UNIVERSIDADE DE LISBOA

A aprendizagem da derivada de funções no 12.º ano:
uma análise dos erros e dificuldades dos alunos

Manuel João Coelho Patrício

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques e coorientado pelo Professor Doutor Pedro Jorge Santos Freitas

2016

Resumo

Este estudo tem por base o trabalho desenvolvido na lecionação de cinco aulas de 90 minutos que decorreram no 2.º período do ano letivo de 2015/2016, numa turma do 12.º ano de escolaridade, da Escola Secundária da Ramada, em Odivelas. A unidade de ensino lecionada foi subordinada ao tema "Cálculo Diferencial", nos tópicos da função derivada (regras de derivação) e da função composta e sua derivada. O objetivo deste estudo, de cariz investigativo, foi compreender, através de um estudo sobre os seus erros e dificuldades, como é que alunos do 12.º ano aprendem a derivada de funções, dando particular atenção à derivada da função composta. Para o atingir, procurei responder às seguintes questões: (1) Como procedem os alunos na determinação de derivadas de funções? Em particular, que estratégias adotam na determinação dessas derivadas? (2) Que erros cometem e que dificuldades manifestam os alunos quando determinam a derivada de uma função?

As tarefas propostas aos alunos, envolvendo derivadas de funções, foram pensadas de modo a que estes tivessem uma efetiva experiência matemática, proporcionando-lhes o desenvolvimento de várias capacidades, como a autonomia e a capacidade de lidar com situações complexas (Ponte, 2005). Destaque ainda para a formulação de conjeturas, a capacidade de generalização e o discurso matemático, que foram trabalhados ao longo das várias tarefas.

O estudo desenvolvido assenta numa abordagem qualitativa e interpretativa, tendo os dados sido recolhidos através de observação participante e recolha documental das resoluções escritas dos alunos das tarefas propostas na unidade de ensino.

Os resultados obtidos sugerem que os alunos adquiriram os conhecimentos necessários à determinação de derivadas de funções. Nas estratégias que utilizaram privilegiaram a representação algébrica, revelando serem capazes de manipular expressões algébricas e funções de forma a reconhecer a regra de derivação a aplicar. No entanto, cometeram vários erros, quer processuais (simplificação de expressões) quer concetuais (definição de derivada num ponto, por exemplo), frequentemente por incompreensão de tópicos matemáticos lecionados em anos anteriores, como por exemplo, as regras operatórias das potências ou funções envolvendo radicais.

Palavras-chave: derivada; regras de derivação; derivada da função composta; dificuldades dos alunos; ensino secundário.

Abstract

This study is based on the work developed under the teaching of five lessons of 90 minutes that occurred during the 2nd term in the school year 2015/2016, with a 12th grade class of the Escola Secundária da Ramada, in Odivelas. The unit taught was "Differential Calculus", in the topics of derivative function (derivation rules) and the composite function and its derivative. The objective of this investigation work was to understand, through the study of their errors and difficulties, how students of 12th grade learn the derivative of functions, giving special attention at the derivative of composite function. In order to achieve this goal, I tried to answer the following questions: (1) How do students proceed in determining the derivative of functions? In particular, what strategies do they use in determining those derivatives, (2) What errors do students commit and what difficulties do students manifest when determine the derivative of a function?

The tasks suggested to the high school students, involving the derivative of functions, were created with the purpose of providing an effective mathematical experience, giving them the opportunity of developing several capacities, such as their autonomy and the capacity of dealing with complex situations (Ponte, 2005). Highlight yet the formulation of conjectures, the capacity of generalization and the mathematical speech, that were worked during the several tasks.

This study is built upon a qualitative and interpretative approach, having the data been collected through the participant observation and through the documental gathering of students' written answers of the tasks proposed during the teaching unit.

The results obtained suggest that students had acquired the necessary knowledge for the determination of the derivative of functions. In the strategies that they presented, the students privileged the algebraic representation, revealing being able to manipulate algebraic expressions and functions in order to recognize the derivative rule to apply. However, they committed several mistakes, such as procedural (simplification of expressions) and conceptual (definition of derivative on a point, for example), often because of the incomprehension of mathematical topics lectured during previous years, such as, the derivation rule of powers or the functions involving radicals.

Keywords: derivative; derivation rules; chain rule; difficulties of students; high school.

Agradecimentos

A concretização deste trabalho só foi possível com o apoio e a colaboração de diversas pessoas às quais quero expressar o meu profundo reconhecimento e gratidão.

Agradeço à Professora Doutora Ana Henriques, orientadora deste projeto, pela disponibilidade demonstrada no acompanhamento deste trabalho, pelas sugestões, pelas críticas construtivas e pelo apelo à reflexão que foram decisivos para a realização e sucesso desta investigação.

Ao Professor Doutor Pedro Freitas, coorientador deste trabalho, agradeço os conselhos e sugestões que foram essenciais para a elaboração da componente matemática desta investigação, pelo rigor e formalismo matemáticos constantes.

Não posso deixar de agradecer à Professora Inês Campos, por me ter recebido na sua sala de aula, pelo incansável apoio, disponibilidade e pela confiança que sempre depositou em mim. Foi um privilégio ter tido a oportunidade de aprender a ser professor com esta professora, pela sua competência, profissionalismo e simpatia.

Uma palavra de reconhecimento à Escola Secundária da Ramada e aos alunos da turma com quem trabalhei, pela forma acolhedora e afetuosa como me receberam para realizar a prática de ensino supervisionada e para elaborar este trabalho de investigação.

A todos os docentes do Mestrado em Ensino da Matemática, que contribuíram positivamente para o meu enriquecimento curricular, profissional e pessoal.

Aos colegas do Mestrado, que ao longo destes últimos dois anos me acompanharam, pelas conversas, pelos momentos de trabalho e de partilha, mas sobretudo pela amizade.

À Cristiana, à colega que se tornou amiga, agradeço a companhia e os momentos compartilhados, pelo companheirismo e pelo apoio ao longo desta caminhada.

À Manuela Silva, pelo apoio e disponibilidade durante todo este Mestrado, em particular pela leitura e revisão deste trabalho, graças a quem as gralhas ortográficas serão quase inexistentes.

O meu especial agradecimento vai para os meus pais e para a minha irmã, por tudo o que têm feito por mim, por estarem sempre presentes, por me apoiarem e me encorajarem, sobretudo nos momentos mais difíceis da minha vida académica. Pelo amor e pelo apoio moral incondicional e por tudo o que fizeram por mim e que fez de mim a pessoa que sou hoje.

Não posso deixar de mencionar a minha tia São, fundamental no meu percurso académico, por todas as horas gastas ao meu lado, pela paciência, dedicação e pelo apoio e carinho em todos os momentos desta longa caminhada. Sem a sua presença, tudo teria sido mais difícil e penoso.

À minha tia Vinita e, à minha avó Bernardina, pela fé e pela preocupação constante que sempre demonstraram para comigo e para com o meu trabalho.

E ainda, aos meus avós paternos, restante família, e a todos aqueles que fazem parte da minha vida e que deveriam, necessariamente, constar destas linhas, mas de quem não registei os nomes nem os fundamentos, por falta de espaço e memória, e que com toda a certeza mereciam. A todos,

Muito Obrigado!

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Anexos

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho constitui-se como o Relatório da Prática de Ensino Supervisionada, realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática. A intervenção letiva que realizei e na qual assenta este trabalho, decorreu durante o 2.º período do ano letivo 2015/2016, nos meses de fevereiro e março, na Escola Secundária da Ramada, numa turma do 12.º ano do Curso de Ciências e Tecnologias. Foi subordinada ao tema "Cálculo Diferencial", em particular aos tópicos da função derivada (regras de derivação) e da função composta e sua derivada.

Neste capítulo, cabe uma menção acerca das motivações pessoais que orientaram as minhas escolhas e também a explicitação da problemática a estudar, com indicação dos objetivos e questões do estudo de cariz investigativo a desenvolver.

1.1. Motivações e pertinência do estudo

A Matemática sempre foi uma disciplina que me fascinou não só por ser essencial para a compreensão do meio que nos rodeia e do nosso quotidiano, mas também por estar presente em várias áreas das ciências. Esta disciplina sempre constituiu, para mim, um grande desafio pela sua complexidade crescente ao longo dos anos de escolaridade. Por isso, sempre dediquei muito tempo ao estudo da Matemática, o que me levou a desenvolver uma grande afinidade e gosto por esta disciplina.

Enquanto estudante, lembro-me que muitos colegas revelavam grande dificuldade na aprendizagem da Matemática e, inclusive, colocavam em questão a utilidade dos conteúdos abordados, muitas vezes porque não viam conexão entre estes e os fenómenos da vida quotidiana. Este tipo de dificuldade deve ser ultrapassado pois "a necessidade de compreender e de ser capaz de usar a matemática na vida quotidiana, e no local de trabalho, nunca foi tão premente e continuará a crescer" (NCTM, 2008, p. 4). Deste modo, considero que no ensino da Matemática, é de extrema importância que o professor desenvolva uma prática de ensino que possa conduzir os alunos a uma aprendizagem com compreensão "para tornar os alunos capazes de resolver novos tipos de problemas que, inevitavelmente, irão enfrentar no futuro" (NCTM, 2008, p. 22). Só assim poderemos formar cidadãos ativos, capazes de intervir conscientemente na sociedade. Por isso, uma das minhas principais motivações, enquanto futuro professor de Matemática, será a de promover um ensino que possa capacitar os alunos para a compreenderem e fornecer-lhes as ferramentas necessárias para usarem a Matemática na sua vida quotidiana. Julgo que, com a minha motivação intrínseca para a disciplina, poderei também despertar nos alunos interesse e motivação, cativando-os para a aprendizagem da Matemática.

A escolha do tema para a intervenção letiva foi limitada, quer por questões de calendarização do mestrado, quer por questões relacionadas com a planificação das aulas desta turma. Assim, a opção recaiu no "Cálculo Diferencial" do programa de Matemática A do ensino secundário (ME, 2001), nos tópicos da função derivada (regras de derivação) e da função composta e sua derivada. Apesar destas condicionantes impostas pela agenda da intervenção letiva, considero esta temática interessante e desafiante para desenvolver com os alunos, nomeadamente no que se refere à derivada da função composta, já que enquanto aluno do curso de Matemática pude perceber a importância do estudo da função composta e da sua derivada para várias áreas das ciências. Apesar disso, "a derivada é por inerência um conceito difícil para muitos alunos. Especialmente quando a função considerada é uma função composta, as dificuldades dos alunos, em geral, aumentam e pioram" (Uygur & Özdas, 2005, p. 209). Já as regras de derivação constituem, para mim, uma oportunidade de ensinar um tópico que os alunos habitualmente gostam de trabalhar devido ao seu carácter procedimental de aplicação imediata, mas cujas razões para e justificações do procedimento desconhecem (Wangberg, Engelke & Karakok, 2011). Frequentemente, as regras de derivação são apresentadas e trabalhadas como procedimentos sem compreensão, dando origem à mera memorização e aplicação das mesmas e a diversas dificuldades evidenciadas pelos alunos. Posto isto, e de forma a promover uma aprendizagem das regras de derivação com compreensão, preparei um conjunto de tarefas que proporcionou aos alunos oportunidade para formular conjeturas, generalizar e justificar as regras de derivação.

Apesar de existirem alguns estudos que se focam no conceito de derivada (Gil, 2014; Park, 2015; Vasques, 2015), são menos comuns os que investigam a aprendizagem das regras de derivação de funções diversas, particularmente da função composta (Wangberg, Engelke & Karakok, 2011) e os erros e as dificuldades que os alunos evidenciam neste processo. Sendo o erro um fenómeno inerente à aprendizagem (Santos, 2002), a compreensão dos erros mais comuns cometidos pelos alunos pode orientar a implementação de abordagens de ensino que os ajudem a ultrapassar as suas dificuldades e a aprofundar o seu conhecimento matemático.

Pretendo, assim, durante a minha intervenção letiva, ajudar os alunos a compreenderem melhor o conceito de derivada e as regras de derivação, sobretudo no que diz respeito à derivada da função composta e à sua aplicação na resolução de problemas. Pelas razões acima apresentadas, considero este estudo pertinente e muito enriquecedor, tanto a nível pessoal como profissional e estou convicto que poderá ser útil para professores de Matemática na medida em que terão ao seu dispor uma análise das dificuldades e dos erros de alunos que frequentam o 12.º ano de escolaridade, no que diz respeito à aprendizagem da derivada de funções.

1.2. Objetivos e questões do estudo

O trabalho que desenvolvi tem como principal objetivo compreender, através de um estudo sobre os seus erros e dificuldades, como é que alunos do 12.º ano aprendem a derivada de funções, dando particular atenção à derivada da função composta.

De forma a cumprir este objetivo, procurei responder às seguintes questões:

- Como procedem os alunos na determinação de derivadas de funções? Em particular, que estratégias adotam na determinação dessas derivadas?
- Que erros cometem e que dificuldades manifestam os alunos quando determinam a derivada de uma função?

Capítulo 2

Enquadramento curricular e didático

Neste capítulo apresento o enquadramento curricular e didático do tema da unidade didática que lecionei, dando especial atenção à derivada da função composta.

Começo por apresentar um subcapítulo referente à aprendizagem do conceito de derivada, depois, um outro subcapítulo dedicado às tarefas matemáticas. De seguida, incluo um subcapítulo sobre representações matemáticas de funções e, por fim, abordo os erros e as dificuldades na aprendizagem das derivadas, dando maior ênfase à derivada da função composta.

2.1. Aprendizagem do conceito de derivada

Ao longo do tempo, têm sido várias as investigações relacionadas com o processo de ensino e aprendizagem dos alunos dos conceitos matemáticos. Em particular, no domínio do Cálculo Diferencial, o conceito de derivada tem sido amplamente estudado e abordadas também as dificuldades que os alunos manifestam na sua aprendizagem. Orhun (2012) refere precisamente que os conceitos de limite e de derivada se têm revelado de grande complexidade na aprendizagem da Matemática, em parte devido a um elevado grau de abstração inerente ao seu estudo.

Loureiro (2012) refere que o conceito de derivada de uma função num ponto é um dos conceitos onde os alunos revelam grande dificuldade na sua aprendizagem, devido não só ao grau de abstração inerente ao conceito, mas também devido aos processos de representação envolvidos na sua aprendizagem e ao conceito imagem que os alunos têm da noção de tangência. A autora alerta para o facto de uma prática pedagógica no ensino secundário focada nas técnicas e regras de derivação em detrimento da compreensão do conceito suscitar grandes dificuldades nos alunos quando frequentam o ensino superior. Desta forma, os programas de Matemática do ensino secundário sugerem um ensino das derivadas que não seja baseado apenas em cálculos e aplicação de regras, nomeadamente, na determinação da derivada de diversas funções, pois essa metodologia não promove nos alunos a compreensão aprofundada das ideias fundamentais associadas a este conceito (ME, 2001).

Deste modo, torna-se crucial perceber de que forma é que os alunos compreendem e que significados é que atribuem a este conceito matemático. Autores como David Tall e Sholomo Vinner defendem que a construção de significados por parte de um aluno e a compreensão dos conceitos matemáticos assenta nas noções de conceito imagem e conceito definição (Tall, 2001). O conceito imagem é definido por estes autores como sendo a "estrutura cognitiva total associada a um certo conceito matemático na mente de um indivíduo, onde se incluem todas as imagens mentais, propriedades, processos e representações mentais relacionadas com o conceito" (Tall & Vinner, 1981, p. 152).

Loureiro (2012) refere que o conceito imagem não é estático e que vai sendo moldado e construído à medida que o indivíduo vivencia novas experiências e se depara com novos estímulos. Salienta também que o "conceito imagem formado pelo indivíduo pode nem sempre ser coerente, uma vez que, diferentes estímulos podem ativar diferentes partes do conceito imagem no cérebro do indivíduo" (Loureiro, 2012, p. 30). Assim sendo, Tall e Vinner (1981, p. 152), definem *conceito imagem evocado* como sendo a "porção do conceito imagem que é ativada num determinado momento". Uma vez que o conceito imagem pode ser ou não procedente de definições matemáticas, Tall e Barnard (1997), citados por Loureiro (2012), definem por *unidade cognitiva* "a porção do conceito imagem que leva o indivíduo a ficar atento por um período de tempo" (p. 30). De acordo com Loureiro (2012), as unidades cognitivas podem ser, entre outras coisas, símbolos, teoremas, representações, propriedades ou qualquer outro aspeto relacionado com o conceito. A autora refere também que Tall e Bernard defendem que "é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio matemático a habilidade de construir múltiplas e flexíveis relações entre as unidades cognitivas, permitindo desta forma aceder a informações relevantes sempre que necessário" (p. 30).

Posto isto, um conceito imagem não deve conter apenas a definição formal de um determinado conceito, mas também fornecer a capacidade de estabelecer relações entre as unidades cognitivas, promovendo desta forma o seu enriquecimento (Loureiro, 2012). No que se refere ao conceito de derivada, à semelhança do que acontece com outros conceitos, o conceito imagem que os alunos formam modifica-se continuamente desde o primeiro contacto com as derivadas até ao momento final do seu estudo (Bingolbali & Monaghan, 2008, citados por Vasques, 2015).

Relativamente ao conceito definição, este é apresentado como a "forma verbal a que um indivíduo recorre para explicar um dado conceito" (Tall & Vinner, 1981, p. 152). Vinner (1991) destaca a dependência que existe entre o conceito definição e o conceito imagem. Segundo o autor, conhecer somente a definição de um conceito pode não ser suficiente para a sua compreensão sendo, por isso, necessário criar um conceito imagem. Esta interligação entre conceito imagem e conceito definição é comparada por Vinner (1991), citado por Domingos (2003), a um andaime, onde o papel da definição aparece como suporte para a construção do conceito imagem e, uma vez construído o conceito imagem, este pode dispensar o conceito definição. Deste modo, para "alguns conceitos possuímos em simultâneo um conceito definição e um conceito imagem, mas em muitos outros isso não acontece" (Domingos, 2003, p. 28), ou seja, conforme refere Vasques (2015, p. 7), "existem conceitos que podem não ter sido adquiridos por meio de uma definição e, no entanto, os conceitos imagem que temos deles são bastante claros".

É claro que existem conceitos que são introduzidos por meio de uma definição, acabando esta por originar a construção do conceito imagem. No entanto, "a partir do momento em que o conceito imagem se forme, na mente do indivíduo, a definição pode manter-se inativa ou até mesmo esquecida quando utilizamos esse conceito" (Vinner, 1991, citado por Vasques, 2015, p. 7).

Desta forma, Vinner (1983) identifica dois tipos de aprendizagem no processo de construção do conhecimento: a informal e a formal. A aprendizagem informal é construída a partir de conceitos imagem com o objetivo de atribuir um significado próprio e pessoal à definição formal, ou seja, são "construídos exemplos relacionados com a definição de um determinado conceito matemático que são geralmente consistentes para serem usados como base de experiências de pensamento para imaginar possíveis teoremas, assim como, possíveis estratégias para a sua demonstração" (Tall, 2001, p. 5, citado por Loureiro, 2012). Na aprendizagem informal, os conceitos definição podem permanecer inativos ou mesmo esquecidos.

Relativamente à aprendizagem formal, os conceitos definição aparecem com bastante incidência nos vários níveis de ensino. Esta aprendizagem incide essencialmente em "definições, recorrendo a deduções formais para a construção de teoremas eliminando desta forma qualquer tipo de noção intuitiva" (Tall, 2001, p. 5).

Tall (2001) defende que ambas as aprendizagens são suscetíveis de promover e levar ao sucesso escolar, ou seja, atendendo ao contexto poderá optar-se por um tipo de aprendizagem em detrimento da outra. Loureiro (2012) refere como exemplo a

Geometria. Nesta área da Matemática recorre-se com mais frequência a uma aprendizagem informal, onde, através das imagens mentais construídas se pode aferir a demonstração de teoremas.

No caso da aprendizagem do conceito de derivada, no que se refere ao conceito imagem, Gil (2014) identificou os seguintes significados imprecisos desenvolvidos pelos alunos:

a) Uma nova função obtida a partir da função dada;
b) Um instrumento associado a um processo de resolução de um certo tipo de problemas;
c) A reta tangente ao gráfico de uma função.

No que concerne ao conceito definição, a mesma autora refere que a maioria dos alunos elaborou definições próprias do conceito de derivada de uma função em que incorporam linguagem corrente e não assimilam a definição matemática do conceito em estudo. As conclusões apresentadas por Gil (2014) mostram que os alunos observados não compreenderam completamente o conceito de derivada.

Vinner (1991) defende que uma das causas que leva os alunos a não compreenderem determinados conceitos matemáticos ou até mesmo a errá-los é a distinção entre conceito imagem e conceito definição. Muitas vezes, a imagem que os alunos possuem de um determinado objeto pode nem sempre corresponder à sua definição exata. Moura (2014) dá como exemplo o conceito subtração. A autora refere que numa primeira abordagem, a subtração envolve apenas números inteiros positivos e que por isso, a imagem que os alunos começam por criar deste conceito é que o resultado de qualquer substração é sempre um valor inferior ao número ao qual se subtrai outro. Apesar de, no caso dos números inteiros positivos, esta ideia ser válida, Tall & Vinner (1981) afirmam que irá causar imensas dificuldades e até mesmo originar diversos erros quando os alunos começarem a trabalhar com subtrações envolvendo números negativos. De forma a prevenir e combater estas dificuldades, Vinner (1991) defende que a introdução de um novo conceito matemático deve começar pela apresentação de exemplos e contraexemplos e só depois expor a sua definição.

Assim, o acompanhamento do conceito imagem e conceito definição que os alunos desenvolvem em relação à derivada torna-se uma importante ação do professor, uma vez que, permite analisar como é que o conceito de derivada de uma função se forma na mente do aluno e que ideias erradas é que se mantêm no final de uma intervenção letiva. Desta forma, o professor poderá ir colmatando os erros e dificuldades que deteta, contribuindo assim para uma melhor compreensão do conceito de derivada por parte do aluno.

2.2. Tarefas matemáticas

As tarefas matemáticas, em particular os problemas, fazem parte do dia a dia de todos nós. É de extrema importância que um aluno aprenda, durante o seu percurso escolar, a formular (em linguagem matemática) um problema e a mobilizar os conceitos matemáticos adquiridos anteriormente para o resolver. Os alunos desenvolvem o seu conhecimento matemático, em grande parte, com os processos que se desenvolvem durante a resolução de tarefas poderosas, que os obrigam frequentemente a lidar com situações novas que exigem a elaboração de novas estratégias e que estimulam o raciocínio (Anthony & Washaw, 2007).

Para a elaboração de uma tarefa, é importante que a ação inicial do professor passe pela análise da relação objetivo/conteúdo, ou seja, pela análise do que pretendemos que os alunos aprendam com essa tarefa. A construção da tarefa não deve ser desvalorizada, visto que o objetivo será o de elaborar "tarefas matemáticas valiosas com potencial para proporcionar aos alunos aprendizagens matemáticas sofisticadas, que vão além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos" (Canavarro, 2011, p. 16).

Uma vez que o estudo das derivadas de funções, e em particular o estudo da derivada da função composta, está muito associado ao cálculo e à memorização de regras de derivação, é importante que o professor evite o "cálculo excessivo de derivadas de várias funções onde são exploradas diversas técnicas de cálculo, e que os alunos tantas vezes associam a um processo mecanicista" (Loureiro, 2012, p. 5). De acordo com o programa de Matemática, no ensino secundário, a lecionação das derivadas deve envolver, entre outras abordagens, a exploração gráfica. No entanto, os processos analíticos continuam a ser os mais valorizados, "sendo os conceitos inerentes à derivada de uma função transmitidos de uma forma desligada da sua componente gráfica, e sem qualquer análise crítica da importância dos seus significados" (Almeida & Viseu, 2002, p. 194). Desta forma, é importante que o professor tenha presente estas ideias aquando da elaboração de uma tarefa matemática para propor aos seus alunos.

Para além do carácter formativo, recorrer às tarefas no ensino da Matemática é também uma boa forma de ilustrar as aplicações e utilidade da Matemática noutras áreas.

Ponte (2005) refere que as tarefas podem ser classificadas tendo presente o grau de desafio matemático e o grau de estrutura que estas apresentam. O desafio matemático pode ser desde reduzido até elevado, enquanto a estrutura da tarefa pode ser aberta ou fechada. Apresento abaixo, a imagem que Ponte (2005) expõe para ilustrar a classificação das tarefas descrita anteriormente:

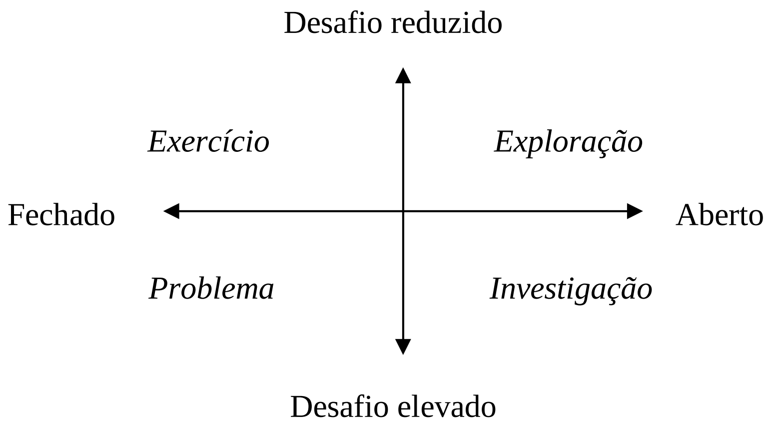


Figura 1 – Classificação das tarefas (Ponte, 2005, p. 8)

O autor classifica um exercício como uma tarefa que é de estrutura fechada e com um grau de desafio reduzido. Já um problema, apesar de partilhar a estrutura com o exercício (estrutura fechada), apresenta um grau de desafio elevado. As investigações e as tarefas de exploração são ambas de estrutura aberta, sendo que as primeiras são de grau de desafio elevado e as últimas de grau de desafio reduzido.

Cada tipo de tarefa apresenta um conjunto de potencialidades e desempenha um papel importante na construção e desenvolvimento do conhecimento. Relativamente aos exercícios, estes são importantes na medida em que permitem aos alunos colocar em prática os seus conhecimentos e aperfeiçoar os métodos, procedimentos e regras matemáticas (Gil, 2014). Já os problemas, são essenciais para estimular os alunos e para que estes se sintam motivados e desafiados na disciplina de Matemática. Os problemas permitem também aos alunos compreender "a verdadeira natureza da Matemática", além de fomentar "o seu gosto por esta disciplina" (Ponte, 2005, p. 13, citado por Gil, 2014). Por fim, as explorações e as investigações desempenham um papel predominante na evolução e construção do conhecimento por parte dos alunos. É importante a aposta neste tipo de tarefas, não só "para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática", mas também "para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas (…)" (Ponte, 2005, p. 26).

A investigação já efetuada nesta área revela que as tarefas que apresentam um grau de desafio mais elevado estabelecem ao mesmo tempo um desafio maior, ao nível da concretização na sala de aula para os professores (Stein et al., 1996, citados por Canavarro & Santos, 2012).

É claro que, e concordando com o que afirma Gil (2014), não é clara a separação entre os vários tipos de tarefas apresentados, podendo variar a sua classificação consoante o aluno que a está a resolver. É talvez outro aspeto em que uma tarefa pode ser útil na formação de um aluno, pois quando o que à partida pode ser considerado um problema, pode mais tarde, em virtude da aprendizagem de novos conceitos e métodos matemáticos, ser considerado um exercício. Assim, o aluno apercebe-se da vantagem e da utilidade dos novos conceitos matemáticos entretanto aprendidos. Este tipo de situação é um fator motivador para o aluno uma vez que este se apercebe da sua evolução na disciplina de Matemática e torna-se mais confiante nas suas capacidades de aprendizagem (Ponte, 2005).

Assim, a aposta em tarefas diversificadas permite desenvolver as três capacidades transversais: raciocínio matemático, resolução de problemas e comunicação matemática. Estas três capacidades transversais "devem ser valorizadas e estar presentes em qualquer tema e/ou conteúdo matemático abordado na sala de aula, independentemente do ano de escolaridade" (Sezões, 2014, p. 12). De acordo com Yakel e Hanna (2003, citado por Boavida, 2008), raciocínio matemático "é uma atividade partilhada em que quem aprende participa enquanto interage com os outros para resolver problemas matemáticos" (Boavida, 2008, p. 1), daí que seja de extrema relevância o momento de discussão em grande grupo que deve suceder à realização de cada tarefa. Estas discussões fazem parte das experiências de partilha que possibilitam a estimulação do pensamento dos alunos, mas também que permitem a explicação, clarificação e justificação do seu raciocínio (Ponte *et al.*, 2007). De acordo com Boavida (2008), o desenvolvimento do raciocínio matemático não deve recair essencialmente em "tarefas com determinadas características" (Boavida, 2008, p. 1), mas em proporcionar também outras atividades, como as discussões de resultados, que requeiram o pensamento e a reflexão sobre o "porquê das coisas" (Boavida, 2008, p. 1), no sentido de "ajudar os alunos a valorizarem a sua forma de pensar, a argumentarem e fundamentarem o seu pensamento, a analisarem o raciocínio dos colegas e a sistematizarem as aprendizagens e os conceitos matemáticos" (Sezões, 2014, p. 15).

2.3. Representações matemáticas de funções

Ao longo do percurso escolar de um aluno, o conceito de função, que começa a ser trabalhado desde o início do 3.º ciclo é, talvez, aquele que maior complexidade sofre com o avançar da escolaridade. Daí, que exista uma grande variedade de investigações relacionadas com este tópico. O peso que o tema das funções tem no currículo escolar é justificado, em parte, porque "o conceito de função é um dos conceitos mais importantes da Matemática. É extraordinário na diversidade das suas interpretações e representações" (Saraiva, Teixeira & Andrade, 2010, p. 3).

De acordo com Saraiva, Teixeira e Andrade (2010), uma função é uma correspondência entre dois conjuntos (o conjunto de partida e o conjunto de chegada), onde a cada elemento do conjunto de partida (objetos) corresponde um e apenas um elemento do conjunto de chegada, sendo, desta forma, um conjunto de pares ordenados. Estes autores defendem também que uma função deve ser apresentada aos alunos como uma relação entre duas variáveis – uma variável é função da outra, $y = f(x)$, onde y é função de x – pois esta abordagem facilitará a compreensão das várias representações de uma função. O estudo das funções, ao nível elementar da Matemática, é focado essencialmente nas chamadas funções reais de variável real, onde tanto o conjunto de partida como o conjunto de chegada são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

As representações desempenham um papel fundamental na compreensão do conceito de função na medida em que "são a chave para a aprendizagem conceptual e determinam muitas vezes o que é aprendido. A capacidade de representar e identificar o mesmo conceito em diferentes representações permite aos alunos observar relações importantes e desenvolver uma compreensão profunda do conceito" (Saraiva, Teixeira & Andrade, 2010, p. 3). É assim "essencial procurar que os alunos tenham uma atividade matemática promotora do desenvolvimento da sua capacidade de fazer raciocínios envolvendo as funções e as suas várias representações" (Andrade & Saraiva, 2012).

O NCTM (2008), defende que "o termo representação refere-se (...) à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma" (p. 75). Destaca ainda que "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (p. 75). Na disciplina de Matemática, Goldin (2008) refere que uma representação pode ser vista como uma configuração que representa um objeto matemático. Segundo Goldin (2008), é possível fazer-se uma diferenciação entre dois tipos de sistemas de representação: sistemas de representação externa e sistemas de representação interna. Relativamente aos sistemas de representação externa, segundo o autor, estes referem-se a configurações observáveis, onde se incluem, as linguagens naturais normativas, os sistemas matemáticos gráficos, referentes a diagramas e de notação formal, os ambientes de aprendizagem estruturados (materiais manipuláveis concretos ou tecnologias) e as estruturas socioculturais (hierarquias políticas ou os sistemas educativos). No que se refere aos sistemas de representação interna, estes estão relacionados com a configuração mental do indivíduo, de onde se destaca a linguagem natural, a capacidade de construção de imagens visuais, as representações tácteis e cenestésicas, as heurísticas para a resolução de problemas, as conceções e o afeto. Já Duval (2006) menciona que na Matemática existem as representações matemáticas nas quais se englobam as notações algébricas, as representações gráficas, a linguagem natural, entre outras.

Friedland e Tabach (2001) definem quatro tipos de representação essenciais no ensino da Matemática, nomeadamente da Álgebra – representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. No que se refere à representação verbal, esta surge "normalmente associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos, dá ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano" (Gafanhoto & Canavarro, 2011, p. 3). De acordo com Gafanhoto e Canavarro (2011), este tipo de representação pode vir a ser "obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorretas" (p. 3).

A representação numérica "é uma representação natural no início do estudo da álgebra e, habitualmente, precede qualquer outro tipo de representação. Este tipo de representação é importante na compreensão inicial de um problema" (Gafanhoto & Canavarro, 2011, p. 3).

Já relativamente à representação gráfica, as autoras afirmam que esta "proporciona uma imagem clara de uma função de variável real, sendo intuitiva e apelativa para os alunos que gostam de uma análise visual". No entanto, referem que é um tipo de representação que é muito suscetível a fatores externos como, por exemplo, escalas e apresenta frequentemente apenas uma parte do domínio do problema.

Por último, a representação algébrica é "concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, por vezes é o único método de justificar ou efetuar generalizações" (Gafanhoto & Canavarro, 2011, p. 3). Como desvantagem, as autoras referem que esta forma de representação "que usa exclusivamente símbolos algébricos pode ocultar o significado matemático ou a natureza do objeto e causar dificuldades de interpretação de resultados" (p. 3).

Brown e Mehilos (2010), citados por Gafanhoto e Canavarro (2011) apresentam outro tipo de representação, a tabular. Estes autores evidenciam que as tabelas "estabelecem a ponte entre a aritmética, onde os problemas envolvem números específicos, e a álgebra, onde as quantidades variam e são abstratas" (p. 3). É também um tipo de representação importante na aprendizagem dos alunos, uma vez que as tabelas lhes permitem uma experiência tangível em que as variáveis são números que se alteram e em que o valor das expressões varia com o resultado.

As diferentes representações de uma função são fundamentais na formação de um aluno, já que "a capacidade de representar e identificar o mesmo conceito em diferentes representações permite aos alunos observar relações importantes e desenvolver uma compreensão profunda do conceito" (Saraiva, Teixeira & Andrade, 2010, p. 3).

Vários autores destacam a importância da representação gráfica de funções e, através da constante evolução tecnológica e do fácil acesso à tecnologia que os alunos têm hoje em dia, rapidamente obtêm a representação gráfica das várias funções, o que lhes permite estudar, por exemplo, a influência da variação dos parâmetros numa família de funções (Kieran, 2006, citado por Loureiro, 2013).

Na verdade, é importante e recomendável que o professor elabore e realize, em sala de aula, atividades que permitam aos alunos explorar, analisar, comparar e relacionar as várias representações de uma função. Neste sentido, "os alunos deverão ser capazes de compreender as relações entre tabelas, gráficos e símbolos e de avaliar as vantagens e desvantagens de cada forma de representação, consoante os objetivos em causa" (NCTM, 2008, p. 40).

No estudo das funções, e em particular no cálculo diferencial, estão muito presentes as resoluções algébricas, numéricas e gráficas dos problemas. Quando os alunos têm de estudar extensivamente uma função é frequente combinarem estes tipos de representações.

Autores como Carvalho, Ferreira e Ponte (2011) referem a importância de estabelecer ligações entre as diferentes representações para compreender verdadeiramente o significado dos conceitos, tornando assim a aprendizagem mais significativa. No entanto, no que se refere ao conceito de derivada, Almeida e Viseu (2002) afirmam que este tem sido transmitido aos alunos de modo essencialmente analítico, dando pouco ênfase à representação gráfica e menosprezando a importância do seu significado.

Vasques (2014) faz referência a estudos realizados por Orhun (2012), segundo os quais os alunos revelam dificuldades em estabelecer conexões entre os gráficos de uma função e o da sua derivada, o que é explicado pelo facto de interpretarem o gráfico da função derivada apenas como um gráfico de uma função real de variável real, não conseguindo obter a partir dele propriedades da função original. Esta dificuldade na aprendizagem da derivada mostra que a maioria dos alunos não compreende verdadeiramente o conceito em causa. A autora apresenta também uma dificuldade significativa na conversão entre representações afirmando que alguns alunos não conseguem efetuar o estudo completo das propriedades das funções quando estas estão representadas algebricamente, embora obtenham bons resultados quando estas são representadas graficamente.

2.4. Erros e dificuldades na aprendizagem das derivadas

A análise das dificuldades e dos erros cometidos pelos alunos na aprendizagem das derivadas é uma tarefa que merece atenção por parte do professor, pois "a exploração matemática de um erro é muitas vezes muito esclarecedora e enriquecedora, quer para os alunos que erraram, quer para os que resolveram bem" (Canavarro, 2011, p. 16). No entanto, os alunos manifestam, muitas vezes, receio em partilhar o seu raciocínio com os colegas e professores, já que o erro ainda não é suficientemente valorizado nas salas de aula como meio de aprendizagem, mas antes como motivo de penalização.

Moura (2014) realizou um estudo onde identificou alguns dos erros cometidos pelos alunos na aprendizagem das derivadas. Segundo Moura (2014), os alunos cometem vários tipos de erros, tanto ao nível processual, como ao nível conceitual. Ao nível processual, a autora destaca erros na simplificação de expressões, na substituição e na interpretação e escrita matemática. Relativamente a erros de simplificação de expressões, a autora menciona que estes ocorrem com maior frequência quando os alunos trabalham com expressões fracionárias. Os erros de substituição, de acordo com os exemplos apresentados pela autora surgem quando está envolvida implicitamente uma composição de funções. Por exemplo, para calcular $f(x+h)$ os alunos calculam $f(x)$ e somam-lhe à posteriori h. Este tipo de erros revela, como é referido pela autora, que os alunos não assimilaram corretamente o conceito de função. Por último, ao nível dos erros de interpretação e escrita matemática, a autora destaca a dificuldade na distinção entre ordenada e abcissa e o pouco rigor na apresentação das produções escritas dos alunos.

Já ao nível conceitual, os alunos cometem erros na definição de derivada num ponto, na definição de derivada e na noção de limite.

Assim, é de extrema importância que os alunos desenvolvam bem os conceitos referentes ao estudo da derivada, de forma a evitar ao máximo que estes trabalhem utilizando ideias e conceitos errados. É também importante que o professor tenha uma ideia clara e objetiva do nível de conhecimento que os alunos possuem em relação a um conceito antes de o aprofundar ou ensinar novos conceitos, uma vez que "o ensino efetivo da matemática requer a compreensão daquilo que os alunos sabem e precisam de aprender, bem como o sequente estímulo e apoio para o aprenderem corretamente" (NCTM, 2008, p. 11).

Relativamente à derivada da função composta, esta surge no seguimento da lecionação das regras de derivação da soma, produto e quociente. Dadas as funções f e g e um elemento x_0 do domínio de $f \circ g$, se f é derivável em x_0 e g é derivável em $f(x_0)$, então $g \circ f$ é derivável em x_0 e a derivada de $g \circ f$ em x_0 é dada por $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$.

Vários autores referem que uma das grandes dificuldades dos alunos no que diz respeito à derivação de uma função composta é a identificação de uma função como composta de funções e dos respetivos "fatores" nessa composição (Clark et al., 1997, citados por Uygur & Özdas, 2005).

A dificuldade apresentada pelos alunos na composição de funções é portanto um dos grandes obstáculos à compreensão da regra de derivação da função composta. Também a complexidade das funções envolvidas na composição pode aumentar as dificuldades e erros cometidos pelos alunos aquando da aplicação da regra de derivação da função composta. Por exemplo, no campo das funções trigonométricas, Siyeou (2015) concluiu que, muitas vezes, os alunos não estão familiarizados com a adição, subtração, multiplicação e divisão de funções trigonométricas, o que leva a dificuldades na simplificação de expressões algébricas que conduzem a erros no processo de derivação deste tipo de funções. Deste modo, os erros que os alunos cometem na derivação de funções “simples” serão transportados naturalmente quando estes aplicam a regra de derivação da função composta.

Resumindo, o conceito de derivada não é uma exceção no mundo da Matemática, sendo vários e frequentes os erros e as dificuldades que surgem durante o processo de aprendizagem de conceitos por parte dos alunos. No entanto, “cometer erros ou dizer as coisas de modo imperfeito ou incompleto não é um mal a evitar, é algo inerente ao próprio processo de aprendizagem” (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 27) e é necessário saber aprender com eles.

Capítulo 3

Unidade de Ensino

Este capítulo é dedicado à apresentação da unidade de ensino que está na base deste estudo. Começo por caracterizar o contexto escolar, onde farei uma apresentação da escola, nomeadamente no que respeita às instalações e ao meio envolvente, e da turma, com destaque para as características dos alunos e o seu comportamento e aproveitamento. De seguida, faço a ancoragem da unidade didática no Programa de Matemática do ensino secundário (ME, 2001), onde apresento a planificação da unidade de ensino. Também exploro os conceitos matemáticos fundamentais que foram abordados durante a lecionação da unidade de ensino. Posteriormente justifico as estratégias concebidas para a sua lecionação e descrevo os recursos didáticos, particularmente as tarefas que foram propostas aos alunos no decorrer da unidade de ensino. Termino com uma breve síntese das aulas lecionadas.

3.1. Contexto escolar

3.1.1. Caracterização da escola

A Escola Secundária da Ramada, escola onde realizei a prática de ensino supervisionada, situa-se no concelho de Odivelas, concretamente na União das Freguesias de Ramada e Caneças. Esta freguesia faz fronteira com as freguesias de Famões e de Odivelas, e com os concelhos de Loures e de Sintra. A União de Freguesias de Ramada e Caneças detém uma área de 9,59 km^2, de acordo com os dados dos censos de 2011, 31 981 habitantes (cf. Câmara Municipal de Odivelas, s. d.). A Freguesia onde se situa a Escola Secundária da Ramada é constituída por núcleos habitacionais antigos, alguns bairros e urbanizações recentemente construídas. O núcleo populacional continua em crescimento. A freguesia possui os serviços básicos de utilidade diária para os moradores e é considerada um local atrativo, enquanto destino habitacional, pela sua proximidade a Lisboa.

O logótipo da Escola foi criado pelo professor José Assis e representa uma estilização do seu ex-libris: o Moinho das Covas, que constitui um polo turístico da comunidade da freguesia. Ao longo dos anos, a Escola sofreu várias intervenções no seu espaço, das quais se destacam a reconstrução do Moinho das Covas, localizado dentro do perímetro escolar, a estruturação dos espaços verdes circundantes, a construção do Pavilhão Gimnodesportivo e do Espaço Multiusos junto ao Moinho.

A Escola é constituída por nove pavilhões, com dois pisos, à exceção do Refeitório, do Pavilhão D e do Pavilhão das Artes, que têm unicamente um piso. A permanente atualização do parque informático e multimédia, quer em número, quer em qualidade, permitiu que, desde o início dos anos noventa, a escola participasse em diversos Projetos nacionais e internacionais. Atualmente, a Escola possui equipamento informático e multimédia em todas as salas de aula, possibilitando o uso generalizado das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos.

A Escola possui uma Associação de Estudantes, uma Associação dos Antigos Alunos e uma Associação de Pais, que têm desenvolvido um trabalho louvável na procura de soluções e apoios pessoais, ou mesmo económicos, para o seu desenvolvimento.

3.1.2. Caracterização da turma

O estudo envolve uma turma, turma B, do 12.º ano da Escola Secundária da Ramada. Esta turma é constituída por 31 alunos, dos quais 20 são raparigas e 11 são rapazes, de entre os quais 3 são assistentes. Os alunos têm idades compreendidas entre os 16 e 19 anos, sendo que a maioria tem 17 anos (16 alunos) e são oriundos das freguesias de Odivelas, Ramada, Carnide, Loures e Pinheiro de Loures. Para se deslocarem para a escola, os alunos vão maioritariamente a pé (14 alunos), 11 alunos utilizam transportes públicos e 6 vão de automóvel. Na globalidade, os alunos demoram cerca de 20 minutos no percurso casa/escola.

Os alunos desta turma apresentam, de modo geral, um percurso escolar bem-sucedido, uma vez que apenas 4 alunos apresentam reprovações nesse seu percurso (3 reprovaram no ensino secundário e 1 no 3.º ciclo do ensino básico). Os alunos têm por hábito estudar em casa, no entanto, muitos também utilizam a escola e os seus recursos (biblioteca escolar) para estudarem. Os alunos da turma mostram-se empenhados e trabalhadores, sendo que a sua maioria afirma gostar de estudar diariamente e de forma individual, aproveitando para realizar os trabalhos de casa propostos em aula. De um modo geral, os alunos da turma usufruem de apoios para estudar, nomeadamente explicações particulares ou aulas de apoio oferecidas pela escola. Para estudar, os alunos, habitualmente utilizam as novas tecnologias, embora 15 destes não utilizem a internet com regularidade. Ainda assim, os alunos não dispensam o manual escolar e o caderno diário para estudarem. Também frequentam a biblioteca da escola sempre que necessário, solicitam a ajuda do professor e, por vezes, recorrem à ajuda dos colegas no esclarecimento de dúvidas.

Em contexto de sala de aula, e no que se refere à participação dos alunos: 12 alunos afirmam que não gostam de ir ao quadro, embora a grande maioria participe quando solicitados pelo professor. A maioria dos alunos prefere trabalhar em pares ou em pequeno grupo e 27 alunos não se limitam a copiar os apontamentos registados no quadro, tirando notas por iniciativa própria.

Os alunos da turma têm grandes expectativas no que toca a projetos futuros e à sua formação, sendo que 28 pretendem ingressar no ensino superior e frequentar cursos da área das ciências, nomeadamente em licenciaturas relacionadas com a saúde: enfermagem, bioquímica, medicina dentária, veterinária, fisioterapia, entre outros (18 alunos); 3 alunos pretendem seguir um ramo da engenharia; 1 aluno prefere as ciências do desporto; outro pretende ingressar na Academia Militar e 5 alunos ainda não sabem que área escolher.

Analisando os resultados do aproveitamento dos alunos na disciplina de Matemática, no final do primeiro período (Figura 2), podemos observar que apenas um aluno obteve classificação inferior a 10 valores. Dez alunos obtiveram classificações entre 10 e 13 valores; catorze alunos obtiveram classificações entre 14 e 17 valores e, por fim, três alunos obtiveram classificações entre 18 e 20 valores. Deste modo, podemos concluir que os alunos obtiveram bastante sucesso, contrariando o frequentemente referido mau aproveitamento associado à Matemática.

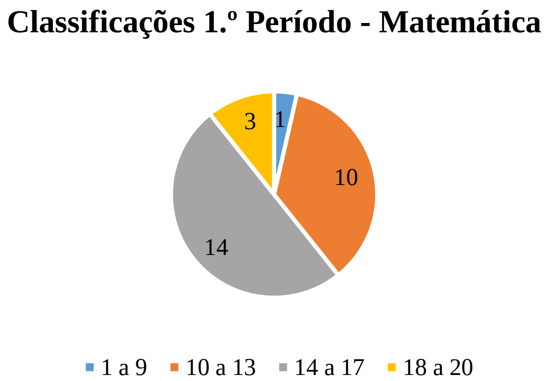


Figura 2 – Classificações do 1.º Período – Matemática

Do mesmo modo, no final do segundo período, os alunos mantiveram, na generalidade, as avaliações alcançadas no primeiro período, conforme figura abaixo, destacando o número reduzido de resultados inferiores a 10 valores.

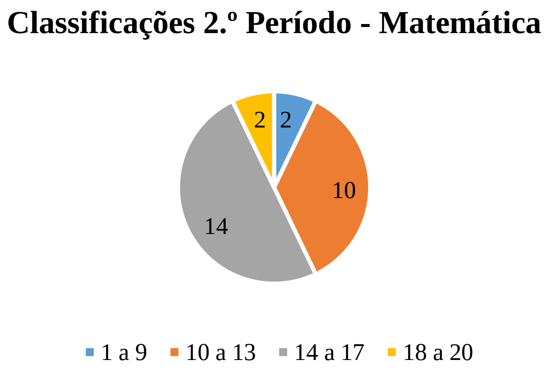


Figura 3 – Classificações do 2.º Período – Matemática

3.2. Ancoragem da unidade de ensino

O conceito de derivada faz parte do tópico das funções e surge no 11.º ano de escolaridade, inserido no tema 'Introdução ao Cálculo Diferencial'. Este conceito é abordado a partir do estudo da noção de variação e torna-se extremamente importante nos dias que correm, na medida em que "cada vez mais, as discussões sobre variação são encontradas na imprensa generalista e nas reportagens" (NCTM, 2008, p. 362). Por isso, é necessário dotar o aluno das ferramentas adequadas para compreender situações do quotidiano.

As noções de taxa média de variação e de taxa de variação/derivada desempenham um papel crucial na Introdução ao Cálculo Diferencial, sendo apresentadas aos alunos recorrendo ao uso informal e intuitivo da noção de limite.

Gil (2014) afirma que, na maioria dos casos, o significado que os alunos tendem a desenvolver em relação à derivada de uma função está relacionado com a sua aplicabilidade num determinado tipo de tarefas (problemas de otimização e análise de funções). Refere também que, embora em menor número, alguns alunos desenvolvem paralelamente um significado geométrico da derivada de uma função num determinado ponto, embora revelem dificuldades na sua compreensão. Esta aplicabilidade da derivada à resolução de problemas de otimização e ao estudo de funções é precisamente uma das razões que torna indispensável a presença do estudo da derivada no currículo escolar do ensino secundário.

No decorrer do 11.º ano, de acordo com o programa, são estudadas derivadas de algumas funções em casos simples: funções afins, funções polinomiais do 2.º e 3.º grau e funções racionais. É somente no 12.º ano que o estudo das derivadas se torna mais formal e é alargado a outro tipo de funções (função exponencial, logarítmica e funções trigonométricas).

À medida que se introduzem novos elementos, nomeadamente as regras de derivação, os alunos tendem a esquecer conceitos abordados anteriormente como, por exemplo, o da definição de derivada num ponto (Gil, 2014). Daí, que o professor deva estar alerta para estas situações, tentando estabelecer um equilíbrio entre tarefas onde impere a utilização das regras de derivação, mas também tarefas onde o aluno necessite de recorrer e trabalhar os conceitos relacionados com a derivada.

A unidade de ensino na qual se enquadra o meu estudo faz parte do programa de Matemática A do ensino secundário (ME, 2001), do 12.º ano de escolaridade. O tema da unidade de ensino é "Introdução ao Cálculo Diferencial II" e o tópico sobre o qual realizei a minha intervenção letiva é o Cálculo Diferencial, em particular o subtópico Funções deriváveis. A lecionação incidiu, em primeiro lugar, sobre as regras de derivação, onde, de acordo com o programa, foi demonstrada a regra de derivação da soma, do produto e dado a conhecer aos alunos as restantes regras. Em segundo lugar, abordei o teorema da derivada da função composta e os exemplos apresentados seguiram as indicações metodológicas (ME, 2001), não ultrapassando o seguinte grau de dificuldade: $f(ax)$, $f(x+b)$ e $f(x^k)$. O domínio das regras de derivação e do conceito de derivada é essencial para a unidade didática que se seguirá, onde os alunos terão de aplicar estes conhecimentos no estudo de funções.

De acordo com a planificação anual da disciplina de Matemática, o tópico Funções deriváveis foi lecionado no segundo período do ano letivo de 2015/16. Em particular, a minha intervenção decorreu no período que abrangeu o final do mês de fevereiro e início do mês de março e teve a duração de 10 tempos de 45 minutos que se combinam em 5 aulas da turma já referida. As duas primeiras aulas foram dedicadas às regras de derivação, as duas aulas seguintes ao teorema da derivada da função composta e a última aula foi de aplicação dos conhecimentos adquiridos na resolução de tarefas envolvendo a primeira derivada. Na tabela seguinte apresento o plano da unidade de ensino lecionada, integrando a calendarização das aulas, os objetivos específicos propostos para cada uma delas e a indicação das tarefas aplicadas.

Tabela I - Plano da unidade de ensino

Unidade de ensino:	**Subunidade:**	**Tópicos:**	**Número de aulas:**
Cálculo Diferencial	Funções deriváveis	- Função derivada (regras de derivação); - Derivadas de funções elementares; - Derivada da função exponencial $x \mapsto e^x$. Segunda definição do número e; - Derivada da função logarítmica $x \mapsto \ln(x)$; - Teorema da derivada da função composta.	5 aulas de 90 minutos
Objetivos de aprendizagem:			
- Trabalhar com conceitos já utilizados anteriormente de forma intuitiva: limite, continuidade e derivada; - Deduzir, utilizando a definição de derivada num ponto, a função derivada de e^x e $\ln(x)$; - Conhecer as regras de derivação e saber aplicá-las na determinação da derivada de uma função; - Conhecer e utilizar o teorema da derivada da função composta na determinação da derivada de uma função composta; - Desenvolver a capacidade de raciocinar, comunicar e escrever matemática.			

Aula	Objetivos específicos	Tarefa
1ª Aula 26/02/2016 (90 minutos)	- Determinar a derivada de uma função polinomial de grau menor ou igual a 3; - Aplicar as regras de derivação da soma, do produto e da potência no cálculo de derivadas; - Mobilizar as regras supramencionadas para o cálculo de derivadas de funções polinomiais de grau arbitrário.	**Tarefa 1** "Regras de derivação"
2ª Aula 01/03/2016 (90 minutos)	- Determinar a derivada da função e^x e da função $\ln(x)$; - Aplicar as regras de derivação da soma, do produto, da potência e do quociente no cálculo de derivadas; - Mobilizar as regras supramencionadas para o cálculo de derivadas envolvendo as funções e^x e $\ln(x)$;	**Tarefa 2** "Regras de derivação" + **Questão de aula 1**
3ª Aula 03/03/2016 (90 minutos)	- Aplicar as regras de derivação da soma, do produto, da potência e do quociente no cálculo de derivadas; - Trabalhar com a composição de funções; - Mobilizar as regras supramencionadas para o cálculo de derivadas.	**Tarefa 2** "Regras de derivação" + **Tarefa 3** "Teorema da derivada da função composta"
4ª Aula 04/03/2016 (90 minutos)	- Utilizar o teorema da derivada da função composta no cálculo de derivadas; - Mobilizar as regras de derivação para o cálculo de derivadas envolvendo funções compostas; - Aplicar o teorema da derivada da função composta para deduzir as derivadas de funções da forma e^u, $\ln(u)$, a^u e $\log_a(u)$.	**Tarefa 3** "Teorema da derivada da função composta"
5ª Aula 08/03/2016 (90 minutos)	- Aplicar as regras de derivação da soma, do produto, da potência e do quociente no cálculo de derivadas; - Utilizar o teorema da derivada da função composta no cálculo de derivadas; - Utilizar o significado geométrico de derivada de uma função num ponto.	**Tarefa 4** "Regras de derivação" + **Questão de aula 2**

Na elaboração desta planificação de unidade de ensino tive em conta o público alvo, isto é, as características e as necessidades dos alunos da turma em análise, as questões e os objetivos do presente estudo, bem como as orientações curriculares presentes no programa do 12.º ano da disciplina de Matemática (ME, 2001).

3.3. Conceitos fundamentais da unidade de ensino

Durante a minha intervenção letiva, e no que se refere aos conceitos teóricos, foram trabalhadas as regras de derivação, nas quais se incluem a regra de derivação da soma, produto, potência e quociente, bem como o teorema da derivada da função composta. Foram também abordadas as derivadas das funções e^x e $\ln(x)$ e as derivadas de funções da forma e^u, $\ln(u)$, a^u e $\log_a(u)$. Durante a fase de pesquisa e preparação das aulas consultei, para além do manual escolar adotado pela escola (Novo Espaço 12 – Matemática A 12.º ano), os livros "Fundamentos de Análise Infinitesimal" de Mário S.R. Figueira e "Introdução à Análise Matemática" de J. Campos Ferreira. Estas obras serviram também como referência para a elaboração deste subcapítulo, no qual apresento os principais conceitos matemáticos presentes na unidade de ensino.

Este subcapítulo encontra-se dividido em quatro secções. Na primeira secção, enuncio e demonstro as regras de derivação lecionadas ao longo da minha intervenção letiva. Esta secção termina com a demonstração do teorema da derivada da função composta. Na segunda secção, prova-se a diferenciabilidade da função e^x e na terceira secção prova-se a diferenciabilidade da função $\ln(x)$. Por fim, na quarta secção é generalizada a regra da derivada da potência de expoente natural a expoentes racionais.

A priori, apresentarei alguns conceitos e resultados essenciais para a compreensão da unidade de ensino, os quais já eram do conhecimento dos alunos aquando da minha intervenção letiva.

Definição. Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real e seja $a \in D$ um ponto de acumulação de D. Diz-que que f é **derivável** em a se existe, e é finito, o limite: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Observação. Na definição anterior, podemos substituir $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ por $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pois caso exista um destes limites existe o outro e eles coincidem.

Se f é derivável em a, chama-se **derivada de** f **no ponto** a e representa-se por $f'(a)$ ao número real

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Definição. Diz-se que a função $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é **derivável** (ou **diferenciável**) em D se for derivável em todo o ponto de D. Se f é derivável em D, chama-se **derivada de** f à função $f': D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f'(x)$.

- O resultado seguinte é fundamental em muitas das demonstrações que apresentarei ao longo deste subcapítulo.

Proposição. Se $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável em $a \in D$, então é contínua nesse ponto.

3.3.1. Regras de derivação

Teorema 1 (Derivada da soma). Sejam $f, g: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis no ponto $a \in D$. Então $f + g$ é derivável em a e $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

Demonstração. Ora, para todo o $x \in D \backslash \{a\}$, temos:

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x-a}$$
$$= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}. \qquad \mathbf{(1)}$$

Como, por hipótese, f e g são deriváveis em a, existem e são finitos $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$.

Assim, existe e é finito $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$ e por (1) existe e é finito $\lim\limits_{x \to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}$, tendo-se que

$$\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$

Portanto $f + g$ é derivável em a e $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$. ■

Teorema 2 (Derivada do produto). Sejam $f, g: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis no ponto $a \in D$. Então $f \times g$ é derivável em a e $(f \times g)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.

Demonstração. Ora, para todo o $x \in D\backslash\{a\}$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{(f\times g)(x)-(f\times g)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)\times g(x)-f(a)\times g(a)}{x-a} \\
&= \frac{f(x)\times g(x)-g(x)\times f(a)+g(x)\times f(a)-f(a)\times g(a)}{x-a} \\
&= g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}. \qquad (\mathbf{2})
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, f e g são deriváveis em a, existem e são finitos $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e $\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$.

Por outro lado, como g é derivável em a, g é também contínua em a.

Assim, existe $\lim_{x\to a} g(x)$ e este limite é $g(a)$.

Então, podemos concluir que existe e é finito $\lim_{x\to a}\left(g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$.

Atendendo a (2) e às regras operatórias dos limites, vem que $f\times g$ é derivável em a e

$$\begin{aligned}
(f\times g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f\times g)(x)-(f\times g)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a} f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} g(x)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
&= g(a)f'(a)+f(a)g'(a).
\end{aligned}$$

Portanto $f\times g$ é derivável em a e $(f\times g)'(a)=f(a)g'(a)+f'(a)g(a)$. ■

Corolário. Seja $g: D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função derivável em $a\in D$ e seja $k\in\mathbb{R}$. Então a função kg é derivável em a e $(k\times g)'(a)=k\times g'(a)$.

Demonstração. Consideremos a função constante $f(x)=k$, para todo o $x\in D$.

Sabemos que f é derivável em D, tendo-se $f'(x)=0$, para todo o $x\in D$.

Como $kg=f\times g$, usando o teorema anterior, concluímos que kg é derivável em a e

$$(kg)'(a)=f(a)g'(a)+f'(a)g(a)=f(a)g'(a)=kg'(a). \blacksquare$$

Teorema 3 (Derivada da potência de expoente natural). Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D$ e seja n um natural maior ou igual a 2. Então f^n é derivável em a e $(f^n)'(a) = nf^{n-1}(a)f'(a)$.

Demonstração. Vamos demonstrar o resultado usando indução em n (começando em $n = 2$).
Como f é derivável em a e $f^2 = f \times f$, o teorema 2 garante que f^2 é derivável em a e

$$(f^2)'(a) = (f \times f)'(a) = f(a)f'(a) + f'(a)f(a) = 2f(a)f'(a) = 2f(a)^{2-1}f'(a).$$

Assim, o resultado é válido para $n = 2$.
Seja n um natural maior ou igual a 2 e admitamos, como hipótese de indução, que f^n é derivável em a e $(f^n)'(a) = nf^{n-1}(a)f'(a)$.
Como $f^{n+1} = f^n \times f$, tendo em conta a hipótese de indução e usando novamente o teorema 2, concluímos que f^{n+1} é derivável em a e

$$\begin{aligned}(f^{n+1})'(a) &= (f^n \times f)'(a) = f^n(a)f'(a) + (f^n)'(a)f(a) \\ &= f^n(a)f'(a) + nf^{n-1}(a)f'(a)f(a) = f^n(a)f'(a) + nf^n(a)f'(a) \\ &= (n+1)f^n(a)f'(a).\end{aligned}$$

Assim, por indução matemática, o resultado é válido para todo o número natural maior ou igual a 2. ■

Observação. Como, para todo o $x \in D$, $f^0(x) = (f(x))^0 = 1$, a igualdade estabelecida no teorema anterior também é válida para $n = 1$, e, caso $f(a) \neq 0$, é também válida para $n = 0$.

- Vamos agora estender o teorema anterior a expoentes inteiros negativos, começando por estudar o caso particular de $n = -1$.
- Recorde-se que, dado n inteiro negativo e uma função $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f^n é a função de domínio $D_1 = \{x \in D: f(x) \neq 0\}$ definida por $f^n(x) = \frac{1}{(f(x))^{-n}} = \frac{1}{f^{-n}(x)}$.

Observação. Note-se que, se $n = -1$, $\frac{1}{f^{-n}(x)} = \frac{1}{f(x)}$. Assim, neste caso, usaremos a notação $\frac{1}{f}$ para representar a função f^n de forma a evitar possíveis ambiguidades com a função inversa de f, caso exista.

Teorema 4. Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D$. Se $f(a) \neq 0$, então $\frac{1}{f}$ é derivável em a e $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{f^2(a)}$.

Demonstração. Suponhamos que $f(a) \neq 0$.

Sendo D_1 o domínio de $\frac{1}{f}$, para todo o $x \in D_1\backslash\{a\}$, temos:

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = \frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x)f(a)}}{x-a} = \frac{f(a)-f(x)}{f(a)f(x)(x-a)} = -\frac{1}{f(a)} \times \frac{1}{f(x)} \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ (\mathbf{3}).$$

Como f é contínua em a (por ser derivável em a) e $f(a) \neq 0$, concluímos que existe $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$ e este limite é $\frac{1}{f(a)}$.

Por outro lado, como f é derivável em a, existe e é finito $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Assim, a partir de (3) concluímos que $\frac{1}{f}$ é derivável em a e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{1}{f(a)} \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\frac{1}{f^2(a)} \times f'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}. \blacksquare$$

Teorema 5. Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D$ e seja n um número inteiro menor ou igual a -2. Se $f(a) \neq 0$, então f^n é derivável em a e tem-se $(f^n)'(a) = nf^{n-1}(a)f'(a)$.

Demonstração. Suponhamos que $f(a) \neq 0$.

Temos $f^n = \left(\frac{1}{f}\right)^{-n}$.

Pelo teorema anterior, como $f(a) \neq 0$ e f é derivável em a, então $g = \frac{1}{f}$ também é derivável em a tendo-se $g'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$.

Como $-n$ é um natural maior ou igual a 2, pelo teorema 3 (derivada da potência de expoente natural), vem que $f^n = g^{-n}$ é derivável em a e

$$(f^n)'(a) = (g^{-n})'(a) = -ng^{-n-1}(a)g'(a) = -n \times f^{n+1}(a) \times \left(-\frac{f'(a)}{f^2(a)}\right)$$

$$= -n \times \frac{f^{n+1}(a)}{f^2(a)} \times \left(-f'(a)\right) = nf^{n-1}(a)f'(a). \blacksquare$$

- Mais à frente generalizaremos o resultado obtido para expoentes inteiros a expoentes racionais. Vamos agora estabelecer a regra de derivação do quociente.

Teorema 6 (Derivada do quociente). Sejam $f, g: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in D$. Se $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é derivável em a e $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Demonstração. Suponhamos que $g(a) \neq 0$.
Então, pelo teorema 4, $\frac{1}{g}$ é derivável em a e $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$.
Como $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ e f e $\frac{1}{g}$ são deriváveis em a, pelo teorema 2 (derivada do produto), vem que $\frac{f}{g}$ é derivável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \times \frac{1}{g}\right)'(a) = f(a) \times \left(\frac{1}{g}\right)'(a) + f'(a) \times \left(\frac{1}{g}\right)(a)$$

$$= f(a) \times \left(\frac{-g'(a)}{g^2(a)}\right) + \frac{f'(a)}{g(a)} = \frac{f'(a)g(a)}{g^2(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

$$= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \blacksquare$$

- De seguida, apresentaremos um resultado que será utilizado aquando da demonstração do teorema da derivada da função composta.

Lema. Seja $g: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $b \in D$. Tem-se que existe uma função $\alpha: D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

i) $g(x) - g(b) = g'(b)(x-b) + (x-b)\alpha(x)$, para todo o $x \in D$;

ii) $\lim_{x \to b} \alpha(x) = 0$.

Demonstração. Considere-se a função $\alpha: D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(b)}{x - b} - g'(b), se\ x \neq b \\ 0, \qquad se\ x = b \end{cases}$$

Pela definição de α, obtemos de imediato as igualdades i).

Por outro lado, como g é derivável em b, existe e é finito $\lim\limits_{x \to b} \frac{g(x)-g(b)}{x-b}$ e este limite é $g'(b)$.

Assim, dado que, para $x \in D \backslash \{b\}$,

$$\alpha(x) = \frac{g(x) - g(b)}{x - b} - g'(b),$$

concluímos que o $\lim\limits_{x \to b} \alpha(x)$ existe e

$$\lim_{x \to b} \alpha(x) = g'(b) - g'(b) = 0. \blacksquare$$

- Finalmente, vamos apresentar e demonstrar o teorema da derivada da função composta.

Teorema 7 (Teorema da derivada da função composta). Consideremos funções $f: D_1 \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_2 \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(D_1) \subseteq D_2$. Seja $a \in D_1$ tal que f é derivável em a e g é derivável em $f(a)$. Então $g \circ f$ é derivável em a e $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.

Demonstração. Tomemos $b = f(a)$.

Como, por hipótese, g é derivável em b, o lema anterior garante a existência de uma função $\alpha: D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{y \to b} \alpha(y) = 0$ e, para todo o $y \in D_2$,

$$g(y) - g(b) = (y - b)[g'(b) + \alpha(y)].$$

Dado que f é contínua em a (por ser derivável em a), temos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = b$.

Assim, substituindo y por $f(x)$, concluímos que

$$\lim_{x \to a} \alpha(f(x)) = 0 \qquad (\mathbf{4})$$

e, para todo o $x \in D_1$,

$$g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big) = \big(f(x) - f(a)\big)\big[g'\big(f(a)\big) + \alpha(f(x))\big].$$

Portanto, para $x \in D_1 \setminus \{a\}$,

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\big[g'\big(f(a)\big) + \alpha\big(f(x)\big)\big]. \qquad (\mathbf{5})$$

Como f é derivável em a, existe $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tendo-se

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \qquad (\mathbf{6})$$

A partir das igualdades (5) e usando (4) e (6), concluímos através da definição de derivada num ponto que $g \circ f$ é derivável em a e

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) \times \left(g'\big(f(a)\big) + \lim_{x \to a} \alpha\big(f(x)\big)\right) \\ &= f'(a)(g'(f(a)) + 0) = g'\big(f(a)\big)f'(a). \blacksquare\end{aligned}$$

3.3.2. Derivada da função exponencial $x \longmapsto e^x$

Resultado. A função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ é derivável em todo o $\mathbb{R}$, tendo-se $f'(a) = e^a$, para todo o $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Recorde-se que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Seja $a \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \frac{e^a(e^h - 1)}{h} = e^a \times \frac{e^h - 1}{h}.$$

Assim, existe $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ e

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = e^a \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^a \times 1 = e^a.$$

Portanto f é derivável em a e $f'(a) = e^a$. ■

Resultado. Seja $u: D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D$. Então a função $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{u(x)}$ é derivável em a, tendo-se $f'(a) = u'(a)e^{u(a)}$.

Demonstração. Consideremos a função $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^x$.
Temos $f(x) = e^{u(x)} = (g \circ u)(x)$.
Como u é derivável em a e g é derivável em todo o $\mathbb{R}$, em particular em $u(a)$, aplicando o teorema da derivada da função composta concluimos que $g \circ u$ é derivável em a, isto é, f é derivável em a e

$$f'(a) = g'\big(u(a)\big) \times u'(a) = e^{u(a)} \times u'(a) = u'(a)e^{u(a)}. \blacksquare$$

Corolário. Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ e seja $u: D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D$. Então a função $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \alpha^{u(x)}$ é derivável em a, tendo-se $f'(a) = u'(a)\alpha^{u(a)}\ln(\alpha)$.

Demonstração. Temos $f(x) = \alpha^{u(x)} = e^{\ln(\alpha)\times u(x)}$.
Como u é derivável em a, a função $v = \ln(\alpha)\, u$ é também derivável em a e $v'(a) = \ln(\alpha)\, u'(a)$.
Aplicando o resultado anterior, resulta que f é derivável em a e

$$f'(a) = v'(a)e^{v(a)} = \ln(\alpha)\, u'(a)e^{\ln(\alpha)u(a)} = u'(a)\alpha^{u(a)}\ln(\alpha)\,. \blacksquare$$

3.3.3. Derivada da função logarítmica $x \longmapsto \ln(x)$

Resultado. A função $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$ é derivável em $\mathbb{R}^+$, tendo-se $f'(a) = \frac{1}{a}$, para todo o $a \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Recorde-se que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

Seja $a \in \mathbb{R}^+$. Temos:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h} = \frac{\ln\left(\frac{a+h}{a}\right)}{h} = \frac{1}{a} \times \frac{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}}.$$

Como $\frac{h}{a} \to 0$ quando $h \to 0$, segue-se que existe $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ e

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{a} \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}} = \frac{1}{a} \times 1 = \frac{1}{a}.$$

Portanto f é derivável em a e $f'(a) = \frac{1}{a}$. ■

Resultado. Seja $u: D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $u(x) > 0$, para todo o $x \in D$, e seja $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \ln(u(x))$. Se u é derivável em $a \in D$, então f é derivável em a e tem-se $f'(a) = \frac{u'(a)}{u(a)}$.

Demonstração. Consideremos a função $g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \ln(x)$.

Temos $f(x) = \ln(u(x)) = (g \circ u)(x)$.

Supondo u derivável em a, como g é derivável em $u(a)$, aplicando o teorema da derivada da função composta concluimos que $g \circ u$ é derivável em a, isto é, f é derivável em a e

$$f'(a) = g'\big(u(a)\big) \times u'(a) = \frac{1}{u(a)} \times u'(a) = \frac{u'(a)}{u(a)}. \blacksquare$$

Corolário. Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ e seja $u: D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $u(x) > 0$, para todo o $x \in D$. Se u é derivável em $a \in D$, então a função $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_\alpha(u(x))$ também é derivável em a e tem-se $f'(a) = \frac{u'(a)}{u(a)\ln(\alpha)}$.

Demonstração. Temos $f(x) = \log_\alpha(u(x)) = \frac{\ln(u(x))}{\ln(\alpha)} = \frac{1}{\ln(\alpha)} \times \ln(u(x))$.

Tomando $g(x) = \ln(u(x))$, temos $f = \frac{1}{\ln(\alpha)} \times g$.

Pelo resultado anterior, g é derivável em a, logo $\frac{1}{\ln(\alpha)} g$ é derivável em a, isto é, f é derivável em a e

$$f'(a) = \left(\frac{1}{\ln(\alpha)} g\right)'(a) = \frac{1}{\ln(\alpha)} g'(a) = \frac{1}{\ln(\alpha)} \times \frac{u'(a)}{u(a)} = \frac{u'(a)}{u(a)\ln(\alpha)}. \blacksquare$$

3.3.4. Derivada da potência de expoente racional

- Finalmente, vamos generalizar o teorema 3 (derivada da potência de expoente natural) a expoentes racionais.
- Recorde-se que, dado um número real positivo a e naturais p e q,

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p \; e \; a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$$

(onde $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$, se $q > 1$ e $a^{\frac{1}{q}} = a$, se $q = 1$).

Definição. Seja $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) > 0$, para todo o $x \in D$, e seja α um número racional. Define-se $f^\alpha: D \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f^\alpha(x) = (f(x))^\alpha$.

- De acordo com a definição anterior, se $\alpha = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q > 1$,

$$f^\alpha(x) = \left(\sqrt[q]{f(x)}\right)^p = \sqrt[q]{(f(x))^p}.$$

Teorema 8. Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) > 0$, para todo o $x \in D$, e seja $\alpha \in \mathbb{Q}$. Se f é derivável em $a \in D$, então f^α é derivável em a e tem-se $(f^\alpha)'(a) = \alpha f^{\alpha-1}(a) f'(a)$.

Demonstração. Para todo o $x \in D$, temos

$$f^\alpha(x) = (f(x))^\alpha = e^{\ln\left(\left(f(x)\right)^\alpha\right)} = e^{\alpha \ln(f(x))}.$$

Como f é derivável em a e $f(x) > 0$, temos que a função $u: D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x) = \ln(f(x))$ é derivável em a e $u'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}$.

Assim, a função $v = \alpha u$ é também derivável em a e $v'(a) = \alpha \frac{f'(a)}{f(a)}$.

Como para todo o $x \in D$, $f^{\alpha}(x) = e^{v(x)}$ e v é diferenciável em a, segue-se que f^{α} é derivável em a e

$$
\begin{aligned}
(f^{\alpha})'(a) = v'(a)e^{v(a)} = \alpha \frac{f'(a)}{f(a)} e^{\alpha \ln(f(a))} = \alpha \frac{f'(a)}{f(a)} e^{\ln\left((f(a))^{\alpha}\right)} = \alpha \frac{f'(a)}{f(a)} \times f(a)^{\alpha} \\
= \alpha f(a)^{\alpha-1} f'(a). \blacksquare
\end{aligned}
$$

3.4. Estratégias e recursos

A minha prática de ensino supervisionada, com a duração de cinco aulas, desenvolveu-se recorrendo a várias metodologias de trabalho e a tarefas diversificadas. A planificação elaborada para estas aulas teve em conta o perfil dos alunos da turma que tive oportunidade de traçar graças ao contacto direto com a turma, durante as aulas do primeiro período do corrente ano letivo. As tarefas propostas aos alunos, para além de cumprirem os objetivos específicos previstos para cada aula, tiveram ainda, como propósito, ajudar a responder às questões deste estudo.

As aulas obedeceram a uma estrutura comum, integrando os seguintes momentos: breve revisão de conceitos anteriormente estudados; apresentação da tarefa e esclarecimento do seu enunciado; realização de trabalho autónomo; discussão em grande grupo; sistematização de conhecimentos e consolidação de aprendizagens (Canavarro, 2011). O momento inicial de cada aula foi utilizado para recordar os conceitos prévios necessários para os alunos compreenderem os novos conceitos e procedimentos ou para estabelecerem conexões com conhecimentos adquiridos em anos anteriores, através de discussão em grande grupo com registos efetuados por mim no quadro. Visto que estes momentos foram centrados no professor, procurei implicar o aluno, chamando-o a participar, colocando-lhe questões e recorrendo com regularidade às suas intervenções.

As tarefas foram apresentadas aos alunos com o objetivo de esclarecer e clarificar eventuais dúvidas referentes ao seu enunciado. Uma das estratégias que adotei foi solicitar a um aluno que lesse em voz alta, de modo a que toda a turma pudesse ouvir a leitura, e, seguidamente, pedir-lhe para explicar aos colegas, por palavras suas, o que era pretendido com a tarefa. Esta estratégia teve como objetivo facilitar a interpretação do enunciado pela maioria dos alunos e permitir ao professor obter um feedback acerca do modo como estes interpretaram a tarefa. Permitiu-me também corrigir erros de interpretação do enunciado, garantindo que não existia nenhum bloqueio ao início da tarefa. Um bom momento introdutório levou a que os alunos recorressem menos ao professor durante a realização da tarefa, tornando-os mais autónomos.

Enquanto os alunos trabalharam autonomamente, a minha função foi, sobretudo, a de monitorizar o desenvolvimento dos trabalhos dos alunos, evitando responder diretamente às questões dos alunos, uma vez que pretendia perceber o tipo de dificuldades que os alunos manifestavam em relação à temática em estudo e quais os erros mais frequentes (Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2009). Naturalmente, quando as dificuldades e as dúvidas foram generalizadas, interrompi o trabalho autónomo dos alunos com o propósito de esclarecer essas dúvidas. Além disso, durante este trabalho autónomo dos alunos, selecionei as resoluções a serem apresentadas no quadro, garantindo, no processo de seleção, que estão presentes estratégias diversificadas e procedimentos variados, de forma a enriquecer e a contribuir para uma aprendizagem significativa dos alunos (Canavarro, 2011).

No decorrer das aulas, houve também momentos de discussão em grande grupo. Na realidade, promovi vários momentos de discussão durante as aulas porque "as discussões coletivas na aula de matemática sustentam a construção conjunta de ideias, através da partilha de pensamentos, do ouvir e responder às ideias dos outros e da negociação de significados" (Menezes, Ferreira, Martinho, & Guerreiro, 2013, p. 13). Assim, durante o momento de discussão fomentei um ambiente facilitador das aprendizagens, por meio do envolvimento de todos os alunos e da partilha de conhecimentos. O confronto de várias resoluções enriqueceu a aprendizagem dos alunos na medida em que contribuiu para uma melhor compreensão dos conceitos abordados, permitindo-lhes também um conhecimento de outras formas de resolução diferentes da sua (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014).

Por fim, no que se refere à estrutura das aulas, estas terminaram com a consolidação e sistematização das ideias trabalhadas em sala de aula, feitas por mim, dando também indicações aos alunos do que iria ser dado na aula seguinte.

Durante todas as aulas, os alunos estiveram dispostos dois a dois, nas suas secretárias, onde trabalharam a pares, uma vez que se tratava de uma prática já usada nesta turma pela professora da disciplina. É um método com o qual os alunos estão familiarizados e trata-se de uma forma adequada para promover a comunicação matemática e a capacidade de saber ouvir outros, desenvolvendo a cooperação e o espírito de equipa e permitindo, ainda, uma exploração mais rica das tarefas (Nunes, 1996).

No que se refere aos recursos utilizados, para além das tarefas às quais dedico a secção seguinte, destaco o uso da calculadora gráfica, ferramenta essencial para o ensino e para a aprendizagem da matemática (NCTM, 2008). Por um lado, trata-se de uma ferramenta que possibilita "testar rapidamente hipóteses para que as conjeturas sejam reformuladas e coordenar aspetos gráficos e algébricos, de modo a elaborar conjeturas com base nestas duas representações" (Ramos & Raposo, 2008, p. 199, citado por Vasques, 2015). Por outro lado, a calculadora gráfica é um recurso com o qual os alunos estão bastante familiarizados. Além disso, são vários os autores que defendem que é essencial a utilização da calculadora gráfica para potenciar a aprendizagem dos alunos (Teixeira *et al.*, 1998). Pelos motivos apresentados acima, durante a lecionação das minhas aulas dei liberdade aos alunos para utilizarem a calculadora gráfica de forma a facilitar e rentabilizar o processo de ensino, motivando-os para a aprendizagem da Matemática. A utilização da calculadora gráfica por parte dos alunos pode inclusive ajudar a compreender o seu raciocínio e as suas dificuldades, na medida em que serve muitas vezes de suporte às ideias e estratégias apresentadas.

3.5. Tarefas propostas

As aulas que lecionei foram preparadas tendo como suporte as tarefas matemáticas, pois estas são a base para a aprendizagem dos alunos (Ponte, 2005). De forma a proporcionar aos alunos uma aprendizagem com compreensão, criei um conjunto de tarefas matemáticas que incorporam as várias vertentes referidas por Ponte (2005). Considero que as tarefas que apresento têm enormes potencialidades para o desenvolvimento e aprendizagem dos alunos, uma vez que lhes permitem, entre outras coisas, formular conjeturas, generalizar e justificar as regras de derivação. Apesar das tarefas que desenvolvi não se enquadrarem apenas num dos tipos de tarefa referidos por Ponte (2005), realço a componente investigativa presente em todas elas. De entre os momentos de uma investigação matemática, destaque para o momento de exploração, onde o aluno é levado a reconhecer a situação-problema, a explorá-la e formular as primeiras questões. De seguida surge o momento de organização dos dados no qual os alunos elaboram as primeiras conjeturas. Após estes dois momentos, surge a fase em que os alunos testam as conjeturas que elaboraram de forma a poder refiná-las e por último surge a justificação e avaliação onde a conjetura é justificada e se avaliam os resultados do raciocínio apresentado.

O tipo e a natureza de cada tarefa influenciam a forma como os alunos aprendem a pensar matematicamente (Stein, Remillard & Smith, 2007). Assim, e uma vez que ao nível da subunidade funções deriváveis, as tarefas presentes nos manuais escolares eram constituídas, essencialmente, por exercícios de aplicação, as que apresentei durante as aulas foram elaboradas por mim, tendo em conta os objetivos de aprendizagem que pretendia que os alunos alcançassem e tendo também presente as questões de investigação deste estudo. Estas tarefas foram, além disso, pensadas e criadas de modo a que permitissem aos alunos desenvolver diferentes tipos de estratégias de resolução.

Ponte e Quaresma (2012) consideram duas dimensões no contexto das tarefas. Por um lado, existem as tarefas que estão associadas a contextos reais, remetendo para aspetos da vida quotidiana em que o aluno revela algum conhecimento ou experiência pessoal. Por outro lado, existem as tarefas que remetem exclusivamente para o universo matemático, deixando de parte o contexto e focando-se na essência e no conteúdo matemático. Assim, e dada a natureza do tópico a trabalhar com os alunos (regras de derivação e teorema da derivada da função composta), optei por desenvolver tarefas que remetem para o universo matemático e que variam entre o exercício e a exploração, predominando um grau de desafio médio e uma estrutura fechada (Ponte, 2005).

Quando iniciei a planificação da unidade de ensino, uma das minhas principais preocupações foi estabelecer relações entre os tópicos que pretendia lecionar e os conceitos necessários à sua compreensão já lecionados em anos anteriores. Posto isto, na elaboração da primeira tarefa, tive o cuidado de começar com um exercício de revisão das derivadas de funções polinomiais de grau menor ou igual a três de forma a permitir aos alunos recordar e consolidar os conhecimentos do 11.º ano, sobre este tópico.

Ao nível da estrutura das tarefas, optei por criar um conjunto de questões que levassem o aluno a intuir e a conjeturar as regras de derivação em estudo, tentando assim proporcionar uma experiência de aprendizagem mais significativa do que a mera exposição e enunciação das regras de derivação em causa. No final da tarefa foi proposto ao aluno um exercício de aplicação dos conhecimentos entretanto aprendidos na resolução da mesma. Esta filosofia foi mantida ao longo das várias tarefas que desenvolvi, cuja estrutura levava a que os alunos conjeturassem a regra de derivação antes de esta ser enunciada no quadro. Em consonância com as tarefas que desenvolvi, criei duas questões de aula constituídas essencialmente por exercícios que me permitiram perceber se os alunos estavam a acompanhar e a consolidar os seus conhecimentos no que respeita às várias regras de derivação lecionadas.

Tarefa 1 (Regras de derivação)

Esta foi a tarefa de suporte da primeira das cinco aulas que constituíram a minha intervenção letiva. A tarefa está dividida em três grupos de questões que abordam, respetivamente, a regra de derivação da soma, a regra de derivação do produto e a regra de derivação da potência.

O primeiro grupo inicia-se com uma questão, onde é pedido aos alunos que determinem a função derivada de algumas funções polinomiais de grau menor ou igual a três com o intuito de os levar a recordar como se deriva este tipo de funções. A segunda questão tem como objetivo explorar a regra de derivação da soma a partir de duas funções polinomiais, levando os alunos a intuí-la. Note-se que as funções foram escolhidas de modo a que após calculadas as derivadas pedidas, seja evidente, sem ser necessário efetuar mais cálculos, que a derivada da soma é igual à soma das derivadas. Depois de verificada em dois casos particulares, espera-se que os alunos conjeturem a regra de derivação da soma para duas funções. Este grupo de questões termina com um exercício de aplicação da regra deduzida. O exercício proposto tem a particularidade de exigir aos alunos a aplicação da regra de derivação da soma, uma vez que não são fornecidos dados que permitam calcular diretamente a derivada da soma pedida.

O segundo grupo é constituído pelas questões 4, 5 e 6 da tarefa. Com a questão 4, à semelhança do que foi feito para a soma, pretende-se levar os alunos a conjeturar uma regra de derivação para o produto. Estabelecida a regra, na questão 5 são pedidas as derivadas de três funções polinomiais de grau quatro. Estas funções foram escolhidas de modo a proporcionar aos alunos a aplicação da regra de derivação do produto, recorrendo a uma fatorização das funções como produto de duas funções polinomiais de grau menor ou igual a três, cujas derivadas já sabem determinar. Em particular, é pedida a derivada da função $f(x) = x^4$, preparando assim os alunos para o estudo da derivada de qualquer função polinomial de grau quatro. Na alínea a) da questão 6, pede-se uma pequena demonstração, onde o aluno terá de aplicar a regra de derivação do produto no caso particular em que uma das funções é constante, provando assim que dada uma constante $k \in \mathbb{R}$ e uma função derivável f, se tem $(kf)' = kf'$. Na alínea b) da questão 6, que encerra o segundo grupo, são pedidas derivadas que podem ser determinadas, recorrendo ao resultado estabelecido na alínea anterior, tomando $f(x) = x^4$. Após a realização dos dois primeiros grupos da tarefa, espera-se que os alunos sejam capazes de derivar qualquer função polinomial de grau menor ou igual a quatro.

O terceiro e último grupo da tarefa é dedicado ao estudo da regra de derivação da potência. Este grupo inicia-se com uma introdução onde se deduz, usando a regra de derivação do produto, que sendo f uma função derivável, $(f^2)' = 2ff'$. Posto isto, na questão 7 pede-se ao aluno que deduza que $(f^3)' = 3f^2f'$ e que conjeture como determinar a derivada de f^{100}. O propósito desta questão é conduzir os alunos à regra de derivação da potência e ao mesmo tempo dar-lhes a ideia do raciocínio indutivo que permite deduzi-la à custa da regra de derivação do produto. Com a aprendizagem da regra de derivação da potência, espera-se que os alunos sejam capazes de derivar qualquer função polinomial. A tarefa termina com um exercício de consolidação das regras de derivação entretanto estudadas.

Questão de aula 1

A questão de aula 1, aplicada no início da segunda aula da minha intervenção letiva, consiste num breve exercício de aplicação das regras de derivação da soma, produto e potência. Com a aplicação desta questão, tive como objetivo avaliar se os alunos tinham compreendido as regras de derivação que foram estudadas na primeira aula. Esta pequena tarefa foi desenvolvida também com o propósito de identificar o tipo de erros cometidos pelos alunos no cálculo de derivadas, usando as regras de derivação da soma, produto e potência.

Tarefa 2 (Regras de derivação)

Esta tarefa serviu de suporte à segunda e parte da terceira aula da minha intervenção letiva. A tarefa está dividida em dois grupos de questões. O primeiro grupo é dedicado ao estudo da derivada das funções e^x e $\ln(x)$ e o segundo grupo é dedicado à regra de derivação do quociente.

Na primeira das três questões que constituem o primeiro grupo pede-se ao aluno que descubra, com base na definição de derivada de uma função num ponto, qual a derivada da função e^x e qual a derivada da função $\ln(x)$ em cada ponto dos respetivos domínios. Esta questão foi desenvolvida não só com o objetivo de os alunos trabalharem com a definição de derivada de uma função num ponto, como também levá-los a mobilizar outros conhecimentos previamente adquiridos, nomeadamente o cálculo de limites, as regras operatórias do logaritmo e o reconhecimento de limites notáveis. A opção de iniciar esta tarefa com a dedução das derivadas das funções e^x e $\ln(x)$ deveu-se essencialmente ao facto de o conhecimento das mesmas, em combinação com as regras de derivação já estudadas, alargar significativamente o leque de funções que os alunos passam a saber derivar.

A questão dois é um exercício de aplicação que envolve não só as derivadas estabelecidas na questão 1, como também as regras de derivação já estudadas até ao momento. Para além do objetivo de consolidar os conhecimentos mencionados anteriormente, a questão 2 tem também como objetivo chamar a atenção dos alunos para a diferença entre a derivada de uma função f num ponto a e a derivada da função constante $g(x) = f(a)$. Neste sentido, esta questão inclui uma alínea onde se pede a derivada da função constante $f(x) = \ln(2)$. Na última questão deste grupo é pedido ao aluno que use a mudança de base $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ para determinar a derivada da função $f(x) = \log_a(x)$ ($a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$). Deste modo, o aluno aplica conhecimentos adquiridos anteriormente para obter a derivada de novas funções.

O segundo grupo inicia-se com a questão 4 que tem como objetivo explorar a regra de derivação do quociente, verificando-a para casos particulares de funções cuja derivada já é conhecida. Após esta questão, é apresentada a regra de derivação do quociente e a tarefa termina com a questão 5, na qual se pede aos alunos para determinarem a derivada de algumas funções. Todas as derivadas pedidas nesta questão podem ser determinadas recorrendo à regra de derivação do quociente, embora seja possível aplicar outras estratégias.

Tarefa 3 (Teorema da derivada da função composta)

Esta tarefa foi iniciada na terceira aula, após terminada a tarefa 2, e foi concluída durante a quarta aula da minha intervenção letiva. É dedicada ao teorema da derivada da função composta e pretende-se que os alunos sejam capazes de o utilizar na determinação de derivadas de diversas funções e na elaboração de pequenas demonstrações, nomeadamente para deduzir a derivada das funções e^u, $\ln(u)$, a^u e $\log_a(u)$, dada uma função derivável u.

Na primeira parte da tarefa, questões 1 e 2, pretende-se que os alunos relembrem o conceito de composição de funções. Na questão 1 são dadas duas funções concretas f e g e é pedida a caracterização (domínio e lei de transformação) das funções

$g \circ f$ e $f \circ g$. Esta questão tem como objetivos, por um lado recordar qual o domínio e a lei de transformação de uma composição de funções e, por outro lado, observar que a ordem pela qual se efetua a composição de funções não é indiferente. Em aplicações concretas do teorema da derivada da função composta, é fundamental saber fatorizar uma função como a composição de duas funções. Por esta razão incluí a questão 2, na qual se pede uma fatorização da função $h(x) = (x + 5)^2$ como composição de duas funções.

Na terceira questão da tarefa, o objetivo é que os alunos estabeleçam a igualdade entre $(g \circ f)'(x)$ e $g'(f(x)) \times f'(x)$ em cada um dos dois exemplos apresentados, utilizando as regras de derivação e as propriedades do logaritmo já estudadas, de modo a intuir o teorema da derivada da função composta. Após a exploração destes exemplos, é então enunciado o teorema da derivada da função composta.

A questão 4 da tarefa tem como principal objetivo a consolidação de conhecimentos sobre a utilização do teorema da derivada da função composta. Os exemplos considerados nesta questão têm também como objetivo preparar o aluno para a questão 5 onde é pedido que, recorrendo ao teorema da derivada da função composta, deduza a derivada das funções e^u e $\ln(u)$, para uma qualquer função derivável u.

A questão 5 tem também como propósito a dedução das derivadas das funções da forma a^u e $\log_a(u)$ ($a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$), a partir das derivadas das funções da forma e^u e $\ln(u)$ obtidas anteriormente.

Na sexta e última questão da tarefa os alunos têm oportunidade de aplicar os resultados estabelecidos na questão 5, bem como as regras de derivação já estudadas ao longo das últimas aulas.

Tarefa 4 (Regras de derivação)

Esta tarefa foi aplicada na quinta aula e encerrou o estudo das regras de derivação e do teorema da derivada da função composta. A tarefa está dividida em dois grupos de questões. No primeiro grupo, para além de consolidar e praticar as regras de derivação estudadas (da soma, do produto, da potência, do quociente e da função composta), o aluno é levado a recordar o significado geométrico da derivada de uma função num ponto para articular a interpretação gráfica de uma função com a representação algébrica de outra, de modo a determinar as derivadas pedidas.

No segundo grupo, que se inicia com a questão 5, é estudada a derivada de uma função definida por ramos e, à semelhança das tarefas anteriores, é pedido ao aluno que determine e caracterize a derivada de algumas funções. Esta questão permite ao aluno lidar com uma nova situação: a necessidade de averiguar isoladamente se f admite derivada no ponto onde muda de ramo. Esta nova situação, consoante a estratégia seguida, permite explorar a relação entre continuidade e diferenciabilidade num ponto ou estudar, por definição, a existência de derivada no ponto de mudança de ramo. À semelhança das tarefas anteriores, esta tarefa termina com um exercício para consolidação das regras de derivação.

Questão de aula 2

A questão de aula 2, enviada para trabalho de casa no final da quinta aula, visa avaliar se os alunos interiorizaram e compreenderam a regra de derivação do quociente e o teorema da derivada da função composta. A tarefa é constituída por três exercícios. No primeiro exercício é expectável que os alunos apliquem a regra de derivação do quociente para obter as derivadas pedidas. Deste modo, têm também a oportunidade de mobilizar outros conhecimentos previamente adquiridos, como por exemplo, as derivadas das funções e^x e $\ln(x)$. Os dois últimos exercícios são dedicados ao teorema da derivada da função composta. Esta questão de aula foi desenvolvida também com o intuito de identificar o tipo de erros cometidos pelos alunos no cálculo de derivadas, usando a regra de derivação do quociente e o teorema da derivada da função composta.

3.6. Avaliação das aprendizagens

A avaliação que desenvolvi durante as aulas que lecionei englobou momentos de avaliação diagnóstica (Bloom, Hastings & Madaus, 1983), de avaliação reguladora (Santos, 2008) e de avaliação sumativa (Nevo, 2006). O primeiro momento de avaliação teve um caráter diagnóstico sobre o conhecimento dos alunos das derivadas lecionadas no 11.º ano. Este momento foi pensado de forma a averiguar se existiria necessidade de fazer ajustes na planificação das aulas de forma a colmatar uma eventual falta de pré-requisitos. No entanto, a boa resposta dada pelos alunos a esta temática revelou não ser necessário proceder a alterações ao que já tinha planeado.

A avaliação reguladora foi feita através do *feedback* oral (Hattie & Timperley, 2007) que dei aos alunos aquando da resolução das tarefas propostas em sala de aula e dos trabalhos sugeridos para realizar em casa. Este feedback serviu essencialmente para esclarecer os alunos relativamente a erros cometidos durante o trabalho autónomo e para clarificar ideias e procedimentos que considerei terem ficado mal compreendidos por parte dos alunos. Foi notória a contribuição deste feedback para as aprendizagens dos alunos uma vez que estes clarificaram ideias relativamente aos conceitos em estudo, o que os levou a corrigir procedimentos. A observação do trabalho autónomo desenvolvido em cada aula permitiu-me não só fornecer feedback oral aos alunos como também perceber que tipo de conhecimentos é que estes mobilizavam, identificar que tipo de estratégias eram utilizadas na resolução de problemas e de que forma aplicavam os conceitos trabalhados. Naturalmente, a participação faz parte da avaliação dos alunos, por isso, tive em conta a sua participação nos momentos de discussão e o seu empenho na realização das tarefas propostas.

Por fim, apliquei uma avaliação de natureza sumativa que consistiu em duas questões de aula que incidiram sobre os tópicos trabalhados ao longo da unidade de ensino. Estas questões de aula foram corrigidas e classificadas pela professora da turma, sendo anexadas à componente de avaliação escrita dos alunos. Os resultados obtidos pelos alunos mostraram-se bastante satisfatórios e promissores, na medida em que os alunos revelaram desde cedo grande desenvoltura na utilização das regras de derivação, identificando com bastante facilidade a regra de derivação a utilizar e as aplicaram com sucesso. Foi raro o aluno que obteve uma classificação negativa nas questões de aula, demonstrando que os alunos interiorizaram os conceitos abordados na lecionação das minhas aulas.

3.7. Síntese das aulas lecionadas

O horário e a calendarização das aulas foram cumpridos, não se registando nenhum atraso significativo por parte dos alunos. Todas as aulas se iniciaram com o registo do sumário e uma breve explicação daquilo que seria trabalhado ao longo de cada aula. A resposta dos alunos da turma às minhas aulas foi bastante satisfatória, tendo estes aderido muito bem a todas as tarefas propostas, demonstrando sempre bastante recetividade, interesse e empenho na sua exploração. Todas as aulas foram filmadas, aspeto que não prejudicou nem alterou a dinâmica habitual da turma em estudo, tendo os alunos reagido de forma muito natural, não se deixando incomodar pela presença da câmara de filmar. No final de cada aula foram recolhidas as produções escritas dos alunos resultantes da exploração das tarefas, com o objetivo de serem analisadas e estudadas para que pudessem contribuir para a investigação que estou a realizar.

Primeira aula (26 de fevereiro de 2016)

Comecei a aula indagando se havia dúvidas relativamente às revisões feitas na aula anterior acerca das derivadas, de forma a garantir que os alunos iniciavam o estudo do novo tópico com os conhecimentos necessários.

Uma vez que não havia dúvidas, dei início ao cumprimento do meu plano de aula do qual constava uma tarefa cujo objetivo era levar os alunos a inferirem as regras de derivação, da soma, do produto e da potência. Embora não fosse a primeira vez que lecionava nesta turma e já conhecesse bem os alunos, estava um pouco apreensivo com a postura dos alunos na aula relativamente a mim, enquanto professor da turma. Além disso, estava ansioso com o facto de conseguir fazer uma boa gestão dos diversos momentos de aula de forma a proporcionar aos alunos a oportunidade de realizarem aprendizagens significativas. Contudo, a aula decorreu de forma natural, tendo os alunos estado muito envolvidos e participativos no trabalho proposto. Através da participação e das observações realizadas pelos alunos pude perceber que estes desenvolveram aprendizagens sobre os conceitos abordados. Sempre que surgiam dúvidas aos alunos, estes procuravam esclarecê-las de imediato e de forma desinibida, o que contribuiu para a compreensão do que foi lecionado.

Nesta aula, a metodologia de trabalho utilizada foi o trabalho de pares, que resultou muito bem, uma vez que é um método de trabalho com o qual os alunos estão familiarizados. Esta estratégia foi fundamental para o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos na medida em que houve entreajuda, partilha de raciocínios e conhecimentos. Assim, os alunos corresponderam às minhas expectativas, trabalhando com empenho e motivação na descoberta das regras de derivação. A estrutura da tarefa contribuiu para o sucesso da sua exploração pelos alunos, cumprindo com o objetivo de os levar a inferir as regras de derivação da soma, do produto e da potência. Conforme já esperava, um dos erros cometidos pelos alunos foi a generalização da regra de derivação da soma às restantes operações, nomeadamente assumirem que a derivada do produto é o produto das derivadas. No entanto, à medida que os alunos iam progredindo na tarefa, estes erros foram sendo corrigidos pelos próprios alunos.

Os momentos de discussão que decorreram ao longo da aula foram bastante enriquecedores e produtivos na medida em que os alunos não só colocavam questões acerca da temática em estudo, como também se interessaram em saber determinados aspetos da matéria relacionados com outro nível de estudos. Nomeadamente, houve alunos que me questionaram acerca da primitivação de funções, tópico que só será abordado no ensino superior, o que revela que os alunos tiveram a capacidade de estabelecer relações entre a função original e a sua derivada, mostrando também que estavam motivados e interessados nos assuntos abordados na minha aula. Os alunos participaram ativamente e de diversas formas: no lugar e no quadro, sempre que solicitados, mas também de modo espontâneo, ultrapassando as minhas expectativas.

A determinada altura, e derivado ao tipo de trabalho – a discussão de ideias – gerou-se, na sala de aula, algum ruído, o que me levou a chamar a atenção dos alunos da turma em geral, no sentido de manter o silêncio necessário ao bom desenrolar do trabalho. Penso que este facto foi positivo uma vez que os alunos acataram o que eu disse, retomando um comportamento adequado ao tipo de trabalho. Sinto que neste aspeto houve uma evolução da minha parte, visto que tenho alguma dificuldade em controlar o barulho da turma, sempre que ele acontece.

Um dos aspetos que considero que ainda devo melhorar, é o que se refere ao meu discurso em contexto de sala de aula. Na realidade, por vezes, aliado ao improviso, construo de forma incorreta algumas frases.

De um modo geral, considero que a aula foi bem-sucedida, tendo conseguido cumprir o plano traçado, sem grandes imprevistos, ainda que a turma seja composta por um número elevado de alunos, o que poderia ter causado algum desajuste ou atraso na planificação, devido à existência de diferentes ritmos de trabalho. No entanto, o apoio individualizado que dei aos alunos ao longo da aula permitiu ultrapassar este constrangimento.

Segunda aula (1 de março de 2016)

A aula iniciou-se com a discussão do trabalho de casa, no quadro, onde foram resolvidos alguns exercícios que ofereceram mais dúvidas aos alunos e que eram atinentes à regra de derivação do produto e da potência. Estas dúvidas foram ultrapassadas através da apresentação e explicitação de vários exemplos elucidativos destas regras.

Após este primeiro momento, os alunos realizaram uma questão de aula, com o objetivo de aferir se as regras de derivação, lecionadas na primeira aula tinham ficado bem compreendidas. Porém, no decurso da aula pude perceber que os alunos ainda manifestavam alguma dificuldade na regra de derivação da potência. Deste modo, na planificação da aula seguinte, tive este facto em atenção e no momento inicial de sistematização, apresentei e explicitei mais alguns exemplos no sentido de consolidar a aprendizagem desta regra. Ainda no que se refere à questão de aula, a sua realização demorou mais do que o previsto, provavelmente porque esta foi realizada quase imediatamente a seguir à lecionação destes tópicos, não permitindo aos alunos uma maior desenvoltura na concretização da mesma. Assim, não consegui cumprir com o plano de aula elaborado, tendo apenas conseguido trabalhar com os alunos metade da tarefa prevista para esta aula.

A determinação da derivada da função e^x e da função $\ln(x)$, parte integrante da tarefa prevista para esta aula, levantou muitas dificuldades nos alunos, dado que estes revelaram não estar à vontade com a definição de derivada de uma função num ponto. Por isso, e uma vez que percebi que a dúvida era generalizada, interrompi o trabalho autónomo e chamei ao quadro dois alunos que tinham conseguido chegar ao resultado pretendido para apresentarem à turma o seu raciocínio. Penso que foi uma estratégia adequada visto que surtiu efeito e a turma compreendeu o raciocínio dos colegas.

Pude aperceber-me que as aprendizagens da derivada da função e^x e da função $\ln(x)$ ficaram bem consolidadas pelos alunos, pois estes adicionaram-na com bastante naturalidade ao leque de regras de derivação já conhecidas, colocando-as em prática na resolução das questões da tarefa que envolviam derivar este tipo de funções. No que se refere à demonstração da derivada do logaritmo de base a, embora tenha sido apresentada por mim, no quadro, toda a turma participou na sua dedução, evidenciando que houve igualmente aprendizagens.

Findo este momento, restavam poucos minutos para terminar a aula, pelo que optei por deixar os alunos trabalharem autonomamente na resolução da tarefa e decidi que o estudo da regra de derivação do quociente transitaria para a próxima aula.

Relativamente à metodologia de trabalho adotada, o trabalho de pares, esta foi, mais uma vez, bastante adequada, visto que pude observar a colaboração entre colegas no sentido de resolverem as questões da tarefa. Os momentos de discussão foram bastante participados e permitiu que os próprios alunos se corrigissem entre eles, participando na construção da aprendizagem uns dos outros. Na realidade, os alunos aproveitam estes momentos para exporem e explicarem as suas ideias, o que me permitiu corrigir pequenas lacunas nos seus discursos e raciocínios. Além disso, estes momentos de discussão permitiram-me perceber que os tópicos lecionados estão a ser aprendidos pelos alunos na medida em que estes antecipam, frequentemente, as conclusões e as observações que eu pretendo fazer.

No que diz respeito ao comportamento da turma, os alunos revelaram-se mais agitados e conversadores do que o habitual, o que condicionou em larga medida o desenrolar da aula. Várias vezes tive de chamar a atenção dos alunos para estarem atentos e concentrados na resolução da tarefa e nos momentos de discussão, mas nem sempre obtive sucesso. Uma vez que, na primeira aula, o comportamento dos alunos foi adequado e irrepreensível, talvez a gestão da aula não tenha sido tão bem conseguida, nomeadamente no que se refere à marcação dos vários momentos de aula, o que levou a uma maior dispersão e agitação por parte dos alunos.

Posto isto, e apesar dos constrangimentos decorridos, nomeadamente o não cumprimento da planificação, considero que a aula foi bem conseguida uma vez que, através da análise das produções escritas dos alunos referentes à questão de aula, pude verificar que houve aprendizagens por parte dos alunos.

Terceira aula (3 de março de 2016)

Em primeiro lugar, importa referir que houve necessidade de reajustar a planificação inicialmente prevista para esta aula, em virtude do não cumprimento do plano de aula anterior. Deste modo, e para concluir o estudo da regra de derivação do quociente, a planificação desta terceira aula passou a incluir esta regra e o teorema da derivada da função composta foi apenas introduzido.

Assim, a aula teve início com a discussão em grande grupo da parte final da tarefa 2, na qual os alunos inferiram a regra de derivação do quociente. Através da participação e do trabalho que os alunos desenvolveram em torno da tarefa, pude observar que esta regra foi aprendida com sucesso, uma vez que os alunos conseguiram aplicá-la corretamente na determinação de derivadas. Parece-me, pois, que o conjunto de questões propostas na tarefa foi adequado aos alunos e proporcionou uma aprendizagem rápida e clara dos conteúdos em estudo.

Seguiu-se a sistematização dos conteúdos lecionados até ao momento, estratégia que veio a revelar-se fundamental na medida em que os alunos recordaram todas as regras de derivação já estudadas e alertei-os para os erros frequentes, nomeadamente na regra de derivação da potência. Na verdade, pude observar, através das suas produções escritas, que os alunos com alguma regularidade cometiam erros nesta regra, esquecendo-se de derivar a base.

De seguida, deu-se início à resolução da tarefa 3, que visava o teorema da derivada da função composta. Os alunos manifestaram alguma dificuldade em iniciar a tarefa, sobretudo as questões de revisão da composição de funções. Em primeiro lugar, os alunos mostraram dificuldade em relação à determinação do domínio de uma função composta. Dada a dificuldade generalizada dos alunos neste tópico, procedi à determinação do domínio pretendido, no quadro, chamando os alunos à participação, no sentido de clarificar e relembrar como se determina o domínio. Em segundo lugar, alguns alunos tinham dificuldade na composição de funções. Também neste tópico, optei pela resolução das questões da tarefa no quadro. Outro dos aspetos que contribuiu para as dificuldades dos alunos na resolução da tarefa foi a notação envolvendo a derivada e a composição de funções. Apercebi-me desta dificuldade já no final da aula, pois os alunos não foram capazes de calcular $g'(f(x))$, interpretando como $g'(x) \times f(x)$. Assim, na aula seguinte discuti com eles este tipo de erro, de forma a garantir que os alunos compreendem a notação envolvida e percebem o teorema da derivada da função composta.

À semelhança das aulas anteriores, a metodologia utilizada foi o trabalho de pares, visto que é uma estratégia que se tem revelado adequada aos alunos e às aprendizagens. O trabalho de pares tem permitido aos alunos enriquecer as suas aprendizagens, através da discussão entre os elementos do grupo, participando na construção do seu conhecimento.

Relativamente ao meu desempenho, penso que em determinados momentos não dei aos alunos o tempo suficiente para terminarem a questão ou para concluírem o raciocínio que estavam a fazer, o que poderá ter empobrecido os momentos de discussão. De futuro, deverei acautelar este tipo de situação e dar mais tempo aos alunos para trabalharem autonomamente. Ainda assim, as observações e comentários dos alunos revelaram que os conceitos que estavam a ser lecionados foram consolidados.

Nesta aula, nos momentos de discussão, optei por passar mais tempo no quadro, resolvendo as questões da tarefa, envolvendo a participação de todos os alunos da turma. Esta estratégia gerou alguma confusão e agitação nos alunos, visto que, como não dirigi as perguntas a alunos em particular, todos queriam participar e responder, falando ao mesmo tempo, o que tornou a discussão mais demorada.

O comportamento da turma foi, relativamente à aula anterior, bastante mais satisfatório, até porque a minha postura também foi mais firme e rigorosa quanto à exigência de atenção e concentração.

A planificação foi cumprida e ainda iniciei a discussão de um exercício previsto apenas para a aula seguinte. Considero que a antecipação da discussão deste exercício se deveu ao facto de ter encurtado os momentos de trabalho autónomo dos alunos, pois receava não ter tempo de cumprir o plano de aula. Depois, quando me apercebi que me sobravam alguns minutos da aula, iniciei a discussão do exercício para que os alunos se mantivessem ocupados até ao final da aula. Em aulas posteriores, deverei abrandar o ritmo da lecionação, de modo a permitir que os alunos tenham o tempo necessário para refletir e trabalhar nas tarefas.

Considero que um dos principais objetivos da aula foi cumprido na medida em que a regra de derivação do quociente foi aprendida pelos alunos. Todavia, o trabalho desenvolvido em torno do conceito de composição de funções, apesar de ter esclarecido as dúvidas dos alunos, ainda é um tópico que suscita algumas dificuldades, pelo que foi retomado na aula seguinte.

Quarta aula (4 de março de 2016)

Esta aula seguiu as estratégias de ensino que tinham vindo a ser aplicadas nas aulas anteriores, a saber, trabalho de pares e discussão em grande grupo, uma vez que têm revelado bons resultados, tanto no trabalho desenvolvido pelos alunos como nas aprendizagens que realizam.

Após o registo do sumário da aula, existiu um momento inicial de síntese dos conteúdos lecionados na aula anterior e esclarecimento de dúvidas em relação à notação presente no teorema da derivada da função composta. Optei por fazer este esclarecimento, pois através das dúvidas e questões que os alunos me colocaram na aula anterior e a partir da análise das resoluções da tarefa que os alunos realizaram em aula e que recolhi, apercebi-me que a notação referida anteriormente ainda não estava clara para os alunos, o que prejudicaria o trabalho a desenvolver durante esta aula. Considero que esta estratégia se revelou bastante adequada pois os alunos começaram não só a responder corretamente às minhas perguntas, como também resolveram a tarefa do teorema da derivada da função composta de acordo com aquilo que tinha previsto.

A tarefa proposta aos alunos foi pensada com o objetivo de eles inferirem o teorema da derivada função composta, de modo a levá-los a determinar as derivadas de e^u e $\ln(u)$ usando o teorema da derivada da função composta. Relativamente a este objetivo específico, considero que a tarefa foi bem conseguida, na medida em que muitos alunos atingiram os resultados pretendidos, durante o trabalho autónomo, o que levou a um momento de discussão frutífero e onde foi claro que os alunos assimilaram estes conteúdos.

Esta foi uma aula em que optei por estar no quadro e ir perguntando aos alunos como é que tinham resolvido as questões da tarefa. Apesar de os alunos terem correspondido bem a esta metodologia de trabalho, talvez não tenha sido a melhor opção pois tornou a discussão em aula um pouco monótona e centrada no professor. Se os alunos tivessem ido ao quadro para apresentar as suas resoluções, os momentos de discussão teriam sido mais dinâmicos e os alunos teriam tido uma participação mais ativa. Ainda assim, nas situações de discussão que decorreram nesta aula, à semelhança do que aconteceu nas aulas anteriores, os alunos participaram e tornaram estes momentos muito positivos, na medida em que não deixaram de colocar as suas dúvidas e de partilhar as suas estratégias. Nestes momentos de aula, em que existe discussão e correção das questões da tarefa, considero que devo melhorar a minha atuação, pois muitas vezes fico satisfeito com uma resposta correta e não pergunto à turma se houve estratégias alternativas. A partilha de estratégias alternativas é um aspeto que tentarei desenvolver em aulas futuras, de forma a enriquecer os momentos de discussão.

No que se refere a dificuldades dos alunos, pude perceber que a principal dificuldade, nesta aula, esteve relacionada com a composição de funções, nomeadamente quando era apresentada aos alunos uma função, a grande maioria não foi capaz de a decompor como composição de duas funções. No entanto, no decorrer da aula, e com a resolução de algumas questões que envolviam a composição e decomposição de funções, os alunos sentiram-se mais confiantes no tópico, tendo começado com alguma facilidade a identificar as funções pretendidas. Neste sentido, e uma vez que os alunos entenderam a composição de funções, considero que a inclusão na tarefa das questões relacionadas com a revisão da composição de funções foi crucial para a compreensão do teorema da derivada da função composta.

Tendo em conta o nível acrescido de dificuldade na compreensão do teorema da derivada da função composta, mais uma vez, a aposta no trabalho de pares revelou-se útil e acertada pois deparei-me várias vezes com situações em que os alunos partilhavam ideias e estratégias, corrigindo-se mutuamente e contribuindo para as suas aprendizagens. Apercebi-me também que existiu uma maior rapidez por parte dos alunos na aplicação das regras de derivação já estudadas, revelando assim aprendizagens, nomeadamente no que se refere à derivação de funções.

No que diz respeito ao plano de aula, este não foi cumprido na sua totalidade, visto que os alunos estavam empenhados e motivados no trabalho, demoraram mais tempo para resolver as questões da tarefa e os momentos de discussão em pequeno e grande grupo foram mais alargados. Assim, foi necessário um ajuste ao plano da aula seguinte, de modo a reservar alguns minutos para a conclusão da tarefa do teorema da derivada da função composta.

Quinta aula (8 de março de 2016)

O plano desta aula foi reestruturado e ajustado no sentido de concluir a tarefa da aula anterior, antes da realização da nova tarefa constituída por questões de consolidação das regras de derivação. A aula teve início com uma breve sistematização dos assuntos abordados na aula anterior, com o objetivo de garantir que todos os alunos se recordavam dos assuntos que tinham sido abordados. Posto isto, procedeu-se à correção e discussão do trabalho de casa, onde optei por duas estratégias distintas, mas complementares. Numa primeira fase chamei ao quadro uma aluna para resolver uma das questões da tarefa e após a aluna apresentar a sua resolução, pedi a um outro aluno que explicasse o raciocínio da sua colega. Considero que este primeiro momento foi importante, pois aumentou a participação dos alunos em aula e também me permitiu perceber que a resolução apresentada pela aluna tinha sido bem entendida pelo seu colega, pois este conseguiu explicar o raciocínio com sucesso. Numa segunda fase, uma vez que o trabalho de casa envolvia a dedução da derivada de $a^{u(x)}$ e $\log_a(u(x))$, sendo u uma função derivável, optei por ir fazendo uma sistematização das regras de derivação, para que os alunos as percebessem de forma clara. Após esta sistematização e como forma de consolidar, apresentei alguns exemplos recorrendo às restantes questões da tarefa.

Uma das dúvidas que surgiu aquando da correção do trabalho de casa, teve a ver com a notação utilizada nas regras de derivação, ou seja, houve alunos que confundiram

u com uma constante quando esta se tratava de uma função. Após esclarecida esta dúvida e a pedido de alguns alunos passei a utilizar a notação $u(x)$ de forma a ficar claro para todos que se trata de uma função. Nesse momento da discussão surgiram também algumas dúvidas referentes à regra de derivação da potência e à regra de derivação da exponencial. Na regra de derivação da potência, e talvez porque os alunos vêm habituados do 11.º ano a derivar apenas potências de x, houve uma aluna que não percebia o porquê de estarmos a derivar a base da potência. Por isso, esclareci a aluna, explicando a regra da derivação da potência. Já na regra da exponencial, e aliada à dificuldade que já referi acima acerca da notação, houve uma dúvida na diferença entre derivar e^x e derivar e^u. Porém, após esclarecer a aluna de que o primeiro é um caso particular do segundo, esta percebeu a regra e passou a aplicá-la corretamente.

Após a correção do trabalho de casa, distribuí a tarefa cujo objetivo primordial era consolidar as regras de derivação, dando assim início a um momento de trabalho autónomo por parte dos alunos. Esta tarefa, para além de abordar as regras de derivação já estudadas, exigia também dos alunos a capacidade de observar e analisar gráficos de funções. Talvez por esse motivo, alguns alunos sentiram dificuldade em iniciá-la, pois não tinham presente a noção geométrica de derivada num ponto que era fundamental à resolução da primeira questão da tarefa. Esta foi provavelmente a dúvida mais frequente durante o trabalho autónomo dos alunos. Todavia, após relembrá-los da relação existente entre a derivada num ponto e o declive da reta tangente nesse ponto, os alunos começaram a interpretar corretamente as questões da tarefa e a trabalhar de forma mais expedita e entusiasmada. À semelhança do que pude observar em aulas anteriores, durante o trabalho autónomo, os alunos demonstraram algum à vontade na aplicação da maioria das regras de derivação, excetuando quando têm de derivar uma função exponencial ou uma função potência. Nestes casos, os alunos tendem a confundir as regras de derivação da potência e da exponencial e muitas vezes aplicam-nas erradamente.

Na parte final da aula, deu-se início ao momento de discussão em grande grupo dos resultados obtidos pelos alunos, durante o trabalho autónomo. A discussão foi bastante interessante, na medida em que houve várias estratégias apresentadas para a resolução dos exercícios. Por exemplo, para determinar o declive de uma reta, houve alunos que sentiram a necessidade de determinar a equação da reta enquanto outros calcularam diretamente o declive utilizando dois pontos. Também neste momento, foi importante a participação de alguns alunos no quadro, pois ao exporem os exercícios e ao fazerem a respetiva explicação, envolveram a turma na discussão, tornando-a mais dinâmica e motivadora. Os alunos que foram ao quadro demonstraram ter realizado aprendizagens na medida em que resolveram corretamente as questões propostas, usando devidamente os conteúdos lecionados nas aulas anteriores e conseguiram, com sucesso, explicar o seu raciocínio à turma.

Penso que a aula foi bem conseguida ao nível das aprendizagens dos alunos, pelo que ficou exposto acima. Todavia, nesta aula, a minha postura revelou-se algo passiva derivado ao meu nervosismo e ansiedade, o que poderá ter prejudicado a minha prática letiva. Assim, tenho de aprender a controlar as minhas emoções no sentido de me manter ativo e dinâmico, em contexto de sala de aula e no trabalho com os alunos.

Capítulo 4

Métodos e instrumentos de recolha de dados

Para a elaboração de um estudo desta natureza, é fundamental o estabelecimento de métodos e instrumentos de recolha de dados, de forma a garantir a obtenção das informações necessárias para responder às questões inicialmente formuladas. Neste capítulo descrevo e justifico os métodos de recolha de dados que selecionei: a observação participante, complementada com notas de campo e a gravação audiovisual das aulas, e a recolha documental das produções dos alunos na resolução das tarefas em sala de aula e nos trabalhos propostos para realizar em casa.

4.1. Observação participante

A observação participante (Estrela, 1994) permitiu-me perceber as reações e os comportamentos dos alunos no decorrer das aulas e a forma como eles interagiram em contexto de sala de aula. Por um lado, esta observação foi feita de um modo geral e dirigido à turma, já que é difícil fazer um registo particularizado do trabalho desenvolvido por todos os alunos, em virtude do meu duplo papel – o de professor e o de investigador. Em resultado desta observação, no final de cada aula lecionada fiz vários registos escritos, apontamentos e reflexões acerca do trabalho desenvolvido pelos alunos, em forma de notas de campo, o que me permitiu retirar conclusões acerca do seu envolvimento nas tarefas, das ideias e das estratégias que foram surgindo. Através destas notas de campo, não só retirei ilações sobre o trabalho desenvolvido pelos alunos, mas também refleti acerca da minha própria prática, de modo a fazer ajustes à planificação das aulas, melhorando-a. As notas de campo que registei aquando da observação foram essenciais para o meu estudo na medida em que representam o esforço do investigador para registar objetivamente os detalhes que ocorreram no campo, refletindo o modo mais pessoal como o observador dá conta do curso da pesquisa (Bogdan & Biklen, 1994).

Nos momentos de discussão em grande grupo, que fizeram parte de todas as aulas, utilizei também como apoio à observação, a gravação audiovisual, uma vez que se tornou muito difícil conseguir registar todas informações importantes e relevantes, resultantes destes momentos de diálogo. A gravação audiovisual permitiu-me analisar situações não detetadas durante as aulas, com a vantagem de poder recorrer a este instrumento sempre que necessite de recordar os vários momentos de aula ou estabelecer comparações entre as várias aulas.

4.2. Recolha documental

As produções escritas dos alunos, nomeadamente as suas resoluções das tarefas e das questões de aula, foram essenciais para a recolha de dados, neste estudo, na medida em que permitiram estudar com mais pormenor e detalhe as suas estratégias de resolução e os erros e as dificuldades que apresentam na aprendizagem da derivada de funções (Bogdan & Biklen, 1994). Na verdade, as produções escritas dos alunos, quando inalteradas, permitem perceber a abordagem que estes fazem aos problemas e que tipo de conhecimentos mobilizam para a sua resolução (Bogdan & Biklen, 1994). Porém, os alunos têm tendência a apagar com frequência as suas resoluções incompletas ou erradas à medida que se vai procedendo à correção, impedindo o professor de obter as resoluções e respostas iniciais dos alunos. Deste modo, e uma vez que a metodologia de trabalho aplicada pela professora da turma foi o trabalho de pares, solicitei aos dois elementos do grupo que registassem as suas estratégias de resolução das várias tarefas apresentadas e, antes de iniciar a discussão e a correção das tarefas, pedi para cada grupo só corrigir um dos dois exemplares, por forma a garantir que tenho um exemplar cujos resultados não foram corrompidos pela discussão, garantindo também, deste modo, uma maior autenticidade e fidelidade às conclusões primeiras dos alunos.

Posto isto, a observação participante realizada durante as aulas lecionadas, e quando combinada com a análise documental, permite a triangulação de dados dando lugar a uma interpretação mais completa do fenómeno que se está a investigar, permitindo ao investigador recolher dados ricos e pormenorizados (Stake, 2007).

Capítulo 5

Análise de dados

Este capítulo é dedicado à análise dos dados recolhidos durante a minha intervenção letiva. A análise apresentada terá em conta o objetivo e as questões presentes neste estudo e terá como base as produções escritas dos alunos resultantes da resolução de algumas tarefas propostas em sala de aula, das gravações em vídeo das aulas lecionadas e das notas de campo elaboradas por mim ao longo da intervenção letiva. Este capítulo encontra-se estruturado em duas secções. A primeira secção será reservada à análise das estratégias a que os alunos recorreram para determinar a derivada de uma função e na segunda secção procurarei analisar os erros e dificuldades dos alunos quando determinam a derivada de uma função.

A análise será realizada e evidenciada tendo como suporte as resoluções dos alunos nas várias tarefas em que lhes foi pedido para determinarem a derivada de uma função, como as questões 1, 5 e 8 da tarefa 1; a questão de aula 1; as questões 1 e 2 da tarefa 2; a questão 4 da tarefa 3; a questão de aula 2; e a questão 5 da tarefa 4. É de destacar que a análise da questão 1 da tarefa 1 tinha como objetivo indagar se os alunos apresentavam dificuldades na determinação da derivada de funções polinomiais de grau menor ou igual a três, já abordadas no 11.º ano.

Ao longo deste capítulo, de forma a manter o anonimato dos participantes, os alunos serão designados por nomes fictícios.

5.1. Estratégias na determinação da derivada de uma função

Funções polinomiais, racionais e com radicais (Tarefa 1)

A tarefa 1 começava por pedir a determinação da derivada de funções polinomiais de grau menor ou igual a três. Para a realização da primeira questão desta tarefa, os alunos precisavam de recorrer aos conhecimentos prévios sobre regras de derivação estudadas no ano letivo anterior. A figura seguinte apresenta a resolução da questão 1, resolvida a pares, pelas alunas, Rita e Carlota, que é representativa do que foi feito pelos alunos da turma.

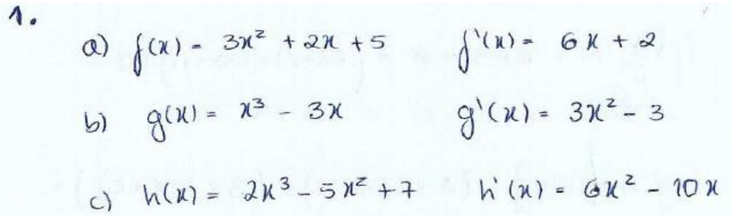


Figura 4 – Resolução de Rita e Carlota à questão 1 da tarefa 1

Nesta resolução não se evidenciam hesitações na determinação das expressões algébricas das derivadas de funções polinomiais de grau menor ou igual a três. A estratégia que foi seguida pela generalidade dos alunos, e que foi possível observar durante o trabalho autónomo, foi a aplicação das regras de derivação que foram disponibilizadas no cabeçalho da tarefa.

A questão 5 da tarefa 1 foi pensada de forma a levar os alunos a aplicar a regra de derivação do produto para determinar as derivadas pedidas, assumindo que estes ainda não tinham conhecimentos para derivar diretamente funções polinomiais de grau superior a três. Assim, uma vez que a primeira alínea da questão 5 pedia para derivar uma função apresentada algebricamente como um produto de funções polinomiais, a estratégia que era espectável que os alunos seguissem era precisamente a aplicação da regra de derivação do produto.

A resolução da figura 5 reflete o que a grande maioria dos alunos fez e, ao contrário da estratégia que seria esperada que utilizassem, estes não recorreram à regra de derivação do produto, mas generalizaram com bastante naturalidade as regras de derivação que já conheciam para polinómios de grau menor ou igual a três a polinómios de grau superior.

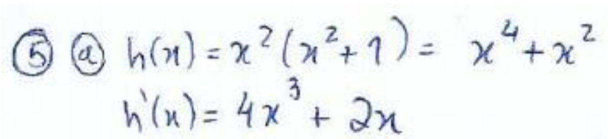


Figura 5 – Resolução de Berta e Artur à alínea a) da questão 5 da tarefa 1

Houve, no entanto, um número pequeno de alunos que recorreu à regra de derivação do produto para determinar corretamente a derivada que era pedida na alínea a) (figura 6).

5.) a) $h'(x) = x^2 \times (x^2+1)' + (x^2+1) \times (x^2)' =$

$$= x^2 \times 2x + (x^2+1) \times 2x =$$

$$= 4x^3 + 2x \;//$$

Figura 6 – Resolução de Inês à alínea a) da questão 5 da tarefa 1

Na alínea b), e sendo a primeira vez que os alunos eram convidados a derivar uma função polinomial de grau quatro, esperava-se que os alunos fatorizassem o polinómio dado como um produto de um polinómio de grau três por um polinómio de grau um, aplicando depois a regra de derivação do produto. A maioria dos alunos, contudo, seguiu a estratégia já usada na alínea a), de generalização das regras utilizadas para polinómios de grau menor ou igual a três. A resolução do aluno Dinis (figura 7) evidencia a rapidez e a facilidade com que a maioria dos alunos recorre a esta estratégia.

b) $g(x) = x^4 - 2x^3 + 6x$

$$g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6$$

Figura 7 – Resolução de Dinis à alínea b) da questão 5 da tarefa 1

Ainda assim, existiu uma pequena percentagem dos alunos da turma que na resolução desta alínea sentiu a necessidade de fatorizar o polinómio. Para além disso, alguns destes alunos utilizaram letras para representar os fatores obtidos, desempenhando estas um papel auxiliar na aplicação da regra de derivação do produto. Repare-se na resolução de Artur, figura 8, na qual o aluno decompõe o polinómio num produto de dois fatores, de seguida representa cada um com uma letra e recorre a essa mesma representação para aplicar a regra de derivação do produto.

5 b) $g(x) = \underbrace{x}_{a}\,(\underbrace{x^3 - 2x^2 + 6}_{b})$

$$= (a \times b)(x)$$

$$(a \times b)'(x) = a' \times b + b' \times a$$

$$= (1 \times (x^3 - 2x^2 + 6)) + ((3x^2 - 4x) \times x)$$

$$= x^3 - 2x^2 + 6 + 3x^3 - 4x^2$$

$$= 4x^3 - 6x^2 + 6$$

Figura 8 – Resolução de Artur à alínea b) da questão 5 da tarefa 1

Depois de realizadas as duas primeiras alíneas da questão 5 da tarefa 1, o que se pode observar é que na alínea c) muitos alunos já tinham interiorizado como derivar funções do tipo ax^k, conforme é possível observar na resolução de Mafalda e Madalena (figura 9).

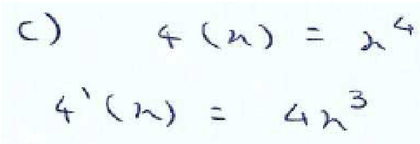


Figura 9 – Resolução de Mafalda e Madalena à alínea c) da questão 5 da tarefa 1

Só dois alunos tomaram estratégias diferentes na resolução desta alínea. José sentiu a necessidade de transformar x^4 num produto de forma a poder aplicar uma regra de derivação (regra de derivação do produto). A resolução apresentada por este aluno (figura 10) é circular. O aluno seguiu como estratégia a fatorização de x^4 como $1 \times x^4$ e, ao aplicar a regra de derivação do produto com esta fatorização, usou a derivada de x^4 que supostamente estava a calcular. A estratégia apresentada por este aluno revela que este sabia determinar diretamente a derivada de x^4. Provavelmente foi o enunciado da questão, que sugeria aos alunos a aplicação de uma regra de derivação já conhecida, que esteve na origem desta estratégia.

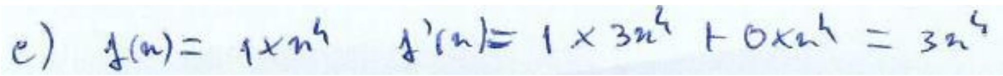


Figura 10 – Resolução de José à alínea c) da questão 5 da tarefa 1

Já Artur (figura 11) procurou explorar as diversas fatorizações que se podem fazer de x^4. Aliás, este aluno foi o responsável por partilhar com a turma a sua estratégia durante o momento de discussão em grande grupo desta alínea. Dado que a regra de derivação do produto foi apresentada aos alunos apenas para o produto de dois fatores, Artur procurou perceber de que forma é que poderíamos generalizar a regra de derivação do produto a n fatores.

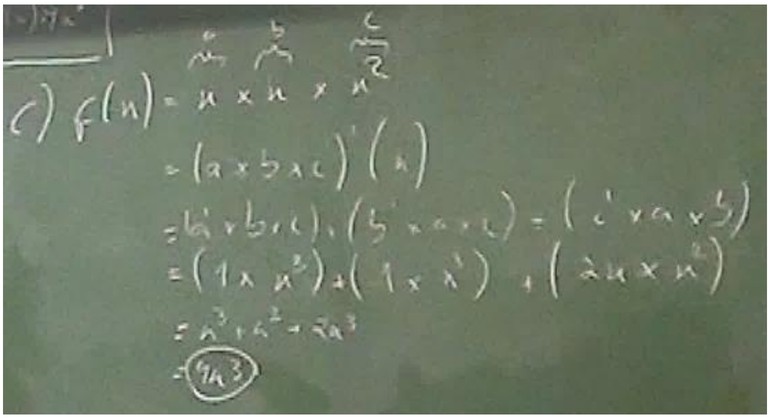


Figura 11 – Resolução de Artur à alínea c) da questão 5 da tarefa 1

Observe-se que o aluno começa por escrever x^4 como $x \times x \times x^2$ e de seguida identifica cada um dos fatores com uma letra aplicando depois a regra de derivação do produto aos três fatores em que fatorizou x^4. Quando questionado acerca da sua estratégia e de que forma é que chegou à generalização da regra de derivação do produto, o aluno afirmou que numa primeira fase aplicou a regra de derivação do produto (com dois fatores) considerando os fatores $x \times x$ e x^2. De seguida, para determinar a derivada de $x \times x$ recorreu novamente à mesma regra.

Em qualquer uma das estratégias apresentadas para derivar x^4, os alunos evidenciaram ser capazes de derivar corretamente funções polinomiais de grau superior a três. No entanto nenhum aluno apresentou a estratégia esperada que passava por fatorizar x^4 como $x \times x^3$ ou $x^2 \times x^2$. Apesar disso, a estratégia apresentada por Artur revela compreensão da regra de derivação do produto, na medida em que foi capaz de generalizar a regra a três fatores. Foi também a estratégia que mais se aproximou daquilo que seria esperado que os alunos desenvolvessem. Já a estratégia apresentada por Mafalda e por Madalena, embora seja mais expedita, recorre a regras que ainda não tinham sido exploradas, demonstrando que as alunas conseguem facilmente generalizar as regras de derivação que conheciam anteriormente.

Após o estudo das regras de derivação da soma e do produto, introduziu-se a regra de derivação da potência de expoente natural e a sua generalização a expoentes racionais não nulos. Desta forma, os alunos encontravam-se habilitados a derivar funções racionais bem como funções envolvendo radicais e com isto resolver a questão 8 da tarefa 1. Analisando a figura 12, percebe-se que os alunos reconhecem que a derivada da soma é a soma das derivadas e têm facilidade em determinar as expressões algébricas das funções derivadas de funções polinomiais, neste caso, do sétimo grau.

$$\text{8 a)}\quad f(x) = 3x^7 - x^6 + 2x^5 + 7x^3 - 3x + 2$$
$$f'(x) = 21x^6 - 6x^5 + 10x^4 + 21x^2 - 3$$

Figura 12 – Resolução de Berta à alínea a) da questão 8 da tarefa 1

Na alínea b) da questão 8, podemos constatar que a maioria dos alunos que resolveu corretamente esta alínea, em particular, a aluna Elisa (figura 13), seguiu a seguinte estratégia: uma vez que a função era apresentada como uma potência, representou a função base $x^3 + 2x + 1$ dessa potência por uma letra, aplicando depois a regra de derivação da potência.

$$\text{8. b)}\quad f(x)' = ((\underbrace{x^3+2x+1}_{g(x)})^4)' = (g(x)^4)' = 4g^3g' = 4(x^3+2x+1)^3(3x^2+2)$$

Figura 13 – Resolução de Elisa à alínea b) da questão 8 da tarefa 1

Na resolução desta alínea, apenas um pequeno grupo de alunos não sentiu a necessidade de recorrer a estratégias auxiliares para aplicar a regra de derivação da potência, conseguindo com sucesso aplicá-la diretamente, conforme mostra a resolução de Dinis e Hélio (figura 14).

$$\text{b)}\quad f'(x) = 4(x^3+2x+1)^3 . (3x^2+2x)$$

Figura 14 – Resolução de Dinis e Hélio à alínea b) da questão 8 da tarefa 1

A alínea c), apresentava uma função racional que podia ser facilmente escrita como uma potência de uma função polinomial, estratégia que foi seguida por alguns alunos para determinar corretamente a derivada pedida (figura 15).

$$\text{c)}\quad f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$
$$f'(x) = -3x^{-4}$$

Figura 15 – Resolução de Berta e Artur à alínea c) da questão 8 da tarefa 1

A aprendizagem da regra de derivação da potência veio introduzir maior rigor de escrita na determinação das derivadas por parte dos alunos. Repare-se na resolução apresentada por Duarte (figura 16). Este aluno, numa fase inicial, derivava as funções polinomiais sem sentir necessidade de indicar a regra de derivação que estava a utilizar. Uma vez aprendida a regra de derivação da potência, a estratégia deste aluno a derivar x^{-3} passou pela sua aplicação indicando, inclusive, a derivada da base que neste caso era 1, revelando compreensão do procedimento.

8.)

c.) $f(x) = x^{-3}$ $\qquad (x^{-3})' = -3x^{-4} \times 1 = -3x^{-4}$

Figura 16 – Resolução de Duarte à alínea c) da questão 8 da tarefa 1

Nas alíneas d) e e) da questão 8 da tarefa 1, que apresentam funções envolvendo radicais, poucos alunos foram capazes de manipular corretamente as expressões das funções de forma a representá-las como potências e a aplicarem a regra de derivação conveniente. Alguns alunos não resolveram estas alíneas e muitos outros cometeram erros processuais ao trabalharem com radicais, conforme será explorado na secção sobre erros e dificuldades. A resolução apresentada pelas alunas Jéssica e Célia à alínea d) da questão 8 da tarefa 1 (figura 17) é ilustrativa da estratégia seguida pelos alunos que resolveram corretamente esta questão. Estas alunas começaram por representar, corretamente, a função f como uma potência e de seguida aplicaram a regra de derivação da potência determinando com sucesso a derivada pedida.

d) $f(x) = (3x+2)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}} \times (3x+2)' =$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$$

Figura 17 – Resolução de Jéssica e Célia à alínea d) da questão 8 da tarefa 1

Na sua estratégia de resolução da alínea e), na figura seguinte, a aluna Letícia também manipulou corretamente a expressão algébrica da função dada, representando a função como uma potência de expoente $\frac{2}{3}$, após o que recorreu à regra de derivação da potência para determinar a derivada pedida. Esta aluna, à semelhança do que foi feito pela generalidade dos alunos que responderam corretamente a esta questão, simplificou a expressão algébrica obtida optando por não apresentar potências de expoente fracionário.

$$(e)\ f'(x) = \left(\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)' = \left(\left((x+2)^2\right)^{1/3}\right)' = \left((x+2)^{2/3}\right)'$$

$$= \frac{2}{3}(x+2)^{-1/3} \times 1 = \frac{2\,(x+2)^{-1/3}}{3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+2}}$$

Figura 18 – Resolução de Letícia à alínea e) da questão 8 da tarefa 1

Questão de aula 1

A questão de aula 1 permitiu também perceber a evolução dos alunos ao nível das estratégias aplicadas na determinação das derivadas estudadas até então (regras de derivação da soma, do produto e da potência). Na primeira alínea, onde era pedido aos alunos para determinarem a expressão algébrica da função derivada de uma função polinomial de grau seis, o destaque está na presença de alguns coeficientes irracionais que levou grande parte dos alunos a desviarem-se da sua estratégia habitual para derivar este tipo de funções. Por exemplo, Carlota (figura 19) sentiu necessidade de efetuar cálculos auxiliares para derivar $\sqrt{3}x^4$, evidenciando que não está familiarizada com funções polinomiais que contenham coeficientes irracionais e que a derivada destes termos se torna um procedimento mais complexo.

(a) $f(x) = x^6 + 2x^5 - \sqrt{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \pi.$

$$f'(x) = 6x^5 + 10x^4 - (4\times 3^{1/2})x^3 + x =$$
$$= 6x^5 + 10x^4 - 4\sqrt{3}\,x^3 + x$$

CA

$\sqrt{3}\,x^4 = (3^{1/2})x^4$

$4\times 3^{1/2}x^3$

Figura 19 – Resolução de Carlota à alínea a) da questão de aula 1

Para tentar perceber se os alunos teriam evoluído ao nível da manipulação algébrica e ao nível da sensibilidade necessária para o reconhecimento da regra de derivação a utilizar, a alínea b) possibilita um conjunto variado de estratégias de resolução sem, no entanto, aumentar o grau de dificuldade em relação às restantes alíneas. Este exercício pedia a derivada de uma função polinomial, embora esta não fosse apresentada com o aspeto tradicional a que os alunos estão habituados. Nas resoluções apresentadas, surgiram algumas estratégias interessantes que revelam que a generalidade dos alunos é capaz de intencionalmente manipular as expressões algébricas da função de forma a facilitar a aplicação correta das regras de derivação da soma, produto e potência.

Observe-se a resolução apresentada por Cátia (figura 20), em que a aluna transforma a expressão algébrica de f num polinómio.

(b) $f(x) = \frac{7+x^2}{3} - 2.$ $\quad f(x) = \frac{7+x^2}{3} - \frac{6}{3} = \frac{x^2+1}{3} = 3^{-1} \times x^2 + 3^{-1}$

$f'(x) = 3^{-1} \times 2x = \frac{2x}{3}$

Figura 20 – Resolução de Cátia à alínea b) da questão de aula 1

Para além de revelar destreza ao nível da manipulação algébrica da função, a aluna revela compreender que a derivada de uma constante é zero e que a derivada do produto de uma constante por uma função é o produto dessa constante pela derivada da função. Este último aspeto não foi compreendido pela maioria dos alunos pois frequentemente, perante esta situação, os alunos sentiam a necessidade de aplicar a regra de derivação do produto. Por exemplo, na estratégia de Álvaro (figura 21), o aluno começa por transformar o quociente num produto e de seguida aplica simultaneamente as regras de derivação da soma e do produto. Apesar de ter determinado corretamente a derivada, o aluno não utilizou a regra de derivação $\left(kf(x)\right)' = kf'(x)$ estudada anteriormente, e que seria mais eficiente, recorrendo à regra de derivação do produto para derivar $\frac{1}{3} \times (7 + x^2)$.

b) $f'(x) = \left(\frac{7+x^2}{3} - 2\right)' = \left((7+x^2)\times\frac{1}{3} - 2\right)' = 0\times(7+x^2) + \frac{1}{3}(7+x^2)' - 0 = \frac{1}{3}\times 2x = \frac{2}{3}x$

Derivada do produto e da soma

Figura 21 – Resolução de Álvaro à alínea b) da questão de aula 1

Num outro caso (figura 22), um aluno achando-se perante um quociente procurou saber como é que se derivava este tipo de funções e, recorrendo ao manual escolar como suporte de resolução à questão de aula, encontrou a regra de derivação do quociente e aplicou-a à função que pretendia derivar. Nesta estratégia está também evidente a noção de regra de derivação da soma, uma vez que o aluno a aplica de forma implícita. Note-se que neste momento a regra de derivação do quociente ainda não havia sido estudada nem sequer mencionada aos alunos pelo que esta estratégia demonstra curiosidade e perspicácia por parte do aluno em encontrar a regra de derivação da operação que faltava estudar.

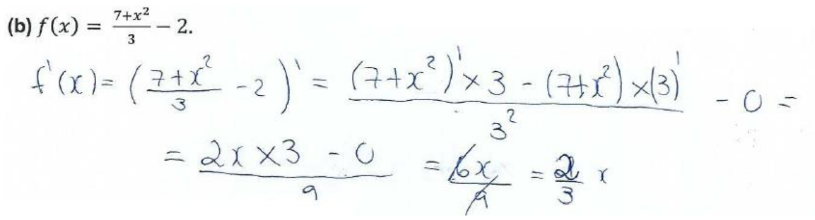


Figura 22 – Resolução de Francisco à alínea b) da questão de aula 1

Por último, surge a resolução de Rita (figura 23) que representa a estratégia correta que foi mais usada pelos alunos na determinação da derivada da função presente na alínea b). A aluna começa por transformar o quociente numa soma de duas frações, de seguida, tendo consciência que está perante uma função polinomial de grau dois, parte para a aplicação da regra de derivação da potência.

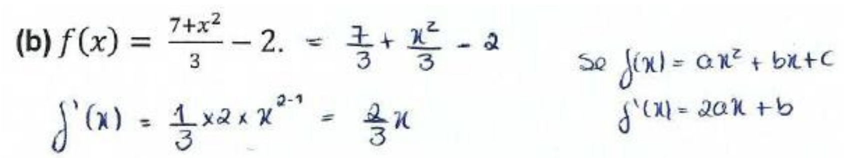


Figura 23 – Resolução de Rita à alínea b) da questão de aula 1

Na última alínea da questão de aula, as estratégias seguidas pelos alunos que a resolveram corretamente foram as esperadas e tiveram em conta a presença de radicais na expressão algébrica da função envolvida. Apresento em seguida, um tipo de estratégia bastante recorrente nos alunos:

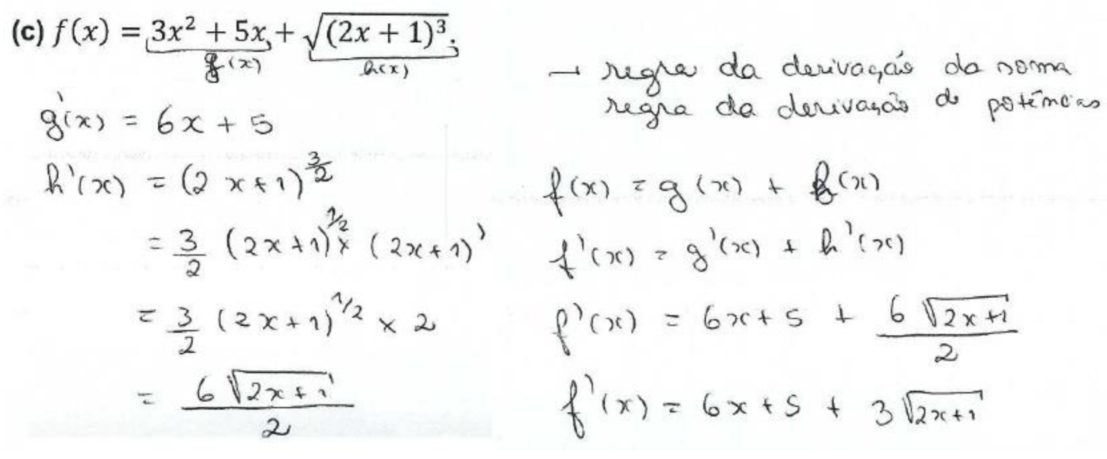


Figura 24 – Resolução de Sandra à alínea c) da questão de aula 1

Analisando a figura 24, podemos verificar que a aluna recorre à separação da função dada em duas funções, sendo uma polinomial e a outra envolvendo radicais e deriva isoladamente cada uma delas, somando no final as derivadas obtidas. Esta estratégia pode ser explicada, conforme já referi em outras ocasiões, devido ao pouco contacto que os alunos têm com funções envolvendo radicais o que leva a procedimentos mais morosos na aplicação das regras de derivação. Uma estratégia semelhante à apresentada anteriormente foi seguida por Maria (figura 25). No entanto, verifica-se que a aluna consegue derivar diretamente a função dada revelando não só agilidade ao nível da manipulação algébrica da função como também a capacidade de aplicar simultaneamente as várias regras de derivação necessárias à determinação da derivada, o que não aconteceu na estratégia anterior.

(c) $f(x) = 3x^2 + 5x + \sqrt{(2x+1)^3}$. $f'(x) = \left(3x^2 + 5x + \sqrt{(2x+1)^3}\right)' =$

$= \left(3x^2 + 5x + \left((2x+1)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(3x^2 + 5x + (2x+1)^{\frac{3}{2}}\right)' =$

$= 6x + 5 + \frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{3}{2}-1}(2x+1)' = 6x + 5 + \left(\frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}(2)\right)$

$= 6x + 5 + \left(\frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}} \times 2\right)$ //

Figura 25 – Resolução de Maria à alínea c) da questão de aula 1

Na alínea c) da questão de aula, ainda foi identificada uma outra forma de manipular a expressão algébrica da função dada:

(c) $f(x) = 3x^2 + 5x + \sqrt{(2x+1)^3}$.

$f(x) = 3x^2 + 5x + \sqrt{(2x+1)(2x+1)^2} \Leftrightarrow f(x) = 3x^2 + 5x + \overbrace{(2x+1)}^{f} \times \overbrace{(\sqrt{2x+1})}^{g}$

$f'(x) = 6x + 5 + \left(2 \times \sqrt{2x+1} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x+1}} \times (2x+1)\right)$

$f'(x) = 6x + 5 + \left(2\sqrt{2x+1} + \frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}}\right) \times(\sqrt{2x+1})$

$f'(x) = 6x + 5 + \left(2\sqrt{2x+1} + \frac{\cancel{(2x+1)} \times (\sqrt{2x+1})}{\cancel{(2x+1)}}\right)$ $\quad f'(x) = 6x + 5 + 3\sqrt{2x+1}$ //

Figura 26 – Resolução de Inês à alínea c) da questão de aula 1

Com base na figura acima, verifica-se que a aluna chegou corretamente ao resultado pretendido, revelando uma enorme desenvoltura ao nível da manipulação algébrica ao transformar a expressão $\sqrt{(2x+1)^3}$ em $(2x+1)\sqrt{2x+1}$. Porém, a sua estratégia exigiu a aplicação da regra de derivação do produto, para além das regras aplicadas pelos colegas nas restantes estratégias apresentadas, como a da soma e da potência. Até este ponto, as estratégias que os alunos adotaram refletem um bom desempenho na aprendizagem das regras de derivação.

Função exponencial e função logarítmica (Tarefa 2)

A questão 1 da tarefa 2, permite analisar como os alunos lidam com a definição de derivada de uma função num ponto. Nesta questão, pede-se aos alunos, em duas alíneas distintas, que determinem a derivada das funções e^x e $\ln(x)$ recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto. Aqui, uma vez que era sugerido aos alunos uma estratégia de resolução, a análise desta questão focar-se-á no cálculo dos limites e na manipulação algébrica necessária para chegar ao resultado pretendido.

O tipo de resposta apresentada pela turma reflete que os alunos têm presente o conceito de limite, porém ao nível da identificação dos limites notáveis, ainda existem algumas dificuldades. Observe-se a resolução apresentada pela aluna Mafalda (figura 27) para a determinação da derivada de e^x:

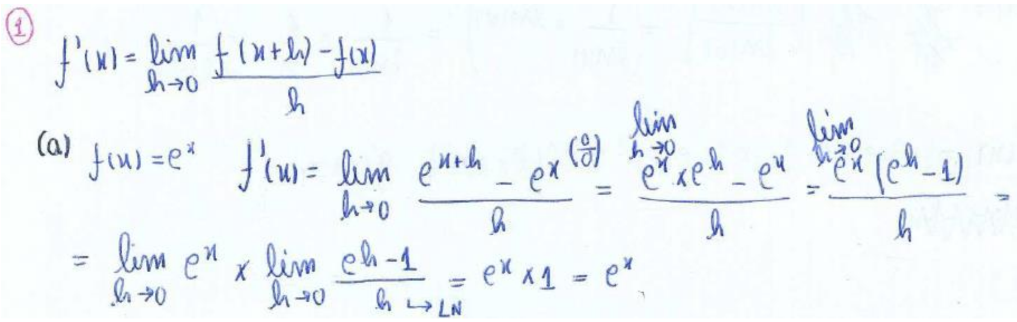


Figura 27 – Resolução de Mafalda à alínea a) da questão 1 da tarefa 2

A aluna começa por calcular o limite identificando a existência de uma indeterminação. Este facto levou-a a procurar uma estratégia que lhe permitisse levantar a indeterminação e com isso ultrapassar este primeiro obstáculo. Após alguma manipulação algébrica da expressão, a aluna opta por aplicar uma das propriedades dos limites, neste caso, que o limite do produto é o produto dos limites. Relativamente à identificação do limite notável $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ reporta-se que Mafalda, tal como outros colegas, necessitou de sugestões adicionais de forma a reconhecer este limite. Depois desta ajuda por parte do professor, a aluna conseguiu chegar ao resultado pretendido.

No caso da determinação da derivada de $\ln(x)$ verificou-se, pelas estratégias apresentadas, que os alunos mobilizaram as sugestões dadas na alínea anterior, tendo esta derivada sido determinada com maior facilidade.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x} =$$
$$= 1 \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Figura 28 – Resolução de Cátia à alínea b) da questão 1 da tarefa 2

Analisando a resposta da aluna Cátia (figura 28) verifica-se que esta domina as propriedades operatórias dos logaritmos e, influenciada pela resolução da alínea anterior, procura seguir uma estratégia que evidencie a presença de um limite notável. Neste caso, a aluna não indica explicitamente o passo onde recorre ao limite notável, mas fica claro que reconhecera que $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

Na questão 2 da tarefa 2, os alunos determinaram um conjunto de derivadas de funções que envolviam e^x e $\ln(x)$. O objetivo desta questão foi perceber de que forma é que os alunos mobilizam o conhecimento das derivadas que acabaram de deduzir nas suas estratégias de resolução. Na análise das resoluções escritas dos alunos, é possível perceber que usam com bastante sucesso as derivadas das funções e^x e $\ln(x)$.

$$g(x) = -3x^2 + \ln(x)$$
$$g'(x) = -6x + \frac{1}{x} = \frac{-6x^2+1}{x}$$

Figura 29 – Resolução de Maria e Soraia à alínea b) da questão 2 da tarefa 2

Observando a resolução das alunas Maria e Soraia (figura 29), que é representativa do trabalho realizado pelos alunos da turma, podemos constatar que as alunas aplicam a regra de derivação da soma e derivam corretamente cada um dos termos, incluindo o termo $\ln(x)$ optando depois por apresentar o resultado na forma de uma única fração.

Já a alínea c) estava apresentada de forma a levar os alunos a seguir como estratégia a regra de derivação do produto. A análise das resoluções corretas desta alínea mostra que foi unânime a estratégia seguida pelos alunos e que se encontra representada pela resolução seguinte da aluna Inês (figura 30).

c) $h'(x) = (x^3)' \times \ln(x) + (\ln(x))' \times x^3 =$

$= 3x^2\ln(x) + \dfrac{x^3}{x} =$

$= 3x^2\ln(x) + x^2$

Figura 30 – Resolução de Inês à alínea c) da questão 2 da tarefa 2

A alínea d) permite analisar se os alunos identificam as constantes envolvendo a função exponencial. Na figura 31 percebe-se que Elisa conseguiu, recorrendo à regra de derivação do produto, determinar a derivada que era pedida. É de salientar, contudo, que a maioria dos alunos não reconheceu que e^3 se tratava de uma constante. Apenas alguns alunos derivaram diretamente a função dada ao determinarem a derivada de $\ln(x)$, multiplicando-a pela constante e^3, que seria a estratégia de aplicação mais fácil.

d) $\underbrace{e^3}_{f(x)} \times \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}$

$f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$

$0 \times \ln(x) + \dfrac{1}{x} \times e^3 = \dfrac{e^3}{x}$

Figura 31 – Resolução de Elisa à alínea d) da questão 2 da tarefa 2

Na última alínea da questão 2, a função dada é apresentada como o quadrado de uma função, convidando os alunos a aplicar a regra de derivação da potência ou eventualmente a regra de derivação do produto. A primeira estratégia referida foi seguida por grande parte dos alunos, conforme exemplifica a resolução de José (figura 32). Houve, no entanto, durante o período de discussão desta questão, um pequeno grupo de alunos que sugeriu como estratégia "desenvolver" o quadrado apresentado. Porém abandonaram rapidamente esta estratégia, pois aperceberam-se que a mesma levaria a uma resolução mais demorada.

e) $j'(x) = 2 \times (e^x + \ln(x)) \times (e^x + \frac{1}{x}) = (2e^x + 2\ln(x))(e^x + \frac{1}{x}) =$

$= 2e^{2x} + \dfrac{2e^x}{x} + 2\ln(x) \cdot e^x + \dfrac{2\ln(x)}{x}$

Figura 32 – Resolução de José à alínea e) da questão 2 da tarefa 2

Em suma, a análise das várias resoluções dos alunos às questões da tarefa 2 permitiu perceber que os alunos mobilizaram com bastante sucesso o seu conhecimento das derivadas de e^x e $\ln(x)$ nas suas estratégias. Regra geral, os alunos conseguem determinar corretamente as derivadas de funções que envolvam e^x ou $\ln(x)$, embora em alguns casos apresentem estratégias pouco expeditas.

Função composta (Tarefa 3)

A tarefa 3 pedia aos alunos que recorressem ao teorema da derivada da função composta para determinar algumas derivadas. Pretendia-se, em particular, que os alunos deduzissem, dada uma função derivável u, quais as derivadas de e^u e de $\ln(u)$.

Na primeira alínea da questão 4, pedia-se aos alunos a derivada de $g \circ f$ para funções f e g dadas. Como exemplifica a resolução de Ricardo (figura 33), a estratégia de grande parte dos alunos passou pela aplicação do teorema da derivada da função composta, embora uma parte significativa dos alunos tenha preferido determinar à parte cada um dos fatores envolvidos na expressão do teorema.

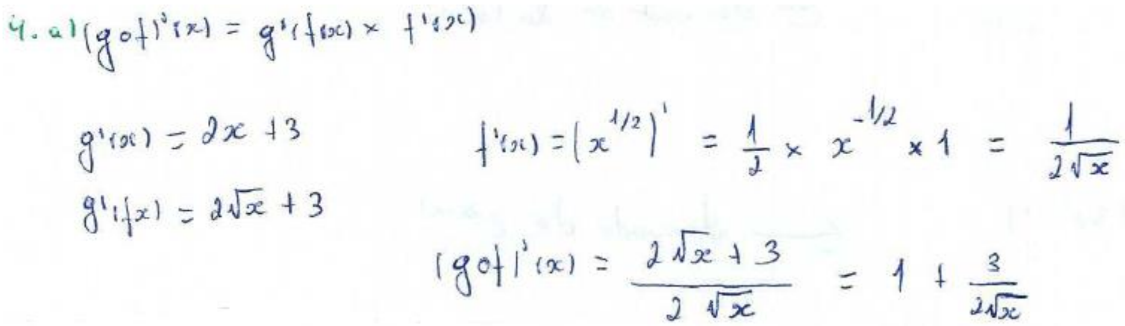


Figura 33 – Resolução de Ricardo à alínea a) da questão 4 da tarefa 3

Uma pequena percentagem de alunos, no período de discussão, sugeriu como estratégia de resolução o cálculo da expressão algébrica da função $g \circ f$ e a partir dessa expressão obter a derivada, não aplicando assim o teorema da derivada da função composta. Por isso, a alínea b) estava preparada para garantir que os alunos recorriam ao teorema da derivada da função composta para responder à pergunta. Observe-se a resolução das alunas Jéssica e Célia (figura 34), que aplicam corretamente o teorema da derivada da função composta, embora com alguma falta de rigor na apresentação.

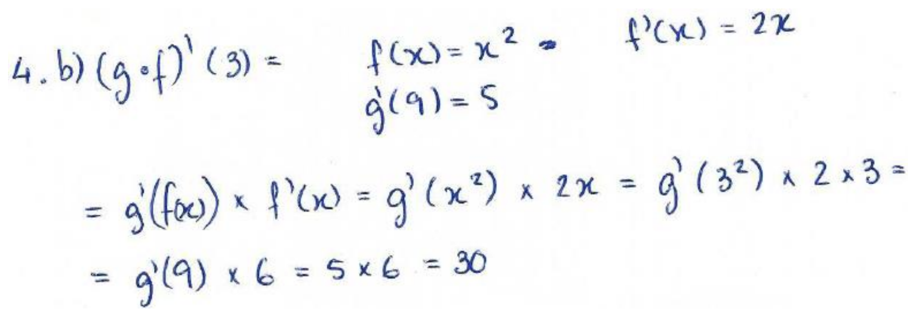


Figura 34 – Resolução de Jéssica e Célia à alínea b) da questão 4 da tarefa 3

Na sequência das questões anteriores, surgem as alíneas c) e d) que apresentam um grau de dificuldade ligeiramente superior. A resolução apresentada na figura 35 permite verificar que a aluna identificou corretamente duas funções cuja composição fosse a função original dada e em seguida aplicou o teorema da derivada da função composta.

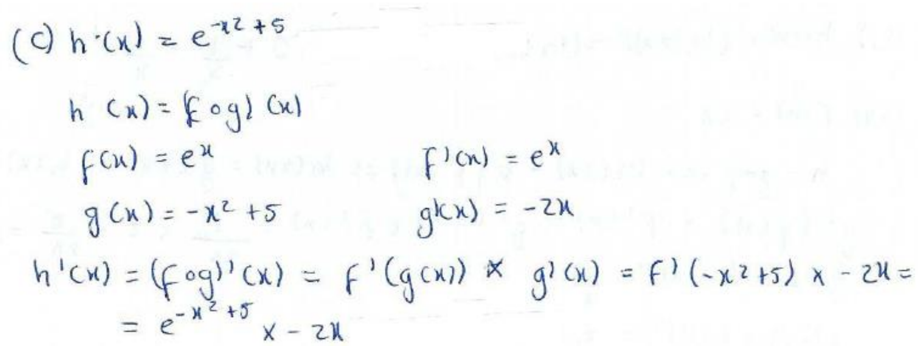


Figura 35 – Resolução de Elsa à alínea c) da questão 4 da tarefa 3

A estratégia apresentada anteriormente era a esperada. No entanto, a maioria dos alunos começou por fazer uma tentativa de manipulação da expressão da função de forma a aplicar uma regra de derivação conhecida, conforme ilustra a resolução de Madalena e Mafalda (figura 36). Esta estratégia permitiria determinar a derivada pedida, embora como os alunos ainda não sabiam determinar diretamente a derivada de e^{-x^2}, implicasse não só a aplicação do teorema da derivada da função composta como também um caso particular da regra de derivação do produto, não sendo por isso a estratégia mais imediata.

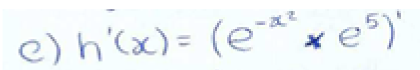


Figura 36 – Resolução de Madalena e Mafalda à alínea c) da questão 4 da tarefa 3 (1)

Estas alunas, não conseguindo determinar as derivadas das funções em que fatorizaram a função original, acabam por abandonar a estratégia inicial e optam por aplicar diretamente o teorema da derivada da função composta. Como caminho alternativo para resolver a alínea c), possivelmente para confirmarem o resultado anteriormente obtido, as alunas determinaram também a derivada pedida seguindo a definição de derivada de uma função num ponto.

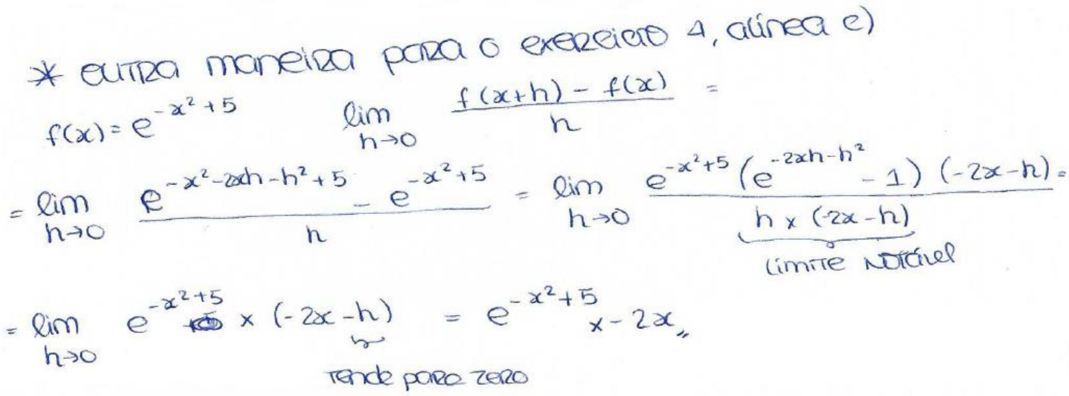


Figura 37 – Resolução de Madalena e Mafalda à alínea c) da questão 4 da tarefa 3 (2)

A última alínea da questão 4 da tarefa 3 veio a revelar-se ineficaz no que se refere ao tipo de estratégia a ser seguida por parte dos alunos. Sendo a questão pensada para aplicar o teorema da derivada da função composta, apenas uma pequena parte dos alunos respondeu à questão seguindo esse caminho (figura 38).

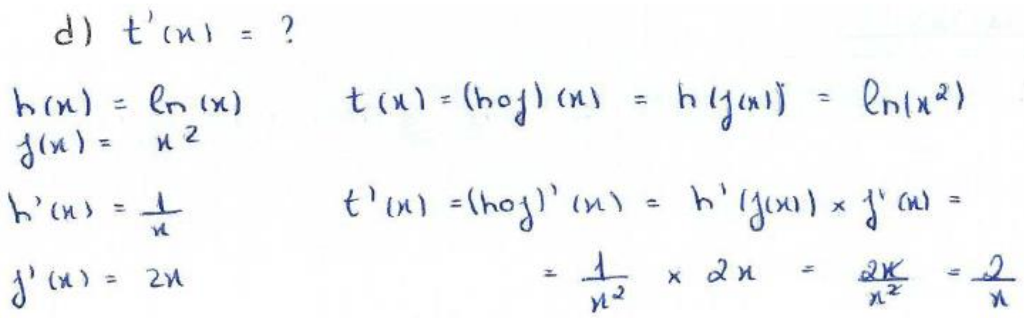


Figura 38 – Resolução de Sandra e Cátia à alínea d) da questão 4 da tarefa 3

Na resolução apresentada na figura 39, as alunas Jéssica e Célia usaram uma estratégia alternativa para determinar a derivada pedida, que foi seguida pela maioria dos alunos. Observe-se que as alunas começam por aplicar regras operatórias dos logaritmos para manipular a expressão algébrica da função e, em seguida, aplicam as regras de derivação já suas conhecidas.

d) $t'(x)$ $\qquad t(x) = \ln(x^2) = 2\ln(x)$

$$t'(x) = (2\ln(x))' = \frac{2}{x}$$

Figura 39 – Resolução de Jéssica e Célia à alínea d) da questão 4 da tarefa 3

Questão de aula 2

Quanto à questão de aula 2, esta foi proposta quando os alunos já conheciam a regra de derivação do quociente, sendo expectável que a utilizassem para determinar as derivadas das funções apresentadas nas alíneas a) e b) que já surgiam representadas nessa forma. Na figura 40, verifica-se que a aluna segue esta estratégia aplicando corretamente a regra de derivação do quociente.

(a) $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$. $\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(e^x)' \times (x^2+1) - (e^x) \times (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{e^x \times (x^2+1) - e^x \times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2}$$

Figura 40 – Resolução de Sandra à alínea a) da questão de aula 2

Na alínea b) os alunos continuaram a aplicar a regra de derivação do quociente, abandonando a estratégia seguida em tarefas anteriores e que envolvia transformar a expressão algébrica original num produto envolvendo potências. Observe-se a resolução de Letícia:

(b) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. $f'(x) = \frac{x' \times \ln x - (\ln x)' \times x}{(\ln x)^2} = \frac{1 \times \ln x - \frac{1}{x} \times x}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} =$

Regra da derivada do quociente

$$= \frac{\ln x}{(\ln x)^2} - \frac{1}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}$$

Figura 41 – Resolução de Letícia à alínea b) da questão de aula 2

Função definida por ramos (Tarefa 4)

Nas tarefas envolvendo derivadas de funções, foi também proposto aos alunos estudar uma função definida por ramos. O objetivo era perceber se os alunos mobilizavam o conhecimento necessário para determinar a derivada dessa função, nomeadamente para justificar se a função admitia ou não derivada no ponto em que muda de ramo. Verifica-se que os alunos conseguem derivar facilmente as funções que definem cada um dos ramos de f, mas muito poucos analisaram a existência de derivada no ponto em que a função muda de ramo.

Observe-se a resolução da aluna Soraia (figura 42) que começa por determinar a derivada nos pontos $x \neq 0$. De seguida vai estudar as derivadas laterais no ponto $x = 0$, a partir da definição, para analisar a existência de derivada neste ponto. Chegando a resultados distintos da derivada à esquerda e à direita de zero, a aluna conclui corretamente que não existe derivada nesse ponto.

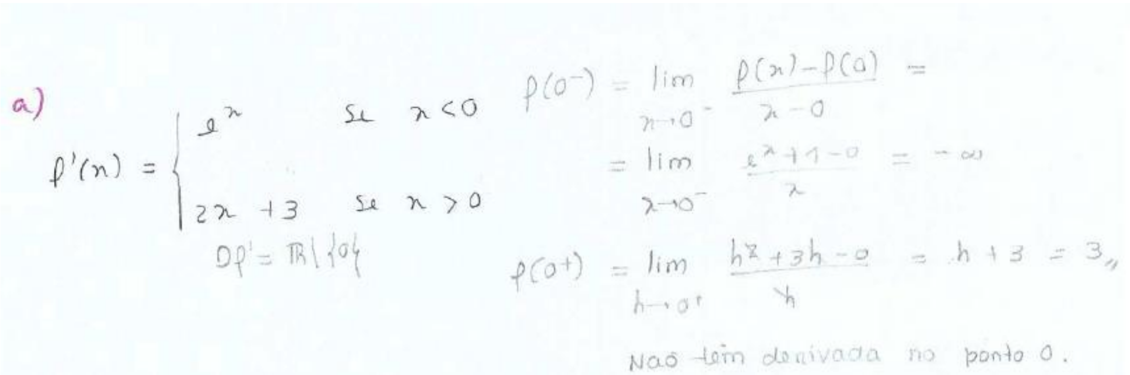


Figura 42 – Resolução de Soraia à alínea a) da questão 5 da tarefa 4

Em síntese, considero que esta análise às estratégias usadas pelos alunos permitiu perceber o tipo de caminhos que os alunos seguem perante a determinação da derivada de uma função. Ao longo da resolução das várias tarefas sobre derivadas, os alunos mobilizaram os seus conhecimentos relativos à utilização das regras de derivação, sendo capazes de nas estratégias que apresentaram manipular expressões algébricas e funções de forma a reconhecerem a regra de derivação a aplicar. Mobilizaram também outros conhecimentos adquiridos em anos anteriores, como por exemplo as regras operatórias das potências, para determinarem as derivadas pedidas nas diversas tarefas. As representações que predominaram nas estratégias apresentadas pelos alunos foram sobretudo de cariz algébrico, como seria de esperar face à natureza das tarefas apresentadas. De uma forma geral, considero que os alunos realizaram aprendizagens significativas no que respeita às regras de derivação estudadas e foram capazes de as aplicar com sucesso.

5.2. Erros e dificuldades na determinação da derivada de uma função

Os erros evidenciados pelos alunos serão analisados tendo em conta a classificação de Moura (2014). Desta forma, irei classificar os erros como processuais ou concetuais. Os erros processuais estão relacionados com as técnicas utilizadas na resolução de uma tarefa e englobam erros de substituição, de interpretação, de simplificação de expressões e de escrita matemática. Os erros concetuais estão relacionados com a aplicação incorreta do conceito e podem ser erros na definição da derivada num ponto ou na aplicação das regras de derivação.

Funções polinomiais, racionais e com radicais (Tarefa 1)

Relativamente a funções polinomiais de grau menor ou igual a três, praticamente todos os alunos foram capazes de determinar corretamente as derivadas solicitadas, com a exceção de erros processuais de simplificação de expressões algébricas que foram cometidos por alguns alunos. A figura 43 apresenta a resolução da questão 1 da Elisa, cujo erro evidenciado na alínea c) é representativo dos erros observados na derivação deste tipo de funções.

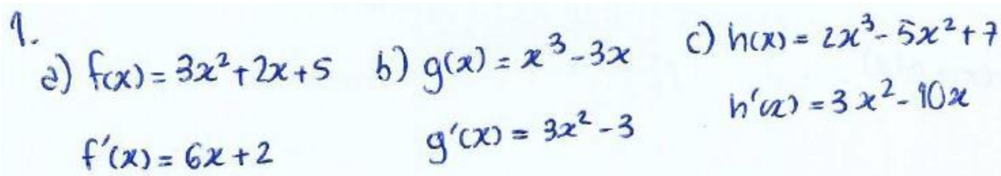


Figura 43 – Resolução de Elisa à questão 1 da tarefa 1

Repare-se que a aluna deriva corretamente x^3 mas despreza o coeficiente 2, talvez por distração atendendo a que no termo seguinte já considera corretamente o coeficiente do x, o que vai resultar no cálculo errado da derivada.

Um dos aspetos que pode ter contribuído para o sucesso da grande maioria dos alunos na resolução desta questão foi o facto de os polinómios considerados terem todos os coeficientes inteiros, uma vez que, durante o trabalho autónomo dos alunos, pude aperceber-me de pequenos erros de cálculo que os próprios alunos foram corrigindo, mas que não seriam tão facilmente detetáveis se os polinómios envolvessem, por exemplo, coeficientes fracionários ou irracionais.

Regra geral, os alunos não demonstraram dificuldades em utilizar a regra de derivação do produto, na questão 5 da tarefa 1. No entanto, ao determinar a expressão algébrica da derivada da primeira função que surgiu como um produto de duas funções polinomiais, um pequeno número de alunos cometeu erros concetuais, conforme mostra a resolução de Berta e Artur na figura 44.

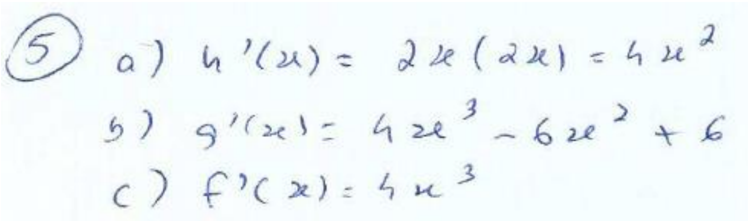


Figura 44 – Resolução de Berta e Artur à questão 5 da tarefa 1

Na alínea a), podemos constatar a incorreção cometida pelos alunos ao assumirem que a derivada do produto é o produto das derivadas. Assim, na determinação da derivada de funções polinomiais, a grande maioria dos alunos revela saber aplicar as regras de derivação necessárias, cometendo na generalidade erros processuais na simplificação de expressões.

Na alínea a) da questão 8 da tarefa 1, a generalidade dos alunos determinou a derivada de uma função polinomial de grau sete de forma bastante expedita. Na alínea b), os alunos conseguiram determinar a derivada aplicando a regra de derivação da potência. Já a alínea c), a qual pedia a derivada de uma função apresentada como um quociente de funções polinomiais, suscitou algumas dificuldades aos alunos. Uma vez que ainda não tinha sido estudada a regra de derivação do quociente, vários alunos assumiram que a derivada do quociente é o quociente das derivadas, cometendo assim um erro concetual. Por último, nas alíneas d) e e) envolvendo funções com radicais, muitos alunos cometeram diversos erros processuais, na derivação destas funções. A resolução de Elsa (figura 45) espelha estas dificuldades sentidas por grande parte dos alunos.

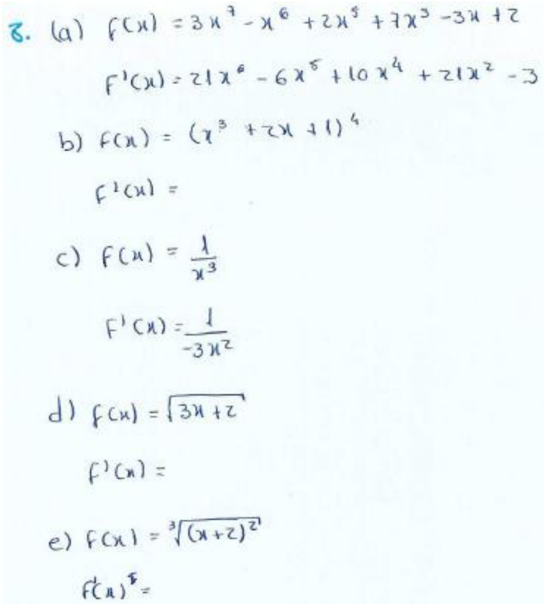
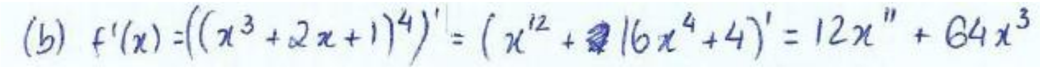


Figura 45 – Resolução de Elsa à questão 8 da tarefa 1

Analisando a resolução, podemos observar que a aluna determina corretamente a derivada da alínea a) mas não resolve as alíneas b), d) e e) e na alínea c) comete um erro concetual considerando que $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{1}{g'}$. Sendo a alínea b) uma aplicação direta da regra de derivação da potência, a não resolução desta alínea por parte da aluna revela que esta regra não foi totalmente compreendida. No caso em que a base da potência é x, a aluna não revelou dificuldades na aplicação da regra da potência. Já no caso em que a base é outro tipo de função, são evidentes as dificuldades sentidas pela aluna, uma vez que não determina a derivada nesse caso. Nas alíneas d) e e) a aluna parece não reconhecer a possibilidade de escrever as funções como potências para de seguida aplicar uma regra de derivação adequada.

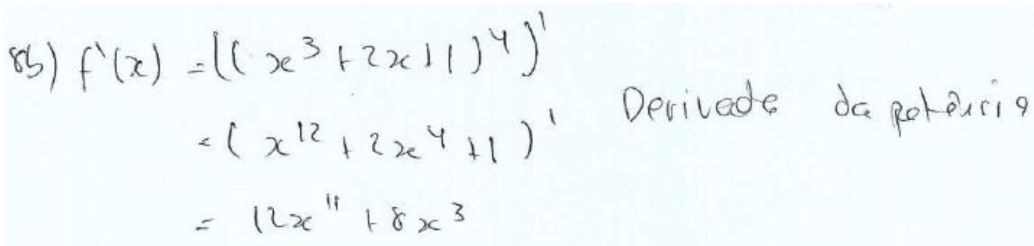
Nas figuras seguintes, estão reproduzidos alguns dos erros mais frequentemente evidenciados pelos alunos na resolução da questão 8 da tarefa 1. Na alínea b), o erro processual mais frequente dos alunos surgiu na transformação da potência dada numa soma de potências, onde os alunos, entre outros erros processuais, assumiram implícita ou explicitamente que $(x^3 + 2x + 1)^4 = (x^3)^4 + (2x)^4 + 1^4$. Mais uma vez, os alunos revelam dificuldades em aplicar a regra de derivação da potência quando a base é diferente de x.

Figura 46 – Resolução de Jéssica e Célia à alínea b) da questão 8 da tarefa 1



$$(b)\ f'(x) = ((x^3+2x+1)^4)' = (x^{12} + 16x^4+4)' = 12x^{11} + 64x^3$$

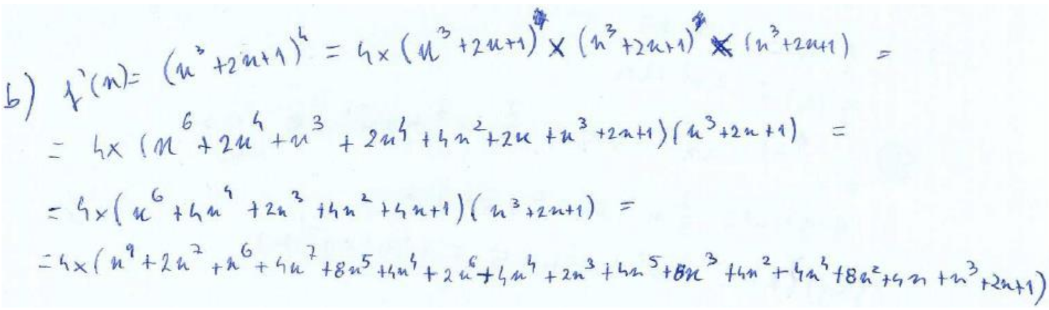
Figura 47 – Resolução de Letícia à alínea b) da questão 8 da tarefa 1



$$8b)\ f'(x) = ((x^3+2x+1)^4)'$$
$$= (x^{12}+2x^4+1)'$$
Derivada da potência
$$= 12x^{11}+8x^3$$

Figura 48 – Resolução de Telmo e Francisco à alínea b) da questão 8 da tarefa 1

Outro tipo de erro cometido pelos alunos na alínea b) da questão 8 da tarefa 1 é a nível concetual, na aplicação da regra de derivação da potência. O erro mais comum é a não derivação da base, conforme exemplifica a resolução de José (figura 49).



$$b)\ f'(x) = (x^3+2x+1)^4 = 4\times(x^3+2x+1)\times(x^3+2x+1)\times(x^3+2x+1) =$$
$$= 4\times(x^6+2x^4+x^3+2x^4+4x^2+2x+x^3+2x+1)(x^3+2x+1) =$$
$$= 4\times(x^6+4x^4+2x^3+4x^2+4x+1)(x^3+2x+1) =$$
$$= 4\times(x^9+2x^7+x^6+4x^7+8x^5+4x^4+2x^6+4x^4+2x^3+4x^5+8x^3+4x^2+4x^3+8x^2+4x+x^3+2x+1)$$

Figura 49 – Resolução de José à alínea b) da questão 8 da tarefa 1

Pela observação do trabalho desenvolvido em aula com os alunos, posso concluir que este erro consiste numa generalização estabelecida pelos alunos a partir da derivada das funções da forma $f(x) = x^n$. Frequentemente, os alunos consideram que $(g(x)^n)' = ng(x)^{n-1}$, como realmente acontece no caso de $g(x) = x$ que os alunos já conheciam das regras de derivação estudadas no 11.º ano. Nos casos em que a derivada da base não é 1, os alunos tendem a esquecer-se de a incluir, levando-os a cometerem erros. Existem ainda alguns alunos que aplicam corretamente a derivada da função, mas que claramente não compreenderam a regra de derivação em causa, uma vez que aplicaram sucessivamente a regra de derivação da potência, substituindo em cada passo o fator $(x^3+2x+1)^k$ por $k(x^3+2x+1)^{k-1}(3x^2+2)$ até eliminar o seu expoente. Repare-se na resolução de Sandra e Cátia (figura 50):

$$
\begin{aligned}
b)\quad f'(x) &= 4 \times (x^3+2x+1)^3 \times (x^3+2x+1)' = \\
&= 4 \times (x^3+2x+1)^3 \times (3x^2+2) = \\
&= 4 \times 3 \times (x^3+2x+1)^2 \times (3x^2+2)^2 = \\
&= 24\,(x^3+2x+1) \times (3x^2+2)^3 = \\
&= 24\,(x^3+2x+1) \times (3x^2+2)^4 = \\
&= (24x^3+48x+24) \times (3x^8+16)
\end{aligned}
$$

Figura 50 – Resolução de Sandra e Cátia à alínea b) da questão 8 da tarefa 1

As alunas revelam também alguma dificuldade nas operações envolvendo potências, cometendo erros processuais semelhantes aos que foram identificados anteriormente, considerando, por exemplo, que $(3x^2+2)^4=(3x^8+16)$.

Contrariamente ao observado em resoluções anteriores, a grande maioria dos alunos conseguiu transformar funções apresentadas na forma de produto em potências. Todavia, o facto de a alínea c) desta questão envolver expoentes negativos e os alunos aplicarem as regras de derivação sem as indicarem explicitamente, levou-os a cometer erros processuais de substituição e erros concetuais de aplicação das regras de derivação. Nas resoluções apresentadas nas figuras 51 e 52, podemos verificar que os alunos identificaram corretamente a potência a derivar, mas possivelmente, aliado à rapidez com que efetuaram os cálculos, não determinaram corretamente a derivada, cometendo erros a determinar o expoente de x.

$$c)\quad f(x)=(x^{-3})' = -3x^{2}$$

Figura 51 – Resolução de Dinis e Hélio à alínea c) da questão 8 da tarefa 1

$$c)\quad f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 = x^{-3} = -3x^{-2}$$

Figura 52 – Resolução de Duarte e José à alínea c) da questão 8 da tarefa 1

Neste caso, a dificuldade não esteve associada à regra de derivação em causa, mas sim ao facto de o expoente da potência ser negativo. Pela análise das resoluções, podemos verificar que a regra de derivação está bem presente, mas que existem algumas dificuldades na relação de ordem nos números negativos. Esta resolução também apresenta alguns erros processuais ao nível da escrita matemática, nomeadamente na notação que os alunos têm vindo a apresentar. Conforme mostra a figura 52, os alunos efetuam muitas vezes simplificações na expressão algébrica da função original e depois determinam a função derivada sem indicar o que estão a fazer, o que os leva a apresentar muitas vezes igualdades que não são verdadeiras. Na alínea c), na primeira vez em que foi pedido aos alunos para derivarem uma função apresentada como um quociente, uma parte deles tentou inferir a regra de derivação do quociente, mas sem sucesso.

Na resolução de Telmo e Francisco (figura 53), podemos observar que os alunos consideraram que a derivada do quociente era o quociente das derivadas. Para além disso, os alunos derivam incorretamente x^3 ao esquecerem-se de colocar o coeficiente 3 em x^2.

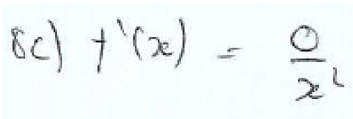


Figura 53 – Resolução de Telmo e Francisco à alínea c) da questão 8 da tarefa 1

Já na resolução apresentada por Vanda e Miguel (figura 54) podemos constatar que derivaram apenas o denominador e depois transformaram incorretamente a expressão a que chegaram, mostrando mais uma vez dificuldades nas operações envolvendo potências.

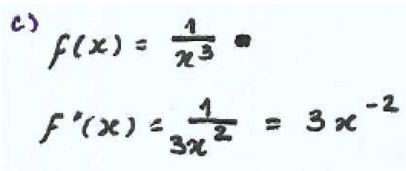


Figura 54 – Resolução de Vanda e Miguel à alínea c) da questão 8 da tarefa 1

As últimas duas alíneas da questão 8 da tarefa 1 vieram confirmar algumas das dificuldades sentidas pelos alunos ao longo da resolução das alíneas anteriores, bem como revelar novas dificuldades associadas ao facto de as funções envolverem radicais. Na alínea d), a primeira dificuldade que surgiu a alguns alunos foi a de não serem capazes de transformar uma raiz quadrada numa potência conveniente para poderem aplicar a regra de derivação. Entre os alunos que o conseguiram fazer com sucesso, alguns cometeram o erro concetual mencionado anteriormente e ao aplicarem a regra de derivação da potência também não derivaram a base, levando-os a uma resposta errada, que foi o caso dos alunos Ricardo e Álvaro (figura 55).

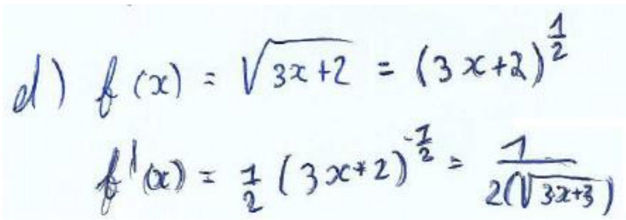


Figura 55 – Resolução de Ricardo e Álvaro à alínea d) da questão 8 da tarefa 1

À semelhança do que ocorreu com as potências, nas funções envolvendo radicais, certos alunos consideraram na alínea d) que a aplicação raiz quadrada é linear ao substituírem $\sqrt{a+b}$ por $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, o que os levou a obter uma expressão algébrica errada para a derivada. É o caso dos alunos Telmo e Francisco (figura 56):

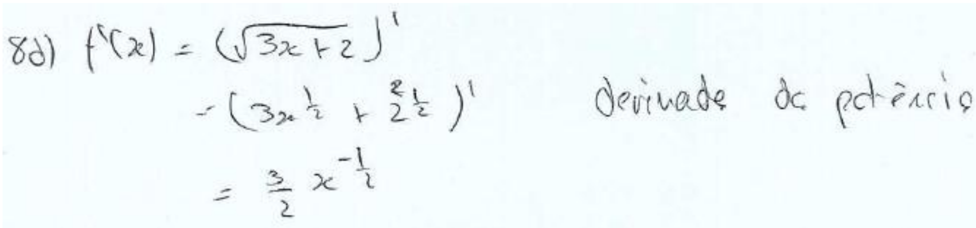


Figura 56 – Resolução de Telmo e Francisco à alínea d) da questão 8 da tarefa 1

Apesar disso, os alunos em causa mostram que sabem aplicar as regras de derivação ao derivarem corretamente a função obtida, após o erro de cálculo cometido. Também nesta alínea, um grupo de alunos, embora tenha identificado convenientemente a função dada como uma potência e aplicado corretamente a regra de derivação, cometeu depois erros processuais ao tentar simplificar a expressão obtida, conforme ilustra a resolução da aluna Rita (figura 57).

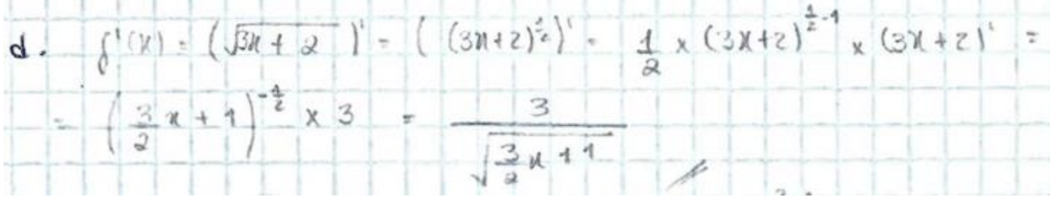


Figura 57 – Resolução de Rita à alínea d) da questão 8 da tarefa 1

Repare-se que a aluna Rita aplica corretamente a regra de derivação da potência, determina com sucesso as derivadas que daí resultam, no entanto, na tentativa de simplificar a expressão obtida, a aluna assume que $a \times b^c = (ab)^c$ acabando por chegar assim a uma resposta errada. Por último, surge a alínea e) com um grau de dificuldade ligeiramente superior em relação às restantes alíneas. Esta alínea, para além de envolver uma raiz cúbica, tinha como argumento uma função apresentada com a forma $(g(x))^2$, o que exigia alguma manipulação algébrica por parte dos alunos, de forma a poderem reconhecer qual das regras de derivação era suposto utilizar. Esta foi a maior dificuldade sentida por grande parte dos alunos, conforme demonstra a resolução apresentada pelos alunos Ricardo e Álvaro (figura 58).

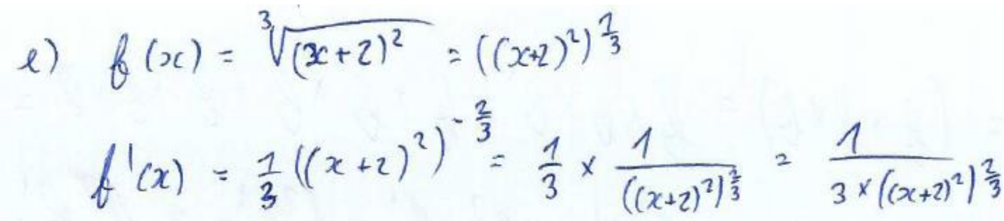


Figura 58 – Resolução de Ricardo e Álvaro à alínea e) da questão 8 da tarefa 1

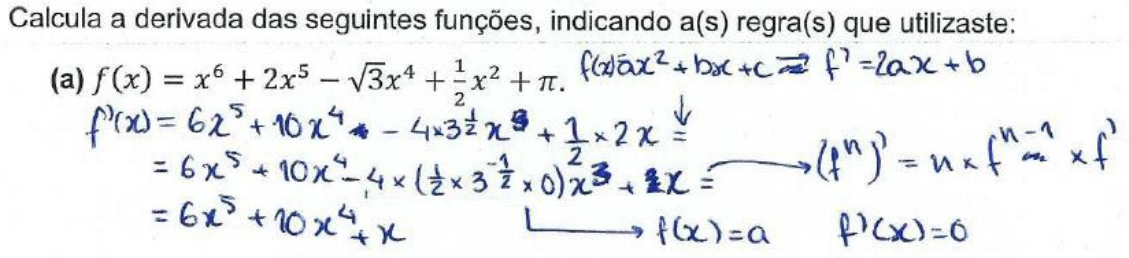
Este grupo de alunos transforma corretamente a função dada na alínea e) numa potência, mas não a simplifica até ao fim, o que mais uma vez revela alguma dificuldade em relação às regras operatórias das potências. Este procedimento, apesar de correto, revelou outras dificuldades. Mais uma vez, a regra de derivação da potência foi mal aplicada pois os alunos não consideraram a derivada da base, o que conduziu a um resultado errado. À semelhança do que aconteceu na alínea d), uma vez que a alínea e) também envolve uma função com radicais, surgiram vários erros processuais de simplificação, envolvendo a expressão algébrica da função dada.

Em suma, e uma vez que uma das questões de investigação deste estudo é analisar que erros cometem e as dificuldades que manifestam os alunos quando determinam a derivada de uma função, a questão 8 da tarefa 1 analisada anteriormente permite afirmar que entre as regras de derivação da soma, do produto e da potência, é esta última que mais dificuldades gera nos alunos dando origem a um número significativo de erros processuais. De uma forma geral, os alunos não evidenciam dificuldades na aplicação das regras de derivação. No entanto, os alunos cometem os mais variados erros processuais ao nível do cálculo afetando os processos de manipulação algébrica necessários à determinação das derivadas.

Questão de aula 1

Analisando a questão de aula 1, a primeira alínea, onde era pedido aos alunos para determinarem a expressão algébrica da função derivada de uma função polinomial de grau seis, ao contrário do que tinha acontecido até ao momento em relação a este tipo de funções, esta levantou dificuldades aos alunos fruto da presença de coeficientes irracionais e fracionários, dando origem a diversos erros processuais. Esta alínea veio demonstrar que apesar de os alunos anteriormente terem revelado algum à vontade na derivação de funções polinomiais, este tópico pode suscitar ainda algumas dificuldades aos alunos, quando aliado a conceitos que estes ainda não dominam na sua totalidade. A segunda alínea, apresenta novamente uma função polinomial para os alunos derivarem, mas confronta-os com uma expressão pouco evidente de uma função polinomial, o que suscitou erros até então impercetíveis na derivação deste tipo de funções. Por último, a terceira alínea da questão, apresentava uma função com radicais cujo objetivo era perceber se as dificuldades e erros já identificados neste tipo de funções prevaleciam com o avançar do estudo das regras de derivação. No momento da resolução desta questão, os alunos já conheciam as regras de derivação da soma, do produto e da potência, pelo que seria de esperar que usassem estes conhecimentos.

Na figura seguinte (figura 59) é apresentada uma das respostas dadas à alínea a) da questão de aula 1, em que a aluna Mariana após ter derivado corretamente a função apresentada, deriva $3^{\frac{1}{2}}$ como se se tratasse de uma função exponencial e não de uma constante.


Calcula a derivada das seguintes funções, indicando a(s) regra(s) que utilizaste:

(a) $f(x) = x^6 + 2x^5 - \sqrt{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \pi$. $\quad f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f' = 2ax + b$

$f'(x) = 6x^5 + 10x^4 - 4\times 3^{\frac{1}{2}}x^3 + \frac{1}{2}\times 2x =$

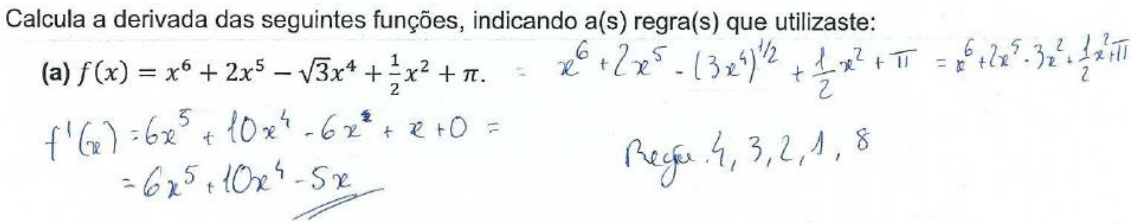
$= 6x^5 + 10x^4 - 4\times(\frac{1}{2}\times 3^{-\frac{1}{2}}\times 0)x^3 + x = \longrightarrow (f^n)' = n\times f^{n-1}\times f'$

$= 6x^5 + 10x^4 + x \longrightarrow f(x)=a \quad f'(x)=0$

Figura 59 – Resolução de Mariana à alínea a) da questão de aula 1

Pela resolução apresentada é claro que, embora a aluna conheça as regras de derivação e as aplique corretamente, não compreende na totalidade aquilo que está a fazer, recorrendo à regra de derivação da potência para determinar a derivada de uma constante numa parcela em que já tinha determinado a derivada previamente. Este erro concetual revela dificuldades relativamente ao conceito de função e ao conceito de derivada e pode ser explicado devido ao facto de alguns alunos terem alguma dificuldade em reconhecer a raiz quadrada de um número como uma constante nos casos em que o resultado não é um número inteiro.

De seguida, apresento outro exemplo de uma resolução (figura 60) onde a presença de $\sqrt{3}$ como coeficiente de x^4 originou erros processuais ao nível do cálculo e levou o aluno em causa a derivar uma função diferente daquela que era dada originalmente.


Calcula a derivada das seguintes funções, indicando a(s) regra(s) que utilizaste:

(a) $f(x) = x^6 + 2x^5 - \sqrt{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \pi$. $= x^6 + 2x^5 - (3x^4)^{1/2} + \frac{1}{2}x^2 + \pi = x^6 + 2x^5 - 3x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \pi$

$f'(x) = 6x^5 + 10x^4 - 6x^{\cancel{2}} + x + 0 =$

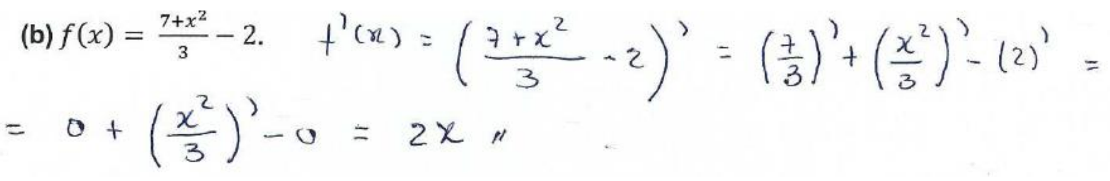
$= 6x^5 + 10x^4 - 5x$

Regra 4, 3, 2, 1, 8

Figura 60 – Resolução de Hélio à alínea a) da questão de aula 1

Nesta figura é fácil perceber que este aluno interpretou $\sqrt{3}x^4$ como $\sqrt{3x^4}$, o que o levou a igualar a função dada a outra que é diferente. Para além disso, é possível também verificar que este aluno transforma $(3x^4)^{\frac{1}{2}}$ em $3x^2$, ignorando o facto de 3 também estar elevado a um meio. Importa referir que a maioria dos alunos que comete este tipo de erros processuais não teve grandes dificuldades em determinar a expressão algébrica da função derivada através das regras de derivação, embora revelem falta de espírito crítico ao não reconhecerem que estão a derivar uma função diferente daquela que é pedida originalmente.

No que diz respeito aos erros e dificuldades demonstradas pelos alunos na alínea b) da questão de aula 1, estas podem estar relacionadas, em parte, com a manipulação algébrica da expressão da função. Os alunos recorreram às mais diversas estratégias de resolução que, apesar de válidas, os levaram a cometer vários tipos de erros que até então ainda não tinham surgido nos processos de derivação.


(b) $f(x) = \frac{7+x^2}{3} - 2$. $f'(x) = \left(\frac{7+x^2}{3} - 2\right)' = \left(\frac{7}{3}\right)' + \left(\frac{x^2}{3}\right)' - (2)' =$

$= 0 + \left(\frac{x^2}{3}\right)' - 0 = 2x$ //

Figura 61 – Resolução de Maria à alínea b) da questão de aula 1

Como se pode ver na figura 61, a aluna Maria optou por decompor a fração dada numa soma de duas parcelas, aplicando corretamente a derivada da soma à expressão que obteve. É possível também verificar que a aluna tem consolidada a ideia que a derivada de uma constante é zero e como se derivam potências de x, no entanto, a aluna ignora o coeficiente de x^2 quando determina a sua derivada. A causa deste erro processual pode dever-se ao facto de o coeficiente ser fracionário, uma vez que esta aluna não cometeu este tipo de erros quando derivou funções polinomiais de coeficientes inteiros. Seguindo o mesmo raciocínio da Maria surge a aluna Soraia (figura 62) que simplifica a função dada da mesma forma.

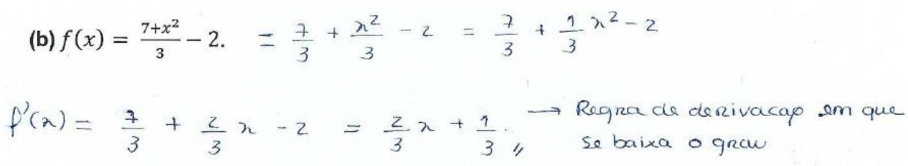


Figura 62 – Resolução de Soraia à alínea b) da questão de aula 1

Soraia determinou bem a derivada de $\frac{x^2}{3}$, cometendo depois um erro ao considerar que a derivada de uma constante é a própria constante, possivelmente devido ao facto de a função dada envolver frações, pois a aluna já tinha derivado várias vezes constantes inteiras e não tinha cometido este erro. Ainda relativamente à alínea b), a figura seguinte (figura 63) mostra uma resolução em que o aluno revela ter compreendido todas as regras de derivação estudadas até ao momento (regra de derivação da soma, produto e potência) mas, no entanto, revela lacunas ao nível das operações envolvendo potências ao manipular incorretamente a função que pretende derivar.

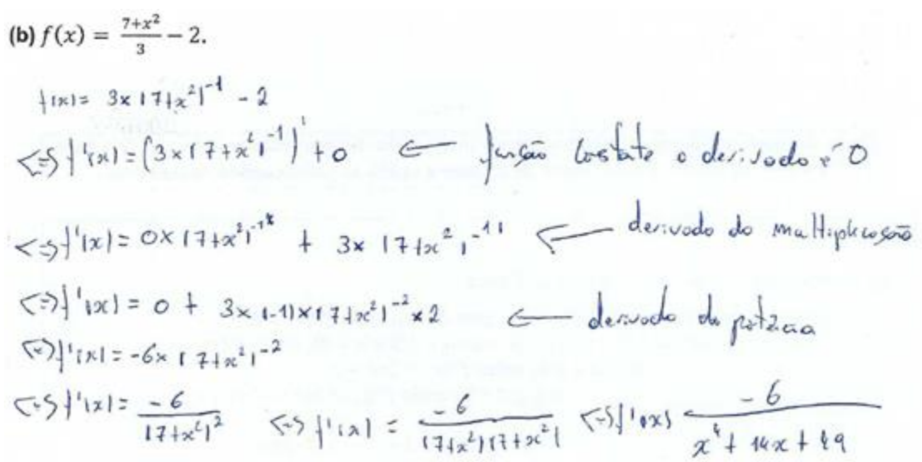


Figura 63 – Resolução de José à alínea b) da questão de aula 1

A resolução apresentada pela aluna Mariana (figura 64) mostra que existem alunos que não atribuem significado à derivada como declive da reta tangente ao ponto ao afirmarem que a derivada de uma função não constante é zero. A aluna em causa revela erros ao nível concetual em relação às regras de derivação. Se, neste caso, a dificuldade não está relacionada com a manipulação algébrica da expressão, esta surge quando a aluna é convidada a derivar um produto em que um dos fatores é uma constante. Aqui, a aluna deriva cada uma das parcelas isoladamente e por fases, concluindo assim incorretamente que a derivada pedida é zero.

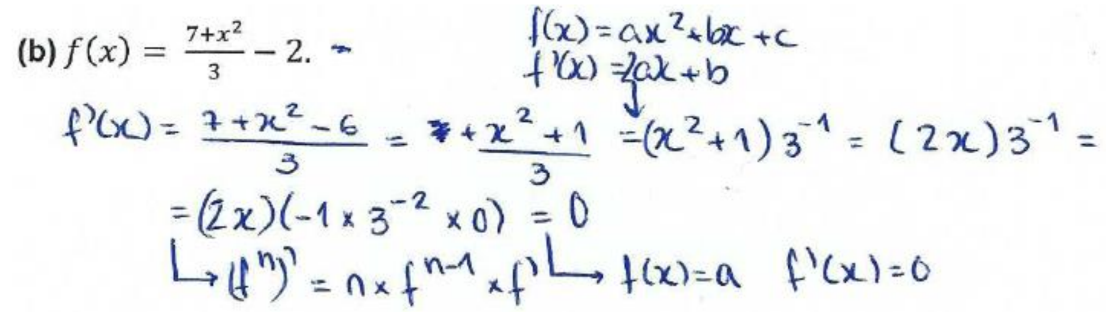


Figura 64 – Resolução de Mariana à alínea b) da questão de aula 1

Repare-se que, nesta fase do estudo das regras de derivação, já tinham sido discutidos com os alunos alguns dos erros que cometiam ao derivar e corrigidas no quadro as questões propostas anteriormente. Ainda assim, e apesar de notar nos alunos uma evolução, especialmente ao nível do cálculo matemático, os alunos continuam a cometer vários erros processuais ao derivar estas funções.

Ao analisarmos a resolução apresentada pelo aluno Dinis (figura 65) podemos constatar que este considera que $\sqrt{(2x+1)^3} = (2x+1)^{\frac{1}{3}}$, o que inevitavelmente o vai induzir em erro.

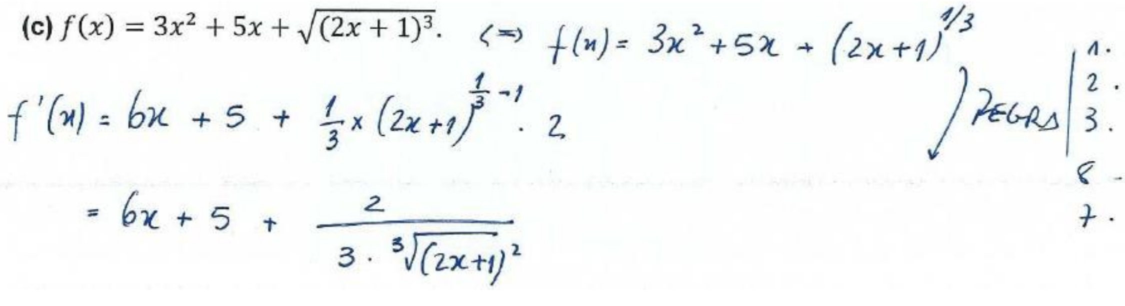


Figura 65 – Resolução de Dinis à alínea c) da questão de aula 1

O aluno Francisco considera também, incorretamente, que $\sqrt{(2x+1)^3} = (2x+1)^{\frac{2}{3}}$ mas aplica depois as regras de derivação, de modo correto (figura 66).

(c) $f(x) = 3x^2 + 5x + \sqrt{(2x+1)^3}$.

$$f'(x) = \left(3x^2 + 5x + \sqrt{(2x+1)^3}\right)' = 6x + 5 + \frac{2}{3} \cdot (2x+1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (2x+1)'$$

$$= 6x + 5 + \frac{(2x+1)'}{2 \cdot \sqrt{(2x+1)^3}} = 6x + 5 + \frac{2}{2 \cdot \sqrt{(2x+1)^3}}$$

Figura 66 – Resolução de Francisco à alínea c) da questão de aula 1

A resolução apresentada pelo aluno Telmo (figura 67) revela que o aluno domina a regra de derivação da soma e que é capaz de transformar um radical numa potência, no entanto, não deriva corretamente essa potência.

(c) $f(x) = 3x^2 + 5x + \sqrt{(2x+1)^3}$.

propriedade 3 7 8 1

$$f'(x) = \left(3x^2 + 5x + \sqrt{(2x+1)^3}\right)' \qquad \frac{3}{2} - 1 = 0{,}5$$

$$= 6x + 5 + \left((2x+1)^{\frac{3}{2}}\right)'$$

$$= 6x + 5 + 3x^{0,5}$$

Figura 67 – Resolução de Telmo à alínea c) da questão de aula 1

Aparentemente, o erro do aluno resulta de ao ‘baixar o grau’ na aplicação da regra de derivação da potência substituir a base $2x + 1$ por x. Também a resolução da aluna Sandra (figura 68) revela que esta conseguiu manipular com sucesso a expressão algébrica da função dada de forma a reconhecer as regras de derivação a utilizar, embora iguale nos primeiros passos da sua resolução a função f' à função f.

(c) $f(x) = 3x^2 + 5x + \sqrt{(2x+1)^3}$.

$$f'(u) = 3u^2 + 5u + \left((2u+1)^3\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(u) = 3u^2 + 5u + (2u+1)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(u) = 6u + 5 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(u) = 6u + 8$$

Figura 68 – Resolução de Sandra à alínea c) da questão de aula 1

Para além dos erros processuais ao nível da notação, a aluna considera que a derivada de $(2x+1)^{\frac{3}{2}}$ é 3. Subjacente a este erro processual parece estar a confusão entre $(2x+1)^{\frac{3}{2}}$ e $\frac{3}{2}(2x+1)$. A resolução do aluno Hélio, apresentada na figura 69, contém também erros processuais de notação. No primeiro passo, o aluno substitui a terceira parcela de f, pelo que considera ser a derivada dessa parcela.

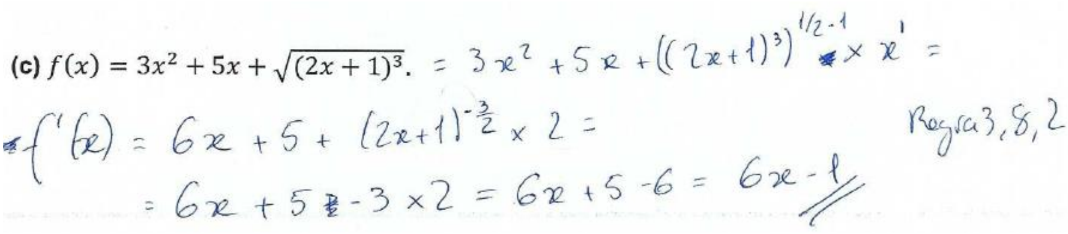


Figura 69 – Resolução de Hélio à alínea c) da questão de aula 1

Evidencia-se, na análise da resolução de Hélio, que o aluno identificou corretamente $\sqrt{(2x+1)^3}$ como a potência de base $(2x+1)^3$ e expoente $\frac{1}{2}$, mas não aplicou corretamente a regra de derivação da potência, omitindo o fator $\frac{1}{2}$ (expoente) e considerando a base $2x+1$ no fator derivada da base. Note-se ainda que num primeiro passo esse fator é representado por x'.

Seguindo uma estratégia alternativa (figura 70), a aluna Letícia decompôs a parcela $\sqrt{(2x+1)^3}$ no produto $(2x+1)\sqrt{2x+1}$. Apesar de esta ser uma estratégia válida, a aluna comete um erro concetual ao considerar que a derivada do produto é o produto das derivadas.

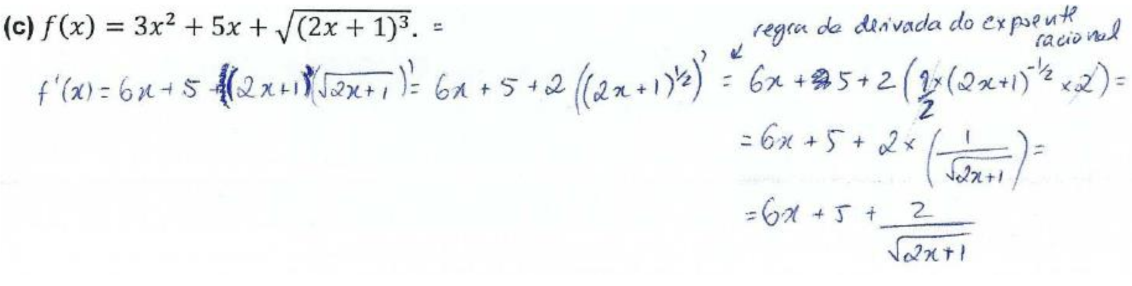


Figura 70 – Resolução de Letícia à alínea c) da questão de aula 1

Por último, surge a resolução da aluna Lídia (figura 71), onde mais uma vez aparecem parcelas de f ‘misturadas’ com parcelas de f'. Além dos erros processuais de notação, depreende-se da resolução apresentada que a aluna considera $(2x+1)^{\frac{3}{2}} = 2x^{\frac{3}{2}} + 1$ e deriva erradamente a função $2x^{\frac{3}{2}} + 1$, obtendo $3x^{\frac{1}{2}} + 1$.

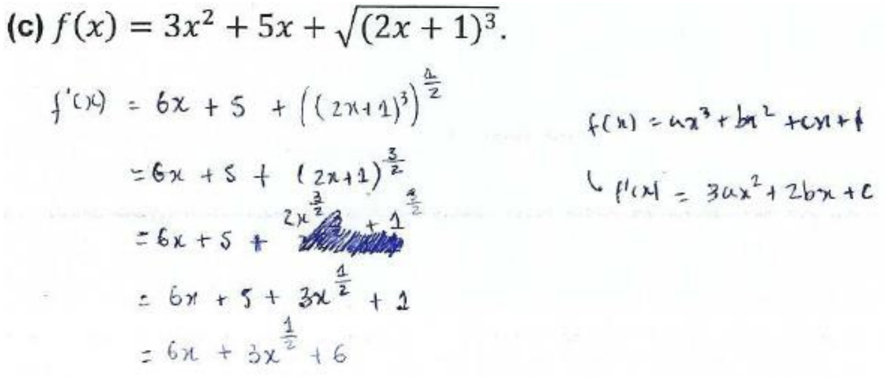


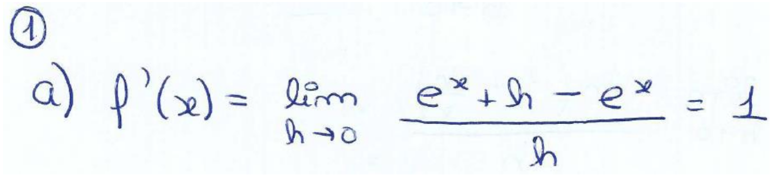
Figura 71 – Resolução de Lídia à alínea c) da questão de aula 1

Resumindo, a análise desta questão de aula remete-nos para a segunda questão de investigação, em particular para as dificuldades e erros cometidos pelos alunos ao derivar funções polinomiais. Relativamente às dificuldades sentidas pelos alunos ao derivar este tipo de funções, destaque-se a presença de coeficientes irracionais e fracionários que comprometeram o trabalho dos alunos ao nível do cálculo. Outra área em que os alunos continuam a revelar bastantes dificuldades é nas operações envolvendo potências e na aplicação da regra de derivação da potência.

Função exponencial e função logarítmica (Tarefa 2)

A questão 1 da tarefa 2 permite analisar que dificuldades e erros os alunos revelam ao trabalharem com a definição de derivada de uma função num ponto, contribuindo assim para responder a uma das questões deste estudo.

Em aula, foi discutido em grande grupo os passos necessários à realização desta questão e, de uma forma geral, não surgiram grandes dificuldades por parte dos alunos na aplicação da definição, tendo estes conseguido determinar a expressão das derivadas pretendidas com sucesso. A título de exceção, surgiram alguns erros de substituição e alguns alunos tiveram dificuldade em realizar as operações necessárias para determinar o limite pretendido. Da análise da resolução da aluna Elisa (figura 72), que é representativa daquilo que foi produzido por alguns alunos, verifica-se que estes cometeram erros processuais ao substituir o objeto numa determinada função, como ilustra a figura seguinte.



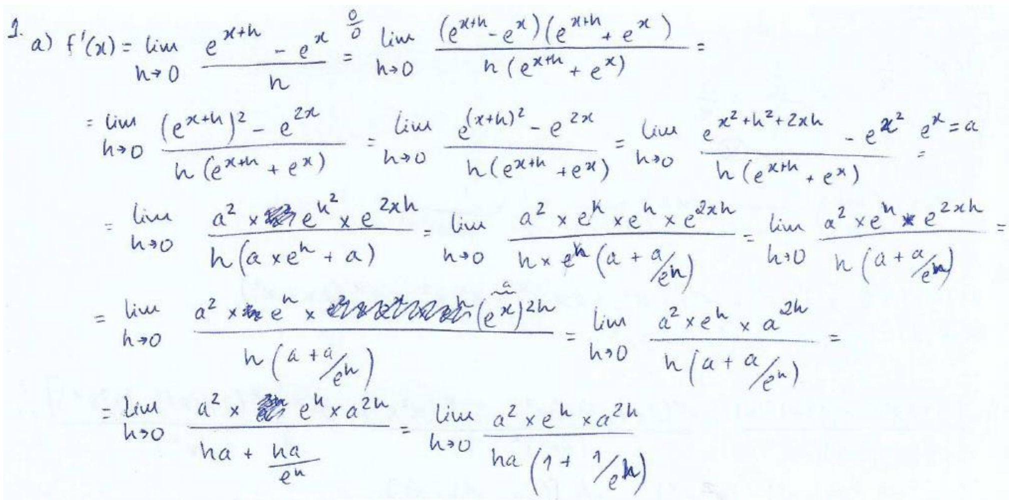
1

a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^x + h - e^x}{h} = 1$

Figura 72 – Resolução de Elisa à alínea a) da questão 1 da tarefa 2

Da análise da resolução apresentada acima, verificamos que alguns alunos não distinguem o papel de transformação de uma função. Ao determinar a imagem de $x + h$ por f, os alunos por vezes consideram primeiramente a imagem de x por f adicionando-lhe à posteriori h. Ao cometerem o erro processual assinalado acima, os alunos concluíram que a derivada de e^x era 1, no entanto, foi notória a desconfiança dos alunos perante este resultado dada a rapidez e simplicidade com que o obtiveram, procurando perceber onde tinham errado.

Outro motivo pelo qual alguns alunos não conseguiram determinar as derivadas pedidas na questão 1 da tarefa 2 foi a dificuldade em determinar o limite envolvido (figura 73), não conseguindo manipular a expressão algébrica de forma a identificarem a presença de um limite notável e, portanto, não conseguiram determinar a derivada pedida.



1. a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \overset{0/0}{=} \lim_{h \to 0} \frac{(e^{x+h} - e^x)(e^{x+h} + e^x)}{h(e^{x+h} + e^x)} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(e^{x+h})^2 - e^{2x}}{h(e^{x+h} + e^x)} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(x+h)^2} - e^{2x}}{h(e^{x+h} + e^x)} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x^2+h^2+2xh} - e^{x^2}}{h(e^{x+h} + e^x)} =$ $e^x = a$

$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 \times e^{h^2} \times e^{2xh}}{h(a \times e^h + a)} = \lim_{h \to 0} \frac{a^2 \times e^h \times e^h \times e^{2xh}}{h \times e^h (a + a/e^h)} = \lim_{h \to 0} \frac{a^2 \times e^h \times e^{2xh}}{h(a + a/e^h)} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 \times e^h \times (e^x)^{2h}}{h(a + a/e^h)} = \lim_{h \to 0} \frac{a^2 \times e^h \times a^{2h}}{h(a + a/e^h)} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 \times e^h \times a^{2h}}{ha + \frac{ha}{e^h}} = \lim_{h \to 0} \frac{a^2 \times e^h \times a^{2h}}{ha(1 + 1/e^h)}$

Figura 73 – Resolução de Letícia à alínea a) da questão 1 da tarefa 2

A realização desta questão introduziu as derivadas das funções e^x e $\ln(x)$ a que os alunos recorreram, sem dificuldade, na resolução das questões seguintes. Apesar disso, a introdução das funções e^x e $\ln(x)$ no estudo das derivadas veio revelar que ainda existem dificuldades a nível concetual que não estão ultrapassadas. Por exemplo, alguns alunos não distinguiram a derivada de uma função g num ponto a com a derivada da função constante $f(x) = g(a)$. A resolução apresentada pela aluna Elsa à alínea a) da questão 2 da tarefa 2 (figura 74) corrobora a afirmação anterior.

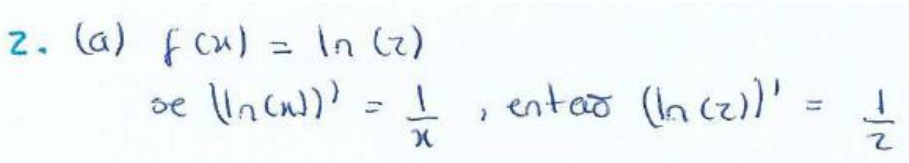


Figura 74 – Resolução de Elsa à alínea a) da questão 2 da tarefa 2

Esta aluna determina a derivada da função $\ln(x)$, substituindo depois x por 2. Dada uma função $f(x)$, é frequente representar a função derivada $f'(x)$ por $(f(x))'$. Esta notação abusiva, mas usual, pode ajudar a explicar a ocorrência frequente deste tipo de erro. Outra resolução que também revela dificuldades no reconhecimento de $\ln(2)$ como constante é a da aluna Soraia (figura 75).

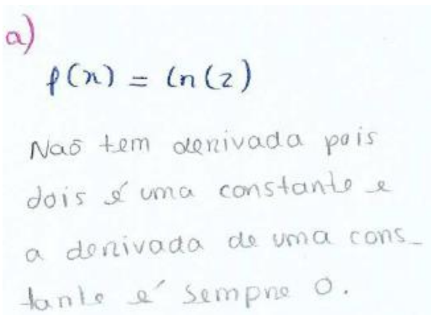


Figura 75 – Resolução de Soraia à alínea a) da questão 2 da tarefa 2

Ao analisarmos a resposta da aluna podemos claramente perceber que esta comete erros processuais (erros de substituição) e erros concetuais ao não interpretar a função como uma função constante. Face à resolução apresentada, depreende-se que a aluna considera que, dada uma constante a, a derivada da função $f(x) = g(a)$ é $g(0)$. Como no caso em análise (figura 75) o elemento zero não pertence ao domínio de g, a aluna concluiu que não existia função derivada.

Relativamente às restantes alíneas da questão 2 da tarefa 2, envolvendo as funções e^x e $\ln(x)$ os alunos, ao contrário do que tinha sucedido com a aprendizagem da derivada das funções polinomiais, racionais e com radicais, cometeram mais erros concetuais ao aplicar as regras de derivação. Repare-se na resolução apresentada pelas alunas Sandra e Lídia (figura 76).

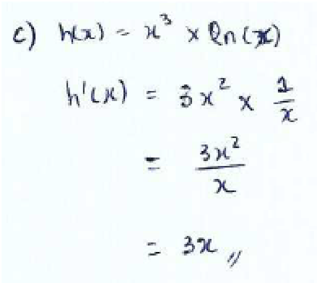


Figura 76 – Resolução de Sandra e Lídia à alínea c) da questão 2 da tarefa 2

As alunas aplicam a regra de derivação do produto de forma incorreta ao considerarem que a derivada do produto é o produto das derivadas. Ao longo desta tarefa, esta situação ocorreu com diversos alunos.

Todavia, ao analisarmos a figura anterior, podemos perceber que as alunas derivaram corretamente os fatores envolvidos no produto que lhes foi proposto. O único erro concetual consistiu na generalização da regra de derivação da soma às restantes operações. À semelhança do que ocorreu na alínea a) com a função $f(x) = \ln(2)$, também na alínea d) houve alunos que confundiram a derivada da função constante e^3 com a derivada da função e^x em $x = 3$ (figura 77).

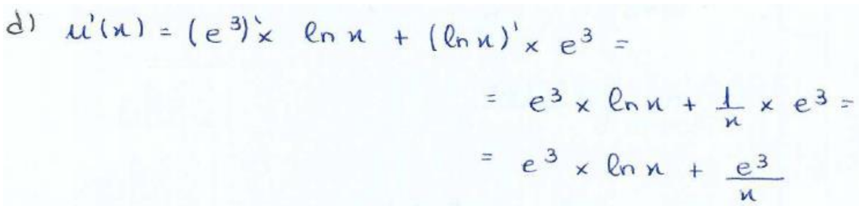


Figura 77 – Resolução de Sandra e Cátia à alínea d) da questão 2 da tarefa 2

Na última alínea da questão 2, mais uma vez surgiram erros processuais ao nível do cálculo envolvendo as potências com alguns alunos a não reconhecerem um caso notável e com isso cometem erros ao desenvolver o quadrado. Note-se a resolução do aluno Matias que parece ter considerado que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ (figura 78) e, para além disso, confunde $(\ln(x))^2$ com $\ln(x^2)$, substituindo $j(x)$ por $e^{2x} + \ln(x^2)$.

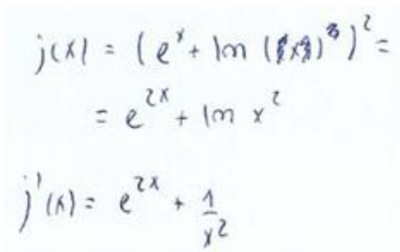


Figura 78 – Resolução de Matias à alínea e) da questão 2 da tarefa 2

Uma vez que ainda não tinha sido estudada a derivada da função composta, a derivação da função obtida requeria uma certa manipulação algébrica de forma ao aluno conseguir determinar a derivada da função, recorrendo apenas às regras de derivação já estudadas. Porém, o aluno não se apercebe disso e apresenta de imediato uma resposta errada. Perante a resposta do aluno, fica claro que aplicou corretamente a regra de derivação da soma, mas derivou erradamente cada parcela considerando que se $h(x) = f(g(x))$ então $h'(x) = f'(g(x))$. Seguindo a mesma estratégia do aluno Matias surge a resolução das alunas Madalena e Mafalda (figura 79).

$$
\begin{aligned}
j(x) &= (e^x + \ln(x))^2 \\
&= (e^x)^2 + (\ln(x))^2 + 2e^x \ln(x) \\
&= e^{2x} + (\ln x)^2 + 2e^x \ln(x)
\end{aligned}
$$

Figura 79 – Resolução de Madalena e Mafalda à alínea e) da questão 2 da tarefa 2

Ao contrário do aluno Matias, estas alunas conseguiram desenvolver corretamente o quadrado, mas não conseguiram derivar a expressão obtida revelando dificuldade em reconhecer as regras de derivação a utilizar. Por último, embora pouco frequente, surge um erro concetual em que os alunos derivam primeiro a base da potência e de seguida desenvolvem erradamente o quadrado (figura 80).

$$
\begin{aligned}
2.e.\quad & j(u) = (e^u + \ln(u))^2 \\
& j(u)' = \left(e^u + \frac{1}{u}\right)^2 = e^{2u} + \frac{1}{u^2}
\end{aligned}
$$

Figura 80 – Resolução de Rita e Inês à alínea e) da questão 2 da tarefa 2

A resolução apresentada acima revela não só erros concetuais nos processos de derivação como também revela erros processuais ao nível do cálculo.

Em suma, e tendo em conta as resoluções dos alunos apresentadas, verifica-se que a introdução das funções $\ln(x)$ e e^x no estudo das derivadas despoletou alguns erros por parte dos alunos, tanto a nível processual como a nível concetual. Além das dificuldades demonstradas ao trabalhar com a definição de derivada num ponto, estas questões também permitiram perceber que os alunos cometem diversos erros ao aplicar as regras de derivação quando as expressões algébricas em causa envolvem a função exponencial ou a função logarítmica. No entanto, os alunos reconhecem com bastante facilidade as derivadas de tais funções. Se no estudo das derivadas das funções polinomiais racionais e com radicais, a regra de derivação da potência foi a responsável pela maioria dos erros e dificuldades sentidas pelos alunos, no estudo nas derivadas das funções envolvendo exponenciais e logaritmos, a regra do produto também originou erros e dificuldades.

Embora a maioria dos alunos saiba determinar a expressão algébrica da função derivada através das regras de derivação, alguns destes não reconhecem funções constantes quando trabalham com as funções exponenciais e logarítmicas. Foi notória a falta de espírito crítico nestas situações, o que evidencia dificuldades no estudo da função exponencial e da função logarítmica.

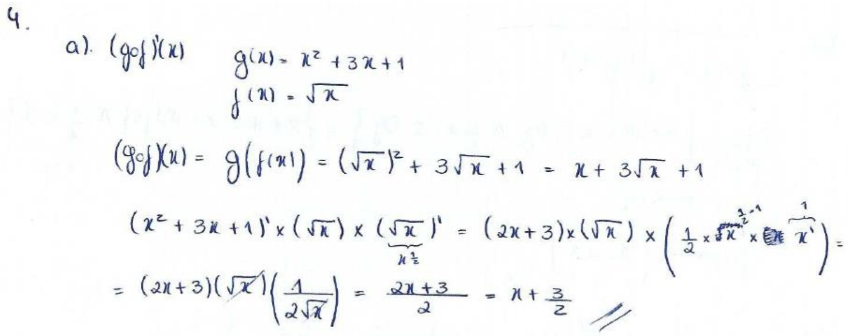
Função composta (Tarefa 3)

O teorema da derivada da função composta foi introduzido através da tarefa 3 e trabalhado ao longo de duas aulas. A tarefa 3 iniciava-se com duas questões, onde os alunos tiveram a oportunidade de rever a composição de funções. Se, por um lado, os alunos não revelaram dificuldades em determinar a expressão algébrica da função composta de duas funções dadas, o mesmo já não pode ser dito no que se refere à determinação do seu domínio. Regra geral, os alunos tinham a tendência de primeiro determinar a expressão algébrica e considerarem o domínio da expressão obtida como o domínio da função composta, não se apercebendo que este procedimento podia alterar o domínio. Outro ponto em que inicialmente os alunos revelaram alguma dificuldade foi na 'decomposição' de uma função, isto é, na identificação de funções cuja composição fosse a função que lhes era apresentada. Este aspeto revelou-se determinante na complexidade que muitos alunos atribuíram ao teorema da derivada da função composta.

Entre as várias questões da tarefa 3, selecionei a questão 4 de forma a tentar perceber que tipo de erros e dificuldades os alunos revelaram na exploração do teorema da derivada da função composta.

Entre os alunos que resolveram esta questão, o principal erro processual identificado nas suas resoluções diz respeito à notação usada no teorema da derivada da função composta. Nas alíneas a) e b), uma amostra significativa dos alunos interpretou $g'(f(x)) \times f'(x)$ como $g'(x) \times f(x) \times f'(x)$. Para além disso, nas alíneas c) e d), a principal dificuldade dos alunos, conforme foi mencionado anteriormente, foi a fatorização da função dada como composição de duas funções cujas derivadas soubessem determinar.

Na resolução das alunas Rita e Carlota (figura 81), podemos observar que as alunas determinaram a expressão algébrica da composição, embora não fosse pedido e aplicam incorretamente o teorema da derivada da função composta ao efetuar o produto de $g'(x)$ por $f(x)$ ao invés de calcularem $g'(f(x))$. Uma vez que as alunas determinaram a expressão algébrica da composição da função f com a função g, poderiam ter facilmente verificado o resultado a que chegaram e concluir que este não estava correto.



4.

a). $(g \circ f)'(x)$ $\quad g(x) = x^2 + 3x + 1$; $f(x) = \sqrt{x}$

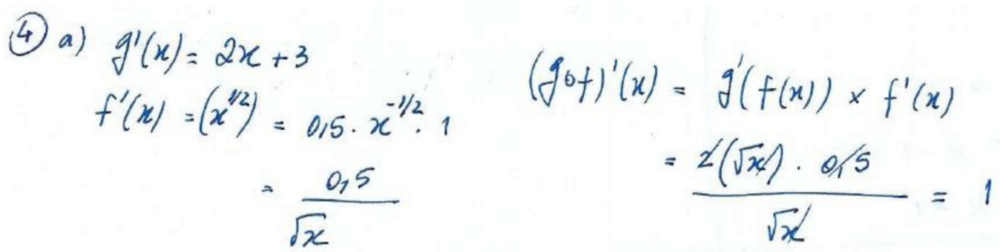
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} + 1 = x + 3\sqrt{x} + 1$

$(x^2 + 3x + 1)' \times (\sqrt{x}) \times \underbrace{(\sqrt{x})'}_{x^{\frac{1}{2}}} = (2x+3) \times (\sqrt{x}) \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{x}^{\frac{1}{2}-1} \times x'\right) =$

$= (2x+3)(\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2x+3}{2} = x + \frac{3}{2}$

Figura 81 – Resolução de Rita e Carlota à alínea a) da questão 4 da tarefa 3

Erros processuais (erros de substituição) também foram cometidos pelos alunos ao aplicarem o teorema da derivada da função composta. Repare-se na resolução dos alunos Dinis e José (figura 82), em que estes enunciaram corretamente o teorema, determinaram as derivadas necessárias, no entanto, cometeram erros de substituição no momento de calcular a imagem de $f(x)$ por g' ao esquecerem-se de somar 3.



4 a) $g'(x) = 2x + 3$

$f'(x) = (x^{1/2}) = 0{,}5 \cdot x^{-1/2} \cdot 1 = \frac{0{,}5}{\sqrt{x}}$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = \frac{2(\sqrt{x}) \cdot 0{,}5}{\sqrt{x}} = 1$

Figura 82 – Resolução de Dinis e José à alínea a) da questão 4 da tarefa 3

Estes alunos revelam alguma falta de espírito crítico ao não questionarem o resultado a que chegaram. Mais uma vez, é evidente que os alunos não atribuem significado à derivada. À semelhança do que aconteceu anteriormente no estudo de funções envolvendo radicais, estas também constituíram uma dificuldade para os alunos na aplicação do teorema da derivada da função composta. Ao analisarmos a resolução das alunas Elisa e Indira (figura 83) podemos verificar que estas aplicam corretamente o teorema, mas cometem erros concetuais ao derivar $\sqrt{x}$, afirmando que é $\frac{1}{2}$.

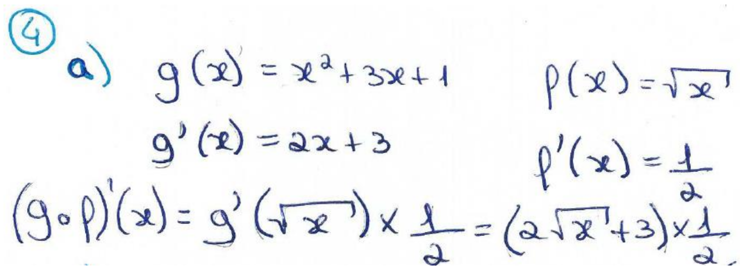


Figura 83 – Resolução de Elisa e Indira à alínea a) da questão 4 da tarefa 3

A cometer o mesmo erro surgem os alunos Telmo e Francisco (figura 84) que consideram $f'(x) = 0.5$. Estes alunos, para além de cometerem erros na aplicação das regras de derivação, cometeram também erros de interpretação, uma vez que apesar de enunciarem o teorema da derivada da função composta, não foram capazes de o aplicar.

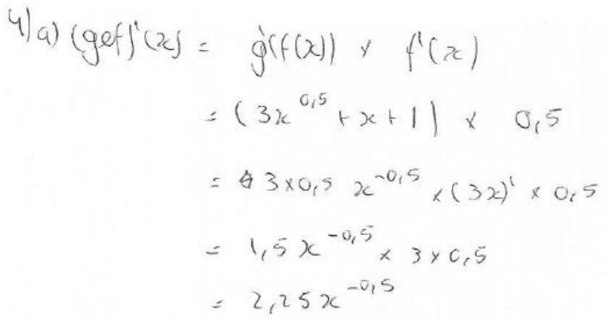


Figura 84 – Resolução de Telmo e Francisco à alínea a) da questão 4 da tarefa 3

Repare-se que estes alunos substituem $g'(f(x))$ pela expressão algébrica de $g(f(x))$ e no passo seguinte, substituem erradamente essa expressão pelo que aparentemente consideram ser a expressão da sua derivada. Na alínea c), apesar de ser pedido aos alunos que utilizassem o teorema da derivada da função composta para determinar a derivada pedida, um grupo de alunos recorreu a outras estratégias cometendo erros concetuais na aplicação das regras de derivação, na noção de potência e na derivada da função exponencial. O erro concetual que ocorreu com mais frequência nesta alínea foi precisamente os alunos considerarem que, como a derivada de e^x é a própria função, então dada uma função u a derivada de e^u é também a própria função e^u, conforme ilustra a resolução do aluno Matias (figura 85).

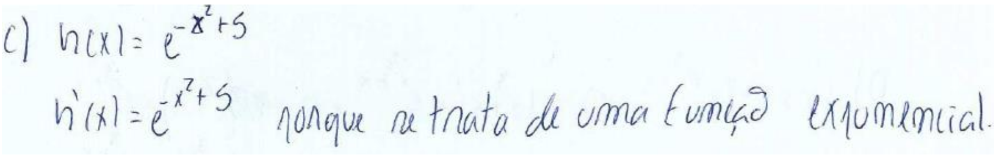


Figura 85 – Resolução de Matias à alínea c) da questão 4 da tarefa 3

Já as alunas Sílvia e Letícia (figura 86), para além de cometerem o mesmo erro concetual evidenciado por Matias, recorreram às regras operatórias da função exponencial para escrever a função dada como um produto e depois aplicaram incorretamente a regra de derivação do produto ao considerarem que a derivada do produto é o produto das derivadas. Além disso, cometeram um erro processual associado à notação uma vez que igualaram a função derivada à função original.

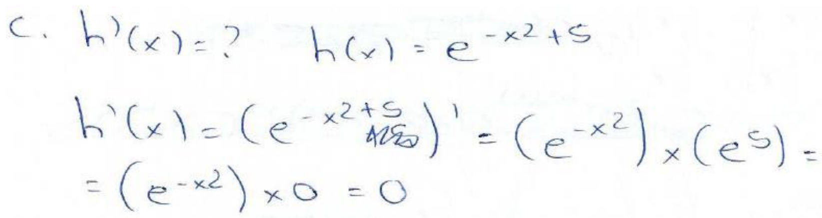


Figura 86 – Resolução de Sílvia e Letícia à alínea c) da questão 4 da tarefa 3

Nesta resolução (figura 86) podemos observar que este par de alunas concluiu que a derivada que lhes era pedida é a função nula, não revelando espírito crítico em relação ao resultado obtido.

Por fim, outro erro bastante comum na alínea c) foi a derivação de uma função da forma $e^{u(x)}$ com recurso à regra de derivação da potência, como se $u(x)$ se tratasse de uma constante racional. A resolução apresentada abaixo (figura 87) é um exemplo ilustrativo deste tipo de erro concetual.

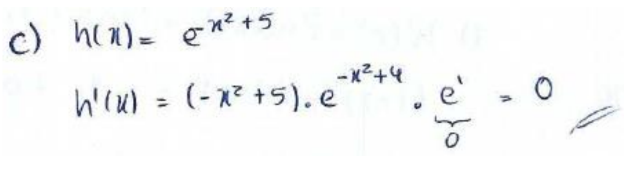


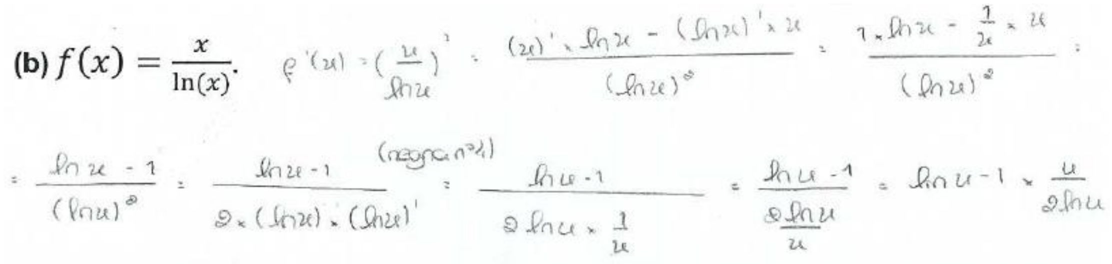
Figura 87 – Resolução de Rita e Carlota à alínea c) da questão 4 da tarefa 3

Como foi a primeira questão que os alunos resolveram após contactarem com o teorema da derivada da função composta, era expectável que alguns destes não o usassem corretamente, embora a maioria dos alunos que resolveu a questão o tenha feito. As principais dificuldades e erros dos alunos, ao utilizarem o teorema da derivada da função composta, estavam relacionados com a incompreensão relativamente à notação presente no teorema, embora cometessem também alguns erros relacionados com a aplicação de outras regras de derivação.

Questão de aula 2

As questões presentes na questão de aula 2 vieram demonstrar que os alunos, à semelhança do que aconteceu com a regra de derivação do produto, tendem a cometer erros nas regras de derivação do quociente.

As dificuldades que surgiram nestas duas alíneas dizem respeito a erros de interpretação que os alunos revelaram na regra de derivação do quociente. Estas dificuldades podem constituir um obstáculo para os alunos na determinação de derivadas deste tipo de funções. Observe-se a resolução apresentada pela aluna Rita (figura 88).



(b) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)' \times \ln x - (\ln x)' \times x}{(\ln x)^2} = \frac{1 \times \ln x - \frac{1}{x} \times x}{(\ln x)^2} =$

$= \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{2 \times (\ln x) \times (\ln x)'} \overset{\text{(regra nº2)}}{=} \frac{\ln x - 1}{2 \ln x \times \frac{1}{x}} = \frac{\ln x - 1}{\frac{2 \ln x}{x}} = \ln x - 1 \times \frac{x}{2 \ln x}$

Figura 88 – Resolução de Rita à alínea b) da questão de aula 2

A aluna aplica a regra de derivação do quociente e determina corretamente as derivadas das funções intervenientes, no entanto, substitui depois na expressão obtida o denominador, $(\ln(x))^2$, pela respetiva derivada. A aluna sente necessidade de aplicar a regra de derivação da potência e deriva o denominador, apesar de neste passo não constar a regra de derivação. Este erro de interpretação revela que a aluna não compreendeu na totalidade a regra de derivação do quociente.

Ainda ao nível de erros de interpretação, a resolução do aluno Dinis (figura 89) evidencia que, ao aplicar a regra de derivação do quociente, o aluno considera indiferente a ordem dos termos do numerador, efetuando primeiro o produto do numerador pela derivada do denominador ao qual subtrai o produto do denominador pela derivada do numerador, chegando assim ao simétrico do estipulado na regra de derivação do quociente.

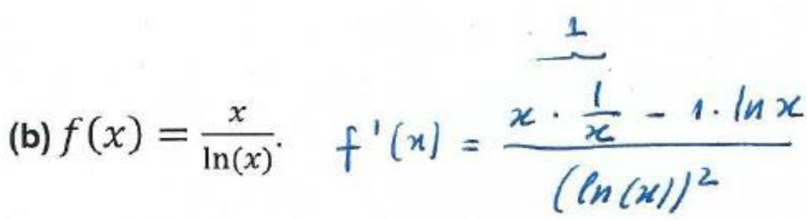


Figura 89 – Resolução de Dinis à alínea b) da questão de aula 2

Conforme já foi mencionado anteriormente, também um grupo de alunos conjetura incorretamente a regra de derivação do quociente. Exemplo disso é a resolução da Indira (figura 90) em que a aluna considera que a derivada de uma função apresentada como um quociente é a derivada do numerador a dividir pela derivada do denominador. Apesar do erro cometido ao aplicar a regra de derivação do quociente, a aluna deriva corretamente o numerador e o denominador.

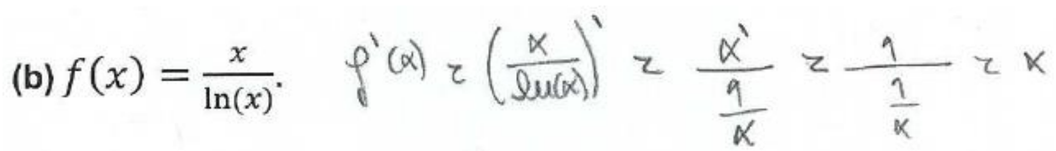


Figura 90 – Resolução de Indira à alínea b) da questão de aula 2

Entre os erros processuais apresentados pelos alunos ao resolverem a alínea a) da questão de aula 2, surgem também erros de cálculo, como se pode exemplificar através da resolução elaborada pela aluna Mariana (figura 91).

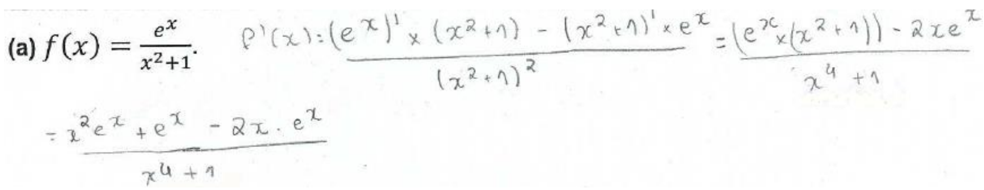


Figura 91 – Resolução de Mariana à alínea a) da questão de aula 2

As potências continuam a revelar-se difíceis para os alunos, pois a aluna aplica corretamente a regra de derivação do quociente, no entanto ao tentar simplificar o denominador, erra ao desenvolver o quadrado da soma considerando que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

A análise destas duas alíneas permite verificar que a grande maioria dos alunos deriva corretamente uma função apresentada como um quociente de funções. Foi possível perceber que os alunos, em geral, conseguem aplicar sem grande dificuldade a regra de derivação do quociente, embora, por vezes, cometam alguns erros processuais ao nível do cálculo. No que diz respeito a erros concetuais, os alunos apresentam alguns erros na interpretação da regra de derivação do quociente bem como algumas conjeturas erradas que conduzem a resultados incorretos.

Função definida por ramos (Tarefa 4)

No cálculo da derivada de uma função definida por ramos, a maioria dos alunos limitou-se a aplicar as regras de derivação para determinar a derivada de cada uma das funções à custa das quais f é definida, sendo muito poucos os que deram atenção ao ponto em que a função muda de ramo. Na resolução da Maria, figura 92, a aluna deriva corretamente as funções envolvidas na definição de f, porém, assume incorretamente que f é derivável em $x = 0$ e que $f'(0)$ é dada pela derivada em $x = 0$ da função que define o segundo ramo de f.

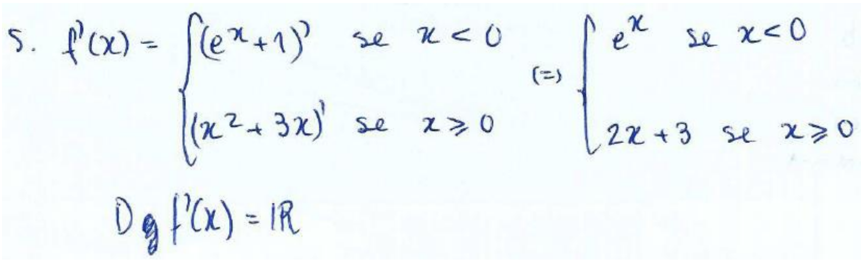


Figura 92 – Resolução de Maria à alínea a) da questão 5 da tarefa 4

Na discussão desta questão no quadro, e após serem questionados se existiria ou não derivada em $x = 0$, os alunos começaram a relacionar o estudo de tal derivada com a continuidade, afirmando alguns deles que a função para ter derivada num ponto tem de ser contínua nesse ponto. Outros alunos acabaram por sugerir que poderíamos também recorrer à definição de derivada num ponto para verificar se a função é ou não derivável no ponto $x = 0$.

Posto isto, penso que as dificuldades demonstradas inicialmente com o estudo da derivada de uma função definida por ramos podem ser explicadas pelo pouco contacto que os alunos têm com este tipo de funções.

Capítulo 6

Conclusões

Este capítulo encerra o trabalho desenvolvido ao longo deste relatório. Começo por elaborar uma síntese do estudo que realizei e, de seguida, apresento as respetivas conclusões, tendo como base a análise de dados efetuada no capítulo anterior com o objetivo de responder às questões de investigação inicialmente formuladas. No final do capítulo, depois de uma breve reflexão sobre o significado e a importância deste estudo para o meu desenvolvimento pessoal e profissional, apresentarei algumas questões que ficaram em aberto e que poderão ser alvo de futuras investigações.

6.1. Síntese do estudo

Este estudo teve como principal objetivo compreender, através de um estudo sobre os seus erros e dificuldades, como é que alunos do 12.º ano aprendem a derivada de funções, dando particular atenção à derivada da função composta. Neste sentido, foram formuladas as seguintes questões de investigação:

- Como procedem os alunos na determinação de derivadas de funções? Em particular, que estratégias adotam na determinação dessas derivadas?
- Que erros cometem e que dificuldades manifestam os alunos quando determinam a derivada de uma função?

A intervenção letiva em que se baseou este estudo realizou-se na Escola Secundária da Ramada, ao longo de cinco aulas de 90 minutos, subordinadas ao tema "Cálculo Diferencial", nos tópicos da função derivada (regras de derivação) e da função composta e sua derivada. Relativamente aos participantes visados neste estudo, são alunos de uma turma a frequentar o 12.º ano de escolaridade do ano letivo de 2015/2016. A turma em questão era composta por alunos interessados em aprender Matemática, participativos e com bom aproveitamento na disciplina. A estratégia de ensino implementada pela professora da turma recaía sobretudo no trabalho autónomo e no trabalho de pares.

Dada a importância do ensino das derivadas para a disciplina de Matemática e a sua aplicabilidade a outras áreas das ciências, na planificação da unidade didática procurei elaborar tarefas diversificadas que possibilitassem aos alunos realizar aprendizagens com compreensão.

Para fundamentar o trabalho realizado em contexto escolar e a análise dos dados relativos a esse trabalho, tive em conta as orientações curriculares vigentes para o nível de ensino lecionado e a literatura de referência, no que respeita ao ensino do conceito de derivada. Assim, na secção do enquadramento curricular e didático, abordo alguns temas fundamentais como a aprendizagem do conceito de derivada, onde apresento as noções de conceito imagem e conceito definição de David Tall e Shlomo Vinner (1981), as tarefas matemáticas e a sua natureza (Ponte, 2005), as representações matemáticas de funções e algumas das dificuldades e erros já identificados na aprendizagem das derivadas.

Relativamente à metodologia, os instrumentos de recolha de dados utilizados foram as produções escritas dos alunos, em concreto, aquando da resolução das várias tarefas propostas durante a lecionação da unidade didática. A recolha de dados teve também por base a observação participante, complementada com notas de campo e gravações em vídeo das aulas, autorizadas pelos Encarregados de Educação dos alunos da turma afeta ao estudo.

6.2. Principais conclusões

Este estudo teve como ponto de partida a formulação das duas questões de investigação mencionadas acima. Desta forma, neste subcapítulo apresento as principais conclusões deste estudo, articulando-as com o enquadramento teórico, procurando dar resposta às perguntas inicialmente formuladas e refletir sobre elas.

6.2.1. Como procedem os alunos na determinação de derivadas de funções? Em particular, que estratégias adotam na determinação dessas derivadas?

A análise dos dados recolhidos permitiu identificar uma diversidade de estratégias que os alunos adotaram na determinação de derivadas de funções. As estratégias de resolução apresentadas pelos alunos variaram de acordo com a fase do estudo das derivadas em que se encontravam e foram evoluindo no decorrer da lecionação das aulas. Antes de proceder à apresentação das principais conclusões relativamente às estratégias utilizadas pelos alunos, quero destacar a excelente preparação que os alunos traziam do ano letivo anterior, relativamente à temática das derivadas, o que lhes permitiu, desde cedo, apresentar estratégias ricas e expeditas na determinação das derivadas de funções.

Na tarefa inicial, onde era pedido para derivar polinómios de grau menor ou igual a três, os alunos começaram por usar estratégias de resolução recorrendo à aplicação das regras de derivação que já conheciam do 11.º ano e que revelaram dominar. No que diz respeito ao cálculo das derivadas de funções polinomiais de grau superior a três, a estratégia seguida pela maioria dos alunos foi generalizar as regras de derivação que conheciam, não tendo sido necessário enunciar a regra de derivação da potência de expoente natural para que esta começasse a surgir nas suas resoluções. Este aspeto evidencia a capacidade de generalizar por parte dos alunos, ao mesmo tempo que formulavam conjeturas e desenvolviam o seu raciocínio matemático. Numa fase inicial, foi possível observar alguma falta de rigor na escrita matemática dos alunos pois, por exemplo, muitas vezes igualavam a função à sua derivada. Esta falha pode ser explicada em parte pelo pouco contacto que os alunos tiveram anteriormente com a função derivada aliado ao facto de alguns alunos não dominarem o conceito de derivada e, portanto, limitarem-se a aplicar um conjunto de regras sem verdadeira compreensão. Com o avançar do estudo das derivadas, através da análise das suas respostas, pude constatar que os alunos assimilaram bem e incorporaram com bastante facilidade as regras de derivação da soma, do produto e da potência nas suas estratégias. Este facto pode explicar-se pelas regras de derivação "corresponderem a uma técnica algébrica que não exige uma compreensão concetual" (Vasques, 2015, p. 78). No entanto, com o estudo da regra de derivação do produto, alguns alunos sentiram a necessidade de começar a recorrer a letras para representar os fatores envolvidos, onde estas desempenharam um papel auxiliar nas estratégias que os alunos passaram a apresentar. Estas estratégias auxiliares foram essenciais para apoiar a compreensão das regras de derivação por parte dos alunos e contribuíram para que a maioria dos alunos determinasse com sucesso as derivadas das funções que foram sendo propostas ao longo das tarefas. Ainda na fase do estudo da regra de derivação do produto, há a destacar um aluno que revelou bastante êxito na compreensão da regra de derivação em causa, na medida em que foi capaz de generalizar a regra do produto a n fatores com a estratégia que apresentou. Relativamente à aprendizagem da regra de derivação da potência, esta veio introduzir maior rigor de escrita na determinação das derivadas por parte dos alunos. Se até ao momento os alunos não identificavam a regra de derivação que estavam a utilizar ou não indicavam explicitamente os seus passos no processo de derivação, com a introdução da regra de derivação da potência as estratégias apresentadas pelos alunos passaram a apresentar uma escrita matemática mais cuidada e rigorosa ao justificarem todos os passos efetuados e a indicarem a regra de derivação que estavam a aplicar. Esta alteração na metodologia de trabalho dos alunos pode ser explicada pela maior complexidade apresentada pela regra de derivação da potência em comparação com as regras de derivação estudadas anteriormente (soma e produto). Outro possível motivo por detrás desta melhoria e alteração na escrita matemática presente nas estratégias dos alunos terá sido a insistência da minha parte para que indicassem as regras e justificassem os passos que estavam a efetuar no processo de derivação, uma vez que foi a regra de derivação da potência aquela que suscitou maiores dificuldades e originou grande parte dos erros apresentados pelos alunos, nomeadamente ao esquecerem-se de derivar a base da potência.

No que se refere à derivação de funções polinomiais, foi notório que os alunos sentiram mais dificuldades quando o polinómio correspondente continha coeficientes irracionais ou fracionários. Estas dificuldades, que serão exploradas na secção seguinte, levaram a que grande parte dos alunos se desviasse da sua estratégia habitual (aplicação direta das regras de derivação) para derivar este tipo de funções. Os alunos sentiram necessidade de efetuar cálculos auxiliares para derivar as parcelas que continham tais coeficientes, evidenciando não estarem familiarizados com funções polinomiais que contenham coeficientes irracionais ou fracionários, o que levou a que a derivada deste tipo de funções se tornasse um procedimento mais complexo e moroso. Estas estratégias mais demoradas e menos ágeis surgiram também quando a função a derivar envolvia simultaneamente funções polinomiais e funções radicais. Ao analisar as produções escritas efetuadas pelos alunos, pude verificar que os alunos recorreram à separação da função dada em duas funções e derivaram isoladamente cada uma delas, somando no final as derivadas obtidas. Esta estratégia pode ser explicada devido ao pouco contacto que os alunos têm com funções envolvendo radicais.

No que diz respeito à regra de derivação do quociente, esta surgiu pela primeira vez numa estratégia apresentada por um aluno, o que demonstra curiosidade e perspicácia da sua parte ao encontrar a regra de derivação que faltava estudar. O estudo desta regra de derivação veio alterar a forma como os alunos usavam o seu conhecimento para determinar a derivada de uma função apresentada como um quociente. Enquanto inicialmente os alunos utilizavam como estratégia a transformação da expressão algébrica original (quociente de funções) num produto envolvendo potências e aplicavam as regras de derivação do produto e da potência, a regra de derivação do quociente veio introduzir uma maior agilidade e rapidez aos processos de derivação inicialmente apresentados pelos alunos.

Na fase do estudo da derivada das funções e^x e $\ln(x)$, o principal objetivo era perceber se os alunos mobilizaram o seu conhecimento das derivadas de e^x e $\ln(x)$ nas suas estratégias. A maioria dos alunos mostrou mobilizar adequadamente os seus conhecimentos relativos às regras de derivação já estudadas, conseguindo articulá-las com as funções e^x e $\ln(x)$. Regra geral, os alunos conseguem determinar corretamente as derivadas de funções que envolvam e^x ou $\ln(x)$, embora em alguns casos apresentem estratégias pouco expeditas. Por exemplo, os alunos tendem a não reconhecer constantes quando estas envolvem exponenciais ou logaritmos, levando-os, em certos casos, a aplicar a regra de derivação do produto quando não é necessário.

Na unidade didática, foi também estudado o teorema da derivada da função composta e a derivação de uma função definida por ramos. Relativamente à função composta, a estratégia apresentada pela maioria dos alunos para a derivar foi a esperada: aplicação do teorema da derivada da função composta. No entanto, alguns alunos começavam por fazer uma tentativa de manipulação das expressões algébricas das funções de forma a evitar aplicar o teorema. Esta animosidade ao teorema da derivada da função composta deveu-se talvez ao maior grau de complexidade que este apresenta face às restantes regras de derivação e à dificuldade de interpretação do mesmo por parte de alguns alunos. No primeiro contacto com o teorema, alguns alunos interpretavam a composição $g'(f(x))$ como o produto $g'(x) \times f(x)$, dando origem a diversos erros. No entanto, à medida que os alunos se foram familiarizando com a notação e nomenclatura do teorema, foi notória a evolução das suas estratégias passando a recorrer ao teorema sempre que necessário e sem grandes dificuldades.

Já no estudo da derivada de uma função definida por ramos, o objetivo era perceber se os alunos mobilizavam o conhecimento necessário para determinar a derivada dessa função, nomeadamente para justificar se a função admitia ou não derivada no ponto em que muda de ramo. A análise das resoluções dos alunos veio revelar que estes derivam facilmente as funções que definem cada um dos ramos da função. A estratégia que predominou nas resoluções apresentadas pelos alunos foi a aplicação das regras de derivação à restrição da função a cada um dos ramos. Este procedimento levou a que, regra geral, os alunos não se apercebessem da necessidade de analisar isoladamente a existência de derivada no ponto em que a função muda de ramo. Relativamente aos alunos que analisaram a existência de derivada no ponto de mudança de ramo, uns começaram por recorrer nas suas estratégias à definição de derivada lateral, e outros optaram por estudar a continuidade nesse ponto. Uma vez que a função em causa não era contínua no ponto de mudança de ramo, estudar a continuidade revelou-se uma estratégia válida.

No que se refere às representações utilizadas pelos alunos na determinação de derivadas de funções, destaque para a representação algébrica que prevaleceu durante o estudo das regras de derivação. No entanto, os alunos tiveram liberdade para a combinar com outro tipo de representações de forma a adquirirem a capacidade de selecionar e a flexibilidade de optarem pela representação que melhor os clarificasse e ajudasse a justificar os resultados pretendidos (Dreyfus, 2002). No caso da representação numérica, esta surgiu no estudo de alguns casos particulares de derivadas de funções, como por exemplo na derivada de $\ln(2)$ ou na aplicação do teorema da derivada da função composta no cálculo da derivada num ponto em concreto. Já a representação gráfica, apesar de não ter sido muito explorada no decorrer deste estudo, surgiu através da curiosidade dos alunos em visualizar a representação gráfica de algumas das funções que obtinham através dos processos de derivação. Para tal, os alunos recorriam à ajuda da calculadora gráfica para obter uma imagem da função que a representação algébrica não proporcionava. Por último, a representação algébrica permitiu aos alunos manipular e transformar as expressões algébricas das funções e aplicar as regras de derivação em estudo, assumindo um papel de extrema importância na definição dos conceitos em estudo ao permitir aos alunos efetuar os vários processos de generalização ao mesmo tempo que lhes permitia justificar as suas conjeturas.

Em suma, as estratégias usadas pelos alunos revelam que estes mobilizaram os seus conhecimentos relativos à utilização das regras de derivação, sendo capazes de manipular expressões algébricas e funções de forma a reconhecerem a regra de derivação a aplicar, nas estratégias que apresentaram. Mobilizaram também outros conhecimentos adquiridos em anos anteriores, como por exemplo as regras operatórias das potências, para determinarem as derivadas pedidas nas diversas tarefas.

6.2.2. Que erros cometem e que dificuldades manifestam os alunos quando determinam a derivada de uma função?

Começo por fazer referência a alguns tópicos do programa de Matemática que, não fazendo parte da unidade didática que lecionei, revelaram-se obstáculos na aprendizagem da derivada de uma função pelos alunos, atendendo às dificuldades que revelaram sobre eles:

- Operações envolvendo potências;
- Potências de expoente negativo;
- Funções envolvendo radicais;
- Polinómios com coeficientes não inteiros.

Algumas das dificuldades reveladas pelos alunos deste estudo, ao derivar uma função, já tinham sido identificadas por Moura (2014) no seu estudo. A autora já tinha identificado que os alunos cometem erros ao nível processual, relacionados com a escrita matemática e de simplificação de expressões, sobretudo quando os alunos trabalham com expressões fracionárias.

No que se refere à derivada de funções polinomiais, a grande maioria dos alunos revela saber aplicar as regras de derivação necessárias, cometendo na generalidade erros processuais na simplificação de expressões. No que diz respeito às dificuldades sentidas pelos alunos ao derivar este tipo de funções, destaque-se a presença de coeficientes irracionais e fracionários que comprometeram o trabalho dos alunos ao nível do cálculo.

Na fase inicial do estudo das derivadas das operações (derivação da soma, do produto e da potência), é a regra da potência que gerou maiores dificuldades nos alunos dando origem a um número significativo de erros, dos quais se destaca o erro concetual que os alunos cometem ao não derivar a base. No caso em que a base da potência é x, os alunos em geral não revelam dificuldades na aplicação da regra da potência. Já no caso em que a base é uma outra função, são evidentes as dificuldades sentidas pelos alunos. Quando as potências envolviam expoentes negativos, os alunos ao aplicarem as regras de derivação sem as indicarem explicitamente, cometeram com alguma frequência erros processuais de substituição e erros concetuais de aplicação das regras de derivação.

Após o estudo das regras de derivação da soma, produto e potência, introduziram-se as funções $\ln(x)$ e e^x no estudo das derivadas. Foi pedido aos alunos que descobrissem, com base na definição de derivada de uma função num ponto, qual a derivada da função e^x e qual a derivada da função $\ln(x)$ em cada ponto dos respetivos domínios. Pela análise das resoluções dos alunos, verifica-se que estes cometeram erros ao trabalhar com a definição de derivada de uma função num ponto, nomeadamente erros processuais ao substituir o objeto numa determinada função. Foi possível verificar que alguns alunos não distinguem o papel de transformação de uma função. Ao determinar a imagem de $x + h$ por f, os alunos por vezes consideraram primeiramente a imagem de x por f adicionando-lhe à posteriori h. Este erro pode ser explicado pois para alguns alunos "a variável é somente a letra x e consideram que a imagem da soma desta letra com outra resulta da imagem de x adicionada com a outra letra" (Moura, 2014, p. 35). Relativamente aos erros concetuais, os alunos mostraram não reconhecer funções constantes quando trabalham com as funções exponenciais e logarítmicas, por exemplo, não reconheceram $\ln(2)$ como sendo uma constante. Foi notória a falta de espírito crítico nestas situações, o que evidencia dificuldades no estudo destas funções. Se nas funções polinomiais, racionais e com radicais, a regra de derivação da potência foi a responsável pela maioria dos erros e dificuldades sentidas pelos alunos, no estudo das derivadas das funções envolvendo exponenciais e logaritmos, a regra do produto também originou erros concetuais. Nomeadamente, existiu um grupo de alunos que considerou a derivada do produto como sendo o produto das derivadas. Para além disso, o não reconhecimento de constantes perante funções exponenciais e logarítmicas, levou a que muitas vezes os alunos utilizassem desnecessariamente a regra de derivação do produto e derivassem erradamente fatores constantes.

Relativamente à regra de derivação do quociente, a grande maioria dos alunos derivou corretamente uma função apresentada como um quociente de funções. Foi possível perceber que os alunos, em geral, conseguiram aplicar sem grande dificuldade a regra de derivação do quociente, embora, por vezes, cometessem alguns erros processuais ao nível do cálculo. No que diz respeito a erros concetuais, os alunos apresentaram alguns erros na interpretação da regra de derivação do quociente, considerando por vezes indiferente a ordem dos termos do numerador, efetuando primeiro o produto do numerador pela derivada do denominador ao qual subtraem o produto do denominador pela derivada do numerador, chegando assim ao simétrico do estipulado na regra de derivação do quociente. Foi também a regra que deu origem a mais conjeturas erradas, como por exemplo, considerarem que a derivada do quociente é o quociente das derivadas. Este facto não é surpreendente, uma vez que entre as regras de derivação da soma, produto e quociente, é a última que mais se distância da 'linearidade' que os alunos habitualmente esperam. Para além disso, e ao contrário do que acontece com a regra de derivação do produto, envolve operações que não são comutativas.

Com a lecionação do teorema da derivada da função composta, os alunos tiveram oportunidade de rever a composição de funções. Se, por um lado, os alunos não revelaram dificuldades em determinar a expressão algébrica da função composta de duas funções dadas, o mesmo já não pode ser dito no que se refere à determinação do seu domínio. Regra geral, os alunos tinham tendência para determinar em primeiro lugar a expressão algébrica e considerarem o domínio da expressão obtida como o domínio da função composta, não se apercebendo que este procedimento podia alterar o domínio. Outro ponto em que inicialmente os alunos revelaram alguma dificuldade foi na 'decomposição' de uma função, isto é, na identificação de funções cuja composição fosse a função que lhes era apresentada. Vários autores já tinham referido esta 'decomposição' como a grande responsável pelas dificuldades sentidas pelos alunos na derivação de uma função composta (Clark et al., 1997, citados por Uygur & Özdas, 2005).

O principal erro processual identificado nas resoluções dos alunos diz respeito à notação usada no teorema da derivada da função composta. Uma parte significativa dos alunos interpretou $g'(f(x)) \times f'(x)$ como $g'(x) \times f(x) \times f'(x)$. Relativamente aos erros concetuais que surgiram com o estudo do teorema da derivada da função composta, destaque para o erro em que alguns alunos consideraram que, como a derivada de e^x é a própria função, então dada uma função u a derivada de e^u é também a própria função e^u. Outro erro bastante comum na derivação de uma função da forma $e^{u(x)}$ foi o recurso à regra de derivação da potência, como se $u(x)$ se tratasse de uma constante racional.

Por último, foi proposto o estudo da derivada de uma função definida por ramos. A maioria dos alunos limitou-se a aplicar as regras de derivação para determinar a derivada de cada uma das funções à custa das quais f é definida, cometendo um erro concetual ao não estudarem o ponto em que a função muda de ramo.

6.3. Reflexão final

Fazendo uma reflexão sobre o trabalho realizado, posso afirmar que este foi uma mais-valia para a minha formação, constituindo uma experiência enriquecedora tanto a nível profissional como a nível pessoal.

Durante o período de estágio, tive o privilégio de trabalhar com uma professora cooperante dedicada, empenhada e com muita experiência na profissão e tive a sorte de fazer a prática de ensino supervisionada numa turma participativa e empenhada na aprendizagem da Matemática, numa escola dinâmica e com um ambiente acolhedor.

De um modo geral, julgo que a lecionação correu bem. A corroborar este sentimento surge o facto de que os alunos assimilaram bem os processos e as ideias mais importantes na determinação de derivadas de funções, o que ficou comprovado com os resultados que obtiveram no final do segundo período e na facilidade e destreza com que passaram a determinar derivadas sempre que foi necessário daí em diante. Para além disso, a turma mostrou-se bastante recetiva e gerou-se uma boa interação professor-aluno e aluno-professor, o que contribuiu para as aprendizagens dos alunos e para a sua participação durante as aulas, ao mesmo tempo que permitiu que me sentisse mais confiante e entusiasmado com o meu novo papel de professor. Destaco ainda um aspeto particularmente positivo durante a minha lecionação que foi a ida de uma grande diversidade de alunos ao quadro e a interação que se gerou, a qual contribuiu significativamente para as suas aprendizagens ao colocarem as suas dúvidas e confrontarem as suas ideias com as dos colegas. Considero também que as tarefas propostas aos alunos na unidade de ensino que lecionei foram desafiantes e proporcionaram verdadeiras situações de aprendizagem.

A elaboração das tarefas, embora tenha sido uma experiência nova, foi algo que me deu muito gosto e revelou-se, para mim, numa prática bastante enriquecedora e gratificante e que contribuiu para o desenvolvimento de competências fundamentais enquanto professor. Considero que este foi um trabalho muito bem conseguido e que se revelou frutífero para as aprendizagens dos alunos. A natureza das tarefas que propus juntamente com a integração de alguma inovação no processo de ensino e aprendizagem das regras de derivação fomentou nos alunos grande interesse, empenho e participação no desenvolvimento da unidade didática. Penso que a estrutura das tarefas, partindo do estudo de casos particulares para o estabelecimento de conjeturas em relação às regras de derivação e terminando com exercícios de consolidação de conhecimentos, contribuiu para uma aprendizagem com compreensão por parte dos alunos. Regra geral, considero boa a escolha dos exemplos nas várias tarefas, na medida em que permitiram alcançar os vários objetivos de aprendizagem ao longo da sua aplicação. Para além disso, as tarefas foram pensadas para trabalho a pares e para gerarem vários momentos de discussão em grande grupo, o que gerou uma forte partilha de ideias e os momentos criados em turma para discussão e respetivas conclusões acerca das tarefas revelaram-se pontos fortes no processo de ensino e aprendizagem.

A planificação e a preparação das aulas foi outro dos aspetos significativos da minha aprendizagem e um dos pontos fortes do trabalho desenvolvido. Este trabalho foi essencial nomeadamente para desenvolver a minha capacidade de antever cenários possíveis de ação e decisões, preparando-me para as aulas a lecionar.

No decorrer das aulas, efetuei registos de algumas das minhas principais dificuldades, em concreto, a gestão do tempo e do ritmo da aula, mas também no que se refere à organização do quadro e à tomada de decisões em momentos determinantes da aula. No entanto, as reflexões que foram elaboradas após as aulas lecionadas foram fundamentais para melhorar e modificar determinados aspetos da minha postura em contexto de sala de aula, permitindo-me evoluir enquanto professor.

Em sala de aula, julgo que o meu discurso foi claro e articulado e a linguagem que utilizei foi adequada ao público de 12.º ano, uma vez que procurei não ser demasiado formal, mas ao mesmo tempo, não descorei do rigor da comunicação matemática. As minhas intervenções foram pautadas pela orientação dos alunos, mas dando-lhes espaço para eles serem os agentes da construção do seu conhecimento. Para a lecionação das minhas aulas, a aposta fundamental passou pela sequência de tarefas de exploração mencionadas anteriormente. Considero que esta estratégia aliada aos vários momentos de discussão em grande grupo e de consolidação de conhecimentos fez com que os alunos se tornassem realmente elementos ativos na sua própria aprendizagem. Importante mencionar também os momentos de reflexão que os alunos realizaram em relação aos vários conceitos lecionados, resultantes de toda a atividade que estes concretizaram ao longo das minhas aulas (Ponte, 2005). Em minha opinião, consegui contornar com bastante sucesso a ‘forma tradicional’ como as regras de derivação são ensinadas e transmitidas aos alunos. Ao invés de simplesmente enunciar as regras, implementei um processo de descoberta e exploração em torno das tarefas que desenvolvi, o que se revelou uma estratégia acertada pois despertou nos alunos um interesse acrescido pelo tema em estudo e proporcionou situações de verdadeira aprendizagem. Devo referir também que, ao serem os alunos a conjeturar e generalizar as regras de derivação, todo o processo de memorização das mesmas se tornou menos penoso e mais natural na medida em que estas surgiram do seu próprio trabalho e fruto do seu pensamento matemático.

Os momentos de reflexão e a partilha com os professores foram fundamentais para a minha aprendizagem e evolução enquanto professor, pois permitiram-me corrigir determinados aspetos que correram menos bem com as aulas lecionadas e em relação aos alunos.

No que diz respeito aos alunos que participaram neste estudo, estes realizaram as tarefas com motivação e empenho, em momentos de partilha de ideias e de discussão, a partir dos quais se retiraram conclusões que se revelaram fundamentais no processo de aprendizagem dos alunos.

Os alunos mostraram-se sempre disponíveis e motivados para a aprendizagem, colocando questões e dúvidas de forma desinibida, o que me ajudou a desenvolver a capacidade de resposta ao improviso, contribuindo, de certa forma, para o meu crescimento enquanto professor de Matemática.

No que concerne a este trabalho de investigação, este exigiu de mim uma reflexão profunda acerca das minhas escolhas quanto à unidade didática a lecionar. Devo, todavia, confessar que senti algumas dificuldades, sobretudo derivado à minha inexperiência neste tipo de trabalho de cariz investigativo. Neste momento foi de extrema importância o apoio dos orientadores, pela partilha, cooperação e sugestões.

A análise de dados foi uma das partes do trabalho que mais gostei de desenvolver na medida em que exigiu de mim selecionar os dados mais relevantes perante uma grande quantidade de dados recolhidos. Após a seleção, a análise de dados foi uma fase fundamental deste trabalho e da minha aprendizagem, pois levou-me a descobrir o modo como os alunos aprendem os conceitos e os utilizam para resolver as tarefas propostas. Do mesmo modo, a análise das resoluções dos alunos permitiu-me perceber as suas dificuldades, levando-me a refletir em estratégias que me permitissem melhorar a minha prática profissional, no sentido de os ajudar na aprendizagem.

Este estudo pretendia analisar como é que alunos do 12.º ano aprendem a derivada de funções, dando particular atenção à derivada da função composta. Um estudo desta natureza apresenta algumas limitações que se prendem com o contexto em que o mesmo foi desenvolvido. Por um lado, ao nível das representações, o tipo de tarefas e metodologia de ensino aplicado levou a que estas fossem essencialmente algébricas.

Deste modo, seria interessante em futuras investigações que fosse analisado e trabalhado com os alunos as restantes representações, de forma a perceber como é que os alunos aprendem a derivada de funções. Por outro lado, no que se refere aos aspetos trabalhados na componente investigativa deste projeto (estratégias, erros e dificuldades), surgiram algumas questões, durante a análise dos dados, que, não sendo o ponto essencial da minha investigação, remeto-as para futuras investigações: Qual a origem das dificuldades identificadas na determinação da derivada de uma função? Que erros e que dificuldades manifestam os alunos quando determinam a derivada de uma função trigonométrica?

Relativamente ao estudo das funções trigonométricas, o momento em que estas surgem no programa de Matemática do 12.º ano (3º período) tornou impossível a sua inclusão no estudo que desenvolvi, dada a proximidade com o exame nacional da disciplina que impossibilitou que a minha intervenção pudesse ser prolongada ao terceiro período. Já a origem das dificuldades, uma vez que a minha planificação deste estudo não considerou inicialmente este aspeto, a limitação de tempo e recursos tornou a sua investigação impossível.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Almeida, C., & Viseu, F. (2002). Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 15(1)*, 193-219.

Andrade, J. M., & Saraiva, M. J. (2012). Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 15*(2), 137-169.

Anthony, G., & Walshaw, M. (2007). *Effective Pedagogym in Mathematics/ Pàngarau: Best Evidence Synthesis Iteration [BES]*. Wellington, New Zealand: Ministry of Education.

Bloom, B. S., Hastings, J. T., & Madaus, G. (1983). *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*. New York, NY: McGraw-Hill.

Boavida, A. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática, 100*, 1.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. In *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática: Atas do EIEM2012* (pp. 99-104). Portalegre: ESE de Portalegre e SPIEM.

Canavarro, A. P., Oliveira, H. & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. da Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 217-231). Lisboa: IE.

Carvalho, L. I., Ferreira, R., & Ponte, J. P. (2011). Representações no estudo das funções racionais. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro, & J. P. Ponte (Orgs.), *Actas do XXII SIEM* (pp. 179-192). Lisboa: APM.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). *Novo Espaço 11 (parte 2). Matemática A 11º ano*. Porto: Porto Editora.

Cottrill, J. F. (1999). *Students understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions* (Doctoral dissertation, Purdue University, Indiana, United States of America).

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior* (Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Portugal).

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of student's thinking during intruction. *Educational Psycologist, 23*, 167-80.

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking process. In D.Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61* (1), 103-131.

Estrela, A. (1994). Teoria e Prática de Observação de Classes: Uma estratégia de Formação de Professores (4ª ed.). Porto: Porto Editora.

Ferreira, J. C. (1999). *Introdução à Análise Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Figueira, M. S. R. (2002). *Fundamentos de Análise Infinitesimal*. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Friendland, A., & Tabach, M., (2001). Promothing multiple representation in álgebra. In Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Gafanhoto, A. P., & Canavarro, A. P. (2011). Utilização e conciliação de diversas representações das funções em sala de aula. *Actas do XXII SIEM* (pp. 1-15). Lisboa: APM.

Gil, R. (2014). *A aprendizagem da noção de derivada no 11.º ano* (Relatório da Prática de ensino supervisionada, Universidade de Lisboa, Portugal).

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematics learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176-201). New York, NY: Routledge.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77, 81-112. Disponível em: http://education.qld.gov.au/staff/development/performance/resources/readings/power-feedback.pdf

Loureiro, V. (2012). *Função Derivada: uma abordagem didática no Ensino Secundário* (Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, Portugal).

Loureiro, N. (2013). *A representação gráfica das funções linear e afim: um estudo com alunos do 8.º ano* (Relatório da Prática de ensino supervisionada, Universidade de Lisboa, Portugal).

ME (2001). *Programa de Matemática A, Ensino Secundário, 12º ano*. Lisboa: DGIDC.

MEC (2013). *Programa e Metas curriculares de* Matemática *do Ensino Secundário*. Lisboa: MEC.

Menezes, L., Ferreira, R. T, Martinho, M.H, & Guerreiro, A. (2013). Comunicação matemática nas práticas letivas dos professores. In J.P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 135-164). Lisboa: IEUL

Moura, A. (2014). *O erro na regulação da aprendizagem do tema derivada de uma função de alunos do 11.º ano de Matemática A* (Relatório de Estágio, Universidade do Minho, Portugal).

NCTM (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM (obra original em inglês, publicada em 2000).

Nevo, D. (2006). Evaluation in education. In I. Shaw, J. Greene & M. Mark, *The sage handbook of evaluation*, (pp. 440-460). London: Sage.

Nunes, F. (1996). Será de ir em grupos na aprendizagem da matemática? In A. Roque & M. J. Lagarto (Eds), *Actas do Profmat 96* (pp. 79-91). Lisboa: APM.

Orhun, N. (2012). Graphical understanding in mathematics education: derivate functions and students' difficulties. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 55*, 679-684.

Pardal, L., & Lopes, E. S. (2011). *Métodos e técnicas de investigação social*. Lisboa: Areal.

Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? *Educational Studies in Mathematics, 89*, 233-250.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Graça Martins, M. E., & Oliveira, P. A (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções, 22,* 196-216.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Orgs.), *Avaliação das Aprendizagens. Das concepções às práticas* (pp. 75-84). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes, & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Saraiva, M. J., Teixeira, A. M., & Andrade, J. M. (2010). *Estudo das funções no programa de Matemática A com problemas e tarefas de exploração*. Lisboa: APM. Disponível em: www.apm.pt/files/178672_Segment_001_4d3de4ed6e285.pdf.

Sezões, V. L. C. (2014). *Prática de ensino supervisionada em educação pré-escolar e ensino do 1º ciclo do ensino básico: o desenvolvimento do raciocínio matemático.* (Relatório de estágio, Universidade de Évora, Portugal).

Siyepu, S. W. (2015). Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions. *International Journal of STEM Education, 2*(1), 1-16.

Stake, R. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards – based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York, NY: Teachers College Press.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and comncept definition in mathematics with particular reference to lomits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2), 199–238. Disponível em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001p-esm-infinity.pdf.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1998). *Funções – 11.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério de Educação.

Uygur, T., & Özdas, U. (2005). Misconceptions and difficulties with the chain rule. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the 8th International Conference* on *The Mathematics Education into the 21st Century Project: Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education* (pp. 209-213). Johor Bahru, University Teknologi Malaysia. Disponível em: http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_malasya_Uygur209-213_05.pdf.

Vasques, I. (2015). *Função derivada e a sua relação com a função original, em diferentes representações* (Relatório da Prática de ensino supervisionada, Universidade de Lisboa, Portugal).

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Wangberg, A., Engelke, N., & Karakok, G. (2011). Function composition and the chain rule in calculus. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle & M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 14th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 220-224). Portland, OR. Disponível em: http://sigmaa.maa.org/rume/RUME_XIV_Proceedings_Volume_4.pdf.

Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods* (3.ª ed.). London: Sage.

Yin, R. (2010). *Estudo de caso: Planejamento e métodos* (4.ª ed.). Porto Alegre: Artmed Editora.

Anexos

Anexo 1 – Autorização aos Encarregados de Educação

ESCOLA SECUNDÁRIA DA RAMADA

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação,

Eu, Manuel João Coelho Patrício, encontro-me a realizar o Mestrado em Ensino da Matemática, na Universidade de Lisboa, no âmbito do qual estou a desenvolver um projeto de cariz investigativo, subordinado ao tema Cálculo Diferencial II.

Para o desenvolvimento deste trabalho será necessário recolher dados em contexto de sala de aula, na turma do 12º B, nomeadamente, através da gravação áudio e vídeo de determinados momentos da aula, tais como discussões com os alunos da turma ou entrevistas individuais.

Este processo não interfere com o normal funcionamento das atividades letivas e não traz qualquer prejuízo para os participantes, estando salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem ao seu(sua) educando(a). Face ao exposto, solicito autorização para a referida recolha de dados.

Agradeço antecipadamente a colaboração e atenção dispensada.

Com os melhores cumprimentos,

Prof.ª Inês Campos

Prof. Estagiário Manuel Patrício

Agradeço assinatura e devolução do destacável

Eu, ____ encarregado(a) de educação do aluno____, nº ______da turma ____ do 12º Ano de escolaridade, da Escola Secundária da Ramada, tomei conhecimento dos objetivos do trabalho a desenvolver que envolverá a referida turma, na disciplina de Matemática e __________________(autorizo/ não autorizo) a participação/colaboração do meu educando na realização do mesmo.

Em relação às gravações áudio/vídeo das entrevistas que serão utilizadas para a concretização do estudo, salvaguardando o respetivo anonimato, __________________ (autorizo/não, autorizo) a participação/colaboração do meu educando.

_________________________________, ___ de _______________________de 2015

O/A Encarregado/a de Educação

____

Anexo 2 – Inquérito aos alunos

ESCOLA SECUNDÁRIA DA RAMADA

2015/2016

Caracterização da turma

-Inquérito-

Ano: ___ Turma: ___

Aluno:

1) Sexo:

Feminino: ☐ Masculino: ☐

2) Idade: _____

3) Freguesia de residência: ____

4) Deslocação casa/escola:

4.1) Meio de transporte:

☐ A pé ☐ Transporte Público ☐ Bicicleta ☐ Automóvel

☐ Outro: ____

4.2) Tempo de deslocação:

☐ Até 10 min. ☐ Entre 10 e 20 min. ☐ Mais de 20 min.

5) Reprovações:

☐ Nunca reprovei.

(➔) Reprovei: (⬇) Número de vezes:	1º Ciclo	2ºCiclo	3º Ciclo	Ensino Secundário
1	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐
>2	☐	☐	☐	☐

6) Onde estudas:

☐ Casa ☐ Escola ☐ Biblioteca

☐ Outro: ____

(v.s.f.f.)

7) Hábitos/Métodos de estudo:

	Sim	Não
Estudas diariamente?	☐	☐
Estudas individualmente?	☐	☐
Fazes regularmente os trabalhos de casa?	☐	☐
Tens ajuda para estudar? (explicações/apoio escolar, outro)	☐	☐
Recorres ao manual escolar para estudar?	☐	☐
Recorres ao caderno diário para estudar?	☐	☐
Utilizas o computador para estudar?	☐	☐
Utilizas regularmente a internet para estudar?	☐	☐
Frequentas a biblioteca escolar?	☐	☐
Em caso de dúvida solícitas ajuda ao professor?	☐	☐
Recorres aos colegas para esclarecimento de dúvidas?	☐	☐

8) Sala de aula:

		Sim	Não
Gostas de ir ao quadro?		☐	☐
Costumas participar:	a pedido do professor	☐	☐
	voluntariamente	☐	☐
Gostas de trabalhar a pares/pequeno grupo?		☐	☐
Tiras apontamentos por iniciativa própria?		☐	☐
Apenas registas o que é escrito no quadro ou ditado pelo professor?		☐	☐

9) Após concluíres o Ensino Secundário pretendes:

☐ Tirar um curso superior. Qual?_________________________________

☐ Fazer uma formação profissional. Qual?__________________________

☐ Ir trabalhar. Profissão?____

☐ Outro:____

Obrigado pela tua participação! **(fim)**

TAREFA1REGRASDEDERIVAÇÃO

A tarefa é constituída por oito itens. Todas as respostas devem ser registadas no enunciado. Na resposta a cada um dos itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Apresenta o teu raciocínio de forma organizada, num texto bem estruturado e linguisticamente correto.

RECORDA - Seja f uma função real de variável real. Então:

1. Se $f(x)$ é uma função constante ($f(x) = a$, com $a \in \mathbb{R}$), então $f'(x) = 0$.
2. Se $f(x)$ é uma função afim ($f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$), então $f'(x) = a$.
3. Se $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 2ax + b$.
4. Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

GRUPO I

1. Determina a função derivada de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ **(b)** $g(x) = x^3 - 3x$

(c) $h(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$

2.

(a) Considera as seguintes funções:

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2,\ g(x) = 2x + 6 \text{ e}$$

$$(f + g)(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 6$$

Determina:

(i) $f'(x)$ e $g'(x)$ **(ii)** $(f + g)'(x)$

(b) Considera agora $f(x) = 3x^2 + 5x$ e $g(x) = \frac{7}{3}x^3 + 2x^2 + e$.

(i) Calcula $f'(x) + g'(x)$ e $(f + g)'(x)$.

(ii) Tendo em conta a alínea anterior, que relação podes estabelecer entre $(f + g)'(x)$ e $f'(x) + g'(x)$?

DERIVADA DA SOMA:

Se f e g são duas funções deriváveis num conjunto A, então a função soma $f+g$ também é derivável em A e

$$(f+g)'=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3. Sendo $f(x)=-\frac{2}{3}x+3$ e g uma função derivável em $\mathbb{R}$ tal que $g'(x)=\cos(x)$, justifica que a função $f+g$ é derivável em $\mathbb{R}$ e determina $(f+g)'(x)$, para cada $x\in\mathbb{R}$.

GRUPO II

4. Considera as funções $f(x)=2x+2$, $g(x)=3x-1$ e $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$.

(a) Determina $f'(x)$, $g'(x)$ e $(f\times g)'(x)$.

(b) Determina $f'(x)\times g(x)+g'(x)\times f(x)$.

(c) Atendendo às alíneas anteriores, que relação podes estabelecer entre $(f\times g)'(x)$ e $f'(x)\times g(x)+g'(x)\times f(x)$?

DERIVADA DO PRODUTO:

Se f e g são duas funções deriváveis num conjunto A, então a função produto $f\times g$ também é derivável em A e

$$(f\times g)'=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

5. Utilizando as regras de derivação já tuas conhecidas, calcula a derivada das seguintes funções:

(a) $h(x)=x^2(x^2+1)$.

(b) $g(x)=x^4-2x^3+6x$.

(c) $f(x)=x^4$.

6.

(a) Usa a regra de derivação do produto para mostrar que dada uma função derivável f num conjunto A e uma constante $k\in\mathbb{R}$, se tem $(kf)'=kf'$.

(b) Determina a derivada de cada uma das seguintes funções: $3x^4$, $\frac{1}{2}x^4$ e $-5x^4$.

GRUPO III

Conforme já observámos anteriormente, se f e g são duas funções deriváveis num conjunto A então $f \times g$ também é derivável em A. Assim, dada uma função f derivável num conjunto A, uma vez que $f^2 = f \times f$, $f^3 = f \times f^2$, $f^4 = f \times f^3$, … concluímos (sucessivamente) que f^2, f^3, f^4, … são também deriváveis em A.
Por exemplo:

$$(f^2)' = (f \times f)' = f' \times f + f' \times f = \mathbf{2}ff'$$

7.

(a) Usando a regra de derivação do produto, mostra que:

$$(f^3)' = \mathbf{3}f^2 f'$$

(b) Que conjetura podes formular em relação a $(f^{100})'$? Explica o teu raciocínio.

DERIVADA DA POTÊNCIA DE EXPOENTE NATURAL:

Se f é derivável num conjunto A, e n é um número natural, então a função potência f^n também é derivável em A e

$$(f^n)' = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

CASO PARTICULAR:

$$(x^n)' = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

NOTA: A regra de derivação da potência generaliza-se ao expoente racional não nulo.

8. Calcula a derivada das seguintes funções, indicando a(s) regra(s) que utilizaste:

(a) $f(x) = 3x^7 - x^6 + 2x^5 + 7x^3 - 3x + 2$.

(b) $f(x) = (x^3 + 2x + 1)^4$.

(c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

(d) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$.

(e) $f(x) = \sqrt[3]{(x + 2)^2}$.

FIM

PARAPRATICAR

MANUALESCOLAR
- Exercício 85 (Página 75).
- Exercício 88 (Página 76).
- Exercício 92 (Página 77).
- Exercício 93 (Página 77).

Anexo 4 – Tarefa 2

TAREFA 2 REGRAS DE DERIVAÇÃO

A tarefa é constituída por cinco itens. Todas as respostas devem ser registadas no enunciado. Na resposta a cada um dos itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Apresenta o teu raciocínio de forma organizada, num texto bem estruturado e linguisticamente correto.

RECORDA - Sejam f e g duas funções deriváveis num conjunto A e $k \in \mathbb{R}$. Então:

1. $(f+g)' = f' + g'$.
2. $(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$.
3. $(kf)' = k \times f'$.
4. $(f^n)' = n \times f^{n-1} \times f', n \in \mathbb{N}$.

NOTA: A propriedade 4 generaliza-se a expoentes racionais não nulos.

GRUPO I

1. A derivada de uma função f num ponto $x \in D_f$ é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

caso este limite exista e seja finito.

Com base nesta definição, determina $f'(x)$, para cada $x \in D_f$, sendo:

(a) $f(x) = e^x$.

(b) $f(x) = \ln(x)$.

$(e^x)'$=_____	$(\ln(x))'$=_____

2. Determina a função derivada de cada uma das seguintes funções, indicando as regras de derivação que utilizaste:

(a) $f(x) = \ln(2)$.

(b) $g(x) = -3x^2 + \ln(x)$.

(c) $h(x) = x^3 \times \ln(x)$.

(d) $u(x) = e^3 \times \ln(x)$.

(e) $j(x) = (e^x + \ln(x))^2$.

3. Seja $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$. Considera a função $f(x) = \log_a(x)$.

Usando a mudança de base $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$, calcula $f'(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^+$.

$\forall a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}, \forall x \in \mathbb{R}^+, (\log_a(x))' =$__________

GRUPO II

4. Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = x^2e^x$ e $g(x) = 3e^x$.

(a) Calcula $f'(x)$ e $g'(x)$.

(b) Verifica que $\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{2}{3}x$.

(c) Determina a expressão da função derivada de $\frac{f(x)}{g(x)}$ e compara o resultado com o obtido na alínea anterior.

DERIVADA DO QUOCIENTE:

Se f e g são duas funções deriváveis num conjunto A, em que g não se anula, então a função quociente $\frac{f}{g}$ também é derivável em A e

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

5. Calcula a derivada das seguintes funções, indicando a(s) regra(s) que utilizaste:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$.

(b) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

(c) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

(d) $f(x) = \frac{x^2-e^4}{e^x} + e^4$.

FIM

PARAPRATICAR

MANUALESCOLAR

- Exercício 95 (Página 78).

Anexo 5 – Tarefa 3

TAREFA3TEOREMADADERIVADADAFUNÇÃOCOMPOSTA

A tarefa é constituída por seis itens. Todas as respostas devem ser registadas no enunciado. Na resposta a cada um dos itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Apresenta o teu raciocínio de forma organizada, num texto bem estruturado e linguisticamente correto.

RECORDA - Sejam f e g duas funções deriváveis num conjunto A e $k \in \mathbb{R}$. Então:

1. $(f+g)' = f' + g'$.
2. $(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$.
3. $(kf)' = k \times f'$.
4. $(f^n)' = n \times f^{n-1} \times f', n \in \mathbb{N}$.
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$ (se g não se anula em A).

NOTA: A propriedade 4 generaliza-se a expoentes racionais não nulos.

6. $(e^x)' = e^x$ e $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

1. Considera as funções $f(x) = (x-1)^2$ e $g(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Caracteriza as funções $g \circ f$ e $f \circ g$.

(b) Calcula $(g \circ f)\left(\frac{1}{2}\right)$ e $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Seja h a função definida por $h(x) = (x+5)^2$.

(a) Indica funções f e g tais que $h = g \circ f$.

(b) Sendo f e g as funções indicadas em a), determina $f \circ g$.

3.

(a) Seja h a função definida por $h(x) = \ln(2x)$.

(i) Usando as propriedades do logaritmo e as regras de derivação já estudadas, determina $h'(x)$.

(ii) Sendo f a função definida por $f(x) = 2x$, indica uma função g tal que $h = g \circ f$ e calcula $g'(f(x)) \times f'(x)$.

(b) Seja agora h a função definida por $h(x) = e^{2x}$.

(i) Usando as regras de derivação já estudadas, determina $h'(x)$.

(ii) Sendo $f(x) = 2x$ e $g(x) = e^x$, calcula $g'(f(x)) \times f'(x)$.

(iii) Tendo em conta as alíneas anteriores, que relação podes estabelecer entre $(g \circ f)'(x)$ e $g'(f(x)) \times f'(x)$?

TEOREMA DA DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA:
Sejam f e g duas funções e $x \in D_{g \circ f}$. Se f é derivável em x e g é derivável em $f(x)$, então $g \circ f$ é derivável em x e $(g \circ f)'(x)$=____________________

4. Aplica o teorema da derivada da função composta para determinar:

(a) $(g \circ f)'(x)$, sendo $g(x) = x^2 + 3x + 1$ e $f(x) = \sqrt{x}$.

(b) $(g \circ f)'(3)$, sendo $f(x) = x^2$ e g uma função tal que $g'(9) = 5$.

(c) $h'(x)$, sendo $h(x) = e^{-x^2+5}$.

(d) $t'(x)$, sendo $t(x) = \ln(x^2)$.

5. Seja u uma função derivável.

(a) Utiliza o teorema da derivada da função composta para determinar a derivada das funções:

(i) $h(x) = e^{u(x)}$.

(ii) $t(x) = \ln(u(x))$.

$(e^u)' =$____________	$(\ln(u))' =$____________

(b) Seja $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$.

Considera as funções $h(x) = a^{u(x)} = e^{\ln(a) \times u(x)}$ e $t(x) = \log_a(u(x)) = \frac{\ln(u(x))}{\ln(a)}$.

Usa o resultado que encontraste na alínea a) para verificar que:

(i) $h'(x) = u'(x) \times a^{u(x)} \times \ln(a)$.

(ii) $t'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)\ln(a)}$.

6. Calcula a derivada das seguintes funções, indicando a(s) regra(s) que utilizaste:

(a) $f(x) = \ln(x^2 + 5)$.

(b) $f(x) = e^{x^3+x} + 1$

(c) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.

(d) $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$

(e) $f(x) = \frac{x}{2} \times e^{5x^2}$.

(f) $f(x) = \ln\left(\frac{x^4}{2x-1}\right)$

FIM

PARAPRATICAR

MANUALESCOLAR

- Exercício 98 (Página 79).
- Exercício 101 (Página 80).
- Exercício 102 (Página 80).
- Exercício 110 (Página 83).
- Exercício 116 (Página 86).

Anexo 6 – Tarefa 4

TAREFA4REGRASDEDERIVAÇÃO

A tarefa é constituída por seis itens. Todas as respostas devem ser registadas no enunciado. Na resposta a cada um dos itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Apresenta o teu raciocínio de forma organizada, num texto bem estruturado e linguisticamente correto.

RECORDA:

Sejam f e g duas funções deriváveis num conjunto A e $k \in \mathbb{R}$. Então:

1. $(f+g)' = f' + g'$.
2. $(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$.
3. $(kf)' = k \times f'$.
4. $(f^n)' = n \times f^{n-1} \times f'$, $n \in \mathbb{N}$.
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$ (se g não se anula em A).

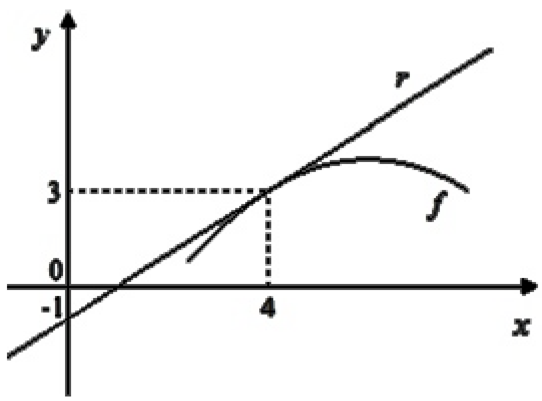
NOTA: A propriedade 4 generaliza-se a expoentes racionais não nulos.

TEOREMA DA DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA:

Sejam f e g duas funções e $x \in D_{g \circ f}$. Se f é derivável em x e g é derivável em $f(x)$, então $g \circ f$ é derivável em x e $\boldsymbol{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)}$.

GRUPO I

1. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f e a reta r que é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 4$.

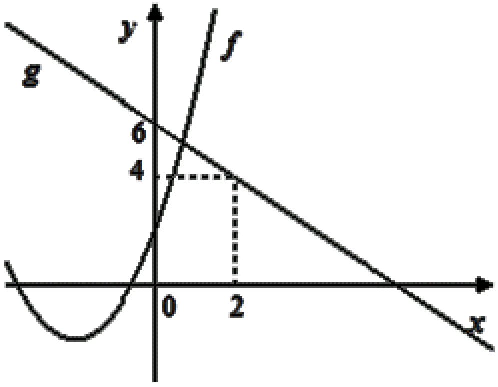


Sendo g a função definida por $g(x) = \frac{7-x^2}{2}$, determina:

(a) $(f+g)'(4)$.

(b) $(f^3)'(4)$.

2. Na figura ao lado estão representadas as funções f e g. Sabendo que f é definida por $f(x) = (x+2)^2 - 2$, determina:

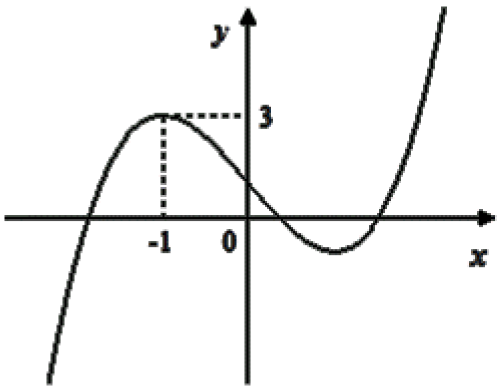


(a) $(f \times g)'(0)$.

(b) $(f \times g)'(1)$

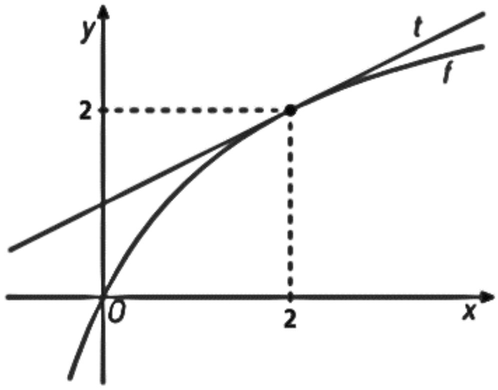
.

3. Considera a função f definida por $f(x) = x^2 + 4$ e a função g representada na figura.



Determina $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1)$.

4. Na figura estão representadas uma função f e uma reta t tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 2$.



Sabe-se que $y = \frac{x}{2} + 1$ é uma equação da reta t. Sendo g a função definida por $g(x) = \sqrt{x}$, determina:

(a) $(g \circ f)'(2)$.

(b) $(f \circ g)'(4)$.

GRUPO II

5. Considera a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1, se\ x < 0 \\ x^2 + 3x, se\ x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Caracteriza a função derivada de f.

(b) Sendo $g(x) = 2x - 4$, determina $(f \circ g)'(1)$ e $(f \circ g)'(3)$.

6. Determina a função derivada de cada uma das seguintes funções, indicando a(s) regra(s) que utilizaste:

(a) $f(x) = -\frac{3x^3}{2} - 4x^2 - x + 5$.

(b) $f(x) = (x^2 + 5x)^3$.

(c) $f(x) = \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)(4x - 2)$.

(d) $f(x) = 3^{x^2+5x}$.

(e) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

FIM

Anexo 7 – Questão de aula 1

QUESTÃODEAULA 1

Todas as respostas devem ser registadas no enunciado. Na resposta a cada um dos itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

RECORDA

Seja f uma função real de variável real. Então:

1. Se $f(x)$ é uma função constante ($f(x) = a$, com $a \in \mathbb{R}$), então $f'(x) = 0$.
2. Se $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então $f'(x) = a$.
3. Se $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 2ax + b$.
4. Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Sejam f e g duas funções deriváveis num conjunto A e $k \in \mathbb{R}$. Então:

5. $(f + g)' = f' + g'$.
6. $(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$.
7. $(kf)' = k \times f'$.
8. $(f^n)' = n \times f^{n-1} \times f'$, $n \in \mathbb{N}$.

NOTA: A propriedade 8 generaliza-se a expoentes racionais não nulos.

Calcula a derivada das seguintes funções, indicando a(s) regra(s) que utilizaste:

(a) $f(x) = x^6 + 2x^5 - \sqrt{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \pi$.

(b) $f(x) = \frac{7+x^2}{3} - 2$.

(c) $f(x) = 3x^2 + 5x + \sqrt{(2x+1)^3}$.

FIM

QUESTÃODEAULA 2

Todas as respostas devem ser registadas no enunciado. Na resposta a cada um dos itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

RECORDA:

Sejam f e g duas funções deriváveis num conjunto A e $k \in \mathbb{R}$. Então:

1. $(f+g)' = f' + g'$.
2. $(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$.
3. $(kf)' = k \times f'$.
4. $(f^n)' = n \times f^{n-1} \times f', n \in \mathbb{N}$.
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$ (se g não se anula em A).

NOTA: A propriedade 4 generaliza-se a expoentes racionais não nulos.

TEOREMA DA DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA:

Sejam f e g duas funções e $x \in D_{g \circ f}$. Se f é derivável em x e g é derivável em $f(x)$, então $g \circ f$ é derivável em x e $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \times \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$.

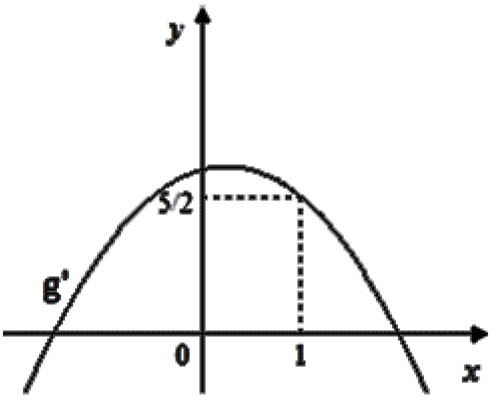
Calcula a derivada das seguintes funções, indicando a(s) regra(s) que utilizaste:

(a) $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$.

(b) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

Aplicando o teorema da derivada da função composta, determina a função derivada de $g \circ f$, sendo $g(x) = x^2 + 1$ e $f(x) = -2x - \frac{1}{2}$.

Na figura está representado o gráfico da derivada de uma função g. Sendo f a função definida por $f(x) = \ln(x)$, determina $(g \circ f)'(e)$.



FIM

Anexo 9 – Plano de Aula 1

PLANO DE AULA 1	
26 de fevereiro de 2016 **Matemática A – 12ºB** **Escola Secundária da Ramada**	
Duração da aula: 90 min (2 tempos de 45 min).	**Horário da aula:** das 08:15h às 09:45h.

Sumário: Revisão da função derivada de uma função polinomial de grau menor ou igual a 3.
Regras de derivação: derivada da soma, derivada do produto e derivada da potência.

Tópico do Programa: Introdução ao Cálculo Diferencial II

Subtópicos:

- Funções deriváveis. Regras de derivação.

Objetivos específicos (os alunos deverão ser capazes de):

- Determinar a derivada de uma função polinomial de grau menor ou igual a 3;
- Aplicar as regras de derivação da soma, do produto e da potência no cálculo de derivadas;
- Mobilizar as regras supramencionadas para o cálculo de derivadas de funções polinomiais de grau arbitrário.

Conhecimentos prévios:

- Conceito de derivada;
- Derivada das funções: constante, identidade, afim, quadrática e cúbica.

Recursos:

Aluno:

- Material de escrita (papel, lápis e borracha); Manual escolar.

Professor:

- Tarefa: “Regras de derivação (soma, produto e potência)”; Versão resumida do “Plano de aula”; Manual escolar; Correção da tarefa.

Capacidades transversais:

- Raciocínio matemático;
- Comunicação matemática;
- Rigor na escrita (utilização correta da linguagem simbólica relacionada com as derivadas);
- Interpretação de enunciados (linguagem natural);
- Autonomia;
- Espírito crítico.

Contextualização:

- Esta será a primeira aula sobre as regras de derivação. Será feita uma breve revisão das derivadas que os alunos já aprenderam no 11.º ano (derivada da função constante, identidade, afim, quadrática e cúbica) através do estudo de alguns exemplos. De seguida será proposto aos alunos uma tarefa com o objetivo de estes inferirem as regras de derivação da soma, produto e potência. Com a realização da tarefa, os alunos ficarão aptos para derivar qualquer função polinomial.

Avaliação:

- A avaliação será reguladora em relação à compreensão e ao estudo das regras de derivação;
- Serão avaliados aspetos como: o envolvimento na resolução da tarefa; o empenho e a participação nos momentos de discussão em grande grupo.

Observação:

- Existe um aluno que se encontra a realizar um plano de trabalho próprio uma vez que apresenta um grande desfasamento em relação ao nível de conhecimento matemático da turma. Este trabalho será desenvolvido com o apoio da professora Inês Campos e da Cristiana Coito.

Metodologia de trabalho:

- Breve momento de revisão, em grande grupo, da função derivada de uma função constante, afim, quadrática e cúbica através da exploração de alguns exemplos;
- Trabalho autónomo dos alunos na resolução da tarefa envolvendo o estudo das regras de derivação;
- Momentos de discussão em grande grupo finalizando com a síntese das regras de derivação;

- Trabalho autónomo dos alunos na resolução de exercícios do manual escolar referentes às regras de derivação já estudadas, caso terminem a tarefa em tempo de aula.

Desenvolvimento da aula:

(0) Preparação da sala de aula **(0 minutos)**

- O professor entra na sala antes do início da aula e certifica-se que o quadro está em condições de ser utilizado: limpo e com o material necessário para escrita.

Objetivo: garantir que o início da aula decorre sem perturbações.

(1) Início da aula: entrada dos alunos e ditado do sumário **(5 minutos)**

- O sumário é ditado aos alunos. Registo de faltas.

Objetivo: dar a conhecer aos alunos os assuntos que vão ser tratados ao longo da aula.

Início: 08:15 ➔ Fim: 08:20

(2) Revisão das derivadas estudadas no 11.º ano **(10 minutos)**

- Revisão da função derivada de uma função polinomial de grau menor ou igual a 3.

Ação do professor:
- Recordar os alunos das derivadas já estudadas no 11.º ano;
- Questionar os alunos acerca da derivada da função constante, identidade, afim, quadrática e cúbica (calcular com a ajuda e colaboração dos alunos a derivada de algumas funções polinomiais de grau menor ou igual a 3);
- Fazer uma síntese onde será apresentada uma tabela com as derivadas de funções que os alunos já estudaram;
- Esclarecer eventuais questões que ainda possam surgir em relação às derivadas deste tipo de funções.

Início: 08:20 ➔ Fim: 08:30

(3) Apresentação e distribuição da tarefa **(5 minutos)**

- Distribuir o enunciado da tarefa aos alunos;
- Informar os alunos que podem realizar a tarefa em pequeno grupo (trabalho a pares);
- Explicar aos alunos que serão feitas pausas para discussão da tarefa no final de cada grupo de questões;
- Pedir aos alunos para resolverem a tarefa a caneta numa folha à parte para permitir que seja recolhida no final de cada aula e devolvida na aula seguinte. Solicitar aos alunos para corrigirem a tarefa no caderno diário.

Início: 08:30 ➔ Fim: 08:35

(4) Resolução da tarefa – Grupo I **(10 minutos)**

- **Metodologia de trabalho:** Trabalho em pequeno grupo (trabalho a pares).

Ação do professor:
- Circular pela sala de aula para tirar dúvidas e apoiar os alunos com eventuais dificuldades que surjam na resolução do Grupo I da tarefa;
- Selecionar alguns alunos para apresentarem a sua resolução no quadro;
- Observar as respostas dadas pelos alunos da turma com o objetivo de identificar os alunos com mais dificuldades e perceber os seus raciocínios;
- Interromper a aula para fazer uma explicação para toda a turma caso existam dúvidas comuns a muitos alunos.

Dificuldade geral: para além das dificuldades que aponto em cada questão da tarefa, as operações com polinómios na simplificação de expressões e os erros de cálculo serão certamente dificuldades comuns à generalidade das questões.

Questões 1, 2 e 3

Objetivo:
- Motivar os alunos para a regra de derivação da soma;
- Levar o aluno a desenvolver a ideia intuitiva de derivada da soma de funções.
- Aplicar a regra de derivação da soma.

Resolução esperada: recorrer aos resultados recordados no início da aula para efetuar o cálculo das derivadas das funções.

1 – a)

$$f'(x) = (3x^2 + 2x + 5)' = 2 \times 3x + 2 = 6x + 2$$

1 – b)

$$g'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

1 – c)

$$h'(x) = (2x^3 - 5x^2 + 7)' = 3 \times 2x^2 - 2 \times 5x = 6x^2 - 10x$$

2 – a)

i) $f'(x) = (4x^3 - 5x^2)' = 3 \times 4x^2 - 2 \times 5x = 12x^2 - 10x$

$$g'(x) = (2x + 6)' = 2$$

ii) $(f + g)'(x) = (4x^3 - 5x^2 + 2x + 6)' = 3 \times 4x^2 - 2 \times 5x + 2 = 12x^2 - 10x + 2$

2 – b)

i) $f'(x) + g'(x) = (3x^2 + 5x)' + \left(\frac{7}{3}x^3 + 2x^2 + e\right)' = 2 \times 3x + 5 + 3 \times \frac{7}{3}x^2 + 2 \times$

$$2x = \ 6x + 5 + 7x^2 + 4x = 7x^2 + 10x + 5$$

$$(f+g)'(x) = \left(3x^2 + 5x + \frac{7}{3}x^3 + 2x^2 + e\right)' = \left(\frac{7}{3}x^3 + 5x^2 + 5x + e\right)'$$

$$= 3 \times \frac{7}{3}x^2 + 2 \times 5x + 5 = 7x^2 + 10x + 5$$

ii) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Dificuldades previstas:

- Não saber aplicar as regras de derivação já estudadas no 11.º ano;
- Identificar o tipo de função que pretende derivar em cada caso.

> **Ação do professor:**
> - Auxiliar o aluno na interpretação das derivadas presentes no início da tarefa (através da apresentação de um exemplo simples) e no cálculo da derivada que for o foco da dificuldade.

Resolução esperada: recorrer à regra de derivação da soma para o cálculo da derivada.

3 –

Temos que f é uma função derivável em $\mathbb{R}$ pois é uma função afim e toda a função afim é derivável em $\mathbb{R}$.

Logo, como f é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e g é também uma função derivável em $\mathbb{R}$, temos que $f+g$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$ porque a soma de duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$.

Aplicando a regra de derivação da soma vem, para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = \left(-\frac{2}{3}x + 3\right)' + \cos(x) = -\frac{2}{3} + \cos(x)$$

Dificuldades previstas:

- Justificar que a função $f+g$ é derivável em $\mathbb{R}$;
- Pensar que necessitam da expressão algébrica da função g para calcular a derivada pedida.

> **Ação do professor:**
> - Perguntar à turma o que aprenderam no 11.ºano em relação a derivabilidade das funções afins;
> - Ajudar o aluno a aplicar a regra da derivação da soma.

Início: 08:35 → Fim: 08:45

---

(5) Discussão e correção da tarefa – Grupo I **(10 minutos)**

- Breve correção e discussão das questões 1, 2 e 3 com o objetivo de identificar alguma dificuldade generalizada e para os alunos ficarem com o registo da resposta correta;
- Possível ida ao quadro por parte de alguns alunos.

Foco da discussão: conjeturar e generalizar a regra de derivação da soma.

Início: 08:45 ➔ Fim: 08:55

(6) Resolução da tarefa – Grupo II **(10 minutos)**

- **Metodologia de trabalho:** Trabalho em pequeno grupo (trabalho a pares).

Ação do professor:
- Circular pela sala de aula para tirar dúvidas e apoiar os alunos com eventuais dificuldades que surjam na resolução do Grupo II da tarefa;
- Selecionar alguns alunos para apresentarem a sua resolução no quadro;
- Observar as respostas dadas pelos alunos da turma com o objetivo de identificar os alunos com mais dificuldades e perceber os seus raciocínios;
- Interromper a aula para fazer uma explicação para toda a turma caso existam dúvidas comuns a muitos alunos.

Questões 4, 5 e 6

Objetivo:
- Aplicar a regra de derivação da soma;
- Motivar os alunos para a regra de derivação do produto.

Resolução esperada:

4 – a)

$$f'(x) = (2x+2)' = 2$$

$$g'(x) = (3x-1)' = 3$$

$$(f \times g)'(x) = \left(f(x) \times g(x)\right)' = (6x^2 + 4x - 2)' = 12x + 4$$

Estratégias:
- Calcular diretamente as derivadas usando os conhecimentos adquiridos durante o 11.ºano;
- Efetuar passos intermédios recorrendo à regra de derivação da soma.

4 – b)

$$f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x) = 2(3x-1) + 3(2x+2) = 12x + 4$$

4 – c)

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$$

Dificuldade prevista:

- Não atender ao trabalho realizado nas alíneas anteriores e considerar que a derivada do produto é o produto das derivadas, quando generaliza.

Ação do professor: sugerir ao aluno que primeiro efetue o produto e só depois calcule a derivada.

Resolução esperada: recorrer às regras de derivação da soma e do produto para o cálculo das derivadas.

5 – a)

$$h'(x) = (x^2)' \times (x^2+1) + (x^2+1)' \times x^2 = 2x(x^2+1) + 2x \times x^2$$
$$= 2x^3 + 2x + 2x^3 = 4x^3 + 2x$$

5 – b)

$$g'(x) = (x^4 - 2x^3 + 6x)' = \left(x(x^3 - 2x^2 + 6)\right)'$$
$$= (x)'(x^3 - 2x^2 + 6) + (x^3 - 2x^2 + 6)' \times x$$
$$= x^3 - 2x^2 + 6 + (3x^2 - 4x)x = x^3 - 2x^2 + 6 + 3x^3 - 4x^2$$
$$= 4x^3 - 6x^2 + 6$$

5 – c)

$$f'(x) = (x^4)' = (x \times x^3)' = (x)' \times x^3 + (x^3)' \times x = x^3 + 3x^2 \times x = x^3 + 3x^3$$
$$= 4x^3$$

Estratégias:

- Na alínea c), diferentes fatorizações levarão ao cálculo de derivadas diferentes;
- Calcular diretamente a derivada de x^4, antecipando a regra de derivação da potência.

Dificuldade prevista:

- Fatorizar as funções como produto de funções cujas derivadas já saibam calcular.

Ação do professor:
- Perguntar ao aluno se não consegue colocar nada em evidência (alínea b)) ou tentar escrever x^4 como produto de duas funções que já saiba derivar (alínea c));
- Caso o aluno calcule diretamente a derivada de x^4, pedir-lhe que recorra apenas a regras já conhecidas.

Resolução esperada: aplicar a regra de derivação do produto para efetuar a demonstração pedida.

6 – a)

$$(kf)' = k' \times f + f' \times k = 0 \times f + f' \times k = kf'$$

Resolução esperada: aplicar o resultado demonstrado na alínea a) em combinação com o resultado obtido na questão 6) alínea c).

6 – b)

$$(3x^4)' = 3 \times (x^4)' = 3 \times 4x^3 = 12x^3$$

$$\left(\frac{1}{2}x^4\right)' = \frac{1}{2}(x^4)' = \frac{1}{2} \times 4x^3 = 2x^3$$

$$(-5x^4)' = -5 \times (x^4)' = -5 \times 4x^3 = -20x^3$$

Estratégia:

- Decompor as funções num produto onde conhecem a derivada de cada fator e aplicar a regra de derivação do produto.

Dificuldade prevista:

- Aplicar o resultado demonstrado na alínea a) à alínea b) e combinar com o resultado obtido na alínea c) da questão 6.

Ação do professor:
- Sugerir ao aluno que atribua valores a k e uma expressão à função f de forma a perceber o resultado demonstrado na alínea a);
- Lembrar o aluno que já calculou a derivada de x^4.

Início: 08:55 ➔ Fim: 09:05

(7) Discussão e correção da tarefa – Grupo II **(10 minutos)**

- Breve correção das questões 4 ,5 e 6 com o objetivo de identificar alguma dificuldade generalizada e para os alunos ficarem com o registo da resposta correta;

- Possível ida ao quadro por parte de alguns alunos.

Foco da discussão: conjeturar e generalizar a regra de derivação do produto.

Início: 09:05 ➔ Fim: 09:15

(8) Resolução da tarefa – Grupo III **(10 minutos)**

- **Metodologia de trabalho:** Trabalho em pequeno grupo (trabalho a pares).

Ação do professor:
- Circular pela sala de aula para tirar dúvidas e apoiar os alunos com eventuais dificuldades que surjam na resolução do Grupo III da tarefa;
- Selecionar alguns alunos para apresentarem a sua resolução no quadro;
- Observar as respostas dadas pelos alunos da turma com o objetivo de identificar os alunos com mais dificuldades e perceber os seus raciocínios;
- Interromper a aula para fazer uma explicação para toda a turma caso existam dúvidas comuns a muitos alunos.

Questões 7 e 8

Objetivo:
- Aplicar as regras de derivação da soma e do produto;
- Motivar os alunos para a regra de derivação da potência.

Resolução esperada: recorrer à regra de derivação do produto para fazer a demonstração.

7 – a)

$$(f^{\mathbf{3}})' = (f \times f^2)' = f' \times f^2 + (f^{\mathbf{2}})' \times f = f'f^2 + 2ff' \times f = f'f^2 + 2f'f^2$$
$$= \mathbf{3}f^{\mathbf{2}}f'$$

7 – b)

Tendo em conta o enunciado e a alínea anterior, se $(f^2)' = 2ff'$ e $(f^3)' = 3f^2f'$, podemos conjeturar que $(f^{100})' = 100f^{99}f'$.

Dificuldades previstas:

- Aplicar a regra de derivação do produto a uma função abstrata;
- Identificar a regularidade necessária à formulação da conjetura.

Ação do professor:
- Sugerir ao aluno que siga a estratégia presente no exemplo;
- Perguntar ao aluno qual é a relação entre o expoente inicial da função que queremos derivar, o expoente ao qual a função está elevada no final do cálculo da derivada e o coeficiente da função.

Início: 09:15 ➔ Fim: 09:25

(9) Discussão e correção da tarefa – Grupo III **(10 minutos)**

- Breve correção da questão 7 com o objetivo de identificar alguma dificuldade generalizada e para os alunos ficarem com o registo da resposta correta;
- Possível ida ao quadro por parte de alguns alunos.

Focos da discussão:
- Conjeturar a regra de derivação da potência de expoente natural;
- Estudar o caso particular de $(x^n)'$ com $n \in \mathbb{N}$;
- Generalizar a regra de derivação de expoente natural ao expoente racional não nulo;
- Mostrar aos alunos que já possuem o conhecimento necessário para derivar qualquer função polinomial.

Início: 09:25 ➔ Fim: 09:35

(10) Encerramento da aula **(10 minutos)**

- Resolver com a ajuda e colaboração dos alunos as alíneas a) e d) da questão 8;
- Informar os alunos que as restantes alíneas são para realizar em casa e serão discutidas no início da próxima aula.

Resolução a ser apresentada:

8 – a)

$$f'(x) = (3x^7 - x^6 + 2x^5 + 7x^3 - 3x + 2)' = 21x^6 - 6x^5 + 10x^4 + 21x^2 - 3$$

8 – d)

$$f'(x) = \left(\sqrt{3x+2}\right)' = \left((3x+2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \times (3x+2)^{\frac{1}{2}-1} \times (3x+2)' = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$$

Observação:

- Na próxima aula será realizada uma questão de aula sobre as regras de derivação da soma, produto e potência (avaliação reguladora).

Início: 09:35 ➔ Fim: 09:45

Anexo 10 – Plano de Aula 2

PLANO DE AULA 2	
1 de março de 2016 **Matemática A – 12ºB** **Escola Secundária da Ramada**	
Duração da aula: 90 min (2 tempos de 45 min).	**Horário da aula:** das 10:00h às 11:30h.

Sumário: Derivada da função e^x e da função $\ln(x)$.
Regra de derivação do quociente.

Tópico do Programa: Introdução ao Cálculo Diferencial II

Subtópicos:

- Funções deriváveis. Regras de derivação. Derivadas de funções elementares. Segunda definição do numero e.

Objetivos específicos (os alunos deverão ser capazes de):

- Determinar a derivada da função e^x e da função $\ln(x)$;
- Aplicar as regras de derivação da soma, do produto, potência e quociente no cálculo de derivadas;
- Mobilizar as regras supramencionadas para o cálculo de derivadas envolvendo as funções e^x e $\ln(x)$.

Conhecimentos prévios:

- Conceito de derivada;
- Derivada de uma função num ponto;
- Derivada das funções: constante, identidade, afim, quadrática e cúbica;
- Regra de derivação da soma, produto e potência.

Recursos:

Aluno:

- Material de escrita (papel, lápis e borracha); Manual escolar.

Professor:

- Tarefa: “Regras de derivação (quociente)”; Questão de aula; Versão resumida do “Plano de aula”; Manual escolar; Correção da tarefa.

Capacidades transversais:

- Raciocínio matemático;
- Comunicação matemática;
- Rigor na escrita (utilização correta da linguagem simbólica relacionada com as derivadas);
- Interpretação de enunciados (linguagem natural);
- Autonomia;
- Espírito crítico.

Contextualização:

- Esta será a segunda aula sobre as regras de derivação. Será proposto aos alunos uma breve questão de aula sobre as regras de derivação da soma, produto e potência (avaliação reguladora). De seguida, os alunos realizarão uma tarefa com o objetivo de deduzir a derivada da função e^x e da função $\ln(x)$ por definição, determinar derivadas envolvendo as funções e^x e $\ln(x)$ e inferir a regra de derivação do quociente.

Avaliação:

- A avaliação será reguladora em relação à compreensão e ao estudo das regras de derivação;
- Serão avaliados aspetos como: o envolvimento na resolução da tarefa; o empenho e a participação nos momentos de discussão em grande grupo.
- Será realizada uma questão de aula com o objetivo de identificar quais os aspetos que suscitaram dúvidas ou incompreensões relativamente aos conceitos abordados na primeira aula (avaliação reguladora).

Observação:

- Existe um aluno que se encontra a realizar um plano de trabalho próprio uma vez que apresenta um grande desfasamento em relação ao nível de conhecimento matemático da turma. Este trabalho será desenvolvido com o apoio da professora Inês Campos e da Cristiana Coito.

Metodologia de trabalho:

- Breve momento de discussão e correção, em grande grupo, do trabalho que ficou para realizar em casa (exercício 8 – tarefa 1);
- Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão de aula;

- Trabalho autónomo dos alunos na resolução de uma tarefa envolvendo a regra de derivação do quociente;

- Momentos de discussão em grande grupo finalizando com a síntese da regra de derivação do quociente;

- Trabalho autónomo dos alunos na resolução de exercícios do manual escolar referentes às regras de derivação já estudadas, caso terminem a tarefa em tempo de aula.

Desenvolvimento da aula:

(0) Preparação da sala de aula **(0 minutos)**

- O professor entra na sala antes do início da aula e certifica-se que o quadro está em condições de ser utilizado: limpo e com o material necessário para escrita.

Objetivo: garantir que o início da aula decorre sem perturbações.

(1) Início da aula: entrada dos alunos e ditado do sumário **(5 minutos)**

- O sumário é ditado aos alunos. Registo de faltas.

Objetivo: dar a conhecer aos alunos os assuntos que vão ser tratados ao longo da aula.

Início: 10:00 → Fim: 10:05

(2) Discussão e correção do trabalho de casa **(10 minutos)**

- Resolução das alíneas b), c) e e) do exercício 8 da tarefa 1.

Ação do professor:
- Questionar os alunos sobre dúvidas ou dificuldades na realização do trabalho de casa;
- Realizar no quadro, se necessário, a correção das alíneas que suscitem maiores dificuldades;
- Esclarecer eventuais questões que ainda possam surgir em relação aos conceitos estudados na aula anterior.

- Proposta de resolução do trabalho de casa:

8 – b)

$$f'(x) = ((x^3+2x+1)^4)' = 4(x^3+2x+1)^3 \times (x^3+2x+1)'$$
$$= 4(x^3+2x+1)^3(3x^2+2)$$

8 – c)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

8 – e)

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)' = \left((x+2)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}} \times (x+2)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+2}}$$

Dificuldades previstas:

- Aplicar a regra de derivação da potência;

- Representar uma função como uma potência;
- Trabalhar com as regras operatórias das potências.

Início: 10:05 ➔ Fim: 10:15

(3) Questão de aula **(15 minutos)**

- Distribuir o enunciado da questão de aula aos alunos;
- Informar os alunos que devem realizar a questão de aula individualmente;
- Pedir aos alunos para resolverem a questão de aula numa folha à parte para permitir que seja recolhida. Solicitar aos alunos para resolverem a questão de aula a caneta.

Ação do professor:
- Certificar-se que os alunos estão a resolver a questão de aula individualmente e de acordo com as indicações fornecidas.

Início: 10:15 ➔ Fim: 10:30

(4) Apresentação e distribuição da tarefa **(5 minutos)**

- Distribuir o enunciado da tarefa aos alunos;
- Informar os alunos que podem realizar a tarefa em pequeno grupo (trabalho a pares);
- Explicar aos alunos que serão feitas pausas para discussão da tarefa no final de cada grupo de questões;
- Pedir aos alunos para resolverem a tarefa a caneta numa folha à parte para permitir que seja recolhida no final de cada aula e devolvida na aula seguinte. Solicitar aos alunos para corrigirem a tarefa no caderno diário.

Início: 10:30 ➔ Fim: 10:35

(5) Resolução da tarefa – Grupo I **(20 minutos)**

- **Metodologia de trabalho:** Trabalho em pequeno grupo (trabalho a pares).

Ação do professor:
- Circular pela sala de aula para tirar dúvidas e apoiar os alunos os alunos com eventuais dificuldades que surjam na resolução do Grupo I da tarefa;
- Selecionar alguns alunos para apresentarem a sua resolução no quadro;
- Observar as respostas dadas pelos alunos da turma com o objetivo de identificar os alunos com mais dificuldades e perceber os seus raciocínios;
- Interromper a aula para fazer uma explicação para toda a turma caso existam dúvidas comuns a muitos alunos.

Questões 1, 2 e 3

Objetivo:
- Deduzir a derivada das funções e^x e $\ln(x)$;
- Aplicar as regras de derivação já estudadas no cálculo de derivadas envolvendo as funções e^x e $\ln(x)$;
- Determinar a derivada de $\log_a(x)$.

Resolução esperada:

1 – a)

Temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$$

$$= e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x \times 1 \; (limite\ notável) = e^x$$

Como x é um número real qualquer, podemos concluir que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$$

1 – b)

Temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{1}{x} \times 1 \; (limite\ notável)$$

$$= \frac{1}{x}$$

Para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se $\left(ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$.

Dificuldades previstas:

- Reconhecer os limites notáveis;
- Detetar a conveniência de efetuar uma mudança de variável.

Ação do professor:
- Perguntar à turma que limites notáveis conhecem que envolvam as funções e^x e $\ln(x)$;
- Sugerir ao aluno que faça uma mudança de variável conveniente.

Resolução esperada: recorrer às regras de derivação estudadas na aula anterior e às derivadas das funções e^x e $\ln(x)$ deduzidas no início da aula.

2 – a)

$$f'(x) = (\ln(2))' = 0$$

2 – b)

$$g'(x) = (-3x^2 + \ln(x))' = -2 \times 3x + \frac{1}{x} = -6x + \frac{1}{x}$$

2 – c)

$$h'(x) = (x^3 \times \ln(x))' = (x^3)' \ln(x) + (\ln(x))' \times x^3 = 3x^2 \ln(x) + \frac{1}{x} \times x^3$$
$$= 3x^2 \ln(x) + x^2$$

2 – d)

$$u'(x) = (e^3 \times \ln(x))' = e^3 \times (\ln(x))' = e^3 \times \frac{1}{x} = \frac{e^3}{x}$$

2 – e)

$$j'(x) = ((e^x + \ln(x))^2)' = 2 \times (e^x + \ln(x)) \times (e^x + \ln(x))'$$
$$= 2(e^x + \ln(x))\left(e^x + \frac{1}{x}\right)$$

Estratégias:

- Calcular a derivada decompondo a potência e aplicando a regra de derivação do produto (alínea e)).

Dificuldades previstas:

- Não saber aplicar as regras de derivação já estudadas;
- Identificar a regra de derivação a utilizar em cada caso.

Ação do professor:
- Focar a atenção do aluno no quadro-resumo das regras de derivação presente no cabeçalho da tarefa e perguntar-lhe que regra é que acha adequado aplicar;
- Resolver em conjunto com o aluno a questão que suscita dificuldades.

Resolução esperada: recorrer à mudança de base para o cálculo da derivada.

3 –

Temos $(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \left(\frac{1}{\ln(a)} \times \ln(x)\right)' = \frac{1}{\ln(a)} \times (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(a)} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{xln(a)}$

Estratégias:

- Calcular a derivada utilizando a mudança de base e aplicando a regra de derivação de uma constante por uma função;
- Calcular a derivada utilizando a mudança de base e aplicando a regra de derivação do produto.

Dificuldades previstas:

- Identificar $\ln(a)$ como uma constante para cada valor de a;
- Aplicar a mudança de base sugerida;
- Aplicar as regras de derivação já conhecidas.

Ação do professor:
- Sugerir ao aluno que atribua um valor a a e determine a derivada nesse caso;
- Ajudar o aluno na substituição necessária para determinar a derivada em questão.

Início: 10:35 ➔ Fim: 10:55

(6) Discussão e correção da tarefa – Grupo I **(15 minutos)**

- Neste momento, o professor escreverá no quadro as funções e^x e $\ln(x)$ e indicará aos alunos que em conjunto iremos determinar as derivadas destas funções utilizando a definição de derivada (exercício 1 – tarefa2);

- Breve correção e discussão das questões 2 e 3 com o objetivo de identificar alguma dificuldade generalizada e para os alunos ficarem com o registo da resposta correta;
- Possível ida ao quadro por parte de alguns alunos.

Foco da discussão: deduzir a derivada das funções e^x e $\ln(x)$.

Ação do professor:
- Garantir a participação e o envolvimento dos alunos na dedução das derivadas através do questionamento individual ou coletivo.

Início: 10:55 ➔ Fim: 11:10

(7) Resolução da tarefa – Grupo II **(10 minutos)**

- **Metodologia de trabalho:** Trabalho em pequeno grupo (trabalho a pares).

Ação do professor:
- Circular pela sala de aula para tirar dúvidas e apoiar os alunos com eventuais dificuldades que surjam na resolução do Grupo II da tarefa;
- Selecionar alguns alunos para apresentarem a sua resolução no quadro;
- Observar as respostas dadas pelos alunos da turma com o objetivo de identificar os alunos com mais dificuldades e perceber os seus raciocínios;
- Interromper a aula para fazer uma explicação para toda a turma caso existam dúvidas comuns a muitos alunos.

Questões 4 e 5

Objetivo:
- Motivar os alunos para a regra de derivação do quociente;
- Aplicar a regra de derivação do quociente.

Resolução esperada: recorrer à regra de derivação do produto e ao caso particular do produto de uma constante por uma função.

4 – a)

$$f'(x) = (x^2e^x)' = (x^2)' \times e^x + (e^x)' \times x^2 = 2xe^x + e^x x^2 = e^x(2x + x^2)$$

$$g'(x) = (3e^x)' = 3 \times (e^x)' = 3e^x$$

4 – b)

$$\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{(2xe^x + e^x x^2) \times 3e^x - 3e^x(x^2e^x)}{9e^{2x}}$$

$$= \frac{6xe^{2x} + 3x^2e^{2x} - 3x^2e^{2x}}{9e^{2x}} = \frac{6xe^{2x}}{9e^{2x}} = \frac{6}{9}x = \frac{2}{3}x$$

4 – c)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{x^2e^x}{3e^x}\right)' = \left(\frac{x^2}{3}\right)' = \frac{1}{3} \times (x^2)' = \frac{2}{3}x$$

Dificuldades previstas:

- Aplicar as regras de derivação já conhecidas;
- Efetuar operações envolvendo funções exponenciais;
- Simplificar expressões algébricas.

Ação do professor: - Ajudar o aluno relembrando-lhe as propriedades das funções exponenciais.

Início: 11:10 ➔ Fim: 11:20

(8) Discussão e correção da tarefa – Grupo II **(5 minutos)**

- Breve correção da questão 4 com o objetivo de identificar alguma dificuldade generalizada e para os alunos ficarem com o registo da resposta correta;

- Possível ida ao quadro por parte de alguns alunos.

Foco da discussão: conjeturar a regra de derivação do quociente.

Início: 11:20 ➔ Fim: 11:25

(9) Encerramento da aula **(5 minutos)**

- Resolver com a ajuda e colaboração dos alunos as alíneas a) e c) da questão 5;

- Informar os alunos que as restantes alíneas são para realizar em casa e serão discutidas no início da próxima aula.

Resolução a ser apresentada:

5 – a)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+3}\right)' = \frac{(1)' \times (x^2+3) - (x^2+3)' \times 1}{(x^2+3)^2} = \frac{0 - 2x \times 1}{(x^2+3)^2} = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

5 – c)

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)' = \frac{(\ln(x))' \times x^2 - (x^2)' \times \ln(x)}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln(\mathrm{x})}{x^4} = \frac{x - 2x\ln(\mathrm{x})}{x^4}$$

$$= \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

Início: 11:25 ➔ Fim: 11:30

Anexo 11 – Plano de Aula 3

PLANO DE AULA 3	
3 de março de 2016 **Matemática A – 12ºB** **Escola Secundária da Ramada**	
Duração da aula: 90 min (2 tempos de 45 min).	**Horário da aula:** das 10:00h às 11:30h.

Sumário: Regra de derivação do quociente.
Teorema da derivada da função composta.

Tópico do Programa: Introdução ao Cálculo Diferencial II

Subtópicos:

- Funções deriváveis. Regras de derivação. Derivadas de funções elementares. Segunda definição do numero e. Teorema da derivada da função composta.

Objetivos específicos (os alunos deverão ser capazes de):

- Aplicar as regras de derivação da soma, do produto, potência e quociente no cálculo de derivadas;
- Trabalhar com a composição de funções;
- Mobilizar as regras supramencionadas para o cálculo de derivadas.

Conhecimentos prévios:

- Conceito de derivada;
- Derivada das funções: constante, identidade, afim, quadrática e cúbica;
- Regra de derivação da soma, produto, potência;
- Derivada da função e^x e $\ln(x)$;
- Função composta.

Recursos:

Aluno:

- Material de escrita (papel, lápis e borracha); Manual escolar.

Professor:

- Tarefas: “Regras de derivação (quociente)” e “Teorema da derivada da função composta”; Versão resumida do “Plano de aula”; Manual escolar; Correção das tarefas.

Capacidades transversais:

- Raciocínio matemático;
- Comunicação matemática;
- Rigor na escrita (utilização correta da linguagem simbólica relacionada com as derivadas e com a composição de funções);
- Interpretação de enunciados (linguagem natural);
- Autonomia;
- Espírito crítico.

Contextualização:

- Esta será a terceira aula sobre as regras de derivação. Em primeiro lugar será concluída a tarefa 2 iniciada na aula passada com o objetivo de os alunos inferirem a regra de derivação do quociente. De seguida, terá lugar um momento de sistematização das regras de derivação já abordadas nas aulas anteriores com especial ênfase na regra de derivação da potência, pois é a regra de derivação que até ao momento suscitou mais dificuldades. Por fim, será proposto aos alunos uma tarefa com o objetivo de iniciar o estudo do teorema da derivada da função composta, deduzir as derivadas de funções da forma e^u, $\ln(u)$, a^u e $\log_a(u)$ e determinar derivadas utilizando as regras de derivação. A resolução desta tarefa prolongar-se-á à próxima aula.

Avaliação:

- A avaliação será reguladora em relação à compreensão e ao estudo das regras de derivação e do teorema da derivada da função composta;
- Serão avaliados aspetos como: o envolvimento na resolução da tarefa; o empenho e a participação nos momentos de discussão em grande grupo.

Observação:

- Existe um aluno que se encontra a realizar um plano de trabalho próprio uma vez que apresenta um grande desfasamento em relação ao nível de conhecimento matemático da turma. Este trabalho será desenvolvido com o apoio da professora Inês Campos e da Cristiana Coito.

Metodologia de trabalho:

- Momento de discussão e correção, em grande grupo, do grupo II da tarefa 2 que ficou para realizar em casa;
- Momento de sistematização e consolidação, em grande grupo, das regras de derivação já estudadas em aulas anteriores;
- Trabalho autónomo dos alunos na resolução das primeiras 3 questões da tarefa 3 envolvendo a composição de funções e o teorema da derivada da função composta.

Desenvolvimento da aula:

(0) Preparação da sala de aula **(0 minutos)**

- O professor entra na sala antes do início da aula e certifica-se que o quadro está em condições de ser utilizado: limpo e com o material necessário para escrita.

Objetivo: garantir que o início da aula decorre sem perturbações.

(1) Início da aula: entrada dos alunos e ditado do sumário **(5 minutos)**

- O sumário é ditado aos alunos. Registo de faltas.

Objetivo: dar a conhecer aos alunos os assuntos que vão ser tratados ao longo da aula.

Início: 10:00 → Fim: 10:05

(2) Discussão e correção do trabalho de casa **(25 minutos)**

- Resolução do grupo II da tarefa 2.

Ação do professor:
- Questionar os alunos sobre dúvidas ou dificuldades na realização do trabalho de casa;
- Realizar no quadro, se necessário, a correção das alíneas que suscitem maiores dificuldades;
- Esclarecer eventuais questões que ainda possam surgir em relação aos conceitos estudados na aula anterior.

Questões 4 e 5

Objetivo:
- Motivar os alunos para a regra de derivação do quociente;
- Aplicar a regra de derivação do quociente.

Resolução esperada: recorrer à regra de derivação do produto e ao caso particular do produto de uma constante por uma função.

4 – a)

$$f'(x) = (x^2 e^x)' = (x^2)' \times e^x + (e^x)' \times x^2 = 2xe^x + e^x x^2 = e^x(2x + x^2)$$

$$g'(x) = (3e^x)' = 3 \times (e^x)' = 3e^x$$

4 – b)

$$\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=\frac{(2xe^x+e^x x^2)\times 3e^x-3e^x(x^2e^x)}{9e^{2x}}$$

$$=\frac{6xe^{2x}+3x^2e^{2x}-3x^2e^{2x}}{9e^{2x}}=\frac{6xe^{2x}}{9e^{2x}}=\frac{6}{9}x=\frac{2}{3}x$$

4 – c)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\left(\frac{x^2e^x}{3e^x}\right)'=\left(\frac{x^2}{3}\right)'=\frac{1}{3}\times(x^2)'=\frac{2}{3}x$$

Dificuldades previstas:

- Aplicar as regras de derivação já conhecidas;
- Efetuar operações envolvendo funções exponenciais;
- Simplificar expressões algébricas.

Ação do professor: - Ajudar o aluno relembrando-lhe as propriedades das funções exponenciais.

Foco da discussão: conjeturar a regra de derivação do quociente.

Resolução esperada:

5 – a)

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x^2+3}\right)'=\frac{(1)'\times(x^2+3)-(x^2+3)'\times 1}{(x^2+3)^2}=\frac{0-2x\times 1}{(x^2+3)^2}=-\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

5 – b)

$$f'(x)=\left(\frac{2x}{x+1}\right)'=\frac{(2x)'(x+1)-(x+1)'\times 2x}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{(x+1)^2}$$

5 – c)

$$f'(x)=\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)'=\frac{(\ln(x))'\times x^2-(x^2)'\times\ln(x)}{(x^2)^2}=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\ln(x)}{x^4}=\frac{x-2x\ln(x)}{x^4}$$

$$=\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$

5 – d)

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-e^4}{e^x}+e^4\right)'=\frac{(x^2-e^4)'e^x-(e^x)'(x^2-e^4)}{(e^x)^2}+0$$

$$=\frac{2xe^x-e^x(x^2-e^4)}{(e^x)^2}=\frac{e^x(2x-x^2+e^4)}{(e^x)^2}=\frac{2x-x^2+e^4}{e^x}$$

Estratégias:

- Calcular as derivadas transformando os quocientes num produto e aplicando a regra de derivação do produto e da potência.

Dificuldades previstas:

- Aplicar a regra de derivação do quociente;
- Aplicar em simultâneo as regras de derivação do produto e da potência.

Ação do professor:

- Perguntar ao aluno qual é a regra de derivação que acha adequado utilizar e ajudá-lo a aplicá-la;
- Sugerir ao aluno que comece por aplicar a regra de derivação do produto, seguida da regra de derivação da potência.

Início: 10:05 ➔ Fim: 10:30

---

(3) Sistematização das regras de derivação **(15 minutos)**

- Enunciar, com a ajuda e colaboração dos alunos, as regras de derivação já estudadas até ao momento (regra de derivação da soma, produto, potência e quociente e derivadas das funções e^x, $\ln(x)$ e $\log_a(x)$);
- Dar um exemplo de aplicação da regra de derivação da potência;
- Alertar os alunos para a correta utilização da notação envolvendo as derivadas;

Objetivo:

- Esclarecer eventuais dúvidas relacionadas com as regras de derivação já estudadas;
- Chamar à atenção dos alunos para os erros mais comuns que cometeram até ao momento no cálculo das derivadas (especial ênfase na aplicação da regra de derivação da potência);
- Reforçar a importância da utilização correta da notação envolvendo as derivadas.

Início: 10:30 ➔ Fim: 10:45

---

(4) Apresentação e distribuição da tarefa **(5 minutos)**

- Distribuir o enunciado da tarefa 3 aos alunos;
- Informar os alunos que podem realizar a tarefa em pequeno grupo (trabalho a pares);
- Explicar aos alunos que serão feitas pausas para discussão da tarefa. A primeira interrupção a realizar nesta aula ocorrerá no final da questão 2 e a segunda no final da questão 3;
- Pedir aos alunos para resolverem a tarefa a caneta numa folha à parte para permitir que seja recolhida no final de cada aula e devolvida na aula seguinte. Solicitar aos alunos para corrigirem a tarefa no caderno diário.

Início: 10:45 ➔ Fim: 10:50

---

(5) Resolução da tarefa – Questões 1 e 2 **(15 minutos)**

- Metodologia de trabalho: Trabalho em pequeno grupo (trabalho a pares).

Ação do professor:
- Circular pela sala de aula para clarificar questões e apoiar os alunos com eventuais dificuldades que surjam na resolução das questões 1 e 2 da tarefa;
- Selecionar alguns alunos para apresentarem a sua resolução no quadro;
- Observar as respostas dadas pelos alunos da turma com o objetivo de identificar os alunos com mais dificuldades e perceber os seus raciocínios;
- Interromper a aula para fazer uma explicação para toda a turma caso existam dúvidas comuns a muitos alunos.

Questões 1 e 2

Objetivo: rever o conceito de composição de funções.

Resolução esperada:

1 – a)

Temos

$$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge f(x)\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$$
$$=\left\{x\in\mathbb{R}: (x-1)^2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

e

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g((x-1)^2)=\frac{1}{(x-1)^2}$$

Temos

$$D_{f\circ g}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge\frac{1}{x}\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

e

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2$$

1 – b)

Temos

$$(g\circ f)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$$

$$(f\circ g)\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}-1\right)^2=(2-1)^2=1$$

2 – a)

Por exemplo, considerando $g(x) = x^2$ e $f(x) = x + 5$, temos $h = g \circ f$.

2 – b)

Temos

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = x^2 + 5$$

Dificuldades previstas:

- Determinar o domínio da função composta;
- Trabalhar com a composição de funções;
- Identificar os fatores envolvidos numa composição de funções.

Ação do professor:
- Recordar como se define o domínio da função composta;
- Relembrar ao aluno o conceito de composição de funções.

Início: 10:50 ➔ Fim: 11:05

(6) Discussão e correção da tarefa – Questões 1 e 2 **(15 minutos)**

- Breve correção e discussão das questões 1 e 2 com o objetivo de identificar alguma dificuldade generalizada e para os alunos ficarem com o registo da resposta correta;
- Possível ida ao quadro por parte de alguns alunos.

Foco da discussão: aferir os resultados a que chegaram os alunos e esclarecer eventuais dúvidas.

Início: 11:05 ➔ Fim: 11:20

(7) Encerramento da aula **(10 minutos)**

- Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 3 da tarefa.
- **Metodologia de trabalho:** Trabalho em pequeno grupo (trabalho a pares).

Ação do professor:
- Circular pela sala de aula para clarificar questões e apoiar os alunos com eventuais dificuldades que surjam na resolução da questão 3 da tarefa;
- Selecionar alguns alunos para apresentarem a sua resolução no quadro;
- Observar as respostas dadas pelos alunos da turma com o objetivo de identificar os alunos com mais dificuldades e perceber os seus raciocínios;
- Interromper a aula para fazer uma explicação para toda a turma caso existam dúvidas comuns a muitos alunos.

Questão 3

Objetivo: motivar os alunos para o estudo do teorema da derivada da função composta.

Resolução esperada:

3 – a)

i) Temos

$$h(x) = \ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$$

Logo,

$$h'(x) = (\ln(2x))' = (\ln(2) + \ln(x))' = (\ln(2))' + (\ln(x))' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

ii) Ora, tomando g a função definida por $g(x) = \ln(x)$, temos:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x) = \ln(2x) = h(x)$$

e

$$g'\big(f(x)\big) \times f'(x) = g'(2x) \times (2x)' = g'(2x) \times 2 = \frac{1}{2x} \times 2 = \frac{1}{x}$$

3 – b)

i) Temos

$$h'(x) = (e^{2x})' = (e^x \times e^x)' = (e^x)'e^x + (e^x)'e^x = e^{2x} + e^{2x} = 2e^{2x}$$

ii) Ora

$$g'\big(f(x)\big) \times f'(x) = g'(2x) \times (2x)' = g'(2x) \times 2 = e^{2x} \times 2 = 2e^{2x}$$

iii) Temos

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x) = e^{2x} = h(x)$$

Assim, por i) e ii) temos que

$$(g \circ f)'(x) = h'(x) = 2e^{2x} = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$$

Dificuldades previstas:

- Identificar as propriedades convenientes do logaritmo e da exponencial a utilizar;
- Reduzir o problema ao cálculo de derivadas de funções conhecidas.

Ação do professor: **-** Perguntar à turma que propriedades do logaritmo e da exponencial conhecem que ajudem na resolução da questão.

- Informar os alunos que a questão 3 é para terminar em casa e será discutida no início da próxima aula.

Início: 11:20 ➔ Fim: 11:30

Anexo 12 – Plano de Aula 4

PLANO DE AULA 4	
4 de março de 2016 **Matemática A – 12ºB** **Escola Secundária da Ramada**	
Duração da aula: 90 min (2 tempos de 45 min).	**Horário da aula:** das 08:15h às 09:45h.

Sumário: Teorema da derivada da função composta.
Derivada de funções da forma e^u, $\ln(u)$, a^u e $\log_a(u)$.

Tópico do Programa: Introdução ao Cálculo Diferencial II

Subtópicos:

- Funções deriváveis. Regras de derivação. Derivadas de funções elementares. Segunda definição do numero e. Teorema da derivada da função composta.

Objetivos específicos (os alunos deverão ser capazes de):

- Utilizar o teorema da derivada da função composta no cálculo de derivadas;
- Aplicar as regras de derivação da soma, do produto, potência e quociente no cálculo de derivadas;
- Mobilizar as regras supramencionadas para o cálculo de derivadas envolvendo funções compostas;
- Aplicar o teorema da derivada da função composta para deduzir as derivadas de funções da forma e^u, $\ln(u)$, a^u e $\log_a(u)$.

Conhecimentos prévios:

- Conceito de derivada;
- Derivada das funções: constante, identidade, afim, quadrática e cúbica;
- Regra de derivação da soma, produto, potência e quociente;
- Derivada da função e^x e $\ln(x)$;
- Função composta.

Recursos:

Aluno:

- Material de escrita (papel, lápis e borracha; Manual escolar.

Professor:

- Tarefa: "Teorema da derivada da função composta"; Versão resumida do "Plano de aula"; Manual escolar; Correção da tarefa.

Capacidades transversais:

- Raciocínio matemático;
- Comunicação matemática;
- Rigor na escrita (utilização correta da linguagem simbólica relacionada com as derivadas e com a composição de funções);
- Interpretação de enunciados (linguagem natural);
- Autonomia;
- Espírito crítico.

Contextualização:

- Esta será a quarta aula sobre as regras de derivação, onde será trabalhado o teorema da derivada da função composta. Os alunos continuarão a tarefa iniciada na aula anterior, com o objetivo de introduzir o teorema da derivada da função composta, deduzir as derivadas de funções da forma e^u, $\ln(u)$, a^u e $\log_a(u)$ e determinar derivadas utilizando as regras de derivação.

Avaliação:

- A avaliação será reguladora em relação à compreensão e ao estudo do teorema da derivada da função composta e das regras de derivação;
- Serão avaliados aspetos como: o envolvimento na resolução da tarefa; o empenho e a participação nos momentos de discussão em grande grupo.

Observação:

- Existe um aluno que se encontra a realizar um plano de trabalho próprio uma vez que apresenta um grande desfasamento em relação ao nível de conhecimento matemático da turma. Este trabalho será desenvolvido com o apoio da professora Inês Campos e da Cristiana Coito.

Metodologia de trabalho:

- Breve momento de discussão e correção, em grande grupo, do trabalho que ficou para realizar em casa (exercício 3 – tarefa 3);
- Trabalho autónomo dos alunos na resolução da tarefa 3 envolvendo o teorema da derivada da função composta;
- Momentos de discussão em grande grupo finalizando com o enunciado do teorema da derivada da função composta e com as derivadas de funções da forma e^u, $\ln(u)$, a^u e $\log_a(u)$;
- Trabalho autónomo dos alunos na resolução de exercícios do manual escolar referentes às regras de derivação já estudadas, caso terminem a tarefa em tempo de aula.

Desenvolvimento da aula:

(0) Preparação da sala de aula **(0 minutos)**

- O professor entra na sala antes do início da aula e certifica-se que o quadro está em condições de ser utilizado: limpo e com o material necessário para escrita.

Objetivo: garantir que o início da aula decorre sem perturbações.

(1) Início da aula: entrada dos alunos e ditado do sumário **(5 minutos)**

- O sumário é ditado aos alunos. Registo de faltas.

Objetivo: dar a conhecer aos alunos os assuntos que vão ser tratados ao longo da aula.

Início: 08:15 ➔ Fim: 08:20

(2) Discussão e correção do trabalho de casa **(15 minutos)**

- Resolução da alínea b) do exercício 3 da tarefa 3.

Ação do professor:
- Questionar os alunos sobre dúvidas ou dificuldades na realização do trabalho de casa;
- Realizar no quadro, se necessário, a correção das alíneas que suscitem maiores dificuldades;
- Esclarecer eventuais questões que ainda possam surgir em relação aos conceitos estudados na aula anterior.

- Proposta de resolução do trabalho de casa:

3 – b)

i) Temos

$$h'(x) = (e^{2x})' = (e^x \times e^x)' = (e^x)'e^x + (e^x)'e^x = e^{2x} + e^{2x} = 2e^{2x}$$

ii) Ora

$$g'\big(f(x)\big) \times f'(x) = g'(2x) \times (2x)' = g'(2x) \times 2 = e^{2x} \times 2 = 2e^{2x}$$

iii) Temos

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x) = e^{2x} = h(x)$$

Assim, por i) e ii) temos que

$$(g \circ f)'(x) = h'(x) = 2e^{2x} = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$$

Dificuldades previstas:

- Identificar as propriedades convenientes do logaritmo e da exponencial a utilizar;
- Reduzir o problema ao cálculo de derivadas de funções conhecidas.

Ação do professor:

- Perguntar à turma que propriedades do logaritmo e da exponencial conhecem que ajudem na resolução da questão.

Foco da discussão: motivar o teorema da derivada da função composta.

Início: 08:20 ➔ Fim: 08:35

(3) Resolução da tarefa – Questões 4 e 5 **(25 minutos)**

- Metodologia de trabalho: Trabalho em pequeno grupo (trabalho a pares).

Ação do professor:

- Circular pela sala de aula para tirar dúvidas e apoiar os alunos com eventuais dificuldades que surjam na resolução das questões 4 e 5 da tarefa;
- Selecionar alguns alunos para apresentarem a sua resolução no quadro;
- Observar as respostas dadas pelos alunos da turma com o objetivo de identificar os alunos com mais dificuldades e perceber os seus raciocínios;
- Interromper a aula para fazer uma explicação para toda a turma caso existam dúvidas comuns a muitos alunos.

Questões 4 e 5

Objetivo:

- Aplicar o teorema da derivada da função composta no cálculo de derivadas;
- Utilizar o teorema da derivada da função composta para deduzir as derivadas das funções e^u, $\ln(u)$, a^u e $\log_a(u)$.

Resolução esperada: recorrer ao teorema da derivada da função composta para calcular as derivadas.

4 – a)

Pelo teorema da derivada da função composta temos

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \times f'(x) = g'\big(\sqrt{x}\big) \times \big(\sqrt{x}\big)' = \big(2\sqrt{x} + 3\big) \times \frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \big(2\sqrt{x} + 3\big) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

4 – b)

Pelo teorema da derivada da função composta temos

$$(g \circ f)'(3) = g'(f(3)) \times f'(3) = g'(3^2) \times f'(3) = g'(9) \times 2 \times 3 = 5 \times 6 = 30$$

4 – c)

Considerando $g(x) = e^x$ e $f(x) = -x^2 + 5$, temos $h(x) = (g \circ f)(x)$.

Logo, pelo teorema da derivada da função composta, vem

$$\begin{aligned} h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) &= g'(-x^2 + 5) \times (-x^2 + 5)' \\ &= g'(-x^2 + 5) \times (-2x) = e^{-x^2+5} \times (-2x) = -2xe^{-x^2+5} \end{aligned}$$

4 – d)

Considerando $g(x) = \ln(x)$ e $f(x) = x^2$, temos $t(x) = (g \circ f)(x)$.

Logo, pelo teorema da derivada da função composta, vem

$$\begin{aligned} t'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = g'(x^2) \times (x^2)' = g'(x^2) \times 2x = \frac{1}{x^2} \times 2x \\ = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Estratégias:

- Na alínea d), não respeitando a indicação dada, o aluno poderá utilizar as propriedades do logaritmo e as regras de derivação já conhecidas para determinar a derivada.

Dificuldades previstas:

- Decompor as funções dadas;
- Aplicar o teorema da derivada da função composta.

Ação do professor:

- Recordar ao aluno aquilo que foi feito na questão 1 de modo a sugerir-lhe um dos fatores envolvidos na composição;

- Aplicar em conjunto com o aluno o teorema da derivada da função composta.

Resolução esperada: recorrer ao teorema da derivada da função composta para calcular as derivadas.

5 – a)

i) Considerando $f(x) = e^x$, temos $h(x) = (f \circ u)(x)$.

Logo, pelo teorema da derivada da função composta, vem

$$h'(x) = (f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \times u'(x) = e^{u(x)} \times u'(x) = u'(x)e^x$$

ii) Considerando $f(x) = \ln(x)$, temos $t(x) = (f \circ u)(x)$.

Logo, pelo teorema da derivada da função composta, vem

$$t'(x) = (f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big) \times u'(x) = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

5 – b)

i) Temos

$$h'(x) = \left(a^{u(x)}\right)' = \left(e^{\ln(a)\times u(x)}\right)' = \big(\ln(a) \times u(x)\big)' \times e^{\ln(a)\times u(x)}$$
$$= \ln(a) \times u'(x) \times e^{\ln(a)\times u(x)} = u'(x) \times a^{u(x)} \times \ln(a)$$

ii) Temos

$$t'(x) = (\log_a(u(x)))' = \left(\frac{\ln(u(x))}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)} \times \big(\ln\big(u(x)\big)\big)' = \frac{1}{\ln(a)} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$
$$= \frac{u'(x)}{u(x)\ln(a)}$$

Dificuldades previstas:

- Decompor as funções e aplicar o teorema da derivada da função composta;
- Aplicar o teorema da derivada da função composta a funções em abstrato.

Ação do professor:
- Recorrer ao caso particular resolvido na questão 2 para orientar o aluno na resolução da questão 3;
- Aplicar em conjunto com o aluno o teorema da derivada da função composta.

Início: 08:35 ➔ Fim: 09:00

(4) Discussão e correção da tarefa – Questões 4 e 5 **(20 minutos)**

- Breve correção e discussão das questões 4 e 5 com o objetivo de identificar alguma dificuldade generalizada e para os alunos ficarem com o registo da resposta correta;
- Possível ida ao quadro por parte de alguns alunos para explicarem os seus raciocínios.

Foco da discussão: deduzir a derivada das funções da forma e^u, $\ln(u)$, a^u e $\log_a(u)$.

Início: 09:00 ➔ Fim: 09:20

(5) Resolução da tarefa – Questão 6 **(15 minutos)**

- **Metodologia de trabalho:** Trabalho em pequeno grupo (trabalho a pares).

Ação do professor:
- Circular pela sala de aula para tirar dúvidas e apoiar os alunos com eventuais dificuldades que surjam na resolução das questões 4 e 5 da tarefa;

- Selecionar alguns alunos para apresentarem a sua resolução no quadro;
- Observar as respostas dadas pelos alunos da turma com o objetivo de identificar os alunos com mais dificuldades e perceber os seus raciocínios;
- Interromper a aula para fazer uma explicação para toda a turma caso existam dúvidas comuns a muitos alunos.

Questão 6

Objetivo: aplicar as regras de derivação no cálculo de derivada.

Resolução esperada:

6– a)

$$f'(x) = (\ln(x^2+5))' = \frac{(x^2+5)'}{x^2+5} = \frac{2x}{x^2+5}$$

6 – b)

$$f'(x) = \left(e^{x^3+x}+1\right)' = \left(e^{x^3+x}\right)' = (x^3+x)'e^{x^3+x} = (3x^2+1)e^{x^3+x}$$

6 – c)

$$f'(x) = \left(2^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \times 2^{\frac{1}{x}} \times \ln(2) = -\frac{1}{x^2} \times 2^{\frac{1}{x}} \times \ln(2) = -\frac{\ln(2) \times 2^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

6 – d)

$$f'(x) = (\log_2(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln(2)} = \frac{2x}{(x^2+1)\ln(2)}$$

6 – e)

$$f'(x) = \left(\frac{x}{2} \times e^{5x^2}\right)' = \left(\frac{x}{2}\right)' e^{5x^2} + \left(e^{5x^2}\right)' \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \times e^{5x^2} + (5x^2)'^{e^{5x^2}} \times \frac{x}{2}$$
$$= \frac{e^{5x^2}}{2} + 10xe^{5x^2} \times \frac{x}{2} = \frac{e^{5x^2}}{2} + 5x^2e^{5x^2} = e^{5x^2}\left(\frac{1}{2} + 5x^2\right)$$

6 – f)

$$f'(x) = \left(ln\left(\frac{x^4}{2x-1}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x^4}{2x-1}\right)'}{\frac{x^4}{2x-1}} = \frac{\frac{(x^4)'(2x-1)-(2x-1)'x^4}{(2x-1)^2}}{\frac{x^4}{2x-1}}$$
$$= \frac{4x^3(2x-1)-2x^4}{(2x-1)^2} \times \frac{2x-1}{x^4} = \frac{4(2x-1)-2x}{x(2x-1)} = \frac{6x-4}{x(2x-1)}$$

Estratégias:

- Calcular as derivadas recorrendo às regras de derivação;
- Calcular as derivadas recorrendo ao teorema da derivada da função composta.

Dificuldades previstas:

- Identificar a regra de derivação a aplicar em cada caso;
- Aplicar a regra de derivação do produto e em simultâneo derivar e^{5x^2}.
- Derivar uma função logarítmica cujo argumento é um quociente.

Ação do professor:
- Perguntar ao aluno qual é a regra de derivação que acha adequado utilizar e ajudá-lo a aplicá-la;
- Sugerir ao aluno que comece por aplicar a regra de derivação do produto e de seguida derive a função e^{5x^2} aplicando a regra de derivação conveniente;
- Sugerir ao aluno que determine à parte a derivada do argumento do logaritmo de forma a simplificar a expressão no cálculo da derivada.

Início: 09:20 ➔ Fim: 09:35

---

(6) Encerramento da aula **(10 minutos)**

- Resolver com a ajuda e colaboração dos alunos as alíneas a) e c) da questão 6;
- Informar os alunos que as restantes alíneas são para realizar em casa e serão discutidas no início da próxima aula.

Início: 09:35 ➔ Fim: 09:45

Anexo 13 – Plano de Aula 5

PLANO DE AULA 5	
8 de março de 2016 **Matemática A – 12ºB** **Escola Secundária da Ramada**	
Duração da aula: 90 min (2 tempos de 45 min).	**Horário da aula:** das 10:00h às 11:30h.

Sumário: Tarefa de aplicação das regras de derivação e do teorema da derivada da função composta.

Tópico do Programa: Introdução ao Cálculo Diferencial II

Subtópicos:

- Funções deriváveis. Regras de derivação. Derivadas de funções elementares. Segunda definição do numero e. Teorema da derivada da função composta.

Objetivos específicos (os alunos deverão ser capazes de):

- Aplicar as regras de derivação da soma, do produto, potência e quociente no cálculo de derivadas;
- Utilizar o teorema da derivada da função composta no cálculo de derivadas;
- Utilizar o significado geométrico de derivada de uma função num ponto.

Conhecimentos prévios:

- Conceito de derivada;
- Derivada das funções: constante, identidade, afim, quadrática e cúbica;
- Regra de derivação da soma, produto, potência e quociente;
- Derivada da função e^x e $\ln(x)$;
- Teorema da derivada da função composta;
- Derivada das funções e^u, $\ln(u)$, a^u e $\log_a(u)$.

Recursos:

Aluno:

- Material de escrita (papel, lápis e borracha); Manual escolar.

Professor:

- Tarefa: "Regras de derivação"; Questão de aula; Versão resumida do "Plano de aula"; Manual escolar; Correção da tarefa.

Capacidades transversais:

- Raciocínio matemático;
- Comunicação matemática;
- Rigor na escrita (utilização correta da linguagem simbólica relacionada com as derivadas);
- Interpretação de enunciados (linguagem natural);
- Autonomia;
- Espírito crítico.

Contextualização:

- Esta será a quinta aula sobre as regras de derivação. Será proposto aos alunos uma tarefa com o objetivo de praticarem e consolidarem as regras de derivação aprendidas ao longo das últimas 4 aulas.

Avaliação:

- A avaliação será reguladora em relação à compreensão e ao estudo das regras de derivação;
- Serão avaliados aspetos como: o envolvimento na resolução da tarefa; o empenho e a participação nos momentos de discussão em grande grupo.

Observação:

- Existe um aluno que se encontra a realizar um plano de trabalho próprio uma vez que apresenta um grande desfasamento em relação ao nível de conhecimento matemático da turma. Este trabalho será desenvolvido com o apoio da professora Inês Campos e da Cristiana Coito.

Metodologia de trabalho:

- Breve momento de discussão e correção, em grande grupo, do trabalho que ficou para realizar em casa (exercício 5 b) e exercício 6 – tarefa 3);
- Trabalho autónomo dos alunos na resolução de uma tarefa envolvendo as regras de derivação;

- Momentos de discussão em grande grupo finalizando com a correção das questões da tarefa;

- Trabalho autónomo dos alunos na resolução de exercícios do manual escolar referentes às regras de derivação, caso terminem a tarefa em tempo de aula.

Desenvolvimento da aula:

(0) Preparação da sala de aula **(0 minutos)**

- O professor entra na sala antes do início da aula e certifica-se que o quadro está em condições de ser utilizado: limpo e com o material necessário para escrita.

Objetivo: garantir que o início da aula decorre sem perturbações.

(1) Início da aula: entrada dos alunos e ditado do sumário **(5 minutos)**

- O sumário é ditado aos alunos. Registo de faltas.

Objetivo: dar a conhecer aos alunos os assuntos que vão ser tratados ao longo da aula.

Início: 10:00 ➔ Fim: 10:05

(2) Discussão e correção do trabalho de casa **(15 minutos)**

- Resolução do exercício 5 b) e do exercício 6 da tarefa 3.

Ação do professor:
- Questionar os alunos sobre dúvidas ou dificuldades na realização do trabalho de casa;
- Realizar no quadro, se necessário, a correção das alíneas que suscitem maiores dificuldades;
- Esclarecer eventuais questões que ainda possam surgir em relação aos conceitos estudados na aula anterior.

- Proposta de resolução do trabalho de casa:

5 – b)

i) Temos

$$h'(x) = \left(a^{u(x)}\right)' = \left(e^{\ln(a)\times u(x)}\right)' = \left(\ln(a) \times u(x)\right)' \times e^{\ln(a)\times u(x)}$$
$$= \ln(a) \times u'(x) \times e^{\ln(a)\times u(x)} = u'(x) \times a^{u(x)} \times \ln(a)$$

ii) Temos

$$t'(x) = (\log_a(u(x)))' = \left(\frac{\ln(u(x))}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)} \times \left(\ln\left(u(x)\right)\right)' = \frac{1}{\ln(a)} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$
$$= \frac{u'(x)}{u(x)\ln(a)}$$

Dificuldades previstas:

- Aplicar o teorema da derivada da função composta a funções em abstrato.

Ação do professor: - Aplicar em conjunto com o aluno o teorema da derivada da função composta.

- Proposta de resolução do trabalho de casa:

6– a)

$$f'(x) = (\ln(x^2+5))' = \frac{(x^2+5)'}{x^2+5} = \frac{2x}{x^2+5}$$

6 – b)

$$f'(x) = \left(e^{x^3+x}+1\right)' = \left(e^{x^3+x}\right)' = (x^3+x)'^{e^{x^3+x}} = (3x^2+1)e^{x^3+x}$$

6 – c)

$$f'(x) = \left(2^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \times 2^{\frac{1}{x}} \times \ln(2) = -\frac{1}{x^2} \times 2^{\frac{1}{x}} \times \ln(2) = -\frac{\ln(2) \times 2^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

6 – d)

$$f'(x) = (\log_2(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln(2)} = \frac{2x}{(x^2+1)\ln(2)}$$

6 – e)

$$f'(x) = \left(\frac{x}{2} \times e^{5x^2}\right)' = \left(\frac{x}{2}\right)' e^{5x^2} + \left(e^{5x^2}\right)' \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \times e^{5x^2} + (5x^2)'^{e^{5x^2}} \times \frac{x}{2}$$

$$= \frac{e^{5x^2}}{2} + 10xe^{5x^2} \times \frac{x}{2} = \frac{e^{5x^2}}{2} + 5x^2e^{5x^2} = e^{5x^2}\left(\frac{1}{2} + 5x^2\right)$$

6 – f)

$$f'(x) = \left(ln\left(\frac{x^4}{2x-1}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x^4}{2x-1}\right)'}{\frac{x^4}{2x-1}} = \frac{\frac{(x^4)'(2x-1)-(2x-1)'x^4}{(2x-1)^2}}{\frac{x^4}{2x-1}}$$

$$= \frac{4x^3(2x-1)-2x^4}{(2x-1)^2} \times \frac{2x-1}{x^4} = \frac{4(2x-1)-2x}{x(2x-1)} = \frac{6x-4}{x(2x-1)}$$

Estratégias:

- Calcular as derivadas recorrendo às regras de derivação;

- Calcular as derivadas recorrendo ao teorema da derivada da função composta.

Dificuldades previstas:

- Identificar a regra de derivação a aplicar em cada caso;

- Aplicar a regra de derivação do produto e em simultâneo derivar e^{5x^2}.

- Derivar uma função logarítmica cujo argumento é um quociente.

Ação do professor:
- Perguntar ao aluno qual é a regra de derivação que acha adequado utilizar e ajudá-lo a aplicá-la;
- Sugerir ao aluno que comece por aplicar a regra de derivação do produto e de seguida derive a função e^{5x^2} aplicando a regra de derivação conveniente;
- Sugerir ao aluno que determine à parte a derivada do argumento do logaritmo de forma a simplificar a expressão no cálculo da derivada.

Início: 10:05 ➔ Fim: 10:20

(3) Apresentação e distribuição da tarefa **(5 minutos)**

- Distribuir o enunciado da tarefa aos alunos;
- Informar os alunos que podem realizar a tarefa em pequeno grupo (trabalho a pares);
- Explicar aos alunos que serão feitas pausas para discussão da tarefa no final de cada grupo de questões;
- Pedir aos alunos para resolverem a tarefa a caneta numa folha à parte para permitir que seja recolhida no final de cada aula e devolvida na aula seguinte. Solicitar aos alunos para corrigirem a tarefa no caderno diário.

Início: 10:20 ➔ Fim: 10:25

(4) Resolução da tarefa – Grupo I **(25 minutos)**

- **Metodologia de trabalho:** Trabalho em pequeno grupo (trabalho a pares).

Ação do professor:
- Circular pela sala de aula para tirar dúvidas e apoiar os alunos com eventuais dificuldades que surjam na resolução do Grupo I da tarefa;
- Selecionar alguns alunos para apresentarem a sua resolução no quadro;
- Observar as respostas dadas pelos alunos da turma com o objetivo de identificar os alunos com mais dificuldades e perceber os seus raciocínios;
- Interromper a aula para fazer uma explicação para toda a turma caso existam dúvidas comuns a muitos alunos.

Questões 1, 2, 3 e 4

Objetivo:
- Interpretar geometricamente o conceito de derivada de uma função num ponto;
- Aplicar as regras de derivação já estudadas no cálculo de derivadas;
- Aplicar o teorema da derivada da função composta.

Resolução esperada: recorrer à regra de derivação da soma e ao declive da reta r.

1 – a)

Temos $(f+g)'(4) = f'(4) + g'(4)$.

Ora, $g'(x) = \left(\frac{7-x^2}{2}\right)' = \left(\frac{7}{2} - \frac{x^2}{2}\right)' = \left(-\frac{x^2}{2}\right)' = -\frac{1}{2} \times (x^2)' = -\frac{1}{2} \times 2x = -x$.

Logo $g'(4) = -4$.

E $f'(4)$ é igual ao declive da reta r.

Assim $f'(4) = m_r = \frac{3-(-1)}{4-0} = \frac{4}{4} = 1$.

Vem então $(f+g)'(4) = f'(4) + g'(4) = 1 - 4 = -3$.

Resolução esperada: recorrer à regra de derivação da potência.

1 – b)

$$(f^3)'(4) = 3f^2(4)f'(4) = 3 \times (3)^2 \times 1 = 3 \times 9 = 27$$

Dificuldades previstas:

- Reconhecer que a derivada de uma função num ponto é o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto;
- Determinar o declive de uma reta;
- Aplicar a regra de derivação da potência.

Ação do professor:
- Perguntar à turma qual é o significado geométrico de derivada de uma função num ponto;
- Recordar aos alunos como se determina o declive de uma reta conhecidos dois dos seus pontos;
- Perguntar ao aluno se há alguma regra de derivação que se possa aplicar e ajudá-lo a determinar a derivada.

Resolução esperada: recorrer à regra de derivação do produto e determinar a expressão analítica de g.

2 – a)

Temos $(f \times g)'(0) = f'(0)g(0) + g'(0)f(0)$.

Ora, $f'(x) = ((x+2)^2 - 2)' = ((x+2)^2)' = 2(x+2)(x+2)' = 2(x+2) = 2x + 4$.

E $g(x) = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$.

De $g(0) = 6$ vem $b = 6$ e de $g(2) = 4$ vem $4 = 2m + 6 \Leftrightarrow m = -1$.

Logo, $g(x) = -x + 6$ e, portanto $g'(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Assim $(f \times g)'(0) = f'(0)g(0) + g'(0)f(0) = 4 \times 6 + (-1) \times 2 = 24 - 2 = 22.$

2 – b)

$$(f \times g)'(1) = f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = 6 \times 5 + (-1) \times 7 = 30 - 7 = 23$$

Dificuldades previstas:

- Determinar a expressão analítica de g;
- Aplicar a regra de derivação do produto.

Ação do professor: - Perguntar ao aluno qual é o tipo de expressão analítica das funções cujo gráfico é uma reta; - Ajudar o aluno a determinar a expressão analítica de g; - Sugerir ao aluno para ir ao quadro-resumo no início da tarefa verificar como se aplica a regra de derivação do produto.

Resolução esperada: recorrer à regra de derivação do quociente e ao declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1.

3 –

Temos $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1) = \frac{f'(-1)g(-1) - g'(-1)f(-1)}{g^2(-1)}$.

Ora $f'(x) = (x^2 + 4)' = 2x$, logo $f'(-1) = -2$.

E $g'(-1)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1.

Como a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 é horizontal vem $g'(-1) = 0$.

Logo $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1) = \frac{f'(-1)g(-1) - g'(-1)f(-1)}{g^2(-1)} = \frac{-2 \times 3 - 0 \times 5}{3^2} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$.

Dificuldades previstas:

- Reconhecer que a derivada de uma função num ponto é o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto;
- Determinar o declive de uma reta horizontal;
- Aplicar a regra de derivação do quociente.

Ação do professor: - Perguntar à turma qual é o significado geométrico de derivada de uma função num ponto; - Perguntar à turma qual é o declive de uma reta horizontal; - Sugerir ao aluno para ir ao quadro-resumo no início da tarefa verificar como se aplica a regra de derivação do quociente.

Resolução esperada: recorrer ao teorema da derivada da função composta e ao declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

4 – a)

Temos $(g \circ f)'(2) = g'(f(2)) \times f'(2) = g'(2) \times f'(2)$.

Ora $g'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, logo $g'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

E $f'(2)$ é o declive da reta t, logo $f'(2) = \frac{1}{2}$.

Portanto $(g \circ f)'(2) = g'(2) \times f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

4 – b)

Temos $(f \circ g)'(4) = f'(g(4)) \times g'(4) = f'(2) \times \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Dificuldades previstas:

- Aplicar o teorema da derivada da função composta.

Ação do professor:
- Sugerir ao aluno para ir ao quadro-resumo no início da tarefa verificar como se aplica o teorema da derivada da função composta.

Início: 10:25 ➔ Fim: 10:50

(5) Discussão e correção da tarefa – Grupo I **(15 minutos)**

- Breve correção e discussão das questões 1, 2, 3 e 4 com o objetivo de identificar alguma dificuldade generalizada e para os alunos ficarem com o registo da resposta correta;
- Possível ida ao quadro por parte de alguns alunos.

Focos da discussão:
- Aferir os resultados a que chegaram os alunos e esclarecer eventuais dúvidas;
- Explorar algumas resoluções erradas.

Início: 10:50 ➔ Fim: 11:05

(6) Resolução da tarefa – Grupo II **(15 minutos)**

- **Metodologia de trabalho:** Trabalho em pequeno grupo (trabalho a pares).

Ação do professor:
- Circular pela sala de aula para tirar dúvidas e apoiar os alunos com eventuais dificuldades que surjam na resolução do Grupo II da tarefa;
- Selecionar alguns alunos para apresentarem a sua resolução no quadro;
- Observar as respostas dadas pelos alunos da turma com o objetivo de identificar os alunos com mais dificuldades e perceber os seus raciocínios;

- Interromper a aula para fazer uma explicação para toda a turma caso existam dúvidas comuns a muitos alunos.

Questões 5 e 6

Objetivo:
- Caracterizar a derivada de uma função definida por ramos;
- Praticar as regras de derivação.

Resolução esperada:

5 – a)

Para $x < 0$, temos $f'(x) = (e^x + 1)' = (e^x)' = e^x$.

Para $x > 0$, temos $f'(x) = (x^2 + 3x)' = 2x + 3$.

Como as expressões analíticas que definem f à direita e à esquerda de $x = 0$ são distintas, vamos estudar as derivadas laterais usando a definição de derivada:

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x + 1 - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x + 1}{x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 3x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x+3)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x + 3) = 3$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, f não é derivável em $x = 0$.

Assim, $D_{f'} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ e $f'(x) = \begin{cases} e^x, se\ x < 0 \\ 2x + 3, se\ x > 0 \end{cases}$

5 – b)

Temos $(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(-2) \times g'(1) = e^{-2} \times 2 = \frac{2}{e^2}$.

E $(f \circ g)'(3) = f'(g(3)) \times g'(3) = f'(2) \times g'(3) = 7 \times 2 = 14$.

Estratégias:

- Mostrar que a função não é derivável em $x = 0$ através do estudo da continuidade nesse ponto.

Dificuldades previstas:

- Analisar se existe derivada no ponto $x = 0$;
- Calcular as derivadas laterais;
- Aplicar o teorema da derivada da função composta.

Ação do professor:
- Ajudar o aluno no estudo da derivada da função em $x = 0$;
- Relembrar o aluno da definição de derivada lateral;
- Sugerir ao aluno para ir ao quadro-resumo no início da tarefa verificar como se aplica o teorema da derivada da função composta.

Resolução esperada: aplicar as regras de derivação no cálculo das derivadas.

6 – a)

$$f'(x) = \left(-\frac{3x^3}{2} - 4x^2 - x + 5\right)' = -\frac{9x^2}{2} - 8x - 1$$

6 – b)

$$f'(x) = ((x^2 + 5x)^3)' = 3(x^2 + 5x)^2(x^2 + 5x)' = 3(x^2 + 5x)^2(2x + 5)$$

6 – c)

$$f'(x) = \left(\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)(4x - 2)\right)' = \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)'(4x - 2) + (4x - 2)'\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)$$

$$= \left(2x - \frac{1}{2}\right)(4x - 2) + 4\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) = 8x^2 - 4x - 2x + 1 + 4x^2 - 2x$$

$$= 12x^2 - 8x + 1$$

6 – d)

$$f'(x) = \left(3^{x^2+5x}\right)' = (x^2 + 5x)'3^{x^2+5x} \times \ln(3) = (2x + 5)3^{x^2+5x} \times \ln(3)$$

6 – e)

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{x+1}} = \cdots = \frac{x + 1 - x}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x(x+1)}$$

Início: 11:05 ➔ Fim: 11:20

---

(7) Encerramento da aula **(10 minutos)**

- Breve correção da questão 5 e das alíneas da questão 6 que suscitem mais dificuldades com o objetivo de identificar alguma dificuldade generalizada e para os alunos ficarem com o registo da resposta correta;
- Informar os alunos que a questão de aula 2 será para realizar em casa e entregar na próxima aula (avaliação reguladora).

Início: 11:20 ➔ Fim: 11:30
