A INTEGRAÇÃO DO TANGRAM NA AULA DE GEOMETRIA – UMA PRIMEIRA ABORDAGEM AO CONCEITO DE ÁREA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS[1]

Nelson Mestrinho
Instituto Politécnico de Santarém – Escola Superior de Educação
nelson.mestrinho@ese.ipsantarem.pt

Hélia Oliveira
Instituto de Educação – Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo: Neste estudo analisamos a forma como a utilização do *tangram* favorece o aprofundamento da compreensão do conceito de área em futuros professores dos primeiros anos de escolaridade. Num contexto de investigação sobre a prática, realizada no âmbito de uma experiência de formação, consideramos o trabalho desenvolvido por um grupo de quatro estudantes do 2.º ano de Licenciatura em Educação Básica no decurso de uma tarefa proposta a partir do tangram. Tendo por base dados recolhidos através de registos áudio e vídeo constatamos que o uso deste recurso promove tanto o desenvolvimento de ideias fundamentais à compreensão da medida da área, como permite explorar diferentes abordagens ao conceito de área.

Palavras-chave: medida; área; prática de ensino; tangram; formação inicial de professores

Introdução

O professor é o elemento-chave para a qualidade da educação matemática que é proporcionada às crianças sendo que lhe cabe a tarefa de organizar o ambiente de sala de modo a promover as aprendizagens matemáticas dos seus alunos (Serrazina, 2002). Vários estudos mostram que tais aprendizagens são influenciadas por aquilo que os professores fazem na sala de aula (Mewborn, 2003), podendo-se facilmente concluir que a formação matemática dos professores é crucial. Esta asserção é particularmente óbvia quando falamos de professores dos primeiros anos de escolaridade, seja pela importância destes primeiros anos na definição do percurso escolar dos alunos, seja pela fraca formação matemática que muitos dos futuros professores destes níveis de ensino trazem consigo ao ingressarem nos cursos de formação inicial. Muitos destes, marcados por um passado de insucesso em Matemática, carregam a sua própria experiência para as salas de aulas onde irão ensinar (Grevholm, 2007).

A formação de um professor deverá estar orientada com aquilo que dele se espera enquanto profissional. Formar professores para o ensino da Matemática é um processo complexo que envolve vários aspetos relacionados entre si. Ponte e Chapman (2008) destacam alguns destes como sejam os tipos e a natureza do conhecimento, as competências, atitudes e valores que o futuro professor deve desenvolver ou as opções curriculares dos programas de formação inicial, incluindo as abordagens pedagógicas aos temas. Ao nível do ensino da Matemática nos

[1] Trabalho realizado no âmbito do *Projeto P3M – Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPE/098931/2008).

primeiros anos, vários estudos realizados em Portugal e noutros países dão conta da prevalência de práticas de ensino dominadas por uma visão «instrumental», baseada na mecanização de processos algorítmicos (Thompson, 1992; Palhares, Gomes & Mamede, 2002), tendência essa que, apesar de todos os esforços, continuamos a testemunhar. Entendendo-se atualmente que o ensino da Matemática deve centrar-se na criação de oportunidades de construção ativa do conhecimento, por parte dos alunos, e na criação de estruturas conceptuais que suportem uma compreensão para além da reprodução de procedimentos, é necessário que a educação matemática dos futuros professores lhes proporcione um tipo de conhecimento matemático alinhado com essa perspetiva. Para que se possa refletir de forma fundamentada acerca dos processos de formação matemática dos futuros professores e sobre as implicações dessa formação no desenvolvimento do conhecimento matemático que necessitam para ensinar, precisamos aprofundar a nossa compreensão acerca do que aprendem e como aprendem (Adler, Ball, Krainer, Lin & Novotna, 2005).

Contexto e objetivos

O estudo que apresentamos decorre num contexto de formação inicial de professores dos primeiros anos de escolaridade, numa turma composta por 23 estudantes do 2.º ano da Licenciatura em Educação Básica a frequentar a unidade curricular de *Geometria, Grandezas e Medida*. O modelo predominante de aula nesta unidade assenta na realização de tarefas de natureza exploratória/investigativa e na resolução de problemas geométricos, recorrendo muitas vezes a materiais manipuláveis ou recursos tecnológicos. No caso em análise o trabalho decorre em torno do conceito de polígono e pretende-se, por um lado, introduzir o *tangram* como recurso de sala de aula e, por outro, fazer uma primeira incursão no conceito de área. Este estudo centra-se na utilização do *tangram* pelos futuros professores e o seu papel no aprofundamento da compreensão deste conceito.

As questões que orientam o estudo são:

- De que forma é que o uso do *tangram* favorece o aprofundamento da compreensão do conceito de área nos futuros professores dos primeiros anos de escolaridade?
- Que ideias fundamentais a essa compreensão são articuladas a partir dessa manipulação?

Compreender o conceito de área

Para estabelecer a noção de grandeza num conjunto de objetos é necessário construir uma relação de equivalência, definir uma relação de ordem e criar uma operação de composição. Em qualquer um destes aspetos a grandeza área é muito mais complexa do que outras, nomeadamente o comprimento (Freudenthal, 1999). Medir a área de um domínio plano é um processo que se inicia com a compreensão da área enquanto propriedade que é passível de ser quantificada. Envolve a escolha de uma grandeza da mesma natureza, uma *unidade*, que possa servir como «termo de comparação» com a área a medir. A comparação entre unidade e a figura a medir permitirá associar um número à quantidade de grandeza. Este processo, geral para qualquer tipo de grandeza (comprimento, amplitude angular, volume, massa, etc.) soa a algo estranho para a maioria dos nossos estudantes para quem a determinação de uma área significa multiplicar dois comprimentos ou utilizar uma qualquer fórmula da qual não entendem o significado.

A construção da compreensão da medida da grandeza área envolve a coordenação de uma rede de conceitos e ideias relacionadas entre si. Vários investigadores identificaram um conjunto de conceitos fundamentais nos quais assenta essa compreensão (Lehrer, 2003; Sarama & Clements, 2009):

1. *A compreensão do atributo*: Passa por entender a área como atributo específico e intrínseco do objeto em causa e envolve dar um significado quantitativo a uma porção limitada de superfície.
2. *Conservação ou invariância:* A conservação significa compreender que determinada grandeza associada a um objeto não se altera se sobre ele se aplicarem determinadas ações. No caso da área o princípio da conservação implica que uma porção limitada de superfície pode ser decomposta e recomposta com uma forma diferente sem que a área se altere. Este conceito está muito relacionado com o de aditividade.
3. *Transitividade*: Tem a ver com a capacidade de obter, por dedução, uma relação de igualdade ou desigualdade a partir de outras duas (ou eventualmente mais). Por exemplo, compreender de que se a quantidade de área de uma figura A é igual (inferior/superior) à quantidade de área da figura B e, por sua vez, a quantidade de área da figura B é igual (inferior/superior) à quantidade de área da figura C então A tem uma quantidade de área igual (inferior/superior) à da figura C.
4. *Decomposição em partes iguais*: Trata-se da operação mental que consiste em subdividir ou decompor um objeto num número de partes de igual tamanho (normalmente congruentes). Esta atividade é mais complexa do que se pode imaginar à primeira vista, uma vez que obriga a que se encare a área como algo que pode ser «partido» em partes mais pequenas, mesmo antes de se proceder ao ato de medir. Este processo introduz o conceito de estruturação em filas organizadas.
5. *Unidades e iteração da unidade*: Requer conceber a unidade como parte da área a medir, pelo que a sua iteração envolve pavimentar a porção de superfície cuja área se pretende avaliar. No contexto destas noções, é fundamental entender e operacionalizar a necessidade de subdividir a unidade e o impacto desta ação na medida obtida, para além de que esse preenchimento do objeto se relaciona com a sua decomposição em partes iguais.
6. *Aditividade*: Estabelece que a área de um domínio plano é igual à soma das áreas dos elementos de uma sua partição arbitrária.
7. *Relação entre número e medida*: Medir está intimamente relacionado com a contagem tratando-se, porém, de algo conceptualmente mais sofisticado que requer que se articule a contagem (o discreto) com a natureza das unidades que estão a ser contadas/iteradas (o contínuo).
8. *Estruturação espacial*: Trata-se da operação mental que consiste em construir uma organização ou configuração para um objeto ou conjunto de objetos no espaço. Envolve a noção de que a região a medir precisa ser completamente preenchida sem lacunas ou sobreposições. Implica estruturar esse preenchimento em filas de modo a que iterar uma unidade possa ser visto como iteração de filas (linhas ou colunas) de unidades. É este processo que permite abstrair fórmulas para o cálculo de áreas, coordenando comprimentos e unidades de comprimento de modo a obter unidades de área e áreas.

Freudenthal (1999) aponta várias aproximações ao conceito de área, das quais se realçam as seguintes:

i. *Repartição equitativa*, que inclui situações em que é necessário «partir» uma figura em partes equivalentes;

ii. *Comparação e reprodução*, que inclui situações em que é necessário comparar (por inclusão, por operações de decomposição e recomposição de figuras, por medida) duas porções de superfície e também aquelas em que é necessário reproduzir uma mesma quantidade de área mas com uma forma diferente.

iii. *Medição*, que inclui situações que envolvam o preenchimento de uma porção de superfície recorrendo a figuras congruentes (interpretadas como unidades que são iteradas), operações de decomposição e recomposição (com o objetivo de quantificar uma área ou deduzir formulas para o seu cálculo) ou a utilização de relações geométricas gerais (utilizando comprimentos e fórmulas para calcular áreas ou ainda o uso de transformações geométricas como as de semelhança ou o princípio de *Cavalieri*, por exemplo).

A utilização das várias aproximações oferece uma perspetiva da complexidade do conceito de área, proporcionando condições para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos envolvidos no processo de medição e da construção de ferramentas conceptuais daí decorrente – como é o caso das fórmulas (Lehrer, Jaslow & Curtis, 2003).

O conhecimento matemático do professor

Ninguém hoje questiona a noção de que os professores que ensinam Matemática necessitam de um profundo conhecimento matemático para poderem desempenhar a sua função. No entanto, foi-se tornando claro que o conhecimento matemático convencional, por muito avançado que seja, é insuficiente para proporcionar aos professores o suporte para um ensino orientado para a compreensão. Nas últimas décadas muitos investigadores têm procurado caracterizar aquele que deverá ser um conhecimento matemático multidimensional e específico do professor (Shulman, 1986; Ma, 1999; Ball & Bass, 2003; Ball, Thames & Phelps, 2008).

Apesar das várias conceptualizações, algumas características comuns desse conhecimento são identificadas. Uma é a de que um tal conhecimento deverá ir além das representações simbólicas e abstratas que sintetizam conceitos e procedimentos, que deve incluí representações alternativas (mais ou menos formais) dos conceitos matemáticos e uma diversidade de aproximações a essas noções, tendo em conta o desenvolvimento ou construção dos mesmos por parte dos alunos. Esta forma «descompactada» de saber Matemática é específica do trabalho de ensinar e não é, em geral, necessária fora deste contexto. Assim, aprender Matemática para ensinar deve incluir oportunidades para «descompactar» conceitos matemáticos e procedimentos que são familiares mas que são utilizados sem se pensar muito acerca do que encerram em si. Um tal conhecimento deverá dar ao professor a capacidade de antecipar – erros, más conceções, produções, interesses e dificuldades dos alunos. Um conhecimento matemático desta natureza deverá ser conexo, quer entre domínios da Matemática, quer ao longo do tempo, à medida que as ideias matemáticas se desenvolvem e se estendem, tendo em consideração a forma como serão abordadas ao longo dos vários níveis de escolaridade.

As tarefas e os recursos

Ensinar Matemática numa perspetiva exploratória (Ponte, 2005) implica dar aos estudantes a oportunidade de se envolverem ativamente num trabalho de descoberta e de construção do seu próprio conhecimento. Para que tal possa acontecer é necessário que lhes sejam propostas tarefas que permitam observar o surgimento de conceitos matemáticos em contextos propícios à compreensão e à (re)construção de significados. Por esse motivo, a preparação de tarefas matemáticas é um aspeto extremamente importante na formação inicial de professores. Peled (2007) propõe uma classificação das tarefas em função de objetivos formativos bem definidos e que podem ser psicológicos, curriculares, epistemológicos ou pedagógicos. A tarefa a partir da qual se baseia este estudo insere-se em objetivos psicológicos, na medida em que se espera que os futuros professores ultrapassem dificuldades análogas àquelas encontradas pelas crianças na abordagem ao conceito de área e sua medida. Por outro lado, o seu enquadramento num conjunto mais vasto de tarefas coloca-a no âmbito de objetivos epistemológicos, uma vez que se promove a construção de conexões entre tópicos através da identificação de estruturas semelhantes de modo a facilitar a síntese e a generalização (Peled, 2007).

Aprendizagens significativas pressupõem tarefas orientadas para a compreensão das ideias matemáticas. Neste contexto os recursos educativos jogam um papel muito importante uma vez que podem fornecer suporte para diferentes representações dessas noções ou inclusivamente para lhes dar significado. O conceito de «recurso» pode ser bastante amplo e incluir coisas tão óbvias como o professor, mesas e cadeiras ou ainda a linguagem, mas quando falamos de recursos tendemos a referir-nos a recursos materiais. Adler (2000) distingue várias categorias de recursos materiais: tecnológicos, escolares específicos, objetos matemáticos e objetos do dia-a-dia.

O que define a ligação entre o trabalho matemático na sala de aula e os recursos é a forma como estes últimos são utilizados, ou seja, a sua *transparência* (Gravemeijer, 2005). Este conceito foi desenvolvido por Lave e Wenger e associa a transparência de um artefacto à compreensão do modo de funcionamento do mesmo e às formas como o seu uso se torna parte do processo de aprendizagem. Para que um recurso seja transparente (permitindo assim o acesso a uma determinada prática) é necessário um equilíbrio entre as suas funções complementares de visibilidade e invisibilidade. A função de visibilidade é estabelecida no momento em que o recurso entra na sala de aula e se torna o centro das atenções. A partir do momento em que os estudantes se familiarizam com o recurso e o começam a encarar como um meio para aprender conceitos matemáticos (deixando de ser ele mesmo o centro da atenção) o recurso passa a assumir a sua função invisível. A transparência não é, portanto, uma característica inerente ao próprio recurso mas antes uma função do seu uso na prática, em contexto de sala de aula. Deste modo, a forma como os estudantes utilizam os recursos para aprender Matemática não depende dos conceitos que consideramos que o recurso encerra em si mesmo mas antes é função das interações com os significados que lhes atribuem, da tarefa proposta pelo professor, da regulação da atividade dos estudantes e da cultura de sala de aula (Adler, 2000).

Metodologia do estudo

O estudo apresentado insere-se num trabalho mais abrangente que visa compreender a forma como os futuros professores dos primeiros anos de escolaridade aprofundam a sua compreensão dos conceitos relacionados com a medida em Geometria, em resultado de uma experiência de formação (Cobb, 2000; Simon 2000); que decorre no contexto descrito anteriormente. O estudo assume uma abordagem teórica interpretativa, no sentido em que é apresentada por Erickson (1986). Trata-se de uma investigação sobre a prática (Borko, Liston & Whitcomb, 2007), onde o investigador, que é simultaneamente o docente da unidade curricular referida, procura compreender aspetos da sua prática no seu contexto local.

Os participantes neste estudo são quatro estudantes da turma do 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica da Escola Superior de Educação de Santarém, escolhidas por apresentarem percursos escolares distintos, no que ao estudo da Matemática diz respeito, e por pretenderem no futuro ingressar numa carreira de professoras no 1.º ou 2.º ciclos do ensino básico. O facto de constituírem um grupo natural de trabalho também foi um fator de decisão importante. Os dados usados neste estudo foram recolhidos a partir da gravação áudio e vídeo de um momento de aula, em que os estudantes da turma se encontram a realizar a tarefa proposta. O trabalho desenvolvido pelo grupo foi visionado e parcialmente transcrito, procurando-se identificar na atividade das estudantes as ideias fundamentais e as aproximações ao conceito de área, enumerados em 1 a 8 e *i* a *iii* da secção «Compreender o conceito de área».

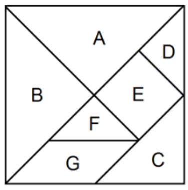
A integração do *tangram* como recurso de sala de aula

O tangram é um conhecido *puzzle* composto por sete peças com formas de polígonos que guardam entre si relações matemáticas importantes. A primeira tarefa proposta é a sua construção, pelos estudantes, a partir de um pedaço de cartolina com forma de quadrado. Os estudantes estão organizados em pequenos grupos de 3 ou 4 elementos, sendo distribuídos pelos indivíduos quadrados (congruentes mas diferentes na cor) em cartolina. Através de indicações verbais envolvendo noções geométricas elementares tais como *ponto médio* de um segmento, *diagonal* e *lados consecutivos* de um polígono, cada aluno traça no seu quadrado de cartolina as linhas por onde irá recortar de modo a obter as sete peças. O *tangram* foi posteriormente usado em atividades de desenvolvimento de capacidades de visualização espacial, no estudo das propriedades dos polígonos e dos conceitos de perímetro e área.

A tarefa que é proposta aos estudantes após a construção, e aquela em cuja realização deste estudo se baseia, é a identificação, entre as sete peças do *tangram*, dos polígonos que são congruentes, dos que são semelhantes e dos que são equivalentes. Não se antecipam dificuldades com a noção de congruência uma vez que foi já estudada em aulas precedentes na unidade curricular. Também o conceito de semelhança foi já abordado em situações anteriores e nesta fase, apesar de ainda não ter sido completamente sintetizado, é já conhecido dos estudantes. Um dos aspetos tidos em conta na discussão da tarefa é a importância de sublinhar a relação entre estes dois conceitos, na medida em que a congruência é um caso particular de semelhança. Já a noção de equivalência surge aqui pela primeira vez na unidade curricular. Pretende-se introduzir a noção de área enquanto grandeza, isto é, área enquanto propriedade intrínseca de uma figura bidimensional, correspondente à porção de superfície que se encontra delimitada pela sua fronteira. Não sendo dado aos estudantes uma explicitação do conceito nem do que se entende por figuras equivalentes, pretende-se que olhem para os vários polígonos e que vejam para além da sua forma e dos seus elementos (lados e ângulos), focando-se na porção de superfície que ocupam. Assim, discutindo em pequenos grupos, espera-se que vão chegando à conclusão da relação óbvia entre a congruência e equivalência (duas figuras congruentes são equivalentes) mas também, progressivamente, à possibilidade da existência de figuras que tendo formas diferentes ocupam a mesma quantidade de espaço bidimensional. Para tal, espera-se que os estudantes usem comparação direta (sobrepondo as várias peças duas a duas e concretizando a comparação recorrendo a um processo mental de decomposição e recomposição das figuras) ou a comparação indireta (tomando alguma das peças como unidades de conveniência). Antecipa-se assim que a manipulação deste material seja importante na construção da partição do conjunto das sete peças em classes de equivalência – subconjuntos de figuras com área igual – passíveis de serem ordenadas segundo as diferentes quantidades da grandeza.

Análise e discussão da atividade desenvolvida

Após cada estudante construir o seu próprio *tangram* foi proposto que identificassem quais as figuras congruentes, quais as figuras semelhantes e quais as que eram equivalentes. Tal como se esperava, a questão da congruência foi resolvida de forma muito rápida e sem dificuldades. Apesar de terem à sua disposição uma figura com a representação do *tangram* (com as várias peças designadas por letras de A a G, conforme mostra a figura ao lado) as estudantes preferiram usar as peças que construíram, sobrepondo os dois pares de triângulos congruentes como meio de validação das suas respostas. A procura do estabelecimento de uma relação entre o quadrado e o paralelogramo leva a um diálogo no seio do grupo.



> Amélia: Então o G e o E? Devem relacionar-se em alguma coisa.

A Carla sobrepõe as duas figuras e a Mariana afirma que "se inclinarmos os lados [do paralelogramo] fica igual ao quadrado, por isso eles são…" – e não soube como completar. Esta afirmação tem tanto de interessante, no que à equivalência entre figuras diz respeito, como de inesperada. De facto, aquilo que a Mariana parece identificar, apesar de não o verbalizar da melhor forma, é uma transformação que preserva a área e que é referida por Freudenthal (1999) como «*shearing*», termo que vem da mecânica e designa a deformação causada pela aplicação de forças paralelas em sentidos opostos. É evidente que a afirmação da Mariana não está correta, uma vez que alterar a orientação dos lados (tornando retos os ângulos internos) do paralelogramo não daria origem a um quadrado, antes a um retângulo com uma área maior. No entanto, é claro que a Mariana identifica, nas duas figuras, bases e alturas iguais, o que pelo princípio de *Cavalieri* resultaria em áreas iguais. Temos aqui uma aproximação ao conceito de área por via da medição com recurso a relações geométricas entre as figuras. A Mariana percebeu que existia uma relação forte entre estas figuras, não conseguindo naquele momento decidir a designação a dar a tal relação. No caso da Amélia, que é quem origina o diálogo que conduz à observação da Mariana, não é claro se pensou da mesma forma ou se apenas se limitou a considerar o quadrado e o paralelogramo por serem os únicos quadriláteros do *tangram*.

Em consequência das muitas dúvidas em torno dos significados das palavras «semelhantes» e «equivalentes», o professor leva a discussão em torno destes conceitos para toda a turma. Só quando o professor desloca o conceito para outro contexto de medida não geométrica (dinheiro) é que as estudantes estabelecem a noção de equivalência como tendo a ver com o «ocupar o mesmo espaço». Para a Celeste foi claro desde o primeiro minuto que duas figuras seriam equivalentes se tivessem a mesma área e é ela que a certa altura assume a condução da discussão do grupo:

> Celeste: Se os juntares assim [sobrepondo quadrado e paralelogramo] tens metade de um e metade de outro [apontando para as partes das peças que não ficam sobrepostas].

> Amélia: Pois é, o que sobra é metade de cada um.

Neste diálogo fica evidente a presença de alguns dos conceitos em que assenta a compreensão da grandeza – a conservação, a decomposição em partes iguais e a transitividade, com base nos quais se estabelece a equivalência entre o quadrado e o paralelogramo. Aqui a abordagem ao conceito de área é feito por comparação, usando transformações de decomposição e recomposição. A comparação partindo da sobreposição das duas figuras assume-se a partir deste momento como a forma privilegiada de argumentação e de justificação. Nesta altura está também já estabelecida a equivalência entre as peças congruentes (triângulos grandes e triângulos pequenos), só ainda não se estabeleceu a equivalência do triângulo médio com o paralelogramo e o quadrado. A este é até atribuída (pela Celeste) uma classe de equivalência da qual é o único elemento. No entanto, da manipulação dos dois triângulos pequenos surgem novas perspetivas. A Carla forma um quadrado a partir dos dois triângulos pequenos. Ao sobrepor o quadrado e o paralelogramo a Mariana observa:

> Mariana: Se dividirmos este [paralelogramo] em dois triângulos temos um quadrado, então estes são equivalentes.
>
> Amélia: Pois é, dois triângulos formam um quadrado [e sobrepõe os dois triângulos com o quadrado].

Este comentário revela o desenvolvimento de uma aproximação à noção não apenas por via da decomposição em partes iguais mas também emerge aqui a utilização da noção de unidade e da sua iteração.

Ao serem interpeladas pelo professor acerca do triângulo médio, afirmam que não é equivalente a nenhuma das outras. No entanto, há muito pouca certeza deste ponto de vista e tentam estabelecer a equivalência do triângulo médio com o quadrado e com o paralelogramo. A Carla e a Celeste sobrepõem o triângulo médio e o paralelogramo e raciocinam de forma semelhante àquela que fizeram anteriormente, comparando apenas as partes dos polígonos que não se sobrepõem. A Amélia e a Mariana procuram construir o triângulo médio utilizando os dois triângulos pequenos.

> Mariana: O G e o C são equivalentes… para C são precisos dois triângulos… para G é a mesma coisa, são precisos dois triângulos [pequenos] para fazer o paralelogramo.
>
> Carla: Também podíamos fazer assim [mostra as duas figuras sobrepostas], cortando esta parte [a parte não sobreposta do paralelogramo] e colocando-a aqui [a parte não sobreposta do triângulo médio].

Nesta fase, a Celeste já assumiu que o triângulo médio é equivalente ao paralelogramo e ao quadrado mesmo não o tendo comparado diretamente com este último (apenas o faz a pedido do docente). Apesar de não o explicitar, percebe-se que se apoia na transitividade, uma vez que apenas comparou o paralelogramo com o quadrado (numa primeira fase) e o paralelogramo com o triângulo médio, concluindo que as três figuras são equivalentes. A Carla chega à mesma conclusão mas demonstra uma maior necessidade de confirmar sobrepondo as peças duas a duas das três formas possíveis para definir a classe de equivalência. É na sua perceção que se apoia, não na transitividade da relação de equivalência, e por isso a manipulação para ela é muito importante. Para a Mariana e para a Amélia as coisas não estão assim tão claras. Uma vez que preenchem a superfície do quadrado com os dois triângulos pequenos, consideram (corretamente) que o quadrado é equivalente à composição dos dois triângulos pequenos concluindo (erradamente) que o quadrado e o triângulo pequeno são equivalentes.

> Mariana: O C e o E são equivalentes. O D e o E também.
>
> Amélia: Ou seja, são todos!

Mariana: Pois, são todos.

Gera-se uma discussão.

Carla: Como assim?

Celeste: Não!

Carla: O F só ocupa uma parte, tu não consegues preencher o quadrado com o F.

Mariana: Então espera aí! O F é igual ao D, não é? Mas os dois dá para preencher o quadrado.

Celeste: Mas tu tens de comparar só duas figuras, não podes comparar três.

Professor: Sim, mas vocês podem usar as outras figuras para vos ajudar a pensar. Não se esqueçam do que significa duas figuras serem equivalentes…

Mariana: É ocupar o mesmo espaço…

Agora a Mariana e a Amélia usam os triângulos pequenos como unidade para medir a área das três figuras equivalentes, preenchendo à vez o quadrado, o triângulo médio e o paralelogramo com os triângulos pequenos estabelecendo a partir daqui a equivalência das três figuras. Este diálogo ilustra a diferença conceptual entre uma abordagem ao conceito de área por comparação e reprodução e a abordagem por medição, onde intervém uma terceira figura, a unidade, que é iterada. Aqui, torna-se necessário que os estudantes compreendam que a unidade desempenha um papel específico no processo de medição e que é do número de unidades iteradas que surge a medida que permitirá, neste caso, estabelecer a equivalência entre as três figuras.

Neste episódio podemos testemunhar a utilização do recurso para explorar várias aproximações ao conceito de área. A sobreposição (comparação direta) de figuras equivalentes não congruentes conduziu à decomposição em partes iguais uma vez que as partes sobrepostas são congruentes às partes não sobrepostas das figuras. Por esse motivo, as estudantes referiram-se a estas partes como “metades”. A utilização dos triângulos pequenos permitiu reproduzir outras figuras, precisamente aquelas que se pretendiam comparar, ocorrendo transformações de decomposição e recomposição de figuras. A utilização dos triângulos pequenos no preenchimento das formas a comparar permitiu que a noção de área surgisse ligada a um processo de medida, assumindo estes triângulos o papel de unidade. A manipulação deste recurso possibilitou passar de uma abordagem para outra, estabelecendo relações entre perspetivas, contribuindo para que se desenvolva uma compreensão do conceito de área e introduzindo a noção de medida da área.

Conclusões

Da realização deste estudo conclui-se que o uso do *tangram* favoreceu a aproximação ao conceito de área, seja pela comparação e reprodução (recorrendo a operações de decomposição e recomposição de figuras), seja pela medição (pelo preenchimento da porção de superfície com unidades). Permitiu o estabelecimento da noção da grandeza área, através da decomposição do conjunto das várias peças em classes de equivalência, a definição de uma relação de ordem entre elas (por inclusão) e a materialização de uma operação de composição. A determinação da equivalência das três peças não semelhantes do *tangram* levou à definição de critérios e de operações mentais que fundamentassem argumentos e demonstrações intuitivas levando as estudantes à construção de um verdadeiro processo de medição, envolvendo comparação, conservação, aditividade, a criação de uma unidade de medida conveniente para a situação e a sua iteração (Freudenthal, 1999; Lehrer, Jaslow & Curtis, 2003).

No decurso da tarefa, a manipulação deste recurso forneceu oportunidades para desenvolver e articular vários conceitos fundamentais para a compreensão da medida da área, em particular, a compreensão do atributo, a decomposição em partes iguais, o conceito de unidade e sua iteração. Outros conceitos, nomeadamente a conservação e a aditividade foram assumidos pelas estudantes de forma imediata e sem dificuldades, o que poderá levar a crer que essas noções encontram-se já, dado o nível de escolaridade, relativamente assimiladas. A relação entre o número e a medida não aparece nesta tarefa de forma muito elaborada (limitando-se à medida das três peças equivalentes igual a dois triângulos pequenos), nem tampouco a estruturação espacial (Sarama & Clements, 2009). No entanto, a tarefa apresentada neste trabalho é apenas a primeira de uma sequência de propostas com o objetivo de trabalhar o conceito de área e sua medida, utilizando este e outros recursos.

Outros aspetos dignos de referência têm a ver com, por um lado, a forma como o *tangram* foi integrado na própria tarefa e, por outro, as limitações encontradas no uso deste recurso. Sendo o *tangram* conhecido dos estudantes enquanto *puzzle*, consideramos que a sua construção pelos estudantes foi uma forma de ativar a função de invisibilidade do recurso. Em vez de partir para a atividade de exploração usando conjuntos já feitos e fornecidos aos estudantes, a construção pelos próprios do recurso permitiu uma focalização nas relações matemáticas presentes nas peças e, consequentemente, possibilitou redirecionar a atenção dos estudantes do jogo para os conceitos matemáticos que se pretendiam estudar (Adler, 2000). Relativamente ao uso deste recurso, a par dos benefícios identificados, detetámos também alguns condicionalismos. Em primeiro lugar, o *tangram* revelou-se insuficiente para abordar o conceito de área por via de algumas transformações que a conservam, como é o caso do «*shearing*» descrito atrás, identificado pela Mariana, e cuja exploração se mostrou menos natural (dadas as características do próprio material) do que a decomposição e recomposição de figuras (Freudenthal, 1999). Em segundo lugar, notou-se na atividade desenvolvida pela Celeste que a noção de transitividade e o seu uso para fazer deduções tendia a diminuir a necessidade de manuseamento deste recurso. Esta estudante foi a única que não necessitou de comparar diretamente as três figuras equivalentes entre si, duas a duas, de todas as formas possíveis, e a partir de certa altura apenas utilizou o *puzzle* com objetivo de validar perante o grupo as suas opiniões. Este facto leva-nos a questionar se o seu uso pelas restantes colegas não as possa ter, de algum modo, inibido de utilizar mais o raciocínio transitivo. No entanto, a utilização deste recurso revelou-se extremamente pertinente e apropriada, seja pela necessidade de as futuras professoras reconstruírem um conceito fundamental na Matemática que terão um dia de ensinar, seja pelo conhecimento do próprio recurso ou pelo modo de trabalhar na sala de aula.

Referências

Adler, J., Ball, D., Krainer, K. Lin, F. & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 359-381.

Adler, J. (2000). Conceptualizing resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*, 205-224.

Ball, D., Thames, M, & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching – What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Borko, H., Liston, D. & Whitcomb, J. (2007). Genres of empirical research in teacher education. *Journal of Teacher Education*, *58*(1), 3-11.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In R. Lesh & A. Kelly (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (Ed.) *Handbook of Research on Teaching*, 3rd Edition, (pp. 119-161). New York: Macmillan Publishing Co./American Educational Research Association

Freudenthal, H. (1999). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Grevholm, B. (2007). Why is mathematics teacher education problematic? In A. Andzans, D. Bonka & G. Lace, (Eds.), *VII International conference teaching mathematics: Retrospective and perspectives* (pp. 79-88). Riga: Latvijas Universitate.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179-192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. (2003). Developing understanding of measurement in the elementary grades. In D. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement.* (pp. 100-121). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Mewborne, D. (2003). Teaching, teachers' knowledge and their professional development. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 45-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Palhares, P., Gomes, A. & Mamede, E. (2002). A formação para o ensino da Matemática no pré-escolar e no 1.º ciclo – Análise teórica e estudo de caso. In M. L. Serrazina (org.), *A Formação Para o Ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Porto: Porto Editora – ME-INAFOP

Peled (2007). The role of analogical thinking in designing tasks for mathematics teacher education: An example of a pedagogical ad hoc task. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 369-379.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). Mahwah; NJ: Lawrence Erlbaum.

Sarama, J. & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research, learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Serrazina, M. L. (2002). A formação para o ensino da Matemática – Perspectivas futuras. In M. L. Serrazina (org.), *A formação para o ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Porto: Porto Editora – ME-INAFOP.

Simon, M. (2000). Research on the development of mathematics teachers: The teacher development experiment. In R. Lesh & A. Kelly (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York, NY: Macmillan.