

Recebido em 30 de Março de 1984

Modelos de exaurimento. 2 – Optimização dos parâmetros dos modelos de exaurimento composto

por

LUIS SANTOS PEREIRA

Professor Catedrático do Instituto Superior de Agronomia
Investigador do Centro de Estudos de Engenharia Rural da UTL

RESUMO

Apresenta-se um método de optimização dos parâmetros dos modelos de exaurimento composto utilizando o método dos mínimos quadrados com ponderação (MQP) para resolução de equações não lineares. O método é descrito com particular incidência no modelo exponencial de três termos (MEC 3), sendo porém apresentados os aspectos particulares relativos a outros modelos.

Depois de uma revisão dos métodos normalmente utilizados para estimar os parâmetros dos modelos, é descrito o método de linearização utilizado (método de Gauss-Newton modificado). Seguidamente, apresentam-se as soluções encontradas para resolução dos problemas postos na optimização: *a*) estimativa dos valores iniciais dos parâmetros; *b*) procedimento para melhorar o cálculo matricial e a convergência dos resultados; *c*) procedimentos para controlo do rigor dos cálculos. Finalmente, é feita a apreciação dos resultados da aplicação do método proposto, concluindo-se pela sua adequação ao tratamento dos problemas de exaurimento hídrico.

RÉSUMÉ

On présente une méthode d'optimisation des paramètres des modèles de tarissement composé en utilisant la méthode des moindres carrés avec pondération (MQP) pour la solution des équations non linéaires. La méthode est décrite

en visant spécialement le modèle exponentiel avec trois termes (MEC 3), mais les aspects particuliers concernant les autres modèles sont aussi présentés.

Après une révision des méthodes couramment utilisées pour estimer les paramètres de tels modèles, on décrit la méthode de linéarisation choisie (méthode de Gauss-Newton modifiée). Par la suite, on présente les solutions trouvées pour résoudre les problèmes posés par la procédure d'optimisation: a) estimation des valeurs initiales des paramètres; b) amélioration du calcul matriciel et de la convergence des résultats; c) contrôle de la fiabilité des solutions. Finalement, on fait l'analyse des résultats de l'application de la méthode proposée en concluant par son adéquation aux problèmes de tarissement hydrique.

SYNOPSIS

It is presented a method for optimization of the parameters of complex recession models utilizing a weighted least squares method (MQP) for solving non-linear equations. The description herein presented is oriented for the three terms exponential model (MEC 3) but the particular aspects for using the method for other complex recession models are also presented.

A review of available methods for estimating parameters of complex recession models is first presented, followed by the description of the linearization method adopted (modified Gauss-Newton method). The solutions adopted for solving the problems faced during the optimization process are presented: a) estimation of the initial set of parameters; b) improvement of matricial calculations and of convergence of results; c) control of solutions' accuracy. Finally, the results of application of the proposed method to MEC 3 optimization is analysed, showing its adequateness for studying flow recession problems.

1. INTRODUÇÃO

A caracterização do exaurimento hídrico tem sido via pouco explorada para o estudo das influências da cobertura vegetal sobre os processos de escoamento. Para atingir tal objectivo torna-se necessário escolher um modelo de exaurimento cujos parâmetros registassem com sensibilidade os factores que influenciam os principais componentes do escoamento, e consequentemente desenvolver metodologia para a estima rigorosa dos parâmetros do modelo.

Optou-se, assim, por um processo de optimização dos parâmetros dos modelos de exaurimento composto.

Tal metodologia é seguidamente apresentada, tomando como exemplo o modelo exponencial composto com 3 termos (MEC 3)

$$Q(t) = Q_{o_1} e^{-\alpha_1 t} + Q_{o_2} e^{-\alpha_2 t} + Q_{o_3} e^{-\alpha_3 t} \quad (1)$$

por ser o modelo de aplicação mais generalizada e de maior interesse conceptual e prático (Pereira, 1984 a). Acerca dos restantes modelos, far-se-ão referências menos desenvolvidas, focando apenas os aspectos particulares dos correspondentes processos de optimização.

2. MÉTODOS PARA O CÁLCULO DOS PARÂMETROS DOS MODELOS MEC E PARA A SEPARAÇÃO DOS COMPONENTES DO ESCOAMENTO

O método gráfico clássico foi concebido por Barnes (1939) para separação dos componentes do escoamento e análise de hidrogramas. Considerando que o escoamento total Q é composto por escoamento directo Q_d , por escoamento subsuperficial ou hipodérmico Q_h e por escoamento de base Q_b , aquele autor propôs-se calcular o hidrograma do escoamento directo (ou da chuvada) através da relação

$$Q_d = Q - (Q_h + Q_b) \quad (2)$$

Assumindo que Q_b e Q_h podem ser descritos por um modelo MES (vide Pereira, 1984 a) e adoptando conseqüentemente uma representação semilogarítmica ($t, \log Q$), como mostra a figura 1, tratava-se de ajustar em primeiro lugar a recta

$$Q_b = Q_{o_b} K_b^t \quad (\text{com } K_b = e^{-\alpha_b}) \quad (3)$$

traçar o correspondente hidrograma Q_b e, seguidamente, obter o hidrograma $Q' = Q - Q_b$; sobre o novo hidrograma podia então ajustar-se a recta

$$Q_h = Q_{o_h} K_h^t \quad (4)$$

e, por diferença, obter-se o hidrograma do escoamento directo (Equação 2). Como se pode depreender, o método de Barnes não visa obter os parâmetros Q_0 e K (ou α) mas tão só gerar novos hidrogramas. Entretanto, este método tem constituído base muito importante para

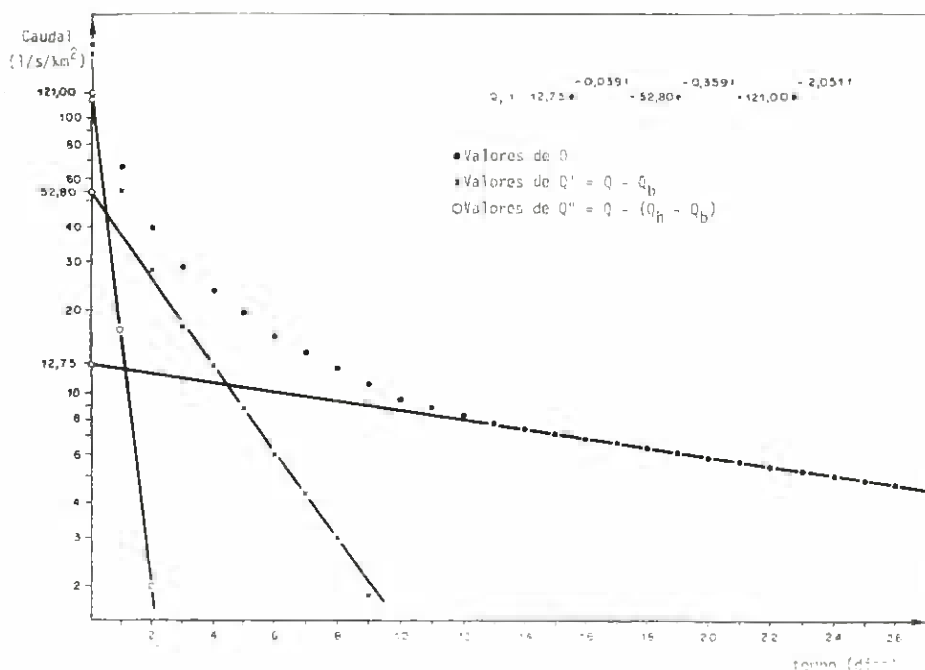


Figura 1 — Cálculo gráfico dos parâmetros das curvas de exaurimento pelo método de Barnes

a separação dos componentes do hidrograma (OMM, 1970) e tem sido objecto de várias modificações (Singh e Stall, 1971); em particular, os métodos de análise das curvas de descida do hidrograma, ou de análise das curvas de exaurimento através do modelo MEC (equação 1), resultam de adaptações do método de Barnes (1939) dos ajustamentos sucessivos de modelos MES aos diferentes componentes do hidrograma (Dickinson *et al.* 1967; Holtan, 1970; Kovacs, 1975). Uma adaptação deste método é descrita adiante (Figura 3).

Um outro método desenvolvido na mesma época por Langbein (1940) teve alguma aceitação. Este autor considerou intervalos de tempo unitários na análise das curvas de descida e procurou assim encontrar as constantes de exaurimento através dos coeficientes de

regressão entre valores do caudal observados a intervalos de tempo fixos (1 dia ou 1 hora, em geral). Assim as equações 3 e 4 dão lugar a

$$Q_b(t) = K_b Q_b(t - 1) \tag{5}$$

e

$$Q_h(t) = K_h Q_h(t - 1) \tag{6}$$

Representando graficamente (figura 2) os pares de valores $Q(t)$ e $Q(t-1)$, é então possível estimar as correspondentes rectas de regressão e, portanto, através dos respectivos coeficientes angulares, estimar as constantes de exaurimento K_b e K_h . A sua descrição pode encontrar-se, por exemplo, em Hjelmfelt e Cassidy (1975). De salientar as limitações que derivam do facto de não ser possível estimar os parâmetros Q_0 e de ser apenas aplicável a um modelo MEC com dois termos, ou seja, usando a notação de Barnes,

$$Q(t) = Q_{o_1} K_1^t + Q_{o_2} K_2^t \tag{7}$$

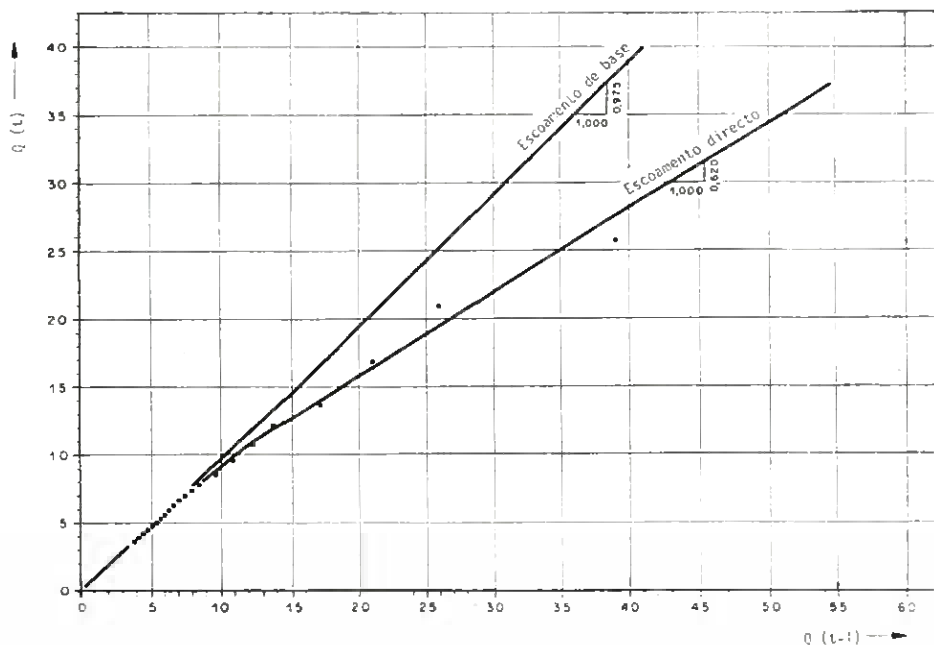


Figura 2 — Cálculo gráfico dos coeficientes de exaurimento pelo método Langbein

2.2. Métodos numéricos

Sob esta designação incluímos métodos muito diferentes. É o caso dos que designamos por métodos indirectos, em que a separação do caudal de base se realiza de acordo com os níveis freáticos adjacentes ao curso de água (Rasmussen e Andreassen, 1959; Svoboda, 1970), ou com referência à concentração de determinados iões (Hall, 1971) ou isótopos (Fritz *et al.*, 1976).

Devem igualmente considerar-se os métodos em que o escoamento de base é simulado por convolução (Aron e Borrelli, 1973; Yates e Snyder, 1975), ou aqueles em que o caudal de base é simulado através das relações, semi-empíricas e estatísticas, com o caudal total (Slepicka, 1970; Bethlamy, 1972; Storr, 1974).

Qualquer dos casos citados tem interesse para estudos de balanço hídrico e de simulação e constituem, de certo modo, alternativa ao emprego do modelo MEC. Não permitem, porém, o cálculo dos parâmetros deste modelo nem se adequam, em geral, à separação de mais de um componente do escoamento (excepção feita ao método de convolução, o que dependerá da função memória a utilizar).

O método dos mínimos quadrados foi entretanto utilizado por Snyder (1962) para o modelo exponencial duplo (MED)

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t^n} \quad (8)$$

mas utilizando procedimentos que não foram retomados posteriormente. James e Thompson (1970) adoptaram igualmente o método dos mínimos quadrados para ajustamento do modelo MEC com dois termos (equação 7), visando apenas o cálculo das constantes de exaurimento e no intuito de resolver numericamente o método de Langbein (1940) acima referido. A sua adaptação a um modelo de três termos revelou-se, no entanto, infrutífera (Pereira, 1977).

2.3. Necessidade de utilização de técnicas de optimização dos parâmetros

A análise dos métodos em referência mostrou que o método de Barnes modificado era o que melhor se adaptava ao problema geral da separação de componentes de escoamento e determinação dos

correspondentes parâmetros de exaurimento. No entanto, por se tratar de cálculo gráfico, a estimação dos parâmetros e dos próprios volumes de escoamento traduz erros que podem ser importantes; por outro lado, não permite que o rigor dos cálculos seja medido.

Nestas condições torna-se necessário o uso de técnicas de otimização dos parâmetros dos modelos de esgotamento composto, nomeadamente quando tais modelos visam a interpretação do escoamento, como é o caso do modelo MEC (Nutbrown and Downing, 1976). Foi assim desenvolvido um método de otimização dos parâmetros pelos mínimos quadrados com ponderação (Pereira, 1977; 1978 a). Trabalhos posteriores confirmaram a adequação da escolha do método dos mínimos quadrados e a possível extensão da sua utilização (Birtles, 1978) e, por outro lado, a importância do rigor na construção de modelos para a interpretação do exaurimento, o qual é impossível de obter pelo simples uso do cálculo gráfico (Anderson e Burt, 1980).

3. O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS COM PONDERAÇÃO PARA CÁLCULO DOS PARÂMETROS DO MODELO MEC 3

3.1. *Formulação do problema de otimização*

3.1.1. *Aspectos gerais*

Um modelo MEC (equação 1) pode representar-se independentemente do número N de termos sob a forma

$$Q_t = \sum_{k=1}^N Q_{o_k} \exp(-\alpha_k t) \quad (9)$$

ou ainda pela equação geral

$$Q_i = f(t_i; Q_{o_1}, \dots, Q_{o_N}; \alpha_1, \dots, \alpha_N) + \epsilon_i \quad (10)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$. Trata-se, nesta forma, de um sistema de n equações com 2 N parâmetros (incógnitas), em que o caudal observado Q_i é função do tempo t_i , sendo os resíduos representados por ϵ_i .

Para a solução deste sistema é vantajoso realizar adequadas transformações dos parâmetros com vista a restringir os valores que os mesmos podem assumir. Assim, considerando que Q_0 deve ser sempre positivo, fazendo

$$Q_0 = \omega^2 \quad (11)$$

podemos substituí-lo por

$$\omega = + \sqrt{Q_0} \quad (12)$$

Por outro lado, tomando a constante de exaurimento

$$K = \exp(-\alpha) \quad (13)$$

em lugar do coeficiente de exaurimento α reconhece-se facilmente que aquela deve estar sempre sujeita à condição $0 < K < 1$. Então, fazendo

$$K = 1/(1 + \xi^2) \quad (14)$$

podemos substituir o parâmetro α pela incógnita

$$\xi = + \sqrt{(1 - K)/K} \quad (15)$$

Assim, para se obter o vector θ das incógnitas basta fazer

$$\theta_1 = \xi_1, \theta_2 = \omega_1, \dots, \theta_{m-1} = \xi_N, \theta_m = \omega_N \quad (16)$$

Nestas condições o sistema (10) pode substituir-se por

$$Q_i = f(t_i; \theta_1, \dots, \theta_m) + \varepsilon_i \quad (17)$$

e o problema da otimização dos parâmetros do modelo MEC (9) reduz-se à resolução de um sistema de n equações não lineares com m incógnitas. Tal solução pode ser encontrada pelo método dos mínimos quadrados desde que seja possível linearizar as equações (17) e os resíduos sigam uma distribuição normal.

3.1.2. *Linearização do sistema de equações*

Dando às equações (17) a forma vectorial, vem

$$y_i = f(X_i, \hat{\Theta}) + \varepsilon_i \quad (18)$$

em que y_i corresponde à variável observada, X_i à variável explicativa e θ e ε_i têm a significação que acima lhes foi atribuída. Podemos linearizar a equação (18) desenvolvendo a função f segundo uma série de Taylor

$$f(X_i, \Theta) = f(X_i, \hat{\Theta}_0) + \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{\partial f(X_i, \Theta)}{\partial \theta_j} \right\}_{\theta = \hat{\Theta}_0} (\theta_j - \hat{\theta}_j) \quad (19)$$

em que Θ_0 é o vector constituído pelas estimações iniciais dos parâmetros θ_j .

O cálculo das derivadas parciais pode fazer-se por

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial f(X_i, \Theta)}{\partial \theta_j} \right\}_{\theta = \hat{\Theta}_0} &= \\ &= \frac{f(X_{i,0}\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_j + \partial_j, \dots, \hat{\theta}_m) - f(X_i, \hat{\Theta}_0)}{\partial_j} \end{aligned} \quad (20)$$

desde que os valores dos acréscimos ∂_j sejam convenientemente escolhidos (Draper e Smith, 1966), o que representa uma simplificação importante para o cálculo automático (Koelbl 1975; Pereira, 1978 a).

Usando uma notação abreviada

$${}_0f_i = f(X_i, \hat{\Theta}_0) \quad (21)$$

$${}_0z_{i,j} = \left\{ \frac{\partial f(X_i, \Theta)}{\partial \theta_j} \right\}_{\theta = \hat{\Theta}_0} \quad (22)$$

$${}_0\beta_j = \theta_j - \hat{\theta}_j \quad (23)$$

a equação (19) passa a escrever-se

$$f_i = {}_0f_i + \sum_{j=1}^m {}_0z_{i,j} {}_0\beta_j \quad (24)$$

e, conseqüentemente, o sistema (18) toma a forma linear

$$y_i = {}_0f_i + \sum_{j=1}^m {}_0z_{i,j} {}_0\beta_j + \varepsilon_i \quad (25)$$

As incógnitas passam agora a ser os acréscimos ${}_0\beta_j$ que constituem o vector B_0 .

A solução deste sistema (25) é dada, usando o método dos mínimos quadrados, pelo vector \hat{B}_0 que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos

$$\sum_{i=1}^n {}_0\varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f_i - \sum_{j=1}^m {}_0z_{i,j} {}_0\beta_j)^2 \quad (26)$$

ou seja o vector dos estimadores ${}_0b_j$ de ${}_0\beta_j$

$$\hat{B}_0 = (Z_0'Z_0)^{-1} Z_0' (Y - F_0) \quad (27)$$

em que Z_0 é a matriz rectangular $n \times m$ das derivadas ${}_0z_{i,j}$ e $(Y - F_0)$ é a matriz coluna, de dimensão n , constituída pelas diferenças entre as variáveis dependentes y_i e os seus estimadores ${}_0f_i$.

3.1.3. Método dos mínimos quadrados com ponderação (MQP)

A natureza exponencial decrescente do modelo em questão corresponde também uma variação dos resíduos ε_i dos ajustamentos de acordo com a forma da curva. Desta maneira, e no sentido de se obter uma distribuição normal dos resíduos, houve que introduzir pesos para as observações.

Por escolha experimental, adoptou-se

$$\begin{aligned} w_{i,i} &= 1.0 \\ w_{i,i} &= w_{i-1, i-1} + 0.2 & (i = 2, 3, \dots, 5) \\ w_{i,i} &= w_{i-1, i-1} + 2.0 & (i = 6, 7, \dots, 30) \\ w_{i,i} &= w_{i-1, i-1} + 1.0 & (i = 31, 32, \dots, 50) \\ w_{i,i} &= w_{i-1, i-1} + 0.5 & (i = 51, 52, \dots) \end{aligned} \quad (29)$$

designando-se por W a respectiva matriz quadrada $n \times n$. Naturalmente, para outros dados é possível obter outros valores para $w_{i,i}$ que assegurem uma melhor distribuição dos resíduos.

3.1.4. Cálculo iterativo

Introduzindo a ponderação das observações, a solução (27) é agora substituída por

$$B_0 = (Z'_0 W Z_0)^{-1} Z'_0 W (Y - F_0) \quad (30)$$

Este vector permite corrigir os valores inicialmente estimados para os parâmetros θ_0 e obter novas estimações

$$\theta_1 = \theta_0 + B_0 \quad (31)$$

iniciando-se assim um processo de cálculo iterativo das incógnitas β_j que fornecem estimativas melhoradas para os parâmetros θ , após I iterações

$$\theta_I = \theta_{I-1} + (Z'_{I-1} W Z_{I-1})^{-1} Z'_{I-1} W (Y - F_{I-1}) \quad (32)$$

com $I = 1, 2, \dots, I_{\max}$. O processo iterativo conclui-se quando haja convergência dos resultados, isto é quando

$$1 \leq (\sigma_{I-1}^2 / \sigma_I^2) < 1 + \gamma \quad (33)$$

sendo as variâncias dos resíduos definidas por

$$\sigma_I^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - f(X_i, \hat{\theta}_I)\}^2 / (n - m) \quad (34)$$

sendo γ convenientemente escolhido (no caso presente $\gamma = 0,05$).

3.2. Estimativa dos valores iniciais dos parâmetros

A obtenção do primeiro conjunto de valores para os parâmetros Q_{0k} e α_k revelou-se um problema de solução delicada porque o vector correspondente θ_0 tem particular importância na marcha subsequente dos cálculos, sendo efectivamente necessário partir de uma boa estimativa dos valores iniciais dos parâmetros θ_0 .

Para o efeito adaptou-se ao cálculo numérico o processo normal do cálculo gráfico atrás referido. O procedimento adoptado para o modelo MEC com 3 termos (MEC 3) é o seguinte (Figura 3):

a) estimativa do intervalo de tempo T_b a partir do qual se assume que os caudais observados Q_t se podem considerar caudais de base;

b) ajustamento da exponencial (Pereira, 1975 b)

$$\hat{Q}_{0_3}^{\circ} \exp(-\hat{\alpha}_3^{\circ} t)$$

aos valores de Q_t tais que $t \geq T_b$ e cálculo de $Q_{0_3}^{\circ}$ e α_3° ;

c) cálculo de

$$Q_t = Q_t - Q_{0_3}^{\circ} \exp(-\alpha_3^{\circ} t) \quad (35)$$

d) estimativa do intervalo de tempo T_h a partir do qual se assume que os valores do Q'_t se podem considerar de origem subsuperficial;

e) ajustamento da exponencial

$$\hat{Q}_{0_2}^{\circ} \exp(-\hat{\alpha}_2^{\circ} t)$$

aos valores de Q'_t para $T_h \leq t \leq T_b$, com $Q'_t \geq Q_{min}$, sendo Q_{min} previamente escolhido, e consequentemente cálculo de $\hat{Q}_{0_2}^{\circ}$ e $\hat{\alpha}_2^{\circ}$;

f) cálculo de

$$Q''_t = Q'_t - \hat{Q}_{0_2}^{\circ} \exp(-\hat{\alpha}_2^{\circ} t) \quad (36)$$

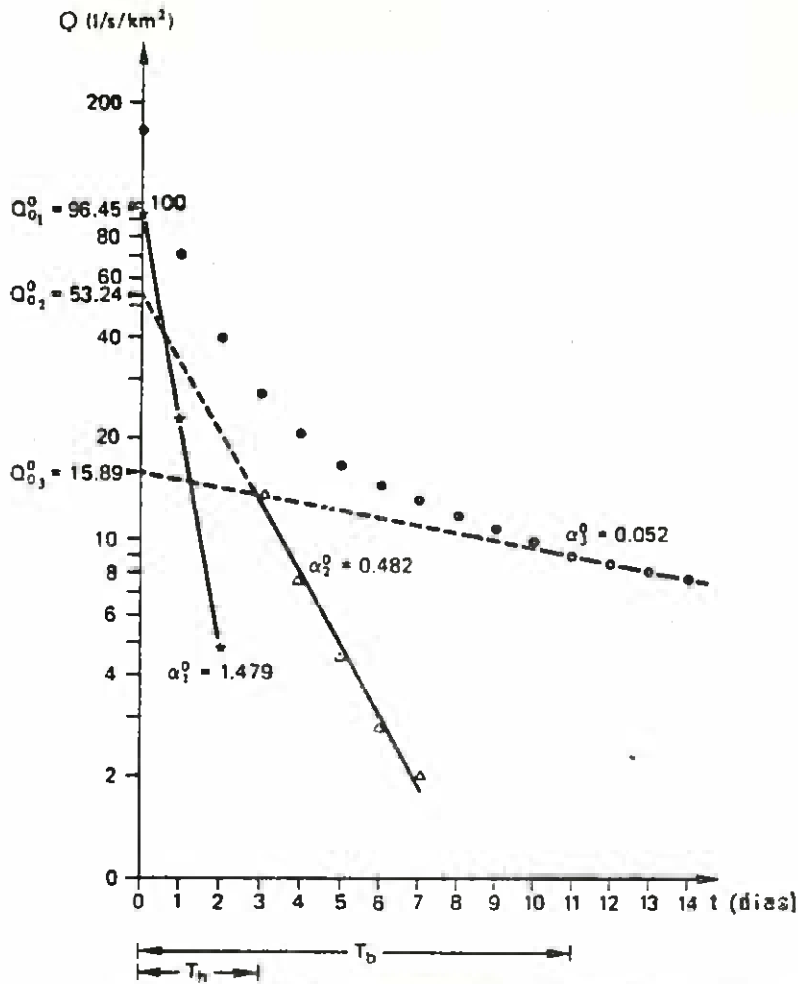


Figura 3 — Esquema da determinação dos valores iniciais dos parâmetros do modelo MEC 3

g) Ajustamento da exponencial

$$Q_{0_1}^o \exp(-\alpha_1^o t)$$

aos valores de Q_t'' , para $t \leq T_h$ e com $Q_t'' \geq Q_{min}$, e cálculo de $Q_{0_1}^o$ e α_1^o ;

h) dado que a variância residual σ_o^2 (equação 34) relativa ao vector dos valores iniciais dos parâmetros, Θ_o (equações 11 a 16),

depende muito dos parâmetros estimados Q_{o_1} e Q_{o_2} , efectuar-se-á o controlo

$$|Q_o - (Q_{o_1}^o + Q_{o_2}^o + Q_{o_3}^o)| \leq D_{lim} \quad (37)$$

no caso presente com

$$D_{lim} = Q_o/10 \quad (38)$$

em que $Q_o = Q_t$ para $t = 0$; se a condição (37) não se verificar, os parâmetros Q_{o_1} e Q_{o_2} serão corrigidos pela adição de pequenos acréscimos, positivos ou negativos, num processo iterativo simplificado abrangendo igualmente os parâmetros α_1^o e α_2^o , de forma a minimizar σ_o^2

3.3. Procedimento para melhorar o cálculo matricial e a convergência

3.3.1. Procedimentos adaptados para melhorar o cálculo matricial

Uma das maiores dificuldades de cálculo reside na inversão da matriz

$$A = Z' W Z \quad (39)$$

cujos elementos são definidos por

$$a_{j,l} = \sum_{i=1}^n w_{i,i} z_{i,j} z_{i,l} \quad \begin{matrix} (j = 1,2, \dots, m) \\ (l = 1,2, \dots, m) \end{matrix} \quad (40)$$

Consequentemente, adoptou-se a normação desta matriz escolhendo para unidades da escala do espaço Θ os desvios padrão das derivadas parciais de f em relação aos diferentes θ_j (Marquardt, 1963). Deste modo os cálculos realizam-se com a matriz C definida pelos elementos

$$c_{j,l} = \frac{a_{j,l}}{\sqrt{a_{j,j}} \sqrt{a_{l,l}}} \quad (41)$$

Naturalmente isto implica que a matriz

$$D = Z' W (Y - F) \quad (42)$$

seja substituída pela matriz G de elementos

$$g_j = d_j / \sqrt{a_{jj}} \quad (43)$$

Em lugar de B (equação 30) calcula-se agora o vector

$$P = C^{-1} G \quad (44)$$

e é a partir deste que se obtêm as soluções

$$b_j = p_j / \sqrt{a_{jj}} \quad (45)$$

que constituem efectivamente o vector B das soluções.

Além disso, é vantajoso (Pereira, 1978 a) para os cálculos que exista um equilíbrio na ordem de grandeza das j colunas da matriz Z. Nestas condições, escolhidas convenientemente as grandezas λ_j , pode obter-se uma matriz modificada Z* de elementos

$$z_{i,j}^* = z_{i,j} / \lambda_j \quad (46)$$

o que arrasta a modificação da matriz A através de

$$a_{j,1}^* = a_{j,1} / \lambda_j \lambda_1 \quad (47)$$

A matriz C não se modifica mas o vector das soluções vem alterado. Isto significa que o vector B, conjugando com a equação (45), deverá ser obtido de

$$b_j = p_j / \sqrt{a_{jj}} \lambda_j \quad (48)$$

3.3.2. *Controlo dos valores dos determinantes*

As precauções indicadas podem ainda ser insuficientes. Nestas condições é adequado controlar o valor do determinante Δ da matriz C a inverter. Como o seu valor depende das incógnitas consideradas

e da forma como as mesmas são introduzidas no processo de cálculo, optou-se por controlar os efeitos de cada uma sobre Δ .

Sejam Δ_j os determinantes que se obtêm de Δ suprimindo as linhas e as colunas superiores a j ; então a influência da incógnita β_j pode ser medida calculando a razão

$$p_j = \Delta_j / \Delta_{j-1} \quad (49)$$

Estabelecendo valores mínimos para p_j ($\eta_1 = 1 \times 10^{-5}$) e para Δ_j ($\eta_2 = 1 \times 10^{-5}$) pode evitar-se que, em dada iteração, a introdução da correspondente incógnita β_j conduza a dificuldades na inversão da matriz; conseqüente, fixando para θ_j o valor estimado na iteração anterior evita-se a entrada da incógnita β_j nos cálculos correspondentes a essa iteração e o processo iterativo pode prosseguir até à convergência (Pereira, 1977, 1978 a).

3.3.3. Halving

Embora o método de Gauss-Newton adoptado deva conduzir teoricamente à convergência dos resultados (Hartley, 1961), verificou-se que, por vezes, podia conduzir a divergência. Adoptou-se assim o procedimento «halving» (Draper e Smith, 1966) para corrigir o vector resultados (equação 27).

Assim, relativamente à iteração I , se a solução B_I corresponder divergência, buscar-se-á o vector

$$B_u = \pm B_I / 2^u \quad (50)$$

com $u = 1, 2, \dots, U_{\max}$, que minimize a variância residual. Este vector B_u substitui então B_I e o processo iterativo normal continua de novo.

Apesar da sua simplicidade, e de não procurar soluções fora da direcção do vector B_I , o procedimento revelou-se adequado.

3.3.4. Convergência por fases

Considerando o procedimento para controlo dos determinantes, pareceu adequado que nos cálculos dos modelos com 3 termos se procedesse primeiro à convergência de apenas dois dentre eles (por-

tanto de 4 parâmetros) e só depois se iniciasse o processo para os restantes, relativos ao escoamento de base. Verificou-se que este processo conduziu a melhores resultados — nomeadamente quanto à distribuição dos resíduos, como se observa no exemplo do Quadro I — uma vez que o número de incógnitas só é aumentado quando já se verificou uma primeira convergência.

QUADRO 1

Efeitos da convergência em duas fases. Comparação das distribuições dos resíduos (exemplo)

Caudais (1/s. km ²)	Resíduos (1/s)	
	1.ª fase	2.ª fase
183.351	.0140	.0018
66.167	-.1509	.0024
39.607	.3091	-.1734
28.546	.8316	.6810
23.465	-.3952	-.2234
19.289	-.5092	-.2060
16.058	-.3051	-.0083
14.085	-.5084	-.2868
12.354	-.3706	-.2471
10.836	-.0437	-.0160
9.505	.3747	.3215
8.890	.2711	.1560
8.344	.2347	.0770
7.832	.2607	.0779
7.408	.2680	.0747
7.126	.1838	-.0082
6.856	.1252	-.0564
6.595	.0863	-.0783
6.345	.0588	-.0840
6.104	.0404	-.0775
5.872	.0281	-.0631
5.649	.0195	-.0439
5.434	.0141	-.0214
5.228	.0098	.0018
5.030	.0065	.0254
4.839	.0047	.0494
4.655	.0037	.0731
Variâncias dos resíduos	.061	.024

3.4. Procedimento para controlo do rigor dos cálculos

Pode verificar-se que a matriz C (equação 41) corresponde à matriz dos coeficientes de correlação simples entre as variáveis z_j e z_1 . De facto, substituindo os elementos a_{j1} pelos seus valores obtém-se

$$c_{j1} = \frac{\sum_{i=1}^n w_{i,j} z_{i,j} z_{i,1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_{i,j} z_{i,j}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n w_{i,1} z_{i,1}^2}} = r_{j,1} \quad (51)$$

Nestas condições (Lussigny, 1971), os coeficientes de correlação parcial calcular-se-ão através dos determinantes menores de Δ

$$R_{j,1} = \frac{-\Delta_{j1}}{\sqrt{\Delta_{jj}} \Delta_{11}} \quad (52)$$

Considerando que os elementos de C^{-1} são dados por

$$c_{j,1} = \frac{(-1)^{j+1} \Delta_{j1}}{\Delta} \quad (53)$$

Combinando as equações (52) e (53) obtém-se

$$R_{j,1} = \frac{c_{j1}}{\sqrt{c_{jj}} \sqrt{c_{11}}} \quad (54)$$

Deste modo, a normação da matriz A conduz também à obtenção da matriz R, de elementos $R_{j,1}$, que exprime o grau de dependência entre os parâmetros θ_j do modelo a otimizar. Consequentemente pode avaliar-se da adequação do modelo visto que se forem obtidos valores de $R_{j,1}$ próximos da unidade tal facto indicará que os parâmetros deixavam de ser independentes, sendo excessivo o número de termos do modelo MEC considerado.

Para além deste estimador estatístico e da própria variância dos resíduos é possível calcular os desvios padrão das incógnitas (Lussigny, 1971; Pereira, 1977)

$$S_{b_j} = \sqrt{\bar{c}_{j,j} / a_{j,j} \sigma_1^2} \quad (55)$$

e, conseqüentemente, conhecer os intervalos de confiança dos valores otimizados dos parâmetros, o que constitui importante estimador do rigor dos cálculos.

QUADRO 2

Intervalos de confiança, com probabilidade de 95 %, dos parâmetros dos modelos MEC 3 relativos às curvas tipo de exaurimento das bacias do Emmental durante o período não influenciado pela neve

Bacia	Parâmetro	Limite inferior	Valor	Limite superior
Sperbelgraben	$Q_{0,1}$	46.618	49.994	53.487
	α_1	0.6270	0.6822	0.7375
	$Q_{0,2}$	15.542	17.493	19.561
	α_2	0.1020	0.1371	0.1762
	$Q_{0,3}$	3.210	4.892	6.927
	α_3	0.0068	0.0140	0.0237
Rappengraben	$Q_{0,1}$	117.205	123.189	129.322
	α_1	0.6134	0.6462	0.6791
	$Q_{0,2}$	19.838	24.374	29.377
	α_2	0.1296	0.1660	0.2057
	$Q_{0,3}$	8.416	9.604	10.870
	α_3	0.0131	0.0192	0.0264

Exemplificando o que se referiu acima, apresentam-se no quadro 2 os resultados referentes às pequenas bacias experimentais do Emmental, as primeiras bacias florestais objecto de estudos hidro-lógicos. Tais resultados mostram a qualidade e o rigor dos valores estimados para os parâmetros dos modelos MEC 3. Os resultados são igualmente consistentes quanto à influência da floresta (a área florestal é de 99 % no Sperbelgraben e 49 % no Rappengraben), como se analisa noutro artigo (Pereira, 1984 b).

4. APRECIACÃO SUMÁRIA ACERCA DA APLICAÇÃO DO MÉTODO

O método dos mínimos quadrados com ponderação foi utilizado para optimização do modelo MEC 3 para caracterizar as curvas tipo e as curvas envolventes de exaurimento de doze pequenas bacias experimentais e representativas dos Pré-Alpes suíços (Pereira, 1977; Pereira e Keller, 1982), o que se desenvolve adiante.

Noutro artigo (Pereira, 1984 a) fez-se já uma apreciação geral dos resultados da aplicação do método descrito ao compararem-se

QUADRO 3

Comparação dos resíduos dos ajustamentos do modelo MEC 3 utilizando o método clássico e o método dos mínimos quadrados com ponderação (exemplo)

Resíduos (l/s. km²)

Caudais (l/s. km ²)	Ajustamento clássico	Optimização dos parâmetros
101.049	8.993	0.081
58.514	-2.903	-0.418
40.081	-0.666	0.852
31.914	-1.536	0.014
26.548	-1.865	-0.344
22.657	-1.715	-0.464
19.562	-1.181	-0.312
17.061	-0.521	-0.025
15.132	0.014	0.201
13.690	0.343	0.308
12.809	0.294	0.119
12.074	0.223	-0.024
11.402	0.175	-0.088
10.784	0.138	-0.161
10.214	0.103	-0.083
9.689	0.065	-0.050
9.203	0.023	-0.009
8.753	-0.023	0.032
8.335	-0.073	0.071
Variâncias residuais	0.915	0.034

os modelos de exaurimento composto. Tal análise mostrou que o modelo MEC 3, aqui em apreço, apresentou em todos os casos variâncias residuais inferiores a $1,0 \text{ l s}^{-1}$ e menores do que $0,30 \text{ l s}^{-1}$ em 95 % dos casos, atestando assim a qualidade dos ajustamentos.

A adequação do modelo e do método de otimização dos parâmetros é igualmente comprovada pela qualidade das distribuições dos resíduos. Tal facto é exemplificado no Quadro 3, em que se comparam as distribuições dos resíduos quando o modelo MEC 3 é ajustado graficamente ou por otimização dos seus parâmetros. Assinale-se que em 80 % dos casos foi possível aceitar a distribuição normal dos resíduos enquanto tal distribuição não era aceitável em nenhum caso de ajustamento seguindo o método clássico atrás referido.

5. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE OPTIMIZAÇÃO A OUTROS MODELOS DE EXAURIMENTO COMPOSTO

5.1. Aspectos gerais

A metodologia proposta, quer para a linearização das equações dos modelos, quer para a otimização dos respectivos parâmetros, é aplicável aos restantes modelos de exaurimento compostos estudados e avaliados noutra artigo (Pereira, 1984 a). Há porém particularidades decorrentes da natureza de cada um dos modelos.

Assim, no caso dos modelos de exaurimento composto com dois termos (MEC 2) os procedimentos aplicáveis são os mesmos, havendo apenas que considerar a simplificação resultante de a convergência visar apenas 4 parâmetros em lugar de 6. Registamos que nestas condições o cálculo matricial resultou sempre simplificado, foi raro o recurso ao «halving» e é evidentemente desnecessária a convergência por fases. Do mesmo modo, constatou-se que era possível (embora com mais dificuldades na estima dos valores iniciais dos parâmetros) aplicar o método MQP a modelos MEC 4. Tal aplicação não se revelou, porém, interessante já que os coeficientes de correlação parcial (equação 52) mostraram elevado grau de dependência entre os parâmetros e, portanto, menor adequação do modelo de quatro termos relativamente ao de três termos.

Quanto aos restantes modelos, apresentam-se a seguir os aspectos essenciais da aplicação da metodologia proposta.

5.2. Modelo hiperbólico composto (MHC)

Um modelo MHC pode representar-se

$$Q_i = \sum_{k=1}^N Q_{o_k} \frac{1}{(1 + \alpha_k t)^2} \quad (56)$$

ou seja, como no caso dos modelos MEC (equação 9 e 10)

$$Q_i = f(t_i; Q_{o_1}, \dots, Q_{o_N}; \alpha_1, \dots, \alpha_N) + \varepsilon_i \quad (10 \text{ bis})$$

sendo igualmente necessária a transformação dos parâmetros para limitar a sua variação durante o processo de cálculo iterativo. Quanto ao parâmetro Q_o é de aplicar a transformação relativa aos modelos MEC, portanto fazer

$$\omega = + \sqrt{Q_o} \quad (12 \text{ bis})$$

O coeficiente de exaurimento sujeita-se à condição $0 < \alpha < 5$ pelo que se pode escrever

$$\alpha = \frac{5}{1 + \xi^2} \quad (57)$$

e, portanto, tomar a transformada

$$\xi = + \sqrt{\frac{5 - \alpha}{\alpha}} \quad (58)$$

o que permite obter o sistema (17)

$$Q_i = f(t_i; \theta_1, \dots, \theta_m) + \varepsilon_i \quad (17 \text{ bis})$$

o qual é objecto de processo de cálculo em tudo idêntico ao que se descreve para o modelo MEC (capítulo 3), excepção feita à estima dos valores iniciais dos parâmetros.

De facto, para obter o conjunto de valores θ_o com que se inicia o processo de optimização foi necessário adaptar ao modelo hiperbólico (56) o procedimento desenvolvido para o modelo MEC (descrito em 3.2), realizando um processo iterativo prévio para melhorar a variância inicial dos resíduos ε . Assim:

— obtenção de um primeiro conjunto de valores \hat{Q}_{0k} e $\hat{\alpha}_k$, calculando-se o resíduo

$$\epsilon_n = \sum Q_{0k} - Q_0 \tag{59}$$

com $Q_0 = Q_t$ para $t = 0$;

- correcção do parâmetro Q_0 , por subtracção da quantidade $2 \epsilon_n$;
- verificação da condição (37), com

$$D_{lim} = Q_0/20 \tag{60}$$

— processo iterativo de correcção dos valores dos parâmetros previamente estimados até ser satisfeita a condição (37).

QUADRO 4

Exemplo de resultados de aplicação dos modelos MHC. Resíduos dos ajustamentos relativos à estima dos valores iniciais dos parâmetros e à subsequente optimização

Caudais (l/s. km ²)	Resíduos (l/s. km ²)			
	MHC 2		MHC 3	
	Estima	Optimização	Estima	Optimização
101.05	1.140	1.299	2.265	-.256
58.51	- 16.270	- 1.019	- 13.558	.585
40.08	- 7.996	.105	- 9.854	.922
31.91	- 5.214	- .716	- 7.944	.522
26.55	- 3.406	- .862	- 6.055	-.967
22.66	- 2.104	- .721	- 4.439	-.924
19.56	- 1.005	- .358	- 3.000	-.557
17.06	- .107	.056	- 1.793	-.093
15.13	.495	.334	- .926	.251
13.69	.814	.436	- .385	.418
12.81	.726	.205	- .288	.247
12.07	.614	.004	- .246	.094
11.40	.536	-.124	- .195	.002
10.78	.483	-.196	- .139	-.045
10.21	.450	-.229	-.082	-.063
9.69	.427	-.233	-.027	-.062
9.20	.413	-.217	.025	-.048
8.75	.406	-.185	.073	-.026
8.33	.402	-.143	.117	.001
Variância dos resíduos	4.121	.121	4.234	.068

Constatou-se que este processo empírico de redução progressiva da variância residual inicial era de importância capital para o processo iterativo: os cálculos conduziram a divergência sempre que os valores iniciais dos parâmetros se caracterizavam por uma variância residual elevada, facto que justificou a adopção de um limite mais baixo para os desvios (equação 60).

O quadro 4 mostra um exemplo da aplicação do método descrito, sendo de salientar a qualidade dos resultados obtidos com a optimização dos parâmetros. De notar que os procedimentos atrás descritos para melhorar a convergência, em particular o «halving» e a convergência por fases, se revelaram essenciais nas aplicações relativas ao MHC 3.

5.3. Modelos semi-empíricos

5.3.1. Modelo exponencial duplo (MED)

O modelo MED tem a forma

$$Q = Q_0 \exp(-\alpha t^n) \quad (61)$$

O cálculo dos parâmetros pode ser realizado graficamente, ensaiando valores de n (Hall e Narasimhan, 1973; Pereira, 1975 a) ou pelo método dos mínimos quadrados (Snyder, 1962). A aplicação do método MQP revelou-se adequada.

A estima do conjunto de valores iniciais dos parâmetros faz-se a partir da equação transformada de (61).

$$\ln Q = \ln Q_0 - \alpha (t^n) \quad (62)$$

realizando um cálculo iterativo em que se ensaiam diversos valores de n até se encontrar o que conduz à menor variância dos resíduos. Assim, partindo de $n_0 = 0,60$, fazem-se u iterações ($u = 1, 2, \dots, U$) para diferentes valores de

$$n_u = n_{u-1} + \Delta n \quad (0,40 \leq n_u \leq 1,50) \quad (63)$$

com $|\Delta n| = 0,05$, à esquerda e à direita do valor inicial n_0 .

Obtem-se assim uma boa estimativa inicial dos parâmetros θ_i da equação (17).

$$\begin{cases} \theta_1 = + \sqrt{Q_0} \\ \theta_2 = + \sqrt{\alpha} \\ \theta_3 = + \sqrt{n - 0,20} \end{cases} \quad (64)$$

permitindo a aplicação do método MQP, aliás com fácil convergência.

5.3.2. Modelo exponencial transformado (MET)

O modelo MET

$$Q = Q_c + (Q_0 - Q_c) \exp(-\alpha t) \quad (65)$$

é geralmente calculado graficamente após estima grosseira de Q_c (Pereira, 1975 a).

Para aplicação do método MQP tomou-se a transformada

$$\ln(Q - Q_c) = \ln(Q_0 - Q_c) - \alpha t \quad (66)$$

realizando um cálculo iterativo em que se fez variar o valor de Q_c . Para o efeito partiu-se de $Q_{c_0} = 2/3 Q_{\min}$, em que Q_{\min} é o menor valor de Q na amostra, realizando-se então u iterações ($u = 1, 2, \dots, U$)

$$Q_{c_u} = Q_{c_{u-1}} + \Delta q \quad (1/3 Q_{\min} < Q_{c_u} < \chi) \quad (67)$$

com $|\Delta q| = Q_{\min}/15$ e $\chi = (Q_{\min} - 0,20)$.

Encontrados assim os valores dos parâmetros que conduzem à menor variância residual, podem calcular-se os parâmetros θ_i da equação (17)

$$\begin{cases} \theta_1 = + \sqrt{Q_0 - Q_c} \\ \theta_2 = + \sqrt{\frac{1-K}{K}} \\ \theta_3 = + \sqrt{\frac{\chi - Q_c}{Q_c}} \end{cases} \quad \text{com } K = \exp(-\alpha) \quad (68)$$

e, conseqüentemente, realizar os cálculos de otimização.

5.3.3. Modelo hiperbólico generalizado (MHG)

Neste modelo

$$Q = Q_0 (1 + \alpha t)^{-n} \quad (69)$$

o cálculo dos parâmetros pode ser realizado graficamente (Pereira 1975 a) ou analiticamente (Drogue, 1972) por um processo iterativo.

Para a aplicação do MQP efectuou-se a estima do conjunto dos valores iniciais a partir da transformada

$$Q \div \frac{1}{n} = Q_0 \div \frac{1}{n} + (\alpha Q_0 \div \frac{1}{n}) t \quad (70)$$

realizando-se um cálculo iterativo semelhante ao aplicado para o modelo MED (equação 63), mas fazendo agora $n_0 = 1,50$, $|\Delta n| = 0,20$ e tomando como limites $(0,50 < n_u < 2,50)$.

Os parâmetros θ_i da equação 17 são entretanto definidos por

$$\begin{cases} \theta_1 = + \sqrt{Q_0} \\ \theta_2 = + \sqrt{\alpha} \\ \theta_3 = + \sqrt{n} \end{cases} \quad (71)$$

Como nos outros casos, o processo de convergência é rápido.

5.3.4. Modelo hiperbólico transformado (MHT)

Os parâmetros do modelo MHT

$$Q = Q_c + \frac{Q_0 - Q_c}{(1 + \alpha t)^2} \quad (72)$$

têm sido geralmente calculados graficamente (Pereira, 1975 a). A aplicação do método MQP revelou-se altamente vantajosa.

Para estimar os valores iniciais dos parâmetros utilizou-se a transformada

$$(Q - Q_c) \div \frac{1}{2} = (Q_0 - Q_c) \div \frac{1}{2} + \{\alpha(Q_0 - Q_c) \div \frac{1}{2}\} t \quad (73)$$

realizando-se um cálculo iterativo visando o parâmetro Q_c em tudo idêntico ao do modelo MET (equação 67).

Os parâmetros θ_i da equação (17) são definidos também como para o modelo MET (equações 68) à exceção do θ_2 , aqui definido por $\theta_2 = + \sqrt{\alpha}$.

5.3.5. *Breve comentário sobre os resultados da aplicação*

O comportamento de todos os modelos na aplicação do método MQP foi semelhante. Para todos os casos se obteve uma evidente

QUADRO 5

Resíduos dos ajustamentos dos modelos semiempíricos de exaurimento composto (Rappengraben, Set.-Out. 1971)

Caudal (1/s. km ²)	Resíduos (1/s. km ²)			
	MED	MET	MHG	MHT
15.940	- 3.564	- 2.472	- .702	- .930
12.248	- 1.356	- .143	.679	.682
10.738	- .829	.165	.453	.543
9.228	- .127	.616	.614	.723
9.228	- .821	- .317	- .461	- .365
7.970	- .175	.119	- .080	- .007
7.970	- .720	- .606	- .807	- .762
6.711	.048	.014	- .159	- .141
6.711	- .397	- .549	- .681	- .686
5.789	.120	- .123	- .209	- .232
4.111	.770	.393	.431	.375
4.111	.479	.093	.161	.100
4.111	.210	- .171	- .081	- .143
3.356	.265	- .034	.081	.028
2.768	.651	.395	.506	.459
2.768	.462	.255	.357	.318
2.768	.286	.131	.220	.189
2.768	.121	.022	.093	.072
2.768	- .034	- .074	- .023	- .035
2.768	- .180	- .159	- .132	- .133
2.768	- .316	- .233	- .232	- .223
2.768	- .444	- .299	- .326	- .306
2.768	- .565	- .357	- .414	- .382
2.181	- .091	.179	.092	.134
2.181	- .198	.134	.015	.069
2.181	- .298	.094	- .057	.008
Variâncias dos resíduos	.859	.350	.287	.277

melhoria da distribuição dos resíduos quando comparada a utilização de pesos, definidos por

$$w_{i,i} = 10/Q_i \quad (74)$$

com a aplicação do método dos menores quadrados sem ponderação.

Um condensado dos resultados da aplicação do método foi apreciado noutro artigo (Pereira, 1984 a), mostrando a boa qualidade do processo de otimização através das variâncias dos resíduos. Entretanto, vale a pena analisar as distribuições dos resíduos, o que se pode fazer através do exemplo constante do quadro 5 (1): não só os resíduos são, em geral, percentualmente baixos, como as correspondentes distribuições se podem assumir como normais (excepção feita ao MED).

6. CONCLUSÕES

Os resultados aqui apresentados, a avaliação realizada (Pereira, 1984 a) e a consequente aplicação à caracterização hidrológica de pequenas bacias florestais (Pereira, 1984 b) permitem concluir que a metodologia desenvolvida para a otimização dos parâmetros dos modelos de exaurimento composto é adequada, quer se trate dos métodos utilizados para realizar a estima de um primeiro conjunto de parâmetros, quer do método dos mínimos quadrados com ponderação e dos respectivos procedimentos de cálculo e convergência.

Dado o particular interesse dos modelos MEC, em especial o MEC 3, a aplicação desta metodologia introduz um rigor apreciável na estima dos componentes do escoamento e nas correspondentes aplicações de caracterização hidrológica, de análise de hidrogramas ou de modelação e simulação hidrológica.

(¹) De salientar que o exemplo em questão pode ser considerado como típico já que as variâncias residuais correspondentes aos modelos MET, MHG e MHT são mais frequentes no intervalo 0,1 a 1,0 l/s. km², respectivamente 52,7 %, 78,5 % e 77,4 % dos casos estudados; quanto ao MED a maior frequência, 45,2 % corresponde ao intervalo 2,0 a 5,0 l/s. km².

BIBLIOGRAFIA

- ANDERSON, M. G., BURT, T. P. (1980) — Interpretation of recession flow. *J. Hydrol.*, 46:89-101.
- ARON, G. BORRELLI, J. (1973) — Stream baseflow prediction by convolution of antecedent rainfall effects. *Wat Resour. Bull.*, 9(2):360-365.
- BARNES, B. S. (1939) — The structure of discharge recession curves. *Trans. Am. Geophys. Un.*, 20:721-725.
- BETHLAMY, N. (1972) — Hydrograph analysis: a computerized separation technique. *USDA For. Serv. Res. Pap. INT-122*, Ogden, Utah, 19 pp.
- BIRTLES, A. B. (1978) — Identification and separation of major baseflow components from a stream hydrograph. *Wat. Resour. Res.*, 14(5):791-803.
- DICKINSON, W. T., HOLLAND, M. E., SMITH, G. L. (1967) — An experimental rainfall-runoff facility. *Colorado St. Univ. Hydrol. Pap. no. 25*, Fort Collins, 81 pp.
- DRAFER, N. R., SMITH, H. (1966) — *Applied Regression Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 407 pp.
- DROGUE, C. (1972) — Analyse statistique des hydrogrammes des décrues des sources karstiques. *J. Hydrol.* 15:49-68.
- FRTZ, P., CHERRY, J. A., WEYER, K. U., SKLASH, M. (1976) — Storm runoff analysis using environmental isotopes and major ions. In: *Interpretation of Environmental Isotope and Hydrochemical Data in Groundwater Hydrology*. International Atomic Energy Agency, Vienna:111-130.
- HALL, F. R. (1971) — Dissolved solids-discharge relationships. 2. Applications to field data. *Wat. Resour. Res.*, 7(3):591-601.
- HALL, F. R., NARASIMHAN, T. N. (1973) — Matching curve and ratio methods for solving non linear base-flow equations. *Bull. Sci. Hydrol.*, 18(1):15-25.
- HARTLEY, H. O. (1961) — The modified Gauss-Newton method for the fitting of non-linear regression functions by least-squares. *Technometrics*, 3(2): 269-280.
- HJELMFELT, A. T., CASSIDY, J. J. (1975) — *Hydrology for Engineers and Planners*. Iowa St. Univ. Press, Ames.
- HOLTAN, H. N. (1970) — Representative and experimental basins as dispersed systems. *IAHS Publ. No. 96*:112-125.
- JAMES, L. D., THOMPSON, W. O. (1970) — Least squares estimation of constants in a linear recession model. *Wat. Resour. Res.*, 6(4):1062-1069.
- KOELBL, O. (1975) — Tangential and asymmetric lens distortion determined by self-calibration. *Bildmessung u. Luftbildwesen*, 1/1975:35-42.
- KOVACS (1975) — Interaction between rivers and ground-water (evaluation of existing mathematical models). *Reunion Int. AIRH/SIA sur les nappes*

- souterraines* (Rapperswil, Jan. 1975), Inst. Hydromech. u. Wasserwirtschaft ETH — Zurich, vol. I: B1-861.
- LANGBEIN, W. B. (1950) — Channel-storage and unit-hydrograph studies. *Trans. Am. Geophys. Un.*, 21:620-627.
- LUSSIGNY, P. T. (1971) — Régressions et corrélations multiples en Hydrologie. *Cahiers ORSTOM, Série Hydrologie*, 8(4):33-58.
- MARQUARDT, D. W. (1963) — An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. *J. Soc. Indust. and Appl. Math.*, 11(2):431-441.
- NUTBROWN, D. A., DOWNING, R. A. (1976) — Normal analysis of the structure of baseflow recession curves. *J. Hydrol.*, 30:327-340.
- OMM (1970) — *Guide des Pratiques Hydrométéorologiques*. Publ. OMM no. 168. Genève.
- PEREIRA, L. S. (1975 a) — Sur la representation graphique des courbes de tarissement. *Rapport de l'Institut Fédéral de Recherches Forestières*, Birmensdorf, Zurich, 32 pp.
- PEREIRA, L. S. (1975 b) — Le calcul du tarissement simple. *Rapport de l'Inst. Féd. Rech. Forest.*, Birmensdorf, Zurich, 30 pp.
- PEREIRA, L. S. (1977) — Études de tarissement sur des petits bassins versants de montagne. *Rapport no. 12/77 de l'Institut d'Hydromech. et d'Aménagement des Eaux de l'Ecole Polytech. Féd. de Zurich*, 265 pp.
- PEREIRA, L. S. (1978) — Estimation des paramètres des lois composées de tarissement par les moindres carrés: méthode et programmes de calcul. *Rapport de l'Inst. Féd. Rech. Forest.*, Birmensdorf, Zurich, 104 pp.
- PEREIRA, L. S. (1983) — Modelos de exaurimento hídrico. Bases teóricas e sua aplicação. *Simpósio Luso-Brasileiro sobre Simulação e Modelação em Hidráulica e Recursos Hídricos*, Nov. 1983, Blumenau, Santa Catarina.
- PEREIRA, L. S. (1984 a) — Modelos de exaurimento. I — Bases teóricas e sua avaliação e aplicação. *An. Inst. Sup. Agron.* 41:
- PEREIRA, L. S. (1984 b) — Modelos de exaurimento. III — Aplicação à caracterização hidrológica de pequenas bacias florestais. *An. Inst. Sup. Agron.* 41:
- PEREIRA, L. S., KELLER, H. M. (1982 a) — Recession characterization of small mountain basins derivation of master recession curves and optimization of recession parameters. In: *Hydrological Aspects of Alpine and High Mountain Areas* (Proceed. Exeter Symposium, July 1982), IAHS Publ. no. 138:243-255.
- PEREIRA, L. S., KELLER, H. M. (1982 b) — Factors affecting recession parameters and flow components in eleven small Pre-Alp basins. In: *Hydrological Aspects of Alpine and High Mountain Areas* (Proceed. Exeter Symposium, July 1982), IAHS Publ. no. 138:233-242.
- RASMUSSEN, W. C., ANDREASEN, G. E. (1959) — Hydrologic budget of the Beaverdam Creek basin, Maryland. *U. S. Geol. Survey Wat-Sup. Pap. 1472*, Washington, 106 pp.

- SINGH, K. P., STALL, J. B. (1971) — Derivation of base flow recession curves and parameters. *Wat. Resour. Res.*, 7(2):292-303.
- SLEPICKA, F. (1970) — Analytical relations in the time frequency of the total river runoff and its genetic components. *J. Hydrol. (N. Z.)*, 9(2):78-88.
- SNYDER, W. M. (1962) — Some possibilities for multivariate analysis in hydrologic studies. *J. Geophys. Res.*, 62(2):721-729.
- STORR, D. (1974) — Relating subsurface water storage to streamflow in a mountainous watershed. *Canadian Meteorol. Res. Rept. 4/74*, Environment Canada, Downsview, Ontario, 14 pp.
- SVOBODA, M. (1970) — The hydrological bulget and computation of ground-water components of river discharge in the North-West part of Police representative basin in Czechoslovakia. *J. Hydrol. (N. Z.)*, 9(2):252-280.
- YATES, P., SNYDER, W. M. (1975) — Predicting recessions through convolution. *Wat. Resour. Res.* 11(3):418-422.

