UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO

CONHECIMENTO DOS FUTUROS PROFESSORES DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS

Celina Maria Ramos Tavares

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialização em Didática da Matemática

2012

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO

CONHECIMENTO DOS FUTUROS PROFESSORES DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS

Celina Maria Ramos Tavares

Dissertação orientada pela Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação

Área de especialização em Didática da Matemática

2012

Resumo

O presente trabalho intitulado – *O conhecimento dos futuros professores do 1.º ciclo do ensino básico sobre números racionais* procura compreender o desenvolvimento do conhecimento matemático para ensinar números racionais dos futuros professores do 1.º ciclo relativamente a formas de representação de números racionais e das suas conexões; ordenação, comparação, equivalência e densidade de números racionais e interpretar as dificuldades que manifestam antes e após a lecionação de uma unidade temática sobre Números Racionais, de uma disciplina da formação inicial de professores.

O quadro teórico incide sobre as diferentes formas de representação dos números racionais e seus significados bem como sobre a comparação, ordenação e densidade de números racionais tópicos que constam do atual Programa de Matemática e ensinados no 1.º ciclo do ensino básico bem como o conhecimento matemático para ensinar. Assume-se que este tema é complexo e difícil para os professores em formação inicial e, por isso, torna-se premente identificar as dificuldades manifestadas e as estratégias utilizadas para resolver problemas sobre números racionais de forma a perceber o tipo de conhecimento que possuem.

Este estudo segue uma abordagem qualitativa e quantitativa comparativa e de carácter exploratório tendo por base as produções escritas dos futuros professores no teste inicial, unidade temática e teste final sendo a recolha de dados efetuada numa turma de futuros professores de 1.º ciclo da Escola Superior de Educadores de Infância Maria Ulrich. A análise de dados foi orientada pelo quadro teórico apresentado neste estudo e referido anteriormente.

Em termos globais, conclui-se que apenas alguns dos futuros professores possui, no início do estudo, conhecimento comum sobre números racionais pois resolve problemas acerca destes tópicos mas, tem dificuldade em produzir argumentos válidos para justificar as opções efetuadas ou para resolver problemas, evidenciando uma maior proficiência na resolução de problemas sobre ordenação de números racionais e no significado medida. Após a realização da unidade temática e das discussões efetuadas em pequeno e grande grupo, a maioria dos futuros professores consolida o seu conhecimento sobre números racionais e evidencia um conhecimento mais especializado do conteúdo conseguindo justificar as suas opções e resoluções com estratégias mais informais, sendo no tópico comparação de números racionais e no significado de quociente onde obtêm melhores resultados.

Palavras-chave: Números racionais, Representações, Comparação e Ordenação, Densidade, Conhecimento matemático para ensinar

Abstract

This work entitled *First cycle of basic education preservice teachers' knowledge on rational numbers* aims to understand the development of mathematical knowledge for teaching rational numbers of preservice elementary teachers about the different representations of rational numbers and their connections and in the issues of comparing, ordering, equivalence and density of rational numbers and to interpret the difficulties that they have before and after a thematic unit that the researcher taught.

The theoretical framework focuses on the different forms of representation and on the five subconstructs of rational numbers, as well as on comparing, ordering and density of rational numbers topics listed in the current program for the first cycle of basic education and on the mathematical knowledge to teach. It is assumed that this issue is complex and difficult for preservice teachers and therefore it is urgent to identify the difficulties experienced and the strategies used to solve problems on rational numbers in order to realize the kind of knowledge they possess.

This study follows a qualitative and quantitative comparative and exploratory nature based on the written production of preservice teachers in the initial test, during the teaching unit and in the final test. The study was carried out in a class of preservice elementary teachers in a teacher training school, Escola Superior de Educadores de Infância Maria Ulrich. The data analysis was guided by the theoretical framework presented in this study and previously mentioned.

Overall it appears that few preservice teachers have at the beginning of the study, common knowledge about rational numbers because they solve problems about these topics but have difficulty finding valid arguments to justify their choices, showing a higher proficiency in solving problems on ordering rational numbers and the subconstruct measure. Upon completion of the teaching unit and the discussions made in small and large group, most preservice teachers consolidate their knowledge of rational numbers and show a more specialized knowledge of content which enables them to justify their choices and solutions with more informal strategies. They get the best results in the topic of comparison of rational numbers and concerning the subconstruct quotient.

Keywords: Rational numbers, Representations, Subconstructs, Comparing, Ordering, Density, Mathematical knowledge for teaching

Agradecimentos

À Professora Doutora Hélia Oliveira, pelo interesse e disponibilidade sempre manifestados, por toda a orientação, forte apoio, motivação e todos os conselhos e conversas mantidas durante este ano.

À Direção da Escola Superior de Educação de Infância Maria Ulrich pelas facilidades concedidas na realização deste trabalho e, ao mesmo tempo, por terem dado o seu excelente contributo.

Aos estudantes que participaram nesta investigação pela disponibilidade e colaboração em todas as tarefas apresentadas pois sem vocês este trabalho não teria sido possível.

À minha mãe por tudo o que representa no nosso núcleo familiar. Os teus ensinamentos foram e são sempre preciosos, obrigada por me teres apoiado nesta nova aventura.

Às minhas irmãs, irmãos, cunhadas e cunhados por acreditarem sempre em mim e me apoiarem neste projeto.

Às minhas sobrinhas e sobrinhos por todos os momentos que partilho com vocês e por me permitirem continuar mentalmente sã e fisicamente jovem.

A todos os amigos e especialmente ao Luís por todo o apoio e palavras de incentivo com que me têm brindado.

A todos os professores do Mestrado em Didática da Matemática por todos os ensinamentos.

Aos colegas deste curso que comigo partilharam esta aventura e, em particular, à Adélia e à Rosa, pelos bons momentos, conversas e aprendizagens partilhadas.

Índice Geral

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Índice de Anexos

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo apresentam-se as razões que determinaram a escolha deste tema bem como a minha motivação para o estudo do conhecimento dos professores sobre os números racionais, o problema, as suas questões orientadoras e objetivos, e por fim, faz-se uma breve referência à organização deste estudo.

1. Motivação

A dissertação de um mestrado passa pela escolha e investigação de um tema que seja relevante, atual e com interesse para a área de estudos em causa. Tendo em conta estes fatores foi necessário procurar uma temática que aliasse estes objetivos com o gosto pessoal da investigadora. Assim, para concluir o Mestrado em Didática da Matemática, a escolha recaiu sobre o tema *O conhecimento dos futuros professores do 1.º ciclo do ensino básico sobre números racionais*.

A escolha deste tema prende-se com o desafio que a minha atividade profissional me coloca, como professora da disciplina de Fundamentos de Aritmética na Escola Superior de Educadores de Infância Maria Ulrich. Como professora desta disciplina tenho assistido à dificuldade que alguns dos futuros professores (mais adiante referidos por estudantes ou formandos) manifestam na compreensão dos números racionais, no que concerne, às suas formas de representação, comparação, ordenação, equivalência e operações aritméticas que lhe estão associadas, apesar de terem tido pelo menos nove anos de ensino em Matemática. Apesar de ouvirem falar, por exemplo, em frações equivalentes e perceberem que as podem obter quando multiplicam o numerador e o denominador por um mesmo número inteiro, frequentemente não compreendem a noção de quociente uma vez que têm dificuldades em entender que a parte do todo da fração obtida mantém-se igual à da fração de partida.

Manifestam também muitas dificuldades em operar com estes números na sua forma fracionária, nomeadamente na adição e multiplicação. Entendem que a adição de duas ou mais frações só poderá ser efetuada se as quantidades tiverem o mesmo denominador, porém ao tomarem contacto com esta regra da adição, utilizam-na indiferentemente na adição e na multiplicação. Geralmente, confundem a regra utilizada para a adição e usam-na na multiplicação de dois números fracionários determinando primeiro o denominador comum às duas frações e, só depois as multiplicam.

Outra das dificuldades sentidas, por estes futuros professores, prende-se com a utilização da reta numérica pois não entendem o significado de densidade dos números racionais, e que por isso, compreendam que entre duas frações existem uma infinidade de números racionais. Não tendo desenvolvido uma compreensão do número racional no seu significado de medida, conduz a que não utilizem com facilidade segmentos de reta como unidade de medida, por exemplo, para determinarem distâncias.

Tendo em conta que a introdução do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) dá indicações explícitas sobre o estudo das diferentes representações dos números racionais no 1.º ciclo, torna-se premente identificar os conhecimentos e as dificuldades sentidas, pelos futuros professores, acerca destas formas de representação bem como acerca dos tópicos sobre comparação, ordenação e densidade dos números racionais, de modo a contribuir para o seu desenvolvimento profissional bem como para um melhor conhecimento da problemática do ensino e da aprendizagem dos números racionais.

É importante analisar as experiências vividas pelos professores em formação inicial ou futuros professores pois estas podem ter consequências no conhecimento, conceções e atitudes que desenvolvem em relação à Matemática, aos alunos, ao ensino, à aprendizagem e à profissão. Tal como refere Ponte (2008), a mudança de práticas profissionais é, em qualquer profissão, um processo difícil e exigente e, por isso, cabe aos que promovem a formação dos professores, tanto inicial como contínua, formar professores que promovam percursos de aprendizagem coerentes e que permitam a construção de conceitos e a compreensão de processos que promovam momentos de reflexão, discussão e análise crítica fundamentais para o desenvolvimento da aprendizagem dos seus alunos.

2. Problemática da investigação

O conceito de número racional é complexo, sofisticado e de difícil entendimento quer para alunos quer para os futuros professores de 1.º ciclo que frequentam a formação inicial (Behr et al., 1984, 1985; Lamon, 1996; Mack, 1990, 1995; Ni & Zhou, 2005). Constatando-se, muitas vezes, lacunas na sua formação sobre os números racionais que deverão ser clarificadas de modo a aprofundar o seu conhecimento matemático para ensinar esta temática e para que estes estejam seguros das diferenças entre os vários conceitos matemáticos e do modo de os apresentar aos alunos (Gomes, 2001).

Os professores em formação inicial deveriam ser capazes de identificar, reconhecer ou compreender um maior conjunto de diferentes significados ou representações dos números racionais, contudo, verifica-se que estas competências que deveriam ter sido adquiridas durante o ensino básico, frequentemente, ainda não foram bem compreendidas. Verifica-se, também, que os futuros professores têm muitas dificuldades na compreensão deste conjunto numérico e das operações que lhe estão subjacentes, durante o processo de formação ou durante o exercício da sua função profissional, tornando-se premente ajudá-los a superar estas dificuldades, tal como referem Tirosh, Fischbein, Graeber e Wilson (1998).

Segundo Ma (1999) muitos dos futuros professores de matemática começam a exercer a profissão sem ter um conhecimento profundo de matemática para ensinar e, no que concerne ao tópico dos racionais, muitas investigações (Ball, 1990a, 1990b; Borko et al., 1992; Ma, 1999; Tirosh, 2000) referem que estes resolvem problemas baseados em procedimentos que foram mal compreendidos e que os irão ensinar aos seus alunos. Salientam também que os futuros professores devem ter uma compreensão profunda dos tópicos sobre números racionais para que consigam ajudar os seus alunos a superar as dificuldades diagnosticadas na transferência dos conceitos dos números inteiros para os números racionais bem como o ensino dos modelos corretos das operações com os números racionais. Mencionam, ainda, que o conhecimento adquirido pelos professores deve ser um conhecimento mais especializado e diferente do conhecimento que uma pessoa comum detém.

Ball (1990a) realça que os futuros professores acreditam que saber procedimentos é suficiente para uma compreensão profunda da matemática, no entanto, os professores devem entender profundamente os números racionais para serem capazes de os representar de forma adequada e de várias maneiras para conseguirem ajudar no desenvolvimento conceptual da matemática dos seus alunos. Por outro lado, Stacey et al. (2001) mencionam que nos cursos de formação inicial os futuros professores devem ter acesso a oportunidades educativas que foquem as duas vertentes do conhecimento – conteúdo matemático e pedagógico do conteúdo, de modo, que sejam capazes de descrever os passos/etapas de um dado procedimento mas, também, sejam capazes de explicar o significado e as razões para a utilização desse procedimento.

A conceptualização do conhecimento matemático para ensinar de Hill e Ball (2009) prende-se com a intenção das autoras de compreender o que os professores necessitam de saber e ser capazes de fazer em articulação com a dificuldade em relacionar o conhecimento detido pelo professor com o conhecimento adquirido pelo aluno. Após a análise da prática de vários professores, estas autoras concluem que a capacidade de ver os conteúdos pela perspetiva dos alunos e de os compreender envolve um raciocínio e uma capacidade matemática que vão para além do conhecimento do conteúdo matemático, o qual identificaram por conhecimento matemático para ensinar.

O modelo do conhecimento matemático para ensinar (Hill & Ball, 2009) engloba o conhecimento do conteúdo matemático e o conhecimento pedagógico do conteúdo. O conhecimento do conteúdo matemático engloba o conhecimento comum do conteúdo que inclui o conhecimento dos conceitos matemáticos, o conhecimento especializado do conteúdo que inclui o conhecimento utilizado na sala de aula e que o professor necessita para ensinar de forma eficiente e o conhecimento do horizonte matemático que corresponde à noção que o professor tem dos programas e da forma como relaciona os conteúdos matemáticos abordados nos diferentes anos de escolaridade. O conhecimento pedagógico do conteúdo divide-se em três domínios – conhecimento do conteúdo e dos alunos, conhecimento do conteúdo e do ensino e conhecimento do conteúdo e do currículo e corresponde a uma integração do conhecimento do conteúdo com outro tipo de conhecimento.

Nas aulas da disciplina que leciono no 2.º ano do curso de formação inicial onde são abordados os números racionais e as suas operações aritméticas deteto que os futuros professores de 1.º ciclo revelam muitas dificuldades na resolução de problemas que envolvam estes conceitos e não conseguem arranjar argumentos válidos para justificar os seus raciocínios e, por isso, fico apreensiva com os conhecimentos que os futuros professores têm para ensinar números racionais, uma vez que futuramente irão trabalhar alguns destes conceitos com os seus alunos. Por isso, proponho-me com este estudo identificar os conhecimentos e as dificuldades que os futuros professores manifestam relativamente aos números racionais, antes e após uma unidade temática sobre este assunto que será aplicada numa disciplina do 4.º ano do mestrado profissionalizante e a estudantes que pretendem ser futuros professores de 1.º ciclo, uma vez que nesta disciplina são analisados do ponto de vista didático os temas propostos no Programa de Matemática para o 1.º ciclo do Ensino Básico (ME, 2007).

A unidade temática sobre números racionais centrada na resolução de problemas com diferentes formas de representação de número racional com o objetivo de promover o conhecimento matemático para ensinar números racionais dos futuros professores será desenvolvida na disciplina de Didáticas Específicas no 1.º ciclo do Ensino Básico – Matemática. Neste contexto, este estudo procura compreender o desenvolvimento do conhecimento matemático para ensinar números racionais dos futuros professores do 1.º ciclo relativamente a:

1. formas de representação de números racionais e das suas conexões;
2. ordenação, comparação, equivalência e densidade de números racionais;

e interpretar as dificuldades que manifestam antes e após a unidade temática.

Procurar-se-á, ainda, refletir de que modo o trabalho com os professores da formação inicial, nesta unidade temática, contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático para ensinar números racionais.

Torna-se necessário identificar as dificuldades ainda manifestadas pelos futuros professores e permitir que adquiram uma compreensão significativa de número racional, que englobe um processo de reflexão, domínio e integração dos diferentes significados e da simbologia específica. A execução de operações com destreza e com compreensão do seu significado bem como a capacidade de elaboração de problemas relevantes e contextualizados, capazes de construir conhecimentos de números racionais são processos importantes que permitem relacionar e integrar os diferentes significados de número racional e impedir que a sua manipulação seja reduzida a uma mera aplicação mecânica de algoritmos e operações.

Esta unidade temática segue de perto as orientações curriculares preconizadas pelo novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) para os números racionais, tendo um enfoque na resolução de problemas e no trabalho simultâneo com várias representações e conexões. A unidade temática será constituída por fichas de trabalho com questões sobre os números racionais na sua representação fracionária, decimal e percentagem e que envolvam situações contextualizadas, icônicas ou não em conjuntos discretos e contínuos de forma a poder perceber se os futuros professores as compreendem.

Torna-se importante analisar o investimento na preparação dos futuros professores para o ensino deste tópico uma vez que a presença dos números racionais no currículo de matemática da Educação Básica estará sempre presente desde o 1.º ano de escolaridade e permitirá o desenvolvimento de uma diversidade de competências cognitivas nos alunos. Por outro lado, os futuros professores de matemática aprenderam o tópico dos números racionais com um currículo diferente do atual e, muitas vezes, com um enfoque na memorização dos procedimentos de como resolver problemas e do modo como fazer conduzindo à mecanização dos procedimentos sem dar grande importância ao desenvolvimento da compreensão dos conceitos e do raciocínio.

De acordo com o Programa de Matemática (ME, 2007) é necessário que os alunos possam aprender Matemática com compreensão, através do envolvimento ativo do aluno com diversos tipos de experiências matemáticas, que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos e que permitam construir novo conhecimento a partir daquele que possui. Dado que estes futuros professores não tiveram contato com este tipo de experiências de aprendizagem, a formação inicial necessita de criar contextos favoráveis ao desenvolvimento de um conhecimento matemático para ensinar compatível com este tipo de práticas e que ajude os futuros professores a terem conhecimentos relativos às ideias matemáticas que estão a ser exploradas.

3. Organização do estudo

O trabalho aqui apresentado será constituído por sete capítulos, sendo o primeiro referente à problemática da investigação, pertinência e motivação para o desenvolvimento desta investigação, os dois capítulos seguintes estão intimamente relacionados com o tema proposto e servirão de fio condutor da investigação e os restantes referem-se à metodologia adotada e à análise e discussão dos resultados obtidos.

Capítulo 2 – Números racionais – aprofunda-se o estudo dos números racionais no que concerne aos (i) seus significados, (ii) representações e (iii) ordenação, comparação e equivalência de frações. Abordar-se-ão estes temas com o intuito de enriquecer o estudo aqui apresentado e sustentar algumas das conclusões do trabalho sobre o conhecimento especializado dos futuros professores de 1.º ciclo.

Capítulo 3 – Conhecimento matemático para ensinar números racionais – analisa-se o conhecimento dos futuros professores na formação inicial bem como o conhecimento matemático e pedagógico que os professores devem ter para ensinar matemática e, por último, as dificuldades manifestadas pelos professores no estudo dos números racionais.

Capítulo 4 – Metodologia – descreve-se a metodologia de trabalho seguida durante o trabalho de campo, dando-se ênfase à instituição, participantes no estudo, instrumentos de recolha de dados bem como as atividades a desenvolver, aos aspetos éticos a ter em conta no decorrer deste estudo investigativo e à validade e fiabilidade do estudo efetuado.

Capítulo 5 – Unidade temática – far-se-á a descrição da unidade temática contemplando a descrição dos testes inicial e final, da planificação da unidade e das tarefas apresentadas relativamente aos tópicos sobre noção e representação, comparação, ordenação, equivalência e densidade de números racionais. Abordar-se-ão as opções tomadas na conceção da unidade temática e nos testes inicial e final bem como o tipo e diversidade de problemas propostos e, por último, descrever-se-ão as aulas realizadas durante a unidade temática.

Capítulo 6 – Desempenho dos futuros professores de 1.º ciclo – far-se-á uma análise do desempenho dos futuros professores de 1.º ciclo nos testes inicial e final destacando as estratégias e as dificuldades apresentadas na resolução dos problemas propostos através das transcrições das resoluções efetuadas. Far-se-á, ainda, uma análise comparativa dos resultados obtidos nos dois testes de modo a estudar a evolução do desempenho dos estudantes ao longo da unidade temática realizada.

Capítulo 7 – Conclusões e Comentários finais – serão retiradas as conclusões e inferências possíveis, tendo em conta o trabalho realizado ao longo da unidade temática relacionando-se os resultados obtidos com o enquadramento teórico apresentado. Referir-se-ão, neste capítulo, as limitações do estudo, assim como serão sugeridas algumas recomendações para a formação de professores e para futuras investigações.

Na última parte deste trabalho de investigação incluem-se as referências bibliográficas e em anexo figuram os instrumentos de trabalho utilizados.

Capítulo 2

Números racionais

Nesta secção abordar-se-á o tema dos números racionais no que concerne aos (i) seus significados, (ii) representações e (iii) ordenação, comparação e equivalência de frações. Procurar-se-á dar ênfase ao desenvolvimento dos conceitos e do sentido de número racional a partir dos pontos acima referenciados.

1. Conceito de número racional e seus significados

Os números racionais positivos são conhecidos desde a antiguidade pois existem documentos datados de 1700 a.C., que ilustram problemas envolvendo frações. De acordo com Godino (2004), o conceito de número racional positivo foi-se construindo ao longo dos séculos e a sua definição esteve ligada a contextos de partilha e de medida. Inicialmente, os conceitos de fração e de razão eram independentes e, foram convergindo ao longo do tempo, dando origem ao conceito de número racional positivo e, anos mais tarde, ao conceito mais abrangente de número racional. Ainda de acordo com este autor, os números racionais são o primeiro conjunto numérico que os alunos aprendem que não se baseia no processo de contagem pois não há um número racional que preceda um número racional dado. Assim, existem muitos problemas que não podem ser resolvidos com a utilização dos processos de contagem e que exigem a introdução dos números racionais.

Segundo Post, Behr e Lesh (1986) vários estudos realizados sobre o conceito de número racional indicam que os alunos têm dificuldades de aprendizagem significativas na sua aplicação uma vez que os alunos “não têm um conceito funcional interno de número racional” e os fatores que estão na origem destas dificuldades são: (i) fração apresentar diferentes significados; (ii) conceção da unidade; (iii) ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos e (iv) a sua representação ser constituída por dois números. De acordo com Monteiro e Pinto (2005), este último fator leva os alunos a interpretar as frações como dois números separados e Post et al. (1986) realçam que os alunos têm dificuldade em perceber que os números racionais são números e em compreender que os números racionais podem ser representados de várias formas: numerais decimais, razões, divisões, pontos de uma reta numérica, medida e partes de um todo, o que não lhes permite ter a noção quantitativa de número racional.

Lamon (2001) considera que o trabalho com os números racionais envolve um conjunto de problemas e situações em que os conceitos, procedimentos e representações estão interligados e só poderão ser compreendidos se estiverem inseridos num sistema global de contextos, significados, operações e representações.

Os diferentes significados do número racional (parte-todo, razão, operador, quociente e medida) são a causa das grandes dificuldades sentidas não só por alunos mas também por professores e dependem das situações a que se referem na resolução de problemas. A utilização de uma diversidade de situações problemáticas deverá permitir que se desenvolvam compreensões sobre os diferentes significados (Onuchic & Allevato, 2008), situações (Marshall, 1993), significados (Kieren, 1976) ou sentidos.

Kieren (1976) introduziu a ideia de que os números racionais apresentam vários significados e, inicialmente, identificou sete interpretações para os números racionais:

1. os números racionais são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas etc;
2. os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (via nosso sistema de numeração) dos números naturais;
3. os números racionais são classes de equivalência de frações. Assim $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, ...\}$ e $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, ...\}$ são números racionais;
4. os números racionais são números da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e b ≠ 0. Nesta forma, os números racionais são razões;
5. os números racionais são operadores multiplicativos (por exemplo, "redutores", "ampliadores" etc.);
6. os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado e infinito. Há números da forma $x = \frac{a}{b}$, onde x satisfaz a equação bx = a;
7. os números racionais são medidas ou pontos numa reta numérica.

Kieren (1976) considera o conceito de número racional como pluridimensional conceptualizando-o como um conjunto de significados inter-relacionados: razão, operador, quociente e medida. Refere ainda que a compreensão deste conceito dependerá da compreensão de cada um dos significados de número racional. Mais tarde, Kieren (1980), citado por Tobias (2009), utilizou estas sete interpretações para definir os cinco significados dos números racionais: parte-todo, quociente, medida, razão e operador.

Inicialmente o significado parte-todo, por estar relacionado com os outros quatro, não foi contemplado como um significado distinto, no entanto, Behr et al. (1983) a partir das ideias de Kieren sugeriram um modelo teórico que incluísse a relação parte-todo como um significado distinto. Neste modelo, os cinco significados estão ligados ao processo de partilha equitativa (*partitioning*) relacionando-se as diferentes interpretações de número racional com as suas operações, equivalência de frações e resolução de problemas (fig. 1). As linhas a cheio na figura seguinte representam as relações estabelecidas e as linhas a tracejado representam as relações admitidas como hipóteses.

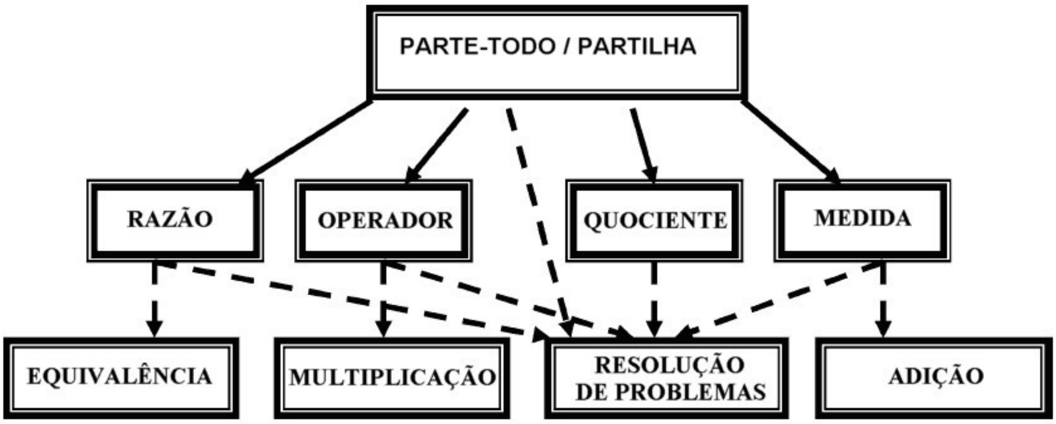


Figura 1 – Modelo teórico relativo ao ensino-aprendizagem dos números racionais (Behr et al.,1983)

De acordo com o modelo apresentado por Behr et al. (1983) a compreensão do significado parte-todo e do processo de partilha (*partitioning*) conduzem ao desenvolvimento da compreensão dos outros quatro significados Realça-se o destaque dado ao significado parte-todo, facto que poderá justificar a importância que este tem merecido na maior parte dos currículos de vários países para a introdução dos números racionais (Charalambos & Pantazi, 2007).

A razão é considerada a forma mais indicada para promover o conceito de equivalência de frações, o operador é considerado importante para o desenvolvimento da compreensão das operações multiplicativas dos números racionais e a medida é necessária para a compreensão das operações aditivas destes números. Assim, considera-se que a compreensão dos cinco significados é indispensável para a resolução de problemas no domínio dos números racionais.

Tobias (2009) refere que embora outros investigadores proponham diferentes significados para os números racionais (Nesher, 1985; Ohlsson, 1988; Vergnaud, 1983; Behr, Harel, Post e Lesh, 1992) os cinco significados acima referenciados têm resistido ao longo dos tempos e ainda são considerados suficientes para clarificar o significado de número racional. No entanto, ainda não é claro sobre quais os tópicos dos números racionais que devem ser ensinados e como.

1.1. Significado parte-todo

Para Lamon (1999), Marshall (1993) e Behr, Lesh, Post e Silver (1992) o significado parte-todo do número racional é apresentado em situações em que uma quantidade contínua ou um conjunto de objetos discretos é dividido em partes de igual tamanho e é fundamental para a compreensão dos outros significados de números racionais. Deste modo, um número racional representado na forma de fração traduz uma comparação entre o numerador, número de partes consideradas da unidade repartida, e o denominador, número total de partes em que a unidade foi dividida. De acordo com esta perspetiva, (i) o numerador da fração é menor ou igual ao denominador; (ii) as partes em que o todo é dividido devem ser do mesmo tamanho; (iii) as partes, em conjunto, devem esgotar o conjunto; (iv) quanto maior o número de partes em que o todo é dividido, menor será a dimensão das partes produzidas; (v) a relação entre as partes e o todo é conservada, independentemente do tamanho, forma, arranjo, ou a orientação das partes equivalentes (Monteiro & Pinto, 2005).

Assim, a compreensão do número racional com o sentido de parte-todo pretende que os alunos desenvolvam capacidades de dividir e redividir a unidade (*unitizing*) e (*reunitizing*) e que os alunos desenvolvam a capacidade de reconstruir o todo a partir das partes. Tobias (2009) refere que embora os estudos documentem que as crianças entram na escola com um entendimento informal da relação parte-todo (Mack, 1990, 1993) este significado não deve ser o único a ser ensinado para que os alunos possam desenvolver adequadamente os outros significados de números racionais.

1.2. Significado razão

O número racional com o significado de razão traduz uma comparação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo, sendo considerado um índice comparativo em vez de um número (Carraher, 1996). Para Nunes et al. (2004) o significado de número racional está relacionado com situações de quantidades intensivas em que os números envolvidos na escrita da fração representam relações proporcionais, sendo o todo irrelevante. A relação entre duas quantidades intensivas representa uma relação entre duas partes de um mesmo todo – razão parte-parte ou entre grandezas de natureza distinta – razão entre valores de duas grandezas diferentes (Monteiro & Pinto, 2005).

De acordo com Lamon (1999), uma taxa é uma comparação entre duas quantidades de diferentes tipos, enquanto razão é definida como uma comparação entre duas grandezas do mesmo tipo. O conceito de razão exige que os alunos compreendam (i) o significado de uma relação entre duas grandezas, (ii) o significado de covariância – propriedade de invariância, que implica que as duas quantidades em relação mudem juntas, de forma que a relação entre elas permaneça invariável implicando por exemplo que quando as duas quantidades em relação são multiplicadas por um mesmo número diferente de zero, o valor da razão permanece o mesmo; (iii) que a covariância só vale para razões, pelo que esta propriedade é considerada essencial para a distinção entre a interpretação parte-todo e razão; (iv) que a covariância é necessária para o desenvolvimento da ideia de equivalência de frações apesar da capacidade de construir frações equivalentes não implicar a capacidade de reconhecer a propriedade de invariância (Charalambos & Pantazi, 2007).

1.3. Significado operador

O número racional é interpretado como um operador quando corresponde a uma função aplicada a alguns números, objetos, ou conjuntos (Behr et al., 1993; Marshall, 1993). No caso de transformar o cardinal de um conjunto discreto será um operador partitivo e no caso de se tratar de uma redução ou de uma ampliação de uma figura será um operador multiplicativo partitivo.

Lamon (1999) define operador como um transformador que aumenta ou diminui um segmento de reta, aumenta ou diminui o número de elementos num conjunto de objetos discretos, ou que amplia ou reduz uma figura. Segundo Monteiro e Pinto (2005) o operador pode ser considerado como uma única função composta que resulta de uma combinação de duas operações multiplicativas ou como duas funções discretas que se relacionam e que são aplicadas de forma consecutiva.

Para Charalambos e Pantazi (2007) a compreensão do número racional com o significado de operador alcança-se quando os alunos são capazes de: (i) interpretá-lo como multiplicador em diferentes contextos, (ii) indicar uma única fração para descrever uma operação de composição, quando duas operações multiplicativas são efetuadas, uma no resultado da outra e (iii) relacionar os resultados e os valores iniciais.

1.4. Significado quociente

O sentido de quociente é entendido quando um número de objetos é igualmente repartido por um certo número de grupos (Onuchic & Allevato, 2008; Mamede, E. 2007). Na fração *a/b*, *a* é distribuído igualmente por *b* partes, representando por isso uma divisão: dividir *a* elementos em *b* grupos, por exemplo, 4 *pizzas* divididas igualmente por 5 pessoas (Marshall, 1993). A fração *a/b* indica o valor numérico obtido quando *a* é dividido por *b*, onde *a* e *b* representam números inteiros (Kieren, 1993) e poderá sempre ser entendida como um quociente entre numerador e denominador.

Este significado surge assim, como solução de uma situação de divisão e depende também da partilha equitativa. O resultado da divisão entre dois números inteiros com denominador diferente de zero em situações de partilha equitativa, é uma relação entre duas quantidades, tendo ainda o significado de uma quantidade extensiva.

Atividades envolvendo problemas de "partilhas justas", de quantidades contínuas, permitem facilitar a compreensão dos alunos acerca do conceito de número racional com o sentido quociente. Porém, é referido por Charalambos e Pantazi que

> […] ao contrário do significado parte-todo, na "personalidade" quociente são considerados duas unidades de medida diferentes […]. Além disso, uma vez que o resultado obtido refere-se a um valor numérico e não às partes obtidas pela actividade de repartir igualmente, no subconstruto quociente não há nenhuma restrição quanto ao tamanho da fracção: o numerador pode ser menor, igual ou maior que o denominador, e, posteriormente, a quantidade que resulta da partilha equitativa pode ser menor, igual ou superior à unidade. (2007, p.7)

O significado de quociente pressupõe a atividade de partilha equitativa, fundamental para uma repartição justa, os alunos deverão ser capazes de identificar e perceber na fração o que representa o dividendo e o divisor, ou seja, que o dividendo refere-se ao número de partes em que foi dividido o todo, enquanto o divisor o nome da fração de cada ação. Por exemplo, se os alunos dizem que quatro *pizzas* são uniformemente distribuídas entre cinco pessoas, os alunos devem ser capazes de identificar que as *pizzas* são cortadas em quintos e que cada pessoa recebe quatro desses quintos. É importante verificar que $\frac{4}{5}$ representa o problema e a solução, no entanto, no problema $\frac{4}{5}$ refere-se a 4 pizzas ÷ 5 pessoas e na solução $\frac{4}{5}$ descreve a quantidade que cada pessoa irá receber.

Charalambous e Pantazi (2007) citados por Tobias (2009) consideram que o significado quociente permite introduzir e conduzir à compreensão do significado dos numerais mistos ou frações maiores do que um, quando se dividem ou partilham igualmente 5 pizas por 3 pessoas, recebendo cada uma $1\frac{2}{3}$ pizzas e Kieren (1993) refere que os alunos devem ter a capacidade de perceber o que representa o dividendo e o divisor, uma vez que o sentido de quociente requer a compreensão do significado da divisão partitiva e por quotas.

1.5. Significado medida

O sentido de medida emerge sempre que se fazem medições, isto é, se a unidade não cabe de forma exata dentro de um objeto a ser medido um número inteiro de vezes, então procura-se um número que seja a medida (Mamede, 2007). Deste modo, Monteiro e Pinto (2006) sugerem que se deve comparar uma grandeza com outra tomada como unidade enquanto Lamon (2001) e Marshall (1993) citados por Martinie (2007) referem que o número está associado com a medida atribuída a algum intervalo.

Charalambous e Pantazi (2007) bem como Monteiro e Pinto (2006) consideram que apesar da noção de fração como número parecer simples, a realidade demonstra que tal não é verdadeiro. A resistência em aceitar as frações como números leva os alunos a conceptualizar as frações como dois números inteiros diferentes, originando muitas vezes erros de cálculo, tais como $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{5}{7}$, por isso, a aprendizagem dos números racionais exige que, os alunos, compreendam claramente o modo como os números inteiros se deslocam para os números fracionários.

O desenvolvimento do sentido de medida do número racional implica a capacidade de localizar um número na reta numérica e, de identificar um número representado por um certo ponto na reta numérica (Smith, 2002).

Behr et al. (1997) referem que o sentido de número racional requer uma compreensão de cada um dos significados de número racional separadamente e das relações existentes entre estes. Esta proposta baseia-se na teoria dos campos conceptuais estabelecida por Vergnaud (1982) que toma como premissa que o conhecimento está organizado em campos conceptuais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem. Assim, campo conceptual é, um conjunto informal e heterogéneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição (ibid.).

Os três argumentos principais que levaram Vergnaud (1983a) ao conceito de campo conceptual são: (i) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; (ii) uma situação não se analisa com um só conceito e (iii) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspetos de uma situação é um processo que se estende ao longo dos anos com analogias e mal-entendidos entre situações, conceções, procedimentos e significados.

Para Vergnaud (1983a) esses campos conceptuais não são independentes uns dos outros e podem ser importantes para a compreensão de outros e acredita que nesse sentido os campos conceptuais são unidades de estudo frutíferas para dar sentido aos problemas de aquisição e às observações feitas em relação à conceptualização.

Post et al. (1986) estabeleceram algumas implicações para o ensino dos números racionais: (i) ter como base os conhecimentos anteriores; (ii) enfatizar as inter-relações entre os vários significados de número racional; (iii) os algoritmos das operações devem ser atrasados e antecedidos pela compreensão de ordem e de equivalência e (iv) o ensino deve ser efetuado com base nos modelos educativos que reforcem as relações e procedimentos bem como as conversões dentro e entre as várias representações. Deste modo, Post e Cramer (1989) sustentam que o conhecimento dos conceitos é fundamental para a compreensão de número racional e que estes devem ser trabalhados paralelamente com os procedimentos.

2. Representações dos números racionais

O termo *representação* refere-se tanto ao processo como ao resultado, isto é, aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma. Este termo tanto pode ser aplicado aos processos e resultados observáveis externamente como aos que ocorrem "internamente" nas mentes dos indivíduos quando fazem matemática.

Segundo o NCTM (2007) algumas formas de representação (diagramas, gráficos e expressões simbólicas) têm sido utilizadas na matemática escolar desde há muito tempo mas, muitas vezes são ensinadas e aprendidas como finalidades limitando o poder e a utilidade das representações como instrumento de aprendizagem da matemática. De acordo com este documento,

> […] as representações devem ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos inter-relacionados, e na aplicação da matemática a problemas realistas, através da modelação. (p. 75)

Para Goldin (2003) uma representação é uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objetos que podem significar ou "representar" algo, por exemplo, um algarismo é um conjunto concreto de objetos. Este autor considera importante considerar e distinguir os sistemas de representação internos e externos aos indivíduos de modo a que se possam explorar as relações existentes entre os mesmos. Os sistemas de representação interna compreendem, entre outros, a linguagem natural, a capacidade de construir imagens visuais e espaciais, as representações tácteis e cinestésicas, as heurísticas para resolver um problema, as capacidades pessoais – conceções e equívocos em relação à notação matemática convencional – e o afeto e são necessários desenvolver e relacioná-los para que a aprendizagem tenha significado. Os sistemas de representação externa incluem as linguagens naturais normativas (padrão), os sistemas matemáticos gráficos – diagramas e notação formal –, os ambientes de aprendizagem estruturados – tecnologias ou materiais manipuláveis concretos – e estruturas socioculturais como os sistemas educativos. Os algarismos e os gráficos são exemplos de representações externas concretas e estáticas que podem ser encontrados em manuais ou produzidos por alunos e professores.

Ainda de acordo com Goldin (2008) as representações internas e externas relacionam-se bidireccionalmente pois quando um aluno, para expressar uma ideia, desenha uma figura, está a utilizar a representação externa para substituir a representação interna e se, perante uma figura, o aluno consegue interpretar a informação dada então está a substituir a representação externa pela interna.

Goldin e Shteingold (2001) referem que para desenvolver o pensamento matemático é necessário compreender as relações entre as múltiplas representações do mesmo conceito e as semelhanças e diferenças entre os sistemas de representação. Assim, as conceções dos formandos, futuros professores dos primeiros anos, no campo dos números racionais quer à entrada quer à saída de um curso de Educação Básica estão relacionadas não só com as representações externas mas também com as representações internas destes. As representações internas do formando, não são diretamente observáveis, no entanto, é a partir dos conhecimentos observáveis do "mundo externo", que se torna possível fazer inferências acerca das representações internas dos futuros professores.

As orientações atuais para o ensino da Matemática (NCTM, 2007) estabelecem que os alunos devem utilizar as representações como recurso para resolverem situações problemáticas e devem progredir das representações idiossincráticas para as representações mais formais e abstratas. De acordo com este documento, os alunos deverão, durante toda a sua escolaridade, ter oportunidade para: (i) criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; (ii) selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas e (iii) usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos (p. 75).

Representar um número significa atribuir-lhe uma designação das várias que este pode tomar. As representações – percentagem, fração, decimal, linguagem natural e pictórica – de um número racional devem ser trabalhadas com os alunos para que compreendam as suas múltiplas designações e desenvolvam a sua capacidade de raciocínio, podendo deste modo, chegar de forma espontânea, à equivalência de frações e decimais. No documento do NCTM (2007) pode ler-se que:

> Os alunos necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjecturas. […] Estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas ajudando, igualmente, os alunos a comunicarem o seu raciocínio a terceiros. (p. 240)

As diferentes representações do número racional – fracionária, decimal, percentagem, reta numérica, pictórica ou verbal devem ser utilizadas em contexto escolar relacionando-as de forma a não limitar o ensino e a não conduzir à compreensão fragmentada e incompleta do conceito desfavorecendo as formas inapropriadas de raciocinar (Gravemeijer, 1997; Silva, 1997 citados em Cruz e Spinillo, 2004).

Post et al. (1993) referem que a aprendizagem dos números racionais deve ser efetuada com base nos conhecimentos dos alunos a partir de imagens concretas dos conceitos com recurso aos materiais manipuláveis uma vez que os alunos que utilizam materiais manipuláveis na aprendizagem dos números racionais conseguem, aparentemente, desenvolver um pensamento sobre as frações baseado em imagens internas.

De acordo com estudos desenvolvidos pelo *Rational Number Project*, Post et. al. (1993) mencionam que a compreensão de número racional pode estar relacionada com três características do pensamento dos alunos: (i) flexibilidade na conversão entre as diferentes representações do número racional; (ii) flexibilidade nas transformações dentro de cada representação e (iii) independência cada vez maior das representações concretas. Referem ainda que os alunos que são privados da utilização e da conversão entre as múltiplas representações de número racional apresentarão maiores dificuldades na abstração de informações das representações concretas, na realização de conversões e nas operações com símbolos matemáticos.

O modelo de ensino, utilizado no *Rational Number Project*, baseia-se na conversão dentro e entre representações e sugere a participação ativa dos alunos e a utilização de uma diversidade de representações e materiais concretos, como manipuláveis, imagens, diagramas e interações verbais e simbólicas (figura 2). As setas que ligam as diferentes representações descrevem as conversões entre elas e as setas internas mostram as conversões dentro dessas representações.

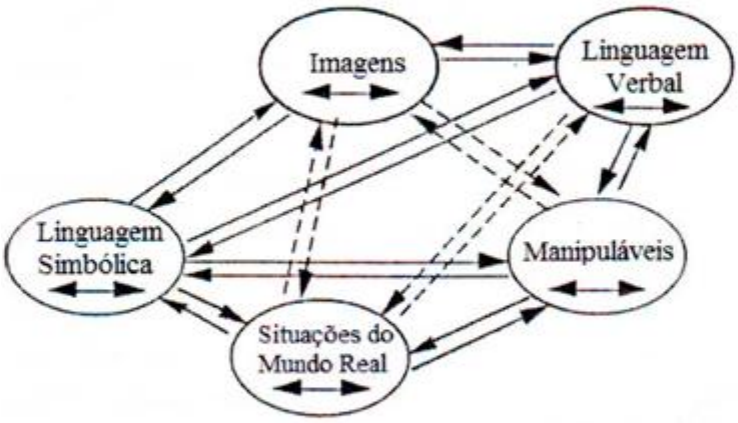


Figura 2 – Modelo de conversões de Lesh (1979)

O modelo, criado por Lesh, mostra que a compreensão dos números racionais incide na capacidade de representar as ideias matemáticas de várias formas e na habilidade para fazer conexões entre as diferentes representações. De acordo com o modelo, percebe-se que a compreensão profunda das ideias matemáticas exige experiência em diferentes representações e conversões dentro e entre essas representações uma vez que as conversões impõem reinterpretações de ideias e conceitos. Assim, através destes processos de reinterpretação os alunos adquirem novos conhecimentos e reforçam os seus conhecimentos anteriores o que se refletem numa compreensão mais ampla e mais profunda das ideias matemáticas.

Owens (1993) refere que na maioria das vezes os alunos começam a trabalhar com os números decimais antes de compreenderem o seu conceito básico. Segundo este autor, as representações decimal e a fração devem surgir em simultâneo para que os alunos compreendam que estas representações traduzem a mesma situação e pertencem ao mesmo conjunto de números. Ideia semelhante é referida no Programa de Matemática (ME, 2007). Deste modo, o programa preconiza como objetivos gerais de aprendizagem para o 1.º ciclo no tema Números e Operações que:

> […] os alunos compreendam e sejam capazes de usar propriedades dos números naturais e racionais não negativos, compreendam o sistema de numeração decimal e sejam capazes de operar com números racionais não negativos na representação decimal. (p. 13)

O programa realça ainda que os números racionais começam a ser trabalhados nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fração nos casos mais simples e que nos 3.º e 4.º anos o estudo destes números deverá ser aprofundado, quer recorrendo a problemas que permitam trabalhar outros significados das frações, quer introduzindo números representados na forma decimal a partir de situações de partilha equitativa ou de medida, refinando a unidade de medida. Destaca ainda que:

> Devem ser também proporcionadas situações que permitam aos alunos relacionar a representação fraccionária e a decimal. Neste ciclo, o trabalho com os números racionais, deve incluir também a exploração de situações que, de uma forma intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e de proporção. (p.15)

Segundo o NCTM (2007) para que os alunos se tornem profundos conhecedores de frações e, de muitos outros conceitos matemáticos, necessitam contactar com uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão. Refere ainda que:

> […] é frequente os alunos aprenderem a representar frações como setores de um círculo ou como partes de um rectângulo ou de outras figuras, utilizando, por vezes, representações físicas tais como placas divididas em partes, barras fracionadas, etc., que transmitem a interpretação de fração como relação parte-todo. Estas representações poderão ajudar os alunos a compreenderem a equivalência entre frações e o significado da adição de frações, principalmente quando estas possuem o mesmo denominador e quando a sua soma é inferior a um. (p.77)

No entanto, as representações pictóricas não se adequam a outras interpretações do conceito de fração, tais como razão ou a fração enquanto representação de um número. Por outro lado, as representações comuns de frações, tais como pontos, numa reta numérica ou razões entre elementos discretos num conjunto, transmitem alguns, mas não a totalidade, dos aspetos relativos ao complexo conceito de fração.

Segundo Streefland (1991) é importante trabalhar as frações a partir dos seus nomes – metade, terça parte, quarta parte, … - uma vez que os alunos começam por resolver questões utilizando representações verbais e pictóricas (desenhos ou esquemas) que servem de base a estratégias que permitem a ligação entre a interpretação do enunciado e a respetiva solução.

Costa (2010) citando Lembke & Reys (1994) refere que a representação percentual é um dos conceitos mais úteis presente no currículo da matemática visto que é utilizado em múltiplas situações na nossa sociedade, no entanto, salienta que apesar da sua relevância, é um dos tópicos mais difíceis para crianças e adultos conceptualizarem e desenvolverem com facilidade o seu uso. Refere ainda que para Parker e Leinhardt (1995) a representação pode descrever uma relação ou uma comparação e que estabelece a ponte entre o mundo das ideias matemáticas, nomeadamente das estruturas multiplicativas e o dia-a-dia.

O NCTM (2007) destaca que os alunos entre o 3º e o 5º ano de escolaridade devem aprender a criar e a identificar formas equivalentes de frações, numerais decimais e percentagens, pelo menos em casos simples. Salienta que os alunos devem saber que os números podem ser representados de vários modos e compreender, por exemplo, que $\frac{1}{4}$, 25% e 0,25 são apenas representações diferentes do mesmo número. Este documento realça que os alunos devem tornar-se competentes na utilização de frações, decimais e percentagens na resolução de problemas pois contribui para um aprofundamento e consolidação dos seus conhecimentos sobre estes tópicos, uma vez que:

> Ao resolverem problemas que exijam comparações multiplicativas (por exemplo, "Quantas vezes mais …?" ou "Quantos por …?"), os alunos adquirem prática no seu trabalho com razões, taxas e percentagens, o que contribui para a consolidação dos conhecimentos e para a familiarização com a proporcionalidade. (p. 253)

Goldin e Shteingold (2001) destacam o recurso à reta numérica (representação geométrica) pois é uma representação externa que permite mostrar as relações de ordem e a noção de ser um número "entre" permite uma interpretação espacial imediata. Monteiro e Pinto (2007) realçam ainda que esta representação "é um recurso didático recorrente na medida que permite evidenciar a questão da densidade dos números racionais."

3. Ordenação e comparação de números racionais

A ordenação e comparação de números racionais são influenciadas pelo conhecimento dos números naturais adquiridos anteriormente e, por vezes, influenciam negativamente a capacidade de compreender as relações de ordem dos números racionais pois neste conjunto não existe um aspeto ordinal óbvio que permita ordená-los e/ou organizá-los exaustivamente ao longo de uma reta numérica.

Tobias (2009), citando Post et al. (1993) refere que a ordenação de números racionais na representação fracionária é importante para a compreensão das frações como quantidades pois requer a coordenação do tamanho relativo e/ou absoluto de duas ou mais frações.

No conjunto dos números naturais é possível comparar a "grandeza" de dois números salientando-se o aspeto cardinal do número ou comparar dois números naturais a partir da sequência de contagem destacando-se o aspeto ordinal. Estes processos de ordenação e comparação utilizados com os números naturais não podem ser utilizados linearmente na ordenação e comparação de números racionais na forma de fração. A densidade de número racional implica a noção contraintuitiva que não existe "fração seguinte" pois esta noção introduz a ideia que entre duas frações existe uma infinidade de frações. Por exemplo, na comparação de $\frac{1}{3}$ com $\frac{1}{4}$ poder-se-ia pensar erradamente que $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{3}$ pois o quatro é maior que 3 se apenas se tiver em atenção a relação de ordem entre o 3 e o 4.

Post et al. (1986) sugerem que devem ser desenvolvidas estratégias que ajudem as crianças e os adultos a colmatar a lacuna conceptual entre as estruturas aditivas e multiplicativas pois, as estruturas aditivas apreendidas com os números naturais podem perturbar o desenvolvimento de estruturas multiplicativas. Referem ainda que a noção quantitativa de número racional deve incluir a compreensão de que os números racionais têm tamanhos relativos e absolutos e que podem ser entendidos tanto no sentido absoluto como no sentido relativo. Assim, a ordenação de valores absolutos de um par de números racionais pode ser avaliada pois estão todos relacionados a uma unidade comum. Os autores salientam ainda que a compreensão de que a relação entre o numerador e o denominador define o significado de uma fração e não as respetivas magnitudes absolutas quando vistas de forma independente. Assim, $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{3}{8}$ apesar dos dígitos que aparecem em $\frac{1}{2}$ serem menores que os seus correspondentes em $\frac{3}{8}$.

Post et al. (1985) salienta que a ordenação de frações exige os seguintes conhecimentos complexos: (i) o tamanho da fração depende da relação entre os dois números naturais operada pelo símbolo de fração; (ii) existe uma relação inversa entre o número de partes em que o todo está dividido e o tamanho de cada parte e (iii) quando as frações têm o mesmo denominador há uma relação direta entre o número de partes que se tomam e o tamanho da fração.

Diversos estudos mostram que as crianças e os adultos utilizam vários tipos de pensamento – residual, diferencial e pontos de referência para ordenar e comparar frações. Para Post et al. (1986) o pensamento residual apoia-se na quantidade necessária para construir o todo (valor residual), o pensamento diferencial foca-se na diferença entre numeradores e denominadores das duas frações e a utilização de pontos de referência envolve a comparação das duas frações utilizando uma terceira como referência, na maioria das vezes, $\frac{1}{2}$ ou 1. Estes estudos concluem que as pessoas que utilizam o pensamento residual e o ponto de referência têm geralmente mais sucesso das que utilizam o pensamento diferencial pois este conduz a resultados incorretos baseados nas características dos números naturais (aspeto ordinal e cardinal). Destacam ainda que o sucesso na ordenação e comparação de representações fracionárias deve-se à utilização coordenada do conhecimento sobre os conceitos de ordenação e equivalência combinado com a habilidade de estimar o tamanho dos números racionais.

Quaresma (2010) refere, de acordo com Orton et al. (1995), que uma estratégia para ordenar e comparar duas frações é determinar frações equivalentes às dadas com denominadores comuns, apesar de não ser uma estratégia muito significativa para alunos de 5.º ano mas poderá sê-lo quando trabalhado com professores em início de carreira.

Kamii e Clark (1995) salienta que o conhecimento de frações equivalentes é a capacidade para relacionar o mesmo número a "nomes" diferentes, a capacidade de ignorar ou imaginar divisões e linhas como uma manifestação do pensamento flexível. Consideram ainda que a compreensão de frações equivalentes deve processar-se do conhecimento informal e intuitivo para o conhecimento formal, isto é, iniciar a comparação de frações a partir da visualização e manipulação de materiais e posteriormente pensar no "tamanho" das partes e, por fim, pensar em frações equivalentes.

Outra estratégia para ordenação e comparação de números racionais será escrevê-los na representação de numeral decimal, no entanto, Post et al. (1993) refere que há uma influência predominante dos números naturais na ordenação e comparação de numerais decimais quando estes se apresentam com um número diferente de casas decimais pois há tendência para considerar que o numeral decimal com maior número de casas decimais é maior, isto é, 1,25 é maior que 1,3.

Capítulo 3

Conhecimento matemático para ensinar números racionais

Neste capítulo far-se-á uma breve descrição dos pressupostos que definem o conhecimento didático do professor de matemática e as adaptações que tem sofrido, o conhecimento matemático para ensinar e a formação inicial onde se descreve o modelo de conhecimento proposto por Hill e Ball (2009) e a promoção desse conhecimento nos cursos de formação inicial de professores. Focar-se-á, também, o conhecimento matemático que os futuros professores devem ter para ensinar números racionais bem como as principais dificuldades e obstáculos na aprendizagem dos números racionais.

1. O conhecimento didático do professor de matemática

A vasta investigação sobre o conhecimento profissional do professor tem sido largamente influenciada pelo trabalho de Shulman (1986) que começou por identificar os três aspetos mais importantes do conhecimento necessários para o ensino: (i) o conhecimento do conteúdo; (ii) o conhecimento pedagógico do conteúdo e (iii) o conhecimento curricular. Segundo o autor, o conhecimento do conteúdo está relacionado com a quantidade e a organização de conhecimento *per si* na mente do professor. O conhecimento pedagógico do conteúdo refere-se às formas de representar e formular um tema tornando-o compreensível para os outros assim como à compreensão do que faz com que determinados tópicos sejam fáceis ou difíceis como as conceções e os *backgrounds* dos alunos. Este conhecimento permite aos professores usar uma variedade de áreas ligadas ao conceito, ou conjuntos de conceitos, para ajudar os alunos a compreender novas ideias e torná-los promotores efetivos dos conhecimentos dos seus alunos. O conhecimento curricular consiste no conhecimento crítico de diferentes programas para o ensino de determinados assuntos e tópicos de um dado nível e correspondentes materiais disponíveis para o ensino dos mesmos.

Em 1987, Shulman reformula o seu modelo sobre o conhecimento do professor apresentando sete categorias de conhecimento que, segundo o próprio, são a base de conhecimentos necessários para o ensino: (i) conhecimento do conteúdo; (ii) conhecimento pedagógico; (iii) conhecimento curricular; (iv) conhecimento pedagógico do conteúdo; (v) conhecimento dos alunos e das suas características; (vi) conhecimento de contextos educativos; e (vii) conhecimento de fins educacionais, propósitos e valores e seus fundamentos filosóficos e históricos.

Nas suas obras, Shulman frisa que é preciso ter em consideração que ao iniciarem a sua formação os professores começam com um determinado nível de conhecimento do assunto. Pela sua prática, tornam-se especialistas e este conhecimento vai sofrendo transformações, expandindo-se o conhecimento pedagógico do conteúdo.

Diversas adaptações deste modelo do conhecimento do professor têm surgido, destacando-se no campo da educação matemática nacional o que é apresentado por Ponte e Oliveira (2002). Estes autores designam-no por conhecimento didático do professor de Matemática, considerando que este se refere à prática letiva e é onde se faz sentir de um modo mais significativo a especificidade da disciplina. Destacam neste conhecimento quatro grandes vertentes: (i) conhecimento da Matemática; (ii) conhecimento do currículo; (iii) conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem; e (iv) conhecimento dos processos de trabalho na sala de aula. Referem ainda que o conhecimento didático, sendo orientado para situações de prática, relaciona-se de um modo muito estreito com diversos aspetos do conhecimento da vida quotidiana do professor, como o conhecimento do contexto (incluindo o conhecimento da escola, da comunidade, da sociedade) e o conhecimento do próprio professor.

O conhecimento do conteúdo refere-se ao conhecimento da disciplina a ensinar, ou seja, a interpretação que o professor faz enquanto disciplina. Nesta vertente inclui-se os conceitos e procedimentos fundamentais da disciplina, as formas de representação desses conceitos, bem como a perspetiva geral sobre a Matemática escolar, incluindo as conexões internas e externas à disciplina.

O conhecimento do currículo inclui o conhecimento das grandes finalidades e objetivos do ensino da Matemática, a organização dos conteúdos, o conhecimento dos materiais e das formas de avaliação a utilizar e o modo como o professor efetua essa gestão curricular, isto é, o tempo a dedicar a cada assunto, as prioridades e a forma de orientar o processo de ensino-aprendizagem bem como o acompanhamento da evolução das perspetivas curriculares.

O conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem inclui o conhecimento dos alunos como pessoas, os seus interesses e gostos, as suas reações e valores, as suas referências culturais e o modo como aprendem são condições essenciais para o sucesso do trabalho do professor.

O conhecimento dos processos de trabalho na sala de aula abrange as planificações, a conceção das tarefas e à condução das aulas de Matemática, nomeadamente as formas de organização do trabalho dos alunos, a criação de uma cultura de aprendizagem na sala de aula, o desenvolvimento e a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens dos alunos e do ensino do próprio professor.

De acordo com o NCTM (2007) no planeamento de aulas individuais, os professores devem organizar os conteúdos a lecionar de modo que as ideias principais sejam integradas para formar um todo e as ideias mais relevantes, presentes numa variedade de contextos devem ser cuidadosamente desenvolvidas. Neste processo, deverão surgir elementos importantes tais como terminologia, definições, notação, conceitos e competências, estabelecendo uma sequência de aulas coerente ao longo das unidades de aprendizagem e dos anos letivos devendo os professores adaptar e tirar proveito das oportunidades para orientar as aulas em direções não previstas.

Os tópicos matemáticos incluídos no currículo da matemática escolar são importantes no desenvolvimento de outras noções matemáticas, na associação a outras áreas da matemática e no desenvolvimento da apreciação da matemática enquanto disciplina. As noções fundamentais como valor de posição num sistema de numeração, equivalência, proporcionalidade, função e taxa de variação ocupam um lugar de destaque no currículo de matemática pois permitem que os alunos compreendam outras noções e as relacionem através das diferentes áreas da matemática. O currículo deverá proporcionar experiências que permitam que os alunos compreendam a utilidade da matemática na modelação e na previsão de fenómenos reais bem como enfatizar os processos matemáticos e as capacidades que apoiem e estimulem a literacia quantitativa dos alunos.

O currículo escolar matemático deverá ajudar os professores a conduzir os alunos para níveis crescentes de complexidade de conhecimentos e articulado de modo a que os professores, em cada nível, possam compreender a matemática aprendida pelos alunos no nível anterior bem como os conteúdos que é necessário que sejam focados nos níveis seguintes e orientando acerca da profundidade da abordagem desses temas e do momento em que é esperado que determinadas capacidades e conceitos sejam consolidados.

Segundo o NCTM (2007) o conhecimento pedagógico, adquirido e modelado através da prática do ensino, ajuda os professores a compreender a forma como os alunos se tornam expeditos com as técnicas de ensino e a organizar e gerir a sala de aula, deste modo, e de acordo com Ma (1999) os professores necessitam de compreender as noções matemáticas mais relevantes e de ser capazes de representar a matemática como um grande empreendimento coerente e interligado.

Para Wilson, Shulman e Richert (1987) citados pelo NCTM (2007), os professores necessitam de compreender as diferentes representações de uma ideia, as forças e fraquezas relativas de cada uma e a forma como se relacionam, devendo também conhecer as noções em que os alunos sentem, frequentemente, maiores dificuldades e ajudá-los, constantemente, a superar algumas destas incompreensões para que possam desenvolver um ensino efetivo. Este ensino efetivo inclui observar os alunos, escutar atentamente as suas ideias e explicações, definir objetivos matemáticos e utilizar a informação obtida para tomar decisões. Segundo estes autores, os professores que adotam estes métodos motivam os alunos a envolver-se no pensamento e raciocínio matemático e proporcionam oportunidades de aprendizagem e, eles próprios, esforçam-se para aprender matemática e pedagogia e envolver-se num contínuo desenvolvimento profissional e de autorreflexão que é beneficiado pelas interações com alunos e outros professores.

Por exemplo, a exploração do erro tem a vantagem de permitir que os alunos e os professores aprendam a partir da análise dos seus erros e dos colegas, procurando identificar contradições, impossibilidades, inconsistências com argumentos matemáticos já validados. É uma forma importante de regular o processo de aprendizagem dos alunos, para o qual o professor muito pode contribuir através do feedback continuado, que tenha carácter positivo, traduzindo-se por mensagens, orais ou escritas, acerca daquilo que os alunos estão a conseguir ou não aprender e que proporcione indicações claras que os ajudem, em tempo útil, a tornar melhor sucedidas as suas atividades de aprendizagem. Estas mensagens podem ter origem na observação diária que o professor tem oportunidade de realizar quando apoia os seus alunos na realização das tarefas, estejam estes a trabalhar individualmente ou em grupo, ou a participar numa discussão coletiva de toda a turma, ou na análise de produções escritas que os alunos entreguem ao professor, os quais podem incluir a resolução de exercícios, a descrição de uma resolução de um problema, um breve relatório resultante da exploração de uma tarefa de investigação.

Hoje em dia é reconhecido que os alunos podem aprender Matemática com compreensão, sendo essa compreensão construída pelo envolvimento ativo do aluno em tarefas adequadas que permitam construir novo conhecimento a partir daquele que possui e num contexto de aula em que as interações professor/aluno e aluno/aluno sejam valorizadas, de forma a reservar aos alunos um papel central na construção do conhecimento. Todas as decisões que o professor tem de tomar para gerir o discurso da sala de aula dependem muito do conhecimento que tem de cada um dos seus alunos e dos seus conhecimentos relativos às ideias matemáticas que estão a ser exploradas, bem como das suas conceções acerca dos processos de aprendizagem do conhecimento matemático por parte dos alunos.

A qualidade do ensino de matemática é um dos grandes objetivos da educação e muitos estudos que têm sido realizados (Tobias, 2009 citando Hill, Rowan & Ball; Kaplan & Owings, 2000) mostram que os professores que desenvolvem uma compreensão profunda e de forma positiva sobre os tópicos matemáticos apreendidos desenvolvem nos alunos um conhecimento com significado tornando-se promotores efetivos desse conhecimento. A construção destes conceitos e destes hábitos de raciocínio permitirão desenvolver compreensões e raciocínios de ordem superior. No entanto, esse conhecimento está para além das experiências típicas recebidas pelos futuros professores nas aulas dos cursos de educação matemática.

2. O conhecimento matemático para ensinar e a formação inicial

Vários autores têm desenvolvido modelos e estruturas sobre o conhecimento dos professores baseados nos trabalhos de Shulman, como foi referido acima (Marks, 1990; Grossman, 1990; Barnett & Hodson, 2001). No entanto, Hill et al. (2004) e Ball et al. (2005) focaram-se especificamente na dimensão de conteúdo a ensinar e nas suas ligações com as outras dimensões de Shulman. Surge o modelo do conhecimento matemático para ensinar (Hill e Ball, 2009) que integra duas grandes dimensões: o conhecimento do conteúdo matemático e o conhecimento pedagógico do conteúdo.

Hill et al. (2004) e Ball et al. (2005) reconhecem as relações e a interdependência entre as diferentes componentes do conhecimento dos professores, mas subdividem o conhecimento do conteúdo em conhecimento comum e conhecimento especializado. O conhecimento comum do conteúdo abarca, por exemplo, a capacidade de reconhecer as respostas erradas e as definições imprecisas nos manuais escolares, enquanto o conhecimento especializado do conteúdo envolve, por exemplo, a capacidade de analisar os erros dos alunos e de avaliar as suas ideias alternativas bem como dar explicações matemáticas e utilizar representações matemáticas.

Estes autores subdividem a categoria do conhecimento pedagógico do conteúdo em duas componentes do conhecimento: (i) conhecimento do conteúdo e dos alunos; e (ii) conhecimento do conteúdo e do ensino. O conhecimento do conteúdo e dos alunos abrange a capacidade de antecipar os erros dos alunos e equívocos comuns, de interpretar o pensamento incompleto dos alunos e de prever o que estes possam vir a fazer em determinadas tarefas e o que vão considerar interessante ou desafiador, enquanto o conhecimento do conteúdo e do ensino inclui a capacidade do professor realizar uma sequência de conteúdos para o ensino e reconhecer as vantagens e desvantagens do uso de diferentes representações. Hill e Ball (2009) propõem o seguinte modelo que apresenta diversas subdivisões das categorias apresentadas por Shulman (1986).

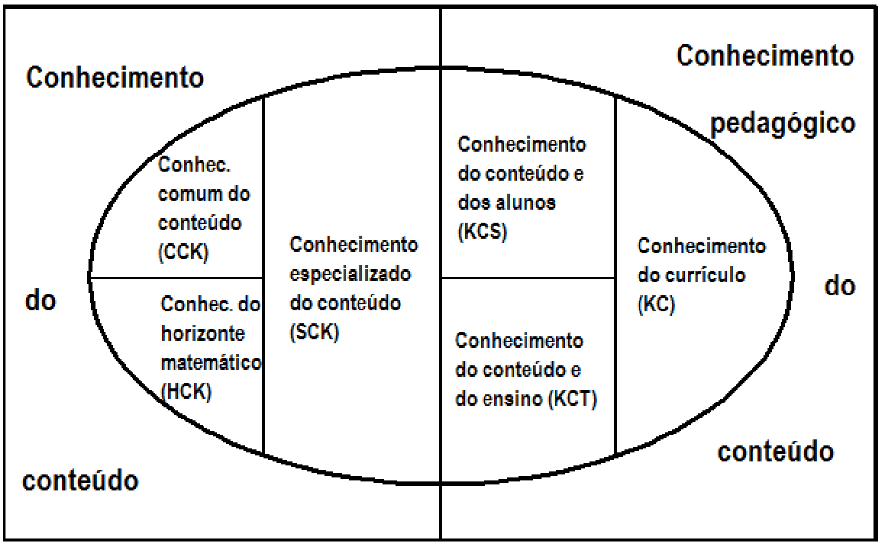


Figura 3 – Conhecimento Matemático para Ensinar (Hill & Ball, 2009)

Neste modelo são consideradas duas componentes principais, o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo que se subdividem em três formas de conhecimento. O conhecimento do conteúdo (CK) engloba o conhecimento comum do conteúdo (CCK), o conhecimento especializado do conteúdo (SCK) e o conhecimento do horizonte matemático (HCK) enquanto o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) é constituído pelo conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS), o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) e o conhecimento do currículo (KC).

O conhecimento comum do conteúdo (*CCK*) é definido por Shulman (1986) como conhecimento de conteúdo que é um conhecimento dos professores mas também um conhecimento comum a muitas outras profissões que fazem uso da Matemática, enquanto o conhecimento especializado do conteúdo (*SCK*) é um conhecimento próprio e único para planear e conduzir o ensino de determinado assunto. Este conhecimento permite aos professores avaliarem métodos de resolução de problemas de alunos e, quando estes são métodos inovadores, serem capazes de decidir se podem ser generalizados a outros problemas (Hill e Ball, 2004). Por outro lado, o conhecimento do horizonte matemático (HCK) corresponde ao conhecimento do modo como os vários tópicos estão relacionados dentro do currículo (Hill,e Ball, 2009).

Estes autores englobam no conhecimento pedagógico do conteúdo o conhecimento do conteúdo e do ensino (*KCT*) que combina o conhecimento do conteúdo matemático com os princípios pedagógicos para ensinar cada tópico, o conhecimento do conteúdo e dos alunos (*KCS*) que é definido como sendo o conhecimento de conteúdo interligado com o conhecimento de como os alunos pensam sobre um determinado aspeto do conteúdo, o que sabem sobre aspetos desse conteúdo, ou o modo como aprendem determinado conteúdo, sendo essencial que o professor tenha conhecimento das conceções e dos mal-entendidos que os alunos possam apresentar e, por último, o conhecimento do currículo, categoria existente no modelo de Shulman (1986), abrange o conhecimento de programas desenhados para o ensino do assunto em questão, diversos materiais educacionais relacionados com esses programas e as vantagens e desvantagens de usar os diversos programas e recursos materiais em diferentes circunstâncias.

Ball, Thames e Phelps (2005; 2008) acreditam que há situações da prática letiva em que é difícil distinguir o conhecimento comum do conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento especializado do conhecimento do conteúdo e dos alunos. Referem que todas as categorias por eles desenvolvidas precisam de revisão e de aperfeiçoamento e reforçam a importância do prosseguimento deste trabalho em prole do desenvolvimento profissional do professor.

Stacey et al. (2001) mencionam que nos cursos de formação inicial os futuros professores devem ter acesso a oportunidades educativas que foquem as duas vertentes do conhecimento – conteúdo matemático e pedagógico do conteúdo. Deste modo, um professor que ensina Matemática deve saber usar a matemática e ter presente em cada momento os significados e os fundamentos desses conhecimentos. Este conhecimento adquirido para o ensino envolve ser capaz de falar sobre a matemática, o que não implica apenas a descrição dos passos/etapas de um dado procedimento mas, também a explicação do significado e as razões para a utilização desse procedimento, isto é, saber explicar aos outros as razões e as relações bem como relacionar as ideias particulares ou processos.

Albuquerque et al. (2006) referem que saber matemática para ensiná-la passa por compreender matemática, isto é, envolve um conhecimento aprofundado: (i) dos conceitos, dos procedimentos e das estruturas matemáticas; (ii) da unidade da matemática; e (iii) dos tópicos da matemática elementar. Assim, é necessário que na formação inicial dos futuros professores estes fiquem a conhecer as diferentes perspetivas e definições associadas aos conceitos fundamentais da matemática, as suas conexões e a sua evolução histórica bem como um aprofundamento acerca dos procedimentos matemáticos que vai ensinar nos quais se inclui a respetiva justificação. Como o conhecimento matemático não é formado por uma lista de tópicos separados entre si, regras e definições é necessário que os futuros professores tenham uma compreensão aprofundada da unidade matemática.

O conhecimento das características da matemática como ciência é um dos aspetos que deve ser trabalhado nos cursos de formação inicial dos professores pois como refere Albuquerque et al. (2006), a matemática é simultaneamente um corpo de saber e um conjunto de atividades que tomam expressão ao nível da sua criação, organização, comunicação e aplicação, sendo o raciocínio lógico e o raciocínio intuitivo importantes e centrais na criatividade. Deste modo, é necessário sensibilizar os futuros professores para a atividade matemática – problemas precedem a abstração, as experiências, as tentativas e erros e para o carácter relativo das proposições em matemática pois são processos que antecedem o sistema axiomático.

De salientar, que os futuros professores deverão viver experiências matemáticas de diversos tipos, consoante os objetivos de ensino que com elas se pretende atingir e que se familiarizem com experiências matemáticas que lhes permitam ter uma vivência alargada das diferentes características da matemática enquanto ciência, tais como a experimentação, a intuição, a dedução, etc.

A formação dos futuros professores deve incidir também numa reflexão sobre os conhecimentos sobre os conceitos e os processos apreendidos, pelas crianças, no que concerne aos números racionais e com as dificuldades manifestadas. Dificuldades que estão, na maioria das vezes, relacionadas com os diversos obstáculos originados com a transição dos números naturais param os números racionais.

O professor não poderá ajudar os outros a aprender Matemática se ele próprio não possuir a compreensão aprofundada da unidade matemática, isto é, das conexões entre conceitos pertencentes aos diferentes temas, se não tiver uma visão integrada dos conteúdos matemáticos, se não recorrer a um mesmo conceito em diversos contextos matemáticos ou se não fizer recurso a diversas perspetivas ou abordagens. Cabe por isso, à formação matemática dos futuros professores garantir o desenvolvimento desta compreensão para que estes possam adaptar o ensino aos seus alunos, torná-lo flexível e adequado. Assim, e segundo Viseu e Ponte (2009), o futuro professor desenvolve o seu conhecimento didático na medida que reflete sobre o modo como estabelece a relação entre o aluno e o conhecimento matemático e utiliza os recursos ao seu dispor.

Para Albuquerque et al. (2006) as boas práticas de didática da matemática não podem restringir-se a uma disciplina da formação inicial mas têm que ter uma expressão significativa ao longo de todo o curso e que deve ser concretizada por todos os professores responsáveis pela formação inicial. Deste modo,

> […] poder-se-á, desenvolver uma aprendizagem da matemática mais rica e poderosa e, por outro, permitirá que os futuros professores experimentem e vivam de forma continuada aquilo que se pretende que depois venham a utilizar enquanto professores. (p.23)

Para Onuchic e Allevato (2005), os cursos de formação de professores deviam envolver quatro componentes básicos: (i) a valorização da disciplina Matemática em si mesma, isto é, “fazer matemática”; (ii) a compreensão da forma como se aprende e constroem ideias; (iii) a capacidade em planear e selecionar tarefas que ajudem os alunos a aprender matemática num ambiente de resolução de problemas e (iv) a capacidade em integrar a avaliação no processo de ensino de modo a melhorar a aprendizagem dos alunos.

Oliveira e Cyrino (2011) não consideram que a formação inicial, por si só, possa resolver o problema da formação necessária para o exercício da profissão, uma vez que não consegue passar todo o conhecimento existente sobre o ensino da Matemática, nem os formandos têm capacidade para o “absorver” num curto espaço de tempo.

De acordo com o documento elaborado por Albuquerque et al. (2006), a formação inicial dos professores deve desenvolver conhecimento matemático básico que inclui os temas sobre Números e Operações, Álgebra e funções, Geometria e Medida e Análise de Dados, Estatística e Probabilidades. Relativamente ao primeiro tema, que é a base deste trabalho, o seu conhecimento deve incluir a compreensão global dos números e das operações, desenvolvido em contextos específicos significativos, e a capacidade de usar esta compreensão para fazer julgamentos matemáticos e para desenvolver estratégias flexíveis de cálculo que é reconhecido como um saber indispensável na formação do cidadão matematicamente letrado.

3. O conhecimento matemático para ensinar números racionais dos futuros professores

A investigação tem mostrado que muitos futuros professores manifestam dificuldades na compreensão dos números racionais e das operações que lhe estão associadas e que resolvem problemas, neste conjunto numérico, recorrendo a procedimentos que foram mal compreendidos (Ball, 1990a, 1990b; Borko et al., 1992; Ma, 1999; Tirosh, Fischbein, Graeber & Wilson, 1998; Tirosh, 2000).

Para Chapman (2007), vários estudos sugerem que os futuros professores do ensino básico necessitam de ajuda para entender os conceitos matemáticos abordados nestes níveis de ensino, especialmente, números e operações a partir das perspetivas pedagógica e matemática. Os problemas aritméticos de palavras podem desempenhar um papel facilitador ao fornecerem contextos significativos para entender as operações com os números inteiros e, posteriormente, com os números racionais (Chapman, 2007) apresentados. Esta autora refere ainda que os futuros professores deveriam ser capazes de identificar, reconhecer e entender um grande conjunto de diferentes significados e representações dos números e das operações aritméticas e, se estiverem cientes destes múltiplos significados poderão estar mais propensos a utilizar o conhecimento matemático para ensinar o tema dos Números e Operações.

Azcárate (1999) apresenta três dimensões do conhecimento matemático dos formandos (i) a dimensão epistemológica, (ii) a dimensão cognitiva e (iii) a dimensão curricular. A dimensão epistemológica relaciona-se com os conteúdos e com a metodologia a qual compreende a informação sobre a sequência e relação dos diversos tipos de representações e modelos. A dimensão cognitiva corresponde aos processos de aprendizagem dos alunos permitindo aos professores encontrar situações que vão ao encontro das expectativas e interesses dos alunos. A dimensão curricular é definida pela linha de ação a desenvolver na aula para tratar o conhecimento matemático no contexto em que está inserido, para planificar atividades, definir estratégias e procedimentos metodológicos bem como recursos e suportes materiais.

Verificam-se, por vezes, algumas contradições entre as três dimensões do conhecimento matemático que podem ser a fonte das dificuldades que os alunos encontram nas suas atividades matemáticas, tais como conceções erradas, obstáculos cognitivos e uso inadequado dos algoritmos. Assim, e tendo em conta que as dimensões epistemológica e cognitiva dependem da construção de conexões entre os algoritmos, intuições e conceitos será importante criar atividades matemáticas dinâmicas com o intuito de não se tornarem rotineiras e processuais para os alunos.

As atividades matemáticas requerem a utilização das três dimensões do saber, que na maioria das vezes se sobrepõem. Contudo, é importante compreender separadamente o que cada uma delas abarca quando se pretende aceder ao conhecimento matemático em determinado domínio.

Quanto aos números racionais Tirosh et al. (1998) referem que

> **a)** a dimensão cognitiva diz respeito à capacidade para trabalhar ao nível do cálculo com números racionais e para explicar as etapas sucessivas dos algoritmos padrão usados nas operações com frações e decimais. Outras componentes poderão ser a transformação de frações para decimais e vice-versa, e expressões matemáticas envolvendo frações;

b) a dimensão epistemológica reporta-se à capacidade de definir números racionais e números irracionais, ao conhecimento relacionado com a hierarquia de diversos conjuntos de números (naturais, inteiros, racionais irracionais e reais), à relação de pertença de um número a um conjunto, à densidade do conjunto dos números racionais, e à familiaridade com as propriedades comutativa, associativa e distributiva;

c) a dimensão curricular está relacionada com a capacidade para produzir modelos intuitivos adequados para representar conceitos numéricos e operações com números e com a competência para avaliar a adequação de proposições relacionadas com operações aritméticas.

Ma (1999) afirma que a matemática ensinada nos primeiros anos do ensino básico é apresentada de modo elementar, no entanto, constituirá a base da futura aprendizagem mais avançada pois introduz conceitos muito importantes, assim, é imprescindível garantir que os professores que lecionam estes níveis de ensino tenham conhecimentos matemáticos sólidos e eficazes. Gaio e Duarte (s/ data) referem, de acordo com investigadores americanos, que os professores dos primeiros anos de escolaridade necessitam de ter um conhecimento aprofundado do valor posicional do número para ajudar os seus alunos a utilizá-lo como base para uma aprendizagem bem-sucedida da aritmética dos números inteiros e mais tarde de números decimais.

Stacey et al. (2001) apresentaram um estudo onde expõem alguns padrões de erros detetados relativamente às interpretações dos futuros professores acerca dos números decimais. Em geral, o estudo revelou que um em cada cinco dos professores participantes não possui um conhecimento bem integrado de números decimais havendo um risco associado de transferirem essas conceções erróneas para os alunos. De facto, muitos futuros professores não compreendem as relações entre os decimais, os números inteiros, as frações, o zero, e os números negativos referindo por exemplo que 0,6 é menor do que zero assim como -6 também é menor que zero; 0,3 é maior do que 0,4 porque $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$; o número de casas decimais indica se o número é maior do que outro.

As dificuldades identificadas são relativas ao número de casas decimais de um número racional na sua representação decimal, à comparação com o zero, à presença do dígito zero e à semelhança entre os números:

- Número de casas decimais: números com 4, 5 ou mais casas decimais não fazem muito sentido para os alunos; pensam que quantas mais casas decimais maior é o número; decimais com apenas uma casa decimal podem ser considerados maiores do que aqueles com várias casas decimais, por exemplo, 0,4 > 0,416);

· Comparação com o zero (as unidades valem mais do que as décimas logo o zero é maior do que um decimal; 0,22 pode ser confundido como um número negativo inferior a zero);

· Presença do dígito zero (podem ignorar o zero e concluir que como 73 é maior do que o 72 então 3,72 será maior do que 3,073);

· Semelhança (quando os números têm os mesmos algarismos iniciais e apenas os últimos são diferentes)

Tirosh, Fischbein, Graeber e Wilson (1998) referem que o currículo dos cursos de formação inicial de professores deve contemplar a elaboração de tarefas, por parte dos formandos, com o objetivo de melhorar as suas capacidades de cálculo assim como a compreensão do raciocínio subjacente aos algoritmos. É ainda mencionado que é primordial que os professores se familiarizem com as definições do conjunto dos números reais e dos seus subconjuntos e desenvolvam conceções corretas acerca dos vários conjuntos de números e da relação existente entre os mesmos. Estas orientações desenvolvem a capacidade dos futuros professores para introduzir conceitos relativos aos números racionais de forma a ajudar os alunos a desenvolver conceções sólidas acerca destes números. É também essencial que o currículo dos cursos de professores do ensino básico fomente a proximidade com representações comuns destes números, impulsionem a compreensão das semelhanças e diferenças das representações, e as suas capacidades para as usarem com flexibilidade.

Tobias (2009) defende que os números racionais é um dos tópicos mais importantes mas, simultaneamente, mais difíceis de os alunos do ensino básico aprenderem e dos professores ensinarem e que é um tópico fundamental para os alunos interpretarem e resolverem situações problemáticas do mundo real, e, são necessários para aumentar o conhecimento matemático e promover as bases do pensamento algébrico.

As dificuldades manifestadas pelos alunos na aprendizagem dos números racionais prendem-se com a transferência incorreta dos conceitos adquiridos com os números inteiros para os números racionais, tais como considerar que $\frac{1}{6}$ é maior que $\frac{1}{5}$ pois 6 é maior do que e também que $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4}{6}$ pois 1 + 3 = 4 e 2 + 4 = 6, tal como referem Behr et al. (1984) e Streefland (1991) e, por isso, muitas investigações (Ball, 1990b; Borko et al., 1992; Ma, 1999; Tirosh, 2000) mostram que os professores devem trabalhar bastante os equívocos e/ou mal-entendidos que os alunos desenvolvem sobre estes tópicos para poderem resolver corretamente estes problemas e apresentarem corretamente modelos de resolução.

A necessidade de compreender o modo como os alunos aprendem os números racionais é importante quando se desenvolvem atividades matemáticas para futuros professores semelhantes às experiências matemáticas realizadas com os alunos e, por isso, é objetivo deste trabalho de investigação perceber o modo como os futuros professores de 1.º ciclo compreendem os números racionais apresentando-lhes tarefas matemáticas semelhantes às que são realizadas por alunos do ensino básico.

4. Dificuldades e obstáculos na aprendizagem dos números racionais

As dificuldades de professores e alunos relativamente ao tema dos números racionais estão documentadas na literatura pois como refere Monteiro e Pinto (2007) trata-se de um conjunto numérico com propriedades distintas dos números naturais, por ser denso e ter múltiplas representações, o que provoca conflitos conceptuais. As dificuldades sentidas pelos professores são semelhantes às que os seus alunos são confrontados indiciando que a fonte da compreensão limitada acerca dos números racionais por parte quer dos professores quer dos alunos têm origem nos mesmos mecanismos de raciocínio (Tirosh, Fischbein, Graeber, Wilson, 1998).

As conceções dos professores e dos alunos são, muitas vezes, baseadas nos números naturais permitindo-lhes trabalhar parcialmente ao nível dos algoritmos mas constituindo um entrave à capacidade de resolução de problemas que exigem um adequado conhecimento formal e intuitivo dos números racionais.

Os números racionais abrangem uma parte considerável do currículo de matemática do ensino básico e são importantes para aprendizagens futuras. O programa de matemática para o ensino básico (ME, 2007) preconiza que a compreensão do sistema de numeração decimal deve desenvolver-se gradualmente ao longo do ciclo, integrando a compreensão do valor posicional dos algarismos e da sua estrutura multiplicativa, nos dois primeiros anos do 1.º ciclo. Nos últimos anos dever-se-á aprofundar estes conceitos, quer recorrendo a problemas que permitam trabalhar outros significados das frações, quer introduzindo números representados na forma decimal a partir de situações de partilha equitativa ou de medida, refinando a unidade de medida proporcionadas por situações que permitam aos alunos relacionar a representação fracionária e a decimal.

As dificuldades manifestadas na compreensão do conceito de numeral decimal, citadas por Monteiro e Pinto (2007), prendem-se com: (i) confusão entre décimas e centésimas – confunde 2,5 com 2,05; (ii) confusão entre o número de algarismos e a quantidade – 1,456 é maior que 1,5 porque o primeiro tem mais números ou porque 456 é maior que 5 e (iii) considerar que entre 0,1 e

0,2 não existem números racionais, sendo que este erro pode ser explicado pela sequência discreta dos números inteiros a que os alunos estão habituados.

Para Owens (1993) estas dificuldades manifestam-se porque os alunos são ensinados a trabalhar com os numerais decimais antes de compreenderem o conceito elementar de decimal. Assim, o autor defende o uso da representação em numeral decimal e fracionária paralelamente, como preconizam as indicações fornecidas pelo programa de matemática, para que os alunos percebam que as duas traduzem a mesma situação e pertencem ao mesmo conjunto numérico.

Monteiro e Pinto (2007) consideram ainda que os erros onde intervêm frações são também muito comuns pois (i) a sua representação implica dois números; (ii) na comparação de frações não têm em atenção a relação inversa entre o numerador e o denominador e, por isso, consideram que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$ porque 4 é maior que 3; (iii) referem que $\frac{1}{2}$ = 1,2, verificando-se que as representações não estão relacionadas com os números que representam; (iv) na conceptualização da unidade, isto é, a unidade tomada como o todo e (v) na adição de números representados por frações pois estes adicionam os numeradores e os denominadores, generalizando de forma incorreta os algoritmos das operações com os números inteiros.

Alguns destes erros mostram que o sistema de numeração decimal não está entendido e que as representações estão desligadas das quantidades a que dizem respeito. O trabalho que foi desenvolvido nos primeiros anos com os números inteiros interfere, como já foi referido, com o trabalho efetuado pelos alunos quando estes passam a trabalhar com números fracionários.

As autoras referem ainda que uma fração é uma representação versátil e muito rica, porque permite expressar diferentes relações, no entanto, esta multiplicidade de significados pode trazer ambiguidades, sendo fundamental que os professores estejam alertas para as dificuldades que irão surgir durante o ensino, mas que por outro lado saibam tirar partido dessa mesma diversidade. A fração $\frac{3}{5}$ pode, por exemplo, ser interpretada como $\frac{3}{5}$ de um bolo, como a razão entre o número de rapazes (3) e de raparigas (5) existentes numa sala de aula, ou como o quociente resultante de se dividir 3 chocolates iguais por cinco pessoas.

A representação em percentagem de um número racional é uma representação vantajosa e universal pois está presente no nosso quotidiano, por exemplo nos *media* e nas promoções de artigos e segundo Parker e Leinhardt (1995) esta representação faz a ponte entre situações do mundo real e os conceitos matemáticos de estruturas multiplicativas. No entanto, este conceito é difícil de aprender pois, os autores referem dificuldades na (i) compreensão do símbolo %; (ii) utilização incorreta da “regra do numerador”; (iii) procura da percentagem e (iv) cálculo de percentagens maiores que 100.

A primeira dificuldade prende-se com o facto de se não for atribuído um significado ao símbolo da percentagem colocam-no em qualquer lugar não fazendo a distinção entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4}$ %, a segunda dificuldade com o facto do símbolo da percentagem à direita ser substituído por uma vírgula à esquerda do número, como por exemplo 0,45 em 45% mas podem surgir conversões incorretas quando se substitui 150% por 0,150 ou 8% por 0,8 e a terceira dificuldade relaciona-se com o cálculo da percentagem, isto é, 50% de 40 é igual a 80.

Monteiro e Pinto (2007) referem que a reta numérica é um recurso didático importante pois permite evidenciar a densidade dos números racionais e as relações de grandeza. Bright et al. (1988) salientam que a reta numérica difere dos outros modelos pois pode ser tratada como uma régua, uma vez que um comprimento representa a unidade e sugere a iteração da unidade e subdivisões simultâneas de todas as unidades iteradas e não existe separação visual entre as unidades consecutivas mostrando que o modelo é totalmente contínuo. No entanto, os autores referem que os alunos manifestam dificuldades em marcar frações na reta numérica quando o número de partições da reta é diferente do denominador das frações ou quando o número de partes é um múltiplo ou um submúltiplo do denominador, sugerindo uma noção imprecisa e inflexível da fração.

O desenvolvimento de competências numéricas relativamente a estes números é considerado um dos temas mais complexos e um dos maiores obstáculos à maturidade matemática dos alunos do ensino básico sendo a causa de várias conceções erróneas que se manifestam e perduram durante toda a escolaridade (Charalambous & Pantazi, 2007; Monteiro & Pinto, 2005). Esta situação pode estar relacionada com o facto de as crianças (i) não possuírem as mesmas experiências quotidianas dos números inteiros com os números racionais; (ii) terem dificuldade em aceitar uma dada fração como um número e, por isso, interpretarem-na como dois números inteiros; e (iii) atribuírem incorretamente as propriedades observáveis das operações com números naturais às dos números racionais (Tirosh et al., 1998).

De entre os vários fatores já identificados que contribuem para as dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais é unânime, entre os investigadores, que o mais preponderante está relacionado com a natureza semântica do conceito, consequência da sua pluridimensionalidade (Ohlsson, 1991). Os obstáculos retratados na literatura têm origem não só na especificidade do tema dos números racionais e nas estruturas mentais que este exige mas também no tipo de ensino que se fomenta em sala de aula e que não favorece o desenvolvimento dessas estruturas.

Para Oliveira (1994) em termos gerais as principais dificuldades relativamente à compreensão do conceito reportam-se para: (i) a transposição de conceções sobre os números inteiros para os números racionais; (ii) a incompreensão da relação parte-todo; (iii) o não reconhecimento da unidade de referência; e (iv) o não ter em conta o sentido da covariação.

Relativamente ao ensino dos números racionais verifica-se que algumas das dificuldades dos alunos são originadas pela apresentação precoce e descontextualização dos símbolos e algoritmos. Monteiro e Pinto (2005) realçam que apesar de os alunos saberem trabalhar com símbolos não significa que tenham compreendido os conceitos subjacentes pois o treino de exercícios rotineiros permite muitas vezes chegar a respostas corretas. Por outro lado, há situações em que os alunos resolvem corretamente um problema recorrendo a representações informais, mas não conseguem resolvê-lo recorrendo a símbolos. Estas duas situações podem conduzir a conclusões erradas sobre o grau de abstração dos alunos, isto é, decidir-se que o primeiro tem um grau de abstração superior ao segundo e a situação ser inversa.

Aos professores cabe a responsabilidade de criar ambientes de aprendizagem que encorajem, apoiem e aceitem as diversas representações utilizadas pelos alunos de forma a guiar de forma eficaz o desenvolvimento e a utilização dessas múltiplas representações e permitindo aos alunos o desenvolvimento do seu entendimento, a construção das suas certezas e a estruturação dos seus processos analíticos. Por outro lado, os professores possuem estilos e estratégias diferentes de apoio aos alunos na aprendizagem de determinadas noções matemáticas que influenciam os alunos e podem criar contextos de aprendizagem bastante ricos. Assim, é consignado pelo NCTM (2007) que

> A seleção e a utilização de materiais de ensino adequados, de ferramentas e técnicas didáticas, a vivência de uma prática reflexiva e um contínuo enriquecimento pessoal constituem ações que os bons professores levam a cabo todos os dias (p. 19).

De acordo com este documento, os professores deverão ajudar os alunos a compreenderem que as representações constituem ferramentas para a modelação e a interpretação de fenómenos de natureza matemática encontrados em diversos contextos, eventualmente utilizando mais do que uma representação. É também importante realçar que os alunos deverão compreender que as múltiplas representações, criadas ou não por eles, estão sujeitas a múltiplas interpretações e que a comunicação daquilo que foi entendido e a utilização de representações alternativas são formas de consolidação da compreensão.

Hiebert e Behr (1988) salientam que (i) o ensino deve ser mais orientado para o significado do que é o símbolo e que (ii) o conhecimento não deve ser apresentado aos alunos como um produto final e que estes devem ser motivados a construírem seu próprio conhecimento. Assim, a aprendizagem deve ser desenvolvida com base no princípio de construção do conhecimento não privilegiando regras e processos rotineiros ou estratégias excessivamente mecânicas para resolver problemas.

Capítulo 4

Metodologia de investigação

Nesta fase do trabalho far-se-á uma breve análise das opções metodológicas e da justificação das opções tomadas, da instituição, dos participantes no estudo, e dos instrumentos de recolha de dados.

Caraterizar-se-á o modo como será realizada a análise de dados recolhidos através das produções escritas dos estudantes nos testes inicial e final e nas tarefas realizadas durante a unidade temática bem como os aspetos éticos e a validade e a fiabilidade desta investigação de forma a dar resposta às questões de investigação colocadas.

1. Opções metodológicas

Este estudo adota uma abordagem mista de cariz qualitativo (Bodgan & Biklen, 1994) e quantitativo com um desenho descritivo e comparativo (Gall, Gall & Borg, 2003). Denzin (1978) e Reichardt e Coook (1986) afirmam que um investigador poderá utilizar os métodos quantitativos e qualitativos caso a investigação o exija, enquanto Patton (1990) assegura que um plano de investigação se torna mais consistente se forem utilizados diferentes métodos de recolha e dados, incluindo a combinação de abordagens qualitativas e quantitativas.

Reichardt e Coook (1986) referem ainda que a utilização de vários métodos pode permitir uma melhor compreensão dos fenómenos, do mesmo modo que a triangulação de técnicas permitirá alcançar resultados mais seguros e sem enviesamentos. Contudo, a combinação de métodos apresenta problemas ao nível do tempo e da experiência do investigador na utilização dos mesmos.

Será efetuada uma análise quantitativa e qualitativa descritiva dos dados recolhidos a partir dos testes inicial e final, uma vez que não se pretende apenas avaliar o desempenho dos futuros professores através das percentagens de respostas corretas, incompletas e incorretas. Afonso (2005) considera que "os estudos descritivos podem ser construídos com base em informação fundamentalmente quantitativa (…) como podem ser conceptualizados a partir de informação predominantemente qualitativa" (p. 43).

A adoção de uma metodologia qualitativa visa interpretar o trabalho desenvolvido pelos futuros professores (Stake, 1999) através da análise das produções escritas efetuadas num teste inicial realizado antes da unidade temática e num teste final após a realização de uma unidade temática e das suas produções escritas durante a unidade temática sobre números racionais relativamente ao tipo de argumentos e estratégias utilizados nas suas resoluções bem como às dificuldades manifestadas. A justificação para a escolha de uma metodologia qualitativa, para além da quantitativa, deve-se à importância atribuída ao dar "valor aos comportamentos observáveis, enquanto relacionados com os significados criados." (Hébert, Goyette & Boutin, 1994).

O estudo insere-se no paradigma naturalista ou interpretativo pois pretende compreender os fenómenos, questionando o conceito de causalidade, privilegiando as intenções e as razões dos atores, utilizando métodos e dados qualitativos. A investigação qualitativa é designada naturalista pois o investigador frequenta os locais onde se verificam os fenómenos nos quais está interessado e os dados recolhidos incidem nos comportamentos naturais das pessoas. Neste caso, a sala de aula e o tema matemático que foi trabalhado nas aulas.

A investigação qualitativa pretende compreender a conduta humana a partir dos pontos de vista daquele que atua, é fundamentada na realidade, orientada para a descoberta e para o processo, exploratória, expansionista, descritiva e indutiva (Reichardt & Cook, 1986, cit. por Carmo e Ferreira, 1998, p. 177).

De acordo com Huberman e Miles (1991) citados por Fonseca (1998, p. 67),

> os dados qualitativos permitem descrições ricas e solidamente fundadas de processos ocorridos no contexto local. Nesse sentido, podemos dizer que no paradigma naturalista o objecto da investigação abarca todo o fenómeno que ocorre na vida da instituição escolar e tem em consideração a complexidade das situações, as suas contradições, a dinâmica dos processos e os pontos de vista dos actores educativos.

A investigação qualitativa utiliza fundamentalmente o método indutivo, ou seja, o investigador não parte de modelos e teorias prévias com a intenção de as verificar através dos dados, mas são os dados que proporcionam a emergência de conceitos e teorias. As estratégias mais representativas da investigação qualitativa são a observação participante e a entrevista em profundidade.

Esta investigação pretende aprofundar a compreensão do conhecimento que os professores da formação inicial têm das formas de representação, comparação, ordenação, equivalência e densidade de números racionais bem como dos seus diferentes significados, no âmbito da lecionação de uma unidade temática na disciplina de Didáticas Específicas no 1.º ciclo do Ensino Básico – Matemática numa turma do mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Tratando-se de uma investigação na minha própria prática, em que assumo o duplo papel de professora e investigadora há necessidade de refletir sobre a minha intervenção, de modo estruturado e aprofundado, tendo em conta que (i) a produção de conhecimento através desta forma de investigação; (ii) a clareza e o rigor metodológico e a proximidade que existe entre investigador e o objeto de estudo; e (iii) a finalidade da investigação (Ponte, 2002).

2. Instituição

O estudo será efetuado na Escola Superior de Educadores de Infância Maria Ulrich (ESEIMU) por ser a instituição onde leciono e onde se realiza a licenciatura em Educação Básica, com a duração de três anos, correspondente ao 1.º ciclo de estudos e que constitui a base da habilitação para a docência do pré-escolar e do 1.º ciclo.

A investigação realizar-se-á na instituição acima referida pois a sua direção, após ter tido conhecimento, do tema e dos objetivos do estudo, do processo de recolha de dados e da garantia por parte da investigadora do anonimato dos participantes, através da carta de pedido de autorização (anexo 1), permitiu a sua realização.

Nesta instituição é ministrado o curso de Educação Básica com mestrado profissionalizante em pré-escolar e/ou em 1.º ciclo cujo plano de estudos na área da matemática é constituído pelas seguintes unidades curriculares: (i) Conceitos Básicos de Geometria (1.º ano); (ii) Fundamentos de Aritmética, Análise de Dados e Estatística e Didática da Língua Portuguesa e da Matemática (2.º ano); (iii) Resolução de Problemas Matemáticos, Relações Lógico-Matemáticas e Psicogénese da Matemática (3.º ano) e Didáticas Específicas no 1.º ciclo do Ensino Básico – Matemática (4.º ano). O tema dos números racionais é abordado com maior incidência na unidade curricular de Fundamentos de Aritmética onde são abordados os seguintes conteúdos: evolução do conceito de número, significados e representações (dos números racionais aos reais); operações e suas propriedades (desenvolvimento de procedimentos informais de cálculo, cálculo mental e estimativa) e divisibilidade (conceito de múltiplo e divisor de um número, números primos e números compostos, decomposição em fatores primos, noção de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de dois números e critérios de divisibilidade de um número).

Na unidade curricular de Didáticas Específicas no 1.º ciclo do Ensino Básico – Matemática do 4.º ano são abordados os seguintes temas: (i) Currículo em Matemática (finalidades e objetivos gerais do ensino da Matemática, temas matemáticos e gestão curricular); (ii) Aula de Matemática (papel do professor/educador e da criança/aluno na aula de Matemática, recursos na aula de Matemática, planificação, comunicação e o raciocínio matemáticos e a avaliação das aprendizagens em Matemática) e (iii) Desenvolvimento nas crianças/alunos (sentido de número racional, processos de medição e estimação, sentido espacial e capacidade de visualização espacial) com a finalidade de consolidar o conhecimento matemático mas especialmente o conhecimento didático dos futuros professores pois de acordo com Serrazina, citada por Saraiva e Ponte (2003), "para o desenvolvimento da confiança e das conceções do Professor em relação à Matemática é importante que ele consolide o seu conhecimento sobre os conteúdos matemáticos e a sua didática, confrontando formas diferentes de os abordar" (p. 28).

3. Participantes

Os participantes neste estudo são todos os alunos que frequentam o 4.º ano (Mestrado profissionalizante em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico) no ano letivo 2011/2012. Para caracterizar os participantes neste estudo, far-se-á uma recolha de dados, através de um questionário que permita identificar o percurso escolar até à entrada no ensino superior; (ii) número de anos de frequência da disciplina de Matemática; (iii) último ano de escolaridade em que a frequentaram Matemática; (iv) à última avaliação que obtiveram na disciplina de Matemática antes de ingressarem no curso de Educação Básica; (v) temas matemáticos que mais gostaram e (v) nível onde gostaria de exercer.

Numa fase inicial e, antes da recolha de dados, é entregue aos participantes um documento uma "Carta Explicativa para o Consentimento Informado" (anexo 2) onde se identifica o título da investigação, o nome do autor do trabalho, os objetivos específicos da investigação, o modo de participação e/ou desistência nas entrevistas e a confidencialidade do estudo. Após a leitura desta carta os participantes terão oportunidade de assinar o "Termo do Consentimento Informado" (anexo 3) concordando com o conteúdo da mesma.

4. Instrumentos de recolha de dados

Merriam (1988) refere que os estudos qualitativos utilizam frequentemente dados obtidos em entrevistas, observações e documentos. Deste modo e atendendo à natureza do estudo, os instrumentos utilizados para recolha de dados devem fornecer informação diversificada que permita obter uma descrição detalhada e o mais completa possível do objeto de estudo.

4.1. Teste Inicial

O teste inicial procurará identificar os conhecimentos sobre números racionais, nomeadamente no que respeita às diferentes formas de representação, comparação, ordenação, equivalência e densidade de números racionais que já foram adquiridos pelos futuros professores de 1.º ciclo.

O teste inicial (anexo 4) é constituído por quinze questões que incidem sobre a representação de números racionais nas suas diferentes formas (pictórica, numeral decimal, fração, numeral misto e percentagem), densidade, ordenação, comparação e equivalência e percorrendo os diferentes significados de um número racional (parte-todo, operador, quociente, razão e medida) com a duração de uma hora e trinta minutos. As questões apresentadas são semelhantes às questões colocadas aos alunos do ensino básico e com um grau de dificuldade semelhante.

Após a sua realização serão analisadas as estratégias e as dificuldades encontradas através das suas produções escritas de modo a identificar os temas e conceitos que compreendem, as estratégias que utilizam e as dificuldades manifestadas através de uma análise qualitativa de acordo com as seguintes categorias de análise: (i) estratégias e dificuldades quanto à utilização das diferentes formas de representação; (ii) estratégias e dificuldades relativas à comparação e ordenação de números racionais; (iii) estratégias e dificuldades relativas à densidade de números racionais; e (iv) estratégias e dificuldades com os diferentes significados de números racionais.

4.2. Produções escritas na Unidade temática

A unidade temática é constituída por quatro fichas de trabalho com a duração de duas horas e trinta minutos e será realizada em quatro aulas de Didática da Matemática e envolve o trabalho em grupos de três estudantes de forma a proporcionar ambientes de partilha e discussão entre pares e, posteriormente, discussões coletivas do trabalho realizado e sínteses das mesmas com a participação da professora com a duração de uma hora e trinta minutos

A avaliação desta unidade temática é efetuada a partir das produções escritas, apresentações e discussões orais das tarefas apresentadas e que permitam à professora recolher a informação que permita identificar as estratégias e as dificuldades apresentadas pelos futuros professores associadas à aprendizagem dos números racionais no que respeita às diferentes formas de representação, comparação, ordenação, equivalência e densidade de números racionais.

Será realizada uma análise qualitativa das produções escritas efetuadas pelos grupos de estudantes, de acordo com as categorias de análise referidas acima.

4.3. Teste Final

O teste final procurará identificar os conhecimentos e os conceitos sobre números racionais que os futuros professores adquiriram após a aplicação da unidade temática.

O teste final (anexo 9) foi elaborado com treze questões do tipo representação de números racionais de diferentes formas (pictórica, numeral decimal, fração, numeral misto e percentagem), ordenação, comparação e equivalência e com diferentes significados (parte-todo, operador, quociente, razão e medida) idênticas às do teste inicial mas com um grau de dificuldade superior e com a mesma duração.

Posteriormente à sua realização serão analisadas as estratégias e as dificuldades encontradas através das suas produções escritas, de forma qualitativa, para de seguida, comparar quantitativamente com os resultados obtidos no teste inicial e analisar o desempenho dos futuros professores antes e após a unidade temática, de acordo com as categorias de análise anteriormente definidas.

5. Análise de dados

O processo de análise de dados deste estudo terá por referencial as produções escritas pelos futuros professores efetuadas no teste inicial e no teste final. A análise quantitativa e qualitativa dos dados recolhidos incidirá no desempenho evidenciado nos testes e poderá ser utilizado como um meio de comparação entre os mesmos. A análise quantitativa será efetuada a partir da categorização em respostas corretas, incompletas e incorretas após definição dos objetivos de cada uma das questões apresentadas e da quantificação das mesmas por tópicos e/ou conceitos trabalhados nos testes inicial e final.

A análise qualitativa dará ênfase aos conhecimentos e conceções que os futuros professores têm acerca dos números racionais nomeadamente no que concerne às representações, comparação, ordenação, equivalência e densidade e será realizada a partir da análise dos documentos produzidos pelos participantes durante os testes inicial e final e os trabalhos realizados na unidade temática de acordo com as seguintes categorias de análise: (i) estratégias e dificuldades quanto à utilização das diferentes formas de representação; (ii) estratégias e dificuldades relativas à comparação e ordenação de números racionais; (iii) estratégias e dificuldades relativas à densidade de números racionais; e (iv) estratégias e dificuldades com os diferentes significados de números racionais.

6. Aspetos éticos

A investigação com seres humanos levanta sempre questões éticas e morais que podem violar os direitos fundamentais das pessoas, em diferentes dimensões da investigação: o processo de colheita dos dados, os conceitos em estudo, a participação dos sujeitos a investigar e a divulgação dos resultados da investigação. É esperado que a investigação contribua para o avanço dos conhecimentos científicos, no entanto, a aquisição destes não poderá ultrapassar a barreira do respeito pelas pessoas e da proteção do seu direito de viver livre e dignamente como ser humano. Fortin (2003, p. 113) afirma que:

> A ética coloca problemas particulares aos investigadores decorrentes das exigências morais que, em certas situações, podem entrar em conflito com o rigor da investigação.

Ainda sobre o assunto da ética e da moral a ter em conta numa investigação Carmo e Ferreira (1998, p. 114) referem que:

> (…) qualquer investigador deverá ter a maturidade emocional e a integridade moral suficientes para saber gerir a situação de ambivalência sociológica que o confronta com o dilema da dupla fidelidade, à comunidade académica que lhe pede resultados cientificamente interessantes e à população-alvo que em si confiou um património de informações de acesso reservado.

De acordo com Fortin (2003, pp. 116-119) foram definidos cinco princípios ou direitos fundamentais aplicáveis aos seres humanos determinados pelos códigos de ética: o direito à autodeterminação, o direito à intimidade, o direito ao anonimato e à confidencialidade, o direito à proteção contra o desconforto e o prejuízo e o direito a um tratamento justo e leal.

Neste estudo estes aspetos merecem uma particular atenção por parte da investigadora, uma vez que é também a professora responsável pela disciplina. Serão tidos em conta e garantidos todos os direitos ou princípios acima referidos a todos os sujeitos que participarem nas atividades a realizar – testes, fichas de trabalho e questionários.

Aos participantes neste estudo é entregue um documento onde se explicitam os objetivos do estudo, os instrumentos de colheita de dados, a garantia de que os dados recolhidos serão utilizados somente para fins científicos e destruídos pela investigadora após o estudo, a garantia de que os dados serão codificados, mantendo assim o anonimato e a informação de que os sujeitos não terão qualquer tipo de despesas nem receberão qualquer pagamento ou gratificação pela participação no estudo (anexo 3).

Após a leitura do documento acima referido, os entrevistados acordaram em participar neste estudo.

Este estudo decorreu durante o ano letivo de 2011/2012, com as seguintes fases de desenvolvimento: primeira fase de recolha de dados (teste inicial, 27 de fevereiro de 2012), realização da unidade temática (segunda fase, 5 de março a vinte e seis de março de 2012) e terceira fase de recolha de dados (teste final, 23 de abril de 2012).

Capítulo 5

Unidade temática sobre Números Racionais

Neste capítulo faz-se a descrição da unidade temática contemplando a descrição dos testes inicial e final, da planificação da unidade e das tarefas apresentadas relativamente aos tópicos sobre noção e representação, comparação, ordenação, equivalência e densidade de números racionais. Abordar-se-ão as opções tomadas na conceção da unidade temática no que concerne aos temas trabalhados e testados nos testes inicial e final bem como o tipo e diversidade de problemas propostos e, por último descrever-se-ão as aulas realizadas e as discussões com o grupo.

1. Teste Inicial

De acordo com a revisão da literatura elaborada sobre a aprendizagem dos números racionais foi elaborado um teste inicial com o objetivo de identificar os aspetos mais e menos consolidados na aprendizagem dos números racionais por parte dos futuros professores do 1.º ciclo. As questões propostas no teste inicial são semelhantes às que são propostas a alunos do ensino básico de modo a perceber se as dificuldades manifestadas e as estratégias utilizadas pelos futuros professores são semelhantes às dos alunos do 1.º ciclo. Apesar destas questões serem semelhantes às que são propostas aos alunos do ensino básico o seu grau de dificuldade é muito superior pois foram direcionadas para futuros professores do 1.º ciclo e não para os alunos dos níveis de escolaridade que irão lecionar.

Tal como foi referido no terceiro capítulo, Tobias (2009) refere que diversos estudos têm sugerido que, muitas vezes, os próprios professores e futuros professores apresentam dificuldades semelhantes na compreensão dos números racionais às que se encontram nos alunos indiciando que estas têm origem nos mesmos mecanismos de raciocínio (Tirosh, Fischbein, Graeber & Wilson, 1998).

O teste inicial foi também um recurso importante para a investigadora planificar as atividades de ensino na unidade Números e Operações no tópico números racionais não negativos. Deste modo, foi pedido aos futuros professores que respondessem de forma empenhada às questões formuladas, sem a utilização da máquina de calcular, e com a duração máxima de uma hora e trinta minutos.

O teste inicial foi elaborado com um total de quinze questões incidindo sobre a representação de números racionais de diferentes formas (pictórica, numeral decimal, fração, numeral misto e percentagem), densidade, ordenação, comparação e equivalência e percorrendo os diferentes significados de um número racional (parte-todo, operador, quociente, razão e medida). Foi realizado na primeira aula de Didática da Matemática do 1.º ciclo do Ensino Básico do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º ciclo do Ensino Básico no dia 27 de Fevereiro de 2012 e aplicado a dezassete futuros educadores e professores do 1.º ciclo devido à falta do estudante codificado com o número 18.

2. Unidade Temática

Após a análise dos resultados obtidos e das dificuldades manifestadas no teste de inicial e tendo em conta a revisão da literatura e as orientações curriculares para o ensino básico foram elaboradas quatro fichas de trabalho tendo em conta as seguintes finalidades (i) perceber e clarificar os conhecimentos anteriormente adquiridos; (ii) evidenciar as relações entre os vários significados de número racional (parte-todo, quociente, razão, operador e medida); (iii) considerar os diferentes tipos de unidades e respetiva construção; (iv) trabalhar os conceitos de ordenação, comparação e equivalência de números racionais, principalmente as representações fracionária e numeral misto; (v) promover a desenvoltura na conversão entre as várias representações de número racional (pictórica, verbal, decimal, fração, numeral misto e percentagem) de modo a desenvolver o sentido de número racional dos futuros professores do 1.º ciclo do Ensino Básico uma vez que, de acordo com Moss (2002), este conceito de número racional é reconhecidamente complexo devido: a) aos diferentes significados (medida, quociente, razão, operador e relação parte-todo), que necessitam de ser compreendidos de uma forma individual e em relação e às representações que estes números podem assumir; b) aos desafios quando se comparam quantidades através das diferentes representações; e c) ao facto de frequentemente este tema não ser desenvolvido com os alunos segundo um modelo adequado.

As tarefas propostas nas fichas de trabalho enquadram-se na unidade Números e Operações no tópico números racionais não negativos de modo a abordar os seguintes subtópicos: (i) noção e representação de números racionais; (ii) comparação, ordenação e equivalência de números racionais; (iii) densidade de números racionais e (iv) percentagens

As tarefas a apresentar nas fichas de trabalho têm em conta que a formação inicial deve promover nos futuros professores a capacidade de integrar o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos, a especificidade dos alunos a ensinar, de acordo com a sua escolaridade, e as orientações curriculares e que os formandos, posteriormente, devem utilizar este conhecimento integrado para perspetivar a sua prática futura, nomeadamente identificando e integrando diversos recursos e construindo tarefas adequadas ao desenvolvimento de objetivos específicos de aprendizagem.

A escolha das tarefas que integraram as fichas elaboradas teve em atenção, a necessidade de clarificar e desenvolver as competências matemáticas gerais e específicas definidas no Currículo Nacional do Ensino para o 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico (ME, 2001) no que concerne ao tópico dos números e operações que a seguir se enunciam e que foram identificados no teste inicial como tópicos em que os futuros professores de 1.º ciclo apresentam maiores dificuldades:

> - A compreensão do sistema de numeração de posição (…);
> - O reconhecimento dos números inteiros e decimais e de formas diferentes de os representar e relacionar, (…);
> - O reconhecimento dos números inteiros e racionais positivos, das diferentes formas de representação dos elementos desses conjuntos e das relações entre eles, (…);
> - A aptidão para trabalhar com valores aproximados de números racionais de maneira adequada ao contexto do problema;
> - A aptidão para trabalhar com percentagens e para compreender e utilizar as suas diferentes representações (p. 61);

2.1. Planificação da unidade temática

A construção das fichas de trabalho teve, por guia orientador o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) e todas as fichas foram construídas tendo em conta o uso de representações e significados diferentes dos números racionais para que os futuros professores compreendam as relações entre as múltiplas representações e a flexibilidade entre conversões de forma integrada e integradora. Os problemas e exercícios propostos têm, sempre que possível, contextos significativos para que os futuros professores consigam estabelecer pontes entre o seu conhecimento pessoal e o conhecimento formal de Matemática bem como possibilite a construção de um novo conhecimento matemático sobre o que sabem (Gravemeijer, 2005) e consigam construir conhecimento com significado. Assim, os objetivos do trabalho com estas fichas são que os futuros professores compreendam e sejam capazes de utilizar propriedades e as diferentes representações dos números racionais bem como entender os seus múltiplos significados - quociente entre dois números inteiros, relação parte-todo, razão, medida e operador e sejam capazes de resolver problemas, raciocinar matematicamente e comunicar oralmente e por escrito processos e ideias matemáticas em contextos matemáticos.

O quadro seguinte apresenta os tópicos, modo de trabalho em cada aula e o tempo dedicado à resolução das fichas de trabalho.

Quadro 1 – Planificação dos tópicos das fichas de trabalho

Fichas de trabalho	**Tópicos**	**Modo de trabalho**	**Duração (horas)**
Teste Inicial	Noção e representação de número racional. Comparação e ordenação de números racionais. Frações equivalentes.	Individual	1,5
Ficha de trabalho 1	Noção e representação de número racional. Diferentes representações de números racionais. Comparação e ordenação de números racionais. Frações equivalentes.	Grupo	2,5
Ficha de trabalho 2	Noção e representação de número racional. Diferentes representações de números racionais. Comparação e ordenação de números racionais. Frações equivalentes.	Grupo	2,5
Ficha de trabalho 3	Noção e representação de número racional. Comparação e ordenação de números racionais. Densidade de números racionais. Frações equivalentes.	Grupo	2,5
Ficha de trabalho 4	Noção e representação de número racional e percentagem. Comparação e ordenação de números racionais. Frações equivalentes.	Grupo	2,5
Teste Final	Noção e representação de número racional. Comparação e ordenação de números racionais. Frações equivalentes. Conversões entre representações de número racional.	Individual	2

Tendo em conta a diversidade de tópicos a abordar nas fichas de trabalho propostos foram definidos objetivos para cada uma das fichas realizadas:

Ficha de trabalho 1. A ficha introduz os diferentes significados de números racionais – quociente (questão 1), parte-todo (questões 2 e 4), operador (questão 3) e medida (questão 5) nas representações pictórica, verbal, fração e numeral decimal tendo por objetivos: (i) Compreender e representar números racionais de diferentes formas e significados; (ii) Reconstruir a unidade e as partes; (iii) Compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo; (iv) Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas; e (v) Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade. (anexo 5)

A questão 1 descreve três situações diferentes de partilha equitativa de pizas por um determinado número de amigos em diferentes mesas de um restaurante com o objetivo de explorar os tópicos da representação, comparação e equivalência dos números racionais nas suas diversas formas. Na questão 2 relata-se uma situação de partilha não equitativa de uma fração de chocolate de modo a explorar o tópico da densidade de números racionais na forma de fração e respetiva representação. A questão 3 aborda uma situação de divisão de uma determinada quantidade de rebuçados (3,750 kg) em pequenos pacotes de 0,25 kg, 0,5 kg e 1 kg (frações) com o objetivo de explorar o significado do número racional como operador. A questão explora a representação do número racional na forma de fração no significado parte-todo utilizando um relógio e a medição do tempo para contextualizar a situação. A questão 5 explora os tópicos da representação e comparação dos números racionais na forma de fração e de numeral decimal no significado medida usando tiras de papel de diferentes tamanhos. Todas as questões desta ficha foram contextualizadas com situações reais e foram inspiradas em questões constantes nos manuais de Matemática do 1.º e 2.º ciclos.

Ficha de trabalho 2. A ficha apresenta os diferentes significados de números racionais – parte-todo (questões 1, 2 e 7), operador (questão 3, 4, 5 e 6) e medida (questão 8) nas representações pictórica, fração, numeral misto, numeral decimal e percentagem tendo por objetivos: (i) Compreender e representar números racionais de diferentes formas e significados; (ii) Ler e escrever números racionais nas suas diferentes representações; (iii) Reconstruir a unidade a partir das suas partes e as partes a partir da unidade; (iv) Compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo; (v) Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas; e (vi) Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade. (anexo 6)

A questão 1 aborda a representação de números racionais na forma de numeral decimal, fração e percentagem como parte-todo através da utilização de vários retângulos para sombrear. Na questão 2 apresenta-se a situação da reconstrução da unidade a partir das partes e as partes a partir da unidade com tiras de papel que representam partes da unidade ou quantidades superiores à unidade. A questão 3 apresenta uma situação contextualizada com uma determinada quantidade de maçãs que existem numa fruteira para tratar a representação e equivalência de números racionais nas suas diferentes formas. As questões 4, e 5 expõem exercícios sobre construção das partes utilizando as percentagens para determinar o número de cromos e o preço a pagar por umas calças, respetivamente. A questão 6 aborda a reconstrução da unidade a partir de uma quantidade (28 m) correspondente a $\frac{7}{3}$ de rolo de corda com o objetivo de discutir o valor da unidade e trabalhar o significado de número racional como operador. A questão 7 apresenta o significado parte-todo utilizando a medição do tempo para abordar as diferentes representações dos números racionais referindo *“Três meses representam* $\frac{1}{4}$ *de um ano”*. Na questão 8 introduz-se o significado medida colocando cinco retas numéricas para identificar os valores dos pontos assinalados nas referidas retas. As questões 2, 3, 4, 5 e 6 foram contextualizadas em situações reais sendo a questão 2 adaptada da brochura para o 2.º ciclo elaborada por Menezes et al. (2009).

Ficha de trabalho 3. A ficha aborda a representação, comparação e equivalência de números racionais nos significados parte-todo (questões 1 e 2), razão (questões 3 e 4), e medida (questões 5, 6 e 7), sendo definidos os seguintes objetivos: (i) Compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo; (ii) Ler e escrever números racionais nas suas diferentes representações; (iii) Compreender uma relação entre valores de duas grandezas diferentes; (iv) Localizar e posicionar na reta numérica um número racional não negativo representado nas suas diferentes formas; (v) Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade; e (vi) Representar frações equivalentes de uma dada fração. (anexo 7)

A questão 1 foi adaptada da brochura para o 2.º ciclo elaborada por Menezes et al. (2009) e pretende mobilizar as representações dos números racionais na forma de fração e de numeral misto, a comparação e a ordenação e a densidade de números racionais entre dois números inteiros utilizando a contagem de números no início de um ataque. A questão 2, tal como a 1, aborda o significado parte-todo e os tópicos representação e ordenação de números racionais utilizando a quantidade de tinta gasta na pintura de uma parede. As questões 3 e 4 abordam o significado razão utilizando a relação entre rapazes e raparigas de uma turma (3) e o número de remates à baliza feito por dois ponta-de-lança. As questões 5, 6 e 7 referem-se ao significado medida com o objetivo de abordar os tópicos densidade de números racionais, localização e posição na reta numérica (5 e 6) utilizando ou não a reta numérica e comparação entre dois números racionais nas formas de fração, numeral misto e numeral decimal (7).

Ficha de trabalho 4. Esta ficha de trabalho dá ênfase à representação de números racionais sob a forma de percentagem (questões 1, 2 e 3) no significado parte-todo e ao cálculo de percentagens (questões 4 e 5) nos significados operador e razão tendo sido definidos os seguintes objetivos: (i) Compreender e usar um número racional nas representações: fração, numeral decimal e percentagem; (ii) Identificar e dar exemplos de frações equivalentes a uma dada fração e escrever uma fração na sua forma irredutível; (iii) Recorrer a diferentes representações para representar um número racional; (iv) Traduzir uma fração por uma percentagem e interpretá-la como o número de partes de cem; e (v) Calcular e usar percentagens. (anexo 8)

A questão 1 apresenta uma situação contextualizada no significado parte-todo envolvendo grandezas contínuas pois utiliza uma representação pictórica de folhas de papel divididas de formas diferentes (décimas e centésimas) e solicita as respostas com representações na forma de fração, numeral decimal e percentagem. A questão 2 mostra uma tabela incompleta com números racionais apresentados nas formas de fração, percentagem e numeral decimal e solicita o preenchimento da mesma de acordo com os exemplos apresentados. A questão 3 apresenta uma parte de uma folha de papel que corresponde a três partes de oito e pede para representarem a folha inicial e partes menores da folha envolvendo grandezas contínuas nos significados parte-todo e operador, sendo a informação dada na representação pictórica e verbal e a resposta pedida na representação pictórica. As questões 4 e 5 foram adaptadas da brochura para o 2º ciclo elaborada por Menezes et al. (2009) apresentando um problema acerca de um desconto seguido de outro (4.) para evidenciar o conceito de percentagem nas diferentes formas de representação e um problema com descontos sucessivos numa loja de computadores de modo a desenvolver e consolidar o tópico do cálculo das percentagens (5), estando as duas contextualizadas em situações reais.

As fichas de trabalho de duração de 2,5 horas foram realizadas em quatro aulas de Didática da Matemática (duração – 4 horas), de acordo com o plano de estudos existente na escola onde o estudo foi realizado e envolveram o trabalho em grupos de três alunos de forma a proporcionar ambientes de partilha e discussão entre pares e, posteriormente, discussões coletivas do trabalho realizado e sínteses das mesmas com a participação da investigadora de duração de 1,5 horas.

Durante a realização destas fichas de trabalho, foram previstos momentos de confrontação dos resultados obtidos, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas de modo a ouvir e discutir os raciocínios elaborados pelos futuros professores que promovessem um forte envolvimento dos formandos na discussão dos conceitos em estudo e na análise de situações de ensino-aprendizagem e que, por outro lado, procurassem integrar o conhecimento do conteúdo e o conhecimento didático de modo a proporcionar aos formandos experiências de aprendizagem que revelem aspetos didáticos que devem atender no ensino da Matemática aos seus alunos, ou seja, mostrando-lhes o modo como devem ensinar (Albuquerque et al., 2006; Ponte & Chapman, 2008).

Foram também privilegiados a análise aos raciocínios efetuados pelos formandos e a capacidade de argumentar e compreender a variedade de representações para as ideias matemáticas e a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra. Deste modo, pretende-se ajudar o futuro professor a compreender o modo como os alunos aprendem, pensam e fazem Matemática melhorando a formação e a prática docente. Esta compreensão permitirá ao futuro professor apoiar e potenciar as capacidades dos seus alunos, esclarecer estratégias, conjeturas e dificuldades manifestadas pelos seus alunos e que estão de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) e com as Normas do NCTM (2007).

De acordo com Ponte et al. (1997) os alunos participam em dois níveis do discurso da aula – o coletivo e o que desenvolvem com os parceiros de aprendizagem. Estes momentos de discussão constituem oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento (Ponte, 2005) e são as ocasiões mais apropriadas para que sejam expostas conexões e significados que permitem aos alunos ligar ideias sobre vários temas matemáticos (Bishop & Goffree, 1986).

Após a realização e discussão das quatro fichas de trabalho foi realizado um teste final com o objetivo de identificar as dificuldades ainda manifestadas pelos futuros professores e as estratégias utilizadas na resolução de problemas semelhantes às do teste inicial mas com um grau de dificuldade maior.

2.2. Descrição das aulas

Este estudo foi realizado numa turma de Mestrado de Educadores de Infância e Professores de 1.º ciclo do Ensino Básico, constituída por 18 estudantes, 17 raparigas e 1 rapaz, na disciplina de Didática Específica no 1.º CEB – Matemática. Os alunos desta turma são na sua maioria participativos e empenharam-se na resolução das tarefas que lhes foram apresentadas.

Devido à dimensão da turma foi proposto a formação de seis grupos de três estudantes para que cada elemento pudesse contribuir ativamente na resolução das tarefas propostas e para que a professora conseguisse perceber as estratégias e dificuldades manifestadas por cada um dos grupos. Tentou-se agrupar os estudantes de acordo com o seu desempenho no teste inicial – bom, médio e fraco, para que os grupos fossem o mais homogéneos possível, uma vez que a heterogeneidade poderia de algum modo inibir a participação dos elementos com maiores dificuldades nos tópicos a tratar.

Os dados que a seguir se apresentam correspondem às resoluções dos três elementos de cada grupo dando-se maior ênfase aos grupos que manifestaram maiores dificuldades e/ou evidenciaram estratégias de resolução de problemas mais interessantes.

No início de cada aula foram distribuídas as fichas de trabalho a todos os elementos de cada grupo e negociado o tempo de execução das mesmas que, de modo geral, não ultrapassaram as três horas. No tempo restante (1h30m) foi realizada a discussão em grande grupo com a apresentação dos resultados obtidos e a sistematização das ideias. Em situações pontuais em que os estudantes não compreenderam os enunciados dos problemas, estes foram discutidos e interpretados no grupo turma e, posteriormente, cada grupo resolveu a situação proposta. A discussão das tarefas foi realizada no final de cada ficha de trabalho apresentada enquanto os estudantes ainda tinham memória do trabalho realizado quanto às estratégias utilizadas e dificuldades manifestadas, para que a discussão fosse mais rica. Todas as discussões de grupo e da turma globalmente foram registadas em áudio para que se possa confrontar a resolução escrita com a resolução oral efetuada e assim identificar as alterações de pensamento ao longo da resolução da tarefa. No tempo dedicado à discussão das tarefas, usualmente, um dos grupos apresenta as suas conclusões e esclarece as eventuais dúvidas colocadas pelos colegas dos outros grupos e, de seguida os restantes grupos expõem as suas estratégias ou conclusões, caso sejam diferentes.

Ao longo destas aulas foram surgindo várias situações de aprendizagem e de partilha de conhecimentos, no entanto, serão apenas apresentadas situações que levaram a novos conhecimentos ou episódios marcantes no desenvolvimento do conhecimento de números racionais, ou questões indispensáveis à compreensão das diferentes representações de número racional, equivalência de frações e comparação e ordenação de números racionais.

O quadro seguinte apresenta uma calendarização da realização das fichas de trabalho propostas identificando as tarefas e as datas em que foram realizadas. A primeira correspondeu à realização de um teste inicial de diagnóstico que permitiu, após a sua análise, elaborar as fichas de trabalho da Unidade temática, uma vez que deu indicações dos tópicos em que os alunos manifestavam maiores dificuldades e, consequentemente, deveriam ser objeto de trabalho. Na última aula foi realizado o teste final com o objetivo de identificar quais os tópicos consolidados e quais deverão ser objeto de trabalho no futuro pois continuam a ser tópicos em que os alunos manifestam grandes dificuldades de compreensão.

Quadro 2 – Calendarização da unidade temática

Aula	**Data**	**Tarefas realizadas**
1ª	27 de fevereiro	Teste Inicial (Individual)
2ª	5 de março	Ficha de trabalho 1
3	12 de março	Ficha de trabalho
4ª	19 de março	Ficha de trabalho
5ª	26 de março	Ficha de trabalho 4
6ª	16 de abril	Teste Final (Individual)

De seguida apresenta-se uma descrição geral das aulas realizadas, identificando os conhecimentos relativos aos números racionais que os estudantes evidenciaram na resolução das tarefas bem como das aprendizagens pretendidas com as mesmas. Destacam-se também os momentos que mais se evidenciaram durante a realização e a discussão das tarefas propostas bem como das orientações e explorações propostas no final de cada discussão.

2.2.1. Aula n.º 1 – Descrição das atividades realizadas

A primeira aula foi realizada no dia 5 de março de 2012 e nesta aula foi apresentada a ficha de trabalho n.º 1 constituída por cinco questões que introduz os tópicos representação e comparação de números racionais nos seus diferentes significados – quociente (questão 1), parte-todo (questões 2 e 4), operador (questão 3) e medida (questão 5) nas representações pictórica, verbal, fração, numeral misto, percentagem e numeral decimal.

A ficha de trabalho foi entregue individualmente a cada elemento do grupo e nesta aula foram formados cinco grupos de três pessoas, no entanto, o grupo 6 não esteve presente. Foi pedido aos estudantes que lessem a ficha de trabalho e que retirassem todas as dúvidas surgidas nessa leitura para que as mesmas fossem esclarecidas. Após esse momento cada grupo iniciou a realização da sua tarefa no período estipulado e, de seguida, foi efetuada a apresentação dos resultados obtidos e a discussão das conclusões em grande grupo.

Representação números racionais

A representação dos números racionais foi abordada nesta ficha de trabalho com a exploração da tarefa 1, questão 3, três no significado quociente, com a tarefa dois explorando os significados parte-todo e operador e com a questão 4 analisando o significado parte-todo.

Significado quociente

Questão 1. Nesta questão – partilha equitativa de oito pizas por seis amigos – o objetivo era compreender e usar um número racional como quociente utilizando a fração, o numeral misto e a percentagem como forma de representação do número racional e comparar números racionais representados de diferentes formas.

Na questão 1.1 todos os grupos utilizaram a representação pictórica para representar as oito pizas referidas no problema e dividi-las pelos seis amigos. Dos cinco grupos apenas um dividiu cada uma das pizas em três partes e, de seguida, contabilizaram quantas partes cabiam a cada um dos amigos. Os restantes grupos verificaram que o número de pizas era superior ao número de amigos e, deste modo, atribuíram uma piza a cada pessoa e dividiram em três partes as duas pizas que restaram. O grupo 5, por exemplo, utiliza a representação pictórica para dividir equitativamente as pizas, começando por atribuir uma piza a cada pessoa e, de seguida, dividir as pizas que sobram pelos seis amigos (fig. 4).

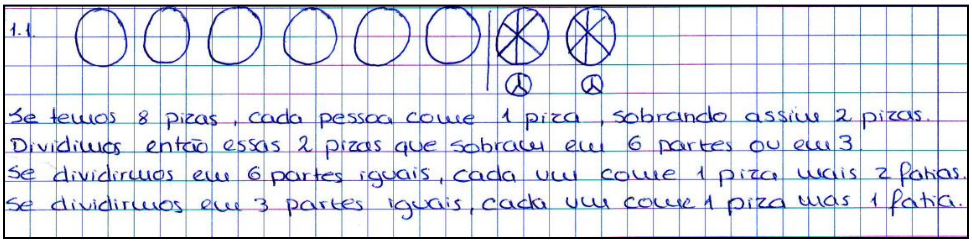


Figura 4 – Grupo 5 – Questão 1.1.

Na questão 1.2 os estudantes tinham que analisar a afirmação efetuada pelo Miguel: *"No final desta refeição comi $\frac{4}{3}$ de piza"*, e todos os grupos utilizaram a soma de frações para dar a sua resposta. Justificaram que se cada um comeu uma piza e mais um terço então comeram $\frac{4}{3}$ de piza pois uma piza inteira corresponde a $\frac{3}{3}$. O grupo 2 utiliza a representação pictórica e o algoritmo da adição para verificar a afirmação efetuada (fig. 5).

Figura 5 – Grupo 2 – Questão 1.2.

De acordo com a resposta dada na questão 1.2., todos os grupos responderam negativamente à questão 1.3 referindo que para que os amigos comessem $1\frac{2}{3}$ de piza era necessário que houvesse mais duas pizas ou então a divisão não teria sido equitativa e, por isso, a afirmação do João estava errada, como se pode observar na resposta dada pelo grupo 3 (fig. 6).

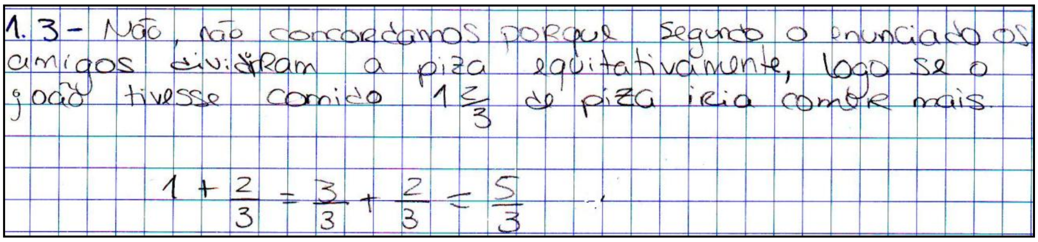


Figura 6 – Grupo 3 – Questão 1.3.

Relativamente à questão 1.4 – divisão equitativa de seis pizas por quatro amigos – pedia-se aos alunos que representassem a fração correspondente à parte que cada um dos amigos comeu e escrevessem esse número na forma de numeral misto. Para responderem a estas questões todos os grupos utilizaram a estratégia das questões anteriores usando a representação pictórica para fazer a divisão equitativa das pizas e responderam que cada amigo comeu uma piza mais metade de outra. Quanto à representação na forma de numeral misto, apresentaram o valor $1\frac{1}{2}$. O grupo 4 utiliza a representação pictórica para dividir as seis pizas pelos quatro amigos começando por atribuir uma piza a cada amigo e as duas pizas restantes são divididas ao meio para atribuir metade de piza a cada um dos quatro amigos (fig. 7).

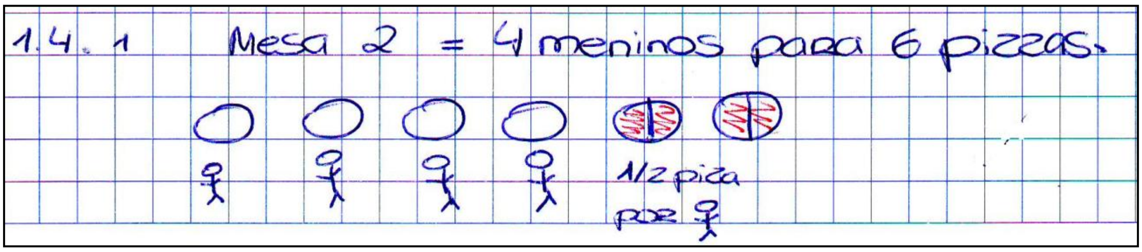


Figura 7 – Grupo 2 – Questão 1.4.1.

A questão 1.6 refere-se a uma divisão equitativa de seis pizas por oito amigos e na primeira alínea 1.6.1 pedia-se que representassem a parte de piza que cada um dos amigos comeu. Quatro grupos utilizando estratégias diferentes respondem corretamente o valor $\frac{3}{4}$, o grupo 2 dividiu as primeiras quatro pizas em duas partes iguais e as duas restantes em quatro partes iguais e, de seguida, adicionaram as duas quantidades obtidas. Os restantes três grupos dividiram cada uma das seis pizas em quatro partes iguais e, de seguida, foram separando equitativamente cada uma das partes obtidas. O grupo 4 apresenta o resultado correto, no entanto, não apresenta a estratégia que utilizou para responder à questão. O grupo 2 utiliza a representação pictórica para resolver a questão colocada e o algoritmo da adição de frações para determinar a fração de piza a atribuir a cada um dos amigos que se encontram na mesa 3. No algoritmo da adição percebe-se que compreendem que uma fração equivalente a $\frac{1}{2}$ será $\frac{2}{4}$ e, por isso, obtêm o valor $\frac{3}{4}$ (fig. 8).

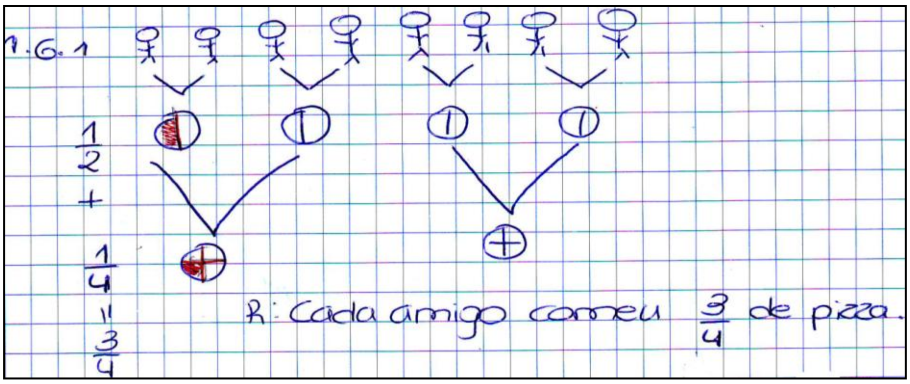


Figura 8 – Grupo 2 – Questão 1.6.1.

Questão 3. Nesta questão o objetivo era compreender e usar um número racional como quociente e reconstruir a unidade a partir das suas partes. Neste problema é referido que a Rita necessita de comprar 3 quilos e $\frac{3}{4}$ de rebuçados e que só os pode colocar em sacos $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e 1 quilo.

Na questão 3.1 os estudantes teriam de indicar quais as possibilidades que a Rita teria para transportar os referidos rebuçados. Os grupos (1, 2, 3 e 5) apresentaram quatro possibilidades para dividir a quantidade dada, $3\frac{1}{4}$ kg, pelos diferentes pacotes de rebuçados apresentados mas, nenhum apresentou todas as possibilidades possíveis (dez). Apenas o grupo 5 apresenta uma possibilidade para transportar os rebuçados.

Na resolução desta questão nenhum dos grupos apresentou todas as soluções possíveis para transportar os rebuçados pois a professora não achou necessário continuarem a encontrar as hipóteses possíveis uma vez que já tinham compreendido o problema.

A maioria dos grupos foi apresentando combinações diversas de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e 1 quilo de modo a que o valor total fosse $3\frac{1}{4}$ kg, como se pode verificar no trabalho apresentado pelo grupo 3 (fig. 9), no entanto, os restantes grupos mostraram algumas decomposições diferentes das que foram apresentadas no exemplo dado.

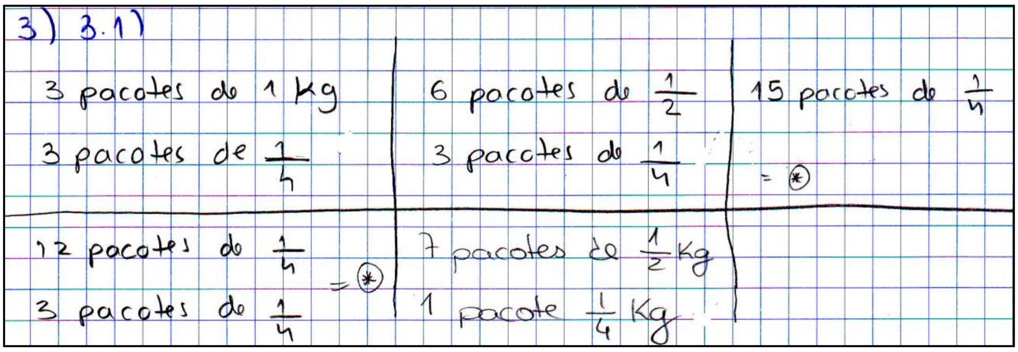


Figura 9 – Grupo 3 – Questão 3.1.

A questão 3.2 solicitava que os estudantes indicassem a hipótese a escolher para levar o menor número de pacotes. Os grupos 1, 2 e 5 respondem corretamente à questão indicando que a menor hipótese seria a combinação de 3 pacotes de 1kg, 1 pacote de $\frac{1}{2}$ kg e 1 pacote de $\frac{1}{4}$ kg, o grupo 3 apresenta uma proposta incorreta, 3 pacotes de 1kg e 3 pacotes de $\frac{1}{4}$ kg e o grupo 4 não apresentou nenhuma hipótese de resposta.

Parte-todo

Para responder à alínea 1.6.3 os estudantes teriam de calcular a percentagem de piza que foi comida em cada uma das mesas. Nesta questão quatro grupos utilizam a determinação de quocientes para calcular a percentagem, no entanto, dois grupos (2 e 5) não dividem a quantidade que cada pessoa comeu pelo número de pessoas e, por isso, os resultados apresentados são superiores à unidade. Os outros dois grupos (1 e 3) dividiram a quantidade de piza que cada pessoa comeu pelo total de pessoas, no entanto, enganam-se no algoritmo da divisão e, consequentemente, os valores obtidos são ligeiramente diferentes dos valores corretos. O quinto grupo (4), tal como na questão anterior, não respondeu.

O grupo 3 utiliza a correspondência entre o número total de pizas e 100% e relaciona esse valor com a percentagem correspondente a uma piza. De seguida, para poder determinar a percentagem de piza que cada amigo comeu em cada uma das mesas relaciona a percentagem atribuída a uma das pizas com as frações atribuídas a cada uma das mesas (fig. 10).

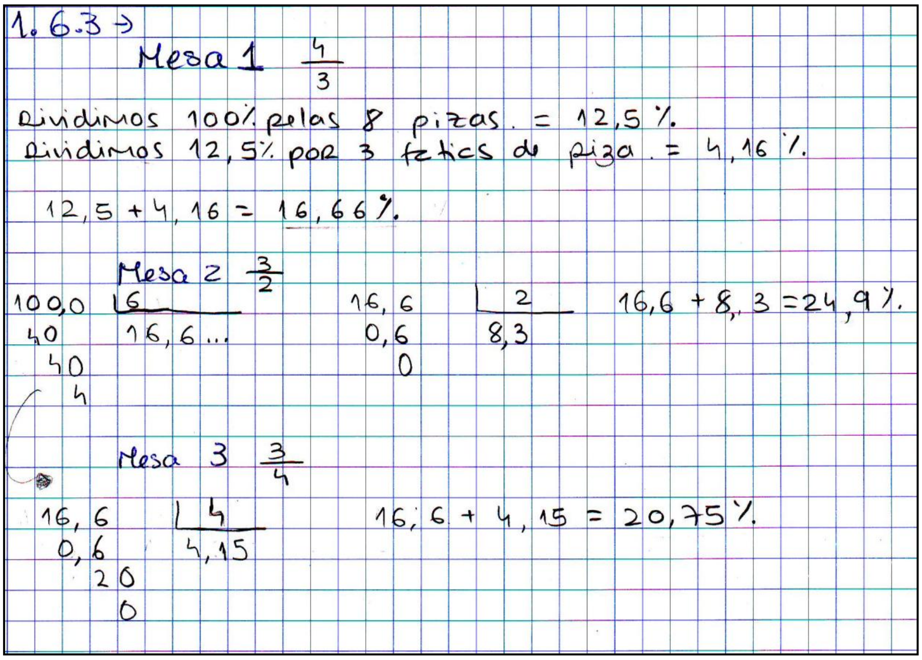


Figura 10 – Grupo 3 – Questão 1.6.3.

Questão 2. Nesta questão relativa à densidade de números racionais, o objetivo era compreender e usar um número racional como parte-todo e compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo bem como a densidade de números racionais representados num determinado intervalo de valores.

A questão 2.1 refere que dois amigos comeram em conjunto $\frac{2}{5}$ de um chocolate, no entanto, um deles comeu mais do que o outro. Nesta questão pedia-se aos estudantes que representassem a quantidade que cada um dos amigos teria comido. Nesta questão, os grupos 1 e 2 representam pictoricamente a tablete de chocolate e percebem que têm de dividir a parte que os dois amigos comeram para poder determinar a quantidade correspondente a cada um. O grupo 4 repartiu o chocolate em cinco partes mas não conseguiu atribuir a cada um dos amigos um valor pedido. Os grupos 3 e 5 representam pictoricamente a parte atribuída a cada amigo dividindo $\frac{1}{5}$ do chocolate em duas ou três partes, no entanto, não atribuem valores corretos pois erram o algoritmo da multiplicação de frações. Como se pode observar na resolução do grupo 3 (fig. 11) percebe-se que os estudantes não conseguiram traduzir a expressão metade de $\frac{1}{5}$ ou um terço de $\frac{1}{5}$ e, por isso, apresentaram um valor incorreto para a parte que coube à Joana e ao José. A representação pictórica está correta e a representação formal da operação está incorreta.

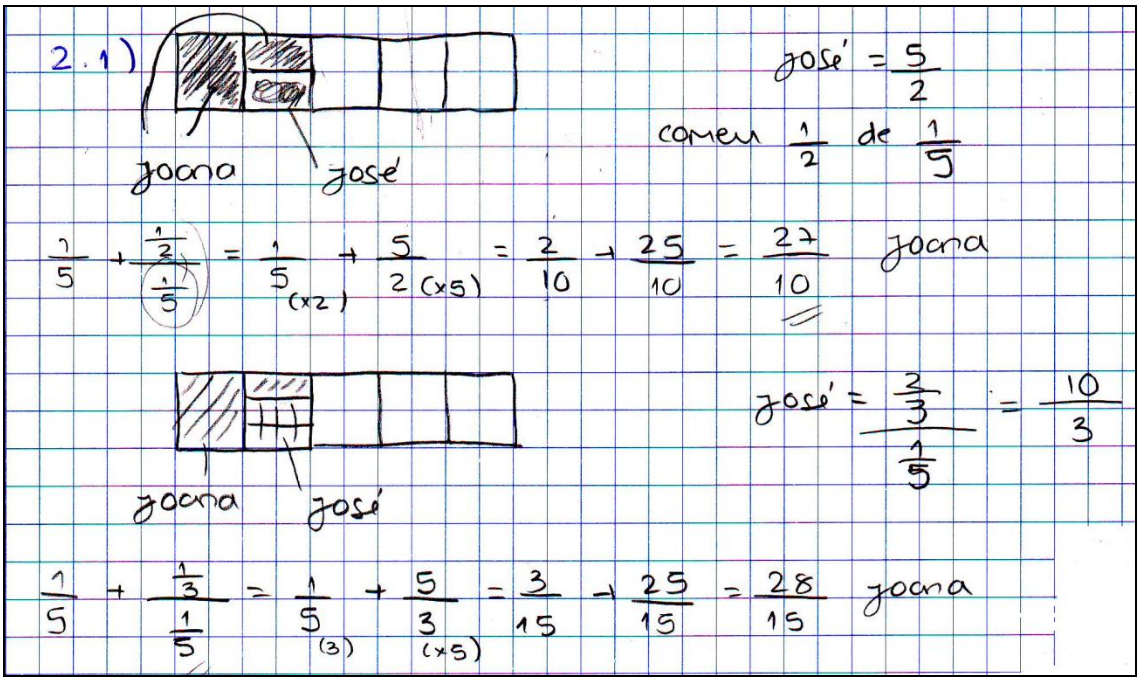


Figura 11 – Grupo 3 – Questão 2.1.

Questão 4. O objetivo desta questão era compreender e usar um número racional como parte-todo, compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo e construir as partes a partir da unidade utilizando uma relação entre valores de duas grandezas diferentes, utilizando o relógio para identificar as partes constituintes da medição do tempo.

A questão 4.1 pedia aos estudantes que indicassem sob a forma de fração e de numeral decimal a parte da hora que representa a) quinze minutos; b) dez minutos; c) cinco minutos e e) um minuto. Todos os grupos representam corretamente o numeral decimal representativo da quantidade pedida e apenas o grupo 5 indica de forma incorreta a representação fracionária pois associa na alínea a) o número 3 (correspondente aos 15 minutos) ao número 12 (correspondente aos 60 minutos) e indica o valor $\frac{3}{12}$, na alínea b) o número 2 (correspondente aos 10 minutos) ao número 12 (correspondente aos 60 minutos) e escreve $\frac{2}{12}$, na alínea c) o número 1 (correspondente aos 5 minutos) ao número 12 (correspondente aos 60 minutos) e escreve $\frac{1}{12}$ e na alínea indicam o valor $\frac{1}{60}$ pois não conseguem fazer a associação anterior. Na representação fracionária alguns grupos recorrem à representação pictórica do relógio para definirem as partes e, de seguida, representam sob a forma de fração a quantidade pedida, como se pode observar na resolução apresentada pelo grupo 2. Este grupo representa corretamente a representação fracionária no entanto, converte incorretamente o valor para numeral decimal o que denota alguma dificuldade no algoritmo da divisão. Utiliza a representação pictórica para resolver as questões, no entanto, utiliza a representação em fração para apresentar a solução encontrada (fig. 12).

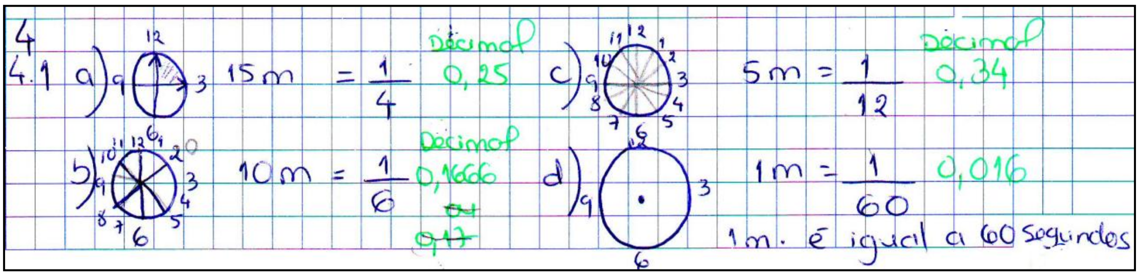


Figura 12 – Grupo 2 – Questão 4.1.

Na questão 4.2 era solicitado que representassem a parte de um dia que representa uma hora e todos os grupos indicam corretamente, $\frac{1}{24}$, pois referem que se o dia tem 24 horas então 1h é a vigésima quarta parte do dia, tal como se pode verificar na justificação exposta pelo grupo 5 (fig. 13).

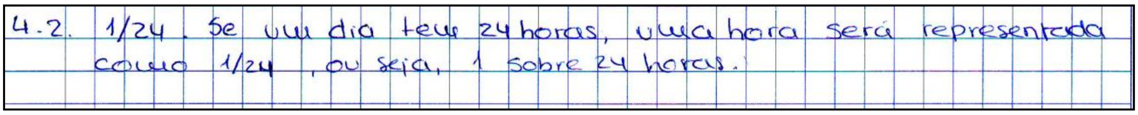


Figura 13 – Grupo 5 – Questão 4.2.

Na questão 4.3 os estudantes deveriam indicar a fração correspondente a parte de um dia que representam 15 minutos e verificou-se que apenas o grupo 2 não consegue dar resposta a esta questão pois calcularam o número de minutos correspondente a um dia mas, de seguida, não representaram a quantidade pedida. Os restantes grupos apresentam as representações $\frac{\frac{1}{4}}{24}$, $\frac{1}{96}$ e $\frac{15}{1440}$, para dar resposta à questão. O grupo 5 refere que se 15 minutos é um quarto da hora e uma hora é a vigésima parte do dia então 15 minutos representa $\frac{1}{96}$ do dia, utilizando inicialmente o algoritmo da divisão de frações para traduzir a solução encontrada verbalmente (fig. 14).

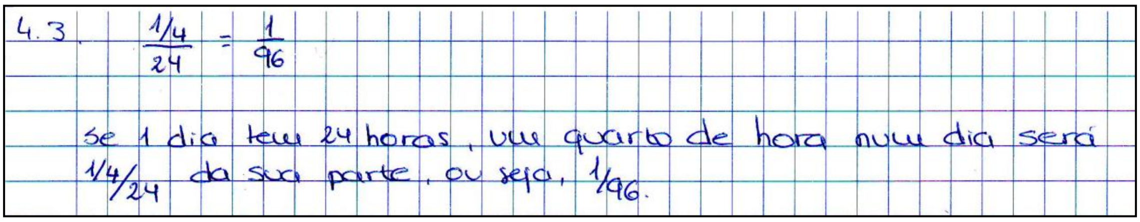


Figura 14 – Grupo 5 – Questão 4.3.

Operador

Na questão 2.2 os estudantes teriam que representar a quantidade de chocolate atribuída ao João – metade do chocolate que sobrou. Os grupos 1, 2 e 3 representam diferentes representações (pictórica e fracionária) para responderem corretamente à questão e o grupo 4 responde incorretamente à questão. O grupo 5 interpreta incorretamente o termo metade do chocolate que sobrou representando $\frac{\frac{3}{2}}{5}$, esta expressão conduz a um valor correto de resposta, no entanto, não traduz corretamente a solução do problema. O grupo 2 apoia-se na representação pictórica para identificar a quantidade de chocolate atribuída ao João e, de seguida, representa-a na forma de fração (fig. 15).

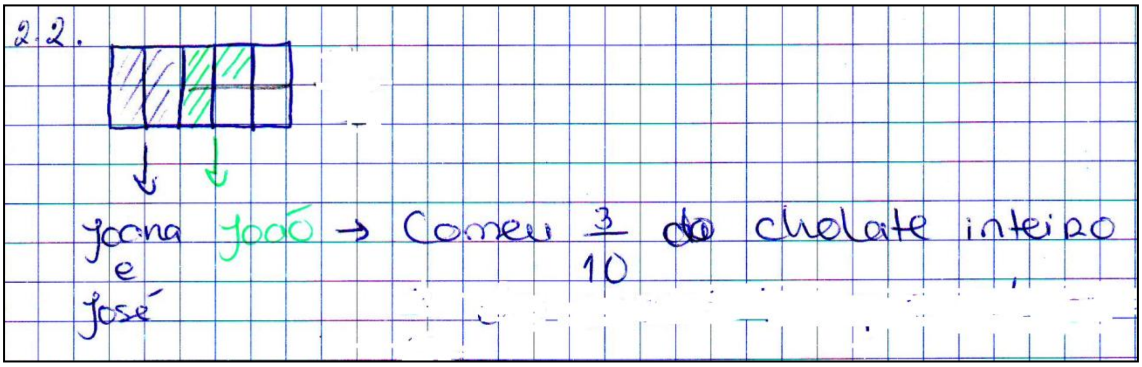


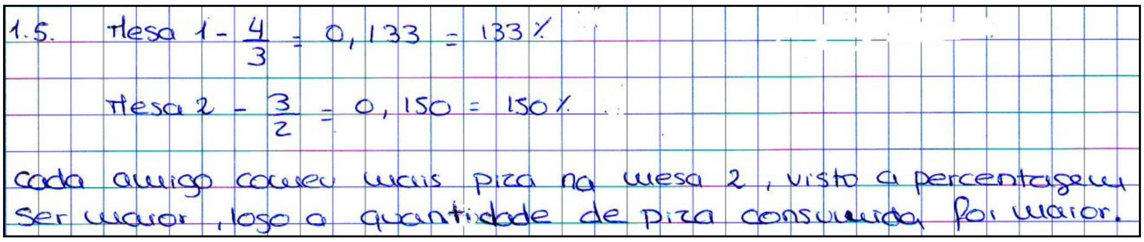
Figura 15 – Grupo 2 – Questão 2.2.

Comparação de números racionais

As questões relacionadas com a comparação de números racionais foram colocadas nas tarefas um (questões 1.5 e 1.6.2) no significado quociente e na questão cinco no significado medida comparando grandezas tomando outras por unidade e utilizando as tiras de papel para contextualizar o problema.

Significado quociente

Na questão 1.5 pedia-se que fizessem uma comparação entre os resultados obtidos nas questões anteriores e indicassem em qual dos grupos se tinha comido mais piza. Quatro grupos (1, 2, 3 e 5) verificaram que na mesa 2 os amigos comeram mais piza pois dividiram as duas pizas que restaram ao meio enquanto na mesa 1 as duas pizas restantes foram divididas em três partes iguais. O grupo 4 utilizou a determinação de quocientes, com recurso ao algoritmo da divisão, para fazer a comparação dando a resposta correta no entanto, enganaram-se na conversão da representação em numeral decimal para percentagem (fig. 16).

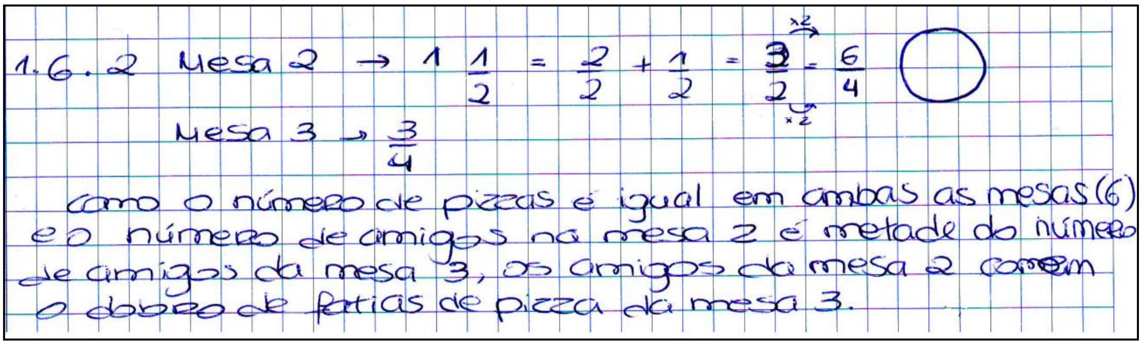

1.5. Mesa 1 - $\frac{4}{3} = 0,133 = 133\%$

Mesa 2 - $\frac{3}{2} = 0,150 = 150\%$

cada amigo comeu mais piza na mesa 2, visto a percentagem ser maior, logo a quantidade de piza consumida foi maior.

Figura 16 – Grupo 5 – Questão 1.5.

Na alínea 1.6.2 é pedida uma comparação entre a quantidade de piza que se comeu na mesa 2 e na mesa 3 e, todos os grupos concluíram que os amigos da mesa dois comem o dobro da piza dos amigos da mesa três pois o número de pizas é o mesmo mas, na mesa três encontram-se o dobro dos amigos da mesa dois e, por isso, a parte correspondente deverá ser metade. O grupo 2 escreve na forma de fração a parte de piza que cada um dos amigos da mesa dois e da mesa três comem e de seguida determinam frações equivalentes às anteriores para que possam fazer a comparação entre as duas frações encontradas e concluem que os amigos da mesa 2 comem $\frac{6}{4}$ e os da mesa três comem $\frac{3}{4}$, metade da piza que foi pedida na mesa 2 (fig. 17).


1.6.2 Mesa 2 → $1\frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$

Mesa 3 → $\frac{3}{4}$

como o número de pizzas é igual em ambas as mesas (6) e o número de amigos na mesa 2 é metade do número de amigos da mesa 3, os amigos da mesa 2 comem o dobro de fatias de pizza da mesa 3.

Figura 17 – Grupo 2 – Questão 1.6.2.

Significado medida

Questão 5. Esta questão tinha por objetivo compreender e usar um número racional como medida, construir as suas partes a partir da unidade e comparar uma grandeza com outra tomada como unidade utilizando tiras de papel de tamanhos diferentes. Nos cinco pontos desta questão são pedidas as medidas de diferentes barras dando uma dessas mesmas barras como unidade, como o objetivo das alíneas é igual apenas se analisarão as respostas dadas. Esta questão apenas não foi respondida pelo grupo 4 e nas três primeiras questões todos os grupos respondem corretamente. As duas últimas alíneas (5.1 e 5.2) foram respondidas corretamente pelos grupos 1, 3 e 5 e de forma incompleta pelo grupo 2 pois apresentam o valor pedido na forma de fração mas não na forma de numeral decimal. A figura seguinte mostra a resolução efetuada pelo grupo 3 (fig. 18).

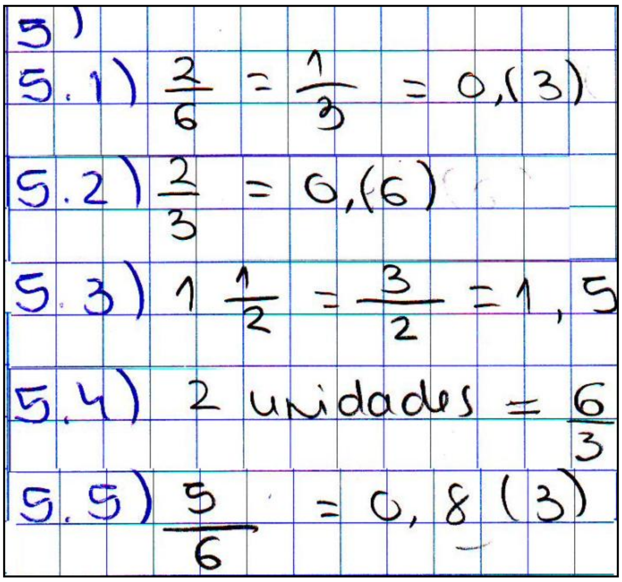


Figura 18 – Grupo 3 – Questão 5.

Discussão e sistematização de resultados com a turma

Durante a realização da ficha n.º 1 a professora procurou que os elementos de cada grupo discutissem as questões propostas mantendo-se atenta ao trabalho que estava a ser desenvolvido durante a aula. Os estudantes utilizaram estratégias diversas na realização dos diferentes exercícios e problemas propostos, algumas muito relacionadas com o desenvolvimento formal dos algoritmos das operações e outras relacionadas com as representações pictóricas.

As principais dificuldades prendem-se com a (i) compreensão do enunciado de algumas questões; (ii) a utilização dos algoritmos das operações; (iii) compreensão da linguagem das frações e das operações matemáticas; e (iv) a utilização da linguagem matemática para representar relações entre as partes de uma unidade.

Na sistematização das ideias a professora explorou as diferentes representações de cada número pedido e a equivalência entre elas, pois pretende-se que os futuros professores se focalizem na compreensão e representação dos números racionais nas diferentes formas, principalmente a de fração, como uma relação entre a parte e o todo. Nesta fase, a professora recorda a notação e a terminologia utilizada na representação fracionária e identifica o denominador como o número de partes iguais em que a unidade está dividida e o numerador como o número de partes escolhidas. Realça ainda que a unidade é representada por uma fração cujo numerador é igual ao denominador e que quanto maior for o denominador menor é o valor representado pela fração.

É feita a sistematização do conceito de fração equivalente e da sua notação. Acerca deste tópico, frações equivalentes, a professora destaca que em contextos reais – questões 1. e 2. (divisão de pizas e chocolates), duas frações só são equivalentes se os objetos que são comparados são congruentes. Em situações não contextualizadas duas frações serão equivalentes se for possível multiplicar ou dividir ambos os números da fração por um mesmo operador. Destaca que se as frações não forem equivalentes deverão ser representadas em termos de desigualdade, podendo-se então comparar as duas frações em estudo. Recorda que para comparar duas frações com o mesmo denominador, a comparação baseia-se na comparação dos numeradores e, quanto maior o numerador maior é o número. Do mesmo modo, refere que na comparação de duas frações com o mesmo numerador é feita a comparação dos denominadores e, quanto maior é o denominador menor é a fração. Para além da comparação através do recurso à reta numérica esta relação pode ser comprovada através da determinação dos quocientes ou da determinação de frações equivalentes.

Realça, nos casos da representação sob a forma de fração de números racionais não negativos superiores a um, o trabalho informal da adição de frações e a respetiva representação na forma de numeral misto. Evidencia o sentido da fração como operador e, por isso, relaciona as frações $\frac{1}{2}$ com a “metade de” e $\frac{1}{4}$ com “um quarto de” com a situação apresentada no exercício 2.2 e no exercício 3.

Destaca o sentido de fração como medida e parte-todo evidenciando as situações apresentadas nos exercícios 4 e 5. No que concerne ao sentido medida explora as diferentes comparações que se podem fazer entre números se a unidade for variando. Assim, no exercício 5 é possível verificar que a mesma barra pode tomar valores diferentes consoante o tipo de barra que foi escolhido como unidade de medida.

Por fim, salienta o sentido de fração como quociente utilizado em vários exercícios da ficha na conversão de representações sob a forma de fração em numerais decimais.

2.2.2. Aula n.º 2 – Descrição das atividades realizadas

A ficha de trabalho nº 2 foi aplicada na aula que decorreu no dia 12 de março e é constituída por oito questões sobre representação de números racionais percorrendo os diferentes significados de números racionais – parte-todo (questões 1), operador (questões 2, 3, 4, 5 e 6) e medida (questão 8) e comparação dos números racionais nos significados medida e operador (questão 7) nas representações pictórica, fração, numeral misto, numeral decimal e percentagem.

A metodologia de trabalho adotada nesta aula foi semelhante à da aula anterior tendo-se entregue individualmente uma ficha a cada elemento do grupo e organizado cinco grupos de três pessoas tendo faltado o grupo 5. Tal como na aula anterior, foi dado aos alunos um período de tempo para lerem a ficha de trabalho e retirarem todas as dúvidas surgidas após a leitura. Após esse momento cada grupo iniciou a realização da sua tarefa no período estipulado e, de seguida, foi efetuada a apresentação dos resultados obtidos e a discussão das conclusões em grande grupo.

Significado parte-todo

Questão 1. Esta questão tem por objetivo a representação pictórica de diferentes números racionais representados nas formas de fração, numeral decimal e percentagem, em que o contexto do problema apresentado é puramente matemático e envolve grandezas contínuas. Todos os grupos fazem a representação pictórica correta das quantidades pedidas nas diferentes representações (fracionária, decimal e percentagem) o que evidencia grande facilidade na conversão de uma representação na representação pictórica. A resolução do grupo 2 mostra a facilidade na conversão dos valores dados na representação pictórica e na conversão de alguns numerais decimais em frações (fig. 19).

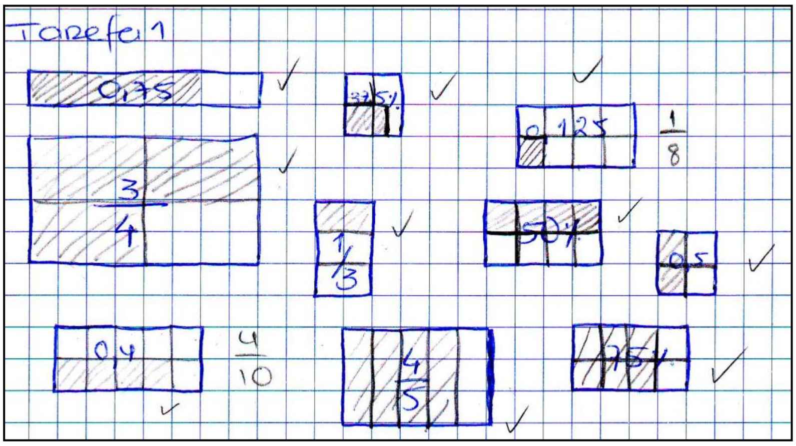


Figura 19 – Grupo 2 – Questão 1.

Significado operador

Questão 2. Nesta tarefa são propostos alguns desafios com tiras de papel apresentando uma situação contextualizada com grandezas contínuas e em que a informação é dada na representação pictórica. Na primeira questão é dada uma tira de papel que representa $\frac{4}{3}$ e é pedida a unidade não sendo identificada em que tipo de representação pode ser dada a resposta. Todos os grupos representam a tira de papel dada e dividem-na em quatro partes iguais e, de seguida, pintam três dessas partes e referem que representam a unidade. O grupo 3 decompõe a fração dada e percebe que é superior à unidade e, por isso, divide a tira dada em quatro partes iguais e conclui que a unidade é constituída por três dessas partes (fig. 20).

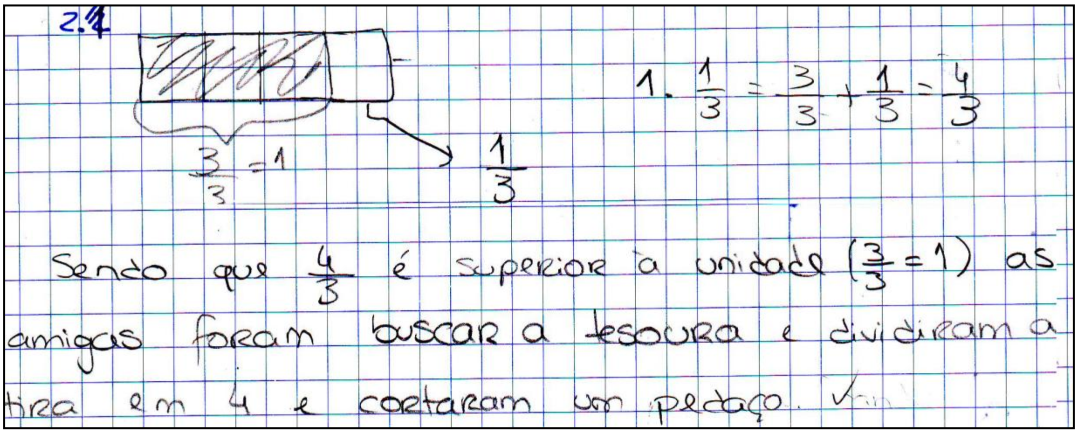


Figura 20 – Grupo 3 – Questão 2.1.

Na segunda alínea é solicitada a construção da unidade a partir das suas partes pois é dado pictoricamente um quadrado que representa 20% do total. Esta questão é de fácil resolução pois todos os grupos apresentam uma tira com cinco partes iguais à apresentada e concluem que será a unidade pois 20% é a quinta parte da unidade. O grupo 4 utiliza a representação pictórica para indicar a solução do problema (fig. 21).

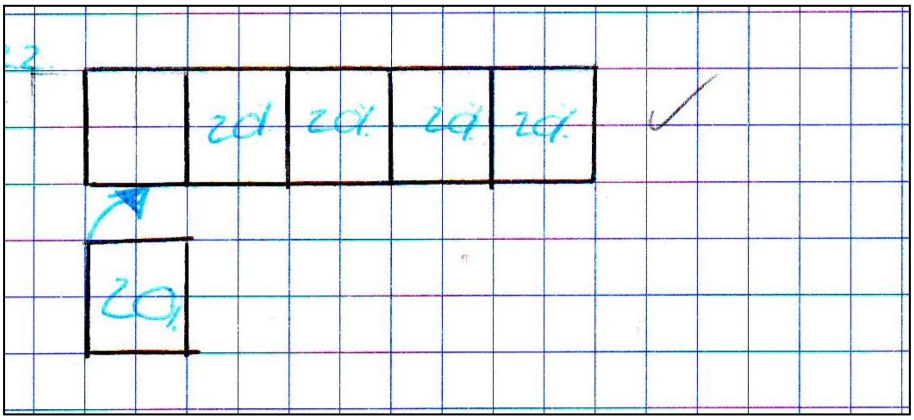


Figura 21 – Grupo 4 – Questão 2.2.

Na terceira alínea é pedida a construção da unidade sabendo que a tira apresentada equivale a $\frac{3}{8}$ numa situação contextualizada sendo a informação dada na representação pictórica e a resposta na mesma representação. Analisadas todas as respostas verifica-se que todos os grupos dividem corretamente a tira de papel dada em três partes iguais e, de seguida, juntam mais uma tira igual à primeira e uma terceira tira igual às anteriores mas sombreada em duas partes pois referem que $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{8}{8}$ que representa a unidade pedida, tal como se pode observar na resposta do grupo 1.

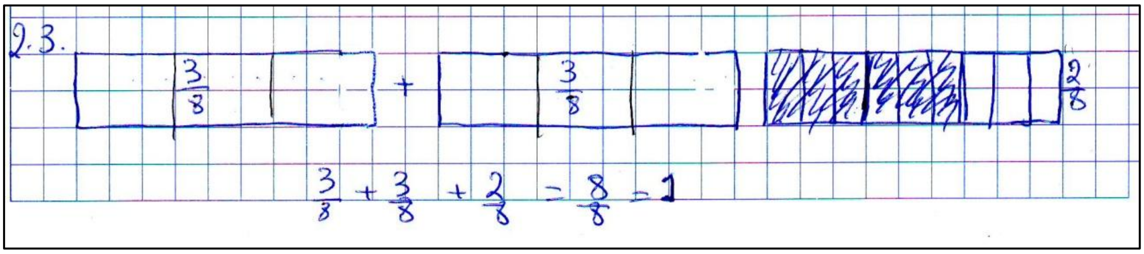


Figura 22 – Grupo 1 – Questão 2.3.

Na quarta alínea os futuros professores teriam de representar $\frac{3}{10}$ e $\frac{7}{25}$ de uma tira de papel que corresponde a $\frac{3}{5}$ numa situação contextualizada envolvendo grandezas contínuas no contexto parte-todo e operador. Nesta questão os estudantes deveriam dividir a tira de papel em 10 ou 25 partes iguais e sombrear 3 ou sete dessas partes, respetivamente. Examinadas as respostas obtidas verificou-se que nenhum dos grupos representou corretamente os valores pedidos pois não conseguiram compreender como representar uma quantidade ($\frac{3}{10}$ e $\frac{7}{25}$) de uma tira de papel que não representava a unidade e, por isso, representaram toda a unidade e dividiram-na em 10 partes iguais ou em 25 partes iguais e sombrearam, respetivamente, 3 e 7 partes.

A última questão solicitava a conversão das frações obtidas na questão anterior na forma decimal e em percentagem. Todos os grupos representam corretamente na forma decimal e na forma de percentagem as frações $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{25}$ e $\frac{3}{5}$ no entanto, nenhum representa as frações pedidas $\frac{3}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{50}$ e $\frac{7}{25} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{125}$, consequência da incorreta interpretação do problema anterior.

Questão 3. Neste problema refere-se que existem numa fruteira seis maças e meia e pede-se, na alínea, para representarem este número na forma de fração, numeral decimal e misto. Todos os grupos responderam corretamente à questão è exceção do grupo 4 que representou corretamente o numeral misto ($6\frac{1}{2}$) e incorretamente a fração ($\frac{7}{12}$) e consequentemente o numeral decimal (0,58(3)). Na conversão do numeral misto para fração os restantes grupos utilizam o algoritmo da adição ($6 + \frac{1}{2}$) para encontrarem o valor solicitado e a leitura do número dado para o representarem na forma de numeral decimal ($6 + 0{,}5$).

Na segunda alínea pede-se que identifiquem $\frac{1}{4}$ das maçãs que existiam na fruteira nas formas pictórica, fração, numeral decimal e misto. Nesta questão o grupo 1 representa incorretamente o valor correspondente a $\frac{1}{4}$ da fruta indicando ($1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$) e, consequentemente, apresenta todos os valores errados, o grupo 6 apresenta todos os valores corretos exceto a representação decimal (0,25) e os restantes acertam em todas as representações, tal como se pode observar na resposta do grupo 2 (fig. 23).

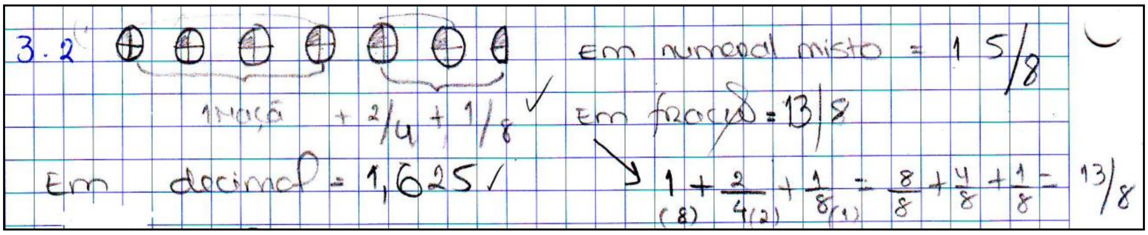


Figura 23 – Grupo 2 – Questão 3.2.

Na terceira alínea solicita-se a representação de duas frações equivalentes que representem a quantidade de maçãs que os irmãos comeram. Apenas os grupos 2 e 3 apresentam as frações $\frac{26}{16}$ e $\frac{39}{24}$ como equivalentes a $\frac{13}{8}$, os restantes grupos apresentaram frações equivalentes a $\frac{1}{4}$ evidenciando dificuldade na interpretação do problema dado.

Questão 4. Nesta questão os estudantes teriam que determinar o número de cromos correspondente a 45% de 60 cromos. Todos os grupos responderam corretamente à questão utilizando estratégias diferentes. Dois grupos utilizam a regra de três simples para determinarem o número de cromos correspondente a 45%, outros dois multiplicam 0,45 por 60 e o grupo 2 faz uma relação entre a quantidade de cromos e a percentagem respetiva (fig. 24).

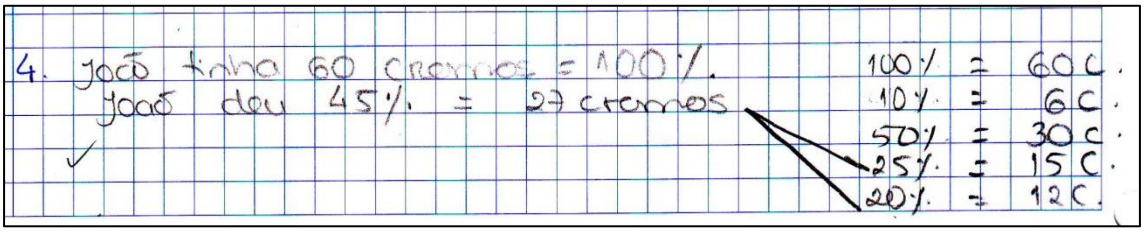


Figura 24 – Grupo 2 – Questão 4.

Questão 5. Nesta questão pedia-se aos estudantes que determinassem o custo de umas calças sabendo que teve um desconto de 30% e o seu preço inicial era de 45 €. Todos os grupos voltam a responder corretamente determinando inicialmente o valor correspondente ao desconto e, de seguida o valor do custo das calças. Os grupos resolvem esta questão utilizando as mesmas estratégias da questão 4 e a subtração do valor das calças pelo do valor do desconto obtendo o resultado pedido, tal como efetuou o grupo 1 (fig. 25).

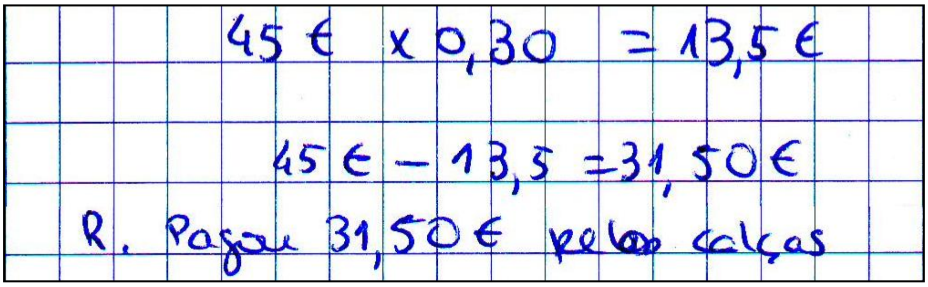


Figura 25 – Grupo 1 – Questão 5.

Questão 6. A questão tem por objetivo determinar o comprimento de cada rolo de corda sabendo que 28 m corresponde a $\frac{7}{3}$ a partir da reconstrução da unidade. Apenas um dos cinco grupos não consegue resolver esta questão conseguindo perceber que $\frac{7}{3}$ corresponde a dois rolos e $\frac{1}{3}$, no entanto, não atribui um comprimento a cada rolo. Os restantes grupos dividem a quantidade de corda em sete partes e concluem que corresponde a um terço e, de seguida, multiplicam o valor determinado por três para indicar o comprimento de cada rolo, tal como se pode observar na resposta do grupo 2 (fig. 26).

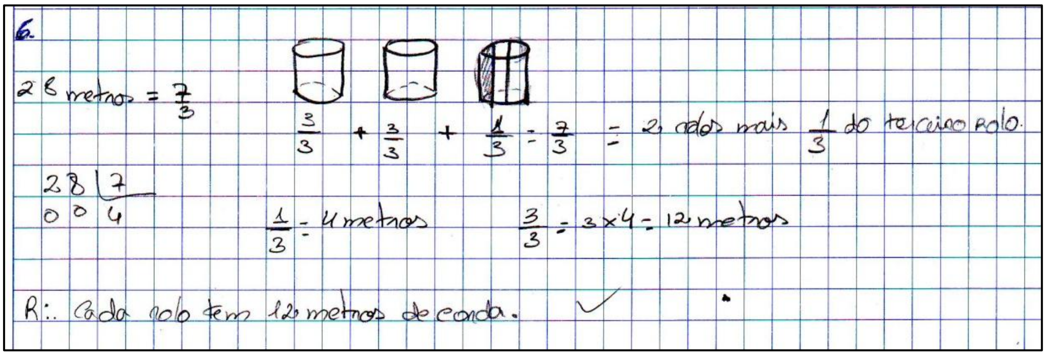


Figura 26 – Grupo 2 – Questão 6.

Significado medida

Questão 8. A questão 8 solicita a identificação dos números racionais – $\frac{7}{3}, \frac{8}{5}, \frac{9}{6}, \frac{8}{3}$ e $\frac{6}{9}$ - em retas numéricas graduadas. Três grupos não conseguiram identificar o último dos cinco números pedidos pois enganam-se na contagem do número de partes em que a unidade foi dividida ou indicam um valor aproximado. O grupo 4 (fig. 27) mostra como conseguiu identificar os números pedidos.

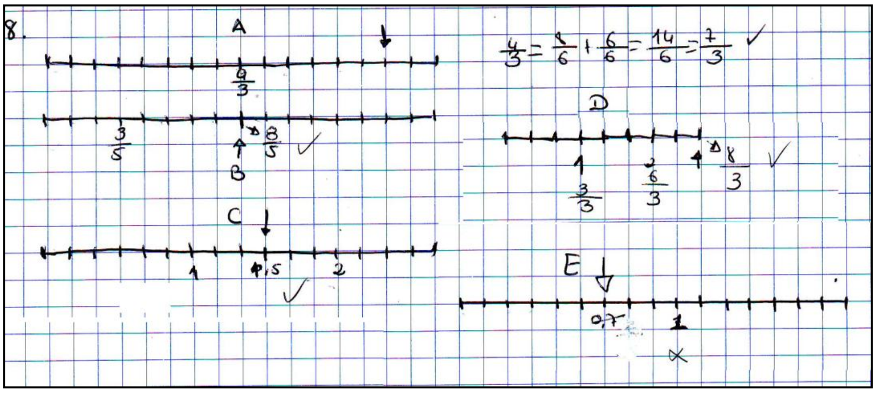


Figura 27 – Grupo 4 – Questão 8.

Comparação de números racionais

A questão 7 está relacionada com a comparação de números racionais e tem como objetivo o desenvolvimento da compreensão da relação parte-todo e operador e da compreensão da existência de uma unidade de referência.

Significado medida e operador

Questão 7. Nesta questão refere-se que três meses representam $\frac{1}{4}$ de um ano e nas alíneas seguintes pede-se para justificar a afirmação e explicar o que representam $\frac{5}{4}$ e $\frac{7}{2}$ nesse contexto bem como a representação das frações anteriores em frações decimais.

Na primeira alínea, todos os grupos conseguem arranjar argumentos válidos para justificar a afirmação e, por isso, o grupo 3 refere que *"Se um ano tem 12 meses e 12:4=3 então 3 meses são* $\frac{1}{4}$ *de um ano"*.

Na segunda alínea, todos os grupos respondem corretamente e referem que *"Se um ano tem 12 meses são* $\frac{4}{4}$ *então* $\frac{5}{4}$ *são 1 ano e 3 meses"*.

Na terceira alínea, um dos grupos não responde corretamente e os restantes percebem que o ano está dividido em duas partes e, por isso, $\frac{7}{2}$ corresponde a 3 anos e meio, tal como se observa na resolução do grupo 3 (fig. 28).

Na última alínea dois grupos não respondem à questão pois apresentam os valores pedidos na forma de numeral decimal e não na forma de fração decimal, os restantes grupos respondem corretamente apresentando as frações $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$, $\frac{5}{4} = \frac{125}{100}$ e $\frac{7}{2} = \frac{35}{10}$.

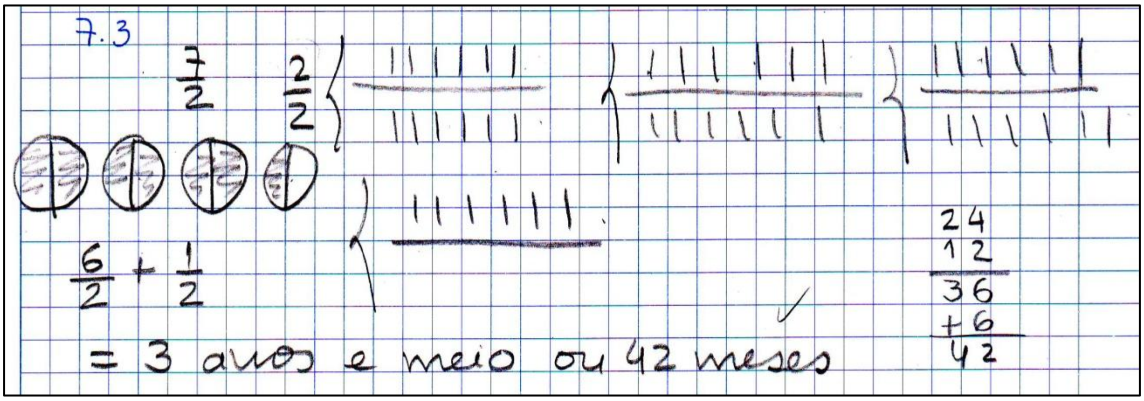


Figura 28 – Grupo 3 – Questão 7.3.

Discussão e sistematização de resultados com a turma

As principais dificuldades identificadas durante a realização da ficha n.º 2 prendem-se com a (i) compreensão do enunciado de algumas questões; (ii) compreensão da linguagem das frações e das operações matemáticas; (iii) utilização da linguagem matemática para representar relações entre as partes de uma unidade; e (iv) representação de frações decimais.

Na resolução da ficha os alunos utilizaram estratégias diversas na realização dos diferentes exercícios e problemas propostos, algumas muito relacionadas com o desenvolvimento formal dos algoritmos das operações e outras mais informais relacionadas com a barra numérica e as representações pictóricas.

Na sistematização das ideias, a professora explorou as diferentes representações de cada número pedido e a equivalência entre elas com vista à compreensão e representação dos números racionais formas de fração, numeral decimal, numeral misto, e percentagem.

A professora realça o aparecimento do número racional no sentido de operador num contexto de modelo contínuo (questão 2) pois são pedidas outras figuras com a mesma forma e diferentes comprimentos a partir da figura inicial evidenciando que é necessário, numa primeira fase, reconstruir a unidade e, por isso, os estudantes têm que mobilizar os seus conhecimentos sobre os números racionais como relação parte-todo (questão 1) bem como na questão 6. Recorda que o sentido operador é trabalhado num contexto discreto nas questões 3, 4 e 5 pois são pedidas outras quantidades de objetos a partir da situação inicial. Refere o conceito de fração equivalente e do seu significado em contextos reais (questões 2.5 e 3.3) evidenciando que duas frações só são equivalentes se os objetos que são comparados são congruentes.

Destaca, ainda, o significado de fração como medida e parte-todo apresentada no exercício 8 onde é pedida a identificação de alguns números racionais com recurso à reta numérica na forma de fração ou numeral decimal. Realça que a identificação dos números racionais solicitados pode ser comprovada através da contagem do número de partes em que a unidade foi dividida (denominador) e da contagem das partes em que o ponto se encontra (numerador) ou através da determinação dos quocientes destes dois termos ou até da determinação de frações equivalentes.

Evidencia, no tópico Comparação de números racionais, os significados medida e operador presentes na questão 7, numa situação contextualizada como a medição de tempo. Explora as diferentes comparações que se podem fazer entre os números - $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4}$ e $\frac{7}{2}$ realçando os seus significados relativamente à unidade ($\frac{1}{4}$) para se poder identificar os valores pedidos. Salienta o significado medida subjacente neste problema, uma vez que se estabelecem comparações com um determinado período de tempo (3 meses) que foi tomado como parte da unidade.

2.2.3. Aula n.º 3 – Descrição das atividades realizadas

A ficha de trabalho n.º 3 aborda a representação de números racionais nos significados parte-todo (questões 1.7 e 2.2) e razão (questões 3 e 4.1), comparação e equivalência de números racionais nos significados medida (questões 2.1, 2.3, 2.4 e 7) e razão (questão 4.2) e densidade de números racionais no significado medida (questões 1.4, 1.5, 1.6, 1.8 e 5) nas representações pictórica, fração, numeral misto e numeral decimal.

A metodologia de trabalho adotada nesta aula foi semelhante à das aulas anteriores tendo-se entregue individualmente uma ficha a cada elemento do grupo e organizado cinco grupos de três pessoas pois os elementos do grupo 6 faltaram. Foi dado um momento para a leitura individual da ficha de trabalho e esclarecimento de dúvidas surgidas.

A questão 1 foi adaptada da brochura para o 2.º ciclo dedicada aos números racionais (Menezes et al., 2009) e pretende mobilizar as representações dos números racionais na forma de fração e de numeral misto, a comparação e a ordenação e a densidade de números racionais.

As três primeiras alíneas referem-se à descrição da situação apresentada na tira, com a quantidade de números que têm de ser contados e com o tipo de números e representações utilizados. As respostas a estas alíneas mostram que todos os grupos percebem que a contagem efetuada tinha como propósito o atraso no ataque e que, desse modo, teriam de ser contados oitenta números até ao início do ataque. Na terceira alínea todos os grupos foram capazes de identificar as representações utilizadas mas nenhum foi capaz de identificar o conjunto de números usados como sendo o dos números racionais.

Representação de números racionais

As questões 1.7, 2.2, 3 e 4.1 estão relacionadas com a representação de números racionais e têm como objetivo o desenvolvimento da compreensão da relação parte-todo e razão.

Significado parte-todo

Na alínea 1.7 todos os grupos apresentam corretamente $2\frac{6}{8}$ na forma de fração $(\frac{22}{8})$ e de numeral decimal $(2{,}75)$ percebendo-se que entendem o significado do numeral misto e, por esse motivo, utilizam a adição dos termos para determinar o valor da fração, como se pode observar na resolução do grupo 4 (fig. 29).

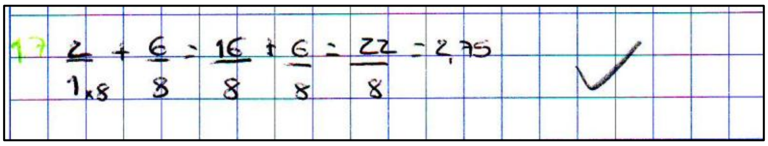


Figura 29 – Grupo 4 – Questão 1.7.

Na alínea 2.2 teriam que apresentar os números racionais dados na forma de fração irredutível tendo-se verificado que todos os grupos conseguem converter $8\frac{7}{9}$ e $8\frac{3}{8}$ em $\frac{79}{9}$ e $\frac{67}{8}$, respetivamente. Percebem que $\frac{80}{9}$ se encontra na forma irredutível, o grupo 5 não consegue converter 8,75 na fração irredutível $\frac{35}{4}$ e o grupo 1 erra os cálculos apresentando o valor $\frac{33}{4}$.

Significado razão

Questão 3. Nesta questão refere-se que o número de rapazes e raparigas de uma turma estão numa razão de 3 para 7 e pergunta o número de raparigas se a turma tiver nove rapazes. Das respostas analisadas verifica-se que três grupos respondem corretamente, o grupo 4 responde incorretamente 13 raparigas sem mostrar a estratégia utilizada na resolução e o grupo 5 responde incorretamente 12 raparigas pois fez uma má interpretação do problema (fig. 30) considerando uma relação parte-todo e não uma razão.

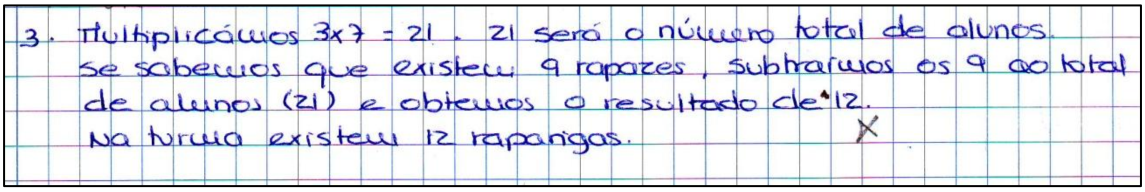


Figura 30 – Grupo 5 – Questão 3.

O grupo 1 recorre à representação pictórica para determinar corretamente o número de raparigas da turma considerando a razão dada (fig. 31).

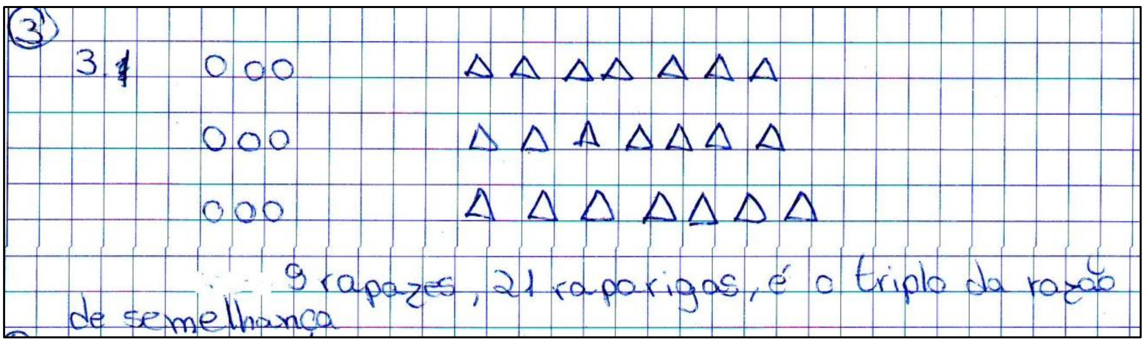


Figura 31 – Grupo 1 – Questão 3.

Na alínea 4.1 pede-se para representar na forma de fração os remates concretizados por cada jogador sabendo que o José concretizou 5 dos 12 remates e o Rui 5 dos 9 remates. Esta questão foi demasiado fácil para todos os grupos e, por isso, todos responderam corretamente $\frac{5}{12}$ e $\frac{5}{9}$ respetivamente.

Comparação e equivalência de números racionais

As questões 2.1, 2.3, 2.4, 4.2 e 7 estão relacionadas com a comparação e equivalência de números racionais e têm como objetivo o desenvolvimento da compreensão do significado medida.

As alíneas 2.1 e 2.3 solicitam a comparação entre as quantidades de tinta gasta, no primeiro caso, todos os grupos respondem corretamente à questão utilizando a conversão dos números racionais dados para a forma de numeral decimal. No caso da alínea 2.3 apenas o grupo 5 não responde corretamente à questão por má interpretação uma vez que considera que na lata está inscrita a quantidade de tinta que sobrou (fig. 32).

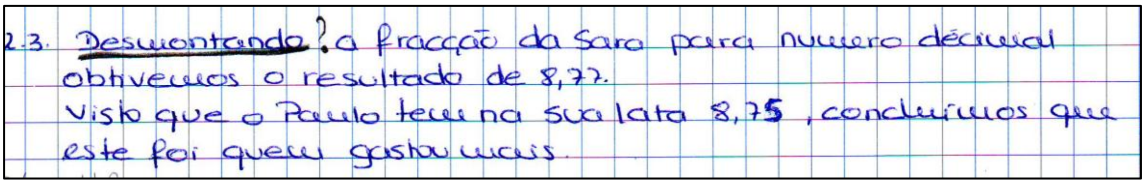

2.3. Desmontando? a fracção da Sara para numero decimal obtivemos o resultado de 8,77.
Visto que o Paulo tem na sua lata 8,75, concluimos que este foi quem gastou mais.

Figura 32 – Grupo 5 – Questão 2.3.

Na alínea 2.4 era pedido um número que representasse a quantidade de tinta gasta pela Maria sabendo que a quantidade de tinta que utilizou é superior à da Sara e inferior à do Rui. Nesta questão três grupos respondem corretamente utilizando a equivalência de frações ou a conversão em numeral decimal para indicar um valor, o grupo 5 não responde e o grupo 4 responde incorretamente 8,75 que é inferior aos dos outros dois.

O grupo 3 recorre à determinação de duas frações equivalentes às dadas para de seguida indicar uma fração no intervalo dado (fig. 33).

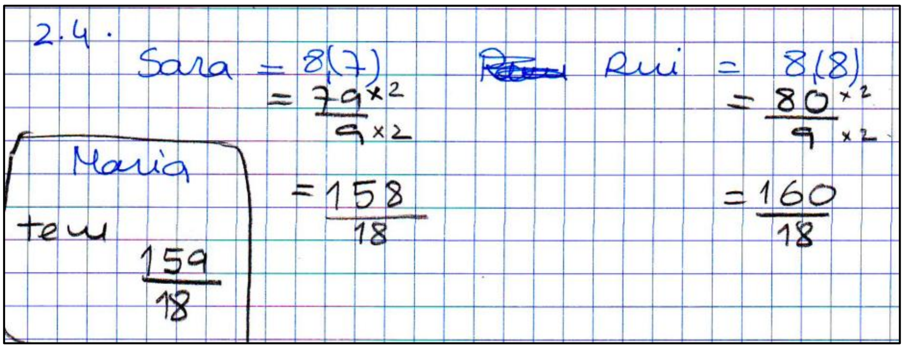


Figura 33 – Grupo 3 – Questão 2.4.

A alínea 4.2 solicita a identificação do ponta-de-lança mais eficaz sabendo que um concretizou 5 remates em 12 e o outro 5 dos 9 remates. Nesta questão todos os grupos respondem corretamente calculando a percentagem de remates que cada um fez ou determinando duas frações equivalentes às representadas na alínea 4.1. O grupo 1 após determinar as frações equivalentes justifica a sua escolha com base no numerador e denominador de cada uma das frações obtidas (fig. 34).

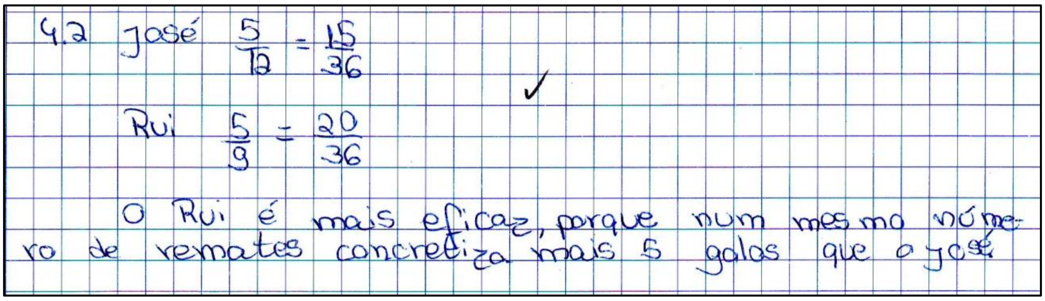


Figura 34 – Grupo 1 – Questão 4.2.

A questão 7 é apresentada num contexto puramente matemático e é pedido aos estudantes que comparem dois números racionais nas formas de fração, numeral decimal e misto. Nas comparações de números racionais apresentam-se (a) frações com mesmo denominador; (b) frações com numerador e denominador diferente; (c) fração e numeral decimal; (d) numerais mistos; (e) frações com o mesmo numerador; e (f) frações equivalentes.

Todos os grupos colocam corretamente os símbolos matemáticos correspondentes à exceção do grupo 4 que não acerta as três primeiras alíneas mas, não identifica as estratégias utilizadas na resolução do problema. Os grupos que respondem acertadamente utilizam como estratégias a divisão dos termos constituintes da fração, a determinação de frações equivalentes, o algoritmo da adição ou a representação pictórica dos números dados para fazer a respetiva comparação, tal como se pode observar na resolução efetuada pelo grupo3 (fig. 35).

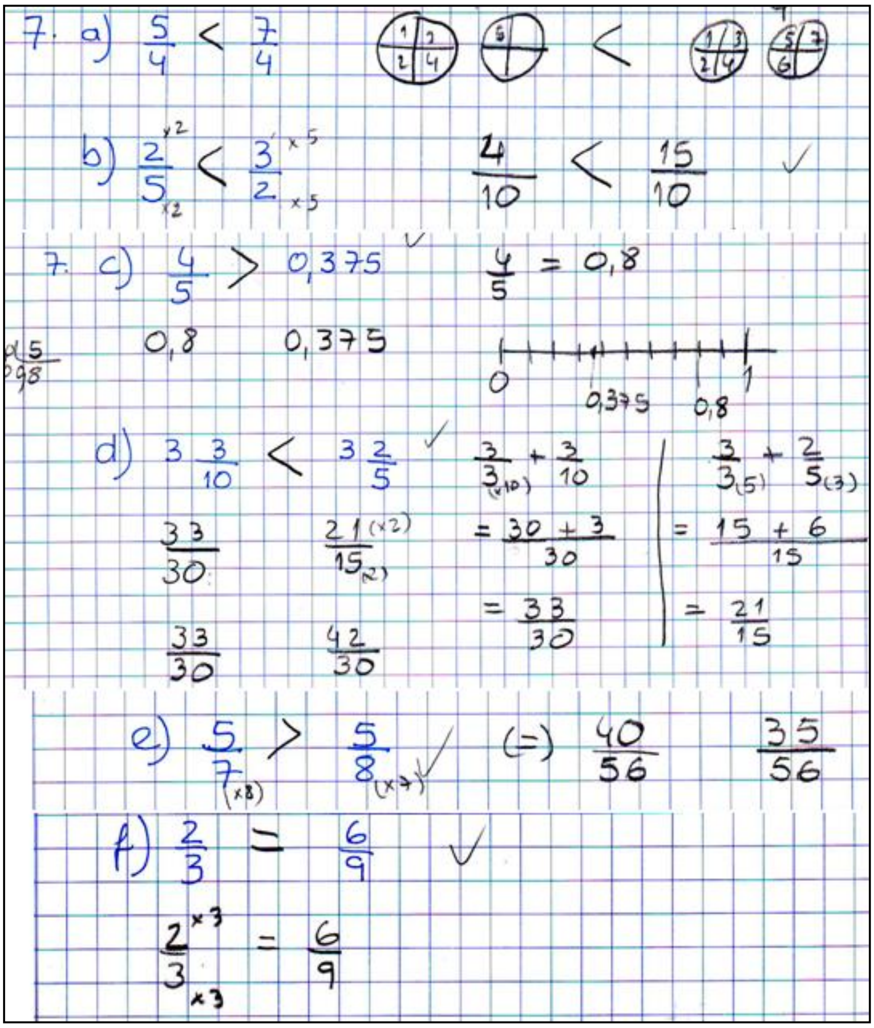


Figura 35 – Grupo 3 – Questão 7.

Densidade de números racionais

As questões 1.4, 1.5, 1.6, 1.8, 5 e 6 estão relacionadas com a densidade de números racionais e têm como objetivo o desenvolvimento da compreensão do significado medida.

Na alínea 1.4 é solicitada a explicação de um modo de redução do tempo de espera para o início do ataque e na alínea 1.5 um modo de atrasar ainda mais o ataque descrito na tira. Para a primeira questão todos os grupos referem como modos de redução do tempo a contagem só dos números inteiros ou a contagem em partes inferiores a dez. Para atrasar o ataque apenas o grupo 1 percebeu que *“bastava aumentar o denominador, ou seja, dividir a unidade em dezasseis partes* $(\frac{1}{16})$ *ou trinta e duas partes* $(\frac{1}{16})$*, por exemplo.”*Os restantes grupos não conseguiram arranjar um argumento válido para atrasar o ataque apenas afirmando que fariam a contagem em numeral decimal ou não responderam à questão.

A alínea 1.6 pedia aos estudantes que indicassem dois números racionais no intervalo entre $2\frac{5}{8}$ e $2\frac{6}{8}$ e verifica-se que todos os grupos identificam corretamente esses dois números utilizando como estratégias a conversão dos numerais mistos em fração e, de seguida, ou dividem os dois termos da fração ou determinam duas frações equivalentes às obtidas com denominador múltiplo.

O grupo 5 converte os numerais mistos em fração utilizando o algoritmo da adição e posteriormente determina frações equivalentes às obtidas para dar resposta à questão (fig. 36).

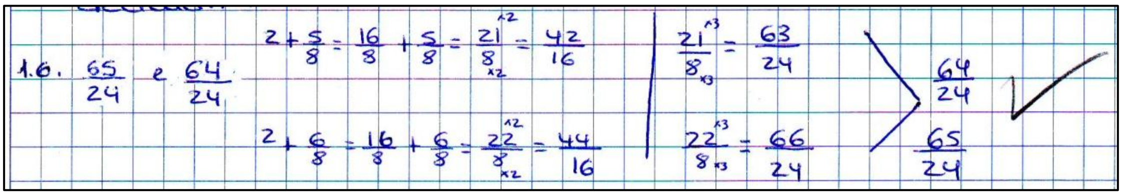


Figura 36 – Grupo 5 – Questão 1.6.

Na alínea 1.8 refere-se que a contagem chega a $9\frac{7}{8}$ e pede-se para indicar uma estratégia para adiar o início do ataque. Da análise das respostas verifica-se que dois grupos não conseguem arranjar uma estratégia válida para adiar o ataque e os restantes referem que teriam de dividir o intervalo que resta num maior número de partes, tal como se pode observar na resposta dada pelo grupo 4 (fig. 37).

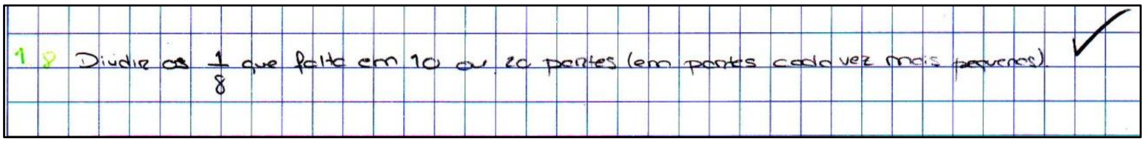


Figura 37 – Grupo 5 – Questão 1.8.

As questões 5 e 6 abordam a densidade dos números racionais com utilização ou não da reta numérica pois solicitam a identificação de dois números racionais nas diferentes formas de representação num determinado intervalo.

Nas alíneas 5.1 e 5.2 três grupos identificam corretamente dois números racionais entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{3}$ e dois números racionais entre $\frac{4}{7}$ e $\frac{4}{5}$ utilizando a divisão entre os termos da fração ou determinando duas frações equivalentes com denominador múltiplo dos denominadores das frações dadas. Os grupos quatro e cinco apenas conseguem indicar um número racional entre os referidos pois dão como exemplos os pares $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{3}$ e $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{4}$, par o primeiro caso e $\frac{4}{6}$ e $\frac{4}{6}$ e $\frac{7}{9}$ para o segundo caso, respetivamente.

Nas alíneas 5.3, 5.4 e 5.5 quatro grupos indicam corretamente dois números racionais entre $1\frac{3}{12}$ e $1\frac{5}{8}$; 0,32 e 0,324; e $\frac{3}{5}$ e 0,75, respetivamente, utilizando as estratégias referidas nas alíneas anteriores. O grupo 4 apenas indica um número racional correto para cada intervalo, identificando os pares $\frac{12}{8}$ e $\frac{14}{12}$; $\frac{33}{100}$ e $\frac{34}{100}$; $\frac{5}{100}$ e $\frac{70}{100}$, respetivamente, não mostrando as estratégias utilizadas na determinação destes números.

A questão 6 solicita a identificação de três números racionais na forma fracionária, de numeral decimal e misto entre 1 e 2. Da análise das respostas obtidas verifica-se que todos os grupos indicam corretamente os números pedidos utilizando a reta numérica para os assinalar, tal como se pode observar na resposta do grupo 2 (fig. 38).

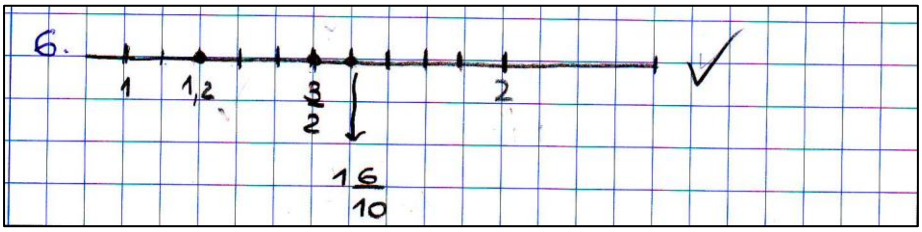


Figura 38 – Grupo 2 – Questão 6.

Discussão e sistematização de resultados com a turma

Na discussão em grande grupo a professora realçou a importância da utilização da banda desenhada ou de outros materiais como suporte à realização de tarefas matemáticas pois diversificam os contextos dos problemas bem como promovem a interdisciplinaridade.

Faz referência à utilização das diversas formas de representação de números racionais que são mobilizados nesta ficha – fracionária, numeral decimal e misto e da necessidade de posicionar e localizar os números racionais numa reta numérica bem como da importância da sua comparação e ordenação.

Salienta a importância da equivalência de algumas das representações apresentadas (numeral misto, fração e numeral decimal) e da possibilidade de se poderem utilizar quaisquer delas. Na equivalência de frações realça as relações que se estabelecem entre numeradores e denominadores e os critérios que definem essa comparação. Conclui que na comparação de frações com o mesmo denominador comparam-se os numeradores e na comparação de frações com o mesmo numerador comparam-se os denominadores, percebendo que as relações entre os dois casos são inversas.

Destaca a relação entre o denominador da fração com a quantidade de números que podem ser contabilizados num dado intervalo, exemplificando que no contexto do problema, a quantidade de números é dada pela expressão $10\times n$, sendo n o número natural que é o denominador da fração $\frac{1}{n}$. Discute as situações em que as frações não são unitárias e o incremento é um número racional maior do que um e é representado por uma fração e os casos em que o incremento é um número racional na forma de numeral decimal e inferior a um.

Refere que a comparação entre números fracionários pode ser feita com recurso à reta numérica e enquadrada entre dois números inteiros ou através da determinação dos quocientes entre os dois termos da fração, podendo recorrer à divisão inteira de modo a escrever o numeral misto ou à divisão exata de modo a obter a dízima.

Realça a importância das questões relativas à densidade do conjunto dos números racionais destacando que entre dois quaisquer números racionais existe uma infinidade de números.

2.2.4. Aula n.º 4 – Descrição das atividades realizadas

A ficha de trabalho dá ênfase à representação de números racionais sob a forma de percentagem nos significados parte-todo (questões 1, 2 e 3) e ao cálculo de percentagens (questões 4 e 5) nos significados razão e operador.

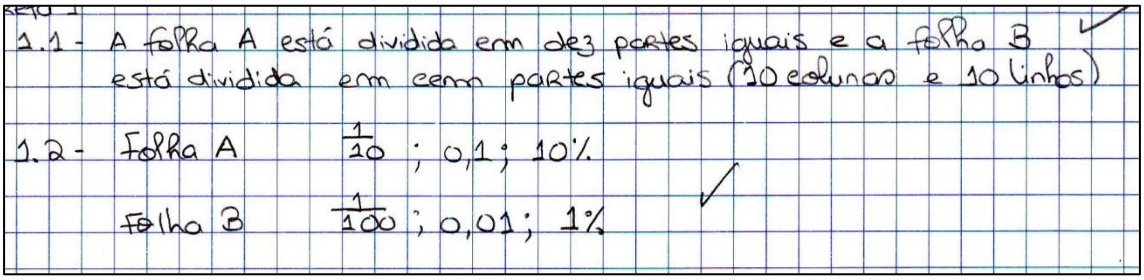
A metodologia de trabalho adotada nesta aula foi semelhante à das aulas anteriores tendo-se entregue individualmente uma ficha a cada elemento do grupo e organizado seis grupos de três pessoas não tendo sido registadas faltas. Foi dado um momento para a leitura individual da ficha de trabalho e esclarecimento de dúvidas surgidas.

Representação de números racionais

As questões 1, 2 e 3 estão relacionadas com a representação de números racionais e têm como objetivo o desenvolvimento da compreensão da relação parte-todo na forma de percentagem, fração e numeral decimal.

Significado parte-todo

As questões 1.1 e 1.2 pediam aos estudantes que indicassem o modo como as folhas apresentadas estão divididas e representassem na forma de fração, numeral decimal e percentagem a subunidade obtida da divisão das folhas. Todos os grupos respondem corretamente a estas duas questões e indicam que a folha A foi dividida em dez partes iguais enquanto a folha B em 100 partes iguais, tal como se pode observar na resposta do grupo 6 (fig. 39).



1.1 - A folha A está dividida em dez partes iguais e a folha B está dividida em cem partes iguais (10 colunas e 10 linhas)

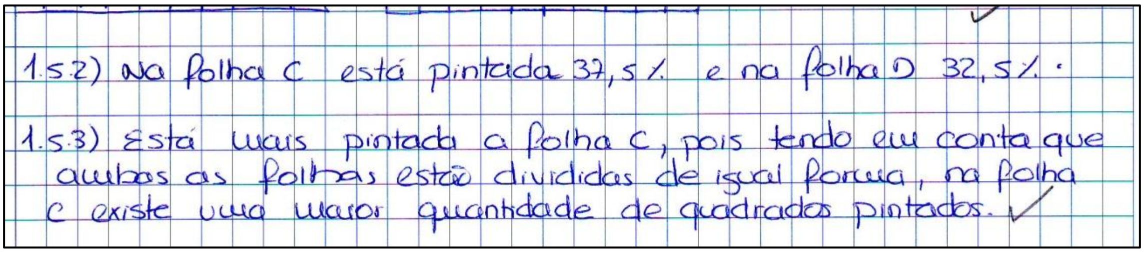
1.2 - Folha A $\frac{1}{10}$; 0,1 ; 10%

Folha B $\frac{1}{100}$; 0,01 ; 1%

Figura 39 – Grupo 6 – Questão 1.1. e 1.2.

Nas questões 1.3 e a 4 pedia-se para sombrearem 42,5% em cada uma das folhas e explicar se as quantidades marcadas eram iguais. Todas as respostas analisadas estão corretas pois os grupos na folha A sombreiam quatro colunas e dividem a quinta em quatro partes iguais e sombreiam uma dessas partes. Na folha B os estudantes sombreiam quarenta e dois quadrados e metade do quadragésimo terceiro e justificam que as duas quantidades são iguais. O grupo 1 justifica a sua resposta afirmando que *"Considerando a unidade, a quantidade representada é a mesma em ambas as situações pois se sobrepusermos uma folha à outra a área pintada é exatamente a mesma e a percentagem é a mesma"*.

Na questão 1.5 apresentam duas folhas divididas em cem partes iguais e pede-se que: 1) sombreiam $\frac{3}{8}$ da primeira folha e 32,5 centésimos da segunda; 2) representem a percentagem pintada em cada uma das folhas e 3) identifiquem qual das folhas está mais pintada. Mais uma vez todos os grupos respondem corretamente a estas três questões pois na primeira alínea dividem a folha dada em oito partes iguais e sombreiam três enquanto na segunda folha pintam trinta e dois quadrados e meio. Na segunda alínea dividem os termos da fração e convertem-na em percentagem (37,5%) e indicam para a folha dois o va1or 32,5%. Na terceira alínea concluem que a folha mais pintada é a primeira pois a sua percentagem é maior, tal como explica o grupo 5 (fig. 40).



1.5.2) Na folha C está pintada 37,5% e na folha D 32,5%.

1.5.3) Está mais pintada a folha C, pois tendo em conta que ambas as folhas estão divididas de igual forma, na folha C existe uma maior quantidade de quadrados pintados.

Figura 40 – Grupo 5 – Questão 1.5.2. e 1.5.3.

A questão 2 apresenta uma tabela com diversos números racionais na forma de percentagem, fração e numeral decimal e pede que a mesma seja completada com os valores em falta. Na resolução desta questão os grupos 1, 2 e 6 falham a conversão de numeral decimal (0,125) em fração pois escrevem $\frac{125}{100}$ enquanto os grupos 3, 4 e 5 convertem corretamente todos os números racionais dados, tal como se observa na resposta do grupo 4 (fig. 41).

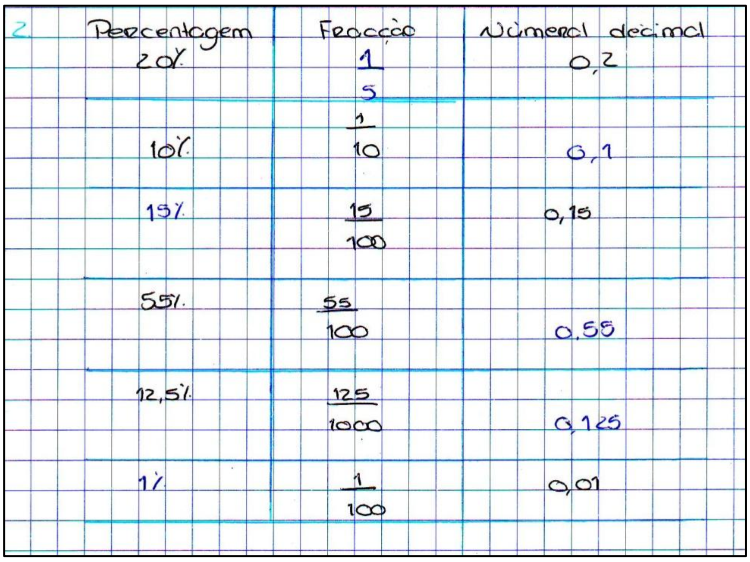


Figura 41 – Grupo 4 – Questão 2.

A questão 3.1 reportava-se à reconstrução da unidade sabendo que a imagem apresentada representava três de oito partes de uma folha e pedia-se a representação da folha inicial. Verificou-se que apenas o grupo 4 responde incorretamente pois replica a figura dada três vezes ficando com $\frac{9}{8}$ e não com a unidade como era pedido. Os restantes grupos concluem que para obterem a folha toda terão de dividir a folha dada em três partes iguais e de seguida adicionar cinco dessas partes à folha apresentada. O grupo 6 opta pela representação pictórica para dar resposta à questão (fig. 42).

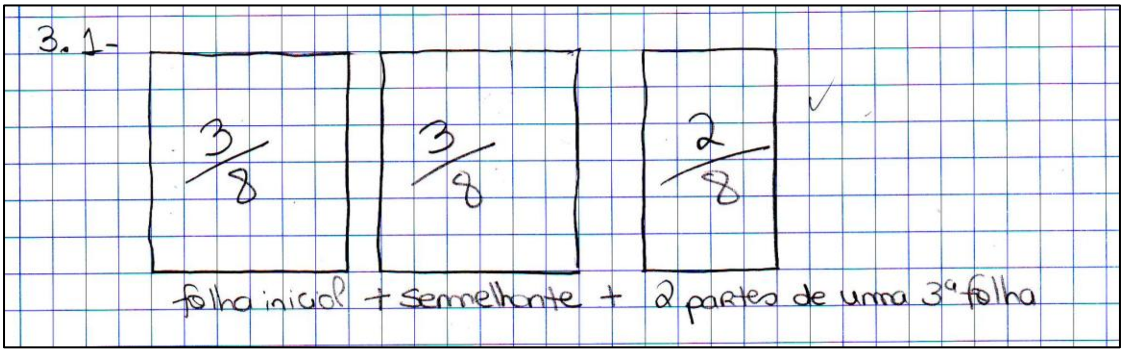


Figura 42 – Grupo 6 – Questão 3.1.

A questão 3.2 solicitava a representação de $\frac{9}{40}$ da folha inicial e das respostas dadas verifica-se que o grupo 4 não respondeu à questão e os restantes grupos respondem corretamente dividindo a folha inicial em quarenta partes iguais e sombreando nove dessas partes, tal como efetuou o grupo 6 (fig. 43). Por outro lado, o grupo 5 efetua a divisão dos termos da fração (0,225) e converte esse valor em percentagem e, de seguida, divide a folha em quatro partes iguais e identifica a parte correspondente a 22,5%.

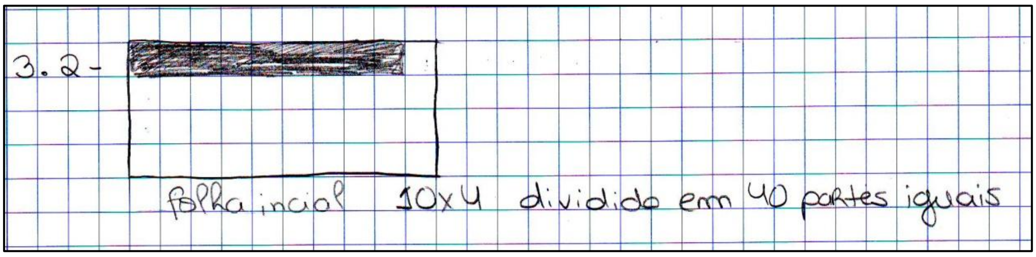


Figura 43 – Grupo 6 – Questão 3.2.

Cálculo de percentagens

As questões 4 e 5 estão relacionadas com o cálculo de percentagens em situações contextualizadas (descontos) nos significados razão e operador e foram adaptadas da brochura para o 2.º ciclo elaborada por Menezes et al. (2009). Têm como objetivo a resolução de problemas da vida corrente que envolvam a aplicação direta de uma percentagem de modo a determinar a parte sabendo a percentagem e o todo

Significados razão e operador

A questão 4 solicita aos estudantes o comentário à seguinte interrogação: *"Será que um desconto de 30% sobre o preço inicial de um ipad seguido de um novo desconto de 50% equivale a efetuar um desconto de 80% sobre o preço inicial do ipad?"*.

Das respostas analisadas apenas o grupo 4 não responde e os restantes grupos atribuem um valor ao objeto para poderem analisar se as duas hipóteses são semelhantes. Assim, após atribuírem um valor ao objeto utilizam a multiplicação das percentagens dadas pelo valor do objeto e determinam o seu valor em cada uma das hipóteses consideradas.

O grupo 6 percebe que na primeira hipótese que o primeiro desconto incide sobre o valor inicial do objeto mas que o segundo desconto incide sobre um valor diferente do inicial e, por isso, os valores obtidos nas duas hipóteses não poderão ser iguais (fig. 44).

4. Não. Tomemos o exemplo:
Ipad 100 €

$100€ \times 30\% = 70€$ } Hipótese 1
$70€ \times 50\% = 35€$

$100€ \times 80\% = 20€$ } Hipótese 2

Na hipótese 1 o desconto vai incidir em dois valores diferentes. Primeiro nos 100 € e depois em 70 €. Já na hipótese 2, o total do desconto é efectuado de uma vez só no valor inicial. ✓

Figura 44 – Grupo 6 – Questão 4.

Na última questão os estudantes teriam de calcular o número de meses que o preço de um computador (800 €) passaria a ser inferior a metade do seu valor inicial se o desconto mensal fosse de 10%.

Nesta questão o grupo 4 não responde e os grupos 2 e 6 respondem incorretamente 6 meses pois retiram em cada mês 10% do valor inicial (80 €) o que evidencia má leitura e interpretação do texto apresentado uma vez que a redução de 10% era relativa ao valor anterior. Os restantes grupos respondem corretamente ao fim de 7 meses pois a cada um dos valores obtidos retiram 10% para determinar o valor apresentado pelo objeto em cada mês.

O grupo 3 determina a percentagem correspondente aos 10% do valor obtido anteriormente até encontrar um valor inferior a 400 € e conclui acerca do tempo necessário para conseguir esse objetivo (fig. 45).

5

800 € ; 10%

$800€ \xrightarrow[-80€]{-10\%} 720€ \xrightarrow[-72€]{-10\%} 648€ \xrightarrow[-64,8€]{-10\%} 583,2€ \xrightarrow[-58,32€]{-10\%} 524,88€ \xrightarrow[-52,49€]{-10\%} 472,39€$

$472,39€ \xrightarrow[-47,24€]{-10\%} 425,15€ \xrightarrow[-42,52€]{-10\%} 382,63€$

São precisos 7 meses. ✓

Figura 45 – Grupo 3 – Questão 5.

Discussão e sistematização de resultados com a turma

Na discussão em grande grupo a professora realçou a importância da utilização dos modelos 10 por 10 para a exploração das percentagens e do significado de considerar diferentes partes em 100, representando-as nesse modelo e relacionando-as com as diferentes representações. Destaca ainda a importância 1 por 10 para ajudar nas conversões entre os dois modelos apresentados.

A professora explora com maior detalhe as equivalências entre as representações em percentagem e as representações em numeral decimal ou verbais, tais como 50%; 0,5 e metade ou 25%; 0,25 e a quarta parte, respetivamente. Destaca o significado de percentagem como uma quantidade em cem e refere que se um determinado desconto é de 15% significa que há uma redução no preço do objeto de 15 € por cada 100 € do preço inicial. Explora situações cujo valor é diferente de 100, fazendo sobressair a percentagem como operador.

Faz referência à utilização de descontos sucessivos e refere que não são equivalentes à soma desses descontos mas ao produto dos mesmos, pois no caso da questão 4, um desconto de 30% seguido de um desconto de 50% de um valor de 100 € não corresponde a 80% mas a 35% desse valor. Apresenta uma expressão numérica para resolução do problema de modo a que todos possam chegar à mesma conclusão, pois $(100 - 30\% \times 100) \times 50\% = (70\% \times 100) \times 50\% = (0{,}7 \times 100) \times 0{,}5 = 0{,}35 \times 100$, uma vez que o segundo desconto incide no valor obtido e não no valor inicial do objeto. Sugere que no cálculo de descontos sucessivo é possível multiplicar os dois valores dos descontos dados e de seguida multiplicar pelo valor do objeto considerado.

De seguida, salienta a importância do cálculo de dois ou mais descontos sucessivos, tal como se apresenta na questão 5 e refere que é necessário ter em atenção que este desconto é sempre calculado com base no valor anteriormente obtido e, por isso, o valor do desconto vai sendo cada vez menor pois o valor do produto vai diminuindo.

Apesar de não terem trabalhado com máquinas de calcular, a professora destaca a importância da calculadora ou da folha de cálculo na determinação destes valores, principalmente quando as percentagens utilizadas são mais complexas. Realça a importância da utilização da calculadora em problemas deste tipo de modo a permitir a destreza no manuseamento da máquina de calcular bem como na utilização da tecla percentagem (%) e destaca também a importância da folha de cálculo na organização dos registos com o uso de tabelas.

3. Teste Final

O teste final foi elaborado com 13 questões do tipo representação de números racionais de diferentes formas (pictórica, numeral decimal, fração, numeral misto e percentagem), ordenação, comparação e equivalência e com diferentes significados (parte-todo, operador, quociente, razão e medida) idênticas às do teste inicial mas com um grau de dificuldade superior para se poder identificar o grau de conhecimento e de consolidação que os futuros professores passaram a ter sobre os números racionais e, as estratégias que passaram a utilizar na resolução destes problemas após a discussão de alguns dos temas em que manifestavam dificuldades bem como identificar as dificuldades que ainda manifestam.

As questões 1 (quociente), 7 e 8 (operador), 9 (quociente) e 12 (razão) são problemas contextualizados nos diferentes significados dos números racionais e as restantes são problemas não contextualizados envolvendo os outros significados dos números racionais e abordando tópicos tais como a densidade dos números racionais (4 e 5), comparação e ordenação (2 e 10), reta numérica graduada e não graduada (11 e 14), construção e reconstrução da unidade (3 e 6) e cálculo mental (13).

Este teste foi realizado no dia 23 de Abril de 2012, na aula de Didática da Matemática, com a duração de uma hora e trinta minutos, tal como o teste inicial, e aplicado a 16 futuros professores pois faltaram os estudantes codificados com os números três e dezasseis para puderem participar no programa ERASMUS. A numeração dos alunos utilizada no teste inicial foi a que se considerou no teste final para que o mesmo aluno conservasse a numeração atribuída no primeiro teste.

De realçar ainda, que as não respostas às questões do teste final são sempre de estudantes que não participaram em todas as aulas em que foi debatido o tema dos Números Racionais e, por isso, o trabalho realizado por estes estudantes não foi regular, não tendo participado na exploração de alguns tópicos em que se tinha verificado que possuíam lacunas. Deste modo, não é surpreendente que continuem a revelar maiores dificuldades na compreensão e execução de algumas das tarefas propostas no teste final.

Capítulo 6

Desempenho dos futuros professores de 1.º ciclo

Neste capítulo far-se-á uma análise do desempenho evidenciado pelos futuros professores antes (teste inicial) e depois (teste final) da lecionação da unidade temática destacando as estratégias utilizadas e as dificuldades apresentadas na resolução dos problemas. Por fim, far-se-á uma análise comparativa com uma abordagem quantitativa do desempenho nos futuros professores nos dois testes realizados.

1. Teste Inicial

Neste ponto analisam-se os resultados apresentados pelos estudantes no teste inicial no que diz respeito a representações, comparação, ordenação e densidade de números racionais.

Representação de números racionais

As questões do teste inicial sobre representações de números racionais não negativos recaem sobretudo no significado parte-todo, sucedendo-se os significados operador, razão, quociente e medida[1]. Com estas questões pretende-se que os futuros professores utilizem as múltiplas representações do número racional bem como as convertam umas nas outras.

Significado parte-todo

[1] O significado medida é abordado a propósito do tópico densidade de números racionais.

As questões 1, 4, 5 e 14 tinham como objetivos (i) compreender e usar um número racional como parte-todo; (ii) compreender e representar números racionais de diferentes formas – percentagem, fração e numeral decimal; (iii) relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos; e (iv) reconstruir a unidade a partir das suas partes utilizando o significado parte-todo e as diferentes formas de representação – pictórica, fração, numeral decimal e percentagem.

A questão 1 referia-se à conversão de representações pictóricas em fração, numeral decimal e percentagem e verificou-se que a maioria dos estudantes tem facilidade em converter as representações pictóricas em fração mas revelaram maior dificuldade em convertê-las em numeral decimal e percentagem.

A primeira figura era constituída por um retângulo dividido em cinco partes estando três sombreadas. Para esta representação apenas nove dos respondentes apresentaram a resposta correta convertendo corretamente a representação pictórica em fração, em decimal e em percentagem, um apresenta todas as representações incorretamente e os restantes apresentam parcialmente respostas corretas (conversão em fração ou decimal ou percentagem). Estas respostas incorretas devem-se a erros na divisão entre os dois termos da fração, uma vez que não tinham acesso à calculadora para a conversão da representação fracionária para a representação em numeral decimal tal como se pode observar na resposta da estudante número um (fig.46)

Figura	Fração	Numeral decimal	Percentagem
	$\frac{3}{5}$ ✓	0,3 ✗	60% ✓

Figura 46 – Resposta da estudante 1 – Questão 1. a).

A figura dois apresenta dez círculos contidos num retângulo estando seis sombreados. Esta questão foi aparentemente mais fácil pois obtiveram-se treze respostas totalmente corretas, três respondem corretamente à representação fracionária e em percentagem e não respondem à representação em numeral decimal e apenas um responde corretamente à representação fracionária e em numeral decimal e converte incorretamente a percentagem para 6% não se conseguindo perceber a causa do erro cometido, tal como se pode observar na resposta da estudante número onze (fig. 47).

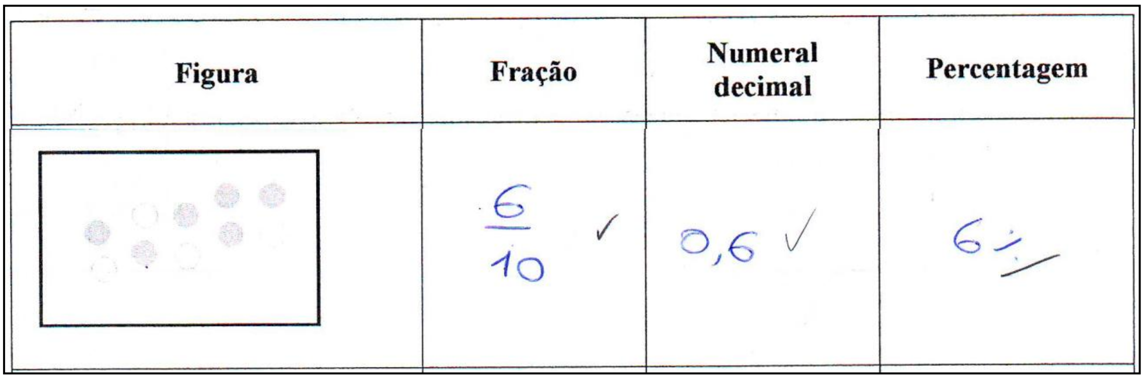


Figura	Fração	Numeral decimal	Percentagem
	$\frac{6}{10}$ ✓	0,6 ✓	6%

Figura 47 – Resposta da estudante 11 – Questão 1. b).

A figura três representa um círculo dividido em oito partes iguais das quais três estão sombreadas. Nesta questão apenas houve uma resposta totalmente correta, sendo que os restantes dezasseis estudantes convertem corretamente a representação pictórica em fracionária e as restantes conversões são realizadas incorretamente. Por exemplo, a estudante número cinco apresenta valores para a representação em numeral decimal e em percentagem que não têm qualquer tipo de relação e, por isso, não se consegue identificar a causa do erro cometido (fig. 48).

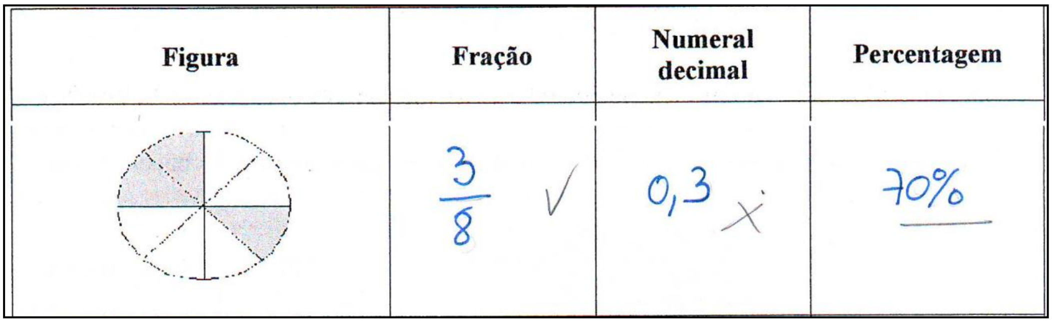


Figura	Fração	Numeral decimal	Percentagem
	$\frac{3}{8}$ ✓	0,3 ✗	70%

Figura 48 – Resposta da estudante 5 – Questão 1. c).

A figura quatro era representada por dois círculos divididos em oito partes, estando um totalmente sombreado e o outro com cinco partes sombreadas. Esta questão revelou-se difícil na interpretação pois alguns dos respondentes consideraram os dois círculos como um todo enquanto para os restantes alunos os dois círculos foram considerados como unidades independentes. Deste modo, verificou-se que treze dos futuros professores convertem incorretamente da representação pictórica para fracionária ($\frac{12}{15}$ – 1, $\frac{13}{3}$ – 1 e $\frac{13}{16}$ - 11), três representam corretamente na forma de numeral misto e um apresenta corretamente na forma $\frac{8}{8} + \frac{5}{8}$ mas não dá a solução final. Quanto às representações na forma decimal e percentagem verificou-se que oito apresentam incorretamente o numeral decimal e a percentagem (0,8=80%), seis não respondem à questão, um representa incorretamente o numeral decimal (0,1625) mas escreve corretamente a representação em percentagem e dois não respondem à representação em numeral decimal mas escrevem corretamente o valor na forma de percentagem.

A resposta apresentada por um dos estudantes (fig. 4) mostra que este assume os dois círculos como um todo e, por isso, considera que a representação em fração da figura deverá ser dada por 13 partes sombreadas em dezasseis e, com base nesse raciocínio, divide treze por dezasseis para definir a representação em numeral decimal e em percentagem, no entanto, não apresenta o valor correto da divisão obtendo o valor de 0,8 = 80% (fig. 49).

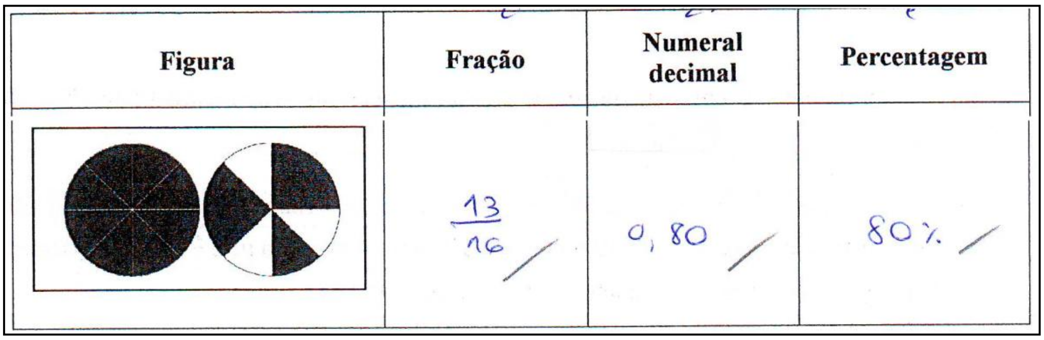


Figura 49 – Resposta da estudante 7 – Questão 1. d).

No que concerne às questões 4 e 5 relativamente à construção das partes dada a unidade verificou-se que a maioria dos estudantes não teve dificuldades na sua resolução demonstrando um entendimento na marcação das partes dado o todo. A questão 4 abordava a divisão de uma fortuna por quatro filhos em que o mais novo recebe 50%, o mais velho 25% e os restantes partilham 25%, pedindo-se para escolherem a opção que apresentava a representação correta (C). Nesta questão obtiveram-se catorze respostas corretas e apenas três escolheram a opção B (fig. 50) mostrando que interpretaram corretamente o problema dado.

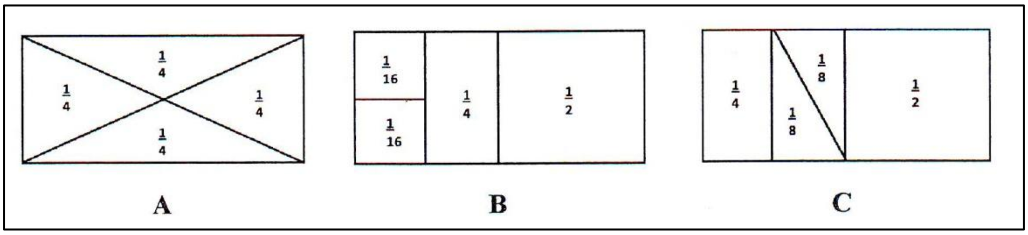


Figura 50 – Opções apresentadas na questão 4.

A questão 5 referia-se à representação pictórica de $\frac{3}{8}$ de um chocolate e foram registadas onze respostas corretas pois foram sombreados doze dos trinta e dois retângulos dados. Houve seis respostas incorretas que apresentam apenas nove retângulos sombreados pois ao dividir os trinta e dois retângulos em oito partes obtêm o valor três e, consequentemente pintam apenas nove dos trinta e dois retângulos. A estudante número nove divide a figura dada em oito partes iguais e, de seguida, sombreia três das oito partes dadas obtendo a fração pedida (fig. 51).

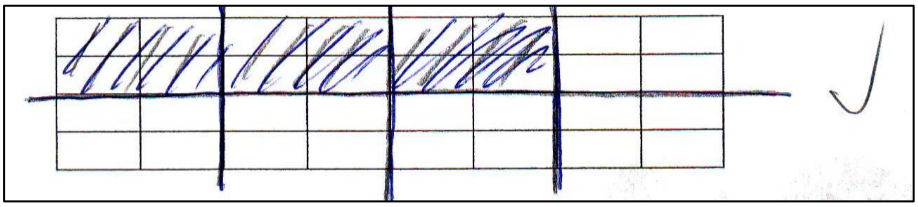


Figura 51 – Resposta da estudante 9 – Questão 5.

A questão 14 reportava-se à reconstrução da unidade apresentando cinco círculos que correspondem a $\frac{5}{2}$ e pedia-se que os respondentes indicassem i) a unidade; ii) $1\frac{1}{2}$ e iii) 75% da unidade, num contexto puramente matemático. Na primeira alínea desta questão apenas um estudante consegue representar a unidade pedida corretamente, quatro respondem incorretamente (1 apresenta apenas um círculo e 2 apresentam 5 círculos) e doze não respondem. Na segunda e terceira alíneas treze estudantes não respondem e os restantes respondem incorretamente na segunda alínea referem um círculo e metade do segundo círculo (2) ou 2 círculos e metade de um terceiro (2) e na última alínea $\frac{3}{4}$ de um círculo (1) e 3 círculos e metade de um quarto círculo (2). Pela resposta da estudante número dezassete verifica-se que esta considerou a unidade como um círculo e, de acordo com esse raciocínio, respondeu incorretamente às questões efetuadas (fig. 52).

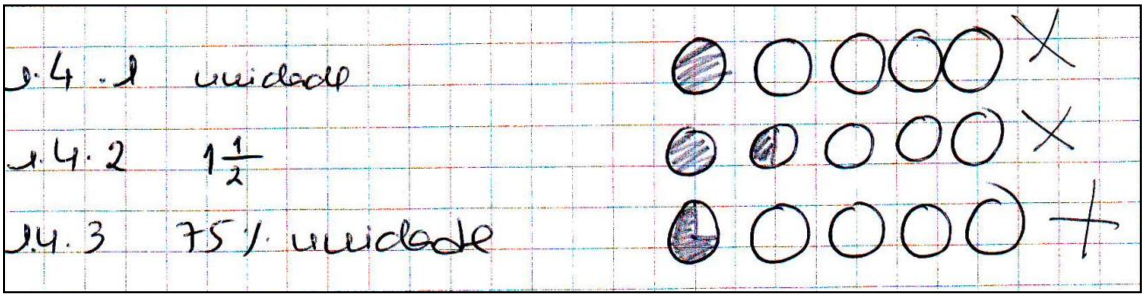


Figura 52 – Resposta da estudante 17 – Questão 14.

Significado operador

As questões 6, 11 e 15 foram elaboradas com os objetivos de (i) compreender e usar um número racional como operador; e (ii) reconstruir a unidade a partir das suas partes usando o significado operador e a representação em fração, numeral decimal e percentagem.

A questão 6 refere-se ao significado de operador utilizando-se múltiplas representações tais como fração, percentagem e numeral decimal.

6. Num inquérito realizado a 620 alunos de uma escola sobre qual o meio de transporte utilizado verificou-se que 0,30 do total vão de carro, 40% vão a pé e $\frac{1}{5}$ vão de autocarro.

6.1. Qual a percentagem de alunos que vai de autocarro?

6.2. Quantos alunos vão de carro?

6.3. Quantos são os alunos que não vão para a escola de nenhuma destas formas?

A alínea 6.1. tornou-se difícil para os respondentes pois apenas sete conseguiram converter corretamente a fração em percentagem, um apresenta na forma decimal e não em percentagem e três respondem incorretamente indicando 2% e 22% (2) ou o número de alunos e não a percentagem pedida (1) e seis não respondem.

A estudante número catorze usa o algoritmo da divisão para converter a representação em fração em numeral decimal e, de seguida, multiplica o valor encontrado na divisão por cem para o apresentar na forma de percentagem (fig. 53).

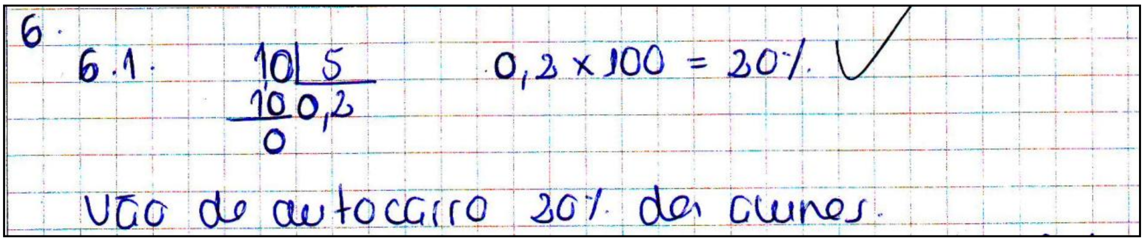


Figura 53 – Resposta da estudante 14 – Questão 6.1.

Na alínea 6.2. obtiveram-se cinco respostas corretas, em que os respondentes utilizam a regra de três simples na resolução do problema, três incorretas e nove em branco. A maioria dos estudantes não consegue arranjar nenhuma estratégia para relacionar a percentagem dada (30%) com o número de alunos que vai de carro. A estudante número cinco, tal como outros, utiliza a regra de três simples na resolução desta questão, não se verificando outras estratégias para solucionar o problema (fig. 54).

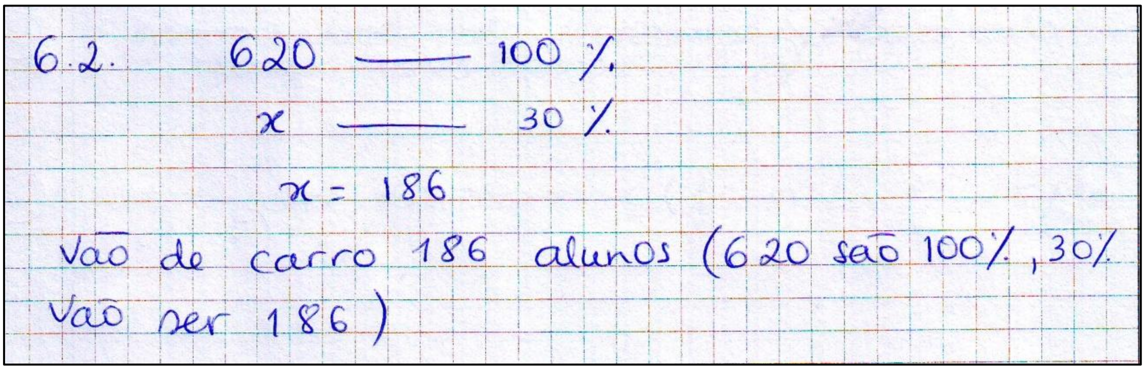
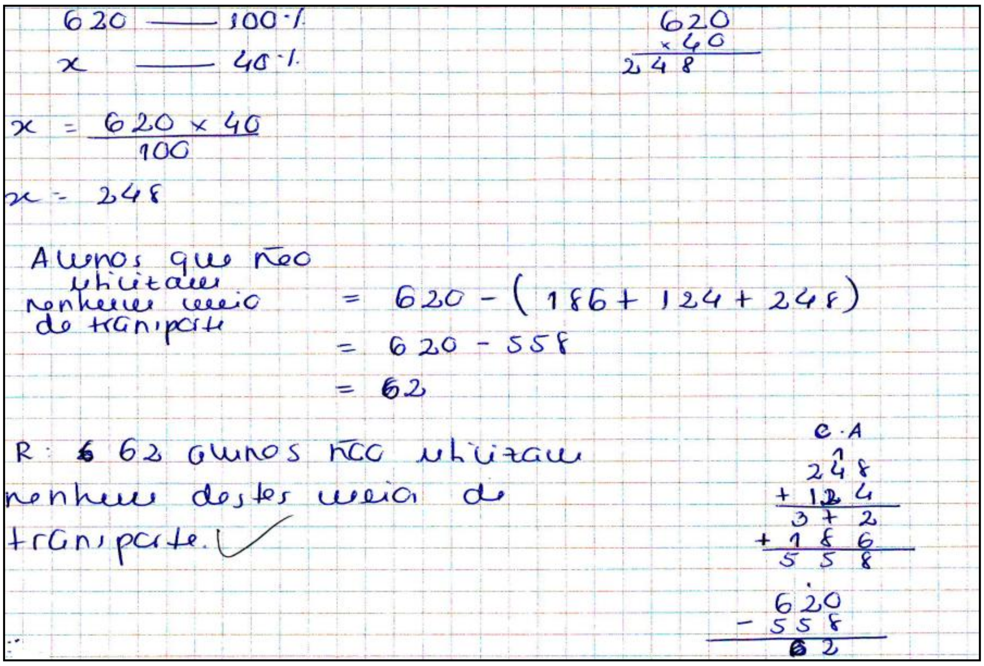


Figura 54 – Resposta da estudante 5 – Questão 6.2.

Na alínea 6.3, foram obtidas cinco respostas corretas pois percebem que os alunos que não utilizam qualquer tipo de transporte correspondem a 10% do total, cinco respondem incorretamente pois indicam o número de alunos que andam a pé e não os que não utilizam nenhum dos transportes referidos e sete não respondem. Mais uma vez a estudante número catorze recorre à regra de três simples e aos algoritmos das operações para dar resposta à questão efetuada (fig. 55).


620 —— 100%

x —— 40%

620 × 40 = 248

$x = \frac{620 \times 40}{100}$

x = 248

Alunos que não utilizam nenhum meio de transporte = 620 − (186 + 124 + 248)
= 620 − 558
= 62

R: 62 alunos não utilizam nenhum destes meios de transporte.

C.A

248 + 124 = 372

372 + 186 = 558

620 − 558 = 62

Figura 55 – Resposta da estudante 14 – Questão 6.3.

As respostas apresentadas nas questões 6.1 e 6.3 são da estudante número catorze pois resolve a questão identificando todos os processos utilizados e, deste modo, é possível analisar as estratégias utilizadas.

A estudante número dezasseis apresenta uma resposta incorreta pois após retirar os alunos que vão de carro e de autocarro concluiu que os restantes vão todos a pé e, deste modo, não identifica os alunos que não vão para a escola por nenhum dos modos referidos no problema (pé, carro e autocarro) (fig. 56).

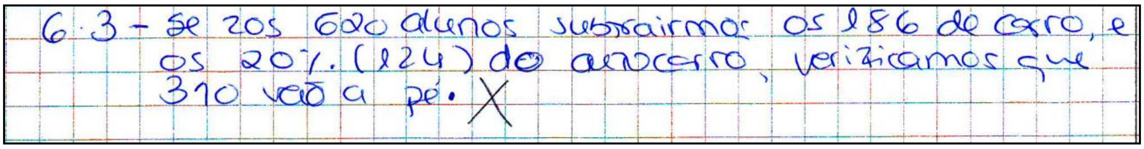

6.3 - Se aos 620 alunos subtrairmos os 186 de carro, e os 20%. (124) do autocarro, verificamos que 310 vão a pé.

Figura 56 – Resposta da estudante 16 – Questão 6.3.

Na questão 11 os estudantes deveriam construir a unidade (lotação máxima de um avião) sabendo uma parte da sua ocupação e este problema foi de difícil resolução para quinze deles: onze não respondem e quatro referem incorretamente 150 lugares pois consideram $\frac{5}{6}$ = 80% (3) e um refere 132 lugares sem apresentar cálculos. Apenas se obtiveram duas respostas corretas e uma delas sem apresentação dos cálculos efetuados. A estudante número dezassete representa pictoricamente o avião dividido em seis partes e identifica qual o número de passageiros que deverá corresponder a cada parte utilizando o algoritmo da divisão e, de seguida, identifica corretamente o valor solicitado (fig. 57).

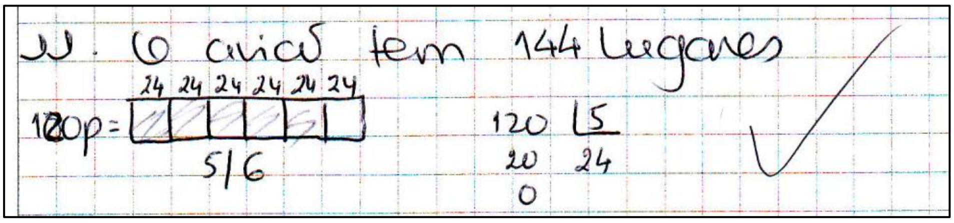


Figura 57 – Resposta da estudante 17 – Questão 11.

Na questão 15 eram apresentados números racionais em várias representações, sendo solicitados cálculos diretos. Nesta questão, cinco estudantes não responderam a qualquer uma das alíneas e as restantes respostas em branco não são sempre dos mesmos. O número elevado de respostas em branco na questão 15 prende-se com a má gestão de tempo que os estudantes fizeram na realização deste teste e, por isso, não o conseguiram concluir no tempo estipulado.

Todas as respostas selecionadas são da estudante número catorze pois é a que apresenta todas as estratégias utilizadas no seu cálculo o que facilita a análise da sua resposta.

Na alínea 15.1. era pedido que calculassem 20% de 10 e obtiveram-se dez respostas corretas, duas incorretas, pois os estudantes respondem 2,05, e cinco respostas em branco. É curioso verificar que a estudante número catorze recorre à regra de três simples para calcular o valor solicitado (fig. 58). As restantes respostas corretas não mostram a estratégia utilizada na resolução desta alínea não se percebendo se também utilizaram a regra de três simples para obtenção do valor pedido.

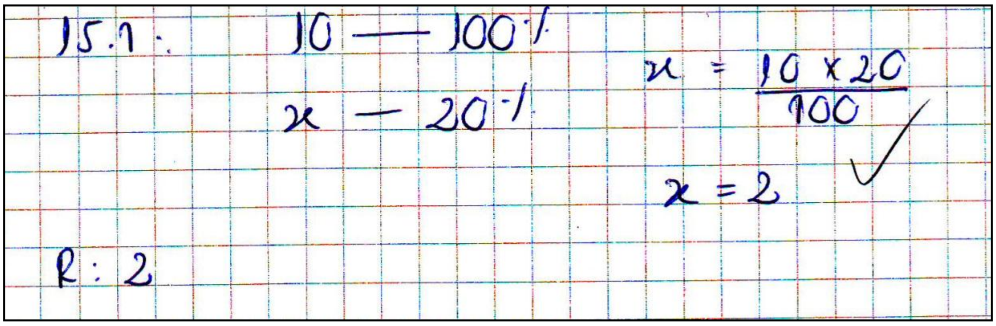


Figura 58 – Resposta da estudante 14 – Questão 15.1.

Na alínea 15.2. pedia-se a terça parte de 36 e verificou-se que foram dadas nove respostas corretas, uma incorreta pois apresenta corretamente $\frac{36}{3}$ mas, de seguida, é dado um resultado incorreto e sete respostas em branco. A estudante número catorze percebe o significado "da terça parte" e, por isso, representa-o corretamente como $\frac{36}{3}$ e indica corretamente o valor solicitado não se identificando o modo como calculou esse valor (fig. 59).

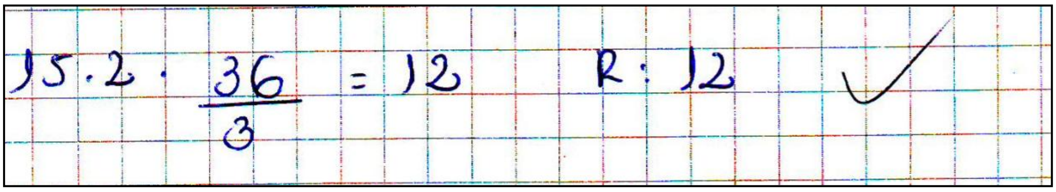


Figura 59 – Resposta da estudante 14 – Questão 15.2.

A alínea 15.3. solicitava o cálculo de $\frac{7}{5} \times 10$, tendo-se obtido seis respostas corretas, com os valores 14 ou $\frac{70}{5}$, três incorretas, uma vez que indicam os valores $\frac{350}{5}$, 140, $\frac{14}{10}$ e oito respostas em branco. A estudante número catorze escreve que $\frac{7}{5} = 1{,}4$ e define o número de vezes que sete é maior do que cinco e, de seguida, multiplica-o por cem em vez de dez para encontrar o valor pedido. Devido à utilização de um valor incorreto o resultado está errado, no entanto, a estudante utiliza uma estratégia correta de resolução (fig. 60).

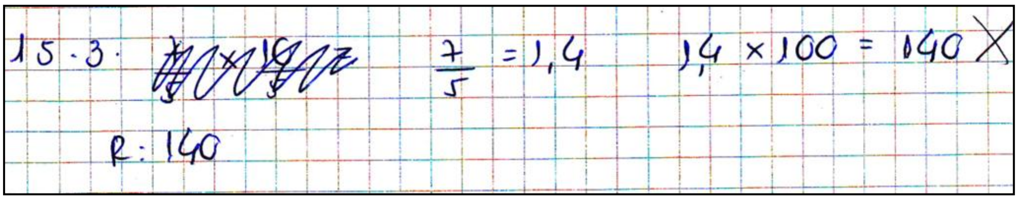


Figura 60 – Resposta da estudante 14 – Questão 15.3.

Na última alínea deste exercício pedia-se que obtivessem o valor de $0{,}5 \times 180$, e obtiveram-se seis respostas corretas, três incorretas pois os valores calculados foram $\frac{350}{5}$, 140, $\frac{14}{10}$ e sete respostas em branco. As respostas corretas estão na facilidade do cálculo e na interpretação do significado de 0,5 que a maioria fez corresponder a "metade de" e, por isso, identificaram corretamente o valor pedido, as duas respostas incorretas prendem-se com uma conversão incorreta da fração obtida $\frac{4500}{5} = 270$. A estudante número catorze escreve acertadamente o valor solicitado não se percebendo a estratégia utilizada na sua resolução (fig. 61).

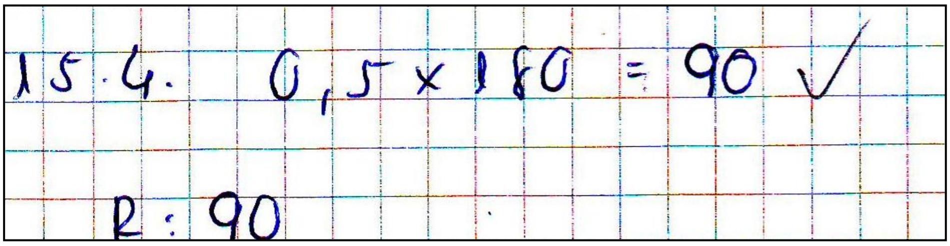


Figura 61 – Resposta da estudante 14 – Questão 15.4.

Significado razão

Os objetivos da questão 3 eram (i) compreender e usar um número racional como razão; (ii) compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo; e (iii) compreender uma relação entre valores de duas grandezas diferentes utilizando o significado razão e as formas de representação verbal e fração.

Na questão 3 pedia-se aos estudantes para identificarem o significado da razão $\frac{3}{5}$ na representação pictórica dada. Apenas quatro referem a razão entre rapazes e raparigas, no entanto, cinco futuros professores referem ainda a razão entre raparigas com o braço direito para cima e o número total de raparigas e os restantes não conseguem identificar uma razão com significado, sendo que quatro referem a razão entre raparigas com fita azul ou saia azul (pintaram) e quatro não respondem.

Nesta questão a razão mais evidente seria a razão entre rapazes e raparigas no entanto, foi identificada a razão entre as raparigas com o braço direito para cima e as restantes raparigas e também foi considerada como uma resposta possível (fig. 62).

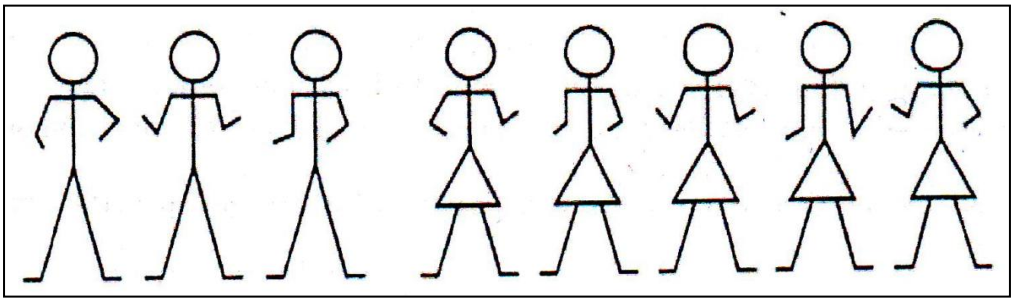


Figura 62 – Representação pictórica da questão 3.

Significado quociente

A questão 13 tinha por objetivo (i) compreender e usar um número racional como quociente utilizando a fração como forma de representação do número racional. Nesta questão referente à partilha equitativa as respostas foram consideradas incorretas (9) pois os respondentes apresentaram o valor $\frac{4}{3}$ pois dividiram o número total de pizas por 15 e não por 16 devido à má interpretação da pergunta, um responde $\frac{15}{20}$ não entendendo que a partilha é de vinte pizas por dezasseis amigas e sete não respondem. A estudante número catorze percebe que tem de dividir o número total de pizas pelas raparigas, embora não considerando corretamente o número total de amigas (fig. 63). No entanto, faz uma leitura incorreta do numeral decimal obtido pois conclui que cada uma das amigas comeu uma piza e três fatias relacionando o 0,3 a três fatias e não a três décimos de uma piza.

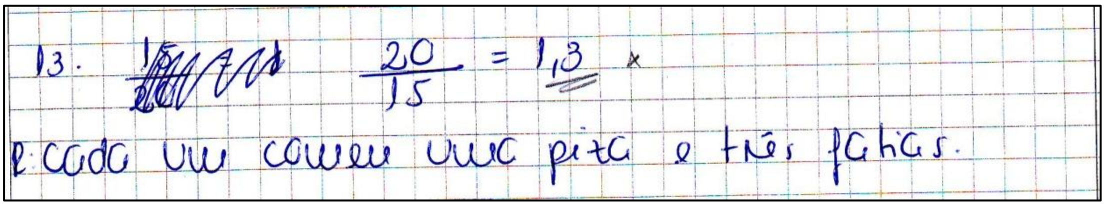


Figura 63 – Resposta da estudante 14 – Questão 13.

Significado medida

A questão 8 refere-se à identificação de números racionais na forma de fração ou de numeral decimal com o recurso à reta numérica e é relativa ao valor de posição de um número racional utilizando a reta numérica para identificar o número racional pedido. Esta questão torna-se de difícil resolução quando as representações aparecem na forma fracionária e a divisão dos termos da fração não é exata (dízima infinita periódica) e mais fácil quando as representações pedidas são frações simples ou a divisão dos termos da fração é exata (dízima finita).

Na reta A cada unidade está dividida em 3 partes e o valor pedido era $\frac{4}{3}$. Nesta questão foram validadas quatro respostas corretas (uma na forma de fração e as restantes na forma de numeral decimal – 1,33) e nove incorretas pois referem 1,1; 1,25 e 1,3. Na reta B cada unidade está dividida em 6 partes e o valor pedido era $\frac{4}{6}$ e obtiveram-se uma resposta correta e doze incorretas pois foram referidos os valores 0,16; 0,4; 0,65; 0,7 e 0,8. A reta C apresenta a unidade dividida em 2 partes sendo o valor pedido $\frac{1}{2}$. Nesta questão, sendo bastante mais fácil, foram obtidas doze respostas corretas ($\frac{1}{2}$ e 0,5) e uma resposta incorreta (0,1). As retas D e E estão divididas em 10 partes e os valores pedidos são respetivamente 1 e 1,2. Estes dois casos também foram de fácil resolução pois obtiveram-se para a reta D catorze respostas corretas e uma incorreta ($\frac{10}{11}$) e para a reta E quinze respostas corretas.

Na maioria das vezes os estudantes recorrem à divisão dos termos constituintes da fração na representação dos números racionais apresentando os valores pedidos na forma de numeral decimal, mesmo que este venha na forma de dízima infinita periódica e, deste modo, arredondam os valores encontrados tal como se mostra na resposta do estudante número quatro. Na reta B, por exemplo, o estudante número quatro não apresenta corretamente o valor solicitado pois erra a divisão entre os termos constituintes da fração e não percebe que o valor a obter deveria ser maior que 0,5 (fig. 64.).

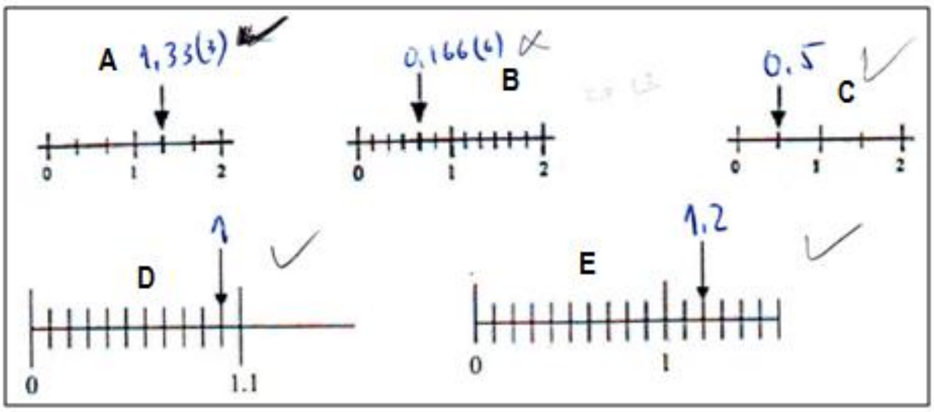


Figura 64 – Resposta do estudante 4 – Questão 8.

A estudante número onze opta por identificar os números racionais pedidos todos na forma de fração no entanto, erra o resultado da reta D por considerar que a unidade está dividida em onze partes iguais o que o leva a indicar incorretamente o valor solicitado (fig. 65.).

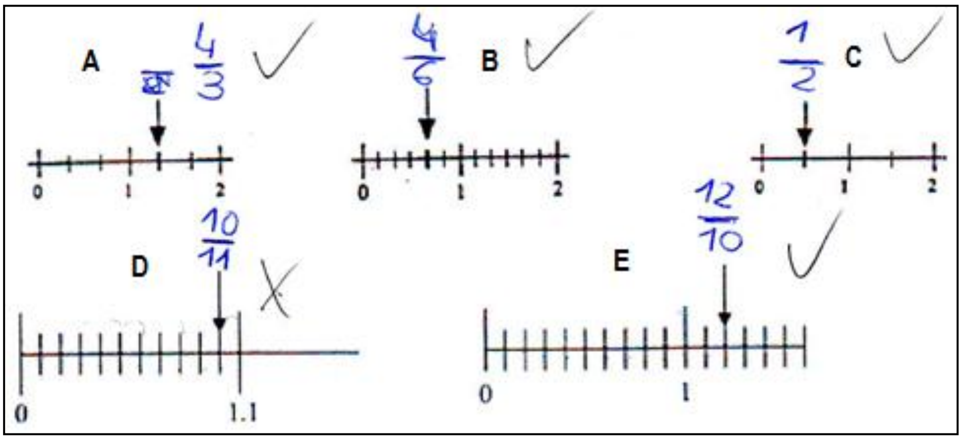


Figura 65 – Resposta da estudante 11 – Questão 8.

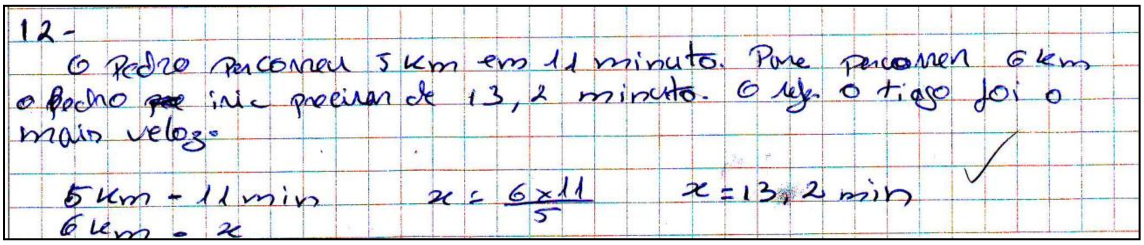
Comparação, ordenação e equivalência de números racionais

As questões de comparação, ordenação e equivalência estão distribuídas pelos significados razão na questão 12 em que se pede para comparar a razão entre a distância e o tempo gasto e com maior destaque pelo significado medida na questão 2 relativa à ordenação de números racionais nas formas de fração e numeral decimal e na questão 7 relativa comparação de dois números racionais na forma de numeral decimal e de fração com numeradores iguais, denominadores iguais ou numeradores e denominadores diferentes. Nas questões de comparação e ordenação de números racionais na forma de fração com numeradores e denominadores diferentes está também subjacente o conceito de equivalência de frações para a correta comparação de números racionais envolvidos. Na comparação e ordenação de números racionais é possível recorrer à utilização da reta numérica para localizar e posicionar os números e compará-los.

Significado razão

A questão 12 pretendia que os estudantes identificassem o amigo mais veloz por comparação da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto e apenas dois formandos conseguiram responder corretamente à questão: um efetua corretamente os cálculos mas, não responde à questão, três efetuam corretamente os cálculos mas não justificam de forma correta, cinco respondem incorretamente referindo que se deslocam à mesma velocidade (4) e o outro calcula a razão corretamente mas escolhe incorretamente o valor e seis estudantes não respondem. A estudante número treze apresentou uma estratégia diferente dos colegas, calculando o tempo que o Pedro demoraria para percorrer 11 km e compara-o com o tempo gasto pelo Tiago, indicado no enunciado do problema, e concluiu qual dos rapazes é o mais rápido (fig. 66). No cálculo do tempo necessário para percorrer 6 km a estudante utiliza a regra de três simples.

Figura 66 – Resposta da estudante 13 – Questão 12.



Significado medida

As questões 2, e 7 eram do tipo representação, ordenação, comparação e equivalência de números racionais e têm como objetivos (i) compreender e usar um número racional como medida; (ii) localizar e posicionar na reta um número racional; (iii) comparar uma grandeza com outra tomada como unidade; e (iv) comparar e ordenar números racionais representados de formas diferentes, empregando o significado medida e as diferentes formas de representação – pictórica, verbal, fração, numeral decimal e percentagem.

A questão 2 referia-se à comparação e ordenação de números racionais e os resultados mostraram que os futuros professores não apresentam grandes dificuldades na comparação e ordenação de números racionais na forma de numerais decimais mas que o mesmo não se verifica quando se trata da comparação e ordenação entre representações fracionárias e entre representações fracionárias e decimais.

Assim, na comparação de numerais decimais foram contabilizadas dezasseis respostas corretas e uma resposta incompleta pois ordena os numerais por ordem crescente em vez da ordem decrescente que era pedida. Já na ordenação de números racionais na forma de fração obtiveram-se apenas cinco respostas corretas, sete incorretas e cinco respostas em branco. Na ordenação de números racionais na forma de fração e de numeral decimal verifica-se que três estudantes ordenam os números racionais não fazendo referência ao $\frac{3}{4}$ (apenas colocam o 0,75), seis ordenam os números racionais colocando 0,75 seguido de $\frac{3}{4}$ não fazendo referência à equivalência das representações, sete não respondem e um responde incorretamente pois não consegue ordenar os diferentes números racionais. Os estudantes não recorreram à reta numérica para localizar e posicionar as frações dadas nem às regras de comparação entre números fracionários e, por isso, tiveram grandes dificuldades na sua ordenação.

A estudante número dezasseis não revelou dificuldades na comparação de números racionais na forma de numeral decimal mas revelou dificuldades na comparação de números racionais na forma de fração pois não se apercebeu que $\frac{7}{4}$ é superior a de $\frac{3}{2}$ e, no caso, da comparação de números racionais na forma de fração e de numeral decimal não reconhece que 0,75 é igual a $\frac{3}{4}$ (fig. 67).

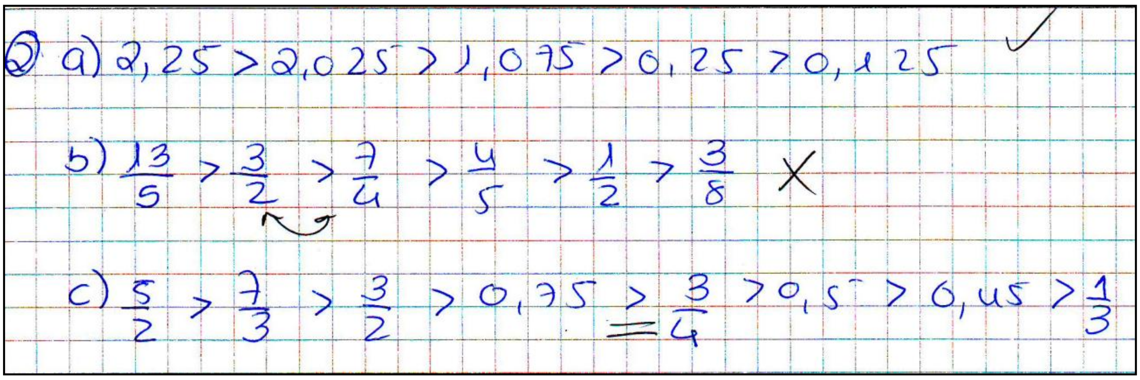
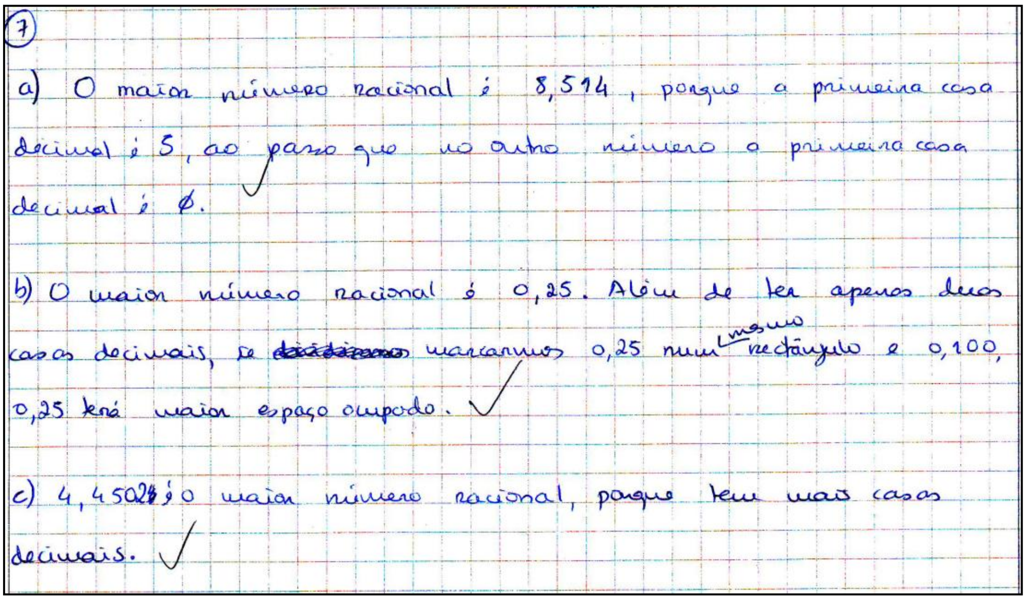


Figura 67 – Resposta da estudante 16 – Questão 2.

Na questão 7 solicitava-se a comparação entre duas representações decimais, e entre duas fracionárias com o mesmo denominador, com o mesmo numerador e com numerador e denominador diferente. Constatou-se, novamente, que os estudantes têm facilidade em fazer comparações entre representações decimais e justificar as suas opções mas a situação inverte-se quando a comparação ocorre entre representações fracionárias e os argumentos utilizados para as suas opções não são os mais corretos uma vez que referem *"quanto menor o numerador maior é o número",* depois de utilizarem o argumento correto *"quanto maior o denominador menor o número"*. A maioria dos alunos não interpretou corretamente esta questão pois apenas identificou o maior dos números racionais representados e, consequentemente, apenas oito alunos responderam a todas as alíneas desta questão.

Na alínea a) houve dificuldade em identificar o maior dos números racionais (8,514) tendo-se obtido seis respostas corretas (3 justificações corretas e 3 por consideraram ser o maior de todas as opções) e cinco respostas corretas sem apresentação de justificação, havendo ainda seis alunos que não respondem. Como os números apresentados estão na forma decimal, os formandos que responderam não tiveram quaisquer dificuldades em identificar que o maior dos números seria o que apresentasse um valor superior numa mesma posição.

Nas alíneas de comparação de números na forma decimal, obtiveram-se na alínea b), oito respostas corretas das quais três foram justificadas e cinco não justificadas. Na alínea c) foram identificadas cinco respostas corretas sem justificação e três incorretas pois consideram que os números dados são iguais pois têm duas casas decimais iguais. As alíneas b) e c) tiveram um menor número de respostas corretas pois os estudantes não perceberam que a comparação era feita em cada uma das alíneas e não com todos os números apresentados. A estudante número 15 compara cada dois números racionais e identifica corretamente o maior, uma vez que compara as respetivas casas decimais, o espaço possível ocupado por cada número numa representação pictórica ou a quantidade de casas decimais (fig. 68).


7

a) O maior número racional é 8,514, porque a primeira casa decimal é 5, ao passo que no outro número a primeira casa decimal é 0.

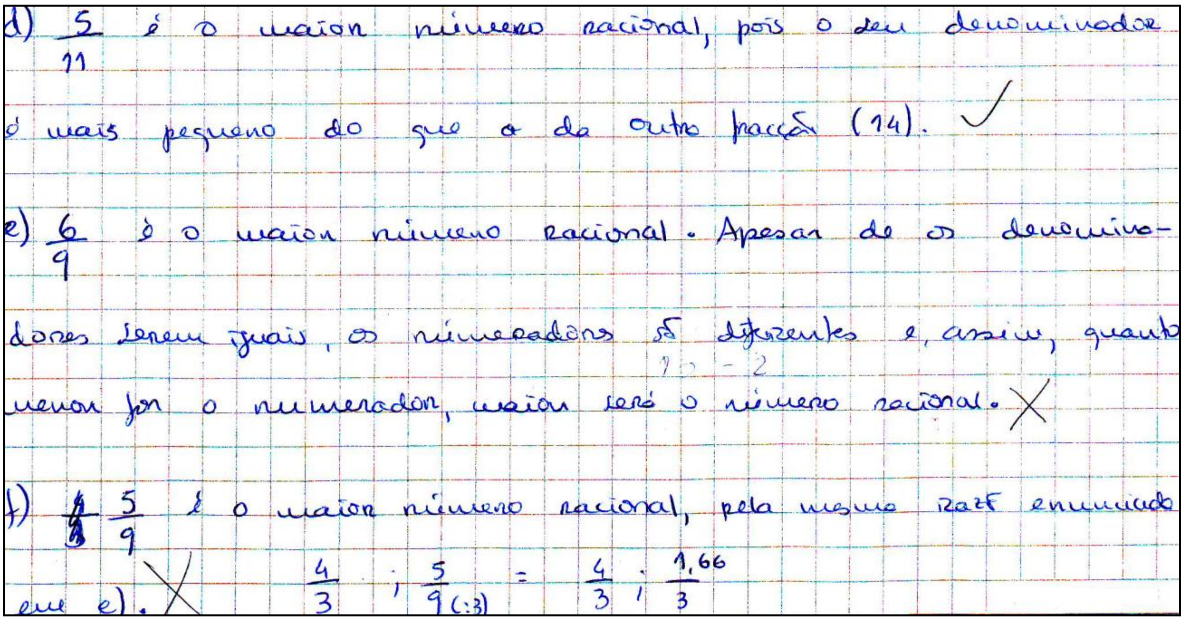
b) O maior número racional é 0,25. Além de ter apenas duas casas decimais, se marcarmos 0,25 num mesmo rectângulo e 0,100, 0,25 terá maior espaço ocupado.

c) 4,4502 é o maior número racional, porque tem mais casas decimais.

Figura 68 – Resposta da estudante 15 – Questão 7a), b) e c).

Nas alíneas d), e) e f) era pedida a comparação entre dois números racionais na forma de fração e verificou-se que na alínea d) obtiveram-se sete respostas corretas, duas com justificação correta pois referem que quanto maior o denominador menor o número e cinco sem justificação e uma respostas incorreta. Na alínea e) tiveram-se cinco respostas corretas, das quais quatro não foram justificadas, e três respostas incorretas das quais duas apresentam o argumento da alínea d) – quanto menor o numerador maior é o número. A alínea f) apresenta quatro respostas corretas das quais apenas uma identifica um argumento válido através da divisão do numerador pelo denominador) e quatro respostas incorretas com o argumento apresentado na alínea e).

A estudante número 15 utiliza o argumento correto da alínea d) para justificar as alíneas e) e f) e, desta forma, responde incorretamente pois as representações fracionárias das alíneas e) e f) não são do mesmo tipo da representação fracionária apresentada na alínea d), uma vez que na alínea d) são apresentadas duas frações com o mesmo numerador e diferentes denominadores, na alínea e) duas frações com o mesmo denominador e na alínea f) duas frações com diferentes numeradores e denominadores (fig. 69). As alíneas e) e f) são justificadas com o argumento de quanto menor o numerador maior é o número e, deste, modo, a estudante simplifica as duas frações para ficarem com o mesmo denominador e efetua a respetiva comparação.


d) $\frac{5}{11}$ é o maior número racional, pois o seu denominador é mais pequeno do que o da outra fracção (14).

e) $\frac{6}{9}$ é o maior número racional. Apesar de os denominadores serem iguais, os numeradores são diferentes e, assim, quanto menor for o numerador, maior será o número racional.

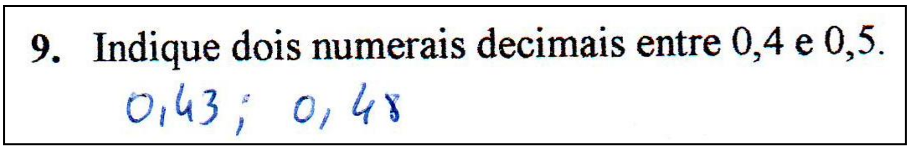
f) $\frac{5}{9}$ é o maior número racional, pela mesma razão enunciada em e). $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{9 (:3)}$ = $\frac{4}{3}$; $\frac{1,66}{3}$

Figura 69 – Resposta da estudante 15 – Questão 7d), e) e f).

Densidade de números racionais

As questões 9 e 10 referiam-se à densidade de números racionais na forma de numeral decimal e na forma fracionária, tendo os alunos revelado maior facilidade com a primeira destas representações.

A questão 9 pedia para que fossem identificados dois numerais compreendidos entre 0,4 e 0,5 e verificou-se que onze estudantes indicam dois numerais decimais corretos e um apresenta apenas um numeral decimal no intervalo solicitado e cinco não respondem. O estudante número quatro mostra não ter dificuldade na representação de números racionais na forma decimal, no entanto, não mostra a estratégia utilizada para dar a resposta (fig. 70).


9. Indique dois numerais decimais entre 0,4 e 0,5.

0,43 ; 0,48

Figura 70 – Resposta do estudante 4 – Questão 9.

Na questão 10 os futuros professores apresentam maiores dificuldades na identificação de um número racional na forma de fração entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$ pois apenas se verificaram três respostas corretas ($\frac{7}{10}$). Um estudante refere que existe uma fração entre as duas dadas mas não consegue dar um exemplo, dois referem que não existe nenhuma fração entre as duas dadas, um apresenta uma fração incorreta e dez não resolvem a questão.

O estudante número quatro recorre à divisão dos termos constituintes da fração para a converter em numeral decimal e dar um exemplo de um número racional entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$ evidenciando que reconhece a fração como número partitivo (fig. 71).

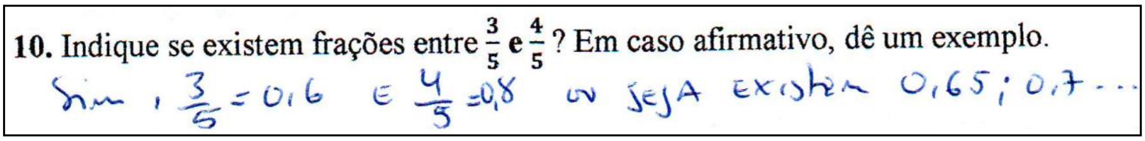

10. Indique se existem frações entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$? Em caso afirmativo, dê um exemplo.
Sim, $\frac{3}{5} = 0{,}6$ e $\frac{4}{5} = 0{,}8$ ou seja existem 0,65; 0,7...

Figura 71 – Resposta do estudante 4 – Questão 10.

Síntese Teste Inicial

Da análise das respostas obtidas no teste inicial verifica-se que alguns estudantes tiveram dificuldades na leitura e interpretação dos enunciados dos problemas apresentados bem como nos procedimentos e trabalho a realizar, pois muitas vezes não conseguiram definir estratégias ou sugerir hipóteses de resolução evidenciando também dificuldades na compreensão de determinados tópicos e conceitos abordados no teste.

Relativamente às representações, os estudantes demostram facilidade na conversão da representação pictórica em fração e maior dificuldade na conversão da representação em fração em decimal ou percentagem e vice-versa, apesar de terem uma noção de fração como número partitivo. Recorrem por vezes, à representação pictórica para apoiar as suas resoluções mas, de seguida, apresentam as respostas noutros tipos de representação.

Mostram facilidade em construir as partes a partir da unidade nas representações pictórica, fracionária e decimal e maior dificuldade na reconstrução da unidade a partir das diferentes partes no mesmo tipo de representações quer sejam quantidades contínuas ou discretas.

A maioria dos estudantes recorre à divisão dos termos da fração ou ao algoritmo da divisão para o converter num numeral decimal de modo a compreender o número racional e poucas vezes utiliza as frações equivalentes para simplificar frações próprias e impróprias adequadas aos contextos dos problemas apresentados. Na conversão em percentagem os estudantes recorrem à divisão dos termos da fração e à multiplicação do valor decimal obtido por cem em vez de determinarem uma fração decimal equivalente à dada.

Na identificação de números racionais com auxílio da reta numérica verifica-se que os estudantes têm maior facilidade quando os números racionais aparecem na forma de numerais decimais ou na forma de frações próprias ou impróprias simples que possam ser convertidas em dízimas finitas e maior dificuldade quando as frações são mais complexas ou não possam ser convertidas em dízimas finitas evidenciando dificuldades de compreensão da noção quantitativa da fração.

Quanto à comparação e ordenação de números racionais verifica-se uma maior facilidade em comparar e ordenar números racionais na forma de numeral decimal pois conseguem arranjar formas de comparação tais como comparação entre décimas, centésimas e milésimas. Revelam maior dificuldade em comparar números racionais na forma fracionária ou os dois tipos de representações em simultâneo pois não conseguem arranjar formas de comparação entre os dois tipos de representação ou no caso das representações em fração utilizam argumentos inválidos para comparar frações com o mesmo numerador ou com o mesmo denominador.

Os estudantes que comparam e ordenam corretamente os números racionais nas suas diferentes representações são aqueles que convertem todos os números dados para a representação decimal e nessa forma ordenam-nos. Esta estratégia formal é a mais utilizada pelos estudantes na ordenação e na comparação dos números racionais e a menos usada é a transformação em frações equivalentes com denominadores iguais.

No que concerne à densidade dos números racionais verifica-se uma maior facilidade em identificar números racionais entre dois numerais decimais do que entre dois números fracionários pois no primeiro caso os estudantes recorrem ao aumento do número de casas decimais e identificam valores entre os dados. No caso dos números fracionários, apenas alguns estudantes recorrem à divisão entre os termos da fração para a converterem em numeral decimal e poderem identificar números racionais entre os dados, a maioria não identifica qualquer tipo de estratégia para resolver o problema proposto.

Na maioria das questões os estudantes utilizam estratégias formais como a regra de três simples para converter números racionais na forma de percentagem para fração e vice-versa, como operadores ou ainda no significado razão demonstrando que há um formalismo matemático muito enraizado na formação destes futuros professores. Raramente se verificam na resolução das questões estratégias informais mais conducentes com as estratégias utilizadas pelos alunos do 1.º ciclo tal como o recurso às representações pictóricas ou outras para solucionar os problemas dados.

Os estudantes revelam maior destreza nos significados medida, operador e parte-todo pois foram mais trabalhadas as representações decimais e fracionárias simples e maior dificuldade nos significados razão e quociente pois as questões relativas a estes últimos significados foram as que obtiveram maior número de respostas em branco ou incorretas. As percentagens obtidas para todos os significados são inferiores a 50% o que evidencia que a maioria dos estudantes apresenta dificuldades na compreensão dos tópicos abordados sobre os números racionais.

No significado quociente, revelam alguma dificuldade na representação em fração, de uma situação de partilha equitativa, a partir da linguagem verbal pois demostram dificuldade na interpretação dos termos usados no enunciado e não no conceito propriamente dito. A maioria dos estudantes percebe que, numa situação de partilha equitativa, deverá dividir o número de objetos ou objeto pelo número de pessoas envolvidas, no entanto, algumas vezes manifestam dificuldades em compreender os resultados obtidos.

Nos significados razão e operador os estudantes demonstram algumas dificuldades pois mostram-se menos proficientes em representar uma razão ou justificar com argumentos válidos essa razão bem como compará-las. Manifestam dificuldades em usar os números racionais como operador pois erram com facilidade o cálculo direto quando os números racionais aparecem na forma de fração, numeral decimal, percentagem ou até linguagem verbal.

As dificuldades identificadas em todos os tópicos abordados no teste inicial foram colocadas nas fichas de trabalho a propor aos estudantes na unidade temática e antes do teste final para que possam ser trabalhadas profundamente e com o objetivo de superar as dificuldades diagnosticadas.

Após a realização deste teste é possível comprovar que os números racionais são um tema complexo e de difícil compreensão para a maioria dos futuros professores de 1.º ciclo.

2. Teste Final

Neste ponto examinam-se os resultados apresentados pelos estudantes no teste final (anexo 9) no que diz respeito a representações, comparação, ordenação e densidade de números racionais.

Representação de números racionais

As questões sobre representação de números racionais são 3 e 6 no significado parte-todo, 7, 8 e 13 no significado operador, 1.1 e 9 no significado quociente e 14 no significado medida.

Significado parte-todo

As questões 3 e 6 visavam os seguintes objetivos de aprendizagem (i) compreender e usar um número racional como parte-todo; (ii) compreender e representar números racionais de diferentes formas – percentagem, fração e numeral misto; (iii) relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos; e (iv) reconstruir a unidade a partir das suas partes utilizando o significado parte-todo e as diferentes formas de representação – pictórica, fração, numeral decimal e percentagem.

A questão 3 referia-se à conversão de uma representação de um número racional em fração ($\frac{3}{4}$) para uma representação pictórica num hexágono. Verificou-se que todos os estudantes representaram corretamente o valor pedido, dividindo a figura em quatro partes iguais e sombreando três dessas quatro partes, tal como se pode observar na resposta da aluna número catorze (fig. 72).

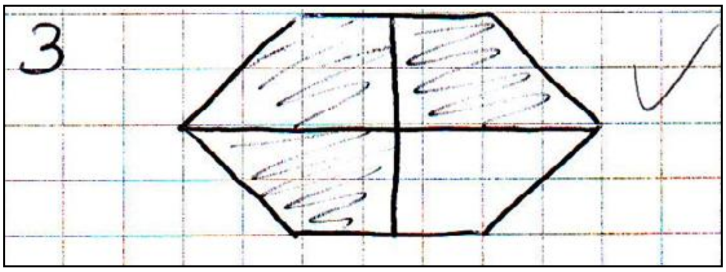


Figura 72 – Resposta da estudante 14 – Questão 3.

A questão 6 reportava-se à reconstrução da unidade, apresentando oitenta e quatro retângulos que correspondem a $\frac{7}{5}$, num contexto puramente matemático. Na primeira alínea (6.1.) em que era pedido o valor da unidade foram identificadas treze respostas corretas (60 retângulos), duas respostas incompletas pois não apresentam o número de quadrados correspondentes à unidade e uma resposta incorreta.

A estudante número seis responde corretamente à primeira questão pois divide o conjunto dos retângulos dados em sete partes iguais e, de seguida, multiplica o resultado encontrado por 5 para encontrar a unidade pedida (fig. 73), percebendo que à unidade correspondem 5 partes de 5.

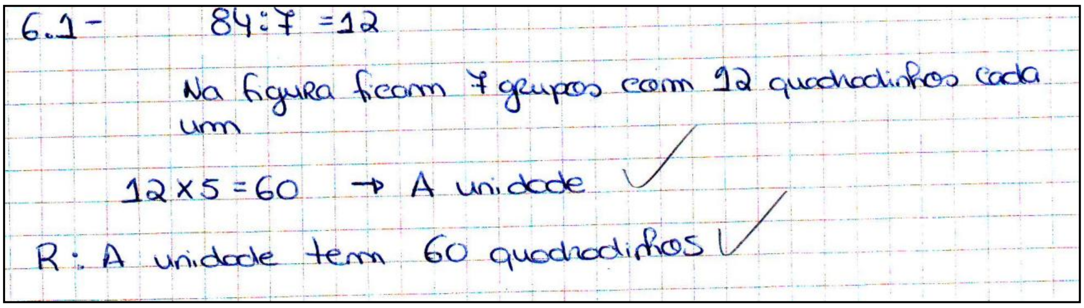


Figura 73 – Resposta da aluna 6 – Questão 6.1.

Na questão 6.2 era pedido que representassem $1\frac{1}{3}$ na figura apresentada, havendo dez dos formandos que indicaram a resposta correta (80 retângulos) e seis que responderam incorretamente pois determinaram $\frac{1}{3}$ dos retângulos que sobraram e não $\frac{1}{3}$ da unidade representada na alínea anterior, como se pode observar na resposta dada pela estudante número seis (fig. 74). Esta estudante não responde corretamente à questão pois divide o total de quadrados que sobraram em três partes iguais e de seguida adiciona ao número de quadrados correspondentes a uma unidade a terça parte dos quadrados restantes e obtém um valor incorreto, demonstrando dificuldades na interpretação e compreensão da questão.

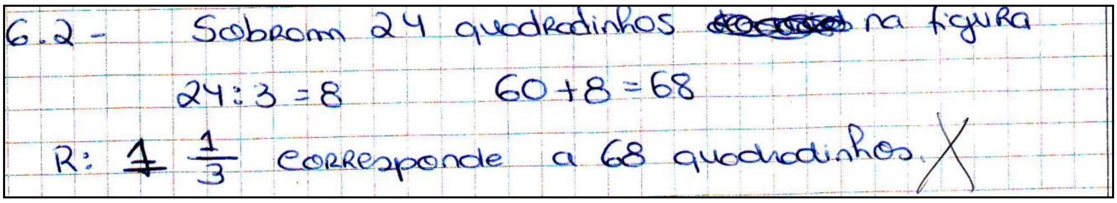

6.2 - Sobram 24 quadradinhos na figura
24:3 = 8   60+8 = 68
R: $\frac{1}{3}$ corresponde a 68 quadradinhos.

Figura 74 – Resposta da estudante 6 – Questão 6.2.

Na questão 6.3 era pedido que os formandos indicassem 35% da unidade e verificaram-se oito respostas corretas e oito respostas incorretas. As respostas incorretas mostram que metade dos respondentes apresenta dificuldades na compreensão e interpretação da questão, indicando o valor de 18 quadrados correspondentes a 30% da unidade e não a 35% como era pedido. Nas respostas corretas, os futuros professores fizeram a correspondência entre a representação e percentagem e o número de retângulos e identificaram o número de quadrados correspondentes a 25% e a 5% e, de seguida, calcularam o número de quadrados correspondentes a 35%, tal como se pode ver na resposta do estudante número quatro (fig. 75), percebendo que poderão utilizar a decomposição de 35% noutras percentagens.

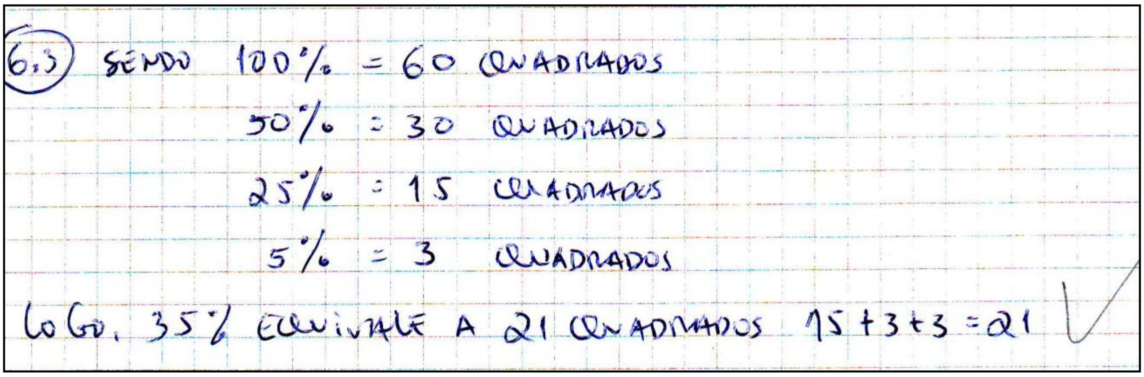

6.3 SENDO 100% = 60 QUADRADOS
50% = 30 QUADRADOS
25% = 15 QUADRADOS
5% = 3 QUADRADOS
LOGO, 35% EQUIVALE A 21 QUADRADOS 15+3+3=21

Figura 75 – Resposta do estudante 4 – Questão 6.3.

Significado operador

As questões 7, 8 e 13 foram elaboradas visando os objetivos de (i) compreender e usar um número racional como operador; e (ii) reconstruir a unidade a partir das suas partes usando o significado operador e a representação em fração, numeral decimal e percentagem.

A questão 7 refere-se ao significado de operador utilizando-se múltiplas representações tais como fração, percentagem e numeral decimal. Na alínea 7.1. pedia-se para representar, na forma de percentagem, a quantidade de alunos que praticam futebol sabendo que correspondiam a $\frac{2}{5}$, na alínea 7.2, o número de alunos que praticam dança dado que representavam 0,25 do total de alunos inquiridos e na alínea 7.3., a fração de alunos que não pratica desporto visto que o total de alunos inquiridos é 840.

A alínea 7.1, em que se pedia para representar, na forma de percentagem, a quantidade de alunos que praticam futebol sabendo que correspondiam a $\frac{2}{5}$ do total, tornou-se mais fácil para os respondentes pois doze conseguiram converter corretamente a fração em percentagem, três respondem incorretamente pois em vez de determinarem uma fração decimal equivalente a $\frac{2}{5}$ ou utilizarem a divisão dos termos da fração para determinarem a percentagem correspondente calcularam o número de alunos que praticam futebol e, de seguida, dividiram o valor obtido por cem identificando-o como $\frac{336}{100}$ e um não responde. Nas respostas corretas alguns dos formandos utilizam a divisão dos termos da fração para a converterem na representação em percentagem, no entanto, a estudante número dezassete utiliza a barra numérica para fazer a respetiva conversão, pois divide-a em cinco partes atribuindo a cada parte o valor $\frac{1}{5}$ e conclui que a barra corresponde a 100%, logo cada parte corresponderá a 20% pois divide 100% por cinco e identifica corretamente o valor em percentagem correspondente a $\frac{2}{5}$ (fig. 76).

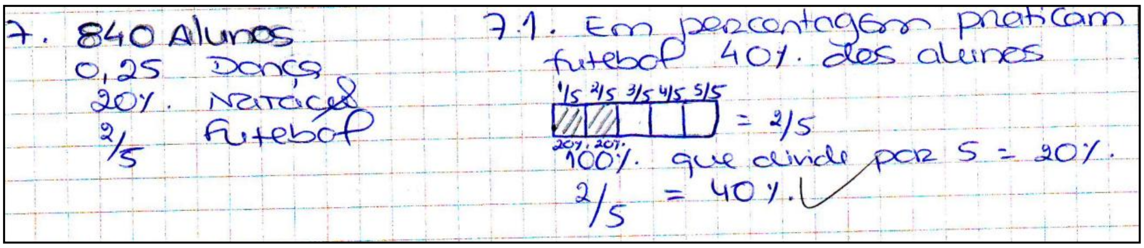


Figura 76 – Resposta da estudante 17 – Questão 7.1.

Na alínea 7.2 obtiveram-se doze respostas corretas pois muitos formandos conseguem relacionar 25% com a quarta parte da população e indicar o valor de 210, uma resposta incorreta pois o aluno determinou o número de alunos correspondente a 20% e não a 25% como era pedido no problema e três respostas em branco. Mais uma vez a estudante número 17 utiliza a barra numérica dividida em quatro partes para identificar a quantidade de alunos correspondente a 25% pois relaciona o total de alunos a 100% e de seguida determina o valor correspondente a uma parte da barra dividindo o valor total por quatro (fig. 77).

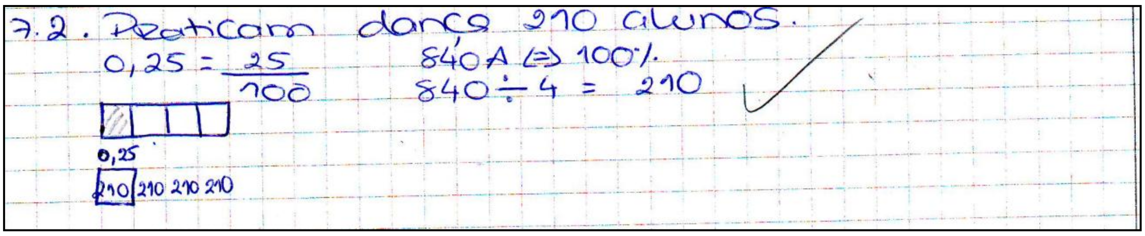


Figura 77 – Resposta da estudante 17 – Questão 7.2.

A alínea 7.3 é a de maior dificuldade pois ainda só nove formandos conseguem determinar a resposta correta identificando o número de alunos que não praticam nenhum dos desportos referidos (126) que corresponderiam a 15% = $\frac{3}{20}$, da população inquirida. Obteve-se ainda uma resposta incompleta pois não indica a fração pedida mas apenas o número de alunos correspondente a essa fração, três respostas incorretas correspondentes a erros de cálculo do número de alunos que não praticam desporto e, consequentemente erram no valor da fração pedida ($\frac{138}{840}$, $\frac{16}{40}$, $\frac{126}{100}$) e três formandos que não responderam.

A estudante número dezassete utiliza uma representação pictórica associada à representação em percentagem para representar a fração de alunos que não pratica os desportos referidos no inquérito, apresentando esse valor na forma de fração decimal (fig. 78).

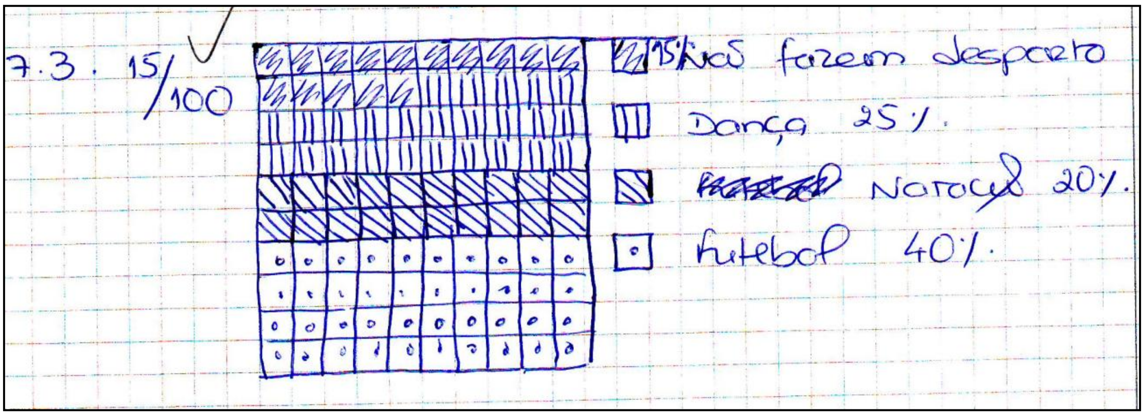


Figura 78 – Resposta da estudante 17 – Questão 7.3.

Na questão 8 os futuros professores deveriam construir a unidade (lotação máxima de uma sala de espetáculos) sabendo que uma parte da sua ocupação ($\frac{7}{8}$) correspondia a 140 pessoas. Este problema tornou-se de fácil resolução para treze deles pois respondem corretamente à situação colocada mas um dos estudantes não explicitou o modo como o fez, dois não respondem e um refere incorretamente 1120 lugares pois considera que 140 pessoas corresponde a $\frac{1}{8}$ e, por isso, multiplica 140 por 8 para obter o resultado.

A estudante número treze utiliza a barra numérica dividida em oito partes iguais e, de seguida, utiliza o algoritmo da divisão para determinar o número de pessoas correspondente a cada parte e, por fim, o algoritmo da adição para determinar a lotação máxima da sala de espetáculos percebendo que falta $\frac{1}{8}$ para completar a barra numérica e consequentemente 20 pessoas para a lotação máxima da sala (fig. 79).

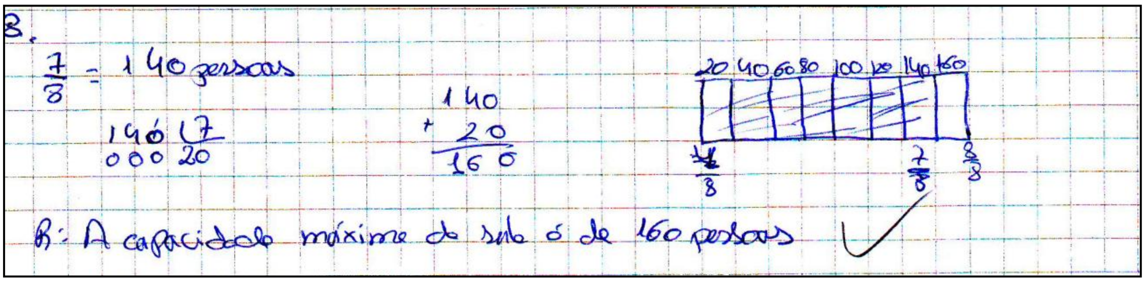


Figura 79 – Resposta da estudante 13 – Questão 8.

Na questão 13 solicitava-se que os estudantes utilizassem as diferentes representações dos números racionais como operador e calculassem determinadas quantidades.

As respostas apresentadas são todas da estudante número doze pois esta apresenta para todas as alíneas as estratégias que utilizou para determinar os valores solicitados ao contrário de outros que apenas apresentam o resultado obtido inviabilizando a análise das estratégias utilizadas ou das dificuldades manifestadas.

Na alínea 13.1 teriam de efetuar o cálculo de $0{,}35 \times 200$ e obtiveram-se nove respostas corretas, três incorretas pois apresentam dificuldades no algoritmo da multiplicação com números decimais pois os valores obtidos estão corretos havendo uma incorreção na colocação da vírgula após o cálculo efetuado e não utilizam outras estratégias para determinar o valor pedido e quatro não respondem.

A estudante número doze recorre ao algoritmo da multiplicação para determinar corretamente o valor solicitado (fig. 80).

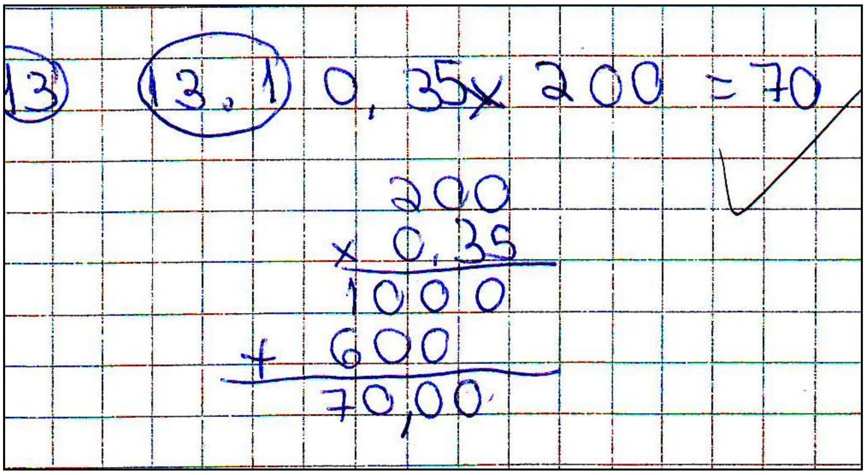


Figura 80 – Resposta da estudante 12 – Questão 13.1.

Na alínea 13.2 pedia-se a nona parte de 380 e verificou-se que foram dadas nove respostas corretas, duas incorretas pois resolvem incorretamente o algoritmo da divisão e cinco não responderam à questão. Nenhum dos formandos apresenta o resultado na forma de fração e recorreram ao algoritmo da divisão para apresentar o resultado na forma de numeral decimal. Os formandos que resolvem corretamente a questão utilizam o conhecimento que têm sobre os números partitivos para efetuarem, respetivamente, a divisão por três e por nove e ninguém percebe que pode apresentar o resultado na forma de fração e determinar uma fração equivalente ao valor calculado.

A estudante número doze percebe o significado da linguagem verbal apresentada e recorre ao algoritmo da divisão para calcular o valor solicitado e não utiliza a representação verbal "nona parte de" para apresentar o valor pedido na forma de fração $\frac{480}{9}$ (fig. 81).

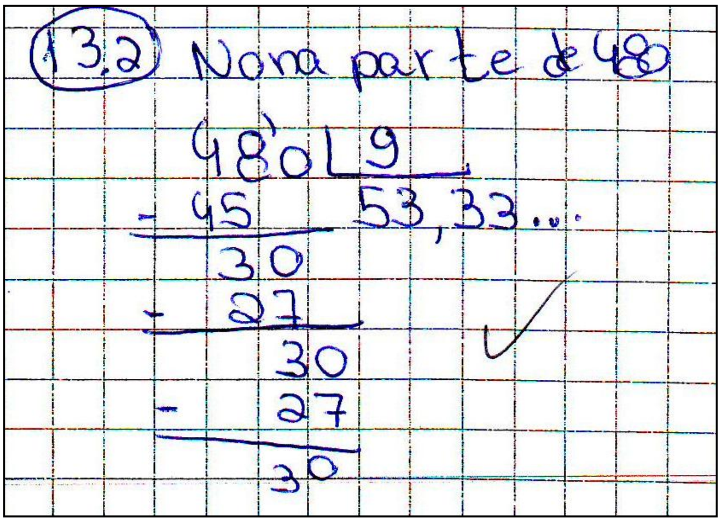


Figura 81 – Resposta da estudante 12 – Questão 13.2.

A alínea 13.3. solicitava o cálculo de $\frac{3}{8} \times 120$ tendo-se obtido nove respostas corretas pois foram apresentados os valores 45 ou $\frac{360}{8}$, cinco incorretas uma vez que indicam os valores $\frac{360}{90}$ e $\frac{3}{8} \times \frac{960}{8}$ e duas não respondem.

As respostas corretas associam-se a uma aplicação correta dos algoritmos da multiplicação e da divisão dos valores dados ou na aplicação correta da equivalência de frações na obtenção da fração irredutível pois alguns formandos optam por escrever, respetivamente $\frac{360}{8}$ e, de seguida converter a fração obtida numa fração irredutível. As respostas incorretas prendem-se com erros de cálculo na utilização dos algoritmos referidos anteriormente e, consequentemente identificação de valores errados.

A estudante número doze apresenta um valor incorreto pois multiplica o valor 120 pelo numerador e pelo denominador da fração (fig. 82).

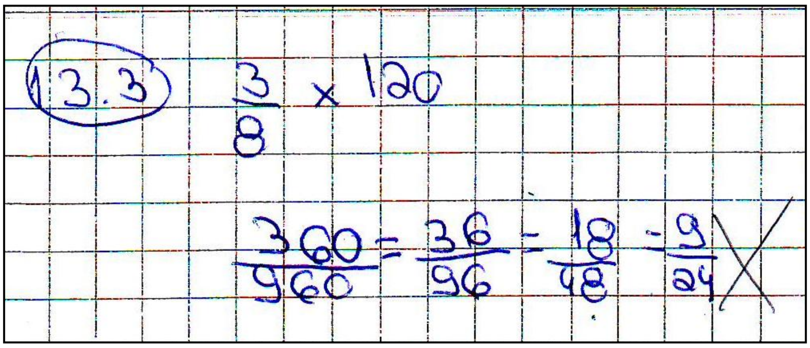


Figura 82 – Resposta da estudante 12 – Questão 13.3.

Na alínea 13.4. solicitava-se que calculassem 15% de 300 e obtiveram-se seis respostas corretas pois utilizam o algoritmo da multiplicação ou a regra de três simples para obter o valor pedido, sete incorretas pois não conseguem aplicar corretamente o algoritmo da multiplicação uma vez que não percebem que a multiplicação é feita com quinze décimas e não com quinze errando assim o valor obtido e três não respondem.

As respostas incorretas devem-se à má interpretação da percentagem pedida pois definem corretamente os valores associados a 50%, 25% e 12,5% e depois fazem corresponder o valor pedido ao valor obtido para 12,5%, ou à confusão entre o algoritmo a utilizar pois em vez de utilizarem o algoritmo da multiplicação na determinação do valor pedido usam o algoritmo da divisão do valor dado por quinze obtendo incorretamente o valor vinte como resultado pedido bem como erros de cálculo na utilização correta dos algoritmos. Nas respostas corretas verifica-se a utilização da regra de três simples no cálculo do valor solicitado ou na utilização do cálculo de 15% de cem para depois multiplicar o valor obtido por três uma vez que trezentos é o triplo de cem.

A estudante número doze recorre ao algoritmo da multiplicação para calcular corretamente o valor solicitado (fig. 83).

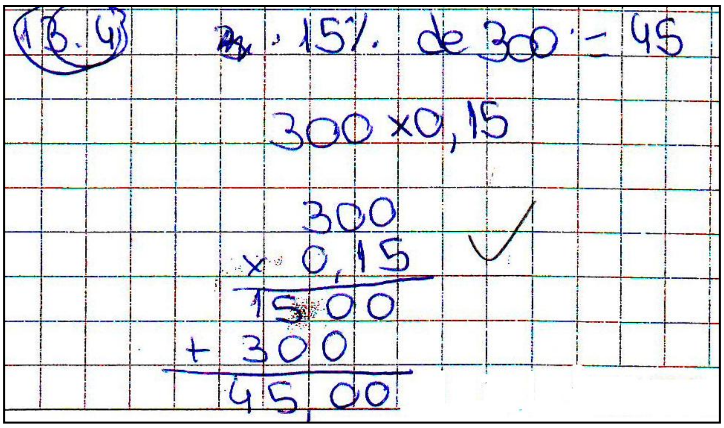


Figura 83 – Resposta da estudante 12 – Questão 13.4.

Significado quociente

As questões 1.1 e 9 foram elaboradas visando os seguintes objetivos (i) compreender e usar um número racional como quociente nas representações em fração e em numeral misto. Na questão 1.1. é solicitada a representação da fração de piza que cabe a cada rapaz e a cada rapariga dada a partilha equitativa de uma quantidade contínua. Doze formandos respondem corretamente distribuindo uma piza a cada rapariga e dividindo a que sobrou em cinco partes iguais e identificando a fração $1\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$ e no caso dos rapazes distribuindo uma piza para cada um e a que sobrou dividida em sete partes iguais e apresentando o valor $1\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$. Dois apresentam respostas incompletas pois um estudante acerta numa única fração e o outro acerta na representação pictórica das duas situações mas, quando resolve a adição do número inteiro com o número fracionário erra o cálculo, e dois estudantes respondem incorretamente apresentando os valores $1\frac{1}{6}$ para as raparigas e $1\frac{1}{8}$ para os rapazes confundindo o número de pessoas com o número total de pizas a distribuir em cada grupo.

O estudante número quatro representa pictoricamente a quantidade de pizas atribuída a cada um dos grupos e, de seguida, distribui equitativamente a quantidade de piza que cabe a cada rapariga e a cada rapaz, percebendo que cada rapariga comerá uma piza inteira e a quinta parte da última e que cada rapaz receberá também uma piza e a sétima parte da última piza, representando os valores solicitados na forma de numeral misto fracionário e na forma de fração imprópria (fig. 84).

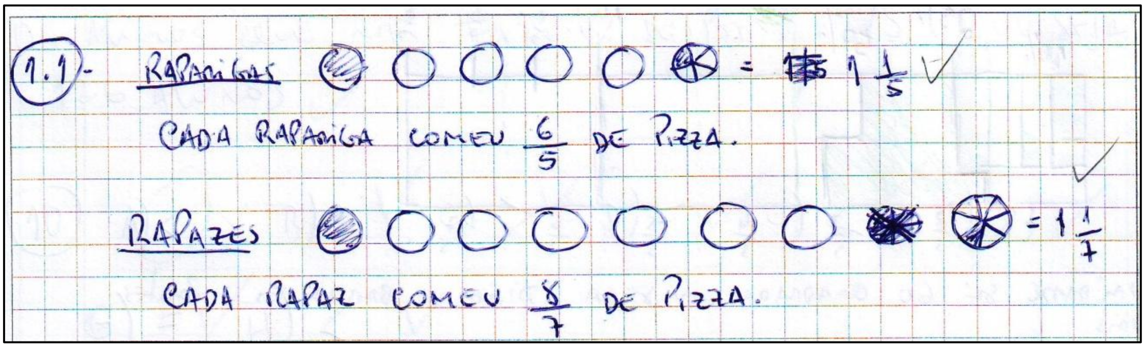


Figura 84 – Resposta do estudante 4 – Questão 1.1.

Na questão 9 pretendia-se saber quantas crianças poderiam receber $1\frac{1}{4}$ de chocolate se houvesse doze chocolates para distribuir e obtiveram-se treze respostas corretas e três incorretas. Todos os estudantes à exceção do número quatro utilizaram representações pictóricas para representar o total de chocolates e poderem distribuí-los pelo maior número de crianças, tal como se poderá observar na resposta da aluna dezassete (fig. 85).

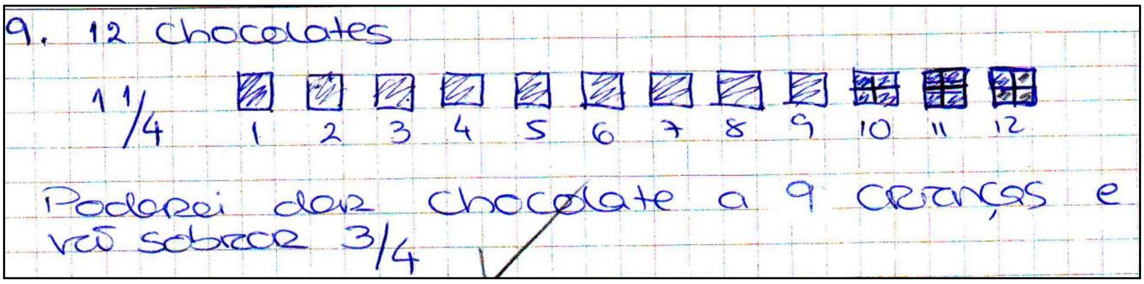


Figura 85 – Resposta da estudante 17 – Questão 9.

O estudante número quatro, possivelmente, porque transformou o numeral misto numa fração imprópria (fig. 40), terá percebido que o número de máximo de pessoas seria 9 porque seria o número inteiro que multiplicado por 5 estaria mais perto de 48. Tal como a estudante número dezassete, indica ainda a quantidade de chocolate que resta nessa situação, no entanto, não se percebe quais as estratégias formais ou informais utilizadas (fig. 86).

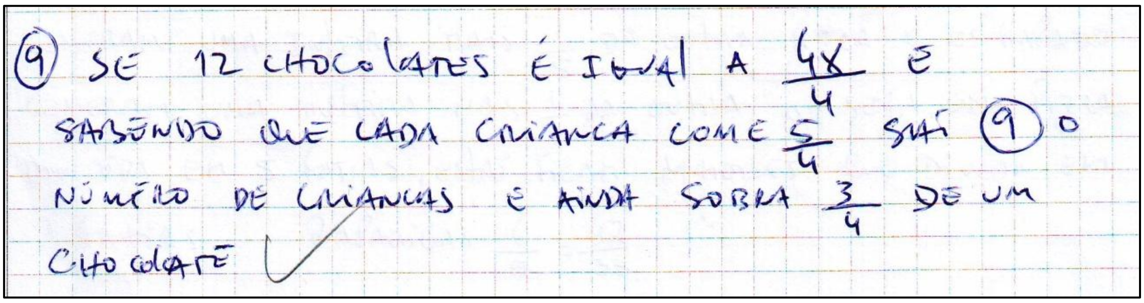


Figura 86 – Resposta do estudante 4 – Questão 9.

As três respostas incorretas correspondem a uma representação errada da parte de chocolate que sobrou da divisão ($\frac{1}{3}$), distribuição incorreta do chocolate por apenas oito crianças e com os quatro chocolates que restaram atribuir metade a cada um (não atribuindo a quantidade referida no problema mas um chocolate e meio a cada criança) e distribuir erradamente o chocolate por onze crianças e com o último dividi-lo em quatro partes, o que demonstra alguma dificuldade na interpretação do problema.

Significado medida

A questão 14 é relativa ao valor de posição de um número racional, na forma de fração, numeral misto ou decimal, utilizando a reta numérica graduada. Estas alíneas tornam-se de difícil resolução pois, ao contrário do teste inicial, a unidade encontra-se dividida num número de partes que não torna a resposta tão óbvia. Deste modo, globalmente apenas cinco formandos apresentam todas as respostas corretas, quatro respondem corretamente a três valores, dois acertam apenas num dos valores pedidos e cinco não respondem.

Na reta A indicava-se o valor $\frac{4}{3}$ e até esse ponto foram feitas oito divisões e o valor pedido corresponde a um meio. Registaram-se nesta questão sete respostas corretas (todas na forma de fração) e quatro incorretas pois referem $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Na reta B cada unidade está dividida em 7 partes e o valor pedido era $\frac{12}{7}$ e obtiveram-se nove respostas corretas e duas incorretas pois foram referidos os valores 1,5 e $\frac{5}{7}$. A reta C apresenta a unidade dividida em 9 partes sendo o valor pedido $\frac{15}{9}$, apresentando-se sete respostas corretas e quatro respostas incorretas ($\frac{15}{7}$, 1,6). A reta D apresenta o valor $\frac{3}{5}$ e pede para identificar o valor $\frac{6}{5}$, nesta questão foram validadas oito respostas corretas e três incorretas pois foram indicados os valores $\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{5}$. Na reta E a unidade foi dividida em 12 partes e o valor pedido é $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ e esta é a questão de mais fácil resolução pois obtiveram-se dez respostas corretas e uma incorreta ($\frac{5}{12}$) evidenciando erro na contagem das partes.

Nesta questão os futuros professores procuram entender a graduação das retas numéricas dadas e identificar o número de partes em que cada unidade foi dividida para posteriormente identificarem o número racional pedido. Os estudantes tentam apresentar as respostas na forma de fração pois as escalas utilizadas nas retas numéricas propiciavam à utilização da estratégia acima referida e, deste modo, eram forçados a analisar cuidadosamente cada uma das retas numéricas dadas.

A estudante número dez identifica corretamente os valores solicitados utilizando a contagem das partes em que cada unidade foi dividida. No caso da reta A percebe que o valor pedido é metade da unidade e, por isso, atribui o valor $\frac{1}{2}$, no entanto, verifica-se que ao transcrever a reta numérica para a sua folha de prova colocou erradamente o valor $\frac{4}{3}$ (fig. 87).

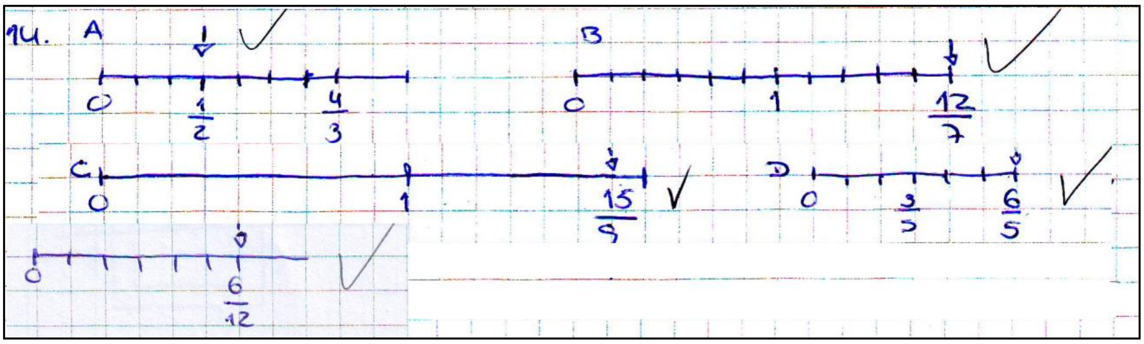


Figura 87 – Resposta da estudante 10 – Questão 14.

Comparação, ordenação e equivalência de números racionais

As questões de comparação, ordenação e equivalência estão distribuídas pelos significados razão na questão 12 em que se pede para comparar a razão entre o número de atividades físicas e o tempo gasto, quociente na questão 1.2 em que é pedida a comparação entre os grupos relativamente à quantidade de piza ingerida. O significado medida é introduzido na questão 2 ordenação de números racionais nas formas de fração, percentagem, numeral misto e numeral decimal, na questão 10 comparação de dois números racionais na forma de numeral decimal, de numeral misto e de fração com numeradores iguais, denominadores iguais ou numeradores e denominadores diferentes e na questão 11 ordenação, comparação e posicionamento de números racionais nas formas de fração, percentagem e numeral misto numa reta numérica não graduada.

A dificuldade da questão 11 relaciona-se com o facto da reta numérica colocada no problema não estar graduada e, por isso, os futuros professores terão que iniciar a sua resolução pela graduação adequada da reta numérica para facilitar a localização e o posicionamento dos números racionais.

Nas questões de comparação e ordenação de números racionais na forma de fração com numeradores e denominadores diferentes está também subjacente o conceito de equivalência de frações para a correta comparação de números racionais pois os alunos poderão determinar duas frações equivalentes às dadas mas com igual denominador. Estas questões foram discutidas durante a realização das fichas de trabalho de modo a capacitar os futuros professores quanto aos métodos para comparar números racionais quer na forma de numeral decimal e misto, percentagem e fração.

Significado razão

Os objetivos relativos à questão 12 eram (i) compreender e usar um número racional como razão; (ii) compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo; e (iii) compreender uma relação entre valores de duas grandezas diferentes utilizando o significado razão e as formas de representação verbal e fração.

Nesta questão pretendia-se que os futuros professores identificassem o amigo mais rápido na execução das atividades físicas por comparação da razão entre o número de exercícios físicos e o tempo gasto, assumindo que em média cada um deles gasta o mesmo tempo a executar cada um dos exercícios. Pelas respostas analisadas, esta continua a ser uma questão de difícil resolução pois apenas quatro dos formandos conseguem obter a resposta correta, cinco respondem incorretamente e sete não respondem. As estratégias utilizadas nas respostas corretas foram o uso da regra de três simples para determinar o número de exercícios efetuado no mesmo período de tempo ou a equivalência de frações das duas razões encontradas para poderem encontrar a fração com maior numerador.

As respostas incorretas relacionam-se com erros de cálculo da razão pretendida pois continuam a ter dificuldades no algoritmo da divisão principalmente com dois ou mais números ou com dificuldades de interpretação dos valores obtidos apesar de calcularem corretamente a razão pedida. Estes estudantes calculam corretamente a razão pedida, no entanto, não percebem o seu significado induzindo-os, por isso, a conclusões erradas, não identificando o mais rápido como aquele que executa maior número de exercícios no mesmo intervalo de tempo.

A estudante número treze opta por calcular duas frações equivalentes às dadas e conclui que o Tiago é mais rápido pois a fração tem maior numerador e, por isso, resolve maior número de exercícios no mesmo período de tempo (fig. 88).

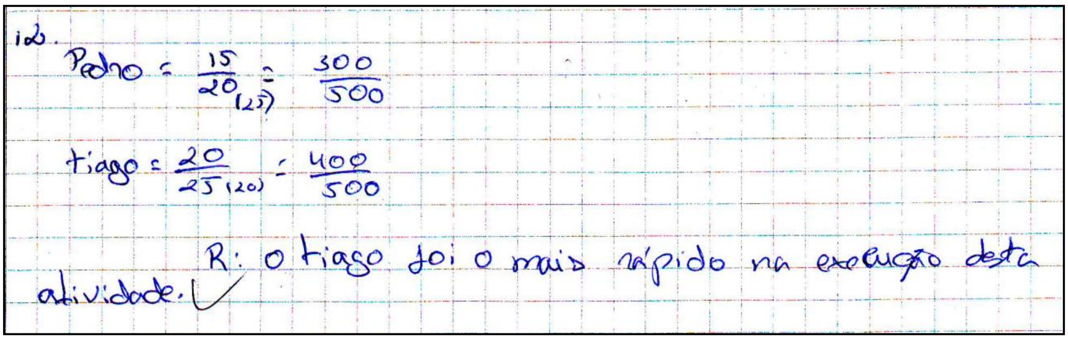


Figura 88 – Resposta da estudante 13 – Questão 12.

Significado quociente

A questão 1.2 tinha por objetivo (i) compreender e usar um número racional como quociente utilizando a fração como forma de representação do número racional e comparação da quantidade de piza ingerida por cada um dos grupos de amigos – rapazes e raparigas. A questão foi contextualizada e envolvia a partilha equitativa de uma quantidade contínua.

Nesta questão referente à partilha equitativa doze estudantes respondem e justificam corretamente que foram as raparigas pois todos comeram uma piza e mais uma fatia da piza que restou mas, os rapazes por serem em maior número a sua fatia de piza é menor, dois respondem corretamente mas não justificam a sua opção, um responde corretamente mas apresenta valores errados na questão anterior em que é pedida a fração que cada rapariga e cada rapaz comeu e apenas houve um formando que não resolveu esta questão. Para a resolução desta questão os estudantes observaram que em cada mesa sobrou uma piza e, por isso, ao dividir a piza que sobrava os rapazes comeriam menos piza pois estavam em maior número.

A aluna número onze percebe que tem de dividir o número total de pizas de cada mesa pelas raparigas e pelos rapazes e conclui que $1\frac{1}{7}$ representa uma quantidade menor que $1\frac{1}{5}$ (fig. 89).

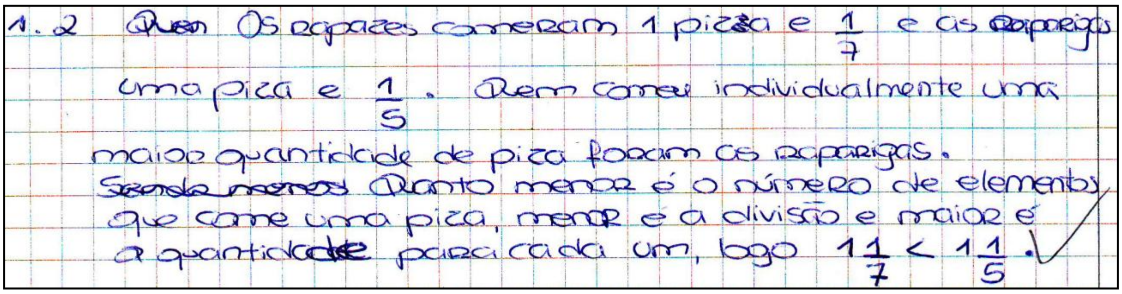

1.2 ~~Quem~~ Os rapazes comeram 1 pizza e $\frac{1}{7}$ e as raparigas
uma piza e $\frac{1}{5}$. Quem comeu individualmente uma
maior quantidade de piza foram as raparigas.
~~Sendo menos~~ Quanto menor é o número de elementos
que come uma piza, menor é a divisão e maior é
a quantidade para cada um, logo $1\frac{1}{7} < 1\frac{1}{5}$.

Figura 89 – Resposta da estudante 11 – Questão 1.2.

Significado medida

As questões 2, 10 e 11 são do tipo representação, ordenação, comparação e equivalência de números racionais e têm como objetivos (i) compreender e usar um número racional como medida; (ii) localizar e posicionar na reta um número racional; (iii) comparar uma grandeza com outra tomada como unidade; e (iv) comparar e ordenar números racionais representados de formas diferentes empregando o significado medida e as diferentes formas de representação – pictórica, verbal, fração, numeral decimal e percentagem.

A questão 2 referia-se à comparação e ordenação de números racionais na forma de numerais decimais, fração, numeral misto e percentagem. Obtiveram-se dez respostas corretas, duas respostas incompletas, pois apresentam a ordenação pedida com uma falha, e três respostas incorretas. Apenas um estudante não responde à questão o que poderá indiciar dificuldades na compreensão do tópico sobre ordenação e comparação de números racionais ou dificuldade na conversão de números racionais e utilização do algoritmo da divisão. A maioria dos estudantes que responde corretamente à questão utiliza a divisão para converter os números racionais dados na forma decimal e, de seguida, compara-os. No entanto, outros estudantes utilizam a reta numérica para fazer a localização dos números racionais e posterior comparação e ordenação.

A estudante número quinze converte todos os números racionais dados na forma decimal dividindo os termos da fração para, de seguida, os comparar e ordenar corretamente, no entanto, apresenta-os na forma em que foram dados (fig. 90).

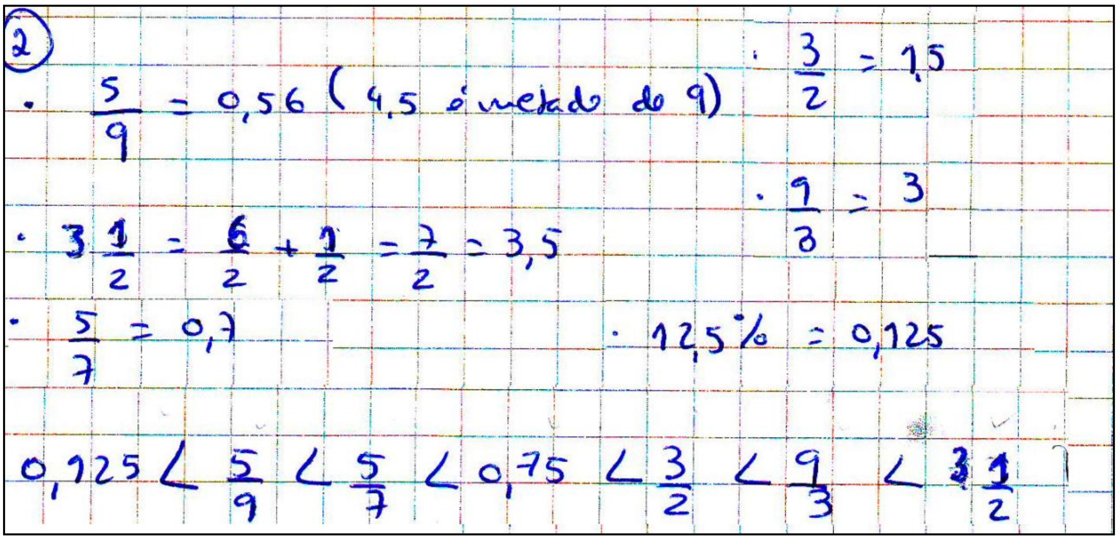


Figura 90 – Resposta da estudante 15 – Questão 2.

A questão 10 abordava a comparação de dois números racionais na forma de fração, numeral decimal e numeral misto.

Na alínea a) pedia-se a comparação de dois números fracionários com o mesmo numerador e obtiveram-se doze respostas corretas uma vez que percebem que quanto maior o denominador menor é o número ou convertem as frações dadas em numerais decimais e quatro incorretas.

Nas alíneas b), c) e d) a comparação era feita entre dois números fracionários com numerador e denominador diferentes e identificaram-se catorze respostas corretas nas alíneas b) e c) e treze respostas corretas na alínea d). Os estudantes recorrem à equivalência de frações com o mesmo denominador, à conversão para numerais decimais ou à representação pictórica para darem resposta à questão.

Na alínea e) a comparação era feita entre um número racional na forma de numeral misto e outro na forma de fração e obtiveram-se catorze respostas corretas. Os estudantes recorrem à decomposição do numeral misto para o converter numa fração imprópria e poder comparar com a outra fração dada.

As alíneas f), g) e h) solicitavam a comparação entre dois numerais decimais e identificaram-se catorze respostas corretas na alínea f) e quinze respostas corretas nas alíneas g) e h). As respostas incorretas relacionam-se com a dificuldade de comparação de números decimais com diferente número de casas decimais.

A estudante número cinco utiliza a representação pictórica para fazer comparações entre números racionais na forma de fração, comparando o tamanho da zona sombreada correspondente a cada uma das frações e usa as operações aritméticas para comparar os números racionais na forma de fração e de numeral misto (fig. 91).

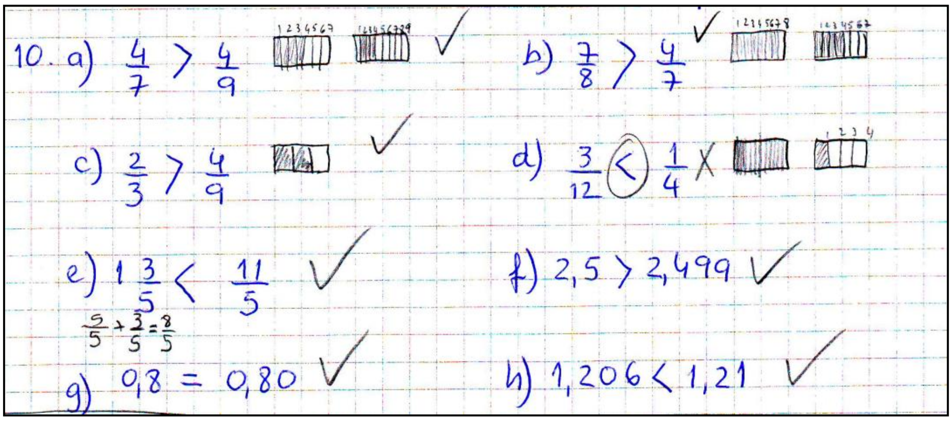


Figura 91 – Resposta da estudante 5 – Questão 10.

A questão 11 é relativa ao valor de posição de um número racional utilizando a reta numérica não graduada para identificar os números racionais pedidos na forma de fração, numeral misto e percentagem.

Nesta questão apenas um formando posiciona os cinco números racionais na reta numérica, dois colocam na reta quatro números, um posiciona três números e dois só conseguem colocar na reta dois números corretamente, os restantes ou não respondem ou não conseguem colocar corretamente nenhum dos números dados. A estudante que posiciona acertadamente todos os valores na reta numérica não identifica a estratégia utilizada para a marcação destes números.

A maioria dos estudantes não resolve esta questão pois não consegue arranjar uma graduação correta para a reta numérica de modo a conseguir colocar na mesma os valores pedidos e, por isso, não respondem corretamente.

A estudante número quinze recorre à divisão dos termos da fração e à decomposição dos números racionais dados para os converter na forma de numeral decimal, no entanto, na reta numérica divide cada unidade no número de partes correspondente ao denominador exceto na marcação de $4\frac{5}{6}$ em que continua a dividir em cinco partes iguais em vez das seis partes em que a parte fracionária está dividida (fig. 92).

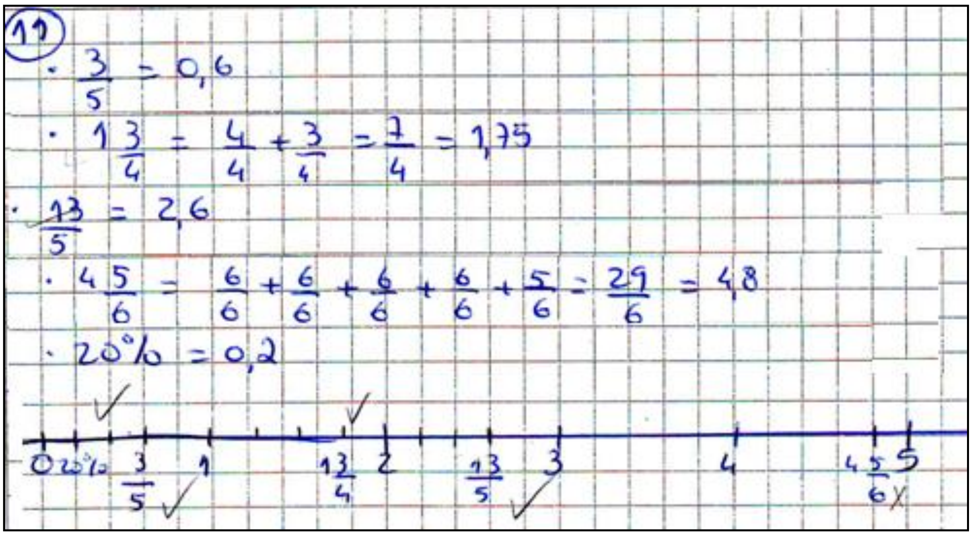


Figura 92 – Resposta da estudante 15 – Questão 11.

Densidade de números racionais

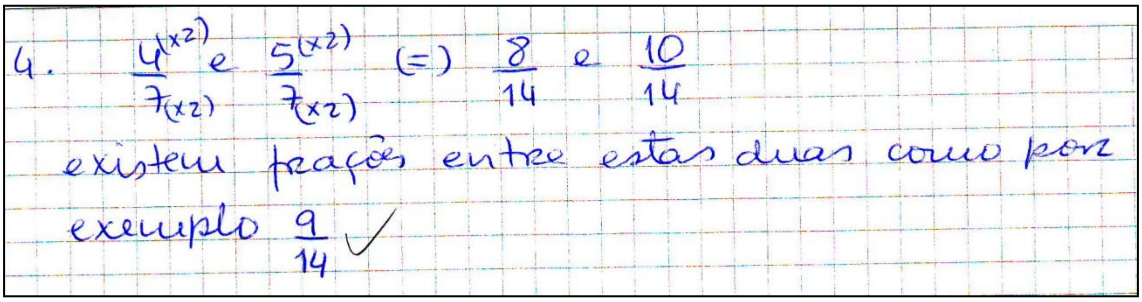
O conceito de densidade de números racionais foi introduzido nas questões 4 e 5, com recurso ou não à reta numérica, tal como sucedeu no teste inicial, para uma melhor localização e posicionamento dos números racionais.

As questões 4 e 5 aludiam à densidade de números racionais na forma fracionária e na forma de numeral decimal. A análise dos dados mostra que os futuros professores têm maior facilidade em identificar dois números decimais entre 0,87 e 0,88 (questão 5) do que em identificar um número fracionário entre $\frac{4}{7}$ e $\frac{5}{7}$ (questão 4), havendo uma ligeira diferença entre o número de respostas corretas nas duas questões.

Na questão 4 verificou-se que onze estudantes respondem corretamente, um apresenta uma resposta incompleta pois responde que existem números entre os indicados mas, não dá nenhum exemplo, um responde incorretamente e três não respondem.

A maioria dos estudantes que resolve corretamente esta questão determina frações equivalentes às dadas e identifica um número racional entre as duas frações, os restantes utilizam a divisão entre os termos da fração para converter as frações dadas em numerais decimais e identificar o número racional pedido.

A estudante número cinco determina duas frações equivalentes às dadas com denominador duplo do anterior, ficando com uma fração com o mesmo denominador entre as duas dadas e, deste modo, indica $\frac{9}{14}$ como sendo um dos números racionais entre as duas frações (fig. 93).



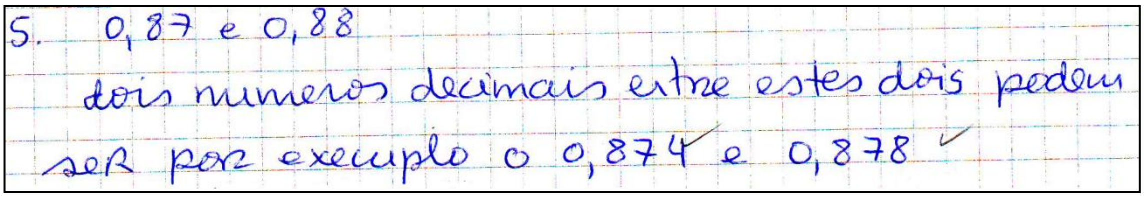
4. $\frac{4^{(x2)}}{7_{(x2)}}$ e $\frac{5^{(x2)}}{7_{(x2)}}$ (=) $\frac{8}{14}$ e $\frac{10}{14}$

existem frações entre estas duas como por exemplo $\frac{9}{14}$ ✓

Figura 93 – Resposta da estudante 5 – Questão 4.

Na questão 5 observa-se que treze formandos respondem corretamente dando exemplos corretos e três não respondem. A maioria dos estudantes utiliza a estratégia de colocar o zero como algarismo das milésimas nos valores dados e, de seguida, identifica dois valores entre os anteriores.

A estudante número cinco mostra não ter dificuldade na representação de números racionais na forma decimal pois percebe-se que intuitivamente sabe que ao aumentar o número de casas decimais nos dois números dados consegue encontrar outros valores entre os valores dados (fig. 94).



5. 0,87 e 0,88
dois numeros decimais entre estes dois podem ser por exemplo o 0,874 e 0,878 ✓

Figura 94 – Resposta da estudante 5 – Questão 5.

Síntese Teste Final

Da análise das respostas obtidas no teste final verifica-se que os estudantes com dificuldades na leitura e interpretação dos enunciados dos problemas apresentados são os que tiveram uma frequência irregular nas aulas de Didática da Matemática e, consequentemente, não participaram da discussão de todos os tópicos abordados sobre os números racionais e que constavam do teste final.

No que concerne às representações de números racionais os estudantes revelam facilidade na conversão da representação em fração para pictórica e decimal e vice-versa e uma maior dificuldade para a conversão em percentagem e vice-versa principalmente quando estas não são percentagens simples e necessitam de decomposições. Recorrem, frequentemente, à representação pictórica para apoiar as suas resoluções, no entanto, apresentam as suas respostas noutras formas de representação, diversificando-as.

Demonstram uma maior facilidade na reconstrução da unidade a partir das diferentes partes tal como na construção das partes a partir da unidade nas diferentes formas de representação de números racionais quer sejam quantidades contínuas ou discretas. Utilizam a decomposição de frações próprias não unitárias ou a decomposição de frações impróprias em numerais mistos para perceberem as partes constituintes das grandezas utilizadas.

Recorrem, com maior frequência, na conversão de frações em percentagem à estratégia da determinação da fração decimal ou da representação pictórica da barra numérica em detrimento da divisão dos termos da fração denotando uma noção quantitativa da fração.

Na identificação de números racionais com auxílio da reta numérica demonstram maior dificuldade na obtenção da resposta pois os valores solicitados eram frações complexas e tinham que entender a graduação das retas numéricas dadas bem como reconhecer o número de partes em que cada unidade era dividida para conseguirem identificar o número racional pedido, evidenciando maior facilidade na compreensão da noção quantitativa da fração. Revelam, ainda, maior dificuldade quando a reta numérica não está graduada pois necessitam de arranjar uma graduação apropriada para poderem marcar todos os números racionais dados.

Relativamente à comparação e ordenação de números racionais verifica-se um bom desempenho com todas as formas de representação pois conseguem arranjar estratégias tais como comparação entre décimas, centésimas e milésimas bem como determinação de frações equivalentes ou da decomposição de frações para resolver os problemas relativos a este tópico.

Quanto à densidade de números racionais demonstram grande facilidade na identificação de numerais decimais e fracionários, recorrendo ao aumento do número de casas decimais ou à determinação de frações equivalentes às dadas com denominadores múltiplos dos dados para identificarem números no intervalo dado.

Revelam grande destreza no significado parte-todo e quociente pois apoiam-se nas representações pictóricas para determinar os números racionais pedidos nas diferentes formas de representação. Nas situações de partilha equitativa (significado quociente) apoiam-se também nas representações pictóricas e na linguagem verbal para a representação de frações, numerais decimais ou numerais mistos.

Evidenciam menor dificuldade no significado operador pois conseguem utilizar as diferentes representações dos números racionais evidenciando os significados metade, terça parte, quarta parte, etc. bem como as equivalências entre elas e das várias decomposições que se podem estabelecer para calcular quantidades. Mostram destreza em estabelecer relações entre frações próprias e algumas percentagens e em numerais mistos e frações impróprias.

Demonstram maior dificuldade na compreensão do significado razão pois continuam a ter dificuldades em estabelecer uma razão no contexto do problema dado ou dificuldades de interpretação dos valores obtidos apesar de calcularem corretamente a razão pedida induzindo-os, por isso, a conclusões erradas. As estratégias utilizadas neste tipo de questões são o uso da regra de três simples ou a equivalência de frações.

Revelam menor dificuldade na compreensão do significado medida pois conseguem arranjar estratégias válidas para comparar quantidades mostrando menor proficiência na ordenação de números racionais se não existirem retas numéricas não graduadas.

Os estudantes utilizam, nalgumas das questões apresentadas, estratégias mais informais e mais próximas das utilizadas pelos alunos do 1.º ciclo para a resolução dos problemas dados o que poderá tornar mais simples a análise destes tópicos para os estudantes quando estiverem a lecionar matemática nestes anos de escolaridade e que promovam a análise de situações matemáticas significativas e da capacidade de comunicação dos estudantes. Empregam também estratégias mais formais como a regra de três simples e os algoritmos das operações para resolver alguns dos problemas apresentados.

3. Comparação dos resultados obtidos no teste inicial e final

A comparação de resultados dos dois testes efetuados fez-se com base no tipo de questão apresentada e nos diferentes significados dos números racionais, assim, far-se-á uma análise dos resultados obtidos em cada questão nomeadamente nas dificuldades ainda manifestadas pelos futuros professores bem como nas estratégias utilizadas na resolução das questões colocadas e, ainda, do grau de conhecimento adquirido ou consolidado sobre os números racionais evidenciando o número de respostas corretas e incorretas bem como o modo como as questões foram resolvidas.

As questões do teste final são semelhantes às do teste inicial, no entanto, o seu grau de dificuldade é ligeiramente superior para se poder analisar o grau de compreensão dos formandos. Estes testes não poderão ser considerados testes rigorosos do conhecimento dos estudantes mas constituem instrumentos de avaliação das suas aprendizagens.

Globalmente os testes inicial e final foram constituídos com um número semelhante de itens que abordam os tópicos representação, comparação, ordenação e densidade dos números racionais. Os tópicos referenciados abordam as diferentes representações (verbal, pictórica, decimal, fracionária e percentagem) e os diversos significados (parte-todo, quociente, operador, razão e medida) dos números racionais.

O teste inicial é constituído por trinta e cinco itens sendo vinte e dois referentes à representação de números racionais, sete de comparação, três de ordenação e dois sobre densidade e o teste final foi elaborado com trinta e dois itens sendo dezoito sobre representação, dez de comparação, três de ordenação e dois sobre densidade.

O quadro seguinte resume o tipo de questões apresentadas nos testes inicial e final, respetivos significados e representações utilizadas para cada uma das questões de modo a facilitar essa comparação.

Quadro 3 – Identificação das questões apresentadas no teste inicial e final

Tipos de questão	Significados	Representação	Questão	Teste inicial	Teste final
Representação de números racionais	Parte-todo	Fração Pictórica Decimal Percentagem	Representação de uma parte dada a unidade Reconstrução da unidade	**1. - 5.** **14.**	**3.** **6.**
	Operador	Fração Decimal Percentagem	Identificação de quantidades utilizando o número racional como operador Identificação da quantidade referente à unidade utilizando o número racional como operador Cálculo de diferentes quantidades utilizando o número racional como operador	**6.** **11.** **15.**	**7.** **8.** **13.**
	Quociente	Fração	Partilha equitativa de uma determinada quantidade contínua	**13.**	**1.1**
	Medida	Fração Pictórica Decimal Percentagem	Localização de números racionais na reta numérica graduada	**8.**	**14.**
Comparação e ordenação	Razão	Verbal Fração	Comparação da razão entre dois números racionais envolvendo a rapidez de execução de uma tarefa	**12.**	**1.2 - 12.**
	Medida	Fração Decimal Percentagem	Comparação e ordenação de vários números racionais sem ou com reta numérica não graduada Comparação de dois números racionais dados	**2.** **7.**	**2. – 11.** **10.**
Densidade de números racionais	Medida	Fração Decimal	Identificação de numerais decimais num intervalo de dois numerais decimais consecutivos Identificação de números fracionários num intervalo de dois números fracionários consecutivos	**9.** **10.**	**5.** **4.**

Representação de números racionais

As questões sobre representação de números racionais colocadas nos testes inicial e final incidem essencialmente nos significados parte-todo e operador seguindo-se os significados medida, quociente e razão. Estes itens recaem na conversão da representação pictórica em fração, fração, numeral decimal e percentagem, na construção e reconstrução da unidade utilizando grandezas contínuas ou discretas, na identificação de números racionais nas suas diferentes formas numa reta numérica, na identificação de uma razão entre duas quantidades e em situações de partilha equitativa.

Alguns dos itens foram apresentados em contextos puramente matemáticos com quantidades discretas ou contínuas enquanto outros foram contextualizados com quantidades contínuas.

O quadro seguinte apresenta os resultados obtidos neste tópico nos dois testes realizados antes e depois do trabalho efetuado com os futuros professores do 1.º ciclo sobre os números racionais.

Quadro 4 – Desempenho dos estudantes no teste inicial e final sobre representação

	Teste Inicial			Teste Final		
Significados	N.º de itens	N.º de respostas corretas na turma (n=17)	% de respostas corretas	N.º de itens	N.º de respostas corretas na turma (n=16)	% de respostas corretas
Parte-todo	8	44	32,4%	4	47	73,4%
Operador	8	50	36,8%	8	79	61,7%
Quociente	1	0	0%	1	12	75%
Medida	5	42	49,4%	5	41	51,3%

De um modo geral, no teste inicial, a turma tem um desempenho baixo nos significados operador e parte-todo e regular nos significados razão e medida. No teste final os níveis de desempenho melhoram claramente nos significados parte-todo, operador e quociente e ligeiramente no significado medida. Apresentam menores dificuldades, principalmente, quando as questões estão associadas a representações pictóricas e decimais e maiores dificuldades quando estas incidem nas representações em fração, numeral misto e percentagem

No significado parte-todo a maioria dos estudantes consegue compreender que a unidade está contida no agregado das partes e, após definirem o valor da unidade conseguem representar todos os outros números racionais pedidos, revelando um bom desempenho na conversão da representação pictórica para a representação em fração, numeral misto e percentagem.

As respostas incorretas na representação dos numerais mistos prendem-se com a dificuldade na leitura do número dado e, por isso, não o conseguem representar pictoricamente. A dificuldade na leitura dos numerais mistos não foi evidenciada no teste inicial pois a maioria dos estudantes não respondeu a questões referentes a estes números racionais o que fez com que este tópico fosse analisado e discutido durante a execução das fichas de trabalho propostas.

Relativamente ao significado operador verifica-se uma melhoria acentuada no nível de desempenho de um teste para o outro pois os estudantes mostram-se proficientes na conversão de frações em frações decimais e, posteriormente numa representação em percentagem com auxílio à barra numérica ou ao algoritmo da divisão. Melhoram significativamente o seu desempenho pois utilizam o seu conhecimento sobre o algoritmo da multiplicação para determinar o valor pedido indiciando que os formandos inicialmente não se lembravam deste conteúdo e, depois da unidade temática, terem relembrado e assimilado.

Os estudantes com respostas corretas utilizam o algoritmo da divisão ou a divisão entre os termos de uma fração ou recorrem à barra numérica ou à regra de três simples para determinarem os valores pedidos. Alguns demonstram maior dificuldade na interpretação e compreensão dos problemas pois erram o cálculo do valor pedido por apresentarem os valores das quantidades dadas e não determinarem as pedidas ou por não conseguirem resolver o algoritmo da multiplicação ou por dificuldades em iterar os números dados.

Quanto ao significado quociente houve uma melhoria muito significativa entre a realização dos dois testes uma vez que os maus resultados apresentados no teste inicial prenderam-se com uma má leitura e interpretação do enunciado do problema e, consequentemente errarem o cálculo, apesar do raciocínio utilizado estar correto. No teste final não surgiram problemas com a interpretação do texto e, por isso, a maioria dos estudantes melhora os seus níveis de desempenho.

No que concerne ao significado medida os níveis de desempenho são semelhantes havendo uma ligeira melhoria no teste final o que evidencia uma boa compreensão deste tópico. Os bons resultados registados no teste inicial devem-se à identificação de números racionais simples enquanto no teste final os números a identificar eram mais complexos e daí não haver uma melhoria significativa no nível de desempenho dos estudantes.

As respostas corretas, no teste inicial, prendem-se com a facilidade na identificação de números racionais na forma de numerais decimais ou na forma de frações próprias ou impróprias simples e maior dificuldade quando as frações são mais complexas evidenciando compreensão da noção partitiva da fração pois recorrem, frequentemente, à divisão dos termos da fração para poder identificar o na reta numérica graduada.

As respostas corretas, no teste final, estão associadas à compreensão da graduação das retas numéricas dadas bem como ao reconhecimento do número de partes em que cada unidade era dividida, uma vez que os valores solicitados eram frações complexas. Nestes itens os estudantes recorrem com menos frequência à divisão entre os termos da fração para representar os números racionais apresentando os valores pedidos na forma de fração, evidenciando maior facilidade na compreensão da noção quantitativa da fração.

O significado razão aparece no teste inicial numa questão simples e contextualizada por uma representação pictórica de rapazes e raparigas e verificou-se que a maioria dos estudantes não teve dificuldade em estabelecer a razão pedida uma vez que apenas 52,9% conseguiram responder corretamente. No teste final, não foi colocada nenhuma questão semelhante a esta por se considerar que os estudantes tinham entendido este tipo de situações e, por isso, o seu nível de desempenho seria bastante significativo testando-se este significado no tópico sobre comparação de números racionais.

Comparação de números racionais

Os itens sobre comparação de números racionais colocados nos testes inicial e final incidem essencialmente nos significados medida e razão. Estas questões abordam a comparação de dois números racionais nas suas diversas representações.

O quadro seguinte apresenta os resultados obtidos neste tópico nos dois testes realizados.

Quadro 5 – Desempenho dos estudantes no teste inicial e final sobre comparação

	Teste Inicial			Teste Final		
Significados	N.º de itens	N.º de respostas corretas na turma (n=17)	% de respostas corretas	N.º de itens	N.º de respostas corretas na turma (n=16)	% de respostas corretas
Medida	6	36	35,3%	8	111	86,7%
Razão	1	5	29,4%	2	18	56,3%

Da análise do quadro acima verifica-se uma melhoria muito significativa no nível de desempenho para o significado medida evidenciando que após a discussão deste tópico os estudantes assimilaram as regras de comparação de números racionais nas suas diferentes formas. Assim, passaram a ter menos dificuldades na comparação de dois numerais decimais pois têm em atenção o número de casas decimais bem como o seu valor posicional e, no caso dos números fracionários, têm maior cuidado em perceber se as frações têm igual numerador e denominador ou se são diferentes e determinam frações equivalentes às dadas sempre que possível para facilitar a comparação.

No significado razão a evolução no nível de desempenho não é tão grande pois os estudantes continuam a manifestar grandes dificuldades em expressar um número racional como uma razão e a encontrar argumentos válidos para justificar as mesmas.

Ordenação de números racionais

Os itens acerca da ordenação de números racionais colocados nos testes inicial e final incidem no significado medida e solicitam a ordenação de vários números racionais nas suas diversas representações. No teste inicial foram apresentados três séries de números racionais – uma só com decimais, outra só com fracionários e uma terceira com decimais e fracionários. No teste final foram apresentadas duas séries com números racionais nas suas diversas formas de representação em que numa delas os estudantes teriam que os colocar numa reta numérica não graduada, tendo as questões apresentadas neste teste um grau de dificuldade superior.

O quadro seguinte apresenta os resultados obtidos neste tópico nos dois testes realizados.

Quadro 6 – Desempenho dos estudantes no teste inicial e final sobre ordenação

	Teste Inicial			Teste Final		
Significados	N.º de itens	N.º de respostas corretas na turma (n=17)	% de respostas corretas	N.º de itens	N.º de respostas corretas na turma (n=16)	% de respostas corretas
Medida	3	29	56,9%	2	13	40,6%

A análise global efetuada aos resultados obtidos evidencia um nível de desempenho inferior de um teste para o outro. No entanto, uma análise mais minuciosa permite verificar que o desempenho dos estudantes melhorou no teste final se forem apenas comparados os itens semelhantes nos dois testes, uma vez que, se obtive 62,5% de respostas corretas no teste final. O desempenho dos estudantes piorou bastante quando foram confrontados com a ordenação e a colocação de números racionais nas diferentes formas numa reta numérica não graduada pois a principal dificuldade passou pela graduação da referida reta e, por isso, apenas 18,8% o conseguiram o que fez baixar a taxa de desempenho.

Densidade de números racionais

Os itens relativos à densidade dos números racionais são idênticos nos dois testes e o quadro seguinte mostra o nível de desempenho dos estudantes, sendo a primeira questão relativa aos numerais decimais e a segunda aos fracionários.

Quadro 7 – Desempenho dos estudantes no teste inicial e final sobre densidade

	Teste Inicial			Teste Final		
Representação	N.º de itens	N.º de respostas corretas na turma (n=17)	% de respostas corretas	N.º de itens	N.º de respostas corretas na turma (n=16)	% de respostas corretas
Numeral decimal	1	12	70,6%	1	13	81,3%
Fração	1	5	29,4%	1	12	75%

No que concerne à densidade de números racionais na forma de numerais decimais observa-se que os resultados são semelhantes aos obtidos no teste inicial, no entanto, o número de respostas corretas aumentou no teste final evidenciando que os formandos não apresentam dificuldades neste tópico. No caso da representação em fração verificou-se uma melhoria considerável no nível de desempenho dum teste para outro pois os estudantes perceberam que para determinar números fracionários num dado intervalo precisam de encontrar frações equivalentes às dadas com denominadores múltiplos dos dados, percebendo que existem vários números racionais nesse intervalo representados sob a forma de fração.

Síntese final

A análise comparativa do desempenho global dos estudantes nos testes inicial e final basear-se-á no quadro apresentado seguidamente de acordo com os tipos de questão abordados.

Quadro 8 – Desempenho global dos estudantes no teste inicial e final

	Teste Inicial			Teste Final		
Tipo de questão	N.º de itens	N.º de respostas corretas na turma (n=17)	% de respostas corretas	N.º de itens	N.º de respostas corretas na turma (n=16)	% de respostas corretas
Representação	23	145	37,1%	18	179	62,2%
Comparação	7	41	34,5%	10	129	80,6%
Ordenação	3	29	56,9%	2	13	40,6%
Densidade	2	17	50%	2	25	78,1%

Da análise dos resultados indicados verifica-se que os estudantes obtiveram melhores níveis de desempenho, no teste inicial, nos itens referentes à ordenação e densidade de números racionais e piores nos itens relativos à comparação e representação. No teste final, os níveis de desempenho melhoram significativamente em todos os itens à exceção da ordenação de números racionais.

Os resultados apresentados no teste final são bastante satisfatórios em todas as categorias (oscilando entre 62,2% e 80,6%) pois após a discussão dos tópicos abordados sobre os números racionais os estudantes recordaram os assuntos estudados há bastante tempo e assimilaram-nos, melhorando a sua proficiência neste teste. A questão sobre ordenação apresenta um decréscimo na percentagem de respostas corretas pois, como foi referido anteriormente, uma das questões apresentava um grau de dificuldade muito superior às questões do teste inicial.

O aumento do nível de desempenho em todos os tipos de questão pode estar relacionado com o facto das tarefas colocadas no teste final serem semelhantes às do teste inicial bem como com as características da turma pois os estudantes mostraram-se participativos e empenhados nas tarefas propostas nas aulas em que foram apresentados e discutidos os tópicos referentes aos números racionais.

No teste inicial os alunos apresentam melhores níveis de desempenho quando as questões referem-se a representações pictóricas, fracionárias simples e numerais decimais em todos os tipos de questão enquanto no teste final para além das representações pictóricas e numerais decimais os estudantes melhoram o seu desempenho com as representações em numerais mistos, fracionárias complexas e percentagens.

Relativamente aos significados dos números racionais, no teste inicial, obtiveram-se níveis de desempenho entre 0% (quociente) e 45,6% (medida) evidenciando que os estudantes já não se lembravam dos tópicos estudados há muitos anos e não dominavam de modo satisfatório estes conhecimentos para além de mostrarem grande dificuldade na leitura e interpretação dos enunciados. No teste final, os níveis de desempenho variam entre 56,3% (razão) e 75% (quociente) demonstrando um maior aprofundamento e consolidação dos tópicos trabalhados bem como uma maior compreensão e facilidade na interpretação dos enunciados propostos.

O significado de razão continua a ser aquele em que os estudantes revelam maiores dificuldades na sua compreensão pois na maioria das vezes não conseguem atribuir um significado para a razão dada ou argumentos válidos para o seu aparecimento.

Verifica-se também, quer no teste inicial quer no teste final, que muitos formandos não respondem aos últimos itens dos testes o que indiciará dificuldades na gestão do tempo para a conclusão dos mesmos devido ao seu ritmo ser muito lento.

Capítulo 7

Conclusões

Neste capítulo far-se-á uma breve síntese do estudo, destacando-se o problema inicial, as ideias principais do quadro teórico e a metodologia adotada. De seguida, apresentar-se-ão as conclusões do estudo, focando o desempenho dos futuros professores de 1.º ciclo no que concerne à representação, comparação, ordenação, equivalência e densidade de números racionais percorrendo as diferentes representações e significados de número racional de modo a dar resposta às questões desta investigação. Por outro lado, destacar-se-ão as dificuldades manifestadas e as estratégias utilizadas pelos futuros professores de 1.º ciclo na resolução dos problemas apresentados, bem como o tipo de conhecimentos manifestados durante esta investigação.

1. Síntese do estudo

Como referido anteriormente o conceito de número racional é complexo, sofisticado e de difícil entendimento quer para alunos quer para os futuros professores de 1.º ciclo que frequentam a formação inicial, constatando-se grandes dificuldades na compreensão de conceitos tais como representação, comparação, ordenação, equivalência e densidade de números racionais. Inúmeros estudos (Simon, 1990; Ball, 1990; Simon & Blume, 1992; Zazkis & Campbell, 1994) sugerem que os futuros professores do ensino básico necessitam aprofundar os conceitos matemáticos abordados nestes níveis de ensino, especialmente, números e operações a partir das perspetivas pedagógica e matemática, tornando-se premente ajudá-los a superar estas dificuldades, tal como referem Tirosh, Fischbein, Graeber e Wilson (1998).

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), os números racionais começam a ser trabalhados com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, utilizando modelos e representações simples em forma de fracção e, de seguida, será aprofundado recorrendo a problemas que permitam trabalhar os significados das frações (quociente, parte-todo e operador) e que permitam relacionar as representações na forma decimal e fracionária em situações contextualizadas ou não e, por isso, estas devem ser trabalhadas com os futuros professores de 1.º ciclo do ensino básico.

É referido ainda que o trabalho com os números racionais, neste ciclo, deverá ser desenvolvido a partir da resolução de problemas de diversos tipos e em contextos variados que se relacionam com situações de quotidiano e que deverão ser analisadas as estratégias utilizadas bem como os reultados obtidos. Espera-se que a valorização de diferentes modos de resolução possam estimular os estudantes a melhorar a sua compreensão e processo de resolução bem como a avaliar os resultados obtidos e os cálculos efetuados.

Assim, através deste estudo, pretendo compreender o conhecimento dos futuros professores do 1.º ciclo sobre números racionais relativamente a: (i) formas de representação de números racionais e das suas conexões; (ii) ordenação, comparação, equivalência e densidade de números racionais e as dificuldades que manifestam na aprendizagem dos números racionais antes e após a unidade temática realizada de acordo com os pressupostos preconizados no programa de matemática para o ensino básico, nomeadamente, na exploração destes tópicos em contextos diversos e de forma a explorar as capacidades dos estudantes no que concerne à resolução de problemas.

O quadro teórico aborda vários aspetos relacionados com a aprendizagem dos números racionais relativamente a (i) conceito de número racional; (ii) representação de número racional; (iii) comparação, ordenação e equivalencia de números racionais; e (iv) densidade de números racionais. Charalambous (2007), Pitta-Pantazi (2007) e Lamon (2001) distinguem os diversos significados – parte-todo, razão, operador, quociente e medida – e representações de um número racional e Lamon (2001) refere que estes significados só podem ser compreendidos num sistema global de contextos, significados, operações e representações.

Relativamente às representações, o NCTM (2007) destaca a importância da utilização e do desenvolvimento de diferentes representações: (i)verbal-pictórica; (ii) geométrica; (iii) fracionária; (iv) decimal; e (v) percentagem de forma a desenvolver a capacidade de raciocínio e de resolução de problemas. Por outro lado, Ponte (2005), Vergnaud (1991, 1994) e Onuchic e Allevato (2008) realçam que a criação de tarefas com números racionais em que os estudantes se envolvam em atividades matemáticas ricas e produtivas são importantes para o tratamento de conceitos, procedimentos e representações dferentes.

O estudo tem por base uma unidade temática na formação inicial de professores, com o tema dos números racionais, elaborada de acordo com as orientações do Programa de Matemática (2007) e com a revisão da literatura sobre o assunto e onde são abordadas com questões típicas colocadas aos alunos do ensino básico mas com um grau de dificuldade superior por serem aplicadas aos futuros professores de 1.º ciclo. Os exercícios e problemas propostos durante a realização da unidade temática foram contextualizados em situações reais e matemáticas utilizando grandezas discretas e contínuas.

A discussão dos problemas na turma em pequeno e em grande grupo são privilegiados durante a unidade temática de forma a proporcionar momentos ricos de aprendizagem durante a sistematização de ideias matemáticas e a discussão de processos de resolução e de resultados de problemas. São criados ambientes de sala de aula propícios à comunicação, isto é, encorajando os estudantes a expor dúvidas ou dificuldades, a colocar questões, verbalizando os seus raciocínios e refletindo sobre os seus erros ou dos colegas.

A metodologia de investigação, deste estudo, segue uma abordagem mista, qualitativa e quantitativa, no quadro do paradigma interpretativo. Os participantes no estudo são alunos da formação inicial do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico que pretendem ser futuros professores de 1.º ciclo. Na recolha de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: (i) teste inicial; (ii) teste final; e (iii) produções escritas dos futuros professores durante a unidade temática que foram analisados de forma a dar resposta às questões deste estudo.

2. Conclusões do estudo

Neste ponto expor-se-ão as principais conclusões do estudo, organizadas de acordo com as questões de investigação. Por isso, destacar-se-ão as estratégias e as dificuldades apresentados pelos estudantes relativamente a: (i) representações de números racionais; (ii) comparação, ordenação e equivalência de números racionais; e (iii) densidade de números racionais antes e depois da unidade temática. Far-se-á também uma breve reflexão do modo como foram desenvolvidas as atividades propostas durante a unidade temática.

Antes da Unidade temática

Os estudantes mostram uma maior proficiência na resolução de problemas envolvendo a conversão das representações pictóricas em fração e maiores dificuldades na conversão destas em numeral decimal e percentagem, evidenciando como refere Stacey et al. (2001), que muitos futuros professores não compreendem completamente as relações entre os decimais, os números inteiros, as frações, etc. Mostram possuir uma boa compreensão da noção da fração como número partitivo pois, na maioria das vezes, utilizam a divisão dos termos da fração ou o algoritmo da divisão para fazerem as conversões em numeral decimal ou percentagem. No entanto, alguns estudantes demonstram dificuldades na divisão dos termos de uma fração inferior à unidade e, por esse motivo, frequentemente, erram o resultado dessa divisão, não percebendo a diferença entre dois números com diferente número de casas decimais, por exemplo, 0,33 e 0,033 pois são capazes de atribuir os dois valores à fração $\frac{1}{3}$.

Na conversão da representação fracionária em percentagem, os estudantes revelam dificuldades na apresentação desses valores pois demonstram dificuldade na (i) compreensão do símbolo % pois confundem os valores $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ %, representando-os indiscriminadamente, ignorando o símbolo de percentagem, bem como (ii) utilizam incorretamente a "regra do numerador" dado que associam o símbolo percentagem à colocação de uma vírgula à esquerda do número apresentando as seguintes igualdades 110% = 0,110 ou 0,9 = 9%, tal como referem Parker e Leinhardt (1995).

A estratégia utilizada na conversão da representação fracionária para numeral decimal é a divisão dos termos da fração ou algoritmo da divisão de forma a obter a representação decimal que é a que compreendem melhor. Na conversão da fração em percentagem recorrem, frequentemente, à divisão dos termos da fração e à multiplicação do valor decimal obtido por cem, e não determinam uma fração decimal equivalente à dada.

No que concerne à construção das partes a partir de uma unidade, no significado parte-todo, os estudantes demonstram um bom nível de desempenho nas representações pictóricas e fracionária, quer as quantidades sejam contínuas ou discretas, pois é um tópico muito trabalhado nos primeiros anos de escolaridade e, que por isso, possa ser considerado um conhecimento especializado deste tópico. Por outro lado, na reconstrução da unidade a partir das partes, o desempenho dos futuros professores é menos positivo, verificando-se que não conseguem relacionar a fração dada com o número de partes que possuem bem como perceber em quantas partes está dividida essa unidade. McCloskey e Norton (2009) realçam a dificuldade em fracionar o todo ou as partes em frações unitárias para depois iterar para reconstruir a unidade ou uma parte não unitária do todo, o que se verifica também com os futuros professores.

Na construção das partes, a maioria consegue compreender que a unidade está contida no agregado das partes e, por isso, consegue definir com facilidade o valor da quantidade pedida quer a quantidade seja contínua ou discreta. No entanto, na reconstrução da unidade, esta tarefa torna-se mais complexa pois apresentam maiores dificuldades na definição da unidade uma vez que a fração dada é imprópria, não compreendendo que a unidade está contida no agregado de partes dado.

Na identificação de números racionais com auxílio da reta numérica os estudantes resolvem com maior facilidade as situações em que os números a identificar aparecem na forma de numerais decimais ou na forma de frações simples que possam ser convertidas em dízimas finitas. As estratégias utilizadas na marcação de números racionais na reta numérica são a divisão dos termos da fração para a converter em numeral decimal quando a dízima é finita ou a contagem do número de partes em que a unidade está dividida para perceber quantas partes têm relativamente ao todo.

De acordo com Bright et al. (1988) o bom desempenho poderá estar relacionado com o facto da reta numérica poder ser tratada como uma régua, uma vez que um comprimento representa a unidade e sugere a iteração da unidade e subdivisões simultâneas de todas as unidades iteradas e não existe separação visual entre as unidades consecutivas mostrando que o modelo é totalmente contínuo.

Por outro lado, os estudantes manifestam maiores dificuldades em marcar frações mais complexas na reta numérica ou quando não possam ser convertidas em dízimas finitas evidenciando dificuldades na compreensão quantitativa da fração. Bright et al. (1988) referem que os alunos manifestam dificuldades em marcar frações na reta numérica quando o número de partições da reta é diferente do denominador das frações ou quando o número de partes é um múltiplo ou um submúltiplo do denominador, sugerindo uma noção imprecisa e inflexível da fração.

Os estudantes demonstram maior facilidade na comparação e ordenação de números racionais na forma de numeral decimal pois compreendem o conceito de numeral decimal. Por outro lado, revelam maior dificuldade na comparação de números racionais na forma de fração ou nas duas formas de representação em simultâneo pois não conseguem arranjar estratégias válidas de comparação ou utilizam argumentos inválidos para a comparação de frações com o mesmo numerador ou com o mesmo denominador. Destaca-se que os estudantes que comparam e ordenam corretamente os números racionais nas suas diferentes formas são aqueles que os convertem na forma de numeral decimal através da divisão dos termos da fração ou do algoritmo da divisão, raramente utilizam a estratégia de determinar uma fração equivalente com o mesmo denominador, que supostamente teria sido a que aprenderam na sua escolaridade.

Relativamente à densidade de números racionais, os estudantes demonstram um bom nível de desempenho na identificação de números na forma de numeral decimal pois aumentam o número de casas decimais dos números dados para poderem identificar um ou mais números nesse intervalo. Por outro lado, demonstram maiores dificuldades na identificação de números fracionários entre dois dados pois consideram, na maioria das vezes, que não existem números entre dois fracionários. Tal como mencionam Monteiro e Pinto (2007) este erro pode ser explicado pela sequência discreta dos números inteiros a que os alunos estão habituados e, deste modo, considerarem que não podem existir números racionais entre, por exemplo, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$.

Os estudantes que determinam números racionais entre dois fracionários utilizam a divisão entre os termos da fração ou o algoritmo da divisão para converter os valores dados na forma decimal e, de seguida, identificar os números pedidos evidenciando que demonstram maior à vontade com este tipo de representação.

As estratégias mais utilizadas, na maioria das questões, são regras de três simples, algoritmos das operações, divisões dos termos da fração que são estratégias muito formais demonstrando que há um formalismo matemático muito enraizado na formação destes futuros professores. Utilizam algumas estratégias mais informais e condizentes com as estratégias utilizadas pelos alunos do 1.º ciclo, tais como as representações pictóricas para relacionar com as representações fracionárias.

Revelam maior proficiência nos problemas que versaram os significados de medida e operador (45,6% e 36,8%, respetivamente), pois as representações mais abordadas foram as fracionárias simples e as decimais, e menor capacidade de resolução nos significados parte-todo, razão e quociente obtendo-se respetivamente, 32,4%, 29,4% e 0%.

O significado medida é aquele onde se verificam melhores níveis de desempenho pois as representações dadas eram numerais decimais e/ou frações simples facilmente convertíveis em numerais decimais (dízimas finitas). Os problemas relacionados com este significado prendem-se com a utilização de retas numéricas, comparação, ordenação e densidade de números racionais e os estudantes utilizam com frequência a divisão dos termos da fração para a converter em numeral decimal e responder. No entanto, este resultado não é satisfatório pois muitos erram a conversão da fração em numeral decimal ou não respondem à questão colocada.

No significado operador manifestam dificuldades no cálculo direto de números racionais quer estes apareçam na forma de fração, numeral decimal, percentagem ou em linguagem verbal, evidenciando dificuldades na compreensão das regras das operações de multiplicação. Por exemplo, na multiplicação de um número fracionário por um inteiro determinam o denominador comum aos dois termos para efetuarem o cálculo, na multiplicação de um numeral decimal por um inteiro ou de uma percentagem erram na colocação da vírgula apesar do valor estar correto, pois fazem a contagem do número de casas decimais da esquerda para a direita.

No significado parte-todo revelam maior nível de desempenho na construção das partes uma vez que este tópico constava dos antigos programas de matemática do segundo ciclo do ensino básico e, por isso, era um assunto que estava muito presente nestes estudantes. Por outro lado, manifestam maiores dificuldades na reconstrução da unidade pois a partir de uma fração imprópria não conseguem facilmente relacionar a grandeza correspondente à unidade, quer esta seja contínua ou discreta, uma vez que na maioria das vezes relacionam a quantidade dada à unidade e, a partir desse valor, representam as outras quantidades.

No significado razão apresentam um nível de desempenho fraco pois nos problemas apresentados os estudantes determinam frações equivalentes às dadas para comparar duas razões, no entanto, não conseguem justificar as suas opções ou arranjar argumentos válidos para a apresentação dos valores apresentados. No entanto, conseguem, a partir de uma representação pictórica, identificar o significado da razão dada.

O significado quociente foi o que obteve piores resultados principalmente numa situação de partilha equitativa por manifestarem dificuldade na leitura e interpretação dos termos utilizados no enunciado dos problemas. Apresentam uma fração como um quociente entre o número de objetos dados e o número de pessoas, no entanto, o valor do número de pessoas é incorreto, evidenciando dificuldades na compreensão do enunciado e do resultado obtido.

Estes resultados mostram que o conhecimento dos futuros professores sobre números racionais é deficiente uma vez que as percentagens obtidas em todas as questões foram inferiores a 50%, manifestando grandes dificuldades na leitura e interpretação dos enunciados e evidenciando que os conceitos sobre números racionais abordados, neste teste inicial, não estão compreendidos e consolidados.

Oliveira (1994) considera que as principais dificuldades relativamente à compreensão do conceito reportam-se: (i) à transposição de conceções sobre os números inteiros para os números racionais; (ii) à incompreensão da relação parte-todo; (iii) ao não reconhecimento da unidade de referência; e (iv) ao não terem em conta o sentido da covariação.

Segundo vários autores (Charalambous & Pantazi, 2007; Monteiro & Pinto, 2005) o desenvolvimento de competências numéricas relativamente aos números racionais é considerado um dos temas mais complexos e um dos maiores obstáculos à maturidade matemática dos alunos do ensino básico sendo a causa de várias conceções erróneas que se manifestam e perduram durante toda a escolaridade.

Com a realização do teste inicial foi possível verificar que a maioria dos futuros professores de 1.º ciclo evidencia um conhecimento comum (*CCK*) sobre números racionais nomeadamente, formas de representação, comparação, ordenação, equivalência e densidade. Tal como refere Shulman (1986) é um conhecimento dos professores mas também um conhecimento comum a muitas outras profissões que fazem uso da Matemática pois nesta fase os estudantes não conseguem arranjar argumentos válidos para justificar as resoluções apresentadas, apresentam resoluções com regras e processos rotineiros e manifestam dificuldades na compreensão dos resultados obtidos. Por outro lado, percebe-se no trabalho com os números racionais que os futuros professores evidenciam dificuldades na interpretação e resolução de determinados problemas por não o entenderem ou por não perceberem o significado de número racional associado ao número.

Unidade temática sobre números racionais

Na preparação da unidade temática foram considerados os conhecimentos e as dificuldades evidenciados pelos futuros professores de 1.º ciclo relativamente aos números racionais, antes da unidade temática e recolhidos através do teste inicial. Esta unidade temática foi constituída por um conjunto de tarefas que abordam os subtópicos onde foram detetadas as maiores dificuldades de modo a colmatá-las, através das discussões em pequeno e grande grupo.

As tarefas propostas são de natureza diversa de modo a que os alunos desenvolvam uma "*actividade matemática rica e produtiva*" tal como refere Ponte (2002). Estas foram selecionadas de acordo com os objetivos da aula, com o tipo de estudantes e com o seu grau de desafio matemático e de estrutura.

A estrutura desta unidade teve em conta que o pleno conhecimento dos números racionais depende do conhecimento que se tem das suas diferentes representações, tal como é referido nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007). Pretendia-se que, no final da unidade de ensino, os futuros professores fossem capazes de transitar entre as diferentes representações bem como ser expeditos a escolher as representações mais eficazes em cada contexto ou situação problemática.

Os problemas propostos tiveram, sempre que possível, contextos reais e significativos de modo a ajudar os futuros professores a diminuírem o fosso existente entre o seu conhecimento informal ou pessoal e o conhecimento formal da Matemática e a construírem um novo conhecimento matemático com significado (Gravemeijer, 2005). Esta unidade pretende aproximar o conhecimento formal adotado pelos futuros professores e o conhecimento informal com que terão de ensinar estes tópicos aos alunos dos primeiros anos de escolaridade e de acordo com as indicações preconizadas no Programa de Matemática (2007) para o 1.º ciclo.

No decorrer da unidade temática os estudantes foram organizados em pequenos grupos (três elementos) para que o trabalho estivesse centrado neles e de modo que durante a realização das fichas pudessem identificar, analisar e discutir as estratégias que lhes permitiriam resolver as questões colocadas. Na maioria das vezes o desenvolvimento do trabalho centrou-se nos grupos, no entanto, quando foram identificadas questões mais problemáticas estas foram discutidas conjuntamente, de modo a que cada grupo conseguisse ultrapassar a dificuldade e a esclarecer as dúvidas suscitadas.

Após a realização destas fichas de trabalho, foram realizados momentos de confrontação dos resultados obtidos, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas de modo a ouvir e discutir os raciocínios elaborados pelos futuros professores e a promover um forte envolvimento dos formandos na discussão dos conceitos em estudo e a analisar situações de ensino-aprendizagem.

Nesta fase a professora pedia aos elementos de cada grupo que partilhem as suas resoluções com o grupo turma e sempre que necessário acrescentou os seus comentários ou colocou questões de forma a clarificar ou aprofundar algum aspeto considerado importante. Considera também que as aprendizagens que os estudantes fizerem durante este percurso se lhes permitirem desenvolver um conjunto de competências que contribuam para que sejam cidadãos dotados de uma literacia matemática adequada à sua vida profissional.

Foram analisadas e discutidas em grande grupo as estratégias formais utilizadas, pelos estudantes, na resolução dos problemas e tarefas propostas e, após essa análise, foram discutidas estratégias mais informais de resolução dos mesmos problemas e tarefas para que, de acordo com Hiebert e Behr (1988), a aprendizagem seja desenvolvida com base no princípio de construção do conhecimento, não privilegiando regras e processos rotineiros ou estratégias excessivamente mecânicas de resolução de problemas. Assim, para cada tópico e/ou conceito analisado sobre os números racionais a professora foi realçando e analisando estratégias mais informais de resolução que podem ser utilizadas e compreendidas pelos alunos de primeiro ciclo.

Foram também privilegiadas a análise aos raciocínios efetuados pelos formandos e a capacidade de argumentar e compreender a variedade de representações para as ideias matemáticas e a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra. Deste modo, pretendeu-se ajudar o futuro professor a compreender o modo como os alunos aprendem, pensam e fazem Matemática melhorando a formação e a prática docente. Esta compreensão permitirá ao futuro professor apoiar e potenciar as capacidades dos seus alunos, esclarecer estratégias, conjeturas e dificuldades manifestadas pelos seus alunos e que estão de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) e com as Normas do NCTM (2007).

De acordo com estes documentos, os professores deverão ajudar os alunos a compreenderem que as representações constituem ferramentas para a modelação e a interpretação de fenómenos de natureza matemática encontrados em diversos contextos, eventualmente utilizando mais do que uma representação. É também importante realçar que os alunos deverão compreender que as múltiplas representações, criadas ou não por eles, estão sujeitas a múltiplas interpretações e que a comunicação daquilo que foi entendido e a utilização de representações alternativas são formas de consolidação da compreensão.

O desenvolvimento desta unidade temática tem por base os princípios preconizados no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) quanto ao desenvolvimento do raciocínio matemático e da comunicação matemática. Este documento, destaca que para desenvolver a capacidade de raciocínio é necessário proporcionar experiências que proporcionem oportunidade de acompanhar, elaborar e justificar raciocínios e que este processo é estimulado quando se colocam questões como *Por que será que isso acontece?*, *O que acontece se ..?* de modo a que expressem as suas ideias e clarifiquem e organizem as suas ideias.

Quanto ao desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, os alunos devem adquirir e usar terminologia e simbologia apropriadas através de um envolvimento em situações de comunicação oral e escrita e em interações do tipo professor-aluno e aluno-aluno. Estas situações devem proporcionar momentos em que disponham de oportunidades para interpretar textos, apresentar ideias e colocar questões, expor dúvidas e dificuldades recorrendo à linguagem natural e simbólica. Assim, os estudantes são convidados a fundamentar o trabalho que desenvolveram e a justificar o modo como pensaram e a razão desse modo de pensar.

Estes momentos procuraram integrar o conhecimento do conteúdo e o conhecimento didático de modo a proporcionar aos estudantes experiências de aprendizagem que revelem aspetos didáticos que devem atender no ensino da Matemática (Albuquerque et al., 2006; Ponte & Chapman, 2008).

Após a Unidade temática

Os resultados obtidos no teste final mostram um nível de desempenho superior nas questões referentes à representação, comparação e densidade de números racionais, cujas percentagens de respostas corretas foram, respetivamente, 62,2%, 80,6% e 78,1%. A ordenação de números racionais (com uma percentagem de acerto de 40,6%) foi o tópico onde se obtiveram piores desempenhos pois os estudantes foram confrontados com a colocação de números racionais numa reta numérica não graduada. A dificuldade da questão não se relacionou propriamente com a ordenação dos números dados mas com a graduação da reta para colocação dos números, pois a maioria dos estudantes não conseguiu perceber o modo como teria de graduar a reta para posteriormente fazer a respetiva marcação.

O tópico relativo à comparação de números racionais foi o que obteve o melhor índice de desempenho (80,6%) e comparativamente ao teste inicial um aumento mais significativo, evidenciando que os estudantes não têm dificuldades na comparação dos numerais decimais e melhoram também o seu desempenho na comparação dos numerais mistos, frações e percentagens.

Na comparação dos numerais decimais os estudantes utilizam as mesmas estratégias do teste inicial, comparando as décimas, centésimas e milésimas. Na comparação dos números fracionários determinam frações equivalentes com o mesmo denominador ou representam pictoricamente as frações dadas e comparam a área sombreada ocupada. Na comparação dos numerais mistos utilizam a decomposição do número para a conversão numa fração imprópria e utilizam as estratégias utilizadas na comparação de frações.

A densidade de números racionais é um tópico em que se verifica um bom nível de desempenho (78,1%), sendo as questões colocadas eram semelhantes às do teste inicial, evidenciando-se que os estudantes compreenderam que existem outros números racionais entre dois números dados. Demonstram uma maior facilidade na determinação de dois ou mais números decimais num dado intervalo pois recorrem ao aumento do número de casas decimais para definirem os valores pedidos e recorrem à determinação de frações equivalentes com denominadores múltiplos dos dados para identificarem duas ou mais frações num dado intervalo.

Na representação de números racionais obteve-se um nível de desempenho de 62,2% que apesar de ser superior ao obtido no teste inicial não é muito elevado. Este nível de desempenho pode ser explicado pelo facto de se terem utilizado representações mais complexas que as colocadas no teste inicial que exigiam da parte dos estudantes uma compreensão da noção quantitativa de fração e da decomposição de frações impróprias ou de numerais mistos para a resolução das questões.

Na reconstrução da unidade os valores pedidos e as quantidades dadas eram também mais complexos que os utilizados no teste inicial, evidenciando-se que ainda existem estudantes que manifestam dificuldades na resolução deste tipo de questões, pois não conseguem relacionar o número racional dado com a quantidade de objetos e, assim, atribuir o valor correto à unidade. No entanto, verifica-se uma melhoria dos resultados obtidos relativamente ao teste inicial o que significa que um maior número de estudantes consegue reconstruir a unidade em situações que envolvem grandezas contínuas ou discretas.

O tópico relativo à ordenação de números racionais é aquele cujo nível de desempenho é mais fraco, uma vez que no teste final foi colocada uma questão de ordenação de números racionais nas suas múltiplas representações numa reta numérica não graduada. A grande dificuldade da questão não se prende com a ordenação propriamente dita mas com a graduação da reta numérica que dificultou que a maioria dos estudantes colocasse os referidos números na reta numérica. Na questão sobre ordenação semelhante ao teste inicial o nível de desempenho dos estudantes foi muito superior a 50% (teste inicial), no entanto, a segunda questão fez baixar o nível de desempenho uma vez que apenas 18,8% dos estudantes consegue responder corretamente à questão.

Do ponto de vista dos significados de número racional verifica-se que os estudantes tiveram um bom desempenho pois as percentagens de respostas corretas variaram entre 56,3% (razão) e 75% (quociente) evidenciando que, neste teste, notaram-se menores dificuldades na interpretação dos enunciados, assim como uma maior consolidação e aprofundamento dos tópicos relativos aos números racionais.

O significado de razão é o que apresenta um nível de desempenho mais baixo. Os estudantes conseguem representar a fração pedida e, por vezes, determinam corretamente as frações equivalentes necessárias à resolução do problema, no entanto, não são capazes de fundamentar adequadamente as suas opções e ideias e justificar os cálculos efetuados ou não percebem o significado de razão subjacente à fração e respondem incorretamente à questão colocada.

No significado de operador demonstram menor dificuldade em utilizar a linguagem verbal, as representações fracionárias, decimais e percentagens no cálculo direto (com uma percentagem de acerto de 61,7%) evidenciando uma maior compreensão dos números racionais como operador. Apresentam estratégias diferentes para resolver estas questões: a decomposição de frações impróprias ou percentagens em frações ou percentagens mais familiares, a conversão em numerais decimais ou a utilização de representações pictóricas (barra numérica).

O significado de medida apresenta um nível de desempenho de 69,9% que é ligeiramente superior ao obtido no teste inicial, sendo que os números racionais apresentados no teste final são mais complexos. Revelam uma maior compreensão deste significado uma vez que utilizam estratégias válidas para comparar e ordenar quantidades, no entanto, mostram uma menor proficiência na ordenação de números racionais quando as retas numéricas são não são graduadas pois tem dificuldades na graduação das mesmas.

No significado parte-todo o nível de desempenho dos estudantes aumenta expressivamente para 61,7%, pois recorrem com frequência às representações pictóricas ou à barra numérica para determinar os números racionais nas diferentes formas de representação. Evidenciam uma maior consolidação na compreensão deste tópico, sendo este um dos significados mais trabalhados durante toda a sua formação académica.

O significado de quociente é aquele em que o nível de desempenho melhorou substancialmente pois, após a discussão de problemas semelhantes durante a unidade temática, os estudantes interpretaram corretamente o problema proposto, não manifestando dificuldades na partilha equitativa de quantidades discretas ou contínuas. A maior dificuldade identificada neste tipo de questões, no teste inicial, prendia-se com a leitura e interpretação dos enunciados e não com a utilização de uma estratégia correta de resolução.

Durante a realização do teste final, após a unidade temática, os estudantes passaram a resolver os problemas e tarefas propostas tendo o cuidado de utilizar estratégias mais informais e apropriadas ao ensino da matemática no 1.º ciclo evidenciando uma maior compreensão dos tópicos abordados e um conhecimento mais especializado do conteúdo. A maioria dos estudantes utiliza, por vezes, estratégias mais informais como as representações pictóricas e a barra numérica para fazer conversões entre as diferentes representações e a equivalência de frações para comparar e ordenar e não apenas estratégias mais formais como a regra de três simples e os algoritmos das operações para resolver alguns dos problemas, como acontecia antes desta unidade temática. Desta forma, os futuros professores evidenciam ter-se apropriado de estratégias que desconheciam ou que não valorizavam e que podem ser usadas pelos alunos no 1.º ciclo.

Os estudantes revelam um conhecimento mais aprofundado sobre os tópicos de números racionais trabalhados evidenciando que estão a desenvolver um conhecimento próprio e único para planear e conduzir o ensino de determinado assunto (Hill & Ball, 2004). A discussão e reflexão em grande grupo sobre os números racionais durante a unidade temática poderá ter ajudado os futuros professores a refletirem sobre os métodos de resolução de problemas de alunos e a avaliar as estratégias utilizadas de modo a serem capazes de decidir se estão ou não corretos.

Para Ball, Thames e Phelps (2005; 2008) há situações da prática letiva em que é difícil distinguir o conhecimento comum do conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento especializado do conhecimento do conteúdo e dos alunos e, por isso, reforçam a importância do prosseguimento deste trabalho em prole do desenvolvimento profissional do professor.

3. Reflexão Final

A realização desta investigação constituiu um momento de aprendizagem bastante importante pois permitiu-me identificar os conhecimentos e as dificuldades sentidas, pelos futuros professores, acerca das diferentes formas de representação, comparação, ordenação e densidade dos números racionais, de modo a contribuir para o seu desenvolvimento profissional bem como para um melhor conhecimento da problemática do ensino e da aprendizagem dos números racionais. Por outro lado, este trabalho de investigação permitiu-me aumentar conhecimentos numa nova área de trabalho, potenciando algumas capacidades que não foram desenvolvidas ao longo do meu percurso académico.

O trabalho desenvolvido nesta investigação possibilitou-me a análise das experiências vividas pelos futuros professores com as diferentes representações de número racional, o que me permitiu compreender que estas podem contribuir para o desenvolvimento ou consolidação do seu conhecimento sobre estes tópicos e promover um tipo de ensino diferente daquele que conheceram enquanto alunos.

As tarefas realizadas durante a investigação deram-me oportunidade de contactar com os processos investigativos em educação matemática permitindo-me elaborar um plano de investigação tendo em conta as suas questões de investigação, metodologia a adotar, instrumentos de recolha de dados e respetiva análise de acordo com os objetivos definidos no estudo.

Apesar dos resultados desta investigação não poderem ser generalizados a outros estudos, ao verificar-se que a maioria dos participantes no estudo melhorou ou consolidou o seu conhecimento relativamente aos números racionais e sendo possível identificar as estratégias e as dificuldades manifestadas na resolução de problemas, este é um estudo que poderá ser de interesse para investigadores e, principalmente, formadores de professores que pretendam desenvolver trabalhos na mesma área.

As dificuldades manifestadas por alguns futuros professores de 1.º ciclo ao longo desta investigação sobre as diferentes formas de representação, comparação, ordenação e densidade de números racionais reforçam a necessidade de trabalhar os números racionais com diferentes tipo de unidades e quantidades tal como referem Monteiro e Pinto (2007). Ponte e Chapman (2007) referem que vários estudos (Simon, 1990; Ball, 1990; Simon e Blume, 1992; Zazkis e Campbell, 1994) sobre o conhecimento dos futuros professores sobre operações aritméticas são preocupantes relativamente à qualidade e adequação deste conhecimento ao ensino e, por isso, sugerem que estes tendem a necessitar de ajuda para aprofundar a compreensão matemática e pedagógica destes conceitos. Investigações anteriores sobre o conhecimento dos futuros professores relativamente ao tópico da divisão de frações (Ball, 1990a, 1990b; Tirosh, 2000) mostram que estes têm entendimentos diversos relacionados com os conceitos de número racional e das operações que influenciam a forma como podem ser ensinados. Deste modo, considero importante estudar o conhecimento que os futuros professores de 1.º ciclo possuem acerca das operações aritméticas com os números racionais pois é necessário compreender o conhecimento que futuros professores têm acerca destes tópicos e as formas como eles desenvolvem a compreensão dos conceitos de número racional e das operações de modo a serem capazes de identificar, reconhecer ou compreender um maior conjunto de significados diferentes ou representações das operações aritméticas.

Devido às restrições de tempo para o planeamento e realização desta investigação e da unidade temática sobre a qual incide, o estudo centrou-se essencialmente numa das dimensões do conhecimento matemático para ensinar números racionais: o conhecimento de conteúdo especializado (Hill & Ball, 2009). Ainda assim, os futuros professores foram começando a desenvolver alguns elementos do conhecimento pedagógico de conteúdo, nomeadamente, o conhecimento de conteúdo e do currículo e, como referi acima, o conhecimento de conteúdo e dos alunos. Assim, seria interessante, poder alargar, em investigações futuras, os domínios relativos ao conhecimento matemático para ensinar números racionais dos futuros professores de 1.º ciclo, em contextos diversos da formação inicial, englobando, por exemplo, a situação de prática de ensino supervisionada.

Referências

Afonso, N. (2005). *Investigação naturalista em educação – Um guia prático e crítico*. Porto: ASA Editores, S. A.

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). A Matemática na formação inicial de professores. Lisboa: APM e SPCE.

Azcárate, P. (1999). El conocimiento professional: Natureza, Fuentes, organización y desarollo. *Quadrante, 8,* 111–138.

Ball, D. L. (1990a). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90*(4), 449-466.

Ball, D. L. (1990b). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132-144.

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching : who knows mathematics well enough to teach the third grade, and how can we decide?. *American Educator,*fall 2005, 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special?. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bardin, L. (2009). *Análise de Conteúdo.* Lisboa: Edições 70, LDA.

Barnett, J, & Hodson, D. (2001). Pedagogical context knowledge: toward a fuller understanding of what good science teachers know. *Science Education*, *85*, 426-453.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. & Silver, E. A. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 92-127). Orlando, Florida: Academic Press, Inc.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R. & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323-341.

Behr, M.J., I. Wachsmuth, & T.R. Post. (1985). Construct a sum: a measure of children's understanding of fraction size. *Journal for research in mathematics education*, *16*(2), 120 - 131.

Behr, M. & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.). *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2nd ed.) (pp. 201–228). Boston: Allyn and Bacon.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator task. *Journal of Research in Mathematics Education*, *28*(1), 48-69.

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Orgs.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bogdan, R. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D. & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(3), 194-222.

Bright, G., Behr, M., Post, T. & Wachsmuth, I. (1988, May). Identifying fractions on number lines. *Journal of Research in Mathematics Education*, *19*(3), 215-232.

Carmo, H. & Ferreira, M. M. (1998). *Metodologia de investigação*. Lisboa: Universidade Aberta.

Carraher, D.W. (1996). Learning about fractions, in L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin and B. Greer (eds.). *Theories of Mathematical Learning* (pp. 241–266). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 293-316.

Chapman, O. (2007). Faciliting preservice teacher's development of mathematics knowledge for teaching arithmetic operations. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 341-349.

Costa, M. J. (2010). *A noção de percentagem no 2.º ciclo do ensino básico: Uma experiência de ensino* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Cruz, M. S., & Spinillo, A. G. (2004). Resolvendo adição de fracções através do simbolismo matemático e através de âncoras. *Quadrante, 13*(2), 3-29.

Denzin, N. R. (1978). *The research act: A theorethical introduction sociological methods*. New York: McGraw-Hill.

Fonseca, A. J. D. (1998). *A Tomada de decisões na escola – A área escola em acção*. Lisboa: Texto Editora.

Fortin, M. F. (2003). *O Processo de investigação – da concepção à realização*. Lisboa: Lusociência – Edições Técnicas e Científicas, Lda.

Gaio, A. & Duarte, T. O. (s/data). *O conhecimento matemático do professor do 1º ciclo*. Retirado em 18 de Setembro de 2011 de http://www.spce.org.pt/sem/03Gaio/

Gall, M. D., Gall, J. P. & Borg, W. R. (2003). *Educational research: An introduction*. New York: Longman Publishers, USA.

Ghiglione, R. & Matalon, B. (1997). *O Inquérito – teoria e prática*. Oeiras: Celta Editora, Lda.

Godino, J. D., Ruiz, F., Roa, R., Cid, E., Batanero, C. & Font, V. (2004). *Didáctica de la matemática para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada. Retirado em 28 de Dezembro de 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. D., Ruiz, F., Roa, R., Cid, E., Batanero, C. & Font, V. (2004). *Matemáticas para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada. Retirado em 28 de Dezembro de 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino/

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275 –285). Reston, VA: NCTM.

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematics learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176 –201). New York, NY: Routledge.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1 – 22). Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L.D. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83 – 101). Lisboa: APM.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: teacher knowledge and teacher education*: New York: Teachers College Press.

Hiebert, J.; Behr, M. (1988). *Number concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hill, H. C., e Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics Professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(5), 330-351.

Hill, H. & Ball, D. (2009). The curious – and crucial – case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan, 91*(2), 68-71.

Kamii, C, & Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *Journal of Mathematical Behavior, 14,* 365-378.

Kieren, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Paper from a Research workshop*, (pp.101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1993). Rational numbers and fractional numbers: from quotient field to recursive understanding. In: T. P. Carpenter, E. Fennema e T. Romberg (Ed). *Rational numbers: an integration of research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 170-193.

Lamon, S.J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.

Lamon, S. (2001). Presenting and representing from fractions to rational numbers. In: A. Cuoco (Ed.). *The roles of representation in school mathematics* (pp. 146-165). Reston, VA: NCTM.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (1994). *Pesquisa qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

McCloskey, A., & Norton, A. (2009). Modeling students' mathematics using steffe's advanced fractions schemes. *Mathematics teaching in the middle school, 15*(1), 44-56.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16-32.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 85-106). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(5), 422-441.

Mamede, E. (2007). *A compreensão do conceito de fracção – Que papel têm as situações*. *Actas do SIEM*, APM, Setúbal.

Marshall, S.P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach, in T.P. Carpenter, E. Fennema and T.A. Romberg (eds.), *Rational* 65 *Numbers: An Integration of Research* (pp. 261–288). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Marks, R. (1990). Pedagogical contente knowledge: from a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education, 41*(3), 3-11.

Martinie, S. L. (2007). *Middle school rational number knowledge*. Tese de doutoramento apresentada à University of Kansas, Manhattan.

Menezes, L. Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos: Tarefas para o 5.º ano* (Materiais de apoio ao professor). Lisboa: DGIDC.

Merriam, S. (1988). Case study research in education: A qualitative approach. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC. http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89-108.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2006). O sentido do número: o caso dos decimais e das frações. In *Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática, 14*(1), 89-108.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

Moss, J. (2002). Percents and proportion at the center: Altering the teaching sequence for rational number. In B. Litwiller & G. Bright (Eds): *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 109-120). Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Ni, Y., & Zhou, Y. -D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychology, 40*(1), 27-52.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade. J. & Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences, Paper presented in Paris : 28-31, January.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts,. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: NCTM.

Oliveira, I. (1994). *O conceito de número racional em alunos do 6º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Instituto Superior de Psicologia Aplicada). Lisboa: APM .

Oliveira, H., & Cyrino, M. (2011). A formação inicial de professores de matemática em Portugal e no Brasil: narrativas de vulnerabilidade e agência. *Interacções, 18*, 104-130. Retirado a 4/01/2012 de http://repositorio.ipsantarem.pt/bitstream/

Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G. (2008). As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. *Bolema* (31), 79-102.

Owens, D. T. (1993). Teaching and learning decimal fractions. In D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 159-178). Reston: NCTM.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods*. Newbury Park: Cal. Sage Publications.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421-481.

Ponte, J.P. (1992). *O Estudo de caso na investigação em educação matemática*. Universidade de Lisboa.

Ponte, J.P. (1995). Saberes profissionais, renovação curricular e prática lectiva. In B. Nieto, L. & V. Mellado (Coords.), *La formación del profesorado de ciências y matemáticas en España y Portugal,* (pp. 187-202). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Ponte, J. P., Costa, F., Lopes, H., Moreirinha, O., & Salvado, D. (1997). *Histórias da aula de matemática*. Lisboa: APM.

Ponte, J.P. (2002). Investigar a nossa prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J.P. (2005). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Post, T.R., I. Wachsmuth, R. Lesh, & M.J. Behr. (1985). Order and equivalence of rational numbers: a cognitive analysis. *Journal for research in mathematics education*, *16*(1), 18 - 36.

Post, T., Behr, M. & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on learning problems in mathematics*, *8*(1), 39-48.

Post, T., & Cramer, K. (1989). Knowledge, Representation and Quantitative Thinking. In M. Reynolds (Ed.).*Knowledge base for the beginning teacher-special publication of the AACTE* (pp. 221-231). Oxford: Pergamon Press.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the teaching and assessing of rational number concepts**.** In: T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, p. 327-362.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: Uma experiência de ensino* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Quivy, R. & Campenhoudt, L. (1998). *Manual de investigação em Ciências Sociais.* Lisboa: Gradiva.

Reichardt, C. S. & Cook, T. D. (1986). Hacia una superacion del enfrentamiento entre los metodos cualitativos y los cuantitativos. In C. S. Reichardt & T. D. Cook, *Metodos cualitativos y cuantitativos em investigación evaluativa* (pp. 25-52). Madrid: Ediciones Morata.

Saraiva, M. J. & Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante, XII(2), 25-51.*

Serrazina, L. & Loureiro, C. (1996). Teoria/Prática na formação inicial de professores de Matemática na ESE de Lisboa. In J. P. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina & C. Loureiro (Ed.). *Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática: Que Formação?* (pp. 29-45). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Shulman, L. S. (1986). Those who understanding: knowledge growth in teaching**.** *Educational Research*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Stacey, K., Steine, V., & Baturo, A. (2001). Preservice teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*(3), 205-225.

Stake, R.E. (1999). *Investigación com estudio de casos*. Madrid: Morata.

Streefland, L., (1991). Fractions, an integrated perspective. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.

Steefe, L.P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber A., Wilson, J. (1998). Prospective Elementary Teachers' conceptions of Rational Numbers. http://jwilson.coe.uga.edu/texts.folder/tirosh/pros.el.tchrs.html

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children´s conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(1), 5-25.

Tobias, J. M. (2009). *Preservice elementary teacher´s development of rational number understanding through social perspective and the relationship among social and individual environments*. Tese de doutoramento apresentada à University of Central Florida, Florida.

Tuckman, B. (2000). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Varandas, J. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas: Uma experiência*. Dissertação de Mestrado. Lisboa: Faculdade de Ciências de Lisboa.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. *Addition and subtraction. A cognitive perspective*. (pp. 39-59). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1983a). *Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example: les structures additives*. Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique. La Londe les Maures, França, 26 de Junho a 13 de Julho.

Vergnaud, G. (1983b). Multiplicative structures. *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York, NY: Academic Press.

Viseu, F. & Ponte, J. P. (2009). Desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor de Matemática com apoio das TIC. *Revista Latinoamericana de Investgación en Matemática Educativa*, *12*(3), 383-41374).

Anexos

Anexo 1 – Pedido de autorização para a realização do estudo

Exma. Sra. Presidente da Direção da Escola Superior de Educadores de Infância Maria Ulrich

Assunto: Pedido de autorização para efetuar estudo nesta Escola, no âmbito de uma dissertação de mestrado.

Celina Maria Ramos Tavares, professora de nomeação definitiva da Escola Secundária Stuart Carvalhais, presentemente a elaborar a sua Dissertação de Mestrado, pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, vem por este meio solicitar a V. Exª. a autorização para contactar alunos do 4.º ano do Mestrado profissionalizante em Educação Básica para solicitar a sua participação em entrevistas e/ou inquéritos num estudo de investigação intitulado ***"O CONHECIMENTO DOS FUTUROS PROFESSORES DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS".***

Para a elaboração do estudo estabeleceu os seguintes objetivos de investigação:

1. Identificar as formas de representação de números racionais que os futuros professores conhecem;
2. Descrever as estratégias utilizadas nas diferentes representações;
3. Caracterizar as dificuldades manifestadas pelos futuros professores;
4. Descrever os diferentes significados dos números racionais e suas relações - ordenação, comparação e densidade de números racionais;
5. Analisar o conhecimento dos professores na formação inicial relativamente às diferentes formas de representação, comparação, ordenação e densidade de números racionais.

O estudo insere-se no âmbito académico, contribuindo para a realização da dissertação de mestrado, possuindo interesses pessoais e académicos. Face ao tema em estudo e ao problema a investigar, realiza-se um estudo de natureza qualitativa e quantitativa, utilizando uma metodologia de investigação inserida no paradigma qualitativo.

A escolha do tema em estudo prende-se com o facto de ser uma área de investigação da qual ainda existem poucos estudos em Portugal, o que o torna mais aliciante para o *investigador.* Deste modo, solicito permissão para contactar os alunos – designados por participantes e referenciados, convidando-os a participar nos testes e nas aulas que procuram respostas para os objetivos enunciados.

Para permitir atingir os objetivos de investigação enunciados, deverei poder contar com os atores educativos desta Comunidade que são alunos do 4.º ano pois pretendem ser professores de 1.º ciclo.

A colheita de dados será efetuada mediante as produções escritas dos estudantes durante a realização dos testes, questionário e tarefas na sala de aula.

Este estudo será efetuado mediante a aceitação de participação através do consentimento informado expresso num documento escrito e assinado por cada um dos participantes, cujo exemplar se anexa, bem como a carta explicativa para obter esse mesmo consentimento.

Desde já estabeleço o compromisso de respeitar o direito à autodeterminação, à intimidade, à confidencialidade, o direito à proteção de dados e a um tratamento justo e equitativo.

Os resultados da investigação efetuada serão facultados à Escola Superior de Educação Maria Ulrich.

Atenciosamente, solicito deferimento

A Investigadora

Lisboa, 25 de Junho de 2011

Anexo 2 – Carta explicativa para o consentimento informado

1. TÍTULO:

O CONHECIMENTO DOS FUTUROS PROFESSORES DE 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS

2. AUTORA:

Celina Maria Ramos Tavares, presentemente a frequentar o Mestrado em Didática da Matemática no *Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*.

3. OBJETIVOS DA INVESTIGAÇÃO:

- Identificar as formas de representação de números racionais que os futuros professores conhecem;
- Descrever as estratégias utilizadas nas diferentes representações;
- Caracterizar as dificuldades manifestadas pelos futuros professores;
- Descrever os diferentes significados dos números racionais e suas relações - ordenação, comparação e densidade de números racionais;
- Analisar o conhecimento dos professores na formação inicial relativamente às diferentes formas de representação, comparação, ordenação e densidade de números racionais.

4. PARTICIPAÇÃO

A escolha de participar ou não no estudo é voluntária. Caso decida não participar neste estudo continuará a ser tratado/a da mesma forma e com o mesmo respeito. Se decidir participar neste estudo, tem o direito, se assim o entender, de desistir/retirar-se a qualquer momento, sem que isso traga algum prejuízo para si.

5. CONFIDENCIALIDADE

Todos os dados e informações que estiver disposto a ceder para o estudo serão tratados de forma confidencial, ficando guardados num local seguro à responsabilidade da autora. As informações por si cedidas ser-lhe-ão apresentadas pela autora após a sua transcrição, para se ter a certeza de que foram bem compreendidas e para que possa validá-las. A sua identidade nunca será revelada ou reconhecida, a não ser pela própria autora.

Anexo 3 – Termo de consentimento informado

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

TÍTULO DA PESQUISA

"O conhecimento dos futuros professores de 1.º ciclo do ensino básico sobre números racionais"

1. OBJETIVOS:

- Identificar as formas de representação de números racionais que os futuros professores conhecem;
- Descrever as estratégias utilizadas nas diferentes representações;
- Caracterizar as dificuldades manifestadas pelos futuros professores;
- Descrever os diferentes significados dos números racionais e suas relações - ordenação, comparação e densidade de números racionais;
- Analisar o conhecimento dos professores na formação inicial relativamente às diferentes formas de representação, ordenação, comparação e densidade de números racionais.

2. INSTRUMENTO DE COLHEITA DE DADOS:

A colheita de dados será efetuada mediante as produções escritas dos estudantes durante a realização dos testes, questionário e tarefas na sala de aula.

Eu, ____ declaro que fui informado(a) dos objetivos e metodologia da pesquisa intitulada

"O conhecimento dos futuros professores do 1º ciclo do ensino básico sobre números racionais"

Estou consciente da minha participação nesta pesquisa e que poderei em qualquer momento recusar continuar sem nenhum prejuízo para a minha pessoa. Sei também que os dados dos testes, do questionário e das tarefas nas quais participo serão usados somente para fins científicos e destruídos pelos investigadores após o estudo. Aquando do tratamento dos dados, estes serão codificados mantendo assim o anonimato. Fui informado(a) de que não terei nenhum tipo de despesas nem receberei nenhum pagamento ou gratificação pela participação nesta pesquisa.

Depois do anteriormente referido, concordo voluntariamente em participar no estudo em causa.

Participante:

____

Data: ____/____/____

Autora:
Celina Mª Ramos Tavares

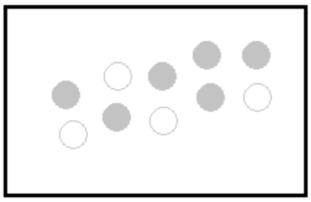
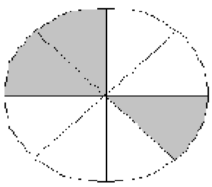
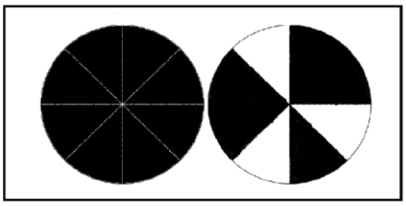
Contacto da autora:
Telemóvel : 962985846
Morada: Rua D. Luísa de Gusmão, Número 8, R/C Esquerdo
2605-665 Belas

Anexo 4 – Teste Inicial

Teste Inicial

O diagnóstico de conhecimentos dos alunos é um instrumento importante para o professor planificar as atividades de ensino. Este teste é apenas um diagnóstico para identificar os aspetos mais e menos consolidados na sua aprendizagem dos números racionais e não terá reflexos na avaliação sumativa da disciplina. Agradeço que responda de forma empenhada às questões formuladas. Resolva o teste, sem a utilização da máquina de calcular, com a duração máxima de 1 hora e 30 minutos.

1. Escreva sob a forma de fração, numeral decimal e percentagem a parte sombreada em cada figura.

Figura	**Fração**	**Numeral decimal**	**Percentagem**
			
			
			
			

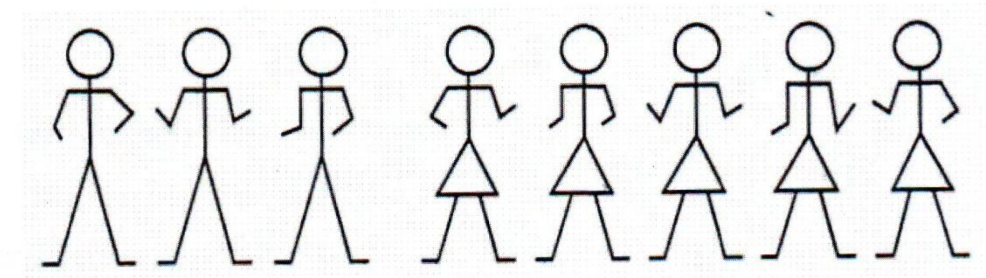
2. Coloque por ordem decrescente os seguintes números:

a) 2,25 0,25 1,075 2,025 0,125

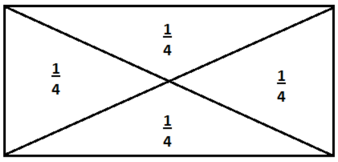
b) $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{13}{5}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{7}{4}$

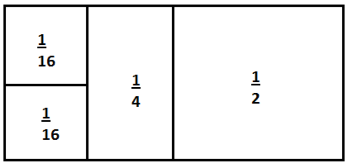
c) $\frac{3}{2}$ 0,75 $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{3}$ 0,5 $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{3}$ 0,45

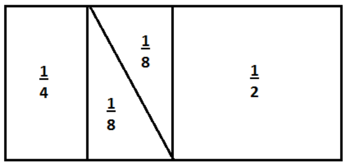
3. A figura representa um grupo de rapazes e raparigas. O que pode representar $\frac{3}{5}$ nesta situação? Explique o seu raciocínio.



4. O sr. Silva deixou em testamento toda a sua fortuna aos seus quatro filhos. No entanto, resolveu atribuir 50% da fortuna ao filho mais novo, 25% ao filho mais velho e o restante aos outros dois filhos.
Qual das seguintes representações corresponde à distribuição efetuada pelo sr. Silva?



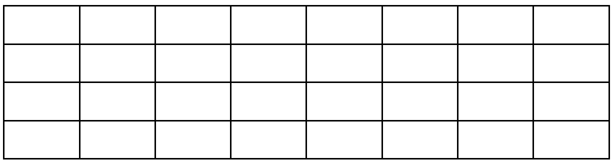




A

B **C**

5. A mãe do André tinha no armário um chocolate semelhante ao da figura. Retirou-o do armário e resolveu dar-lhe $\frac{3}{8}$. Represente a sombreado a parte do chocolate que o André recebeu.



6. Num inquérito realizado a 620 alunos de uma escola sobre qual o meio de transporte utilizado verificou-se que 0,30 do total vão de carro, 40% vão a pé e $\frac{1}{5}$ vão de autocarro.

6.1. Qual a percentagem de alunos que vai de autocarro?

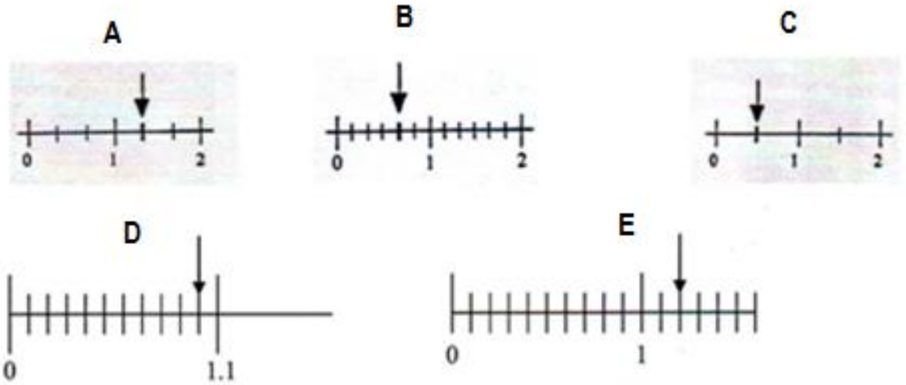
6.2. Quantos alunos vão de carro?

6.3. Quantos são os alunos que não utilizam nenhum destes meios de transporte?

7. De entre os pares de representações do número racional faça um círculo em volta do maior, justificando a sua resposta

a)	8,514	8,0525738	d) $\frac{5}{11}$	$\frac{5}{14}$
b)	0,100	0,25	**e)** $\frac{6}{9}$	$\frac{8}{9}$
c)	4,4502	4,45	**f)** $\frac{4}{3}$	$\frac{5}{9}$

8. Indique em cada reta numérica o valor do ponto assinalado.



9. Indique dois numerais decimais entre 0,4 e 0,5.

10. Indique se existem frações entre $\frac{3}{5}$ **e** $\frac{4}{5}$? Em caso afirmativo, dê um exemplo.

11. Um avião leva 120 passageiros o que corresponde a $\frac{5}{6}$ da sua capacidade. Quantos lugares tem o avião no total?

12. O Pedro e o Tiago decidiram fazer uma corrida de bicicleta. O Pedro percorreu 5 km em 11 minutos e o Tiago percorreu 6 km em 13 minutos. Qual foi o mais veloz? Justifique a sua resposta.

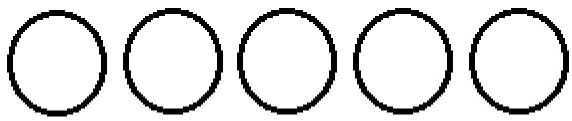
13. A Rita convidou 15 amigas para almoçar em sua casa. Sabendo que para o almoço havia 20 pizas e que cada uma comeu a mesma quantidade, que porção de piza comeu cada uma?

14. Se a figura abaixo representa $\frac{5}{2}$, represente:

14.1. a unidade.

14.2. $1\frac{1}{2}$

14.3. 75% da unidade.



15. Calcule:

15.1. 20% de 10

15.2. A terça parte de 36

15.3. $\frac{7}{5} \times 10$

15.4. $0{,}5 \times 180$

Anexo 5 – Ficha de Trabalho n.º 1

Ficha de Trabalho nº1

Tarefa 1 – Seis amigos resolveram jantar na pizaria da Hora. Sentaram-se na mesa 1 e resolveram dividir equitativamente oito pizas.

1.1. Que parte de piza coube a cada um dos amigos? Justifique a sua resposta utilizando palavras, esquemas, desenhos ou cálculos.

1.2. No final da refeição, o Miguel comentou com os amigos que tinha comido $\frac{4}{3}$ de piza. Concorda com a afirmação do Miguel? Justifique utilizando palavras, esquemas, desenhos ou cálculos

1.3. O João afirmou que cada um dos amigos comeu $1\frac{2}{3}$ de piza. Concorda com a afirmação? Explique o seu raciocínio.

1.4. Na mesa 2 deste restaurante encontravam-se quatro amigos que resolveram partilhar equitativamente seis pizas.

1.4.1. Que parte de piza comeu cada um?

1.4.2. Represente na forma de numeral misto a parte que cada um comeu.

1.5. Em qual dos grupos cada amigo comeu mais piza? Explique o seu raciocínio.

1.6. Na mesa 3 também foram pedidas seis pizas mas para serem partilhadas por 8 amigos.

1.6.1. Que parte de piza comeu cada amigo nesta mesa?

1.6.2. Qual a relação entre a parte de piza que cada amigo comeu na mesa 2 e na mesa 3? Explique o seu raciocínio.

1.6.3. Expresse sob a forma de percentagem a parte de piza que cada amigo comeu em cada uma das mesas.

Tarefa 2 – A Joana e o José comeram $\frac{2}{5}$ de um chocolate. No entanto, a Amélia comeu mais chocolate que o José.

2.1. Indique dois números que possam representar a quantidade de chocolate que cada um comeu. Justifique a sua resposta utilizando palavras, esquemas, desenhos ou cálculos.

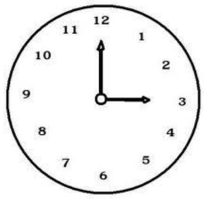
2.2. De seguida chegou o João e deram-lhe metade do chocolate que sobrou. Represente a parte de chocolate que o João comeu.

3. A Rita necessita de comprar 3 quilos e $\frac{3}{4}$ de rebuçados. No supermercado apenas há pacotes de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e 1 quilo.

3.1. Que pacotes de rebuçados terá de comprar? Indique várias possibilidades.

3.2. Qual a hipótese que deve escolher para levar o menor número de pacotes?

4. A Ana resolveu analisar o seu relógio e tentar identificar as partes constituintes da medição do tempo.



4.1. Que parte **da hora** representa:

(Apresente a resposta na forma de fração e na forma de numeral decimal).

a) Quinze minutos

b) Dez minutos

c) Cinco minutos

d) Um minuto

4.2. Que parte de um dia representa uma hora? Explique o seu raciocínio.

4.3. Que parte de um dia representam 15 minutos? Explique o seu raciocínio.

5. Observe a figura abaixo que representam tiras de papel que a Rita resolveu organizar.

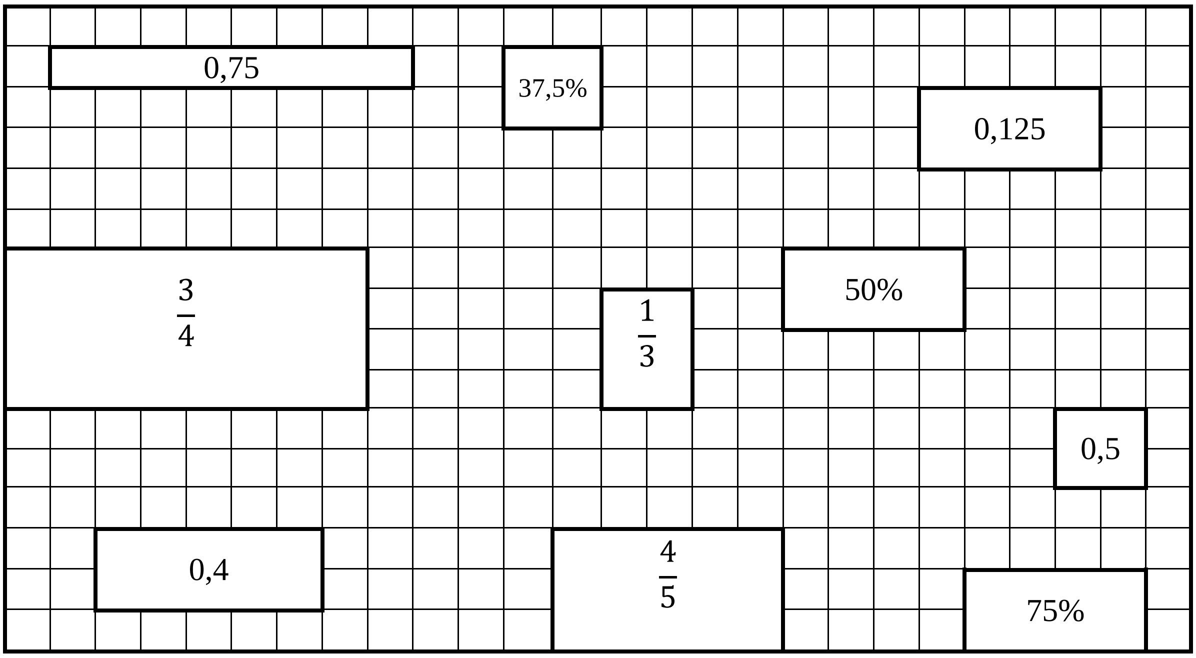
(Apresente as suas respostas na forma de fração e de numeral decimal).

5.1. Quanto mede a barra 2 quando se toma a barra 5 como unidade?
5.2. Quanto mede a barra 2 quando se toma a barra 3 como unidade?
5.3. Quanto mede a barra 3 quando se toma a barra 2 como unidade?
5.4. Quanto mede a barra 5 quando se toma a barra 3 como unidade?
5.5. Quanto mede a barra 4 quando se toma a barra 5 como unidade?

Anexo 6 – Ficha de Trabalho n.º 2

Ficha de Trabalho nº 2

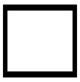
Tarefa 1 – Assinale a sombreado a parte de cada figura correspondente ao número racional ali indicado.



Tarefa 2 – A professora da Ana e da Filipa propôs-lhes alguns desafios com tiras de papel.

2.1. Perguntou-lhes o seguinte: “Se a tira de papel seguinte representar $\frac{4}{3}$, como será a unidade?”. Como resolveram a questão as duas amigas? Explique o seu raciocínio.

2.2. De seguida pediu-lhes para representarem a tira completa sendo que o quadrado na figura representa 20% do total.



2.3 Desafiou-as, em seguida, a representar a tira correspondente à unidade, sabendo que a tira da figura corresponde a $\frac{3}{8}$.

2.4. Deu, então, à Ana uma tira de papel e disse-lhe que representava $\frac{3}{5}$. De seguida, pediu à Filipa que representasse $\frac{3}{10}$ e $\frac{7}{25}$ da tira de papel da Ana. Apresente as respostas dadas pela Filipa. Explique o seu raciocínio.

2.5. Represente as frações anteriores na forma decimal e em percentagem.

Tarefa 3 – Os irmãos Paulo e Rui apeteceu-lhes comer maçãs e observaram que na fruteira estavam 6 maçãs e meia.

3.1. Represente a quantidade de maçãs na forma de fração, decimal e numeral misto.

3.2. Os irmãos resolveram comer $\frac{1}{4}$ das maçãs que estavam na fruteira. Represente o valor correspondente às maçãs que comeram na forma pictórica, de fração, decimal e numeral misto.

3.3. Indique duas frações equivalentes que representem a quantidade de maçãs que os irmãos comeram.

4. O João deu 45% dos seus cromos a um amigo. Sabendo que o João tinha 60 cromos, quantos cromos deu ao amigo?

5. A Sara comprou umas calças que custavam 45 euros mas teve um desconto de 30%. Quanto pagou pelas calças?

6. A Luísa precisa de comprar 28 metros de corda o que corresponde a $\frac{7}{3}$ de rolo de corda. Que quantidade de corda tem cada rolo? Explique o seu raciocínio.

7. Três meses representam $\frac{1}{4}$ de um ano.

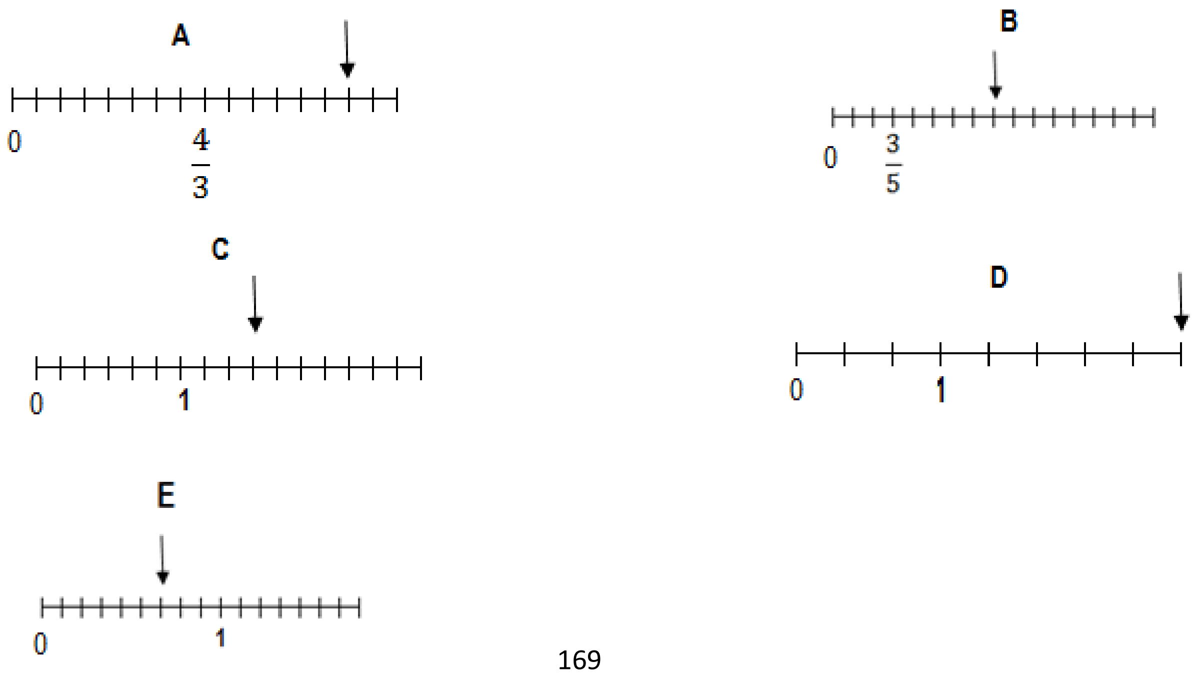
7.1. Justifique esta afirmação.

7.2. Neste contexto o que representa $\frac{5}{4}$? Explique o seu raciocínio

7.3. E $\frac{7}{2}$? Explique o seu raciocínio.

7.4. Represente as frações anteriores na forma de fração decimal.

8. Indique em cada reta numérica o valor do ponto assinalado.



Anexo 7 – Ficha de Trabalho n.º 3

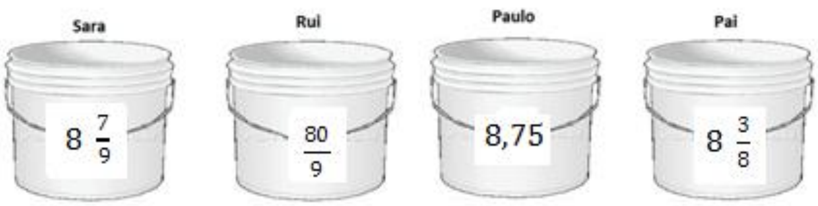
Ficha de Trabalho nº 3

Tarefa 1[2] – Chiripa e um grupo de vikings resolve atacar outra aldeia.

Hagar, o terrível, Chris Browne

1.1. Descreva a situação apresentada na tira. Que intenção terá tido o protagonista desta situação e que estratégia usou?
1.2. Será possível indicar quantos números tem o Chiripa que dizer antes de atacar? Explique o seu raciocínio.
1.3. Que números foram usados? E que representações?
1.4. Explique como se poderia reduzir o tempo de espera?
1.5. E se, pelo contrário, quisesse atrasar ainda mais o ataque? Explique o seu raciocínio.
1.6. Indique dois números racionais entre $2\ \frac{5}{8}$ e $2\ \frac{6}{8}$. Justifique
1.7. Escreva, $2\ \frac{6}{8}$, na forma de fração e numeral decimal.
1.8. Imagine que o Chiripa chega a $9\ \frac{7}{8}$. A que estratégia pode recorrer para adiar ainda o início do ataque? Explique o seu raciocínio.

Tarefa 2 – A Sara e os irmãos resolveram ir pintar as paredes do quintal para ajudar o pai. No final desta tarefa encontravam-se vários baldes com a indicação da tinta gasta.



[2] Tarefa adaptada de Menezes, L. et al. (2009). *Números racionais não negativos*. Lisboa: DGIDC.

2.1. Quem gastou mais tinta? Justifique utilizando palavras, esquemas, desenhos ou cálculos Represente a quantidade de tinta que cada um gastou na forma fracionária.

2.3. De entre o Paulo e a Sara quem gastou mais tinta? Justifique utilizando palavras, esquemas, desenhos ou cálculos.

2.4. A Maria foi a última a chegar e, por isso, o seu balde não ficou na figura anterior. No entanto, referiu que a quantidade de tinta que utilizou é superior à da Sara e inferior à do Rui. Indique, justificando, um valor que represente a quantidade de tinta gasta pela Maria.

3. O número de rapazes e raparigas de uma turma estão numa razão de 3 para 7. Quantas raparigas tem a turma, sabendo que existem 9 rapazes.

4. Num treino de futebol os dois pontas de lança estiveram a treinar remates à baliza. O José concretizou 5 dos 12 que fez enquanto o Rui concretizou 5 dos 9 remates.

4.1. Represente sob a forma de fração os remates concretizados por cada jogador.

4.2. Indique qual dos dois pontas-de-lança é mais eficaz. Justifique utilizando palavras, esquemas, desenhos ou cálculos.

5. Indique dois números racionais entre:

5.1. $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{3}$

5.2. $\frac{4}{7}$ e $\frac{4}{5}$

5.3. $1\frac{3}{12}$ e $1\frac{5}{8}$

5.4. 0,32 e 0,324

5.5. $\frac{3}{5}$ e 0,75

6. Assinale numa reta numérica três números racionais entre 1 e 2 – um numeral misto, um sob a forma fracionária e outro na forma decimal.

7. Copie e complete com os sinais >, = ou <. Justifique as opções tomadas.

a) $\frac{5}{4}$ $\quad$ $\frac{7}{4}$

b) $\frac{2}{5}$ $\quad$ $\frac{3}{2}$

c) $\frac{4}{5}$ $\quad$ 0,375

d) $3\frac{3}{10}$ $\quad$ $3\frac{2}{5}$

e) $\frac{5}{7}$ $\quad$ $\frac{5}{8}$

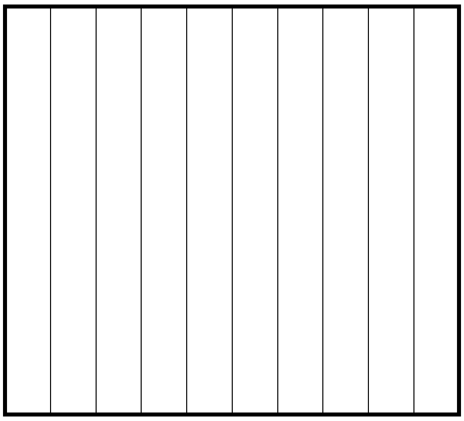
f) $\frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{6}{9}$

Anexo 8 – Ficha de Trabalho n.º 4

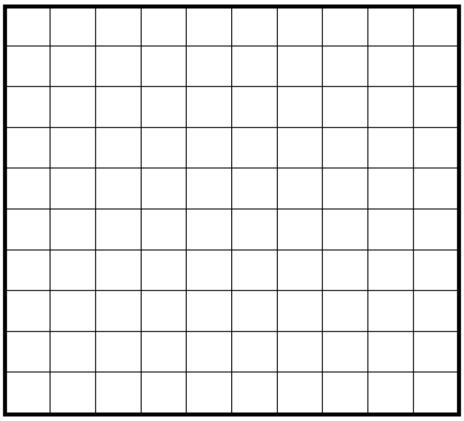
Ficha de Trabalho nº 4

Tarefa 1 – A Maria encontrou em cima da sua carteira duas folhas de papel divididas de formas diferentes e tal como mostra a figura.

A



B



1.1. Como estão divididas as folhas? Justifique.

1.2. Represente na forma de fração, numeral decimal e percentagem a unidade escolhida para dividir as folhas anteriores.

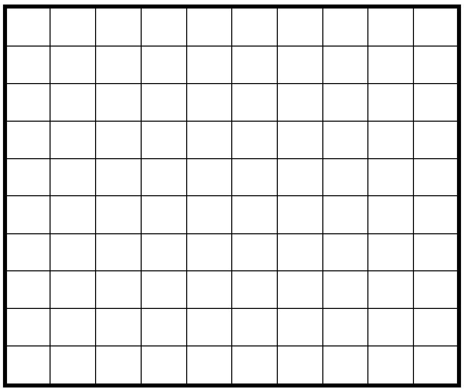
1.3. A professora da Maria pediu-lhe para pintar 42,5% de cada uma das folhas. Explique como a Maria resolveu a questão.

1.4. A quantidade representada é igual nas duas situações? Justifique a sua resposta.

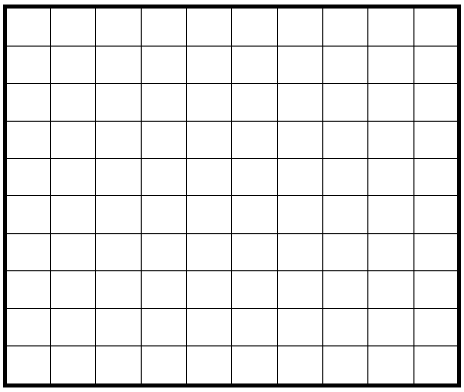
1.5. Que conclusão se pode retirar.

1.6. De seguida a professora da Maria deu-lhe mais duas folhas semelhantes à B e pediu-lhe as seguintes tarefas:

C



D

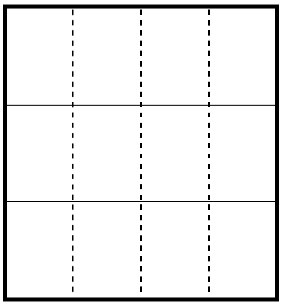


1.6.1. Pinte $\frac{3}{8}$ da folha C e 32,5 centésimas da folha D.

1.6.2. Que percentagem de cada uma das folhas está pintada?

1.6.3. Qual das duas folhas está mais pintada? Justifique.

2. A figura seguinte representa três de oito partes de uma folha.



2.1. Represente a folha inicial. Explique o seu raciocínio utilizando palavras, esquemas, desenhos ou cálculos.

2.2. Represente $\frac{9}{40}$ da folha inicial. Explique o seu raciocínio utilizando palavras, esquemas, desenhos ou cálculos.

4. Complete a tabela seguinte convertendo os valores dados nas diferentes formas de representação.

Percentagem	**Fração**	**Numeral decimal**
	$\frac{1}{5}$	
		0,1
15%		
		0,55
		0.125
1%		

5. Será que um desconto de 30% sobre o preço inicial de um ipad seguido de um novo desconto de 50% equivale a efetuar um desconto de 80% sobre o preço inicial do ipad? Justifique utilizando palavras, esquemas, desenhos ou cálculos.

6. Numa loja um computador custa 800 €. No 1º dia de cada mês a loja reduz o seu preço em 10% relativamente ao valor anterior. Ao fim de quantos meses o preço do computador passa a ser inferior a metade do inicial.

Anexo 9 – Teste Final

Teste Final

Este teste permitirá identificar os aspetos mais e menos consolidados na sua aprendizagem dos números racionais após a realização das fichas de trabalho apresentadas nas últimas aulas. Agradeço que responda de forma empenhada às questões formuladas.

Resolva o teste, sem a utilização da máquina de calcular, com a duração máxima de 1 hora e 30 minutos.

---

1. Um grupo de amigos foi almoçar piza ao restaurante. As cinco raparigas comeram seis pizas e os sete rapazes comeram oito pizas.

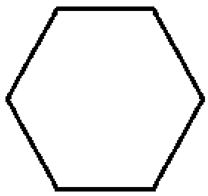
1.1. Represente a fração de pizas que comeu cada rapaz e cada rapariga.

1.2. Quem comeu individualmente uma maior quantidade de piza: os rapazes ou as raparigas? Explique o seu raciocínio.

2. Coloque por ordem crescente os seguintes números (apresente os registos de como pensou):

$\frac{5}{9}$ 0,75 $1\frac{2}{5}$ $\frac{5}{7}$ 12,5% $\frac{3}{2}$ $\frac{9}{3}$

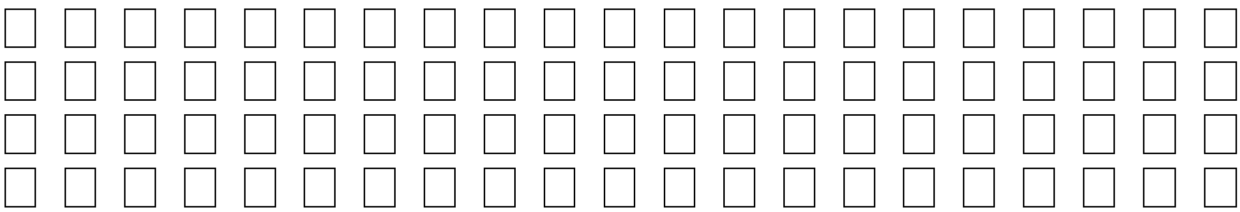
3. A figura seguinte representa a unidade. Pinte $\frac{3}{4}$ da figura.



4. Indique se existem frações entre $\mathbf{\frac{4}{7}}$ **e** $\mathbf{\frac{5}{7}}$. Em caso afirmativo, dê um exemplo.

5. Indique dois numerais decimais entre 0,87 e 0,88.

6. Se a figura seguinte representar $\frac{7}{5}$.



Represente, explicando o seu raciocínio:

6.1. A unidade

6.2. $1\frac{1}{3}$

6.3. 35% da unidade

7. Num inquérito realizado a 840 alunos de uma escola sobre qual o desporto praticado verificou-se que 0,25 do número total de alunos praticam dança, 20% praticam natação e $\frac{2}{5}$ dos alunos praticam futebol.

7.1. Represente na forma de percentagem a quantidade de alunos que praticam futebol.
7.2. Quantos alunos praticam dança? Explique o seu raciocínio.
7.3. Qual a fração de alunos que não pratica desporto? Justifique utilizando palavras, esquemas, desenhos ou cálculos.

8. Uma sala de espetáculos está com $\frac{7}{8}$ da sua lotação. Sabendo que estão a assistir ao espetáculo 140 pessoas, qual será a capacidade máxima da sala?

9. Se tiver 12 chocolates para distribuir por várias crianças e cada uma delas receber $1\frac{1}{4}$, a quantas crianças pode dar chocolate? Justifique utilizando palavras, esquemas, desenhos ou cálculos.

10. Utilizando um dos símbolos >, < ou =, complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

a) $\frac{4}{7}$ $\quad\frac{4}{9}$	c) $\frac{2}{3}$ $\quad\frac{4}{9}$	e) $1\frac{3}{5}$ $\quad\frac{11}{5}$	g) 0,8 0,80
b) $\frac{7}{8}$ $\quad\frac{4}{7}$	d) $\frac{3}{12}$ $\quad\frac{1}{4}$	f) 2,5 2,499	h) 1,206 1,21

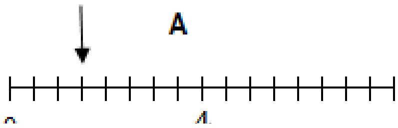
11. Indique na reta cada um dos seguintes números: $\frac{3}{5}$, $1\frac{3}{4}$, $\frac{13}{5}$, $4\frac{5}{6}$, 20%.

12. O Pedro e o Tiago decidiram fazer um percurso com atividades físicas no parque desportivo da sua cidade. O Pedro executou 15 exercícios em 20 minutos e o Tiago executou 20 exercícios em 25 minutos. Assumindo que, em média, o Pedro demora o mesmo tempo a executar cada um dos exercícios e o mesmo sucede com o Tiago, qual dos amigos foi mais rápido na execução desta atividade física?

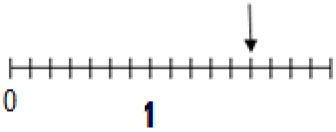
13. Calcule:
13.1. $0{,}35 \times 200$
13.2. A nona parte de 480
13.3. $\frac{3}{8} \times 120$
13.4. 15% de 300
13.5.

14. Indique em cada reta numérica o valor do ponto assinalado.

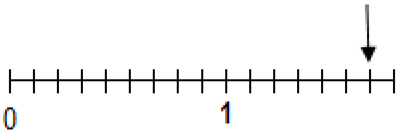
A



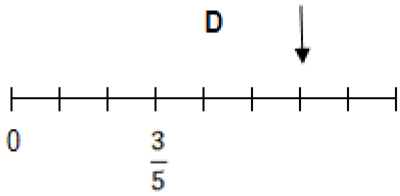
B



C



D



E