

Univerdade de Lisboa  
Faculdade de Ciências  
Departamento de Estatística e Investigação Operacional



## Modelos Dinâmicos na Construção de Tabelas de Mortalidade

**Marco Tavares Pereira**

Trabalho de Projeto  
Mestrado em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

**2013**

Univerdade de Lisboa  
Faculdade de Ciências  
Departamento de Estatística e Investigação Operacional



## Modelos Dinâmicos na Construção de Tabelas de Mortalidade

**Marco Tavares Pereira**

Trabalho de Projeto  
Mestrado em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

Orientadora: Maria Fernanda de Oliveira

**2013**

*"I am a part of all that I have met  
Yet all experience is an arch wherethrough  
Gleams that untravelled world, whose margin fades  
For ever and for ever when I move."*

— TENNYSON'S ULYSSES

*Em tributo ao Prof. Doutor Nathan Keyfitz (1913-2010)*

# Agradecimentos

Cumprindo todos os formalismos, os meus primeiros agradecimentos terão de ir para os responsáveis pelo funcionamento da FCUL, não fosse eu um 'aluno da casa'. Em particular, gostava de agradecer ao Prof. Doutor José Pinto Paixão, diretor da Faculdade, e à Prof. Doutora Teresa Alpuim, coordenadora do mestrado de Matemática Aplicada à Economia e à Gestão, sem a qual este mestrado não existiria. Posto isto, o meu maior agradecimento, se tal fosse quantificável, vai para a minha orientadora Prof. Doutora Maria Fernanda de Oliveira. De facto, eu não escolhi esta tese pela professora em questão, mas foi grande o meu espanto quando fui tão bem recebido, especialmente num ano que tão lhe complicado era. Não me refiro simplesmente à simpatia que, para quem conhece, transborda, mas a toda a dedicação, suporte e constante preocupação com o meu trabalho. Em especial, gostava de agradecer pelos fins de semana perdidos, por todos os conselhos, sempre oportunos mas nunca liberticídios, e pela disponibilidade constante.

Num sentido mais efémero, gostava de agradecer ao Prof. Doutor David Forfar por me ter tão prontamente disponibilizado os seus artigos, minutos depois de perguntar se tal era possível; ao Prof. Doutor Luís Sequeira, pelo apoio e ensinamentos no que toca ao software LaTeX, em que este trabalho foi escrito; a Salomé Vicente, membro da direção técnica da APS, pela disponibilização de documentos relativos ao trabalho realizado pela Swiss Re, e por último, mas não menos importante, à Prof. Doutora Barbara Keyfitz, pela ajuda com o tributo prestado ao Prof. Doutor Nathan Keyfitz, pioneiro na Demografia Matemática.

Finalmente, numa perspetiva mais pessoal gostaria de agradecer à minha Família, ao José Henrique e 'to whom it may concern'. Correndo o risco de tornar esta página demasiado comprida, deixo apenas a minha eterna gratidão a toda a amizade demonstrada. Um grande bem-haja para todos.

## **Resumo**

Podemos ver este projecto de Matemática Aplicada à Economia e Gestão como um claro e simples 'state of art' da modelação da mortalidade. O trabalho será escrito em português dado que a divulgação tem como principal alvo a comunidade científica nacional. Iremos partir dos modelos descritos nos trabalhos clássicos, onde a notação e as relações fundamentais deste tema serão estabelecidas. Depois, por uma ordem tão cronológica quanto possível, vamos analisar os principais modelos que suportam a construção de tabelas de mortalidade ditas dinâmicas, cuja evolução, face às ditas estáticas, consiste em considerar a influência que o ano civil em que vivemos tem sobre a mortalidade. Seguimos para a análise de modelos estocásticos, de que é exemplo o clássico modelo de Lee-Carter, e concluímos com a análise de modelos 'Age-Period-Cohort', onde o tempo é interpretado sob três perspetivas diferentes.

## **Abstract**

We can see this project of Mathematics Applied to Economics and Management as a clear and simple mortality modeling's 'state of art'. The work is written in Portuguese since disclosure has as main target the portuguese scientific community. We'll start from the models described in classical works, where the notation and the fundamental relations will be established. Afterwards, by a chronological order, we'll analyze the main models that support the construction of mortality tables named dynamics, whose evolution, regarding the called static tables, is to consider the influence that the calendar year in which we live has on mortality. Then we will analyse the stochastic models, as exemplified by the classic Lee-Carter model, and finally we concluded with an analysis of 'Age-Period-Cohort' models, where time is interpreted from three different perspectives.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Tabelas Estáticas</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução . . . . .	5
2.2	O modelo estático e estatístico do tempo de vida futuro . . . . .	8
2.3	A forma de representar o modelo . . . . .	10
2.3.1	Definição de Tabela de Mortalidade . . . . .	10
2.3.2	Outras funções das Tabelas de Mortalidade . . . . .	10
2.3.3	Funções das Tabelas de Mortalidade para idades não-inteiras . . . . .	11
2.4	Leis de Mortalidade . . . . .	12
2.4.1	Mortalidade em idades muito avançadas . . . . .	15
2.5	Heterogeneidade nos Modelos de Mortalidade . . . . .	16
2.5.1	Fatores observáveis . . . . .	16
2.5.2	Fatores não observáveis . . . . .	18
2.6	Conclusão . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Tabelas Dinâmicas</b>	<b>20</b>
3.1	Introdução . . . . .	20
3.2	A abordagem dinâmica . . . . .	21
3.2.1	Construção da Tabela de Mortalidade . . . . .	23
3.2.2	Cálculo da estimativas brutas dos quocientes de mortalidade . . . . .	23
3.2.3	Graduação . . . . .	27
3.2.4	Métodos de Fecho da Tabela . . . . .	27
3.3	Modelo de previsão da mortalidade . . . . .	29
3.3.1	Tabela Projetada . . . . .	31
3.3.2	A abordagem da Expectativa . . . . .	32
3.3.3	A abordagem da Explicação . . . . .	33
3.4	A abordagem da Extrapolação . . . . .	34
3.4.1	Extrapolação de $\Psi(x, t)$ . . . . .	35
3.4.2	Projeção de Leis de Mortalidade . . . . .	38
3.4.3	Outras abordagens à extrapolação da mortalidade . . . . .	40
3.4.4	Tabela Modelo de Mortalidade . . . . .	40
3.4.5	Abordagem de superfície . . . . .	42

3.5	Modelos estocásticos de previsão . . . . .	43
3.5.1	O modelo Lee-Carter (LC) . . . . .	44
3.5.2	O modelo Cairns-Blake-Dowd (CBD) . . . . .	51
3.6	Modelos APC . . . . .	52
3.6.1	Extensão do modelo Lee-Carter . . . . .	53
3.6.2	O modelo de Currie . . . . .	54
3.6.3	Extensão do modelo Cairns-Blake-Dowd . . . . .	55
3.6.4	O modelo de Plat . . . . .	55
3.7	A escolha do modelo a implementar . . . . .	56
3.7.1	Critérios . . . . .	56
3.7.2	Comparando modelos . . . . .	59
3.8	Conclusão . . . . .	60
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>63</b>
	<b>A Tabela de Mortalidade para Portugal, 2010-2012</b>	<b>71</b>

# Lista de Figuras

1.1	Alterações do Padrão da Mortalidade, em Portugal . . . . .	4
2.1	Tabela de Mortalidade de Graunt . . . . .	6
2.2	Tabela de Mortalidade de Halley . . . . .	7
3.1	Ilustração de uma Tabela dinâmica de Mortalidade . . . . .	22
3.2	Diagrama de Lexis: Óbitos registados à idade $x$ no ano $t$ . . . . .	24
3.3	Diagrama de Lexis: Óbitos registados à idade $x$ para a geração $t - x$ . . . . .	25
3.4	Diagrama de Lexis: Óbitos registados no ano $t$ para a geração $t - x$ . . . . .	26
3.5	Diagrama em leque: esperança de vida prevista. . . . .	44

# Lista de Abreviaturas

- APC** Age-Period-Cohort model;
- APS** Associação Portuguesa de Seguros;
- ARIMA** Autoregressive integrated moving average;
- BIC** Bayesian Information Criterion;
- CBD** modelo de Cairns, Blake e Dowd;
- CMIB** Continuous Mortality Investigation Bureau;
- ELT** English Life Table;
- GLM** Generalized Linear Models;
- GM** classe de modelos Gompertz-Makeham;
- HMD** Human Mortality Database;
- HP** lei de mortalidade de Heligman e Pollard;
- INE** Instituto Nacional de Estatística;
- IPS** Instituto Português de Seguradores;
- LC** modelo Lee-Carter;
- OLS** Ordinary Least Squares;
- MLE** Maximum Likelihood Estimation;
- SIDA** Síndrome da imunodeficiência adquirida;
- SOA** Society of Actuaries;
- SVD** Singular Value Decomposition;
- WLS** Weighted Least Squares;

# Capítulo 1

## Introdução

A morte é provavelmente o acontecimento mais inspirador da vida de um ser humano. Numa perspectiva pessoal, todos nós recordamos a morte de pessoas que nos foram próximas e cada um pode reconhecer a forma como isso influenciou a sua vida e talvez até a sua personalidade. Numa perspectiva artística a morte é muitas vezes tema central de toda uma peça, seja na pintura, no cinema, na música ou em qualquer das restantes oito artes. Numa perspectiva filosófica, o porquê da nossa existência neste mundo com um fim definitivo foi estudado por diversos autores influentes na sociedade contemporânea, como por exemplo Nietzsche, Schopenhauer ou Espinoza. Numa perspectiva teológica, o que acontece no fim desta vida, chamada, por muitas religiões, vida após a morte, é a característica fundamental de cada religião e por vezes de seitas. Em particular, se pensarmos nos problemas do novo milénio que são considerados problemas revolucionários para a sociedade actual, se alguém conseguisse fundamentar o que acontece depois da morte, a sociedade global, fruto da mundialização, teria de dar razão aos Maias. Para além de tudo, todos nós já fantasiámos sobre o que seria uma vida sem a morte; como seria se não existissem um fim definitivo.

A morte é tão inspiradora como misteriosa, e talvez a segunda seja causa da primeira, mas pelo contrário a Ciência tenta ser tão analítica quanto possível. Assim, numa abordagem matemática à mortalidade devemos ser o tão precisos quanto possível. Para isso vamos ter de nos afastar de todas as questões ambíguas do assunto mais misterioso da nossa existência e aproximarmo-nos do que indubitavelmente sabemos. Todos podemos concordar que a morte é certa, que é inevitável o fim da nossa vida, e este poderá ser o primeiro pressuposto que podemos estabelecer em relação à mortalidade. No entanto, pegando nas palavras de Giuseppe Gioacchino Belli, "a morte está escondida nos relógios", logo podemos entender que este fenómeno é imprevisível. Assim temos: a morte acontece a todo ser humano em algum momento impossível de prever no futuro. Assim, podemos construir aquilo a que chamamos um modelo de mortalidade, onde estas duas características inerentes à morte são os pressupostos base do modelo. A estes dois pressupostos incontestáveis podemos juntar mais três claras hipóteses empíricas: os nados vivos têm inerente um maior risco de morte; quanto maior a idade de um indivíduo maior a propensão à morte e, finalmente, nas idades jovens existe uma maior propensão

a mortes derivadas de atitudes de risco.

Como sugerido pelas hipóteses supra explícitas, um modelo de mortalidade pode ser definido como um modelo matemático, assente na teoria das probabilidades, que tenta expressar a relação entre a morte e o tempo. Com base nas hipóteses empíricas, temos evidências para afirmar que a mortalidade depende da idade, e como tal, o tempo, que referimos em cima, está diretamente associado à idade dos indivíduos em estudo, pelo menos numa primeira instância. Então, a medida essencial utilizada por este modelo será a probabilidade que um indivíduo tem de morrer antes de atingir determinada idade. Claramente, qualquer modelo probabilístico de mortalidade terá de ser intrinsecamente contínuo, já que é característica essencial da nossa variável tempo. Um dos grandes objetivos de qualquer modelo, para além da precisão, é que seja facilmente interpretável. Assim, a forma mais comum de apresentar os resultados de determinado modelo de mortalidade são as chamadas tabelas de mortalidade. Nestas tabelas, a primeira coluna contém todas as idades possíveis e a segunda uma medida essencial do modelo, que neste caso seria a probabilidade que um indivíduo com essa idade tem de morrer antes do seu próximo aniversário. Note-se que, como estas tabelas usam conceitos sociais tão essenciais como o de aniversário, são efectivamente de fácil interpretação; a prova disso é a forma como qualquer leitor não familiarizado com este conceito facilmente percebe a informação que estas descrevem.

As tabelas de mortalidade são usualmente produzidas pelas entidades oficiais de cada país, ou região do país, com base nos próprios recenseamentos, separadamente por sexo. Através destas podem ser construídas tabelas de mortalidade para subpopulações específicas como por exemplo, fumadores, doentes oncológicos ou empregos de risco. Por exemplo, suponhamos que temos uma tabela de mortalidade dos fumadores. As seguradoras podem construir uma apólice para um seguro, de saúde ou de vida, eficiente para qualquer indivíduo desta subpopulação, que do ponto de vista matemático, usualmente passa simplesmente por acrescentar anos de vida aos indivíduos em causa. Por outro lado, se tivermos uma tabela de mortalidade de doentes oncológicos, uma farmacêutica pode correctamente estimar a quantidade de medicamentos procurados por estes que tem de produzir, assumindo uma certa probabilidade de desistência do tratamento<sup>1</sup>. Finalmente, dada uma tabela de mortalidade para indivíduos com determinado emprego de risco, uma seguradora pode determinar que tipo de seguro de vida deverá fazer para os indivíduos com esse tipo de emprego. As aplicações de tabelas de mortalidade são tão diversas e distintas quanto se possa imaginar. Um exemplo de uma aplicação peculiar é no cálculo da probabilidade que um casal tem de se divorciar depois de estar em terapia de casais, assumindo uma probabilidade de divorcio em função do tempo que já passaram em terapia. No entanto, as aplicações que estão inclusivamente na génese do seu desenvolvimento prendem-se com o cálculo de prémios de seguros de vida e com os fundos de pensão.

De acordo com Instituto Português de Seguros (IPS (2013)), "Um fundo de pensões é um património autónomo que se destina exclusivamente ao financiamento de um ou mais

---

<sup>1</sup>Note-se que os encargos com estes medicamentos costumam ser tão elevados, que produzir a quantidade certa, isto é, ajustar a produção à procura, permite diminuir os custos de produção.

planos de pensões e/ou planos de benefícios de saúde”, onde “um plano de pensões é um programa que define as condições para receber uma pensão derivada de reforma por velhice, reforma por invalidez, pré-reforma, reforma antecipada e sobrevivência”. Um caso particular, e magnânimo, de um fundo de pensões é a segurança social de qualquer país. Assim, as tabelas de mortalidade mostram-se essenciais à gestão nacional, dado o papel da segurança social na equidade social de cada região. Os leitores mais atentos devem estar sensibilizados para o problema generalizado que as seguranças sociais de todos os países desenvolvidos enfrentam, e em particular Portugal. De facto como anunciado pelo primeiro ministro na altura, José Sócrates de Sousa, aquando do Orçamento de Estado para 2011<sup>2</sup>, admitindo a evolução dos indicadores demográficos, em particular da mortalidade, existe um grande risco de ruptura da segurança social durante meados da década de 30, do presente milénio. Numa perspectiva científica, percebeu-se que o modelo utilizado para modelar a mortalidade era desadquado e desta forma a Gestão da Segurança Social subvalorizou a quantidade de beneficiários a quem terá de pagar pensões, o que levaria à sua ruptura. Urge, como defendido pelo bastonário da Ordem dos Economistas<sup>3</sup>, uma reforma à Segurança Social, de forma a tornar-se sustentável para as próximas gerações. No entanto, para poder aplicar uma reforma eficiente é necessário estimar a quantidade de pensionistas que existirão no futuro. E para tal, é necessário estimar o número de indivíduos que irá morrer depois da idade de reforma, isto é, é preciso construir um modelo de mortalidade adequado.

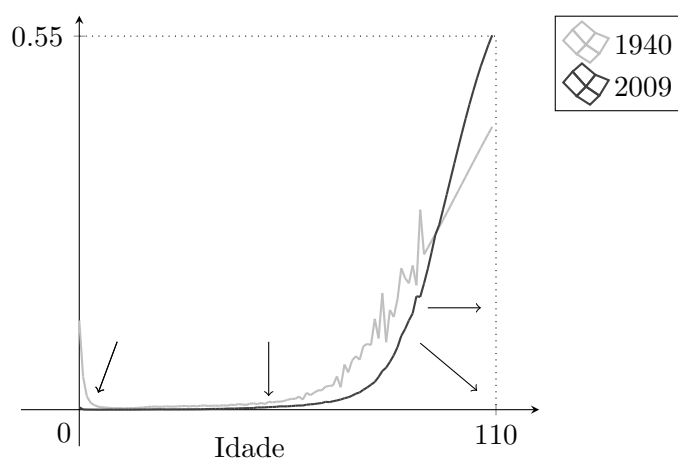
Iremos agora olhar para alguns fenómenos demográficos registados durante o século XX. Para analisar a evolução da mortalidade podemos construir um gráfico, como o da Figura 1.1<sup>4</sup>. As setas exemplificam os principais fenómenos demográficos que explicam a desadequação do modelo da mortalidade anteriormente construído. Lendo da esquerda para a direita, a primeira seta tenta evidenciar as profundas alterações que a mortalidade infantil registou durante o século XX. De facto, em 1940, a cinzento mais claro, vemos que a probabilidade de morte dos nados vivos era muito superior ao que se registava em 2009, a cinzento mais escuro. A segunda seta prende-se com o chamado fenómeno da compressão da mortalidade. A compressão da mortalidade definida por Verdiell em 2008 ocorre quando existe uma menor variabilidade da idade de morte. Como vemos que a curva referente a 1940 se “levanta” mais depressa do eixo, a probabilidade de morte para idades mais avançadas é maior, logo é expectável que exista uma maior variabilidade da idade de morte. Finalmente, as restantes duas setas, representam o chamado fenómeno da rectangularização. Este fenómeno traduz-se na tendência de que, com o passar dos anos, a chamada curva da sobrevivência ter cada vez um forma mais rectangular. Este fenómeno é concordante com os dois fenómenos descritos anteriormente. Note-se que a diferença entre as probabilidades expressas no gráfico da esquerda com as do gráfico da direita é que são probabilidades de acontecimentos complementares, para cada idade  $x$ . Existem ainda outros fenómenos demográficos, veja-se por exemplo Verdiell (2008), no

<sup>2</sup>Dec-Lei n.º 55-A/2010 de 31 de Dezembro, Diário da República n.º 253- 1.ª série. Assembleia da República, Lisboa.

<sup>3</sup>Fonte: Sol, 1 de Julho de 2013.

<sup>4</sup>É muitas vezes considerada a análise destes gráficos em escala logarítmica.

Figura 1.1: Alterações do Padrão da Mortalidade, em Portugal



Probabilidade de um indivíduo com determinada idade morrer antes de atingir o seu próximo aniversário. Fonte: Human Mortality Database (HMD).

entanto, a maioria dos autores não os considera nesta nova abordagem à mortalidade, visto a sua menor significância na alteração do padrão da mortalidade.

Teremos então de construir um modelo da mortalidade que explique e acompanhe estes três fenómenos citados. Claro que devemos partir do modelo anteriormente tido em conta e tentar modificá-lo de forma a conseguir atingir este objetivo. No entanto, para resolver o problema da segurança social, uma tabela de mortalidade assente num modelo que o atinja não é suficiente para estimar o número de beneficiários futuros: teremos de entrar no problema estatístico classicamente chamado de predição. Para isso terão de ser construídos modelos de previsão da mortalidade, que estimem a mortalidade futura. Para projetar a mortalidade teremos sempre de usar como ferramenta básica uma tabela de mortalidade dinâmica. Este tipo de tabelas são tabelas bi-dimensionais onde a medida de mortalidade depende não só da idade do indivíduo mas também do ano civil respetivo em que ele tem essa idade. É com a introdução desta nova variável temporal que se tenta explicar os três fenómenos registados na figura 1.1.

O objetivo deste trabalho é apresentar claramente todos os conceitos relacionados com os modelos de mortalidade e evidenciar as alterações contemporâneas que estes sofreram, tendo em conta a progressiva alteração do padrão de mortalidade. Por mais complexo que o trabalho se torne, devemos ter sempre em mente as palavras de Pedro Seixas Vale, presidente da Associação Portuguesa de Seguros (APS), "as tabelas de mortalidade são uma ferramenta fundamental para estimar o valor actual de responsabilidades futuras"<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Editorial do Boletim Trimestral da APS, n.º 25

## Capítulo 2

# Tabelas Estáticas

### 2.1 Introdução

Durante o Império Romano começaram a ser desenvolvidas técnicas demográficas e atuariais, iniciadas com a publicação da Tabela de Ulpiano (Frier (1982))<sup>1</sup>. No entanto, a primeira tabela de mortalidade é atribuída, na literatura atuarial, ao comerciante londrino John Graunt, publicada no livro "Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality" de 1662, devido à maior estrutura científica, desenvolvida no século XV, que o suporta. Existem autores que estabelecem o início da ciência atuarial na junção de taxas de juro com tabelas de mortalidade. Esta primeira tabela de mortalidade foi baseada em dados de mortalidade ordenados por causa de morte e não por sexo ou idade, já que, com a Grande Praga de Londres (1665-1666), era importante perceber quantos óbitos esta tinha causado. Quando Graunt escreveu o seu livro, tinha sido recentemente publicado o primeiro texto sobre probabilidades, por Huygens em 1657, e não existiam evidências de que tivesse alguma utilidade neste âmbito. Durante os anos seguintes muitos autores tentaram fazer deduções probabilísticas sobre a morte através desta primeira tabela de mortalidade; realçamos os trabalhos de Witt e do seu amigo William Petty<sup>2</sup>. Tamanho foi o impacto deste trabalho que, três séculos depois, diversos autores ainda tentaram descobrir qual o modelo aritmético utilizado por Graunt na construção da sua tabela de mortalidade. No entanto, como Seal (1980) escreve: "The first life table was brilliant 'guesstimate' by John Graunt". Sutherland (1963) afirmou: "Graunt had estimated...that of 100 children born alive, 36 would die before they were six years old, and it would naturally occur to him to wonder when the remaining 64 would die. He had no information on ages at death from which to estimate this and so...he distributed the 64 death into a diminishing series". Esta foi uma tabela de mortalidade revolucionária para a época, no entanto sem nenhuma influência probabilística, não organizada por idades e com muita pouca fiabilidade.

Foi preciso esperar 31 anos por uma tabela que mostrava a probabilidade que uma

---

<sup>1</sup>Os Romanos são também conhecidos por serem pioneiros no recensearem da sua população.

<sup>2</sup>Existem alguns autores que ainda cogitam se seria William Petty, um dos fundadores da 'Royal Society', o verdadeiro autor do livro; para um discussão deste assunto pode referir-se Willcox (1938).

Figura 2.1: Tabela de Mortalidade de Graunt

“of 100 [‘quick conceptions’]	
there dies within the first six years	36
The next ten years, or <i>Decad</i>	24
The second <i>Decad</i>	15
The third <i>Decad</i>	9
The fourth	6
The next	4
The next	3
The next	2
The next	1”
['perhaps but one surviveth 76”]	

pessoa de qualquer idade tem de não morrer até ao seu próximo aniversário; publicada por Edmond Halley, em 1693, no artigo “An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw, with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives”. Esta já era uma tabela que tinha como base um modelo matemático, com muita influência das Probabilidades, cujos dados foram ordenados por idades e, brilhantemente, com a mesma forma de uma tabela de mortalidade atual<sup>3</sup>. Os dados utilizados eram referentes a um período de cinco anos, de 1687 a 1691, da cidade de Breslau e foram reunidos por Caspar Neumann. Halley notou que os dados evidenciavam que esta cidade tinha uma população quase estacionária, isto é, o número de nascimentos nesta cidade era mais ou menos igual ao número de mortes, durante os cinco anos de observação. Assim, para simplificar a análise assumiu exatamente uma população estacionária: o número anual de nascimentos, denominada por  $P_0$ , a população total com idade  $k$ ,  $P_k$ , e o número de mortes anual à idade  $k$ ,  $D_k$  eram constantes à medida que o tempo passava. A média dos nascimentos por ano era de 1.238, logo este foi o valor que  $P_0$  tomou. Da mesma forma foi possível calcular a média de mortes por ano, para cada idade  $k \geq 0$ . Assim, usando a fórmula recursiva

$$P_{k+1} = P_k - D_k \tag{2.1}$$

Halley construiu a sua tabela de mortalidade. Através de um estudo desta tabela podemos concluir que Halley rearranjou os valores de  $D_k$ . Podemos inferir que tal teve como objetivo atenuar certas irregularidades que aconteciam devido ao pequeno número de mortes a idades avançadas. Fazendo a soma dos  $P_k$ , temos que Halley estimou que o número total da população de Breslau era perto de 34.000. A maior vantagem deste método era

<sup>3</sup>Um leitor interessado na evolução histórica das tabelas de mortalidade poderá comparar as tabelas de mortalidade propostas por Graunt e Halley com a tabela de mortalidade da população portuguesa para os anos de 2010 a 2012, que se encontra no final do trabalho.

que não obrigava a uns census gerais e que era apenas preciso saber o número médio de nascimentos, o número médio de mortes e a idade com que as pessoas morriam. A teoria das probabilidades foi incorporada neste modelo considerando  $P_{k+1}/P_k$  a probabilidade de um indivíduo com idade  $k$  sobreviver até à idade  $k + 1$ . A tabela de Haley influenciou muitos trabalhos do século seguinte e o seu trabalho pode ser considerado um primeiro esboço das tabelas de mortalidade hoje construídas.

Figura 2.2: Tabela de Mortalidade de Halley

Age	Number	Age	Number	Age	Number
1	1000	29	539	57	272
2	855	30	531	58	262
3	798	31	523	59	252
4	760	32	515	60	242
5	732	33	507	61	232
6	710	34	499	62	222
7	692	35	490	63	212
8	680	36	481	64	202
9	670	37	472	65	192
10	661	38	463	66	182
11	653	39	454	67	172
12	646	40	445	68	162
13	640	41	436	69	152
14	634	42	427	70	142
15	628	43	417	71	131
16	622	44	407	72	120
17	616	45	397	73	109
18	610	46	387	74	98
19	604	47	377	75	88
20	598	48	367	76	78
21	592	49	357	77	68
22	586	50	346	78	58
23	579	51	335	79	50
24	573	52	324	80	41
25	567	53	313	81	34
26	560	54	302	82	28
27	553	55	292	83	23
28	546	56	282	84	20

Em 1815, Joshua Milne, atuário da Sun Life, apresentou uma tabela de mortalidade que revolucionou as técnicas estatísticas e demográficas. Os dados utilizados reportavam-se à cidade de Carlisle e tiveram como base os dados de óbitos e os census de 1780. Desde então, diversas tabelas de mortalidade foram publicadas em todo o mundo, sobre estas influências. Já desde que Johan De Witt foi 'Grand Pensionary' que era realçada a necessidade de construir tabelas que traduzissem os dados de mortalidade de uma certa região. No entanto, foi com a grande dívida nacional britânica que começaram a ser

desenvolvidos métodos cada vez mais eficientes para descrever a mortalidade, pois a grande ferramenta para combater este problema foi a emissão de anuidades a pagar por toda a população. Desta forma, grande parte dos avanços científicos nesta área devem-se a investigadores britânicos e diversas tabelas de mortalidade foram calculadas para esta região. A primeira English Life Table, abreviadamente ELT, que naturalmente é a tabela de mortalidade para a população de Inglaterra e do País de Gales foi construída por William Farr, que viria mais tarde a ser presidente da Royal Statistical Society, em 1843. A partir daí todas as décadas foi construída uma ELT<sup>4</sup>, a tabela oficial utilizada pelos organismos de gestão nacional.

Entretanto ainda não estabelecemos um conceito de tabela de mortalidade; ora, segundo o Instituto Nacional de Estatística (INE), é um modelo estatístico que mostra "uma descrição sintética dos aspetos mais importantes da mortalidade e a variação da morte perante a idade"(INE (2004))<sup>5</sup>. O nosso objeto de estudo é, então, a mortalidade de uma população, ou, de outra perspectiva, a sobrevivência. Fazendo uma abordagem probabilística, assumimos que o tempo de vida futuro de indivíduo é uma variável aleatória, e assim construímos um modelo probabilístico que será a base da nossa tabela de mortalidade.

Este capítulo estará dividido em seis seções, sendo a primeira esta introdução. Iremos seguir a abordagem de Forfar (2004a) para evidenciar o carácter estacionário deste modelo. Não podemos, no entanto, deixar de referir a constante consulta de Bowers et al. (1986), INE (2004), com o objetivo de uniformizar a terminologia actuarial utilizada na língua portuguesa, Pitacco et al. (2009) e Forfar (2004b). Assim, na segunda seção iremos definir o modelo probabilístico da mortalidade, supra introduzido. A seção 3 tem como principal objetivo explicar o conceito de tabela de mortalidade e definir todas as funções que podem ser deduzidas e acrescentadas a esta. A seção 4 é uma descrição sumária de modelos que tentem descrever a força de mortalidade, para cada idade (que será definida já na seção 2). A seção 5 fala sobre a influência da heterogeneidade de uma população na sua modelação. Finalmente a seção 6 será a conclusão deste capítulo e tem como principal objetivo evidenciar as fragilidades do modelo descrito ao longo do capítulo.

## 2.2 O modelo estático e estatístico do tempo de vida futuro

Seja  $\mathbf{T}_0$  a variável aleatória que representa a duração de vida de um indivíduo com 0 anos.  $\mathbf{T}_0$  é uma variável aleatória contínua, com função distribuição(daqui em diante f.d.),  $F_0$  e função densidade de probabilidade (daqui em diante f.d.p)  $f_0$ . A probabilidade do indivíduo morrer antes de atingir a idade  $t$  é denotada por  ${}_tq_0$ ; por definição  ${}_tq_0 = F_0(t) = P[\mathbf{T}_0 \leq t]$ . A probabilidade do indivíduo atingir a idade  $t$  é denotada por  ${}_tp_0$ ; por definição  ${}_tp_0 = S_0(t) = 1 - F_0(t)$ , onde  $S_0(t)$  é denominada função sobrevivência.

---

<sup>4</sup>Sendo a ELT n° 16 referente aos anos de 2000-2002.

<sup>5</sup>De notar que segundo este conceito a tabela publica por Graunt não deveria ser considerada uma tabela de mortalidade; por este motivo, as tabelas anteriores à de Halley costumam ser apelidadas, na literatura actuarial, de tabelas cruas de mortalidade.

A variável aleatória  $\mathbf{T}_x$ , que representativa da duração de vida de um indivíduo que já tenha atingido a idade  $x$ , terá as mesmas propriedades que a anterior e definimos  $F_x(t)$  e  $f_x(t)$ , as f.d e f.d.p., respectivamente, da seguinte forma:

$$F_x(t) = P[\mathbf{T}_x \leq t] = P[\mathbf{T}_0 \leq x + t | \mathbf{T}_0 > x] = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \quad e \quad (2.2)$$

$$f_x(t) = F'_x(t) = \frac{f_0(x+t)}{1 - F_0(x)}. \quad (2.3)$$

Desta forma, temos que a família das distribuições de  $F_x(t)$ , para todas as idades, é consistente, ou seja, à medida que vamos recebendo informação, a probabilidade da distribuição de  $\mathbf{T}_x$  representar a duração de vida de um indivíduo com  $x$  anos vai ser cada vez maior. Assim, podemos definir:

- ${}_tq_x = F_x(t)$ , o quociente de mortalidade, isto é, a probabilidade de um indivíduo com a idade  $x$  morrer antes de atingir a idade  $x + t$ ;
- ${}_tp_x = S_x(t) = 1 - F_x(t)$ , a probabilidade de sobrevivência, isto é, a probabilidade que um indivíduo com a idade  $x$  tem de sobreviver até à idade  $x + t$ ,
- ${}_{t|u}q_x = P[t < T_x \leq t + u] = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = {}_tp_{x+t+u}q_x$ , a probabilidade que um indivíduo com  $x$  anos tem de morrer entre as idades  $x+t$  e  $x+t+u$ .

Por convenção quando o intervalo de tempo é de um ano,  $t = 1$ , esse índice é omitido. Introduzimos agora a taxa de mortalidade instantânea ou força de mortalidade, à idade  $x$ , denotada por  $\mu_x$ ,

$$\mu_x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P[\mathbf{T}_x \leq t]}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{{}_tq_x}{t}. \quad (2.4)$$

Podemos interpretar  $\mu_x$  como uma medida do risco de um indivíduo com  $x$  anos falecer com essa idade. Para simplificar a expressão anterior, atendendo a (2.2) temos:

$$\mu_x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{tS_0(x)} = \frac{f_0(x)}{S_0(x)}. \quad (2.5)$$

Podemos escrever (2.2) como função de  $\mu_x$ :  $f_x(t) = {}_tp_x\mu_{x+t}$ , o que nos leva à seguinte igualdade:

$${}_tq_x = \int_0^t f(s)ds = \int_0^t {}_sp_x\mu_{x+s}ds. \quad (2.6)$$

O que é equivalente a  $1 - {}_tp_x = \int_0^t {}_sp_x\mu_{x+s}ds$ . Derivando temos:

$$\frac{d}{dt} {}_tp_x = -{}_tp_x\mu_{x+t}, \quad (2.7)$$

que é uma equação diferencial. Usando a condição de fronteira óbvia,  ${}_0p_x = 1$ , obtemos a solução:

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}ds\right). \quad (2.8)$$

Imediatamente deduzimos que

$${}_{s+t}p_x = {}_s p_x {}_t p_{x+s} = {}_t p_x {}_s p_{x+t}. \quad (2.9)$$

A expressão anterior denomina-se regra da multiplicidade para as probabilidades de sobrevivência.

Associado ainda à nossa variável aleatória de estudo,  $\mathbf{T}_x$ , podemos tentar calcular o seu valor médio,

$$E[\mathbf{T}_x] = \int_0^\infty {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt. \quad (2.10)$$

Este valor é chamado a esperança de vida, ou seja, o número esperado de anos de vida dos indivíduos que atingiram a idade  $x$ , e é denotado por  $e_x$ .<sup>6</sup>

## 2.3 A forma de representar o modelo

### 2.3.1 Definição de Tabela de Mortalidade

Uma Tabela de Mortalidade não é mais do que forma conveniente, prática e de fácil interpretação de representar o modelo supra descrito. Supomos um conjunto de pessoas, que se sabe que estão vivas a uma determinada idade  $\alpha$  e denotamos por  $l_\alpha$  o número de elementos desse conjunto. Para facilitar a leitura iremos considerar  $\alpha = 0$ . Assim, definimos  $l_x$ , para  $x \geq 0$ , como o número esperado de sobreviventes, do nosso grupo inicial de indivíduos com 0 anos,  $l_0$ , que fazem o  $x$ -ésimo aniversário.

Assim, chegamos à definição de tabela de mortalidade: sequência finita decrescente  $l_0, l_1, l_2, \dots, l_w$ , onde  $w$  é a idade de fecho da tabela definida à priori, isto é,  $w$  é tal que  $\forall x \geq w : l_x = 0$ . Por outras palavras, uma tabela de mortalidade é uma tabulação da função  $l_x$ , para  $x = 0, 1, 2, \dots, w$ . Interpretando o conceito de  $l_x$  temos que, para  $x = 0, 1, \dots, w - 1$ :

$$l_{x+1} = l_x p_x. \quad (2.11)$$

Ou, de outra forma,  $l_x = l_0 {}_x p_0$ . Usando a regra da multiplicidade para as probabilidades de sobrevivência chegamos a uma expressão para  ${}_t p_x : \frac{l_{x+t}}{l_x}$ . Assim, sabendo apenas os valores da função, unidimensional,  $l_x$  podemos determinar os valores de  ${}_t p_x$ , e naturalmente de  ${}_t q_x$ , que são funções bidimensionais.

### 2.3.2 Outras funções das Tabelas de Mortalidade

Existem outras funções que podem ser escritas em função apenas de  $l_x$  e, por diversos motivos, podem ser acrescentadas às tabelas de mortalidade:

- $d_x = l_x - l_{x+1}$  é o número de indivíduos que morrem com idade  $x$ ;

---

<sup>6</sup>Por vezes é útil considerar uma variável aleatória discreta que descreva a quantidade de anos de vida que um indivíduo com  $x$  ainda vai viver. Esta variável aleatória é denotada por  $K_x$ , tem suporte nos valores de  $\mathbf{N}_0$ ,  $P[K_x = k] = {}_k p_x q_{x+k}$  e o seu valor esperado, denotado por  $e_x$ , é dado por:  $\sum_{k=0}^{\infty} k p_x$ .

- ${}_{n|m}q_x$  é a probabilidade de uma pessoa com a idade  $x$  morrer entre as idades  $x + n$  e  $x + n + m$ ; pela regra multiplicativa das funções de sobrevivência:  ${}_{n|m}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x}$ ;
- $T_x$  (não confundir com a variável aleatória com o mesmo nome) é o número total de anos de vida que são esperados que se viva depois de uma certa idade  $x$ , considerando o grupo  $l_0$ . A sua expressão é:  $T_x = l_x \overset{\circ}{e}_x = l_x \int_0^\infty {}_t p_x dt = \int_0^\infty l_{x+t} dt$ ;
- $L_x = T_x - T_{x+1} = \int_0^1 l_{x+t} dt$ , é o número total esperado de anos vividos entre  $x$  e  $x + 1$ , pelas pessoas do grupo inicial  $l_0$ ;
- $m_x = \frac{d_x}{L_x}$  é a taxa específica de mortalidade ou taxa central de mortalidade (por vezes abreviada para taxa de mortalidade), e sumariza o comportamento da força de mortalidade no intervalo  $(x, x + 1)$ ;
- $\phi_x = \frac{q_x}{p_x}$ , as chamadas hipóteses de mortalidade na idade  $x$ .

### 2.3.3 Funções das Tabelas de Mortalidade para idades não-inteiras

Em demografia e na prática atuarial é recorrente ter de se calcular a probabilidade de morte (ou sobrevivência) para idades ou intervalos de tempo não inteiros. Ora, vimos no início desta seção, que uma tabela de mortalidade é uma sucessão finita, ou seja, é um modelo probabilístico discreto, apesar de a variável aleatória  $\mathbf{T}_x$  ser absolutamente contínua. Ao construir uma tabela de mortalidade não reunimos qualquer informação sobre a distribuição dos óbitos durante cada ano, simplesmente o total dos óbitos desse ano. Isto obriga-nos a recorrer a uma premissa adicional de modo a prolongar o nosso modelo probabilístico discreto a todas as idades fracionárias. As três hipóteses mais utilizadas para lidar com este problema são:

**Distribuição uniforme das mortes** Primeiro façamos  $S_0(x) = \frac{l_x}{l_0}$ , para qualquer inteiro  $x$  representado pela tabela; Depois, para  $x = 0, 1, \dots, w - 1$  e  $0 < t < 1$  definimos  $S_0(x + t) = (1 - t)S_0(x) + tS_0(x + 1)$ ; e assumimos  $S(x) = 0, \forall x > w$ . Desta forma a função sobrevivência é uma função linear. É imediato que assim,  ${}_t q_x = tq_x$ , ou seja, temos uma distribuição uniforme das mortes entre as idade  $x$  e  $x + 1$  (ao que queríamos chegar). É também trivial estabelecer a seguinte relação:

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - tq_x}, \quad (2.12)$$

e desta forma  $\mu_{x+t}$  mostra-se crescente no intervalo  $0 < t < 1$ , como é natural.

**Força da Mortalidade Constante** Assumimos, para  $0 < t < 1$  que

$$\mu_{x+t} = \mu(x), \quad (2.13)$$

onde  $\mu(x)$  é um valor estimado da mortalidade observada. Segue, em particular, que  ${}_t p_x = e^{-t\mu(x)}$  e que  $m_x = \mu(x)$ .

**Hipótese de Balducci** Neste caso, assumimos que, para  $0 < t < 1$ ,  ${}_tq_x = \frac{tq_x}{1-(1-t)q_x}$ .

Esta hipótese tem uma grande importância do ponto de vista histórico, tendo sido usada na construção de muitos cálculos atuariais. No entanto é fácil provar que

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - (1-t)q_x}, \quad (2.14)$$

ou seja, que esta função é decrescente em  $t$ , o que para muitas idades é uma consequência inconveniente desta hipótese.

## 2.4 Leis de Mortalidade

Desde a primeira construção de uma tabela de mortalidade que os atuários e os demógrafos pensam numa forma de descrever a mortalidade através de uma 'formulae'. A importância de conseguir fazê-lo prende-se com o facto de ser possível escrever cada variável do modelo probabilístico da mortalidade através da força de mortalidade. Ora vejamos,

$$F_0(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu_s ds}, \quad (2.15)$$

$$f_x(x) = {}_t p_x \mu_{x+t}, \quad (2.16)$$

$${}_n p_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+s} ds}, \quad (2.17)$$

$$S_0(x) = e^{-\int_0^x \mu_s ds}, \quad (2.18)$$

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu_y dy}. \quad (2.19)$$

Ao longo da história foram desenvolvidas diferentes leis para descrever este fenómeno, tendo sido em 1725 que a primeira lei foi proposta. Iremos descrever sumariamente as leis da mortalidade, mais importantes, e as suas características por uma ordem cronológica. Tudo começou em 1725 com a lei de De Moivre, uma lei de apenas um parâmetro  $\mu_x = 1/w - x \Leftrightarrow {}_x p_0 = 1 - \frac{x}{w}$ ; note-se que para De Moivre, a idade de fecho da tabela (idade mais avançada considerada na tabela) era 86. Babbage, em 1823, usou uma fórmula de dois parâmetros e assumiu que  ${}_x p_0$  era quadrática (em vez de linear, como De Moivre):  ${}_x p_0 = 1 - bx - ax^2$ . Em 1825 foi desenvolvida uma lei com dois parâmetros que contemplava a força da mortalidade com um aumento baseado numa progressão geométrica ao longo do tempo, a chamada primeira lei de Gompertz:

$$\mu_x = e^{\alpha_1 + \alpha_2 x} \Leftrightarrow {}_x p_0 = \exp(-k(c^x - 1)). \quad (2.20)$$

Esta simples lei melhorou significativamente a aderência do modelo a diferentes populações e muitos modelos mais recentes têm como base esta lei de Gompertz. Nos anos subsequentes foram propostos ainda diversos modelos baseados em progressões aritméticas: Young (1826) usou uma expressão complexa que envolvia  $x^{40}$ ; Littrow (1832) estendeu o conceito de Babbage; Moser (1839) propôs uma fórmula de 5 parâmetros:  ${}_x p_0 = 1 - ax^{1/4} + bx^{9/4} - cx^{17/4} - dx^{25/4} + ex^{33/4}$ .

Podemos entender o padrão da mortalidade como sendo dividido em três períodos: a

mortalidade infantil, a mortalidade na vida adulta (que normalmente é devida a acidentes) e a mortalidade para idades mais avançadas. Gompertz propôs a primeira lei que tentou representar a mortalidade durante todo o ciclo da vida, algo que percebeu que faltava na sua primeira lei. Assim a segunda lei de Gompertz, proposta em 1860, foi uma fórmula de dez parâmetros:  $\ln(l_x) = -bc^x + gh^x - xdf^x - jk^{m^x(x-n)}$ ; e a terceira lei de Gompertz foi apenas uma modificação desta, publicada dois anos depois. Apesar de estas leis serem muito avançadas para a época, eram de igual forma demasiado complexas para serem usadas na prática. No mesmo sentido Makeham propôs a sua primeira lei em 1867:

$$\mu_x = A + Bc^x \Leftrightarrow {}_x p_0 = \exp(-k(bx + c^x - 1)). \quad (2.21)$$

Esta lei pode ser reduzida a uma extensão da primeira lei de Gompertz no sentido de abranger mortes não senescentes. Oppermann abordou o problema da mortalidade infantil, propondo uma fórmula apenas para estas idades,  $x \leq 20$ ,  $\mu_x = ax^{-\frac{1}{2}} + b + cx^{\frac{1}{3}}$  (1870). Thiele, no mesmo caminho de Gompertz, propôs, em 1871, uma fórmula com 7 parâmetros, que cobria todo o ciclo da vida:

$$\mu_x = Ae^{-Bx} + Ce^{-D(x-E)^2} + FG^x. \quad (2.22)$$

Cada termo desta fórmula representa um diferente tipo de mortalidade, como foi atrás descrito. Assim, o primeiro termo representa a mortalidade infantil, o segundo a mortalidade ao longo da vida adulta e o terceiro é a primeira lei de Gompertz que representa a morte senescente. Entretanto Makeham continuava no mesmo sentido propondo, em 1890, uma lei com apenas 4 parâmetros:  $\mu_x = \alpha_1 + \alpha_2 x + e_3^\alpha + \alpha_4 x \Leftrightarrow {}_x p_0 = \exp(-k(bx + dx^2 + c^x - 1))$ .

Quarenta anos depois aparece a curva logística:

$$\mu_x = \frac{A + Bc^x}{1 + Dc^x}; \quad (2.23)$$

proposta por Perks em 1932. O efeito do denominador é de atenuar o crescimento da mortalidade para idades avançadas,  $x \geq 80$ , algo consensual nos modelos hoje em dia propostos. Analisando esta expressão, vemos que consiste na (primeira) fórmula de Makeham com o atenuador para idades avançadas.

Muitas vezes é feita, seguindo o espírito contemporâneo da multidisciplinaridade, uma ponte entre o estudo da mortalidade e a chamada teoria da fiabilidade<sup>7</sup>. Weibull, que se debruçou sobre essa teoria, desenvolveu uma lei com apenas dois parâmetros:  $\mu_x = Ax^B$  (Weibull (1951)). Assim, apareceu o conceito de mortalidade por causa de morte, proposta por Makeham ainda durante século XIX. O conceito é simples: assumimos que existem  $r$  causas de morte, calculamos a força da mortalidade de cada uma destas causas e, naturalmente, a força da mortalidade total será igual à soma destas forças de mortalidade ditas parciais. A ideia de Makeham era que se pegasse na sua primeira lei

<sup>7</sup>Na teoria da fiabilidade estuda-se a variável aleatória que representa o tempo de vida de um sistema mais ou menos complexo.

e fossem feitas as seguintes transformações:  $A = \sum_{k=1}^m A_k$  e  $B = \sum_{k=m+1}^{m+n} B_k$ . Desta forma temos que:

$$\mu_x = \sum_{k=1}^m A_k + c^x \sum_{k=m+1}^{m+n} B_k = \sum_{k=1}^{m+n} \mu_x^{(k)}, \quad (2.24)$$

onde  $\mu_x^{(k)}$  representa a força de mortalidade da  $k$ -ésima causa de morte.

Na segunda metade do século XX a ciência computacional desenvolveu-se a um ritmo alucinante e junto desenvolveu-se a análise numérica. Começou-se a estimar os parâmetros destas leis através de métodos computacionais, usando aproximações por métodos como os splines ou o modelo de Whittaker-Henderson. As Tabelas de Mortalidade Britânicas, English Life Tables, foram calculadas utilizando estes modelos. Nesta altura foram propostas diversas fórmulas para retratar a mortalidade cujos parâmetros seriam depois aproximados por estes métodos computacionais. Em 1980 apareceram as quatro leis de Heligman-Pollard (Heligman & Pollard (1980)) que, da mesma forma que Thiele, cobrem todo o ciclo de vida. Da mesma forma que Thiele (1871), cada um dos três termos refere-se aos três períodos em que podemos dividir uma vida humana. As duas primeiras leis (que iram ser legendadas por HP1 e HP2, respectivamente) têm oito parâmetros e a terceira (HP3) e quarta (HP4) são generalizações da primeira e segunda, respectivamente. Note-se que HP3 foi utilizada no cálculo das ELT15.

$$\phi_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x (HP1); \quad (2.25)$$

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + GH^x} (HP2); \quad (2.26)$$

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + KGH^x} (HP3); \quad (2.27)$$

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^{x^k}}{1 + GH^{x^k}} (HP4); \quad (2.28)$$

Depois temos a chamada 'GM class of models', onde G vem de Gompertz e M de Makeham. Forfar, McCutcheon e Wilkie propuseram, inspirados na abordagem de 1976 proposta por Wilkie, uma família geral na qual pudessem ser incorporados tantos parâmetros quantos os que fossem considerados relevantes. Foi proposto em Forfar et al. (1988) e o seu nome deve-se ao facto desta lei incorporar a primeira lei de Gompertz e a primeira e segunda leis de Makeham:

$$\mu_x = GM^{r,s}(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i x^{i-1} + e^{\left( \sum_{i=r+1}^{r+s} \alpha_i x^{i-r-1} \right)}. \quad (2.29)$$

Note-se que  $GM^{0,2}$  é a lei de Gompertz,  $GM^{1,2}$  a primeira lei de Makeham e  $GM^{2,2}$  a segunda lei de Makeham. Os modelos utilizados, para aproximar  $\mu_x$ , pelo Continuous Mortality Investigation Bureau (CMIB), uma organização de pesquisas atuariais, das mais conceituadas mundialmente, do Reino Unido, são modelos da classe  $GM^{r,s}$ .

### 2.4.1 Mortalidade em idades muito avançadas

Nos últimos anos começou a haver uma maior preocupação com a estimação da mortalidade em idades avançadas devido, por um lado, à crescente concentração dos óbitos nestas idades e, por outro, à importância do comportamento da mortalidade nas idades elevadas para a variação da esperança média de vida. Os continuados aumentos da esperança de vida levam a que cada vez mais pessoas vivam até idades avançadas e que os óbitos registados nestas idades representem uma proporção cada vez maior do total de óbitos. A maioria dos autores, define idades avançadas como idades superiores a 84 anos.

Só no final do século passado, com a grande melhoria da informação estatística, é que se começou a analisar os valores da mortalidade avançada. Note-se que até então, a demografia estava mais interessada em estudar a mortalidade infantil e a mortalidade na vida ativa. Esta análise permitiu identificar um comportamento, inesperado para muitos autores: existe uma desaceleração da taxa de crescimento da mortalidade a partir de uma certa idade. em particular, a curva da taxa de mortalidade apresenta, em escala logarítmica, uma forma côncava nas idades avançadas. Este fenómeno veio contrariar os pressupostos das leis clássicas de mortalidade, o que levou ao desenvolvimento de todo um conjunto de modelos que tentam explicar, de forma adequada, a mortalidade em idades avançadas. Os modelos<sup>8</sup> desenvolvidos com maior impacto nesta matéria foram: o modelo Heligman-Pollard (1980), o modelo Logístico<sup>9</sup>, o modelo Kannisto(1992) e o modelo de Thatcher (1999), o modelo de Lindbergson (2001).

A curva logística foi a ferramenta chave no desenvolvimento destes modelos, como se pode ver no que se segue. Se observarmos o comportamento das leis de Heligman-Pollard, para  $x > 84$ , vemos que:  $q_x \approx \frac{GH^x}{1+GH^x}$ , que é similar ao comportamento da curva logística proposta por Perks:

$$\mu_x = \frac{A + Bc^x}{1 + Dc^x}. \quad (2.30)$$

Existem diversos modelos que podem ser reduzidos a variações do modelo logístico (Doray (2008)):

- Fazendo  $A = 0$ , Beard 1963 obteve um modelo de três parâmetros, apresentado em 1963,

$$\mu_x = \frac{Bc^x}{1 + Dc^x}; \quad (2.31)$$

- Fazendo  $A = 0$  e  $D = B$ , obtemos o modelo, de duas variáveis, proposto por Kannisto em 1992

$$\mu_x = \frac{Bc^x}{1 + Bc^x}; \quad (2.32)$$

- Fazendo  $A = 0$  e  $D = 0$  obtemos a primeira lei de Gompertz;

---

<sup>8</sup>Apenas incluímos modelos baseados em leis de mortalidade; modelos não paramétricos serão desenvolvidos no capítulo seguinte, acompanhando o desenvolvimento da ciência.

<sup>9</sup>O modelo proposto por Perks em 1932, supra referido.

- Fazendo  $D = 0$  obtemos a primeira lei de Makeham;
- Thatcher (1999), admitindo influências das variantes do modelo logístico, supra referidas, e do modelo de Weibull, propôs a seguinte versão do modelo logístico:

$$\mu_x = \frac{Bc^x}{1 + Bc^x} + \gamma. \quad (2.33)$$

Finalmente, Lindbergson (2001) propôs que se acrescentasse à lei de Makeham um ramo, para valores de  $x$  superiores a um certo patamar, que substituíria o crescimento exponencial nessas idades por um crescimento linear:

$$\mu_x = \begin{cases} a + bc^x, & \text{se } x \leq w \\ a + bc^w + d(x - w), & \text{se } x > w. \end{cases} \quad (2.34)$$

## 2.5 Heterogeneidade nos Modelos de Mortalidade

Todos diferentes, todos iguais. Foi um lema muito utilizado na luta contra o racismo, mas a verdade é que hoje em dia é uma realidade aceite por todos. Na ciência atuarial, interpretamos este lema ao contrário: Todos iguais, mas todos diferentes. Quando consideramos um conjunto inicial  $l_0$  de indivíduos com 0 anos, consideramos que todos os indivíduos partem de uma base comum, são seres humanos com 0 anos. No entanto, um poderá ter nascido com uma doença congênita, outro poderá vir a desenvolver cancro e outro poderá nunca ficar doente. O que queremos realçar é que cada indivíduo tem fatores de heterogeneidade próprios, isto é, fatores que o distinguem do resto da população. Para que o nosso modelo da mortalidade contemple a heterogeneidade de cada população deve-se detetar os fatores de heterogeneidade que sejam observáveis e assumir a influência de fatores de heterogeneidade que não sejam observáveis.

### 2.5.1 Fatores observáveis

Podemos dividir os fatores de heterogeneidade observáveis em cinco categorias (Pittacco et al. (2009)):

1. Fatores biológicos e fisiológicos, como idade, género e genótipo;
2. Características do meio envolvente, como poluição, o clima, densidade populacional, padrões nutricionais, condições higiénicas e sanitárias e padrões culturais;
3. Ocupação profissional, em particular o risco que esta acarreta, e nível de escolaridade;
4. Estilo de vida individual, como o consumo de drogas, álcool ou tabaco, atividade física, tempos livres e nutrição;
5. Condições de saúde, pessoais e história clínica, estado civil e outras relacionadas.

O item 2 afeta a mortalidade geral de uma população e é a principal causa de as tabelas de mortalidade estarem restringidas a uma determinada área geográfica. Por exemplo, Portugal é o maior consumidor de bacalhau seco no mundo, consumindo cerca de 60 000 toneladas por ano. Como o bacalhau é preservado através da salga é natural que isto provoque um aumento de pessoas com hipertensão arterial. Por sua vez, existe um estudo que afirma que esta condição reduz a esperança de vida em, aproximadamente cinco anos, independentemente do género. Logo, assumindo a validade do estudo supra citado, o consumo de bacalhau seco pode ser visto como um fator que diminua a esperança de vida em Portugal, e não é mais que um padrão cultural deste País. Este é o principal motivo que leva a que às tabelas de mortalidade sejam construídas por país, e por vezes, quando tal não parece ser suficiente pela dimensão dos mesmos, por região geográfica. Os restantes itens são individuais e, quando relacionados com seguros de vida, podem ser observados na emissão da apólice. Esta informação é obtida através dos formulário de candidatura e pelo exame médico. É intuitiva a relação que cada fator tem com a esperança de vida, por exemplo, um fumador tem menor esperança de vida, uma pessoa que faça exercício físico todos os dias tem maior, etc. A mortalidade para pessoas em melhores ou piores condições que o normal é, normalmente, expressa em função da mortalidade padrão dessa região. Isto permite-nos trabalhar com apenas uma tabela de mortalidade, a designada tabela padrão da população. A título explicativo consideremos a seguinte expressão, onde indexamos (P) para a mortalidade padrão e (D) para as mortalidades, digamos, diferentes:

$$\mu_x^{(D)} = a\mu_x^{(P)} + b. \quad (2.35)$$

Esta expressão serve para modelar diversas situações: os riscos decorrentes da ocupação profissional, fazemos  $b = \theta$ ,  $\theta > 0$ , doenças que levam a uma morte precoce, e aí definem-se os parâmetros  $a$  e  $b$  positivos até um certo tempo  $\tau$  e, para  $t > \tau$ , impomos  $a=1$  e  $b=0$ , etc.

No entanto, em algumas situações, torna-se necessária a criação de tabelas específicas de mortalidade para modelar subpopulações, que são extraídas considerando os fatores observáveis de heterogeneidade. Esta é uma prática reiterada quando se procede ao cálculo de prémios de seguros de vida, e nesse sentido reparemos: Deve um indivíduo que constitui uma apólice de seguro no dia de hoje ter a mesma probabilidade de morte que um indivíduo que constituiu a apólice há vinte anos atrás? Para responder a esta questão devemos considerar o que dados históricos nos dizem: um indivíduo que constitui hoje uma apólice foi submetido a exames médicos hoje, portanto temos uma informação mais atualizada sobre ele em relação a um indivíduo que tenha a constituído há vinte anos atrás. Este é o chamado efeito da seleção e generaliza-se para qualquer idade. No entanto, a experiência diz-nos que a partir de um certo período, digamos  $r$ , é razoável assumir que o efeito da seleção desapareça, isto é, todos os indivíduos de uma certa idade que tenham constituído uma apólice há pelo menos  $r$  anos têm a mesma probabilidade de morte. A  $r$  é chamado período da seleção. A partir destes princípios, constróem-se as chamadas, na literatura atuarial, 'select tables' e 'ultimate tables', que permitem calcular os prémios do seguros de vida. Este tipo de tabelas, por não fazerem parte do

âmbito deste trabalho, serão omitidas<sup>10</sup>.

## 2.5.2 Fatores não observáveis

No início desta secção já falámos sobre fatores de heterogeneidade não observáveis, que são, por exemplo, a atitude pessoal perante a saúde, características congénitas e gostos. Assume-se que para cada indivíduo de uma população os fatores de heterogeneidade não observáveis podem ser sumarizados por uma variável aleatória não negativa, a fragilidade, que naturalmente influencia a mortalidade de cada indivíduo a cada idade. O valor da fragilidade de um indivíduo não muda ao longo do tempo, mas permanece desconhecida. Contrariamente, devido à mortalidade, a distribuição da população pela fragilidade muda com a idade, dado que pessoas com fragilidade menor têm a expectativa de viver mais anos. Com base nisto é construída toda a teoria da fragilidade, que omitimos dado a sua insignificância para este trabalho; no entanto, um leitor interessado poderá introduzir este estudo por Vaupel et al. (1979).

## 2.6 Conclusão

Vimos, na secção 2.3, que temos

$$l_{x+1} = l_x p_x, \forall x = 0, 1, \dots, w - 1. \quad (2.36)$$

Esta formulação obriga-nos a assumir que este modelo demográfico é estático. Um modelo demográfico é uma construção teórica que representa a evolução de uma população e da sua estrutura em função da sua composição inicial e do efeito de variáveis demográficas selecionadas. Dizemos que um modelo demográfico é estático quando as variáveis demográficas selecionadas permanecem constantes ao longo do tempo. Ora, os valores de  $q_x$  são estimados dos dados de mortalidade durante um determinado período, digamos três anos, e a partir daí, a probabilidade de morte de um indivíduo com idade  $x$  é igual quer estejamos no ano 2013 ou no ano 2000. Claro que durante o século XX foram evidenciadas grandes alterações no padrão da mortalidade, nomeadamente o aumento significativo da esperança média de vida, o que vem contrariar este pressuposto.

Podemos interpretar uma tabela de mortalidade estática, como descrita ao longo deste capítulo, como um modelo que descreve uma população que atingiu um estado estacionário, isto é, as taxas de mortalidade e fertilidade não se têm alterado durante um longo período de tempo e foi atingido um equilíbrio entre estas. Numa população estacionária a esperança de vida de um indivíduo é exatamente igual à esperança média de vida da população. Desta forma, podemos repensar nos significados das funções já definidas:

- $l_x$  é o número de pessoas vivas que atinjam o  $x$ -ésimo aniversário, em cada ano;
- $d_x$  é o número de pessoas que morrem depois de atingirem o  $x$ -ésimo aniversário, em cada ano;

---

<sup>10</sup>Veja-se, por exemplo, Bowers et al. (1986).

- $T_x$  é o número de pessoas vivas com idade  $x$  e até qualquer período de tempo;
- $L_x$  é o número de pessoas vivas entre  $x$  e  $x + 1$ , em qualquer altura.

O modelo estudado assume um padrão constante da mortalidade e por isso as tabelas construídas através deste designam-se de tabelas de mortalidade estáticas. Numa perspectiva de previsão, como  $d_x = m_x L_x$ , vemos que  $m_x$ , a taxa central de mortalidade, pode ser utilizada para projetar o número de sobreviventes, de um conjunto de indivíduos à nascença, ano a ano. Note-se que a tabela de Halley, como referido na introdução deste capítulo, foi suportada sobre esta mesma hipótese de população estacionária.

Quando concluímos que este tipo de tabelas de mortalidade fazem "uma descrição sintética dos aspetos mais importantes da mortalidade" de uma população estacionária, estamos não mais que a assumir a sua incapacidade de modelar a realidade demográfica atual. Demasiadas evidências, não só empíricas, vêm afirmar que temos de partir para um plano mais complexo. É o que vamos estudar no próximo capítulo.

## Capítulo 3

# Tabelas Dinâmicas

### 3.1 Introdução

Desde muito cedo que uma das ambições do ser humano, e como tal da ciência, é a previsão do futuro. Veja-se o desenvolvimento de métodos e modelos de previsão, como por exemplo no caso da meteorologia. Ao contrário da previsão do tempo, que desde muito cedo foi o foco da meteorologia, a previsão de mortalidade começou a atrair a atenção da demografia e ciência atuarial apenas no final do século XX. Durante o vigésimo século, os demógrafos consideravam a fertilidade como a componente mais importante na determinação do tamanho da população, dado que a maior preocupação mundial era diminuir a mortalidade infantil.

Apesar dos esforços de diversos cientistas, nenhum modelo foi capaz de prever nem os "baby booms" dos anos cinquenta, nem os "baby busts" dos setenta, o que renovou o interesse científico em toda a previsão demográfica. Com a percepção de que a população está a envelhecer, pois não só a geração dos "baby booms" se está a aproximar da idade de reforma, como também as gerações dos "baby busts" são relativamente pequenas, os dirigentes dos países mais desenvolvidos começaram a questionar a sustentabilidade dos respetivos sistemas de segurança social. Nesta conjectura, e com o indicador da taxa de mortalidade infantil estável, fruto dos grandes desenvolvimentos da medicina nesta área, a previsão da mortalidade ganhou um interesse generalizado no início dos anos oitenta. Ainda assim, a primeira tentativa de prever mortalidade foi de H. Gýlden, um astrónomo sueco, em 1875. A sua abordagem consistia em ajustar uma reta à sequência de taxas de mortalidade da população sueca, no intervalo de 1750 a 1870, assumindo que no futuro as taxas de mortalidade iriam ser aproximadas por valores obtidos a partir desta. Até aos anos 80 do século XX foram desenvolvidos métodos de extrapolação de abordagem horizontal, vertical e diagonal, de que iremos falar ao longo deste capítulo. No entanto, só a partir de 1980 é que foram desenvolvidos métodos que garantem uma grande aderência à realidade culminando no, tão em voga, método de Lee-Carter.

No final do capítulo anterior concluímos que o modelo de mortalidade que estávamos a admitir servia apenas para populações estacionárias. A forma de tornar esse modelo mais complexo é acrescentar ao nosso conjunto de variáveis, já constituído pela idade e

pelo tamanho da coorte, uma terceira variável: o ano civil. Desta forma, como o modelo já consegue descrever a evolução da mortalidade também ao longo do tempo, deixa de se reportar a uma população estacionária, e passa a ser um modelo dinâmico. Claro que isto garante-nos uma maior aderência à realidade, já que é trivial a natureza dinâmica dos índices de mortalidade da população de qualquer país desenvolvido.

Assim, começamos este capítulo por introduzir formalmente o modelo dinâmico da mortalidade e apresentar a metodologia utilizada no cálculo de tabelas de mortalidade dinâmicas. Na terceira seção introduzimos o problema de previsão da mortalidade que será abordado até ao final deste capítulo. A partir da seção 4 iremos pensar sempre no problema da previsão como um problema de extrapolação. Na seção 5 introduzimos os mais sofisticados modelos estocásticos e na seção seguinte continuamos essa análise admitindo mais uma variável. Na sétima seção abordamos várias questões que nos permitem comparar vários modelos de previsão da mortalidade e, finalmente, concluímos esta seção com uma conclusão, que servirá de conclusão a todo o trabalho.

## 3.2 A abordagem dinâmica

A abordagem dinâmica consiste em assumir que a mortalidade depende de mais uma variável  $t$ , que representa o ano civil considerado. Definimos a variável aleatória  $\mathbf{T}_x(t)$  que representa a duração de vida de um indivíduo que tenha atingido a idade  $x$  no ano civil  $t$ . Assim, podemos admitir que todas as funções de mortalidade e suas relações, definidas no capítulo anterior, são válidas neste contexto dinâmico fazendo cada uma depender do ano civil  $t$ , analogamente ao feito para a variável aleatória de base deste modelo  $\mathbf{T}_x(t)$ . Por exemplo,  ${}_uq_x(t)$  representa a probabilidade de um indivíduo com a idade  $x$  morrer antes de atingir a idade  $x + u$ , dado que estamos no ano civil  $t$  e este valor será igual a  $1 - p_x(t)$ . Em particular, a força de mortalidade à idade  $x$  no ano  $t$  é definida formalmente da seguinte forma<sup>1</sup>:

$$\mu_x(t) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{P[x < \mathbf{T}_0(t-x) \leq x + u | \mathbf{T}_0(t-x) > x]}{u}. \quad (3.1)$$

De uma forma generalizada, podemos definir um modelo dinâmico de mortalidade como uma função, real ou vetorial, de dois parâmetros  $x$  e  $t$ ,  $\Psi(x, t)$ . Concretamente, esta função pode representar a força de mortalidade, os quocientes de mortalidade, uma transformação de uma função da tabela de mortalidade, etc. Se discretizarmos a idade e o tempo, podemos representar esta função por uma tabela, denominada de tabela dinâmica de mortalidade. Vemos na figura 3.1 a forma genérica que esta toma, fazendo  $\Psi(x, t) = q_x(t)$ , onde  $q_x(t)$  é naturalmente  ${}_uq_x(t)$  com  $u = 1$ .

---

<sup>1</sup>Poderá ser interessante comparar esta expressão com (2.4) e (2.5).

Figura 3.1: Ilustração de uma Tabela dinâmica de Mortalidade

	...	$t - 1$	$t$	$t + 1$	...
0	...	$q_0(t - 1)$	$q_0(t)$	$q_0(t + 1)$	...
1	...	$q_1(t - 1)$	$q_1(t)$	$q_1(t + 1)$	...
...	...	...	...	...	...
$x$	...	$q_x(t - 1)$	$q_x(t)$	$q_x(t + 1)$	...
$x + 1$	...	$q_{x-1}(t - 1)$	$q_{x-1}(t)$	$q_{x-1}(t + 1)$	...
...	...	...	...	...	...
$w - 1$	...	$q_{w-1}(t - 1)$	$q_{w-1}(t)$	$q_{w-1}(t + 1)$	...

Estamos agora em condições de distinguir, claramente, os dois tipos de tabelas de mortalidade:

- tabelas unidimensionais onde todas as funções apenas se reportam à idade biológica  $x$  - tabelas de mortalidade estáticas;
- tabelas bidimensionais em que todas as funções estão indexadas, em linha, pela idade biológica, e, em coluna, pelo tempo cronológico, que habitualmente corresponde ao ano civil - tabelas de mortalidade dinâmicas.

Uma tabela de mortalidade dinâmica pode ser lida de três formas distintas:

1. Leitura Vertical (i.e. por colunas),

$$q_0(t), q_1(t), \dots, q_x(t), \dots \quad (3.2)$$

correspondendo a uma sequência de tabelas de mortalidade periódicas "estáticas", isto é, com a mesma forma que as tabelas apresentadas no capítulo anterior, com cada tabela a referir-se a um dado ano  $t$ .

2. Leitura diagonal,

$$q_0(t), q_1(t + 1), \dots, q_x(t + x), \dots \quad (3.3)$$

correspondendo a uma sequência de tabelas de mortalidade geracionais, ou seja, representativas da mortalidade para uma dada geração nascida no ano  $t$ .

3. Leitura Horizontal (i.e. por linhas),

$$\dots, q_x(t - 1), q_x(t), q_x(t + 1), \dots \quad (3.4)$$

contendo a informação sobre os perfis de mortalidade, que consiste num gráfico de duas dimensões de  $q_x$ , em que a variável independente é o ano civil  $t$ , isto é, fixando a idade  $x$ .

Um dos maiores desafios da demografia e da ciência atuarial é o de construir tabelas de mortalidade dinâmicas o mais precisas quanto possível. Naturalmente, esta construção pode ser dividida na construção de duas tabelas: uma referente ao passado <sup>2</sup> e outra para anos civis futuros. A primeira construção pode ser interpretada como um simples problema de graduação, cuja metodologia passa por ajustar um modelo aos dados disponíveis. A segunda consiste num problema de previsão daí que muitas vezes seja referida como tabela projetada. Mais à frente, quando estudarmos o problema da previsão da mortalidade, iremos observar que, independentemente da forma que tentemos prever, é sempre necessária a tabela de mortalidade para os dados do passado. Assim, durante o resto desta secção vamos estudar esta primeira construção.

### 3.2.1 Construção da Tabela de Mortalidade

Podemos decompor a construção de uma tabela de mortalidade sobre anos civis de que tenhamos dados, em quatro fases:

- 1º Recolha dos dados estatísticos de base (como os óbitos, estimativas da população e nados vivos), avaliação da sua qualidade e análise das principais tendências;
- 2º Estimação dos quocientes brutos de mortalidade;
- 3º *Opcional*: Graduação dos quocientes brutos de mortalidade e aplicação de métodos de fecho da tabela;
- 4º Cálculo das restantes funções da tabela de mortalidade.

Como é natural, iremos apenas focar-nos na segunda e terceira fases, dado que a primeira é um problema geral de qualquer estudo estatístico e a quarta é facilmente deduzida do estudo feito na secção anterior. A estimação dos quocientes de mortalidade pode ser entendida como uma medição da mortalidade, que, neste contexto, é feita por idade, por tempo e por geração. Esta medição pode ser feita seguindo três abordagens distintas, que serão descritas ao longo do trabalho, e os resultados obtidos permitem construir tabelas de mortalidade periódicas completas. A graduação dos quocientes brutos de mortalidade e os métodos de fecho da tabela são procedimentos que podem ser aplicados a estes quocientes brutos de forma a eliminar quaisquer incoerências, alisar os seus valores e permitir uma maior aderência à realidade. Desta forma, existem vantagens e desvantagens em proceder à terceira fase e daí resulta o seu carácter facultativo.

### 3.2.2 Cálculo da estimativas brutas dos quocientes de mortalidade

Podemos dizer que o tempo intervém de três formas distintas sobre qualquer óbito: o ano em que o indivíduo nasce, o ano do óbito e a idade com que falece. Podemos assim definir três coordenadas temporais que caracterizem qualquer acontecimento demográfico. É trivial que uma destas coordenadas seja redutível, já que através de duas delas, podemos

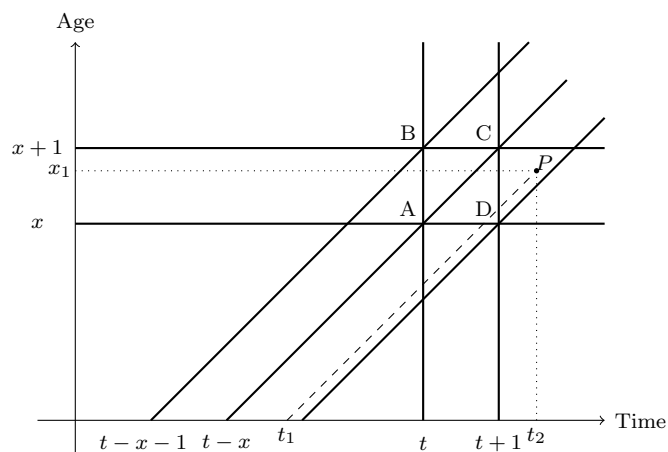
---

<sup>2</sup>Até ao mais próximo do presente que os dados disponíveis permitam.

determinar a terceira. Com esta ideia subjacente, em 1875, Wilhelm Lexis introduziu o chamado diagrama de Lexis<sup>3</sup>.

O objetivo deste diagrama é o de representar a forma como o tempo intervém em qualquer acontecimento demográfico. Podemos definir o diagrama de Lexis como um sistema de eixos que permite concretizar a forma como se combinam as três coordenadas temporais na representação gráfica dos acontecimentos demográficos. No eixo das abcissas, inscreve-se o tempo em que os acontecimentos ocorrem, no eixo das ordenadas, a idade dos indivíduos a quem nos reportamos. Cada acontecimento demográfico corresponde a um ponto, cujas coordenadas representam a data e a idade do respectivo indivíduo. No âmbito do nosso estudo, os acontecimentos demográficos representados são sempre óbitos. Podemos ver na figura 3.2, um exemplo de um diagrama de Lexis; está também representada a linha de vida de um indivíduo que nasce no tempo  $t_1$  e morre, à idade  $x_1$ , no tempo  $t_2$ .

Figura 3.2: Diagrama de Lexis: Óbitos registados à idade  $x$  no ano  $t$ .



Assumimos uma força de mortalidade constante para idades não inteiras<sup>4</sup>, isto é, assumimos que:

$$\mu_{x+\epsilon_1}(t+\epsilon_2) = \mu_x(t), \forall \epsilon_1 \geq 0, \epsilon_2 \leq 1; \quad (3.5)$$

ou seja, a força de mortalidade é constante dentro de cada quadrado, como o ABCD que pode ser visto na figura 3.2, mas pode variar de quadrado em quadrado. Sob esta hipótese temos, um resultado esperado, que:  $\mu_x(t) = m_x(t)$ . E assim, podemos

<sup>3</sup>Até aos inícios do século XX Gustav Zeuner reclamava a invenção deste diagrama; para uma discussão aprofundada sobre esta questão, bem como uma introdução formal ao diagrama de Lexis, veja-se Vandeschrick (2001).

<sup>4</sup>Veja-se secção 2.3.3.

determinar o estimador de máxima verosimilhança,

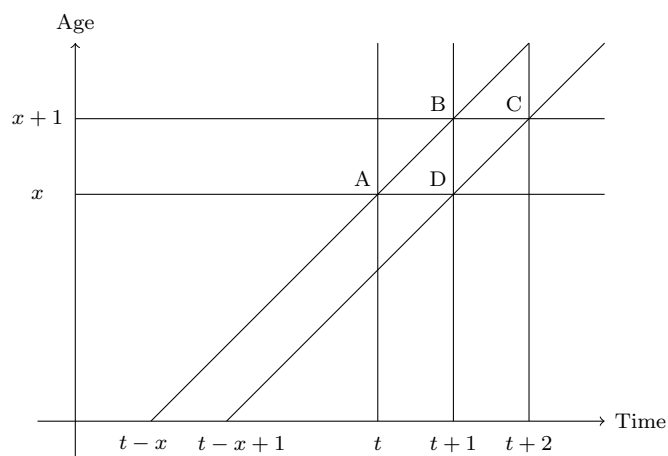
$$\hat{\mu}_x(t) = \hat{m}_{x,t} = \frac{D_{xt}}{ETR_{xt}}, \quad (3.6)$$

onde  $D_{xt}$  representa o número de mortes ocorridas à idade  $x$ , durante o ano civil  $t$  e  $ETR_{xt}$  é a exposição ao risco à idade  $x$  durante o ano  $t$ . Definimos a exposição ao risco à idade  $x$  durante o ano  $t$  como o tempo total vivido por pessoas com a idade  $x$  no ano civil  $t$ <sup>5</sup>.

Definimos agora  $P_{x,t}$ , o número de sobreviventes de idade  $x$  no instante  $t$ , e  $d_{x,t}$ , o número de óbitos, no decurso do ano  $t$ , de indivíduos com idade  $x$ . Geometricamente,  $P_{x,t}$  é o número de pontos dentro do quadrado ABCD da figura 3.2. Destes óbitos, vemos que os óbitos  $d_{x,t}$  podem ser divididos em dois grupos, os óbitos de indivíduos pertencentes à geração  $t - x - 1$ , representados por  $d_{x,t,g-1}^U$ , e os óbitos de indivíduos da geração  $t - x$ , representados por  $d_{x,t,g}^L$ . O quadrado ABCD pode ser decomposto em dois triângulos, ABC e ACD. Assim, dada a hipótese da força de mortalidade constante, temos:

$$\hat{m}_{x,t} = \frac{D_{xt}}{ETR_{xt}} = \frac{d_{x,t,g-1}^U + d_{x,t,g}^L}{\frac{1}{2}[P_{x,t} + P_{x,t+1}] + \frac{1}{6}[d_{x,t,g}^L - d_{x,t,g-1}^U]}. \quad (3.7)$$

Figura 3.3: Diagrama de Lexis: Óbitos registados à idade  $x$  para a geração  $t - x$ .



Por vezes é útil determinar o número de óbitos à idade  $x$  de indivíduos de uma só geração,  $g = t - x$ . O diagrama de Lexis da figura 3.3 exemplifica esta situação. Neste caso o total dos óbitos é dado pela soma dos óbitos ocorridos nos triângulos ABD e e BCD, isto é, à soma dos óbitos de indivíduos à idade  $x$ , da geração  $g$ , no ano  $t$  e  $t + 1$ , respetivamente. A estimação pode ser feita de forma análoga à feita para a figura 3.2.

<sup>5</sup>Para mais detalhes sobre o cálculo da Exposição ao risco veja-se Wilmoth (2005).

O outro cálculo que podemos derivar com o diagrama de Lexis, é o cálculo do número de óbitos durante o ano  $t$ , de indivíduos da geração  $t - x$ , que naturalmente abrange as idades  $x - 1$  e  $x$ . Este diagrama é exemplificado pela figura 3.4, onde mais uma vez a área que pretendemos calcular é paralelogramo ABCD, mas com uma configuração diferente do anterior.

As estimativas brutas dos quocientes de mortalidade  $q_{x,t}$  correspondentes são calculadas, regra geral, da seguinte forma:

$$\widehat{q}_{x,t,\bullet} = \frac{\widehat{m}_{x,t}}{1 + (1 - a_{x,t})\widehat{m}_{x,t}}, \quad (3.8)$$

onde  $a_{x,t}$  representa o número médio de anos vividos no intervalo  $[x, x + 1)$  pelos indivíduos que falecem à idade  $x$  no momento  $t$ , logo, como estamos sob a hipótese da força constante de mortalidade,  $a_{x,t} = 1/2$ .

No entanto Vallin (1973) desenvolveu o método dos quocientes parciais para facilitar estes cálculos. Através deste, em que os quocientes de mortalidade são estimados para cada triângulo relevante no estudo em causa, chega-se às seguintes três estimativas:

I No caso da figura 3.2:

$$\widehat{q}_{x,t,\bullet} = 1 - (1 - \widehat{q}_{x,t,g})(1 - \widehat{q}_{x,t,g-1}), \quad (3.9)$$

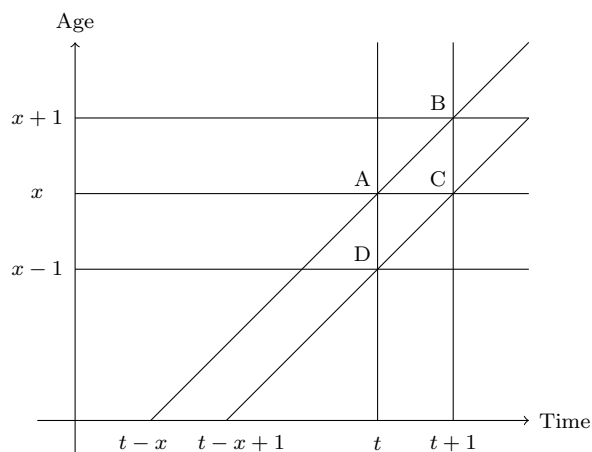
II No caso da figura 3.3:

$$\widehat{q}_{x,\bullet,g} = 1 - (1 - \widehat{q}_{x,t,g})(1 - \widehat{q}_{x,t-1,g}), \quad (3.10)$$

III No caso da figura 3.4:

$$\widehat{q}_{\bullet,t,g} = 1 - (1 - \widehat{q}_{x,t,g})(1 - \widehat{q}_{x-1,t,g}). \quad (3.11)$$

Figura 3.4: Diagrama de Lexis: Óbitos registados no ano  $t$  para a geração  $t - x$ .



A escolha de qual dos três casos a ser utilizado na estimativa depende do objetivo do estudo, dos dados recolhidos na primeira fase da construção da tabela de mortalidade e da homogeneidade preferida: o caso I, garante a homogeneidade por ano civil e por idade, mas não por geração; O caso II, garante a homogeneidade por idade e por geração, mas não por ano civil; finalmente o caso III garante uma homogeneidade por ano civil e por geração, mas não por idade.

O caso II é o único que nos permite interpretar os quocientes de mortalidade da forma habitual, ou seja, como estimativas da probabilidade de morte entre duas idades consecutivas,  $x$  e  $x+1$ . O facto de não assegurar a homogeneidade por ano civil não constitui um problema na elaboração das tabelas de mortalidade, pois normalmente são considerados dados referentes a mais do que um ano, o que permite suavizar as funções da tabela de mortalidade. Por exemplo, as agências oficiais de países como Portugal, Itália, Canadá, Espanha e Suíça estimam os quocientes de mortalidade, seguindo o caso II, admitindo três anos consecutivos de observações.

### 3.2.3 Graduação

A graduação de uma tabela de mortalidade consiste na aplicação de métodos de alisamento aos quocientes de mortalidade brutos, isto é, quocientes de mortalidade não graduados. Por outras palavras, a graduação elimina ou reduz variações no perfil etário das funções da tabela de mortalidade. Por outro lado, uma tabela graduada implica sempre alguma perda informação. Portanto, a decisão de graduar um tabela deve ser feita tendo em conta se queremos dar um maior peso ao ajustamento ou à interpretabilidade dos dados.

Nos países desenvolvidos, durante os últimos anos, assistiu-se a uma melhoria na quantidade e qualidade dos dados estatísticos o que levou a uma diminuição das flutuações irregulares nas taxas de mortalidade. Assim, a tendência, quando estudamos estes países, é de enfatizar a aderência aos dados, logo não graduar a tabela. Exemplos de tabelas de mortalidade não graduadas são as oficiais publicadas em França, Irlanda e Noruega.

Existem diversos métodos de graduação, quer paramétricos quer não-paramétricos, sendo que o mais trivial é a regressão linear múltipla. De entre as múltiplas alternativas destacamos: o método de Splines e as suas variantes, veja-se Champion et al. (2004); o método de Whittaker, veja-se Joseph (1952); o método da graduação polinomial, veja-se Fan & Gijbels (1996) e os Kernel Smoothers, veja-se o trabalho pioneiro Copas & Haberman (1983).

Não iremos entrar em maior detalhe sobre os métodos de graduação, dado que foge ao âmbito deste trabalho, no entanto, como referência para introduzir o estudo sobre estes métodos, recomendamos Miller (2004).

### 3.2.4 Métodos de Fecho da Tabela

Assim como no caso da graduação, a aplicação deste tipo de métodos não é obrigatório quando estamos a construir uma tabela de mortalidade. No entanto, demasiados dados

empíricos levam a maioria dos autores e das agências oficiais dos países desenvolvidos a aceitar a necessidade destes métodos para a construção de tabelas com maior aderência à realidade (Tabeau et al. (2001)). Note-se que se pensarmos no número de óbitos que acontecem em indivíduos com 105 anos de idade, no território de cada país, facilmente compreendemos a necessidade em proceder a métodos que permitam estimar a probabilidade de morte de indivíduos com este tipo de idades. Podemos seguir dois caminhos completamente diferentes no que toca ao fecho de qualquer tabela de mortalidade:

- Graduação: Ajustar os dados observados a uma lei de mortalidade que explique a mortalidade na senescência, referidos por muitos autores como métodos paramétricos;
- Métodos Amostrais: métodos que através do dados observados, e a partir de algumas hipóteses, nos permitam estimar a mortalidade em idades avançadas, também referidos como métodos não paramétricos.

No que toca ao primeiro item, veja-se a secção 2.4.1 onde as leis mais utilizadas são apresentadas e considere-se o referido na secção anterior sobre Graduação. Em relação ao segundo ponto iremos descrever os métodos mais utilizados pelas agências oficiais dos países com grandes bases de dados da mortalidade, como é o caso de vários países europeus e o Japão, isto é, dados da mortalidade ao longo de diversas décadas do passado. Existem diversos métodos, mas tendo em conta a sua importância histórica iremos apenas apresentar os métodos de Coale-Kisker e de Denuit e Gorderniaux.

O método de Coale-Kisker (Coale & Guo (1989), Coale & Kisker (1990)) assume que a exponencial da taxa de mortalidade decresce linearmente em idades muito avançadas. Esta hipótese foi verificada empíricamente por diversos autores, e em especial, Bravo et al. (2008) admite esse mesmo padrão para Portugal. O método baseia-se numa medida a que chamamos taxa de incremento da mortalidade à idade  $x$ :  $k_x = \ln(m_x/m_{x-1})$ . Assim, se assumirmos que as idades mais avançadas são idades a partir dos 85 anos, a hipótese estabelecida toma a forma:

$$k_x = k_{85} - (x - 85)s, \quad (3.12)$$

onde  $s$  é um parametro a ser estimado com base nos dados de mortalidade e através de restrições de fronteira que devem ser definidas por quem aplique o método. No entanto esta hipótese linear não é a base deste método, a lei base assumida toma a seguinte forma:

$$m_x = m_{84} \exp\left(\sum_{h=85}^{x_{max}} k_h\right), \quad (3.13)$$

onde  $x_{max}$  é a maior idade atingível, que no caso definido pelos autores do método toma o valor de 110.

Segue que este modelo implica uma forma exponencial quadrática para a taxa específica de mortalidade para idades avançadas, isto é,

$$m_x = m_{85} \exp(ax^2 + bx + c), \quad (3.14)$$

o que contradiz as hipóteses clássicas de Gompertz.

O método de Denuit e Goderniaux (Denuit & Goderniaux (2005)) trabalha com base nos valores de  $q_x$  e impõe restrições para o fecho da tabela de mortalidade. O método envolve o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados ao seguinte modelo log-quadrático:

$$\ln(\hat{q}_x) = a + bx + cx^2 + \epsilon_x, \epsilon_x \sim N(0, \sigma^2). \quad (3.15)$$

O modelo impõe uma configuração côncava à curva dos  $q_x$  enquanto impede um eventual decréscimo das taxas de mortalidade, durante as idades avançadas, como observado nos dados; isto traduz-se nas seguintes restrições

$$q_w = 1, \quad (3.16)$$

$$q'_w = 0, \quad (3.17)$$

onde  $w$  é a idade do fecho da tabela e  $q'(x)$  é a primeira derivada das taxas específicas de mortalidade. Demonstra-se que a verificação destas condições permite reduzir este modelo a outro com um único parâmetro:

$$\ln(\hat{q}_x) = (w^2 - 2x(w) + x^2)c + \epsilon_x, \epsilon_x \sim N(0, \sigma^2). \quad (3.18)$$

Note-se que Bravo et al. (2008) conclui que o método de Denuit & Goderniaux é o que melhor consegue ajustar a mortalidade para idades muito avançadas em Portugal, de entre os métodos anteriores e dos modelos de Kannisto e Logístico, e especula que o mesmo se deve confirmar para outros países desenvolvidos.

### 3.3 Modelo de previsão da mortalidade

Como já tínhamos referido, a construção de tabelas de mortalidade dinâmicas pode ser decomposto na construção de uma tabela de mortalidade para anos civis passados e de outra para anos civis futuros. Estando concluído o estudo da primeira, avançamos para o clássico problema da previsão.

”There can never be a population projection without personal judgement” (Alders & De Beer (2006)). Podemos dizer que a resolução do problema da previsão de mortalidade tem tanto de ciência como de arte. É um adágio da previsão demográfica que nenhum especialista, por mais confiante que esteja, será capaz de arriscar a sua carreira pela sua previsão (Booth (2006)). Uma das decisões mais importantes recai sobre a escolha do tipo de modelo de previsão da mortalidade. Estes modelos podem admitir até três variáveis ou fatores, como referidos na bibliografia: idade, tempo e coorte. Tabeau (2001) classifica os modelos como de zero, um, dois ou três fatores. Modelos de zero fatores são simplesmente medidas agregadas sobre a mortalidade, não existindo qualquer modelo subjacente, por exemplo, a esperança média de vida à nascença. Modelos de um fator, tratam as taxas de mortalidade como funções da idade e prevêm, assumindo a estabilidade do padrão da mortalidade. Modelos de dois fatores, normalmente a idade e o tempo, são os modelos mais desenvolvidos ultimamente, nomeadamente a partir do anos

80, e foram os primeiros utilizados na previsão da mortalidade. Finalmente, modelos de três fatores, também chamados modelos APC (Age-Period-Cohort), expressam as taxas de mortalidade como função dos três fatores.

Iremos seguir a evolução da ciência: primeiro estudamos os modelos de dois fatores, dado que já estudamos os de um só fator no capítulo anterior, e mais à frente iremos analisar os modelos APC. Assim, dado que um modelo de mortalidade dinâmico de dois fatores consiste numa função, real ou vetorial,  $\Psi(x, t)$ , podemos definir um modelo de previsão de mortalidade como:  $\Psi(x, t) | t > t'$ , onde  $t'$  representa o ano base, que é o ano mais recente de que dispomos informação confiável sobre a mortalidade.

Se assumirmos que dispomos de várias observações periódicas de uma dada população e que cada observação consiste no padrão da mortalidade para um dado grupo  $\chi$  de idades, digamos  $\chi = \{x_{min}, x_{min+1}, \dots, x_{max}\}$ , a observação referente ao ano  $t$  é expressa da seguinte forma, tomando  $\Psi(x, t) = q_x(t)$ :

$$\{q_x(t)\}_{x \in \chi} = \{q_{x_{min}}(t), q_{x_{min+1}}(t), \dots, q_{x_{max}}(t)\}. \quad (3.19)$$

Se focarmos um conjunto de observações  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ , então temos que a base de dados para a projecção da mortalidade, daqui em diante base de dados da mortalidade, é dada por:

$$\{q_x(t)\}_{x \in \chi, t \in T} = \{q_x(t_1), q_x(t_2), \dots, q_x(t_n)\}. \quad (3.20)$$

Booth & Tickle (2008) identifica três abordagens essenciais na previsão da mortalidade:

**Expectativa** Um cenário é especificado (a previsão), normalmente acompanhado por dois cenários alternativos, assumindo o pior e o melhor que pode acontecer. A principal vantagem desta abordagem, é que o modelo pode incorporar informações epidemiológicas, demográficas ou outros conhecimentos relevantes de uma forma qualitativa, ou como os holandeses costumam dizer, "the expert judgement". A natural desvantagem é que torna o modelo subjetivo e pode provocar um potencial viés. Muitas agências estatísticas oficiais deram preferência a este tipo de modelos; no entanto, o conservadorismo dos especialistas, que dão a opinião técnica, e a multiplicidade de teorias sobre o limite absoluto da esperança média de vida levou a que cada vez mais a demografia e a ciência atuarial se afastassem desta abordagem.

**Explicação** Métodos explicativos são baseados em modelos epidemiológicos de certas causas de morte envolvendo doenças e fatores de risco, ou seja, consistem em tentar explicar a mortalidade subdividindo-a por causa de morte. A maior vantagem desta abordagem é que os mecanismos de feedback e a limitação de fatores pode ser levado em conta. Como desvantagens temos que esta abordagem está em fase de desenvolvimento. Demasiadas relações entre fatores de risco e a mortalidade estão ainda por perceber, o que torna a previsão muito pouco fidedigna.

**Extrapolação** Assumem que a futura tendência da mortalidade vai ser, necessariamente, uma continuação do passado. Na previsão de mortalidade, esta é uma presunção razoável. No entanto registaram-se algumas exceções: o rápido declínio da mortalidade pós 2ª Grande Guerra, aumentos da mortalidade nos jovens adultos

provocados por SIDA, etc. Apesar destas exceções, extrapolação é a base para a maioria dos modelos de previsão da mortalidade.

### 3.3.1 Tabela Projetada

Independentemente das abordagens e técnicas utilizadas na previsão da mortalidade, o resultado final será sempre uma tabela de mortalidade dinâmica do futuro, isto é, uma tabela bi-dimensional que apresenta índices de mortalidade para diversos anos civis futuros, a que chamamos tabela projetada. Do ponto de vista prático, estas tabelas são muito difíceis de utilizar, pelo que se tornou uma prática reiterada retirar desta tabela, uma tabela unidimensional.

Formalmente, definimos tabela projetada de mortalidade como sendo a matriz  $\{q_x(t)\}_{x \in \mathcal{X}; t > t'}$ , onde  $t'$  é o ano base.

Existem dois processos para retirar uma tabela unidimensional de mortalidade, da tabela projetada:

1. Um ano  $\tau$  é escolhido e consideramos a tabela de mortalidade geracional da geração nascida no ano  $\tau$ . Assim,

$$q_{x_{min}}(\tau + x_{min}), q_{x_{min}+1}(\tau + x_{min} + 1), \dots, q_x(\tau + x), \dots \quad (3.21)$$

onde  $x_{min}$  denota a idade mínima de interesse para o problema que está a ser estudado. Na realidade, usamos então apenas uma diagonal da tabela de mortalidade projetada, ou seja, apenas uma banda diagonal do diagrama de Lexis. A escolha de  $\tau$ , na prática, pode refletir o ano de nascimento médio dos segurados ou pensionistas, a quem a se refere.

2. Um ano  $\tau$  é fixado e consideramos a tabela de mortalidade periódica, ou seja, tomamos uma coluna da tabela projetada, ou equivalentemente uma banda vertical do diagrama de Lexis:

$$q_{x_{min}}(\tau), q_{x_{min}+1}(\tau), \dots, q_x(\tau), \dots \quad (3.22)$$

No entanto, qualquer um destes processos vai sempre provocar um enviesamento para a projecção. Para diminuir este enviesamento, podemos ajustar este método como descrito de seguida. Para pessoas nascidas no ano  $\vartheta = t - x$ , seguindo o primeiro processo, usamos as seguintes probabilidades:

$$q_{x_{min}+h(\vartheta)}(\tau + x_{min} + h(\vartheta)), q_{x_{min}+1+h(\vartheta)}(\tau + x_{min} + 1 + h(\vartheta)), \dots \quad (3.23)$$

Este ajustamento, usualmente chamado ajustamento de Rueff, envolve uma troca de idades. Assumindo um declínio da mortalidade, a função  $h(\vartheta)$  deve ser: não negativa, para anos  $\vartheta$  menores que  $\tau$ ; zero, quando  $\vartheta = \tau$  e não positiva, caso contrário.

A probabilidade de sobrevivência é então calculada como se segue:

$${}_k p_x^{[\tau; h(\vartheta)] \nearrow} = \prod_{j=0}^{k-1} [1 - q_{x+h(\vartheta)+j}(\tau + x + h(\vartheta) + j)], \quad (3.24)$$

onde os índices representam que escolhemos o ano futuro  $\tau$ , usamos um ajustamento de Rueff  $h(\vartheta)$  e trabalhamos sobre uma diagonal da tabela projetada ( $\nearrow$ )<sup>6</sup>. Estas probabilidades podem assim ser utilizadas em diversos cálculos atuariais, como por exemplo no cálculo da esperança média de vida:

$$e_x^{\circ} = \sum_{k=1}^{w-x} k p_x^{[\tau; h(\vartheta)] \nearrow} + \frac{1}{2}. \quad (3.25)$$

A escolha da função  $h(\vartheta)$  depende de diversos critérios; para um leitor interessado, a escolha optimal desta função foi estudada por Delwarde e Denuit (2006).

### 3.3.2 A abordagem da Expectativa

A metodologia mais implementada que segue a abordagem da expectativa é a chamada tabela limite. A metodologia desta abordagem parte de assumirmos um cenário óptimo para a mortalidade, usualmente fruto de opinião técnica. A partir deste, construímos a tabela de mortalidade para esse cenário, chamada de tabela de mortalidade optimal. Então, seja  $\tilde{q}_x$  o quociente de mortalidade óptimo à idade  $x$ , isto é, o quociente de mortalidade representado na tabela de mortalidade optimal, e  $q_x(t')$  a respectiva probabilidade atual. Assumimos que a previsão de mortalidade é expressa pela fórmula que se segue:

$$q_x(t) = I[\tilde{q}_x, q_x(t')], \quad (3.26)$$

onde o símbolo  $I$  denota um método de interpolação. Ou seja, o método da tabela limite consiste em interpolar os quocientes de mortalidade atuais com os quocientes de um cenário óptimo definido à priori.

Por exemplo, se adoptarmos uma fórmula exponencial de interpolação, dado  $r < 1$  temos:

$$q_x(t) = \tilde{q}_x + [q_x(t') - \tilde{q}_x] r^{t-t'}. \quad (3.27)$$

A construção da tabela limite tem uma questão subjacente: qual o limite da duração de vida do ser humano? A realidade é que não existe nenhuma certeza sobre qual o limite máximo de vida de um ser humano, nem certeza que existe algum em particular. Assim, as perspetivas sobre este problema dividem os demógrafos em três grupos:

- "Os tradicionalistas": Sugerem que o limite máximo de vida não será muito maior do que a atual esperança de vida, precisamente a rondar os 85 anos; veja-se por exemplo Olshansky et al. (1990).
- "Os visionários": Assumem que a mortalidade pode ser combatida por desenvolvimentos biomédicos. Assim, esperanças de vida de 100 a 125 anos, Strehler (1975), ou de 150 a 200 anos, Walford (1985), podem ser atingidas.

---

<sup>6</sup>De forma análoga podemos trabalhar sobre uma coluna da tabela projetada, veja-se Pitacco et al. (2009).

- "Os empiristas": Simplesmente argumentam que não estamos perto do limite máximo possível da esperança de vida, pois a mortalidade está a decrescer enquanto que diversos progressos científicos são feitos no tratamento das doenças que mais mortes provocam. É observado que se a mortalidade continuar a decrescer ao ritmo atual, 2% por ano, expectativas de vida de 95 a 100 anos irão ser atingidas no ano de 2080, veja-se por exemplo Schneider e Guralnik (1990), e as respetivas referências.

Se a análise da mortalidade por causa de morte for um passo preliminar neste estudo, o modelo produzido pelo método da tabela limite irá garantir uma maior aderência à realidade. Mas nesse caso, devemos pensar que o modelo segue não só a abordagem da expectativa mas também a da explicação. Por outro lado, podemos também desenhar um modelo em que a tabela limite é conjugada com métodos extrapolativos, como é o caso do modelo desenvolvido pelo Professor Jorge Bravo (Bravo et al. (2010)) que é utilizado atualmente pelo INE na previsão da mortalidade.

### 3.3.3 A abordagem da Explicação

Podemos dizer que, na prática, a abordagem da explicação consiste em subdividir a mortalidade por causa de morte e tentar prever a mortalidade como um somatório das previsões da mortalidade para todas as causas de morte. Teóricamente, esta abordagem garante-nos uma previsão mais precisa; mais que isto, sempre que explicamos a leigos o tema central deste trabalho eles presumem sempre esta abordagem para previsão da mortalidade. No entanto, os resultados obtidos não confirmaram essa expectativa teórica.

A primeira hipótese da maioria dos modelos por causa de morte é a independência das respetivas causas. Ora, se forem questionados vários médicos especialistas em medicina interna, especialidade da medicina onde o rácio de número de mortes por paciente deve ser mais elevado, a maioria deles não conseguirá especificar uma única causa de morte para cada doente. Mais do que isso, diversos doentes falecem com várias patologias e mesmo que se consiga determinar qual delas provocou a morte não se sabe especificar até que ponto as outras doenças tiveram influência no óbito. Como Gutterman & Vanderhoof (1998) refere, uma metodologia de previsão deve permitir relações entre causas e efeitos. No entanto, é impossível elaborar um modelo verosímil que assuma a correlação das diferentes causas de morte, já que a medicina ainda não é capaz de descrever objetivamente as relações entre as diferentes causas de morte. Note-se que este problema torna-se relevante em idades avançadas, pelo que Tabebu et al. (2001) propõe que pode ser utilizado um modelo de previsão da mortalidade por causa de morte desde que consideremos apenas idades inferiores aos 90 anos.

Por outro lado, apesar do extraordinário desenvolvimento da medicina e da ciência biomédica ao longo do último século, a mortalidade por causa de morte deve, naturalmente, ter sempre um carácter estocástico. Por outro lado, no futuro é expectável que o desenvolvimento destas áreas científicas leve a que algumas causas de morte desapareçam e que apareçam outras. Assim, parece mais do que razoável que as previsões de mortalidade segundo esta abordagem não devam ser estabelecidas para longos períodos

de tempo. Um outro problema da estimação a longo prazo por causa de morte é que a taxa de mortalidade prevista para toda a população será dominada pelo padrão de mortalidade da causa de morte que decresça mais devagar (Booth & Tickle (2008)).

Em geral, as desvantagens e limitações desta abordagem dizem qualquer vantagem. Nesse sentido, diversos autores defendem que se obtém uma maior precisão na previsão da mortalidade quando a prevemos agregadamente em vez de separadamente por causa de morte. A maioria das agências oficiais não implementam modelos por causa de morte, e nesse sentido, o U.K. Government Actuary's Department recomendou, em 2001, que não deveriam ser utilizados métodos por causa de morte e o CMIB (Continuous Mortality Investigation Bureau) defende que previsões agregadas são mais apropriadas na previsão da mortalidade.

Apesar de toda a problemática desta abordagem, o estudo da influência das diferentes causas de morte na mortalidade geral de uma população ajuda a melhorar a opinião dos especialistas. Logo, este estudo é feito muitas vezes como um passo preliminar para modelos da abordagem da expectativa (como já havia sido referido na subsecção anterior). Note-se ainda que a previsão da mortalidade por causa de morte é usualmente feita de uma forma extrapolativa: determina-se o padrão da mortalidade por causa de morte no passado e assumimos que o padrão se irá manter, o que sem dúvida conduz a modelos que seguem duas abordagens, a da explicação e a da extrapolação. Apesar de tudo, do ponto de vista teórico esta seria a abordagem mais precisa à previsão da mortalidade, pelo que nunca deve ser desprezada. Assim, para um leitor interessado deixamos as seguintes referências de trabalhos importantes nesta área: Pollard (1949), Manton et al. (1980), Olshansky (1987), Kunst et al. (2002), Bongaarts (2006), Girosi & King (2006) e Le Bras (2008).

### 3.4 A abordagem da Extrapolação

A extrapolação consiste em assumir que a base de dados da mortalidade pode ser aproximada por determinado padrão, e assumimos que, para  $t > t'$ , esse padrão mantém-se no futuro. Note-se que a escolha do conjunto  $T$  é um passo crucial na construção do procedimento da previsão. Mesmo que disponhamos de observações até dois séculos atrás, parece mais razoável restringir a base de dados a anos mais recentes. Na realidade, se o conjunto for muito extenso, certas melhorias da mortalidade dos últimos anos serão, em princípio, subvalorizadas. Booth et al. (2002) desenvolveu métodos sistemáticos para a escolha apropriada deste conjunto  $T$ .

Atualmente, a ciência atuarial incide toda a sua atenção na abordagem extrapolativa, não só pelas limitações já apresentadas das restantes mas também por esta dar provas de ser a mais objetiva. As suas ricas fundações matemáticas e os resultados mais precisos que têm vindo a ser retirados desta validaram esta opção e fazem com que a maioria dos cientistas envolvidos nestas questões nem ponderem a utilização de métodos de qualquer outra abordagem.

Tudo isto levou a que o desenvolvimento de técnicas segundo esta abordagem tenha proliferado, nomeadamente, no final do século XX e no início do século XXI. Desta forma,

as restantes secções deste capítulo serão dedicadas ao estudo de algumas, aquelas que considerámos serem mais relevantes, de entre as inúmeras técnicas desenvolvidas sob esta abordagem.

Se recordarmos que o tempo intervém num óbito de três formas distintas, e associarmos estas três formas com as três leituras que podemos fazer de uma tabela de mortalidade dinâmica, imediatamente podemos identificar três abordagens à extrapolação: horizontal, vertical e diagonal. No entanto, seguindo a abordagem de Pitacco et al. (2009), podemos entender a abordagem horizontal como a extrapolação de  $\Psi(x, t)$ , para  $x$  fixado e podemos agrupar as abordagens vertical e diagonal como projeções de leis da mortalidade<sup>7</sup>.

### 3.4.1 Extrapolação de $\Psi(x, t)$

A abordagem horizontal concretiza-se na extrapolação da função  $\Psi(x, t)$ , através da tendencia evidenciada na base de dados de mortalidade, em anos anteriores. A maioria dos métodos na literatura tomam  $\Psi(x, t) = q_x(t)$ , ou seja, são métodos de extrapolação dos quocientes de mortalidade; no entanto, poderíamos extrapolar qualquer outra função da tabela de mortalidade. É chamada de abordagem horizontal já que, fixamos uma idade e extrapolamos, de forma independente, os valores de  $q_x$  obtendo uma função  $\psi_x(t)$ , para cada idade  $x$ .

Na extrapolação dos quocientes de mortalidade, estabelece-se a seguinte relação:

$$q_x(t) = q(x, t')R_x(t - t'), \forall t > t', \quad (3.28)$$

onde  $t'$  é o ano base e  $R_x(t - t')$  é o chamado fator de redução à idade  $x$  para  $(t - t')$ , que toma valores menores do que a unidade. Podemos interpretar o fator de redução como uma medida da diminuição da probabilidade de morte para cada idade  $x$  com o passar dos anos civis. Assim, a abordagem horizontal é obtida aplicando processos de modelação apropriados para  $R_x(t - t')$ , nomeadamente através de métodos analíticos,<sup>8</sup>e a extrapolação dos quocientes de mortalidade é dada pela fórmula supra explicitada.

Os diferentes métodos extrapolativos que seguem a abordagem horizontal distinguem-se pelas diferentes expressões que podemos utilizar para modelar  $R_x(t - t')$ . Claro que cada expressão irá comportar intrínsecamente, pelo menos, uma hipótese adicional sobre o comportamento da mortalidade, que poderá, ou não, ser adequada. Neste sentido iremos, de seguida, deduzir a fórmula mais influente de toda a abordagem horizontal: a fórmula exponencial.

Suponhamos que o logaritmo dos quocientes de mortalidade, ao longo do tempo e para cada idade, são aproximadamente lineares. Com base nesta hipótese podemos encontrar

<sup>7</sup>Esta divisão das abordagens será mais clara depois do estudo das mesmas.

<sup>8</sup>Esta extrapolação também pode ser baseada num método gráfico. A abordagem gráfica consiste no desenho, para cada idade, de um curva contínua que represente os quocientes de mortalidade do passado, e assumir que a curva se mantém para o futuro, e aí, ler os valores da parte do gráfico que represente o futuro.

o valor de  $\delta_x$  tal que, para  $h = 1, 2, \dots, n - 1$ :

$$\ln q_x(t_{h+1}) - \ln q_x(t_h) \approx -\delta_x(t_{h+1} - t_h); \quad (3.29)$$

Logo,

$$\frac{q_x(t_{h+1})}{q_x(t_h)} \approx \exp(-\delta_x(t_{h+1} - t_h)). \quad (3.30)$$

Fazendo uma mudança de variável, chegamos à formula standard:

$$\frac{q_x(t_{h+1})}{q_x(t_h)} \approx r_x^{t_{h+1} - t_h}. \quad (3.31)$$

Assim, temos a chamada fórmula exponencial:

$$q_x(t) = q_x(t')r_x^{t_{h+1} - t_h}. \quad (3.32)$$

Note-se que dado que  $r_x < 1$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_x(t) = 0. \quad (3.33)$$

Tendo em conta que a imortalidade humana não faz sentido, diversos autores propõem um limite assintótico da mortalidade acrescentando assim uma restrição de fronteira. Desta forma obtém-se a seguinte generalização da fórmula exponencial:

$$q_x(t) = q_x(t')[\alpha_x + (1 - \alpha_x)r_x^{t_{h+1} - t_h}]. \quad (3.34)$$

A partir desta, existem diversos métodos para estimar os valores de  $r_x$ , que vão desde o generalista método dos mínimos quadrados até a métodos construídos especificamente para o ajuste da base de dados de mortalidade, à formula exponencial. Os valores estimados são, analogamente ao estudado para a construção da tabela de mortalidade do passado, chamados de projeções brutas de mortalidade e podem, ou não, ser graduados. O Continuous Mortality Investigation Bureau (CMIB) é uma organização responsável por investigar a mortalidade britânica<sup>9</sup>. Desde muito cedo, que esta agência implementa métodos extrapolativos que seguem a abordagem horizontal, e em particular com base na fórmula exponencial. Também como forma de exemplificar aplicações desta, iremos apresentar alguns dos modelos utilizados pelo CMIB na previsão da mortalidade.

**CMIB(1978)** Uma versão simplificada da formula standard, onde o factor de redução não depende da idade:

$$q_x(t) = q_x(t')r^{t_{h+1} - t_h}. \quad (3.35)$$

Esta aproximação era considerada aceitável para idades superiores a 60 anos.

**CMIB(1990)** Versão da generalização da fórmula exponencial:

$$q_x(t) = \alpha_x + (1 - \alpha_x)(1 - f)^{\frac{t-t'}{20}}, \quad (3.36)$$

---

<sup>9</sup>Os dados utilizados pelo CMIB são fornecidos pelas companhias de seguros e consultoras de atuariado, de Inglaterra e do País de Gales.

com  $f = f(20) = 0,6$  e

$$\alpha_x = \begin{cases} 0,50, & \text{se } x < 60 \\ \frac{x-10}{100}, & \text{se } 60 \leq x \leq 110 . \\ 1, & \text{se } x > 110 \end{cases} \quad (3.37)$$

O ano base considerado foi  $t' = 1980$  e este modelo permitia prever mortalidade até ao ano 2000.

**CMIB(1999)** Uma versão do anterior, mas com  $f$  função da idade:

$$q_x(t) = \alpha_x + (1 - \alpha_x)(1 - f_x)^{\frac{t-t'}{20}}, \quad (3.38)$$

onde

$$f_x = \begin{cases} c, & \text{se } x < 600 \\ 1 + (1 - c)\frac{x-110}{50}, & \text{se } 60 \leq x \leq 110 \\ 1, & \text{se } x > 110 \end{cases} \quad (3.39)$$

e

$$\alpha_x = \begin{cases} h, & \text{se } x < 60 \\ \frac{(110-x)h+(x-60)k}{50}, & \text{se } 60 \leq x \leq 110 . \\ k, & \text{se } x > 110 \end{cases} \quad (3.40)$$

Os parâmetros foram ajustados considerando  $t' = 1992$ , obtendo-se  $c = 0,13$ ,  $h = 0,55$ ,  $k = 0,29$ .

Podemos também assumir que os dados da mortalidade seguem outro padrão que não uma diminuição exponencial; podemos também assumir que outra função da tabela de mortalidade segue uma diminuição exponencial. Fórmulas diferentes da exponencial podem ser utilizadas na abordagem horizontal. Vejam-se algumas expressões alternativas à fórmula exponencial que também tiveram algum impacto nesta abordagem à extrapolação.

$$q_x(t) = a_x + \frac{b_x}{t}, \quad (3.41)$$

$$q_x(t) = \sum_{h=0}^p a_{x,h} t^h, \quad (3.42)$$

$$q_x(t) = \frac{e^{G_x(t)}}{1 + e^{G_x(t)}}, \quad (3.43)$$

onde  $G_x(t)$  é, para cada idade, um polinómio em  $t$ , isto é,

$$G_x(t) = \sum_{h=0}^p c_{x,h} t^h. \quad (3.44)$$

Note-se que a última expressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\ln \frac{q_x(t)}{p_x(t)} = G_x(t). \quad (3.45)$$

Esta última expressão supõe que o logaritmo das hipóteses de mortalidade na idade  $x$ ,  $\phi_x = \frac{q_x}{p_x}$ , têm um comportamento linear, isto é, as hipóteses de mortalidade seguem um padrão de declínio exponencial.

### 3.4.2 Projeção de Leis de Mortalidade

Quando utilizamos uma lei de mortalidade para ajustar dados observados, o padrão de mortalidade é sumarizado por alguns parâmetros, como estudámos na secção das leis de mortalidade do capítulo anterior. Assim, numa perspectiva de extrapolação, só teríamos de extrapolar um conjunto reduzido de parâmetros. O maior problema da abordagem horizontal é a sua grande dimensão,<sup>10</sup> e uma abordagem com base em leis de mortalidade irá naturalmente contornar este problema.

O contexto dinâmico implica a introdução da variável de tempo  $t$ , que entra em qualquer modelo como variável dos parâmetros. Assim, considere-se a seguinte lei de mortalidade:

$$\mu_x = \phi(x; \alpha(t); \beta(t), \dots). \quad (3.46)$$

Seja  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  o conjunto dos anos de observação. Assim, admitindo o conjunto de idades,  $\chi$ , temos a seguinte base de dados de mortalidade:

$$\{\mu_x(t)\}_{x \in \chi; t \in T} = \{\mu_x(t_1), \mu_x(t_2), \dots, \mu_x(t_n)\}_{x \in \chi}. \quad (3.47)$$

Agora, para cada ano civil  $t_h$ ,  $h = 1, 2, \dots, n$ , estimamos os parâmetros para ajustar ao modelo, por exemplo, via mínimos quadrados ou pelo método da máxima verosimilhança, e assim obtemos o conjunto das  $n$  funções, da idade:

$$\{\mu_x(t_1), \mu_x(t_2), \dots, \mu_x(t_n)\}. \quad (3.48)$$

Finalmente, aplicamos métodos de graduação aos padrões dos parâmetros da lei da mortalidade e obtemos um conjunto de funções do tempo:

$$\begin{aligned} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n &\Rightarrow \alpha(t) \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n &\Rightarrow \beta(t) \\ &\dots \end{aligned}$$

Este procedimento traduz a abordagem vertical à previsão da mortalidade, já que os parâmetros da escolhida lei de mortalidade são estimados para cada tabela periódica baseados na experiência da mortalidade.

Na abordagem diagonal o procedimento é em tudo similar ao anterior: escolher uma lei de mortalidade, construir uma base de dados, graduar esses dados aos parâmetros

<sup>10</sup>Dimensão aqui refere-se ao número total de células de dados que estão a ser modeladas.

da lei e extrapolar o seu valor para futuro. A diferença é que, na abordagem diagonal, consideramos os parâmetros como variáveis do ano de nascimento da geração, e não do tempo. A variável idade mantém a sua função, e a variável tempo é omitida do modelo. A distinção entre estas abordagens pode ser clarificada pelo seguinte exemplo, onde admitimos a lei de Makeham. Se adoptarmos a abordagem vertical temos a seguinte forma:

$$\mu_x(t) = A(t) + B(t)c(t)^x, \quad (3.49)$$

onde  $t$  representa o ano civil. Contrariamente, se adoptarmos a abordagem diagonal temos:

$$\mu_x(\tau) = A(\tau) + B(\tau)c(\tau)^x, \quad (3.50)$$

onde  $\tau = t - x$  representa o ano de nascimento de uma geração.

Da mesma forma que admitimos a lei de Makeham no exemplo anterior, qualquer lei de mortalidade pode ser utilizada nesta abordagem. Um caso com um particular interesse consiste em utilizar a lei de Weibull, e desta forma considere-se a seguinte lei:

$$\mu_x(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}, \quad (3.51)$$

função distribuição de probabilidade de  $T_0$ , variável aleatória que representa o tempo de vida à nascença. Desta forma temos que a respetiva função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_0(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}. \quad (3.52)$$

A lei de Weibull não ajusta o padrão de mortalidade para toda a duração de vida, nomeadamente devido à configuração específica da mortalidade infantil e jovem adulta, todavia produz uma razoável representação do padrão de mortalidade para idades adultas e avançadas. Para além disso, garante uma facilidade em expressar alguns indicadores clássicos dos modelos estocásticos, por exemplo:

$$Mod[T_0] = \beta \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \alpha > 1, \quad (3.53)$$

$$E[T_0] = \beta \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right), \quad (3.54)$$

$$var[T_0] = \beta^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \left(\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\right)^2\right], \quad (3.55)$$

onde as expressões representam a moda, média e variância, respetivamente, de  $T_0$  e  $\Gamma$  a função gama completa. Esta lei toma um interesse particular primeiro dado que estes indicadores podem ser utilizados na verificação da validade da escolha dos parâmetros e devido a Olivieri e Pitacco(2002) e Olivieri(2005), que conseguiram modelar aspetos dos fenómenos da expansão e da retangularização pela escolha apropriada dos valores dos parâmetros.

### 3.4.3 Outras abordagens à extrapolação da mortalidade

Para já estudámos três abordagens à extrapolação: a horizontal, a vertical e a diagonal. Quando seguimos a abordagem horizontal, podemos projetar uma tabela inconsistente, isto é, uma tabela onde exista pelo menos um ano em que a probabilidade de um indivíduo mais novo morrer é maior do que a mesma para um indivíduo mais velho. Outra desvantagem desta abordagem é que não garante a representação de cenários de mortalidade sensatos. Pelo contrário, na projeção de leis de mortalidade existem mecanismos que nos permitem controlar os cenários subjacentes a qualquer modelo, veja-se por exemplo o caso da lei de Weibull supra descrito. Por outro lado, esta abordagem leva ainda a uma diminuição da dimensão do problema de previsão. No entanto muitos autores, veja-se, por exemplo, Brouhns et. al (2002b), notam que parâmetros das leis de mortalidade podem ser fortemente dependentes, o que contraria a hipótese essencial para a extrapolação de que os parâmetros são independentes. Outra desvantagem é que a escolha da lei a utilizar pode constituir uma grande problemática, já para não referir a desadequação da maioria das leis propostas ao longo da história. Finalmente, devemos ter em conta que qualquer uma das três abordagens tem apenas uma variável independente, a idade, o tempo ou o ano de nascimento da geração, e abordagens que considerem mais do que uma variável podem ser mais propícias na representação do padrão mortalidade.

Desta forma surgiram algumas abordagens alternativas como forma de tentar eliminar alguns dos problemas supra citados. Note-se que em cada abordagem alternativa podemos encontrar similaridades com as abordagens elementares já explicadas, no entanto elas resolvem alguns problemas destas abordagens, melhorando o ajustamento. De seguida iremos analisar duas dessas abordagens alternativas, explicando de que forma elas produzem melhores resultados e quais as desvantagens respetivas.

### 3.4.4 Tabela Modelo de Mortalidade

Vimos que um dos grandes problemas das abordagens vertical e diagonal é a necessidade de nos comprometermos com um modelo que descreva a mortalidade. Para combater esse problema, mas ao mesmo tempo diminuir a dimensão do problema, podemos utilizar os chamados marcadores do padrão da mortalidade. Um marcador do padrão da mortalidade, não passa de uma variável que permite sumarizar, mesmo que se perca informação, o padrão da mortalidade. O exemplo mais natural é a esperança média de vida à nascença, para cada ano  $t$ . A metodologia das tabelas modelo baseia-se no cálculo dos valores dos marcadores do padrão de mortalidade e posterior extrapolação, como na abordagem horizontal, para o futuro. Concretamente, podemos resumir esta metodologia nas seguintes fases:

1. Reunir um conjunto de tabelas de mortalidade que representem a mortalidade numa população em diferentes épocas, com o objetivo de reduzir o risco de enviesamento que este procedimento comporta;
2. Definir os marcadores que sumarizam o padrão de mortalidade e calcular o seu valor para cada tabela de mortalidade;

3. Analisar o padrão dos marcadores e extrapolá-lo, para estimar os valores dos marcadores para datas futuras;
4. Obter as tabelas modelo de mortalidade aplicando os valores estimados no número anterior.

O primeiro conjunto de tabelas modelo de mortalidade foi publicado em 1955 pelas Nações Unidas. A partir de então as tabelas modelo de mortalidade são extensivamente utilizadas em estudos demográficos, epidemiológicos e económicos. De entre os diversos sistemas desenvolvidos salientamos: o sistema de Coale e Demeny, o sistema de Petrioli e Berti, Ledermann, e o revolucionário sistema relacional de Brass.

Para exemplificar a metodologia implementada nas tabelas modelo iremos de seguida analisar o sistema relacional de Brass, publicado em 1971. Considere-se a seguinte transformação da função sobrevivência, chamada transformação logit:

$$\Lambda(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - S_0(x)}{S_0(x)}\right) \quad (3.56)$$

O sistema de Brass baseia-se na hipótese de dois padrões de mortalidade distintos poderem ser relacionados por uma transformação linear do logit. Desta forma é possível encontrar duas constantes  $\alpha$  e  $\beta$  tais que:

$$\Lambda(x) = \alpha + \beta \Lambda^*(x), \quad (3.57)$$

onde  $\Lambda^*$  representa a transformação logit padrão. No contexto dinâmico, denotamos  $\Lambda(x, \tau)$  a transformação logit para o coorte nascido no ano  $\tau$ , isto é,

$$\Lambda(x, \tau) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - S_0(x, \tau)}{S_0(x, \tau)}\right). \quad (3.58)$$

Referindo a um par de anos de nascimento  $\tau_k$  e  $\tau_{k+1}$  assumimos

$$\Lambda(x, \tau_{k+1}) = \alpha_k + \beta_k \Lambda(x, \tau_k). \quad (3.59)$$

Então o problema de previsão da mortalidade reduz-se a um problema de extrapolação de duas séries:  $\alpha_k$  e  $\beta_k$ . Para construir as tabelas modelo de mortalidade usa-se a transformação logit inversa:

$$S_0(x, \tau) = \frac{1}{1 + \exp[2\Lambda(x, \tau)]}. \quad (3.60)$$

Já dissemos que este sistema foi revolucionário na utilização de tabelas modelo de mortalidade. Mais do que isto, a maioria destas metodologias hoje em dia implementadas podem ser reduzidas a este sistema. Isto deve-se nomeadamente ao facto de, através da escolha dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , podermos descrever os fenómenos da expansão e da retangularização<sup>11</sup>, fenómenos marcantes na alteração do padrão da mortalidade como

---

<sup>11</sup>Demonstrado numericamente simulando o valor da função sobrevivência para diferentes valores destes parâmetros.

referido no capítulo introdutório deste trabalho. No entanto podem surgir alguns problemas na implementação deste sistema: são necessárias sequências longas de observações para construir funções sobrevivência dos coortes; podem surgir inconsistências dado que o método não garante que, para qualquer  $\tau$ ,  $S_0(x_1, \tau) > S_0(x_2, \tau)$ , para todos os pares  $x_1 < x_2$ , e, finalmente, este sistema tende a sobrestimar a mortalidade. Para resolver estes problemas podem ser aplicados ajustamentos apropriados ao processo de extrapolação, no entanto nada garante que seja possível encontrar uma extensão deste problema que permita modelar o padrão de mortalidade para cada caso específico. Um leitor que pretenda aprofundar o estudo das tabelas modelo de mortalidade deverá consultar Ahmad et al. (2000).

### 3.4.5 Abordagem de superfície

A abordagem de superfície consiste numa abordagem bivariada onde as tendências temporais e a variação da mortalidade ao longo de todas as idades são abordadas simultaneamente. Para apresentar a metodologia relacionada iremo-nos focar na análise da chamada classe Gompertz-Makeham, GM(r,s), introduzida no segundo capítulo, onde se assume que o padrão da mortalidade segue a seguinte lei:

$$\mu_x = GM^{r,s}(x) = \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i x^i + \exp\left[\sum_{j=0}^{s-1} \beta_j x^j\right]. \quad (3.61)$$

Condisere-se então o seguinte modelo:

$$\mu_x(t) = \exp\left[\sum_{j=0}^s \beta_j L_j(\bar{x})\right] \exp\left[\sum_{i=1}^r (\alpha_i + \sum_{j=1}^s \lim_{j=1} \Psi_{ij} L_j(\bar{x})) \bar{t}^i\right], \quad (3.62)$$

onde  $L_j(\bar{x})$  representa o polinómio de Legendre,<sup>12</sup>  $\bar{x}$  e  $\bar{t}$  são, respetivamente, idades e tempos transformados de forma a pertencerem ao intervalo  $[-1, 1]$  e com a condição que alguns dos  $\Psi_{ij}$  devem ser apresentados com o valor 0. Note-se que os primeiro termo multiplicativo do lado direito da fórmula constituem um modelo de graduação GM(0,s+1), enquanto que o segundo pode ser interpretado como um termo de ajustamento ao padrão da mortalidade, quando confrontada com a idade. Esta fórmula foi apresentada por Renshaw et al. (1996) para uma modelação da mortalidade como função do tempo e da idade, sugerindo, para propósitos de previsão, que fossem tomados pequenos valores de  $r$ .

Sithole et al.(2000) também propôs um caso particular da fórmula anterior, num trabalho para modelar a mortalidade de segurados e pensionistas do Reino Unido (informação dada pelo CMIB), com r=1:

$$\mu_x(t) = \exp\left[\beta_0 \sum_{j=1}^3 \beta_j L_j(\bar{x}) + (\alpha_1 + \Psi_{11} L_1(\bar{x})) \bar{t}\right]. \quad (3.63)$$

<sup>12</sup>São as soluções da equação diferencial de Legendre:  $\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)] + n(n+1)P_n(x) = 0$ . Para uma fórmula explicita veja-se, por exemplo, a fórmula de Benjamin Olinde Rodrigues.

A abordagem de superfície segue com o uso do fator de redução  $R_x(t - t')$  para leis de mortalidade, ao invés de quocientes de mortalidade:

$$\mu_x(t) = \mu_x - (t')R_x(t - t'), \quad (3.64)$$

onde  $t'$  é, como usual, o ano base na projeção de mortalidade. Por exemplo, da fórmula sugerida por Sithole et al.(2000) obtemos:

$$R_x(t - t') = \exp\left[\frac{t - t'}{w}(\alpha_1 + \Psi_{11}\bar{x})\right], \quad (3.65)$$

onde  $w$  representa metade do intervalo de anos de observação. Assim, podemos interpretar o fator de redução como uma transformação log-linear do tempo.

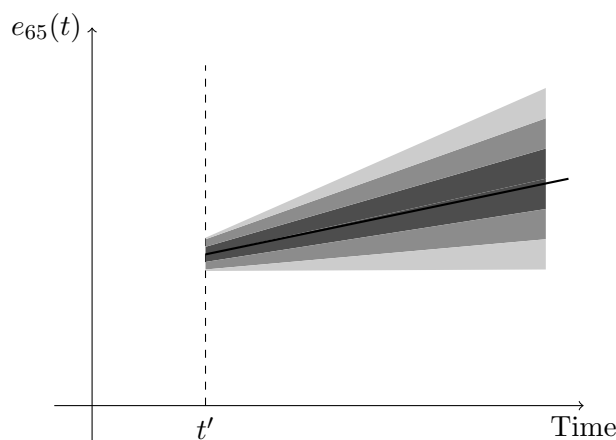
As vantagens essenciais desta abordagem é que ela considera mais do que uma variável independente e não admite inconsistências nem por idade nem por ano civil. Por exemplo, o modelo de Sithole et al. (2000) insere-se neste quadro de modelos. Inserir todos os modelos da abordagem de superfície num quadro unificado facilita extensões e generalizações dos modelos para um contexto dinâmico, o que constitui uma grande vantagem prática da abordagem de superfície. O grande inconveniente desta abordagem é que, à semelhança do que acontece com as abordagens diagonal e vertical, temos de, à priori, nos comprometer com uma lei de mortalidade em específico.

### 3.5 Modelos estocásticos de previsão

As abordagens à previsão descritas anteriormente não admitem a natureza estocástica da mortalidade. Na realidade, um grande número dos métodos utilizados na prática atuarial consistem simplesmente em gradação-extrapolação. No entanto, um dos primeiros aspetos que concluímos em relação à morte foi que é um acontecimento intrínsecamente imprevisível. Assim, do ponto de vista estatístico, devemos considerar modelos estocásticos na modelação da mortalidade. De uma forma mais objetiva, as taxas de mortalidade observadas no passado são resultados de uma variável aleatória e as taxas previstas não são mais que estimações de variáveis aleatórias que representam a mortalidade futura. Num contexto estocástico os resultados de um procedimento de previsão deixam de ser valores numéricos determinados para cada idade e passam a ser estimações de pontos e de intervalos. Uma representação gráfica eficiente dos resultados deste modelo é o diagrama em leque<sup>13</sup>. Este diagrama representa não só a projeção central como também os intervalos de predição; note-se que este é claramente um problema de predição. Veja-se a figura 3.5, que representa a previsão da esperança média de vida. A linha reta a preto representa a projeção central, isto é, a estimacão pontual da esperança média de vida a cada tempo  $t$ . Os intervalos não passam de intervalos de confiança para este problema; claro que quanto maior a probabilidade de previsão, ou seja, menor o nível de significância, maior será a amplitude do intervalo.

<sup>13</sup>Adoptamos esta denominação devido à sua configuração; na literatura em inglês são chamadas de "fan chart".

Figura 3.5: Diagrama em leque: esperança de vida prevista.



Iremos agora estudar alguns modelos estocásticos de previsão de mortalidade. O modelo de Lee-Carter (LC), já referido, foi um dos modelos mais influentes na previsão da mortalidade, tendo captado uma grande atenção por parte dos demógrafos e actuários. Assim, iremos começar por analisar o método de Lee-Carter, onde a metodologia utilizada em todos os modelos estocásticos será esmiuçadamente analisada. Seguidamente analisaremos algumas extensões do mesmo e, finalmente, vamos abordar o modelo de Cairns, Blake e Dowd (CBD).

### 3.5.1 O modelo Lee-Carter (LC)

Para representar a mortalidade consideramos a taxa central de mortalidade para a idade  $x$  no tempo  $t$ . Lee & Carter (1992) propõe a modelação do logaritmo da taxa central de mortalidade para garantir que esta nunca tome valores negativos. Assim, assumimos que  $m_x(t)$  toma a seguinte forma log-bilinear:

$$\ln m_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t}, \quad (3.66)$$

onde os  $\alpha_x$  descrevem o padrão da mortalidade médio ao longo de todo o tempo considerado, os  $\beta_x$  descrevem os desvios do padrão de mortalidade médio quando  $\kappa_t$  varia. A mudança no nível de mortalidade ao longo do tempo é descrita por  $\kappa_t$ . Finalmente, a quantidade  $\epsilon_{x,t}$  é o termo erro, com média 0 e variância  $\sigma_\epsilon^2$ , refletindo influências particulares históricas que não são captadas pelo modelo.

#### Ajustamento do modelo

Este modelo não pode ser ajustado por regressão, dado que nenhum parâmetro a estimar é observável. A matriz de dados utilizada na estimação dos parâmetros consiste numa

matriz de taxas de mortalidade. Podemos dizer que o modelo está sobre-parametrizado, dado que é invariante para as seguintes transformações:

$$\{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t\} \mapsto \{\alpha_x, \beta_x/c, c\kappa_t\} \quad (3.67)$$

$$\{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t\} \mapsto \{\alpha_x - c\beta_x, \beta_x, \kappa_t + c\} \quad (3.68)$$

Na literatura é usual referir este problema como um problema de identificabilidade. Para garantir que o modelo não tem nenhum problema de identificabilidade as seguintes restrições são impostas:  $\sum_x \beta_x^2 = 1$  e  $\sum_t \kappa_t = 0$ . Lee & Carter (1992) propõe um ajustamento dos dados ao modelos através de dois passos: decomposição por valores singulares (SVD) e posterior aplicação do método dos mínimos quadrados. No entanto, Wilmoth (1993) desenvolve um método superior com um único passo: o método dos mínimos quadrados ponderados. Seguindo a terminologia da bibliografia, iremos chamar ao método proposto por Lee & Carter (1992) OLS (Ordinary Least Squares) e ao método de Wilmoth (1993) WLS (Weighted Least Squares). Iremos omitir a descrição do método OLS dado que o WLS parte dos mesmos pressupostos do anterior, produz resultados similares, e, segundo Lee (2000), consiste num método superior em relação ao restante.

O método proposto por Wilmoth consiste num método de mínimos quadrados ponderado. O problema consiste em, assumindo o modelo de Lee-Carter e as restrições referidas, minimizar a seguinte equação:

$$\sum_{x,t} d_x(t) (\ln \tilde{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2, \quad (3.69)$$

onde  $d_x(t)$  representa o número de óbitos de indivíduos com idade  $x$  no ano  $t$ , isto é, um triângulo no diagrama de Lexis, e  $\tilde{m}_x(t)$  os valores observados da taxa central de mortalidade. Para minimizar esta equação primeiro temos de calcular a primeira derivada em relação a  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  e  $\kappa_t$  e depois igualar as mesmas a zero. Resolvendo as equações obtemos as seguintes equações, que podem ser resolvidas numericamente:

$$\hat{\alpha}_x = \frac{\sum_t d_x(t) (\ln \tilde{m}_x(t) - \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t)}{\sum_t d_x(t)}, \quad (3.70)$$

$$\hat{\beta}_x = \frac{\sum_t d_x(t) \hat{\kappa}_t (\ln \tilde{m}_x(t) - \hat{\alpha}_x)}{\sum_t d_x(t) \hat{\kappa}_t^2}, \quad (3.71)$$

$$\hat{\kappa}_t = \frac{\sum_x d_x(t) \hat{\beta}_x (\ln \tilde{m}_x(t) - \hat{\alpha}_x)}{\sum_t d_x(t) \hat{\beta}_x^2}. \quad (3.72)$$

Soluções para estas equações são encontradas por métodos iterativos: depois de escolher um conjunto de valores iniciais, que podem ser as soluções de Lee e Carter (1992)<sup>14</sup>, são determinadas, sequencialmente, até que os valores dos parâmetros tenham alterações

<sup>14</sup>Para  $\hat{\alpha}_x$  a média da taxa central de mortalidade ao longo do tempo e para  $\hat{\beta}_x$  e  $\hat{\kappa}_t$  obtidos pelo primeiro termo da decomposição por valores singulares da matriz  $(\ln \tilde{m}_x(t) - \hat{\alpha}_x)$

mínimas de simulação para simulação.

Uma outra abordagem, também proposta em Wilmoth (1993) e estabelecida em Brouhns et al. (2002a) consiste na estimação por máxima verosimilhança; será denominado MLE (Maximum Likelihood Estimation). O maior problemas das estimações WLS e OLS é que os erros são assumidos como homocedásticos, isto é, os erros têm variância constante. O que é uma causa de assumirmos uma distribuição normal padrão dos erros, que é claramente irrealista: o logaritmo da força de mortalidade para idades avançadas é muito mais variável do que em idades jovens.

O método MLE considera a distribuição de Poisson, daí muitas vezes ser referido como método da máxima verosimilhança de Poisson, e começa com o resultado de Brillinger (1986):  $D_x(t)$ , a variável aleatória que representa o número de mortes à idade  $x$  e tempo  $t$  pode ser aproximada a uma distribuição Poisson:

$$D_x(t) \sim \text{Poisson}(ETR_x(t)\mu_x(t)), \quad (3.73)$$

onde  $ETR_x(t)$  representa a exposição ao risco média à idade  $x$  e tempo  $t$  (veja-se a seção 3.2) e  $\mu_x(t) = \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)$ . Assim, assumimos o modelo de Lee-Carter, com significados similares para os parâmetros  $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$ :

$$\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t, \quad (3.74)$$

sujeito às condições  $\sum_t \kappa_t = 0$  e  $\sum_x \beta_x = 1$ , para garantir a identificabilidade do modelo. Determinamos os parâmetros maximizando o logaritmo da verosimilhança, sendo este um método de máxima verosimilhança:

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \sum x, t \{D_x(t)(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) - ETR_x(t) \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)\} + \text{constante}. \quad (3.75)$$

O algoritmo proposto para estimar os valores dos parâmetros pode ser sumarizado como segue:

1. Estabelecer os valores iniciais de  $\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x$  e  $\hat{\kappa}_t$ , as estimações dos respectivos parâmetros, Brouhns et al. (2002a) propõe os valores de 0, 1 e 0, respetivamente para cada um dos anteriores; no entanto refere que quaisquer valores podem ser utilizados. Seja  $\hat{D}_x(t)^v = ETR_x(t) \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t)$ .
2.  $\hat{\alpha}_x^{v+1} = \hat{\alpha}_x^v - \frac{\sum_t (D_x(t) - \hat{D}_x(t)^v)}{-\sum_t \hat{D}_x(t)^v}$ ,  $\hat{\beta}_x^{v+1} = \hat{\beta}_x^v$ ,  $\hat{\kappa}_t^{v+1} = \hat{\kappa}_t^v$ .
3.  $\hat{\kappa}_t^{v+2} = \hat{\kappa}_t^{v+1} - \frac{\sum_t (D_x(t) - \hat{D}_x(t)^{v+1}) \hat{\beta}_x^{v+1}}{-\sum_t \hat{D}_x(t)^v (\hat{\beta}_x^{v+1})^2}$ ,  $\hat{\alpha}_x^{v+2} = \hat{\alpha}_x^{v+1}$ ,  $\hat{\beta}_x^{v+2} = \hat{\beta}_x^{v+1}$ .
4.  $\hat{\beta}_x^{v+3} = \hat{\beta}_x^{v+2} - \frac{\sum_t (D_x(t) - \hat{D}_x(t)^{v+2}) \hat{\kappa}_t^{v+2}}{-\sum_t \hat{D}_x(t)^{v+2} (\hat{\kappa}_t^{v+2})^2}$ ,  $\hat{\alpha}_x^{v+3} = \hat{\alpha}_x^{v+2}$ ,  $\hat{\kappa}_t^{v+3} = \hat{\kappa}_t^{v+2}$ .
5. Se  $L^{v+1} - L^v$  for menor que um determinado valor, digamos  $e$ , definido à priori, o algoritmo pára; caso contrário, volta-se a 2; onde  $L^v$  representa o valor do logaritmo da verosimilhança, definido anteriormente, após  $v$  passos. Por outras palavras, o algoritmo pára quando o aumento do logaritmo da verosimilhança for pequeno,

menor que  $e$ . O valor de  $e$  utilizado por Brouhns et al. (2002a) foi de  $10^{-6}$ , no entanto os autores, Lee & Carter (1992) recomendam, para uma maior precisão na estimação,  $10^{-10}$ .

Este método resolve o problema, dos métodos de OLS e WLS, de erro homocedástico dado que o erro é aplicado diretamente ao número de mortes numa regressão de Poisson. Para além disto, Brouhns et al. (2002a) conclui com outra grande vantagem deste tipo de processo no ajustamento dos parâmetros do método LC, é o facto de ele 'allows for many other applications in life insurance'.

### Erro de estimação

Qualquer previsão tem sempre um erro associado. A minimização desse erro é um caminho na aderência do modelo à realidade. Neste sentido, Ronald Lee, um dos co-autores do método, passou os anos posteriores à publicação de Lee & Carter (1992) em diversas aplicações<sup>15</sup>. Da experiência retirada das aplicações e através da análise de diversas contribuições sobre a análise do erro na previsão demográfica<sup>16</sup>, Lee publicou um trabalho de referência do modelo LC, Lee (2000). Neste trabalho, a metodologia é apresentada, os problemas são abordados, as principais extensões são propostas e diversas aplicações são mostradas, tornando-se uma óptima referência para a análise do modelo e, em especial, para a análise do erro de estimação por este provocado.

Noutra perspectiva, aplicações práticas atuariais motivam sempre o alisamento das taxas de mortalidade estimadas. À semelhança do que foi visto para a estimação dos quocientes de mortalidade (veja-se subsecção 3.2.3, principalmente devido à existência de poucos dados para idades avançadas), torna-se necessário alisar os resultados do modelo para que não entremos em incoerências. Para além das referências já introduzidas na seção 3.2.3, veja-se ainda a proposta interessante de Delware et al. (2007) de um ajustamento por mínimos quadrados penalizados, onde o alisamento é imposto durante o ajustamento do modelo.

### Extrapolação por Lee-Carter

Depois de ajustar os dados ao modelo, tentamos extrapolar a mortalidade. Assumimos que os parâmetros  $\kappa_t$  eram intrinsecamente estocásticos. Entendemos por série temporal uma coleção de observações, neste caso de mortalidade, feitas sequencialmente ao longo do tempo. Vamos então tentar ajustar estes dados de séries temporais a um modelo auto-regressivo integrado de média móvel (ARIMA) apropriado para o parâmetro estocástico em causa<sup>17</sup>.

---

<sup>15</sup>Por exemplo, Lee & Nault (1993), Lee & Tuljapurkar (1994) ou Lee & Roffman (1994), cujas referências podem ser retiradas de Lee (2000).

<sup>16</sup>Realçamos os trabalhos: Alho (1990) Alho e Spencer (1990) Alho (1992), que mais uma vez estão referenciados em Lee (2000), e os diversos comentários aos artigos Lee e Carter (1992) e Lee (2000).

<sup>17</sup>Para uma explicação detalhada dos modelos utilizados em séries temporais veja-se Box et al. (2013).

Dizemos que a dinâmica dos  $\kappa_t$  é descrita por um processo ARIMA(p, d, q) se é estacionário e se

$$\nabla^d \kappa_t = \phi_1 \nabla^d \kappa_t + \dots + \phi_p \nabla^d \kappa_t + \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \psi_q \epsilon_{t-q}, \quad (3.76)$$

onde  $\nabla^d \kappa_t = \kappa_t - \kappa_{t-1}$ ,  $\phi_p \neq 0$ ,  $\psi_q \neq 0$ ,  $\epsilon$  são variáveis aleatórias normais independentes e identicamente distribuídas com média nula e variância positiva.

Os procedimentos de análise de séries temporais requerem que as variáveis estudadas sejam estacionárias, ou seja, que a sua média e variância sejam constantes ao longo do tempo e que a covariância para quaisquer dois períodos dependa unicamente do tamanho do intervalo entre esses dois períodos, que é uma condição 'fraca' para considerar uma variável estacionária. Existem métodos gráficos, como desenhar a função de autocorrelação e verificar se tem uma tendência crescente ou decrescente, e nesse caso a série seria não estacionária, e métodos analíticos, como o teste de Kwiatowski-Philips Schmidt-Shin, que nos permitem averiguar se a série temporal é estacionária ou não. No entanto existem dois tipos de processos, que originam séries não estacionárias, fáceis de transformar em estacionárias:

- Processos com componentes determinísticas, chamadas de tendencialmente estacionárias, pois podem ser facilmente transformadas em estacionárias simplesmente aplicando uma regressão em ordem ao tempo e trabalhando com os resíduos que daí surjam;
- Processos que acumulem os chamados choques estocásticos, que podem ser originados por, por exemplo, desastres ambientais; este tipo de séries são chamadas de diferenciais estacionárias já que podemos transformá-las em estacionárias calculando diferenças, uma ou mais vezes, entre os índices temporais.

Dado que nenhum coeficiente de correlação, nem coeficientes parciais de correlação, das diferenças índices temporais parecem ser significativamente diferente de 0, um processo ARIMA(0,1,0) surge como apropriado para estimar os  $\kappa_t$ 's. Um processo ARIMA(0,1,0) não passa de um passeio aleatório com drift, que é definido por:

$$\kappa_t = \kappa_{t-1} + d + \epsilon_t, \quad (3.77)$$

onde  $d$  é o parametro de drift e  $\epsilon_t$  é o fator residual, que como já foi dito será um conjunto de variáveis independentes com distribuição normal de média nula e variância positiva,  $\sigma^2$ . Assim temos que

$$\kappa_{t_n+k} = \kappa_{t_n} + kd + \sum_{j=1}^k \epsilon_{t_n+j} \quad (3.78)$$

e portanto a previsão pontual do índice temporal do nosso modelo será:

$$\hat{\kappa}_{t_n+k} = E[\kappa_{t_n+k} | \kappa_{t_1}, \kappa_{t_2}, \dots, \kappa_{t_n}] = \kappa_{t_n} + kd, \quad (3.79)$$

que segue uma linha reta como função do horizonte temporal  $k$ , com declive  $d$ . A variância condicional das previsões será

$$\text{var}[\kappa t_n + k | \kappa t_1, \kappa t_2, \dots, \kappa t_n] = k\sigma^2, \quad (3.80)$$

isto é, o desvio padrão dos erros da previsão aumentam na razão da raiz quadrada do horizonte de previsão  $k$ .

A dinâmica do passeio aleatório com drift assegura que  $\kappa_t - \kappa_{t-1}$ , para  $t = t_2, \dots, t_n$ , são independentes e com distribuição normal, de média  $d$  e variância  $\sigma^2$ . Assim, podem ser deduzidos os estimador da máxima verosimilhança para os parâmetros deste modelo ARIMA:

$$\hat{d} = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} (\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1}) = \frac{\hat{\kappa}_{t_n} - \hat{\kappa}_{t_1}}{t_n - t_1}; \quad (3.81)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} (\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1} - \hat{d})^2 = \frac{\hat{\kappa}_{t_n} - \hat{\kappa}_{t_1}}{t_n - t_1}. \quad (3.82)$$

Na aplicação prática, os resultados obtidos pelo processo ARIMA devem sempre ser analisados e só aceites se considerados razoáveis. Os modelos ARIMA constituem a grande melhoria que os modelos estocásticos têm em relação aos restantes: a taxa central de mortalidade toma a forma de um processo estocástico já que  $\kappa_t$  é modelado como uma variável de uma série temporal. Tuljapurkar (2000) estabelece que o declínio dos  $\kappa_t$  segue de acordo com um modelo ARIMA(0,1,0), ou seja, um passeio aleatório com drift. No entanto, tendo em conta a sua importância, diversas modificações a esta metodologia foram propostas desde 1992, e uma análise dos principais desenvolvimentos pode ser encontrada em Girosi & King (2007) ou em Lazar & Denuit (2009). Remetemos ainda o leitor para a análise de Box et al. (2013), onde os processos ARIMA são explicados a pormenor.

Calcular numericamente os valores de  $\kappa_t$ , para todos os anos considerados, através dos estimadores da máxima verosimilhança, é o primeiro passo na previsão da mortalidade. Depois, partindo do ano imediatamente posterior ao ano base,  $t' + 1$ , chamado na literatura inglesa de ano 'jump-off', estamos em condições de calcular a taxa central de mortalidade prevista através do método de Lee-Carter:

$$m_x(t) = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \kappa_t) = m_x(t') \exp[\hat{\beta}_x (\kappa_t - \hat{\kappa}_{t'})], \quad (3.83)$$

e a partir desta construir a tabela projetada de mortalidade. Para ver alguns exemplos de aplicações do método de Lee-Carter recomendamos os trabalhos de Renshaw e Haberman, Renshaw & Haberman (2003a, 2003b, 2003c), onde os autores ainda testam, respetivamente, se pode ser aproximado a um GLM, se é verosímil a construção de modelos de previsão tendo como base os dois primeiros conjuntos de SVD<sup>18</sup> e se pode ser modificado num modelo de factor de redução.

<sup>18</sup>Processo fundamental da metodologia proposta em Lee & Carter (1992).

## Extensões

Extensões triviais deste modelo como desagregações, cujo procedimento normalmente consiste em separar os dados e ajustar cada subpopulação independentemente, ou fixar mínimos para as taxas de mortalidade, estão descritas em Lee (2000), e especificados nas suas referências. Os autores do modelo reconhecem que um dos seus problemas é que as taxas centrais de mortalidade previstas não estão relacionadas com as taxas estimadas para o ano base (Lee & Carter (1992)). A literatura refere-se ao primeiro ano civil  $t > t'$  como ano "jump-off" (fazendo referência que saltamos da graduação para a previsão). Assim, as extensões mais utilizadas do método de Lee-Carter ajustam as taxas de mortalidade no ano 'jump-off' de forma a reduzir o erro de previsão que daí advém. Exemplos destas são o método de Lee-Miller (Lee & Miller (2001)) e o método de Booth-Maindonald-Smith (Booth et al. (2002)). O primeiro, para além do ajustamento das taxas no ano 'jump-off', os parâmetros  $\kappa_t$  são ajustados através da esperança de vida observada, ao invés do número total de mortes nesse ano. O que tem como vantagem não ser necessária tanta informação sobre a população. Em relação ao segundo, podemos dizer que difere de Lee-Carter em três sentidos: o período a considerar na construção da base de dados da mortalidade é obtido através de critérios estatísticos de ajustamento do modelo, assumindo que  $\kappa_1$  é linear; o ajustamento de  $\kappa_t$  é feito considerando a distribuição das mortes por idades ao invés do número total de mortes (e utilizando o resultado de Brilinger, 1986) e as taxas de mortalidade para o ano 'jump-off' são ajustadas tendo em conta a alteração anterior.

Uma extensão mais recente, e que tem vindo a mostrar-se eficiente, consiste no método Hyndman-Ullah (Hyndman & Ullah (2007)). Podemos dizer que este método difere do clássico, ignorando as extensões triviais que contempla, em outros dois pontos essenciais. Primeiro, o logaritmo das taxas de mortalidade são, num passo preliminar, suavizadas pela aplicação de uma regressão de splines penalizada, admitindo uma restrição parcialmente monótona, veja-se Ramsay (1988). Por outras palavras, é assumido que existe uma função contínua  $f_x(t)$  que é observada com erro nas idades discretas e que  $x$  é uma variável contínua. Então admite-se que:

$$\ln m_{x_i}(t) = f_{x_i}(t) + \sigma_{x_i}(t)\epsilon_{t,i}, \forall i \in Z, \quad (3.84)$$

onde  $\sigma_{x_i}(t)$  permite que o ruído varie com a idade  $x_i$  para o mesmo ano civil  $t$  e  $\epsilon_{t,i}$  é uma variável aleatória normal de média nula e variancia unitária independente e identicamente distribuída (iid). Segundo, note-se que um dos problemas do método de Lee-Carter é que não capta toda a informação sobre a mortalidade; na realidade apenas um fator do primeiro termo é considerado<sup>19</sup>. Assim, o método de Hyndman-Ullah aborda este problema tomando:

$$f_x(t) = \alpha_x + \sum_{j=1}^J \beta_x(j)\kappa_t(j) + \epsilon_{x,t}, \quad (3.85)$$

<sup>19</sup>Veja-se o processo de SVD em Lee & Carter (1992).

onde  $\alpha_x$  é estimado como no método LC,  $\{b_x(1), \dots, b_x(j)\}$  é o conjunto dos primeiros  $J$  termos principais e  $\{\kappa_t(1), \dots, \kappa_t(j)\}$  é um conjunto não correlacionado de valores das componentes principais. Segundo Hyndman & Booth (2008), seis componentes principais,  $J = 6$ , é suficiente para captar a informação mais importante da mortalidade. Com estas alterações, o conjunto de modelos de series temporais que podem ser utilizados para prever os valores de  $\kappa_t(j)$  é alargado, e nesse sentido, veja-se a proposta optimal de Hyndman & Khandakar (2008) e a suavização exponencial de Hyndman et al. (2008), que permitem constituem per si extensões do método Hyndman-Ullah.

### 3.5.2 O modelo Cairns-Blake-Dowd (CBD)

Analisando dados históricos, é razoável admitir a hipótese de que o logaritmo das hipóteses de mortalidade  $\ln \phi_x(t) = \ln(q_x(t)/p_x(t))$  têm um comportamento próximo ao linear. Assim, Carns et al. (2006a) assume o modelo:

$$\ln\left(\frac{q_x(t)}{p_x(t)}\right) = \kappa_t^1 + \kappa_t^2 \Leftrightarrow q_x(t) = \frac{\exp(\kappa_t^1 + \kappa_t^2 x)}{1 + \exp(\kappa_t^1 + \kappa_t^2 x)}; \quad (3.86)$$

onde os processos estocásticos  $k_t^1$  e  $k_t^2$  representam, respetivamente, a variação da mortalidade ao longo do tempo, para todas as idades, e a variação da mortalidade ao longo de cada idade, para um mesmo ano civil. Os procedimentos de ajustamento são similares aos estudados para o método de Lee-Carter e, em particular, o método MLE apresenta bons resultados. No que toca à projeção em si, são aplicados modelos ARIMA para estimar os índices temporais, à semelhança do feito para o método de Lee-Carter, que neste caso são dois:  $\kappa_t^1$  e  $\kappa_t^2$ ; para mais detalhe veja-se Carns et al.(2006a).

Na bibliografia é muitas vezes considerado este modelos em termos da função de transformação logit dos quocientes de mortalidade, isto é:

$$\text{logit}(q_x(t)) = \log\left(\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)}\right). \quad (3.87)$$

Assim, o modelo é expresso da seguinte forma equivalente:

$$\text{logit}(q_x(t)) = \beta_x^1 \kappa_t^1 + \beta_x^2 \kappa_t^2, \quad (3.88)$$

onde  $\beta_x^1 = 1$  e  $\beta_x^2 = (x - \bar{x})$ , com  $\bar{x}$  igual à média das idades da amostra.

Em relação ao método de Lee-Carter, temos três vantagens fundamentais ao utilizar este método: primeiro, não existe qualquer problema de identificabilidade, segundo, os dois parâmetros são processos estocásticos, o que permite captar informação mais complexa sobre a mortalidade e terceiro, este modelo produz automaticamente estimativas alisadas. Para além disto, existem evidências históricas de que mudanças nas taxas de mortalidade estão imperfeitamente correlacionadas, o que enfatiza a importância da segunda vantagem, já que permite uma maior aderência à realidade. Finalmente, quanto maior for a base de dados da mortalidade, maior a melhoria da extrapolação de um modelo com dois processos estocásticos, o caso deste, face um modelo de um só, como é o caso de Lee-Carter. Desta forma, numa situação de previsão de mortalidade em que se admitem apenas dois fatores propomos a utilização deste modelo ao invés do clássico LC.

### 3.6 Modelos APC

Considere-se o modelo de previsão de factores de redução referente às hipóteses de mortalidade,  $\phi_x(t) = q_x(t)/p_x(t)$ :

$$\phi_x(t) = \phi_x(t')r^{t-t'}, \quad (3.89)$$

onde, naturalmente,  $t'$  representa o ano base. Como se vê, o primeiro termo da fórmula apenas depende da idade  $x$ , dado que  $t'$  está sempre fixado, e o segundo termo apenas depende do tempo  $t$ . Assim, considere-se a seguinte reparameterização:

$$\phi_x(t) = A(x)B(t), \quad (3.90)$$

Então a estrutura da mortalidade futura, segundo este modelo, pode ser dividida em dois: o fator  $A(x)$ , que representa a influência que a idade tem na mortalidade e o fator  $B(t)$  que representa a influência do tempo (período) na mesma.

Assim, consideremos a chamada hipótese K-K-K (proposta por Kermack, McKendrick, & McKinlay em 1934):

$$\mu_x(\tau) = C(x)D(\tau), \quad (3.91)$$

onde, naturalmente,  $\tau$  representa o ano de nascimento da geração. Neste modelo vemos também que a estrutura da mortalidade futura está decomposta em:  $C(x)$ , que expressa o efeito da idade e  $D(\tau)$ , que expressa o efeito do coorte, isto é, o efeito que tem o ano de nascimento da geração,  $\tau$ , na mortalidade.

Todos os modelos estudados, por enquanto, neste trabalho não se preocupam em captar o efeito da coorte. Vejamos, desde os modelos de extrapolação dos quocientes de mortalidade até aos mais sofisticados modelos estocásticos de previsão da mortalidade, nenhum tenta por um momento captar a influência que o ano civil de nascimento tem na mortalidade. Exemplos do contrário podem ser extausivamente descritos aqui, como a 2ª Grande Guerra ou a epidemia da SIDA. No entanto devemos admitir que o efeito do tempo é mais influente para a mortalidade, do que o do coorte; daí que apenas tenhamos estudado modelos de dois factores que não consideram o efeito da coorte.

Já dissemos que o tempo intervém num óbito de três formas distintas, o ano em que o indivíduo em causa nasce, o ano em que este ocorre e a idade que o indivíduo tinha na altura do mesmo. Assim, a forma mais completa de modelar a mortalidade seria admitir três influências, cada uma representativa de uma das três formas como o tempo intervém na mortalidade.

Um modelo APC (Age-Period-Cohort) é um modelo que considera a influência da idade  $x$ , do tempo  $t$  e do ano de nascimento da geração  $\tau$  na mortalidade. Como já foi referido, através da informação de duas destas variáveis, ou factores, podemos deduzir o restante, logo admitamos, para qualquer modelo de coorte,  $\tau = t - x$ . Assim, um modelo APC, referente a uma lei de mortalidade, pode ser expresso como se segue:

$$\mu_x(t) = Q(x)R(t)S(t - x), \quad (3.92)$$

ou, como muitas vezes considerado, em termos do logaritmo:

$$\ln \mu_x(t) = \ln Q(x) + \ln R(t) + \ln S(t - x). \quad (3.93)$$

Esta é a forma geral de um APC. Um exemplo clássico de um dos primeiros a ser desenvolvido pode ser visto em Clayton & Schifers (1987). Apesar de este ser o passo seguinte na nossa caminhada de descrever da forma mais precisa possível a mortalidade, duas desvantagens deste tipo de modelos devem ser salientadas: *a)* a hipótese de independência entre a influência de cada um dos efeitos na mortalidade, que podemos concordar que é uma hipótese questionável; *b)* precisam de grandes quantidades de dados.

Em relação à segunda desvantagem, note-se que dados respeitantes a um século abrangem apenas uma geração, e nesta previsão da mortalidade é necessária informação de várias gerações. Como se tal não fosse suficiente, na maioria dos países em que existe a quantidade de dados necessária, registou-se uma experiência considerada, por diversos autores, inadequada, isto é, com demasiados eventos que provavelmente nunca voltarão a ocorrer (como as Grandes Guerras). A melhor forma de contornar este problema consiste em especificar as idades em estudo. Por exemplo, se considerarmos apenas um intervalo de idades de 20 anos, com dados referentes a um século já temos informação sobre cinco coortes.

Assim, nos últimos anos, com o reconhecimento dos modelos estocásticos como ferramenta fundamental na previsão da mortalidade, modelos APC começaram a atrair a atenção de todos os especialistas na previsão demográfica, primeiro através de extensões dos modelos estocásticos clássicos e, mais recentemente, o como modelos próprios. Iremos estudar modelos APC, sempre com caracteres estocásticos, seguindo esta mesma evolução: primeiro vamos analisar uma extensão ao modelo de Lee-Carter, depois o modelo de Currie que pode ser entendido como um caso particular do anterior, de seguida uma extensão do modelo de Carns-Blake-Dowd, e, finalmente, estudamos o próprio e sofisticado modelo de Plat.

### 3.6.1 Extensão do modelo Lee-Carter

Renshaw e Haberman (2006) propõe uma abordagem interessante ao modelo de Lee-Carter, que consiste em entender este modelo estocástico como um modelo de fatores de redução:

$$\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \ln R_x(t), \quad (3.94)$$

onde  $R_x(t) = \beta_x^0 \gamma_{t-x} \beta_x^1 \kappa_t$  define o fator de redução. Este é um modelo APC, já que  $\beta_x^0 \gamma_{t-x}$  tem exactamente o propósito de modelar o efeito do coorte. Em função da taxa central de mortalidade, podemos exprimir o modelo da seguinte forma:

$$\ln m_x(t) = \alpha_x + \beta_x^0 \kappa_t + \beta_x^1 \gamma_{t-x}, \quad (3.95)$$

onde, em concordância com o modelo LC,  $\alpha_x$  representa o valor médio da mortalidade ao longo do tempo,  $\beta_x^0$  e  $\beta_x^1$  medem a resposta à idade  $x$  de variações de  $\kappa_t$  e  $\gamma_{t-x}$ , respetivamente,  $\kappa_t$  representa o nível de mortalidade geral para o ano  $t$  e, finalmente,  $\gamma_{t-x}$  o nível geral da mortalidade para o coorte nascido no ano  $t-x$ . Como uma extensão do modelo de Lee-Carter, este modelo também admite problemas de identificabilidade, que nos obrigam à imposição das seguintes restrições:

$$\sum_t \kappa_t = 0, \sum_x \beta_x^0 = 1, \sum_{x,t} \gamma_{t-x} = 0 \text{ e } \sum_x \beta_x^1 = 1.$$

As primeira e terceira restrições garantem o valor estimado para  $\alpha$  vai ser aproximadamente igual à média do logaritmo da taxa central de mortalidade ao longo do tempo. As restantes, assim como no modelo LC, não têm escolhas naturais, mas a sua escolha não influencia o ajustamento do modelo apenas serve para que se possam retirar valores únicos.

No ajustamento do modelo, Renshaw e Haberman (2006) fixam o valor de  $\alpha_x$  na média amostral do logaritmo da taxa de mortalidade ao longo do tempo. Os restantes parâmetros são estimados utilizando o algoritmo iterativo do processo de máxima verosimilhança (MLE), como visto na seção do modelo de Lee-Carter. Finalmente, à semelhança do feito para modelos estocásticos, são utilizados métodos univariados, também poderiam ser utilizados multivariados, para ajustar e projetar os valores de  $\kappa_t$  e  $\gamma_{t-x}$ <sup>20</sup>.

Numa comparação de vários modelos estocásticos, em 2007, notou-se que os valores dos parâmetros, no algoritmo iterativo, convergem muito lentamente para os estimadores de máxima verosimilhança (Cairns et al. (2007)). O que sugere que, apesar das restrições supra referidas, algum problema de identificabilidade dos parâmetros ainda resiste. No entanto, os autores do modelo, em Haberman & Renshaw (2009), trabalho que exaustivamente testa o modelo, admitem que este problema "remains an issue for further investigation", e em qualquer outro trabalho não conseguimos obter uma explicação concreta para este fato. Pensamos que tal se deve ao facto de entretanto terem sido desenvolvidos outros modelos que obtinham previsões mais precisas, como é demonstrado nesse mesmo artigo (Cairns et al. (2007)). Apesar de tudo, o modelo conseguiu capturar com sucesso os três efeitos da mortalidade no Reino Unido e portanto implementado pelo Continuous Mortality Investigation Bureau (CMIB (2007)). Para um estudo aprofundado sobre este modelo aconselhamos o supra referido Haberman & Renshaw (2009).

### 3.6.2 O modelo de Currie

Currie (2006) introduz aquele que é considerado o mais simples modelo APC:

$$\ln m_x(t) = \alpha_x + \kappa_t + \gamma_{t-x}, \quad (3.96)$$

que naturalmente pode ser considerado um caso particular do modelo supra descrito, fazendo  $\beta_x^0 = \beta_x^1 = 1$ , isto é, pode ser entendido como outra extensão do modelo de Lee-Carter. O autor propõe que o modelo seja ajustado por P-splines, metodologia desenvolvida em Currie et al. (2004). Podemos inclusivamente deduzir que este modelo é apenas proposto como um exemplo de uma das diversas aplicações que estes P-splines podem ter. No entanto, esta metodologia viola uma característica fundamental de qualquer modelo estocástico, a capacidade de criar passeios aleatórios.

Desta forma, em Cairns et al. (2007) é apresentada outra metodologia à estimação dos parâmetros, em muito similar à proposta para o método LC; o que é natural dado

---

<sup>20</sup>A metodologia utilizada pelos restantes modelos APC é muito similar a esta e portanto será omitida, para mais pormenores vejam-se os trabalhos em que tais modelos foram propostos.

tratar-se de um caso particular. Este modelo extrapolado revela-se um dos modelos com melhores resultados de todos os APC alguma vez propostos, e assim, sempre que é referido em qualquer trabalho tem sempre subjacente esta metodologia.

### 3.6.3 Extensão do modelo Cairns-Blake-Dowd

As extensões do modelo LC costumam surgir como uma forma de contornar problemas registados no modelo clássico. Pelo contrário, tal nunca aconteceu com o modelo CBD, visto que qualquer extensão poria sempre em causa a simplicidade do modelo. Assim, quando decidiu-se estender este modelo para incorporar o efeito da coorte, seguiu-se uma metodologia mais experimental. O que queremos dizer é que diversas extensões foram propostas, testadas e analisadas a partir dos seus resultados. Para não tornar esta análise muito exaustiva, iremos apenas apresentar a extensão mais simples e a que conseguiu obter melhores resultados. As restantes podem ser encontradas em Cairns et al. (2011). A extensão trivial do modelo CBD a um modelo APC é naturalmente:

$$\text{logit}(q_x(t)) = \beta_x^1 \kappa_t^1 + \beta_x^2 \kappa_t^2 + \beta_x^3 \gamma_{t-x}, \quad (3.97)$$

onde  $\gamma_{t-x}$  tem o propósito de modelar o efeito da coorte.

A extensão que apresentou melhores resultados é chamada pelos autores de M7 (Cairns et al. (2007)<sup>21</sup>) e toma a seguinte forma:

$$\text{logit}(q_x(t)) = \kappa_t^1 + \kappa_t^2(x - \bar{x}) + \kappa_t^3((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + \Psi_{t-x}, \quad (3.98)$$

onde a constante  $\hat{\sigma}_x^2$  é a variância amostral, não centrada, da idade ao longo do tempo. A inclusão do termo quadrático é motivada por uma curvatura que os autores pensam ter observado no gráfico dos  $\text{logit}(q_x(t))$  para dados dos EUA.

O método CBD não tinha qualquer problema de identificabilidade, no entanto em todas as extensões APC deste tal não foi verificado. Neste caso temos que o modelo é invariante à seguinte seguinte transformação:

$$\gamma_{t-x} \mapsto \gamma_{t-x} + \phi_1 + \phi_2(t - x - \bar{x}) + \phi_3(t - x - \bar{x}), \quad (3.99)$$

onde  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  são constantes. Assim, é imposta a restrição, durante a aproximação por mínimos quadrados, de que  $\gamma_{t-x}$  é identicamente igual a zero, o que fixa os valores de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$ , resolvendo o problema.

### 3.6.4 O modelo de Plat

Finalmente, temos o modelo proposto por Plat (2009) que foi construído contemplando os três fatores que qualquer modelo de mortalidade pode contemplar. Toma a seguinte forma:

$$\ln m_x(t) = \alpha_x + \kappa_t^1 + \kappa_t^2(\bar{x} - x) + \kappa_t^3(\bar{x} - x)^+ + \gamma_{t-x}, \quad (3.100)$$

---

<sup>21</sup>A análise deste trabalho deve ser acompanhada de Dowd et al. (2010b) onde são apresentados os resultados dos testes de precisão efetuados.

onde  $(\bar{x} - x)^+ = \max(\bar{x} - x, 0)$ ; os  $\alpha_x$ , como no modelo LC, garante que o formato base da mortalidade segue a tendência das observações históricas; o fator  $k^1$  representa as mudanças do nível de mortalidade para todas as idades; o fator  $k^2$  permite mudanças na mortalidade entre idades; o fator  $k^3$  tenta capturar dinâmicas das taxas de mortalidade a idades baixas que podem ser diferentes em diferentes tempos, por exemplo, a SIDA, drogas, álcool e violência; e, finalmente, o fator  $\gamma_{t-x}$  captura o efeito da coorte. Para idades avançadas, que Plat define de mais de 60 anos, é proposto que se omita o fator  $k^3$ , ficando com o modelo reduzido

$$\ln m_x(t) = \alpha_x + \kappa_t^1 + \kappa_t^2(\bar{x} - x) + \gamma_{t-x}. \quad (3.101)$$

Como em todos os modelos APC apresentados, este modelo sofre de problemas de identificabilidade, neste caso:

$$\{\alpha_x, \kappa_t^1, \kappa_t^2, \gamma_{t-x}\} \mapsto \{\alpha_x + (1-d)\psi_2, \kappa_t^1 + \phi_1 - d\bar{x}\phi_2, \kappa_t^2 + d\phi_2, \gamma_{t-x} + \phi_1 + \phi_2\}, \quad (3.102)$$

onde  $\phi_1, \phi_2$  e  $d$  são constantes, permitem-nos obter resultados semelhantes.

Para resolver este problema, o autor propõe as seguintes restrições:  $\sum_{c=c_0}^{c_1} \gamma_c = 0$ ,  $\sum_{c=c_0}^{c_1} C\gamma_c = 0$  e  $\sum_t \kappa_t^3 = 0$ , onde  $c_0$  e  $c_1$  são, respetivamente, o primeiro e o último ano de nascimento da coorte para o qual estamos a ajustar o modelo, e claro  $c = t - x$ , visto tratar-se do ano de uma geração.

## 3.7 A escolha do modelo a implementar

### 3.7.1 Critérios

Vários modelos estocásticos da previsão de mortalidade foram propostos ao longo deste texto, mas qual devemos utilizar para prever a mortalidade? Um estatístico, imediatamente pensaria na análise de resíduos, no entanto esta modelação é mais que uma modelação estatística, é uma modelação de uma variável demográfica. Desta forma, seguindo a sugestão dos autores destes modelos (Carns et al. (2006b, 2008) e Plat (2009)), vamos propor uma lista de critérios que nos permitem avaliar os modelos de previsão da mortalidade:

- As taxas de mortalidade devem ser positivas;
- o modelo deve ser consistente com os dados históricos;
- a dinâmica do modelo deve ser biologicamente razoável;
- as estimações dos parâmetros do modelo devem ser robustas relativamente ao período de análise e ao intervalo de idades considerado;
- os níveis de incerteza da previsão, bem como as trajetórias centrais, devem ser plausíveis e consistentes com os padrões de mortalidade históricos e a incerteza destes;

- o modelo deve ser de implementação simples, utilizando métodos analíticos ou algoritmos numéricos rápidos, para que a complexidade dos programas não seja muito elevada;
- o modelo deve ser o mais simples possível, com o número mínimo de variáveis; o que na literatura costuma ser chamado de parcimónia;
- deve ser possível usar o modelo para criar passeios aleatórios amostrais e calcular intervalos de predição<sup>22</sup>;
- a estrutura do modelo deve tornar possível a incorporação de parâmetros de incerteza na simulação;
- pelo menos para alguns países, o modelo deve incorporar o efeito do coorte, de uma forma estocástica;
- o modelo não deve ter uma estrutura correlacional trivial;
- o modelo deve ser aplicável a todo o espectro de idades.

Alguns destes critérios merecem uma breve explicação, quer pela sua complexidade quer pela sua importância, que será abordada de seguida.

#### Consistência com os dados históricos

Este é sem dúvida um critério indiscutível, e provavelmente a base da construção de qualquer modelo. Muitas das ferramentas utilizadas para avaliar os modelos na sua aderência aos dados são puramente estatísticas, como a clássica análise de resíduos. No entanto têm vindo a ser desenvolvidos métodos mais complexos para o averiguar (veja-se por exemplo os testes a modelos aplicados em Dowd et al. (2010a, 2010b)).

#### Razoabilidade biológica

A ideia de razoabilidade biológica foi derivada do conceito de razoabilidade económica na modelação de taxas de juro, em Cairns et al. (2006b). Apesar de qualquer um poder ter uma ideia própria do que isto significa, existem certos resultados que devem ser analisados de uma perspetiva crítica; por exemplo, à medida que a idade avança, as taxas de mortalidade devem ser cada vez maiores para que o modelo satisfaça este critério.

#### Robustez

Quando ajustamos um modelo precisamos de especificar qual o período de tempo que é considerado para a base de dados da mortalidade e qual o intervalo de idades que vamos ajustar. Uma alteração do período ou do intervalo de idades da base de dados

---

<sup>22</sup>A principal vantagem da satisfação deste critério está relacionada com a prática atuarial.

da mortalidade resulta numa revisão das estimações dos parâmetros. Dizemos que um modelo é robusto se essa revisão for relativamente modesta e consistente com a variação dos dados, o que permite ter confiança nas previsões que este modelo gera.

### Parcimónia

Devemos evitar que os modelos sejam excessivamente parametrizados. No ideal devemos garantir que cada parâmetro extra só deve ser incluído quando constitui uma melhoria significativa do ajustamento do modelo. Para escolher entre os modelos é usualmente utilizado o Critério de Informação Bayesiana (BIC).

Diversos autores, em trabalhos de comparação de modelos estocásticos de mortalidade, dizem que um modelo APC pode satisfazer razoavelmente este critério mas nunca perfeitamente, visto que um parâmetro é acrescentado para modelar o efeito do coorte. No entanto, mesmo que objetivamente nenhum dos modelos aqui apresentados satisfaça este critério, devemos entendê-lo como um critério de preferência: prefere-se sempre o modelo com o BIC mais alto.

### Incerteza dos parâmetros

Temos uma base de dados histórica limitada e portanto é natural que a estimação dos parâmetros esteja sujeita a erros de estimação. Assim, é importante incorporar incertezas nos parâmetros de forma a averiguar sobre o impacto destes erros de estimação. Por exemplo, Cairns et al. (2006b) e Dowd et al. (2010c) foram capazes de concluir que a inclusão de incertezas nos parâmetros teve um impacto significativo nos níveis de incerteza da previsão das taxas de mortalidade, esperanças médias de vida e especialmente para horizontes temporais mais longos. Existem três abordagens possíveis para incluir incertezas nos parâmetros:

1. Utilizar modelos Bayesianos (veja-se por exemplo Cairns et al. (2006b));
2. simular os valores dos parâmetros utilizando as estimativas e os desvios padrão dos erros obtidos do processo de estimação. Note-se que quando são utilizados os métodos OLS, WLS ou MLE os erros são sempre assumidos com distribuição (assimptoticamente) normal;
3. aplicar procedimentos de bootstrap, como descritos em Brouhns et al. (2005) e Renshaw e Haberman (2008).

### Efeito da coorte

No início da secção anterior realçamos a importância do efeito da coorte. No entanto, também falámos em duas desvantagens intrínsecas dos modelos APC, e recordamos que uma delas era a grande quantidade de informação necessária para o seu ajustamento. Nesse sentido, desenvolveu-se um passo essencial à modelação da mortalidade: a determinação da influência do efeito da coorte. Assim, em países que este efeito não tenha

grande impacto é usual não considerar modelos APC e, pelo contrário, optar por modelos de apenas dois fatores. Um país com um efeito da coorte com grande impacto é a Inglaterra (Cairns et al. (2007)) e um exemplo do contrário pode ser visto na Bélgica (Pitacco et al. (2009)). Sobre este passo preliminar referimos os trabalhos Willets (2004) e Richards et al. (2006).

### Estrutura correlacional não trivial

Dados empíricos levam-nos a acreditar que os melhoramentos da mortalidade, que se têm vindo a verificar ao longo dos anos estão correlacionados, ainda que essa correlação não seja perfeita. Modelos que têm uma estrutura correlacional trivial assumem uma correlação perfeita, pelo que devem ser evitados.

### 3.7.2 Comparando modelos

Iremos agora comparar os modelos APC descritos ao longo deste texto, com base nestes critérios. Vamos analisar os quatro modelos estocásticos: o modelo proposto por Renshaw e Haberman, o modelo de Currie, a extensão M7 do modelo CBD e o modelo de Plat. Dos doze critérios supra mencionados, nove são cumpridos por todos os modelos em análise. Então vamos discutir os restantes três critérios: a robustez, a estrutura não correlacional e a aplicabilidade a todo o espetro de idades.

Como já referimos, um modelo que não seja robusto deve ser aplicado com muito cuidado, pois o facto das estimativas dos parâmetros não serem robustas obriga-nos a colocar em causa as projeções feitas por ele. Em Cairns et al. (2007) é concluído que o modelo de Renshaw e Haberman não satisfaz este critério, não sendo registado o mesmo para qualquer outro modelo. Em relação à estrutura correlacional do modelo vemos que quer para o modelo de Renshaw e Haberman, quer para o modelo de Currie, temos uma correlação perfeita, dado que existe apenas um processo estocástico para descrever o efeito do período na mortalidade e apenas um para descrever o efeito do coorte. De uma forma rude podemos dizer que a estrutura correlacional do modelo é menos linear quantos mais forem os  $\kappa_t$ 's considerados. Tendo em conta o critério da parcimónia, podemos concluir que os dois restantes modelos, a extensão M7 de CBD e o modelo de Plat têm uma estrutura correlacional não trivial.

Finalmente, temos a aplicabilidade do modelo a todo o espetro de idades. Em relação a este tópico, vemos que o modelo proposto por Plat tem um termo independente para modelar a mortalidade a idades jovens e fica reduzido a outra forma para idades avançadas. Plat (2009) verificou que a extensão M7 de CBD, apesar de satisfazer todos os critérios anteriormente mencionados, foi desenhado apenas para idades avançadas, produzindo alguns erros de estimação em idades jovens. Na verdade, dos quatro modelos, os modelos que melhor satisfazem este critério são o modelo de Plat e o modelo de Currie.

Assim, podemos concluir que o modelo de Plat é o único que satisfaz todos os critérios, ou seja, é o modelo que deve ser escolhido preferencialmente para projetar a mortalidade. No entanto, deveríamos investigar de que forma este modelo satisfaz alguns destes critérios: analisar os resíduos do modelo, calcular o BIC e comparar com os dos restantes

modelos, etc. Em particular, note-se que vários destes critérios não devem ser entendidos como booleanos. Para uma análise completa deste modelo veja-se Plat (2009), onde se conclui um maior BIC, para as três subpopulações admitidas, e um melhor ajustamento aos dados históricos, comparativamente aos restantes modelos. Assim, Plat conclui o artigo com a seguinte frase: "So by combining the nice features of the existing models, the proposed model has eliminated the disadvantages of those models, and as a result the model meets all of the criteria set for stochastic mortality models."

### 3.8 Conclusão

Há mais de uma década atrás, fazendo um ponto de situação dos modelos de previsão de mortalidade, Tabeau et al. (2001) referia que um dos maiores problemas na previsão da mortalidade era a escassez de dados. Evidentemente que este problema ainda subsiste, como fomos referindo ao longo deste trabalho: existem poucos registos em idades avançadas, tornando os dados muito dispersos e difíceis de modelar; na generalidade dos países em desenvolvimento a previsão é muito pouco fiável; nos países desenvolvidos podemos retirar, no máximo, o perfil de mortalidade de duas gerações, e nas abordagens por causa de morte, existe um grave problema em classificar a informação. Agravando esta conjectura, a generalidade da informação que temos remete-se ao século XX, marcado por picos invulgares de mortalidade, como a segunda Guerra Mundial.

Do ponto de vista técnico, a evolução da complexidade dos modelos depende de desenvolvimentos na área da estatística ou, mais especificamente, da análise de séries temporais. No entanto não devemos nunca esquecer o critério da parcimónia, e assim complexidade não é sinónimo de um melhoramento do modelo. Para que tal se verifique é necessário conseguir um melhoria na previsão excepcional, mas, sinceramente, pensamos que tal não seja possível; dado que os modelos aqui abordados não contemplam erros assim tão grandes. No entanto não podemos deixar de referir a abordagem de Dowd et al. (2011), que se baseia na modelação simultânea de duas populações, normalmente respeitantes a regiões ou países distintos. O conceito não é novo, no entanto foi a primeira vez que se apresentou com um carácter estocástico. As principais vantagens desta abordagem são a consistência de previsões entre diferentes populações, a facilidade de trocas comerciais internacionais na prática atuarial e a incorporação do tão falado fenómeno da Globalização.

Tudo isto leva-nos à conclusão que a chave da modelação da mortalidade é o tempo. Se pensarmos que daqui a um século já teremos muito mais informação, por um lado, e a capacidade de decidir se as previsões estabelecidas hoje em dia são precisas, por outro, podemos concluir que a velocidade com que o tempo passa é o maior obstáculo desta especialidade. Por outras palavras, só podemos perceber o quão adequados são os modelos de Plat (2009) ou de Dowd et al. (2011) quando as suas previsões forem comparadas com o que efetivamente acontecem, por mais critérios que estes satisfazem ou por melhores resultados que apresentem nos testes a que são submetidos. No que toca ao nosso país, de facto podemos dizer que Portugal nunca teve uma grande tradição na modelação da mortalidade (Tabeau et al. (2001)). Em específico, a previsão da mortalidade foi

abordada pela primeira vez em 2002, numa abordagem tão simples como a já referida extrapolação por método gráfico. No entanto, a modificação da pirâmide etária e a preocupação dos restantes países membros da UE com esta problemática levaram a que a primeira década século XXI fosse marcada por inúmeros desenvolvimentos, por parte do INE, nesta área. Em 2007, foram introduzidas metodologias dinâmicas no cálculo de tabelas de mortalidade do passado (INE (2007)) e apenas dois anos depois foi feita a primeira previsão de mortalidade seguindo um modelo estocástico (INE (2009)). Para além disso, estes sete anos, de 2002 a 2009, foram marcados por diversos estudos, quer do INE quer universitários, sobre os principais indicadores demográficos, e em particular, no nosso âmbito, da mortalidade. O modelo implementado para a projecção da mortalidade, como já referido, é um método próprio que tem como base o método de Lee-Carter e o uso das chamadas tabelas limite (Bravo et al. (2010)). Apesar de, numa análise rigorosa, termos de concordar que este método não satisfaz todos os critérios indicados na secção anterior, não podemos esquecer que este é um método próprio desenvolvido exclusivamente para a nossa população. Mesmo que exista um longo caminho por percorrer, os passos dados durante este século revelam um agência oficial séria e preocupada, cujo maior interesse é o de contribuir para a resolução das grandes problemáticas sociais, no que toca, pelo menos, ao nosso âmbito de estudo.

Um dos objetivos deste trabalho é a divulgação nacional de tudo o que envolve a modelação mortalidade e, em particular, explicar a problemática que envolve o nosso sistema de Segurança Social, contribuindo para o esforço nacional supra mencionados. A abordagem que escolhemos para tal foi um 'state of the art', e desta forma pretendemos que o leitor tenha conseguido captar o ponto de situação da ciência actuarial nesta especialidade. O segundo objetivo, era que o leitor fosse capaz de interpretar corretamente a informação que pode ser retirada das tabelas de mortalidade (dinâmicas), e para tal tivemos de analisar os modelos e os conceitos por detrás destas. Finalmente, o terceiro objetivo, que seria ideal, era fornecer todas as ferramentas necessárias para a construção deste tipo de tabelas de mortalidade, e nessa medida o HMD ([www.mortality.org](http://www.mortality.org)) constitui uma base de dados respeitada por toda a ciência atuarial. Para leitores com este objetivo recomendamos ainda a análise de implementações práticas do modelo que escolham; que podem ser encontradas nos artigos em que os modelos foram introduzidos.

No fim deste trabalho, não podemos deixar de propor alguns trabalhos futuros que sentimos que serão importantes nesta área. Primeiro, propomos que seja feita uma análise do efeito da coorte para Portugal, à semelhança do que já foi feito em diversos outros países. Depois, propomos uma previsão de mortalidade através do modelo de Plat ou do modelo CBD, caso se registre a influência do efeito da coorte ou não, respetivamente. Propomos esta análise para que, quando os resultados de Bravo et al. (2008) forem confrontados com a realidade, tenhamos um modelo alternativo e assim possamos também comparar a eficiência entre os modelos. Finalmente, propomos uma análise do modelo de Dowd et al. (2011) e posterior aplicação a duas populações. Neste âmbito, Portugal deveria ser comparado a outro país com um conjuntura social, cultural e económica similar; assim, sem querer ferir susceptibilidades, propomos a modelação em conjunto com outro país mediterrâneo, recaindo a nossa preferência para a Espanha, a Grécia ou inclusivamente

a Itália.

Começámos o nosso estudo pela modelação da mortalidade em populações estacionárias, onde toda a notação atuarial e as suas relações fundamentais foram estabelecidas. Vimos que na modelação da mortalidade tudo se concretiza numa tabela de mortalidade. Todavia, mais do que aprender como elaborar uma tabela é necessário compreender os modelos que a suportam. Desta forma, ao ritmo acelerado que a ciência atuarial teve nas últimas três décadas, os modelos de mortalidade foram sendo cada vez mais complexos mas cada vez mais próximos da realidade. Sumariamente, pegámos no modelo para populações estacionárias e atribuímos um carácter dinâmico; extrapolámos a respectiva mortalidade, seguindo as suas tendências do passado; atribuímos-lhe um carácter aleatório (estocástico) e, finalmente, incorporámos o efeito que o ano de nascimento pode ter sobre a mortalidade de uma geração. No final da caminhada tínhamos todo um conjunto de ferramentas para a previsão da mortalidade e tornou-se indispensável encontrar uma forma de as ordenar. Para isso, analisámos um conjunto de critérios e concluímos aconselhando a utilização do modelo de Plat (2009). No entanto, a modelação da mortalidade tem tanto de ciência como de arte e, portanto, a ferramenta mais importante neste processo será sempre o bom senso.

# Referências Bibliográficas

- [Alders & de Beer (2006)] Alders, M., & de Beer, J. (2006). An expert knowledge approach to stochastic mortality forecasting in the Netherlands. *textit Perspectives on mortality forecasting II. Probabilistic models*. Swedish Social Insurance Agency, Stockholm, 39-64.
- [Ahmad et al. (2000)] Ahmad, O. B., Lopez, A. D., & Salomon, J. A. (2000). *textitWHO system of model life tables*. World Health Organization.
- [Bongaarts (2006)] Bongaarts, J. (2006). How long will we live? *Population and Development Review*, 32(4), 605-628.
- [Booth et al. (2002)] Booth, H., Maindonald, J., & Smith, L. (2002). Applying lee-carter under conditions of variable mortality decline. *Population studies*, 56(3), 325-336.
- [Booth (2006)] Booth, H. (2006). Demographic forecasting: 1980 to 2005 in review. *International Journal of Forecasting*, 22(3), 547-581.
- [Booth & Tickle (2008)] Booth, H., & Tickle, L. (2008). Mortality modelling and forecasting: A review of methods. *Annals of Actuarial Science*, 3(1-2), 3-43.
- [Bowers (1986)] Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. & Nesbitt, C. J. (1986). *Actuarial Mathematic*. The Society of Actuaries, second edition.
- [Box et al. (2013)] Box, G. E., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (2013). *Time series analysis: forecasting and control*. Wiley, fourth edition.
- [Bravo et al. (2008)] Bravo, J., Coelho, E., & Magalhães, M. (2008). *Mortality and longevity projections for the oldest-old in Portugal*. European Population Conference 2008.
- [Bravo et al. (2010)] Bravo, J., Coelho, E., & Magalhães, M. G. (2010) Mortality projections in Portugal. *Joint Eurostat/UNECE Work Session on Demographic Projections* (28-30 April 2010, Lisbon, Portugal).
- [Brillinger (1986)] Brillinger, D. R. (1986). A biometrics invited paper with discussion: the natural variability of vital rates and associated statistics. *Biometrics*, 1, 693-734.

- [Brouhns et al. (2002a)] Brouhns, N., Denuit, M., & Vermunt, J. K. (2002b). A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(3), 373-393.
- [Brouhns et al. (2002b)] Brouhns, N., Denuit, M., & Vermunt, J. K. (2002a). Measuring the longevity risk in mortality projections. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 2, 105-130.
- [Brouhns et al. (2005)] Brouhns, N., Denuit, M., & Van Keilegom, I. (2005). Bootstrapping the poisson log-bilinear model for mortality forecasting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(3), 212-224.
- [Cairns et al. (2006a)] Cairns, A. J., Blake, D. & Dowd, K. (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance*, 73(4), 687-718.
- [Cairns et al. (2006b)] Cairns, A. J., Blake, D. & Dowd, K. (2006). Pricing death: Frameworks for the valuation and securitization of mortality risk. *Astin Bulletin*, 36(1), 1-79.
- [Cairns et al. (2007)] Cairns, A. J., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A., & Balevich, I. (2007). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from england and wales and the united states. *North American Actuarial Journal*, 13(1), 1-35.
- [Cairns et al. (2008)] Cairns, A. J., Blake, D., & Dowd, K. (2008). Modelling and management of mortality risk: a review. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2008(2-3), 79-113.
- [Cairns et al. (2011)] Cairns, A. J., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. (2011). Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48(3), 355-367.
- [Champion et al. (2004)] Champion, R., Lenard, C. T., & Mills, T. M. (2004). newblock Splines. In *Encyclopedia of Actuarial Science.*, 37(1), 127-144.
- [Clayton & Schifflers (1987)] Clayton, D. & Schifflers, E. (1987). Models for temporal variation in cancer rates: age-period and age-cohort models. *Statistics in medicine*, 6(4), 449-481.
- [CMIB (1978)] CMIB (1978). Report no. 3. Continuous Mortality Investigation Bureau, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries.
- [CMIB (1990)] CMIB (1990). Report no. 10. Continuous Mortality Investigation Bureau, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries.
- [CMIB (1999)] CMIB (1999). Report no. 17. Continuous Mortality Investigation Bureau, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries.

- [CMIB (2007)] CMIB (2007). Cmi working paper no. 27. Continuous Mortality Investigation Bureau, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries.
- [Coale & Guo (1989)] Coale, A. & Guo, G. (1989). Revised regional model life tables at very low levels of mortality. *Population Index*, 55, 613-643.
- [Coale & Kisker (1990)] Coale, A. & Kisker, E. (1990). Defects in data on old age mortality in the united states: new procedures for calculating approximately accurate mortality schedules and life tables at the highest ages. *Asian and Pacific Population Forum*, 4, 1-31.
- [Copas & Haberman (1983)] Copas, J. B., & Haberman, S. (1983). Non-parametric graduation using kernel methods. *Journal of the Institute of Actuaries*, 110(1), 135-156.
- [Currie et al. (2004)] Currie, I. D., Durban, M., & Eilers, P. H. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical modelling*, 4(4), 279-298.
- [Currie (2006)] Currie, I. D. (2006). *Smoothing and forecasting mortality rates with p-splines*. Talk given at the Heriot Watt University, Edinburgh.
- [Delwarde & Denuit (2006)] Delwarde, A. & Denuit, M. (2007). *Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives*. Ed. Economica, Paris.
- [Delwarde et al. (2007)] Delwarde, A., Denuit, M., & Eilers, P. (2007). Smoothing the lee-carter and poisson log-bilinear models for mortality forecasting a penalized log-likelihood approach. *Statistical Modelling*, 7(1), 29-48.
- [Denuit & Goderniaux (2005)] Denuit, M. & Goderniaux, A. (2005). Closing and projecting lifetables using log-linear models. *Bulletin de l'Association Suisse des Actuaries*, 1, 29-49.
- [Doray (2008)] Doray, L. G. (2008). Inference for logistic-type models for the force of mortality. *SOA Monograph M-L108*, 1, 18.
- [Dowd et al. (2010a)] Dowd, K., Cairns, A. J., Blake, D., Coughlan, G. D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. (2010). Backtesting stochastic mortality models: An ex post evaluation of multiperiod-ahead density forecasts. *North American Actuarial Journal*, 14(3), 281-298.
- [Dowd et al. (2010b)] Dowd, K., Cairns, A. J., Blake, D., Coughlan, G. D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. (2010). Evaluating the goodness of fit of stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 47(3), 255-265.
- [Dowd et al. (2010b)] Dowd, K., Blake, D., & Cairns, A. J. (2010). Facing up to uncertain life expectancy: The longevity fan charts. *Demography*, 47(1), 67-78.

- [Dowd et al. (2011)] Dowd, K., Cairns, A. J., Blake, D., Coughlan, G. D., and Khalaf-Allah, M. (2011). A gravity model of mortality rates for two related populations. *North American Actuarial Journal*, 15(2), 334-356.
- [Fan & Gijbels (1996)] Fan, J., & Gijbels, I. (1996). Local Polynomial Modelling and its Applications. In *Chapman, Hall, London*.
- [Forfar et al. (1988)] Forfar, D. O., McCutcheon, J. J., e Wilkie, A. D. (1988). On graduation by mathematical formula. *Journal of the Institute of Actuaries*, 115, 1-149.
- [Forfar (2004a)] Forfar, D. O. (2004). Life tables. In *Encyclopedia of Actuarial Science*, volume 2, (pp. 1005-1009). John Wiley & Sons.
- [Forfar (2004b)] Forfar, D. O. (2004). Mortality laws. In *Encyclopedia of Actuarial Science*, volume 2, (pp.1139-1145). John Wiley & Sons.
- [Frier (1982)] Frier, B. (1982). Roman life expectancy: Ulpian's evidence. *Harvard Studies in Classical Philology*, 86, 213-251.
- [Giroso & King (2006)] Giroso, F. & King, G. (2006). *Demographic forecasting*. Cambridge University Press.
- [Gutterman & Vanderhoof (1998)] Gutterman, S. & Vanderhoof, I. T. (1998). Forecasting changes in mortality: a search for a law of causes and effects. *North American Actuarial Journal*, 2(4), 135-138.
- [Haberman & Renshaw (2009)] Haberman, S., & Renshaw, A. (2009). On age-period-cohort parametric mortality rate projections. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(2), 255-270.
- [Heligman & Pollard (1980)] Heligman, L. & Pollard, J. (1980). The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 107(1), 49-80.
- [Hyndman & Khandakar (2007)] Hyndman, R. J. & Khandakar, Y. (2007). Automatic time series for forecasting: the forecast package for R.
- [Hyndman & Ullah (2007)] Hyndman, R. J. & Ullah, S. (2007). Robust forecasting of mortality and fertility rates: a functional data approach. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(10), 4942-4956.
- [Hyndman & Booth (2008)] Hyndman, R. J. & Booth, H. (2008). Stochastic population forecasts using functional data models for mortality, fertility and migration. *International Journal of Forecasting*, 24(3), 323-342.
- [Hyndman et al. (2008)] Hyndman, Rob J, Koehler, A. B., Ord, J. K. & Snyder, R. D. (2008). *Forecasting with exponential smoothing: the state space approach*. Springer.

- [INE (2004)] Instituto Nacional de Estatística (2004). Tábuas de mortalidade em português. *Revista dos Estudos Demográficos*, 36, 41-69.
- [INE (2007)] Instituto Nacional de Estatística (2007). Tábuas Completas de mortalidade para Portugal: metodologia 2007.
- [INE (2009)] Instituto Nacional de Estatística (2004). Projecções de população residente: Portugal - 2008-2060 - Metodologia.
- [IPS (2013)] Instituto Português de Seguros (2013). *Fundos de pensões*. Retirado de <http://www.isp.pt/NR/exeres/4DE486C5-1AEB-4CAE-B067-271F662A5D10.html>.
- [Joseph (1952)] Joseph, A. W. (1952). The Whittaker-Henderson method of graduation. *Journal of the Institute of Actuaries*, 78(1), 99-114.
- [Kunst et al. (2002)] Kunst, A. E., Mackenbach, J. P., Lautenbach, H., Oei, F. B., & Bijlsma, F. (2002). Gains in life expectancy by eliminating major causes of death: revised estimates taking into account competing causes of death. In *The Life Table*, pp. 191-207. Springer.
- [Lazar & Denuit (2009)] Lazar, D. & Denuit, M. M. (2009). A multivariate time series approach to projected life tables. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 25(6), 806-823.
- [Le Bras (2008)] Le Bras, H. (2008). Mortality tempo versus removal of causes of mortality: opposite views leading to different estimations of life expectancy. In *How Long Do We Live?*, pp. 167-189. Springer.
- [Lee & Carter (1992)] Lee, R. D. & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting us mortality. *Journal of the American statistical association*, 87(419), 659-671.
- [Lee (2000)] Lee, R. (2000). The lee-carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American actuarial journal*, 4(1), 80-91.
- [Lee & Miller (2001)] Lee, R. & Miller, T. (2001). Evaluating the performance of the lee-carter method for forecasting mortality. *Demography*, 38(4), 537-549.
- [Lindbergson (2001)] Lindbergson, M. (2001). Mortality among the elderly in Sweden. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 79-94.
- [Manton et al. (1980)] Manton, K. G., Patrick, C. H., & Stallard, E. (1980). Mortality model based on delays in progression of chronic diseases: alternative to cause elimination model. *Public Health Reports*, 95(6), 580.
- [Miller (2004).] Miller, R. B. (2004). Graduation. In *Encyclopedia of Actuarial Science*.
- [Olivieri (2005)] Olivieri, A. (2005). Designing longevity risk transfers: the point of view of the cedant. *Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari*, 68, 1-35.

- [Olivieri & Pitacco (2002)] Olivieri, A. & Pitacco, E. (2002). Inference about mortality improvements in life annuity portfolios. In *27th International Congress of Actuaries, Cancun, Mexico*.
- [Olshansky (1987)] Olshansky, S. J. (1987). Simultaneous/multiple cause-delay (simcad): an epidemiological approach to projecting mortality. *Journal of Gerontology*, 42(4), 358-365.
- [Olshansky et al. (1990)] Olshansky, S. J., Carnes, B. A., & Cassel, C. (1990). In search of methuselah: estimating the upper limits to human longevity. *Science*, 250(4981), 634-640.
- [Pitacco et al. (2009)] Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S. & Olivieri, A. (2009). *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. Oxford University Press, 1st edition.
- [Plat (2009)] Plat, R. (2009). On stochastic mortality modeling. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(3):393-404.
- [Pollard (1949)] Pollard, A. (1949). Methods of forecasting mortality using Australian data. *Journal of the Institute of Actuaries*, 75(2), 151-182.
- [Ramsay (1998)] Ramsay, J. (1998). Estimating smooth monotone functions. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 60(2), 365-375.
- [Renshaw et al. (1996)] Renshaw, A., Haberman, S., & Hatzopoulos, P. (1996). The modelling of recent mortality trends in United Kingdom male assured lives. *British Actuarial Journal*, 1, 449-477.
- [Renshaw & Haberman, (2003a)] Renshaw, A. E. & Haberman, S. (2003). Lee-Carter mortality forecasting: a parallel generalized linear modelling approach for England and Wales mortality projections. *Insurance: Mathematics and Economics*, 32(3), 379-401.
- [Renshaw & Haberman (2003b)] Renshaw, A. E. & Haberman, S. (2003). Lee-Carter mortality forecasting with age-specific enhancement. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(2), 255-272.
- [Renshaw & Haberman (2003c)] Renshaw, A. E. & Haberman, S. (2003). On the forecasting of mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 32(3), 379-401.
- [Renshaw & Haberman (2006)] Renshaw, A. E. & Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(3), 556-570.
- [Renshaw & Haberman (2008)] Renshaw, A. E. & Haberman, S. (2006). On simulation-based approaches to risk measurement in mortality with specific reference to Poisson Lee-Carter modelling. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2), 797-816.

- [Richards et al. (2006)] Richards, S. J., Kirkby, J., & Currie, I. D. (2006). The importance of year of birth in two-dimensional mortality data. *British Actuarial Journal*, 12(1), 5-29.
- [Schneider & Guralnik (1990)] Schneider, E. L. & Guralnik, J. M. (1990). The aging of america. *Journal of the American Medical Association*, 263(17), 2335-2340.
- [Seal (1980)] Seal, H. L. (1980). Early uses of Graunt's life table. *Journal of the Institute of Actuaries*, 107(4), 507-511.
- [Sithole et al. (2000)] Sithole, T. Z., Haberman, S., & Verrall, R. J. (2000). An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners data. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27(3), 285-312.
- [Strehler (1975)] Strehler B.L. (1975). Implications of aging research for society" In *Theoretical concepts of developmental and age changes*, Federation Proceedings, 34(1), 5-8.
- [Sutherland (1963)] Sutherland, I. (1963). John Graunt: a tercentenary tribute. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 537-556.
- [Tabeau et al. (2001)] Tabeau, E., van den Berg Jeths, A., & Heathcote, C. (2001). *Forecasting mortality in developed countries: Insights from a statistical, demographic and epidemiological perspective* (Vol. 9). Springer.
- [Thatcher (1999)] Thatcher, A. (1999). The long term pattern of adult mortality and the highest attained age. *Journal of the Royal Statistical Society*, 162, 5-44.
- [Tuljapurkar et al. (2000)] Tuljapurkar, S., Li, N., & Boe, C. (2000). A universal pattern of mortality decline in the g7 countries. *Nature*, 405(6788), 789-792.
- [Vandeschrick (2001)] Vandeschrick, C. (2001). The Lexis diagram, a misnomer. *Demographic Research*, 4(3), 97-124.
- [Vaupel et al. (1979)] Vaupel, J. W., Manton, K. G. & Stallard, E. (1979). The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality. *Demography*, 16 (3), 439-454.
- [Verdiell (2008)] Verdiell, N. C. (2008). *Old Age Mortality: a state of the art*. (Tese de Mestrado), Universitat Autònoma de Barcelona.
- [Walford (1985)] Walford, R. (1985). Maximum life span. *New York: ww Norton & Company*
- [Weibull (1951)] Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18, 293-297.

- [Willcox (1951)] Willcox, W. F. (1938). The founder of statistics. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 321-328.
- [Willets (2004)] Willets, R. C. (2004). *The cohort effect: insights and explanations*. Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries.
- [Wilmoth (1993)] Wilmoth, J. R. (1993). *Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change*. Technical report, Department of Demography, University of California, Berkeley.
- [Wilmoth (2005)] Wilmoth, J. R. (2005). On the relationship between period and cohort mortality. *Demographic Research*, 13(11), 231-280.
- [Wilmoth et al. (2007)] Wilmoth, J. R., Andreev, K., Jdanov, D., Gleijeses, D. A., Boe, C., Bubenheim, M., & Vachon, P. (2007). Methods protocol for the human mortality database. *University of California, Berkeley, and Max Planck Institute for Demographic Research, Rostock*. URL: <http://mortality.org> [version 31/05/2007].

## Apêndice A

### Tabela de Mortalidade para Portugal, 2010-2012

Tábua Completa de Mortalidade para Portugal 2010-2012 (Ambos os sexos)						
Idade (x)	Quociente de mortalidade (qx)	Sobreviventes em 100 000 nados-vivos (lx)	Óbitos (dx)	Sobreviventes em anos completos (Lx)	Anos completos após a idade x (Tx)	Esperança de vida (ex)
1	2	3	4	5	6	7
0	0,002825	100 000	282	99 824	7 977 902	79,78
1	0,000234	99 718	23	99 706	7 878 079	79,00
2	0,000157	99 694	16	99 688	7 778 373	78,02
3	0,000155	99 679	15	99 671	7 678 686	77,03
4	0,000140	99 663	14	99 656	7 579 016	76,05
5	0,000140	99 649	14	99 642	7 479 360	75,06
6	0,000139	99 635	14	99 628	7 379 717	74,07
7	0,000119	99 621	12	99 615	7 280 089	73,08
8	0,000107	99 609	11	99 604	7 180 474	72,09
9	0,000154	99 599	15	99 591	7 080 870	71,09
10	0,000072	99 583	7	99 580	6 981 279	70,10
11	0,000108	99 576	11	99 571	6 881 699	69,11
12	0,000124	99 566	12	99 559	6 782 128	68,12
13	0,000104	99 553	10	99 548	6 682 568	67,13
14	0,000149	99 543	15	99 535	6 583 020	66,13
15	0,000196	99 528	19	99 518	6 483 485	65,14
16	0,000182	99 509	18	99 499	6 383 967	64,15
17	0,000245	99 490	24	99 478	6 284 467	63,17
18	0,000378	99 466	38	99 447	6 184 989	62,18
19	0,000400	99 428	40	99 409	6 085 542	61,21
20	0,000423	99 389	42	99 368	5 986 133	60,23
21	0,000397	99 347	39	99 327	5 886 766	59,25
22	0,000358	99 307	36	99 289	5 787 439	58,28
23	0,000545	99 272	54	99 245	5 688 150	57,30
24	0,000448	99 217	44	99 195	5 588 905	56,33

(continua)

Tábua Completa de Mortalidade para Portugal 2010-2012 (Ambos os sexos) (continuação)

Idade (x)	Quociente de mortalidade (qx)	Sobreviventes em 100 000 nados-vivos (lx)	Óbitos (dx)	Sobreviventes em anos completos (Lx)	Anos completos após a idade x (Tx)	Esperança de vida (ex)
1	2	3	4	5	6	7
25	0,000497	99 173	49	99 148	5 489 710	55,35
26	0,000487	99 124	48	99 100	5 390 561	54,38
27	0,000570	99 075	56	99 047	5 291 462	53,41
28	0,000425	99 019	42	98 998	5 192 415	52,44
29	0,000485	98 977	48	98 953	5 093 417	51,46
30	0,000589	98 929	58	98 900	4 994 464	50,49
31	0,000683	98 871	68	98 837	4 895 564	49,51
32	0,000598	98 803	59	98 774	4 796 727	48,55
33	0,000710	98 744	70	98 709	4 697 953	47,58
34	0,000841	98 674	83	98 632	4 599 244	46,61
35	0,000923	98 591	91	98 545	4 500 612	45,65
36	0,000958	98 500	94	98 453	4 402 067	44,69
37	0,001041	98 406	102	98 354	4 303 614	43,73
38	0,001114	98 303	110	98 248	4 205 259	42,78
39	0,001267	98 194	124	98 132	4 107 011	41,83
40	0,001466	98 069	144	97 997	4 008 879	40,88
41	0,001604	97 926	157	97 847	3 910 882	39,94
42	0,001793	97 769	175	97 681	3 813 035	39,00
43	0,001822	97 593	178	97 504	3 715 354	38,07
44	0,002168	97 415	211	97 310	3 617 850	37,14
45	0,002163	97 204	210	97 099	3 520 540	36,22
46	0,002477	96 994	240	96 874	3 423 441	35,30
47	0,002729	96 754	264	96 622	3 326 567	34,38
48	0,003055	96 490	295	96 342	3 229 945	33,47
49	0,003210	96 195	309	96 041	3 133 603	32,56
50	0,003366	95 886	323	95 725	3 037 563	31,66
51	0,003808	95 563	364	95 381	2 941 838	30,76
52	0,004099	95 199	390	95 004	2 846 457	29,90
53	0,004645	94 809	440	94 589	2 751 452	29,02
54	0,004631	94 369	437	94 150	2 656 863	28,15
55	0,005237	93 932	492	93 686	2 562 713	27,28
56	0,005325	93 440	498	93 191	2 469 027	26,42
57	0,005817	92 942	541	92 672	2 375 836	25,56
58	0,006166	92 402	572	92 116	2 283 164	24,71
59	0,006359	91830	584	91538	2 191048	23,86
60	0,006529	91246	596	90 948	2 099 510	23,01
61	0,007451	90 651	675	90 313	2 008 561	22,16
62	0,008041	89 975	724	89 613	1 918 248	21,32

(continua)

Tábua Completa de Mortalidade para Portugal 2010-2012 (Ambos os sexos) (continuação)

Idade (x)	Quociente de mortalidade (qx)	Sobreviventes em 100 000 nados-vivos (lx)	Óbitos (dx)	Sobreviventes em anos completos (Lx)	Anos completos após a idade x (Tx)	Esperança de vida (ex)
1	2	3	4	5	6	7
63	0,008874	89 252	774	88 864	1828 635	20,49
64	0,009168	88 477	811	88 072	1739 771	19,88
65	0,010011	87 666	878	87 227	1651699	18,84
66	0,010737	86 789	932	86 323	1564 472	18,03
67	0,011978	85 857	1028	85 342	1478 149	17,22
68	0,013404	84 828	1137	84 260	1392 806	16,42
69	0,013966	83 691	1169	83 107	1308 547	15,64
70	0,015927	82 522	1314	81885	1225 440	14,85
71	0,017829	81208	1448	80 484	1143 574	14,08
72	0,019951	79 760	1591	78 965	1063 090	13,33
73	0,021708	78 169	1697	77 321	984 126	12,59
74	0,024407	76 472	1866	75 539	906 805	11,86
75	0,026816	74 606	2001	73 605	831266	11,14
76	0,030439	72 605	2210	71500	757 661	10,44
77	0,034467	70 395	2426	69 182	688 161	9,75
78	0,039704	67 969	2699	66 619	616 979	9,08
79	0,043402	65 270	2833	63 854	550 360	8,43
80	0,048439	62 437	3024	60 925	486 506	7,79
81	0,057327	59 413	3406	57 710	425 581	7,16
82	0,065429	56 007	3664	54 175	367 872	6,57
83	0,076999	52 342	4030	50 327	313 697	5,99
84	0,091168	48 312	4405	46 110	263 370	5,45
85	0,109457	43 908	4806	41505	217 260	4,95
86	0,127552	39 102	4988	36 608	175 755	4,49
87	0,147738	34 114	5040	31594	139 148	4,08
88	0,169402	29 074	4925	26 611	107 554	3,70
89	0,193055	24 149	4662	21818	80 942	3,35
90	0,218663	19 487	4261	17 356	59 124	3,03
91	0,246576	15 226	3785	13 333	41768	2,74
92	0,278476	11441	3186	9 848	28 435	2,49
93	0,310469	8 255	2563	6 974	18 587	2,25
94	0,344468	5 692	1861	4 712	11613	2,04
95	0,380347	3 731	1419	3 022	6 901	1,85
96	0,417939	2 312	966	1829	3 880	1,68
97	0,457031	1346	615	1038	2 051	1,52
98	0,497371	731	363	549	1012	1,39
99	0,538861	367	198	268	463	1,26
100	0,580566	169	98	120	195	1,15