MODELOS DE FRONTEIRA ESTOCÁSTICA DE PRODUÇÃO: ESTIMAÇÃO POR MÁXIMA VEROSIMILHANÇA E AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA

José Murteira

1 — Introdução (*)

Atenta a definição convencional de *função de produção*, como volume máximo de *output* por referência a um conjunto de factores ou *inputs,* a sua estimação constitui, em econometria, um exercício que reveste alguma especificidade. Com efeito, aquela função representa um limiar ou *fronteira*, que, por definição, nenhum agente económico pode exceder. A sua estimação deve, pois, partir do axioma de que nenhuma observação se situa acima dela. De outra parte, a chamada *função custo*, que integra o nível mínimo de custo, dados o volume de *output* e os preços dos *inputs,* constitui uma fronteira (de custo) ou limite mínimo, abaixo do qual nenhum agente económico pode operar.

Cumpre deste modo salientar que não se pode pretender estimar convenientemente um modelo de fronteira (de produção, custo ou outra), mediante o simples recurso a certas técnicas estatísticas convencionais, como a regressão do *output* nos *inputs* (ou, por exemplo, no caso da função custo, do nível de custo sobre o *output* e os preços dos factores). Tal via mostrar-se-ia adequada à estimação, não de um *máximo* (ou *mínimo*) condicionado, mas de um valor *médio* da variável dependente, como função dos regressores. Neste sentido, diversas técnicas de estimação de modelos de fronteira se têm proposto. De entre estas, o método da máxima verosimilhança (ML) constitui, sem dúvida, o recurso mais frequentemente utilizado. A literatura recente inclui, entretanto, algumas propostas alternativas dignas de nota, como a aplicação dos métodos generalizado de momentos (GMM) e semiparamétrico (*distribution free*) a modelos de fronteira ([1]).

Refira-se, entretanto, que a estimação de tais modelos não constitui, por norma, um fim em si mesmo, revestindo, via de regra, uma natureza instrumental em relação à análise de *eficiência* das unidades produtivas. Como refe-

---

(*) O presente estudo constitui a adaptação de parte da dissertação de mestrado, apresentada pelo autor no Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa. Agradece-se o apoio do Prof. Doutor José Pedro Portugal Dias, de cujas observações resulta devedor o texto ora exposto.

([1]) Cf., respectivamente, Kopp e Mullahy (1990) e Park e Simar (1994). De referir também a adopção da perspectiva bayesiana na estimação de modelos de fronteira, proposta por Van den Broeck, Osiewalski e Steel (1994).

re Schmidt (1985), não admira, pois, que a moderna literatura sobre estimação de fronteiras de produção e avaliação de eficiência encontre a sua principal matriz num artigo de Farrell (1957), onde os dois problemas se apresentam estreitamente correlacionados.

O presente trabalho acompanha, no que diz respeito à sua estimação ML e avaliação da *eficiência técnica*, diversos *modelos de fronteira estocástica de produção* (2). O estudo propõe-se reunir em um único texto informação dispersa na literatura econométrica, a partir da introdução de tais modelos, entre outros, por Aigner, Lovell e Schmidt (1977). Com referência a alguns dos modelos expostos, completa-se, ainda, tal informação com um conjunto de resultados não incluídos na literatura pesquisada.

O plano do ensaio é, resumidamente, o seguinte: no n.º 2 expõe-se o modelo geral e respectivas especificações. Os dois números seguintes apresentam a sua estimação ML e avaliação da eficiência, com base, respectivamente, em dados seccionais e de painel. No n.º 5 procede-se ao elenco das observações conclusivas, sugerindo, ainda, algumas pistas para futura investigação. Os principais resultados reúnem-se em quadros-resumo, dispostos em anexo.

2 — Apresentação dos modelos

As primeiras especificações de modelos econométricos de fronteira de produção partem do pressuposto de que todos os produtores enfrentam uma única função de produção, atribuindo qualquer variação no desempenho produtivo a diferenças de eficiência dos agentes, face à fronteira comum (3). Por este motivo se qualifica tais modelos de fronteira *determinística*. A abordagem ignora, todavia, o facto de que os desvios da fronteira de produção podem não se encontrar totalmente sob o controlo dos produtores e, como tal, não devem atribuir-se exclusivamente a comportamentos ineficientes. Factores ambientais, como o clima ou a qualidade dos solos, variações da qualidade dos *inputs*, das condições de fornecimento ou do desempenho de máquinas constituem exemplos de perturbações não controláveis pelo produtor, mas que, nem por isso, deixam de influir no nível e qualidade do *output*. Além disso, qualquer relação empírica envolve, como é sabido, diversos tipos de «ruído» estatístico, nomeadamente, erros de medida e de especificação (espera-se que sem efeitos graves). Tais perturbações não devem, obviamente, confundir-se com ineficiência,

(2) Não se aborda, pois, nem a estimação de modelos de fronteira de custo ou lucro, nem, por conseguinte, a desagregação da eficiência produtiva em eficiência técnica, *alocativa* ou *de escala*. A sua inclusão de forma consistente no texto alongá-lo-ia em excesso. Em todo o caso, torna-se relativamente simples, mediante ligeiras alterações de sinal, adaptar a exposição, de modo a englobar também a estimação ML de modelos uniequacionais de fronteira de custo ou lucro.

(3) V., por exemplo, Afriat (1972), Richmond (1974) ou Greene (1980).

carecendo, pois, de um tratamento mais adequado do que o proporcionado pelos modelos de fronteira determinística.

Estes argumentos estão na origem do modelo de fronteira estocástica de produção, introduzido por Aigner, Lovell e Schmidt (1977), Meeusen e Van den Broeck (1977), e Battese e Corra (1977). A ideia básica do modelo consiste em considerar dois elementos no seu termo de perturbação. Uma primeira componente permite a consideração da variação aleatória da própria fronteira, de produtor para produtor, captando os efeitos de erros de medida e demais «ruído» estatístico, bem como de quaisquer ocorrências não sistemáticas, que afectam o nível de *output* de forma não controlável pelo produtor. A segunda componente visa captar os efeitos da ineficiência técnica, relativamente ao *output* máximo ou potencial, medido sobre a fronteira.

Considerando uma amostra seccional de N observações, pode escrever-se na seguinte forma o modelo de fronteira de um só *output* para o produtor i (i = 1, ..., N):

$$y_i = f(\mathbf{X}_i;\theta)\ TE_i \exp(V_i), \qquad \textbf{(2.1)}$$

em que:

- y: nível efectivo de *output;*
- $f(\mathbf{X}_i;\theta)$: função ou fronteira de produção (nível máximo ou potencial de *output,* dado o nível dos *inputs*);
- $\mathbf{X}$: vector representativo dos *inputs* (supõe-se que a sua dimensão é K);
- θ: vector de parâmetros;
- v: variável aleatória bilateral, representativa dos efeitos do 'ruído' estatístico e ocorrências aleatórias, não controláveis pelo produtor;
- TE: nível de eficiência técnica.

Pode definir-se eficiência técnica como o quociente entre os volumes efectivo e potencial de output, dados $v = 0$ e os níveis de *inputs.* Atento o conceito de função de produção, resulta, de imediato, $0 \leq TE \leq 1$. Passando a logaritmos ambos os termos de **(2.1),** vem

$$\ln y_i = \ln f(\mathbf{X}_i;\theta) + \ln TE_i + v_i = \ln f(\mathbf{X}_i;\theta) - u_i + v_i \qquad \textbf{(2.2)}$$

em que $u_i = -\ln TE_i$. Como refere Greene (1993), pode tomar-se este termo como medida aproximada de *in*eficiência técnica: a partir do desenvolvimento em série de $TE_i = \exp(-u_i)$ pode escrever-se:

$$u_i \approx 1 - TE_i \qquad \textbf{(2.3)}$$

Com frequência se admite, que a função de produção é linear nos *inputs* ou suas funções (logaritmos, em particular), utilizando-se muitas vezes, como variável dependente, o logaritmo natural do *output*. O que permite especificar o modelo na forma:

$$\ln y_i = \alpha + \beta' \mathbf{X}_i - u_i + v_i \,,\ u_i \geq 0 \qquad \textbf{(2.4)}$$

em que β e $\mathbf{x}$ designam, respectivamente, os vectores dos parâmetros e das funções pertinentes dos níveis dos *inputs* ([4]). A especificação **(2.4)**, na qual se baseia a análise subsequente, é idêntica à apresentada em vários textos, como Schmidt (1985) ou Greene (1993). A sua adopção não restringe o modelo à função Cobb-Douglas, porquanto um bom número de outras formas funcionais, como, por exemplo, a Cobb-Douglas generalizada, *translog* ou Leontieff generalizada são também lineares nos parâmetros.

Em decorrência do exposto, admitem-se vulgarmente as hipóteses:

$$\begin{array}{l} u_i \sim iid,\ \forall i,\ u_i \geq 0 \\ v_i \sim iid,\ \mathrm{E}(v_i) = 0 \end{array} \qquad \textbf{(2.5)}$$

u_i, v_i: variáveis aleatórias não observáveis, independentes entre si, não correlacionadas com os regressores.

A estimação ML do modelo requer, como é sabido, especificação da densidade do termo de perturbação, $\varepsilon_i = v_i - u_i = \ln y_i - \alpha - \beta' \mathbf{x}_i$. Várias funções se têm sugerido para u_i e v_i. Com referência à variável v_i, adopta-se habitualmente dadas as vantagens usuais, a distribuição normal, com média nula e variância constante. Formalmente:

$$v_i \sim \mathrm{NID}(0, \sigma_v^2),\ \forall i \qquad \textbf{(2.6)}$$

(Utiliza-se a notação «NID» para significar «normal e independentemente distribuída».)

Quanto à densidade da variável unilateral, u_i, as propostas tradicionais abrangem, por um lado, a função normal truncada em zero [Stevenson (1980)] e, em particular, a seminormal [Aigner *et al.* (1977)] e, por outro lado, as distribuições gama [Greene (1990)] e exponencial negativa [Aigner *et al.* (1977) e Meeusen *et al.* (1977)]. Tais especificações correspondem, respectivamente, aos modelos de fronteira estocástica, *normal-normal truncada* (NNT), *normal-semi-*

([4]) Caso se pretenda estimar uma fronteira de *custo*, deve, com as devidas alterações a respeito das variáveis dependente e independentes, especificar-se o modelo na forma:

$$\ln y_i = \alpha + \beta' \mathbf{X}_i + u_i + v_i \,,\ u_i \geq 0.$$

A presença do termo de ineficiência traduz-se agora, como é óbvio, em *acréscimo* de custos, relativamente ao valor de fronteira.

normal (NSN), *normal-gama* (NG) e *normal-exponencial* (NE). Para cada um dos modelos a variável u_i pode, pois, especificar-se do seguinte modo:

$$\text{Modelo NNT:} \quad g_u(u_i) = \frac{1}{\sigma_u}\,\phi\left(\frac{u_i - \mu}{\sigma_u}\right) \Big/ \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma_u}\right) \qquad \textbf{(2.7)}$$

$$\text{NSN:} \quad g_u(u_i) = \frac{2}{\sigma_u}\,\phi\left(\frac{u_i}{\sigma_u}\right) \qquad \textbf{(2.8)}$$

$$\text{NG:} \quad g_u(u_i) = \frac{\gamma^p}{\Gamma(p)}\,u_i^{p-1}\exp(-\gamma u_i) \qquad \textbf{(2.9)}$$
$$\gamma > 0,\ p > 0,\ ui > 0,$$

$$\text{NE:} \quad g_u(u_i) = \gamma\exp(-\gamma u_i),\ \gamma > 0 \qquad \textbf{(2.10)}$$

No n.º 3 apresentam-se, para cada modelo com dados seccionais, as expressões da função densidade do termo de perturbação composto, $g_\varepsilon(\varepsilon_i)$, bem como a respectiva função de verosimilhança (LL).

Como adiante se refere, a estimação com dados em painel comporta, relativamente aos modelos que utilizam dados seccionais, uma série de potenciais vantagens, as quais permitem contornar ou superar limitações várias a eles inerentes. Para uma amostra longitudinal de N unidades produtivas, incluindo T_i observações a respeito da i-ésima unidade, considere-se a seguinte especificação do modelo de produção de um só *output:*

$$\ln y_{it} = \alpha + \beta'\mathbf{X}_{it} - u_{it} + v_{it},\ u_{it} \geq 0 \qquad \textbf{(2.11)}$$

$t = 1,...,T_i$: índice temporal;
$i = 1,...,N.$

Se u_{it} e v_{it} são independentes ao longo do tempo e de produtor para produtor, pode proceder-se como se de um modelo com dados seccionais se trate (o produtor i, observado em diferentes períodos, é encarado como um conjunto de produtores diferentes). Em todo o caso, como é sabido, a abordagem com dados em painel revela-se particularmente vantajosa a partir da adopção de algumas hipóteses adicionais. Schmidt e Sickles (1984) sugerem a especificação:

$$\ln y_{it} = \alpha + \beta'\mathbf{X}_{it} - u_i + v_{it},\ u_i \geq 0, \qquad \textbf{(2.12)}$$

considerando que, para cada produtor, o seu nível de ineficiência técnica, representada aproximadamente por u_i, afecta o respectivo volume de *output* de forma mais ou menos uniforme ao longo do tempo. Para este termo, como para v_{it}, adoptam-se pressupostos idênticos aos referidos a propósito do modelo com dados seccionais — esfericidade de v_{it} e u_i, mútua independência e ausência de correlação com os regressores. O modelo de fronteira enquadra-se, assim, nos termos do modelo convencional com dados em painel, com excepção do termo u_i, de média não nula. Com vista à estimação ML do modelo e considerando uma abordagem de efeitos aleatórios, podem, naturalmente, adoptar-se as funções de densidade acima referidas para u_i e v_{it}. Resultam, deste modo também, os quatro modelos NNT, NSN, NG e NE, cuja estimação ML com dados em painel se expõe no n.º 4.

3 — Estimação ML e avaliação da eficiência técnica com dados seccionais

Expõe-se no presente número a estimação dos quatro modelos apresentados no número anterior, com base em amostras seccionais. Para o efeito, reescreva-se **(2.4)** na forma:

$$\ln y_i = \alpha + \beta'\mathbf{X}_i + \varepsilon_i\,, \quad \varepsilon_i = -u_i + v_i\,, \quad u_i \geq 0 \qquad \textbf{(3.1)}$$

adoptando para v_i as hipóteses acima referidas. Pretende, agora, obter-se a função densidade do termo de perturbação composto, ε_i, em cada um dos quatro modelos mencionados. Dadas, por hipótese, a normalidade do termo bilateral, v_i, e a sua independência do termo de ineficiência, u_i, a aplicação da técnica da mudança de variável conduz, sucessivamente, a:

$$g_\varepsilon(\varepsilon_i) = \int_{D_u} g_{\varepsilon,u}(\varepsilon_i,u_i)du_i = \int_0^{+\infty} g_v(\varepsilon_i + u_i)g_u(u_i)du_i =$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma_v}\,\phi\left(\frac{\varepsilon_i + u_i}{\sigma_v}\right) g_u(u_i)du_i \qquad \textbf{(3.2)}$$

em que $\phi(\cdot)$ designa, como habitualmente, a função densidade normal padrão. Concretizando $g_u(u_i)$, obtém-se, para cada modelo, a função pretendida. Relativamente ao modelo NNT, a introdução de **(2.7)** em **(3.2)** conduz à expressão:

$$g_\varepsilon(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sigma}\,\phi\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma\lambda} - \frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma}\right)\Big/\,\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma\lambda}\sqrt{1+\lambda^2}\right)^{(5)} \qquad \textbf{(3.3)}$$

em que:

$$\lambda = \sigma_u/\sigma_v \qquad \textbf{(3.4)}$$
$$\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$$

$\Phi(\cdot)$: função de distribuição correspondente a $\phi(\cdot)$.

---

(5) A expressão de $g_\varepsilon(\varepsilon_i)$ aqui indicada não corresponde exactamente à de Stevenson (1980), primeiro proponente do modelo NNT. O autor define ε_i como o termo de perturbação de um modelo de *custo*, resultante da soma $u_i + v_i$, com $u_i \geq 0$.

A partir de **(3.3)** obtém-se a função de verosimilhança para este modelo

$$LL(\alpha,\beta,\mu,\sigma,\lambda) = -N\left[\frac{\ln(2\pi)}{2} + \ln\sigma + \ln\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma\lambda}\sqrt{1+\lambda^2}\right)\right] + \tag{3.5}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma\lambda} - \frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma}\right) - \frac{(\varepsilon_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Se em **(3.3)** e **(3.5)** se considera $\mu = 0$, resultam de imediato as correspondentes expressões para o modelo NSN, introduzido por Aigner *et al.* (1977) e que tem dominado boa parte dos estudos empíricos. Vêm, pois:

$$g_\varepsilon(\varepsilon_i) = \frac{2}{\sigma}\,\phi\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma}\right)\Phi\left(-\frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma}\right) \tag{3.6}$$

$$LL(\alpha,\beta,\sigma,\lambda) = -N\left[\frac{\ln(\pi/2)}{2} + \ln\sigma\right] + \sum_{i=1}^{N}\left[\ln\Phi\left(-\frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma}\right) - \frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.7}$$

A alternativa avançada em Greene (1990) visa, entretanto, ultrapassar restrições impostas pelos modelos anteriores, nomeadamente a relativa concentração das perturbações junto de zero, assumida pela especificação **(3.6).** A proposta do autor passa pela adopção da função gama para u_i, resultando, como referido, o modelo NG, com função densidade do termo de perturbação dada por:

$$g_\varepsilon(\varepsilon_i) = \frac{\gamma^p}{\Gamma(p)}\exp\frac{\gamma^2\sigma^2}{2} + \gamma\varepsilon_i\ \Phi - \frac{\varepsilon_i}{\sigma_v}\gamma\sigma_v\ \ I(p-1;\varepsilon_i)\ (^6) \tag{3.8}$$

em que:

$$\gamma > 0 \tag{3.9}$$
$$p > 0$$
$$I(p-1\ ;\ \varepsilon_i) = E(z_i^{p-1} \mid z_i > 0\ ;\ \varepsilon_i),$$
$$z_i \mid \varepsilon_i \sim NID(-\varepsilon_i - \gamma\,\sigma_v^2\ ;\ \sigma_v^2).$$

---

(6) Expõe-se resumidamente, a título ilustrativo, a dedução de **(3.8).** Sejam as densidades de u_i e v_i:

$$g_u(u_i) = [\gamma^p / \Gamma(p)]\ u_i^{p-1}\exp(-\gamma\,u_i),\ u_i > 0,\ \gamma > 0,\ p > 0$$
$$g_v(v_i) = \exp[-\,v_i^2 / (2\sigma_v^2)]\ (2\pi\sigma_v^2)^{-1/2}$$

a partir das quais se obtém a função densidade conjunta:

$$g_{\varepsilon,u}(\varepsilon_i,u_i) = [\gamma^p / \Gamma(p)]\ (2\pi\sigma_v^2)^{-1/2}\ u_i^{p-1}\exp\{-[(\varepsilon_i + u_i)^2 + 2\,\gamma\sigma_v^2\,u_i] / (2\sigma_v^2)\} =$$
$$= [\gamma^p / \Gamma(p)]\exp[(\gamma^2\sigma_v^2/2) + \gamma\varepsilon_i]\ (2\pi\sigma_v^2)^{-1/2}\exp[-(u_i + \varepsilon_i + \gamma\sigma_v^2)^2/(2\sigma_v^2)]\ u_i^{\,p-1}$$

A expressão de $g_\varepsilon(\varepsilon_i)$ obtém-se por integração desta em ordem a u_i:

$$g_e(\varepsilon_i) = [\gamma^p/\Gamma(p)]\exp[(\gamma^2\sigma_v^2/2) + \gamma\varepsilon_i]\int_{\Re+}(2\pi\sigma_v^2)^{-1/2}\exp[-(u_i + \varepsilon_i + \gamma\sigma_v^2)^2/(2\sigma_v^2)]\ u_i^{p-1}\,du_i =$$
$$= [\gamma^p / \Gamma(p)]\exp[(\gamma^2\sigma_v^2/2) + \gamma\,\varepsilon_i]\ P(z_i > 0 \mid \varepsilon_i)\ E(z_i^{\,p-1} \mid z_i > 0;\ \varepsilon_i) =$$
$$= [\gamma^p / \Gamma(p)]\exp[(\gamma^2\sigma_v^2/2) + \gamma\,\varepsilon_i]\ \Phi[(-\,\varepsilon_i/\sigma_v) - \gamma\,\sigma_v]\ I(p-1;\ \varepsilon_i)$$

A função LL a maximizar será:

$$LL(\alpha,\beta,\sigma_v,\gamma,\ p) = N\ [p \ln \gamma - \ln \Gamma(p)] + \frac{\gamma^2 \sigma^2}{2}] + \qquad (3.10)$$
$$+ \Sigma \left[\ln \Phi\left(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \gamma\sigma_v\right) + \ln I(p-1;\varepsilon_i) + \gamma \varepsilon i\right]$$

O modelo NG constitui uma generalização de Stevenson (1980), que adopta a distribuição Erlang para o termo de ineficiência. Ambos generalizam, como é óbvio, o modelo NE, cuja expressão de $g_\varepsilon(\varepsilon_i)$ se obtém imediatamente, considerando $p = 1$ em **(3.8)**. Resultam:

$$g_\varepsilon(\varepsilon_i) = \gamma \exp\left(\frac{\gamma^2 \sigma^2}{2} + \gamma\varepsilon_i\right) \Phi\left(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \gamma\sigma_v\right) \qquad (3.11)$$

e:

$$LL(\alpha,\beta,\sigma_v,\gamma) = N\left(\ln \gamma + \frac{\gamma^2 \sigma^2}{2}\right) + \Sigma\left[\ln \Phi\left(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \gamma\sigma_v\right) + \gamma\varepsilon_i\right] \qquad (3.12)$$

Com referência à estimação ML dos modelos NSN e NE, as estimativas iniciais utilizadas nos processos iterativos de maximização, calculam-se vulgarmente a partir dos resultados da estimação OLS ([7]). No caso do modelo NNT, as estimativas iniciais são habitualmente as utilizadas no modelo NSN, atribuindo-se ao parâmetro μ o valor zero. Por um lado, o modelo NNT tem, relativamente a este último, a vantagem de não restringir *a priori* o valor de μ. Por

---

([7]) Para obter estimativas iniciais dos parâmetros, recorre-se habitualmente ao método *OLS modificado* (MOLS), consistente mas menos eficiente que ML. De acordo com o método, o estimador de β coincide com o seu estimador OLS. Quanto aos parâmetros da distribuição de ε_i, estes estimam-se a partir dos momentos de ordem superior dos resíduos OLS. Finalmente, o estimador MOLS do termo independente, α, resulta da soma do seu estimador OLS com um estimador da ineficiência média, $E(u_i)$, obtido a partir dos momentos dos resíduos OLS. Para os modelos NSN e NE, resultam respectivamente:

Modelo NSN: $\hat{\sigma}_u = [m_3 / (\pi - 4)]^{1/3} \sqrt{2/\pi}$
$\hat{\sigma}_v^2 = m_2 - \{m_3^2 / [2(\pi - 4)^2]\}^{1/3} (\pi - 2)$
$\hat{\alpha}_{MOLS} = \hat{\alpha}_{OLS} + \hat{\sigma}_u \sqrt{2/\pi}$

Modelo NE: $\hat{\gamma} = -(2 / m_3)^{1/3}$
$\hat{\sigma}_v^2 = m_2 + (m_3 / 2)^{2/3}$ $\quad \hat{\sigma}_{MOLS} = \hat{\sigma}_{OLS} + 1/\gamma$

(m_2 e m_3 designam, respectivamente, o segundo e terceiro momentos dos resíduos OLS.) Note-se que se m_3 é positivo — ou seja, os resíduos OLS apresentam assimetria positiva — não é possível estimar o desvio-padrão de u_i por MOLS (σ_u e γ, respectivamente). Em modelos de fronteira de produção, tal ocorrência pode significar que este desvio-padrão é nulo (o que significa ausência sistemática de ineficiência, isto é, $u_i \equiv 0$, $\forall i$) ou, em alternativa, que o modelo se encontra mal especificado (note-se a consistência de m_3 para o terceiro momento de ε_i, o qual é negativo, em modelos de fronteira de produção com as referidas hipóteses a respeito de u_i e v_i). Nesta situação, o estimador ML do modelo NSN coincide com o estimador OLS. V., a propósito, Waldman (1982) para um tratamento pormenorizado do assunto.

outro lado, a função LL parece apresentar um comportamento algo instável, com frequente sobreavaliação das variâncias dos demais parâmetros ou, inclusivamente, divergência do processo iterativo. Este aspecto parece desencorajar a sua utilização e pode explicar, até certo ponto, a preponderância do modelo NSN em boa parte dos estudos empíricos.

Relativamente ao modelo NG, a principal vantagem parece ser a da flexibilidade quanto à forma da distribuição do termo de perturbação, ε_i. Por outro lado, o cálculo do valor da função LL revela-se bastante complicado, devido ao termo $I(p-1;\ \varepsilon_i)$ [cf. **(3.10)**], de difícil computação rigorosa. Quer adoptando **(3.10)**, quer com a formulação de Beckers e Hammond (1987), a sua estimação ML revela-se, pois, problemática ([8]). Em qualquer caso, uma vez utilizado o método ML, a matriz das co-variâncias assintóticas dos estimadores dos parâmetros estima-se convenientemente através de qualquer das técnicas habituais, como o método BHHH ou com recurso à matriz hesseana.

Passando agora ao tema da avaliação da eficiência técnica, deve referir-se, antes de mais, que no modelo de fronteira estocástica, qualquer que seja o método adoptado, o resíduo $\ln y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}' x_i$ estima ε_i, não u_i. Perante a impossibilidade de decompor, de forma consistente, o resíduo de estimação nas suas componentes, $\hat{v}_i$ e $\hat{u}_i$, Jondrow, Lovell, Materov e Schmidt (1982) propõem, em alternativa, a estimação de $E(u_i \mid \varepsilon_i)$, apresentando a sua expressão para os modelos NSN e NE ([9]).

A partir da expressão de $g_{u|\varepsilon}(u_i \mid \varepsilon_i)$ é possível obter, para cada modelo, $E(u_i \mid \varepsilon_i)$. Nos modelos considerados vem, respectivamente:

$$\text{Modelo NNT: } E(u_i \mid \varepsilon_i) = [\sigma\lambda/(1+\lambda^2)]\ \Big\{ \frac{-\varepsilon_i\lambda}{\sigma} - \mu + \tag{3.13}$$

$$+ \Big[\phi\left(\frac{-\varepsilon_i\lambda}{\sigma} - \mu \ / \ \Phi\ \frac{-\varepsilon_i\lambda}{\sigma} - \mu\right)\Big]\Big\}$$

$$\text{NSN: } E(u_i \mid \varepsilon_i) = [\sigma\lambda/(1+\lambda^2)]\Big\{ \frac{-\varepsilon_i\lambda}{\sigma} + \Big[\phi\left(\frac{-\varepsilon_i\lambda}{\sigma}\right) / \ \Phi\left(-\frac{-\varepsilon_i\lambda}{\sigma}\right) \tag{3.14}$$

$$\text{NG: } E(u_i \mid \varepsilon_i) = I(p;\ \varepsilon_i)\ /\ I(p-1;\ \varepsilon_i) \tag{3.15}$$

$$\text{NE: } E(u_i \mid \varepsilon_i) = I(1;\ \varepsilon_i) = -\varepsilon_i - \gamma\sigma_v^2 + \sigma_v\,\phi\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma} + \gamma\sigma_v\right) / \ \Phi\left(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma} - \gamma\sigma_v\right) \tag{3.16}$$

Como é óbvio, $\hat{E}(u_i \mid \varepsilon_i)$ deve calcular-se a partir das estimativas geradas; como estimador de u_i, esta estatística não é, todavia, consistente ([10]). O motivo reside na variabilidade intrínseca da distribuição de u_i condicional em ε_i, que não depende da dimensão da amostra. Como adiante se pode verificar, a situação é potencialmente superável quando se dispõe de informação em painel.

([8]) Greene (1995) apresenta também a estimação do modelo NG com base nos resultados OLS.

([9]) Os autores apresentam também, como estimador de u_i, a sua moda condicional em ε_i.

([10]) Embora seja assintoticamente centrada, no sentido de que $\lim E[\hat{E}(u_i \mid \varepsilon_i)] = E(u_i)$.

Entretanto, especificando-se o modelo na forma **(2.4)**, a ineficiência técnica vem dada, de modo mais rigoroso, por:

$$1 - TE_i = 1 - \exp(-u_i) \qquad \textbf{(3.17)}$$

Battese e Coelli (1988) apresentam, para o modelo NNT com dados em painel, a expressão de $E[\exp(-u_i) \mid \varepsilon_{i1}, \ldots, \varepsilon_{iT}]$. A partir desta, considerando $T = 1$, obtém-se a correspondente expressão para o modelo com dados seccionais:

$$E(TE_i \mid \varepsilon_i) = E[\exp(-u_i) \mid \varepsilon_i] = \Phi\left(\frac{\mu_i^*}{\sigma_*} - \sigma_*\right)\exp\left(-\mu_i^* + \frac{\sigma_*^2}{2}\right) / \Phi\left(\frac{\mu_i^*}{\sigma_*}\right) \qquad \textbf{(3.18)}$$

em que:

$$\begin{aligned} \mu_i^* &= (\mu - \varepsilon_i\lambda^2) / (1 + \lambda^2) \\ \sigma_*^2 &= \sigma_u^2 / (1 + \lambda^2) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.19)}$$

Considerando $\mu = 0$ em **(3.18)** e **(3.19)**, de imediato resulta a correspondente expressão para o modelo NSN. Para o modelo NG vem:

$$\begin{aligned} E(TE_i \mid \varepsilon_i) = {} & \exp[\varepsilon_i + \sigma_v^2 (1 + 2\gamma)/2]\ \Phi\left[-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \sigma_v (1 + \gamma)\right] \times \\ & \times I^*(p-1; \varepsilon_i) / [\Phi\left(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \gamma\sigma_v\right) I(p-1; \varepsilon_i)] \text{ (11)} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.20)}$$

em que:

$$\begin{aligned} I^*(p-1; \varepsilon_i) &= E(z_i^{*p-1} \mid z_i^* > 0; \varepsilon_i) \\ z_i^* \mid \varepsilon_i &\sim NID(-\varepsilon_i - \sigma_v^2(1 + \gamma); \sigma_v^2) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.21)}$$

Facilmente se deduz a correspondente expressão para o modelo NE, considerando, nas expressões acima, $p = 1$. Em todas há que substituir os parâmetros pelas suas estimativas [por exemplo, ML ou MOLS, obtendo-se $\hat{E}(TE_i \mid \varepsilon_i)$]. Pelo motivo apontado a propósito de $E(u_i \mid \varepsilon_i)$, o estimador não é consistente para TE_i em amostras seccionais.

---

(11) Resumidamente, a expressão foi deduzida como segue: a partir de $g_{\varepsilon,u}(\varepsilon_i, u_i)$ (cf. nota 6) e de $g_\varepsilon(\varepsilon_i)$ [cf. **(3.8)**], obtém-se:

$$g_{u|e}(u_i \mid \varepsilon_i) = (2\pi\sigma_v^2)^{-1/2} \exp[-(u_i + \varepsilon_i + \gamma\sigma_v^2)^2/(2\sigma_v^2)]\ u_i^{p-1} / \{\Phi[(-\varepsilon_i/\sigma_v) - \gamma\sigma_v]\ I(p-1; \varepsilon_i)\}$$

pelo que:

$$\begin{aligned} E[\exp(-u_i \mid \varepsilon_i)] &= \textstyle\int_{\Re+} \exp(-u_i)\ g_{u|e}(u_i \mid \varepsilon_i)\ du_i = \\ &= \textstyle\int_{\Re+} (2\pi\sigma_v^2)^{-1/2}. \exp[-(u_i + \varepsilon_i + \gamma\sigma_v^2)^2/(2\sigma_v^2)]\ u_i^{p-1} \exp(-u_i)\ du_i / \{\Phi[(-\varepsilon_i/\sigma_v) - \gamma\sigma_v]\ I(p-1; \varepsilon_i)\} = \\ &= \textstyle\int_{\Re+} (2\pi\sigma_v^2)^{-1/2} \exp\{-[u_i + \varepsilon_i + \sigma_v^2(1+\gamma)]^2/(2\sigma_v^2)\} u_i^{p-1} du_i \exp[\varepsilon_i + \sigma_v^2(1+2g)/2]/\{\Phi[(-\varepsilon_i/\sigma_v) - \gamma\sigma_v]\ I(p-1; \varepsilon_i)\} = \\ &= \exp[\varepsilon_i + \sigma_v^2 (1 + 2\gamma)/2]\ \Phi[(-\varepsilon_i/\sigma_v) - \sigma_v (1 + \gamma)]\ I^*(p-1; \varepsilon_i) / \{\Phi[(-\varepsilon_i/\sigma_v) - \gamma\sigma_v]\ I(p-1; \varepsilon_i)\}. \end{aligned}$$

Jondrow *et al.* (1982) sugerem também a estimação da ineficiência técnica *média*, $E(u_i)$. Tal é possível com base em estimativas consistentes dos parâmetros ou a partir da média dos resíduos de estimação. Nos modelos indicados, a expressão de $E(u_i)$ vem dada por:

$$\text{Modelo NNT: } E(u_i) = \mu + \sigma_u \frac{\phi(\mu/\sigma_u)}{\Phi(\mu/\sigma_u)} \qquad \textbf{(3.22)}$$

$$\text{NG: } E(u_i) = p/\gamma \qquad \textbf{(3.23)}$$

Nos modelos NSN e NE, as expressões respectivas correspondem, obviamente, a casos particulares destas.

Em Battese e Coelli (1988) expõe-se também a expressão de $E(TE_i) = E[\exp(-u_i)]$, para o modelo NNT:

$$E[\exp(-u_i)] = \exp(-\mu + \frac{\sigma_u^2}{2})\ \Phi\ (\frac{\mu}{\sigma_u} - \sigma_u)\ /\ \Phi\ (\frac{\mu}{\sigma_u}) \qquad \textbf{(3.24)}$$

No modelo NG vem:

$$E[\exp(-u_i)] = [\gamma/(\gamma + 1)]^p \qquad \textbf{(3.25)}$$

Apesar de facilmente estimáveis, estas medidas não permitem, como é óbvio, avaliar a ineficiência técnica individual, de algum modo se frustrando, assim, um dos objectivos frequentes da estimação de modelos de fronteira de produção.

4 — Estimação ML e avaliação da eficiência técnica com dados em painel

O recurso a dados em painel comporta, em modelos de fronteira, um conjunto de potenciais vantagens, que permitem, em princípio, contornar algumas das limitações inerentes à estimação com amostras meramente seccionais. No tocante aos dois temas abordados no presente ensaio, os efeitos benéficos de tal utilização fazem, sobretudo, sentir-se em termos da avaliação da eficiência técnica. Como adiante se verá, o recurso a amostras de painel permite a estimação consistente da eficiência — contrariamente, como atrás referido, ao que sucede em modelos de fronteira estocástica com dados seccionais. É sabido que a estimação com dados em painel reveste, em geral, um maior número de potencialidades; tal não constitui, porém, o caso, no que se refere à estimação ML dos quatro modelos presentemente abordados (12).

Reformule-se no que segue a especificação **(2.12)**, de acordo com:

$$\ln y_{it} = \alpha + \beta'\mathbf{X}_{it} + \varepsilon_{it}, \ \varepsilon_{it} = -u_i + v_{it}, \ u_i \geq 0 \qquad \textbf{(4.1)}$$

adoptando, para o termo de perturbação composto, as hipóteses já referidas. Dadas tais hipóteses, a expressão da densidade conjunta de $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1}, ..., \varepsilon_{iTi})'$ obtém-se a partir de:

$$g_\varepsilon(\varepsilon_i) = \int_{D_u} \prod_{t=1}^{T_i} g_v(\varepsilon_{it} + u_i)\, g_u(u_i)\, du_i = \qquad \textbf{(4.2)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \right)^{T_i} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma_v^2} \sum_{t=1}^{T_i} (\varepsilon_{it} + u_i)^2 \right] g_u(u_i)\, du_i$$

Considere-se primeiramente o modelo NNT; a substituição de $g_u(u_i)$ por **(2.7)** conduz à função [cf. Greene (1993)]:

$$g_\varepsilon(\varepsilon_i) = 2^{1/2} [(2\pi\sigma_u^2)^{T_i} (1 + \lambda T_i)]^{-1/2}\, \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma_u}\right) \times \qquad \textbf{(4.3)}$$

$$\times\, \Phi \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda T_i}} \left[\sum_{t=1}^{T_i} (\varepsilon_{it} - \mu) + \mu T_i \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right] \frac{1}{\sigma_u} \right\} \times$$

$$\times \exp \left(\frac{1}{2\sigma_u^2} \left\{ \frac{\lambda}{1+\lambda T_i} \left[\sum_{t=1}^{T_i} (\varepsilon_{it} - \mu) \right]^2 + \sum_{t=1}^{T_i} (\varepsilon_{it} - \mu)^2 \right\} \right)$$

(12) Embora permitindo um cómodo enquadramento do modelo de fronteira nos termos da abordagem convencional com dados em painel, a hipótese de invariância temporal da eficiência [cf. **(2.12)**] pode, em muitos casos, revelar-se pouco apropriada. Com efeito, a sua imposição afasta, *a priori* o estudo dinâmico da eficiência técnica, inviabilizando, por exemplo, a modelização de fenómenos como a aprendizagem ou o aperfeiçoamento técnico. A questão que a propósito se coloca, consiste em saber até que ponto se pode flexibilizar tal pressuposto, sem, por outro lado, abandonar as vantagens da utilização de dados em painel. Neste sentido, a literatura contém algumas propostas de interesse, como, por exemplo, Cornwell, Schmidt e Sickles (1990), Kumbhakar (1990, 1991), Battese e Coelli (1993) ou Lee e Schmidt (1993). Em todos estes textos o modelo sugerido engloba, como caso particular, o modelo de fronteira com invariância temporal da eficiência, facilitando, pois, o ensaio de tal hipótese. Também com dados em painel, não se revela estritamente necessária a imposição de ausência de correlação entre u_i e os regressores. Tal pode inclusivamente mostrar-se desadequado, esperando-se que, se uma empresa conhece o seu nível de ineficiência, se alterem as suas decisões quanto ao nível de *inputs*. A estimação ML exige, todavia, este pressuposto. Pode, pois, aconselhar-se o ensaio prévio da mesma hipótese, por exemplo, através de um teste de Hausman (1978) ou com recurso à metodologia de Hausman e Taylor (1981).

em que $\varepsilon_{it} = \ln y_{it} - \alpha - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_{it}$ e, diversamente de **(3.4)**, $\lambda = (\sigma_u/\sigma_v)^2$. A função LL resulta naturalmente de $\sum_{i=1}^{N} \ln g_\varepsilon(\varepsilon_i)$, ou seja

$$LL(\alpha,\beta,\mu,\lambda,\sigma_u) = \sum_{i=1}^{N} \{ \frac{-1}{2} [T_i \ln(2\pi) - \ln 2 + T_i \ln(\sigma_u^2) + \ln(1+\lambda T_i) - \quad \textbf{(4.4)}$$

$$- 2 \ln \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma_u}\right) - \frac{\lambda}{1+\lambda T_i}\left(\sum_{t=1}^{T_i} \frac{\varepsilon_{it}-\mu}{\sigma_u}\right)^2 + \sum_{t=1}^{T_i}\left(\frac{\varepsilon_{it}-\mu}{\sigma_u}\right)^2]\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \ln \Phi \left\{ \frac{1}{\sigma_u}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda T_i}}\left[\sum_{t=1}^{T_i}(\varepsilon_{it}-\mu) + \mu T_i \frac{\lambda-1}{\lambda}\right]\right\}$$

O modelo NNT é analisado em Battese e Coelli (1988). Se em **(4.3)** e **(4.4)** se fizer $\mu = 0$, obtêm-se as correspondentes expressões para o modelo NSN, proposto, entre outros, por Pitt e Lee (1981).

Para o modelo NG, obtém-se a função $g_\varepsilon(\varepsilon_i)$:

$$g_\varepsilon(\varepsilon_i) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} (\sqrt{2\pi}\,\sigma_v)^{1-T_i}\, T_i^{-1/2} \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma_v^2}\left[\sum_{t=1}^{T_i} \varepsilon_{it}^2 - \frac{(\lambda\sigma_v^2 + T_i\,\bar{\varepsilon}_i)^2}{T_i}\right]\right\} \times$$

$$\times\, \Phi\left(\frac{-\lambda\sigma_v}{\sqrt{T_i}} - \frac{\sqrt{T_i}\,\bar{\varepsilon}_i}{\sigma_v}\right) I(p-1;\, \varepsilon_i) \qquad \textbf{(4.5)}$$

Resulta, deste modo, a função LL:

$$LL(\alpha,\beta,\sigma_v,\gamma,p) = N\,[p \ln g - \ln \Gamma(p)] + \sum_{i=1}^{N}\left[(1-T_i)\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma_v\right) - \frac{\ln T_i}{2}\right] + \qquad \textbf{(4.6)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \frac{-1}{2\sigma_v^2}\left[\sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it}^2 - \frac{1}{T_i}(\gamma\sigma_v^2 + T_i\,\bar{\varepsilon}_i)^2\right] + \sum_{i=1}^{N}\left[\ln \Phi\left(\frac{-\gamma\sigma_v}{\sqrt{T_i}} - \frac{\sqrt{T_i}\,\bar{\varepsilon}_i}{\sigma_v}\right) + \ln I(p-1;\varepsilon_i)\right]$$

em que:

$$I(p-1;\, \varepsilon_i) = E(z_i^{\,p-1} \mid z_i > 0\,;\, \varepsilon_i) \qquad \textbf{(4.7)}$$

$$z_i \mid \varepsilon_i \sim \text{NID}\left(\frac{-\gamma\sigma_v}{T_i} - \bar{\varepsilon}_i\,;\, \frac{\sigma_v^2}{T_i}\right) \qquad \bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{T_i}\sum_{t=1}^{T_i} \varepsilon_{it}$$

Se em **(4.6)** e **(4.7)** se fizer $p = 1$, resultam as funções $g_\varepsilon(\varepsilon_i)$ e LL para o modelo NE.

Quanto às propriedades assintóticas dos estimadores ML em modelos de fronteira com dados de painel, deve referir-se que as mesmas não estão, ainda, estabelecidas com absoluto rigor. Mostrando-se consistentes e assintoticamente eficientes com $N \to \infty$, a situação não é tão evidente quando, com N fixo, se tem $T \to \infty$. É claro que a estimação consistente dos parâmetros da densidade de u requer $N \to \infty$ mas, no tocante aos demais parâmetros, as conclusões são menos óbvias. Schmidt e Sickles (1984) aventam a hipótese de que se possa encontrar distribuições para as quais, à semelhança do que acontece com a distribuição normal no modelo clássico, a informação adicional aproveitada pelo método ML se revele assintoticamente inútil.

Considerando, agora, o tema da avaliação da eficiência técnica, cabe referir, em primeiro lugar, a proposta de Battese e Coelli (1988), para o modelo NNT. Os autores apresentam, para este, a expressão de $E(u_i \mid \varepsilon_i)$, contrapartida da de Jondrow *et al.* (1982), para dados em painel:

$$E(u_i \mid \varepsilon_i) = \mu_i^* + \sigma_{i\bullet} \, . \, \phi\left(\frac{\mu_i^*}{\sigma_{i\bullet}}\right) / \Phi\left(\frac{\mu_i^*}{\sigma_{i\bullet}}\right) \qquad \textbf{(4.8)}$$

em que:

$$\mu_i^* = \frac{\mu - \lambda \sum_{t=1}^{T_i} \varepsilon_{it}}{1 + \lambda T_i}$$

$$\sigma_{i\bullet} = \sigma_u^2 \, / \, (1 + \lambda T_i) \qquad \textbf{(4.9)}$$

$$\lambda = (\sigma_u \, / \, \sigma_v)^2$$

Para os modelos NG e NE, as expressões de $E(u_i \mid \varepsilon_i)$ vêm dadas, respectivamente, por:

$$\text{Modelo NG: } E(u_i \mid \varepsilon_i) = I(p; \varepsilon_i) \, / \, I(p-1; \varepsilon_i) \qquad \textbf{(4.10)}$$

$$\text{Modelo NE: } E(u_i \mid \varepsilon_i) = I(1; \varepsilon_i) = \frac{-\lambda\sigma_v^2}{T_i} - \bar{\varepsilon}_i + \frac{\sigma_v}{\sqrt{T_i}} \, \phi\left(\frac{\bar{\varepsilon}_i T_i^{1/2}}{\sigma_v} + \frac{\lambda\sigma_v}{\sqrt{T_i}}\right) \Big/ \; \Phi\left(-\frac{\bar{\varepsilon}_i T_i^{1/2}}{\sigma_v} - \frac{\lambda\sigma_v}{\sqrt{T_i}}\right) \qquad \textbf{(4.11)}$$

Note-se como, à medida que $T_i \to \infty$, as expressões de $E(u_i \mid \varepsilon_i)$ convergem em cada caso para $-\bar{\varepsilon}_i$, o qual, por sua vez, tende para u_i. Recorde-se que, no modelo com dados seccionais, o estimador de Jondrow *et al.* (1982) [cf. **(3.13)** — **(3.16)**] não é consistente para u_i. Torna-se agora evidente, uma das vantagens da utilização de dados em painel, mesmo que T_i (ou T) não seja muito elevado. Quando se toma $\hat{\bar{\varepsilon}}_i$, o peso, neste, do ruído aleatório tende em probabilidade para zero, pelo que a ineficiência técnica vem progressivamente realçada.

Battese e Coelli (1988) apresentam também, para o modelo NNT, a expressão correspondente a **(3.18)** para dados em painel, a qual vem dada por:

$$E[\exp(-u_i) \mid \varepsilon_i] = \exp\left(-\mu_i^* + \frac{\sigma_{i\bullet}^2}{2}\right) \, \Phi\left(\frac{\mu_i^*}{\sigma_{i\bullet}} - \sigma_{i\bullet}\right) / \; \Phi\left(\frac{\mu_i^*}{\sigma_{i\bullet}}\right) \qquad \textbf{(4.12)}$$

A correspondente expressão para o modelo NSN resulta desta, fazendo $\mu = 0$.

Nos modelos NG e NE vem, respectivamente:

$$\text{Modelo NG: } E[\exp(-u_i) \mid \varepsilon_i] = I^*(p\text{-}1;\varepsilon_i)\ \Phi\left[-\frac{\bar{\varepsilon}_i\sqrt{T_i}}{\sigma_v} - (\gamma+1)\frac{\sigma_v}{\sqrt{T_i}}\right] \times$$
$$\times \exp\left(\bar{\varepsilon}_i + \sigma_v^2\,\frac{1+2\lambda}{2T_i}\right) / \left[I(p\text{-}1;\varepsilon_i)\ \Phi\left(-\frac{\bar{\varepsilon}_i\sqrt{T_i}}{\sigma_v} - \gamma\frac{\sigma_v}{\sqrt{T_i}}\right)\right] \tag{4.13}$$

em que:

$$I^*(p\text{-}1;\varepsilon_i) = E(z_i^{*p-1} \mid z_i^* > 0\,;\varepsilon_i) \tag{4.14}$$

$$z_i^* \mid \varepsilon_i \sim \text{NID}\left[\frac{-(\lambda+1)\,\sigma_v^2}{T_i} - \bar{\varepsilon}_i;\ \frac{\sigma_v^2}{T_i}\right]$$

$$\text{Modelo NE: } E[\exp(-u_i) \mid \varepsilon_i] = \Phi\left[-\frac{\bar{\varepsilon}_i\sqrt{T_i}}{\sigma_v} - (\gamma+1)\frac{\sigma_v}{\sqrt{T_i}}\right] \exp\left(\bar{\varepsilon}_i + \sigma_v^2\,\frac{1+2\lambda}{2T_i}\right) /$$
$$/\ \Phi\left(-\frac{\bar{\varepsilon}_i\sqrt{T_i}}{\sigma_v} - \gamma\frac{\sigma_v}{\sqrt{T_i}}\right) \tag{4.15}$$

Note-se que, considerando $T_i = 1$ ($i = 1,\dots,N$), se obtêm, a partir das expressões indicadas no presente número, as correspondentes expressões para os modelos com dados seccionais, expostas no n.º 3. Ambas se reúnem, como referido, em quadros-resumo anexos.

5 — Conclusão e perspectivas de investigação

No presente ensaio expõe-se um conjunto de resultados, necessários para a estimação ML dos modelos de fronteira estocástica de produção mais frequentes na literatura econométrica. Embora de utilização corrente, nomeadamente com recurso a *software* adequado [13], o método apresenta, como é bem sabido, algumas limitações, com destaque para a fraca robustez dos estimadores, em face da violação de alguns pressupostos relativos aos termos de perturbação. Por tal motivo, necessário se torna testar estatisticamente a validade das hipóteses adoptadas, nomeadamente as que se referem à densidade de tais termos. Lee (1983) expõe dois testes de *score*, visando o ensaio dos modelos NSN e NNT com dados seccionais. Resulta naturalmente atractiva a ideia de aplicar a metodologia proposta a modelos com dados em painel. Entretanto, no que diz respeito aos modelos NE e NG, o maior óbice reside na operacionalização da estimação ML do segundo; não raro, a dificuldade conduz à adop-

[13] De que o programa Limdep [cf. Greene (1995)] constitui bom exemplo.

ção acrítica do modelo NE, em detrimento da modelização mais flexível da eficiência, proporcionada pelo modelo NG. Afigura-se, pois, útil a superação deste obstáculo, tanto mais que o recurso ao teste de *score*, para ensaiar o modelo NE, apresenta, também, dificuldades de cálculo rigoroso ([14]).

No que respeita propriamente à avaliação da eficiência técnica, cumpre realçar a potencialidade da utilização de dados em painel. Contrariamente à abordagem com amostras seccionais, o recurso a dados longitudinais permite, como referido, a avaliação consistente da eficiência técnica individual. Mostra-se, todavia, questionável, a adopção de algumas hipóteses subjacentes aos modelos apresentados, como, por exemplo, a independência entre regressores e eficiência, ou a sua invariância temporal. Potencialmente relevantes, tais aspectos requerem uma abordagem mais completa, sugerindo alternativas de especificação bem como o ensaio estatístico dos referidos pressupostos usuais. Também aqui se afigura fecunda a abordagem com dados em painel, como o atestam vários estudos, incidentalmente mencionados no texto.

Uma outra hipótese, adoptada em todos os modelos expostos, é a da homoscedasticidade dos termos de perturbação. Em modelos de regressão clássica, a violação de tal pressuposto não acarreta, como é sabido, inconsistência dos estimadores habitualmente utilizados, afectando apenas a sua eficiência. Todavia, em modelos de fronteira, as suas consequências afiguram-se mais graves, quer no tocante às propriedades dos estimadores usuais, quer a respeito das medidas de eficiência geradas. Embora alguns trabalhos empíricos o sugiram, não se conhecem, na literatura, estudos de natureza teórica, que demonstrem a inconsistência dos estimadores, em presença de heteroscedasticidade ([15]). Por tal motivo, constitui, também este, um assunto merecedor de atenção mais cuidada, quer no contexto da estimação ML, quer no âmbito de métodos mais robustos.

([14]) Atente-se na expressão da derivada da função LL em ordem a *p*, no modelo NG [cf. **(4.6)**]:

$$\left.\frac{\delta LL}{\delta p}\right|_{p=1} = N \ln \gamma + \sum_{i=1}^{N} \int_{\frac{\bar{\varepsilon}_i \sqrt{T_i}}{\sigma_v} + \frac{\gamma \sigma_v}{\sqrt{T_i}}}^{+\infty} \ln\left(\frac{\sigma_v}{\sqrt{T_i}} w - \bar{\varepsilon}_i - \frac{\gamma \sigma_v^2}{T_i}\right) \phi(w) dw \Big/ \Phi\left(\frac{-\gamma \sigma_v}{\sqrt{T_i}} - \frac{\bar{\varepsilon}_i \sqrt{T_i}}{\sigma_v}\right)$$

([15]) Cf. Caudill e Ford (1993) e Caudill, Ford e Gropper (1995).

ANEXO

Quadros-resumo

QUADRO 1

Modelos com amostra seccional

Modelo	$g\varepsilon(\varepsilon_i)$	LL	$E(u_i \mid \varepsilon_i)$	$E[\exp(-u_i) \mid \varepsilon_i]$
NNT	$\dfrac{\frac{1}{\sigma}\,\phi(\frac{\varepsilon_i-\mu}{\sigma})\;\Phi(-\frac{\mu}{\sigma\lambda}-\frac{\varepsilon_i\gamma}{\sigma})}{\Phi(-\frac{\mu}{\sigma\lambda}\sqrt{1+\lambda^2})}$ $\lambda = \sigma_u/\sigma_v\,,\ \sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$	$-\,N\,[\frac{\ln(2\pi)}{2} + \ln\sigma + \ln\,\Phi(-\frac{\mu\sqrt{1+\lambda^2}}{\sigma\lambda})] +$ $+\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\,\Phi(-\frac{\mu}{\sigma\lambda}-\frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma}) - \frac{(\varepsilon_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\frac{\sigma\lambda}{1+\lambda^2}\,[-\frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma} - \mu +$ $+\ \phi\,\frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma} + \mu)\,/\Phi(-\frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma} - \mu)]$	$\Phi(\frac{\mu_i^*}{\sigma_*} - \sigma_*)\ \exp(-\mu_i^* + \frac{\sigma_*^2}{2})\,/\,\Phi(\frac{\mu_i^*}{\sigma_*})$ $\mu_i^* = (\mu - \varepsilon_i\lambda^2)\,/\,(1+\lambda^2)$ $\sigma_*^2 = \sigma_u^2\,/\,(1+\lambda^2)$
NSN	$\frac{2}{\sigma}\,\phi(\frac{\varepsilon_i}{\sigma})\ \Phi(-\frac{\varepsilon_i\gamma}{\sigma})$ $\lambda = \sigma_u/\sigma_v\,,\ \sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$	$-\,N\,[\frac{\ln(\pi/2)}{2} + \ln\sigma] +$ $+\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\Phi\,(-\frac{\varepsilon_i\gamma}{\sigma}) - \frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}\right]$	$\frac{\sigma\lambda}{1+\lambda^2}\,[-\frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma} +$ $+\ \phi\,\frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma})\,/\Phi(-\frac{\varepsilon_i\lambda}{\sigma})]$	$\Phi(\frac{\mu_i^*}{\sigma_*} - \sigma_*)\ \exp(-\mu_i^* + \frac{\sigma_*^2}{2})\,/\,\Phi(\frac{\mu_i^*}{\sigma_*})$ $\mu_i^* = -\,\varepsilon_i\lambda^2\,/\,(1+\lambda^2)$ $\sigma_*^2 = \sigma_u^2\,/\,(1+\lambda^2)$
NG	$[\gamma^p\,/\,\Gamma(p)]\ \exp(\frac{\gamma^2\sigma_v^2}{2} + \gamma\,\varepsilon_i)\ \times$ $\times\ \Phi(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \gamma\,\sigma_v)\ I(p\text{-}1;\ \varepsilon_i)$ $I(p\text{-}1\ ;\ \varepsilon_i) = E(z_i^{p-1} \mid z_i > 0\ ;\ \varepsilon_i)$ $z_i \mid \varepsilon_i \sim NID(-\,\varepsilon_i - \gamma\,\sigma_v^2\ ;\ \sigma_v^2)$	$N\,[p\ln\gamma - \ln\,\Gamma(p) + \frac{\gamma^2\sigma_v^2}{2}] +$ $+\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\Phi\,(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \gamma\,\sigma_v)\right] +$ $+\sum_{i=1}^{N}\,[\ln I(p-1;\,\varepsilon_i) + \gamma\,\varepsilon_i]$	$I(p\ ;\ \varepsilon_i)\,/\,I(p-1;\ \varepsilon_i)$ $I(p;\ \varepsilon_i) = E(z_i^p \mid z_i > 0\,;\,\varepsilon_i)$ $z_i \mid \varepsilon_i \sim NID(-\,\varepsilon_i - \gamma\sigma_v^2\ ;\ \sigma_v^2)$	$\exp[\varepsilon_i + \frac{\sigma_v^2\,(1+\gamma)}{2}]\ \times$ $\times\ \Phi[-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \sigma_v\ (1+\gamma)]\ I^*(p-1;\,\varepsilon_i)\ /$ $/\ [\Phi(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \gamma\,\sigma_v)\ I(p-1;\,\varepsilon_i)]$ $I^*(p-1;\,\varepsilon_i) = E(z_i^{*p-1} \mid z_i^* > 0\,;\,\varepsilon_i)$ $z_i^* \mid \varepsilon_i \sim NID[-\,\varepsilon_i - \sigma_v^2(1+\gamma)\,;\,\sigma_v^2]$
NE	$\gamma\ \exp(\frac{\gamma^2\sigma_v^2}{2} + \gamma\,\varepsilon_i)\ \Phi(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \gamma\,\sigma_v)$	$-\,N\,(\ln\gamma + \frac{\gamma^2\sigma_v^2}{2}) +$ $+\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\Phi\,(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \gamma\,\sigma_v) + \gamma\,\varepsilon_i\right]$	$-\,\varepsilon_i - \gamma\sigma_v^2 + \sigma_v\,\phi\,(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} +$ $+\ \gamma\sigma_v)\,/\,\Phi\,(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \gamma\sigma_v)$	$\exp[\varepsilon_i + \frac{\sigma_v^2\,(1+\gamma)}{2}]\ \times$ $\times\ \Phi[-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \sigma_v\,(1+\gamma)]\,/\Phi(-\frac{\varepsilon_i}{\sigma_v} - \gamma\,\sigma_v)$

QUADRO 2.1

Modelos NNT e NSN com dados em painel

Modelo	$g\varepsilon(\varepsilon_i)$	LL	$E(u_i \mid \varepsilon_i)$	$E[\exp(-u_i) \mid \varepsilon_i]$
NNT	$2^{1/2}[(2\pi\sigma_u^2)^{Ti}\,(1+\lambda T_i)]^{-1/2}\,\Phi(\frac{\mu}{\sigma_u}) \times$ $\times\,\Phi\{(\frac{\lambda}{1+\lambda T_i})^{1/2}\,[\sum_{t=1}^{T_i}(\varepsilon_{it}-\mu)\,+$ $+\,\mu\,T_i\frac{\lambda-1}{\lambda}]\,\frac{1}{\sigma_u}\}\,\exp(-\,\frac{1}{2\sigma^2_u}\,\{-\,\frac{\lambda}{1+\lambda T_i}\times$ $\times\,[\sum_{t=1}^{T_i}(\varepsilon_{it}-\mu]^2+\sum_{t=1}^{T_i}(\varepsilon_{it}-\mu)^2\})$ $\lambda=(\sigma_u\,/\,\sigma_v)^2$	$\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{N}[T_i\ln(2\pi)-\ln 2+T_i\ln(\sigma_u^2)\,+$ $+\ln(1+\lambda T_i)-2\ln\,\Phi(\frac{\mu}{\sigma_u})\,-$ $-\,\frac{\lambda}{1+\lambda T_i}\,(\sum_{t=1}^{T_i}\frac{\varepsilon_{it}-\mu}{\sigma_u})^2+\sum_{t=1}^{T_i}(\frac{\varepsilon_{it}-\mu}{\sigma_u})^2\;]\,+$ $+\sum_{i=1}^{N}\ln\Phi\,\{(\frac{\lambda}{1+\lambda T_i})^{1/2}\times\frac{\mu}{\sigma_u}\,[\sum_{t=1}^{T_i}(\varepsilon_{it}-\mu)\,+$ $+\,\mu\,T_i\,\frac{\lambda-1}{\lambda}]\}$	$\mu_i^*+\sigma_{i\bullet}\,\phi\,(\frac{\mu_i^*}{\sigma_{i\bullet}})\;/$ $/\;\Phi(\frac{\mu_i^*}{\sigma_{i\bullet}})$ $\mu_i^*=\frac{\mu-\lambda\sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it}}{1+\lambda T_i}$ $\sigma_{i\bullet}=\sigma_u^2\,/\,(1+\lambda T_i)$ $\lambda=(\sigma_u\,/\,\sigma_v)^2$	$\exp(-\mu_i^*+\frac{\sigma^2_{i\bullet}}{2})\times$ $\times\,\Phi(\frac{\mu_i^*}{\sigma_{i\bullet}}-\sigma_{i\bullet})\;/\;\Phi(\frac{\mu_i^*}{\sigma_{i\bullet}})$ $\mu_i^*=\frac{\mu-\lambda\sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it}}{1+\lambda T_i}$ $\sigma_{i\bullet}=\sigma_u^2\,/\,(1+\lambda T_i)$ $\lambda=(\sigma_u\,/\,\sigma_v)^2$
NSN	$[2\,(2\pi\sigma_u^2)^{Ti}\,(1+\lambda T_i)]^{-1/2}\,\Phi[(\frac{\lambda}{1+\lambda T_i})^{1/2}\times$ $\times\frac{1}{\sigma_u}\sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it}]\,\exp\{-\,\frac{1}{2\sigma^2_u}\,[\,-\,\frac{\lambda}{1+\lambda T_i}\times$ $\times\,(\sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it})^2+\sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it}^2]\}$ $\lambda=(\sigma_u\,/\,\sigma_v)^2$	$\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{N}[T_i\ln(2\pi)+\ln 2+T_i\ln(\sigma_u^2)\,+$ $+\ln(1+\lambda T_i)-\frac{\lambda}{1+\lambda T_i}\,(\sum_{t=1}^{T_i}\frac{\varepsilon_{it}}{\sigma_u})^2\,+$ $+\sum_{t=1}^{T_i}(\frac{\varepsilon_{it}}{\sigma_u})2\,]+\sum_{i=1}^{N}\ln\Phi\,(\frac{\lambda}{1+\lambda T_i})^{1/2}\frac{1}{\sigma_u}\sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it}]$	$\mu_i^*+\sigma_{i\bullet}\,\phi(\frac{\mu_i^*}{\sigma_{i\bullet}})\;/$ $/\;\Phi(\frac{\mu_i^*}{\sigma_{i\bullet}})$ $\mu_i^*=\frac{-\lambda\sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it}}{1+\lambda T_i}$ $\sigma_{i\bullet}=\sigma_u^2\,/\,(1+\lambda T_i)$ $\lambda=(\sigma_u\,/\,\sigma_v)^2$	$\exp(-\mu_i^*+\frac{\sigma^2_{i\bullet}}{2})\times$ $\times\,\Phi(\frac{\mu_i^*}{\sigma_{i\bullet}}-\sigma_{i\bullet})\;/\;\Phi(\frac{\mu_i^*}{\sigma_{i\bullet}})$ $\mu_i^*=\frac{-\lambda\sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it}}{1+\lambda T_i}$ $\sigma_{i\bullet}=\sigma_u^2\,/\,(1+\lambda T_i)$ $\lambda=(\sigma_u\,/\,\sigma_v)^2$

QUADRO 2.2

Modelos NG e NE com dados em painel

Modelo	$g\varepsilon(\varepsilon_i)$	LL	$E(ui \mid \varepsilon_i)$	$E[\exp(-ui) \mid \varepsilon_i]$
NG	$[\gamma^p / \Gamma(p)]\ (\sqrt{2\pi}\ \sigma_v)^{1-T_i}\ T_i^{-1/2} \times$ $\times \exp\{\frac{1}{2\sigma_v^2}\ [\sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it}^2 - \frac{(\gamma\sigma_v^2 + T_i\bar{\varepsilon}_i)^2}{T_i}]\} \times$ $\times\ \Phi(\frac{-\gamma\ \sigma_v}{\sqrt{T_i}} - \frac{\sqrt{T_i}\ \bar{\varepsilon}_i}{\sigma_v})\ I(p\text{-}1;\ \varepsilon_i)$ $I(p\text{-}1;\varepsilon_i) = E(z_i^{p-1} \mid z_i > 0;\varepsilon_i),\ \bar{\varepsilon}_i = \sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it}/T_i$ $z_i \mid \varepsilon_i \sim NID(\frac{-\gamma\ \sigma_v^2}{T_i} - \bar{\varepsilon}_i\ ;\ \frac{\sigma_v^2}{T_i})$	$N\ [p\ \ln\ \gamma\text{-}\ln\ \Gamma(p)]$ $+ \sum_{i=1}^{N}\left[(1 - T_i)\ \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_v) - \frac{\ln\ T_i}{2}\right] +$ $+ \frac{-1}{2\sigma_v^2}\ \sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{t=1}^{T_i}\ \varepsilon_{it}^2 - \frac{(\gamma\sigma_v^2 + T_i\bar{\varepsilon}_i)^2}{T_i}\right] +$ $+ \sum_{i=1}^{N}\left[\ln\Phi(\frac{-\gamma\ \sigma_v}{\sqrt{T_i}} - \frac{\sqrt{T_i}\ \bar{\varepsilon}_i}{\sigma_v}) + \ln\ I(p\text{-}1;\varepsilon_i)\right]$	$I(p;\varepsilon_i)\ /\ I(p\ \text{-}1;\varepsilon_i)$ $I(p;\varepsilon_i)=E(z_i^p \mid z_i > 0;\ \varepsilon_i)$ $z_i \mid \varepsilon_i \sim$ $\sim NID(\frac{-\gamma\ \sigma_v^2}{T_i} - \bar{\varepsilon}_i\ ;\ \frac{\sigma_v^2}{T_i})$ $\bar{\varepsilon}_i = \sum_{t=1}^{T_i}\ \varepsilon_{it}/T_i$	$\Phi[- \frac{\sqrt{T_i}\ \bar{\varepsilon}_i}{\sigma_v} - (\gamma+1)\frac{\sigma_v}{\sqrt{T_i}}] \times$ $\times \exp[\bar{\varepsilon}_i + (1+2\gamma)\ \frac{\sigma_v^2}{2T_i}]\ I^*(p\text{-}1;\varepsilon_i)\ /$ $/[I(p\text{-}1;\varepsilon_i)\ \Phi(- \frac{\sqrt{T_i}\ \bar{\varepsilon}_i}{\sigma_v} - \frac{\gamma\ \sigma_v}{\sqrt{T_i}})]$ $I^*(p\text{-}1;\ \varepsilon_i) = E(z_i^{*\ p-1} \mid z_i^* > 0\ ;\ \varepsilon_i)$ $z_i^* \mid \varepsilon_i \sim NID[-(\gamma+1)\frac{\sigma_v^2}{T_i} - \bar{\varepsilon}_i\ ;\ \frac{\sigma_v^2}{T_i}]$
NE	$\gamma\ (\sqrt{2\pi}\ \sigma_v)^{1-T_i}\ T_i^{-1/2} \times$ $\times \exp\{\frac{1}{2\sigma_v^2}\ [\sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it}^2 - \frac{(\gamma\sigma_v^2 + T_i\bar{\varepsilon}_i)^2}{T_i}]\} \times$ $\times\ \Phi(\frac{-\gamma\ \sigma_v}{\sqrt{T_i}} - \frac{\sqrt{T_i}\ \bar{\varepsilon}_i}{\sigma_v})$ $\bar{\varepsilon}_i = \sum_{t=1}^{T_i}\varepsilon_{it}\ /T_i$	$N\ \ln\ \gamma + \sum_{i=1}^{N}\left[(1 - T_i)\ \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_v) - \frac{\ln\ T_i}{2}\right] +$ $+ \frac{-1}{2\sigma_v^2}\ \sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{t=1}^{T_i}\ \varepsilon_{it}^2 - \frac{(\gamma\sigma_v^2 + T_i\bar{\varepsilon}_i)^2}{T_i}\right] +$ $+ \sum_{i=1}^{N}\ \ln\ \Phi(\frac{-\gamma\ \sigma_v}{\sqrt{T_i}} - \frac{\sqrt{T_i}\ \bar{\varepsilon}_i}{\sigma_v})$	$\frac{-\gamma\ \sigma_v^2}{T_i} - \bar{\varepsilon}_i +$ $+ \frac{\sigma_v}{\sqrt{T_i}}\ \Phi(\frac{\sqrt{T_i}\ \bar{\varepsilon}_i}{\sigma_v} + \frac{\gamma\ \sigma_v}{\sqrt{T_i}})/$ $/\ \Phi(- \frac{\sqrt{T_i}\ \bar{\varepsilon}_i}{\sigma_v} - \frac{\gamma\ \sigma_v}{\sqrt{T_i}})$	$\Phi[- \frac{\sqrt{T_i}\ \bar{\varepsilon}_i}{\sigma_v} -(\gamma+1)\frac{\sigma_v}{\sqrt{T_i}}] \times$ $\times \exp[\bar{\varepsilon}_i + (1+2\gamma)\frac{\sigma_v^2}{2T_i}]\ /$ $/\ \Phi(- \frac{\sqrt{T_i}\ \bar{\varepsilon}_i}{\sigma_v} - \frac{\gamma\ \sigma_v}{\sqrt{T_i}})$

BIBLIOGRAFIA

AFRIAT, S. (1972), «Efficiency Estimation of Production Functions», *International Economic Review*, 13, 3, pp. 568-598.

AIGNER D., Lovell, C., e SCHMIDT, P. (1977), «Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models», *Journal of Econometrics*, 6, pp. 21-37.

BATTESE, G., e COELLI, T. (1988), «Prediction of Firm-level Technical Efficiencies with a Generalized Frontier Production Function and Panel Data», *Journal of Econometrics*, 38, pp. 387-399.

—— (1992), «Frontier Production Functions, Technical Efficiency and Panel Data: With Application to Paddy Farmers in India», *Journal of Econometrics,* 38, pp. 387-399.

—— (1993), *A Generalized Stochastic Frontier Production Function Incorporating a Model for Inefficiency Effects*, Department of Econometrics, University of New England, Armidale, Australia.

BATTESE, G., e CORRA, G. (1977), «Estimation of a Production Frontier Model: With Application to the Pastoral Zone of Eastern Australia», *Australian Journal of Agricultural Economics*, 21, pp. 167-179.

BAUER, P. (1990), «A Survey of Recent Econometric Developments in Frontier Estimation», *Journal of Econometrics,* 46, pp. 21-39.

BECKERS, D., e HAMMOND, C. (1987), «A Tractable Likelihood Function for the Normal-Gamma Stochastic Frontier Model», *Economics Letters,* 24, pp. 33-38.

CAUDILL, S., e FORD, J. (1993), «Biases in Frontier Estimation due to Heteroscedasticity», *Economics Letters*, 41, pp. 17-20.

CAUDILL, S., FORD, J., e GROPPER, D. (1995), «Frontier Estimation and Firm-Specific Inefficiency Measures in the Presence of Heteroscedasticity», *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, pp. 105-111.

COELLI, T. (1995), «Estimators and Hypothesis Tests for a Stochastic Frontier Function: A Monte Carlo Analysis», *Journal of Productivity Analysis,* 6, 3, pp. 247-268.

CORNWELL, C., SCHMIDT, P., e SICKLES, R. (1990), «Production Frontiers with Cross Sectional and Time Series Variation in Efficiency Levels», *Journal of Econometrics*, 46, pp. 185-200.

FARRELL, M. (1957), «The Measurement of Productive Efficiency», *Journal of the Royal Statistical Society A, (general)* 120, part III, pp. 253-281.

FØRSUND, F. (1985), «Frontier Production Functions, Comment», Econometric Reviews, 4(2), pp. 329-334.

FØRSUND, F. , LOVELL, C., e SCHMIDT, P. (1980), «A Survey of Frontier Production Functions and of their Relationship to Efficiency Measurement», *Journal of Econometrics,* 13, pp. 5-25.

GONG, B., e SICKLES, R. (1989), «Finite Sample Evidence on the Performance of Stochastic Frontier Models Using Panel Data», *Journal of Productivity Analysis,* 1, 3, pp. 229-261.

GREENE, W. (1980), «Maximum Likelihood Estimation of Econometric Frontier Functions», *Journal of Econometrics,* 13, pp. 27-56.

—— (1985), «Frontier Production Functions, Comment», *Econometric Reviews,* 4(2), pp. 335-338.

—— (1990), «A Gamma Distributed Stochastic Frontier Model», *Journal of Econometrics*, 46, pp. 141-163.

—— (1993), «The Econometric Approach to Efficiency Analysis», *in* H. Fried, C. Lovell, S. Schmidt (eds.), *The Measurement of Productive Efficiency*, Oxford, Oxford University Press.

—— (1995), *LIMDEP, version 7.0, User's Manual*, New York: Econometric Software, Inc.

—— (1997), *Econometric Analysis,* 3d ed., New Jersey, Prentice-Hall, Inc. Hall, Bronwyn H. (1995), *Time Series Processor, Version 4.3, Reference Manual,* TSP International.

HAUSMAN, J. (1978), «Specification Tests in Econometrics», *Econometrica*, 46, pp. 1251-1271.

HAUSMAN, J., e TAYLOR, W. (1981), «Panel Data and Unobservable Individual Effects», *Econometrica*, 49, pp. 1377-1398.

JONDROW, J., LOVELL, C., MATEROV, I., e SCHMIDT, P. (1982), «On the Estimation of Technical Inefficiency in the Stochastic Frontier Production Function Model», *Journal of Econometrics*, 19, pp. 233-238.

KOPP, J., e MULLAHY, J. (1990), «Moment-Based Estimation and Testing of Stochastic Frontier Models», *Journal of Econometrics*, 46, pp. 165-183.

KUMBHAKAR, S. (1990), «Production Frontiers, Panel Data and Time-varying Technical Inefficiency», *Journal of Econometrics*, 46, pp. 201-211.

—— (1991), «Estimation of Technical Inefficiency in Panel Data Models with Firm and Time-specific Effects», *Economics Letters*, 36, pp. 43-48.

KUMBHAKAR, S., GHOSH, S., e McGUCKIN, J. (1991), «A Generalized Production Frontier Approach for Estimating Determinants of Inefficiency in U. S. Dairy Farms», *Journal of Business and Economic Statistics*, 9, 3, pp. 279-286.

LEE, L.-F. (1983), «A Test for the Distributional Assumptions for the Stochastic Frontier Functions», *Journal of Econometrics*, 22, pp. 245-267.

—— (1993), «Asymptotic Distribution of the Maximum Likelihood Estimator for a Stochastic Frontier Function Model with a Singular Information Matrix», *Econometric Theory*, 9, pp. 413-430.

LEE, Y., e SCHMIDT, P. (1993), «A Production Frontier Model with Flexible Temporal Variation in Technical Efficiency», *in* H. Fried, C. Lovell, S. Schmidt (eds.), *The Measurement of Productive Efficiency*, Oxford, Oxford University Press.

LEOTE DE PAIVA, R. (s. d.), *A Medição da Eficiência no Sector Hospitalar — O Caso Português*, tese de doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior de Economia e Gestão.

LOVELL, C. (1993), «Production Frontiers and Productive Efficiency», *in* H. Fried, C. Lovell, S. Schmidt (eds.), *The Measurement of Productive Efficiency*, Oxford, Oxford University Press.

MEEUSEN, W., e VAN DEN BROECK, J. (1977), «Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions with Composed Error», *International Economic Review*, 18, pp. 435-444.

MURTEIRA, B. J. F. (1990), *Probabilidades e Estatística*, vols. I e II, 2.ª ed., Lisboa, McGraw-Hill.

MURTEIRA, J. (1997), *Modelos de Fronteira Estocástica de Produção*, dissertação de mestrado, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior de Economia e Gestão.

PARK, B., e SIMAR, L. (1994), «Efficient Semiparametric Estimation in a Stochastic Frontier Model», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 89, n.º 427, pp. 929-936.

PITT, M., e LEE, L.-F. (1981), «The Measurement and Sources of Technical Inefficiency in the Indonesian Weaving Industry», *Journal of Development Economics*, 9(1), pp. 43-64.

RICHMOND, J. (1974), «Estimating the Efficiency of Production», *International Economic Review*, 15, pp. 515-521.

SCHMIDT, P. (1976), «On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions», *Review of Economics and Statistics*, 58, pp. 238-239.

—— (1976), «On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions», *Review of Economics and Statistics*, 58, pp. 481-482.

—— (1985), «Frontier Production Functions», *Econometric Reviews*, 4(2), pp. 289-328.

SCHMIDT, P., e LIN, T. (1984), «Simple Tests of Alternative Specifications in Stochastic Frontier Models», *Journal of Econometrics*, 24, pp. 349-361.

SCHMIDT, P., e SICKLES, R. (1984), «Production Frontiers and Panel Data», *Journal of Business and Economic Statistics*, 2, pp. 367-374.

STEVENSON, R. (1980), «Likelihood Functions for Generalized Stochastic Frontier Estimation», *Journal of Econometrics*, 13, pp. 58-66.

VAN DEN BROECK, J., OSIEWALSKI, J., e STEEL, M. (1994), «Stochastic Frontier Models, A Bayesian Perspective», *Journal of Econometrics*, 61, pp. 273-303.

WALDMAN, D. (1982), «A Stationary Point for the Stochastic Frontier Likelihood», *Journal of Econometrics*, 18, pp. 275-279.