i < 1$, então $x_{ii}(t) > o$ e

$$x_{ii+1}(t) = x_{ii}(t) + X_{ii}'(t) = \overline{v}_i\, z_i(t) + \overline{v}_i\, Z_i'(t) =$$
$$= \overline{v}_i\,[z_i(t) + Z_i'(t)] = \overline{v}_i v_{i+1} z_{i+1}(t) > o;$$

seja

$$x_{ij}(t) = \overline{v}_i v_{i+1}\ \ldots\ v_j z_j(t)$$

então

$$x_{ij}(t) > o$$

e

$$\begin{aligned} x_{ij+1}(t) &= x_{ij}(t) + X_{ij}'(t) = \\ &= \overline{v}_i v_{i+1} \ldots v_j z_j(t) + \overline{v}_i v_{i+1} \ldots v_j Z_j'(t) = \\ &= \overline{v}_i v_{i+1} \ldots v_i \left[z_i(t) + Z_j'(t) \right] = \\ &= \overline{v}_i v_{i+1} \ldots v_j v_{j+1} z_{j+1}(t) > o. \end{aligned}$$

Portanto, C_i é uma cadeia se e só se $v_i < 1$.

É necessário mostrar agora que

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n.$$

A cadeia C_i é de ordem $n - i + 1$, portanto, se $i \neq j$, a ordem de C_i é diferente da ordem de C_j. Então o mercado de grau m ($m = 1, 2, \ldots n$) de

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

é a composição dos mercados de grau m de C_1, de grau $m - 1$ de C_2, ..., de grau 1 de C_m. Assim, o mercado de primeiro grau de

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

é

$$(x_{11}, X_{11}, x_{12})$$

onde

$$x_{11}(t) = z_1(t) \quad , \quad X_{11}(t) = Z_1(t),$$

portanto, ele é o primeiro mercado de C. Suponhamos que o mercado de grau m de

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

é o mercado de grau m de C, então

$$\sum_{i=1}^{m} x_{im}(t)=z_m(t) \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{m} X_{im}(t)=Z_m(t).$$

Portanto, o mercado de grau $m+1$ de

$$C_1+C_2+\cdots+C_n$$

tem o fluxo de saída

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} x_{im+1}(t) &= \sum_{i=1}^{m} x_{im+1}(t)+x_{m+1\ m+1}(t)\\ &= \sum_{i=1}^{m} [x_{i\,m}(t)+X_{i\,m}'(t)]+x_{m+1\ m+1}(t)\\ &= z_m(t)+Z_m'(t)+\bar{v}_{m+1}z_{m+1}(t)\\ &= v_{m+1}z_{m+1}(t)+\bar{v}_{m+1}z_{m+1}(t)\\ &= z_{m+1}(t)\end{aligned}$$

e o stock

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} X_{im+1}(t) &= [v_2\ldots v_{m+1}+\bar{v}_2v_3\ldots v_{m+1}+\\ &+\bar{v}_3v_4\ldots v_{m+1}+\cdots+\bar{v}_mv_{m+1}+\bar{v}_{m+1}]\,Z_{m+1}(t)\\ &= [\{\ldots[(v_2+\bar{v}_2)v_3+\bar{v}_3]\ldots\}v_{m+1}+\bar{v}_{m+1}]\,Z_{m+1}(t)\\ &= Z_{m+1}(t).\end{aligned}$$

Este mercado é, pois, o mercado de grau $m+1$ de C. Portanto,

$$C=C_1+C_2+\cdots+C_n.$$

Uma cadeia com exclusivo, de valências constantes, pode admitir mais de uma decomposição. Por exemplo a cadeia

$$C=(1+t,\ 1+t,\ 2+t:4+2t,\ 4+2t,\ 6+2t)$$

admite as decomposições

1) $C_1 = (1+t,\ 1+t,\ 2+t : 2+t,\ 2+t,\ 3+t)$,
$C_2 = (2+t,\ 2+t,\ 3+t)$

2) $C_1 = (1+t,\ 1+t,\ 2+t : 2+t,\ 4+2t,\ 4+t)$,
$C_2 = (2+t,\ o,\ 2+t)$

3) $C_1 = (1+t,\ 1+t,\ 2+t : 2+t,\ 4+2t,\ 4+t)$,
$C_2 = (1+t,\ o,\ 1+t)$, $C_3 = (1,\ o,\ 1)$.

Definição 2. *Decomposição normal* de uma cadeia de mercados β, de ordem n — toda a decomposição que verifica as seguintes condições:

1. Contém, quando muito, uma cadeia de cada ordem de *1* a n,
2. Todas as cadeias são de mercados β, e
3. O módulo do mercado de grau $q=1, 2, \ldots p$ da cadeia de ordem $p=1, 2, \ldots n$ é o módulo do mercado de grau $n-p+q$ da cadeia dada.

2. *Toda a cadeia com exclusivo, de mercados β de valências constantes, admite uma e só uma decomposição normal.*

Seja uma cadeia com exclusivo, de mercados β de valências constantes.

$$C = (z_1,\ a_1 z_1,\ v_2 z_2 : z_2,\ a_2 z_2,\ v_3 z_3 : \ldots : z_{n-1},\ a_{n-1} z_{n-1},\ v_n z_n : \\ : z_n,\ a_n z_n,\ z_{n+1}).$$

O conjunto de cadeias a monovalência, de mercados β

$$C_i = (x_{ii},\ a_i x_{ii},\ x_{ii+1} : x_{ii+1},\ a_{i+1} x_{ii+1},\ x_{i+2} : \ldots \\ \ldots : x_{in},\ a_n x_{in},\ x_{in+1})$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots\ n$$

onde

$$x_{ii}(t) = \bar{v}_i z_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots n$$
$$\bar{v}_1 = 1, \ \bar{v}_i = 1 - v_i, \quad i = 2, 3, \ldots n$$

é uma decomposição de C.

Com efeito, C_i é uma cadeia se e só se

$$x_{ij}(t) > o, \quad j = i, i+1, \ldots n.$$

Para C_1 tem-se

$$x_{11}(t) = z_1(t) > o,$$
$$x_{12}(t) = x_{11}(t) + a_1 x_{11}'(t) = z_1(t) + a_1 z_1'(t) = v_2 z_2(t) > o;$$

seja

$$x_{ij}(t) = v_2 \ldots v_j z_j(t),$$

então

$$x_{1j}(t) > o$$

e

$$\begin{aligned} x_{1j+1}(t) &= x_{1j}(t) + a_j x_{1j}'(t) = \\ &= v_2 \ldots v_j z_j(t) + a_j v_2 \ldots v_j z_j'(t) = \\ &= v_2 \ldots v_j [z_j(t) + a_j z_j'(t)] = \\ &= v_2 \ldots v_j v_{j+1} z_{j+1}(t) > o; \end{aligned}$$

portanto C_1 é uma cadeia de mercados. Para C_i tem-se

$$x_{ii}(t) = \bar{v}_i z_i(t)$$

e

$$z_i(t) > o$$

portanto

$$x_{ii}(t) > o \quad \text{se} \quad v_i < 1$$

e

$$x_{ii}(t) = o \quad \text{se} \quad v_i = 1.$$

Então, para que C_i seja uma cadeia de mercados é necessário que $v_i < 1$. Seja $v_i < 1$, então

$$\begin{aligned} x_{ii}(t) &= \bar{v}_i \, z_i(t) > 0, \\ x_{ii+1}(t) &= x_{ii}(t) + a_i x_{ii}'(t) = \bar{v}_i z_i(t) + a_i \bar{v}_i z_i'(t) = \\ &= \bar{v}_i [z_i(t) + a_i z_i'(t)] = \bar{v}_i v_{i+1} z_{i+1}(t) > 0; \end{aligned}$$

seja

$$x_{ij}(t) = \bar{v}_i v_{i+1} \ldots v_j z_j(t),$$

então

$$x_{ij}(t) > 0$$

e

$$\begin{aligned} x_{ij+1}(t) &= x_{ij}(t) + a_j x_{ij}'(t) = \\ &= \bar{v}_i v_{i+1} \ldots v_j z_j(t) + a_j \bar{v}_i v_{i+1} \ldots v_j z_j'(t) = \\ &= \bar{v}_i v_{i+1} \ldots v_j [z_j(t) + a_j z_j'(t)] = \\ &= \bar{v}_i v_{i+1} \ldots v_j v_{j+1} z_{j+1}(t) > 0. \end{aligned}$$

Portanto, C_i é uma cadeia de mercados se e só se $v_i < 1$.

Este conjunto de cadeias tem, quando muito, n cadeias. A cadeia C_i é de ordem $n - i + 1$, então se $i \neq j$, a ordem de C_i é diferente da ordem de C_j. Assim, o conjunto considerado contém, quando muito, uma cadeia de cada ordem de 1 a n.

Todas as cadeias C_i são de mercados β.

O módulo do mercado de grau q da cadeia de ordem p, C_{n-p+1}, é a_{n-p+q}, isto é, o módulo do mercado de grau $n - p + q$ de C.

Agora, é necessário mostrar que

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n.$$

Ora o mercado de grau m ($m = 1, 2, \ldots n$) de

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

é a composição dos mercados de grau m de C_1, de grau $m - 1$ de C_2, ... de grau 1 de C_m. Portanto, o mercado de grau 1 de

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

é

$$(x_{11},\ a_1 x_{11},\ x_{12})$$

com

$$x_{11}(t) = z_1(t),$$

isto é, o mercado de grau 1 de C. Seja o mercado de grau m de

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

o mercado de grau m de C, isto é, seja

$$\sum_{i=1}^{m} x_{im}(t) = z_m(t),$$

visto que o seu módulo é a_m; então o mercado de grau $m + 1$ de

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

tem o fluxo de saída

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m+1} x_{im+1}(t) &= \sum_{i=1}^{m} x_{i\,m+1}(t) + x_{m+1\;m+1}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{m} [x_{im}(t) + a_m x_{im}'(t)] + x_{m+1\;m+1}(t) \\
&= z_m(t) + a_m z_m'(t) + \bar{v}_{m+1} z_{m+1}(t) \\
&= v_{m+1} z_{m+1}(t) + \bar{v}_{m+1} z_{m+1}(t) \\
&= z_{m+1}(t)
\end{aligned}$$

tem, portanto, o mesmo fluxo de saída que o mercado de grau $m + 1$ de C. Como têm os dois o mesmo módulo a_{m+1}, são iguais. Portanto,

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n,$$

e C admite uma decomposição normal.

Trata-se agora de provar que C admite apenas uma decomposição normal. Seja

$$F_1, F_2, \dots F_n$$

uma outra decomposição normal de C. Então:

1) $F_1, F_2, \dots F_n$ são cadeias a monovalência,

2) $C = F_1 + F_2 + \dots + F_n$,

3) Em $F_1, F_2, \dots F_n$ há, quando muito, uma cadeia de cada ordem desde 1 até n, seja F_i a cadeia de ordem $n - i + 1$,

4) Os mercados de $F_1, F_2, \dots F_n$ são todos mercados β, e

5) O módulo do mercado de grau q de F_{n-p+1} é a_{n-p+q}, módulo do mercado de grau $n - p + q$ de C.

Em virtude 1), 3) e 4) tem-se

$$F_i = (y_{ii}, a_{ii} y_{ii}, y_{ii+1} : y_{ii+1}, a_{ii+1} y_{ii+1}, y_{ii+2} : \dots$$
$$\dots : y_{in}, a_{in} y_{in}, y_{in+1})$$

$i = 1, 2, \dots n.$

De 5) resulta

$$a_{ij} = a_j, \quad j = i, i+1, \dots n, \quad i = 1, 2, \dots n.$$

De 2) e 3) segue-se que o primeiro mercado de C é o primeiro mercado de F_1, então

$$y_{11}(t) = z_1(t) = x_{11}(t),$$

e que

$$\sum_{k=1}^{i-1} y_{ki}(t) = v_i z_i(t), \quad \sum_{k=1}^{i} y_{ki}(t) = z_i(t),$$

donde

$$y_{ii}(t) = \overline{v}_i z_i(t) = x_{ii}(t).$$

Então

$$F_i = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

e a cadeia *C* admite uma e só uma decomposição normal.

Definição 3. *Cadeia associada* a uma cadeia com exclusivo, de mercados β, de ordem *n* — a cadeia de ordem *n* da sua decomposição normal.

Do que se expôs anteriormente conclui-se imediatamente que:

Toda a cadeia com exclusivo, de mercados β, de valências constantes, admite uma e só uma cadeia associada. Em especial, uma cadeia a monovalência, de mercados β, coincide com a sua cadeia associada.

Duas cadeias com exclusivo, de mercados β, têm a mesma cadeia associada se e só se são da mesma ordem, têm os mesmo módulos e pela mesma ordem, e os seus mercados de primeiro grau têm o mesmo fluxo de saída.

Se *C* é uma cadeia com exclusivo, de mercados β, de valências constantes, e de ordem *n* e *F* é uma cadeia com exclusivo, de mercados β, de valências constantes, e de ordem $m<n$, cujo mercado de grau *i* tem o mesmo módulo que o mercado de grau $n-m+i$ de *C*, então *C* e a sua transformada $\overline{C}$ por diferenciação horizontal mediante *F* têm a mesma cadeia associada.

Definição 4. *Divergência associada* de uma cadeia com exclusivo, de mercados β, de valências constantes — a divergência da sua cadeia associada.

Observa-se imediatamente que a divergência associada de uma cadeia é invariante para qualquer diferenciação horizontal que conserva os módulos dos mercados da cadeia dada.

É imediato que a cadeia associada γ de uma cadeia C com exclusivo, de mercados β, de valências constantes, é

$$\gamma = (z_1,\ a_1 z_1,\ v_2 z_2 : v_2 z_2,\ a_2 v_2 z_2,\ v_2 v_3 z_3 : \dots$$
$$\dots : v_2 \dots v_n z_n,\ a_n v_2 \dots v_n z_n,\ v_2 \dots v_n z_{n+1}).$$

Portanto, a divergência associada $\delta(t)$ de C está relacionada com a divergência $D(t)$ de C do modo seguinte

$$\delta(t) = v_2 \dots v_n D(t) \leqslant D(t)$$

e $\delta(t)$ é tanto menor relativamente a $D(t)$ quanto é maior o número de valências efectivamente menores que a unidade.

Assim, toda a diferenciação horizontal de C que conserva os módulos dos mercados, deixando invariante a divergência associada $\delta(t)$ como se viu, transforma C em $\overline{C}$ e $D(t)$ em $\overline{D}(t)$, portanto, ter-se-á

$$\frac{\overline{D}(t)}{\delta(t)} \gtrless \frac{D(t)}{\delta(t)}$$

conforme fôr

$$\overline{D}(t) \gtrless D(t).$$

3. Crise e cadeia de mercados

3.0. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, depois de definir expansão e depressão de um mercado, procurou-se determinar, em que condições a expansão ou depressão da actividade de um mercado influi no movimento da actividade dos mercados pertencentes à mesma cadeia e de grau superior ao seu.

Em condições precisas que, embora muito restritivas, não reduzirão o interesse dos resultados, estudou-se a acção, quer da diferenciação vertical, quer da diferenciação horizontal, não só no modo como a expansão e a depressão se transmitem nos mercados de uma cadeia, mas também na variação da grandeza da expansão ou depressão ao longo da cadeia de mercados considerada.

Com omissão das condições em que são válidos, cuja descrição seria longa e se encontra no lugar próprio, os resultados essenciais podem ser resumidos do modo seguinte:

Qualquer expansão ou depressão se propaga numa cadeia do mercado de grau mais elevado para o de primeiro grau; em certos casos a grandeza da expansão ou depressão cresce em módulo com o grau do mercado na cadeia; certas diferenciações horizontais implicam um aumento do módulo da grandeza absoluta da expansão ou depressão, deixam invariante a sua grandeza e aumentam o desfasamento da expansão ou depressão nos mercados da cadeia.

3.1. DEPRESSÃO E EXPANSÃO NUMA CADEIA DE MERCADOS.

Definição 1. Um mercado está em *crise*, *depressão*, *reprise* ou *expansão* na época t se nesta época o seu fluxo de saída é máximo, decrescente, mínimo ou crescente.

Seja o mercado

$$m = (z_1, az_1, z_2)$$

de sensibilidade $s(t)$ e divergência $d(t)$, tem-se

$$z_2(t) \gtreqless z_1(t), \qquad s(t) \gtreqless 1, \qquad d(t) \gtreqless 0$$

conforme m está em expansão, crise ou reprise, e em depressão em t.

Definição 2. *Expansão* (*depressão*) de um mercado — todo o intervalo tal que o mercado está no seu interior em expansão (depressão), no seu início em reprise (crise) e no seu termo em crise (reprise).

Definição 3. *Grandeza de uma expansão* (*depressão*) de um mercado — o quociente da diferença dos valores do fluxo de saída do mercado nas épocas de crise e reprise (reprise e crise) que definem a expansão (depressão) pelo valor do mesmo fluxo na época da reprise (crise).

Assim, se o intervalo (t, T), $t < T$, é uma expansão (depressão) do mercado m de fluxo de saída $z_1(t)$, a grandeza daquela expansão (depressão) é, segundo a definição,

$$g = \frac{z_1(T) - z_1(t)}{z_1(t)}.$$

À diferença

$$G = z_1(T) - z_1(t) = g.z_1(t)$$

dar-se-à o nome de *grandeza absoluta* da expansão (depressão).

É evidente que, em virtude da definição, a grandeza de uma expansão (depressão) é sempre positiva (negativa). É também imediato que a grandeza de uma expansão pode ser positiva qualquer, ao passo que a grandeza de uma depressão está sempre compreendida entre *— 1* e *0*.

1. *Sejam* m_1 *e* m_2 *mercados consecutivos de uma cadeia de mercados* β

$$m_1 = (z_1,\ a_1 z_1,\ vz_2), \qquad m_2 = (z_2,\ a_2 z_2,\ z_3)$$

onde é

$$v(t) \equiv c + bz_1(t), \qquad b > 0,\ c > 0$$

a valência de m_1 *relativamente a* m_2, *então:*

a) *se* m_1 *está em crise (reprise),* m_2 *está em depressão (expansão);*

b) *se* m_1 *está em expansão (depressão) e* $z_1(t)$ *é estacionário,* m_2 *está em reprise (crise).*

Notemos que entre os fluxos de entrada e de saída de m_1 existem as relações dos teoremas **2** e **3** do parágrafo **1.1**.

a) Suponhamos que m_1 está em crise (reprise) e seja

$$z_1'(t) = z_1''(t) = \cdots = z_1^{(2k-1)}(t) = 0$$
$$z_1^{(2k)}(t) < 0 \quad (> 0)$$

com k inteiro e positivo. Por ser

$$v^{(n)}(t) = b.z_1^{(n)}(t), \quad b > 0$$

tem-se

$$1) \qquad \begin{aligned} & v'(t) = v''(t) = \cdots = v^{(2k-1)}(t) = 0 \\ & v^{(2k)}(t) < 0 \quad (> 0). \end{aligned}$$

Pelo teorema **2** do parágrafo **1.1** tem-se

$$2) \qquad \begin{aligned} & [v(t).z_2(t)]' = [v(t).z_2(t)]'' = \cdots = [v(t).z_2(t)]^{(2k-2)} = 0 \\ & [v(t).z_2(t)]^{(2k-1)} < 0 \quad (> 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$[v(t).z_2(t)]^{(n)} = v(t).z_2^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} v^{(j)}(t)\, z_2^{(n-j)}(t)$$

conduz, em virtude de 1) e para $1 \leqslant n \leqslant 2k-1$, a

$$v(t).z_2^{(n)}(t) = [v(t).z_2(t)]^{(n)}.$$

Em virtude de 2), tem-se

$$v(t).z_2^{(n)}(t) \begin{cases} = 0 & \textit{se} \ \ n = 1, 2, \ldots (2k-2) \\ < 0 \ \ (> 0) & \textit{se} \ \ n = 2k-1 \end{cases}$$

e, finalmente, por ser $v(t) > 0$, tem-se

$$z_2'(t) = z_2''(t) = \cdots = z_2^{(2k-2)}(t) = 0$$
$$z_2^{(2k-1)}(t) < 0 \quad (> 0)$$

o que mostra estar m_2 em depressão (expansão) em t.

b) Por hipótese m_1 está em expansão (depressão) e $z_1(t)$ é estacionário em t, logo

$$z_1'(t) = z_1''(t) = \cdots = z_1^{(2k)}(t) = 0$$
$$z_1^{(2k+1)}(t) > 0 \quad (< 0).$$

Por ser

$$v(t) = c + b.z_1(t), \qquad b > 0$$

tem-se

$$3) \qquad \begin{array}{l} v'(t) = v''(t) = \cdots = v^{(2k)}(t) = 0 \\ v^{(2k+1)}(t) > 0 \quad (< 0). \end{array}$$

Pelo teorema 3 do parágrafo **1.1**, tem-se

$$4) \qquad \begin{array}{l} [v(t).z_2(t)]' = [v(t).z_2(t)]'' = \cdots = [v(t).z_2(t)]^{(2k-1)} = 0 \\ [v(t).z_2(t)]^{(2k)} > 0 \quad (< 0). \end{array}$$

Logo,

$$[v(t).z_2(t)]^{(n)} = v(t).z_2^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} v^{(j)}(t).z_2^{(n-j)}(t)$$

conduz, em virtude de 3) e para $1 \leqslant n \leqslant 2k$, a

$$v(t).z_2^{(n)}(t) = [v(t).z_2(t)]^{(n)}.$$

Em virtude de 4), tem-se

$$v(t) \,.\, z_2^{(n)}(t) \begin{cases} = 0 & se \quad n = 1, 2, \ldots (2k-1) \\ > 0 \ (< 0) & se \quad n = 2k. \end{cases}$$

Finalmente, por ser $v(t) > 0$, tem-se

$$z_2'(t) = z_2''(t) = \cdots = z_2^{(2k-1)}(t) = 0$$
$$z_2^{(2k)}(t) > 0 \quad (< 0)$$

que mostra estar m em reprise (crise) em t.

Continuemos a considerar dois mercados consecutivos de uma cadeia de mercados β

$$m_1 = (z_1, \ a_1 z_1, \ v z_2), \quad m_2 = (z_2, \ a_2 z_2, \ z_3)$$

com

$$v(t) \equiv c + b . z_1(t), \quad b > 0, \quad c > 0.$$

É evidente que durante uma expansão (depressão) de m_1, m_2 tem pelo menos uma crise (reprise) e terá mais de uma, por exemplo, se o fluxo de saída de m_1 fôr estacionário pelo menos uma vez durante a expansão (depressão) de m_1.

No caso de m_2 ter mais de uma crise (reprise) durante uma expansão (depressão) de m_1, então, nesta estão inteiramente contidas pelo menos uma depressão e uma expansão de m_2.

Estas duas afirmações são consequências imediatas do teorema anterior.

No caso de m_2 ter uma **só** crise (reprise) durante uma expansão (depressão) de m_1, chamar-se-á expansão (depressão) de m_2 *correspondente* à expansão (depressão) de m_1 considerada, aquela expansão (depressão) de m_2 cuja crise (reprise) tem lugar durante a expansão (depressão) de m_1.

Suponhamos que os mercados m_1 e m_2 são tais que é possível definir para cada expansão (depressão) de m_1 a sua correspondente de m_2, o que em última análise depende, nas condições consideradas, do fluxo $z_1(t)$.

Nestes termos, é evidente que as expansões (depressões) correspondentes de m_1 e m_2 são as únicas que têm uma parte comum. É imediato também que cada expansão (depressão) de m_2 começa e termina mais cedo do que a expansão (depressão) correspondente de m_1.

Numa cadeia de mercados em que cada par de mercados consecutivos está nas condições do par m_1, m_2, no que respeita à possibilidade de estabelecer uma correspondência biunívoca entre as suas depressões e expansões, dir-se-á expansão (depressão) de m_3 correspondente a uma expansão (depressão) de m_1, a expansão (depressão) de m_3 correspondente à expansão (depressão) de m_2 correspondente à expansão (depressão) de m_1 considerada, e assim por diante.

O que se disse nos dois parágrafos precedentes e o que resulta da sua relacionação pode resumir-se dizendo que numa cadeia de mercados, que verifica as condições indicadas, toda a expansão (depressão) se propaga do mercado de grau mais elevado para o mercado de primeiro grau.

2. *Sejam dois mercados consecutivos de uma cadeia de mercados* β

$$m_1 = (z_1,\ a_1 z_1,\ vz_2), \quad m_2 = (z_2\ a_2 z_2,\ z_3)$$

com

$$v(t) \equiv c + b.z_1(t), \quad b > 0, \quad c > 0,$$

cadeia na qual foi possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre as expansões e depressões de m_1 *e* m_2*, então, se* (t_1, T_1) *é uma expansão ou depressão de* m_1*,* (t_2, T_2) *é a expansão ou depressão correspondente de* m_2 *e* G_1 *e* G_2 *são as suas grandezas absolutas, então tem-se*

$$c\,|G_1| < |G_2|$$

e, em especial, se

$$v(t) \equiv c$$

tem-se

$$|G_1| < |G_2|.$$

Como já se observou, tem-se

$$t_2 < t_1 < T_2 < T_1$$

e, de acordo com a definição de grandeza absoluta de uma expansão ou depressão,

$$G_1 = z_1(T_1) - z_1(t_1)$$
$$G_2 = z_2(T_2) - z_2(t_2).$$

Visto que, consoante se trata de uma expansão ou depressão, se tem

$$z_2(t_2) \lesseqgtr z_2(t_1) = \frac{z_1(t_1)}{v(t_1)}$$

$$z_2(T_2) \gtreqless z_2(T_1) = \frac{z_1(T_1)}{v(T_1)}$$

ter-se-á, respectivamente,

$$G_2 = z_2(T_2) - z_2(t_2) \gtrless$$

$$\gtrless z_2(T_1) - z_2(t_1) = \frac{z_1(T_1)}{v(T_1)} - \frac{z_1(t_1)}{v(t_1)} =$$

$$= \frac{v(t_1)[z_1(T_1) - z_1(t_1)] - z_1(t_1)[v(T_1) - v(t_1)]}{v(T_1).v(t_1)} =$$

$$= \frac{v(t_1)[z_1(T_1) - z_1(t_1)] - b.z_1(t_1)[z_1(T_1) - z_1(t_1)]}{v(T_1).v(t_1).} =$$

$$= \frac{v(t_1) - b.z_1(t_1)}{v(T_1).v(t_1)} G_1 = \frac{c}{v(T_1).v(t_1)} G_1$$

portanto, respectivamente,

5) $$c.G_1 \lesseqgtr v(T_1).v(t_1).G_2$$

por ser $v(t) > 0$.

Considerando que G_1 e G_2 são simultâneamente positivos ou negativos, segundo se trata de uma expansão ou de uma depressão, e que

$$c > 0, \quad v(t) > 0$$

pode escrever-se

$$6) \qquad c\,|G_1| < v(T_1).v(t_1)\,|G_2|$$

donde, atendendo a que

$$0 < v.(T_1)\,v(t_1) \leqslant 1$$

vem

$$c\,|G_1| < |G_2|.$$

Por fim, resulta de 6), se $v(t) \equiv c$,

$$c\,|G_1| < c^2\,|G_2|$$

ou, por ser $c \leqslant 1$, portanto, $c^2 \leqslant c$,

$$c\,|G_1| < c^2\,|G_2| < c\,|G_2|$$

e, porque $c > 0$

$$|G_1| < |G_2|.$$

3. *Nas condições do teorema anterior e para um par de expansões correspondentes de* m_1 *e* m_2 *tem-se, se* g_1 *e* g_2 *são as suas grandezas,*

$$c.g_1 < v(T_1).g_2$$

e, em particular, se

$$v(t) \equiv c$$

tem-se

$$g_1 < g_2.$$

Com efeito, por se tratar de um par de expansões correspondentes e por 5), tem-se

$$c.G_1 < v(T_1).v(t_1).G_2.$$

Por ser

$$z_1(t_1) > v(t_1).z_2(t_2) > 0$$

resulta daquela desigualdade

$$\frac{c.G_1}{z_1(t_1)} < \frac{v(T_1).G_2}{z_2(t_2)}$$

donde

$$c.g_1 < v(T_1).g_2.$$

Se $v(t) \equiv c$ tem-se, manifestamente,

$$g_1 < g_2$$

pois $c > 0$.

4. *Se as condições do teorema* 2 *são verificadas por qualquer par de mercados consecutivos de uma cadeia de ordem* n, *então*

a) *tem-se*

$$c_2 c_3 \ldots c_n \mid G_1 \mid < c_3 \ldots c_n \mid G_2 \mid < \cdots < \mid G_n \mid$$

onde

$$G_1,\ G_2, \ldots G_n$$

são as grandezas absolutas das expansões ou depressões correspondentes e

$$c_i = v_i(t) - b\, z_i(t), \quad i = 2, 3, \ldots n;$$

b) *em especial, para*

$$v_i(t) \equiv c_i, \quad i = 2, 3, \ldots n$$

tem-se

$$|G_1| < |G_2| < \cdots < |G_n|;$$

c) *se, além do que se admitiu em* b), *se trata de expansões, tem-se*

$$g_1 < g_2 < \cdots < g_n$$

onde

$$g_1, g_2, \ldots g_n$$

são as grandezas das expansões correspondentes.

a) Nas condições do teorema 2, tem-se para os mercados de graus *1* e *2*, de graus *2* e *3*, ... de graus $n-1$ e *n*, respectivamente

$$\begin{gathered} c_2|G_1| < |G_2| \\ c_3|G_2| < |G_3| \\ \ldots \\ c_n|G_{n-1}| < |G_n| \end{gathered}$$

ou, porque

$$c_i > 0, \quad i = 2, 3, \ldots n,$$

$$\begin{gathered} c_2\ c_3 \ldots c_n|G_1| < c_3 \ldots c_n|G_2| \\ c_3\ c_4 \ldots c_n|G_2| < c_4 \ldots c_n|G_3| \\ \ldots \\ c_{n-1}\ c_n|G_{n-2}| < c_n|G_{n-1}| \\ c_n|G_{n-1}| < |G_n| \end{gathered}$$

donde

$$c_2\ c_3 \cdots c_n|G_1| < c_3 \cdots c_n|G_2| < \cdots < |G_n|.$$

b) Se as valências são todas constantes, para qualquer par de mercados consecutivos da cadeia, tem-se pelo teorema 2

$$|G_k| < |G_{k+1}|, \quad k = 1, 2, \ldots (n-1)$$

portanto,

$$|G_1| < |G_2| < \cdots < |G_n|.$$

c) Finalmente, no mesmo caso que anteriormente, se se trata de uma expansão, pelo teorema 3 tem-se

$$g_k < g_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots (n-1),$$

ou

$$g_1 < g_2 < \cdots < g_n.$$

Este teorema diz-nos como, em determinadas condições, a diferenciação vertical influi nas grandezas das expansões ou depressões.

5. *Seja uma cadeia de mercados* β *de ordem 2 e de valência constante*

$$C = (z_1, \ a_1 z_1, \ vz_2 : z_2, \ a_2 z_2, \ z_3)$$

e seja

$$\overline{C} = (z_1, \ a_1 z_1, \ vz_2 : \frac{vz_2}{w}, \ a_2 \frac{vz_2}{w}, \ \frac{vz_3}{w})$$

a transformada de C *mediante uma diferenciação horizontal que conserva os módulos dos mercados e tal que a valência* w *é constante, seja* (t, T) *uma expansão (depressão) de* m_2 *em* C*, então:*

a) (t, T) *é também uma expansão (depressão) de* $\overline{m}_2$ *em* $\overline{C}$;

b) *se* G_2, g_2, $\overline{G}_2$, $\overline{g}_2$ *são respectivamente as grandezas dessa expansão ou depressão de* m_2 *em* C *e de* $\overline{m}_2$ *em* $\overline{C}$*, então*

$$|G_2| < |\overline{G}_2|$$

e

$$g_2 = \overline{g}_2.$$

a) Os fluxos de saída de m_2 em C e de $\overline{m}_2$ em $\overline{C}$ são respectivamente

$$z_2(t), \qquad \frac{v}{w} z_2(t)$$

onde $\dfrac{v}{w}$ é uma constante positiva, logo, toda a expansão de m_2 é uma expansão de $\overline{m}_2$ e toda a depressão de m_2 é uma depressão de $\overline{m}_2$.

b) Notando que a cadeia que opera a diferenciação horizontal nas condições indicadas é

$$\left(\frac{v-w}{w} z_2, \; a_2 \frac{v-w}{w} z_2, \; \frac{v-w}{w} z_3\right)$$

e que esta existe se e só se $v > w$, tem-se imediatamente

$$G_2 = | z_2(T) - z_2(t) |$$

$$G_2 < \frac{v}{w} | z_2(T) - z_2(t) |$$

$$G_2 < \left| \frac{v}{w} z_2(T) - \frac{v}{w} z_2(t) \right|$$

$$G_2 < \overline{G}_2.$$

Finalmente, tem-se

$$g_2 = \frac{z_2(T) - z_2(t)}{z_2(t)} = \frac{\dfrac{v}{w} z_2(T) - \dfrac{v}{w} z_2(t)}{\dfrac{v}{w} z_2(t)} = \overline{g}_2.$$

6. *Sejam* m_1, M_1 *e* m_2, M_2 *dois pares de mercados consecutivos, um de cada uma das cadeias de mercados* β C_1 *e* C_2, *sejam* m_1 *e* m_2 *do mesmo grau e*

$$m_1 = (z,\ az,\ vx) \qquad m_2 = (z,\ az,\ wy)$$

ou, o que é o mesmo, por ser necessàriamente

$$y(t) = \frac{v(t)}{w(t)}\, x(t),$$

$$m_2 = (z,\ az,\ \frac{v}{w}\, x),$$

suponhamos que nas cadeias C_1 *e* C_2 *é possível definir expansões e depressões correspondentes, então:*

a) *se* v *e* w *são constantes, o desfasamento das expansões e depressões de* m_1 *relativamente às expansões ou depressões correspondentes de* M_1 *é igual ao desfasamento das expansões e depressões de* m_2 *relativamente às expansões ou depressões correspondentes de* M_2;

b) *se* v *é constante e*

$$w(t) \equiv c + b.z(t), \quad b > 0, \quad c > 0,$$

o primeiro desfasamento é maior do que o segundo.

a) Na hipótese das valências serem constantes, os fluxos de saída dos mercados M_1 e M_2 são simultâneamente máximos ou mínimos, visto que

$$y(t) = \frac{v}{w}\, x(t).$$

Por outro lado os mercados m_1 e m_2 têm o mesmo fluxo de saída. Portanto, as expansões ou depressões de m_1 e m_2 coincidem e também coincidem as expansões ou depressões de M_1 e M_2. Logo, os desfasamentos considerados são iguais.

b) Neste caso tem-se, por hipótese,

$$v(t) \equiv v$$
$$w(t) \equiv c + b.z(t).$$

Por consequência, se $x(t)$ é máximo (mínimo), tem-se

$$x'(t) = \frac{1}{v}[z'(t) + a.z''(t)] = 0$$

ou

$$z'(t) + a.z''(t) = 0$$

e

$$z'(t) > 0 \quad (< 0)$$

por supormos possível definir em qualquer das cadeias expansões e depressões correspondentes. Por outro lado é

$$y'(t) = \left[\frac{z(t) + a.z'(t)}{c + b.z(t)}\right]'$$

$$= \frac{[z'(t) + a.z''(t)]\,[c + b.z(t)] - [z(t) + a.z'(t)]\,b.z'(t)}{[c + b.z(t)]^2}$$

$$= -\frac{[z(t) + a.z'(t)]\,b.z'(t)}{[v + b.z(t)]^2}$$

$$= -\frac{v.b.x(t).z'(t)}{[c + b.z(t)]^2} < 0 \quad (> 0)$$

e M_2 está em depressão (expansão) na época da crise (reprise) de M_1.

Notando que se supôs possível o estabelecimento de uma correspondência biunívoca entre as expansões e depressões de m_1 e M_1, de uma correspondência biunívoca entre as expansões e depressões de m_2 e M_2 e que, em virtude de m_1 e m_2 terem fluxos de saída idênticos, as suas expansões e depressões coincidem, é, portanto, possível estabelecer também uma correspondência biunívoca entre as expansões e depressões de M_1 e M_2 o que nos permite afirmar, em presença do resultado anterior, que o primeiro desfasamento é menor do que o segundo.

3.2. CADEIAS DE MERCADOS SEM DEPRESSÕES.

Todo o mercado β sem depressões pertence, manifestamente, a uma das três classes:

a) mercados estacionários (de fluxo de saída constante),

b) mercados em expansão permanente (de fluxo de saída monótono crescente),

c) mercados alternadamente estacionários e em expansão (de fluxo de saída geralmente crescente).

Por cadeia sem depressões entende-se toda a cadeia cujos mercados não têm depressões.

Para as cadeias de mercados, de valências constantes é fácil obter uma condição necessária e suficiente para que seja sem depressões.

1. *Seja a cadeia*

$$C = (z_1,\ a_1 z_1,\ v_2 z_2 : z_2,\ a_2 z_2,\ v_3 z_3 : \ldots : z_n,\ a_n z_n,\ z_{n+1})$$

de mercados β *de valências constantes, ela não tem depressões se e só se*

$$\sum_{i=0}^{j} z_1^{(i+1)}(t) \sum_{(i)}^{j} a_{k_1}\ a_{k_2} \ldots a_{k_i} \geqslant 0, \quad j = 0, 1, \ldots (n-1).$$

Note-se apenas que as condições do teorema são as condições necessárias e suficientes para que cada mercado da cadeia não tenha depressões, isto é, para que os fluxos de saída dos mercados da cadeia sejam não decrescentes.

É evidentemente uma condição suficiente, mas não necessária, para que a cadeia *C*, nas condições do teorema anterior, não tenha depressões que

$$z_1'(t) \geqslant 0, \quad z_1''(t) \geqslant 0, \quad \ldots \; z_1^{(n)}(t) \geqslant 0.$$

Observe-se que estas condições são verificadas pela cadeia *C* em qualquer dos casos:

a) $z_1(t) = mt + p, \quad m \geqslant 0, \; p \geqslant 0,$

b) $z_1(t) = a + be^{ct}, \quad b \geqslant -a, \; b \geqslant 0, \; c \geqslant 0.$

4. Divergência, crise e objectivos da actividade de uma cadeia de mercados.

4.0. INTRODUÇÃO.

Como se viu nos dois primeiros capítulos, a divergência é consequência de cada mercado ter de manter stocks, em geral, não constantes. Ela é, portanto, resultante das relações existentes na cadeia entre bens económicos. Da necessidade destas relações se disse o essencial no primeiro capítulo [1].

Não pode ver-se, pois, na divergência, isoladamente, uma causa de perturbações da actividade dos mercados de uma cadeia. Veja-se antes a verdadeira causa dessas perturbações no facto dos objectivos fixados àquela actividade terem ou não em conta as relações necessárias acima referidas [2].

Nos parágrafos seguintes procura-se esclarecer este ponto.

---

(1) Uma exposição mais pormenorizada encontra-se em B. Chait (1, pág. 63-68).

(2) Cfr. B. Chait (1).

4.1. O LUCRO COMO OBJECTIVO DA ACTIVIDADE DE UMA CADEIA DE MERCADOS.

Numa economia caracterizada pela propriedade privada dos meios de produção é o critério do lucro que determina a produção, em presença das necessidades solváveis de bens económicos. Estas necessidades criam o quadro indispensável ao exercício de uma actividade produtora lucrativa que não tem por fim efectivamente a redução das necessidades não solváveis e a expansão das outras.

Uma tal economia, de resto, não tem no seu conjunto, objectivos determinados e deve ser comparada, como o fez o professor M. Dobb [1], ao «derelict hulk adrift on the ocean». Embora uma economia de tal modo desorientada *possa* teòricamente atingir objectivos desejáveis, não há possibilidade de fazer uma previsão dos resultados, nem, portanto, de exercer uma acção consciente tendente para esses objectivos.

A concentração industrial e financeira verificada na economia em causa acentuou a imperfeição da concorrência e não conduziu à definição, explícita ou implícita, de alvos aceitáveis por todos. E, apesar de contradição

(1) M. Dobb (1, pág. 317).

evidente, persiste oficialmente na defesa do postulado «order is so far preordained in human affairs that a multitude of blind actions and reactions will bring it to pass» (1) para pretender justificar a norma de acção: «the largest possible profit in the shortest time» (1).

Introduzindo esta norma, tal como foi enunciada ou ligeiramente enfraquecida, numa cadeia de mercados a fim de determinar a sua actividade, renuncia-se simultâneamente a tomar em linha de conta aquelas relações necessárias a que se aludiu no parágrafo anterior e se resumem na existência de divergência.

O exame dos modelos simplificados, relativamente aos quais se adoptou essa norma, estudados por B. Chait (2) sobretudo do ponto de vista da sua estabilidade, isto é, do retorno à actividade inicial, mostra que, em geral, não pode assegurar-se, nem a eliminação de crises, nem que se alcance um objectivo prefixado em termos de nível de actividade.

Que ao professor A. Aftalion não passaram despercebidas estas dificuldades, talvez o prove a defesa de tal critério que tenta fazer:

«Dans le régime individualiste c'est aux entrepreneurs qu'il incombe d'adapter la production aux besoins. Ce sont eux qui commettront les presque inévitables érreurs.

---

(1) L. Mumford (F. Mackenzie, 1, pág. V): «In the nineteenth century, capitalistic industry sought work on the assumption that economic life was self-equilibrating. Human needs would be satisfied, and human purposes served, if each economic agent acted with no thought for anything but his immediate aim: the largest possible profit in the shortest time. Behind this theory was a sublime and now incredible theology: the conception that order is so far preordained in human affairs that a multitude of blind actions and reactions will bring it to pass».

(2) B. Chait (1, pág. 205-277).

Mais il est douteux que, dans d'autres régimes, d'autres directeurs de la production montrent plus de perspicacité. Le *profit* n'est pas seul à constituer en ces circonstances un symptôme trompeur. La fabrication en vue du profit ne doit porter toute la responsabilité de la surcapitalisation. C'est le *besoin* lui même qui égare et aveugle les producteurs. Le degré d'insatisfaction présent du besoin social ne dépend en effet que des objets de consommation actuellement offerts aux acheteurs, nullement de la puissance des forces productrices en création. Tout ce qui se prépare de capitaux l'intensité actuelle du besoin l'ignore tant que ces capitaux ne sont pas terminés et ne produisent pas les objets de consommation désirés. Les prix et les profits se ressentent de cette ignorance et abusent l'entrepreneur.» (1)

Pois, mais adiante, quando se refere às indústrias que satisfazem as grandes necessidades públicas, acrescenta:

«La crise pourrait être évitée par une construction habilement échelonnée de façon à continuer toujours à une allure régulière, de façon que, l'ouvrage étant terminé ici, un autre ouvrage similaire soit commencé ailleurs ou qu'on procède au remplacement du matériel déjà usé. La crise ne tient pas à la nature des industries en question, mais à ce que dans ces industries comme dans les autres, sous l'influence des mouvements de recettes, des dividendes, et à cause de la longue durée du procès de production, on va trop vite à certaines années, on produit trop, de sorte qu'on doit s'arrêter dans les années qui suivent.» (2)

---

(1) A. Aftalion (1, pág. 209).
(2) A. Aftalion (1, pág. 226).

4.2. NECESSIDADE DA PLANIFICAÇÃO DA ACTIVIDADE DOS MERCADOS DE UMA CADEIA.

Do que se escreveu anteriormente decorre, como indispensável para a eliminação das perturbações prejudiciais resultantes da introdução de um critério determinante da actividade dos mercados de uma cadeia que não considera as relações materiais necessárias existentes nesta, justamente a adopção de um critério que tome na devida conta essas relações. Como estas se referem à cadeia no seu todo e tornam dependente do que se passa em cada mercado da cadeia o que vai passar-se em todos os outros, a actividade de cada mercado deverá, necessàriamente, tender para um alvo que interesse todos os outros, ou não os impeça de prosseguir e atingir objectivos próprios e deverá desenvolver-se por forma a evitar, das consequências das relações necessárias da cadeia de mercados, as que forem consideradas prejudiciais.

Esta atitude em face do problema da actividade de uma cadeia de mercados implica:

a) a definição de objectivos atingíveis e não contraditórios, *b*) o inventário permanente dos meios de acção disponíveis,

c) o conhecimento dos processos de arranjo daqueles meios conducentes àquele ou a este efeito, e das possibilidades da transformação desses processos,

d) o conhecimento das diferentes formas da acção que dos meios disponíveis e através de cada processo conduzem aos objectivos definidos,

e) a hierarquização e a escolha de processos e de formas de acção,

f) o exame periódico dos fins, dos meios e da marcha para a consecução daqueles fins, e a adaptação permanente e mútua dos fins, dos processos e das formas de acção.

Por consequência, aquela atitude corresponde à que, em face de uma economia se designa por planificadora [1] e coincide com esta se, em vez de encararmos uma cadeia de mercados, considerarmos o conjunto de cadeias interdependentes correspondente a uma economia.

---

[1] Por planificação entende-se aqui «a system of economic organisation in which all individual and separate plants, enterprises and industries are treated as coordinated units of single whole for the purpose of utilizing all available resources to achieve the maximum satisfaction of the needs of a people within a given interval of time». L. Lorwin (1).

5. Bibliografia

AFTALION, A. — (1) La réalité des surproductions générales. Éssai d'une théorie des crises générales et périodiques. Revue d'Économie Politique, vol. 22 (1908), pág. 696-706; vol. 23 (1909), pág. 81-117, 241-259, 201-229.

BHÖLER, E. — (1) Grundlehren der Nationalökonomie Bern 1944 (Francke).

CHAIT, B. — (1) Les fluctuations économiques et l'interdépendance des marchés. Bruxelles 1938 (R. Louis).

(2) Éssai d'explication des crises économiques par l'économétrie. Paris 1938 (Hermann).

DOBB, M. — (1) Political economy and capitalism. London 1944 (Routledge).

EVANS, G. C. — (1) Mathematical introduction to economics. New York 1930.

HIBBERT, L. — (1) Les équations du problème des fluctuations économiques et de l'interdépendance des marchés, d'après M. B. Chait. Bulletin de la Société Mathématique de France, Tome 69, pág. 1-22, 1941.

LORWIN, L. — (1) *in* World social economic planning (Rapports du Congrès de Amsterdam de 1931), pág. 774. The Hague 1931.

LUNDBERG, E. — (1) Studies in the theory of economic expansion. London 1937.

MACKENZIE, F. — (1) Planned society: yesterday, to-day, to-morrow. A symposium edited by F. M. New York 1937 (Prentice Hall).

ROOS, C. F. — (1) Dynamic economics. Bloomington 1934 (The Principia Press).